ESTUDIO CUALITATIVO DE LAS SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON ARGUMENTO CONSTANTE POR TROZOS

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por
Kuo-Shou Chiu
邱 國 壽

Noviembre de 2009

Director de Tesis: Dr. Manuel Pinto Jiménez

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

KUO-SHOU, CHIU

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemática en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 16 de Noviembre de 2009.

Director de Tesis:

Dr. Manuel Pinto ....

Comisión de Evaluación de la Tesis:

Dra. Verónica Poblete ....
Presidente

Dr. Sergei Trofimchuk ....

Dr. Samuel Castillo ....

A mi querida familia.

La vida entregada a Dios
dará más doradas cosechas y
campos maduros que todos los
fatigados planes del alma o
la fuerza de voluntad;
confía en un padre que hará
maravillas con todos y
vive tu vida para Dios.

Agradecimiento

El primer y principal agradecimiento va dirigido a mi director de tesis, Dr. Manuel Pinto por su dedicación, esfuerzo, paciencia y tiempo para brindarme su ayuda, tanto en la investigación realizada como en el desarrollo de esta tesis.

En segundo lugar, agradezco a todos los profesores que me han enseñado durante el estudio de pregrado y postgrado, y a todas las personas que me han ayudado a comprender y mejorar el estudio, especialmente, a corregir las redacciones de tesis.

En tercer lugar, agradezco a la comisión examinadora de la Tesis Dr. Sergei Trofimchuk, Dr. Samuel Castillo y Dra. Verónica Poblete por el tiempo que ocuparon en su lectura y por sus valiosas sugerencias.

También quisiera darle las gracias a la bibliotecaria del departamento de matemática de la universidad nacional de Cheng-Kung de Taiwán. Al Dr. Kenneth James Palmer. Al Dr. Wei-Nian, Li y al Sr. Juan Carlos Machuca que me han ayudado a acceder a los artículos que son difíciles conseguir en Chile.

Quisiera agradecer muy especialmente a mi familia el apoyo prestado, no sólo durante esta tesis, sino desde siempre. Agradezco a Dios por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han ayudado a mi durante la vida, especialmente todo el período de estudio; y a mi madre y a mi padre que me cultivan mi personalidad y especialmente la cualidad de perseverancia, y yo sé que habría estado muy orgulloso de ver como se termina esta etapa de la vida. También quiero agradecer a mi esposa Mei-Lien por su apoyo incondicional, a mi hermano mayor Kuo-Cheng por su preocupación y ánimo, a mi cuñada Meng-Chi por su ayuda en inglés y a mi hijo Chun-Ru por su cariño.

Finalmente, quisiera agradecer al Dr. Rolando Pomareda por las informaciones y ayudas sobre los exámenes de calificaciones y preocupación sobre el estudio, y al Dr. Fernando Córdova por su confianza dándome la posibilidad de exponer los resultados de tesis en el Octavo y Noveno Encuentro Chileno de Biomatemática en los años 2008 y 2009 y en el LXXVIII Encuentro de la Sociedad de Matemáticas de Chile en el año 2008; a la Facultad de Ciencias de Universidad de Chile me otorgaron las becas de aranceles y al proyecto de Fondecyt 1080034 por apoyarme.

A todos ellos, muchas gracias.

Índice general

Resumen

Esta tesis presenta un estudio general de las soluciones de una clase amplia de ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado.

En el primer capítulo, se estudia la teoría de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado, nos preocupamos de la definición del concepto de solución, pasando por las problemáticas de existencia, unicidad de soluciones y dependencia continua de las soluciones respecto a las condiciones iniciales. Damos algunas representaciones y métodos para la resolución explícita e implícita de ecuaciones. Hacemos un estudio de distintos tipos de desigualdades de Gronwall en este tipo de ecuaciones diferenciales.

En el segundo capítulo, se estudia la existencia de soluciones periódicas de dos tipos de ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado: los sistemas tanto semi-lineales como semi-lineales perturbados en el caso en que la parte lineal de la ecuación no admite soluciones periódicas no triviales. Para este efecto, dos operadores van a ser construidos y se muestra que si el operador tiene punto fijo, entonces la ecuación diferencial con argumento constante por trozos de tipo generalizado tiene una solución periódica. Según las distintas situaciones, las demostraciones de los resultados utilizan los teoremas del punto fijo de Banach, Brouwer, Schauder, Schaefer y Krasnoselskii. Luego, se estudia la posibilidad de introducir las aplicaciones de ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado en el mundo real no sólo un argumento con retardo, sino también avances, en el cual se le llama el Modelo anticipatorio.

Abstract

This thesis presents a general survey of the solutions to a broad class of differential equations with piecewise constant argument of generalized type.

In the first chapter, we study the theory of existence and uniqueness of solutions of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type, we concern about the definition of solution through the problems of existence, uniqueness of solutions and continuous dependence of solutions on initial conditions. We give some representations and methods for solving explicit and implicit equations. We study different types of Gronwall inequalities in this type of differential equations.

In the second chapter, we study the existence of periodic solutions of two types of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type: semi-linear and perturbed semi-linear systems in the case where the linear part of the equation does not have any nontrivial periodic solution. To this effect, two operators will be constructed and it will be shown that if the operator has a fixed point, then differential equations with piecewise constant arguments of generalized type have a periodic solution. According to different situations, the results need the use of fixed point theorems as Banach, Brouwer, Schauder, Schaefer and Krasnoselskii. Finally, we studied the possibility of introducing the application of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type in real world not only with a retarded argument, but also with advances, which is called an anticipatory model.

Introducción

La teoría general y los resultados básicos para las Ecuaciones Diferenciales Funcionales (FDE) han sido investigados a fondo, en tanto los trabajos de esta área siguen creciendo rápidamente. Sin embargo, todavía hay necesidad de extender la teoría de las FDE para argumentos discontinuos. Esta tarea es de gran interés aplicado, ya que las FDE con retraso proporcionan un modelo matemático para un sistema físico o biológico en el cuál la tasa de cambio del sistema depende de su historia pasada. Entre las FDE con el argumento discontinuo, A.D. Myshkis [34] propuso estudiar las ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos (differential equations with piecewise constant arguments): DEPCA.

La teoría de DEPCA de tipo:

$$u'(t) = f(t, u(t), u(\gamma(t))), \text{ con } \gamma(t) = [t], \ \gamma(t) = 2\left[\frac{t+1}{2}\right], \tag{1}$$

donde $[\cdot]$ denota las funciones de parte entera (denotar al mayor número entero de todos aquellos números enteros que son menores o iguales al número real), fue iniciado en 1983 y 1984 con los trabajos de S. M. Shah y J. Wiener [47], y K. L. Cooke y J. Wiener [13] y ha sido desarrollado por muchos autores [1]-[8],[12]-[21],[35]-[37],[40],[45],[47],[51]-[55],[58]-[61]. Las DEPCAs son ecuaciones híbridas, pues combinan las características de sistemas continuos y de ecuaciones discretas. Diversas aplicaciones de la teoría de DEPCA se discuten en [3], [12] y [61].

La solución de una DEPCA es definida como una función continua y seccionadamente lisa (i.e. la función $f(x)$ y su primera derivada es continua en cualquier intervalo finito, excepto posiblemente para un número finito de discontinuidades de primer orden). Se relacionan tanto con sistemas impulsivos como con ecuaciones en diferencias discretas. Estas ecuaciones tienen la estructura de sistemas dinámicos continuos dentro de intervalos de cierta longitud. La continuidad de una solución en un punto que une dos intervalos cualquiera consecutivos implica relaciones de recurrencia para la solución en tales puntos. De ahí, las soluciones son determinadas por un juego finito de datos iniciales, más bien que por una función inicial como en el caso de FDE general. Las ecuaciones son así similares en estructura a ésas encontradas en ciertos modelos "secuencialmente continuos" según lo tratado por S. Busenberg and K. L. Cooke [12]. Los héchos anteriores demuestran que todos los tipos de DEPCA comparten características similares. Primero que todo, es natural plantear el problema de valores iniciales para tales ecuaciones no en un intervalo sino en un número de puntos individuales. En segundo lugar, las soluciones laterales existen para todos los tipos de DEPCA.

Por lo tanto, en cada DEPCA subyace un sistema dinámico gobernado por una ecuación en diferencias de un argumento discreto que describe su solución [13]-[14],[47],[58],[61] y unas relaciones discretas de argumento desviado que describen su estabilidad [7],[14],[59], oscilación y propiedades periódicas [1],[2],[8],[14],[17],[60], por la cual, DEPCA es intrínsecamente más cercano a una ecuación en diferencias que a una ecuación diferencial.

No es sorprendente entonces, que los recientes trabajos sobre DEPCA han causado una nueva oleada en el estudio de ecuaciones de diferencias. De interés significativo es la exploración de ecuaciones diferenciales ordinarias(ODE) con argumento constante por trozos.

Argumentos constantes por trozos del tipo alternadamente avanzado y retardado fue iniciado en 1986 y 1987 con los trabajos de A. R. Aftabizadeh y J. Wiener [1], y K. L. Cooke y J. Wiener [14], donde el método clásico de la investigación de DEPCA se basó en la reducción a las ecuaciones discretas. Por lo tanto, las propiedades cualitativas de las soluciones que comienzan en valores iniciales no-enteros no pueden ser logradas. En particular, no se puede investigar el problema de la estabilidad por completo, ya que sólo es permitido considerar elementos de un conjunto numerable como valores iniciales.

Sean $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ los conjuntos de los números enteros, naturales y reales, respectivamente. Denote por $|\cdot|$ cualquiera norma en $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Fijemos dos sucesiones de números reales t_i, ξ_i, $i \in \mathbb{Z}$, tales que $t_i < t_{i+1}$, $t_i \leqslant \xi_i \leqslant t_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, $t_i \rightarrow \pm\infty$ si $i \rightarrow \pm\infty$. Consideremos la función $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que γ restringida al intervalo $I_i = [t_i,\ t_{i+1})$, sea constante igual a ξ_i : $\gamma|_{I_i} = \xi_i$ y consideramos la DEPCA (1) con esta general γ. En este caso, la llamaremos la DEPCA de tipo generalizado, brevemente DEPCAG. En efecto, $\gamma(t) = [t]$ corresponde a $\xi_i = t_i = i \in \mathbb{Z}$, y $\gamma(t) = p[\frac{t+l}{p}]$, $0 \leqslant l < p$, $l, p \in \mathbb{Z}_+$ corresponde a $t_i = pi - l, \xi_i = pi, i \in \mathbb{Z}$. Un caso particular, $p = 2$, $l = 1$, es el argumento desviado considerado por Cooke y Wiener [14]. En el caso especial de DEPCAG, cuando $\xi_i = t_i, i \in \mathbb{Z}$ sólo es el caso retardado, es considerado por [4]. En otro caso extremo sólo es el caso avanzado, $\xi_i = t_{i+1}$. Pero nos interesa más en este trabajo de tesis es el caso mixto, donde hay caso avanzado y retardado, en lo cual Cooke y Wiener [14] le llamaron DEPCA alternadamente avanzado y retardado, donde $I_i^+ = [t_i, \xi_i]$ es el intervalo avanzado y $I_i^- = [\xi_i, t_{i+1})$ es el intervalo retardado.

M. U. Akhmet [4] (2007) comienza el estudio de DEPCAG en el caso $\gamma(t) = t_i$, $t \in I_i$ una representación integral de la solución fue propuesta como otro enfoque para afrontar los retos se ha mencionado anteriormente.

Como DEPCAG es un tema nuevo e interesante que se comenzó el año 2007, la bibliografía es escasa y aún hay muchos aspectos por estudiar. Por ejemplo, diversas y nuevas técnicas han resultado -a posteriori- como consecuencia de los métodos para estudiar la representación de las soluciones de DEPCAG.

La integración o una solución de una DEPCA, según lo propuesto por sus fundadores [13],[14],[47],[58],[61], se basa en la reducción de la DEPCA a las ecuaciones discretas. Vamos a utilizar el enfoque propuesto en [4]-[8], basado en la construcción de una ecuación integral equivalente, también observando claramente la influencia de la parte discreta. Consideramos que el valor inicial del problema es un número real arbitrario, no necesariamente uno de los momentos de t_i.

Nos damos cuenta la importancia sobre la división del intervalo $I_i = [t_i, t_{i+1})$ en dos partes, en $I_i^+ = [t_i, \xi_i]$ el intervalo avanzado y en $I_i^- = [\xi_i, t_{i+1})$ el intervalo retardado. Los intervalos avanzados y retardados desempeñan un papel importante para estudiar el comportamiento de las soluciones de DEPCAG (el operador integral en el intervalo avanzado es del tipo Fredholm y en el intervalo retardado es del tipo Volterra).

En esta tesis, combinamos las ideas de estimar la ecuación discreta y ordinaria, encontrando una relación de recurrencia para estudiar el acotamiento de soluciones. Por tal técnica, obtenemos dos desigualdades del tipo Gronwall en un contexto DEPCAG, las cuáles son aplicables para estudiar las propiedades cualitativas de las soluciones de DEPCAG.

Los resultados sobre la existencia y unicidad de soluciones de DEPCAG son mejores que los de Akhmet [3]-[8], debido a que Akhmet tuvo muchas dificultades y pidió muchas condiciones fuertes por no tener las desigualdades de Gronwall en el contexto DEPCAG.

La existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias se ha estudiado ampliamente con diferentes métodos en la teoría y en la práctica (por ejemplo, ver [23],[28]-[31],[33],[39],[48],[41],[42],[56],[62],[63] y las referencias que allí se cita), pero hay pocos artículos considerando desviados argumentos discontinuos en las ecuaciones diferenciales perturbadas, especialmente DEPCAG. Recientemente, usando teoría de grado, Genqiang Wang et al. [51]-[55], reducen el problema de existencia de solución de una DEPCA a la investigación de la construcción de una ecuación integral equivalente, y estudian varios sistemas periódicos interesantes de DEPCA con varios argumentos retardados. Pero, en estos artículos no se dieron cuenta de la importancia ni pidieron la condicion (ω, p) (Ver Seccion 2.2). Por lo tanto, los resultados no siempre son ciertos, salvo la existencia de soluciones periódicas con períodos enteros.

En 2008, fecha en la cuál yo ya estaba trabajando mi tesis hace un año, Akhmet [8] aplicó el método del parámetro pequeño, y obtuvo algunas condiciones fuertes para la existencia y unicidad de la solución para el siguiente sistema con argumento retardado constante por trozos del tipo generalizado,

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t) + \mu g(t, x(t), x(\gamma(t)), \mu), \tag{2}$$

donde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son funciones continuas ω-periódicas, $\gamma(t) = t_i$ si $t_i \le t < t_{i+1}$, y μ es un parámetro que pertenecen a un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con $0 \in I$.

Estos son los únicos resultados que parecen existir.

El objetivo central de esta tesis es presentar un estudio general sobre la existencia de soluciones periódicas para una clase de ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado. Los sistemas de la parte lineal de la ecuación no admiten soluciones periódicas no triviales. Para este efecto, dos operadores van a ser construidos. Para resolver el problema de la existencia de soluciones periódicas para sistemas semilineales y sistemas semilineales perturbados en un contexto DEPCAG, utilizaremos un método basado en la construcción de una ecuación integral equivalente. Luego encontraremos un punto fijo de un operador asociado a tal ecuación integral.

Nos preocupamos de la definición del concepto de solución, pasando por las problemáticas de existencia y unicidad de soluciones y dependencia continua de las soluciones respecto a las condiciones iniciales, damos algunas representaciones y métodos para la resolución explícita e implícita de ecuaciones, hacemos un estudio de distintos tipos de desigualdades de Gronwall en DEPCAG, y un análisis de existencia de soluciones. Otra finalidad es estudiar la posibilidad de introducir las aplicaciones de DEPCAG en el mundo real no sólo con un argumento retardado, sino también avances, en el cual se le llama el modelo anticipatorio. En nuestra modelación de la dinámica de la población, la anticipación significa un tipo de predicción cualitativa enriquecida por el momento activo de las decisiones adoptadas en el tiempo real presente. Luego construyen dos modelos que ejemplifican algunas aplicaciones de la DEPCAG en dinámica de población y supervivencia de glóbulos rojos.

Los resultados expuestos son originales. Para los resultados que no son nuestros se indica la citación de artículos o libros correspondientes.

En el capítulo I, se introduce la teoría de ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado, siguiendo las definiciones de Akhmet [5].

En la sección 1.1, introducimos varias definiciones para estudiar la compacidad en el espacio de las funciones continuas y el método del punto fijo.

En la sección 1.2, utilizamos unos ejemplos particulares de argumentos desviados, con la finalidad de dar una idea de las funciones constantes por trozos del tipo generalizado $\gamma(t)$ y para definir las soluciones de las ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado.

En la sección 1.3, estudiamos la fórmula de variación de parámetros para las ecuaciones diferenciales semi-lineales con argumento constante por trozos de tipo generalizado mediante la matriz fundamental de soluciones de sistema homogéneo. Se observa que la fórmula de variación de parámetros se expresa como la suma de varias integrales dependiendo de los argumentos desviados.

En la sección 1.4, veremos dos desigualdades de tipo Gronwall en un contexto DEPCAG que sean más aplicables para estudiar las propiedades cualitativas de las soluciones de ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado.

En la sección 1.5, se estudia la existencia y unicidad de soluciones, es decir, examinar en qué condiciones una ecuación diferencial con argumento constante por trozos de tipo generalizado tiene soluciones y cómo las soluciones están bien determinadas, sin resolver la ecuación diferencial analíticamente. Una condición llamada "condición de Lipschitz" es utilizada. Hacemos uso de aproximaciones sucesivas para obtener la existencia y unicidad de soluciones locales si la condición de Lipschitz global se cumple. Entonces, cuando la condición de Lipschitz no es satisfecha, usamos el segundo Teorema del punto fijo de Schauder para obtener la existencia de soluciones, en cuyo caso, la unicidad no está garantizada. Luego de determinar las estructuras de la existencia de intervalos máximos de soluciones se muestra (bajo ciertas condiciones) que las soluciones son continuas con respecto a las condiciones iniciales.

En el capítulo II se estudia e investigan varias condiciones suficientes para obtener la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales semilineales y semilineales perturbados con argumento constante por trozos del tipo generalizado, donde el correspondiente sistema lineal homogéneo no admite soluciones periódicas no triviales e introducir el modelo anticipatorio para dar el sentido de las aplicaciones de la DEPCAG en el mundo real.

En la sección 2.1, se introduce la terminología, las hipótesis y las ecuaciones que estudiaremos en este Capítulo.

En la sección 2.2, veremos una condición necesaria para que la DEPCAG tenga una solución periódica y observamos que esta condición es una relación discreta de argumentos desviados que desplaza periódicamente un intervalo a un intervalo posterior con cierta propiedad.

En las secciones 2.3 y 2.4, suponemos que el sistema homogéneo no tiene ninguna solución periódica no trivial, se establecen dos operadores para estudiar la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado tanto semi-lineales como semi-lineales perturbados. En la sección 2.3, se estudia un operador llamado operador de Poincaré en el cual se supone la condición de Lipschitz para la función perturbada o la unicidad de la solución de DEPCAG. Entonces, la búsqueda de soluciones periódicas es equivalente a resolver un problema de frontera. Este tipo de problemas es de gran importancia en la práctica. En la sección 2.4, se construye una matriz de Green utilizando la matriz fundamental de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, luego se define un operador llamado operador de Green que es menos restrictivo que el operador de Poincaré, en el cual no se supone la condición de Lipschitz para la función perturbada ni la unicidad de solución de las DEPCAGs. Finalmente damos algunos resultados básicos relativos a la búsqueda de soluciones periódicas, los cuales indican que es conveniente utilizar un enfoque del punto fijo.

En las secciones 2.5 y 2.6, nos concentramos en general, en las ecuaciones diferenciales semi-lineales y semi-lineales perturbadas con argumento constante por trozos de tipo generalizado. En el proceso, utilizamos el operador de Poincaré y de Green. El problema de la existencia de una solución periódica de la DEPCAG puede ser reducido al problema de la existencia de los puntos fijos del operador de Poincaré o el operador de Green. Entonces, para ecuaciones diferenciales generales n-dimensionales con argumento constante por trozos de tipo generalizado, aplicamos los teoremas del punto fijo de Banach, Brouwer, Schauder, Schaefer y Krasnoselskii bajo diferentes condiciones para obtener puntos fijos, y por lo tanto, soluciones periódicas.

Finalmente, en la sección 2.7, se muestra el uso de las ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos del tipo generalizado en las aplicaciones de la naturaleza. Primero veremos cómo se interpretan los parámetros de avances y de retardos, en las cuales se produce una nueva idea de modelo llamado modelo anticipatorio. Los sistemas anticipatorios han empezado a ser considerado en el contexto de nuestra investigación para obtener criterios de existencia de soluciones periódicas para modelos aplicados.

Capítulo 1

Existencia de Soluciones de Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante por Trozos del Tipo Generalizado

Este capítulo es introductorio y pretende motivar el estudio y la construcción de una teoría de ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos del tipo generalizado, que llamaremos brevemente DEPCAG. Primero veremos teoremas de punto fijo que utilizaremos de ahora en adelante. Luego presentamos algunos resultados sobre la representación de soluciones: una fórmula de variación de parámetros, acotación de soluciones: lema de desigualdades de Gronwall en un contexto DEPCAG. Finalmente, se presenta una condición suficiente para asegurar la existencia y unicidad de soluciones de DEPCAG y dependencia continua de las soluciones respecto a las condiciones iniciales.

1.1. Espacio de las Funciones Continuas y Teoremas del Punto Fijo

Consideremos A y B dos espacios normados y denotemos por $C[A, B]$ al conjunto de todas las funciones continuas de A en B. En particular, el conjunto $C[I, \mathbb{R}^n]$, donde I es un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por un escalar, $C[I, \mathbb{R}^n]$ es un espacio vectorial. Además, con la norma $\|\phi\| = \max\{|\phi(t)| : t \in I\}$ es un espacio de Banach separable, donde $|\cdot|$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^n$. En Análisis es bastante común procurar caracterizar los conjuntos compactos en un espacio de funciones dado. En el caso concreto del espacio de las funciones continuas, esta caracterización viene dada por el teorema de Arzelà-Ascoli. Antes de enunciar el teorema necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 1.1.
Sea A un subconjunto de $C[I, \mathbb{R}^n]$. Se dice que A es un conjunto uniformemente acotado, si existe una constante $K > 0$ tal que $\|\varphi\| \leqslant K$, para todo $\varphi \in A$.

Definición 1.2.

Sea A un subconjunto de $C[I,\mathbb{R}^n]$. Se dice que A es un conjunto equicontinuo, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|t-s| < \delta$ implica que $|\varphi(t)-\varphi(s)| < \varepsilon$, para cualquier $\varphi \in A$.

Teorema 1.1. (Arzelà -Ascoli 1883)

Un conjunto $A \subset C[I,\mathbb{R}^n]$ es un subconjunto relativamente compacto de $C[I,\mathbb{R}^n]$ si y sólo si A es uniformemente acotado y equicontinuo en I.

El teorema de Arzelà-Ascoli es una de las herramientas más poderosas que hay para verificar si una familia de funciones continuas definidas de un espacio métrico en un espacio normado es compacta. En particular, del teorema de Arzelà-Ascoli, se sigue que toda sucesión $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ de un conjunto A equicontinuo y uniformemente acotado de $C[I,\mathbb{R}^n]$, posee una subsucesión uniformemente convergente sobre I.

Veamos en lo que sigue algunos teoremas del punto fijo. Sea $T : E \longrightarrow E$ una aplicación en un conjunto E. Se dice que $x \in E$ es un punto fijo de T si $T(x) = x$.

Definición 1.3.

Sea (E,d) un espacio métrico, diremos que un operador $T : E \longrightarrow E$ es contractivo ó es una contracción, si existe una constante $L \in (0,1)$, tal que $d(Tx,Ty) \leqslant Ld(x,y)$, para todo x, y en E.

Teorema 1.2. (Banach 1922, [10], [46])

Sean (E,d) un espacio métrico completo y $T : E \longrightarrow E$ es una contracción. Entonces T admite un único punto fijo en E.

Observemos que no siempre es posible garantizar la contractividad de un operador dado, por lo que se hace necesario recurrir a teoremas del punto fijo más generales que el anterior. Así, tenemos por ejemplo el siguiente:

Teorema 1.3. (Brouwer 1910, [11], [46])

Sea $T : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ un operador continuo, donde $\mathbb{B}$ es una bola cerrada de $\mathbb{R}^n$. Entonces T admite un punto fijo en $\mathbb{B}$.

Su generalización a espacios normados infinito dimensionales se debe a Schauder .

Definición 1.4.

Sean X, Y dos espacios métricos. Se dice que un operador $T : X \longrightarrow Y$ es compacto si la clausura de T(B) es un subconjunto compacto de Y para todo subconjunto acotado B de X. Se dice que un operador T es completamente continuo, si T es continuo y compacto.

Una formulación equivalente es la siguiente: T es compacto si y sólo si cada sucesión acotada $\{x_n\}$ en X tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que Tx_{n_k} converge en Y.

Teorema 1.4. (Schauder 1930, [44], [46])

Sea S un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach E. Supongamos que $T : S \to S$ es completamente continuo. Entonces T admite un punto fijo en S.

A continuación, veamos un teorema del punto fijo semejante al de Schauder.

Teorema 1.5. (Schaefer 1955, [43], [46])

Sea E un espacio de Banach y $T : E \to E$ completamente continuo. Supongamos que

$$A := \{y \in E : \ y = \lambda Ty \ para \ algun \ \lambda \in (0,1)\}$$

es acotado. Entonces T tiene por lo menos un punto fijo en E.

Nótese que tanto el teorema del punto fijo de Schauder como el de Schaefer, necesitan un operador completamente continuo, la notable diferencia entre ambos está en que Schauder pide que el subconjunto S se aplique en si mismo (S sea subconjunto invariante por el operador) y Shaefer aplica el espacio total sobre sí mismo y pide que el conjunto A que definimos en Teorema 1.5 sea acotado (condición de acotación), en este caso no es necesario construir un subconjunto invariante para poder aplicarlo. De hecho, en la práctica las dos condiciones son bastante difíciles de obtener, pero, no es difícil observar que si el subconjunto es invariante por el operador, siempre asegura la condición de acotación.

A continuación, veamos un teorema del punto fijo que son combinaciones de los teoremas del punto fijo de Banach y Schauder.

Teorema 1.6. (Krasnoselskii 1958, [46])

Sea S un subconjunto no vacío, cerrado, acotado, convexo de un espacio de Banach E. Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ mapean S en E y que

i) $\mathcal{A}x + \mathcal{B}y \in S$ para todo $x, y \in S$.

ii) $\mathcal{A}$ es completamente continuo.

iii) $\mathcal{B}$ es contractivo.

Entonces, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ tiene por lo menos un punto fijo en S.

El teorema del punto fijo de Krasnoselskii resulta de combinar teoremas del punto fijo de Schauder y Banach. En cierto sentido, podemos interpretar esto de la siguiente manera: Si un operador completamente continuo tiene la propiedad del punto fijo, se suma con una pequeña perturbación, entonces mantiene la misma propiedad. La suma de dos operadores se ve claramente en varios tipos de ecuaciones integrales, y se han discutido ampliamente en muchos artículos [38].

1.2. Ecuación, Definición de Solución e Hipótesis

Sean $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ los conjuntos de los números enteros, naturales y reales, respectivamente. Fijemos dos sucesiones de números reales t_i, ξ_i, $i \in \mathbb{Z}$, tales que $t_i < t_{i+1}$, $t_i \leqslant \xi_i \leqslant t_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, con $t_i \to \pm\infty$ si $i \to \pm\infty$.

El tipo de ecuación que presentamos en este Capítulo son las ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado (DEPCAG):

$$u'(t) = f(t, u(t), u(\gamma(t))), \tag{1.2.1}$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua, y $\gamma(t)$ es una función constante por trozos definida por

$$\gamma(t) = \xi_i, \text{ si } t \in [t_i, t_{i+1}), \ i \in \mathbb{Z}. \tag{1.2.2}$$

Veremos ejemplos de las funciones constantes por trozos $\gamma(t)$:

1. Sea $\xi_i = t_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Dos casos particulares son:
   a) $[t]$, la parte entera de t.
   b) $t_i = i + \frac{(-1)^i}{3}$, $i \in \mathbb{Z}$, el argumento desviado considerado por Akhmet (2008)[8].

