

UCH-FC
DOC-NAT
C796
c.1

**ESTUDIO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES IMPULSIVAS
A TIEMPOS VARIABLES**

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por
Fernando Córdova Lepe



Diciembre de 2003

Director de Tesis: Dr. Manuel Pinto Jiménez

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE DOCTORADO

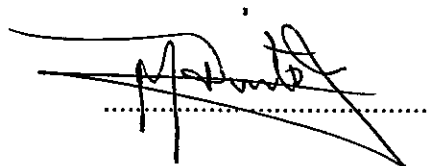
Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato.

FERNANDO DANIEL CÓRDOVA LEPE

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemática en el exámen de Defensa de Tesis rendido el día

Director de Tesis:

Dr. Manuel Pinto

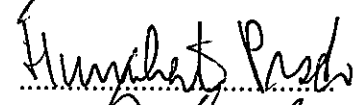


Comisión de Evaluación de la Tesis:

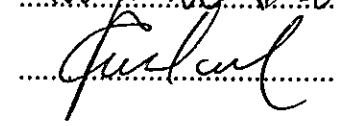
Dr. Rodrigo Bamón
Presidente



Dr. Humberto Prado



Dr. Víctor Cortés



*Al que dió un aliento sincero,
a quien celebra con ánimo propio y
a todo aquél que labra la conciencia.*



Agradecimientos

Daré los siguientes agradecimientos a aquellos que hicieron posible el desarrollo de este doctorado:

A CONICYT por haberme otorgado una Beca de Doctorado durante los cuatro primeros años.

A la Universidad Tecnológica Metropolitana, en especial a Andrés Carrillo, Director del Departamento de Matemática, por dar las facilidades suficientes para poder llegar a término, y a su antecesor, Carlos Sepulveda, por confiar en mis iniciativas y otorgarme un espacio para el desarrollo y la reflexión académica.

A mi Director de Tesis, Dr. Manuel Pinto, por su paciencia infinita y apoyo permanente.

A la Comisión de Evaluación, en especial al Dr. Rodrigo Bamón, por sus constructivas indicaciones.

Al Dr. Miguel Montenegro por su ayuda con el \LaTeX .

A mis compañeras de cada día, Pamela y Valentina, por el irrecuperable tiempo ido.



Índice General



| | |
|--|-----------|
| Resumen | vii |
| Abstract | viii |
| Introducción | 1 |
| 1 PROCESOS Y ECUACIONES DIFERENCIALES IMPULSIVAS | 4 |
| 1.1 Descripción de un proceso impulsivo | 4 |
| 1.2 Definición de ecuación y solución | 5 |
| 1.3 Tipos de E.D.I. | 7 |
| 1.3.1 Las ecuaciones diferenciales y las en diferencias son E.D.I. | 7 |
| 1.3.2 E.D.I. autónomas | 8 |
| 1.3.3 E.D.I. a tiempos fijos | 8 |
| 1.3.4 E.D.I. a tiempos variables | 8 |
| 1.4 Fenomenologías de las E.D.I. a tiempos variables | 9 |
| 1.4.1 Presencia de pulsaciones | 12 |
| 1.4.2 No existencia de soluciones | 13 |
| 1.4.3 Confluencia de soluciones | 13 |
| 1.4.4 No continuabilidad de soluciones | 13 |
| 2 EXISTENCIA Y PROLONGACIÓN DE SOLUCIONES | 15 |
| 2.1 Ecuación y definición de solución | 15 |
| 2.2 Representación integro-sumaria | 16 |
| 2.3 Una condición para existencia local | 18 |
| 2.4 Prolongación de soluciones | 21 |
| 2.5 Ausencia de pulsaciones | 22 |
| 2.6 Fijación de tiempos de impulso vía cambio de variable | 24 |
| 3 COMPACIDAD Y APROXIMACIÓN DE SOLUCIONES | 29 |
| 3.1 Definiciones previas | 29 |
| 3.2 Compacidad de las funciones continuas a pedazos | 31 |
| 3.3 Existencia de soluciones vía aproximaciones | 35 |
| 4 E.D.I. DE CAMPO E IMPULSO LINEAL | 42 |
| 4.1 Definiciones | 42 |
| 4.2 Representación de las soluciones de un S.L.H. | 43 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.3 | Un teorema de existencia | 45 |
| 4.4 | Fórmula de variación de parámetros | 50 |
| 4.5 | Acotamiento de soluciones | 53 |
| 4.5.1 | Un ejemplo ilustrativo | 53 |
| 4.5.2 | Un teorema de acotamiento | 55 |
| 4.5.3 | Desigualdad de Gronwall | 56 |
| 4.5.4 | Acotamiento, homogénea v/s perturbada | 57 |
| 5 | ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS IMPULSIVOS | 60 |
| 5.1 | Observaciones y definiciones | 60 |
| 5.2 | Primer teorema de estabilidad a nivel de impulsos | 64 |
| 5.3 | Segundo teorema de estabilidad a nivel de impulsos | 68 |
| 5.4 | Estabilidad en el sentido de Lyapunov | 72 |
| 5.5 | Estabilidad en casos lineales | 74 |
| 5.6 | Estabilidad de E.D.I. con sucesión uniforme de hiperplanos de impulso | 75 |
| 6 | APLICACIONES A LA BIOECONOMÍA MATEMÁTICA | 80 |
| 6.1 | Introducción | 80 |
| 6.2 | Cosecha a nivel predeterminado de biomasa (E.D.I. autónoma) | 82 |
| 6.3 | Cosecha en tiempos predeterminados (E.D.I. a tiempos fijos) | 83 |
| 6.4 | Cosecha en tiempos según valor de la biomasa (proceso impulsivo a tiempos variables) | 88 |





Resumen

Este trabajo es un estudio de las ecuaciones diferenciales con efecto impulsivo en tiempos variables. Algunos de los comportamientos dinámicos que las diferencian de aquellas con impulsos a tiempos fijos son ejemplificados, pág. 9. Se presenta un teorema de existencia, uno de prolongación de soluciones y otro de ausencia de pulsaciones, pág. 20, 21 y 22. Se prueba existencia de soluciones mediante un proceso de paso al límite de una sucesión de funciones aproximantes, pág. 40, proceso justificado mediante un resultado de compacidad, pág. 34, donde nociones nuevas de convergencia y equicontinuidad es necesario introducir, pág. 30. Se construye una teoría introductoria a las ecuaciones de campo e impulso lineal, esto es: un teorema de representación de soluciones, pág. 43, y otro de existencia (explícita) de soluciones para los sistemas homogéneos, pág. 48; una fórmula de variación de parámetros para las no homogéneas, pág. 51; y algunos ejemplos y resultados sobre condiciones para el acotamiento de sus soluciones, pág. 53. También se introducen los conceptos de estabilidad, pág. 62, y estabilidad a nivel de los puntos de impulso, pág. 61, y se estudian sus relaciones. Se demuestran dos resultados que fijan hipótesis generales para la estabilidad de los puntos de impulso, pág. 67 y 71, y un tercero para implicar estabilidad de soluciones, pág. 72. Finalmente se muestran algunas aplicaciones a la explotación sustentable de los recursos autoregenerativos, pág. 80.

Abstract



This work is a study of differential equations with impulses at variable times. Some of the dynamic behaviors that differentiate them of those with impulses at fixed times are illustrated, p. 9. It is present an existence theorem, a continuity of solutions theorem and other of absence of phenomenon of beating, p. 20-22. We prove existence of solutions by means of a process of aproximation, p. 40, that is justified through a theorem of compactness, p. 34, where new notions of convergence and equicontinuity for piecewise continuous functions is necessary to introduce, p. 30. An introductory theory of linear systems (linear field and linear impulses) is built, i.e., a representation theorem of the matrix solution, p. 43; an explicit existence theorem for homogeneous systems, p. 48; a variation of parameter formula, p. 51; and conditions for boundedness of solutions, p. 53. Also the concepts of standar stability, p. 62, and a stability to the level of impulse points, p. 61, and its relations are studied. Two results establishing generals hypothesis for the stability of impulse points are shown, p. 67 & 71, also other result about stability of solutions, p. 72. Finally, some applications to the sustainable harvest of renewable resources are developed, p. 80.



Introducción

Cuando la dinámica de un fenómeno admite ser modelada vía una variable numérica, con valores en \mathbb{R}^n , siguiendo una trayectoria continua que en ciertos instantes presenta bruscos cambios de estado, entonces estamos frente a lo que calificamos como fenómeno impulsivo. Además si esta variación está gobernada por una ecuación diferencial ordinaria, pero en cada instante que la variable se discontinúa actúa una ley que determina el impulso, entonces estamos en presencia de un proceso impulsivo. A la conjunción de la ley diferencial de evolución, la ley que determina los tiempos de impulso y la que define el salto en la variable se le llama ecuación diferencial impulsiva.

El objetivo central de esta tesis es presentar un estudio general para una clase amplia de estas ecuaciones, las de efecto impulsivo en instantes en que la variable estado satisface cierta relación espacio-temporal predeterminada. Nos preocupamos de la definición del concepto de solución, pasando por las problemáticas de existencia y prolongación de soluciones, damos algunas representaciones y métodos para la resolución explícita y aproximada de ecuaciones, y hacemos un análisis de estabilidad de soluciones. Otra finalidad es mostrar algunas aplicaciones en dinámica de poblaciones.

Procesos impulsivos han sido considerados desde hace bastante tiempo. En los comienzos de la mecánica no lineal, según informa Samoilenko y Perestyuk [32], aparece en 1937 un trabajo de Krulyov y Bogolyubov sobre modelación de un mecanismo de relojería que incluye un efecto impulsivo.

La clase de ecuaciones diferenciales impulsivas que en este trabajo es tratada debe su caracterización a Mil'man y Myshkis, [23] y [24], al comienzo de la década de los sesenta. El estudio del control automático con su vertiente impulsiva actualizó el interés por estos procesos. Probablemente la Escuela de Mecánica No Lineal de Kiev es el referente principal de los trabajos más sistemáticos en el área. Otra línea para el tratamiento de estas ecuaciones, que incluye los impulsos como funciones generalizadas, se podría desarrollar a partir del trabajo de Halanay y Wexler [17], año 1968, que restringidos a impulsos en tiempos fijos podemos encontrar en [26] y [35]. Más recientemente, en conversación directa, el profesor R. Rebolledo sugiere pensar estos procesos como ecuaciones estocásticas sin probabilidad.

Nuestra atención se concentra en los procesos para los cuales la variable estado $x(t)$, $t > 0$, transita en algún $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ según una regla diferencial ordinaria $x'(t) = f(t, x(t))$ y se impulsa en un instante $t > 0$, desde $x(t)$ a $I_k(x(t))$, I_k es la k -ésima función de salto, si $\tau_k(x(t)) = t$, para alguna sucesión de funciones continuas $\tau_k : \Omega \rightarrow (0, \infty)$, tal que $\{\tau_k(x)\}_{k \geq 1}$ es una sucesión estrictamente creciente y no acotada, para todo $x \in \Omega$. Esta clase se conoce con el nombre de ecuación diferencial impulsiva en tiempos variables.

El Capítulo 1 es una introducción a la teoría de ecuaciones diferenciales impulsivas. Siguiendo las definiciones de Perestyuk y Samoilenko [27] revisamos la descripción general de

un proceso impulsivo, mostramos que las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones en diferencias (Lema 1) se pueden pensar como casos particulares de las impulsivas, y damos una clasificación de estos procesos según sean determinados los instantes de impulso. Mediante ejemplos se exhiben los principales comportamientos dinámicos que distinguen a las soluciones de las ecuaciones con impulsos en tiempos variables con respecto a aquellas con tiempos de impulso predeterminados, esto es, τ_k es una función constante, para todo $k \geq 1$. Estas últimas presentan una teoría bastante desarrollada, que está lejos de ser el caso del impulso en tiempos variables. Mostramos, ver 1.4., que: a pesar de la continuidad del campo y de las funciones de salto, no necesariamente existen soluciones; que a cada función τ_k , $k \geq 1$, no necesariamente le corresponde un tiempo de impulso para una solución, estos pueden incluso ser infinitos; que los instantes de impulso se pueden acumular en un tiempo finito; y/o que dos soluciones inicialmente distintas puedan confluir a una sola después de un tiempo.

En el Capítulo 2 delimitamos las ecuaciones impulsivas que nos interesa estudiar y definimos lo que se entenderá por solución. Se presenta un equivalente integral (Lema 2 y Lema 3) al problema de valor inicial con impulso en tiempo variable. Entregamos un significado geométrico y mejoramos (Teorema 1) la hipótesis introducida por Hu y Lakshmikantham en [18],

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x)f(t, x) \neq 1, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad k \geq 1,$$

para la existencia de soluciones. Caracterizamos las soluciones prolongables (Teorema 2) y también se muestra (Teorema 3) una condición para la ausencia de pulsaciones algo más general y natural que las conocidas, en particular que la primera dada por Perestyuk y Samoilenko en [28]. Finalmente si la sucesión $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$ es tal que $\tau_{k+1} - \tau_k$ es constante para todo $k \geq 1$, damos un cambio de variable (Teorema 4) que fija los tiempos de impulso.

El Capítulo 3 está dirigido a la construcción y justificación de un método de aproximación de soluciones. Como las soluciones de las ecuaciones diferenciales impulsivas a tiempos variables son funciones continuas a pedazos que no presentan en general sus discontinuidades en los mismos instantes, la comparación entre ellas se complica de manera natural, nuevas conceptualizaciones son necesarias. Para esta clase de funciones se construye un teorema de compacidad, Teorema 5. Necesario es introducir (Definiciones 3-6) nuevos conceptos de cercanía, convergencia y equicontinuidad. Aplicación de este resultado es un teorema de existencia de soluciones (Teorema 6) vía un proceso de paso al límite de soluciones aproximantes, aunque la literatura muestra variados resultados de existencia, este quizás sea de los primeros vía aproximaciones.

En el Capítulo 4, ya que no se conocen trabajos enfocados a dar las bases de una teoría de las ecuaciones impulsivas de campo lineal y funciones de salto lineales, se intenta realizar un aporte en esa dirección. Primeramente se consigue una representación (Lema 10) para las soluciones de los sistemas homogéneos. Mediante un adecuado cambio de variables (Teorema 7) logramos la expresión explícita de las soluciones para este tipo de ecuaciones, se ilustra su potencial con algunos ejemplos. Para el caso no homogéneo se muestra (Teorema 8) una fórmula de variación de parámetros que generaliza a impulso en tiempos variables la fórmula introducida por Bainov y Simeonov, [3], que está limitada a tiempos de impulsos fijos. Se finaliza con un estudio revelador de la dependencia del comportamiento al infinito de las soluciones respecto a la distribución en el tiempo de los

instantes de impulso. Algunos resultados (Teorema 9 y Lema 15) sobre acotamiento y no acotamiento son presentados.

El Capítulo 5 se centra en un estudio de la estabilidad de los procesos impulsivos. Principalmente introducimos (Definición 8) un nuevo concepto de estabilidad, la estabilidad (en el tiempo y el espacio) de los puntos de impulso. Apoyándonos en la definición de cuasi-estabilidad (Definición 9) dada por Lakshmihantham y Liu en [21] se muestra la independencia de ambas definiciones, se demuestran resultados (Teoremas 10 y 11) que dan condiciones para tener el primer tipo de estabilidad y otro (Teorema 12) que agrega algunas hipótesis más para la cuasi-estabilidad. Usando la representación de soluciones de una ecuación lineal homogénea se prueba (Teorema 13) para algunos casos que acotamiento implica cuasi-estabilidad. Con la técnica de fijación de impulsos se tiene (Teorema 14) la estabilidad de soluciones de algunas ecuaciones escalares.

Finalmente el Capítulo 6, ilustra la aplicabilidad de las ecuaciones diferenciales impulsivas en el área de la Bioeconomía Matemática, se presenta un modelo para cada uno de los tipos descritos en el Capítulo 1. La conclusión bioeconómica principal, al suponer cosecha proporcional al esfuerzo, es que capturas estables por unidad de tiempo mayores se logran aumentando la frecuencia de cosecha, pero tendiendo el esfuerzo a cero en una relación que se explicita.

La bibliografía existente para el tipo específico de ecuaciones diferenciales impulsivas estudiadas se concentra en los años ochentas y noventas. Últimamente los trabajos se han dirigido a analizar procesos impulsivos aún más complejos, por ejemplo hacia dimensión infinita en espacios de Banach, a mezclar impulso con retardo y generalizaciones como los llamados sistemas híbridos, ver [14] y [20]. Algunas de nuestras técnicas podrían dar orientaciones hacia estos nuevos campos.

Capítulo 1

PROCESOS Y ECUACIONES DIFERENCIALES IMPULSIVAS

Este capítulo es introductorio y pretende motivar el estudio y construcción de una teoría de ecuaciones diferenciales impulsivas. Principalmente se realiza una descripción de los procesos impulsivos, una primera clasificación de estos y se listan algunas de las fenomenologías y problemáticas dinámicas que es posible encontrar.

1.1 Descripción de un proceso impulsivo

Fenómenos evolutivos que admiten representaciones calificables de procesos impulsivos hay muchos, de muy de variado tipo y enmarcables en diversas disciplinas. En cinemática la simple caída libre de un cuerpo que al llegar al suelo rebota, puede pensarse como un proceso impulsivo. Al modelar la velocidad como una variable continua mientras el cuerpo cae libremente y al suponer que entre el contacto con el suelo y en el rebote no ha transcurrido tiempo, entonces la variable velocidad cambia instantáneamente, se impulsa, a un valor muy diferente, por ejemplo, si $u(t)$ es la altura a la que se encuentra una pelota en el instante t , entonces al definir $v(t) = u'(t)$, clásicamente tenemos $(v(t), u(t))' = (-g, v(t))$, a partir de una altura $u_0 > 0$ y velocidad inicial $v_0 \in \mathfrak{R}$, donde g es la aceleración de gravedad que suponemos constante. Esta ley es válida mientras la pelota no toque el suelo, es decir, mientras $u(t) > 0$, pues podemos imaginar que si $u(t) = 0$ para algún $t > 0$, entonces el proceso al llegar al estado $(0, v(t))$, cambia instantáneamente a una condición inicial del tipo $(0, -\lambda v(t))$, esto se podría anotar por $(v(t^+), u(t^+)) = (-\lambda v(t), u(t))$ si $u(t) = 0$, donde el parámetro $0 < \lambda < 1$ es algún coeficiente que da cuenta de la fuga de energía en el choque contra el piso y el cambio de signo es la reacción del suelo en el instante del rebote. El proceso se resume denotando

$$\begin{cases} (v, u)'(t) &= (-g, v) & \text{si } u(t) \neq 0 \\ (v, u)(t^+) &= (-\lambda v, u) & \text{si } u(t) = 0 \\ (v, u)(0) &= (v_0, u_0), \end{cases}$$

La gráfica de la variable altura de la pelota, u , versus el tiempo, t , es la esperada sucesión de parábolas con puntos máximos exponencialmente tendientes a cero.

Veamos algo más formalmente que entenderemos por proceso impulsivo. Consideremos un proceso dinámico en que cada estado del sistema está descrito por un número finito de n -variables de valores reales. Estas variables ordenadas en fila forman un vector de \mathbb{R}^n , el espacio euclideo usual de dimensión n . En este sistema el tiempo varía en el semieje continuo $(0, \infty)$.

Sea Ω el conjunto de todos los estados posibles del proceso, que denominaremos *espacio de fase* y por comodidad técnica lo supondremos un conjunto abierto conexo de \mathbb{R}^n . La ley de evolución a considerar será determinística. Si denotamos por $x : (0, \infty) \rightarrow \Omega$ a una función que precisa el estado $x(t)$ del proceso en el instante $t \in (0, \infty)$, esta ley nos dirá que desde un estado original $x_0 \in \Omega$, en un tiempo inicial $t_0 \geq 0$, el movimiento en el *espacio de fase generalizado*, a saber $(0, \infty) \times \Omega$, de una *trayectoria de estados*, i.e., la gráfica del conjunto de estados futuros, estará determinado por una ecuación diferencial del tipo

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, \infty); \quad (1.1)$$

para alguna $f : (0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada. Esto es así mientras esta trayectoria no interseque cierto predeterminado conjunto cerrado Γ de $(0, \infty) \times \Omega$, pues de hacerlo en un punto (t, x) , esto es, de haber alcanzado el estado x en el instante t , esta trayectoria se impulsa instantáneamente a una nueva posición según una función de salto que lleva (t, x) en $(t, I_t(x))$, donde $I_t : \Gamma_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in \Gamma\}$, condición que resumimos escribiendo

$$x(t^+) = I_t(x(t)), \quad (t, x) \in \Gamma. \quad (1.2)$$

Posteriormente el movimiento continúa respetando (1.1) hasta volver eventualmente en un tiempo futuro a interceptar Γ , instante en que se vuelve a impulsar según (1.2) para luego proseguir en esta rutina mientras sea posible.

Más precisamente una evolución del proceso desde una condición inicial $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \Omega$ transcurre como sigue: la función de estados en el tiempo, $x(t)$, es igual a $x(t; t_0, x_0)$ para $t > t_0$ (entendemos por $x(t; t_*, x_*)$, $t \geq t_*$ a una solución de la ecuación diferencial ordinaria (1.1) tal que $x(t_*; t_*, x_*) = x_*$), hasta agotar el tiempo de su existencia o hasta que su gráfico interseque al conjunto Γ en algún punto (t_1, x_1) , $t_1 > t_0$. Para los tiempos $t > t_1$, $x(t)$ es también alguna función $x(t; t_1, x_1^+)$, donde $x_1^+ = I_{t_1}(x_1)$, mientras esta exista o su gráfico no vuelva a intersectar a Γ en algún otro punto (t_2, x_2) , $t_2 > t_1$. El estado $(t, x(t))$ del proceso en el espacio de fase generalizado seguirá desde $(t_2, I_{t_2}(x_2))$, para $t > t_2$, identificado con la gráfica de alguna $x(t; t_2, I_{t_2}(x_2))$, etc.

