Álgebras commutativas que satisfacen una identidad polinomial de grado cuatro

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas.

Facultad de Ciencias

CARLOS EDUARDO ROJAS BRUNA

Enero, 2008

Directora de Tésis: Dra. Alicia Labra Jeldres

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACION

TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

CARLOS EDUARDO ROJAS BRUNA

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 9 de Enero de 2008.

Director de Tesis:

Dra. Alicia Labra J. .... Alicia Labra

Comisión de Evaluación de la Tesis:

Dr. Eduardo Friedman (Presidente) .... Eduardo Friedman

Dr. Iván Correa ....

Dr. Antonio Behn .... Antonio Behn

A mis padres y hermana.

Nace el 12 de Junio de 1982 en la ciudad de Santiago. Al poco tiempo, por motivos de trabajo de sus padres, se radica en la ciudad de Punta Arenas, lugar donde vivió hasta el año 2000. Realiza sus estudios básicos y medios en el Liceo Salesiano San José de Punta Arenas, donde desde temprana edad manifiesta su interés por estudiar matemáticas, principalmente motivado por los distintos profesores que tuvo durante su formación, en especial durante la enseñanza media con el profesor Guillermo Smith.

Terminada la enseñanza media, ingresa a la carrera de Licenciatura en Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Durante su estadía en esta universidad, nace una clara inclinación hacia todos aquellos temas relacionados el álgebra, por sobre las demás disciplinas, pero siempre manteniendo un alto interés por las matemáticas en general. Es durante las Escuelas de Verano de postgrado, en la Pontificia Universidad Católica, que comienza su acercamiento al programa de postgrado en la Universidad de Chile.

Razón por la cual, terminados los estudios en Valparaíso, postula al programa de Doctorado en Cs. mención matemáticas en la Universidad de Chile, lugar donde es aceptado, y además obtiene una beca Conicyt de doctorado; todo esto durante el año 2004.

Una vez aprobados los cursos obligatorios del programa de doctorado, inicia el proceso de búsqueda de una área de especialización. Es aquí donde después de asistir a una gran cantidad de cursos optativos sobre diferentes temas, se inclina por el área de álgebras no asociativas, al finalizar el curso "Álgebras de Lie"; dictado por la Profesora Alicia Labra en el año 2005.

Rápidamente inicia su especialización con distintos cursos y seminarios, siendo de gran importancia el seminario de álgebras no asociativas dictado los días miércoles.

Durante el trabajo de tésis, asiste a congresos, y realiza la primera exposición sobre su trabajo en Brasil, en Septiembre del año 2007. Además de estar trabajando en las publicaciones que puedan ser obtenidas a partir de la tésis, su intención es poder realizar alguna estadía de postdoctorado, y en el futuro, mantenerse investigando activamente tanto en el área de álgebras no asociativas, como en otras áreas de interés.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar gracias a todas aquellas personas que estuvieron presentes y me acompañaron durante todo el período como estudiante del programa de Doctorado en Ciencias mención matemáticas.

Agradezco especialmente a todos aquellos que sin pertenecer al mundo de las matemáticas, me hacian sentir su apoyo de distintas maneras, ya sea con un saludo, una sonrisa o una palabra de ánimo.

A mi profesora guía, Alicia Labra, por su apoyo académico, preocupación y compañia.

A mi familia, por su paciencia y cariño.

A todos los profesores que participaron de mi formación académica, desde la etapa escolar hasta el día de hoy. En especial a la profesora Lidia Consigliere.

A Rodrigo Ojeda, por su amistad.

A CONICYT, por la beca de postgrado otorgada durante mi estadía en el programa.

Resumen.

Este trabajo trata sobre álgebras conmutativas sobre un cuerpo F que satisfacen la identidad polinomial :

$$2\beta\left\{(xy)^2 - x^2y^2\right\} + \gamma\left\{((xy)x)y + ((xy)y)x - (y^2x)x - (x^2y)y\right\} = 0. \qquad (1)$$

Relacionamos las álgebras que satisfacen esta identidad, con álgebras que satisfacen alguna identidad polinomial más estudiada, como es el caso de las álgebras alternativas. Las relaciones son obtenidas a partir de la suposición de nuevas hipótesis en la álgebra, por ejemplo la existencia de elemento identidad 1 implica que la álgebra es alternativa y si suponemos que esta álgebra posee una forma traza no degenerada tal que $car(F) \neq 2$ y $2\beta + \gamma \neq 0$ entonces la álgebra satisface la identidad $a^3b - a(a(ab)) = 0$ que es una generalización de la alternatividad.

Estudiamos de manera separada, el caso en que $\gamma = 0$ para el cual se obtienen algunas identidades, que llevan a concluir que el conjunto de los elementos nilpotentes forma una subálgebra. Con estas identidades, también se obtienen resultados sobre la relación entre la nilpotencia de elementos del álgebra y los operadores de multiplicación y además se presenta una interpretación de estas identidades en términos de ideales del álgebra.

Demostramos que para el caso en que A es una álgebra que satisface la identidad (1) con $\gamma + \beta \neq 0$ el subespacio generado por aquellos elementos de la forma $a^2b - a(ab)$ es un ideal de A y mostramos como el método usado en esta demostración puede ser utilizado para demostrar que el subespacio generado por los elementos de la forma $(ab)c - a(bc)$ forma un ideal en las álgebras que satisfacen otra identidad polinomial de grado 4 distinta de (1).

Se prueba la existencia de una forma traza, la cual no necesariamente es no degenerada. Adicionalmente demostramos de manera similar, la existencia de una forma traza para álgebras que satisfacen otra identidad polinomial de grado 4.

Estudiamos en detalle la descomposición de Peirce con objeto de explicitar la estructura de las álgebras simples que satisfacen la identidad (1), para este objetivo se demuestran diversos resultados acerca de las raíces de los polinomios de Peirce.

Finalmente mostramos algunos problemas abiertos y comentarios que se obtienen a partir del análisis de los resultados presentados en esta tésis.

Abstract.

In the present work we study commutative algebras over a field F satisfying the following polynomial identity :

$$2\beta \left\{(xy)^2 - x^2y^2\right\} + \gamma \left\{((xy)x)y + ((xy)y)x - (y^2x)x - (x^2y)y\right\} = 0. \qquad (2)$$

We show the relation between these algebras and altenative algebras. By assuming the existence of a unity element 1 we prove that the algebra is an alternative algebra. Also we show that if $car(F) \neq 2$, $2\beta + \gamma \neq 0$ and the algebra posseses a non degenerated trace form, then it must satisfy the identity $a^3b - a(a(ab)) = 0$ which is a generalization of the alternative law.

In the particular case of $\gamma = 0$ we prove using an identity obtained from (2) that the set of all nilpotent elements of the algebra forms a subalgebra and we show some results about the relation between the nilpotency of an element and the nilpotency of the multiplication operator.

If A is a commutative algebra satisfying the identity (2) and $\gamma + \beta \neq 0$ we prove that the generated subspace of A spanned by the elements of the form $a^2b - a(ab)$ is an ideal of A. Moreover we prove using the same technique that if A satisfies another identity of degree four then the subspace of A spanned by the elements of the form $(ab)c - a(bc)$ is an ideal of A.

We prove the existence of a trace form which is not necessarilly non degenerated in algebras satisfying (2) and we show some extra results for an aditional identity of degree four.

We deal with the Peirce decomposition of an algebra satisfying (2), we prove some facts about the roots of the Peirce Polynomials and we explain how this results can be used to get information about the structure of simple algebras of these kind.

Finally we show some open problems and comments that arise from the results presented in this thesis.

Índice general

Introducción.

Luego de un período de familiarización con las estructuras algebraicas no asociativas, particularmente con las Álgebras de Lie en una primera etapa y posteriormente con las Álgebras de Jordan y al observar que éstas se encuentran determinadas o definidas por un conjunto de identidades surge la pregunta de si es que tiene algún sentido comenzar a imponer condiciones al producto en una álgebra o más especificamente, que tan distinta será dicha álgebra respecto de las Álgebras de Lie o Jordan al suponer que el producto satisface una propiedad distinta a las que definen a las álgebras antes mencionadas.

Una ventaja que presentan las Álgebras de Lie y Jordan es que aquello posteriormente entendido como identidades del álgebra fue obtenido como una propiedad de objetos que aparecieron de manera constructiva en algún otro contexto de la ciencia, lo que podría en algún sentido llevar a pensar que esta exigencia de nuevas identidades de manera arbitraria es un tanto artificial, pero en este proceso, de construcción de nuevas identidades (distintas unas de otras en el sentido de ser expresiones algebraicas distintas), ¿se está realmente construyendo algo nuevo? ¿puede ser obtenida la identidad original a partir de la nueva o viceversa?.

El concepto de variedades de álgebras, desarrollado en el texto de P.Cohn "Universal Algebras"[3], fue aplicado con éxito en teoría de grupos y en el estudio de las Álgebras de Jordan [8]; logros que sirven de motivación para organizar de alguna manera esta idea de definir identidades bajo un contexto mas general y unificador. Esta nueva visión es presentada por J.M.Osborn en "Varieties of Algebras" [10] donde además de las herramientas y técnicas presentadas, se formaliza la idea de que dos identidades sean "iguales". Toda esta nueva organización de conceptos propone una evolución de la pregunta antes formulada.

Al tener determinadas cuales son realmente aquellas identidades distintas agrupadas bajo cierto criterio o propiedad en común (por ejemplo : el grado) sería interesante poder describir la estructura y propiedades de las álgebras que satisfacen estas identidades así como también saber que hipótesis adicionales podrían acercar estas álgebras a aquellas más estudiadas, Álgebras de Lie, Jordan, Alternativas.

Como respuesta a esta pregunta, para el caso particular en que el grado es igual a 4, tenemos el siguiente resultado de I.R.Hentzel, L.Carini y G.M.Piacentini [3]:

Si A es una álgebra conmutativa sobre un cuerpo F tal que $car(F) \neq 2, 3$ y que satisface una identidad polinomial de grado 4 no obtenida a partir de la conmutatividad. Entonces A satisface alguna de las siguientes identidades :

$$\alpha(x^2x^2) + \beta x^4 = 0, \tag{1}$$

$$2\beta\left\{(xy)^2 - x^2y^2\right\} + \gamma\left\{((xy)x)y + ((xy)y)x - (y^2x)x - (x^2y)y\right\} = 0, \tag{2}$$

$$\beta\left\{(x^2y)x - ((xy)x)x\right\} + \gamma\left\{x^3y - ((xy)x)x\right\} = 0, \tag{3}$$

$$((xy)z)t - ((xy)t)z + ((yt)x)z - ((yt)z)x + ((yz)t)x - ((yz)x)t = 0. \tag{4}$$

Para $\alpha, \beta, \gamma \in F$.

En relación a la identidad (5) podemos encontrar en [2] diversos resultados que evidencian cierta similitud entre estas álgebras y las álgebras de Jordan, y además en el trabajo de I.R.Hentzel, L.Carini y G.M.Piacentini [3] se estudia el caso particular en que además se asume que dicha Álgebra es simple y se demuestra que esto implica que la álgebra es asociativa.

Continuando en esta dirección es natural preguntarse que sucede con las demás identidades. Un concepto que será definido más adelante corresponde al tipo de una identidad el cual viene a ser una especie de refinamiento del concepto de grado, con lo que surgen nuevas preguntas relativas a las diferencias que pudiesen haber entre identidades de tipo distinto, tanto en la manera en que son utilizadas las herramientas usuales del estudio de las álgebras no asociativas, así como también en las diferencias que se puedan observar una vez que ha sido estudiada más en profundidad su estructura.

Motivados por el trabajo de Osborn [9] en el cual se analiza la identidad (4) para un caso particular valores para $\beta, \gamma \in F$, estudiaremos aquellas álgebras que satisfacen la identidad (4), además con la idea un poco mas ambiciosa de describir la estructura de las álgebras que satisfacen las demás identidades de grado 4 mostramos cómo algunas técnicas utilizadas para el estudio de la identidad (4) pueden ser útiles hacia ese objetivo.

Aplicaremos en estas álgebras conceptos generales de álgebras no asociativas, que pueden ser encontrados en [12] los cuales detallaremos en el primer capítulo.También mostraremos en este capítulo las herramientas fundamentales utilizadas dentro del contexto de las variedades de álgebras los cuales están presentados de manera detallada en [10].

El segundo capítulo muestra principalmente aplicaciones de los conceptos desarrollados en el primer capítulo, mostrando por ejemplo algunas identidades obtenidas mediante la utilización de la linealización y además se estudia que sucede al suponer la hipótesis adicional de que la álgebra posee elemento identidad 1. Un resultado importante en este capítulo es la existencia de un ideal llamado $Alt(A)$ que corresponde al subespacio generado por aquellos elementos de la forma (a, a, b) con $a, b \in A$. Este capítulo se encuentra separado en dos secciones una de las cuales está dedicada al estudio del caso particular $\gamma = 0$ para el cual se prueba que el conjunto de los elementos nilpotentes forma un ideal en la álgebra.

En el tercer capítulo se demuestra la existencia de formas trazas y se obtienen nuevas identidades a partir de la hipótesis adicional de que la álgebra posee una forma traza no degenerada.

En el capítulo cuatro estudiamos la estructura de esta álgebra, más especificamente su descomposición de Peirce. Continuando en esta línea el quinto capítulo muestra una aplicación de las ideas presentadas en el capítulo cuatro, orientado a la descripción más explícita de las álgebras para las cuales además se exige la condición de ser simple, esto es no existen ideales no triviales en la álgebra.

Finalmente en el sexto capítulo se demuestran resultados para las demás identidades de grado cuatro y además se presentan algunas preguntas abiertas y comentarios en relación con los capítulos anteriores.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Variedades de Álgebras y Linealización.

Un grupoide $\mathcal{N}$ es un conjunto no vacío dotado de una operación binaria. Si X es un conjunto no vacío (llamado conjunto de símbolos), llamaremos $\mathcal{N}\{X\}$ al conjunto de todas las palabras de largo finito que se pueden formar usando elementos de X e indicando con paréntesis el orden en que cada yuxtaposición fue realizada.

Diremos que dos palabras en $\mathcal{N}\{X\}$ son iguales si coinciden tanto en los elementos de X que la conforman como en la posición de los paréntesis.

Si z es un elemento de $\mathcal{N}\{X\}$ y $x_i \in X$ llamamos *grado de x_i en z* (denotado por $\deg\{x_i, z\}$), al número de veces que x_i aparece en la palabra z.

Sea Φ un anillo conmutativo asociativo con 1 y denotemos por $\Phi\{X\}$ al conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $\mathcal{N}\{X\}$ con coeficientes en Φ. Se define en $\Phi\{X\}$ de manera natural una suma y un producto que esta dado por :

$$\left(\sum \alpha_i z_i\right)\left(\sum \beta_j w_j\right) = \sum \alpha_i \beta_j z_i w_j \quad \alpha_i, \beta_j \in \Phi \text{ y } z_i, w_j \in \mathcal{N}\{X\}.$$

Además podemos definir un producto por escalar $\cdot : \Phi \times \Phi\{X\} \rightarrow \Phi\{X\}$ donde $\cdot(\alpha, \sum \alpha_i z_i) =: \alpha\left(\sum \alpha_i z_i\right) = \sum \alpha\alpha_i z_i$. Tenemos así que junto con estas operaciones $\Phi\{X\}$ forma un álgebra sobre Φ no necesariamente asociativa.

Ejemplo 1.1.2 *Sea* $X = \{x_1, x_2, ...x_k, ...\}$, $S = \{f = x_1(x_2x_3) - (x_1x_2)x_3\}$. *Entonces* S *determina la variedad de las álgebras asociativas sobre* Φ *y claramente si* $\mu : A \to B$ *es cualquier homomorfismo donde* B *es asociativa, y* $z = a_1(a_2a_3) - (a_1a_2)a_3 \in f(A)$ *se tiene :*

$$\begin{aligned} & \mu(a_1(a_2a_3) - (a_1a_2)a_3) \\ = \ & \mu(a_1)(\mu(a_2)\mu(a_3)) - (\mu(a_1)\mu(a_2))\mu(a_3) \\ = \ & b_1(b_2b_3) - (b_1b_2)b_3 = 0, \end{aligned}$$

y así $f(A) \subseteq \ker(\mu)$.

Claramente si una álgebra satisface una identidad f, entonces toda súbalgebra e imagen homomorfa de A satisface f y también la suma directa completa de álgebras que satisfacen f tiene esta propiedad; más generalmente diremos que si $\mathcal{C}$ es una clase de $\Phi-$álgebras, diremos que es una *clase cerrada de álgebras* $\mathcal{C}$ si es cerrada para subálgebras, imágenes homomorfas y sumás directas.

Sobre la caracterización de las variedades de álgebras, los resultados principales son los siguientes, y se pueden encontrar en [10] pág 172 :

Teorema 1.1.3 *Si* A *es una álgebra en una variedad* V *tal que toda identidad válida en* A *es válida en* V *entonces* A *genera* V, *en particular* $F/V(F)$ *genera* V.

Teorema 1.1.4 *(Garrett Birkhoff) Una clase de* $\Phi-$*álgebras es una variedad si y sólo si es una clase cerrada de álgebras. En particular, toda álgebra genera una variedad.*

A continuación mostraremos una importante herramienta de esta teoría, llamada *linealización.*

Una identidad $f \in F$ se puede expresar como combinación lineal de elementos de $\mathcal{N}\{X\}$ (llamados monomios de f). Diremos que f es homogénea si el grado de cada x_i es el mismo en todos los monomios de f.

En una identidad f podemos agrupar todos aquellos monomios que tienen el mismo grado en cada x_i y podemos escribir así f como suma de polinomios homogéneos que tienen grado distinto en al menos uno de los x_i, estos polinomios son llamados *componentes homogéneas* de f.

Sea z un monomio en $x_1, ..., x_m$ y sea $n_i = deg\{x_i, z\} > 0$ para cada $i = 1, ..., m$ (esto significa que los x_i aparecen todos, ya que por ejemplo $z = x_1x_2$ es un monomio en x_1, x_2, x_3 pero $deg\{x_3, z\} = 0$).

Reordenando los x_i si es necesario de modo que $n_1 \geq ... \geq n_m$,diremos que z es de tipo $[n_1, n_2, ..., n_m]$.

Ejemplo 1.1.5 *La siguiente tabla muestra monomios, con su correspondiente tipo.*

$x_2(x_2x_2)$	$[3]$
$(x_1x_3)(x_1(x_2x_3))$	$[2,2,1]$
$x_1\,(x_2((x_4x_4)(x_2x_4)))$	$[3,2,1]$

Si una identidad f es homogénea podemos decir que f es del tipo $[n_1, n_2, ..., n_m]$ donde $[n_1, n_2, ..., n_m]$ es el tipo de alguno de sus monomios.

Si $[n_1, n_2, ..., n_m]$,$[n'_1, n'_2, ..., n'_{m'}]$ son dos tipos y $n = \sum n_i$, $n' = \sum n'_{i'}$.
Diremos que $[n_1, n_2, ..., n_m] < [n'_1, n'_2, ..., n'_{m'}]$ si :

$$n < n' \text{ó } n = n' \text{ y } n_j > n'_j \text{ para el primer entero } j \text{ tal que } n_j \neq n'_j$$

Ejemplo 1.1.6 $[3] < [4] < [3,1] < [2,2] < [2,2,1]$.

Sea $f(x_1, ..., x_m) \in F$ y sea y un elemento en X distinto de los x_i. Entonces sustituyendo $x_i + y$ por x_i y multiplicando tenemos :

$$f(x_1, ..., x_i + y, ...x_m) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ik}(x_1, ..., x_m, y), \tag{1.1}$$

donde f_{ik} es la suma de todos los términos con grado de y igual a k.

Observación 1.1.7 *La suma de la relación (1.1) es finita ya que* $f_{ik} = 0$ *cuando* k *es mayor que el más grande de los grados de* x_i *en los monomios de* $f(x_1, ..., x_m)$.