2. Sea $t_{i+1} = \xi_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Un caso particular, $[t+1]$, la parte entera de $t+1$.

3. Sea $t_{i+1} - \xi_i = \xi_i - t_i = d_0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, tenemos $t_i = t_0 + 2id_0$, $\xi_i = t_0 + (2i+1)\,d_0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, esto es $I_i = [t_i, t_{i+1}) = [t_0 + 2id_0, t_0 + 2\,(i+1)\,d_0)\,, \gamma(t)|_{I_i} = t_0 + (2i+1)\,d_0$.
   Dos casos particulares son:
   a) $\left[t + \frac{1}{2}\right]$, donde $t_i = i - \frac{1}{2}$ y $\xi_i = i$, es el argumento desviado considerado por Aftabizadeh y Wiener (1986)[1].
   b) $2\left[\frac{t+1}{2}\right]$, donde $t_i = 2i - 1$ y $\xi_i = 2i$, es el argumento desviado considerado por Cooke y Wiener (1987)[14].

4. Sea $I_i = [\alpha_i - \beta, \alpha_{i+1} - \beta)$, y $\gamma(t)|_{I_i} = \alpha_i + \alpha$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, donde, $\alpha_{i+1} - \alpha_i > \alpha + \beta$, $\beta > \alpha$ y $\beta > 0$. Un caso particular es el argumento desviado considerado por Aftabizadeh y Wiener (1988)[59] : $\gamma(t) = m\left[\frac{t+l}{m}\right]$, $l < m$, $t_i = im - l$, $\xi_i = im$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

5. Sea $t_i = \alpha i$, $t_{i+1} = \alpha(i+1) - \alpha_0$, $\xi_i = \alpha i + \beta_0$, $\xi_{i+1} = 2\alpha(i+1) - \alpha_0 + \beta_1$, $i \in 2\mathbb{Z}$, donde, $\alpha, \alpha_0, \beta_0, \beta_1 > 0$, $2\alpha > \alpha_0 + \beta_0$, $\alpha_0 > \beta_1$.

La DEPCAG (1.2.1) es de considerable interés: en cada intervalo $[t_i, t_{i+1})$ es de tipo alternadamente avanzado y retardado: tipo avanzado en $[t_i, \xi_i)$ y del tipo retardado en (ξ_i, t_{i+1}).

Las ecuaciones diferenciales de tipo alternadamente avanzado y retardado con argumento constante por trozos del tipo generalizado aparecen en muchos problemas de economía, biología y física, porque este tipo de ecuaciones es más adecuado que las ecuaciones diferenciales con retardos para un tratamiento adecuado de la dinámica de los fenómenos (ver Sección 2.7.1). El concepto de retardos está relacionado con una memoria del sistema, los últimos acontecimientos son importantes para el comportamiento de efecto presente y el concepto de avances se refiere a unos posibles eventos futuros que pueden ser conocidos en el actual momento que podrían ser útiles para la toma de decisiones. El estudio de diversos problemas que involucran las ecuaciones diferenciales de tipo alternadamente avanzado y retardado con argumento constante por trozos se puede encontrar en muchas obras, por ejemplos [1],[14],[16]-[21],[40],[47],[59],[61].

Se puede ver fácilmente que la ecuación (1.2.1) tiene la forma de una ecuación diferencial ordinaria

$$u'(t) = f(t, u(t), u(\xi_i)), \ t \in [t_i, t_{i+1}), \ i \in \mathbb{Z}.$$

Es decir, este sistema tiene la estructura de un sistema dinámico continuo dentro de los intervalos $[t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$.

Supongamos que las soluciones de la ecuación (1.2.1) son funciones continuas. Pero $\gamma(t)$ la función de desviación es discontinua. Por lo tanto, generalmente el lado derecho de (1.2.1) tiene discontinuidades en los momentos t_i, $i \in \mathbb{Z}$. En resumen, consideramos las soluciones de la ecuación como funciones, que son continuas en $\mathbb{R}$ y continuamente diferenciables dentro de los intervalos $[t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$.

Utilizamos la definición siguiente, que es una versión modificada de la definición original dada en [13], [47] y [58], para nuestro caso general.

Definición 1.

Una función continua $u(t)$ es una solución de la DEPCAG:

i) *La derivada de $u(t)$ existe en cada punto $t \in \mathbb{R}$ con la posible excepción de los puntos $t_i, i \in \mathbb{Z}$, donde existen las derivadas laterales;*

ii) *u(t) satisface la ecuación* (1.2.1) *en cada intervalo $(t_i, t_{i+1}), i \in \mathbb{Z}$, y también con la derivada derecha de $u(t)$ en los puntos $t_i, i \in \mathbb{Z}$.*

Dado $\tau \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de encontrar una solución $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de (1.2.1) tal que $u(\tau) = u_0$, será denotado por

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t), u(\gamma(t))) \\ u(\tau) = u_0, \end{cases}$$

y se llamará *Problema de valor inicial*, *Problema de Cauchy* o simplemente P.V.I.

Veremos dos ejemplos clásicos de Problema de valor inicial de la DEPCA.

Ejemplo 1.

En 1989, J. Wiener y K. L. Cooke [60] consideran el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + Bu\left(\left[t + \frac{1}{2}\right]\right) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

donde, $u_0 \in \mathbb{R}^n$, A, B son matrices $n \times n$, y A es una matriz invertible.
Sean $\gamma(t) = \left[t + \frac{1}{2}\right]$, $M(t) = e^{At} + \left(e^{At} - I\right) A^{-1}B$, $M_{-1/2} = M\left(-\frac{1}{2}\right)$, $M_{1/2} = M\left(\frac{1}{2}\right)$, y $M_0 = M_{-1/2}^{-1} M_{1/2}$.

Si las matrices $M_{1/2}$ y $M_{-1/2}$ son invertibles, entonces el problema (1.2.3) tiene una única solución en $\mathbb{R}$:

$$u(t) = M(t-\gamma(t))M_0^{\left[t+\frac{1}{2}\right]}u_0.$$

Ejemplo 2.

En 1987, K. L. Cooke y J. Wiener [14] consideran el problema escalar de valor inicial:

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) + bu\left(2\left[\frac{t+1}{2}\right]\right) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.2.4}$$

donde, $a \neq 0$, y $[\cdot]$ denota la función parte entera.
Sean $\gamma(t) = 2\left[\frac{t+1}{2}\right]$, $\lambda(t) = e^{at} + \left(e^{at}-1\right)\frac{b}{a}$ y $\lambda_1 = \lambda(1)$, $\lambda_{-1} = \lambda(-1)$. Problema (1.2.4) tiene una única solución en $\mathbb{R}$,

$$u(t) = u_0\lambda(t-\gamma(t))\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{-1}}\right)^{\left[\frac{t+1}{2}\right]},$$

donde, $\lambda_1, \lambda_{-1} \neq 0$.

Las suposiciones siguientes para la ecuación (1.2.1) serán necesarias en este Capítulo:

(C) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua.

(G) Sean $\eta_i : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ $i = 1,2$ dos funciones localmente integrables tales que

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \leqslant \eta_1(t)\,|x_1-x_2| + \eta_2(t)\,|y_1-y_2|, \tag{1.2.5}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}^n$.
Supondremos además que $f(t,0,0) = 0$ y

$$\begin{aligned} v_i^+ &= \int_{t_i}^{\xi_i} (\eta_1(s)+\eta_2(s))\,ds \leqslant v < 1, \\ v_i^- &= \int_{\xi_i}^{t_{i+1}} (\eta_1(s)+\eta_2(s))\,ds \leqslant v < 1,\ i \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

(LU) La función f satisface la condición de Lipschitz, esto es, existe una constante positiva L tal que

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \leqslant L(|x_1-x_2| + |y_1-y_2|), \tag{1.2.7}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}^n$ y $f(t,0,0) = 0$.
Supondremos además que $2L(\xi_i - t_i) \leq 2L\rho_1 < 1$, $2L(t_{i+1} - \xi_i) \leq 2L\rho_2 < 1$, $i \in \mathbb{Z}$, donde, $\rho_1 := \sup\limits_{i\in\mathbb{Z}}(\xi_i - t_i)$ y $\rho_2 := \sup\limits_{i\in\mathbb{Z}}(t_{i+1} - \xi_i)$.

1.3. Fórmula de Variación de Parámetros

Esta sección se presentan las principales ideas del método de variación de parámetros aplicado a los sistemas de ecuaciones diferenciales con argumentos constantes por trozos de tipo generalizado (DEPCAG). La discusión del método de variación de parámetros en DEPCAG generaliza las fórmulas de la variación de parámetros de ecuaciones diferenciales ordinarias.

A continuación, veremos aplicaciones del método de variación de parámetros a varios resultados relativos a las propiedades cualitativas de los sistemas con DEPCAG. El resto de las secciones y el segundo capítulo estarán dedicados a las extensiones, las generalizaciones y las mejoras de estas ideas a otros resultados.

Consideramos la ecuación:

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t, y(t), y(\gamma(t))), \tag{1.3.1}$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son funciones continuas y

$$\gamma(t) = \xi_i, \text{ si } t \in [t_i, t_{i+1}), i \in \mathbb{Z}.$$

En esta sección, nuestra intención es hallar una ecuación integral para las soluciones de (1.3.1), en términos de las soluciones del sistema lineal homogéneo $x'(t) = A(t)x(t)$. El método que emplearemos para nuestro propósito es el método de variación de parámetros.

Sea $\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, una matriz fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$, como es usual denotamos por $\Phi(t,s)$ a $\Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ cuando $t, s \in \mathbb{R}$.

Se define $i : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $t \to i(t)$, $i(t)$ es el índice del intervalo donde pertenece t. Por ejemplo, si $t_k = 2\pi k - \pi$, $\xi_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces, $i(2\pi j - 3) = j$, $j \in \mathbb{Z}$. En efecto, $2\pi j - 3$ está en el único intervalo $I_j = [2\pi j - \pi, 2\pi j + \pi)$.

Primero, estudiamos una fórmula de variación de parámetros para la DEPCAG.

Teorema 1.3.1. *(Fórmula de variación de parámetros)*

Sea $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. La función $y(t) = y(t, \tau, \xi)$ es una solución de la DEPCAG (1.3.1) *en el sentido de Definición 1 si y sólo si es una solución, en $\mathbb{R}$, de la ecuación integral*

$$y(t) = \Phi(t,\tau)\xi + \int_\tau^t \Phi(t,s)f(s, y(s), y(\gamma(s)))ds, \tag{1.3.2}$$

tal que $y(\tau) = \xi$, donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Consideramos el primer caso $\tau \leqslant t$.

Sea $y(t)$ una solución de la DEPCAG (1.3.1) en $[\tau, \infty)$ tal que $y(\tau) = \xi$. Si en (1.3.2) hacemos $t = \tau$, la igualdad es inmediata. Sea $t, \tau \in I_i = [t_i, t_{i+1})$, como la DEPCAG (1.3.1) para cada I_i, $i \in \mathbb{Z}$, es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, podemos aplicar la fórmula de variación de parámetros usual a la ecuación diferencial ordinaria, tenemos

$$y(t) = \Phi(t,t_i)y(t_i) + \int_{t_i}^t \Phi(t,s)f(s, y(s), y(\xi_i))ds\,, \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}.$$

Por la continuidad de la solución $y(t)$, hagamos $t \to t_{i+1}$ y se deduce que $y(t)$ tiende a la expresión

$$y(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1}, t_i)y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s)f(s, y(s), y(\xi_i))ds, \text{ para todo } i \in \{i(\tau) + j\}_{j\in\mathbb{N}}.$$

Es análogo para el primer intervalo $[\tau, t_{i(\tau)+1})$,

$$y(t_{i(\tau)+1}) = \Phi(t_{i(\tau)+1}, \tau)\xi + \int_{\tau}^{t_{i(\tau)+1}} \Phi(t_{i(\tau)+1}, s)f(s, y(s), y(\xi_{i(\tau)}))ds.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
y(t) =&\Phi(t, t_i)y(t_i) + \int_{t_i}^{t} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\xi_i))ds\,, \quad t_i \leqslant t < t_{i+1} \\
=&\Phi(t, t_i)\left[\Phi(t_i, t_{i-1})y(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, s)f(s, y(s), y(\xi_{i-1}))ds\right] \\
&+ \int_{t_i}^{t} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\xi_i))ds \\
=&\Phi(t, t_{i-1})y(t_{i-1}) + \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\xi_{i-1}))ds\right] + \int_{t_i}^{t} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\xi_i))ds.
\end{aligned}$$

Continuando de esta manera, nos podemos reducir recursivamente y en pasos finitos para mostrar que la solución $y(t)$ se escribe como

$$\begin{aligned}
y(t) =&\Phi(t, \tau)\xi + \int_{\tau}^{t_{i(\tau)+1}} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\xi_{i(\tau)}))ds \\
&+ \sum_{j=i(\tau)+1}^{j=i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\xi_j))ds + \int_{t_i}^{t} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\xi_i))ds\,.
\end{aligned}$$

Pero nótese que

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^{t} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\gamma(s)))ds = &\int_{\tau}^{t_{i(\tau)+1}} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\xi_{i(\tau)}))ds \\
&+ \sum_{j=i(\tau)+1}^{j=i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\xi_j))ds \\
&+ \int_{t_i}^{t} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\xi_i))ds,
\end{aligned}$$

pues, $\gamma(s)|_{I_j} = \xi_j$. Por eso,

$$y(t) = \Phi(t, \tau)\xi + \int_{\tau}^{t} \Phi(t, s)f(s, y(s), y(\gamma(s)))ds\,, \quad t \geqslant \tau.$$

La demostración de la solución (1.3.1) definida en $(-\infty, \tau]$ es análoga la solución (1.3.1) definida en $[\tau, \infty)$.

$\Leftarrow$) Si $y(t)$ es una solución de ecuación integral (1.3.2), es claro $y(\tau)=\xi$ y la derivada de $\Phi(t,\tau)\xi$ es $\Phi'(t,\tau)\xi = A(t)\Phi(t,\tau)\xi$, la derivada del resto de la expresión integral de (1.3.1) es

$$\begin{aligned}\left(\int_\tau^t \Phi(t,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds\right)' &= \Phi'(t)\left(\int_\tau^t \Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds\right)\\ &\quad+\Phi(t)\left(\int_\tau^t \Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds\right)'\\ &= A(t)\int_\tau^t \Phi(t,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds + f(t,y(t),y(\gamma(t)))\end{aligned}$$

entonces, $y(t)$ satisface la DEPCAG (1.3.1). $\square$

Observación 1.3.1. Supongamos que en la DEPCAG (1.3.1) tenemos $A(t)=0$, entonces la fórmula (1.3.2) corresponde a la solución de la ecuación $y'(t)=f(t,y(t),y(\gamma(t)))$ con la condición inicial $y(\tau)=\xi$,

$$y(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds. \tag{1.3.3}$$

1.4. Desigualdades de Gronwall en DEPCAG

El problema de la estimación de soluciones de una ecuación diferencial, se resuelve por medio de un interesante lema debido a *Thomas H. Gronwall* (1919) [26], que nos permite deducir acotaciones de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. La importancia del lema de Gronwall que es de gran utilidad en muchas aplicaciones con respecto a nuestro problema de la DEPCAG. El lema también puede usarse, para probar el teorema de unicidad, la dependencia continua de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales, etc., así como también en numerosos resultados referentes a la acotación y a la estabilidad.

En esta sección daremos algunos resultados sobre desigualdades integrales, los cuales utilizaremos para estimar el crecimiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Primero demostraremos dos desigualdades de tipo Gronwall en un contexto DEPCAG que sean más aplicables para estudiar las propiedades cualitativas de las soluciones DEPCAG, la idea de una de las desigualdades está basada en la integración de DEPCAG de primer orden mediante un factor integrante. Para un estudio más completo de este tema de acotación de soluciones, el lector interesado puede consultar el libro de *Bainov* y *Simeonov* [9].

A continuación, veremos una desigualdad de Gronwall en DEPCAG, la cual tiene una idea que está basada en la integración de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden mediante un factor integrante.

Lema 1.4.1.
Sean $u, \eta_i : [\tau, \infty) \to [0, \infty)$, $i = 1, 2$ *tres funciones continuas localmente integrables satisfaciendo para todo* $t \geqslant \tau$, *la desigualdad:*

$$u(t) \leqslant u(\tau) + \int_\tau^t [\eta_1(s)u(s) + \eta_2(s)u(\gamma(s))]\, ds. \tag{1.4.1}$$

Si para $t \geqslant \tau$,

$$\overline{\upsilon}_i^+ = \int_{t_i}^{\xi_i} \left[\eta_2(s) e^{\int_s^{\xi_i} \eta_1(\kappa)d\kappa}\right] ds \leqslant \overline{\upsilon} < 1,\ i \in \mathbb{Z}. \tag{1.4.2}$$

Entonces,

$$u(t) \leqslant u(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \eta_1(s)ds + \frac{1}{1-\overline{\upsilon}} \int_\tau^t \left[\eta_2(s) e^{\int_{t_{i(s)}}^{\gamma(s)} \eta_1(\kappa)d\kappa}\right] ds\right), \tag{1.4.3}$$

$$u(\xi_i) \leqslant \frac{1}{1-\overline{\upsilon}} u(t_i) \exp\left(\int_{t_i}^{\xi_i} \eta_1(s)ds\right), \tag{1.4.4}$$

$$\begin{aligned} u(\gamma(t)) \leqslant \frac{1}{1-\overline{\upsilon}} u(\tau) \exp\Bigg(&\int_\tau^{\gamma(t)} \eta_1(s)ds \\ &+ \frac{1}{1-\overline{\upsilon}} \int_\tau^{t_{i(t)}} \left[\eta_2(s) e^{\int_s^{\gamma(s)} \eta_1(\kappa)d\kappa}\right] ds\Bigg). \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Demostración: Sea $v(t)$ la parte derecha de (1.4.1), esto es,

$$v(t) = u(\tau) + \int_\tau^t [\eta_1(s)u(s) + \eta_2(s)u(\gamma(s))]ds.$$

Entonces, $v(\tau) = u(\tau)$, $u \leqslant v$, v es diferenciable por trozos y no decreciente. Por (1.4.1), $v(t)$ satisface

$$v'(t) \leqslant \eta_1(t)u(t) + \eta_2(t)u(\gamma(t)) \leqslant \eta_1(t)v(t) + \eta_2(t)v(\gamma(t)). \tag{1.4.6}$$

Multiplicamos $\exp\left(-\int_r^t \eta_1(s)ds\right)$ en ambos lados de (1.4.6),

$$(v'(t) - \eta_1(t)v(t))\left(\exp\left(-\int_r^t \eta_1(s)ds\right)\right) \leqslant (\eta_2(t)v(\gamma(t)))\left(\exp\left(-\int_r^t \eta_1(s)ds\right)\right). \tag{1.4.7}$$

Para cualquier $t \geqslant r$, integramos (1.4.7) de r a t:

$$v(t)\left(\exp\left(-\int_r^t \eta_1(s)ds\right)\right) - v(r) \leqslant \int_r^t (\eta_2(s)v(\gamma(s)))\left(\exp\left(-\int_r^s \eta_1(\kappa)d\kappa\right)\right) ds. \tag{1.4.8}$$

Al reemplazar $t = \xi_i$ y $r = t_i$ en (1.4.8), y usando (1.4.2), tenemos

$$v(\xi_i) \leq \frac{1}{1-\overline{\upsilon}} v(t_i) \exp\left(\int_{t_i}^{\xi_i} \eta_1(s)ds\right).$$

Consideramos el caso particular $\tau = t_i$. Al tomar $v(t_i) = u(t_i)$ y $u \leq v$, obtenemos (1.4.4).

Ahora, considerar $\tau = t_i$ y reemplazar (1.4.4) en (1.4.8). Para $t \in I_i$, obtenemos,

$$\begin{aligned}
&v(t)\left(\exp\left(-\int_{t_i}^{t}\eta_1(s)ds\right)\right)\\
\leqslant &v(t_i)+\int_{t_i}^{t}\eta_2(s)v(\gamma(s))\left(\exp\left(-\int_{t_i}^{s}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\right)ds\\
\leqslant &v(t_i)+\left(\frac{1}{1-\overline{v}}\right)\int_{t_i}^{t}\left[\eta_2(s)v(t_i)\left(\exp\left(\int_{t_i}^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa-\int_{t_i}^{s}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\right)\right]ds\\
\leqslant &v(t_i)+\left(\frac{1}{1-\overline{v}}\right)\int_{t_i}^{t}\left[\left(\eta_2(s)\exp\left(\int_{t_i}^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\right)\left(v(s)\exp\left(-\int_{t_i}^{s}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\right)\right]ds,
\end{aligned}$$

pues, v es una función no decreciente.

Ahora, podemos aplicar el lema clásico de Gronwall y tenemos,

$$v(t)\exp\left(-\int_{t_i}^{t}\eta_1(s)ds\right)\leqslant v(t_i)\exp\left\{\left(\frac{1}{1-\overline{v}}\right)\int_{t_i}^{t}\left[\eta_2(s)\exp\left(\int_{t_i}^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\right]ds\right\}$$

para $t \in I_i$. Por la continuidad de v, tenemos

$$\begin{aligned}
v(t_{i+1})\leqslant v(t_i)\exp\Bigg\{&\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\eta_1(s)ds\right)\\
&+\left(\frac{1}{1-\overline{v}}\right)\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\eta_2(s)\exp\left(\int_{t_i}^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\right]ds\Bigg\}.
\end{aligned}\tag{1.4.9}$$

Como el índice "i" se elige arbitrariamente, la relación (1.4.9) se cumple para todo $i \in \{i(\tau)+j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$. Por (1.4.9), podemos reducir recursivamente para mostrar

$$\begin{aligned}
u(t)\leqslant v(t)&\leqslant v(t_i)\exp\left\{\left(\int_{t_i}^{t}\eta_1(s)ds\right)+\left(\frac{1}{1-\overline{v}}\right)\int_{t_i}^{t}\left[\eta_2(s)\exp\left(\int_{t_i}^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\right]ds\right\}\\
&\leqslant v(t_{i-1})\exp\Bigg\{\left(\int_{t_{i-1}}^{t}\eta_1(s)ds\right)+\left(\frac{1}{1-\overline{v}}\right)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[\eta_2(s)\exp\left(\int_{t_{i-1}}^{\xi_{i-1}}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\right]ds\\
&\qquad+\left(\frac{1}{1-\overline{v}}\right)\int_{t_i}^{t}\left[\eta_2(s)\exp\left(\int_{t_i}^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\right]ds\Bigg\}\\
&\leqslant\cdots\\
&\leqslant u(\tau)\exp\left[\left(\int_{\tau}^{t}\eta_1(s)ds\right)+\left(\frac{1}{1-\overline{v}}\right)\left(\int_{\tau}^{t}\left[\eta_2(s)\exp\left(\int_{t_{i(s)}}^{\gamma(s)}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\right]ds\right)\right].
\end{aligned}$$

Finalmente, por (1.4.3) y (1.4.4) tenemos (1.4.5). □

Observación 1.4.1. Si tomamos $\eta_2 \equiv 0$, tenemos el lema clásico de Gronwall en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ahora veremos otra desigualdad de Gronwall en DEPCAG, la cuál tiene la acotación integral distinta al Lema 1.4.1.

Lema 1.4.2.
Sean $u, \eta_i : [\tau, \infty) \to [0, \infty)$, $i = 1, 2$ tres funciones continuas satisfaciendo para todo $t \geqslant \tau$ la desigualdad (1.4.1)*:*

$$u(t) \leqslant u(\tau) + \int_\tau^t [\eta_1(s)u(s) + \eta_2(s)u(\gamma(s))]\, ds.$$

Si

$$v_i^+ = \int_{t_i}^{\xi_i} (\eta_1(s) + \eta_2(s))\, ds \leqslant \overline{v} < 1, \; i \in \mathbb{Z}. \tag{1.4.10}$$

Entonces,

$$u(t) \leqslant u(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \left(\eta_1(s) + \frac{\eta_2(s)}{1-\overline{v}}\right) ds\right), \tag{1.4.11}$$

$$u(\gamma(t)) \leqslant (1-\overline{v})^{-1} u(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \left(\eta_1(s) + \frac{\eta_2(s)}{1-\overline{v}}\right) ds\right), \tag{1.4.12}$$

$$u(\xi_i) \leqslant (1-\overline{v})^{-1} u(t_i). \tag{1.4.13}$$

Demostración: Sea $v(t)$ la parte derecha de (1.4.1). Entonces, $v(\tau) = u(\tau), u \leqslant v, v$ es diferenciable por trozos y no decreciente. Por (1.4.1), $v(t)$ satisface

$$v'(t) \leqslant \eta_1(t)v(t) + \eta_2(t)v(\gamma(t)),$$

y para cualquier $t \geqslant r$, integramos la expresión anterior de r a t:

$$v(t) - v(r) \leqslant \int_r^t [\eta_1(s)v(s) + \eta_2(s)v(\gamma(s))]\, ds. \tag{1.4.14}$$

Al reemplazar $t = \xi_i$ y $r = t_i$ en (1.4.14) como v es una función no decreciente tenemos

$$\begin{aligned} v(\xi_i) &\leqslant v(t_i) + \int_{t_i}^{\xi_i} [\eta_1(s)v(s) + \eta_2(s)v(\xi_i)]\, ds \\ &\leqslant v(t_i) + v(\xi_i) \int_{t_i}^{\xi_i} [\eta_1(s) + \eta_2(s)]\, ds, \end{aligned}$$

y por (1.4.10), tomar $v(t_i) = u(t_i)$ estimando la expresión anterior, tenemos (1.4.13).
Luego, utilizando (1.4.10) y (1.4.13) se demuestra de la misma manera como el Lema 1.4.1 y podemos concluir (1.4.11) y (1.4.12). □

Observación 1.4.2. Al considerar $\eta_1(t) = \eta_2(t) = \eta(t)$ o $\eta_1(t) \neq \eta_2(t)$, $\eta(t) = \max_{i=1,2} \eta_i(t)$ en el Lema 1.4.2, tenemos las siguientes estimaciones en un contexto DEPCAG [38]:

$$u(t) \leqslant u(\tau) \exp\left(\frac{2-\overline{v}}{1-\overline{v}} \int_\tau^t \eta(s)ds\right).$$

$$u(\gamma(t)) \leqslant (1-\overline{v})^{-1} \exp\left(\frac{2-\overline{v}}{1-\overline{v}} \int_\tau^t \eta(s)ds\right).$$

Veremos las mismas desigualdades del Lema 1.4.2 en un intervalo $(-\infty, \tau]$ a la izquierda de τ, lo que permite obtener una acotación de la función $u(t)$ en los instantes anteriores de tiempo.

Lema 1.4.3.