La dinámica impulsiva tal como aparece descrita en el párrafo anterior contiene una serie de supuestos y, por lo tanto, es bastante idealizada, digamos que no está garantizado a priori que desde un estado inicial dado surja movimiento y tampoco cuánto se prolongará éste en el tiempo. Es necesario imponer condiciones a los elementos involucrados.

1.2 Definición de ecuación y solución

Al problema de encontrar funciones que den cuenta del proceso impulsivo descrito en la sección anterior, se le llamará *Ecuación Diferencial Impulsiva* o *E.D.I.*, y a tales funciones,

soluciones de dicha ecuación. En la literatura no existe consenso respecto a qué se entiende por solución, salvo para algunos tipos particulares de procesos impulsivos.

Los conjuntos $(0, \infty)$, Ω y Γ ; las funciones $f : (0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $I_t : \Gamma_t \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$; y la ecuación (1.1) junto con la condición (1.2) se consideran elementos que estructuran el proceso impulsivo. Normalmente el acuerdo base es buscar funciones $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$, tales que si $t \in (\alpha, \beta)$, entonces:

- (i) $(t, x(t)) \in (0, \infty) \times \Omega$,
- (ii) $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, si $(t, x(t)) \notin \Gamma$, y
- (iii) x tiene una discontinuidad de primer tipo en t , si $(t, x(t)) \in \Gamma$, para la cual $x(t^+) = I_t(x(t))$.

Como es usual, $x(t^+)$ denota el límite por la derecha de $x(s)$ cuando $s \rightarrow t$. Esta definición de E.D.I., se suele denotar consisamente

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)), & (t, x) \notin \Gamma \\ x(t^+) = I_t(x), & (t, x) \in \Gamma. \end{cases} \quad (1.3)$$

Esta definición admite como soluciones variados tipos de funciones que no necesariamente se ajustan a la idea de trayectorias de procesos impulsivos, descritos en 1.1, que debieran cumplir sus gráficos. Es posible ir limitando esta variabilidad agregando condiciones del tipo:

- (iv) $x(t^+) = I_t(x(t))$, si $(t, x(t)) \in \Gamma$, y/o
- (v) que los tiempos $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $(t, x(t)) \in \Gamma$, formen un conjunto sin puntos de acumulación.

Una función $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ podría cumplir con (i), (ii) y (iii) y sin embargo no satisfacer el proceso descrito, pues si $(t, x) \in \Gamma$ para $t \in (\alpha, \beta)$, entonces $x(t^-)$, el límite por la izquierda de $x(s)$ cuando $s \rightarrow t$, puede no existir o de existir $x(t^-) \neq x(t)$, en esta última posibilidad, el gráfico de x intersecta a Γ desde la izquierda con discontinuidad, y no por aproximación a Γ , esta no es la idea. Digamos que (iv) es una condición de continuidad por la izquierda no explícita en la notación de la E.D.I. (1.3), pero que en adelante consideraremos incorporada en la definición de una solución.

En el Capítulo 2 incorporaremos además a la definición de solución el item (v), una condición que se ajustará al tipo de proceso impulsivo que concentrará nuestra atención y a las problemáticas que de éste estudiaremos.

En (1.3) especificaremos el espacio de fase Ω y el semieje del tiempo $(0, \infty)$ sólo cuando estos no se subentiendan.

Los tiempos en los que la gráfica de una solución de (1.3) intersecta a Γ se denominarán *tiempos de impulso* o *momentos de impulso* y los puntos de intersección *puntos de impulso*. La razón para permitir por dominio de las soluciones solamente un intervalo abierto es de carácter técnico.

Las soluciones (condiciones (i)-(iv)) de una ecuación diferencial impulsiva pueden tener conjuntos de puntos de impulso de muy variado tipo en cuanto a su cardinalidad y distribución, pudiendo ser finito o infinito, en este último caso con o sin puntos de acumulación.

1.3 Tipos de E.D.I.

Las posibilidades de elección que tiene el conjunto Γ como subconjunto cerrado de $(0, \infty) \times \Omega$ y de definición de las funciones $I_t : \Gamma_t \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in (0, \infty)$, hace de las ecuaciones diferenciales impulsivas un campo muy fecundo en fenomenologías dinámicas, algunas de no despreciable dificultad. Existen diversas clases de ecuaciones que es importante destacar, el presente trabajo se centrará en el estudio de una de ellas, a saber las definidas en 1.3.4.

1.3.1 Las ecuaciones diferenciales y las en diferencias son E.D.I.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son una clase particular de ecuaciones diferenciales con efecto impulsivo, basta tomar $\Gamma = \phi$ o las funciones I_t como identidades para todo $t \in (0, \infty)$ para reducir (1.3) a (1.1).

Las ecuaciones en diferencias también son factibles de identificar con cierto tipo de E.D.I.

Lema 1 *Dada la ecuación en diferencias*

$$y(k+1) = g(k, y(k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

entonces esta es "equivalente" (en el sentido de la existencia de una correspondencia bi-unívoca entre soluciones de dominio maximal), a la E.D.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & (t, x) \notin \cup_{k \geq 1} \Gamma_k, \\ x(t^+) = g(t, x), & (t, x) \in \cup_{k \geq 1} \Gamma_k, \end{cases} \quad (1.5)$$

donde $\Gamma_k = \{(k, x) / x \in \Omega\}$, $k \geq 1$.

Demostración: En efecto, si $\{y(k)\}_{\{k=p, \dots, q\}}$, $1 \leq p < q$ es solución de dominio maximal de (1.4), entonces podemos asociar a esta, la función continua a pedazos $x : (p-1, q) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $x(t) = y(k)$ si $t \in (k-1, k]$, $k = p, \dots, q$. Probemos ahora que x es solución de (1.5). En efecto, si $(t, x(t)) \notin \cup_{k \geq 1} \Gamma_k$, entonces existe j entero positivo tal que $t \in (j-1, j)$, luego $x(s) = y(j)$ para todo $s \in (j-1, j)$, por lo tanto, $\dot{x}(t) = 0$. Si $(t, x(t)) \in \cup_{k \geq 1} \Gamma_k$, entonces $t = k$ para algún $k = p, \dots, q-1$. Deducimos que $x(t) = x(k) = y(k)$ y

$$x(t^+) = x(k^+) = \lim_{s \rightarrow k^+} x(s) = \lim_{s \rightarrow k^+} y(k+1) = y(k+1),$$

de donde

$$x(t^+) = y(k+1) = g(k, y(k)) = I_k(y(k)) = I_k(x(t)).$$

Si el dominio de x no fuera maximal, entonces x estaría definida en $p-1$ y a su izquierda o en q y a su derecha durante cierto intervalo de tiempo. Esto permitiría extender y , a $p-1$ o $q+1$ como $x(p-1)$ o $x(q+)$ respectivamente, lo que es una contradicción.

Inversamente si $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es solución de (1.5) con dominio maximal, entonces necesariamente α y β son enteros no negativos, esta función puede ser vista como la imagen, bajo nuestra asociación, de la solución y de (1.4) tal que $y(k) = x(k)$, $k = \alpha+1, \dots, \beta-1$ e $y(\beta) = x(\beta^-)$. La inyectividad de esta asociación también es inmediata.

1.3.2 E.D.I. autónomas

Si Γ es del tipo $(0, \infty) \times \tilde{\Gamma}$, con $\tilde{\Gamma}$ un cerrado de Ω , entonces para $t \in (0, \infty)$ tenemos que $\Gamma_t = \{t\} \times \tilde{\Gamma}$. Si además consideramos que $I_t : \{t\} \times \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es tal que $(t, x) \rightarrow (t, I(x))$ para alguna función $I : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y la función f depende sólo de la variable estado, entonces decimos que la E.D.I. (1.3) es una *Ecuación diferencial impulsiva autónoma*, *E.D.I. autónoma* o *Sistema dinámico discontinuo* y lo anotaremos por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \notin \tilde{\Gamma} \\ x(t^+) = I(x), & x \in \tilde{\Gamma}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Una solución $x(t; s, x_s)$ de esta ecuación tiene la propiedad de autonomía, esto es, $x(t + s; t_0, x_0) = x(t; s, x_s)$, ejemplo de una ecuación de este tipo es posible encontrar en el Capítulo 6.

1.3.3 E.D.I. a tiempos fijos

Si Γ en (1.3) es unión numerable de proyecciones de Ω sobre hiperplanos, Γ_k , $k = 1, 2, \dots$, transversales al semieje del tiempo y que lo intersectan en una sucesión creciente y no acotada de instantes t_1, t_2, \dots , o lo que es lo mismo, si dado $k = 1, 2, \dots$, $\Gamma_k = \{(t_k, x)/x \in \Omega\}$, con $0 < t_1 < t_2 < \dots$ y $t_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces (1.3) se escribirá

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq t_k \\ x(t^+) = I_k(x), & t = t_k, \end{cases} \quad (1.7)$$

donde I_k , $k \geq 1$, no es más que I_{t_k} . La ecuación (1.7) se denominará indistintamente *Ecuación diferencial con efecto impulsivo a tiempos fijos*, *Ecuación diferencial impulsiva a tiempos fijos*, *Sistema impulsivo a tiempos fijos* o *E.D.I. a tiempos fijos*.

Estos sistemas han sido materia de amplio y fructífero estudio en las últimas décadas. Determinar existencia y unicidad de soluciones, establecer condiciones de continuación, discriminar cuando una solución es en algún sentido estable y obtener métodos comparativos y fórmulas asintóticas son problemas ya resueltos para múltiples casos. Ver [1] y [2].

1.3.4 E.D.I. a tiempos variables

Si Γ es la unión de hipersuperficies $\Gamma_k : t = \tau_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, llamadas *hipersuperficies de impulso* y que están definidas por funciones continuas $\tau_k : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ para cada $k = 1, 2, \dots$ y tal que para todo $x \in \Omega$ se cumplen las condiciones $\tau_1(x) < \tau_2(x) < \dots$ y $\tau_k(x) \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces (1.3) se llamará una *Ecuación diferencial con efecto impulsivo a tiempos variables*, *Ecuación diferencial impulsiva a tiempos variables*, *Sistema con impulsos a tiempos variables* o *E.D.I. a tiempos variables*, anotaremos

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x) \\ x(t^+) = I_k(x), & t = \tau_k(x), \end{cases} \quad (1.8)$$

como antes dado $k = 1, 2, \dots$, la k -ésima función de salto I_k es la función I_t , con t tal que $t = \tau_k(x(t))$.

Cuando las funciones τ_k , $k = 1, 2, \dots$ son constantes, es decir, $\tau_k(x) = t_k \in (0, \infty)$, para todo $x \in \Omega$ y para todo $k = 1, 2, \dots$, digamos cuando las hipersuperficies corresponden a hiperplanos. Entonces (1.8) se reduce al sistema impulsivo a tiempos fijos (1.7).

El presente trabajo de tesis se centrará en este tipo de E.D.I. Resultados sobre existencia y continuación de soluciones se muestran en el Capítulo 2. El Capítulo 3 fundamenta un método de aproximación de soluciones. Una teoría sobre el caso "lineal" se encuentra en el Capítulo 4. Respecto a estabilidad y comportamiento asintótico ver Capítulo 5. El Capítulo 6 muestra aplicaciones de los tres tipos mencionados de E.D.I. a la modelación de problemáticas bioeconómicas.

1.4 Fenomenologías de las E.D.I. a tiempos variables

La diversidad de comportamientos dinámicos que se presenta en los procesos con impulso a tiempos variables es mucho más rica y de dificultad analítica mayor que aquellos gobernados por una ecuación diferencial ordinaria o con impulsos en instantes predeterminados. Emergen fenómenos de variado interés como, por ejemplo, no existencia de soluciones, no continuabilidad, presencia de pulsaciones, confluencia de soluciones, etc...

En lo que sigue, se encuentra tres ejemplos de E.D.I., con soluciones que ejemplifican comportamientos y fenómenos que detallaremos a continuación de estos ejemplos.

Ejemplo 1:

Sea $\Omega = (0, 6) \subset \mathfrak{R}$ el espacio de fase; la función $\tau_k : (0, 6) \rightarrow (0, \infty)$, que determina la superficie de impacto $\Gamma_k : t = \tau_k$, está definida por $\tau_k(x) = x + (k - 1)$; el campo $f(t, x)$ se considerará nulo, para todo $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, 6)$; y la función de salto para dicha superficie estará dada por $I_k(x) = x/2 + 1$, para todo $x \in (0, 6)$, $k \geq 1$. Entonces la E.D.I. (1.8) queda

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & t \neq x + (k - 1) \\ x(t^+) = \frac{x}{2} + 1, & t = x + (k - 1). \end{cases} \quad (1.9)$$

Ilustremos una de las trayectorias posibles. Supongamos que el sistema está inicialmente, para $t_0 = 0$, en el estado $x_0 \in (0, 6)$. Si $x_0 = 2$ vemos que $x(t) \equiv 2$ para todo $t \in (0, \infty)$, es una solución de la ecuación impulsiva. Si $x_0 \in (0, 2)$, entonces la gráfica de la trayectoria $x(t)$, $t \geq 0$, del proceso es un segmento de recta, pues la ecuación diferencial asociada es $\dot{x} = 0$, hasta intersectar la superficie Γ_1 , lo que hace en el instante $t_1 = x_0$ en el punto (x_0, x_0) . Tras impulsarse, el movimiento continuará desde el nuevo punto $(x_0, I_1(x_0))$, igual a $(x_0, x_0/2 + 1)$. Como tal punto está a la izquierda de Γ_1 , seguirá desde éste en línea recta hasta volver a chocar Γ_1 ahora para $t_2 = x_0/2 + 1$ y en el punto $(x_0/2 + 1, x_0/2 + 1)$, desde ahí será impulsado a $(x_0/2 + 1, I_1(x_0/2 + 1)) = (x_0/2 + 1, x_0/4 + 3/2)$, punto nuevamente a la izquierda de Γ_1 , pues $x_0/4 + 3/2 < 2$. De esta manera la solución, con Γ_1 a su derecha, proseguirá siempre formando escaleras en el espacio de fase generalizado, tal como muestra la Figura 1.1.

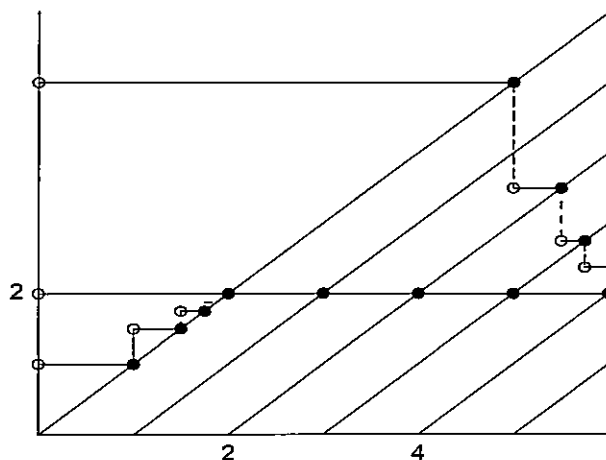


Figura 1.1: Tres soluciones de la E.D.I. (1.9) definidas por distintas condiciones iniciales: $x_0 \in (0, 2)$, $x_0 = 2$ y $x_0 \in (4, 6)$.

Inductivamente podríamos probar que la solución $x : (0, 2) \rightarrow (0, 6)$ tal que $x(0^+) = x_0$, $x_0 \in (0, 2)$, obtenida es:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } t \in (0, x_0] \\ x_j & \text{si } t \in (x_{j-1}, x_j], j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.10)$$

donde $x_j = x_0/2^{j-1} + (2^{j-1} - 1)/2^{j-2}$.

Observemos que los extremos de los intervalos involucrados en (1.10) forman una sucesión $\{x_j\}_{j \geq 1}$, tal que $x_j \rightarrow 2$ cuando $j \rightarrow \infty$. Por lo tanto, el intervalo de existencia alcanzable por el sistema, es decir, siguiendo el procedimiento evolutivo es en términos maximales $(0, 2)$. Resulta natural extender la función $x(t)$ a $t = 2$, definiendo $x(2) = x(2^-) = 2$ y ciertamente más allá de $t = 2$ reiniciando la evolución de la trayectoria según la ecuación (1.9) desde el punto $(2, 2)$, en este caso, $x(t) = 2$ para todo $t \geq 2$, ya que $x = 2$ es un punto fijo de todas las funciones de salto $I_k(x) = x/2 + 1$, $k \geq 1$. La solución $x(t) \equiv 2$ es una solución atractora del sistema.

Ejemplo 2:

Tomemos como Ω el intervalo $(0, \infty)$. Consideremos también una sucesión estrictamente creciente y no acotada de términos $s_k = (k - 1) + 3/2^{k+1}$, $k \geq 1$, de modo que las superficies Γ_k están definidas por funciones τ_k , $k \geq 1$, tal que si $x \in \Omega$, entonces

$$\tau_k(x) = \begin{cases} k - x, & \text{si } x \leq s_k \\ 1 - 3/2^{k+1}, & \text{si } x > s_k. \end{cases}$$

Estas funciones satisfacen las condiciones para definir una superficie de impacto. Son continuas, pues $\tau_k(s_k^+) = 1 - 3/2^{k+1} = \tau_k(s_k)$. Además $\tau_{k+1}(x) > \tau_k(x)$ para todo $x \in \Omega$,

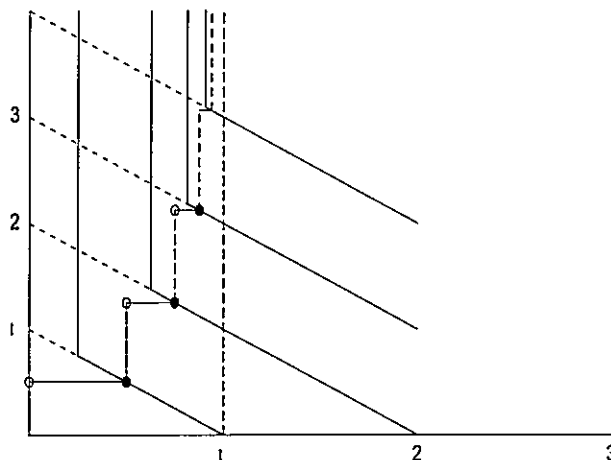


Figura 1.2: Solución $x : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ de la E.D.I. (1.11) tal que $x(0^+) = 1/2$.

de hecho: si $x \leq s_k < s_{k+1}$, entonces $\tau_{k+1}(x) = (k - x) + 1 > \tau_k(x)$; si $s_k < x \leq s_{k+1}$, entonces $\tau_{k+1}(x) > (k - s_{k+1}) + 1 = 1 - 3/2^{k+2} > \tau_k(x)$; y si $x > s_{k+1} > s_k$, entonces $\tau_{k+1}(x) = 1 - 3/2^{k+2} > \tau_k(x)$. Como dado $x \in (0, \infty)$, existe p tal que $s_k \geq x$ para $k \geq p$, también se tiene que $\tau_k(x) = k - x \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$.

La E.D.I. está dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & t \neq \tau_k(x) \\ x(t^+) = x + (1 - \frac{1}{2^{k+1}}), & t = \tau_k(x), \end{cases} \quad (1.11)$$

con $(t, x) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$.

La solución $x : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ tal que $x(0^+) = 1/2$ y

$$x(t) = k + \frac{1}{2^{k+1}}, \text{ para } t \in \left(1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right],$$

es tal que $x(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 1^-$. Claramente es una solución de (1.11) ya que si $t \in (1 - 1/2^k, 1 - 1/2^{k+1}]$, entonces $x'(t) = 0$ y además $(1 - 1/2^{k+1}) = ((k-1) + 1/2^k) + (1 - 1/2^{k+1})$ implica $x(t^+) = x(t) + (1 - 1/2^{k+1})$ si $t = 1 - 1/2^k$. Ver Figura 1.2.

Ejemplo 3:

Tomemos ahora $\Omega = (0, \infty)$ y la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{cases} 1/(t-4), & t < 4 \\ 1, & t \geq 4 \end{cases}, & t \neq x + k - 1 \\ \Delta x = 1, & t = x + k - 1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Una solución de esta E.D.I. es la función $x : (0, 4) \rightarrow (0, \infty)$ definida por $x(t) = n + \log(\frac{4-t}{4})$ si $t_{n-1} < t \leq t_n$, para $n \geq 1$, donde t_n es la única solución de la ecuación $n + \log(\frac{4-t_n}{4}) = t_n$, $n \geq 0$. Esta solución es tal que $x(0^+) = 1$.

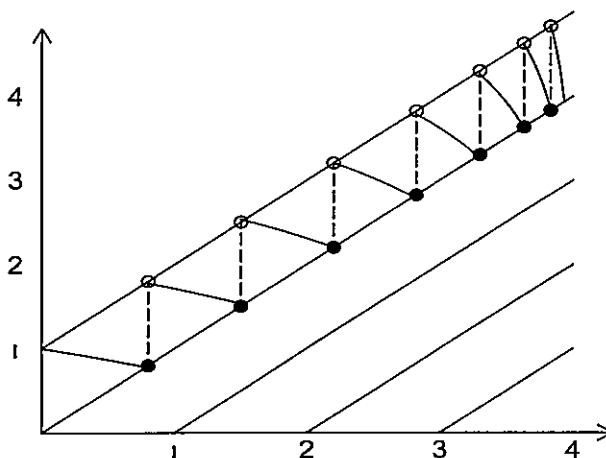


Figura 1.3: Solución $x : (0, 4) \rightarrow (0, \infty)$ de la E.D.I. (1.12) tal que $x(0^+) = 1$ y que se acumula en un segmento cuando $t \rightarrow 4^-$.