Ejemplo 1.1.8 *Si* $f(x_1, x_2) = x_1(x_1x_2) - (x_1x_1)x_2$ *entonces :*

$$f(x_1 + y, x_2)$$
$$= \{x_1(x_1x_2) - (x_1x_1)x_2\} + \{x_1(x_2y) + y(x_1x_2) - (x_1y)x_2 - (yx_1)x_2\} + \{y(x_2y) - (yy)x_2\},$$

como el grado máximo de x_1 *es 2; los términos de la suma son cero a partir de* $k = 3$.

Si definimos el operador $\delta_i^k(y)$ actuando sobre f como el polinomio f_{ik} :

$$f(x_1, ..., x_m)\delta_i^k(y) = f_{ik}(x_1, ..., x_m, y).$$

Entonces :

(i) $\delta_i^k(y)$es lineal

(ii) $\delta_i^0(y)$ es la función identidad.

(iii) $\delta_i^1(y)$ es la suma de todos los monomios obtenidos reemplazando un x_i por y a la vez, en cada lugar dónde x_i aparece en los monomios de f.

(iv) En general $\delta_i^k(y)$ es la suma de los monomios obtenidos reemplazando k de los x_i en cada uno de los monomios de f.

(v) En caso de no tener subindexado el elemento sobre el cual δ actúa, anotamos $\delta_w^k(y)$.

Sea F' la $\Phi-$álgebra que se obtiene adjuntando un 1 a F. Entonces para $z \in F'$, definamos $f\delta_i^k(z)$ como :

$$f\delta_i^k(z) = f(x_1, ...x_m)\delta_i^k(z).$$

Ejemplo 1.1.9 $\{(x_1x_2)(x_1x_1)\}\,\delta_1^1(1) = x_2(x_1x_1) + 2(x_1x_2)x_1$
$\{(x_1x_2)x_3\}\,\delta_2^1(x_3) = (x_1x_3)x_3$
$(x_1x_1)\delta_1^1(x_2x_3 + \alpha) = (x_2x_3 + \alpha)x_1 + x_1(x_2x_3 + \alpha) = (x_2x_3)x_1 + x_1(x_2x_3) + 2\alpha x_1$
para todo $\alpha \in \Phi$.

Si $f \in F$ y g es un elemento en F' que se obtiene a partir de f aplicando una cantidad finita de operadores de la forma $\delta_i^k(z)$ con $z \in X$ o $z = 1$ diremos que g es una *derivada* de f.

Si cada z es 1 en la sucesión de operadores aplicados, diremos que g es una *derivada estricta* de f.

Sea $y \in X \setminus \{x_1, ...x_m\}$, si $k \geqslant 1$ y si x_i tiene grado mayor que k en al menos un monomio de f entonces $f(x_1, ..., x_m)\delta_i^k(y)$ se llama una *linealización simple* de f.

Si una identidad puede ser obtenida a partir de f por una sucesión de una o más linealizaciones simples (y reordenando términos) diremos que la identidad es una *linealización* de f.

Una linealización en la que cada monomio no tiene elementos de grado mayor que 1 se llama una *linealización completa.*

Una identidad será llamada *derivada estable* de f si puede ser obtenida a partir de f por una sucesión finita de linealizaciones o poniendo dos variables iguales.

Proposición 1.1.10 *([10] pág 177) Sea Φ un dominio de integridad con al menos n elementos y sea f una identidad tal que el grado en f de cada $x_i \in X$ es menor que n, y sea A una $\Phi-$álgebra libre de torsión que satisface f. Entonces A satisface cada componente homogénea de f.*

Observación 1.1.11 *Si V es una variedad de $\Phi-$álgebras determinada por un conjunto de identidades que satisfacen las hipótesis de la proposición anterior, entonces V está determinada por un conjunto de identidades homogéneas.*

Sobre la caracterización de una variedad V a partir de las linealizaciones de sus identidades que la definen, los resultados son los siguientes ([10] pág 178-180):

Teorema 1.1.12 *Sea Φ un cuerpo con al menos n_1 elementos, f una identidad homogénea de tipo $[n_1, ..., n_m]$ y sea A una $\Phi-$álgebra que satisface f. Si A' es la $\Phi-$álgebra que se obtiene adjuntando un 1 a A entonces A' satisface f si y sólo si A satisface todas las derivadas estrictas de f. Si A tiene 1 entonces satisface todas las derivadas estrictas de f.*

Teorema 1.1.13 *Sea Φ un cuerpo con al menos n_1 elementos, sea f una identidad homogénea de tipo $[n_1, ..., n_m]$ y A una álgebra que satisface f entonces A satisface todas las derivadas estables de f.*

Teorema 1.1.14 *Sea Φ un cuerpo de característica cero o mayor que n, y sea V una variedad de Φ-álgebras determinada por un conjunto S de identidades cuyo grado en cada $x_i \in X$ no es mayor que n. Entonces V es igual a la variedad V' de todas las algebras que satisfacen el conjunto de las linealizaciones completas de las identidades en S.*

1.2. Conceptos Generales.

Si A es una álgebra sobre un cuerpo F tal que $xy - yx = 0$ para cada x, y en A, diremos que A es una álgebra conmutativa. Es importante señalar que las álgebras que estudiaremos en este trabajo, serán siempre álgebras conmutativas.

Si a es un elemento de una álgebra A sobre un cuerpo F, denotaremos por R_a al operador lineal $R_a : A \to A$ definida por $xR_b = xb = bx$.

Notación 1.2.1 *Si a, b son elementos de una álgebra A, el producto R_aR_b denotará al operador $R_aR_b : A \to A$ definido por $xR_aR_b = (xa)b$. De esta manera si $\{b_i\}_{i=1}^n \subset A$ entonces $xR_{b_1} \cdots R_{b_n} = (((xb_1)b_2) \cdots b_n)$.*

Sea A una álgebra sobre un cuerpo F y $e \in A$ tal que $e \neq 0$. Si $e^2 = e$ diremos que e es un elemento idempotente de A.

En general es importante estudiar el comportamiento del operador lineal R_e ya que este nos proporcionará una descomposición de nuestra álgebra, llamada Descomposición de Peirce; la cual facilita el estudio de propiedades estructurales más específicas de esta.

Si $a \in A$ definiremos recursivamente la $n-$ésima potencia de a como :

$$\begin{aligned} a^1 &= a, \\ a^n &= a^{n-1}a. \end{aligned}$$

Observemos que como nuestra álgebra A puede ser no asociativa, podemos tener por ejemplo $a^4 \neq a^2a^2$.

En el caso especial de que $a^ia^j = a^{i+j}$ para todo $a \in A$ y $i, j \in \mathbb{N}$, la álgebra A se llama *álgebra asociativa en las potencias* y es un resultado conocido, que toda álgebra de este tipo, que además es de dimensión finita, contiene un idempotente.[12]

Una álgebra conmutativa A que además es asociativa en las potenicas, se llama *nilálgebra* si para todo $a \in A$ se tiene $a^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Si A es una álgebra conmutativa, se define la serie derivada de subálgebras $A^{(1)} \supseteq A^{(2)} \supseteq ...$ como $A^{(1)} = A$, $A^{(i+1)} = (A^{(i)})^2$. Diremos que A es *soluble* si $A^{(r)} = 0$ para algún entero r.

Una álgebra A se llama *nilpotente* sí existe un entero k, tal que todo producto $a_1a_2 \cdots a_k$ de k elementos de A, sin importar la manera en que se asocien sus factores, es cero.

En general, es objeto de estudio la relación que existe entre los conceptos de nilálgebra, álgebra nilpotente y solubilidad. En este contexto es conocido el siguiente resultado (detalles en [12] pág 18) :

Proposición 1.2.2 *Si J es un ideal soluble de una álgebra A, tal que A/J es soluble. Entonces A es soluble.*

Para el caso particular en que A es una álgebra alternativa, esto es A satisface las identidades $x^2y - x(xy) = 0$ y $yx^2 - (xy)x = 0$ tenemos el siguiente resultado, cuya demostración se puede encontrar en [12], pág 30 :

Teorema 1.2.3 *Toda nilálgebra alternativa de dimensión finita es nilpotente.*

Capítulo 2

Generalidades.

2.1. Caso general $\beta, \gamma \in F$.

Sea A una álgebra conmutativa sobre un cuerpo F que satisface la identidad :

$$2\beta\left\{(xy)^2 - x^2y^2\right\} + \gamma\left\{((xy)x)y + ((xy)y)x - (y^2x)x - (x^2y)y\right\} = 0. \tag{2.1}$$

Linealizando y en la identidad (2.1) obtenemos :

$$\begin{aligned} &2\beta\left\{2\,(xy)\,(xz) - 2x^2(yz)\right\} \\ &\quad + \gamma\left\{((xz)x)y + ((xy)x)z + ((xz)y)x + ((xy)z)x - 2((yz)x)x - (x^2z)y - (x^2y)z\right\} = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Proposición 2.1.1 *Sea A una álgebra que satisface la identidad (2.1). Si A tiene elemento 1 y si $4\beta + \gamma \neq 0$ entonces A es una álgebra alternativa.*

Demostración. Tomando $z = 1$ en la identidad (2.2) se tiene :

$$4\beta\left\{(xy)\,x - x^2y\right\} + \gamma\left\{(xy)x - x^2y\right\} = 0,$$

luego :

$$(4\beta+\gamma)\left\{(xy)\,x - x^2y\right\} = 0.$$

Como $4\beta+\gamma\neq 0$, y A es conmutativa se tiene que A satisface la identidad $x^2y = x(xy)$ y así A es una álgebra alternativa. ■

Observación 2.1.2 *Es conocido que si A es una álgebra alternativa y conmutativa sobre un cuerpo F tal que $\frac{1}{3}\in F$ entonces A es asociativa, ver [3].*

Si A es una álgebra sobre un cuerpo F y $x\in A$, definimos el operador multiplicación R_x como :

$$R_x : A \longrightarrow A \quad \text{donde} \quad aR_x = ax \text{ para } a\in A.$$

Proposición 2.1.3 *Sea A una álgebra que satisface la identidad (2.1), supongamos además que $car(F)\neq 3$ entonces :*

$$\begin{aligned}&\gamma\left\{[R_xR_y, R_z] + [R_zR_y, R_x]\right\}\\ &\qquad = 4\beta\left\{R_zR_{xy} - R_xR_{yz}\right\} + \gamma\left\{R_{(xy)z} - R_{(yz)x} - R_{yz}R_x + R_{xy}R_z\right\}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Demostración. La linealización completa de la identidad (2.1) está dada por :

$$\begin{aligned}&2\beta\left\{2\,(xy)\,(wz) + 2\,(wy)\,(xz) - 4(xw)(yz)\right\}\\ &\qquad + \gamma\left\{\begin{array}{c}((wz)x)y + ((xz)w)y + ((wy)x)z + ((xy)w)z + ((wz)y)x\\ +((xz)y)w + ((wy)z)x + ((xy)z)w\\ -2((yz)w)x - 2((yz)x)w - 2((xw)z)y - 2((xw)y)z\end{array}\right\} = 0.\end{aligned}$$

Si escribimos esta última identidad en términos del operador multiplicación R_a definido anteriormente, tenemos :

$$2\beta\left\{2R_zR_{xy}+2R_yR_{xz}-4R_xR_{yz}\right\} \\ +\gamma\left\{\begin{array}{c} R_zR_xR_y+R_{xz}R_y+R_yR_xR_z+R_{xy}R_z+R_zR_yR_x \\ +R_{(xz)y}+R_yR_zR_x+R_{(xy)z} \\ -2R_{yz}R_x-2R_{(yz)x}-2R_xR_zR_y-2R_xR_yR_z \end{array}\right\}=0. \tag{2.4}$$

Intercambiando x por z en (2.4) obtenemos la ecuación :

$$2\beta\left\{2R_xR_{zy}+2R_yR_{xz}-4R_zR_{xy}\right\} \\ +\gamma\left\{\begin{array}{c} R_xR_zR_y+R_{xz}R_y+R_yR_zR_x+R_{zy}R_x+R_xR_yR_z+ \\ R_{(xz)y}+R_yR_xR_z+R_{(zy)x} \\ -2R_{yx}R_z-2R_{(yx)z}-2R_zR_xR_y-2R_zR_yR_x \end{array}\right\}=0. \tag{2.5}$$

Como $car(F)\neq 3$, si restamos (2.4) y (2.5), se obtiene :

$$4\beta\left\{R_zR_{xy}-R_xR_{yz}\right\} \\ +\gamma\left\{\begin{array}{c} R_zR_xR_y+R_zR_yR_x-R_xR_zR_y-R_xR_yR_z \\ +R_{(xy)z}-R_{(yz)x}-R_{yz}R_x+R_{xy}R_z \end{array}\right\}=0.$$

Si S, T son operadores lineales en A y denotamos al conmutador de S y T como $[S,T] = ST - TS$ tenemos :

$$4\beta\{R_zR_{xy} - R_xR_{yz}\} + \gamma\left\{\begin{array}{c}[R_z, R_xR_y] + [R_x, R_zR_y] \\ +R_{(xy)z} - R_{(yz)x} - R_{yz}R_x + R_{xy}R_z\end{array}\right\}.$$

Así finalmente se tiene :

$$\gamma\{[R_xR_y, R_z] + [R_zR_y, R_x]\} = 4\beta\{R_zR_{xy} - R_xR_{yz}\} + \gamma\left\{R_{(xy)z} - R_{(yz)x} - R_{yz}R_x + R_{xy}R_z\right\}.$$

■

Corolario 2.1.4 *Sea A una álgebra sobre un cuerpo F donde car $(F) \neq 3$ tal que A satisface la identidad (2.1) entonces :*

$$\gamma\{[R_xR_{x^i}, R_{x^2}] + [R_{x^2}R_{x^i}, R_x]\} = 4\beta\{R_{x^2}R_{x^{i+1}} - R_xR_{x^ix^2}\} + \gamma\left\{R_{x^{i+1}x^2} - R_{(x^ix^2)x} - R_{x^ix^2}R_x + R_{x^{i+1}}R_{x^2}\right\}.$$

Demostración. Tomando en (2.3) $y = x^i$, $z = x^2$ se tiene el resultado buscado. ■

Sean $a, b, c \in A$ se llama asociador de a, b, c al elemento de A denotado por (a, b, c), que está definido por :

$$(a, b, c) = (ab)c - a(bc).$$

Observación 2.1.5 *Es un resultado conocido, que en toda álgebra A es válida la siguiente identidad :*

$$x(y, z, w) + (x, y, z)w = (xy, z, w) - (x, yz, w) + (x, y, zw). \tag{2.6}$$

La identidad (2.6) se llama usualmente "identidad de Teichmüller" [12], [13].

Definición 2.1.6 *Sea A una álgebra que satisface la identidad (2.1) . Llamaremos $Alt(A)$ al subespacio generado por los elementos de la forma (a, b, b) con $a, b \in A$.*

La identidad (2.6) nos será muy útil para demostrar que $Alt(A)$ es un ideal de A para el caso en que $\gamma + \beta \neq 0$.

Notación 2.1.7 *Si $a, b \in A$ escribiremos $a \equiv b$, si y sólo si $a - b \in Alt(A)$.*

Proposición 2.1.8 *Si A es una álgebra conmutativa que satisface la identidad (2.1) tal que $\gamma + \beta \neq 0$, entonces $Alt(A)$ es un ideal de A.*

Demostración. Poniendo $z = x$, $w = y$ en la identidad (2.6) y usando el hecho de que $(a, b, a) = 0$ para todo $a, b \in A$, tenemos :

$$0 = x(y, x, y) + (x, y, x)y = (xy, x, y) - (x, yx, y) + (x, y, xy). \tag{2.7}$$

Por otro lado :

$$(x, y, xy) + (x, xy, y) = (x, y + xy, y + xy) \in Alt(A),$$

y

$$(xy, x, y) + (x, xy, y) = (xy + x, xy + x, y) = -(y, xy + x, xy + x) \in Alt(A).$$

Así, reemplazando en (2.7) se tiene :

$$0 \equiv 3(xy, x, y) \equiv -3(x, xy, y),$$

luego :

$$((xy)x)y \equiv (xy)(xy) \equiv ((xy)y)x. \tag{2.8}$$

Además :

$$\begin{aligned} (x^2y)y - x^2y^2 &= (x^2, y, y) \equiv 0, \\ (y^2x)x - x^2y^2 &= (y^2, x, x) \equiv 0, \end{aligned}$$

Así :

$$(y^2x)x \equiv x^2y^2 \equiv (x^2y)y. \tag{2.9}$$

Reemplazamos ahora (2.8) y (2.9) en la identidad (2.1) y obtenemos :

$$2\,(\beta + \gamma)\,\{((xy)y)x - (y^2x)x\} \equiv 0,$$

y entonces si $\beta + \gamma \neq 0$:

$$(y, y, x)x \equiv 0.$$

Linealizando esta última identidad se tiene :

$$(y, y, w)x + (y, y, x)w = x(y, y, w) - (x, x, y)w \equiv 0. \tag{2.10}$$

Ahora, usando la identidad de Teichmüller tenemos :

$$\begin{aligned} x(y, y, w) + (x, y, y)w &= (xy, y, w) - (x, y^2, w) + (x, y, yw) \\ &\equiv -(y, xy, w) + (y^2, x, w) - (y, x, yw) \\ &\equiv (y^2, x, w) - (y, xy, w) + (y, y, xw) - (y, x, wy) \\ &\equiv y(y, x, w) + (y, y, x)w - (y, x, wy), \end{aligned}$$

así

$$x(y,y,w) + 2(x,y,y)w \equiv y(y,x,w) - (y,x,wy). \tag{2.11}$$

Intercambiando x con w

$$w(y,y,x) + 2(w,y,y)x \equiv y(y,w,x) - (y,w,xy).$$

Restando (2.10), (2.11) y usando que $(y,y,x) = -(x,y,y)$, tenemos :

$$3x(y,y,w) + 3(x,y,y)w \equiv y(y,x,w) + y(y,w,x) - (y,x,wy) - (xy,w,y).$$

Pero nuevamente usamos la identidad de Teichmüller para obtener :

$$y(y,x,w) + y(y,w,x) - (y,x,wy) - (xy,w,y) = -(y,xw,y) = 0,$$

así :

$$x(y,y,w) + (x,y,y)w \equiv 0.$$

Luego por (2.10) :

$$2(x,y,y)w \equiv 0.$$

Entonces :

$$Alt(A)A \subset A,$$

y así $Alt(A)$ es un ideal de A. ■

Corolario 2.1.9 *Si $\beta+\gamma \neq 0$, y $car(F) \neq 3$, entonces $A/Alt(A)$ es una álgebra alternativa.*

Teorema 2.1.10 *Sea A una nilálgebra de dimensión finita, que satisface la identidad (2.1) con $\beta, \gamma \in F$, $car(F) \neq 3$ y $\beta + \gamma \neq 0$. Supongamos además que A satisface la identidad :*

$$(x, y, y)(a, b, b) = 0$$

Entonces A es soluble.

Demostración. De la proposición anterior, sabemos que $Alt(A)$ es un ideal de A. Como A satisface $(x, y, y)(a, b, b) = 0$ entonces $Alt(A)^2 = 0$ y así $Alt(A)$ es soluble. Además $A/Alt(A)$ es nilálgebra alternativa de dimensión finita. Entonces por la Proposición 1.2.1, $A/Alt(A)$ es nilpotente, en particular es soluble. Finalmente del Teorema 1.2.2 se concluye que A es soluble. ■

Ejemplo 2.1.11 *Utilizando el programa "Albert" de D.P.Jacobs [7], es posible construir un ejemplo de una álgebra A que satisface las hipótesis del Teorema, para $\gamma = 0$. Si $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ es una base de A, los productos no triviales en la base B están dados por : $b_1 b_2 = b_4$, $b_1 b_3 = b_5$, $b_2 b_2 = b_3$, $b_2 b_4 = b_6$.*

2.2. Caso $\beta, \gamma \in F$ y $\gamma = 0$.

Supongamos que A es una álgebra que satisface la identidad (2.1) con $\gamma = 0$, esto es A satisface la identidad

$$x^2y^2 = (xy)(xy). \tag{2.12}$$

Como $car\,(F) \neq 2, 3$ linealizando x en esta identidad obtenemos :

$$(xz)y^2 = (zy)(xy). \tag{2.13}$$

Linealizamos ahora y en la identidad (2.13) y entonces :

$$2(xz)(yw) = (zw)(xy) + (zy)(xw). \tag{2.14}$$

Cambiando z por y en la identidad (2.14) y usando la conmutatividad de A tenemos :

$$2(xy)(zw) = (yw)(xz) + (zy)(xw). \tag{2.15}$$

Finalmente restando estas dos últimas identidades y usando el hecho de que $car\,(F) \neq 3$ se tiene en A la identidad :

$$(xz)(yw) = (xy)(zw). \tag{2.16}$$

Utilizando estos cálculos, podemos enunciar la siguiente proposición :

Proposición 2.2.1 *Sea A una álgebra sobre un cuerpo F con $car\,(F) \neq 2, 3$ que satisface la identidad (2.12), entonces :*

$$x^ny^n = (xy)^n \text{ para todo } x, y \in A\ ,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre n.