Sean $u, \eta_i : (-\infty, \tau] \to [0, \infty)$, $i = 1,2$ tres funciones continuas localmente integrables satisfaciendo para todo $t \leqslant \tau$, la desigualdad:

$$u(t) \leqslant u(\tau) + \int_t^\tau [\eta_1(s)u(s) + \eta_2(s)u(\gamma(s))]\, ds. \tag{1.4.15}$$

Si para $t \leqslant \tau$,

$$v_i^- = \int_{\xi_i}^{t_{i+1}} [\eta_1(s) + \eta_2(s)]\, ds \leqslant \overline{v} < 1,\ i \in \mathbb{Z}. \tag{1.4.16}$$

Entonces,

$$u(t) \leqslant u(\tau) \exp\left(\int_t^\tau \left(\eta_1(s) + \frac{\eta_2(s)}{1-\overline{v}}\right) ds\right), \tag{1.4.17}$$

$$u(\xi_i) \leqslant (1-\overline{v})^{-1} u(t_{i+1}), \tag{1.4.18}$$

$$u(\gamma(t)) \leqslant (1-\overline{v})^{-1} u(\tau) \exp\left(\int_t^\tau \left[\eta_1(s) + (1-\overline{v})^{-1}\eta_2(s)\right] ds\right). \tag{1.4.19}$$

Demostración: Sea $v(t)$ la parte derecha de (1.4.15). Entonces, $v(\tau) = u(\tau)$, $u \leqslant v$, v es diferenciable por trozos y no creciente. Por (1.4.15), $v(t)$ satisface

$$v'(t) \leqslant -[\eta_1(t)v(t) + \eta_2(t)v(\gamma(t))],$$

y para cualquier $t \leqslant r$, integramos la expresión anterior de r a t:

$$v(t) - v(r) \leqslant -\int_r^t [\eta_1(s)v(s) + \eta_2(s)v(\gamma(s))]\, ds. \tag{1.4.20}$$

Al reemplazar $t = \xi_i$ y $r \to t_{i+1}$ como v es una función no creciente. Por eso, tenemos

$$\begin{aligned} v(\xi_i) &\leqslant v(t_{i+1}) - \int_{t_{i+1}}^{\xi_i} [\eta_1(s)v(s) + \eta_2(s)v(\xi_i)]\, ds \\ &\leqslant v(t_{i+1}) + v(\xi_i) \int_{\xi_i}^{t_{i+1}} [\eta_1(s) + \eta_2(s)]\, ds. \end{aligned}$$

Por (1.4.16), estimando la expresión anterior y tomar $u(t_{i+1}) = v(t_{i+1})$ tenemos (1.4.18). Ahora, considerar $r \to t_{i+1}$ en (1.4.20) para $t \in I_i$ y por (1.4.18) obtenemos

$$\begin{aligned} v(t) &\leqslant v(t_{i+1}) + \int_t^{t_{i+1}} [\eta_1(s)v(s) + \eta_2(s)v(\gamma(\xi_i))]\, ds \\ &\leqslant v(t_{i+1}) + \int_t^{t_{i+1}} \left[\eta_1(s)v(s) + \eta_2(s)\left(1-\overline{v}\right)^{-1} v(t_{i+1})\right] ds \end{aligned}$$

pues, v es una función no creciente. Por eso,

$$v(t) \leqslant v(t_{i+1}) + \int_t^{t_{i+1}} \left[\left(\eta_1(s) + (1-\overline{v})^{-1}\eta_2(s)\right) v(s)\right] ds.$$

Ahora, podemos aplicar el lema clásico de Gronwall y tenemos,

$$v(t) \leqslant v(t_{i+1}) \exp\left(\int_t^{t_{i+1}} \left[\eta_1(s) + (1-\overline{v})^{-1}\eta_2(s)\right] ds\right) \text{ para } t \in I_i.$$

Por la continuidad de v, tenemos

$$v(t_i) \leqslant v(t_{i+1}) \exp\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\eta_1(s) + (1-\overline{v})^{-1}\eta_2(s)\right] ds\right). \tag{1.4.21}$$

Por (1.4.21), podemos reducir recursivamente para mostrar

$$\begin{aligned} u(t) \leqslant v(t) &\leqslant v(t_{i+1}) \exp\left(\int_t^{t_{i+1}} \left[\eta_1(s) + (1-\overline{v})^{-1}\eta_2(s)\right] ds\right) \\ &\leqslant v(t_{i+2}) \exp\left(\int_t^{t_{i+2}} \left[\eta_1(s) + (1-\overline{v})^{-1}\eta_2(s)\right] ds\right) \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant v(\tau) \exp\left(\int_t^{\tau} \left[\eta_1(s) + (1-\overline{v})^{-1}\eta_2(s)\right] ds\right). \end{aligned}$$

Por (1.4.15) y (1.4.21) tenemos (1.4.19). □

Ahora veamos la comparación entre dos condiciones (1.4.2), (1.4.10).

Primero: si $\int_{t_i}^{\xi_i} \left[\eta_2(s)e^{\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa}\right] ds \leqslant \overline{v} < 1$, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\int_{t_i}^{\xi_i} \left[\eta_2(s)e^{\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa}\right] ds \leqslant \int_{t_i}^{\xi_i} [\eta_1(s) + \eta_2(s)]\, ds.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{\xi_i} (\eta_1(s)+\eta_2(s))\, ds - \int_{t_i}^{\xi_i} \left(\eta_2(s)e^{\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa}\right) ds \\
&= \int_{t_i}^{\xi_i} \eta_1(s)ds - \int_{t_i}^{\xi_i} \left(\eta_2(s)\left(e^{\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa}-1\right)\right) ds \\
&= \int_{t_i}^{\xi_i} \eta_1(s)ds - \int_{t_i}^{\xi_i} \eta_2(s)\left(\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa + \frac{\left(\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)^2}{2!} + \frac{\left(\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)^3}{3!} + ..\right) ds \\
&\geqslant \int_{t_i}^{\xi_i} \eta_1(s)ds - \left(\int_{t_i}^{\xi_i} \eta_2(s)\left(\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\left(1+\left(\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa\right) + \frac{\left(\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)^2}{2!} + ..\right) ds\right) \\
&\geqslant \int_{t_i}^{\xi_i} \eta_1(s)ds - \left(\int_{t_i}^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa\right)\left(\int_{t_i}^{\xi_i}\left[\eta_2(s)e^{\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa}\right] ds\right) \\
&= \int_{t_i}^{\xi_i} \eta_1(s)ds \left(1-\int_{t_i}^{\xi_i}\left[\eta_2(s)e^{\int_s^{\xi_i}\eta_1(\kappa)d\kappa}\right] ds\right) > 0. \square
\end{aligned}$$

Observación 1.4.3.

En los Lemas 1.4.1 y 1.4.2 se ocupan las condiciones de pequeñez para $\overline{v}_i^+$ y v_i^+, respectivamente. El primer lema es menos restrictivo que el segundo lema, pues se puede construir un ejemplo, donde se puede estimar una ecuación integral con el primer lema, y no con el segundo lema.

Ejemplo. Tomar $\eta_1(t)=\frac{1}{t^2}$, $\eta_2(t)=\frac{13}{10}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ y consideramos $\gamma(t)=2\left[\frac{t+1}{2}\right]$.
Sin pérdida de la generalidad, sea $t\in I_1$, calculamos dos condiciones de pequeñeces (1.4.2), (1.4.10):

$$\frac{13}{10}\int_1^2\left(\frac{1}{s^2}e^{\int_s^2\frac{1}{\kappa^2}d\kappa}\right)ds=\frac{13}{10}\left(-1+e^{\frac{1}{2}}\right)<1,\quad \int_1^2\left(\frac{13}{10}\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right)ds=\frac{23}{20}>1,$$

esto es, (1.4.2) vale, pero (1.4.10) no. Por eso, la estimación obtenida por el Lemma 1.4.1 es mejor que el Lemma 1.4.2. Pues (1.4.2) es más débil que (1.4.10). En el caso, si $\eta_1(t)$ y $\eta_2(t)$ son constantes, tambien podemos obtener el mismo resultado. Por ejemplo: si tomamos $\eta_1(t)=\frac{1}{2}$, $\eta_2(t)=\frac{2}{3}$ y consideramos $\gamma(t)=2\left[\frac{t+1}{2}\right]$.

A pesar de todo esto, en nuestro trabajo generalmente ocuparemos la condición de pequeñez del segundo Lema 1.4.2, salvo, la situación conveniente para el Lema 1.4.1.

A continuación veremos unas estimaciones por el lema de Gronwall en DEPCAG para estudiar la teoría de existencia y unicidad de soluciones de DEPCAG y la existencia de una solución periódica de sistema semi-lineal $y'(t)=A(t)y(t)+f(t,y(t),y(\gamma(t)))$.

La suposición siguiente para la DEPCAG (1.3.1) será necesaria en el Corolario 1.4.1.

(L3) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua tal que

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant \eta_1(t)\,|x_1 - x_2| + \eta_2(t)\,|y_1 - y_2|,$$

donde $\eta_i : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $i = 1, 2$ son funciones localmente integrables y $f(t, 0, 0) = 0$. Supondremos además que

$$\begin{aligned} \widetilde{v}_i^+ &= c_{\Phi_i} \int_{t_i}^{\xi_i} [\eta_1(s) + \eta_2(s)]\,ds \leqslant \widetilde{v} < 1, \\ \widetilde{v}_i^- &= c_{\Phi_i} \int_{\xi_i}^{t_{i+1}} [\eta_1(s) + \eta_2(s)]\,ds \leqslant \widetilde{v} < 1, \end{aligned} \tag{1.4.22}$$

donde $c_{\Phi_i} = \max\limits_{t,s \in I_i, i \in \mathbb{Z}} |\Phi(t, s)|$, Φ es una solución fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$.

Lema 1.4.4. *Supongamos que la condición* $\sup\limits_{t \in [\tau, \tau+\omega]} |A(t)| = \mu < \infty$ *se satisface. Entonces,*

$$e^{-\mu|t-s|} \leqslant |\Phi(t, s)| \leqslant e^{\mu|t-s|},\ \ t, s \in [\tau, \tau + \omega].$$

Demostración: Sea $\Phi(t)$ una solución fundamental del sistema homogéneo $x'(t) = A(t)x(t)$, $\Phi^{-1}(t)$ es una solución fundamental de la ecuación adjunta $x'(t) = -A(t)x(t)$:

$$\Phi^{-1}(t) - \Phi^{-1}(s) = -\int_s^t \Phi^{-1}(u)A(u)du,\ \ t > s,$$

donde, $t, s \in [\tau, \tau + \omega]$. Entonces,

$$\left|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\right| \leqslant |I| + \max_{u \in [\tau, \tau+\omega]} |A(u)| \left| \int_s^t |\Phi(t)\Phi^{-1}(u)| du \right|.$$

Por la desigualdad de Gronwall, tenemos

$$\left|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\right| \leqslant |I|\, e^{\max\limits_{u \in [\tau, \tau+\omega]} |A(u)||t-s|} = e^{\mu|t-s|},$$

Si consideramos $t = \tau + \omega,\ s = \tau$, tenemos $e^{\mu\omega} = c_\Phi = \max\limits_{t,s \in [\tau, \tau+\omega]} |\Phi(t, s)|$.

La demostración de la desigualdad $e^{-\mu|t-s|} \leqslant |\Phi(t, s)|$ es inmediata por la igualdad $\Phi(t, s)\Phi(s, t) = I$, donde I es matriz identidad de $n \times n$. □

Corolario 1.4.1.

Supongamos que la condición (L3) se satisface y que $\tau, t \in I_{i(\tau)}$. *Entonces,*

$$|y(t)| \leqslant c_{\Phi_i}\, |y(\tau)| \exp\left(\left| \int_\tau^t \left(c_{\Phi_i}\eta_1(s) + \frac{c_{\Phi_i}}{1 - \widetilde{v}}\eta_2(s) \right) ds \right| \right). \tag{1.4.23}$$

$$|y(\gamma(t))| \leqslant (1 - \widetilde{v})^{-1}\, c_{\Phi_i}\, |y(\tau)| \exp\left(\left| \int_\tau^t \left(c_{\Phi_i}\eta_1(s) + \frac{c_{\Phi_i}}{1 - \widetilde{v}}\eta_2(s) \right) ds \right| \right). \tag{1.4.24}$$

Demostración: La demostración es semejante a los Lema 1.4.2 y Lema 1.4.3. □

1.5. Teoría de Existencia y Unicidad de Soluciones de DEPCAG

En esta sección, estudiaremos propiedades generales y fundamentales de las ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado. Estas propiedades son esencialmente las de

- Existencia y unicidad de solución.
- Dependencia continua respecto de condiciones iniciales.

1.5.1. Existencia y Unicidad de Solución

En esta sección mostramos condiciones suficientes para probar la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial:

$$u'(t) = f(t, u(t), u(\gamma(t))), \; u(\tau) = u_0, \tag{1.5.1}$$

donde, $f \in C[\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ y $(\tau, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Entendemos por solución en un intervalo $[a, b]$ a una función continua $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que u' esté bien definida y $u'(t) = f(t, u(t), u(\gamma(t)))$ para todo $t \in [a, b]$.

Supongamos que $f(t, u(t), u(\gamma(t)))$ es continua en t, esta condición no asegura la unicidad de la solución de (1.5.1), ya que las DEPCAGs son una extensión de ecuaciones diferenciales ordinarias, y sabemos que no toda ecuación diferencial ordinaria tiene solución única. Por ejemplo: la ecuación escalar $x' = x^{\frac{1}{3}}$, $x(0) = 0$ tiene como soluciones tanto $x(t) = (\frac{2t}{3})^{\frac{3}{2}}$ como $x(t) \equiv 0$. Por lo tanto, es claro que la condición de continuidad de $f(t, u(t), u(\gamma(t)))$ en sus argumentos no es suficiente para asegurar la unicidad de la solución (1.5.1), aunque esta condición asegura la existencia de al menos una solución. A continuación, veremos en el Teorema 1.5.1 una condición suficiente que garantiza a la vez ambas propiedades y en el Teorema 1.5.3 una condición que sólo garantiza la existencia de una solución de (1.5.1) sin asegurar la unicidad.

Ahora estudiamos el teorema de la existencia y unicidad de solución global de DEPCAG por el método de Integrantes de Picard (método de aproximaciones sucesivas). Antes, necesitamos un teorema de existencia local.

Teorema 1.5.1. (*Existencia y Unicidad de Solución Local*)
Supongamos que la condición de Lipschitz global (G) (1.2.5) *se satisface. Entonces, para cada* $(\tau, u(\tau)) \in [t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}] \times \mathbb{R}^n$, *existe una única solución* $u(t, \tau, u(\tau))$ *de la DEPCAG* (1.5.1) *en* $[t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$.
Demostración: Primero, probaremos unicidad.
Sean u_1 y u_2 dos soluciones definidas en $[\tau, t_{i(\tau)+1}]$. Entonces por la condición de Lipschitz (G) (1.2.5), tenemos

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant |u_1(\tau) - u_2(\tau)| + \int_\tau^t [\eta_1(s)\,|u_1(s) - u_2(s)| + \eta_2(s)\,|u_1(\gamma(s)) - u_2(\gamma(s))|]\, ds,$$

aplicamos el lema de la desigualdad de Gronwall (1.4.11), entonces

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant |u_1(\tau) - u_2(\tau)|\, e^{\int_\tau^t \left(\eta_1(s)+\frac{\eta_2(s)}{1-\bar{v}}\right)ds}.$$

Sean u_1 y u_2 dos soluciones definidas en $[t_{i(\tau)}, \tau]$. Entonces por la condición de Lipschitz (G) (1.2.5), tenemos

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant |u_1(\tau) - u_2(\tau)| + \int_t^\tau [\eta_1(s)\,|u_1(s) - u_2(s)| + \eta_2(s)\,|u_1(\gamma(s)) - u_2(\gamma(s))|]\,ds,$$

aplicamos el lema de la desigualdad de Gronwall (1.4.17), entonces

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant |u_1(\tau) - u_2(\tau)|\, e^{\int_t^\tau \left(\eta_1(s)+\frac{\eta_2(s)}{1-\bar{v}}\right)ds}.$$

Si $u_1(\tau) = u_2(\tau)$, tenemos $u_1 \equiv u_2$ en $[t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$.

Ahora probaremos la existencia de la solución $u = u(t, \tau, u(\tau))$ en $[t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$ de la ecuación (1.5.1).

Descomponemos $[t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}] = I^+_{i(\tau)} \cup I^-_{i(\tau)}$, donde $I^+_{i(\tau)} = [t_{i(\tau)}, \xi_{i(\tau)}]$ es el intervalo avanzado, $I^-_{i(\tau)} = [\xi_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$ es el intervalo retardado.
Primer caso. Consideramos $\tau \leqslant t$ con $\tau, t \in I^+_{i(\tau)} = [t_{i(\tau)}, \xi_{i(\tau)}]$.
Utilizamos el método de aproximaciones sucesivas para demostrar la existencia de una solución del problema en $I^+_{i(\tau)}$. Definimos

$$u_0(t) \equiv 0,\ \ u_{k+1}(t) = u(\tau) + \int_\tau^t f(s, u_k(s), u_k(\gamma(s))ds, \quad k \geqslant 0,$$

tenemos para $t \geqslant \tau$,

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leqslant \int_\tau^t [\eta_1(s)\,|u_k(s) - u_{k-1}(s)| + \eta_2(s)\,|u_k(\gamma(s)) - u_{k-1}(\gamma(s))|]\,ds$$

y

$$\begin{aligned}
|u_1(t) - u_0(t)| &\leqslant |u(\tau)|\,.\\
|u_2(t) - u_1(t)| &\leqslant \int_\tau^t [\eta_1(s)\,|u_1(s) - u_0(s)| + \eta_2(s)\,|u_1(\gamma(s)) - u_0(\gamma(s))|]\,ds\\
&\leqslant |u(\tau)| \int_\tau^t (\eta_1(s) + \eta_2(s))\,ds.\\
|u_3(t) - u_2(t)| &\leqslant \int_\tau^t [\eta_1(s)\,|u_2(s) - u_1(s)| + \eta_2(s)\,|u_2(\gamma(s)) - u_1(\gamma(s))|]\,ds\\
&\leqslant |u(\tau)| \int_\tau^t \left(\eta_1(s) \int_\tau^s (\eta_1(\kappa) + \eta_2(\kappa))\,d\kappa\right) ds\\
&+ |u(\tau)| \int_\tau^t \left(\eta_2(s) \int_\tau^{\gamma(s)} (\eta_1(\kappa) + \eta_2(\kappa))\,d\kappa\right) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant |u(\tau)| \left(\int_\tau^t (\eta_1(s))\, ds \right) \left(\int_\tau^t (\eta_1(\kappa) + \eta_2(\kappa))\, d\kappa \right) \\
&+ |u(\tau)| \left(\int_\tau^t (\eta_2(s))\, ds \right) \left(\int_\tau^{\gamma(t)} (\eta_1(\kappa) + \eta_2(\kappa))\, d\kappa \right) \\
&\leqslant |u(\tau)| \left(\int_\tau^{\gamma(t)} (\eta_1(s) + \eta_2(s))\, ds \right)^2 \\
&= |u(\tau)| \left(\int_\tau^{\xi_{i(\tau)}} (\eta_1(s) + \eta_2(s))\, ds \right)^2 .
\end{aligned}$$

Por inducción sobre k, podemos demostrar

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leqslant |u(\tau)| \left(\int_\tau^{\xi_{i(\tau)}} (\eta_1(s) + \eta_2(s))\, ds \right)^k .$$

Por (1.4.10), se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq \frac{|u(\tau)|}{1 - \left(\int_\tau^{\xi_{i(\tau)}} (\eta_1(s) + \eta_2(s))\, ds \right)},$$

el M-test de Weierstrass permite afirmar que la serie

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (u_{k+1} - u_k)$$

cuya suma parcial es $u_k(t)$, converge absolutamente y uniformemente hacia una función continua $u(t)$ en $I^+_{i(\tau)}$. Luego, $u(t)$ es la única solución del problema en $I^+_{i(\tau)}$.

Segundo caso. Consideramos $\tau \leqslant t$, con $t, \tau \in I^-_{i(\tau)} = [\xi_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$.
Note que, si $\tau, s \in I^-_{i(t)}$ implica $\gamma(s) \leqslant s$ y $\int_\tau^{\gamma(s)} (\eta_1 + \eta_2) \leqslant \int_\tau^s (\eta_1 + \eta_2)$. Definimos

$$u_0(t) \equiv 0, \;\; u_{k+1}(t) = u(\tau) + \int_\tau^t f(s, u_k(s), u_k(\gamma(s))ds, \quad k \geqslant 0,$$

para $t \geqslant \tau$, tenemos

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leqslant \int_\tau^t [\eta_1(s)\, |u_k(s) - u_{k-1}(s)| + \eta_2(s)\, |u_k(\gamma(s)) - u_{k-1}(\gamma(s))|]\, ds$$

y

$$|u_1(t) - u_0(t)| \leqslant |u(\tau)| .$$

$$\begin{aligned}
|u_2(t) - u_1(t)| &\leqslant \int_\tau^t [\eta_1(s)\, |u_1(s) - u_0(s)| + \eta_2(s)\, |u_1(\gamma(s)) - u_0(\gamma(s))|]\, ds \\
&\leqslant |u(\tau)| \int_\tau^t (\eta_1(s) + \eta_2(s))\, ds.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|u_3(t)-u_2(t)| &\leqslant \int_\tau^t [\eta_1(s)\,|u_2(s)-u_1(s)| + \eta_2(s)\,|u_2(\gamma(s))-u_1(\gamma(s))|]\,ds \\
&\leqslant \int_\tau^t \eta_1(s)\left(|u(\tau)|\int_\tau^s (\eta_1(\kappa)+\eta_2(\kappa))\,d\kappa\right)ds \\
&+ \int_\tau^t \eta_2(s)\left(|u(\tau)|\int_\tau^{\gamma(s)} (\eta_1(\kappa)+\eta_2(\kappa))\,d\kappa\right)ds \\
&\leqslant \int_\tau^t \eta_1(s)\left(|u(\tau)|\int_\tau^s (\eta_1(\kappa)+\eta_2(\kappa))\,d\kappa\right)ds \\
&+ \int_\tau^t \eta_2(s)\left(|u(\tau)|\int_\tau^s (\eta_1(\kappa)+\eta_2(\kappa))\,d\kappa\right)ds \\
&\leqslant |u(\tau)|\int_\tau^t (\eta_1(s)+\eta_2(s))\left(\int_\tau^s (\eta_1(\kappa)+\eta_2(\kappa))\,d\kappa\right)ds \\
&\leqslant |y(\tau)|\,\frac{\left(\int_\tau^t (\eta_1(s)+\eta_2(s))\,ds\right)^2}{2!}.
\end{aligned}
$$

Por inducción sobre k se tiene que:

$$|u_{k+1}(t)-u_k(t)| \leqslant \frac{|u(\tau)|}{k!}\left(\int_\tau^t (\eta_1(s)+\eta_2(s))\,ds\right)^k.$$

Luego,

$$|u(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |u_{k+1}(t)-u_k(t)| \leqslant |u(\tau)|\exp\left(\int_\tau^t (\eta_1(s)+\eta_2(s))\,ds\right)$$

el M-test de Weierstrass permite afirmar que la serie

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (u_{k+1}-u_k)$$

cuya suma parcial es $u_k(t)$, converge absolutamente y uniformemente hacia una función continua $u(t)$ en $I^-_{i(\tau)}$. Por lo tanto, $u(t)$ es la única solución del problema en $I^-_{i(\tau)}$.

Tercer caso. Consideramos $\tau \leqslant t$, con $\tau \in I^+_{i(\tau)}$ y $t \in I^-_{i(\tau)}$.
Por el primer caso, tenemos la existencia de una única solución $u(t,\tau,u(\tau))$ de (1.5.1) en $[\tau, \xi_{i(\tau)}]$. Luego tomamos $\xi_{i(\tau)}$ como el nuevo instante inicial y $u(\xi_{i(\tau)})$ el mismo valor de la solución que está definida en el intervalo $[\tau, \xi_{i(\tau)}]$ como el nuevo estado inicial, por el segundo caso, podemos garantizar la existencia de solución de (1.5.1) en $[\xi_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$. Por lo tanto, por construcción, existe una única solución continua $u(t,\tau,u(\tau))$ de (1.5.1) en $[\tau, t_{i(\tau)+1}]$, donde $\tau \in I^+_{i(\tau)}$, y $t \in I^-_{i(\tau)}$.
La demostración de la existencia y unicidad de la solución (1.5.1) definida en $[t_{i(\tau)}, \tau]$ es análoga a la solución (1.5.1) definida en $[\tau, t_{i(\tau)+1}]$.

Por lo tanto, $u(t,\tau,u(\tau))$ es una única solución (1.5.1) en $[t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$. $\square$

Observación 1.5.1.

El problema de valor inicial para DEPCAG es investigado en el caso cuando τ es el primer momento y la existencia de solución global de DEPCAG está garantizado por la existencia de solución de cada intervalo I_i, $i \in \mathbb{Z}$. A continuación, demostramos que una solución global de (1.5.1) con una condición inicial arbitraria $(\tau, u(\tau)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es una restricción de una solución global de un PVI para (1.5.1) con la equivalencia a un momento inicial en cualquier elemento de la secuencia $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

Teorema 1.5.2. (*Existencia y Unicidad de Solución Global*)

Supongamos que la condición de Lipschitz global (G) se satisface. Entonces para cada $(\tau, u(\tau)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, *existe una única solución* $u(t, \tau, u(\tau))$ *de la DEPCAG* (1.5.1) *en el sentido de la Definición 1.*

Demostración: Por el Teorema 1.5.1, tenemos la existencia de una única solución $u(t, \tau, u(\tau))$ de (1.5.1) en $[t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$. Por la continuidad de u, la solución de (1.5.1) ės continua en $t = t_{i(\tau)+1}$, además se extiende el intervalo de existencia mediante la aplicación repetida del Teorema 1.5.1: usar $t_{i(\tau)+1}$ como el nuevo instante inicial y $u(t_{i(\tau)+1})$ como el nuevo estado inicial en $[t_{i(\tau)+1}, t_{i(\tau)+2}]$. Como $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una sucesion de números reales tal que $t_i < t_{i+1}$ y $t_i \to \pm\infty$ si $i \to \pm\infty$, aplicando sucesivamente el mismo argumento podemos llegar a cualquier intervalo $[t_j, t_{j+1}]$, $j \in \mathbb{Z}$. El Teorema 1.5.1 garantiza la existencia de $u(t, \tau, u(\tau))$ en cualquier intervalo $I_j = [t_j, t_{j+1}]$, $j \in \mathbb{Z}$ y es única. Como $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} I_i$, podemos asegurar la existencia y unicidad de $u(t, \tau, u(\tau))$ en $\mathbb{R}$, lo que completa la demostración. □

Corolario 1.5.1.

Supongamos que la condición de Lipschitz (LU) (1.2.7) *se satisface. Entonces para cada* $(\tau, u(\tau)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, *existe una única solución* $u(t, \tau, u(\tau))$ *de la DEPCAG* (1.5.1) *en el sentido de Definición 1.*

Demostración: El método de la demostración es análogo de la demostración de Teorema 1.5.1 y Teorema 1.5.2. □

Observemos que la condición de Lipschitz es suficiente para obtener la unicidad de las soluciones de (1.5.1) pero, si no tenemos la condición de Lipschitz. ¿Podría el P.V.I. (1.5.1) tener solución? La respuesta a esta pregunta la da el siguiente resultado.

Teorema 1.5.3. *Supongamos que la condición (C) se satisface. Sea*

$$|f(t, u_1, u_2)| \leq M, \tag{1.5.2}$$

para todo $(t, u_1, u_2) \in [t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. *Definimos*

$$\mathbb{D} = \{u \in C[[t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}], \mathbb{R}^n] | u(\tau) = u_0, |u(t) - u_0| \leq M\left(t_{i(\tau)+1} - t_{i(\tau)}\right)\}.$$

Entonces, para cada $(\tau, u(\tau)) \in [t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}] \times \mathbb{R}^n$, *existe al menos una solución* $u(t, \tau, u(\tau))$ *de la DEPCAG* (1.5.1) *en* $\mathbb{D}$.