Es fácil probar que $0 = t_0 < t_n < 4$, $n \geq 1$. Además se tiene $t_{n-1} < t_n$, para $n \geq 1$. Efectivamente, de lo contrario $4 - t_n \geq 4 - t_{n-1}$, que implicaría

$$t_n - \log\left(\frac{4 - t_n}{4}\right) \leq t_{n-1} - \log\left(\frac{4 - t_{n-1}}{4}\right),$$

es decir, $n - 1 \geq n$, lo cual es una contradicción.

Así la sucesión $\{t_n\}$ es creciente y acotada, luego convergente. Como $e^{-n} = \frac{4 - t_n}{4} e^{-t_n}$, su límite t^* debe cumplir

$$\frac{4 - t^*}{4} e^{-t^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0,$$

por lo tanto, $t^* = 4$. De este modo comprobamos que x está bien definida.

Probaremos ahora que x es solución. Sea $0 < t < 4$, supongamos que $t \neq t_n$ para todo $n \geq 1$, entonces existe $m \geq 1$ tal que $t_{m-1} < t < t_m$. Afirmamos que $t \neq x(t) + k - 1$, para cada $k \geq 1$. Si se cumpliera la igualdad para algún $k \geq 1$, tendríamos $t = (m + k - 1) + \log\left(\frac{4 - t}{4}\right)$, es decir, $t = t_{m+k-1}$ contradiciendo el supuesto. Además es claro que $\dot{x}(t) = \frac{1}{t-4}$.

Si $t = t_n$ para algún $n \geq 1$, entonces $t = n + \log\left(\frac{4 - t}{4}\right) = x(t) + (1 - 1)$, por lo tanto, $t = \tau_1(x(t))$. Como $x(t_n^+) = 1 + t_n$ y $x(t_n) = t_n$, se tiene $\Delta x(t_n) = 1$. Además la continuidad de la función logaritmo permite afirmar que $x(t^-) = x(t)$.

1.4.1 Presencia de pulsaciones

Uno de los aspectos interesantes en las E.D.I. son los llamados *fenómenos de pulso o pulsaciones*, que es el modo como la literatura existente denomina el hecho que el gráfico de una solución pueda intersectar a una misma superficie Γ_k , para algún $k = 1, 2, \dots$ repetidamente. Como vimos en el Ejemplo 1, una solución de (1.9) con $x(0^+) \in (0, 2)$ intersecta en más de una oportunidad a Γ_1 , de hecho, en infinitos puntos que se acumulan en el punto $(2, 2)$.

También puede ocurrir que algunas superficies nunca sean impactadas por alguna solución en particular. Es el caso del Ejemplo 1, al tomar una solución x con $x(0^+) = x_0 \in (4, 6)$, notemos que dicha solución es igual a x_0 para tiempos positivos y hasta $t_1 = x_0$, instante que el segmento de recta choca a Γ_1 en (x_0, x_0) , desde allí se impulsa a $(x_0, x_0/2 + 1)$ para continuar rectilíneamente hasta intersectar alguna superficie. Como $(x_0, x_0/2 + 1)$ está a la derecha de $(\tau_2(x_0/2 + 1), x_0/2 + 1)$, ya que $\tau_2(x_0/2 + 1) = x_0/2 + 1 < 4 < x_0$, la solución intersectará Γ_3 , saltándose Γ_2 , pero de ahí en adelante intersectará cada superficie exactamente una vez, además $x(t) \rightarrow 2$ cuando $t \rightarrow \infty$. Como $x' = 0$, el proceso impulsivo está dominado por el sistema dinámico discreto unidimensional $x_{n+1} = x_n/2 + 1$, que tiene un atractor global, a saber, x_n tiende a 2 monótonamente cuando $n \rightarrow \infty$.

1.4.2 No existencia de soluciones

Sucede también que en ciertas ecuaciones diferenciales impulsivas a tiempos variables, las funciones involucradas pueden tener muy buenas propiedades, por ejemplo de acotamiento, continuidad y diferenciabilidad, pero donde un supuestamente simple problema de valor inicial no tiene solución. Es el caso si en (1.9) consideramos $f(t, x) = 1$ para todo $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, 6)$, es decir, si las líneas de campo son paralelas a las superficies Γ_k , $k \geq 1$, y mantenemos todos los otros elementos intactos. En efecto, no es posible construir solución $x(t)$, con dominio $[2, 2 + \varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$, tal que $x(2^+) = 1$. Si existiera tal $x(t)$, entonces podríamos elegir $\varepsilon_1 < \varepsilon$ tal que $\dot{x}(t) = 1$ para todo $t \in (2, 2 + \varepsilon_1)$, por lo tanto, $x(t) = t - 1$, si $t \in (2, 2 + \varepsilon_1)$, pero $\tau_2(x(t)) = x(t) + 1 = (t - 1) + 1 = t$. Luego el gráfico de $x(t)$ para $t \in (2, 2 + \varepsilon)$ intersecta en cada uno de sus puntos a Γ_2 , lo cual es una contradicción. Esto nos dice que existen elementos geométricos que influyen fuertemente en la existencia de soluciones. Destaquemos que si en este ejemplo $\Gamma_k : \tau_k(x) = t_k$ constante mayor que cero, $k = 1, 2, \dots$ entonces el problema (1.9) con $x(2^+) = 1$ si tiene solución en algún intervalo no trivial. En general los sistemas impulsivos a tiempos fijos se comportan mucho mejor que los con tiempos de impulso variable y ha sido posible construir para estos últimos una teoría bastante paralela a las de las ecuaciones ordinarias.

1.4.3 Confluencia de soluciones

Otro fenómeno de interés es la llamada *confluencia*, este se refiere a la posibilidad que soluciones inicialmente diferentes después de un tiempo se juntan en algún punto y se unifiquen, es decir, evolucionen desde allí como una sola solución. Es el caso en nuestro ejemplo (1.9), como podemos observar en la figura 1.1 la solución constante $x(t) = 2$, $t > 0$, confluye con todas las soluciones con condición inicial $x(0^+) \in (0, 2)$ a partir de $t = 2$.

1.4.4 No continuabilidad de soluciones

Existen E.D.I. con un campo nulo y magnitud de saltos acotadas, para las cuales hay soluciones que intersectan cada superficie de impacto solamente una vez y que en un tiempo finito divergen al infinito. Este es un fenómeno exclusivo del impacto a tiempo variable, en las E.D.I. a tiempos fijos no sucede. Un caso concreto se tiene al considerar el Ejemplo 2: Como es observable en este caso la magnitud de los saltos $\Delta x = 1 - 1/2^{k+1}$, forman una sucesión tendiente a uno cuando $k \rightarrow \infty$. También se pueden fabricar ejemplos de no continuabilidad por no acotamiento aún con dichas magnitudes Δx , tendientes a cero.

Por otro lado en el Ejemplo 3, notemos que la solución x considerada no puede ser continuada a la derecha del intervalo $(0, 4)$, de ser posible $x(4^-)$ debiera existir y ser igual a $x(4)$. Observemos que la sucesión $\{t_n\}$ es creciente, tiende a 4 y $x(t_n) = t_n \rightarrow 4$, pero por otro lado, el teorema del valor medio asegura la existencia de una sucesión de $s_n \in (t_{n-1}, t_n)$, $s_n \rightarrow 4$, tal que la sucesión de imágenes

$$x(s_n) = \frac{x(t_{n-1}) + x(t_n)}{2} = \frac{1 + t_{n-1} + t_n}{2},$$

tiende a $9/4$. Por lo tanto, $x(4^-)$ no existe, como ilustra la Figura 1.3.

Capítulo 2

EXISTENCIA Y PROLONGACIÓN DE SOLUCIONES

En este capítulo se precisa las ecuaciones diferenciales impulsivas en tiempos variables objetos de nuestro estudio. Definimos el concepto de solución. Mostramos una representación integral del problema de valor inicial. Damos condiciones para la existencia local de soluciones y para la extensión de éstas. Finalmente presentamos una técnica que permite fijar los tiempos de impulso para cierta clase de E.D.I.

2.1 Ecuación y definición de solución

El tipo de ecuación que nos preocupará en el presente trabajo son las E.D.I. a tiempos variables

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x) \\ x(t^+) = I_k(x), & t = \tau_k(x), \end{cases} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.1)$$

que satisfacen las siguientes condiciones:

- i) el conjunto Ω es un abierto conexo de \mathfrak{R}^n ;
- ii) la función $f : (0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es continua y satisface la condición de Lipschitz, esto es, dado $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \Omega$, existe vecindad $U_{(t_0, x_0)}$ de (t_0, x_0) y $K > 0$ tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|,$$

para todo $(t, x_1), (t, x_2) \in U_{(t_0, x_0)}$;

- iii) cada función I_k , $k \geq 1$, tiene dominio Ω y valores en Ω ; y
- iv) las funciones $\tau_k : \Omega \rightarrow (0, \infty)$, $k = 1, 2, \dots$, pertenecen a $C^1(\Omega)$, las funciones continuas de derivada continua, y son tales que $\{\tau_k(x)\}_{k \geq 1}$ es una sucesión estrictamente creciente y no acotada para todo $x \in \Omega$.

De aquí en adelante cuando hagamos referencia a (2.1) se entenderá que esta ecuación tiene las propiedades señaladas. Como hicimos notar en el capítulo anterior, esta ecuación es una E.D.I. tipo (1.3), con Γ la unión de todas las hipersuperficies $\Gamma_k : t = \tau_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$. Al conjunto Γ lo denominaremos *superficies de impulso*. Un punto $(t, x) \in \Gamma$ se llama *punto de impulso*.

La definición de solución dada en el primer capítulo es tan general como las E.D.I. ahí consideradas. La definición que ahora damos está en el contexto preciso de la E.D.I. a tiempos variables (2.1) y de los fenómenos que nos interesa analizar.

Definición 1 Una función $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$, $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$, con

$$T_x = \{t \in (\alpha, \beta) : t = \tau_k(x(t)), \text{ para algún } k \geq 1\}$$

un conjunto discreto (sin puntos de acumulación), es solución de (2.1) si:

- (i) para todo $t \in (\alpha, \beta) \setminus T_x$ se tiene $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, y
- (ii) para todo $t \in T_x$, es decir, $t = \tau_k(x(t))$ para algún $k \geq 1$, se cumple
 - (a) $x(t^+) = I_k(x(t))$ y
 - (b) $x(t^-) = x(t)$.

El conjunto T_x se denomina *conjunto de tiempos de impulso* de x .

Dado $x_0 \in \Omega$ y $t_0 \in (0, \infty)$, el problema de encontrar una solución $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (2.1) tal que $t_0 \in (\alpha, \beta)$ y $x(t_0) = x_0$, será denotado por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x) \\ x(t^+) = I_k(x), & t = \tau_k(x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

y se llamará *Problema de valor inicial, Problema de Cauchy* o abreviadamente *P.V.I.*

Una notación alternativa a (2.2), en algunos contextos más cómoda, es

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x = \varphi_k(x), & t = \tau_k(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

donde, Δx y $\varphi_k(x)$ denotan a $x(t^+) - x(t)$ e $I_k(x) - x$ respectivamente.

2.2 Representación integro-sumaria

Dada la sucesión de funciones $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$ asociada a (2.3) y una función $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$, con $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$, cualesquiera, entonces es posible definir la función que a cada $s \in (\alpha, \beta)$ le asocia el vector de \mathbb{R}^n ,

$$\Theta_x(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq \tau_k(x(s)) \text{ para todo } k = 1, 2, \dots \\ \varphi_k(x(s)) & \text{si } s = \tau_k(x(s)) \text{ para algún } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

La función $\Theta_x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ está bien definida, pues dado $s \in (\alpha, \beta)$, por la monotonía de $\{\tau_k(x(s))\}_{k \geq 1}$, a lo más existe un único $k = 1, 2, \dots$ tal que $s = \tau_k(x(s))$.

Si para la función x el conjunto de tiempos de impulso T_x es discreto, entonces dado $t_0 \in (\alpha, \beta)$ es posible definir la función que a cada $t \in (\alpha, \beta)$ le asigna el valor

$$\sum_{s \in [t_0, t)} \Theta_x(s), \quad (2.4)$$

entenderemos que la expresión (2.4) es igual a $-\sum_{s \in [t, t_0)} \Theta_x(s)$ cuando $t < t_0$. Esta suma es siempre finita, pues dado $t \in (\alpha, \beta)$ existen solo finitos $s \in [t_0, t)$ o $s \in [t, t_0)$ donde $\Theta_x(s) \neq 0$.

Lema 2 Sea $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \Omega$. Si $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$, es solución del P.V.I. (2.3), entonces x satisface la relación

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds + \sum_{s \in [t_0, t)} \Theta_x(s), \quad (2.5)$$

para todo $t \in (\alpha, \beta)$.

Demostración: Es claro que la igualdad se cumple para $t = t_0$. Sea $t \in (\alpha, \beta)$ y definamos la función, Φ_x , que a cada $t \in (\alpha, \beta)$ le asocia el lado derecho de (2.5). Demostraremos que $\Phi_x(t) = x(t)$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$. Recordemos que si $s \in (\alpha, \beta)$ es tal que $(s, x(s)) \in \Gamma_j$ para algún $j \geq 1$, entonces $\Theta_x(s) = \varphi_j(x(s)) = \Delta x(s)$. Si $(s, x(s)) \notin \Gamma_j$ para todo $j \geq 1$, entonces $\Theta_x(s) = 0 = \Delta x(s)$.

De modo que,

$$\Phi_x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds + \sum_{s \in [t_0, t)} \Delta x(s).$$

Primero fijemos $t \in (t_0, \beta)$. Sea $\tilde{t} \in (t_0, \beta) \cap T_x$ el mayor tal que $\tilde{t} < t$, el instante \tilde{t} existe, pues el conjunto de tiempos de impulso es discreto, o no existe, en este caso no hay impulsos en (t_0, t) y es claro que $\Phi_x(t) = x(t)$.

En el primer caso tenemos

$$\begin{aligned} \Phi_x(t) &= \Phi_x(\tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^t f(s, x(s)) ds + \sum_{s \in [\tilde{t}, t)} \Delta x(s) \\ &= \Phi_x(\tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^t \dot{x}(s) ds + \Delta x(\tilde{t}) \\ &= \Phi_x(\tilde{t}) + x(t) - x(\tilde{t}^+) + \Delta x(\tilde{t}) \\ &= \Phi_x(\tilde{t}) + x(t) - x(\tilde{t}), \end{aligned}$$

de modo que el problema se reduce a mostrar que $\Phi_x(\tilde{t}) = x(\tilde{t})$.

Repetiendo el argumento sea $\bar{t} \in T_x$ el mayor momento de impulso de x menor que \tilde{t} . Observemos ahora que reiterando el mismo cálculo anterior, $\Phi_x(\tilde{t}) = \Phi_x(\bar{t}) + x(\tilde{t}) - x(\bar{t})$ y nos reducimos a mostrar $\Phi_x(\bar{t}) = x(\bar{t})$. Continuando recursivamente, en finitos pasos, el

problema se reduce a verificar que $\Phi_x(t_0)$ es igual a $x(t_0)$, lo que es claro, pues ambos son x_0 .

Ahora si fijamos $t \in (\alpha, t_0)$, tomemos $\tilde{t} \in T_x \cap (\alpha, t_0)$ el menor tal que $\tilde{t} > t$. En este caso

$$\Phi_x(t) = \Phi_x(\tilde{t}) - \left(\int_{\tilde{t}}^t f(s, x(s)) ds + \sum_{s \in [t, \tilde{t})} \Delta x(s) \right)$$

y como $\sum_{s \in [t, \tilde{t})} \Delta x(s) = 0$, se tiene

$$\Phi_x(t) = \Phi_x(\tilde{t}) - (x(\tilde{t}) - x(t)).$$

Nuevamente nos podemos reducir a mostrar que $\Phi_x(\tilde{t}) = x(\tilde{t})$. Repitiendo el argumento la demostración se reduce a $\Phi_x(t_0) = x(t_0)$. \diamond

Como inverso al lema anterior tenemos

Lema 3 Si $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$, satisface (2.5) para todo $t \in (\alpha, \beta)$. Entonces x es solución del P.V.I. (2.3).

Demostración: Sea $t \in (\alpha, \beta)$, si $t \neq \tau_k(x(t))$ para todo $k \geq 1$, entonces $\Theta_x(s) = 0$ para valores de s vecinos a t y, por lo tanto, $\sum_{\nu \in [t_0, s)} \Theta_x(\nu)$ es constante en alguna vecindad de t , de donde

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right) = f(t, x(t)).$$

Supongamos ahora que $t = \tau_k(x(t))$ para algún $k \geq 1$. Si $t > t_0$, tenemos

$$\Delta x(t) = x(t^+) - x(t) = \sum_{s \in [t_0, t]} \Theta_x(s) - \sum_{s \in [t_0, t)} \Theta_x(s) = \Theta_x(t) = \varphi_k(x(t)).$$

Ahora si $t < t_0$, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= x(t^+) - x(t) = \lim_{s \rightarrow t^+} \left(- \sum_{u \in [s, t_0)} \Theta_x(u) \right) - \left(- \sum_{u \in [t, t_0)} \Theta_x(u) \right) \\ &= - \sum_{u \in (t, t_0)} \Theta_x(u) + \sum_{u \in [t, t_0)} \Theta_x(u) = \Theta_x(t) = \varphi_k(x(t)), \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada nuestra afirmación, pues resta mostrar $x(t_0) = x_0$, lo que es claro. \diamond

2.3 Una condición para existencia local

En esta sección mostramos condiciones para probar existencia local de soluciones al P.V.I. (2.2).

Si en (2.2) el par $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \Omega$ no es un punto de impulso, entonces existe vecindad abierta U de (t_0, x_0) , $U \subset (0, \infty) \times \Omega$, tal que $U \cap \Gamma = \emptyset$. Luego las condiciones

propias de la dinámica impulsiva no actúan dentro de U . Gracias a la Lipshitzianidad de f in $(0, \infty) \times \Omega$ tenemos la existencia de una única solución $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\alpha, \beta) \subset (0, \infty)$, del problema de valor inicial ordinario asociado

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t, x) \in U.$$

Claramente la función x también es solución del P.V.I. impulsivo (2.2), con unicidad en $[t_0, \beta)$, pues mientras $t \in [t_0, \beta)$ la componente impulsiva de la ecuación (2.2) no actúa.

Ahora si (t_0, x_0) pertenece a Γ_k , para algún $k \geq 1$, nos preguntamos por condiciones que garanticen que la mencionada solución del P.V.I. ordinario, x , restringida a $(t_0 - \varepsilon, t_0)$, con ε pequeño, sea una solución de la E.D.I. (2.1) tal que $x(t_0^-) = x_0$. Lo importante es que se tenga: $(t, x(t)) \notin \Gamma_k$, $k \geq 1$, para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$. Una condición posible para aquello es que el límite de los vectores dirección de la trayectoria $(t, x(t))$ cuando $t \rightarrow t_0^-$, es decir,

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0^-} (1, x'(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} (1, f(t, x(t))) = (1, f(t_0, x_0)),$$

no pertenezca al hiperplano tangente $T_{(t_0, x_0)}\Gamma_k$ a Γ_k en (t_0, x_0) . Observemos que $T_{(t_0, x_0)}\Gamma_k$ está dado por

$$T_{(t_0, x_0)}\Gamma_k : t - t_0 = \frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x_0)(x - x_0),$$

con vector normal $n = (1, -\nabla \tau_k(x_0))$, donde ∇ denota el operador gradiente.

Como $t_0 = \tau_k(x_0)$, la condición para que v sea transversal a Γ_k en (t_0, x_0) es:

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x_0)f(\tau_k(x_0), x_0) \neq 1. \quad (2.6)$$

La expresión (2.6) es una condición para existencia de solución de (2.2) a la izquierda de t_0 . Resta obtener condiciones para la existencia de solución de (2.2) a la derecha de t_0 . Recordemos que $(t_0, x_0) \in \Gamma_k$, cierto $k \geq 1$, luego una solución del sistema debe reaparecer, en el sentido del tiempo, a la derecha de $(t_0, I_k(x_0))$. Hay dos posibilidades $(t_0, I_k(x_0)) \notin \Gamma$ o lo contrario. En el primer caso volvemos a una situación similar a la del segundo párrafo, es decir, existe vecindad U_1 de $(t_0, I_k(x_0))$, tal que $U_1 \subset (0, \infty) \times \Omega$ y $U_1 \cap \Gamma = \emptyset$, donde no actúa el efecto impulsivo y podemos elegir solución de la E.D.O. asociada a (2.2), $x_1 : (\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $x_1(t_0) = I_k(x_0)$ y $(t, x(t)) \in U_1$ para todo $t \in (\alpha_1, \beta_1)$. Claramente su restricción al intervalo (t_0, β_1) es solución de la E.D.I. En otras palabras

$$x_2(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in (\varepsilon - t_0, t_0] \\ x_1(t) & \text{si } t \in (t_0, \beta_1) \end{cases} \quad (2.7)$$

es solución del P.V.I. (2.2). Notemos la unicidad de x_2 en (t_0, β_1) que deriva de la unicidad de x_1 en (t_0, β_1) con $x_1(t_0^+) = I_k(x_0)$.