La proposición es trivialmente válida para $n = 1$.

Supongamos ahora que $x^{n-1}y^{n-1} = (xy)^{n-1}$.

Usando la identidad (2.16) tenemos :

$$x^n y^n = (xx^{n-1})(yy^{n-1}) = (xy)(x^{n-1}y^{n-1}).$$

Luego por hipótesis de inducción :

$$x^n y^n = (xx^{n-1})(yy^{n-1}) = (xy)(x^{n-1}y^{n-1}) = (xy)(xy)^{n-1} = (xy)^n,$$

y así hemos demostrado la proposición.

■

Corolario 2.2.2 *Sea A una álgebra sobre un cuerpo F con car $(F) \neq 2, 3$ que satisface la identidad (2.12). Si x es un elemento nilpotente de A entonces xy es nilpotente para todo $y \in A$.*

Demostración. Si $x^n = 0$ entonces por la proposición $(xy)^n = x^n y^n = 0$ y así xy es nilpotente. ■

Corolario 2.2.3 *Sea A una álgebra sobre un cuerpo F con car $(F) \neq 2, 3$ que satisface la identidad (2.12). Si $I_n(A) = \left\{ \sum_{i<\infty} \alpha_i x_i^n : \alpha \in F,\ x_i \in A \right\}$ entonces $I_n(A)$ es subálgebra de A para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 2.2.4 *Sea A como en la proposición anterior.*

1. *Si B es subálgebra de A y $xB \subseteq B$ entonces $x^2B^2 \subseteq B^2$.*
2. *Si I, J son ideales de A entonces $x^2(IJ) \subseteq IJ$ para todo $x \in A$.*
3. *Si I es ideal de A y J es ideal de I entonces $(JA)I^2 \subseteq J$.*

Demostración. Consecuencia inmediata de la identidad (2.13) ■

Además respecto a los operadores R_x en una álgebra que satisface la identidad (2.12) tenemos los siguientes resultados

Proposición 2.2.5 *Sea A una álgebra sobre un cuerpo F con car $(F) \neq 2,3$ que satisface la identidad (2.12). Entonces si $n \geq 2$*

1. $R_{x^n} R_{x^2} = R_x R_{x^{n+1}}$.
2. $R_{x^2}^n = R_x^{n-1} R_{x^{n+1}}$.

Demostración.

1. Usando la linealización de la identidad (2.12) tenemos :

$$yR_{x^{n+1}}R_{x^2} = (yx^{n+1})x^2 = (xy)x^{n+2} = yR_x R_{x^{n+2}} \text{ para todo } y \in A.$$

   Así $R_{x^n} R_{x^2} = R_x R_{x^{n+1}}$.

2. Probaremos la proposición por inducción.

   Para $n = 2$ obtenemos el resultado usando la parte 1 de la proposición.

   Supongamos ahora que $R_{x^2}^n = R_x^{n-1} R_{x^{n+1}}$.

   Entonces usando 1 y la hipótesis de inducción tenemos :

$$R_{x^2}^{n+1} = R_{x^2}^n R_{x^2} = \left(R_x^{n-1} R_{x^{n+1}}\right) R_{x^2} =$$
$$R_x^{n-1}\left(R_{x^{n+1}} R_{x^2}\right) = R_x^{n-1}\left(R_x R_{x^{n+2}}\right) = \left(R_x^{n-1} R_x\right) R_{x^{n+2}} = R_x^n R_{x^{n+2}}.$$

   Y así queda demostrada la proposición.

■

Corolario 2.2.6 *Sea A una álgebra sobre un cuerpo F con car $(F) \neq 2,3$ que satisface la identidad (2.12). Si $x \in A$ es nilpotente, entonces R_{x^2} es nilpotente.*

Demostración. Si $x^n = 0$ entonces por la proposición anterior, $R_{x^2}^{n-1} = R_x^{n-1} R_{x^n} = 0$. ■

Observación 2.2.7 *Un ejemplo de álgebras que satisfacen la identidad (2.12) es presentado en [11], donde se demuestra que cualquier Train Algebra de Rango 3 que satisface una identidad polinomial de grado cuatro sobre un cuerpo de característica distinta de 2,3 y 5 es una Álgebra de Jordan o una álgebra que satisface la identidad (2.12).*

Capítulo 3

Formas Trazas.

3.1. Definiciones básicas.

Si A es una álgebra (no necesariamente asociativa) y B es una forma bilineal simétrica, definida sobre A, diremos que B es una Forma Traza si y sólo sí

$$B(xy, z) = B(x, yz) \quad \text{para todo} \quad x, y, z \text{ en } A.$$

El estudio de la existencia y propiedades de las formas trazas está principalmente motivado por el siguiente resultado [12] :

Teorema 3.1.1 *Sea A una álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo F tal que :*

(i) Existe una forma traza no degenerada $B(x,y)$ definida en A
(ii) $J^2 \neq 0$ para todo J, donde J es un ideal no nulo de A.

Entonces A se puede expresar de manera única como $A = S_1 \oplus ... \oplus S_t$ donde cada S_i es ideal simple de A.

Mostraremos a continuación resultados acerca de la existencia de Formas Trazas en álgebras que satisfacen ciertas identidades de grado 4 así como también estudiaremos que sucede al suponer la existencia de una Forma Traza no degenerada en estas álgebras.

3.2. Existencia de Formas Trazas e identidades.

Sea A una álgebra conmutativa que satisface la identidad :

$$2\beta\left\{(xy)^2 - x^2y^2\right\} + \gamma\left\{((xy)x)y + ((xy)y)x - (y^2x)x - (x^2y)y\right\} = 0. \tag{3.1}$$

Definamos en A la forma bilineal simétrica $B(x,y)$ de la siguiente manera :

$$B(x,y) = \gamma R_x R_y + (\gamma + 4\beta)\, R_{xy}.$$

Probaremos ahora que $\tau(x,y) = Tr(B(x,y))$ es una Forma Traza en A. Para esto necesitaremos un lema previo que facilitará nuestros cálculos.

Lema 3.2.1 *Si A es una álgebra conmutativa que satisface la identidad (3.1) entonces :*

$$\gamma Tr(R_{(y,x,x)}) = (\gamma + 4\beta)\,(Tr(R_{x^2}R_y) - Tr(R_{xy}R_x)) \quad \textit{para cada } x, y \in A \quad \gamma, \beta \in F.$$

En particular si A satisface la identidad (3.1) con $\gamma \neq 0$ y $\gamma + 4\beta = 0$ entonces $Tr(R_{(y,x,x)}) = 0$ para cada $x, y \in A$.

Demostración. Reordenando los términos de linealización de la identidad (3.1) tenemos :

$$\begin{aligned}\gamma((xy)z)x + \gamma((xz)y)x + \gamma((xy)x)z + \gamma((xz)x)y - 4\beta x^2(yz) = \\ 2\gamma((yz)x)x + \gamma(x^2y)z + \gamma(x^2z)y - 4\beta\,(xy)\,(xz)\,.\end{aligned}$$

Lo que en términos del operador multiplicación R_a puede ser escrito como :

$$\gamma R_{xy}R_x + \gamma R_x R_y R_x + \gamma R_{(xy)x} + \gamma R_x^2 R_y - 4\beta R_y R_{x^2} = 2\gamma R_y R_x^2 + \gamma R_{x^2y} + \gamma R_{x^2} R_y - 4\beta R_x R_{xy}; \tag{3.2}$$

o equivalentemente :

$$\gamma R_{(y,x,x)} + \gamma [R_x, R_y R_x] + \gamma [R_x^2, R_y] = \gamma R_{x^2} R_y + 4\beta R_y R_{x^2} - (\gamma R_{xy} R_x + 4\beta R_x R_{xy}). \tag{3.3}$$

Así, tomando traza en ambos lados de la ecuación (3.3) y usando el hecho de que la traza del conmutador de dos matrices es cero se tiene :

$$\gamma Tr(R_{(y,x,x)}) = (\gamma + 4\beta)(Tr(R_{x^2} R_y) - Tr(R_{xy} R_x)),$$

con lo que queda demostrado nuestro lema. ∎

Lema 3.2.2 *Si A es una álgebra conmutativa que satisface la identidad (3.1) con $\gamma \neq 0$ entonces :*

$$\gamma Tr\left(R_{(y,z,x)}\right) - (\gamma + 4\beta)\{Tr(R_{xz} R_y) - Tr(R_x R_{yz})\} = 0. \tag{3.4}$$

Demostración. Usando el lema anterior, cambiando x por $x+z$ tenemos :

$$\gamma Tr(R_{(y,x+z,x+z)}) = (\gamma + 4\beta)\left(Tr(R_{(x+z)^2} R_y) - Tr(R_{(x+z)y} R_{x+z})\right).$$

Por otro lado, de la linealidad del asociador (, ,) tenemos que :

$$(y, x+z, x+z) = (y,x,x) + (y,x,z) + (y,z,x) + (y,z,z),$$

así :

$$\gamma \left\{Tr\left(R_{(y,x,x)} + R_{(y,x,z)} + R_{(y,z,x)} + R_{(y,z,z)}\right)\right\} = (\gamma + 4\beta)\left\{\begin{array}{c} Tr(R_{x^2} R_y + 2R_{xz} R_y + R_{z^2} R_y) \\ -Tr((R_{xy} + R_{zy})(R_x + R_z)) \end{array}\right\}.$$

Agrupando y usando el Lema 3.2.2 se tiene :

$$\gamma \left\{R_{(y,x,z)} + R_{(y,z,x)}\right\} = (\gamma + 4\beta)\{2Tr(R_{xz} R_y) - (Tr(R_{zy} R_x) + Tr(R_{xy} R_z))\}. \tag{3.5}$$

pero usando el Lema 3.2.2 tenemos :

$$\gamma\left\{Tr(R_{(yz)x}) - Tr(R_{y(zx)})\right\} + (\gamma+4\beta)\left\{Tr(R_{yz}R_x) - Tr(R_yR_{zx})\right\} =$$
$$\gamma Tr\left(R_{(y,z,x)}\right) + (\gamma+4\beta)\left\{Tr(R_{yz}R_x) - Tr(R_yR_{zx})\right\} = 0.$$

Y así :

$$\tau(yz,x) - \tau(y,zx) = 0.$$

Además τ es claramente una forma bilineal simétrica y por lo tanto τ es una Forma Traza en A. ∎

Observación 3.2.4 *Es importante notar que existen álgebras donde esta traza que definimos anteriormente es no trivial. Por ejemplo, consideremos la álgebra A con la siguiente tabla de multiplicación :*

$\cdot$	s	t
s	$s+t$	$\frac{1}{2}t$
t	$\frac{1}{2}t$	0

Tenemos que esta álgebra A satisface la identidad para $\beta=\frac{1}{2}, \gamma=-2$ y además :

$$\tau(s,s) = -2Tr\left(R_s+R_t\right) = -2Tr\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\right\} = -3 \neq 0.$$

En este mismo ejemplo podemos ver que esta traza puede no ser no degenerada, en efecto :

$$\tau(t,as+bt) = -2Tr\left(R_{t(as+bt)}\right) = -aTr(R_t) - 2bTr(R_{t^2}) = -aTr\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix} = 0.$$

Motivados por la parte (i) del Teorema 3.1.1 estudiaremos ahora que sucede en una álgebra A, que satisface la identidad (3.1) y que además posee una Forma Traza no Degenerada.

Observación 3.2.5 *Si A es una álgebra que satisface la identidad (3.1) y además posee una Forma Traza $\langle , \rangle : A \times A \to A$ entonces como $\langle , \rangle$ es una forma bilineal, simétrica y asociativa, para todo $x, y, z, w \in A$, tenemos :*

$$\begin{array}{lclcl}
\langle (xy)(xw), z\rangle & = & \langle w, x(z(xy))\rangle & = & \langle x(z(xy)), w\rangle, \\
\langle x^2(yw), z\rangle & = & \langle w, (zx^2)y\rangle & = & \langle (zx^2)y, w\rangle, \\
\langle ((xw)x)y, z\rangle & = & \langle w, ((zy)x)x\rangle & = & \langle ((zy)x)x, w\rangle, \\
\langle ((xy)x)w, z\rangle & = & \langle w, z((xy)x)\rangle & = & \langle z((xy)x), w\rangle, \\
\langle ((xw)y)x, z\rangle & = & \langle w, ((zx)y)x\rangle & = & \langle ((zx)y)x, w\rangle, \\
\langle ((xy)w)x, z\rangle & = & \langle w, (zx)(xy)\rangle & = & \langle (zx)(xy), w\rangle, \\
2\langle ((yw)x)x, z\rangle & = & 2\langle w, ((zx)x)y\rangle & = & 2\langle ((zx)x)y, w\rangle, \\
\langle (x^2w)y, z\rangle & = & \langle w, (zy)x^2\rangle & = & \langle (zy)x^2, w\rangle, \\
\langle (x^2y)w, z\rangle & = & \langle w, z(x^2y)\rangle & = & \langle z(x^2y), w\rangle.
\end{array}$$

En efecto, como $\langle xy, z\rangle = \langle x, yz\rangle$ para todo $x, y, z \in A$ entonces :

$$\langle (xy)(xw), z\rangle = \langle xw, z(xy)\rangle = \langle w, x(z(xy))\rangle,$$

y por la simetría de $\langle , \rangle$ tenemos :

$$\langle w, x(z(xy))\rangle = \langle x(z(xy)), w\rangle.$$

De esta manera obtenemos la primera igualdad y de modo análogo podemos obtener las restantes igualdades de la observación.

Tenemos entonces el siguiente resultado :

Teorema 3.2.6 *Sea A una álgebra que satisface la identidad (3.1) tal que A posee una Forma Traza no Degenerada $\langle , \rangle$. Supongamos además que $2\beta + \gamma \neq 0$ y $car(F) \neq 2$. Entonces A satisface la identidad :*

$$x^3y - x(x(xy)) = 0.$$

Demostración. La linealización de la identidad (3.1) esta dada por :

$$2\beta\left\{2\,(xy)\,(xz) - 2x^2(yz)\right\}$$
$$+\gamma\left\{((xz)x)y + ((xy)x)z + ((xz)y)x + ((xy)z)x - 2((yz)x)x - (x^2z)y - (x^2y)z\right\} = 0,$$

luego para todo x, y, z, w en A tenemos :

$$4\beta\left\langle (xy)\,(xz)\,, w\right\rangle - 4\beta\left\langle x^2(yz), w\right\rangle$$
$$+\gamma\left\{\begin{array}{c} \langle ((xz)x)y, w\rangle + \langle ((xy)x)z, w\rangle + \langle ((xz)y)x, w\rangle + \\ \langle ((xy)z)x, w\rangle - 2\,\langle ((yz)x)x, w\rangle - \langle (x^2z)y, w\rangle - \langle (x^2y)z, w\rangle \end{array}\right\} = 0. \tag{3.8}$$

Intercambiando z por w en (3.8) obtenemos :

$$4\beta\left\langle (xy)\,(xw)\,, z\right\rangle - 4\beta\left\langle x^2(yw), z\right\rangle$$
$$+\gamma\left\{\begin{array}{c} \langle ((xw)x)y, z\rangle + \langle ((xy)x)w, z\rangle + \langle ((xw)y)x, z\rangle + \\ \langle ((xy)w)x, z\rangle - 2\,\langle ((yw)x)x, z\rangle - \langle (x^2w)y, z\rangle - \langle (x^2y)w, z\rangle \end{array}\right\} = 0. \tag{3.9}$$

Reemplazando en (3.9) los términos, según la Observación 3.2.5 se tiene que para todo x, y, z, w en A :

$$4\beta\left\langle x(z(xy)), w\right\rangle - 4\beta\left\langle \left(zx^2\right) y, w\right\rangle$$
$$+\gamma\left\{\begin{array}{c} \langle ((zy)x)x, w\rangle + \langle z((xy)x), w\rangle + \langle ((zx)y)x, w\rangle + \\ \langle (zx)(xy), w\rangle - 2\,\langle ((zx)x)y, w\rangle - \langle (zy)x^2, w\rangle - \langle z(x^2y), w\rangle \end{array}\right\} = 0. \tag{3.10}$$

Ahora restamos (3.10) y (3.8) para obtener :

$$\begin{aligned}(\gamma - 4\beta)\left\{\langle (xy)\,(xz)\,, w\rangle - \left\langle x^2(yz), w\right\rangle - \langle ((xy)z)x, w\rangle + \left\langle \left(zx^2\right) y, w\right\rangle\right\} & \\ +3\gamma\left\{\langle ((zy)x)x, w\rangle - \langle ((zx)x)y, w\rangle\right\} &= 0.\end{aligned}$$

Luego para todo x, y, z, w en A :

$$(\gamma - 4\beta)\left\{(xy)(xz) - x^2(yz) - ((xy)z)x + \left(zx^2\right)y\right\} + 3\gamma\left\{((zy)x)x - ((zx)x)y\right\} = 0.$$

Entonces, si $\langle , \rangle$ es no degenerada se tiene :

$$\begin{aligned}(\gamma - 4\beta)\left\{(xy)(xz) - x^2(yz) - ((xy)z)x + \left(zx^2\right)y\right\} & \\ +3\gamma\left\{((zy)x)x - ((zx)x)y\right\} &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Finalmente poniendo $z = x$ en (3.11) tenemos :

$$2(2\beta + \gamma)\left\{((xy)x)x - x^3y\right\} = 0.$$

Así como $car(F) \neq 2$ y $2\beta + \gamma \neq 0$ obtenemos el resultado buscado. ■

Observación 3.2.7 *las álgebras que satisfacen la identidad $((xy)x)x - x^3y = 0$, corresponden a un caso particular de Álgebras Casi Jordan Generalizadas, sobre las cuales podemos encontrar diversos resultados acerca de su estructura en [2]. Además en [3] es obtenida esta identidad como una generalización de la identidad alternativa $x^2y - x(xy) = 0$.*

Observación 3.2.8 *En [6] son estudiadas las álgebras que satisfacen la identidad $x^3(xy) = x(x^3y)$. Estas álgebras son llamadas álgebras 3−Jordan.*

Con la observación anterior, tenemos el siguiente corolario del Teorema 3.2.6

Corolario 3.2.9 *Sea A una álgebra que satisface la identidad (3.1) tal que A posee una Forma Traza no Degenerada $\langle , \rangle$. Supongamos además que $2\beta + \gamma \neq 0$ y $car(F) \neq 2$. Entonces A es una álgebra 3−Jordan.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.6, A satisface la identidad :

$$((xy)x)x - x^3y = 0. \tag{3.12}$$

Como (3.12) es una identidad en A entonces :

$$(((xy)x)x)x - x^3(xy) = 0, \tag{3.13}$$

pero por otro lado, usando (3.12) tenemos que :

$$(((xy)x)x)x = x(x^3y).$$

Así reemplazando en (3.13), obtenemos que A satisface la identidad :

$$x^3(xy) - x(x^3y) = 0,$$

y entonces A es una álgebra 3−Jordan. ∎

Capítulo 4

Descomposición de Peirce.

Para el caso de un anillo asociativo R la descomposición $1 = \sum_{i=1}^{n} e_1$ del elemento identidad, en suma de idempotentes ortogonales, esto es $e_ie_j = e_je_i = 0$ para $i \neq j$ y $e_i^2 = e_i$, da origen a una descomposición del anillo, en la forma $R = \bigoplus_{i,j} R_{ij}$ (descomposición de Peirce[1]) con relaciones de multiplicación entre cada sumando (subespacio de Peirce) de la forma $R_{ij}R_{kl} \subseteq \delta_{jk}R_{il}$. Podemos entonces de alguna manera recuperar la estructura de el anillo R analizando la estructura de cada sumando y la manera en que estos se unen para conformar el anillo R.