Demostración: Definamos el operador T de la siguiente manera:

$$Tu(t) = u(\tau) + \int_\tau^t f(s, u(s), u(\gamma(s)))ds, \ t \in [t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]. \tag{1.5.3}$$

Demostraremos que el operador T definido por (1.5.3) es completamente continuo y el conjunto $\mathbb{D}$ es invariante por el operador T, el resultado es una consecuencia del teorema del punto fijo de Schauder.
Primero, probaremos que $\mathbb{D}$ es invariante por el operador T.
Es obvio que

$$|Tu(t) - u_0| \leqslant \left| \int_\tau^t |f(s, u(s), u(\gamma(s)))|\, ds \right| \leqslant M\, |t - \tau| \leqslant M \left(t_{i(\tau)+1} - t_{i(\tau)}\right),$$

para todo $t \in [t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$, donde M se define en (1.5.2). Por eso, $T(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.
Ahora, probaremos que T es completamente continuo.
Probemos primero que $T(\mathbb{D})$ es un conjunto equicontinuo. Sea $u \in \mathbb{D}$, $\kappa_1, \kappa_2 \in [t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$. Entonces,

$$|Tu(\kappa_1) - Tu(\kappa_2)| \leqslant \left| \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |f(s, u(s), u(\gamma(s)))|\, ds \right| \leqslant M\, |\kappa_2 - \kappa_1|,$$

lo cual prueba la equicontinuidad de $T(\mathbb{D})$. Como $T(\mathbb{D})$ es uniformemente acotado, se sigue que la clausura de $T(\mathbb{D})$ es compacto.
Finalmente, demostremos que T es continuo.
Recordamos que $u(\tau) = u_0$ y ahora consideramos

$$\mathbb{B} = \{u \in \mathbb{R}^n |\, |u - u_0| \leq M \left(t_{i(\tau)+1} - t_{i(\tau)}\right)\}.$$

Como $f(t, x, v)$ es continua para (t, x, v) sobre el compacto $[t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}] \times \mathbb{B} \times \mathbb{B}$, luego, $f(t, x, v)$ es uniformemente continua sobre $[t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}] \times \mathbb{B} \times \mathbb{B}$. Entonces, para cada $\varepsilon' > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon') > 0$ tal que si $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$, $|v_1 - v_2| \leqslant \delta$ $(x_i, v_i \in \mathbb{B},\ i = 1, 2)$ y $s \in [t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$, entonces,

$$|f(s, x_1, v_1) - f(s, x_2, v_2)| \leqslant \varepsilon'.$$

Sean $u_1, u_2 \in \mathbb{D}$, dado un $\varepsilon > 0$, tomar $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{t_{i(\tau)+1} - t_{i(\tau)}} > 0$.
Entonces, para $\|u_1 - u_2\| = \sup\limits_{s \in [t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]} |u_1(s) - u_2(s)| < \delta$, tenemos que

$$\begin{aligned} |Tu_1(t) - Tu_2(t)| &\leq \left| \int_\tau^t |f(s, u_1(s), u_1(\gamma(s))) - f(s, u_2(s), u_2(\gamma(s)))|\, ds \right| \\ &< \varepsilon'(t_{i(\tau)+1} - t_{i(\tau)}) = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual prueba la continuidad de T. Como el operador T es completamente continuo y $T(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, por lo tanto, podemos aplicar el teorema del punto fijo de Schauder, entonces (1.5.1) tiene al menos una solución en $\mathbb{D}$. $\square$

Observación 1.5.2.

Cuando $f(t, u(t), u(\gamma(t)))$ se descompone en $A(t)u(t) + \widetilde{f}(t, u(t), u(\gamma(t)))$, entonces, la solución u de la ecuación (1.5.1) corresponde a la solución y de sistema semi-lineal de la DEPCAG del estilo:

$$y'(t) = A(t)y(t) + \widetilde{f}(t, y(t), y(\gamma(t))), \tag{1.5.4}$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, las funciones $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\widetilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son continuas y $\gamma(t) = \xi_i$, si $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $\widetilde{f}$ satisface (1.2.5) y (1.4.22).
Con el mismo método que estudiamos la existencia de solución de la DEPCAG (1.5.1), podemos estudiar el problema de valor inicial para el sistema semi-lineal de la DEPCAG (1.5.4).

Observación 1.5.3.

En 2007, Akhmet [5] estudia la existencia y unicidad de DEPCAG:

$$y'(t) = Ay(t) + \widetilde{f}(t, y(t), y(\gamma(t))), \tag{1.5.5}$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz constante de tamaño $n \times n$, $\widetilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y $\gamma(t) = \xi_i$, si $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$. Además supone que
(LGU) $\widetilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua tal que

$$\left|\widetilde{f}(t, x_1, y_1) - \widetilde{f}(t, x_2, y_2)\right| \leqslant L\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right), \tag{1.5.6}$$

donde $L \in \mathbb{R}_+$ y $f(t, 0, 0) = 0$.
(M) Sean m, M dos números reales positivos tales que $m \leq |\exp(A(t-s))| \leq M$, donde $|t - s| \leq \theta = \sup_{j \in \mathbb{Z}} (t_{j+1} - t_j)$.
Supone además las siguientes relaciones:

$$2ML\theta < 1,\ ML\theta \exp(ML\theta) < 1,\ \text{y}\ M^2L\theta\left\{\frac{ML\theta\exp(ML\theta) + 1}{1 - ML\theta\exp(ML\theta)} + ML\theta\exp(ML\theta)\right\} < m.$$

Si las condiciones (LGU) y (M) se cumplen, entonces para cada $(\tau, u(\tau)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, existe una única solución $u(t, \tau, u(\tau))$ en $\mathbb{R}$ de la DEPCAG (1.5.5) en el sentido de la Definición 1.

Según la Observación 1.5.2, si tomamos un caso particular $A(t) \equiv A$ y supongamos que $\widetilde{f}$ se satisface la condición de (LGU), además la condición de (M) se cumple con las siguientes relaciones:

$$2ML(\xi_i - t_i) \leq 2ML\rho_1 < 1,\ 2ML(t_{i+1} - \xi_i) \leq 2ML\rho_2 < 1,\ i \in \mathbb{Z}, \tag{1.5.7}$$

donde, $\rho_1 := \sup_{i \in \mathbb{Z}} (\xi_i - t_i)$ y $\rho_2 := \sup_{i \in \mathbb{Z}} (t_{i+1} - \xi_i)$. Entonces, podemos garantizar la existencia y la unicidad de solución de la DEPCAG (1.5.5).

Al comparar el resultado de Akhmet con el nuestro, es fácil observar que nuestra condición para asegurar la existencia y la unicidad de la DEPCAG (1.5.5) es más débil que la de Akhmet. En cuanto a la condición (M), no es necesario pedir tantas estimaciones, sólo consideramos (1.5.7). Incluso, podemos construir fácilmente un ejemplo que no satisface la condición (M), donde nuestro resultado vale y el de Akhmet no.

Ejemplo. Tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y consideramos $\gamma(t) = 2\left[\frac{t+1}{2}\right]$. En este caso, tenemos $M = \exp(2)$, $m = 1$, si consideramos una función de lipschitz cualquiera (por ejemplo $f(t, y(t), y(2\left[\frac{t+1}{2}\right])) = L[y(t) + \operatorname{sen}(y(2\left[\frac{t+1}{2}\right]))])$ con una constante de Lipschitz L tal que $\frac{1}{4\exp(2)} \leq L < \frac{1}{2\exp(2)}$. Entonces, este ejemplo ilustra que nuestro resultado vale, y el de Akhmet no.

Con nuestros resultados puede mejorar el estudio de la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos.

1.5.2. Dependencia Continua de las Soluciones Respecto a las Condiciones Iniciales

Hasta el momento, siempre hemos fijado sólo una condición inicial y buscado luego una solución de (1.5.1). El objetivo de esta sección consiste en estudiar el comportamiento de las soluciones de la DEPCAG (1.5.1) en relación con la variación de las condiciones iniciales. Pero, si variamos "poco" los valores iniciales, vale la pena preguntarse : ¿Cómo se comportarán las soluciones que corresponden a las condiciones iniciales "cercanas" a $(\tau, u(\tau))$? ¿Se mantendrán cercanas entre si dichas soluciones? Si esto sucede, ¿sobre qué tipo de intervalos se mantendrá la cercanía?

Para que la solución de la ecuación (1.5.1) sea de algún interés, debe depender continuamente de la condición inicial, y de la función $f(t, u(t), u(\gamma(t)))$. Con la forma de variación de parámetros (1.3.3) la dependencia continua de las condiciones iniciales es fácil conseguir.

Por dependencia continua de la condición inicial entendemos lo siguiente: sea $u(t)$ la solución de (1.5.1) que comienza en $u(\tau) = u_0$ y está definida en el intervalo compacto $[\tau, \kappa]$; dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo y_0 con $|y_0 - u_0| \leq \delta$, la ecuación $u'(t) = f(t, u(t), u(\gamma(t)))$ tiene una única solución $y(t)$ definida en $[\tau, \kappa]$, con $y(\tau) = y_0$, y satisface $|u(t) - y(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [\tau, \kappa]$.

En lo que sigue, procederemos a mostrar que si las soluciones de (1.5.1) son únicas, entonces ellas dependen continuamente de las condiciones iniciales.

Teorema 1.5.4.
Supongamos que la condición de Lipschitz global (G) se satisface. Entonces, las soluciones de la DEPCAG (1.5.1) *dependen continuamente de las condiciones iniciales.*

Demostración: Sea φ una solución de (1.5.1) con la condición inicial (τ, u_0). Tenemos para $t \in (\alpha, \beta)$

$$\varphi(t) = u_0 + \int_\tau^t f(s, \varphi(s), \varphi(\gamma(s)))ds.$$

Sea ψ es una solución de (1.5.1) con la condición inicial $(\widehat{\tau}, \widehat{u}_0)$, tenemos para $\widehat{t} \in (\alpha, \beta)$

$$\psi(t) = \widehat{u}_0 + \int_{\widehat{\tau}}^t f(s, \psi(s), \psi(\gamma(s)))ds.$$

Descomponemos

$$\int_\tau^t f(s, \varphi(s), \varphi(\gamma(s)))ds = \int_{\widehat{\tau}}^t f(s, \varphi(s), \varphi(\gamma(s)))ds + \int_\tau^{\widehat{\tau}} f(s, \varphi(s), \varphi(\gamma(s)))ds. \quad (1.5.8)$$

Por (1.5.8) tenemos

$$\varphi(t)-\psi(t)=u_0-\widehat{u}_0+\int_{\widehat{\tau}}^{t}\left(f(s,\varphi(s),\varphi(\gamma(s)))-f(s,\psi(s),\psi(\gamma(s)))\right)ds+\int_{\tau}^{\widehat{\tau}}f(s,\varphi(s),\varphi(\gamma(s)))ds.$$

Luego,

$$\begin{aligned}|\varphi(t)-\psi(t)| &\leqslant |u_0-\widehat{u}_0|+\int_{\widehat{\tau}}^{t}|f(s,\varphi(s),\varphi(\gamma(s)))-f(s,\psi(s),\psi(\gamma(s)))|\,ds\\ &\quad+\int_{\tau}^{\widehat{\tau}}|f(s,\varphi(s),\varphi(\gamma(s)))|\,ds.\end{aligned}$$

Usando la condición de Lipschitz (1.2.5) para estimar el lado derecho de expresión anterior, tenemos

$$|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant |u_0-\widehat{u}_0|+\int_{\widehat{\tau}}^{t}\eta_1(s)\,|\varphi(s)-\psi(s)|+\eta_2(s)\,|\varphi(\gamma(s))-\psi(\gamma(s))|\;ds+M\,|\widehat{\tau}-\tau|\,.$$

Si $|\tau-\widehat{\tau}|\leqslant\delta,\ \ |u_0-\widehat{u}_0|\leqslant\delta$, entonces tenemos

$$|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant\delta\,(1+M)+\left|\int_{\widehat{\tau}}^{t}\eta_1(s)\,|\varphi(s)-\psi(s)|+\eta_2(s)\,|\varphi(\gamma(s))-\psi(\gamma(s))|\,ds\right|.$$

Al aplicar el lema de Gronwall en DEPCAG (1.4.11), tenemos

$$\begin{aligned}|\varphi(t)-\psi(t)| &\leqslant\delta\,(1+M)\exp\left(\int_{\widehat{\tau}}^{t}\eta_1(s)+\frac{1}{1-\overline{v}}\eta_2(s)\,ds\right)\\ &\leqslant\delta\,(1+M)\exp\left(\int_{\widehat{\tau}}^{\beta}\eta_1(s)+\frac{1}{1-\overline{v}}\eta_2(s)\,ds\right).\square\end{aligned}$$

Observación 1.5.4.
El resultado que tenemos con la condición (G) (1.2.5), también es válido considerando la condición (LU) (1.2.7).

Capítulo 2

Existencia de Soluciones Periódicas de Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante por Trozos del Tipo Generalizado

Este capítulo está dedicado a estudiar e investigar varias condiciones suficientes para obtener la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales semilineales y no lineales con argumento constante por trozos del tipo generalizado, donde el correspondiente sistema lineal homogéneo no admite soluciones periódicas no triviales.

Para resolver el problema de la existencia de soluciones ω-periódicas para sistemas semilineales y con distintas perturbaciones en un contexto DEPCAG, utilizaremos un método basado en la construcción de una ecuación integral equivalente, luego encontraremos un punto fijo de un operador asociado a tal ecuación integral. Para resolver el problema del punto fijo, veremos primero una condición necesaria para asegurar la existencia de soluciones periódicas, definimos dos operadores: uno de los cuales pide una condición de Lipschitz para una función perturbada, luego aplicamos teoremas del punto fijo para asegurar su existencia. También en la última sección veremos ejemplos apropiados para ilustrar la teoría. Estudiaremos analíticamente dos modelos para el crecimiento continuo de una sola especie utilizando ecuaciones diferenciales donde hay términos con argumento constante por trozos. Esta clase de modelo puede servir para una representación anticipatoria de los fenómenos biológicos en el desarrollo de la dinámica de la población o especies. En nuestra modelación de la dinámica de la población, la anticipación significa un tipo de predicción cualitativa enriquecida por el momento activo de las decisiones adoptadas en el tiempo real presente. Por otra parte, parece que factores complejos, que no son necesariamente subjetivos, pueden ser considerados como una de las razones de una anticipación. Hay varias posibilidades para introducir previsión en los modelos. Nosotros proponemos considerar el modelo de DEPCAG, donde se maneje parámetros de avances y de retardos.

2.1. Ecuaciones e Hipótesis

Para $\omega > 0$, sea $\mathbb{P}_\omega$ el espacio de las funciones continuas periódicas en t con período ω. Entonces $(\mathbb{P}_\omega, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con la norma del supremo

$$\|y\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| = \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} |y(t)| .$$

Las ecuaciones que estudiamos en esta sección son ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos de tipo generalizado:

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t, y(t), y(\gamma(t))). \tag{2.1.1}$$

$$z'(t) = A(t)z(t) + f(t, z(t), z(\gamma(t))) + g(t, z(t), z(\gamma(t))). \tag{2.1.2}$$

Definición 2.

1. Un sistema $\varphi'(t) = h(t, \varphi(t), \varphi(\gamma(t)))$ de DEPCAG se llama **periódico** o **ω-periódico**, si existe un número real positivo ω tal que $h(t+\omega, \varphi(t), \varphi(\gamma(t))) = h(t, \varphi(t), \varphi(\gamma(t)))$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

2. Un sistema periódico $\varphi'(t) = h(t, \varphi(t), \varphi(\gamma(t)))$ de DEPCAG tiene una solución periódica de DEPCAG φ, si $\varphi(t+\omega) = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, para algún $\omega \in \mathbb{R}_+$.

3. Una solución periódica φ de un sistema ω-periódico se llama **armónica**, si φ es una solución ω-periódica.

4. Una solución periódica φ de un sistema ω-periódico se llama **subarmónica**, si φ es una solución ω_0-periódica, donde $\omega_0 = \frac{n_0}{m_0}\omega$, $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}_+$, n_0 y m_0 son relativamente primos.

5. Dos períodos ω y ω_0 se llaman **comparables** si existen $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}_+$ que son relativamente primos entre si tales que $\omega_0 = \frac{n_0}{m_0}\omega$.

Las suposiciones siguientes serán necesarias en este Capítulo:

Condición de Inversibilidad:
(N_ω) El sistema homogéneo ω-periódico,

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{2.1.3}$$

no tiene ninguna solución ω-periódica no trivial.

Condiciones de Periodicidades:
($P_1\omega$) $A(t)$ y $f(t, y_1, y_2)$ son funciones continuas ω-periódicas en t, para todo $t \in \mathbb{R}$.
($P_1\omega_0$) $A(t)$ y $f(t, y_1, y_2)$ son funciones continuas tales que A es ω_1-periódica y f es ω_2-periódica en t, para todo $t \in \mathbb{R}$.
($P_2\omega$) $A(t)$, $f(t, y_1, y_2)$ y $g(t, z_1, z_2)$ son funciones continuas ω-periódicas en t, para todo $t \in \mathbb{R}$.
($P_2\omega_0$) $A(t)$, $f(t, y_1, y_2)$ y $g(t, z_1, z_2)$ son funciones continuas tales que A es ω_1-periódica, f es ω_2-periódica y g es ω_3-periódica en t, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Condiciones de Continuidades:
(C_f) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua.
(C_g) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua.

Condiciones de Lipschitz:
(LG_f) Sean $\eta_i : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $i = 1, 2$ dos funciones localmente integrables tales que

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant \eta_1(t)\,|x_1 - x_2| + \eta_2(t)\,|y_1 - y_2|, \tag{2.1.4}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Sea $\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t, 0, 0)|$.
Supondremos además que existe una constante positiva ς tal que

$$c_\Phi \int_\tau^{\tau+\omega} [\eta_1(s) + \eta_2(s)]ds \leq \varsigma < 1, \text{ para todo } \tau \in \mathbb{R}, \tag{2.1.5}$$

donde $c_\Phi = \max_{t,s\in[\tau,\tau+\omega]} |\Phi(t, s)|$.
(LU_f) Sea L una constante positiva tal que

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant L(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \tag{2.1.6}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Sea $\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t, 0, 0)|$.
Supondremos además que existe una constante positiva ϑ tal que

$$2Lc_\Phi\omega \leq \vartheta < 1, \tag{2.1.7}$$

donde $c_\Phi = \max_{t,s\in[\tau,\tau+\omega]} |\Phi(t, s)|$.

(LL_f) Sean $p_i : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $i =$ 1,2 dos funciones localmente integrables tales que

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant p_1(t)\,|x_1 - x_2| + p_2(t)\,|y_1 - y_2|, \tag{2.1.8}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Sea $\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t, 0, 0)|$.
Supondremos además que

$$\sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} [p_1(s) + p_2(s)]\, ds \leqslant L_1, \text{ para algún } \omega \in \mathbb{R}_+,\ \tau \in \mathbb{R}.$$

(LL_g) Sean $v_i : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $i =$ 1,2 dos funciones localmente integrables tales que

$$|g(t, x_1, y_1) - g(t, x_2, y_2)| \leqslant v_1(t)\,|x_1 - x_2| + v_2(t)\,|y_1 - y_2|, \tag{2.1.9}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Sea $\beta = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t, 0, 0)|$.
Supondremos además que

$$\sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} [v_1(s) + v_2(s)]\, ds \leqslant L_2, \text{ para algún } \omega \in \mathbb{R}_+,\ \tau \in \mathbb{R}.$$

Condiciones Mayorantes:

(M_f) Para cada $R > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $|x|, |y| \leqslant R$, existen dos funciones positivas localmente integrables m_i, $i = 1, 2$ y $\rho_1 \in \mathbb{R}_+$ tales que

$$|f(t,x,y)| \leqslant m_1(t)\,|x| + m_2(t)\,|y| + \rho_1, \tag{2.1.10}$$

donde $\sup\limits_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} [m_1(s) + m_2(s)]\,ds \leqslant C_1$, para algún $\omega \in \mathbb{R}_+$, $\tau \in \mathbb{R}$.

(M_g) Para cada $R > 0$, $t \in [\tau, \tau+\omega]$, $|x|, |y| \leqslant R$, existen dos funciones positivas localmente integrables κ_i, $i = 1, 2$ y $\rho_2 \in \mathbb{R}_+$ tales que

$$|g(t,x,y)| \leqslant \kappa_1(t)\,|x| + \kappa_2(t)\,|y| + \rho_2, \tag{2.1.11}$$

donde $\sup\limits_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} [\kappa_1(s) + \kappa_2(s)]\,ds \leqslant C_2$, para algún $\omega \in \mathbb{R}_+$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Observación 2.1.1.

Sean $\widetilde{D} := (I - \Phi(\tau+\omega,\tau))$ y $D_1 := \left(\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau) - I\right)$ dos matrices $n\times n$, entonces la condición (N_ω) implica que $\widetilde{D}$ y D_1 son matrices invertibles para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Más aún, el sistema homogéneo ω-periódico, no tiene solución ω-periódica no trivial si y sólo si D_1 ó $\widetilde{D}$ es invertible.

En efecto: Primero D_1 es invertible, si y sólo si $\widetilde{D}$ es invertible, pues

$$\Phi(\tau+\omega)\left(\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau) - I\right)\Phi^{-1}(\tau) = (I - \Phi(\tau+\omega,\tau)).$$

Si D_1 o $\widetilde{D}$ es invertible, entonces, la ecuación

$$(\Phi(\tau+\omega,\tau))\,x(\tau) = x(\tau)\;(\Leftrightarrow (I - \Phi(\tau+\omega,\tau))\,x(\tau) = 0)$$

no tiene ninguna solución periódica no trivial, esto es $x(\tau) = 0$.

Como, $(\Phi(t,\tau))\,x(\tau)$ es una solución general del sistema homogéneo y la condición

$$(\Phi(\tau+\omega,\tau))\,x(\tau) = x(\tau)$$

representa precisamente la condición de periodicidad de soluciones del sistema homogéneo.

Por eso, la condición de inversibilidad de $\widetilde{D}$ es equivalente que el sistema homogéneo ω-periódico, no tenga solución ω-periódica no trivial.

Observación 2.1.2. [42]

El sistema homogéneo (2.1.3) no admite solución ω-periódica no trivial si y sólo si los valores propios de la matriz $\Phi(\tau+\omega,\tau)$ son distintos que 1.

Por lo tanto, si la matriz constante A tiene los valores propios con la parte real no nula o A es una matriz diagonal con las funciones diagonales no nulas. En ambos casos el sistema homogéneo (2.1.3) no admite solución ω-periódica no trivial.

A continuación veremos una condición necesaria para la existencia de soluciones periódicas de DEPCAG.

2.2. La condición (ω,p)

En esta sección veremos una condición necesaria para que la DEPCAG tenga la posibilidad del mínimo período ω, la cual se debe tener una relación entre las funciones de los parametros, los intervalos I_i y el argumento desviado $\gamma(t)$. Más expresivamente, si las frecuencias de periodicidades de las funciones de los parametros, los intervalos I_i y $\gamma(t)$ no son comparables, no hay ninguna posibilidád de tener la existencia de soluciones periódicas de DEPCAG. Ver Ejemplo 2.2.2. Por eso vemos la siguiente condición llamada (ω,p) que ocuparemos en todas partes de este Capítulo:

($P_{(\omega,p)}$) Diremos que las sucesiones $\{t_i\}, \{\xi_i\}$ satisfacen la condición (ω,p), si se cumple la siguiente relación, para algún $p \in \mathbb{N}$,

$$t_{i+p} = t_i + \omega, \ \xi_{i+p} = \xi_i + \omega, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{2.2.1}$$

Observamos que la condición (ω,p) es una relación discreta que desplaza el intervalo I_i en I_{i+p}.

Ejemplos 2.2.1.

1. Sea $t_{i+1}-\xi_i = \xi_i - t_i = d_0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, entonces, $\{t_i\}, \{\xi_i\}$ satisfacen la condición $(2d_0, 1)$. Un caso particular es considerar $\gamma(t) = \left[t+\frac{1}{2}\right]$, en este caso $t_i = i - \frac{1}{2}$ y $\xi_i = i$ satisfacen la condición $(1,1)$.
2. Sea $t_i = ip - l$ y $\xi_i = ip$, $0 < l < p$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, satisfacen la condición $(p, 1)$.
3. Sea $t_i = \xi_i = i + \frac{(-1)^i}{3}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, entonces, $\{t_i\}$ y $\{\xi_i\}$ satisfacen la condición $(2,2)$.
4. Sea $t_i = \alpha i,\ t_{i+1} = \alpha(i+1) - \alpha_0,\ \xi_i = \alpha i + \beta_0,\ \xi_{i+1} = 2\alpha(i+1) - \alpha_0 + \beta_1,\ i \in 2\mathbb{Z}$, donde, $\alpha, \alpha_0, \beta_0, \beta_1 > 0$, $2\alpha > \alpha_0 + \beta_0$, $\alpha_0 > \beta_1$. Entonces, $\{t_i\}, \{\xi_i\}$ satisfacen la condición $(2\alpha, 2)$.

Ahora presentamos algunas simples consecuencias de la condición (ω,p):

1. Si la sucesión $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, satisface la condición (ω,p), entonces, para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$ el intervalo $[\tau, \tau+\omega]$ se puede descomponer en la siguiente manera:

$$[\tau, t_{i(\tau)+1}] \cup \bigcup_{j=i(\tau)+1}^{i(\tau)+p-1} I_j \cup [t_{i(\tau)+p}, \tau+\omega].$$

2. Si la sucesión $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, satisface la condición (ω,p), entonces, $t \in [t_i, t_{i+1})$ implica

$$\text{(a) } t+\omega \in [t_{i+p}, t_{i+p+1}), \ \text{(b) } \xi_i + \omega \in [t_{i+p}, t_{i+p+1}).$$

Si la sucesión $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ satisface la condición (ω,p) (esto es $\xi_{i+p} = \xi_i + \omega$), tenemos

$$\gamma(t+\omega) = \gamma(t) + \omega.$$

3. Si las sucesiones $\{t_i\}$, $\{\xi_i\}$ satisfacen la condición (ω,p), la función γ no es ω-periódica $(\omega \neq 0)$. Pero, si supongamos que x es una función ω-periódica, entonces, la composición de x con γ es ω-periódica, esto es $x(\gamma(t)) = x(\gamma(t+\omega))$.

   De hecho,
$$x(\gamma(t+\omega)) = x(\gamma(t)+\omega) = x(\gamma(t)).$$

Observación 2.2.1.
Nótese que la condición (ω,p) es bastante simple. A pesar de esto, esta condición y sus consecuencias son importantes, pues nos da una forma para estudiar la periodicidad de la perturbación de la ecuación diferencial con argumento constante por trozos del tipo generalizado.

Ejemplo 2.2.2.
En el año 2000, Seifert [45] considera una ecuación logística retardada con argumento constante por trozos:
$$u'(t) = u(t)\left(a(t) - f(u([t]))\right), \ t > 0, \tag{2.2.2}$$
con la condición inicial $u(0) = u_0$, $f(x)$ es continuamente diferenciable para $x > 0$, $f(0) = 0$, $f(x) > 0$. Demuestra que si ω es un número irracional y $a(t+\omega) = a(t)$, entonces (2.2.2) no tiene ninguna solución ω-periódica. La razón más sencilla de explicar esto es que las frecuencias de períodos irracionales y de la función de parte entera no son comparables, en la teoría de funciones periódicas, si se suman dos funciones de períodos no comparables, la nueva función nunca puede ser periódica sino casi periódica.

Observación 2.2.2.
Para $m, n, r \in \mathbb{Q}$, sea m.c.m(m,n,r) el mínimo común múltiplo de m, n y r. Consideremos la ecuación escalar con argumento constante por trozos:
$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t, y(t), y(\gamma(t))), \ t \geqslant \tau, \tag{2.2.3}$$
con la condición inicial $y(\tau) = y_0$, $f(t, y_1, y_2)$ es una función periódica en t con período $m\omega$, para todo $t \geqslant \tau$, $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, y $a(t)$ es una función $n\omega$-periódica, además $\{t_i\}, \{\xi_i\}$, satisfacen la condición $(r\omega,p)$. Entonces, la posible periodicidad de la solución (2.2.3) es m.c.m$(m,n,r)\omega-$periódica.

A continuación veremos dos operadores que usaremos en el estudio de la existencia de una solución periódica en un contexto DEPCAG, el primer operador requiere la condición de Lipschitz para la función perturbada y el segundo operador no la necesita.

2.3. Operador de Poincaré

Ahora veremos un operador P llamado operador de Poincaré, el cual se usará en el estudio de las soluciones periódicas de la ecuación diferencial con argumento constante por trozos de tipo generalizado. Este operador involucra distintas situaciones y se usa sólo cuando podemos suponer la unicidad de la solución de DEPCAG. Entonces, la existencia de soluciones ω-periódicas para sistemas ω-periódicos del tipo (2.1.1) es equivalente a resolver un problema de frontera del tipo $y(\tau) = y(\tau + \omega)$, donde $\omega > 0$ representa el período de la solución buscada (Ver Observación 2.3.1. y Lema 2.5.1). Este tipo de problemas es de gran importancia en la práctica. En el operador de Poincaré, supondremos que τ es cualquier t_i, $i \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.3.1.
Sea $y(t, \tau, \xi)$ la solución de la DEPCAG (2.1.1) *con la condición inicial $y(\tau) = \xi$ y $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo* (2.1.3). *Supongamos que la condición (N_ω) se satisface. Definimos el operador $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$P\xi = \widetilde{D}\left(y(\tau + \omega, \tau, \xi) - C\xi\right), \tag{2.3.1}$$

donde $C = \Phi(\tau + \omega, \tau)$, $\widetilde{D} = (I - C)^{-1}$.