Finalmente si el caso es $(t_0, I_k(x_0)) \in \Gamma_j$, para algún $j \geq 1$, como existe vecindad abierta U_2 de $(t_0, I_k(x_0))$ tal que $U_2 \subset (0, \infty) \times \Omega$ y $U_2 \cap \Gamma_i = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Necesitamos que exista $\varepsilon_1 > 0$ tal que el gráfico de $x_1 : (\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$, la solución de la ecuación ordinaria asociada tal que $x_1(t_0) = I_k(x_0)$ no intersekte a Γ_j para $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon_1) \subset (t_0, \beta_1)$. Para ello basta que $(1, f(t_0, I_k(x_0)))$ sea transversal a Γ_j en $(t_0, I_k(x_0))$, esto es

$$\frac{\partial \tau_j}{\partial x}(I_k(x_0))f(\tau_j(I_k(x_0)), I_k(x_0)) \neq 1. \quad (2.8)$$

La función

$$x_2(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in (\varepsilon - t_0, t_0] \\ x_1(t) & \text{si } t \in (t_0, t_0 + \varepsilon_1) \end{cases} \quad (2.9)$$

es solución del P.V.I. (2.2), única a la derecha de t_0 .

En resumen a lo arriba expuesto hemos probado el siguiente teorema de existencia local de soluciones.

Teorema 1 Si en (2.1)

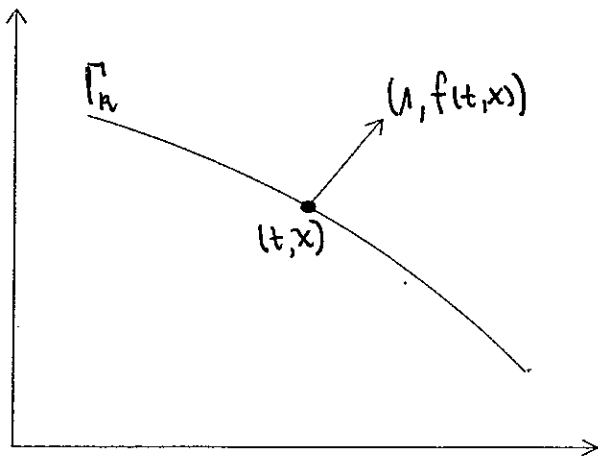
$$\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x) f(\tau_k(x), x) \neq 1, \text{ para todo } x \in \Omega \text{ y } k = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Entonces dado $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \Omega$, existe solución del P.V.I. (2.2), única en su restricción a la derecha de t_0 .

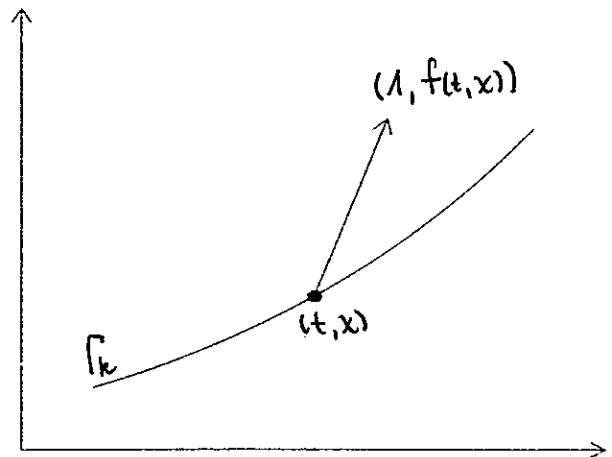
Observemos que la condición (2.10) implica que dado $k = 1, 2, \dots$, se tendrá una de las dos posibilidades:

- (i) $\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x) f(\tau_k(x), x) < 1$ para todo $x \in \Omega$ ó
- (ii) $\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x) f(\tau_k(x), x) > 1$ para todo $x \in \Omega$.

Lo anterior gracias a que $\tau_k \in C^1(\Omega)$. En el primer caso todo vector $(1, f(t, x))$, con $(t, x) \in \Gamma_k$, apunta, en el sentido del tiempo a la derecha de $T_{(t,x)}\Gamma_k$, en el segundo caso, a la izquierda. Ver Figura 2.1 y 2.2.



2.1: Caso $\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x) f(\tau_k(x), x) < 1$ para todo $x \in \Omega$



2.2: Caso $\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x) f(\tau_k(x), x) > 1$ para todo $x \in \Omega$

De aquí en adelante supondremos que todas las E.D.I. consideradas cumplen las hipótesis del Teorema 1 a menos que se exprese lo contrario.

2.4 Prolongación de soluciones

Una solución x de (2.1), con dominio el intervalo (α, β) , se llama *prolongable a la derecha* o simplemente *prolongable* si existe solución $\tilde{x} : (\alpha, \tilde{\beta}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (2.1) tal que $\tilde{\beta} > \beta$ y $\tilde{x}(t) = x(t)$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$.

Teorema 2 Una solución $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ del P.V.I. (2.3) es prolongable si y sólo si:

(i) $x(\beta^-) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t)$ existe y pertenece a Ω , y

(ii) $T_x \cap [t_0, \beta)$ es un conjunto finito.

Demostración: Sea $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$ una solución de (2.1) que verifica (i) y (ii). Consideremos el P.V.I. definido por (2.2) con la condición $x(\beta) = x(\beta^-) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t)$. Por el Teorema 1, de existencia local de soluciones, existe solución $\tilde{x} : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a este problema. Al definir $x(t) = \tilde{x}(t)$ para $t \in [\beta, \tilde{\beta})$, hemos extendido la solución x del intervalo (α, β) a $(\alpha, \tilde{\beta})$. Como $T_x \cap [t_0, \beta)$ es finito y $T_{\tilde{x}} \cap [\beta, \tilde{\beta})$ es discreto, tenemos que $T_{\tilde{x}} \cap (\alpha, \tilde{\beta})$ es discreto, por lo tanto, $x : (\alpha, \tilde{\beta}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es solución.

Inversamente si $\tilde{x} : (\alpha, \tilde{\beta}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha < \beta < \tilde{\beta}$, es una prolongación de $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces $\tilde{x}(t) = x(t)$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$. Es claro que $x(\beta^-)$ existe en Ω , por definición de solución.

Si $T_x \cap [t_0, \beta)$ fuera infinito, como es acotado debe tener al menos un punto de acumulación $s \in [t_0, \beta]$. Si $s \in [t_0, \beta)$, entonces necesariamente $(s, x(s)) \in \Gamma$, de lo contrario existe vecindad U de $(s, x(s))$ tal que $U \cap \Gamma = \emptyset$, es decir, existe $\varepsilon > 0$, con $(t, x(t)) \in U$ para todo $t \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$, contradiciendo el que s sea un punto de acumulación de $T_x \cap [t_0, \beta)$. Por otro lado si $s \in T_x$, T_x tendría un punto de acumulación, lo que es una contradicción, pues T_x es discreto. Luego necesariamente $s = \beta$. Pero esto tampoco puede ser, pues por argumento análogo se debe tener $(\beta, \tilde{x}(\beta)) \in \Gamma$, es decir, el punto de acumulación de T_x , y por lo tanto, también de $T_{\tilde{x}}$, debe pertenecer a $T_{\tilde{x}}$, un conjunto discreto. De este modo, no es posible suponer $T_x \cap [t_0, \beta)$ infinito. \diamond

El siguiente lema muestra que la hipótesis (ii) del teorema anterior, unida a una condición natural de prolongación de la ecuación ordinaria asociada a (2.3) implica la existencia de $x(\beta^-) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t)$.

Lema 4 Supongamos que en (2.3) existe $M > 0$ tal que $|f(t, x)| \leq M$ para todo $(t, x) \in (0, \infty) \times \Omega$. Si una solución $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta < \infty$, de (2.3), es tal que $T_x \cap [t_0, \beta)$ es finito, entonces $x(\beta^-)$ existe.

Demostración: Sean t_1 y t_2 en (α, β) con $t_1 < t_2$. Entonces, como x satisface la ecuación integro-sumaria (2.5),

$$x(t_i) = x_0 + \int_{t_0}^{t_i} f(s, x(s)) ds + \sum_{s \in [t_0, t_i)} \Theta_x(s), \quad i = 1, 2.$$

Restando las igualdades queda

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s)) ds + \sum_{s \in [t_1, t_2)} \Theta_x(s).$$

La hipótesis $|f(t, x)| \leq M$ para $(t, x) \in (0, \infty) \times \Omega$ implica que

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq M|t_2 - t_1| + \sum_{s \in [t_1, t_2]} |\Theta_x(s)|.$$

Como $T_x \cap (\alpha, \beta)$ es finito, existe $\varepsilon > 0$ tal que x en $(\beta - \varepsilon, \beta)$ no tiene tiempos de impulso, luego $\Theta_x(s) = 0$, para todo $s \in (\beta - \varepsilon, \beta)$. Así

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq M|t_2 - t_1| \text{ si } t_2, t_1 \in (\beta - \varepsilon, \beta),$$

por lo tanto,

$$|x(t_2) - x(t_1)| \rightarrow 0 \text{ cuando } t_2, t_1 \rightarrow \beta^-,$$

luego, vía el criterio de convergencia de Cauchy tenemos que $\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t)$ existe. \diamond

Notemos que las hipótesis de lema anterior no demuestran que $x(\beta^-)$ sea un elemento de Ω , lo anterior es ejemplificable incluso en el caso ordinario.

2.5 Ausencia de pulsaciones

Un problema de importancia en el tratamiento de soluciones de una E.D.I. a tiempo variable es la posibilidad que sus gráficos puedan no intersectar algunas de las hipersuperficies de impulso asociadas y en otras hacerlo un número indeterminado de veces, que como ejemplificamos en el capítulo anterior, incluso en infinitos puntos. Para aislar las dificultades asociadas a este hecho conocido como fenómeno de pulso o pulsaciones, en este trabajo nos concentramos principalmente en soluciones que intersectan consecutivas hipersuperficies de impulsos una por vez.

Ahora introduciremos algunas definiciones relativas a lo expuesto y un resultado que nos permite definir la clase de E.D.I. de la que nos ocuparemos en lo que sigue.

Para cada $k = 1, 2, \dots$, denotamos por Ω_k al subconjunto de $(0, \infty) \times \Omega$ limitado por las hipersuperficies Γ_{k-1} y Γ_k , más formalmente el conjunto $\{(t, x) \in (0, \infty) \times \Omega : \tau_{k-1}(x) < t \leq \tau_k(x)\}$. Se debe entender que $\tau_0(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$. El conjunto $(0, \infty) \times \Omega$ es unión disjunta de los Ω_k , $k \geq 1$. El interior del conjunto Ω_k , $k \geq 1$ se denotará por $\text{int}(\Omega_k)$.

Teorema 3 *Supongamos que en (2.1) para cada $x \in \Omega$ y $k \geq 1$ tenemos:*

$$(i) \quad \frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x) f(\tau_k(x), x) < 1 \text{ y}$$

$$(ii) \quad \tau_k(I_k(x)) \leq \tau_k(x) < \tau_{k+1}(I_k(x)).$$

Entonces toda solución x de (2.1) intersecta hipersuperficies Γ_j consecutivas. Es decir, cada solución $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$ de (2.1) que verifica (i) y (ii) tiene asociados dos enteros l_x y r_x tal que: $(t, x(t)) \in \Gamma_j$ para algún $t \in (\alpha, \beta)$ si y sólo si $l_x \leq j \leq r_x$; además para tales j existe un único $t_j \in (\alpha, \beta)$ con $(t_j, x(t_j)) \in \Gamma_j$.

Demostración: Mostraremos primero que una solución x de (2.1) tal que $(t_0, x(t_0)) \in \text{int}(\Omega_k)$, de no agotar su tiempo de existencia, necesariamente la próxima superficie intersectada es Γ_k .

Sea $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathfrak{R}^n$ una solución de (2.1) con $(t_0, x(t_0)) \in \text{int}(\Omega_k)$. Supongamos $\beta_1 \in (t_0, \beta)$ tal que $(t, x(t)) \notin \Gamma$, para todo $t \in (t_0, \beta_1)$ y $(\beta_1, x(\beta_1)) \in \Gamma$. Probaremos que $(\beta_1, x(\beta_1)) \in \Gamma_k$. Observemos que necesariamente $(t, x(t)) \in \Omega_k$, para todo $t \in (t_0, \beta_1)$. Luego $(\beta_1, x(\beta_1)) \in \Gamma_{k-1}$ ó $(\beta_1, x(\beta_1)) \in \Gamma_k$.

Elijamos ε tal que

$$0 < \varepsilon < 1 - \frac{\partial \tau_{k-1}}{\partial x}(x(\beta_1))f(\tau_{k-1}(x(\beta_1)), x(\beta_1)).$$

Por la derivabilidad de $\tau_{k-1} \circ x$ por la izquierda en β_1 , existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\tau_{k-1}(x(t)) - \tau_{k-1}(x(\beta_1))}{t - \beta_1} < \varepsilon + \frac{\partial \tau_{k-1}}{\partial x}(x(\beta_1))f(\tau_{k-1}(x(\beta_1)), x(\beta_1)), \quad (2.11)$$

para $0 < \beta_1 - t < \delta < \beta_1 - \alpha_1$. De (2.11) se concluye que para estos mismos tiempos la diferencia $t - \tau_{k-1}(x(t))$, es igual a

$$(t - \beta_1) \left[1 - \frac{\tau_{k-1}(x(t)) - \tau_{k-1}(x(\beta_1))}{t - \beta_1} \right],$$

que es menor que

$$(t - \beta_1) \left[\left(1 - \frac{\partial \tau_{k-1}}{\partial x}(x(\beta_1))f(\tau_{k-1}(x(\beta_1)), x(\beta_1)) \right) - \varepsilon \right] < 0,$$

es decir, $t < \tau_{k-1}(x(t))$, lo que contradice el hecho que $(t, x(t)) \in \Omega_k$.

Si el gráfico de $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathfrak{R}^n$ intersecta Γ_k , $k \geq 1$, en algún tiempo $\beta_1 \in (\alpha, \beta)$, entonces sea β_2 con $\beta_1 < \beta_2 \leq \beta$ y $\beta_2 - \beta_1$ suficientemente pequeño para que $(\beta_1, \beta_2) \cap T_x = \emptyset$, lo que es posible pues T_x es discreto. Lo anterior asegura que el gráfico de x sobre (β_1, β_2) es continuo y está contenido totalmente en algún Ω_j , $j \geq 1$.

Si por la hipótesis (ii) el caso es

$$\tau_k(I_k(x)) < \tau_k(x) < \tau_{k+1}(I_k(x)),$$

entonces $(\beta_1, I_k(x(\beta_1))) \in \text{int}(\Omega_{k+1})$, como $(\beta_1, x(\beta_1^+)) = (\beta_1, I_k(x(\beta_1)))$, el conjunto Ω_j es Ω_{k+1} . Por lo probado más arriba la próxima superficie impactada será Γ_{k+1} , si $\beta_2 < \beta$.

Queda la posibilidad por la hipótesis (ii) que

$$\tau_k(I_k(x(\beta_1))) = \tau_k(x(\beta_1)) = \beta_1 < \tau_{k+1}(I_k(x)),$$

es decir, $(\beta_1, I_k(x(\beta_1))) \in \Gamma_k$. En este caso si $t \in (\beta_1, \beta_2)$, la función $\sigma(t) = t - \tau_k(x(t))$ es tal que

$$\sigma'(\beta_1^+) = 1 - \frac{\partial \tau_k}{\partial x}(I_k(x(\beta_1)))f(\beta_1, I_k(x(\beta_1))) > 0$$

y

$$\sigma(\beta_1^+) = \beta_1 - \tau_k(I_k(x(\beta_1))) = \beta_1 - \beta_1 = 0.$$

Luego por la continuidad tenemos $\sigma(t) > 0$ en una vecindad a la derecha de β_1 , esto es, $(t, x(t)) \in \Omega_{k+1}$ en esa vecindad. Como $(t, x(t))$ pertenece a un único Ω_j para $t \in (\beta_1, \beta_2)$, se concluye $\Omega_j = \Omega_{k+1}$. Nuevamente por lo probado en el primer párrafo, si $\beta_2 < \beta$, entonces la próxima hipersuperficie intersectada es Γ_{k+1} . \diamond

Definición 2 Las E.D.I. que satisfagan las condiciones del teorema anterior se llamarán *Sistemas Impulsivos de Pulsos Consecutivos*.

Usualmente la literatura, ver [2], en vez de (ii) del lema anterior, impone las siguientes condiciones:

1. $\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x + s\varphi_k(x))\varphi_k(x) < 0, \quad 0 \leq s < 1, x \in \Omega$ y
2. $\frac{\partial \tau_{k+1}}{\partial x}(x + s\varphi_k(x))\varphi_k(x) \geq 0, \quad 0 \leq s < 1, x \in \Omega.$

Estas son algo más restrictivas que las hipótesis (ii) del Teorema 3, pues equivalen a pedir que dado $x \in \Omega$ y $k \geq 1$, si $\psi_x^k(s) = x + s\varphi_k(x)$, $0 \leq s \leq 1$, entonces la derivada de las funciones compuestas $\tau_k \circ \psi_x^k$ y $\tau_{k+1} \circ \psi_x^k$ son menor que cero y mayor igual que cero respectivamente en su dominio $[0, 1]$. Esto implica efectivamente tener la condición (ii) del Teorema 3, pero también el que las funciones τ_k y τ_{k+1} estén definidas en el segmento que une x con $\varphi_k(x)$, esto para todo $x \in \Omega$ y $k \geq 1$, pero no necesariamente todos los puntos de este segmento están en Ω , ya que φ_k , $k \geq 1$, es arbitraria, estaríamos limitados por ejemplo a una condición del tipo Ω convexo.

2.6 Fijación de tiempos de impulso vía cambio de variable

En esta sección vamos a probar que algunas E.D.I. con impulsos en tiempos variables, mediante un adecuado cambio de variable, pueden ser llevadas a E.D.I. con impulsos a tiempos fijos definidas en 1.3.3, pero en éstas la función de impulso actuando tanto en la variable estado como en el tiempo. Consideremos una ecuación tipo (2.1) de la forma

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq \tau(x) + k\alpha \\ x(t^+) = I_k(x), & t = \tau(x) + k\alpha, \end{cases} \quad (2.12)$$

en que $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty)$ es una función en $C_1(\Omega)$, $\alpha > 0$ y k un número entero. La función $f : (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y lipschitziana; e I_k tiene por dominio a \mathbb{R}^n para todo k entero. Pediremos que se cumpla también la condición de existencia y unicidad a la derecha del Teorema 1, que ahora toma la forma

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(y) \cdot f(\tau(y) + k\alpha, y) \neq 1,$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$ y $k \geq 1$.

Definimos ahora la transformación $\varphi : (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(t, x) = (s, y)$, donde

$$\begin{cases} s = t - \tau(x) \\ y = x. \end{cases} \quad (2.13)$$

para todo $(t, x) \in (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

Lema 5 La función φ definida por (2.13) es un mapeo biyectivo y continuo que transforma las superficies $\Gamma_k : t = \tau(x) + k\alpha$ en los hiperplanos $L_k : s = k\alpha$.

Demostración: Probaremos que φ es inyectiva. Si $\varphi(t_1, x_1) = \varphi(t_2, x_2)$ para $(t_i, x_i) \in (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, entonces por (2.13) $x_1 = x_2$ y $t_1 - \tau(x_1) = t_2 - \tau(x_2)$, luego $t_1 = t_2$. Para probar que φ es sobreyectiva, nos damos $(s, y) \in (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n$ y buscamos $(t, x) \in (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n$ tal que $(s, y) = \varphi(t, x)$, basta tomar $x = y$ y $t = s + \tau(y)$. La continuidad de τ sobre \mathbb{R}^n implica la continuidad de φ en $(-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Notemos además que si $(t, x) \in \Gamma_k$, para todo entero k , entonces $t - \tau(x) = k\alpha$, es decir, $s = k\alpha$. \diamond

Teorema 4 La función φ definida por (2.13) transforma (2.12) en la E.D.I. a tiempos fijos

$$\begin{cases} y' = \frac{f(s+\tau(y), y)}{1 - \frac{\partial \tau}{\partial x}(y) \cdot f(s+\tau(y), y)}, & s \neq k\alpha \\ y(\tilde{s}^+) = I_k(y), & s = k\alpha, \end{cases} \quad (2.14)$$

en que

$$\tilde{s} = s + \tau(y) - \tau(I_k(y)), \quad (2.15)$$

para todo $(s, y) \in (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

Demostración: Dada $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, solución de (2.12), nos preguntamos cuál es la ecuación de la cual la gráfica $\varphi(t, x(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$, es una curva integral.

Si $y = x(t)$ y $s = t - \tau(x(t)) \neq k\alpha$ para todo k entero, entonces derivando ambas funciones con respecto a la variable s tenemos

$$y'(s) = x'(t) \cdot t'(s) = f(t, x(t)) \cdot t'(s) \quad \text{y} \quad 1 = \left[1 - \frac{\partial \tau}{\partial x}(x(t)) f(t, x(t))\right] t'(s).$$

de donde

$$y'(s) = \frac{f(t, x(t))}{1 - \frac{\partial \tau}{\partial x}(x(t)) \cdot f(t, x(t))} = \frac{f(s + \tau(y), y)}{1 - \frac{\partial \tau}{\partial x}(y) \cdot f(s + \tau(y), y)}, \quad \text{si } s \neq k\alpha.$$

Ahora si $s = t - \tau(x(t)) = k\alpha$ para algún entero k , entonces la imagen de $(t, x(t^+))$ bajo φ es $(t - \tau(x(t^+)), x(t^+))$, esto es $([t - \tau(x(t))] + [\tau(x(t)) - \tau(I_k(x(t))], I_k(x(t)))$, es decir, $(s + \tau(y) - \tau(I_k(y)), I_k(y)) = \varphi(t, x(t^+))$. Por lo tanto, si

$$\tilde{s} = s + \tau(y) - \tau(I_k(y)),$$

tenemos $y(\tilde{s}^+) = I_k(y(s))$. \diamond

La ecuación (2.14) no es exactamente una E.D.I. a tiempos fijos de las definidas en 1.2.3. En este caso una solución tras alcanzar un tiempo de impulso $s = k\alpha$, reaparece en \tilde{s} que es: un tiempo anterior, el mismo ó futuro, según $\tau(y(s)) - \tau(I_k(y(s)))$ sea negativo, cero o positivo.