Siguiendo esta misma idea se puede encontrar una Descomposición de Peirce para el caso de las Álgebras de Jordan donde si e es un idempotente en una Álgebra de Jordan J este determina la descomposición $J = J_2 \oplus J_1 \oplus J_0$ donde $J_i = \{x : xe = ix\}$.

En general, el estudio de la descomposición de Peirce en una álgebra no necesariamente asociativa, consistirá basicamente en el análisis del comportamiento del operador lineal R_e donde e es un elemento idempotente, y la descomposición espectral de la álgebra que puede ser obtenida a partir de él.

[1]La correcta pronunciación es como "Purse"(\'purss\ ) no "Pierce" (\'pirs\) [8]

4.1. Definiciones y propiedades.

En el capítulo anterior vimos que si A es una álgebra que satisface la identidad:

$$2\beta\left\{(xy)^2 - x^2y^2\right\} + \gamma\left\{((xy)x)y + ((xy)y)x - (y^2x)x - (x^2y)y\right\} = 0, \tag{4.1}$$

que posee una forma traza no degenerada, $2\beta + \gamma \neq 0$ y $car(F) \neq 2$, entonces A satisface la identidad :

$$x^3y - x(x(xy)) = 0.$$

Luego tenemos que si $f(t) = t^3 - t$ entonces :

$$f(R_e) = R_e^3 - R_e = R_e(R_e+1)(R_e-1) = 0,$$

donde R_e corresponde al operador multiplicación definido anteriormente como $xR_e = ex = xe$.

Así $A = A_0 + A_1 + A_{-1}$ donde $A_\lambda = \{x \in A : xR_e = \lambda x\}$ con $\lambda \in \{0, 1, -1\}$.

En este caso, vemos que dado un elemento idempotente e no nulo en A puede obtenerse una descomposición espectral del operador R_e de manera explícita a partir de la identidad $x^3y - x(x(xy)) = 0$. En el caso general de una álgebra A que satisface la identidad (4.1), ante la dificultad de obtener una descomposición espectral explícita de esta manera, supondremos que $A = \sum B_\lambda$ (suma directa de espacios vectoriales [10]) donde si e es un idempotente, $\lambda \in F$ y $n \in \mathbb{N}$; entonces $B_\lambda^{(n)} = \{x : x(R_e - \lambda I)^n = 0\}$ y $B_\lambda = \left\{x : x(R_e - \lambda I)^k = 0 \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_\lambda^{(n)}$.

Observación 4.1.1 *Si A es de dimensión finita entonces todo elemento de A es aniquilado por algún polinomio en $F[R_e]$.Y en general cuando A no es necesariamente de dimensión finita, la condición de que para todo elemento sea aniquilado por un polinomio en $F[R_e]$ es equivalente a suponer que $A = \sum B_\lambda$ (ver [10]).*

Observación 4.1.2 *Si $A = \sum B_\lambda$ y A es de dimensión finita podemos escoger una base de $B_\lambda^{(1)}$ luego completar una base para $B_\lambda^{(2)}$, y así sucesivamente hasta completar una base de*

B_λ para cada λ así obtenemos una base $\mathcal{B}$ para A en la cual la matriz $[R_e]_\mathcal{B}$ es triangular.

Durante esta sección supondremos que F es un cuerpo algebraicamente cerrado, ya que estudiaremos las raíces de un polinomio en $F[x]$ y A es una álgebra sobre F que satiface la identidad (4.1) de tipo $[2,2]$.

Linealizando y en la identidad (4.1) obtenemos :

$$\begin{aligned}&2\beta\left\{2\,(xy)\,(xz)-2x^2(yz)\right\}\\&\quad+\gamma\left\{((xz)x)y+((xy)x)z+((xz)y)x+((xy)z)x-2((yz)x)x-(x^2z)y-(x^2y)z\right\}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\gamma((xy)z)x+\gamma((xz)y)x+\gamma((xy)x)z+\gamma((xz)x)y-4\beta x^2(yz)=\\&\qquad 2\gamma((yz)x)x+\gamma(x^2y)z+\gamma(x^2z)y-4\beta\,(xy)\,(xz)\end{aligned} \tag{4.2}$$

Definición 4.1.3 *Si $x\in B_\lambda$ y $n\in\mathbb{N}$ se define $x' = x\,(R_e-\lambda I)\,,...,x^{(n)}=x(R_e-\lambda I)^n$.*

Definición 4.1.4 *Sea $x\in B_\lambda, x\neq 0$. Como $x\in B_\lambda$ entonces $\{n : x\,(R_e-\lambda I)^n=0\}\neq\varnothing$ y así podemos definir el grado de x como $deg(x)=\min\{n : x\,(R_e-\lambda I)^n=0\}$.*

Para $y\in B_\lambda, z\in B_\mu$ tenemos lo siguiente :

$$y' + \lambda y = ey,$$

$$\begin{aligned}y'' &= y\,(R_e-\lambda I)\,(R_e-\lambda I)=\\&\qquad(ey-\lambda y)\,(R_e-\lambda I)=e(ey)-2\lambda ey+\lambda^2y=\\&\qquad\qquad e(ey)-2\lambda\,(y'+\lambda y)+\lambda^2y,\end{aligned}$$

esto es :

$$\begin{aligned} ey &= \lambda y + y', \\ e(ey) &= \lambda^2 y + 2\lambda y' + y''. \end{aligned}$$

Similarmente, usando que $z \in B_\mu$ se tiene que :

$$\begin{aligned} ez &= \mu z + z', \\ e(ez) &= \mu^2 z + 2\mu z' + z''. \end{aligned}$$

Tomando ahora $x = e$, $y \in B_\lambda, z \in B_\mu$ y usando las relaciones anteriores en (4.2) se tiene :

$$\begin{aligned} &\gamma((\lambda y + y')z)e + \gamma((\mu z + z')y)e \\ &\quad + \gamma(\lambda^2 y + 2\lambda y' + y'')z + \gamma(\mu^2 z + 2\mu z' + z'')y - 4\beta(yz)e = \\ &\quad 2\gamma((yz)e)e + \gamma(\lambda y + y')z + \gamma(\mu z + z')y - 4\beta\left(\lambda y + y'\right)\left(\mu z + z'\right), \end{aligned}$$

es decir :

$$\begin{aligned} &\gamma((\lambda y + y')z)R_e + \gamma((\mu z + z')y)R_e + \gamma(\lambda^2 y + 2\lambda y' + y'')z \\ &\quad + \gamma(\mu^2 z + 2\mu z' + z'')y - 4\beta(yz)R_e = \\ &\quad 2\gamma\,(yz)\,R_e^2 + \gamma(\lambda y + y')z + \gamma(\mu z + z')y - 4\beta\left(\lambda y + y'\right)\left(\mu z + z'\right). \end{aligned}$$

Reordenando y usando la conmutatividad, tenemos :

$$\begin{aligned} &(yz)\left\{2\gamma R_e^2 - \left(\gamma\left(\lambda + \mu\right) - 4\beta\right)R_e + \gamma\left(\lambda + \mu\right) - 4\beta\lambda\mu - \gamma\left(\lambda^2 + \mu^2\right)\right\} \\ &\quad + (y'z)\left\{-\gamma R_e + \gamma - 2\gamma\lambda - 4\beta\mu\right\} + (yz')\left\{-\gamma R_e - 2\gamma\mu + \gamma\mu - 4\beta\lambda\right\} \\ &\quad - \gamma y''z - \gamma z''y - 4\beta y'z' = 0. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Para $m = n = 1$, $y' = y'' = z' = z'' = 0$ luego reemplazando en la ecuación (4.3) tenemos :

$$(yz)\left\{2\gamma R_e^2 - (\gamma(\lambda+\mu) - 4\beta) R_e + \gamma(\lambda+\mu) - 4\beta\lambda\mu - \gamma\left(\lambda^2+\mu^2\right)\right\} = 0,$$

y así $(yz)T = 0$.

Sea $m + n > 2$, observemos que si $y \in B_\lambda^{(n)}$, $y' = y(R_e - \lambda I) \in B_\lambda^{(n-1)}$ por lo tanto si $z \in B_\mu^{(m)}$, $y'z \in B_\lambda^{(n-1)} B_\mu^{(m)}$, continuando de esta manera, por hipótesis de inducción podemos suponer :

$$\begin{aligned} 0 &= (y'z)\,T^{(n+m-1)-1} = (yz')\,T^{(n+m-1)-1} = (y'z')\,T^{(n+m-1)-1} \\ &= (yz'')\,T^{(n+m-1)-1} = (y''z)\,T^{(n+m-1)-1}. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos $T^{(n+m-1)-1} = T^{(n+m-2)}$ a la ecuación (4.3) y obtenemos $\left[B_\lambda^{(n)} B_\mu^{(m)}\right] T^{n+m-1} = 0$ para cualquier $\lambda, \mu \in F$. ■

Definición 4.1.11 *Si $w \in A = \sum B_\lambda$ denotamos por $[w]_\lambda$ a la componente de w en B_λ.*

El siguiente ejemplo ilustra de que manera aplicamos la Proposición anterior al estudio de los distintos productos en la álgebra A.

Ejemplo 4.1.12 *Sean $x, y \in B_\lambda, z \in B_\mu$, $\lambda \circ \mu = 1$. Entonces :*

1. *Si $\lambda \circ \mu \neq \lambda \hat{\circ} \mu$:*

   $yz = [yz]_1 + [yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu}$;

   luego :

   $(yz)x = [yz]_1\, x + [yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu}\, x.$

   Por otro lado tenemos que :

   $[yz]_1\, x = [[yz]_1\, x]_{1\circ\lambda} + [[yz]_1\, x]_{1\hat{\circ}\lambda}$,

   $[yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu}\, x = \left[[yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu}\, x\right]_{(\lambda\hat{\circ}\mu)\circ\lambda} + \left[[yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu}\, x\right]_{(\lambda\hat{\circ}\mu)\hat{\circ}\lambda}.$

Así :

$$(yz)\,x = [[yz]_1\,x]_{1\circ\lambda} + [[yz]_1\,x]_{1\hat{\circ}\lambda} + \left[[yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu}\,x\right]_{(\lambda\hat{\circ}\mu)\circ\lambda} + \left[[yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu}\,x\right]_{(\lambda\hat{\circ}\mu)\hat{\circ}\lambda}.$$

2. Si $\lambda\circ\mu = \lambda\hat{\circ}\mu$

$$(yz)x = [yz]_1\,x = [[yz]_1\,x]_\lambda + [[yz]_1\,x]_{1\hat{\circ}\lambda}.$$

A continuación analizaremos de manera más específica el comportamiento de las raíces de un polinomio de Peirce para obtener más información sobre los productos entre elementos de los distintos espacios B_λ, tal como fue mostrado en el Ejemplo 4.1.12.

Notación 4.1.13 *En lo que sigue, supondremos que* $\gamma\neq 0$ *y denotaremos por* α *al elemento* $4\frac{\beta}{\gamma}\in F$.

Proposición 4.1.14 *Sea* $\mu\in F$*, entonces* $1\circ\mu = \mu\circ 1 = \mu$.

Demostración. Escribiendo $p_{\lambda,\mu}$ en la forma

$$p_{\lambda,\mu}(t) = 2t^2 - (\lambda+\mu-\alpha)t + \left\{\lambda+\mu-\alpha\lambda\mu - \left(\lambda^2+\mu^2\right)\right\},$$

tenemos que $\Delta p^2_{\mu,1} = (\mu+1-\alpha)^2 - 8\left(1+\mu-\alpha\mu-(1+\mu^2)\right)$.

Simplificando y agrupando términos se tiene :

$$\Delta p^2_{\mu,1} = (\alpha+3\mu-1)^2.$$

Así $\mu\circ 1 = \frac{(1+\mu-\alpha)+(\alpha+3\mu-1)}{4} = \frac{1}{4}\lambda + \mu - \frac{1}{4} = \mu$ ∎

Corolario 4.1.15 $1\hat{\circ}\mu = \frac{1}{2}(1-\mu-\alpha)$.

Corolario 4.1.16 *Si* $\lambda\circ\mu = 1$ *entonces* $(\mu\circ 1)\circ\lambda = 1$ *y* $(\mu\circ\lambda)\circ\lambda = \lambda$.

Proposición 4.1.17 *Sean* $\lambda,\mu\in F$*. Entonces :*

1. $\lambda\circ\mu = 1$ si y sólo si $\lambda^2+\alpha\lambda\mu+\mu^2 = 2+\alpha$.

2. Si $\lambda\circ\mu = 1$, entonces $\lambda\hat{\circ}\mu = \lambda\circ\mu$ si y sólo si $\mu+\lambda = 4+\alpha$.

Demostración.

1. $\lambda \circ \mu = 1$ si y sólo si :

$$\begin{aligned} & 0 = p(1) = 2\gamma - (\gamma(\lambda+\mu) - 4\beta) + \left\{\gamma(\lambda+\mu) - 4\beta\lambda\mu - \gamma\left(\lambda^2+\mu^2\right)\right\} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 2 + 4\frac{\beta}{\gamma} - 4\frac{\beta}{\gamma}\lambda\mu - \left(\lambda^2+\mu^2\right) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 2 + 4\frac{\beta}{\gamma} - 4\frac{\beta}{\gamma}\lambda\mu - \left(\lambda^2+\mu^2\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 + \alpha\lambda\mu + \mu^2 = 2 + \alpha. \end{aligned}$$

2. Sea $\Delta p^2_{\lambda,\mu} = (\gamma(\lambda+\mu) - 4\beta)^2 - 8\gamma\left\{\gamma(\lambda+\mu) - 4\beta\lambda\mu - \gamma\left(\lambda^2+\mu^2\right)\right\}$ el discriminante de $p_{\lambda,\mu}(t)$. Entonces $\lambda\hat{\circ}\mu = \lambda \circ \mu$ si y sólo si $\Delta p^2_{\lambda,\mu} = 0$.

$$\Delta p^2_{\lambda,\mu} = 0 \Leftrightarrow \gamma^2(\lambda+\mu)^2 - 8\beta\gamma(\lambda+\mu) + 16\beta^2 - 8\gamma^2(\lambda+\mu) + 32\beta\gamma\lambda\mu + 8\gamma^2\left(\lambda^2+\mu^2\right) = 0,$$

como $\gamma \neq 0$ tenemos (factorizando por γ^2)

$$\Delta p^2_{\lambda,\mu} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+\mu)^2 - 8\frac{\beta}{\gamma}(\lambda+\mu) + 16\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 - 8(\lambda+\mu) + 32\frac{\beta}{\gamma}\lambda\mu + 8\left(\lambda^2+\mu^2\right) = 0.$$

Reemplazando por α y desarrollando la expresión se tiene :

$$\begin{aligned} \Delta p^2_{\lambda,\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & (\lambda+\mu)^2 - 2\alpha(\lambda+\mu) + \alpha^2 - 8(\lambda+\mu) + 8\alpha\lambda\mu + 8\left(\lambda^2+\mu^2\right) = 0, \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{\mu^2 + \lambda^2 - 2(\alpha+4)\lambda - 2(\alpha+4)\mu + (\alpha+4)^2\right\} \\ & \qquad + 8\left\{\lambda^2 + \alpha\lambda\mu + \mu^2 - 2 - \alpha\right\} = 0, \\ \Leftrightarrow \quad & (\mu+\lambda-(\alpha+4))^2 + 8\left(\lambda^2 + \alpha\lambda\mu + \mu^2 - (2+\alpha)\right) = 0, \end{aligned}$$

así como $\lambda \circ \mu = 1$ el sumando de la derecha es cero, y se tiene el resultado.

■

Corolario 4.1.18 *Si $\alpha \neq -2$ y $\lambda = \mu$ entonces $\lambda \circ \mu = 1$ sí y sólo sí $\lambda \in \{1, -1\}$.*

Demostración. Si $\lambda = \mu$ por la proposición anterior tenemos que $\lambda \circ \mu = 1$ si y sólo sí $(2+\alpha)\lambda^2 = 2+\alpha$. ■

Reagrupando términos tenemos entonces :

$$2(\mu \circ \nu)^2 + (2v - 2 + 2\alpha\lambda)(\mu \circ \nu) - 4\nu^2 + 2\lambda\nu - 2\alpha\nu - 2\lambda + 2\lambda^2 = 0.$$

Además por definición de $\mu \circ \nu$

$$2(\mu \circ \nu)^2 - (\nu + \mu - \alpha)(\mu \circ \nu) + \left\{\nu + \mu - \alpha v\mu - \left(\nu^2 + \mu^2\right)\right\} = 0, \tag{4.5}$$

restando :

$$\{-3\nu + \alpha - \mu - 2\lambda\alpha + 2\}(\mu \circ \nu) + \{1 + 3\nu - \alpha\mu - 2\lambda + 2\alpha\}\nu + \mu - \mu^2 + 2\lambda - 2\lambda^2 = 0.$$

Multiplicando por -1

$$-\{-3\nu + \alpha - \mu - 2\lambda\alpha + 2\}(\mu \circ \nu) + \{-2\alpha - 1 - 3\nu + \alpha\mu + 2\lambda\}\nu - \mu + \mu^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Sea $A = -3\nu + \alpha - \mu - 2\lambda\alpha + 2, B = (\alpha + 1)(\mu + 2\lambda - 3), C = \mu - \mu^2 + 2\lambda - 2\lambda^2$ y escribimos así la ecuación en la forma

$$-A(\mu \circ \nu) + (A + B)\nu - C = 0. \tag{4.6}$$

por definición tenemos también que $(\mu \circ \nu) = \frac{1}{4}\{\mu + \nu - \alpha + \Delta p_{\mu,\nu}\}$, así reemplazando en la ecuación anterior tenemos :

$$-A\frac{1}{4}\{\mu + \nu - \alpha + \Delta p_{\mu,\nu}\} + (A + B)\nu - C = 0,$$

$$\frac{1}{4}A\Delta p_{\mu,\nu} = -\frac{1}{4}\{A(\mu - \alpha - 3\nu) - (4B\nu - 4C)\}.$$

Luego :

$$(A\Delta p_{\mu,\nu})^2 = A^2(\mu-\alpha-3\nu)^2 - 2A(\mu-\alpha-3\nu)(4B\nu-4C) + (4B\nu-4C)^2,$$

y entonces :

$$A^2(\nu+\mu-\alpha)^2 - 8A^2\left\{\nu+\mu-\alpha\nu\mu-\left(\nu^2+\mu^2\right)\right\} = \\ A^2(\mu-\alpha-3\nu)^2 - 2A(\mu-\alpha-3\nu)(4B\nu-4C) + (4B\nu-4C)^2,$$

$$A^2\left\{(\mu-\alpha-3\nu)^2 - (\nu+\mu-\alpha)^2 + 8\left\{\nu+\mu-\alpha\nu\mu-\left(\nu^2+\mu^2\right)\right\}\right\} \\ -2A(\mu-\alpha-3v)(4Bv-4C) + (4Bv-4C)^2 = 0,$$

$$A^2\left\{\begin{array}{c} 9\nu^2+6\nu\alpha-6\nu\mu+\alpha^2-2\alpha\mu+\mu^2-\{\nu^2-2\nu\alpha+2\nu\mu+\alpha^2-2\alpha\mu+\mu^2\} \\ +8\nu+8\mu-8\alpha\nu\mu-8\nu^2-8\mu^2 \end{array}\right\} \\ -2A(\mu-\alpha-3\nu)(4B\nu-4C) + (4B\nu-4C)^2 = 0,$$

$$A^2\left\{-8\mu^2+8\mu+8\nu(\alpha+1)-8\nu\mu(\alpha+1)\right\} - 2A(\mu-\alpha-3\nu)(4B\nu-4C) + (4B\nu-4C)^2 = 0,$$

$$A^2\left\{-8\mu^2+8\mu+8\nu(\alpha+1)(1-\mu)\right\} + 8A(C-B\nu)(\mu-\alpha-3\nu) + (4B\nu-4C)^2 = 0.$$

Además A es lineal en ν y tanto B como C son independientes de ν, por lo que ν satisface una ecuación de grado 3 en μ, λ de la cual conocemos ya 2 raíces, que son 1 y λ, y así $(\mu \circ \nu) \circ \lambda = \nu$ tiene a lo más 3 raíces. ■

Más explícitamente tenemos que ν satisface la ecuación cúbica :

$$P\nu^3 + Q\nu^2 + R\nu + S = 0.$$

Donde :

$$\begin{aligned} P &= 72(\alpha+1)(-2-2\mu+2\lambda) \\ Q &= 144\left(\lambda+\mu-\lambda^2-\mu^2\right)+ \\ & 24(\alpha+1)\left\{-(2\alpha\lambda-2)(2\lambda+\mu-3)+2(\mu-1)(\alpha-\mu-2\alpha\lambda+2)\right\}. \end{aligned}$$

Ahora como $1, \lambda$ son raíces de la ecuación, tenemos :

$$x^3 + \frac{Q}{P}x^2 + \frac{R}{P}x + \frac{S}{P} = (x-1)(x-\lambda)(x-\nu),$$

y así, si $\alpha \neq -1$ y $\lambda - \mu \neq 1$, entonces $P \neq 0$ y :

$$\frac{Q}{P} = -\{\lambda + 1 + \nu\}$$

Observación 4.1.22 *Si $\alpha = -1$ entonces $4\beta + \gamma = 0$ y el coeficiente cúbico es igual a cero, por lo tanto las únicas raíces (distintas) son 1 y λ.*

Notación 4.1.23 *Denotaremos por $\tau_{\lambda,\mu}$ a la tercera raiz de la ecuación $(\mu \circ \nu) \circ \lambda = \nu$, donde 1 y λ son la primera y segunda raíz respectivamente.*

Ejemplo 4.1.24 *Podemos tener $P = 0$ con $\alpha \neq -1$*
$\lambda \circ \mu = 1$ y $P = 0$ si y sólo si :

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \alpha\lambda\mu + \mu^2 &= 2 + \alpha, \\ -1 - \mu + \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Así

$$(1+\mu)^2 + \alpha(1+\mu)\mu + \mu^2 = 2 + \alpha$$

Luego μ es raíz de la ecuación :

$$(2+\alpha)\,\mu^2 + (2+\alpha)\,\mu - (\alpha+1) = 0,$$

y para λ tenemos la ecuación :

$$(2+\alpha)\,\lambda^2 - (2+\alpha)\,\lambda - (\alpha+1) = 0.$$

Tomamos por ejemplo ahora $\alpha = 0$ y tenemos que $P = 0$ para $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$ y, la ecuación $(\mu \circ \nu) \circ \lambda = \nu$ tiene como únicas soluciones $\nu = 1$, $\nu = \lambda$.