Observación 2.3.1.
Nótese que si ξ es un punto fijo de P, entonces la solución $y(t) = y(t, \tau, \xi)$ es ω-periódica. En efecto, $P\xi = \widetilde{D}\left(y(\tau + \omega, \tau, \xi) - C\xi\right) = \xi$ implica $y(\tau + \omega, \tau, \xi) = C\xi + \widetilde{D}^{-1}\xi = \xi$, esto es $y(\tau + \omega, \tau, \xi) = \xi = y(\tau)$.

Lema 2.3.1:
Supongamos que la condición (LG_f) se cumple. Sea $y_i(t) = y(t, \tau, \xi_i)$, $i = 1, 2$ solución de la DEPCAG (2.1.1), *entonces tenemos la siguiente estimación:*

$$\max_{t \in [\tau, \tau+\omega]} |y_1(t) - y_2(t)| \leq \left(\frac{c_\Phi}{1 - \varsigma}\right) |\xi_1 - \xi_2|, \tag{2.3.2}$$

donde ς se define en (2.1.5) y $c_\Phi = \max\limits_{t,s \in [\tau, \tau+\omega]} |\Phi(t, s)|$.

Demostración: Sean y_1, y_2 dos soluciones de la DEPCAG (2.1.1) con ξ_1, ξ_2 dos condiciones iniciales respectivamente y $c_\Phi = \max\limits_{t,s \in [\tau, \tau+\omega]} |\Phi(t, s)|$. Por la fórmula de variación de parámetros (1.3.2) y la condición de (LG_f) (2.1.4) tenemos

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &\leq |\Phi(t, \tau)|\,|\xi_1 - \xi_2| + \int_\tau^t |\Phi(t, s)|\,|f(s, y_1(s), y_1(\gamma(s))) - f(s, y_2(s), y_2(\gamma(s)))|\,ds \\ &\leq c_\Phi\,|\xi_1 - \xi_2| + c_\Phi \int_\tau^t \eta_1(s)\,|y_1(s) - y_2(s)| + \eta_2(s)\,|y_1(\gamma(s)) - y_2(\gamma(s))|\,ds. \end{aligned}$$

Luego,

$$\max_{t \in [\tau, \tau+\omega]} |y_1(t) - y_2(t)| \leq c_\Phi\,|\xi_1 - \xi_2| + \left(c_\Phi \int_\tau^{\tau+\omega} \eta_1(s) + \eta_2(s) ds\right) \max_{t \in [\tau, \tau+\omega]} |y_1(t) - y_2(t)|.$$

Por (2.1.5), tenemos (2.3.2).

Ahora, establecemos una importante propiedad de P.

Lema 2.3.2.

Supongamos que las condiciones (LG_f) y (N_ω) se cumplen, entonces, $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función de Lipschitz.

Demostración: Por el Teorema 1.3.1, tenemos

$$y(t) = \Phi(t,\tau)\xi + \int_\tau^t \Phi(t,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds, \tag{2.3.3}$$

donde, $\tau \in \mathbb{R}$ y $y(\tau) = \xi$. Por eso,

$$y(\tau+\omega,\tau,\xi) - C\xi = \int_\tau^{\tau+\omega} \Phi(\tau+\omega,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds.$$

Sean ξ_1, ξ_2 dos condiciones iniciales y $c_\Phi = \max\limits_{t,s\in[\tau,\tau+\omega]} |\Phi(t,s)|$, entonces

$$\begin{aligned}
|P\xi_1 - P\xi_2| &= \left|\widetilde{D}\left(y_1(\tau+\omega,\tau,\xi_1) - y_2(\tau+\omega,\tau,\xi_2)\right) - \widetilde{D}C\left(\xi_1-\xi_2\right)\right| \\
&\leqslant \left|\widetilde{D}\right| \int_\tau^{\tau+\omega} |\Phi(\tau+\omega,s)|\,|f(s,y_1(s),y_1(\gamma(s))) - f(s,y_2(s),y_2(\gamma(s)))|\,ds \\
&\leqslant c_\Phi \left|\widetilde{D}\right| \int_\tau^{\tau+\omega} [\eta_1(s)\,|y_1(s)-y_2(s)| + \eta_2(s)\,|y_1(\gamma(s)) - y_2(\gamma(s))|]\,ds \\
&\leq \left(c_\Phi \left|\widetilde{D}\right| \int_\tau^{\tau+\omega} [\eta_1(s)+\eta_2(s)]\,ds\right) \max_{t\in[\tau,\tau+\omega]} |y_1(t) - y_2(t)|\,.
\end{aligned}$$

Por el Lema 2.3.1, tenemos

$$|P\xi_1 - P\xi_2| \leq \left(\frac{c_\Phi\varsigma|\widetilde{D}|}{1-\varsigma}\right)|\xi_1-\xi_2|\,, \tag{2.3.4}$$

donde ς se define en (2.1.5). Esto muestra que el operador P es una función de Lipschitz. □

Observación 2.3.3.

Supongamos que $\xi_2 = 0$ en el Lema 2.3.2, (2.3.1) implica $|P\xi_2| \leq \alpha c_\Phi\omega|\widetilde{D}|$. Entonces, tomamos $\xi_1 = \xi$ y tenemos

$$|P\xi| \leq \left(\frac{c_\Phi\varsigma|\widetilde{D}|}{1-\varsigma}\right)|\xi| + \alpha c_\Phi\omega|\widetilde{D}|. \tag{2.3.5}$$

Observación 2.3.4.

El resultado que tenemos para la condición (LG_f), también es válido para (LU_f), simplemente considerar $\eta_1(t) \equiv \eta_2(t) \equiv L$.

2.4. Operador de Green

Ahora veremos el operador de Green construido a partir de la Matriz de Green $G(t,s)$ que se usará en el estudio de las soluciones periódicas de la ecuación diferencial con argumento constante por trozos de tipo generalizado sin suponer la condición de Lipschitz para la función perturbada ni la unicidad de solución de las DEPCAG (2.1.1) y (2.1.2).

Definición 2.4.1:

Dado el sistema (2.1.1), *supongamos que la condición* (N_ω) *se cumple. Sea* $\Phi(t)$ *una matriz fundamental del sistema homogéneo* (2.1.3),

$$D = \left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} - I\right)^{-1}. \tag{2.4.1}$$

Para cada $t,s \in [\tau,\tau+\omega]$, *definimos la Matriz de Green* G *como*

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi(t)(I+D)\Phi^{-1}(s), & \tau \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau+\omega \\ \Phi(t)D\Phi^{-1}(s), & \tau \leqslant t < s \leqslant \tau+\omega \end{cases} \tag{2.4.2}$$

y la llamamos Matriz de Green G(t,s) del sistema (2.1.1).

Las propiedades de la Matriz de Green $G(t,s)$ son las siguientes:

1. $G(\tau,s) = G(\tau+\omega,s)$,
2. $G(t,s) = G(t+\omega,s+\omega)$,
3. $\frac{dG(t,s)}{dt} = A(t)G(t,s),\ t \neq s$,
4. $\lim\limits_{t\to s^+} G(t,s) - \lim\limits_{t\to s^-} G(t,s) = I$,
5. $\lim\limits_{t\to s^+} \frac{dG(t,s)}{dt} - \lim\limits_{t\to s^-} \frac{dG(t,s)}{dt} = A(s)$.

Las propiedades 3)-5) son simplemente las propiedades de una matriz fundamental asociada al sistema (2.1.3). En cuanto a las propiedades 1) y 2), las probaremos más adelante en el Lema 2.4.3 y el Lema 2.4.4.

Observación 2.4.1.

Como $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)C$, tomando $t=\tau$, tenemos $C = \Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)$. Por lo tanto, $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)$. Análogamente, tenemos $\Phi(t-\omega) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau-\omega)$.

Lema 2.4.1.

Sea $A(t)$ *una matriz* ω*-periódica, entonces* $\Phi(t+\omega,s+\omega) = \Phi(t,s)$.

Demostración: Si denotamos $V(t,s) = \Phi(t+\omega,s+\omega) - \Phi(t,s)$, entonces

$$\frac{dV(t,s)}{dt} = A(t)V(t,s) + \left(A(t+\omega) - A(t)\right)\Phi(t+\omega,s+\omega).$$

Al integrar la ecuación anterior, tenemos

$$V(t,s) = \int_s^t \Phi(t,u)\left(A(u+\omega) - A(u)\right)\Phi(u+\omega,s+\omega)du$$

Pero, $A(t)$ es una matriz ω-periódica, por eso, $V(t,s) = 0$, de donde $\Phi(t+\omega,s+\omega) = \Phi(t,s)$. □

Lema 2.4.2.

Sea $A(t)$ una matriz ω-periódica, entonces,

$$\Phi^{-1}(c+\omega)\Phi(c) = \Phi^{-1}(d+\omega)\Phi(d), \quad \text{para todo } c, d \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Por el Lema 2.4.1, si $A(t)$ es una matriz ω-periódica, entonces $\Phi(d+\omega, c+\omega) = \Phi(d, c)$. Por lo tanto,

$$\Phi(d+\omega, c+\omega) = \Phi(d, c) \Leftrightarrow \Phi(d+\omega)\Phi^{-1}(c+\omega) = \Phi(d)\Phi^{-1}(c)$$

$$\Leftrightarrow \Phi^{-1}(c+\omega)\Phi(c) = \Phi^{-1}(d+\omega)\Phi(d) \ (\Leftrightarrow \left(\Phi^{-1}(c)\Phi(c+\omega)\right)^{-1} = \left(\Phi^{-1}(d)\Phi(d+\omega)\right)^{-1}). \ \square$$

Observación 2.4.2.

Por el Lema 2.4.2, nos damos cuenta que no importa en qué intervalo de longitud ω están t y s, la matriz de Green siempre define lo mismo, pues al tomar $c = \tau$, $d = a$ en el Lema 2.4.2 tenemos

$$\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} = \left(\Phi^{-1}(a)\Phi(a+\omega)\right)^{-1}. \tag{2.4.3}$$

Si define $D_a := \left(\left(\Phi^{-1}(a)\Phi(a+\omega)\right)^{-1} - I\right)^{-1}$ y por la relación anterior tenemos $D = D_a$. Así que podemos reescribir la matriz de Green en la siguiente manera:

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi(t)(I+D)\Phi^{-1}(s), & a \leqslant s \leqslant t \leqslant a+\omega \\ \Phi(t)D\Phi^{-1}(s), & a \leqslant t < s \leqslant a+\omega \end{cases}$$

para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

Lema 2.4.3.

Supongamos que la condicion (N_ω) se cumple. Sea $D = \left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} - I\right)^{-1}$, *donde $\Phi(t)$es una matriz fundamental del sistema homogéneo* (2.1.3), *entonces tenemos las siguientes igualdades:*

$$(I+D) = \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} D = \left(I - \Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1}, \tag{2.4.4}$$

$$\Phi(t)D\Phi^{-1}(t+\omega) - \Phi(t)D\Phi^{-1}(t) = I, \tag{2.4.5}$$

$$(I+D)\Phi^{-1}(\tau-\omega)\Phi(\tau) = D. \tag{2.4.6}$$

Demostración:

$a)$ $I - \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right) + \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right) = I$

$$\Leftrightarrow \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)\left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} - I\right) + \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right) = I$$

$$\Leftrightarrow \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right) + \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)\left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} - I\right)^{-1}$$

$$= \left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} - I\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow I + \left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} - I\right)^{-1} = \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1}\left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} - I\right)^{-1}.$$

$$\begin{aligned} b)\ \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} D &= \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1}\left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} - I\right)^{-1} \\ &= \left(\left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} - I\right)\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)\right)^{-1} \\ &= \left(I - \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Por a) y b) se concluyen (2.4.4).

c) Por la Observación 2.4.1, tenemos $\Phi^{-1}(t+\omega) = \Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)$. De donde,

$$\begin{aligned} \Phi(t)D\Phi^{-1}(t+\omega) - \Phi(t)D\Phi^{-1}(t) &= \Phi(t)D\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t) - \Phi(t)D\Phi^{-1}(t) \\ &= \Phi(t)D\left(\left(\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau) - I\right)\right)\Phi^{-1}(t) \\ &= I. \end{aligned}$$

d) Por la Observación 2.4.1 y (2.4.3) tenemos

$$\Phi(t-\omega) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau-\omega)\ y\ \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} = \left(\Phi^{-1}(\tau-\omega)\Phi(\tau)\right)^{-1}.$$

Al reemplazar las dos relaciones anteriores obtenemos (2.4.6).
En efecto:

$$\begin{aligned} (I+D)\Phi^{-1}(\tau-\omega)\Phi(\tau) &= \left(I - \Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1}\Phi^{-1}(\tau-\omega)\Phi(\tau) \\ &= \left(I - \Phi^{-1}(\tau-\omega)\Phi(\tau)\right)^{-1}\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau-\omega)\right)^{-1} \\ &= \left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau-\omega)\right) - I\right)^{-1} \\ &= \left(\left(\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)\right) - I\right)^{-1} = D. \ \square \end{aligned}$$

Nótese que por (2.4.4) se sigue que $G(\tau, s) = G(\tau+\omega, s)$.

Ahora veamos un resultado importante que nos da una condición para estudiar la solución periódica del sistema (2.1.1).

Lema 2.4.4.
La Matriz de Green $G(t,s)$ es doblemente ω-periódica, i.e. $G(t+\omega, s+\omega) = G(t,s)$.
Demostración: Supongamos $s, t \in [\tau, \tau+\omega]$.
Caso 1: $\tau \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau+\omega$.

$$\begin{aligned} &\Phi(t+\omega)\left(I - \Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau+2\omega)\right)^{-1}\Phi^{-1}(s+\omega) \\ &= \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\left(I - \Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1}\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)\Phi^{-1}(s) \\ &= \Phi(t)\left(\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau) - I\right)^{-1}\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)\Phi^{-1}(s) \\ &= \Phi(t)\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau) - \Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1}\Phi^{-1}(s) \\ &= \Phi(t)\left(I - \Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1}\Phi^{-1}(s). \end{aligned}$$

Caso 2: $\tau \leqslant t < s \leqslant \tau + \omega$.

$$\begin{aligned}
&\Phi(t+\omega)\left(\left(\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau+2\omega)\right)^{-1}-I\right)^{-1}\Phi^{-1}(s+\omega)\\
&=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\left(\Phi^{-1}(\tau+2\omega)\Phi(\tau+\omega)-I\right)^{-1}\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)\\
&=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\left(\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)-I\right)^{-1}\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)\\
&=\Phi(t)\left\{\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)\right.\\
&\qquad\left.-\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)\right\}^{-1}\Phi^{-1}(s)\\
&=\Phi(t)\left(\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau)-I\right)^{-1}\Phi^{-1}(s)\\
&=\Phi(t)\left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1}-I\right)^{-1}\Phi^{-1}(s).
\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración del Lema. □

Proposición 2.4.1.
Supongamos que las condiciones (N_ω), ($P_{(\omega,p)}$) y ($P_1\omega$) se satisfacen. Entonces para cualquier $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $y(t) = y(t,\tau,\xi)$ es una solución ω-periódica de la DEPCAG (2.1.1) *en el sentido de la Definición 2 si y sólo si es una solución ω-periódica de la ecuación integral*

$$y(t) = \int_{\tau}^{\tau+\omega} G(t,s) f(s, y(s), y(\gamma(s)))ds, \text{ para } t \in [\tau, \tau+\omega], \tag{2.4.7}$$

donde $G(t,s)$ es la Matriz de Green.

Demostración: Sea $y(t) = y(t,\tau,\xi)$ una solución ω-periódica de la DEPCAG (2.1.1) y que satisface la condición inicial $y(\tau) = \xi$. Por la fórmula de variación de parámetros en DEPCAG (1.3.2), tenemos

$$y(t) = \Phi(t,\tau)\xi + \int_{\tau}^{t} \Phi(t,s) f(s, y(s), y(\gamma(s)))ds, \tag{2.4.8}$$

donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema (2.1.3). Por otra parte, si $y(t,\tau,\xi)$ es ω-periódica, entonces $y(t+\omega,\tau,\xi) = y(t,\tau,\xi)$. Luego, reemplazando $t = \tau + \omega$ en (2.4.8) y $y(\tau+\omega,\tau,\xi) = y(\tau,\tau,\xi)$, se obtiene que

$$\xi = y(\tau+\omega) = \Phi(\tau+\omega,\tau)\xi + \int_{\tau}^{\tau+\omega} \Phi(\tau+\omega,s) f(s, y(s), y(\gamma(s)))ds,$$

de donde se sigue:

$$\left(I - \Phi(\tau+\omega,\tau)\right)\xi = \int_{\tau}^{\tau+\omega} \Phi(\tau+\omega,s) f(s, y(s), y(\gamma(s)))ds\,.$$

Por (N_ω) y la Observación 2.1.1, $\det\left(I - \Phi(\tau+\omega,\tau)\right) \neq 0$, se obtiene que

$$\xi = \left(I - \Phi(\tau+\omega,\tau)\right)^{-1} \int_{\tau}^{\tau+\omega} \Phi(\tau+\omega,s) f(s, y(s), y(\gamma(s)))ds\,.$$

Al reemplazar ξ, dado por la expresión anterior, en (2.4.8) obtenemos que

$$y(t) = \Phi(t,\tau)\left(I - \Phi(\tau+\omega,\tau)\right)^{-1} \int_{\tau}^{\tau+\omega} \Phi(\tau+\omega,s) f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds$$
$$+ \int_{\tau}^{t} \Phi(t,s) f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds,$$

que podemos reescribir en la siguiente forma:

$$y(t) = \int_{\tau}^{\tau+\omega} G(t,s) f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds.$$

En efecto: Tenemos que

$$\Phi^{-1}(\tau)\left(I - \Phi(\tau+\omega,\tau)\right)^{-1} \Phi(\tau+\omega) = \left(\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau) - I\right)^{-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \Phi(t,\tau)\left(I - \Phi(\tau+\omega,\tau)\right)^{-1} \int_{\tau}^{t} \Phi(\tau+\omega,s) f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&\quad + \Phi(t,\tau)\left(I - \Phi(\tau+\omega,\tau)\right)^{-1} \int_{t}^{\tau+\omega} \Phi(\tau+\omega,s) f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&\quad + \int_{\tau}^{t} \Phi(t,s) f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&= \int_{\tau}^{t} \Phi(t)\left(\left(\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau) - I\right)^{-1} + I\right)\Phi(s)^{-1} f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&\quad + \int_{t}^{\tau+\omega} \Phi(t)\left(\Phi^{-1}(\tau+\omega)\Phi(\tau) - I\right)^{-1}\Phi^{-1}(s) f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&= \int_{\tau}^{t} \Phi(t)(I+D)\Phi(s)^{-1} f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds + \int_{t}^{\tau+\omega} \Phi(t) D \Phi^{-1}(s) f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\omega} G(t,s) f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
y(t+\omega) &= \int_{\tau+\omega}^{\tau+2\omega} G(t+\omega,s) f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\omega} G(t+\omega,s+\omega) f(s+\omega,y(s+\omega),y(\gamma(s+\omega)))ds \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\omega} G(t,s) f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&= y(t),
\end{aligned}$$

pues, $G(t+\omega,s+\omega) = G(t,s)$ por el Lema 2.4.4.
Luego, $y(t,\tau,\xi)$ dada por (2.4.7) es una solución ω-periódica no constante del sistema (2.1.1).
Ahora, supongamos que $y(t,\tau,\xi)$ es una solución ω-periódica no constante de la ecuación integral (2.4.7). Derivamos (2.4.7) y obtenemos,

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \left(\int_\tau^{\tau+\omega} G(t,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds\right)' \\
&= \Phi'(t)\int_\tau^t (I+D)\Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds + \Phi(t)(I+D)\Phi^{-1}(t)f(t,y(t),y(\gamma(t))) \\
&+ \Phi'(t)\int_t^{\tau+\omega}\left[D\Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))\right]ds - \Phi(t)D\Phi^{-1}(t)f(t,y(t),y(\gamma(t))) \\
&= A(t)\left(\int_\tau^{\tau+\omega} G(t,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds\right) + f(t,y(t),y(\gamma(t))) \\
&= A(t)y(t) + f(t,y(t),y(\gamma(t))),
\end{aligned}$$

pues, $\Phi(t)(I+D)\Phi^{-1}(t) - \Phi(t)D\Phi^{-1}(t) = I$. Así, $y(t,\tau,\xi)$ es una solución ω-periódica de la DEPCAG (2.1.1). □

A continuación, veremos otra representación de solución ω-periódica que usaremos para estudiar la existencia de soluciones ω-periódicas de sistemas nolineales de DEPCAG en la sección 2.6.

Proposición 2.4.2.
Supongamos que las condiciones (N_ω), $(P_{(\omega,p)})$ *y* $(P_1\omega)$ *se satisfacen. Entonces para cualquier* $(\tau,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $y(t)=y(t,\tau,\xi)$ *es una solución* ω*-periódica de la DEPCAG* (2.1.1) *en el sentido de la Definición 2 si y sólo si es una solución* ω*-periódica de la ecuación integral*

$$y(t) = \int_t^{t+\omega}\widetilde{G}(t,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds, \text{ para } t\in\mathbb{R}, \tag{2.4.9}$$

donde $\widetilde{G}(t,s)=\Phi(t)D\Phi^{-1}(s)$, $\Phi(t)$ *es una matriz fundamental de* (2.1.3) *y* D *se define en* (2.4.1).

Demostración: Supongamos que $y(t,\tau,\xi)$ una solución ω-periódica de la DEPCAG (2.1.1) que satisface la condición inicial $y(\tau)=\xi$. Por Proposición 2.4.1, tenemos (2.4.7):

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_\tau^{\tau+\omega} G(t,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&= \int_\tau^t \Phi(t)(I+D)\Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds + \int_t^{\tau+\omega}\Phi(t)D\Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds.
\end{aligned}$$

Ahora, queremos demostrar que (2.4.9) es equivalente a (2.4.7). Por Lema 2.4.3, $D = \left(\left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1} - I\right)^{-1}$ tenemos las siguientes relaciones,

$$(I+D) = \left(\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1}D = \left(I-\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau+\omega)\right)^{-1}, \quad (I+D)\Phi^{-1}(\tau-\omega)\Phi(\tau) = D.$$

Por Observación 2.4.1, tenemos $\Phi(t-\omega) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\Phi(\tau-\omega)$.
Hacemos el cambio de variable $s=u-\omega$ y aplicando las relaciones anteriores tenemos,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{\tau+\omega}^{t+\omega}\Phi(t)(I+D)\Phi^{-1}(u-\omega)f(u-\omega,y(u-\omega),y(\gamma(u-\omega))du \\
&+ \int_t^{\tau+\omega}\Phi(t)D\Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\tau+\omega}^{t+\omega} \Phi(t)(I+D)\Phi^{-1}(\tau-\omega)\Phi(\tau)\Phi^{-1}(u)f(u,y(u),y(\gamma(u)))du \\
&+ \int_{t}^{\tau+\omega} \Phi(t)D\Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&= \int_{\tau+\omega}^{t+\omega} \Phi(t)D\Phi^{-1}(u)f(u,y(u),y(\gamma(u)))du + \int_{t}^{\tau+\omega} \Phi(t)D\Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&= \int_{t}^{t+\omega} \Phi(t)D\Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds.
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
y(t+\omega) &= \int_{t+\omega}^{t+2\omega} \widetilde{G}(t+\omega,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&= \int_{t}^{t+\omega} \widetilde{G}(t+\omega,s+\omega)f(s+\omega,y(s+\omega),y(\gamma(s+\omega))ds \\
&= \int_{t}^{t+\omega} \widetilde{G}(t,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds = y(t).
\end{aligned}
$$

Por Proposición 2.4.1 se concluye que $y(t)$ es solución ω-periódica de (2.4.9).

Supongamos ahora que $y(t) = \int_t^{t+\omega} \widetilde{G}(t,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds$ es una solución ω-periódica de la ecuación integral. Derivamos la solución de (2.4.9), usando (2.4.5), obtenemos

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \left(\int_{t}^{t+\omega} \widetilde{G}(t,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds\right)' \\
&= \Phi'(t)\int_{t}^{t+\omega} D\Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds + \Phi(t)\left(\int_{t}^{t+\omega} D\Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds\right)' \\
&= A(t)\Phi(t)\int_{t}^{t+\omega} D\Phi^{-1}(s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds \\
&+ \Phi(t)D\Phi^{-1}(t+\omega)\left(f(t+\omega,y(t+\omega),y(\gamma(t+\omega)))\right) \\
&- \Phi(t)D\Phi^{-1}(t+\omega)f(s,y(s),y(\gamma(s))) \\
&= A(t)y(t) + \left[\Phi(t)D\Phi^{-1}(t+\omega) - \Phi(t)D\Phi^{-1}(t)\right]\left(f(t,y(t),y(\gamma(t)))\right) \\
&= A(t)y(t) + f(t,y(t),y(\gamma(t))).
\end{aligned}
$$

Luego, $y(t,\tau,\xi)$ es una solución ω-periódica de la DEPCAG (2.1.1), para $t \in \mathbb{R}$. □

Definición 2.4.2. (*Operador de Green*)
Definimos el operador de Green $T : \mathbb{P}_\omega \to \mathbb{P}_\omega$ *tal que*

$$
Ty(t) = \int_{\tau}^{\tau+\omega} G(t,s)f(s,y(s),y(\gamma(s)))ds, \tag{2.4.10}
$$

donde $G(t,s)$ *es la Matriz de Green del sistema* (2.1.1).

Proposición 2.4.3.

Supongamos que la condición (C_f) se cumple. Entonces, el operador de Green T definido por (2.4.10) *es completamente continuo.*

Demostración:

Consideremos $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leqslant R\}$ y $S = \{y \in \mathbb{P}_\omega : \|y\| \leqslant R\}$, donde $R > 0$.

Primero, probaremos que T es continuo.

Por la condición (C_f), $f(t, x, u)$ es continua para (t, x, u) sobre el compacto $[\tau, \tau+\omega] \times \mathbb{B} \times \mathbb{B}$, luego, $f(t, x, u)$ es uniformemente continua sobre $[\tau, \tau+\omega] \times \mathbb{B} \times \mathbb{B}$. Entonces, para cada $\varepsilon' > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon') > 0$ tal que si $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$, $|u_1 - u_2| \leqslant \delta$ $(x_i, u_i \in \mathbb{B},\ i = 1, 2)$ y $s \in [\tau, \tau+\omega]$, entonces,

$$|f(s, x_1, u_1) - f(s, x_2, u_2)| \leqslant \varepsilon'.$$

Sean $y_1, y_2 \in \mathbb{P}_\omega$, dado un $\varepsilon > 0$, tomar $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c_G \omega} > 0$, donde $c_G = \max\limits_{t,s \in [\tau, \tau+\omega]} |G(t, s)|$.

Sea $\|y_1 - y_2\| < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned}
|Ty_1(t) - Ty_2(t)| &\leqslant \int_\tau^{\tau+\omega} |G(t,s)|\, |f(s, y_1(s), y_1(\gamma(s))) - f(s, y_2(s), y_2(\gamma(s)))|\, ds \\
&\leqslant \int_\tau^{\tau+\omega} c_G \varepsilon' ds \\
&\leqslant c_G \varepsilon' \omega = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba la continuidad del operador T.

Ahora probaremos que T es compacto.

Sea $y_i \in \mathbb{B}$, $i = 1, 2$. Por la continuidad de $f(t, y_1, y_2)$, si $\tau \leqslant t \leqslant \tau+\omega$ y y_1, y_2 pertenecen al compacto $\mathbb{B}$, existe un $M > 0$ tal que $|f(t, y_1, y_2)| \leqslant M$. Sea $y_n \in S$, $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces podemos estimar $Ty_n(t)$,

$$\begin{aligned}
|Ty_n(t)| &\leqslant \left| \int_\tau^{\tau+\omega} [G(t,s) f(s, y_n(s), y_n(\gamma(s)))]\, ds \right| \\
&\leqslant c_G M \omega.
\end{aligned}$$

Por (2.4.10),

$$\begin{aligned}
(Ty_n(t))' &= \left(\int_\tau^{\tau+\omega} [G(t,s) f(s, y_n(s), y_n(\gamma(s)))]\, ds \right)' \\
&= A(t) Ty_n(t) + f(t, y_n(t), y_n(\gamma(t))),
\end{aligned}$$

como $A(t)$, $Ty_n(t)$ y $f(t, y_1, y_2)$ son acotados, por eso, $|(Ty_n(t))'| \leqslant K$, para alguna constante positiva K. La sucesión Ty_n es uniformemente acotada y equicontinua. Luego, la demostración es una consecuencia del teorema de Arzelà-Ascoli. □

2.5. Sistemas Periódicos Semi-Lineales

En esta sección, estudiamos varias condiciones suficientes para la existencia y la unicidad de soluciones ω-periódicas de la DEPCAG:

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t, y(t), y(\gamma(t))). \tag{2.5.1}$$

En el proceso, utilizamos el operador de Poincaré y el operador de Green con la matriz de Green definida en las secciones 2.3 y 2.4. El problema de la existencia de una solución ω-periódica de sistemas semilineales de la DEPCAG (2.5.1) puede ser reducido al problema de la existencia de los puntos fijos del operador de Poincaré ó del operador de Green. Utilizaremos los teoremas del punto fijo de **Banach, Brouwer, Schauder** y **Schaefer** para demostrar la existencia de solución semilineal ω-periódica de la DEPCAG (2.5.1). En la última sección, se presentan ejemplos sobre DEPCAG en caso escalar.