El que la gráfica de una solución de (2.14) intersekte un hiperplano $L_k : y = k\alpha$, k entero, equivale a que la gráfica de una solución de (2.12) intersekte la hipersuperficie Γ_k . Notemos que variados resultados respecto a presencia de pulsaciones pueden ser conseguidos condicionando los signos de las funciones

$$F_k(y) = \tau(y) - \tau(I_k(y)), \quad y \in \mathfrak{R}^n, \quad k \text{ entero.}$$

Por ejemplo, ya que la distancia que separa los hiperplanos L_{k+1} y L_k , $k \geq 1$, es $\alpha > 0$, pedir que

$$0 \leq F_k(y) < \alpha, \quad \text{para } y \in \mathfrak{R}^n, \quad k \text{ entero,}$$

es equivalente a la hipótesis (ii) del Teorema 3. Esto implica que una solución de (2.14) de dominio no acotado a la derecha, tras impactar L_k , algún entero k , en s reaparece en un futuro \bar{s} anterior a L_{k+1} , por lo tanto, la correspondiente solución de (2.15) tras impactar Γ_k se impulsa para caer en Ω_{k+1} y luego impactar Γ_{k+1} , esto es, a partir de su condición inicial intersekte cada superficie exactamente una vez.

Ejemplo 1: La ecuación

$$\begin{cases} x' = 1/2, & t \neq x + k \\ \Delta x(t) = -\cos^2(k\frac{\pi}{4}x), & t = x + k, \end{cases} \quad (2.16)$$

es una E.D.I. tipo (2.12) con $\tau(x) = x$, para todo $x \in \mathfrak{R}$ y $\alpha = 1$. La ecuación resultante, (2.14), tras la transformación toma la forma

$$\begin{cases} y' = 1, & s \neq k \\ \Delta y(s) = -\cos^2(k\frac{\pi}{4}y), & s = k, \end{cases} \quad (2.17)$$

donde $\Delta y(s) = y(\bar{s}^+) - y(s)$.

Una solución de esta ecuación es la función

$$y(s) = \begin{cases} s & \text{si } s \in (0, 1] \\ s - 1 & \text{si } s \in (3/2, 4] \\ s - 3 & \text{si } s \in (5, 6). \end{cases}$$

Ver Figura 2.3.

Busquemos ahora la solución de la ecuación original (2.16) que le corresponde a esta función.

Si $s \in (0, 1]$, tenemos $x(t) = s$ y $t = 2s$, por lo tanto,

$$x(t) = \frac{t}{2}, \quad t \in (0, 2].$$

Si $s \in (3/2, 4]$, tenemos $x(t) = s - 1$ y $t = 2s - 1$, por lo tanto,

$$x(t) = \frac{t-1}{2}, \quad t \in (2, 7].$$

Si $s \in (5, 6)$, tenemos $x(t) = s - 3$ y $t = 2s - 3$, por lo tanto,

$$x(t) = \frac{t-3}{2}, \quad t \in (7, 9).$$

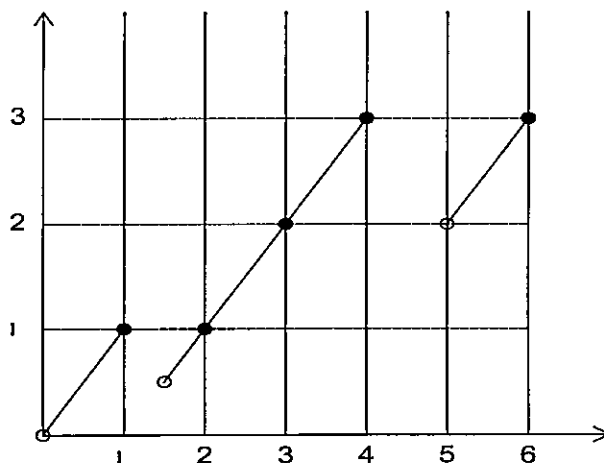


Figura 2.1: Solución $y : (0,6) \rightarrow \mathfrak{R}$ de la ecuación transformada (2.17)

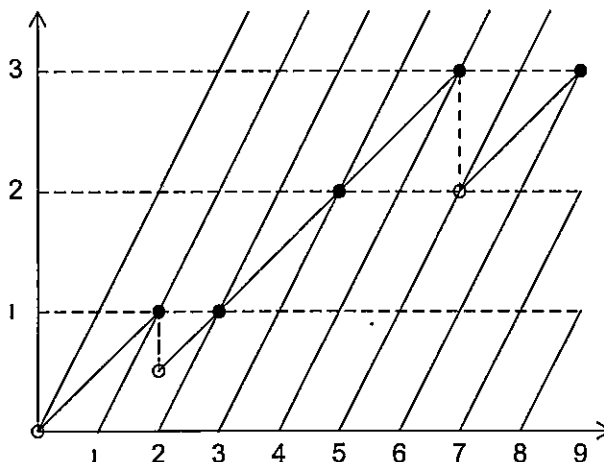


Figura 2.2: Solución $x : (0,9) \rightarrow \mathfrak{R}$ de la ecuación original (2.16)

Es decir, el mapeo φ^{-1} transforma $y(s)$ en la solución de (2.16)

$$x(t) = \begin{cases} t/2 & \text{si } t \in (0, 2] \\ (t-1)/2 & \text{si } t \in (2, 7] \\ (t-3)/2 & \text{si } t \in (7, 9). \end{cases}$$

Ver Figura 2.4.

Ejemplo 2: Al transformar

$$\begin{cases} x' = t + x, & t \neq -x + k \\ x(t^+) = 2x, & t = -x + k, t > 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

aquí $\tau(x) = -x$, para todo $x \in \mathfrak{R}$ y $\alpha = 1$, se obtiene la ecuación

$$\begin{cases} y' = \frac{s}{1+s}, & s \neq k \\ y(\tilde{s}^+) = 2y(s), & s = k, \end{cases} \quad (2.19)$$

donde $\tilde{s} = s + y(s)$, para $s > 0$.

Notemos que si $s \in (0, 1]$, entonces $y(s) = s - \log(1 + s)$ es solución tal que $y(0^+) = 0$. Además $\tilde{1} = 1 + y(1) = 2 - \log(2)$ y $y(\tilde{1}^+) = 2y(1) = 2 - 2\log(2)$. De modo que si $s \in (\tilde{1}, 2]$, entonces

$$y(s) = s - \log\left(\frac{2(1+s)}{3 - \log(2)}\right),$$

con $\tilde{2} = 2 + y(2) = 4 - \log\left(\frac{6}{3 - \log(2)}\right)$ y $y(\tilde{2}^+) = 4 - 2\log\left(\frac{6}{3 - \log(2)}\right)$. Luego si $s \in (\tilde{2}, 4]$, entonces

$$y(s) = s - \log\left(\frac{6(1+s)}{[3 - \log(2)][5 - \log\left(\frac{6}{3 - \log(2)}\right)]}\right).$$

La correspondiente solución del sistema original se obtiene notando que:

1) Si $s \in (0, 1]$, entonces

$$x(t) = s - \log(1 + s) \text{ y } t = s - [s - \log(1 + s)] = \log(1 + s)$$

de donde $x(t) = \exp(t) - (t + 1)$, si $t \in (0, \log(2)]$.

2) Si $s \in (2 - \log(2), 2]$, entonces

$$x(t) = s - \log\left(\frac{2(1+s)}{3 - \log(2)}\right) \text{ y } t = s - [s - \log\left(\frac{2(1+s)}{3 - \log(2)}\right)] = \log\left(\frac{2(1+s)}{3 - \log(2)}\right)$$

de donde $x(t) = \frac{1}{2}[3 - \log(2)] \exp(t) - (t + 1)$, si $t \in (\log(2), \log\left(\frac{6}{3 - \log(2)}\right)]$.

3) Si $s \in (4 - \log\left(\frac{6}{3 - \log(2)}\right), 4]$, entonces

$$t = \log\left(\frac{6(1+s)}{[3 - \log(2)][5 - \log\left(\frac{6}{3 - \log(2)}\right)]}\right)$$

de donde $x(t) = \frac{1}{6}[3 - \log(2)][5 - \log\left(\frac{6}{3 - \log(2)}\right)] \exp(t) - (t + 1)$, si

$$t \in \left(\log\left(\frac{6}{3 - \log(2)}\right), \log\left(\frac{30}{[3 - \log(2)][5 - \log\left(\frac{6}{3 - \log(2)}\right)]}\right)\right).$$

Capítulo 3

COMPACIDAD Y APROXIMACIÓN DE SOLUCIONES

En este capítulo probamos existencia de soluciones de E.D.I. de pulsos consecutivos vía un proceso de aproximación. Necesario es justificar la convergencia de una sucesión de aproximantes, para ello estructuramos un teorema de compacidad. Nuevos conceptos de convergencia y equicontinuidad son presentados.

3.1 Definiciones previas

Sea Ω un conjunto abierto conexo de \mathbb{R}^n . Consideramos una familia de funciones $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$, con $\tau_k : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ de clase C^1 , para todo $k \geq 1$, y tales que $\{\tau_k(x)\}_{k \geq 1}$ es una sucesión estrictamente creciente y no acotada, para todo $x \in \Omega$. Recordemos que $(0, \infty) \times \Omega$ es unión disjunta de Ω_k , $k \geq 1$, con Ω_k el conjunto de los $(t, y) \in (0, \infty) \times \Omega$ tal que $\tau_{k-1}(y) < t \leq \tau_k(y)$, $k \geq 1$.

Sea I un intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, y denotemos por $PC(I, \{\tau_k\})$ al conjunto de las funciones continuas a pedazos $x : I \rightarrow \Omega$ con posibles discontinuidades sólo en tiempos $t \in I$ donde $t = \tau_k(x(t))$ para algún $k \geq 1$, más aún en esos tiempos $x(t^-)$ y $x(t^+)$ existen y $x(t^-) = x(t)$. Una solución x de una E.D.I., definida en $[\alpha, \beta]$ es un ejemplo de función en el conjunto $PC(I, \{\tau_k\})$.

Escribiremos $SP(I, \{\tau_k\})$ para denotar al subconjunto de $PC(I, \{\tau_k\})$ de las funciones $x : I \rightarrow \Omega$ de pulsos consecutivos, es decir, las funciones para las cuales es posible asociar un par de enteros no negativos l_x y r_x (eventualmente $l_x = 0$ y $r_x = \infty$) tales que el gráfico de x interseca la hipersuperficie $\Gamma_j : t = \tau_j(y)$ en un sólo punto si $l_x < j < r_x$, pero la intersección con Γ_j es vacía si $j \leq l_x$ ó $j \geq r_x$. Denotaremos por (t_x^j, x^j) , o simplemente P_x^j , $l_x < j < r_x$, al único punto de la superficie Γ_j tal que $x(t_x^j) = x^j$. Las soluciones x de E.D.I. de pulsos consecutivos, definidas en $[\alpha, \beta]$, son ejemplos de funciones en $SP(I, \{\tau_k\})$.

Definición 3 Un subconjunto $F \subset PC(I, \{\tau_k\})$, se llamará interiormente equiacotado en Ω , si existe un conjunto compacto K de \mathbb{R}^n , $K \subset \Omega$, tal que $x(t) \in K$, para todo $x \in F$ y $t \in I$.

El acotamiento interior en \mathfrak{R}^n de un conjunto F de funciones $x : I \rightarrow \mathfrak{R}^n$, equivale a la existencia de $M > 0$ tal que $|x(t)| \leq M$ para todo $x \in F$ y $t \in I$.

Definición 4 Una sucesión $\{x_n\} \subset SP(I, \{\tau_k\})$ es llamada de p -puntos de impulso convergentes si existen enteros no negativos l_0, r_0 y p tales que: $l_{x_n} = l_0$ y $r_{x_n} = r_0$ para cada $n \geq 1$; $r_0 - l_0 = p + 1$; y la sucesión de puntos de impulso $\{P_{x_n}^j\}$ converge en Γ_j , cuando $n \rightarrow \infty$, para cada $l_0 < j < r_0$.

Si una sucesión de funciones es de p -puntos de impulso convergentes, entonces el gráfico de cada una de estas funciones intersecta sólo las superficies $\Gamma_{l_0+1}, \Gamma_{l_0+2}, \dots, \Gamma_{l_0+p}$ exactamente una vez. Además dichos puntos de intersección en cada una de estas superficies forman una sucesión convergente.

Definición 5 Una sucesión $\{x_n\}$ de p -puntos de impulso, $(t_{x_n}^j, x_n^j) \in \Gamma_j$, convergentes a (t_j, x_j) , $l_0 < j < r_0$, se llamará convergente uniformemente a pedazos (convergente u. p.) a $x : I \rightarrow \mathfrak{R}^n$ si:

- (i) para todo $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe $N \geq 1$, tal que si $|t - t_j| > \delta$, $l_0 < j < r_0$, entonces $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$; y
- (ii) $x(t_q) = x_j$, $l_0 < q, j < r_0$, con j el menor entero tal que $t_j = t_q$.

La función límite así definida es única. En efecto, si $\{x_n\}$ converge u. p. a $x : I \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y a $\bar{x} : I \rightarrow \mathfrak{R}^n$, entonces dado $t \in I$, $t \neq t_j$, $l_0 < j < r_0$, y $\delta > 0$ tal que $|t - t_j| > \delta$, podemos elegir $N_x \geq 1$ (resp. $N_{\bar{x}} \geq 1$), tal que $|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon/2$ (resp. $|x_n(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon/2$), para todo $n \geq N_x$ (resp. $n \geq N_{\bar{x}}$). Eligiendo $n \geq \max\{N_x, N_{\bar{x}}\}$, concluimos $|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$, como ε es arbitrario, $x(t) = \bar{x}(t)$. Por (ii) la definición de la función límite en los t_j , $l_0 < j < r_0$, está únicamente determinada.

Notemos que en la definición anterior como $t_{x_n}^k < t_{x_n}^{k+1}$, para todo $l_0 < k < r_0 - 1$ y $n \geq 1$, deducimos que $t_k \leq t_{k+1}$, para todo $l_0 < k < r_0 - 1$, y la igualdad entre aquellos tiempos es posible. Lo anterior justifica la parte (ii) de dicha definición.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión que converge uniformemente a pedazos a x , entonces converge en algunos sentidos conocidos, por ejemplo, $\{x_n\}$ converge casi uniformemente a x , esto es, para todo $\delta > 0$, existe $J \subset I$, de medida de Lebesgue menor que δ , tal que $\{x_n\}$ converge uniformemente a x en $I \setminus J$, o equivalentemente, por el Teorema de Egoroff, $\{x_n\}$ converge a x en casi todas partes, pues I es de medida finita.

Definición 6 Un conjunto $F \subset SP(I, \{\tau_k\})$ es llamado un conjunto equicontinuo si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in F$, $l_x < k \leq r_x$, $t, \tilde{t} \in (t_x^{k-1}, t_x^k]$ y $|t - \tilde{t}| < \delta$, entonces $|x(t) - x(\tilde{t})| < \varepsilon$.

Cómo $I = [\alpha, \beta]$, en la definición anterior entenderemos que $t_x^l = \alpha$ y $t_x^{r_x} = \beta$.

3.2 Compacidad de las funciones continuas a pedazos

El Teorema de Arzelá-Ascoli prueba la compacidad relativa de una familia acotada y equicontinua de funciones reales definidas sobre un intervalo compacto. Una aplicación es el Teorema de Cauchy Peano de existencia local de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias, ver [10], donde el resultado de Arzelá - Ascoli permite conseguir una sucesión uniformemente convergente a una solución desde el conjunto de ε -soluciones aproximadas. Se conoce resultados de compacidad para funciones continuas a pedazos, pero el tratamiento seguido siempre ha sido en función de fines específicos, hay trabajos de este tipo con utilidad en el tratamiento de soluciones de E.D.I. impulsivas, pero en tiempos fijos. También podemos mencionar las topologías construidas a mediados de los años cincuenta del siglo pasado por Skorohod, ver [30], con aplicaciones en el estudio de procesos estocásticos. En nuestro caso, la idea es conseguir un resultado que se ajuste a las necesidades propias del estudio y análisis de la clase de funciones continuas a pedazos que aparecen como posibles soluciones o aproximantes de soluciones de las E.D.I. con impulsos en tiempos variables. En la siguiente sección damos una aplicación en la demostración de existencia de solución vía aproximaciones, pero es necesario destacar, que el resultado de compacidad que aquí presentamos es importante por sí sólo, por ejemplo, si queremos buscar una solución con ciertas propiedades por medio de funciones que presentan dichas propiedades y que la aproximan.

Lema 6 *Sea $F \subset SP(I, \{\tau_k\})$ un conjunto infinito e interiormente equiacotado en Ω . Hay dos posibilidades:*

- (i) *excepto por finitos elementos las funciones de F son continuas en I , o bien,*
- (ii) *existe $\{x_n\} \subset F$ y $p \geq 1$ tal que $\{x_n\}$ es de p -puntos de impulso convergentes.*

Demostración: Si $x \in SP(I, \{\tau_k\})$, entonces siempre $r_x - l_x \geq 1$. Si existen sólo finitos x en F tal que $r_x - l_x \geq 2$, entonces removiendo de F estas funciones tenemos que $r_x - l_x = 1$ para cada $x \in F$, esto es, el gráfico de x está totalmente contenido en el interior de Ω_{r_x} , para todo $x \in F$, por lo tanto, las funciones de F son continuas y hemos probado (i).

Si existen infinitas $x \in F$ tal que $r_x - l_x \geq 2$, denotaremos al conjunto de estas funciones por \tilde{F} .

Afirmación: Existe un menor entero $l_0 \geq 0$ tal que $l_x = l_0$ para infinitos $x \in \tilde{F}$. Dejamos su demostración para el último párrafo.

Si nos quedamos en \tilde{F} con las funciones que cumplen la afirmación anterior, entonces todos los gráficos de las funciones de \tilde{F} intersencta la hipersuperficie Γ_{l_0+1} .

Como F es interiormente equiacotado, existe K compacto de \mathfrak{R}^n , $K \subset \Omega$, tal que $x(t) \in K$ para cada $(t, x) \in I \times F$. La continuidad de τ_k , $k \geq 1$, implica la compacidad en $(0, \infty) \times \mathfrak{R}^n$ de $\tilde{\Gamma}_k = \{(\tau_k(y), y) : y \in K\}$ para cada $k \geq 1$. El conjunto $\{P_x^{l_0+1} : x \in \tilde{F}\}$ está en $\tilde{\Gamma}_{l_0+1}$, de modo que existe una sucesión $\{P_{x_n}^{l_0+1}\} \subset \tilde{\Gamma}_{l_0+1}$ convergente a un punto P_{l_0+1} en $\tilde{\Gamma}_{l_0+1}$. Definamos $F_1 = \{x_n^1\} \subset \tilde{F}$. Si $x \in F_1$, entonces siempre $r_x - l_x \geq 2$. Tenemos dos casos: existen finitos x en F_1 tal que $r_x - l_x \geq 3$, o existe $\tilde{F}_1 \subset F_1$, infinito, tal que $r_x - l_x \geq 3$, para todo $x \in \tilde{F}_1$. En el primer caso eliminando dichas finitas funciones, tenemos $r_x - l_x = 2$, para cada $x \in F_1$ y basta definir $r_0 = l_0 + 2$ para demostrar (ii). Para el segundo caso, notemos que el conjunto $\{P_x^{l_0+2} : x \in \tilde{F}_1\}$ está en el compacto $\tilde{\Gamma}_{l_0+2}$, por

lo tanto, existe una subsucesión $\{P_{x_n}^{l_0+2}\}$ convergente a algún P_{l_0+2} en $\tilde{\Gamma}_{l_0+2}$. Al definir F_2 como $\{x_n^2\}$, podemos seguir reproduciendo el esquema argumentativo.

Como $\beta < \infty$, si $t_k = \min_{x \in K} \tau_k(x)$, $k \geq 1$, entonces es posible mostrar que existe un primer $q \geq 1$ tal que $t_q > \beta$. En efecto, de lo contrario $t_k < \beta$ para todo $k \geq 1$, luego si $y_k \in K$ es tal que $\tau_k(y_k) = t_k$, por la compacidad de K existe sucesión estrictamente creciente $\{k_n\}$ tal que $y_{k_n} \rightarrow y_0 \in K$ cuando $n \rightarrow \infty$. Fijemos $n \geq 1$, como τ_{k_n} es continua en y_0 , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\tau_{k_n}(y_0) < \varepsilon + \tau_{k_n}(y) \text{ cuando } |y_0 - y| < \delta.$$

Podemos elegir $k_m \geq k_n$ tal que $|y_0 - y_{k_m}| < \delta$, entonces

$$\tau_{k_n}(y_0) < \varepsilon + \tau_{k_n}(y_{k_m}) < \varepsilon + \tau_{k_m}(y_{k_m}) = \varepsilon + t_{k_m} < \varepsilon + \beta.$$

Luego $\tau_{k_n}(y_0) < \beta$ para todo $n \geq 1$, lo que es una contradicción, pues por definición $\{\tau_k(x)\}_{k \geq 1}$ es no acotada para todo $x \in \Omega$. Podemos asegurar así que el procedimiento descrito en los párrafos anteriores termina en finitos pasos. Digamos que hay un primer conjunto infinito $F_p \subset F$, con finitas funciones x tal que $r_x - l_0 \geq p + 2$, removiéndolas de F_p , $r_x - l_0 = p + 1$, para todo $x \in F_p$. Por lo tanto, al definir $r_0 = l_0 + p + 1$, la sucesión $\{x_n^p\}$ satisface el lema.