Proposición 4.1.25 *Si $\lambda \circ \mu \neq \lambda \hat{\circ} \mu$, la ecuación $(\lambda \circ \mu) \circ \nu = (\lambda \hat{\circ} \mu) \circ \nu$ tiene a lo más dos soluciones.*

Demostración. Sea $\rho = (\lambda \circ \mu) \circ \nu = (\lambda \hat{\circ} \mu) \circ \nu$ entonces ρ satisface las ecuaciones :

$$0 = 2\rho^2 - ((\lambda \circ \mu) + \nu - \alpha)\rho + \left\{(\lambda \circ \mu) + \nu - \alpha\,(\lambda \circ \mu)\,\nu - \left((\lambda \circ \mu)^2 + \nu^2\right)\right\},$$

$$0 = 2\rho^2 - ((\lambda \hat{\circ} \mu) + \nu - \alpha)\rho + \left\{(\lambda \hat{\circ} \mu) + \nu - \alpha\,(\lambda \hat{\circ} \mu)\,\nu - \left((\lambda \hat{\circ} \mu)^2 + \nu^2\right)\right\},$$

restando estas ecuaciones tenemos :

$$-\left((\lambda \circ \mu) - (\lambda \hat{\circ} \mu)\right)\rho + (\lambda \circ \mu) - (\lambda \hat{\circ} \mu) - \alpha\left\{(\lambda \circ \mu) - (\lambda \hat{\circ} \mu)\right\}\nu - \left\{(\lambda \circ \mu)^2 - (\lambda \hat{\circ} \mu)^2\right\} = 0.$$

Luego dividiendo por $(\lambda \circ \mu) - (\lambda \hat{\circ} \mu) \neq 0$

$$-\rho + 1 - \alpha\nu - \{(\lambda \circ \mu) + (\lambda \hat{\circ} \mu)\} = 0.$$

Ahora como $\lambda \circ \mu$ y $\lambda \hat{\circ} \mu$ son raíces de $p_{\lambda,\mu}(t)$ entonces :

$$(\lambda \circ \mu) + (\lambda \hat{\circ} \mu) = \frac{1}{2}\{\lambda + \mu - \alpha\}.$$

Así

$$\frac{1}{2}\{2 + \alpha - 2\alpha\nu - \lambda - \mu\} = \rho.$$

Multiplicando por -2 y reordenando la ecuación $p_{(\lambda\circ\mu),\nu}(\rho) = 0$ tenemos :

$$2(\lambda\circ\mu)^2 - \{2 - 2\alpha\nu - 2\rho\}(\lambda\circ\mu) + \{-2\nu + 2\nu^2 - 2\alpha\rho + 2\nu\rho - 4\rho^2\} = 0.$$

Por definición además tenemos :

$$2(\lambda\circ\mu)^2 - (\lambda + \mu - \alpha)(\lambda\circ\mu) + \{\lambda + \mu - \alpha\lambda\mu - (\lambda^2 + \mu^2)\} = 0.$$

Pero $\lambda + \mu - \alpha = 2 - 2\alpha\nu - 2\rho$, luego

$$2(\lambda\circ\mu)^2 - \{\lambda + \mu - \alpha\}(\lambda\circ\mu) + \{-2\nu + 2\nu^2 - 2\alpha\rho + 2\nu\rho - 4\rho^2\} = 0,$$

restando las dos últimás ecuaciones tenemos :

$$\{-2\nu + 2\nu^2 - 2\alpha\rho + 2\nu\rho - 4\rho^2\} - \{\lambda + \mu - \alpha\lambda\mu - (\lambda^2 + \mu^2)\} = 0.$$

Reemplazando $2 + \alpha - 2\alpha\nu - \lambda - \mu = 2\rho$

$$\{\lambda + \mu - \alpha\lambda\mu - (\lambda^2 + \mu^2)\} - \left\{ \begin{array}{c} -2\nu + 2\nu^2 - \alpha(2 + \alpha - 2\alpha\nu - \lambda - \mu) \\ +(2 + \alpha - 2\alpha\nu - \lambda - \mu)\nu - (2 + \alpha - 2\alpha\nu - \lambda - \mu)^2 \end{array} \right\} = 0,$$

Luego ν satisface una ecuacion cuadrática en λ, μ y se tiene el resultado buscado. ■

Observación 4.1.26 *En particular tenemos que si $\lambda\circ\mu \neq \lambda\hat{\circ}\mu$ entonces $(\lambda\circ\mu)\circ\lambda = (\lambda\hat{\circ}\mu)\circ\lambda$ si y sólo sí :*

$$\sigma_\alpha(\lambda, \mu) = \lambda(1 - 6\alpha - 4\alpha^2) - 3\mu(\alpha + 1) + 2(\alpha + 2)(\alpha + 1) = 0.$$

Ejemplo 4.1.27 *Ahora podemos analizar la primera parte del Ejemplo 4.1.12 :*

Sea $\lambda\circ\mu \neq \lambda\hat{\circ}\mu$ entonces :

$$yz = [yz]_1 + [yz]_{\lambda\hat{o}\mu}.$$

Luego :

$$(yz)x = [yz]_1 x + [yz]_{\lambda\hat{o}\mu} x.$$

Por otro como vimos en el análisis de la parte 2 del ejemplo, tenemos que :

$$[yz]_1 x = [[yz]_1 x]_\lambda + [[yz]_1 x]_{1\hat{o}\lambda} \quad ó \quad [yz]_1 x = [[yz]_1 x]_\lambda,$$

y

$$[yz]_{\lambda\hat{o}\mu} x = \Big[[yz]_{\lambda\hat{o}\mu} x\Big]_{(\lambda\hat{o}\mu)\circ\lambda} + \Big[[yz]_{\lambda\hat{o}\mu} x\Big]_{(\lambda\hat{o}\mu)\hat{o}\lambda} \quad ó \quad [yz]_{\lambda\hat{o}\mu} x = \Big[[yz]_{\lambda\hat{o}\mu} x\Big]_{(\lambda\hat{o}\mu)\circ\lambda}.$$

Así

$$[(yz)x]_\lambda = [[yz]_1 x]_\lambda,$$

salvo en el caso que $(\lambda\hat{o}\mu) \circ \lambda = \lambda$.

Observación 4.1.28 *Usando el corolario 4.1.16 tenemos que si $\lambda \circ \mu = 1$ entonces $(\lambda\hat{o}\mu) \circ \lambda = \lambda \Leftrightarrow (\lambda\hat{o}\mu) \circ \lambda = (\lambda \circ \mu) \circ \lambda$.*

De la observación 4.1.28 y los resultados obtenidos en los ejemplos, podemos enunciar la siguiente proposición :

Proposición 4.1.29 *Sean $x, y \in B_\lambda, z \in B_\mu$ tal que $\lambda \circ \mu = 1$. Además supongamos que $\sigma_\alpha(\lambda, \mu) \neq 0$. Entonces :*

$$[(yz)x]_\lambda = [[yz]_1 x]_\lambda.$$

De manera similar tenemos :

Proposición 4.1.30 *Sea A es una álgebra que satisface la identidad (4.1) con $\alpha \neq 2$. Sean $x, y \in B_\lambda, z \in B_\mu$ tal que $\lambda \circ \mu = 1$. Si $\mu, \lambda \notin \{\pm 1, \tau_{\mu,\lambda}\}$ entonces :*

$$[(yx)z]_\lambda = 0.$$

Demostración. Utilizando la Proposición 4.1.10 tenemos :

$$(yx)z = [yx]_{\lambda\circ\lambda}\, z + [yx]_{\lambda\hat{\circ}\lambda}\, z.$$

Nuevamente aplicamos la proposición y tenemos :

$$(yx)z = [[yx]_{\lambda\circ\lambda}\, z]_{(\lambda\circ\lambda)\circ\mu} + [[yx]_{\lambda\circ\lambda}\, z]_{(\lambda\circ\lambda)\hat{\circ}\mu} + [[yx]_{\lambda\hat{\circ}\lambda}\, z]_{(\lambda\hat{\circ}\lambda)\circ\mu} + [[yx]_{\lambda\hat{\circ}\lambda}\, z]_{(\lambda\hat{\circ}\lambda)\hat{\circ}\mu},$$

luego $[(yx)z]_\lambda = 0$ a no ser que se tenga $(\lambda \circ \lambda) \circ \mu = \lambda$, pero por la Proposición 4.1.10 esto ocurre si y sólo si $\lambda = 1, \lambda = \tau_{\mu,\lambda}$ ó $\lambda = \mu$.

Los dos primeros casos quedan descartados directamente por la hipótesis. Si $\lambda = \mu$ como $\lambda \circ \mu = 1$ por el Corolario 4.1.18 tenemos que $\lambda \in \{\pm 1\}$ lo cual está también descartado por hipótesis y así $[(yx)z]_\lambda = 0$. ■

Observación 4.1.31 *En el Ejemplo 4.1.27 basta analizar el caso* $(\lambda\hat{\circ}\mu) \circ \lambda = \lambda$ *ya que para el otro caso basta cambiar el orden de las raíces; al igual que la condición* $(\lambda \circ \lambda) \hat{\circ} \mu = \lambda$ *pedida en la Proposición 4.1.30.*

Corolario 4.1.32 *Bajo las hipótesis de la Proposición 4.1.29 se tiene :*

$$\begin{aligned}[((yz)e)x]_\lambda &= [[(yz)e]_1\, x]_\lambda \\ &= [([yz]_1\, e)\, x]_\lambda = \left[[yz]_1'\, x\right]_\lambda + [[yz]_1\, x]_\lambda = \left[[yz]_1'\, x\right]_\lambda + [(yz)x]_\lambda .\end{aligned}$$

Demostración. Usando la Proposición 4.1.10 tenemos respectivamente que si $\lambda \circ \mu \neq \lambda\hat{\circ}\mu$ ó $\lambda \circ \mu = \lambda\hat{\circ}\mu = 1$ entonces :

$$yz = [yz]_1 + [yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu} \quad \text{ó} \quad yz = [yz]_1 .$$

Así :

$$(yz)e = [yz]_1\, e + [yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu}\, e \quad \text{ó} \quad (yz)e = [yz]_1\, e,$$

pero :

$$[yz]_1\, e = [yz]_1' + [yz]_1 \in B_1 \quad \text{y} \quad [yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu}\, e = [yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu}' + \lambda\hat{\circ}\mu\, [yz]_{\lambda\hat{\circ}\mu} \in B_{\lambda\hat{\circ}\mu}. \tag{4.7}$$

Por lo tanto tenemos :

$$[(yz)e]_1 = [yz]_1\, e$$

Con esto obtenemos lo siguiente :

1. Si $yz = [yz]_1$ entonces :

$$[((yz)e)x]_\lambda = [([yz]_1\, e)\, x]_\lambda = [[(yz)e]_1\, x]_\lambda . \tag{4.8}$$

2. Si $yz = [yz]_1 + [yz]_{\lambda\hat{o}\mu}$ entonces :

$$((yz)e)x = \left([yz]_1\, e + [yz]_{\lambda\hat{o}\mu}\, e\right) x = [(yz)e]_1\, x + [yz]'_{\lambda\hat{o}\mu}\, x + \lambda\hat{o}\mu\, [yz]_{\lambda\hat{o}\mu}\, x. \tag{4.9}$$

Ahora, si $[yz]'_{\lambda\hat{o}\mu}\, x \in B_\lambda$ ó $[yz]_{\lambda\hat{o}\mu}\, x \in B_\lambda$ entonces $(\lambda\hat{o}\mu) \circ \lambda = \lambda$ lo que está descartado por hipótesis.

Por lo tanto de (4.8) y (4.9) :

$$[((yz)e)x]_\lambda = [[(yz)e]_1\, x]_\lambda . \tag{4.10}$$

Además usando (4.7) :

$$[([yz]_1\, e)\, x]_\lambda = \left[[yz]'_1\, x\right]_\lambda + [[yz]_1\, x]_\lambda = \left[[yz]'_1\, x\right]_\lambda + [(yz)x]_\lambda , \tag{4.11}$$

y finalmente de (4.10) y (4.11) se obtiene el resultado buscado. ∎

Capítulo 5

Aplicaciones de la Descomposición de Peirce.

La descomposición de Peirce, y los resultados presentados en el capítulo anterior acerca de la multiplicación entre elementos de los distintos espacios B_λ y sus componentes son utilizadas en [9] para demostrar el siguiente resultado :

Teorema 5.1. *Sea A una álgebra conmutativa simple, sobre un cuerpo F de característica distinta de 2 y 3. tal que A satisface la identidad polinomial :*

$$\left\{(xy)^2 - x^2y^2\right\} - 2\left\{((xy)x)y + ((xy)y)x - (y^2x)x - (x^2y)y\right\} = 0.$$

Sea e es un idempotente de A y supongamos que para cada $x \in A$ existe un polinomio no nulo $f_x(R_e) \in F[R_e]$ que aniquila a x. Entonces :

(i) $A = B_1 + B_{-1}$ y $B_1 = B_{-1}B_{-1}$ *ó*
(ii) $A = B_1 + B_0$.

En la demostración de este resultado, en [9] se presentan una serie de definiciones que ayudan a simplificar los cálculos necesarios para demostración. En la primera sección de este capítulo explicaremos de manera detallada estas definiciones así como la notación que utilizaremos, para formular una generalización del Teorema 5.1 en álgebras que satisfacen la identidad :

$$2\beta\left\{(xy)^2 - x^2y^2\right\} + \gamma\left\{((xy)x)y + ((xy)y)x - (y^2x)x - (x^2y)y\right\} = 0. \tag{5.1}$$

Esta generalización será presentada junto con otros resultados técnicos en la segunda sección de este capítulo.

5.1. Definiciones.

En el capítulo anterior, vimos como se comportan los productos entre elementos en los diferentes espacios B_λ para los λ que son raíces de los llamados Polinomios de Peirce. Si consideramos un término de la linealización de la identidad (5.1), por ejemplo $((xy)z)w$, vemos que al descomponer cada variable como suma de sus componentes en los distintos espacios B_λ aparece una cantidad considerable de términos que son productos de elementos en los distintos espacios B_λ los cuales a su vez se pueden descomponer de acuerdo a lo mostrado en el capítulo anterior. De esta manera obtendríamos una ecuación en A con demasiados términos que harían muy complicado su manejo y por ende sería bastante difícil obtener información acerca del álgebra a partir de ella. Las siguientes definiciones buscan de alguna manera evitar realizar todos estos cálculos ó simplificarlos de alguna manera.

Definición 5.1.1 *Sean $\lambda_1, ..., \lambda_r \in F$ y $x_1, ..., x_r$ elementos de $B_{\lambda_1}, ..., B_{\lambda_r}$ respectivamente. Llamamos a una ecuación $E(e, x_1, ..., x_r)$* estándar, *si esta es homogénea, de grado 1 en cada x_i y si es combinación lineal de ecuaciones que se obtienen al linealizar la identidad, sustituyendo cada una de las variables, por algún producto de elmentos del conjunto $\{e, x_1, ..., x_r\}$ y posiblemente multiplicando por uno o más productos de ese tipo.*

Definición 5.1.2 *Si T es un término de una ecuación estándar E llamaremos "término reducido sin subíndices de la ecuación estándar E" al término obtenido a partir de T eliminando todos los e que aparecen en los productos que forman T, así como el coeficiente que lo acompaña.*

Observación 5.1.3 *Los subíndices que señala la definición anterior son aquellos que aparecen con la aplicación sucesiva de la Proposición 4.1.10 y denotados utilizando letras del alfabeto griego.*

Notación 5.1.4 *Abreviaremos "término reducido sin subíndices de E" como* **"T.R.S"** *de E.*

Ejemplo 5.1.5 *Si $T = (((x_1x_2)e)x_3)x_4$ es un término de una ecuación estándar E entonces $((x_1x_2)x_3)x_4$ es un T.R.S de E*

Observación 5.1.6 *Si T es un T.R.S de E, T no es necesariamente un término de la ecuación E.*

Observación 5.1.7 *Utilizando la Proposición 4.1.10 tenemos :*

$$x_1x_2 = (x_1x_2)_{\lambda_1 \circ \lambda_2} + (x_1x_2)_{\lambda_1 \hat{\circ} \lambda_2},$$

escogemos entonces $\rho = \lambda_1 \circ \lambda_2$

$$(x_1x_2)_\rho x_3 = \Big((x_1x_2)_\rho x_3\Big)_{\rho \circ \lambda_3} + \Big((x_1x_2)_\rho x_3\Big)_{\rho \hat{\circ} \lambda_3}.$$

Ahora hacemos $\sigma = \rho \circ \lambda_3$:

$$\Big((x_1x_2)_\rho x_3\Big)_\sigma x_4 = \Big(\Big((x_1x_2)_\rho x_3\Big)_\sigma x_4\Big)_{\sigma \circ \lambda_4} + \Big(\Big((x_1x_2)_\rho x_3\Big)_\sigma x_4\Big)_{\sigma \hat{\circ} \lambda_4},$$

y finalmente si $\tau = \sigma \circ \lambda_4$ obtenemos el término :

$$\Big(\Big((x_1x_2)_\rho x_3\Big)_\sigma x_4\Big)_\tau.$$

Definición 5.1.8 *Si T es un T.R.S de una ecuación estándar E, llamaremos "términos reducidos totalmente subindexados" a aquellos términos que pueden obtenerse a partir de T con la aplicación sucesiva de la Proposición 4.1.10 (Observación 5.1.6)*

Notación 5.1.9 *Escribiremos T es un* **T.R.T.S** *de E para indicar que T es un término reducido totalmente subindexado de la ecuación estándar E.*

Observación 5.1.10 *Claramente cada T.R.S de E es suma de un número finito de T.R.T.S de E.*

Definición 5.1.11 *Llamaremos Pares de raíces, a los pares $(\lambda, \mu) \in F \times F$ que aparecen en la formación de un T.R.T.S.*

Ejemplo 5.1.12 *El conjunto de pares de raíces del ejemplo anterior esta formado por $(\lambda_1, \lambda_2), (\rho, \lambda_3)$ y (σ, λ_4).*

Recordemos que si $x \in B_\lambda$, $x^{(k)} = x(R_e - \lambda I)^k$. En particular $x' = x(R_e - \lambda I)$.