Primero, veremos algunas notaciones para simplificar el lenguaje que motiva el estudio de la existencia y la unicidad de soluciones ω-periódicas de la DEPCAG (2.5.1).

$$c_\Phi = \max_{t,s\in[\tau,\tau+\omega]} |\Phi(t,s)|, \; c_G = \max_{t,s\in[\tau,\tau+\omega]} |G(t,s)|, \; \widetilde{D} = (I - \Phi(\tau+\omega,\tau))^{-1}. \tag{2.5.2}$$

Las hipótesis que están en las páginas 32, 33 y 35 serán ocupadas durante la sección 2.5.

Lema 2.5.1.
Supongamos que las condiciones $(P_{(\omega,p)})$, $(P_1\omega)$ y (LG_f) se cumplen. Entonces $y(t) = y(t,\tau,\xi)$ es la solución ω-periódica de la DEPCAG (2.5.1) *si y solo si $y(\tau+\omega) = y(\tau)$.*
Demostración: Si la solución (2.5.1) es ω-periódica, entonces $y(\tau+\omega) = y(\tau)$.
Supongamos la solución de la DEPCAG (2.5.1) se satisface $y(\tau+\omega) = y(\tau)$.
Definimos $\kappa(t) = y(t+\omega)$ en $\mathbb{R}$, entonces, se demostrará $\kappa(t) = y(t)$.
Como las sucesiones $\{t_i\}$, $\{\xi_i\}$ se satisfacen la condición (ω,p), por la segunda consecuencia de la condición (ω,p), tenemos $\gamma(t+\omega) = \gamma(t) + \omega$.
Por eso,

$$\begin{aligned}
\kappa'(t) &= y'(t+\omega) \\
&= A(t+\omega)y(t+\omega) + f(t+\omega, y(t+\omega), y(\gamma(t+\omega))), \; t \geqslant \tau \\
&= A(t)\kappa(t) + f(t,\kappa(t),\kappa(\gamma(t))), \; t \geqslant \tau.
\end{aligned}$$

Así que κ es otra solución de la DEPCAG (2.5.1). Por la condición (LG$_f$), la solución de la DEPCAG (2.5.1) es única con la misma condición inicial, entonces tenemos $\kappa(t) = y(t)$ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\kappa(t) = y(t+\omega) = y(t)$. $\square$

A continuación veremos distintas condiciones posibles para estudiar la existencia de solución semilineal ω-periódica de la DEPCAG (2.5.1).

A continuación veremos cuando el sistema ω-periódico de la DEPCAG (2.5.1) satisface una condición de Lipschitz, usando una nueva técnica, la cual estima primero la solución de la DEPCAG (2.5.1), luego se sustituye esta estimación de la solución y de DEPCAG en el operador P para estudiar una condición necesaria de tener un punto fijo de operador P (ver Lema 2.3.2). En el proceso, utilizamos el teorema del punto fijo de Brouwer (Teorema 1.3).

Definimos $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq R\}$.

Teorema 2.5.1.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (LG_f), ($P_{(\omega,p)}$) *y* ($P_1\omega$) *se cumplen. Sean* $\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t,0,0)|$ *y* R *una constante positiva satisfaciendo la desigualdad:*

$$\rho R + \alpha c_\Phi \omega |\widetilde{D}| \leqslant R, \tag{2.5.3}$$

donde $\rho = \frac{c_\Phi \varsigma}{1-\varsigma}|\widetilde{D}|$, ς *se define en* (2.1.5). *Entonces, la DEPCAG* (2.5.1) *tiene una solución* ω*-periódica en* $\mathbb{B}$.

Demostración: Sea el operador $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por (2.3.1),

$$P\xi = \widetilde{D}\left(y(\tau+\omega,\tau,\xi) - C\xi\right).$$

Por el Lema 2.3.2 y la Observación 2.3.3, P es una función continua y

$$|P\xi| \leq \left(\frac{c_\Phi \varsigma |\widetilde{D}|}{1-\varsigma}\right)|\xi| + \alpha c_\Phi \omega |\widetilde{D}|,$$

esto es, $|P\xi| \leqslant \rho|\xi| + \alpha c_\Phi \omega|\widetilde{D}|$. Si $|\xi| \leqslant R$, por (2.5.3) tenemos $|P\xi| \leqslant R$.
Luego, P es una aplicación de una bola cerrada $\bar{B}(0,R)$ en si misma. Por el teorema del punto fijo de Brouwer, tenemos un punto fijo ξ^*, $P\xi^* = \xi^*$, y la correspondiente solución $y(t) = y(t,\tau,\xi^*)$ es ω-periódica. Luego, la DEPCAG (2.5.1) tiene una única solución ω-periódica armónica con la condición inicial $y(\tau) = \xi^*$. □

Observación 2.5.1.

Si la periodicidad ($P_1\omega$) es satisfecha por $\omega = \omega_1$ y ($P_{(\omega,p)}$) por $\omega = \omega_2$ y ω_1 y ω_2 son comparables, entonces ambas periodicidades ($P_1\omega_1$) y ($P_{(\omega_2,p)}$) son al mismo tiempo satisfechas por $\omega = m.c.m(\omega_1,\omega_2)$, donde $m.c.m(\omega_1,\omega_2)$ denota el mínimo común múltiplo entre ω_1 y ω_2. En el caso general, es posible que existan tres posibles períodos, ω_1 para A, ω_2 para f y ω_3 para $\{t_i\}$, $\{\gamma_i\}$. Así pues, en esta situación, nuestro resultado asegura la existencia de una solución ω-periódica con $\omega \doteq m.c.m(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. Esta solución se denomina solución subarmónica.

Corolario 2.5.1.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (LG_f), ($P_{(\omega_3,p)}$) *y* ($P_1\omega_0$) *se cumplen, donde* $\omega = m.c.m(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. *Sean* $\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t,0,0)|$ *y* R *una constante positiva satisfaciendo la desigualdad* (2.5.3). *Entonces, la DEPCAG* (2.5.1) *tiene una solución* ω*-periódica subarmónica en* $\mathbb{B}$.

Ahora, usamos el teorema de punto fijo de Banach para probar la existencia y unicidad de solución periódica de la DEPCAG (2.5.1).

Teorema 2.5.2.
Supongamos que las condiciones (N_ω), (LG_f) $(P_{(\omega,p)})$ y $(P_1\omega)$ se cumplen. Sea $\rho < 1$, donde ρ se define en Teorema 2.5.1 Entonces, la DEPCAG (2.5.1) *tiene una única solución ω-periódica.*
Demostración: Por Lema 2.3.2, tenemos $|P\xi_1 - P\xi_2| \leqslant \rho|\xi_1 - \xi_2|$. Entonces, P es un operador contractivo, y por el teorema del punto fijo de Banach y el Lema 2.5.1, la DEPCAG (2.5.1) tiene una única solución ω-periódica. □

Corolario 2.5.2.
Supongamos que las condiciones (N_ω), (LG_f), $(P_{(\omega_3,p)})$ y $(P_1\omega_0)$ se cumplen, donde $\omega = m.c.m(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Sea $\rho < 1$, donde ρ se define en Teorema 2.5.1. Entonces, la DEPCAG (2.5.1) *tiene una única solución ω-periódica subarmónica.*

Similarmente, aplicando el teorema del punto fijo de Banach para el operador T tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.5.3.
Supongamos que las condiciones (N_ω), (LG_f) $(P_{(\omega,p)})$ y $(P_1\omega)$ se cumplen. Sea

$$\zeta = c_G \int_\tau^{\tau+\omega} [\eta_1(s) + \eta_2(s)]ds < 1, \text{ para todo } \tau \in \mathbb{R}.$$

Entonces, la DEPCAG (2.5.1) *tiene una única solución ω-periódica.*
Demostración: Sean y_1, y_2 dos soluciones de la DEPCAG (2.5.1). Sea el operador T definido por (2.4.10), tenemos $|Ty_1(t) - Ty_2(t)| \leqslant \zeta\|y_1 - y_2\|$. Entonces, T es un operador contractivo, y por el teorema del punto fijo de Banach, la DEPCAG (2.5.1) tiene una única solución ω-periódica. □

Corolario 2.5.3.
Supongamos que las condiciones (N_ω), (LG_f), $(P_{(\omega_3,p)})$ y $(P_1\omega_0)$ se cumplen, donde $\omega = m.c.m(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Sea $\zeta < 1$, donde ζ se define en Teorema 2.5.3. Entonces, la DEPCAG (2.5.1) *tiene una única solución ω-periódica subarmónica.*

Observación 2.5.2.
Comparamos las constantes contractivas de Teorema 2.5.2 y Teorema 2.5.3. Sea

$$\int_\tau^{\tau+\omega} [\eta_1(s) + \eta_2(s)]ds = \ell.$$

Si $c_\Phi < \frac{c_G}{c_\Phi|\tilde{D}|+c_G\ell}$ implica $\rho < \zeta$. Sea $\zeta < 1$, entonces, Teorema 2.5.2 es una consecuencia inmediata de Teorema 2.5.3. Si $c_\Phi \geq \frac{c_G}{c_\Phi|\tilde{D}|+c_G\ell}$ implica $\zeta \leq \rho$. Sea $\rho < 1$, entonces, Teorema 2.5.3 es una consecuencia inmediata de Teorema 2.5.2. Por eso, si c_Φ es menor que $\frac{c_G}{c_\Phi|\tilde{D}|+c_G\ell}$, el resultado que utilizamos el operador P es mejor que T. Pues, puede haber el caso $\rho < 1 < \zeta$. En el caso contrario, el operador T es mejor que P.

Observación 2.5.3.

Si en tres teoremas anteriores, se sustituye la hipótesis (LG_f) por (LU_f), cambiando la condición de Lipschitz global por uniforme (considerar $\eta_1 \equiv \eta_2 \equiv L$), todos resultados validos para (LG_f), también son validos para (LU_f).

Veremos que el sistema ω-periódico de la DEPCAG (2.5.1) necesita condiciones más débiles que los dos teoremas anteriores, por ejemplo no se necesita la condición de Lipschitz, pero se pide una condición de invariancia para que cualquier subconjunto de $\mathbb{P}_\omega$ sea invariante por el operador T. En el proceso, utilizamos el teorema del punto fijo de Schauder.

Teorema 2.5.4.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (C_f), ($P_{(\omega,p)}$) y ($P_1\omega$) se cumplen y que existe un número positivo R tal que

$$\max_{\tau \leqslant t \leqslant \tau+\omega,\ |y_1|,|y_2| \leqslant R} |f(t,y_1,y_2)| \leqslant \frac{R}{c_G \omega}. \tag{2.5.4}$$

Entonces la DEPCAG (2.5.1) *tiene una solución ω-periódica $\|y\| \leqslant R$.*

Demostración: Considerar $S = \{y \in \mathbb{P}_\omega : \|y\| \leqslant R\}$, donde $R > 0$, demostraremos que el conjunto S es invariante por el operador T definido en (2.4.10). Por la Proposición 2.4.3, el operador T es completamente continuo y el resultado de este teorema será una consecuencia del teorema de punto fijo de Schauder.

Sea $\|y\| \leqslant R$, por la hipótesis (2.5.4) , estimamos Ty

$$\begin{aligned} |Ty(t)| &\leqslant \int_\tau^{\tau+\omega} |G(t,s)|\,|f(s,y(s),y(\gamma(s)))|\,ds \\ &\leqslant c_G\omega \max_{\tau \leqslant t \leqslant \tau+\omega, |y_1|,|y_2| \leqslant R} |f(t,y_1,y_2)| \leqslant R. \end{aligned}$$

Por eso, T mapea la bola cerrada $\bar{B}(0,R)$ en si mismo, además T es completamente continuo, por lo tanto, podemos aplicar el teorema del punto fijo de Schauder, entonces la DEPCAG (2.5.1) tiene por lo menos una solución ω-periódica $\|y\| \leqslant R$. $\square$

Corolario 2.5.4.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (C_f), ($P_{(\omega_3,p)}$) y ($P_1\omega_0$) se cumplen, donde $\omega = m.c.m(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. Supongamos que existe un número positivo R tal que

$$\max_{\tau \leqslant t \leqslant \tau+\omega,\ |y_1|,|y_2| \leqslant R} |f(t,y_1,y_2)| \leqslant \frac{R}{c_G \omega}.$$

Entonces la DEPCAG (2.5.1) *tiene una solución ω-periódica subarmónica $\|y\| \leqslant R$.*

Finalmente, veremos que para obtener solución ω-periódica de (2.5.1) se necesitan condiciones más débiles que el Teorema 2.5.4, de hecho, no se pide una condición de invariancia (2.5.4). En el proceso, utilizamos el teorema del punto fijo de Schaefer (Teorema 1.4) con el operador T.

Teorema 2.5.5.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (C_f), ($P_{(\omega,p)}$) y ($P_1\omega$) se cumplen y que existe un número positivo M tal que

$$\max_{\tau\leqslant t\leqslant\tau+\omega,\ y_1,y_2\in\mathbb{R}^n} |f(t,y_1,y_2)| \leqslant M. \tag{2.5.5}$$

Entonces la DEPCAG (2.5.1) *tiene por lo menos una solución ω-periódica.*

Demostración: Considerar

$$A := \{y \in \mathbb{P}_\omega :\ y = \lambda Ty \text{ para algun } \lambda \in (0,1)\}. \tag{2.5.6}$$

Demostraremos que el conjunto A es acotado, donde T se ha definido en (2.4.10). Por Proposición 2.4.3, el operador T es completamente continuo y el resultado de este teorema será una consecuencia del teorema del punto fijo de Schaefer. Por la hipótesis (2.5.5) , estimamos $y = \lambda Ty$

$$\begin{aligned}\|y\| = \lambda \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} |Ty(t)| &\leqslant \int_\tau^{\tau+\omega} |G(t,s)|\,|f(s,y(s),y(\gamma(s))|\,ds\\ &\leqslant c_G\omega M.\end{aligned}$$

Por eso, $\sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} |y(t)| \leqslant c_G\omega M$. Así vemos que la acotación de todas las posibles soluciones de $y = \lambda Ty$ es independiente de λ y aplicamos el teorema del punto fijo de Schaefer produciendo la existencia de al menos un punto fijo para (2.4.10) y, por tanto, la DEPCAG (2.5.1) tiene por lo menos una solución ω-periódica. □

Observación 2.5.4.

Si tomamos $R = Mc_G\omega$, el Teorema 2.5.5 es una consecuencia inmediata de Teorema 2.5.4.

Corolario 2.5.5.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (C_f), ($P_{(\omega_3,p)}$) y ($P_1\omega_0$) se cumplen, donde $\omega = m.c.m(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. Supongamos que existe un número positivo M tal que

$$\max_{\tau\leqslant t\leqslant\tau+\omega,\ y_1,y_2\in\mathbb{R}^n} |f(t,y_1,y_2)| \leqslant M.$$

Entonces la DEPCAG (2.5.1) *tiene una solución ω-periódica subarmónica.*

Observación 2.5.5.

Consideramos finalmente la ecuación semilineal de la DEPCAG del estilo:

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y(\gamma(t)) + g(t,y(t),y(\gamma(t))). \tag{2.5.7}$$

donde $t\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^n$, $A,B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ y $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ son funciones continuas ω-periódicas en t, para todo $t\in\mathbb{R}$ y $\gamma(t)=\xi_i$, si $t\in[t_i,t_{i+1})$, $i\in\mathbb{Z}$.

Sea g una función de Lipschitz tal que

$$|g(t,x_1,y_1)-g(t,x_2,y_2)| \leqslant \varrho_1(t)\,|x_1-x_2|+\varrho_2(t)\,|y_1-y_2|\,, \tag{2.5.8}$$

donde $\varrho_1,\varrho_2:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ son funciones localmente integrables y $\alpha=\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t,0,0)|$. Supongamos la hipótesis (H): la función

$$\varrho_3(t)=\varrho_2(t)+|B(t)| \tag{2.5.9}$$

donde $\varrho_1(t)$, $\varrho_3(t)$ satisfacen

$$c_\Phi\int_\tau^{\tau+\omega}[\varrho_1(s)+\varrho_3(s)]ds\leq\varsigma<1,\ \text{para todo}\ \ \tau\in\mathbb{R}.$$

Con la hipótesis (H) y el mismo método de la demostración de Teoremas 2.5.1, 2.5.2 y 2.5.3, podemos asegurar la existencia de soluciones periódicas de la DEPCAG (2.5.7).

Los Teoremas 2.5.4 y 2.5.5 se aplican fácilmente a

$$f(t,y(t),y(\gamma(t)))=B(t)y(\gamma(t))+g(t,y(t),y(\gamma(t))).$$

2.6. Sistemas Periódicos con Distintas Perturbaciones

En esta sección, estudiamos varias condiciones suficientes para la existencia y la unicidad de soluciones ω-periódicas de la DEPCAG (2.1.2):

$$z'(t) = A(t)z(t) + f(t, z(t), z(\gamma(t))) + g(t, z(t), z(\gamma(t))), \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.6.1}$$

En el proceso, utilizamos el operador de Green con la matriz de Green definida en la sección 2.4. El problema de la existencia de una solución ω-periódica de sistemas semi-lineales perturbados de la DEPCAG (2.6.1) puede ser reducido al problema de la existencia de los puntos fijos del operador de Green. Utilizaremos los teoremas del punto fijo de **Krasnoselskii** (Teorema 1.6) y **Schauder** para demostrar la existencia de una solución periódica de la DEPCAG (2.6.1). Nosotros también utilizamos el teorema del punto fijo de **Banach** para demostrar la existencia de una única solución periódica. Los resultados de esta sección se han presentado en el Congreso del LXXIX Encuentro de la Sociedad Matemática de Chile [20] con el tema: "*Green's function for periodic solutions in alternately advanced and delayed differential systems*".

La siguiente proposición es importante para nuestros resultados.

Proposición 2.6.1.

Supongamos que las condiciones (N_ω), $(P_{(\omega,p)})$ *y* $(P_2\omega)$ *se satisfacen. Entonces, para cualquier* $(\tau, z(\tau)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $z(t) = z(t, \tau, z(\tau))$ *es una solución* ω*-periódica de la DEPCAG* (2.6.1) *si y sólo si* z *es una solución* ω*-periódica de la ecuación integral para* $t \in \mathbb{R}$,

$$z(t) = \int_t^{t+\omega} \widetilde{G}(t,s)\,[f(s, z(s), z(\gamma(s))) + g(s, z(s), z(\gamma(s)))]\, ds, \tag{2.6.2}$$

donde $\widetilde{G}(t,s)$ *se define en la sección 2.4.*

Demostración: La demostración se prueba en la Proposición 2.4.2, en el caso, $\tilde{f}(t, z(t), z(\gamma(t))) = f(t, z(t), z(\gamma(t))) + g(t, z(t), z(\gamma(t)))$. □

Ahora definimos el operador $\Im : \mathbb{P}_\omega \to \mathbb{P}_\omega$,

$$\Im z(t) = \int_t^{t+\omega} \widetilde{G}(t,s)\,(f(s, z(s), z(\gamma(s))) + g(s, z(s), z(\gamma(s))))\, ds, \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2.6.3}$$

donde, $\widetilde{G}(t,s)$ que se define en la sección 2.4.

El operador (2.6.3) está bien definido por el método que se ha construido en la Proposición 2.6.1.

Ahora usamos el teorema del punto fijo de **Krasnoselskii** que nos permite demostrar la existencia de una solución periódica.

Nótese que para aplicar tal teorema, tenemos que construir dos operadores, uno es de contracción y el otro es completamente continuo. Por lo tanto, expresamos la ecuación (2.6.3) como

$$(\Im z)(t) = (\mathcal{A}z)(t) + (\mathcal{B}z)(t),$$

donde, $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{P}_\omega \to \mathbb{P}_\omega$, son dados por

$$\mathcal{A}(z)(t) = \int_t^{t+\omega} \widetilde{G}(t,s) f(s, z(s), z(\gamma(s)))ds, \tag{2.6.4}$$

$$\mathcal{B}(z)(t) = \int_t^{t+\omega} \widetilde{G}(t,s) g\left(s, z(s), z(\gamma(s))\right) ds. \tag{2.6.5}$$

Primero recordamos que las hipótesis están en las páginas 32-35 y una notación para simplificar el lenguaje que motiva el estudio de la existencia y la unicidad de soluciones periódicas de la DEPCAG (2.6.1): $c_{\widetilde{G}} = \max\limits_{s\in[t,t+\omega],\ t\in[\tau,\tau+\omega]} |\widetilde{G}(t,s)|$.

Lema 2.6.1.

Supongamos que las condiciones (N_ω) y (LL_f) se cumplen. Si $\mathcal{A}$ es dado por (2.6.4) *con $c_{\widetilde{G}} L_1 < 1$, entonces $\mathcal{A}$ es un operador contractivo.*

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ definido por (2.6.4). Entonces para $\varphi,\ \zeta \in \mathbb{P}_\omega$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}\varphi - \mathcal{A}\zeta\| &= \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} |\mathcal{A}\varphi(t) - \mathcal{A}\zeta(t)| \\
&\leqslant \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} \left|\widetilde{G}(t,s)\right| |f(s,\varphi(s),\varphi(\gamma(s))) - f(s,\zeta(s),\zeta(\gamma(s)))|\, ds \\
&\leqslant \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} c_{\widetilde{G}} \left[p_1(s)\,|\varphi(s) - \zeta(s)| + p_2(s)\,|\varphi(\gamma(s)) - \zeta(\gamma(s))|\right] ds \\
&\leqslant c_{\widetilde{G}} \left(\sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} [p_1(s) + p_2(s)]\, ds \right) \|\varphi - \zeta\| . \\
&\leqslant c_{\widetilde{G}} L_1 \|\varphi - \zeta\| .
\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{A}$ es un operador contractivo. □

De la misma manera, para el operador $\mathcal{B}$, obtenemos:

Lema 2.6.2.

Supongamos que las condiciones (N_ω) y (LL_g) se cumplen. Si $\mathcal{B}$ es dado por (2.6.5) *con $c_{\widetilde{G}} L_2 < 1$, entonces $\mathcal{B}$ es un operador contractivo.*

Lema 2.6.3.

Supongamos que las condiciones (N_ω) y (C_g) se cumplen. Sea $\mathcal{B}$ dado por (2.6.5), *entonces $\mathcal{B}$ es completamente continuo.*

Demostración: Consideremos $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{R}^n : \ \|z\| \leqslant R\}$ y $S = \{z \in \mathbb{P}_\omega : \ \|z\| \leqslant R\}$, donde $R > 0$. Primero, probaremos que $\mathcal{B}$ es continuo.

Por la condición (C_g), $g(t,y,u)$ es continua para (t,y,u) sobre el compacto $[\tau,\tau+\omega]\times\mathbb{B}\times\mathbb{B}$, luego, $g(t,y,u)$ es uniformemente continua sobre $[\tau,\tau+\omega]\times\mathbb{B}\times\mathbb{B}$. Entonces, para cada $\varepsilon' > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon') > 0$ tal que si $|y_1 - y_2| \leqslant \delta$, $|u_1 - u_2| \leqslant \delta$ ($y_i, u_i \in \mathbb{B}$, $i = 1,2$) y $s \in [\tau, \tau+\omega]$, obtenemos la estimación

$$|g(s,y_1,u_1) - g(s,y_2,u_2)| \leqslant \varepsilon'.$$

Sean $z_1, z_2 \in S$ dos soluciones de (2.6.5) tales que

$$|z_1(s) - z_2(s)| \leqslant \|z_1 - z_2\| = \sup_{s\in[t,t+\omega]} |z_1(s) - z_2(s)| \leqslant \delta.$$

Ahora estimamos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}z_1 - \mathcal{B}z_2\| &= \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} |\mathcal{B}z_1(t) - \mathcal{B}z_2(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} \left|\widetilde{G}(t,s)\right| |g(s, z_1(s), z_1(\gamma(s))) - g(s, z_2(s), z_2(\gamma(s)))|\, ds \\ &\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+\omega} c_{\widetilde{G}}\varepsilon' ds \leqslant c_{\widetilde{G}}\varepsilon'\omega = \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto prueba la continuidad del operador $\mathcal{B}$.
Ahora probamos que $\mathcal{B}$ es compacto. Sea $z_i \in \mathbb{B}$, $i = 1, 2$. Como s pertenece al compacto $[t, t+\omega]$ y z_1, z_2 pertenecen al compacto $\mathbb{B}$, por la continuidad de $g(s, z_1, z_2)$ en el compacto $[t, t+\omega] \times \mathbb{B} \times \mathbb{B}$, existe un $M > 0$ tal que $|g(s, z_1, z_2)| \leqslant M$. Sea $z_n \in S$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces podemos estimar $\mathcal{B}z_n(t)$,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}z_n\| = \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} |\mathcal{B}z_n(t)| &\leqslant \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} \left|\widetilde{G}(t,s)\right| |g(s, z_n(s), z_n(\gamma(s)))|\, ds \\ &\leqslant c_{\widetilde{G}} \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} |g(s, z_n(s), z_n(\gamma(s)))|\, ds \leqslant c_{\widetilde{G}} M\omega.\end{aligned}$$

Como en la demostración de Proposición 2.4.2 tenemos

$$(\mathcal{B}z_n(t))' = A(t)\mathcal{B}z_n(t) + g(t, z_n(t), z_n(\gamma(t))).$$

Así, por las acotaciones de $A(t)$, $\mathcal{B}z_n(t)$ y $g(t, z_1, z_2)$ implica $\left|(\mathcal{B}z_n(t))'\right| \leqslant K$, para alguna constante positiva K. Entonces, la sucesión $\mathcal{B}z_n$ es uniformemente acotada y equicontinua en $[t, t+\omega]$. Por el teorema de Arzelà-Ascoli, $\mathcal{B}$ es compacto. Esto prueba el lema. □

De la misma manera, para el operador $\mathcal{A}$, obtenemos:

Lema 2.6.4.

Supongamos que las condiciones (N_ω) y (C_f) se cumplen. Sea $\mathcal{A}$ definida por (2.6.4), *entonces $\mathcal{A}$ es completamente continuo.*

Como antes, sea $S = \{z \in \mathbb{P}_\omega : \|z\| \leqslant R\}$.