Prueba de la Afirmación: El conjunto $\{x(\alpha) : x \in \tilde{F}\}$ está contenido en K , por la compacidad existe sucesión $\{x_n(\alpha)\}$ convergente a $x_0 \in K$. El punto $(\alpha, x_0) \in \Omega_q$, para algún $q \geq 1$. Si (α, x_0) está en el interior de Ω_q , entonces existe vecindad abierta U de (α, x_0) contenida en Ω_q . Como $(\alpha, x_n(\alpha)) \rightarrow (\alpha, x_0)$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces existe $N \geq 1$ tal que $(\alpha, x_n(\alpha)) \in U$ para todo $n \geq N$, por lo tanto, $l_{x_n} = q - 1$, para todo $n \geq N$, y hemos demostrado la afirmación. Si (α, x_0) es un punto de Γ_q . En este caso tomemos vecindad abierta U de (α, x_0) tal que $U \cap \Gamma_k = \emptyset$ si $k = p - 1, p + 1$. Existe $N \geq 1$ tal que $(\alpha, x_n(\alpha)) \in U$ para todo $n \geq N$. Hay dos posibilidades no excluyentes: existen finitos x_n tal que $\tau_q(x_n(\alpha)) \geq \alpha$ (por lo tanto, $l_{x_n} = q - 1$) o $\tau_q(x_n(\alpha)) < \alpha$ (por lo tanto, $l_{x_n} = q$). En cualquiera de los casos podemos elegir subsucesión que satisface la afirmación. \diamond

Si en el lema anterior el intervalo I es no acotado, la tesis del lema sería válida con $r_0 = \infty$ siempre y cuando $\bigcap_{n \geq 1} \tilde{F}_n$ fuera un conjunto infinito, lo cual no necesariamente es cierto.

El Lema 7 afirma que si I es un intervalo acotado, entonces cada subconjunto de $SP(I, \{\tau_k\})$ es una de dos, a lo sumo por finitas funciones está formado por funciones continuas ó tiene una sucesión de funciones de p -impulsos convergentes, para algún $p \geq 1$.

Lema 7 Sea $\{x_n\}$ una sucesión de p -puntos de impulso convergentes, $P_{x_n}^j \rightarrow (t_j, x_j) \in \Gamma_j$ cuando $n \rightarrow \infty$, $l_0 < j < r_0 = l_0 + p + 1$. Si $\{x_n\}$ es convergente u. p. a una función $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces x es continua en cada $t \in I$, $t \neq t_j$, para $l_0 < j < r_0$.

Demostración: Sea $t \in [\alpha, \beta]$, $t \neq t_j$, $l_0 < j < r_0$, entonces necesariamente $t \in (t_k, t_{k+1})$ para algún $l_0 \leq k < r_0$ (entenderemos $t_{l_0} = \alpha$ y $t_{r_0} = \beta$). El mínimo entre $t - t_k$ y $t_{k+1} - t$

será denotado por η . Elijamos $N \geq 1$ tal que $|t_{x_n}^j - t_j| < \eta/2$ para cada $n \geq N$ y $j = k, k+1$. La sucesión $\{x_{N+n}\}_{n \geq 0}$ está formada por funciones continuas sobre $[t_k + \eta/2, t_{k+1} - \eta/2]$ uniformemente convergentes a x en el mismo intervalo, por lo tanto, x es continua en el punto t . \diamond

La función límite x en el Lema 7 puede ser no continua por la izquierda en algún t_j , $l_0 < j < r_0$, es el caso al tomar $I = [0, 2]$, $\Omega = (-\infty, 2)$, una superficie de impulso $\Gamma : \tau(x) = -x + 2$, y la sucesión

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1] \\ (n-1)(t-1) & \text{si } t \in (1, 1+1/n] \\ 3/2 & \text{si } t \in (1+1/n, 2], \end{cases}$$

pues esta sucesión es de 1-puntos de impulsos $(1+1/n, (n-1)/n)$, $n = 1, 2, \dots$, convergentes a $(1, 1) \in \Gamma$ y es tal que converge u. p. a $x(t) = 0$ si $t < 1$, $x(1) = 1$ y $x(t) = 3/2$ si $t > 1$, que es una función tal que $x(1^-) = 0 \neq 1 = x(1)$.

También puede ocurrir que el límite de x por la derecha en esos puntos de impulso no siempre exista, en efecto, al definir $I = [1/2, 2]$, $\Omega = \mathfrak{R}$ y una sola superficie de impulso $\Gamma : \tau(x) = -x + 1$, la sucesión

$$x_n(t) = \begin{cases} -\frac{1}{t-1} & \text{si } t \in [1/2, 1+1/n] \\ \frac{1}{t-1} & \text{si } t \in (1+1/n, 2], \end{cases}$$

converge u. p. a $x(t) = 0$ si $t \in [1/2, 1]$ y $x(t) = 1/(t-1)$ si $t \in (1, 2]$, función tal que $(1, x(1)) \in \Gamma$, pero $x(1^+)$ no existe.

Lema 8 Sea $\{x_n\} \subset SP(I, \{\tau_k\})$ una sucesión convergente u. p. a una función $x : I \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y a la vez un conjunto equicontinuo. Entonces $x \in PC(I, \{\tau_k\})$.

Demostración: Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $SP(I, \{\tau_k\})$ convergente u. p. a una función $x : I \rightarrow \mathfrak{R}^n$, entonces existe entero $p \geq 1$ tal que $\{x_n\}$ es de p -puntos de impulso convergentes, es decir, $P_{x_n}^j \rightarrow (t_j, x_j) \in \Gamma_j$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $x(t_j) = x_j$, $l_0 < j < r_0 = l_0 + p + 1$. Por el Lema 7, para tener $x \in PC(I, \{\tau_k\})$, resta probar que $x(t_j^-)$ es igual a x_j y que $x(t_j^+)$ existe para todo, $l_0 < j < r_0$.

Ahora procedemos a probar lo primero, es decir, dados j tal que $l_0 < j < r_0$ y $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < t_j - t < \delta$ entonces $|x_j - x(t)| < \varepsilon$. Como $\{x_n\}$ es un conjunto equicontinuo, existe $\eta > 0$ tal que si $s \in (t_{x_n}^{j-1}, t_{x_n}^j)$ y $t_{x_n}^j - s < \eta$, entonces $|x_n(s) - x_n(t_{x_n}^j)| < \varepsilon/3$ para cada $n \geq 1$. Elijamos $\delta < \eta/2$ tal que $(t_j - \delta, t_j + \delta) \cap \{t_{l_0+1}, \dots, t_{r_0-1}\} = \{t_j\}$. Si $t \in I$ es tal que $0 < t_j - t < \delta$, entonces podemos tomar $N_j \geq 1$, con $|x_n(t) - x(t)|$ y $|P_{x_n}^j - (t_j, x_j)|$ menores que $\varepsilon/3$, para cada $n \geq N_j$. Sea $N \geq N_j$ suficientemente grande tal que $|t_{x_N}^j - t_j| < \eta/2$ y $t_{x_N}^j > t$. Notemos que

$$0 < t_{x_N}^j - t \leq |t_{x_N}^j - t_j| + t_j - t < \eta/2 + \delta < \eta,$$

y, por lo tanto,

$$|x_j - x(t)| \leq |x_j - x_N(t_{x_N}^j)| + |x_N(t_{x_N}^j) - x_N(t)| + |x_N(t) - x(t)| < \varepsilon;$$

en otras palabras $x(t_j^-) = x_j$.

Finalmente probaremos que si $l_0 < j < r_0$, entonces $x(t_j^+)$ existe. Sea $\{s_n\} \subset I$ una sucesión decreciente y convergente a t_j . La idea es mostrar que $\{x(s_n)\}$ es una sucesión de Cauchy. Si $\varepsilon > 0$ tomemos $\mu > 0$ y $\tilde{N} \geq 1$ tal que $\mu < \eta$ (donde η es la cota que realiza la equicontinuidad), $(t_j, t_j + \mu) \cap \{t_{l_0+1}, \dots, t_{r_0-1}\} = \emptyset$ y $s_n \in (t_j, t_j + \mu)$ para cada $n \geq \tilde{N}$. Si $n, m \geq \tilde{N}$ fijemos $q \geq 1$ tal que

$$|t_{x_q}^j - t_j| < \min\{s_n - t_j, s_m - t_j\},$$

y

$$|x_q(s_i) - x(s_i)| < \varepsilon/3, \quad i = n, m.$$

Notando que $|x(s_n) - x(s_m)|$ es menor que la suma de $|x(s_n) - x_q(s_m)|$ y $|x_q(s_m) - x(s_m)|$, ambos menores que $\varepsilon/3$, la demostración está completa. \diamond

El siguiente teorema es una generalización a las funciones continuas a pedazos del Teorema de Arzela-Ascoli.

Teorema 5 Cada conjunto $F \subset SP((\alpha, \beta), \{\tau_k\})$, $0 \leq \alpha < \beta < \infty$, infinito, interiormente equicotado y equicontinuo contiene una sucesión convergente u. p. a una función x en $PC((\alpha, \beta), \{\tau_k\})$.

Demostración: El Lema 7 permite extraer desde F una sucesión $\{x_n\}$ de p_0 -puntos de impulso convergentes, $P_{x_n}^j \rightarrow (t_j, x_j) \in \Gamma_j$ cuando $n \rightarrow \infty$, $l_0 < j < r_0$, $r_0 = l_0 + p_0 + 1$. Enumerando los números racionales en $(\alpha, \beta) - \{t_{l_0+1}, \dots, t_{l_0+p_0+1}\}$ es posible suponer, pasando a una subsucesión si es necesario, que $\{x_n(q)\}$ converge para aquellos racionales q . Así, dado $\varepsilon > 0$, existe entero $N_q > 1$ tal que $|x_n(q) - x_m(q)| < \varepsilon/3$ si $n, m > N_q$.

Podemos elegir $\delta > 0$ tal que, si $x \in \{x_n\}$, $l_0 \leq j < r_0$, $t, \tilde{t} \in (t_x^j, t_x^{j+1}]$ y $|t - \tilde{t}| < \delta$, entonces $|x(t) - x(\tilde{t})| < \varepsilon/3$.

Considere una partición de (α, β) en subintervalos I_1, \dots, I_p de longitud menores que δ y con los tiempos $t_{l_0+1}, \dots, t_{l_0+p_0}$ en sus bordes. Fijemos en el interior de cada I_k un número irracional q_k , $k = 1, \dots, p$.

Sea $t \in (\alpha, \beta)$, $t \neq t_j$, $l_0 < j < r_0$, entonces t está en algún I_k , k en $\{1, 2, \dots, p\}$. Tenemos

$$t_j < t, \quad q_k < t_{j+1} \text{ para algún } l_0 < j < r_0.$$

Tomemos $N_j > 1$ con

$$2|t_{x_n}^j - t_i| < \min\{|t - t_i|, |q_k - t_i|\},$$

para cada $n \geq N_j$, $i = j, j + 1$.

Concluimos que $|x_n(t) - x_m(t)|$ es menor o igual que

$$|x_n(t) - x_n(q_k)| + |x_n(q_k) - x_m(q_k)| + |x_m(q_k) - x_m(t)| < \varepsilon,$$

si $n, m > \max\{N_j, N_q\}$. En otras palabras $\{x_n(t)\}$ es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto, la sucesión es convergente a algún $x(t)$. Si $t = t_j$, $l_0 < j < r_0$, definimos $x(t) = x_j$.

Afirmamos que $\{x_n\}$ es convergente u. p. a la función construida x . En efecto, dándonos una distancia mínima $\eta > 0$ desde t_j , $l_0 < j < r_0$, para tomar nuestro tiempo $t \in (\alpha, \beta)$, es posible haber elegido N_j , $j \leq r_0$, con independencia de t . Así, si $t \in (\alpha, \beta)$, $|t - t_j| > \eta$, $l_0 < j < r_0$, y $n, m > \max\{N_{l_0+1}, \dots, N_{l_0+p}, N_{q_1}, \dots, N_{q_p}\}$ entonces $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$. El resto de las propiedades de x son deducidas desde Lema 8 y Lema 9. \diamond

La función x del teorema puede impactar algunas superficies Γ_k en otros tiempos diferentes de t_k , $l_0 < k < r_0$, pero esta es continua en aquellos tiempos. Este hecho impide escribir $x \in SP(I, \{\tau_k\})$. Veamos un ejemplo, al considerar $I = [0, 4]$, $\Omega = \mathfrak{R}$, una superficie de impulso Γ defina por

$$\tau(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

y una sucesión

$$x_n(t) = \begin{cases} t - (n - 1)/n & \text{si } t \in [0, 3] \\ 0 & \text{si } t \in (3, 4]. \end{cases}$$

Vemos que esta sucesión converge u. p. a $x(t) = t - 1$ si $t \in [0, 3]$ y $x(t) = 0$ si $t \in (3, 4]$. La intersección del gráfico de x_n con Γ es el punto $(3, 3 - (n - 1)/n)$, punto que tiende a $(3, x(3)) = (3, 2) \in \Gamma$, cuando $n \rightarrow \infty$. Pero la función límite, x , intersecta Γ también en $(1, x(1)) = (1, 0)$, mas x es continua en dicho punto.

3.3 Existencia de soluciones vía aproximaciones

Consideremos el P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x = \varphi_k(x), & t = \tau_k(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

de una E.D.I. de pulsos consecutivos.

Demostraremos que (3.1) tiene solución vía una sucesión de funciones aproximantes. Para ello primero definiremos que entendemos por ε -solución aproximada de (3.1) y mostraremos que tales funciones existen. Luego dada una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ que decrece a cero, tomando respectivas ε_n -soluciones aproximadas, probaremos que estas convergen (en el sentido de la Definición 4) a una solución de (3.1), para ello hacemos uso del teorema de compacidad de la sección anterior.

Recordemos que estamos considerando que (3.1) satisface por definición las propiedades i) a iv) de la sección 2.1 y las hipótesis del Teorema 3, a las que agregamos la existencia de constantes $M > 0$ y $N_k > 0$, $k \geq 1$, tales que

$$|f(t, x)| \leq M, \text{ para todo } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega,$$

y

$$|\varphi_k(x)| \leq N_k, \text{ para todo } x \in \Omega \text{ y } k \geq 1.$$

Definición 7 Una función $x \in SP([\alpha, \beta], \{\tau_k\})$, $0 < \alpha < t_0 < \beta \leq \infty$, se llama una ε -solución aproximada de (3.1) sobre $(\alpha, \beta) \times \Omega$ si

(i) $(t, x(t)) \in \Omega$ para cada $t \in (\alpha, \beta)$,

(ii) la derivada \dot{x} existe sobre (α, β) , excepto para un conjunto finito $\Lambda \subset (\alpha, \beta)$, con t_x^j (instante en que el gráfico de x intersecta Γ_j) en Λ , $l_x < j < r_x$, donde \dot{x} puede tener discontinuidades simples,

(iii)

$$|\dot{x}(t) - f(t, x(t))| \leq \varepsilon \text{ para cada } t \in (\alpha, \beta) - \Lambda$$

y

$$|\Delta x(t_x^j) - \varphi_j(x(t_x^j))| \leq \varepsilon \text{ para cada } l_x < j < r_x.$$

Sea $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \Omega$, tomemos a y b constantes positivas tal que el cilindro

$$R_{a,b} = \{(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b\}$$

está contenido en $(0, \infty) \times \Omega$.

A continuación damos algunos conceptos y observaciones que nos permitirá definir ciertos parámetros que utilizaremos en lo que sigue.

Si el punto (t_0, x_0) pertenece al interior de Ω_{l+1} para algún $l \geq 1$, entonces bajo las condiciones que definen la ecuación (3.1) definimos

$$\tilde{\Gamma}_1 = \{(t, x) \in \Gamma_{l+1} \cap R_{a,b} : |x - x_0| \leq M(t - t_0)\}.$$

Si $\tilde{\Gamma}_1 \neq \phi$, sea ν_1 el mínimo entre los tiempos t tal que $(t, x) \in \tilde{\Gamma}_1$ para algún $x \in \Omega$.

Consideremos ahora el conjunto

$$\tilde{\Gamma}_2 = \{(t, x) \in \Gamma_{l+2} \cap R_{a,b} : |x - x_0| \leq M(t - t_0) + N_{l+1}, t \geq \nu_1\}.$$

Si $\tilde{\Gamma}_2 \neq \phi$, entonces tomamos $\nu_2 \geq \nu_1$, el mínimo tiempo, primera coordenada, entre los puntos de $\tilde{\Gamma}_2$.

Continuamos formando un respectivo conjunto $\tilde{\Gamma}_3$ de los $(t, x) \in \Gamma_{l+3} \cap R_{a,b}$ tal que

$$|x - x_0| \leq M(t - t_0) + N_{l+1} + N_{l+2} \text{ y } t \geq \nu_2.$$

Si $\tilde{\Gamma}_3 \neq \phi$, procedemos de manera ya obvia a elegir $\nu_3 \geq \nu_2$.

Siguiendo con este procedimiento conseguimos conjuntos no vacíos $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_{p_0}$ y tiempos $t_0 = \nu_0 \leq \nu_1 \leq \dots \leq \nu_{p_0} < \nu_{p_0+1} = \infty$ tal que $\tilde{\Gamma}_j$ es igual al conjunto de los $(t, x) \in \Gamma_{l+j} \cap R_{a,b}$, $t \geq \nu_{j-1}$ tal que

$$|x - x_0| \leq M(t - t_0) + \sum_{k=1}^{j-1} N_{l+k}$$

y

$$\nu_j = \min\{t : (t, x) \in \tilde{\Gamma}_j, \text{ para algún } x \in \Omega\},$$

para todo $j = 1, \dots, p_0$. Además si formamos $\tilde{\Gamma}_{p_0+1}$ este resulta ser el conjunto vacío.

Definimos $h : (t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ por

$$h(t) = M(t - t_0) + \sum_{k=1}^{j-1} N_{l+k},$$

si $\nu_{j-1} < t \leq \nu_j$, $j = 1, \dots, p_0 + 1$. Esta función es creciente y continua a pedazos. Sea

$$\mu = \begin{cases} h^{-1}(b) & \text{si } b \in \text{Im}(h) \\ \nu_j & \text{si } h(\nu_j) \leq b \leq h(\nu_j^+), 1 \leq j \leq p_0. \end{cases}$$

Finalmente definamos $\eta = \min\{t_0 + a, \mu\}$.

En lo que sigue dado $\varepsilon > 0$ se presentamos una ε -solución aproximada de (3.1), para ello seguimos un método tipo Euler, de construcción de una poligonal a pedazos aproximante de una solución.

En el lema y teorema que siguen supondremos, sin pérdida de generalidad, que $(t_0, x_0) \notin \Gamma$, de no ser así basta trabajar el P.V.I. (3.1) con condición inicial en $(t_0, I_k(x_0))$ y redefinir las funciones resultantes en t_0 con valor x_0 .

Lema 9 Para cada $\varepsilon > 0$ existe una poligonal a pedazos $y \in SP([t_0, \eta], \{\tau_k\})$, que es una ε -solución aproximada de (3.1) tal que $y(t_0) = x_0$.

Demostración: Notemos que bajo nuestros supuestos

$$\frac{\partial \tau_{l+j}}{\partial x}(x) f(t, x) < 1 \text{ para todo } (t, x) \in \tilde{\Gamma}_j, j = 1, \dots, p_0.$$

Por la continuidad de $\frac{\partial \tau_k}{\partial x}$ en Ω , $k \geq 1$, y de f en $(0, \infty) \times \Omega$ tenemos que dado j , $j = 1, \dots, p_0$, para cada $(t, x) \in \tilde{\Gamma}_j$, existe vecindad $U_{(t,x)} \subset (0, \infty) \times \Omega$ tal que

$$\frac{\partial \tau_{l+j}}{\partial x}(y) f(s, y) < 1 \text{ para todo } (s, y) \in U_{(t,x)}.$$

La familia $U_{(t,x)}$, $(t, x) \in \tilde{\Gamma}_j$, es un recubrimiento de $\tilde{\Gamma}_j$, como $\tilde{\Gamma}_j$ es compacto, existe un recubrimiento finito de $\tilde{\Gamma}_j$. Es claro entonces que podemos elegir $\rho > 0$ tal que

$$\frac{\partial \tau_{l+j}}{\partial x}(y) f(s, y) < \gamma < 1 \text{ para todo } (s, y) \text{ tal que } |\tau_{l+j}(y) - s| < \rho.$$

Elijamos ζ cota superior común del conjunto de los $|\frac{\partial \eta_{j+1}}{\partial x}(y)|$ tal que $|y - x_0| \leq b$, $j = 1, \dots, p_0$.

La continuidad de f sobre $(0, \infty) \times \Omega$, también implica la continuidad uniforme sobre el cilindro compacto $R_{a,b}$. Así dado $0 < \varepsilon < (1 - \gamma)/\zeta$, existe $\delta > 0$, tal que

$$|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})| \leq \varepsilon, \tag{3.2}$$

para $(t, x), (\tilde{t}, \tilde{x}) \in R_{a,b}$ y $|t - \tilde{t}|, |x - \tilde{x}| < \delta_k$.

Consideremos una partición del intervalo (t_0, η) en subintervalos $(s_{j-1}, s_j]$, $1 \leq j \leq m$, de longitud menor que el mínimo entre δ , δ/M y ρ . Observemos que $s_0 = t_0$ y $s_m = \eta$.

En lo que sigue construiremos una poligonal que luego probaremos es la solución ε -aproximada buscada.