Definición 5.1.13 *Diremos que T es un* **"T.R.T.S asociado a E"** *si T es un T.R.T.S de E o bien sí T se obtiene a partir de un T.R.T.S colocando primas en las variables o en los paréntesis en cualquier forma.*

Observación 5.1.14 *En una ecuación estándar E aparecen dos tipos de términos, aquellos con algún e entre los productos y aquellos donde no aparece e en los productos. Los del primer tipo son T.R.S de E y se pueden descomponer en suma de T.R.T.S de E.*

Por otro lado si consideramos por ejemplo el término $T = ((x_1x_2)e)x_3$ aplicando sucesivamente la Proposición 4.1.10 tenemos :

$$((x_1x_2)\,e)\,x_3 = \left((x_1x_2)_{\lambda_1\circ\lambda_2}\,e\right)x_3 + \left((x_1x_2)_{\lambda_1\hat{\circ}\lambda_2}\,e\right)x_3. \tag{5.2}$$

Ahora, si $x \in B_\lambda$ entonces $x' = xe - \lambda x$ luego para el primer sumando de (5.2) se tiene :

$$\left((x_1x_2)_\rho\,e\right)x_3 = (x_1x_2)'_\rho\,x_3 + \rho\,(x_1x_2)_\rho\,x_3.$$

Nuevamente aplicamos la Proposición 4.1.10 al primer sumando de la última ecuación y tenemos :

$$(x_1x_2)'_\rho x_3 = \left((x_1x_2)'_\rho x_3\right)_{\lambda_3 \circ \rho} + \left((x_1x_2)'_\rho x_3\right)_{\lambda_3 \hat{\circ} \rho}.$$

Observamos ahora que ambos sumandos corresponden a un T.R.T.S de E con una prima sobre el primer paréntesis o sea son "T.R.T.S asociados a E". Realizando el mismo proceso en cada uno de los sumandos de la descomposición de T, podemos escribir T como suma de "T.R.T.S asociados a E".

Finalmente podemos resumir esta observación diciendo que E se escribe de una única manera como suma de "T.R.T.S asociados a E".

Definición 5.1.15 *Si escribimos la ecuación E en su descomposición única como suma de "T.R.T.S asociados a E" y borramos aquellos términos de esta descomposición que tengan una o más primas obtenemos una nueva expresión E^* a la que llamaremos "Ecuación Derivada de E" (estrictamente hablando E^* no es una ecuación válida en A, sólo corresponde a una expresión obtenida a partir de E).*

5.2. Aplicaciones.

El principal resultado que demostraremos en esta sección es el siguiente :

Si A es una álgebra conmutativa simple sobre un cuerpo F que satisface la identidad (5.1) con $\gamma \neq 0$ y $\alpha = \frac{4\beta}{\gamma}$ tal que A posee un idempotente e y existe un polinomio no nule que anula a R_e, entonces :

(i) $A = B_1 + B_{-(1+\alpha)}$ *ó*

(ii) $A = BA + B$ *donde* $B = \sum\limits_{\lambda \neq 1, -(1+\alpha)} B_\lambda$.

Con objetivo de obtener el resultado antes mencionado, enunciaremos ahora un importante lema utilizando las definiciones del capítulo anterior, que nos muestra que pese a no ser necesariamente E^* una ecuación válida en A, nos puede entregar información importante sobre la ecuación estándar E. Además veremos como con este lema, se pueden obtener algunos resultados que servirán para mejorar la descomposición del álgebra A en el caso (ii).

Lema 5.2.1 *Sea $\gamma \neq 0$ y $\alpha = \frac{4\beta}{\gamma}$. Sean $\nu, \lambda_1, ..., \lambda_r \in F$, $C_1, ..., C_r$ subespacios de $B_{\lambda_1}, ..., B_{\lambda_r}$ respectivamente y tal que $eC_i \subset C_i$ para cada i y sea D un subespacio de A tal que $eD \subset D$. Sea $E_1(x_1, ..., x_r), ..., E_s(x_1, ..., x_r)$ un conjunto de ecuaciones estándar tal que $x_i \in C_i$ y supongamos que se tiene alguna de las siguientes condiciones :*

(A) *$\lambda \circ \mu \neq \lambda \hat{\circ} \mu$ para todo par de raíces de cada T.R.T.S de E_i $(i = 1, ..., s)$.*

(B) *$r = 3$ y para cada T.R.T.S , $T = ((x_i x_j)_\rho x_k)_\nu$ con $\rho = \lambda_i \circ \lambda_j$ y $\nu = \rho \circ \lambda_k$ donde T no está en D por la elección de D, se cumple sólo una de las siguientes condiciones :*

1. *$\lambda_i \circ \lambda_j \neq \lambda_i \hat{\circ} \lambda_j$.*
2. *$(\lambda_i \circ \lambda_j) \circ \lambda_k = 1 - \alpha\lambda_k - 2\lambda_i \circ \lambda_j$.*

Supongamos además que las componentes en B_ν de las ecuaciones derivadas $E_1^*, ..., E_s^*$ implican linealmente que los T.R.T.S de $E_1, ..., E_s$ que están en B_ν están también en D. Entonces los T.R.T.S de $E_1, ..., E_s$ que están en B_ν están también en D para cualquier elección de $x_1, ..., x_r$ en $C_1, ..., C_r$.

Demostración. Sea $G = G(x_1, x_2, ..., x_r)$ el conjunto de T.R.T.S asociados a $E_1, ..., E_s$ que están en B_ν y $G_j = \{T \in G : T \text{ tiene } j \text{ primas}\}$. Recordemos que si $x_i \in B_{\lambda_i}$ se define $\deg x_i = k$ donde k es el menor entero tal que $x_i(R_e - \lambda_i I)^k = 0$.

Demostraremos que $G \subset D$, asumiendo válidas las ecuaciones $E_1, ..., E_s$ y que las ecuaciones $E_1^*, ..., E_s^*$ implican que los elementos de G_0 están en D.(esto es posible por la hipótesis del lema, ya que los elementos de G_0 son T.R.T.S de $E_1, ..., E_s$). Es importante notar que con esto bastará para demostrar el lema, ya que podremos reducir las ecuaciones E_i a las ecuaciones E_i^* módulo D (así eliminaremos de E_i los términos con primas al tomar módulo D).

Para demostrar lo anterior haremos inducción sobre $d = \sum_{i=1}^{r} \deg x_i$.

Si $d < r$, existe i tal que $x_i = 0$ y por lo tanto cualquier término que involucre a x_i en sus productos es cero y está en D, en particular aquellos elementos de G. Podemos suponer entonces (hipótesis de inducción) que $G \subset D$ para $k = \sum_{i=1}^{r} \deg x_i$ con $k < d$.

Observemos que todo elemento de G en el cual aparece al menos una prima en alguna de las x_i está en D por hipótesis de inducción ya que $\deg x_k = 1 + \deg x_k'$ (es importante notar que pese a lo observado anteriormente aún falta analizar que sucede cuando aparecen términos por ejemplo de la forma $(x_k x_i)'$)

Supongamos entonces que $\mathcal{T} = \{T \in G : T \notin D\} \neq \varnothing$ (claramente por la hipótesis del lema $\mathcal{T} \cap G_0 = \varnothing$).

Sea $\partial(G)$ el conjunto de aquellos términos de G tal que al escoger cualquier prima de un par de paréntesis del término y moverla hacia alguno de los factores del producto dentro del par de paréntesis, se obtiene un término en D.

Por ejemplo si T es un término que posee un factor de la forma $(x_i x_j)_\tau^{(m)} x_k$ entonces $T \in \partial(G)$ ya que aquellos términos que tienen una prima en alguno de los x_i están en D.

Sea T_0 en $\mathcal{T}$ con número maximal de primas. (esto es si T_1 tiene más primas que T_0 entonces $T_1 \in D$).

Observemos que si $T = ((x_i x_j) x_k)' x_s \in \mathcal{T}$ entonces por la definición de T.R.T.S asociado a una ecuación, tenemos que $\left((x_i^{(m_i)} x_j)_\sigma^{(m_j)} x_k^{(m_k)}\right)_\varepsilon^{(m_e)} x_s^{(m_s)} \in G$, en particular $((x_i x_j)_\sigma' x_k)_\kappa x_s \in G$; en caso de que tengamos $((x_i x_j)_\sigma' x_k)_\kappa x_s \in D$ entonces $T \in \partial(G)$ en caso contrario, $((x_i x_j)_\sigma' x_k)_\kappa x_s \in \mathcal{T}$ y más aún $((x_i x_j)_\sigma' x_k)_\kappa x_s \in \partial(G)$.

Luego podemos escoger T_0 con número maximal de primas en $\mathcal{T}$ y tal que $T_0 \in \partial(G)$.

Consideremos ahora un par de paréntesis de T_0 de la forma $(yz)^{(m)}$ con $m > 1$ con $y, z \in G_0$ (sin primas) y sean λ, μ tal que $y \in B_\lambda$, $z \in B_\mu$.

En A es válida la ecuación :

$$\begin{aligned}(yz)\left\{2\gamma R_e^2 - (\gamma(\lambda+\mu) - 4\beta) R_e + \gamma(\lambda+\mu) - 4\beta\lambda\mu - \gamma\left(\lambda^2+\mu^2\right)\right\}\\ + (y'z)\{-\gamma R_e + \gamma - 2\gamma\lambda - 4\beta\mu\} + (yz')\{-\gamma R_e - 2\gamma\mu + \gamma\mu - 4\beta\lambda\}\\ - \gamma y''z - \gamma z''y - 4\beta y'z' = 0.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Tomamos la componente en $\lambda \circ \mu$ de la ecuación (5.3) y tenemos que el primer sumando de está dado por :

$$\begin{aligned}[(yz)p_{\lambda,\mu}(R_e)]_{\lambda\circ\mu} &= 2\gamma(yz)_{\lambda\circ\mu}\{R_e - (\lambda\circ\mu)I\}\{R_e - (\lambda\hat{\circ}\mu)I\}\\ &= 2\gamma(yz)'_{\lambda\circ\mu}\{R_e - (\lambda\hat{\circ}\mu)I\}\\ &= 2\gamma(yz)'_{\lambda\circ\mu}\{(\lambda\circ\mu - \lambda\hat{\circ}\mu)I + R_e - (\lambda\circ\mu)I\}\\ &= 2\gamma(\lambda\circ\mu - \lambda\hat{\circ}\mu)(yz)'_{\lambda\circ\mu} + 2\gamma(yz)''_{\lambda\circ\mu}.\end{aligned}$$

En la nueva ecuación obtenida, multiplicamos por elementos o productos del conjunto $\{x_1, ..., x_r\}$ y aplicamos primas de manera que el primer sumando (distinto de cero ya que $2\gamma(\lambda\circ\mu - \lambda\hat{\circ}\mu) \neq 0$) sea igual a T_0. De esta manera obtenemos una ecuación cuyo primer sumando es T_0 y los demás sumandos tienen términos con más primas que T_0 o se obtienen a partir de T_0 cambiando una prima desde el paréntesis (yz); luego T_0 está en D lo que es una contradicción con la hipótesis.

Por lo tanto $G \setminus G_0 \subseteq D$. De esta manera $(E_i)_\nu = (E_i^*)_\nu$ y por hipótesis las ecuaciones $E_1^*, ..., E_s^*$ se pueden resolver linealmente para probar que los elementos de G_0 están en D. Luego $G \subseteq D$.

Supongamos ahora que se tiene (B) y que $T_0 = ((x_i x_j)_\rho^{(m)} x_k)_\nu^{(n)}$.

Si $\lambda\circ\mu - \lambda\hat{\circ}\mu \neq 0$ usando el mismo argumento anterior tenemos que $m = 0$.

Por otro lado si $\lambda \circ \mu - \lambda \hat{\circ} \mu = 0$ el coeficiente de $(x_i x_j)'$ se anula al reemplazar $x_i = y$, $x_j = z$ en (5.3) y el coeficiente de $(x_i x_j)''$ es distinto de cero.

Si $m > 2$ y tomamos la componente en ρ de (5.3) con el reemplazo dicho anteriormente, aplicamos ahora el operador $(R_e - \rho I)^{m-1} R_{x_k} (R_e - vI)^n$ para obtener T_0 y argumentar igual que en el caso anterior que la componente en B_ν de T_0 está en D, lo que contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto $m \in \{0, 1\}$.

De la misma manera pero ahora tomando $y = (x_i x_j)_\rho^{(m)}$, $z = x_k$ tenemos que $n = 0$ para el caso $\rho \circ \lambda_k \neq \rho \hat{\circ} \lambda_k$ y que $n \in \{0, 1\}$ si $\rho \circ \lambda_k = \rho \hat{\circ} \lambda_k$.

Si $m = n = 1$ entonces los elementos de G_t están en D para $t > 2$ (esto porque tienen más primas que T_0) , luego si aplicamos $(R_e - \nu I)^2$ a las componentes en B_ν de las ecuaciones $E_1, ..., E_s$, estas ecuaciones se reducen módulo D a las componentes en B_v de las ecuaciones derivadas, pero a las cuales se les ha aplicado $(R_e - vI)^2$ (ya que los únicos términos que sobreviven a la reducción módulo D son aquellos que están en G_0 por la condición sobre $t > 2$) podemos concluir por hipótesis que los elementos de $G_0(R_e - \nu I)^2$ están en D. Por otro lado tenemos reemplazando en la ecuación (5.3) y tomando componente en B_v :

$$\begin{aligned} &((x_i x_j)'_\rho x_k)_\nu \{-\gamma R_e + \gamma - 2\gamma\rho - 4\beta\lambda_k\} + ((x_i x_j)_\rho x'_k)_\nu \{-\gamma R_e - 2\gamma\lambda_k + \gamma\lambda_k - 4\beta\rho\} \\ &\qquad - \gamma \left((x_i x_j)''_\rho x_k\right)_\nu - \gamma \left(x''_k (x_i x_j)_\rho\right)_\nu - 4\beta \left((x_i x_j)'_\rho x'_k\right)_\nu = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Expandiendo los términos tenemos :

$$\begin{aligned} &- \gamma((x_i x_j)'_\rho x_k)_\nu R_e + ((x_i x_j)'_\rho x_k)_\nu \{\gamma - 2\gamma\rho - 4\beta\lambda_k\} - \gamma \left((x_i x_j)_\rho x'_k\right)_\nu R_e \\ &\qquad + ((x_i x_j)_\rho x'_k)_\nu \{-2\gamma\lambda_k + \gamma\lambda_k - 4\beta\rho\} \\ &\qquad - \gamma \left((x_i x_j)''_\rho x_k\right)_\nu - \gamma \left(x''_k (x_i x_j)_\rho\right)_\nu - 4\beta \left((x_i x_j)'_\rho x'_k\right)_\nu = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ahora reemplazamos $x' = x(R_e - \nu I)$ para $x \in B_v$

$$\begin{aligned}
-\gamma((x_ix_j)'_\rho x_k)'_\nu + ((x_ix_j)'_\rho x_k)_\nu \{\gamma - 2\gamma\rho - 4\beta\lambda_k - v\gamma\} - \gamma((x_ix_j)_\rho x'_k)'_\nu \\
+ ((x_ix_j)_\rho x'_k)_\nu \{-2\gamma\lambda_k + \gamma\lambda_k - 4\beta\rho - v\gamma\} \\
- \gamma\left((x_ix_j)''_\rho x_k\right)_\nu - \gamma\left(x''_k(x_ix_j)_\rho\right)_\nu - 4\beta\left((x_ix_j)'_\rho x'_k\right)_\nu = 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Aplicamos $(R_e - \nu I)$ en (5.6) y finalmente tenemos :

$$\begin{aligned}
-\gamma((x_ix_j)'_\rho x_k)''_\nu + \{\gamma - 2\gamma\rho - 4\beta\lambda_k - \gamma\nu\} T_0 - \gamma\left((x_ix_j)_\rho x'_k\right)''_\nu \\
+ ((x_ix_j)_\rho x'_k)'_\nu \{-2\gamma\lambda_k + \gamma\lambda_k - 4\beta\rho - \gamma\nu\} \\
- \gamma\left((x_ix_j)''_\rho x_k\right)'_\nu - \gamma\left(x''_k(x_ix_j)_\rho\right)'_\nu - 4\beta\left((x_ix_j)'_\rho x'_k\right)'_\nu = 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Observamos que en (5.7) todos los términos están en D y el coeficiente de T_0 está dado por :

$$\begin{aligned}
\gamma - 2\gamma\rho - 4\beta\lambda_k - \gamma\nu &= \gamma(1 - 2\rho - \alpha\lambda_k - v) \\
&= \gamma(1 - 2(\lambda_i \circ \lambda_j) - \alpha\lambda_k - (\lambda_i \circ \lambda_j) \circ \lambda_k) \neq 0 \text{ (por hipótesis de la condición (B)).}
\end{aligned}$$

Luego $T_0 \in D$ y esto contradice nuevamente nuestra suposición inicial.

Para el caso $m = 1$ y $n = 0$, los elementos de G_t están en D para $t > 1$, realizamos ahora el mismo procedimiento anterior, pero esta vez aplicando $(R_e - \nu I)$ en el primer paso, con esto se obtiene que los elementos de $G_0(R_e - \nu I)$ están en D y analogamente al caso anterior, tenemos una ecuación en la cual todos los sumandos están en D y el coeficiente de T_0 es $\gamma(1 - 2\rho - \alpha\lambda_k - \nu) \neq 0$.

Finalmente para el caso $n = 1$ y $m = 0$ nuevamente se obtiene que los elementos de $G_0(R_e - \nu I)$ están en D pero :

$$T_0 = ((x_ix_j)_\rho x_k)'_\nu = ((x_ix_j)_\rho x_k)_\nu (R_e - \nu I) \in G_0(R_e - \nu I) \subseteq D.$$

Luego $G_t \subseteq D$ para todo $t > 0$ y podemos reducir las componentes en B_ν de las ecuaciones $E_1, ..., E_s$ módulo D a las componentes en B_ν de las ecuaciones derivadas, y esto por hipótesis implica que $G_0 \subseteq D$ y así queda demostrado el lema (ya que si son válidas las ecuaciones $E_1, ..., E_s$ y $G \subseteq D$, entonces son válidas las ecuaciones derivadas módulo D , y por hipótesis estas implican que los componentes en B_ν de $E_1, ..., E_s$ están en D). ■

Utilizaremos a continuación el lema demostrado, para probar que bajo ciertas hipótesis se tiene $[(yz)x]_\lambda = 0$. Para esto necesitamos algunos calculos previos.