Teorema 2.6.1.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (M_g), (C_g), (LL_f), $(P_{(\omega,p)})$ y $(P_2\omega)$ se cumplen. Sean $\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t, 0, 0)|$ y R una constante positiva satisfaciendo la desigualdad:

$$c_{\widetilde{G}} (L_1 + C_2) R + c_{\widetilde{G}}\omega (\alpha + \rho_2) \leqslant R. \tag{2.6.6}$$

Entonces la DEPCAG (2.6.1) *tiene una solución ω-periódica en S.*

Demostración: Por el Lema 2.6.3, $\mathcal{B}$ es completamente continuo. Por el Lema 2.6.1, el operador $\mathcal{A}$ es una contracción. Ahora demostramos que si $\varphi, \zeta \in S$, tenemos $\mathcal{A}\varphi + \mathcal{B}\zeta \in S$, esto es $\|\mathcal{A}\varphi + \mathcal{B}\zeta\| \leqslant R$.
Sean $\varphi, \zeta \in S$ con $\|\varphi\|, \|\zeta\| \leqslant R$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}\varphi + \mathcal{B}\zeta\| &\leqslant \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} \left|\widetilde{G}(t,s)\right| |f(s,\varphi(s),\varphi(\gamma(s)) - f(s,0,0)|\, ds \\
&+ \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} \left|\widetilde{G}(t,s)\right| |f(s,0,0)|\, ds + \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} \left|\widetilde{G}(t,s)\right| |g(s,\zeta(s),\zeta(\gamma(s)))|\, ds \\
&\leqslant c_{\widetilde{G}} \left(\sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} [p_1(s) + p_1(s)]\, ds \right) \|\varphi\| + \alpha c_{\widetilde{G}}\omega \\
&+ c_{\widetilde{G}} \left(\sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} [\kappa_1(s) + \kappa_1(s)]\, ds \right) \|\zeta\| + \rho_2 c_{\widetilde{G}}\omega \\
&\leqslant c_{\widetilde{G}} (L_1 + C_2) R + c_{\widetilde{G}}\omega (\alpha + \rho_2).
\end{aligned}$$

Por (2.6.6), tenemos $\|\mathcal{A}\varphi + \mathcal{B}\zeta\| \leqslant R$. Las condiciones del teorema del punto fijo de Krasnoselskii se satisfacen. Entonces, existe un punto fijo z en S tal que $z(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}z(t)$. Por la Proposición 2.6.1, este punto fijo es una solución de (2.6.1). La DEPCAG (2.6.1) tiene una solución ω-periódica. □

Teorema 2.6.2.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (M_f), (C_f), (LL_g), ($P_{(\omega,p)}$) y ($P_2\omega$) se satisfacen. Sean $\beta = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t,0,0)|$ y R una constante positiva satisface la desigualdad:

$$c_{\widetilde{G}} (C_1 + L_2) R + c_{\widetilde{G}}\omega (\beta + \rho_1) \leqslant R. \tag{2.6.7}$$

Entonces la DEPCAG (2.6.1) *tiene una solución ω-periódica en S.*
Demostración: Análoga a la demostración en Teorema 2.6.1. □

A continuación, utilizamos el teorema del punto fijo de Banach para demostrar la existencia y unicidad de una solución ω-periódica armónica de la DEPCAG (2.6.1).

Teorema 2.6.3.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (LL_f), (LL_g), ($P_{(\omega,p)}$) y ($P_2\omega$) se cumplen. Si

$$c_{\widetilde{G}} (L_1 + L_2) < 1. \tag{2.6.8}$$

Entonces la DEPCAG (2.6.1) *tiene una única solución ω-periódica.*
Demostración:

$$\begin{aligned}
\|\Im\varphi - \Im\zeta\| &\leqslant \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} \left|\widetilde{G}(t,s)\right| |f(s,\varphi(s),\varphi(\gamma(s))) - f(s,\zeta(s),\zeta(\gamma(s)))|\, ds \\
&+ \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} \left|\widetilde{G}(t,s)\right| |g(s,\varphi(s),\varphi(\gamma(s))) - g(s,\zeta(s),\zeta(\gamma(s)))|\, ds \\
&\leqslant c_{\widetilde{G}} (L_1 + L_2) \|\varphi - \zeta\|.
\end{aligned}$$

Se concluye la demostración por el hecho de $\Im$ es un operador contractivo. □

Teorema 2.6.4. *Supongamos que las condiciones (N_ω), (M_f), (M_g), (C_f), (C_g), ($P_{(\omega,p)}$) y ($P_2\omega$) se satisfacen. Si*

$$c_{\widetilde{G}}\,(C_1 + C_2)\,R + c_{\widetilde{G}}\,(\rho_1 + \rho_2)\,\omega \leqslant R. \tag{2.6.9}$$

Entonces la DEPCAG (2.6.1) *tiene una solución ω-periódica en S.*

Demostración:

Para probar que el operador $\Im$ definido en (2.6.3) es completamente continuo, se sigue la prueba del Lema 2.6.3.

Probaremos la condición de invariancia, esto es, demostraremos que si $\varphi \in S$, tenemos $\Im\varphi \in S$. Sea $\varphi \in S$, entonces,

$$\begin{aligned}
\|\Im\varphi\| &= \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} |\Im\varphi(t)| \leqslant c_{\widetilde{G}} \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} (m_1(s)\,|\varphi(s)| + m_2(s)\,|\varphi(\gamma(s))| + \rho_1)\,ds \\
&+ c_{\widetilde{G}} \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} (\kappa_1(s)\,|\varphi(s)| + \kappa_2(s)\,|\varphi(\gamma(s))| + \rho_2)\,ds \\
&\leqslant c_{\widetilde{G}} \left(\sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} (m_1(s) + m_2(s))\,ds + \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} (\kappa_1(s) + \kappa_2(s))\,ds \right) \|\varphi\| \\
&+ c_{\widetilde{G}}\,(\rho_1 + \rho_2)\,\omega \leqslant c_{\widetilde{G}}\,(C_1 + C_2)\,\|\varphi\| + c_{\widetilde{G}}\,(\rho_1 + \rho_2)\,\omega.
\end{aligned}$$

Por (2.6.9), tenemos $\|\Im\varphi\| \leqslant R$.

Luego, $\Im : \mathbb{P}_\omega \to \mathbb{P}_\omega$ es completamente continuo y por la condición de invariancia, entonces por el teorema del punto fijo de Schauder, existe por lo menos un punto fijo en S.

Por la Proposición 2.6.1, este punto fijo es una solución de (2.6.1). Entonces, (2.6.1) tiene una solución ω-periódica. □

A continuación veremos las consecuencias de los teoremas anteriores al reemplazar las condiciones ($\mathrm{P}_2\omega$) por ($\mathrm{P}_2\omega_0$) y ($\mathrm{P}_{(\omega,p)}$) por ($\mathrm{P}_{(\omega_4,p)}$). Tenemos la existencia de una solución ω-periódica subarmónica de la DEPCAG (2.6.1), donde $\omega = m.c.m(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$.

Corolario 2.6.1.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (M_g), (C_g), (LL_f), ($P_{(\omega_4,p)}$) y ($P_2\omega_0$) se cumplen, donde $\omega = m.c.m(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$. Sean $\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t,0,0)|$ y R una constante positiva satisfaciendo la desigualdad:

$$c_{\widetilde{G}}\,(L_1 + C_2)\,R + c_{\widetilde{G}}\omega\,(\alpha + \rho_2) \leqslant R.$$

Entonces la DEPCAG (2.6.1) *tiene una solución ω-periódica subarmónica en S.*

Corolario 2.6.2.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (M_f), (C_f), (LL_g), ($P_{(\omega_4,p)}$) y ($P_2\omega_0$) se cumplen, donde $\omega = m.c.m(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$. Sean $\beta = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t,0,0)|$ y R una constante positiva satisface la desigualdad:

$$c_{\widetilde{G}}\,(C_1 + L_2)\,R + c_{\widetilde{G}}\omega\,(\beta + \rho_1) \leqslant R.$$

Entonces la DEPCAG (2.6.1) *tiene una solución ω-periódica subarmónica en S.*

Corolario 2.6.3.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (LL_f), (LL_g), $(P_{(\omega_4,p)})$ *y* $(P_2\omega_0)$ *se cumplen, donde* $\omega = m.c.m(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$. *Si*

$$c_{\widetilde{G}}\,(L_1 + L_2) < 1.$$

Entonces la DEPCAG (2.6.1) *tiene una única solución* ω*-periódica subarmónica.*

Corolario 2.6.4.

Supongamos que las condiciones (N_ω), (M_f), (C_f), (C_g), $(P_{(\omega_4,p)})$ *y* $(P_2\omega_0)$ *se satisfacen, donde* $\omega = m.c.m(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$. *Si*

$$c_{\widetilde{G}}\,(C_1 + C_2)\,R + c_{\widetilde{G}}\,(\rho_1 + \rho_2)\,\omega \leqslant R.$$

Entonces la DEPCAG (2.6.1) *tiene una solución* ω*-periódica subarmónica en* S.

Ejemplo 1. Consideramos la ecuación diferencial escalar con argumento constante por trozos de tipo generalizado:

$$z''(t) + \left(\kappa_2 z^2(t) - 2\right) z'(t) - 8z(t) - \kappa_1 sen(\omega t) z^2(\gamma(t)) - \kappa_2 \cos(\omega t) = 0, \;\; \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.6.10)$$

donde, la función $\gamma(t)$ se define en (1.2.2), además las sucesiones t_i y ξ_i satisfacen la condición $(\frac{2\pi}{\omega}, p)$.

Escribiendo $z_1' = z_2$, podemos transformar la ecuación (2.6.10) en el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_1 sen(\omega t) z_1^2(\gamma(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_2 \cos(\omega t) - \kappa_2 z_1^2 z_2 \end{pmatrix}.$$

Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $f(t, z(t), z(\gamma(t))) = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_1 sen(\omega t) z_1^2(\gamma(t)) \end{pmatrix}$ y

$$g(t, z(t), z(\gamma(t))) = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_2 \cos(\omega t) - \kappa_2 z_1^2 z_2 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz A tiene los valores propios con la parte real no nula, por la Observación 2.1.2, el sistema $x' = Ax$ no tiene solución ω-periódica no trivial.

Sean $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$. Denote por $|\cdot|$ norma suprema en R^2 y definamos $S = \{z \in \mathbb{P}_\omega, \|z\| \leqslant R\}$, donde $R \in \mathbb{R}_+$ satisface

$$2c_{\widehat{G}} R\,(\kappa_1 + \kappa_2 R) < 1. \quad (2.6.11)$$

Entonces, sean $\varphi, \psi \in S$. Tenemos

$$\begin{aligned}
&\|g(\cdot, \varphi(\cdot), \varphi(\gamma(\cdot))) - g(\cdot, \psi(\cdot), \psi(\gamma(\cdot)))\| \\
&\leqslant \sup_{t \in [\tau, \tau+\omega]} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_2 \cos(\omega t) - \kappa_2 \varphi_1^2(t) \varphi_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_2 \cos(\omega t) - \kappa_2 \psi_1^2(t) \psi_2(t) \end{pmatrix} \right| \\
&\leqslant \sup_{t \in [\tau, \tau+\omega]} \left| \begin{pmatrix} \kappa_2 (\psi_1(t) + \varphi_1(t))\, \varphi_2(t) & \kappa_2 \psi_1^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\psi_1(t) - \varphi_1(t)) \\ (\psi_2(t) - \varphi_2(t)) \end{pmatrix} \right| \\
&\leqslant 2\kappa_2 R^2 \sup_{t \in [\tau, \tau+\omega]} \left| \begin{pmatrix} (\psi_1(t) - \varphi_1(t)) \\ (\psi_2(t) - \varphi_2(t)) \end{pmatrix} \right| = 2\kappa_2 R^2 \|\varphi - \psi\|.
\end{aligned}$$

Análogamente, tenemos $\|f(\cdot,\varphi(\cdot),\varphi(\gamma(\cdot))) - f(\cdot,\psi(\cdot),\psi(\gamma(\cdot)))\| \leqslant 2\kappa_1 R\,\|\varphi-\psi\|$.
Por el Teorema 2.6.3, la DEPCAG (2.6.10) tiene una única solución $\frac{2\pi}{\omega}$-periódica. □

Ejemplo 2. Consideramos la siguiente ecuación diferencial con argumento constante por trozos de tipo generalizado:

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = -a_i(t)z_i(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)f_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(t)g_j(z_j(\gamma(t))) + I_i(t), \quad (2.6.12)$$

donde, a_i, b_{ij}, c_{ij} y I_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, son funciones positivas ω-periódicas, la función $\gamma(t)$ se define como $t_i = \xi_i$, y las sucesiones t_i y ξ_i satisfacen la condición (ω, p) .
Además supongamos que
1) $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua tal que para $1 \leqslant j \leqslant m$:

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leqslant L\,|x-y|, \quad (2.6.13)$$

donde $L \in \mathbb{R}_+$ y $f_j(t,0) = 0$.
2) Para cada $R > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant R$, existen una función positiva localmente integrable κ tal que

$$|g_j(t,x)| \leqslant \kappa(t)\,|x|,\ 1 \leqslant j \leqslant m, \quad (2.6.14)$$

donde $\max\limits_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{m} \left(\sup\limits_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_t^{t+\omega} [c_{ij}(s)\kappa(s)]\,ds \right) \leqslant C$, para algún $\omega \in \mathbb{R}_+$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Definamos $b_* := \max\limits_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{m} \left(\sup\limits_{t\in[\tau,\tau+\omega]} b_{ij}(t) \right)\omega$ y $I_* := \max\limits_{1\leq i\leq m} \left(\sup\limits_{t\in[\tau,\tau+\omega]} I_i(t) \right)$, satisfaciendo

$$c_{\hat{G}}(b_*L + C)R + c_{\hat{G}}I_*\omega \leqslant R. \quad (2.6.15)$$

Como a_i es una función períodica no nula, por la Observación 2.1.2 tenemos la condición de (N_ω). Entonces, por el Teorema 2.6.1, la DEPCAG (2.6.12) tiene una solución ω-periódica. Veamos un ejemplo explícito: Sean z 2-dimensional, $m = 2$, $t_k = \xi_k = \frac{\pi}{4}k$, $k \in \mathbb{Z}$ y sean $a_i = 0,5$, $b_{11} = b_{22} = 0,08$, $b_{12} = b_{21} = 0,1$, $c_{ij} = 0,09$, $I_i = 0,4$, $f_i(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{32}x) + \frac{1}{32}x$ y $g_i(x(\gamma(t))) = (1+\cos(8t))x(\gamma(t))$, donde $i,j = 1,2$. Podemos verificar f_i con una constante de Lipschitz $L = \frac{1}{16}$ y g_i con una función mayorante $\kappa(t) = 2$. Además, existe R que satisface (2.6.15):

$$\left(\frac{e^{\frac{\pi}{8}}}{e^{\frac{\pi}{8}}-1}\right)\left[\frac{\pi}{80} + \frac{9\pi}{100}\right]R + \left(\frac{e^{\frac{\pi}{8}}}{e^{\frac{\pi}{8}}-1}\right)\frac{\pi}{10} \leq R. \quad (2.6.16)$$

Entonces, por el Teorema 2.6.1, este caso particular tiene al menos una solución $\frac{\pi}{4}$-periódica.
□

2.7. Aplicaciones y Ejemplos

Nos concentramos en esta última sección a mostrar el uso de las ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos del tipo generalizado en el área de los fenómenos periódicos de la Naturaleza. Primero veremos cómo se intepretan los parámetros de avances y de retardos, en las cuales se produce una nueva idea de modelo llamado Modelo anticipatorio.(Primero veremos el sentido de Modelo anticipatorio donde se intepreta los parámetros de avances y de retardos), luego construyen dos modelos que ejemplifican las ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos del tipo generalizado. Los resultados se han presentado en el Congreso del Octavo Encuentro Chileno de Biomatemática [18] y en el LXXVIII Encuentro de la Sociedad Matemática de Chile [19] con los temas: "*Soluciones periódicas para la ecuación logística de tipo alternadamente avanzado y retardado*" y "*Modelo anticipatorio para la supervivencia de los glóbulos rojos*".

2.7.1. Modelo anticipatorio.

El biólogo matemático Robert Rosen [49] introdujo el concepto de sistemas de anticipación en 1985. Sistemas de anticipación fueron definidos por este autor como los sistemas que contienen una representación del propio sistema (no sólo depende las representaciones externas sino también internas, que explico a continuación). Las representaciones internas pueden ser utilizadas por el sistema de anticipación porque el sistema de parámetros pueden ser variados y recombinado dentro del sistema. Es decir un sistema que contiene un modelo predictivo de sí mismo y/o su entorno, que le permite cambiar el estado en un instante de acuerdo con las predicciones del modelo en relación a este último instante. Más precisamente, un sistema anticipatorio M es uno que contiene un modelo de un sistema S con el que interactúa. Este modelo es un modelo predictivo; sus actuales estados proporcionan informaciones acerca de los futuros estados de S. Además, el estado actual del modelo provoca un cambio de estado en otros subsistemas de M.

Un sistema biológico puede utilizar este grado de libertad para la adaptación anticipada, es decir, haciendo una selección en el presente entre sus posibles representaciones en la próxima (fenotípica) exposición. En la economía (Business Cycle), este modelo se ha utilizado para simular el futuro comportamiento de los sistemas que contienen parámetros de avances y de retardos en su funcionamiento [22]. (Dubois 2004).

El estudio de los sistemas anticipatorios requiere un modelo que es suficientemente complejo para acomodar las representaciones del sistema dentro del sistema bajo estudio. Estos sistemas ya no son un modelo del mundo externo, sino que conllevan las representaciones internas de sus correspondientes entornos en los términos de posibles nuevos acontecimientos. En otras palabras, la posibilidad de anticipación en los sistemas puede considerarse como una consecuencia de la complejidad del modelo analítico. Esta complejidad se encuentra por un momento temporal no como una histórica dada, sino como otro grado de libertad a la disposición del sistema. Este grado de libertad, es decir, utilizando diferentes relojes, permite la adaptación activa a los cambios en el medio ambiente a través de la anticipación por invertir la flecha del tiempo en algunos lugares más que (o diferente de) otros.

En lo que respecta al planteamiento, proponemos que se estudie la posibilidad de introducir no sólo un retardo en estas ecuaciones, sino avances también. De este modo, los sistemas anticipatorios también pueden servir como modelos eficientes de población. En las últimas décadas esta ideología ha sido muy fructífera en muchas aplicaciones de teorías matemáticas. Un enfoque previsorio estimula importantes investigaciones matemáticas [3] [22] y [49]. Los sistemas anticipatorios han empezado a ser considerado en el contexto de nuestra investigación para obtener criterios de existencia de soluciones periódicas para modelos aplicados.

Un supuesto de previsión en un modelo significa tener en cuenta no sólo las condiciones externas objetivas, sino también el futuro, un deseo, una anticipación frente a individuos tanto al interior como al exterior. La capacidad de anticipación de las especies, que puede estar representado por un término de avance, podría ser utilizado en la preservación de futuras poblaciones en determinados estados dinámicos, minimizando el riesgo de desaparecer. Un fenómeno evolutivo en especies que alcancen la capacidad de previsión, tiene una mayor posibilidad de supervivencia. Por lo tanto, suponemos que una previsión muy realista ayuda al éxito de las especies. En nuestra modelación de la dinámica de la población, la anticipación significa un tipo de predicción cualitativa enriquecida por el momento activo de las decisiones adoptadas en el tiempo real presente. Por otra parte, parece que factores complejos que no son necesariamente subjetivos pueden ser considerados como una de las razones de una anticipación. Hay varias posibilidades para introducir previsión en los modelos. Nosotros proponemos, por primera vez, aparentemente, considerar ecuaciones, donde se maneje parámetros de avances y de retardos.

2.7.2. Modelo anticipatorio logístico con argumento constante por trozos

El estudio de la dinámica de una población es una de las principales ramas de la Biología Matemática. El primer modelo para la dinámica de una población fue desarrollado por Thomas Malthus. Un modelo más complicado fue desarrollado por Pierre François Verhulst [50] llamado la ecuación logística.

La ecuación logística es bien conocida como uno de varios modelos de la dinámica de población:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{2.7.1}$$

donde la constante r define la tasa de crecimiento y K es la capacidad de persistencia. La solución general a esta ecuación es una función logística. Dada una población inicial P_0:

$$P(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K + P_0\left(e^{rt} - 1\right)}, \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = K. \tag{2.7.2}$$

Sin embargo, existen ejemplos en poblaciones humanas que muestran que la población a veces sigue creciendo sobre el nivel K (la capacidad de persistencia) en lugar de aproximarse asintóticamente a él por debajo. En experimentos reales se observa también un comportamiento periódico en la evolución del tamaño de la población de una especie(ovejas, insectos,...) que no puede explicar el modelo logístico de Verhulst. Una de las características de la ecuación (2.7.1) que podría explicar estas deficiencias reside en el hecho de que considera que la tasa de natalidad actúa instantáneamente, mientras que en general existe un cierto retraso debido a la influencia de factores como el período de madurez y el tiempo de gestación. Hutchinson [27] propuso en 1948 la ecuación logística con retardo:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t-h)}{K}\right) \tag{2.7.3}$$

donde h representa la edad de máxima capacidad reproductiva de un individuo de la población. En este caso la tasa de crecimiento *per capita* en el instante t es una función lineal de la población en el instante $t-h$.

La siguiente ecuación con argumento constante por trozos:

$$\frac{dP(t)}{dt} = aP(t)\left(1 - \frac{P([t])}{R}\right) \tag{2.7.4}$$

donde, $a, R \in \mathbb{R}_+$ puede considerarse como una versión moderna de la ecuación de Verhulst. Admitiendo soluciones continuas, los valores de P en los enteros satisfacen:

$$P(k+1) = F(k) = P(k)e^{a-\frac{a}{R}P(k)}, \ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.7.5}$$

En esta subsección, estudiamos la condición necesaria para la existencia de la solución ω-periódica de la ecuación logística de tipo alternadamente avanzado y retardado, i.e, la ecuación

$$y'(t) = a(t)y(t)\left(1 - b(t)y(\gamma(t))\right), \tag{2.7.6}$$

donde $\gamma(t)$ es la función definida en (1.2.2).

Las suposiciones siguientes para la DEPCAG (2.7.6) serán necesarias en todas partes de esta subsección:
(N_ω) $\int_\tau^{\tau+\omega} a(s)ds \neq 0$.
($\mathrm{P}_1\omega$) $a(t), b(t)$ son funciones positivas continuas periódicas con período ω, para todo $t \geqslant 0$.
($\mathrm{P}_{(\omega,p)}$) Las sucesiones $\{t_i\}$, $\{\xi_i\}$ satisfacen la condición (ω, p).

En forma similar a la Matriz de Green que se define en la sección 2.4, podemos deducir

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\exp\left(\int_\tau^{\tau+\omega} a(s)ds\right)-1} \exp\left(\int_s^t a(s)ds\right), \ \tau \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau+\omega; \\ \frac{\exp\left(\int_\tau^{\tau+\omega} a(s)ds\right)}{\exp\left(\int_\tau^{\tau+\omega} a(s)ds\right)-1} \exp\left(\int_s^t a(s)ds\right), \ \tau \leqslant t < s \leqslant \tau+\omega. \end{cases} \tag{2.7.7}$$

Obtenemos entonces que $G(t,s)$ es la función de Green asociada a la ecuación homogénea $x'(t) = a(t)x(t)$ y la solución $\omega-$periódica de la ecuación no homogénea (2.7.6) satisface

$$y(t) = \int_\tau^{\tau+\omega} G(t,s)\left(a(s)b(s)y(s)y(\gamma(s))\right)ds, \ t \in [\tau, \tau+\omega]. \tag{2.7.8}$$

Además,

$$y(\tau) = \int_\tau^{\tau+\omega} \left(\frac{\exp\left(\int_s^{\tau+\omega} a(s)ds\right)}{\exp\left(\int_\tau^{\tau+\omega} a(s)ds\right)-1}\right)\left(a(s)b(s)y(s)y(\gamma(s))\right)ds. \tag{2.7.9}$$

Por la integración directa para (2.7.6), tenemos

$$y(t) = y(t_i)e^{\int_{t_i}^t a(s)(1-b(s)y(\xi_i))ds}, \text{ o } y(t) = y(\xi_i)e^{\int_{\xi_i}^t a(s)(1-b(s)y(\xi_i))ds}, \tag{2.7.10}$$

para $t \in [t_i, t_{i+1})$ y por la continuidad de las soluciones de (2.7.10) obtenemos fácilmente que

$$y(\xi_i) = y(t_i)e^{\int_{t_i}^{\xi_i} a(s)(1-b(s)y(\xi_i))ds}, \; y(t_{i+1}) = y(\xi_i)e^{\int_{\xi_i}^{t_{i+1}} a(s)(1-b(s)y(\xi_i))ds}. \tag{2.7.11}$$

No es difícil ver que la solución $y(t)$ se expresa de la siguiente forma con la condición inicial $y(\tau)$,

$$\begin{aligned} y(t) = y(\tau)\exp\Bigg\{ &\int_{\tau}^{t_{i(\tau)+1}} a(s)\left(1 - b(s)y(\xi_{i(\tau)})\right) ds \\ &+ \left(\sum\nolimits_{k=i(\tau)+1}^{k=i(t)-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(s)\left(1 - b(s)y_k(\xi_k)\right) ds\right) \\ &+ \int_{t_{i(t)}}^{t} a(s)\left(1 - b(s)y(\xi_{i(t)})\right) ds \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.7.12}$$

Por eso, si la condición inicial $y(\tau)$ es positiva, la solución de la ecuación logística también es positiva.

Proposición 2.7.1.

Supongamos que las condiciones (N_ω), $(P_{(\omega,p)})$ y $(P_1\omega)$ se satisfacen. Entonces, para cualquier $(\tau, y(\tau)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $y(t) = y(t, \tau, y(\tau))$ es una solución ω-periódica de la DEPCAG (2.7.6) *si y sólo si es una solución ω-periódica de la ecuación integral*

$$y(t) = \int_{\tau}^{\tau+\omega} G(t,s)\left(a(s)b(s)y(s)y(\gamma(s))\right) ds, \; t \in [\tau, \tau+\omega],$$

donde $G(t,s)$ es una función de Green definida en (2.7.7).

Demostración: La demostración es semejante a la Proposición 2.4.1.

Teorema 2.7.1.

Sea $G(t,s)$ la función de Green definida en (2.7.7). *Supongamos que las condiciones (N_ω), $(P_{(\omega,p)})$ y $(P_1\omega)$ se satisfacen y la condición inicial de* (2.7.6) *es positiva. Además, existe un $h > 0$ tal que*

$$2hc_G\left(\int_{\tau}^{\tau+\omega} a(s)b(s)ds\right) < 1$$

se cumple, donde $c_G := \sup\limits_{t,s\in[\tau,\tau+\omega]} |G(t,s)|, \; t, s \in [\tau, \tau+\omega]$.

Entonces, la DEPCAG (2.7.6) *admite una única solución positiva ω-periódica tal que $\|y\| < h$.*

Demostración: Define un operador $T : \mathbb{P}_\omega \to \mathbb{P}_\omega$, cual es dado por

$$Ty(t) = \int_{\tau}^{\tau+\omega} G(t,s)\left(a(s)b(s)y(s)y(\gamma(s))\right) ds. \tag{2.7.13}$$

Sean $y_1(t)$, $y_2(t)$ dos soluciones de la DEPCAG (2.7.6). Entonces, por (2.7.13) tenemos

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\| &\leqslant \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \left| \int_\tau^{\tau+\omega} G(t,s)a(s)b(s)\left(y_1(s)y_1(\gamma(s)) - y_2(s)y_2(\gamma(s))\right) ds \right| \\
&\leqslant \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_\tau^{\tau+\omega} |G(t,s)|\, a(s)b(s)\left(|y_1(s)y_1(\gamma(s)) - y_2(s)y_1(\gamma(s))\right. \\
&\qquad \left. + y_2(s)y_1(\gamma(s)) - y_2(s)y_2(\gamma(s))|\right) ds \\
&\leqslant \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \int_\tau^{\tau+\omega} |G(t,s)|\, a(s)b(s)\left(|y_1(s) - y_2(s)|\, |y_1(\gamma(s))|\right. \\
&\qquad \left. + |y_2(s)|\, |y_1(\gamma(s)) - y_2(\gamma(s))|\right) ds \\
&\leqslant \sup_{t\in[\tau,\tau+\omega]} \left(\int_\tau^{\tau+\omega} |G(t,s)|\, a(s)b(s)\left(\|y_1\| + \|y_2\|\right) ds \right) \|y_1 - y_2\| \\
&\leqslant 2hc_G \left(\int_\tau^{\tau+\omega} a(s)b(s)ds \right) \|y_1 - y_2\| .
\end{aligned}$$

Por el teorema del punto fijo de Banach, entonces la DEPCAG (2.7.6) admite una única solución ω-periódica tal que $\|y\| < h$. Por (2.7.12), tenemos una única solución positiva ω-periódica de la DEPCAG (2.7.6) tal que $\|y\| < h$. □

La condición de la contracción es más restrictiva, una mejor condición es obtenida usando el Teorema del punto fijo de Schauder.

Proposición 2.7.2. *El operador T definido por* (2.7.13) *es completamente continuo.*
Demostración: La demostración es análoga a la de la Proposición 2.4.3.