Definamos recursivamente las funciones

$$y(s) - y(s_k) = f(s_k, y(s_k))(s - s_k), \quad s \in (s_k, s_{k+1}], \tag{3.3}$$

con $y(s_0) = x_0$. De existir un primer $k = s_{p_1}$ tal que (3.3) intersecta $\tilde{\Gamma}_1$ en algún punto $(t_1, y(t_1))$, $s_{p_1} < t_1 \leq s_{p_1+1}$, entonces consideremos la poligonal construida sólo en el intervalo $(s_0, t_1]$. Para los tiempos $s \in (t_1, s_{p_1+1}]$ tomamos la función

$$y(s) - y(t_1^+) = f(t_1, y(t_1^+))(s - t_1), \tag{3.4}$$

donde $y(t_1^+) = y(t_1) + \varphi_{l+1}(y(t_1))$. Se prosigue para tiempos mayores a s_{p_1+1} con la definición recursiva (3.3) para $k \geq p_1 + 1$, hasta que exista $k = p_2$ para el cual el gráfico de (3.3) intersecta $\tilde{\Gamma}_2$ en $(t_2, y(t_2))$, $s_{p_2} < t_2 \leq s_{p_2+1}$, consideremos entonces la construcción hasta t_2 inclusive, para $s \in (t_2, s_{p_2+1}]$ definimos la función según (3.4) con t_2 en lugar de t_1 y φ_{l+2} en lugar de φ_{l+1} , luego nuevamente vía la recursión (3.3) para $k \geq p_2 + 1$, y así sucesivamente.

El proceso consigue en finitos pasos determinar tiempos t_1, \dots, t_q , $0 \leq q \leq p_0$, tal que

$$\begin{aligned} 0 &= s_0 \\ &< s_1 &< \dots < s_{p_1} < t_1 \\ &\leq s_{p_1+1} &< \dots < s_{p_2} < t_2 \\ &\dots \\ &\leq s_{p_{q-1}+1} &< \dots < s_{p_q} < t_q \\ &\leq s_{p_q+1} &< \dots < s_m = \eta. \end{aligned}$$

Recordemos que p_0 es el número máximo de superficies factibles de intersectar para una solución x de (3.1) con $(t, x) \in R_{a,b}$.

En consecuencia el valor de la función de pedazos poligonales construida para un $t \in (t_0, \eta)$ es

$$\begin{cases} x_0 & \text{si } t = 0 \\ y(s_{j-1}) + f(s_{j-1}, y(s_{j-1}))(t - s_{j-1}) & \text{si } t \in (s_{j-1}, s_j], \quad j \notin \{p_1 + 1, \dots, p_q + 1\} \\ y(s_{p_i}) + f(s_{p_i}, y(s_{p_i}))(t - s_{p_i}) & \text{si } t \in (s_{p_i}, t_i], \quad i \in \{1, \dots, q\} \\ y(t_i^+) + f(t_i, y(t_i^+))(t - t_i) & \text{si } t \in (t_i, s_{p_i+1}], \quad i \in \{1, \dots, q\}, \end{cases}$$

donde $y(t_i^+) = y(t_i) + \varphi_i(y(t_i))$.

La hipótesis de ausencia de pulsaciones junto a la elección de la finura de la partición menor que ρ nos asegura que $y \in SP((t_0, \eta), \{\tau_k\})$ con $l_y = l$ y $r_y = l + p_0 + 1$. En efecto, si el gráfico de la poligonal para un $t \in (s_k, s_{k+1})$ está por delante (en el sentido del tiempo) de la superficie $\tilde{\Gamma}_j$, algún $j = 1, \dots, p_0$, pero en el mismo sentido está a menos de ρ , esto es, $0 < t - \tau_{l+j}(y(t)) < \rho$, entonces la distancia $\sigma(t) = t - \tau_{l+j}(y(t))$ crece para $\tilde{t} > t$ vecino. Probemos lo anterior notando que por (3.3)

$$\sigma'(t) = 1 - \frac{\partial \tau_{l+j}}{\partial x}(y(t))f(s_k, y(s_k)),$$

expresión igual a

$$1 - \frac{\partial \tau_{l+j}}{\partial x}(y(t))f(t, y(t)) + \frac{\partial \tau_{l+j}}{\partial x}(y(t))[f(t, y(t)) - f(s_k, y(s_k))],$$

pero como

$$|t - s_k| < \delta \quad \text{y} \quad |y(t) - y(s_k)| < M|t - s_k| < M(\delta/M) = \delta,$$

por (3.2), se concluye

$$\sigma'(t) > (1 - \gamma) - \zeta\varepsilon > 0.$$

Las hipótesis (ii) del Teorema 3, permiten decir que la poligonal de intersectar otra superficie ésta debe ser $\tilde{\Gamma}_{j+1}$.

Construida la función $y : (t_0, \eta) \rightarrow \mathfrak{R}^n$, mostremos ahora que ella es una ε -solución aproximada de (3.1).

Si $t < \tilde{t}$ con

$$t, \tilde{t} \in (t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, q+1, \quad \text{donde } t_{q+1} = \eta,$$

entonces existe $k \in \{p_i + 1, \dots, p_{i+1}\}$ tal que

$$s_{k-1} < t \leq s_k < s_{k+1} < \dots < s_{k+j} < \tilde{t} < s_{k+j+1},$$

para algún j tal que $p_i - k + 1 \leq j \leq p_{i+1} - k$.

Así $y(\tilde{t}) - y(t)$ es igual a $y(s_k)$ más

$$\begin{aligned} & f(s_k, y(s_k))(s_{k+1} - s_k) + \\ & f(s_{k+1}, y(s_{k+1}))(s_{k+2} - s_{k+1}) + \\ & \dots + \\ & f(s_{k+(j-1)}, y(s_{k+(j-1)}))(s_{k+j} - s_{k+(j-1)}) + \\ & f(s_{k+j}, y(s_{k+j}))(\tilde{t} - s_{k+j}) - y(t). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Notemos que $y(s_k) = y(t) + f(s_{k-1}, y(s_{k-1}))(s_k - t)$, reemplazando en (3.5) tenemos

$$|y(\tilde{t}) - y(t)| \leq M|\tilde{t} - t| \quad \text{si } \tilde{t}, t \in (t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, q+1. \tag{3.6}$$

Ahora mostramos que y es una solución ε -aproximada. Tomemos $t \in (t_0, \eta) - \Lambda$, $\Lambda = \{s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_q\}$ y considere la relación (3.4).

Si $t \in (s_{j-1}, s_j)$, $j \notin \{p_1 + 1, \dots, p_q + 1\}$, entonces

$$|y(t) - y(s_{j-1})| = |f(s_{j-1}, y(s_{j-1}))||t - s_{j-1}| < M \delta / M = \delta$$

y

$$|\dot{y}(t) - f(t, y(t))| = |f(s_{j-1}, y(s_{j-1})) - f(t, y(t))| < \varepsilon.$$

Si $t \in (s_{p_i}, t_i)$, $i \in \{1, \dots, q\}$, entonces

$$|y(t) - y(s_{p_i})| = |f(s_{p_i}, y(s_{p_i}))||t - s_{p_i}| < M \delta / M = \delta$$

y

$$|\dot{y}(t) - f(t, y(t))| = |f(s_{p_i}, y(s_{p_i})) - f(t, y(t))| < \varepsilon.$$

Si $t \in (t_i, s_{p_{i+1}})$, $i \in \{1, \dots, q\}$, entonces

$$|y(t) - y(t_i^+)| = |f(t_i, y(t_i^+))||t - t_i| < M \delta / M = \delta$$

y

$$|\dot{y}(t) - f(t, y(t))| = |f(t_i, y(t_i^+)) - f(t, y(t))| < \varepsilon.$$

Por otro lado, si $t = t_i$, $i = 1, \dots, q$ entonces

$$|\Delta y(t_i) - \varphi_i(y(t_i))| = 0.$$

La demostración está completa. \diamond

Consideremos ahora una sucesión $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por el lema anterior existe sucesión de poligonales a pedazos $\{y_n\}$ tal que y_n es una ε_n -solución aproximada.

Teorema 6 *La sucesión de funciones $y_n : [t_0, \eta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, contiene una subsucesión convergente uniformemente a pedazos a una solución $x : [t_0, \eta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ del P.V.I. (3.1), con gráfico en $R_{a,b}$ y tal que $x(t_0) = x_0$.*

Demostración: Sea $\{\varepsilon_n\}$ una sucesión decreciente a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Para cada $n \geq 1$, consideremos y_n la solución ε_n -aproximada de (3.1) construida en el lema anterior. Notemos que $\{y_n\} \subset SP([t_0, \eta], \{\tau_k\})$ es una familia interiormente acotada, pues

$$|y_n(t)| \leq |x_0| + h(t) \leq |x_0| + h(\eta),$$

además desde (3.6) esta sucesión también es un conjunto equicontinuo.

Estamos en condiciones de aplicar el Teorema 5 para concluir que, pasando a subsucesiones si fuera necesario, que $\{y_n\}$ es de p_0 -puntos de impulso convergentes, puntos $P_{y_n}^j = (t_{y_n}^j, y(t_{y_n}^j))$, $l_0 < j < r_0 = l_0 + p_0 + 1$, convergentes a $P^j = (t^j, x^j)$ y que también es uniformemente convergente a pedazos a cierta función $x \in PC([t_0, \eta], \{\tau_k\})$.

Afirmamos que x verifica la ecuación integro-sumaria equivalente al P.V.I. (5.1), esto es,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds + \sum_{k=l_0+1}^j \varphi_k(x^k), \quad (3.7)$$

si $\tau_j(x(t)) < t \leq \tau_{j+1}(x(t))$.

La ecuación (3.7), de ser satisfecha, establece que x es solución de (3.1), tal que $x(t_0) = x_0$.

Probemos ahora (3.7). Notemos que, si $t_{y_n}^j < t \leq t_{y_n}^{j+1}$, $l_0 < j < r_0$, (suponiendo $t_{y_n}^0 = 0$ y $t_{y_n}^{r_0} = \eta$), entonces

$$y_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [f(s, y_n(s)) - U_n(s)]ds + \sum_{k=l_0+1}^j \varphi_k(y_n(t_{y_n}^k)), \quad (3.8)$$

donde $U_n(s) = \dot{y}_n(s) - f(s, y_n(s))$.

Vamos a probar que el lado derecho de (3.8) converge al lado derecho de (3.7), en el sentido de la convergencia de la Definición 4, es decir, como funciones continuas a pedazos. La convergencia de las sumatorias es clara por la continuidad de las funciones φ_k , $k \geq 1$. Respecto a las integrales, como la integral es absolutamente continua, dados $\varepsilon, \delta > 0$, existe $\gamma > 0$ y $N \geq 1$ tal que si la medida de Lebesgue de un conjunto E , $m(E)$, es menor que γ , entonces

$$\int_{t_0}^t |f(s, y_n(s)) - f(s, x(s))|ds < \varepsilon + \int_{[t_0, t] \cap E^c} |f(s, y_n(s)) - f(s, x(s))|ds,$$

y si $n \geq N$,

$$|y_n(t) - x(t)| < \varepsilon \quad \text{para cada } t \text{ tal que } |t - t_j| > \delta, \quad l_0 < j < r_0.$$

Así si $\mu = \min(\gamma, \delta)$ y

$$E = \bigcup_{j=l_0+1}^{l_0+p_0} (t_j - \frac{\mu}{2k_0}, t_j + \frac{\mu}{2k_0}),$$

por la convergencia uniforme de $\{y_n\}$ sobre $(t_0, \eta) \cap E^c$, la continuidad de φ_k , $k = l_0 + 1, \dots, l_0 + p_0$, y el hecho que

$$\int_0^t |U_n(s)|ds \leq \varepsilon t,$$

tenemos que el lado derecho de (3.8) es convergente u. p. a la función x . Por la unicidad del límite, la función lado derecho de (3.7) es x . \diamond

Capítulo 4

E.D.I. DE CAMPO E IMPULSO LINEAL

Este capítulo es un estudio introductorio a las E.D.I. en tiempos variables con ley diferencial de evolución lineal y con funciones que definen los impulsos lineales. Presentamos resultados sobre representación de soluciones, existencia y una fórmula de variación de parámetros. Finalizamos con algunas condicionantes para el acotamiento de soluciones.

4.1 Definiciones

Consideraremos en este capítulo ecuaciones impulsivas a tiempos variables que tienen la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, & t \neq \tau_k(x) \\ x(t^+) = A_k x, & t = \tau_k(x), \end{cases} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathfrak{R}^n, \quad (4.1)$$

y tales que:

- (i) la aplicación que a cada $t \in (0, \infty)$ asocia $A(t) \in M_{n \times n}(\mathfrak{R})$ es una función continua;
- (ii) $A_k \in M_{n \times n}(\mathfrak{R})$, para todo $k \geq 1$; y
- (iii) las funciones $\tau_k : \mathfrak{R}^n \rightarrow (0, \infty)$, $k \geq 1$ pertenecen a $C^1(\mathfrak{R}^n)$ y son tal que $\tau_1(x) < \tau_2(x) < \dots < \tau_k(x) \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$, para todo $x \in \mathfrak{R}^n$.

Una ecuación de este tipo, que es un caso particular de las E.D.I. a tiempos variables (2.1), se llamará *Sistema Lineal Homogéneo (S.L.H.)*.

Asumiremos también que la ecuación (4.1) satisface la condición de existencia local del Teorema 1, es decir,

- (iv) para todo $x \in \mathfrak{R}^n$ y $k \geq 1$ se tiene

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x) A(\tau_k(x)) x \neq 1.$$

Observemos que en general no toda combinación lineal de soluciones (de igual dominio) de (4.1) resulta ser otra solución, a menos que (4.1) sea una E.D.I. a tiempos fijos, es decir, las funciones τ_k , $k \geq 1$, constantes. Lo anterior ha determinado que la teoría de los S.L.H. no tenga un absoluto paralelo con la de impulsos a tiempos fijos y por lo mismo, se encuentre con un escaso desarrollo.

4.2 Representación de las soluciones de un S.L.H.

Designaremos por $\Phi(t)$, $t \in (0, \infty)$, a alguna matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$, $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathfrak{R}^n$, la E.D.O. asociada a (4.1).

Sea $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$, un elemento de $PC((\alpha, \beta), \{\tau_k\})$, podemos definir la función $\Psi_x : (\alpha, \beta) \rightarrow M_{n \times n}(\mathfrak{R})$ tal que

$$\Psi_x(s) = \begin{cases} I & \text{si } s \neq \tau_k(x(s)), \text{ para todo } k \geq 1 \\ \Phi(s)^{-1} A_k \Phi(s) & \text{si } s = \tau_k(x(s)), \text{ para algún } k \geq 1. \end{cases}$$

Si los tiempos $s \in (\alpha, \beta)$ tal que $(s, x(s)) \in \Gamma$ no se acumulan, T_x discreto, entonces dado $t_0 \in (\alpha, \beta)$ es posible definir la función que a cada $t \in (\alpha, \beta)$ le asocia la matriz

$$\Pi_x[t_0, t] = \prod_{s \in [t_0, t]} \Psi_x(s). \quad (4.2)$$

Entenderemos que el lado derecho de (4.2) es igual a $(\prod_{s \in [t, t_0]} \Psi_x(s))^{-1}$, que denotaremos por $\Pi_x^{-1}[t, t_0]$, cuando $t < t_0$ y el producto entre paréntesis es una matriz invertible, por ejemplo, este es el caso si asumimos A_k , $k \geq 1$, invertible. Debemos entender también que $\Pi_x[t, t] = I$, para todo $t > 0$.

La definición de $\Pi_x[t_0, t]$, $t \in (\alpha, \beta)$, es un producto de finitos $\Psi_x(s) \neq I$ con $s \in [t_0, t]$. En efecto, de existir infinitos tiempos $s \in [t_0, t]$ tal que $\Psi_x(s) \neq I$, entonces estos pertenecen a $T_x \cap [t_0, t]$, y necesariamente se han de acumular en algunos tiempos de T_x , tiempos de impulso de x , como T_x es discreto, esto no ocurre.

En el desarrollo de la productoria (4.2) el término $\Psi_x(s_1)$ aparece a la derecha de $\Psi_x(s_2)$ si $\alpha < s_1 < s_2 < \beta$, notemos que en este caso $\Pi_x[t_0, s_2] = \Pi_x[s_1, s_2] \Pi_x[t_0, s_1]$.

El siguiente lema da una representación para las soluciones de (4.1).

Lema 10 *Sea $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathfrak{R}^n$ y x en $PC([t_0, \beta), \{\tau_k\})$ tal que T_x es discreto. Entonces x es solución de (4.1) con valor inicial $x(t_0) = x_0$ si y sólo si*

$$x(t) = \Phi(t)(\Pi_x[t_0, t])\Phi^{-1}(t_0)x_0, \quad (4.3)$$

para todo $t \in [t_0, \beta)$.

Demostración: Llamaremos $\Phi_x(t)$ al lado derecho de (4.3) y demostraremos que $x(t) = \Phi_x(t)$ para todo $t \in [t_0, \beta)$. La igualdad es clara para $t = t_0$.

Sea $t \in (t_0, \beta)$ y elijamos \tilde{t} el mayor entre los $s \in (t_0, t)$ tal que $(s, x(s)) \in \Gamma_k$, para algún $k \geq 1$, esta elección es posible gracias a la condición de no acumulación de las discontinuidades de x . Luego

$$\Phi_x(t) = \Phi(t)\Pi_x[\tilde{t}, t]\Pi_x[t_0, \tilde{t}]\Phi^{-1}(t_0)x_0,$$

como $\Pi_x[\tilde{t}, t] = \Psi_x(\tilde{t}) = \Phi^{-1}(\tilde{t})A_k\Phi(\tilde{t})$, tenemos

$$\Phi_x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tilde{t})A_k\Phi_x(\tilde{t}).$$

Si se verificara la igualdad $\Phi_x(\tilde{t}) = x(\tilde{t})$, entonces como x es solución de (4.1), tendríamos $x(\tilde{t}^+) = A_kx(\tilde{t}) = A_k\Phi_x(\tilde{t})$ y por lo tanto, $\Phi_x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tilde{t})x(\tilde{t}^+)$, que claramente es igual a $x(t)$, pues en el intervalo $(\tilde{t}, t]$ el sistema está dominado por su parte ordinaria. De modo que resta mostrar que $\Phi_x(\tilde{t}) = x(\tilde{t})$, tal como lo hemos hecho para pasar de t a \tilde{t} , es posible reducirse ahora al tiempo de impulso anterior a \tilde{t} , y así paso a paso por las finitas discontinuidades de x en (t_0, t) a verificar solamente $\Phi_x(t_0) = x(t_0)$, lo que es claro, pues ambos lados de esta expresión son iguales a x_0 .

Inversamente si $x \in PC([t_0, \beta), \{\tau_k\})$, $0 < t_0 < \beta \leq \infty$, satisface (4.3) para todo t en $[t_0, \beta)$ y T_x es discreto, probaremos que x es solución de (4.1) con $x(t_0) = x_0$. De hecho si $t \in (t_0, \beta)$ es tal que $(t, x(t)) \notin \Gamma$, entonces existe una vecindad de t donde $\Pi_x[t_0, t]$ es constante, luego $x'(t)$ es igual a

$$\Phi'(t)\Pi_x[t_0, t]\Phi^{-1}(t_0)x_0,$$

que a su vez es igual a

$$A(t)\Phi(t)\Pi_x[t_0, t]\Phi^{-1}(t_0)x_0,$$

por lo tanto, se tiene $x'(t) = A(t)x(t)$. Por otro lado, si $t = \tau_k(x(t))$, para algún $k \geq 1$, entonces

$$\Pi_x[t_0, t^+) = \Psi_x(t)\Pi_x[t_0, t] \quad \text{y} \quad \Psi_x(t) = \Phi^{-1}(t)A_k\Phi(t),$$

igualdades de las cuales se concluye

$$x(t^+) = \Phi(t)(\Phi^{-1}(t)A_k\Phi(t))\Pi_x[t_0, t]\Phi^{-1}(t_0)x_0 = A_kx(t),$$

lo que finaliza la demostración. \diamond

Si a las hipótesis del Lema 10 sumamos que A_k , $k \geq 1$, sea invertible, entonces este lema se cumple para funciones en $PC((\alpha, \beta), \{\tau_k\})$ con $0 \leq \alpha < t_0 < \beta \leq \infty$.

Observaremos ahora algunas de las distintas formas que puede tomar la representación (4.3) según estén definidos los elementos del S.L.H. (4.1).

Si dado $k \geq 1$, la matriz A_k conmuta con $A(t)$, para todo $t > 0$, entonces

$$\Psi_x(s) = \begin{cases} I & \text{si } s \neq \tau_k(x(s)), \text{ para todo } k \geq 1 \\ A_k & \text{si } s = \tau_k(x(s)), \text{ para algún } k \geq 1. \end{cases}$$

En este caso al tomar $t \in [t_0, \beta)$, definimos por $i_x[t_0, t)$ al número de veces que el gráfico de $x \in PC([t_0, \beta), \{\tau_k\})$, T_x discreto, intersecta a alguna hipersuperficie antes del instante t , entonces al suponer que estas hipersuperficies de impulso son $\Gamma_{k_1}, \Gamma_{k_2}, \dots, \Gamma_{k_{i_x(t_0, t)}}$, con $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_{i_x(t_0, t)}$, la igualdad (4.3) toma la forma

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \left(\prod_{j=1}^{i_x[t_0, t)} A_{k_j} \right) x_0,$$

donde $\Phi(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$.