Sea $x \in B_v, y \in B_\lambda, z \in B_\mu$ reemplazando w por e en la linealización completa de la identidad tenemos :

$$2\beta\{2(xy)(ez) + 2(ey)(xz) - 4(xe)(yz)\}$$
$$+\gamma\left\{\begin{array}{c} ((ez)x)y + ((xz)e)y + ((ey)x)z + ((xy)e)z + ((ez)y)x + \\ ((xz)y)e + ((ey)z)x + ((xy)z)e \\ -2((yz)e)x - 2((yz)x)e - 2((xe)z)y - 2((xe)y)z \end{array}\right\} = 0. \tag{5.8}$$

Ahora reemplazamos en (5.8) $x' + vx = ex$, $y' + \lambda y = ey$, $z' + \mu z = ez$, y se tiene :

$$\begin{aligned}&\gamma((xy)z)e + \gamma((y' + \lambda y)x)z + \gamma((xz)y)e + \gamma((z' + \mu z)y)x + \gamma((xy)e)z + \gamma((y' + \lambda y)z)x \\ &+ \gamma((xz)e)y - 8\beta(x' + vx)(yz) + \gamma((z' + \mu z)x)y = 2\gamma((yz)x)e + 2\gamma((yz)e)x + 2\gamma(x'y)z \\ &+ 2v\gamma(xy)z + 2\gamma(x'z)y + 2v\gamma(xz)y - 4\beta y'(xz) - 4\beta\lambda y(xz) - 4\beta z'(xy) - 4\beta\mu z(xy).\end{aligned}$$

Reordenando y agrupando términos obtenemos :

$$
\begin{aligned}
&\gamma((xy)z)e + \gamma(y'x)z + \gamma\lambda(yx)z + \gamma((xz)y)e + \gamma(z'y)x + \gamma\mu(zy)x \\
&+ \gamma((xy)e)z + \gamma(y'z)x + \gamma\lambda(yz)x + \gamma((xz)e)y - 8\beta x'(yz) - 8\beta v(yz)x + \gamma(z'x)y + \gamma\mu(zx)y \\
&\qquad = 2\gamma((yz)x)e + 2\gamma((yz)e)x + 2\gamma(x'y)z + 2v\gamma(xy)z + 2\gamma(x'z)y + 2v\gamma(xz)y \\
&\qquad\qquad - 4\beta y'\,(xz) - 4\beta\lambda y\,(xz) - 4\beta z'\,(xy) - 4\beta\mu z\,(xy)\,.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Así, escribiendo la ecuación (5.9), utilizando el operador de multiplicación R_e tenemos la ecuación :

$$
\begin{aligned}
&(yz)x\,\{2\gamma R_e - (\gamma\mu + \gamma\lambda - 8\beta v)\} + 2\gamma((yz)e)x - \gamma(y'z)x - \gamma(z'y)x + 8\beta(yz)x' = \\
&\quad (xy)z\,\{\gamma R_e + (\gamma\lambda + 4\beta\mu - 2v\gamma)\} + \gamma((xy)e)z + \gamma(y'x)z - 2\gamma(x'y)z + 4\beta\,(xy)\,z' \\
&\quad + (xz)y\,\{\gamma R_e + (\gamma\lambda + 4\beta\lambda - 2v\gamma)\} + \gamma((xz)e)y + \gamma(z'x)y - 2\gamma(x'z)y + 4\beta y'\,(xz)\,.
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Observación 5.2.2 *Recordemos las Proposiciones (4.1.29) y (4.1.30) respectivamente :*

1. *Sean $x, y \in B_\lambda, z \in B_\mu$ tal que $\lambda \circ \mu = 1$. Además supongamos que $\sigma_\alpha(\lambda, \mu) \neq 0$. Entonces :*
$$[(yz)x]_\lambda = [[yz]_1\, x]_\lambda\,.$$

2. *Sea A es una álgebra que satisface la identidad (1) con $\alpha \neq 2$. Sean $x, y \in B_\lambda, z \in B_\mu$ tal que $\lambda \circ \mu = 1$. Si $\mu, \lambda \notin \{\pm 1, \tau_{\mu,\lambda}\}$ entonces :*
$$[(yx)z]_\lambda = 0.$$

Supongamos ahora , $\gamma \neq 0$ y $v = \lambda$. Factorizamos por γ y reemplazamos α en (5.10) para obtener la siguiente ecuación :

$$\begin{aligned}(yz)x\,\{2(R_e-\lambda)-(\mu-(2\alpha+1)\lambda)\} + 2((yz)e)x - (y'z)x - (z'y)x + 2\alpha(yz)x' = \\ (xy)z\,\{R_e + (\alpha\mu-\lambda)\} + ((xy)e)z + (y'x)z - 2(x'y)z + \alpha(xy)z' \\ + (xz)\,\{(R_e-\lambda)+(\mu+\lambda(\alpha-1))\} + ((xz)e)y + (z'x)y - 2(x'z)y + \alpha(xz)y'.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Además desarrollando y usando el Corolario 4.1.32 tenemos :

$$\begin{aligned}[(yz)x]_\lambda\,\{2(R_e-\lambda)-(\mu-(2\alpha+1)\lambda)\} + 2\,[((yz)e)x]_\lambda = \\ 2\,[(yz)x]'_\lambda - (\mu-(2\alpha+1)\lambda)\,[(yz)x]_\lambda + 2\,[(yz)'_1x]_\lambda + 2\,[(yz)x]_\lambda\,,\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}[(xz)y]_\lambda\,\{(R_e-\lambda)+(\mu+\lambda(\alpha-1))\} + [((xz)e)y]_\lambda = \\ [(xz)y]'_\lambda + (\mu+\lambda(\alpha-1))\,[(xz)y]_\lambda + [(xz)'_1y]_\lambda + [(xz)y]_\lambda\,.\end{aligned} \tag{5.13}$$

También se tiene :

$$\begin{aligned}((xy)e)z &= ((xy)_{\lambda\circ\lambda}\,e)\,z + ((xy)_{\lambda\hat{\circ}\lambda}e)\,z \\ &= (xy)'_{\lambda\circ\lambda}\,z + \lambda\circ\lambda\,(xy)_{\lambda\circ\lambda}\,z + (xy)'_{\lambda\hat{\circ}\lambda}\,z + \lambda\hat{\circ}\lambda\,(xy)_{\lambda\hat{\circ}\lambda}\,z \\ &\in B_{(\lambda\circ\lambda)\circ\mu} + B_{(\lambda\circ\lambda)\hat{\circ}\mu} + B_{(\lambda\hat{\circ}\lambda)\circ\mu} + B_{(\lambda\hat{\circ}\lambda)\hat{\circ}\mu}.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Por lo tanto bajo las hipótesis de la Proposición 4.1.30 :

$$[((xy)e)z]_\lambda = 0. \tag{5.15}$$

Luego usando (5.12), (5.13), (5.15) y la Proposición 4.1.30 la coordenada en B_λ se reduce a :

$$\begin{aligned}\left[2\left((yz)x\right)' + \left(2-(\mu-(2\alpha+1)\lambda)\right)(yz)x + 2(yz)'x - (y'z)x - (yz')x + 2\alpha(yz)x'\right]_\lambda &= \\ \left[((xz)y)' + (1+\mu+\lambda(\alpha-1))(xz)y + (xz)'y + (xz')y - 2(x'z)y + \alpha(xz)y'\right]_\lambda &.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Notación 5.2.3 *Sea $\lambda, \mu \in F$, denotamos $q(\lambda,\mu) = \lambda^2 + \alpha\lambda\mu + \mu^2$.*

Con las hipótesis de las proposiciones y de la Observación 5.2.2 y utilizando el Lema 5.2.1 tenemos el siguiente resultado :

Proposición 5.2.4 *Sea $\lambda(\alpha+1) \neq -1$. Además, supongamos que $q\left(\frac{1}{2}\left((\alpha+2)\lambda+1\right),\lambda\right) \neq 2+\alpha$ y $q\left((\alpha-1)\lambda-1,\lambda\right) \neq 2+\alpha$ entonces :*

$$[(yz)x]_\lambda = [(xz)y]_\lambda = 0.$$

Demostración. Sean $\nu = \lambda$, $C_1 = C_2 = B_\lambda$, $C_3 = B_\mu$, $D = 0$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Llamaremos E_1 a la ecuación (5.16) y E_2 a la ecuación obtenida a partir de (5.16) intercambiando x por y.

Las ecuaciones derivadas de E_1 y E_2 están E_1^*, E_2^* dadas por :

$$\begin{aligned}(2-(\mu-(2\alpha+1)\lambda))\,[(yz)x]_\lambda &= (1+\mu+\lambda(\alpha-1))\,[(xz)y]_\lambda, \\ (1+\mu+\lambda(\alpha-1))\,[(yz)x]_\lambda &= (2-(\mu-(2\alpha+1)\lambda))\,[(xz)y]_\lambda.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Si $M = 2-(\mu-(2\alpha+1)\lambda)$ y $N = 1+\mu+\lambda(\alpha-1)$ el sistema de ecuaciones (5.17) tiene solución no nula , sólo si :

$$\det\begin{pmatrix} M & -N \\ N & -M\end{pmatrix} = N^2 - M^2 = 0.$$

Recordemos además que como $\lambda \circ \mu = 1$ por la Proposición 4.1.17 se tiene :

$$q(\lambda, \mu) = 2 + \alpha. \tag{5.18}$$

Además si $M = \pm N$ entonces respectivamente tenemos :

$$\mu = \tfrac{1}{2}\left((\alpha + 2)\,\lambda + 1\right) \quad \text{ó} \quad \mu = (\alpha - 1)\,\lambda - 1, \tag{5.19}$$

lo que está descartado por hipótesis.

Por otro lado tenemos que :

$$(\lambda \circ \mu) \circ \lambda = 1 - \alpha\lambda - 2,$$

si y sólo sí :

$$\lambda\,(\alpha + 1) = -1.$$

Por lo tanto se cumple la condición (B) del Lema 5.2.1 y podemos aplicarlo para obtener :

$$[(yz)x]_\lambda = [(xz)y]_\lambda = 0,$$

para cualquier elección de $x, y \in B_\lambda, z \in B_\mu$. ∎

A continuación mostraremos otro resultado, que nos servirá para nuestro objetivo final. Para esto realizaremos algunos cálculos previos.

Factorizemos por $\gamma \neq 0$ y reemplacemos $\alpha = \frac{4\beta}{\gamma}$ en la ecuación (5.10), para obtener la ecuación :

$$\begin{aligned}(yz)x\,\{2R_e - (\mu + \lambda - 2\alpha v)\} + 2((yz)e)x - (y'z)x - (z'y)x + 2\alpha(yz)x' = \\ (xy)z\,\{R_e + (\lambda + \alpha\mu - 2v)\} + ((xy)e)z + (y'x)z - 2(x'y)z + \alpha\,(xy)\,z' \\ + (xz)y\,\{R_e + (\mu + \alpha\lambda - 2v)\} + ((xz)e)y + (z'x)y - 2(x'z)y + \alpha\,(xz)\,y'.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Observación 5.2.5 *Sean* $x \in B_\nu$, $y \in B_\lambda$, $z \in B_\mu$. *Si* $\rho = \lambda \hat{o} \mu$ *y* $\lambda \circ \mu = 1$ *entonces :*

1. $$\begin{aligned}(yz)x &= (yz)_1 x + (yz)_\rho x \\ &= [(yz)_1 x]_\nu + [(yz)_1 x]_{1\hat{o}\nu} + [(yz)_\rho x]_{\rho o \nu} + [(yz)_\rho x]_{\rho \hat{o} \nu}.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(yx)z &= (yx)_{\nu o \lambda} z + (yx)_{\nu \hat{o} \lambda} z \\ &= [(yx)_{\nu o \lambda} z]_{(\nu o \lambda) o \mu} + [(yx)_{\nu \hat{o} \lambda} z]_{(\nu \hat{o} \lambda) o \mu} + [(yx)_{\nu o \lambda} z]_{(\nu o \lambda) \hat{o} \mu} + [(yx)_{\nu \hat{o} \lambda} z]_{(\nu \hat{o} \lambda) \hat{o} \mu}.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}((yz)e)x &= ((yz)_1 + (yz)_\rho e)x \\ &= (yz)_1' x + (yz)_1 x + (yz)_\rho' x + \rho (yz)_\rho x.\end{aligned}$$

Si queremos aplicar el Lema 5.2.1, lo primero que debemos hacer es identificar aquellos T.R.T.S que aparecen en la ecuación (5.20) al escribirla en sus términos asociados. Para esto, usamos la observación anterior, y suponiendo además que ν no satisface $(\nu \circ \lambda) \circ \mu = \nu$ tenemos que el único T.R.T.S de la ecuación (5.20) que está en B_ν es $[[yz]_1 x]_\nu$.

Además tenemos que :

$$\begin{aligned}[(yz)x]_\nu \{2R_e - (\mu + \lambda - 2\alpha v)\} &= [(yz)x]_\nu \{2(R_e - \nu) + 2\nu - (\mu + \lambda - 2\alpha v)\} \\ &= [(yz)x]_\nu \{2(R_e - \nu) + 2\nu(1+\alpha) - (\mu + \lambda)\} \\ &= 2[(yz)x]_\nu' + (2\nu(1+\alpha) - (\mu+\lambda))[(yz)x]_\nu.\end{aligned}$$

Así, si llamamos E_1 a la ecuación (5.20) entonces la componente en B_ν de la ecuación E_1^* está dada por :

$$(2\nu(1+\alpha) - (\mu+\lambda) + 2)[(yz)_1 x]_\nu. \tag{5.21}$$

Si intercambiamos x por z en (5.20) tenemos la siguiente ecuación :

$$\begin{aligned}(yx)z\{2R_e - (\nu + \lambda - 2\alpha\mu)\} + 2((yx)e)z - (y'x)z - (x'y)z + 2\alpha(yx)z' = \\ (zy)x\{R_e + (\lambda + \alpha\nu - 2\mu)\} + ((zy)e)x + (y'z)x - 2(z'y)x + \alpha(zy)x' \\ + (xz)y\{R_e + (v + \alpha\lambda - 2\mu)\} + ((xz)e)y + (x'z)y - 2(z'x)y + \alpha(xz)y'.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Ahora :

$$\begin{aligned}
[(yz)x]_\nu \{R_e + (\lambda + \alpha\nu - 2\mu)\} &= [(yz)x]_\nu \{(R_e - \nu) + \nu + (\lambda + \alpha\nu - 2\mu)\} \\
&= [(yz)x]_\nu \{(R_e - \nu) + \nu(1+\alpha) + (\lambda - 2\mu)\} \\
&= [(yz)x]'_\nu + (\nu(1+\alpha) + (\lambda - 2\mu))\,[(yz)x]_\nu .
\end{aligned}$$

Así, si llamamos E_2 a la ecuación (5.22), entonces la componente en B_ν de la ecuación E_1^* está dada por :

$$(\nu(1+\alpha) + (\lambda - 2\mu) + 1)\,[(yz)_1 x]_\nu . \tag{5.23}$$

Recordemos que por la Proposición 4.1.21 tenemos que si $\lambda, \mu \in F$, $\lambda \circ \mu = 1, \lambda \neq 1, \mu \neq 1$ entonces $(\mu \circ \nu) \circ \lambda = \nu$ sí y solamente sí $\nu \in \{1, \lambda, \tau_{\lambda,\mu}\}$.

Podemos enunciar ahora la siguiente proposición :

Proposición 5.2.6 *Sean $\lambda, \mu \in F$, $\lambda \circ \mu = 1$, $\lambda, \mu \neq \pm 1$ tal que $\nu \notin \{1, \lambda, \tau_{\lambda,\mu}\}$. Supongamos además que $\alpha \neq 2$,entonces :*

$$[[yz]_1 x]_\nu = 0.$$

Demostración. Aplicaremos el Lema 5.15 para $C_1 = B_\nu$, $C_2 = B_\lambda$, $C_3 = B_\mu$, $D = 0$. Sean $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$. y consideremos las ecuaciones E_1, E_2 mencionadas en los cálculos previos (ecuaciones (5.20) y (5.22)).

Las ecuaciones lineales determinadas por los términos en B_v en E_1^* y E_2^* se reducen respectivamente a :

$$\begin{aligned}
(2\nu(1+\alpha) - (\mu + \lambda) + 2)\,[(yz)_1\, x]_\nu &= 0, & (5.24)\\
(\nu(1+\alpha) + (\lambda - 2\mu) + 1)\,[(yz)_1 x]_\nu &= 0. & (5.25)
\end{aligned}$$

Luego si multiplicamos la ecuación (5.25) por -2 y la sumamos a (5.24) tenemos que :

$$3(\mu - \lambda)\,[(yz)_1\, x]_\nu = 0.$$

Además , por el Corolario 4.16 tenemos que, sí $\alpha \neq 2$ y $\lambda = \mu$ entonces $\lambda \circ \mu = 1$ sí y sólo sí $\lambda \in \{1, -1\}$. Con lo que tenemos finalmente el resultado buscado. ∎

En el caso de $\alpha = -1$ se construye un ideal en la álgebra, a partir del conjunto $B = \sum_{\lambda \neq 0,1} B_\lambda$. A continuación estudiaremos el comportamiento de este ideal en el caso general en que $\alpha \in F$ es arbitrario, para obtener así ideas sobre una posible generalización.

Sea $x_\mu \in B_\mu$ y $B = \sum_{\lambda \neq 0,1} B_\lambda$ si $b \in B$ entonces :

$$x_\mu b = \sum_{\lambda \neq 0,1} x_\mu [b]_\lambda = \sum_{\lambda \neq 0,1} \left\{ (x_\mu [b]_\lambda)_{\mu \circ \lambda} + (x_\mu [b]_\lambda)_{\mu \hat{\circ} \lambda} \right\}.$$

Si $\mu \neq 0,1$ entonces $x_\mu \in B$ luego $[x_\mu b]_1 \in [BB]_1$.

Si $\mu = 0$ entonces $\mu \circ \lambda = 1$ (por la Proposición 4.1.17 $\lambda^2 + \alpha\lambda\mu + \mu^2 = 2 + \alpha$) si y sólo si :

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 2 + \alpha, \\ \lambda &= \pm\sqrt{2+\alpha} := \pm\lambda_\alpha. \end{aligned}$$

Luego :

$$[x_0 b]_1 \in [B_0 B_{\lambda_\alpha}]_1 + [B_0 B_{-\lambda_\alpha}]_1.$$

En el caso particular en que $\alpha = 1$ tenemos :

$$[x_0 b]_1 \in [B_0 B_{-\lambda_\alpha}]_1,$$

(ya que b no tiene componente en B_1).

Sí $\mu = 1$ entonces $\mu \circ \lambda = 1$ si y sólo si :

$$\lambda \in \{1, -(1+\alpha)\}.$$

Así :

$$[x_1 b]_1 \in [B_1 B_{-(1+\alpha)}]_1.$$

Observación 5.2.7 *En el caso de que $\alpha = -1$ no aparece componente en B_1 ya que b no tiene componente en B_0.*

De lo anterior se tiene :

$$[AB]_1 \subseteq [BB]_1 + [B_0 B_{\lambda_\alpha}]_1 + [B_0 B_{-\lambda_\alpha}]_1 + [B_1 B_{-(1+\alpha)}]_1.$$

El ánalisis anterior, y el método utilizado en [9], nos motiva a considerar $B = \sum_{\lambda \neq 1, -(1+\alpha)} B_\lambda$ y la relación :

$$([AB]_1 + [AB]_{-(1+\alpha)})(B_1 + B_{-(1+\alpha)}) \subseteq B + AB.$$

Observación 5.2.8 *Si la relación anterior es válida en A entonces $B + AB$ es ideal de A.*

En efecto :

$$A(B + AB) = \left(B + (B_1 + B_{-(1+\alpha)})\right)\left(B + [AB]_0 + [AB]_1 + \sum_{\lambda \notin \{1, -(1+\alpha)\}} [AB]_\lambda\right),$$

y además

$$\sum_{\lambda \notin \{1, -(1+\alpha)\}} [AB]_\lambda \subseteq B.$$

A continuación mostramos los elementos necesarios para demostrar la relación de la Observación 5.2.8 utilizando el Lema 5.2.1.

Sea $x_\mu \in B_\mu$ y $B = \sum_{\lambda \neq 1, -(1+\alpha)} B_\lambda$ si $b \in B$ entonces :

Si $\mu \neq -(1+\alpha), 1$ entonces $x_\mu \in B$ luego $[x_\mu b]_1 \in [BB]_1$.

Al igual que lo anterior tenemos que :

Sí $\mu = 1$, $\mu \circ \lambda = 1$ si y sólo si :

$$\lambda \in \{1, -(1+\alpha)\}.$$

Con lo que $x_1 b$ no agrega componentes en B_1.

Sí $\mu = -(1+\alpha)$ entonces :

$$\lambda^2 - \alpha(1+\alpha)\lambda + (1+\alpha)^2 = 2 + \alpha.$$

Luego :

$$\lambda \in \left\{\alpha^2 + \alpha - 1, 1\right\}.$$

Así $[x_\mu b]_1 \in [B_{-(1+\alpha)} B_{\alpha^2+\alpha-1}]_1$.