Teorema 2.7.2.
Sea $G(t,s)$ la función de Green definida en (2.7.7)*. Supongamos que las condiciones (N_ω), $(P_{(\omega,p)})$ y $(P_1\omega)$ se satisfacen y la condición inicial de* (2.7.6) *es positiva. Además, existe un $h > 0$ tal que*

$$hc_G \left(\int_\tau^{\tau+\omega} a(s)b(s)ds \right) \leqslant 1$$

se cumple, donde $c_G := \sup_{t,s\in[\tau,\tau+\omega]} |G(t,s)|$.
Entonces, la DEPCAG (2.7.6) *admite por lo menos una solución positiva ω-periódica tal que $\|y\| \leqslant h$.*
Demostración: Demostraremos que el operador T definido por (2.7.13) es invariante. Como el operador T es completamente continuo, el resultado es una consecuencia del teorema del punto fijo de Schauder.
Considerar $S = \{y \in \mathbb{P}_\omega : \ \|y\| \leqslant h\}$, donde $h > 0$. Por demostrar $T\{S\} \subset S$.

$$\begin{aligned}
|Ty(t)| &= \left| \int_\tau^{\tau+\omega} G(t,s)\left(a(s)b(s)y(s)y(\gamma(s))\right) ds \right| \\
&\leqslant c_G h^2 \int_\tau^{\tau+\omega} \left(a(s)b(s)\right) ds.
\end{aligned}$$

Por la hipótesis, $hc_G\left(\int_\tau^{\tau+\omega} a(s)b(s)ds\right) \leqslant 1$, tenemos $|Ty(t)| \leqslant h$.
Como el operador T es completamente continuo y $T\{S\} \subset S$, por lo tanto, podemos aplicar el teorema del punto fijo de Schauder, entonces la DEPCAG (2.7.6) existe por lo menos una solución ω-periódica tal que $\|y\| \leqslant h$. Por (2.7.12), existe por lo menos una solución positiva ω-periódica de la DEPCAG (2.7.6) tal que $\|y\| \leqslant h$. □

Ejemplo 1.

Considerar la ecuación diferencial logística de tipo alternadamente avanzado y retardado con el tipo generalizado de argumento constante por trozos:

$$y'(t) = \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{32}\mathrm{sen}(t)\right) y(t) \left(1 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32}\cos(t)\right) y(\gamma(t))\right), \tag{2.7.14}$$

donde, $\gamma(t) = 2\pi\left[\frac{t+\pi}{2\pi}\right]$ y $y(0) > 0$. Entonces,

i) la DEPCAG (2.7.14) admite una única solución positiva 2π-periódica tal que $\|y\| < \frac{3}{\pi}\left(\frac{\exp(\frac{2}{3}\pi)-1}{\exp(\frac{2}{3}\pi)}\right)$,

ii) la DEPCAG (2.7.14) admite por lo menos una solución positiva 2π-periódica tal que $\|y\| \leqslant \frac{6}{\pi}\left(\frac{\exp(\frac{2}{3}\pi)-1}{\exp(\frac{2}{3}\pi)}\right)$.

En efecto: En este caso, $\gamma(t) = 2\pi\left[\frac{t+\pi}{2\pi}\right]$, entonces $\{t_i\} = \{2\pi i - \pi\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\gamma(t) = \{\xi_i\} = \{2\pi i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, satisfacen la condición $(2\pi, 1)$. Como $a(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{32}\mathrm{sen}(t)$ y $b(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}\cos(t)$ son 2π-periódicas. Es fácil de verificar:

$$c_G = \frac{\exp\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{32}\mathrm{sen}(s)\right)ds\right)}{\exp\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{32}\mathrm{sen}(s)\right)ds\right) - 1} = \frac{\exp(\frac{2}{3}\pi)}{\exp(\frac{2}{3}\pi) - 1}$$

y

$$\left(\int_\tau^{\tau+\omega} a(s)b(s)ds\right) = \int_0^{2\pi}\left(\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{32}\mathrm{sen}(s)\right)\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32}\cos(s)\right)\right)ds = \frac{\pi}{6}$$

Por Teorema 2.7.1, la DEPCAG (2.7.14) admite una única solución positiva 2π-periódica tal que $\|y\| < \frac{3}{\pi}\left(\frac{\exp(\frac{2}{3}\pi)-1}{\exp(\frac{2}{3}\pi)}\right)$.
Por Teorema 2.7.2, la DEPCAG (2.7.14) admite por lo menos una solución positiva 2π-periódica tal que $\|y\| \leqslant \frac{6}{\pi}\left(\frac{\exp(\frac{2}{3}\pi)-1}{\exp(\frac{2}{3}\pi)}\right)$. □

Observación 2.7.1.

Si $\{t_i\} = \left\{3\pi i - \frac{3\pi}{2}\right\}_{i\in\mathbf{Z}}$, $\{\xi_i\} = \{3\pi i\}_{i\in\mathbf{Z}}$, entonces, $\{t_i\}, \{\xi_i\}$ satisfacen la condición $(\omega, l) = (3\pi, 1)$, esto es $\omega = 3\pi$, pero, $a(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{32}\text{sen}(t)\right)$ y $b(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32}\cos(t)\right)$ son 2π-periódicas, por lo tanto, como no tienen mismas frecuencias entre $a(t)$, $b(t)$ y $(3\pi, 1)$, consideramos $(\omega_0, l) = (6\pi, 2)$. Es fácil de verificar:

$$c_G = \frac{\exp\left(\int_0^{6\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{32}\text{sen}(s)\right)ds\right)}{\exp\left(\int_0^{6\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{32}\text{sen}(s)\right)ds\right) - 1} = \frac{\exp(2\pi)}{\exp(2\pi) - 1}$$

y

$$\left(\int_\tau^{\tau+\omega} a(s)b(s)ds\right) = \int_0^{6\pi} \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{32}\text{sen}(s)\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32}\cos(s)\right)\right)ds = \frac{\pi}{2}.$$

Aplicando los calculos que tenemos recien,

i) la DEPCAG (2.7.14) admite una única solución positiva 6π-periódica subarmónica tal que $\|y\| < \frac{1}{\pi}\left(\frac{\exp(2\pi)-1}{\exp(2\pi)}\right)$,

ii) la DEPCAG (2.7.14) admite por lo menos una solución positiva 6π-periódica subarmónica tal que $\|y\| \leqslant \frac{2}{\pi}\left(\frac{\exp(2\pi)-1}{\exp(2\pi)}\right)$.

Observación 2.7.2.

En esta sección, investigamos una generalización del modelo logístico de la dinámica de poblaciones. Esta generalización de tipo avanzado y retardado es subyacente por diversos motivos biológicos, y toma en cuenta un argumento constante por trozos dependencia de los sistemas de la parte derecha. De hecho, esta propiedad de argumento constante por trozos basada en una noción ampliada de la toma de decisiones, se puede observar en las poblaciones de diversas especies. En la investigación dentro del ámbito de nociones en sistemas dinámicos bien estudiadas por las ciencias naturales, como el caos y la complejidad también nuestros resultados tienen posibilidad de ser aplicados.

2.7.3. Modelo anticipatorio de Wazewska-Lasota con argumento constante por trozos

En esta subsección, nos dedicamos a estudiar e introducir una aplicación interesante para la supervivencia de los glóbulos rojos en las ecuaciones diferenciales con argumento constante por trozos del tipo generalizado.

El estudio de la dinámica de los fenómenos de la naturaleza es una de las principales ramas de la Biología Matemática. El primer modelo para la dinámica de la supervivencia de los glóbulos rojos en un animal fue desarrollado por M. Wazewska-Czyzewska y A. Lasota [57]:

$$x'(t) = -\delta x(t) + pe^{-\gamma x(t-\tau)},\ t \geqslant 0, \tag{2.7.15}$$

aquí $x(t)$ denota el número de glóbulos rojos en el momento t, $\delta > 0$ es la probabilidad de la muerte de uno de glóbulos rojos, p y γ son constantes positivas relacionadas con la producción de glóbulos rojos por unidad de tiempo, y τ es el tiempo necesario para producir un glóbulo rojo. La oscilación y la atractividad de (2.7.15) han sido ampliamente estudiados (ver Ref. [25], [32]).

La siguiente ecuación no-autónoma con retardo:

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)f(x(t-\tau)), \tag{2.7.16}$$

cuando $\delta(t), p(t)$ son funciones no negativas ω-periódicas y $\tau = m\omega,\ m \in \mathbb{Z}^+$, la existencia y la atractividad global de la solución ω-periódica, así como la oscilación de las soluciones para (2.7.16) con $f(x) = e^{-x}$ es investigado y se discuten en [24].

La siguiente ecuación:

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)f(x([t])) \tag{2.7.17}$$

puede considerarse como una versión moderna de la ecuación de Wazewska y Lasota. Admitiendo soluciones continuas, los valores de x en los enteros satisfacen

$$x(k+1) = x(k)e^{-\int_k^{k+1}\delta(s)ds} + f(x(k))\int_k^{k+1} p(s)e^{-\int_s^{k+1}\delta(\kappa)d\kappa}ds. \tag{2.7.18}$$

En esta subsección, estudiamos la condición necesaria para la existencia de la solución ω-periódica de la ecuación diferencial de tipo Wazewska y Lasota con argumento constante por trozos

$$y'(t) = -\delta(t)y(t) + p(t)f(y(\gamma(t))) \tag{2.7.19}$$

donde, la condición inicial $y(\tau) = \xi > 0$, $\delta(t), p(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ se satisface $\delta(t) \neq 0, p(t) \neq 0$, y $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ es una función real analítica con una constante Lipschitz L y $\gamma(t)$ es la función definida en (1.2.2).

Las suposiciones siguientes para la DEPCAG (2.7.19) serán necesarias en esta subsección:

(N1) $\int_\tau^{\tau+\omega}\delta(s)ds \neq 0$.

(L1) Existe una constante positiva L tal que $|f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x-y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$.

(C) $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ es una función continua.

(P1) $\delta(t), p(t)$ son funciones positivas continuas ω-periódicas, para todo $t \geqslant 0$.

(P2) Las sucesiones $\{t_i\}$, $\{\xi_i\}$ satisfacen la condición (ω, p).

En forma similar a la función de Green que se muestra en la sección 2.7.2, podemos deducir

$$G(t,s)=\begin{cases}\left(\frac{\exp(\int_\tau^{\tau+\omega}\delta(s)ds)}{\exp(\int_\tau^{\tau+\omega}\delta(s)ds)-1}\right)\exp\left(\int_t^s\delta(\kappa)d\kappa\right), & \tau\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau+\omega\\ \left(\frac{1}{\exp(\int_\tau^{\tau+\omega}\delta(s)ds)-1}\right)\exp\left(\int_t^s\delta(\kappa)d\kappa\right), & \tau\leqslant t< s\leqslant\tau+\omega.\end{cases}\tag{2.7.20}$$

Por la integración directa para (2.7.19), para $t\in[t_i,t_{i+1})$, tenemos

$$y(t)=\left(e^{-\int_{t_i}^t\delta(s)ds}\right)y(t_i)+f(y(\xi_i))\left(\int_{t_i}^t e^{-\int_s^t\delta(s)d\kappa}p(s)ds\right).\tag{2.7.21}$$

y por la continuidad de las soluciones de (2.7.21), obtenemos fácilmente que

$$y(t_{i+1})=\left(e^{-\int_{t_i}^{t_{i+1}}\delta(s)ds}\right)y(t_i)+f(y(\xi_i))\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\int_s^{t_{i+1}}\delta(s)d\kappa}p(s)ds\right).\tag{2.7.22}$$

No es difícil ver que la solución $y(t)$ se expresa de la siguiente forma con la condición inicial $y(\tau)$,

$$\begin{aligned}y(t)&=e^{-\int_\tau^t\delta(s)ds}y(\tau)+e^{-\int_{t_{i(\tau)+1}}^t\delta(s)ds}f(y(\xi_{i(\tau)}))\left(\int_\tau^{t_{i(\tau)+1}}e^{-\int_s^{t_{i(\tau)+1}}\delta(s)d\kappa}p(s)ds\right)\\&+\sum_{j=i(\tau)+1}^{j=i(t)-1}\left(e^{-\int_{t_{j+1}}^t\delta(s)ds}\right)\tilde f(y(\xi_j))+f(y(\gamma(t)))\left(\int_{t_i}^t e^{-\int_s^t\delta(s)d\kappa}p(s)ds\right)\end{aligned}$$

donde, $\tilde f(y(\xi_j))=f(y(\xi_j))\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}e^{-\int_s^{t_{j+1}}\delta(\kappa)d\kappa}p(s)ds\right), j\in\{i(\tau)+k\}_{k\in\mathbb{N}}$.
Por eso, si la condición inicial $y(\tau)$ es positiva, la solución de la ecuación (2.7.19) también es positiva.

Así como en la Proposición 2.7.1, obtenemos:

Proposición 2.7.3.

Supongamos que las condiciones (N1), (P1) y (P2) se satisfacen. Entonces, para cualquier $(\tau,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, $y(t)=y(t,\tau,\xi)$ es una solución ω-periódica de la DEPCAG (2.7.19) *si y sólo si es una solución ω-periódica de la ecuación integral*

$$y(t)=\int_\tau^{\tau+\omega}G(t,s)p(s)f(y(\gamma(s)))ds,\ t\in[\tau,\tau+\omega],\tag{2.7.23}$$

donde $G(t,s)$ es una función de Green definida en (2.7.20).

Teorema 2.7.3.

Sea G(t,s) la función de Green definida en (2.7.20). *Supongamos que las condiciones (N1), (L1), (P1) y (P2) se satisfacen. Además,*

$$\left(cL\int_\tau^{\tau+\omega}p(s)ds\right)<1,\tag{2.7.24}$$

donde $|G(t,s)|\leqslant c=\left(\frac{e^{\int_\tau^{\tau+\omega}\delta(s)ds}}{e^{\int_\tau^{\tau+\omega}\delta(s)ds}-1}\right)$ $t,s\in[\tau,\tau+\omega]$. *Entonces, la DEPCAG* (2.7.19) *admite una única solución ω-periódica.*

Demostración: Se define un operador, $T : \mathbb{P}_\omega \to \mathbb{P}_\omega$, dado por

$$Ty(t) = \int_\tau^{\tau+\omega} G(t,s)p(s)f(y(\gamma(s)))ds. \qquad (2.7.25)$$

Sean $y_1(t)$, $y_2(t)$ dos soluciones de la DEPCAG (2.7.19). Entonces, por (2.7.25) y la condición de Lipschitz (L1) tenemos

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \leqslant \left(cL\int_\tau^{\tau+\omega} p(s)ds\right)\|y_1 - y_2\|.$$

Por el teorema del punto fijo de Banach, entonces la DEPCAG (2.7.19) admite una única solución ω-periódica. Por (2.7.19), tenemos una única solución positiva ω-periódica de la DEPCAG (2.7.19). □

Teorema 2.7.4.

Sea G(t,s) la función de Green. Supongamos que las condiciones (N1), (C), (P1) y (P2) se satisfacen. Además, existe una constante positiva h tal que

$$\max_{t\in[\tau,\tau+\omega],\|y\|\leqslant h} |f(y)| \leqslant \frac{h}{\left(c\int_\tau^{\tau+\omega} p(s)ds\right)},$$

se cumple, donde $|G(t,s)| \leqslant c = \left(\frac{e^{\int_\tau^{\tau+\omega}\delta(s)ds}}{e^{\int_\tau^{\tau+\omega}\delta(s)ds}-1}\right)$ $t, s \in [\tau, \tau+\omega]$.
Entonces, la ecuación (2.7.19) *admite por lo menos una solución ω-periódica tal que* $\|y\| < h$.
Demostración: Para demostrar que el operador T definido por (2.7.25) es completamente continuo, se siguen los pasos de la prueba de la Proposición 2.4.3.
Para demostrar que el operador T definido por (2.7.25) es invariante, se siguen los pasos de la prueba del Teorema 2.5.4.
El resultado es una consecuencia del teorema de punto fijo de Schauder. □

Ejemplo 2.

Considerar el Modelo anticipatorio de Wazewska-Lasota con argumento constante por trozos del tipo generalizado:

$$y'(t) = -\left(\frac{1+\operatorname{sen}(t)}{4}\right)y(t) + \left(\frac{1+\cos(t)}{8}\right)e^{-y\left(2\pi\left[\frac{t+\pi}{2\pi}\right]\right)},\ t \geqslant 0. \qquad (2.7.26)$$

Entonces, la ecuación (2.7.26) admite una única solución 2π-periódica.
En efecto: En este caso, $\gamma(t) = 2\pi\left[\frac{t+\pi}{2\pi}\right]$, entonces, $\{t_i\} = \{2\pi i - \pi\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\{\xi_i\} = \{2\pi i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, se cumplen la propiedad $(2\pi, 1)$.
Como $\delta(t) = \frac{1+\operatorname{sen}(t)}{4}$, $p(t) = \frac{1+\cos(t)}{8}$ son 2π-periódicas, $f(t) = e^{-t}$ es una función real analítica con una constante de Lipschitz $L = 1$.
Es claro, $c = \dfrac{\exp\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\operatorname{sen}(s)}{4}\right)ds\right)}{\exp\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\operatorname{sen}(s)}{4}\right)ds\right)-1} < \frac{8}{7}$, $\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{8}\right)dt = \frac{\pi}{4}$,
por eso, $c\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos(s)}{8}\right)ds < 1$, por el Teorema 2.7.3, la ecuación (2.7.26) tiene una única solución positiva 2π-periódica. □

Observación 2.7.3.

Los resultados de secciones 2.7.2 y 2.7.3 pueden ser generalizados para cualquier función perturbada f del estilo:

$$y'(t) = a(t)y(t) - f(t, y(t), y(\gamma_1(t)), .., y(\gamma_n(t))) \tag{2.7.27}$$

o

$$y'(t) = -a(t)y(t) + f(t, y(t), y(\gamma_1(t)), .., y(\gamma_n(t))) \tag{2.7.28}$$

donde, $a(t)$ es una función positiva y la función f depende de y y n funciones desviadas.

Para estudiar la existencia de solución ω-periódica, por supuesto, se necesita la condición (ω, p) para n funciones desviadas, también necesita restringir algunas condiciones para la función f dada, por ejemplo, la condición de Lipschitz, etc., ajustando las condiciones necesarias para garantizar la existencia de una solución ω-periódica.

Algunos resultados de esta generalización de n funciones desviadas se han presentado en el Congreso del Noveno Encuentro Chileno de Biomatemática [21] con el tema: "*Existencia, unicidad y atractividad global de una solución periódica positiva para el modelo de Lasota-Wazewska con argumento constante por trozos de tipo generalizado*".

Bibliografía

[1] A. R. Aftabizadeh and J. Wiener, *Oscillatory and periodic solutions of an equation alternately of retarded and advanced types*, Appl. Anal., 23 (1986), 219-231.

[2] A. R. Aftabizadeh, J. Wiener and J.M. Xu, *Oscillatory and periodic solutions of delay differential equations with piecewise constant argument*, Proc. Amer. Math. Soc., 99 (1987), 673-679.

[3] M. U. Akhmet, H. Öktem, S. W. Pickl and G. W. Weber, *An anticipatory extension of malthusian model, in: D.M. Dubois (Ed.), CASYS 2005-Seventh International Conference*, in: AIP Conference Proceedings, vol. 839, The American Institute of Physics, 2006, 260-264.

[4] M. U. Akhmet, *Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type*, Nonlinear Anal., TMA 66 (2007) 367-383.

[5] M. U. Akhmet, *On the reduction principle for differential equations with piecewise constant argument of generalized type*, J. Math. Anal. Appl., 336 (2007), 646-663.

[6] M. U. Akhmet, *Asymptotic behavior of solutions of differential equations with piecewise constant arguments*, Appl. Math. Lett., 21(9) (2008), 951-956.

[7] M. U. Akhmet, *Stability of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type*, Nonlinear Anal., TMA 68 (2008), 794-803.

[8] M. U. Akhmet, C. Büyükadal and T. Ergenç, *Periodic solutions of the hybrid system with small parameter*, Nonlinear Anal., Hybrid Systems 2 (2008), 532-543.

[9] D. Bainov and P. Simeonov, *Integral Inequalities and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

[10] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., 3 (1922), 133-181.

[11] L. E. J. Brouwer, *Über abbildung von mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, 71 (1910), 97-115.

[12] S. Busenberg and K. Cooke, *Vertically Transmitted Diseases, Models and Dynamics*, in: Biomathematics, vol. 23, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[13] K. L. Cooke and J. Wiener, *Retarded differential equations with piecewise constant delays*, J. Math. Anal. Appl., 99 (1984), 265-297.

[14] K. L. Cooke and J. Wiener, *An equation alternately of retarded and advanced type*, Proc. Amer. Math. Soc., 99 (1987), 726-732.

[15] K. L. Cooke and J. Wiener, *A survey of differential equations with piecewise continuous argument*, in: Lecture Notes in Math., vol. 1475, Springer, Berlin, 1991, 1-15.

[16] KuoShou, Chiu and M. Pinto, *Variation of parameters formula and Gronwall inequality for differential equations with general piecewise constant arguments*, Submitted.

[17] KuoShou, Chiu and M. Pinto, *Periodic solutions of differential equations with a general piecewise constant argument and applications*, Submitted.

[18] KuoShou, Chiu and M. Pinto, *Soluciones periódicas para la ecuación logística de tipo alternadamente avanzado y retardado*, Octavo Encuentro Chileno de Biomatemática, 28-29 Agosto, 2008, Talca, Chile.

[19] KuoShou, Chiu and M. Pinto, *Modelo anticipatorio para la supervivencia de los glóbulos rojos*, LXXVIII Encuentro de la Sociedad de Matemáticas de Chile, 6-9 Noviembre, 2008, Valparaiso, Chile.

[20] KuoShou, Chiu and M. Pinto, *Green's function for periodic solutions in alternately advanced and delayed differential systems*, LXXIX Encuentro de la Sociedad de Matemáticas de Chile, 5-7 Noviembre, 2009, Olmué, V-Región, Chile.

[21] KuoShou, Chiu, *Existencia, unicidad y atractividad global de una solución periódica positiva para el modelo de Lasota-Wazewska con argumento constante por trozos de tipo generalizado*, Noveno Encuentro Chileno de Biomatemática, 5-7 Noviembre, 2009, Olmué, V-Región, Chile.

[22] D. Dubois, *Anticipatory Kaldor-Kalecki model of business cycle*, A Symposium at the 17th European Meeting on Cybernetics and Systems Research Vienna, Austria, April 13-16, 2004.

[23] Guihong Fan and Yongkun Li, *Existence of positive periodic solutions for a periodic logistic equation*, Applied Math. and Comput., 139 (2003), 311-321.

[24] J. R. Graef, C. Qian and P.W. Spikes, *Oscillation and global attractivity in a periodic delay equation*, Can. Math. Bull. 38 (1996) 275-283.

[25] I. Gyori and G. Ladas, *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications.* London: Oxford, Univ Press, 1991.

[26] T. H. Gronwall, *Note on the derivatives with respect to a parameter of solutions of a system of differential equations*, Ann. Math. 20 (1919), 292-296.

[27] G. E. Hutchinson, *Circular causal systems in ecology*, Ann. New York Acad. Sci. 50, (1948), 221-248.

[28] D. Q. Jiang, J. J. Wei. *Existence of positive periodic solution of nonautonomous delay differential equation*, Chin. Ann of Math., 20A (6) (1999), 715-720.

[29] D. Q. Jiang, J. J. Wei, *Existence of positive periodic solutions for Volterra intergo-differential equations*, Acta Math. Sinica 21B (4) (2001), 553-560.

[30] D. Q. Jiang, J. J. Wei, B. Zhang, *Positive periodic solutions of functional differential equations and population models*, Electron. J. Diff. Equat, 71 (2002), 1-13.

[31] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 191, Academic Press, Massachusetts, 1993.

[32] M. R. S. Kulenovic, G. Ladas, and Y. G. Sfica, *Global attractivity in population dynamics*, Comput. Math. Appl, 1989, 18: 925-928

[33] Y. J. Liu and W. G. Ge, *Positive periodic solutions of nonlinear differential equations*, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 18(4), 2003, 373-382.

[34] A. D. Myshkis, *On certain problems in the theory of differential equations with deviating arguments*, Uspekhi Mat. Nauk 32 (1977), 173-202.

[35] G. Papaschinopoulos, *Some results concerning a class of differential equations with piecewise constant argument*, Math. Nachr., 166 (1994), 193-206.

[36] G. Papaschinopoulos, *Exponential dichotomy, topological equivalence and structural stability for differential equations with piecewise constant argument*, Analysis, 14 (1994), 239-247.

[37] G. Papaschinopoulos, *Linearisation near the integral manifold for a system of differential equations with piecewise constant argument*, J. Math. Anal. Appl., 215 (1997), 317-333.

[38] M. Pinto, *Dichotomy and existence of periodic solutions of quasilinear functional differential equations.* Nonlinear Anal., TMA, Accepted Manuscript.

[39] M. Pinto, *Bounded and periodic solutions of nonlinear integro-differential equations with infinite delay.* E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., 46 (2009), pp. 1-20.

[40] M. Pinto, *Asymptotic equivalence of nonlinear and quasi linear differential equations with piecewise constant arguments*, Mathematical and Computer Modelling, 49 (2009), 1750-1758.

[41] A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations, World Scientific*, Singapore, 1995.

[42] R. Reissig, G. Sansone and R. Conti, *Nonlinear differential equations of higher order*, Noordhoff, Leyden, 1974.

[43] H. Schaefer, *Über die methode der a priori-Schranken*, Math. Ann., 129 (1955), 415-416.

[44] J. Schauder, *Der fixpunktsatz in funktionalräumen*, Studia Mathematica, 2 (1930), 171-180.

[45] G. Seifert, *Almost periodic solutions of certain differential equations with piecewise constant delays and almost periodic time dependence*, J. Differential Equations, 164 (2000), 451-458.

[46] D.R. Smart, *Fixed Point Theorems*, Cambridge, 1980.

[47] S. M. Shah and J. Wiener, *Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations*, Internat. J. Math. Sci. 6 (1983), 671-703.

[48] Y. N. Raffoul, *T-periodic solutions and a priori bounds*, Mathematical and Computer Modelling 32, (2000), 643-652.

[49] R. Rosen, *Anticipatory Systems*, Pergamon Press, New York, 1985.

[50] P. F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, Corr. Math. et Phys. 10 (1838), 113-121.

[51] Genqiang Wang, Bicheng Yang, L. Debnath, *Periodic Positive Solutions for a Delay Nonlinear Differential Equation with Piecewise Constant Arguments*, Appl. Math. Lett., 17(12) (2004), 1323-1329.

[52] Genqiang Wang, *Existence theorem of periodic solutions for a delay nonlinear differential equation with piecewise constant arguments*, J. Math. Anal. Appl., 298 (2004), 298-307.

[53] Genqiang Wang, *Existence of Periodic Solutions for a Neutral Differential Equation with Piecewise Constant Argument*, Funkcialaj Ekvacioj. 48(2)(2005), 299-311.

[54] Genqiang Wang, Sui Sun Cheng, *Existence of Periodic Solutions for Second Order Rayleigh Equations With Piecewise Constant Argument*, Turk. J. Math. 30 (2006), 57-74.

[55] Genqiang Wang, *Periodic solutions of a neutral differential equation with piecewise constant arguments*, J. Math. Anal. Appl., 326(1) (2007), 736-747.

[56] H.Y.Wang, *Positive periodic solutions of functional differential equations*, J. Differential Equations 202, (2004), 354-366.

[57] M. Wazewska-Czyzewska and A. Lasota, *Mathematical problems of the dynamics of a system of red blood cells*, (Polish) Math Stos III, 1976, 6: 23-40.

[58] J. Wiener, *Differential equations with piecewise constant delays, in Trends in the Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations*, ed. V. Lakshmikantham (Marcel Dekker, New York, 1983) 547-580.

[59] J. Wiener and A. R. Aftabizadeh, *Differential equations alternately of retarded and advanced types*, J. Math. Anal. Appl., 129 (1988), 243-255.

[60] J. Wiener and K. L. Cooke, *Oscillations in systems of differential equations with piecewise constant argument*, J. Math. Anal. Appl., 137 (1989), 221-239.

[61] J. Wiener, *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1993.

[62] Zhijun Zeng, *Existence of positive periodic solutions for a class of nonautonomous difference equations*, Electron. J. of Differential Equat., 3 (2006), 1-18.

[63] Zhaoli Liu, *On the existence of periodic solutions for a nonlinear system of ordinary differential equations*, Acta Math. Sinica, English Series, 16(3) (2000), 505-514.