Por lo tanto descomponiendo cada elemento $a \in A$ en la suma de sus componentes tenemos :

$$[AB]_1 \subseteq [BB]_1 + [B_{-(1+\alpha)} B_{\alpha^2+\alpha-1}]_1.$$

Usando el Lema 5.2.1 se demuestra lo siguiente :

1. $[AB]_1 B_1 \subseteq B + AB$.

2. $[BB]_1 B_{-(1+\alpha)} \subseteq B + AB$.

3. $[B_{-(1+\alpha)} B_{\alpha^2+\alpha-1}]_1 B_{-(1+\alpha)} \subseteq B + AB$.

Para esta demostración, los espacios C_i y D a considerar están indicados en la siguiente tabla :

	C_1	C_2	C_3	D	
1	B_1	B_λ	B_μ	$B+AB$	λ o $\mu = 1$, $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 1, -(\alpha+1)$
2	$B_{-(1+\alpha)}$	B_λ	B_μ	$B+AB$	λ o $\mu = 1$, $\lambda, \mu \notin \{1, -(\alpha+1)\}$
3	$B_{-(1+\alpha)}$	$B_{\alpha^2+\alpha-1}$	$B_{-(1+\alpha)}$	$B+AB$	

En los 3 casos, las ecuaciones E_i utilizadas se obtienen a partir de la ecuación (10) haciendo los reemplazos correspondientes y de la ecuación obtenida al intercambiar variables en la ecuación (5.11).

Además para $\alpha \neq -2$:

$$\begin{aligned}(\lambda \circ \mu) \circ 1 &= 1 \neq -(1+\alpha) = 1 - \alpha - 2\lambda \circ \mu, \\ (\lambda \circ \mu) \circ -(1+\alpha) &= -(1+\alpha) \neq -1 + \alpha + \alpha^2 = 1 + \alpha(1+\alpha) - 2(\lambda \circ \mu).\end{aligned}$$

También tenemos :

$$(1+\alpha)^2 - \alpha(1+\alpha)\left(\alpha^2+\alpha-1\right) + \left(\alpha^2+\alpha-1\right)^2 = \alpha + 2,$$

luego por la Proposición 4.1.17 :

$$-(1+\alpha) \circ \left(\alpha^2+\alpha-1\right) = 1$$

Así, si $\alpha \neq -2$ entonces :

$$\begin{aligned}\left(-(1+\alpha) \circ \left(\alpha^2+\alpha-1\right)\right) \circ -(1+\alpha) &= \\ -(1+\alpha) &\neq \left(\alpha^2+\alpha-1\right) \\ &= 1 + \alpha(1+\alpha) - 2\left(-(1+\alpha) \circ \left(\alpha^2+\alpha-1\right)\right).\end{aligned}$$

Con lo que tenemos que en los 3 casos, la condición (B)-2 del Lema 5.2.1 $(\lambda_i \circ \lambda_j) \circ \lambda_k \neq 1 - \alpha\lambda_k - 2\lambda_i \circ \lambda_j$ se cumple.

Si suponemos además que A es una álgebra simple tenemos finalmente el resultado mencionado al inicio de esta sección :

Teorema 5.2.9 *Si A es una álgebra conmutativa simple sobre un cuerpo F que satisface la identidad (5.1) con $\gamma \neq 0$ y $\alpha = \frac{4\beta}{\gamma}$ tal que A posee un idempotente no nulo e y existe un polinomio que anula a R_e, entonces :*

(*i*) $A = B_1 + B_{-(1+\alpha)}$ *ó*

(*ii*) $A = BA + B$ *donde* $B = \sum_{\lambda \neq 1, -(1+\alpha)} B_\lambda$.

Demostración. Con lo anterior se demuestra que $BA + B$ es un ideal de A, luego si A es una álgebra simple, entonces $BA + B = 0$ ó $BA + B = A$ y así se obtienen (*i*) y (*ii*) respectivamente. ■

Observación 5.2.10 *En el caso (i), si $A = BA + B$ y e es un idempotente no nulo en A entonces como $e \in B_1$:*

$$e = \sum_{\lambda,\mu \in F' \subseteq F} [y_\lambda x_\mu]_1 \;\; \textit{con } \lambda \circ \mu = 1 \;, \; \mu \notin \{-(\alpha+1), 1\} \;\; \textit{y } |F'| \textit{ finito.}$$

Podemos considerar $x \in B_\nu$, con $\nu \in F$ escogido según las Proposiciones 5.2.4 y 5.2.6 de manera que :

$$xe = \sum_{\lambda,\mu \in F' \subseteq F} \left[[y_\lambda x_\mu]_1 \, x\right]_v = 0.$$

Y así $x \in B_0$ para ciertos v, con lo que tenemos :

$$A = \sum_{\nu} B_\nu,$$

por ejemplo en el caso de $\alpha = -1$ se tiene $A = B_0 + B_1 + B_{-1}$.

Capítulo 6

Resultados adicionales y comentarios finales.

6.1. Otras identidades de Grado 4.

Recordemos que en el resultado demostrado por L.Carini, I.R.Hentzel, Piacentini-Cattaneo [3] que enunciamos en la introducción de este trabajo se muestran las siguientes identidades polinomiales de grado 4 :

$$\alpha(x^2x^2) + \beta x^4 = 0 \tag{6.1}$$

$$2\beta\left\{(xy)^2 - x^2y^2\right\} + \gamma\left\{((xy)x)y + ((xy)y)x - (y^2x)x - (x^2y)y\right\} = 0 \tag{6.2}$$

$$\beta\left\{(x^2y)x - ((xy)x)x\right\} + \gamma\left\{x^3y - ((xy)x)x\right\} = 0 \tag{6.3}$$

$$((xy)z)t - ((xy)t)z + ((yt)x)z - ((yt)z)x + ((yz)t)x - ((yz)x)t = 0 \tag{6.4}$$

Adicionalmente, se demuestra en [3] que una álgebra conmutativa simple, que satisface la identidad (6.3) bajo ciertas condiciones para β y γ debe ser asociativa.

En el Capítulo 2 demostramos en álgebras que satisfacen la identidad (6.3) la existencia de el ideal $Alt(A)$ para el cual se cumple que $A/Alt(A)$ es una álgebra alternativa (asociativa ya que $car(F) \neq 3$ [13]). Más aún usando la misma técnica para demostrar lo anterior, logramos obtener el siguiente resultado para aquellas álgebras que satisfacen la identidad (6.4) :

Proposición 6.1.1 *Sea A una álgebra conmutativa sobre un cuerpo F con $car(F) \neq 2$, tal que A satisface la identidad (6.4). Sea $Ass[A]$ el subespacio de A generado por los elementos de la forma (a, b, c) con $a, b, c \in A$, entonces $Ass[A]$ es un ideal de A.*

Demostración. En términos del asociador $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$, podemos escribir la identidad (6.4) como :

$$(z, y, w)\, x + (x, y, z)\, w + (w, y, x)\, z = 0 \tag{6.5}$$

Recordemos además la Identidad de Teichmüller dada por :

$$x(y, z, w) + (x, y, z)w = (xy, z, w) - (x, yz, w) + (x, y, zw)$$

De la identidad (6.5) tenemos :

$$(w, y, x)\, z = -(x, y, z)\, w - (z, y, w)\, x \tag{6.6}$$

Además, usando la Identidad de Teichmüller se tiene :

$$\begin{aligned} x(y, z, w) &= -(x, y, z)w + (xy, z, w) - (x, yz, w) + (x, y, zw) \\ &\equiv -(x, y, z)w \ \mathrm{mod}(Ass[A]) \end{aligned} \tag{6.7}$$

Así de (6.6) y (6.7) :

$$\begin{aligned} (w, y, x)\, z &= -(x, y, z)\, w - (z, y, w)\, x \\ &\equiv x(y, z, w) - (z, y, w)x \ \mathrm{mod}(Ass[A]) \\ &\equiv x((yz)w) - x(y(zw)) - ((yz)w)x + (z(yw))x \ \mathrm{mod}(Ass[A]) \\ &\equiv (z(yw))x - x(y(zw)) \ \mathrm{mod}(Ass[A]) \\ &\equiv x(y, w, z) \ \mathrm{mod}(Ass[A]) \end{aligned} \tag{6.8}$$

Por otro lado, intercambiando z por w en la Identidad de Teichmüller :

$$\begin{aligned} x(y,w,z) &= -(x,y,w)z + (xy,w,z) - (x,yw,z) + (x,y,zw) \\ &\equiv -(x,y,w)z \mod(Ass[A]) \end{aligned} \tag{6.9}$$

Luego por (6.5) y (6.9) :

$$\begin{aligned} (x,y,z)\,w &= -(w,y,x)\,z - (z,y,w)\,x \\ &= x(y,w,z) - (z,y,w)\,x \mod(Ass[A]) \end{aligned} \tag{6.10}$$

Finalmente reemplazamos en (6.8) y (6.10) en (6.5) tenemos :

$$2x(y,w,z) \equiv 0 \mod(Ass[A])$$

Entonces si $car(F) \neq 2$:

$$x(y,w,z) \equiv 0 \mod(Ass[A])$$

Y así :

$$A(Ass[A]) \subseteq Ass[A]$$

Por lo tanto $Ass[A]$ es ideal de A. ■

Hemos probado entonces que para una álgebra A que satisface la identidad (6.2) (bajo ciertas condiciones sobre los escalares que definen la identidad) ó la identidad (6.4) la existencia de un ideal J tal que A/J es una álgebra asociativa, lo que sumado al resultado de L.Carini, I.R.Hentzel, Piacentini-Cattaneo sobre las álgebras que satisfacen la identidad (6.3) puede ser evidencia suficiente para conjeturar que las álgebras simples que satisfacen alguna de las identidades (6.2) y (6.4) deben asociativas. Respecto de la identidad (6.1) no conocemos algún resultado de este tipo.

En otro aspecto para el cual encontramos puntos en común en las álgebras que satisfacen la identidad (6.2), respecto de las demás identidades de grado 4, dice relación con el Capítulo 3. en el cual probamos la existencia de una forma traza. Al igual que en la identidad (6.3) [3] nos encontramos con que esta forma traza, esta definida a partir de una forma bilineal obtenida como combinación lineal de los operadores R_{xy} y R_xR_y.

Cabe entonces preguntarse, si será posible, en las demás identidades de grado 4, construir una forma traza de la misma manera. Intentando dar respuesta a esta pregunta, logramos obtener el siguiente resultado :

Proposición 6.1.2 *Sea A una álgebra conmutativa que satisface la identidad (6.4). entonces :*

$$\tau(x,y) = Tr(B(x,y)) \quad donde \quad B(x,y) = R_{xy} - R_xR_y,$$

es una forma traza en A.

Demostración. Claramente por la definición de τ y las propiedades de la traza de una transformación lineal, τ es bilineal y simétrica.

A continuación probaremos que τ es asociativa, esto es :

$$\tau(xz,y) = \tau(x,yz) \text{para todo} x,y,z \in A.$$

Reescribimos la identidad (6.4) en términos del operador multiplicación R_a y tenemos :

$$R_{(xy)z} - R_{xy}R_z + R_yR_xR_z - R_yR_zR_x + R_{yz}R_x - R_{(yz)x} = 0. \tag{6.11}$$

Cambiamos y por z en (6.11)

$$R_{(xz)y} - R_{xz}R_y + R_zR_xR_y - R_zR_yR_x + R_{yz}R_x - R_{(yz)x} = 0. \tag{6.12}$$

Cambiamos x por z en (6.12)

$$R_{(xz)y} - R_{xz}R_y + R_xR_zR_y - R_xR_yR_z + R_{yx}R_z - R_{(yx)z} = 0. \tag{6.13}$$

Restando (6.11) y (6.13) tenemos :

$$\begin{aligned} &R_{(xy)z} - R_{xy}R_z + R_yR_xR_z - R_yR_zR_x + R_{yz}R_x - R_{(yz)x} \\ &\qquad - \left\{R_{(xz)y} - R_{xz}R_y + R_xR_zR_y - R_xR_yR_z + R_{yx}R_z - R_{(yx)z}\right\} = 0. \end{aligned}$$

Reagrupando términos se tiene :

$$\begin{aligned} 2\left\{R_{(xy)z} - R_{xy}R_z\right\} &= \left\{R_{(yz)x} - R_{yz}R_x\right\} + \left\{R_{(xz)y} - R_{xz}R_y\right\} \\ &\quad - \left\{R_yR_xR_z - R_xR_zR_y + R_xR_yR_z - R_yR_zR_x\right\}, \end{aligned}$$

esto es :

$$\begin{aligned} 2\left\{R_{(xy)z} - R_{xy}R_z\right\} &= \left\{R_{(yz)x} - R_{yz}R_x\right\} + \left\{R_{(xz)y} - R_{xz}R_y\right\} \\ &\quad - [R_y, R_xR_z] - [R_x, R_yR_z]. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Aplicando traza en (6.14) y usando el hecho de que la traza de un conmutador es cero, tenemos que :

$$2\tau(xy,z) = \tau(yz,x) + \tau(xz,y). \tag{6.15}$$

Cambiamos y por z en (6.15) obtenemos la ecuación :

$$2\tau(xz,y) = \tau(yz,x) + \tau(xy,z). \tag{6.16}$$

Restando (6.15) y (6.16) se tiene :

$$\tau(xy,z) = \tau(xz,y). \tag{6.17}$$

Cambiamos x por y en (6.17) y usamos la simetría de τ para concluir que :

$$\tau(xy,z) = \tau(yz,x) = \tau(x,yz),$$

y así $\tau(xz,y) = \tau(x,yz)$ para todo $x,y,z \in A$. ■

En relación a la identidad (6.1) no logramos obtener una forma traza de esta manera, pero sin embargo, pudimos obtener alguna información extra sobre estas álgebras suponiendo que además de la identidad (6.1) poseen una forma traza no degenerada. El resultado es el siguiente :

Proposición 6.1.3 *Sea A una álgebra que satisface la identidad (6.1). Si $(\alpha+\beta)(4\alpha-\beta) \neq 0$ y A posee una forma traza no degenerada, entonces $x^4 = 0$ para todo $x \in A$.*

Demostración. Linealizando la identidad (6.1) tenemos :

$$4\alpha(xy)x^2 + \beta yx^3 + \beta x(yx^2) + 2\beta x(x(xy)) = 0,$$

luego si $\langle , \rangle$ es una forma traza en A para todo $x, y, z \in A$ tenemos :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle z, 4\alpha(xy)x^2 + \beta yx^3 + \beta x(yx^2) + 2\beta x(x(xy)) \rangle \\ &= \langle 4\alpha\left(x^2z\right)x + \beta zx^3 + \beta\left(xz\right)x^2 + 2\beta x(x(xz)), y \rangle . \end{aligned}$$

Entonces, como $\langle , \rangle$ es no degenerada, para todo $x, z \in A$:

$$4\alpha\left(x^2z\right)x + \beta zx^3 + \beta\left(xz\right)x^2 + 2\beta x(x(xz)) = 0.$$

En particular poniendo $z = x$ se tiene :

$$(4\alpha + 3\beta)\,x^4 + \beta x^2x^2 = 0.$$

Finalmente, como A satisface la identidad (6.1), y :

$$\begin{vmatrix} 4\alpha + 3\beta & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = 4\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2 = (\alpha+\beta)(4\alpha-\beta) \neq 0,$$

tenemos que :

$$x^4 = 0 \text{ para todo } x \in A.$$

■

6.2. Comentarios Finales.

Una de las principales dificultades que presenta el estudio de la identidad (6.2), es la construcción de ejemplos. Es interesante encontrar ejemplos distintos de aquellos que pueden ser obtenidos utilizando el programa Albert [7]; ya que pese a que se pueden encontrar álgebras distintas en cuanto a su dimensión e identidades, su estructura es similar.

En relación a este tema, un problema aún sin respuesta; es lograr la construcción de un ejemplo, preferentemente de dimensión finita, que cumpla la identidad (6.1) y cuya tabla de multiplicación dependa de los escalares γ, β. Más específicamente, construir una álgebra $A_{\beta,\gamma}$, sobre un cuerpo F, con una base $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ y cuyo producto este definido de la forma $u_i u_j = \alpha_{ij}(\gamma, \beta) u_k$ (donde $\alpha_{ij}(\gamma, \beta) : \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\} \to F$), de tal manera que en $A_{\beta,\gamma}$ sólo sea válida la identidad (6.1) para los β y γ indicados.

Otro punto a analizar, dice relación con las preguntas clásicas acerca de la nilpotencia y solubilidad en álgebras no asociativas. La mayoría de las identidades obtenidas en el segundo capítulo estan motivadas por las demostraciones clásicas de Álgebras de Jordan y Álgebra Alternativas. ¿Es cierto, que si A es una álgebra de dimension finita y soluble, que satisface la identidad (6.1), entonces A^* es nilpotente; o que toda nilálgebra de dimensión finita, que satisface la identidad (6.1) es nilpotente?. Los ejemplos obtenidos con el programa Albert, parecen indicar que la respuesta a estas preguntas sería afirmativa, pero sin embargo no fue posible aplicar los métodos ya conocidos y utilizados en otras variedades de álgebras.

Respecto de las formas trazas, es interesante, lograr encontrar condiciones para que la forma traza encontrada, sea no degenerada. Y en caso de encontrar una respuesta afirmativa, poder verificar si la condición $2\beta + \gamma \neq 0$ es necesaria y suficiente para que se cumpla la identidad $x^3 y - x(x(xy)) = 0$.

Finalmente señalamos que todavía hay posibles aplicaciones de la descomposición de Peirce, profundizando un poco más en el estudio de las álgebras simples que satisfacen la identidad (6.1) o bajo algún otro tipo de hipótesis. En [9] se utiliza la descomposición de Peirce, para demostrar que una álgebra simple, de dimensión finita que satisface la identidad (6.1) para $\beta = \frac{1}{2}, \gamma = -2$ y tal que $A = A = B_1 + B_0$ es asociativa.

Hemos logrado en el caso general $\gamma, \beta \in F$, obtener la descomposición $A = B_1 + B_{-(1+\alpha)}$, pero sin embargo no es posible utilizar el mismo argumento usado en [9] para obtener la asociatividad.

Se hace necesario entonces hallar algún contraejemplo o utilizar otro argumento, aunque el hecho de haber demostrado en estas álgebras,al igual que en el caso estudiado en [9], la existencia del ideal $Alt[A]$ hace pensar que el resultado sería válido también en el caso general, a excepción posiblemente de alguna restricción sobre los escalares γ, β.

Bibliografía

[1] A.A.Albert. "Structures of Algebras" AMS Colloquium Publications Vol 24 (2003).

[2] M.Arenas, A.Labra, "On nilpotency of Generalizad Almost-Jordan algebras", Algebra Colloquium, in press (2007).

[3] L.Carini, I.R.Hentzel, Piacentini-Cattaneo "Degree four identities not implied by commutativity", Comm. in Algebra 16 (2) 339-356 (1988).

[4] P.M.Cohn, "Universal Algebra", Harper international student reprint (1965).

[5] I.Correa, I.R.Hentzel, A.Labra "On the nilpotence of the multiplication operator in commutative right nil algebras", Comm. Algebra 30 , no. 7, 3473–3488 (2002).

[6] I.R.Hentzel, LA Peresi "A variety containing Jordan and pseudo-composition algebras", East-West J. Math. 6:67-84 (2004).

[7] P.D.Jacobs, S.V.Muddanna, A.J.Offutt "A computer algebra system for nonassociative identities", Hadronic mechanics and nonpotential interactions, Part 1 (Cedar Falls, IA, 1990), 185–195, Nova Sci. Publ, Commack, NY (1992).

[8] K. Mc Crimmon "A Taste of Jordan Algebras" Universitext Springer-Verlag New York, Inc (2004).

[9] J.M.Osborn "Commutative non-associative algebras and identities of degree four", Canad.J.Math 20, 769-794 (1968).

[10] J.M.Osborn "Varieties of Algebras" Advances in mathematics 8, 163-329 (1972).

[11] C.Reyes, A.Labra "On Polynomial identities on train algebras of rank 3", East-West Journal of Mathematics VOL.3 (2):195-200 (2001).

[12] R.D.Schafer "An introduction to nonassociative algebras" Academic Press Inc (1966).

[13] K.A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko,I. P. Shestakov, A. I. Shirshov "Rings that are nearly associative" Pure and Applied Mathematics Vol 104 (1982).