Otra posibilidad es que para cada $k \geq 1$, la correspondiente hipersuperficie Γ_k , sea un hiperplano de la forma, $\Gamma_k : t = \tau_k$, entonces ahora necesariamente cada solución $x : [t_0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (4.1) pertenece a $SP([t_0, \beta), \{\tau_k\})$ y, por lo tanto,

$$\Pi_x[t_0, t) = \prod_{k=k_0+1}^{k_0+i[t_0, t)} \Phi^{-1}(\tau_k) A_k \Phi(\tau_k), \quad t \in [t_0, \beta),$$

donde $i[t_0, t)$ es $i_x[t_0, t)$ sin la dependencia de x , pues esta ya no existe y además k_0 es el mayor entero k tal que $\tau_k \leq t_0$. Notemos también que en este caso no existe dependencia de $\Pi_x[t_0, t)$ con la función x salvo por el valor de t_0 , luego simplemente anotaremos $\Pi[t_0, t)$. Observemos además que la expresión (4.3) ahora determina explícitamente las soluciones, esto es,

$$x(t) = \Phi(t)\Pi[t_0, t)\Phi^{-1}(t_0)x_0.$$

Si además A_k , $k \geq 1$, conmutan con $A(t)$, para todo $t > t_0$, entonces

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \left(\prod_{k=1}^{i(t_0, t)} A_{k_0+k} \right) x_0.$$

4.3 Un teorema de existencia

Por el Teorema 1 sabemos que cada P.V.I. definido por (4.1) tiene una solución de dominio local, pero dicho teorema no nos dice cómo es esta solución y tampoco especifica su dominio. En esta sección presentaremos un resultado que da respuesta a estas interrogantes para el P.V.I. definido por la ecuación (4.1) y la condición inicial $x(t_0) = x_0$, para algún par (t_0, x_0) en $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Esto se hará por etapas. Primero, al suponer algunas condiciones naturales sobre las hipersuperficies Γ_k , $k \geq 1$, probaremos la equivalencia de este problema con un P.V.I. donde la ecuación lineal ordinaria asociada toma la forma $y'(t) = 0$. Seguidamente mostraremos que este último problema es a su vez equivalente a uno en ecuaciones en diferencias. Desde éste último la existencia se obtiene en forma inmediata. Finalmente ilustraremos este resultado con un ejemplo.

A cada x en $PC((\alpha, \beta), \{\tau_k\})$, $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$, le asociaremos la función $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $y(t) = \Phi^{-1}(t)x(t)$, donde Φ es alguna matriz de soluciones linealmente independientes, matriz fundamental, de

$$u' = A(t)u, \quad (t, u) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad (4.4)$$

que sabemos es invertible para todo $t > 0$. De inmediato interesa saber si $y \in PC((\alpha, \beta), \{\tilde{\tau}_k\})$, para cierta familia $\{\tilde{\tau}_k\}_{k \geq 1}$ factible de definir hipersuperficies de impulso y de ser el caso, si y es solución de alguna E.D.I. cuando x lo es.

Sea $x : [t_0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < t_0 < \beta \leq \infty$, una solución de (4.1) tal que $x(t_0) = x_0$. Tomemos t en $[t_0, \beta)$ tal que $(t, x(t)) \notin \Gamma$ (equivalentemente $(t, \Phi(t)y(t)) \notin \Gamma$), entonces $y'(t)$ es igual a

$$(\Phi^{-1}(t))'x(t) + \Phi^{-1}(t)x'(t),$$

es decir,

$$y'(t) = -\Phi^{-1}(t)A(t)x(t) + \Phi^{-1}(t)A(t)x(t) = 0.$$

Por otro parte, si $t = \tau_k(x(t))$ (o lo que es lo mismo, $t = \tau_k(\Phi(t)y(t))$) para algún $k \geq 1$, entonces $y(t^+)$ es

$$\Phi^{-1}(t)x(t^+), \quad \text{que a su vez es igual a } \Phi^{-1}(t)A_k x(t),$$

de modo que

$$y(t^+) = \Phi^{-1}(t)A_k \Phi(t)y(t).$$

En otras palabras, hemos establecido que y es solución de un problema de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} \dot{y} = 0, & (t, y(t)) \notin \tilde{\Gamma}_k \\ y(t^+) = \Phi^{-1}(t)A_k \Phi(t)y(t), & (t, y(t)) \in \tilde{\Gamma}_k, \\ y(t_0) = \Phi^{-1}(t_0)x_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

donde para todo $k \geq 1$, la hipersuperficie $\tilde{\Gamma}_k$ está definida por los puntos $(t, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ tal que $t = \tau_k(\Phi(t)y)$, para todo $k \geq 1$. Pero observemos que las hipersuperficies de impulso de las E.D.I. a tiempos variables en estudio aparecen como gráficos de funciones de clase C^1 , con las hipersuperficies $\tilde{\Gamma}_k$, $k \geq 1$, éste no necesariamente será el caso.

Para afirmar que cada hipersuperficie $\tilde{\Gamma}_k$, $k \geq 1$, también es el gráfico de cierta función de clase C^1 , $\tilde{\tau}_k : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$, $k \geq 1$, supondremos las condiciones que el Teorema de la Función Implícita para tal efecto impone. Así debemos exigir que la función $H_k(t, y) = t - \tau_k(\Phi(t)y)$, $(t, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $k \geq 1$, sea continua, con derivada continua y tal que si

$$H_k(t, y) = t - \tau_k(\Phi(t)y) = 0,$$

entonces

$$\frac{\partial H_k}{\partial t}(t, y) = 1 - \frac{\partial \tau_k}{\partial y}(\Phi(t)y)A(t)\Phi(t)y \neq 0. \quad (4.6)$$

Notemos que la expresión (4.6) no es más que la condición geométrica (iv), sección 4.1, asociada a la existencia local de soluciones, (2.10) del Teorema 1.

De modo que siempre podemos escribir $\tilde{\Gamma}_k : t = \tilde{\tau}_k(y)$, para cierta función continua y de derivada continua $\tilde{\tau}_k : \mathfrak{R}^n \rightarrow (0, \infty)$, $k \geq 1$. Para que (4.5) sea una E.D.I. a tiempo variable $\{\tilde{\tau}_k\}$, debe cumplir la desigualdad $\tilde{\tau}_k(y) < \tilde{\tau}_{k+1}(y)$, para todo $y \in \mathfrak{R}^n$ y $k \geq 1$, para ello basta verificar que $\tilde{\Gamma}_k \cap \tilde{\Gamma}_{k+1} = \emptyset$ y además $\tilde{\tau}_k(0) < \tilde{\tau}_{k+1}(0)$, $k \geq 1$. Esto último es inmediato pues $\tilde{\tau}_k(0) = \tau_k(0) < \tau_{k+1}(0) = \tilde{\tau}_{k+1}(0)$, para todo $k \geq 1$. Si $(t, y) \in \tilde{\Gamma}_k \cap \tilde{\Gamma}_{k+1}$, para algún $k \geq 1$, entonces $t = \tau_k(\Phi(t)y) = \tau_{k+1}(\Phi(t)y)$ lo que es una contradicción ya que $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$, para todo $x \in \mathfrak{R}^n$.

También debemos tener que $\tilde{\tau}_k(z) \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$, para todo $z \in \mathfrak{R}^n$. Si $\lim \tilde{\tau}_k(z) = l < \infty$, notemos que si $k_0 \geq 1$, entonces

$$\tilde{\tau}_k(z) = \tau_k(\Phi(\tilde{\tau}_k(z))z) > \tau_{k_0}(\Phi(\tilde{\tau}_k(z))z) \text{ para todo } k \geq k_0. \quad (4.7)$$

Al hacer $k \rightarrow \infty$ en (4.7) se concluye que $l \geq \tau_{k_0}(\Phi(l)z)$, como k_0 es cualquiera tenemos $l \geq \lim \tau_{k_0}(\Phi(l)z) = \infty$, lo que es una contradicción.

Inversamente, dada $y : (t_0, \beta) \rightarrow \mathfrak{R}^n$ una solución de la E.D.I. (4.5), probar que $x(t) = \Phi(t)y(t)$, $t \in (t_0, \beta)$, es solución de (4.1) con $x(t_0) = x_0$, es suficientemente inmediato como para agotar al lector.

En resumen hemos probado el siguiente resultado:

Lema 11 Sea $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathfrak{R}^n$. Entonces el P.V.I. definido por (4.1) y $x(t_0) = x_0$ es equivalente a

$$\begin{cases} \dot{y} = 0, & t \neq \tilde{\tau}_k(y(t)) \\ y(t^+) = I_k(y(t)), & t = \tilde{\tau}_k(y(t)), \\ y(t_0) = \Phi^{-1}(t_0)x_0, \end{cases} \quad (4.8)$$

donde $\tilde{\tau}_k : \mathfrak{R}^n \rightarrow (0, \infty)$, $k \geq 1$, son las funciones definidas implícitamente por $t = \tau_k(\Phi(t)y)$, $k \geq 1$, y además $I_k(y) = \Phi^{-1}(\tilde{\tau}_k(y))A_k\Phi(\tilde{\tau}_k(y))y$, $y \in \mathfrak{R}^n$.

Notemos que de acuerdo al Lema 10, si x es solución de (4.1), como T_x es discreto, entonces la correspondiente solución $y(t)$ de (4.8) que el Lema 11 otorga es $\Pi_x[t_0, t]\Phi^{-1}(t_0)x_0$, $t \geq t_0$. Como en (4.8) el campo es nulo claramente esta E.D.I. satisface la condición (2.1) de existencia local de soluciones.

Lema 12 Sea $(t_0, \eta) \in (0, \infty) \times \mathfrak{R}^n$ tal que $\tilde{\tau}_{p-1}(\eta) \leq t_0 < \tilde{\tau}_p(\eta)$ para algún $p \geq 1$. Si el P.V.I. (4.8) es de pulsos consecutivos, es decir,

$$\tilde{\tau}_k(I_k(y)) \leq \tilde{\tau}_k(y) < \tilde{\tau}_{k+1}(I_k(y)), \text{ para todo } y \in \mathfrak{R}^n \text{ y } k \geq p, \quad (4.9)$$

entonces el P.V.I. (4.8) con $y(t_0) = \eta$ es equivalente al problema en diferencias

$$\begin{cases} z(k+1) = I_k(z(k)) \\ z(p) = \eta, \quad k \geq p. \end{cases} \quad (4.10)$$

Demostración: Sea $y : [t_0, \beta) \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $0 < t_0 < \beta \leq \infty$, una solución de (4.8) tal que $y(t_0) = \eta$. Notemos que si $t_k \in (t_0, \beta)$ es tal que $t_k = \tilde{\tau}_k(y(t_k))$ para algún $k \geq p$, entonces desde la desigualdad (4.9) se tiene que el punto $(t_k, I_k(y(t_k)))$ es interior a la región Ω_{k+1} , subconjunto de $(0, \infty) \times \mathfrak{R}^n$, limitado por las hipersuperficies $\tilde{\Gamma}_k$ y $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ o este punto pertenece a $\tilde{\Gamma}_k$. Para $t > t_k$, $y(t) = I_k(y(t_k))$, mientras el gráfico de y permanezca en Ω_{k+1} . Dicho gráfico es una línea recta ($y' = 0$) y de intersectar otra superficie en un instante t_{k+1} , esta debe ser la frontera derecha de Ω_{k+1} , es decir, $\tilde{\Gamma}_{k+1}$. Como (t_0, η) pertenece a $\tilde{\Gamma}_{p-1}$ o al interior de Ω_p , se obtiene que la primera hipersuperficie posible de intersectar es $\tilde{\Gamma}_p$. Luego si $k(\beta)$ es el número de hipersuperficies intersectadas antes de β , entonces existen únicos $t_0 < t_p < t_{p+1} < \dots < t_{p+k(\beta)} < \beta$ tal que $t_{p+i} = \tilde{\tau}_{p+i}(y(t_{p+i}))$, $i = 0, \dots, k(\beta)$. Observemos que eventualmente $\beta < \infty$, pero $k(\beta) = \infty$. Definamos

$$z(p+i) = y(t_{p+i}), \quad i = 0, 1, \dots, k(\beta).$$

Afirmamos que $\{z(p+k)\}_{k=0, \dots, k(\beta)}$ es una solución de (4.10). En efecto dado $k = 0, \dots, k(\beta) - 1$, tenemos $z(p+k+1) = y(t_{p+k+1})$, como $y(t)$ es constante en $(t_{p+k}, t_{p+k+1}]$, se sigue

$$z(p+k+1) = y(t_{p+k}^+) = I_{p+k}(y(t_{p+k})),$$

a su vez igual a $I_{p+k}(z(p+k))$. Además $z(p) = y(t_p)$, luego $z(p) = y(t_0^+) = \eta$.

Inversamente si $z(k)$, $k = p, p+1, \dots, p+q$, con $q \leq \infty$, es solución de (4.10), entonces al definir $t_k = \tilde{\tau}_k(z(k))$, $k = p, p+1, \dots, p+q$, y la función

$$y(t) = z(k), \quad t \in (t_{k-1}, t_k], \quad k = p, p+1, \dots, p+q,$$

esta resulta ser solución de (4.8) con $y(t_0) = \eta$.

De hecho $t_0 \in [t_{p-1}, t_p)$ e $y(t) = z(p) = \eta$ para todo $t \in (t_{p-1}, t_p]$, entonces claramente $y(t_0^+) = \eta$. Como la función y es constante en cada intervalo (t_{k-1}, t_k) , obviamente $y'(t) = 0$ si $t \neq t_k = \tilde{\tau}_k(z(k)) = \tilde{\tau}_k(y(t_k))$ para todo $k = p, p+1, \dots, p+q$.

Ahora si $t = t_k$ para algún $k = p, p+1, \dots, p+q$, entonces $y(t^+)$ es el límite cuando $s \rightarrow t$, $s > t$, de $y(s)$, luego $s \in (t_k, t_{k+1}]$, de modo que $y(s) = z(k+1)$, pero $z(k+1) = I_k(z(k)) = I_k(y(t_k))$, por lo tanto, $y(t^+) = I_k(y(t))$. \diamond

Podemos sintetizar la aplicación consecutiva a la ecuación (4.1) de los lemas 11 y 12 en el siguiente teorema.

Teorema 7 Sea $(t_0, x_0) \in \text{int}(\Omega_p)$, algún $p \geq 1$. Si $z(k)$, $k \geq p$, es solución de (4.10) con $\eta = \Phi^{-1}(t_0)x_0$, entonces

$$x(t) = \Phi(t) \left(\prod_{j=p}^{k-1} I_j(z(j)) \right) \Phi^{-1}(t_0)x_0, \quad t \in (\tilde{\tau}_{k-1}(z(k-1)), \tilde{\tau}_k(z(k))],$$

$k \geq p$, se entiende $\tau_{p-1} \equiv 0$, es solución de (4.1) tal que $x(t_0) = x_0$.

Como la ecuación recursiva (4.10) siempre es solucionable, este resultado es efectivamente un teorema de existencia para los sistemas lineales homogéneos.

Ejemplo: Definamos las funciones $\tau_k : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ por $\tau_k(x) = \log(x) + (2k - 1)\log(2)$, $k \geq 1$. Claramente $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$, $k \geq 1$, y además $\tau_k(x) \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$, para todo $x \in (0, \infty)$. Sea $x_0 \geq 1$ y consideremos el P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}x, & t \neq \tau_k(x) \\ x(t^+) = \frac{1}{2}x, & t = \tau_k(x), \\ x(0) = x_0, & (t, x) \in [0, \infty) \times (0, \infty). \end{cases} \quad (4.11)$$

Notemos que las funciones τ_k , $k \geq 1$, tienen derivada continua y además

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x) \cdot A(\tau_k(x))x = \frac{1}{x} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \neq 1,$$

para todo $x \in (0, \infty)$ y $k \geq 1$.

Sin pérdida de generalidad tomamos $\Phi(t) = e^{\frac{1}{2}t}$. Por el último lema, (4.10) es equivalente a

$$\begin{cases} \dot{y} = 0, & t \neq \tilde{\tau}_k(y) \\ y(t^+) = \frac{1}{2}y, & t = \tilde{\tau}_k(y), \\ y(0) = x_0, & (t, y) \in [0, \infty) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (4.12)$$

donde $\tilde{\tau}_k : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ está dada implícitamente por $\tilde{\tau}_k(y) = \tau_k(e^{\frac{1}{2}\tilde{\tau}_k(y)}y)$, $k \geq 1$. En este caso es despejable y se tiene $\tilde{\tau}_k(y) = 2\tau_k(y)$, $y \in (0, \infty)$ y $k \geq 1$.

Fácilmente se verifica la condición $\tilde{\tau}_k(I_k(y)) < \tilde{\tau}_k(y) < \tilde{\tau}_{k+1}(I_k(y))$, $y \in (0, \infty)$ y $k \geq 1$, que nos asegura la ausencia de pulsaciones. En efecto, de la monotonía de la función logaritmo, se tiene

$$2\log\left(\frac{4^k}{2} \cdot \frac{1}{2}y\right) < 2\log\left(\frac{4^k}{2}y\right) < 2\log\left(\frac{4^{k+1}}{2} \cdot \frac{1}{2}y\right), \text{ para } y \in (0, \infty) \text{ y } k \geq 1.$$

Por lo tanto, la solución $z(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}x_0$ del problema en diferencias

$$\begin{cases} z(k+1) = \frac{1}{2}z(k) \\ z(1) = x_0, \end{cases}$$

y el Lema 12, nos dicen que

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}x_0, \text{ si } t \in (\tilde{\tau}_{k-1}(z(k-1)), \tilde{\tau}_k(z(k))], k \geq 1,$$

donde $\tilde{\tau}_0 \equiv 0$, es solución de (4.12).

Así por el teorema anterior una solución de (4.11) es

$$x(t) = e^{\frac{1}{2}t} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}x_0, \text{ si } t \in (\tilde{\tau}_{k-1}(z(k-1)), \tilde{\tau}_k(z(k))], k \geq 1,$$

solución posible de escribir más compactamente por

$$x(t) = e^{\frac{1}{2}t}(1/2)^{i_{x_0}(t)}x_0,$$

donde el indicador $i_{x_0} : (0, \infty) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ asigna a cada $t > 0$ el mayor entero no negativo k tal que

$$k < \frac{1}{\log(2)} \left[\frac{t}{2} - \log(x_0) \right].$$

4.4 Fórmula de variación de parámetros

La ecuación

$$\begin{cases} \dot{y} = A(t)y + f(t, y), & t \neq \tau_k(y) \\ y(t^+) = A_k y(t) + I_k(y(t)), & t = \tau_k(y), \end{cases} \quad (4.13)$$

con $(t, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, donde $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \geq 1$, será llamada *Sistema Lineal Impulsivo No Homogéneo*.

Sea $\Phi(t)$, $t > 0$, una matriz fundamental de $\dot{u} = A(t)u$, en $(0, \infty)$, como es usual denotamos por $\Phi(t, s)$ a $\Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ cuando $0 < s \leq t$.

Dada $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$, en $PC((\alpha, \beta), \{\tau_k\})$ definimos la función

$$\Theta_y(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq \tau_k(y(s)) \text{ para todo } k \geq 1 \\ I_k(y(s)) & \text{si } s = \tau_k(y(s)) \text{ para algún } k \geq 1. \end{cases}$$

Lema 13 Sea $(t_0, y_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Si $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq \alpha < t_0 < \beta \leq \infty$, es solución de (4.13) tal que $y(t_0) = y_0$, entonces satisface la ecuación:

$$y(t) = \Phi(t)\Pi_y[t_0, t]\Phi^{-1}(t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Pi_y[s, t]\Phi^{-1}(s)f(s, y(s))ds + \sum_{t_0 < s < t} \Phi(t)\Pi_y(s, t)\Phi^{-1}(s)\Theta_y(s), \quad (4.14)$$

para todo $t \in [t_0, \beta)$.

Demostración: Sea $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución del sistema impulsivo (4.13) tal que $y(t_0) = y_0$. Si en (4.14) hacemos $t = t_0$ la igualdad es inmediata. Sea $t \in (t_0, \beta)$ y tomemos $\tilde{t} \in (t_0, \beta)$ el mayor momento de impulso de y , tal que $\tilde{t} < t$, esta elección siempre es posible pues T_y es discreto. De este modo necesariamente existe $k \geq 1$ tal que $(\tilde{t}, y(\tilde{t})) \in \Gamma_k$. Si $G_y(t)$ representa el lado derecho de la igualdad (4.14), entonces primero demostraremos que $y(\tilde{t}) = G_y(\tilde{t})$ implica $y(t) = G_y(t)$. En efecto aplicando la fórmula de variación de parámetros usual a la E.D.O. asociada a (4.13) entre \tilde{t} y t , tenemos

$$y(t) = \Phi(t, \tilde{t})y(\tilde{t}^+) + \int_{\tilde{t}}^t \Phi(t, s)f(s, y(s))ds.$$

Como $y(\tilde{t}^+) = A_k G_y(t_0, \tilde{t}) + I_k(y(\tilde{t}))$; se deduce que $y(t)$ es igual a la expresión

$$\Phi(t, \tilde{t}) A_k \Phi(\tilde{t}) \Pi_y[t_0, \tilde{t}] \Phi^{-1}(t_0) y_0$$

más

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(t, \tilde{t}) A_k \Phi(\tilde{t}) \Pi_y[s, \tilde{t}] \Phi^{-1}(s) f(s, y(s)) ds + \sum_{t_0 < s < \tilde{t}} \Phi(t, \tilde{t}) A_k \Phi(\tilde{t}) \Pi_y(s, \tilde{t}) \Phi^{-1}(s) \Theta_y(s),$$

y

$$\Phi(t, \tilde{t}) I_k(y(\tilde{t})) + \int_{\tilde{t}}^t \Phi(t, s) f(s, y(s)) ds.$$

Pero notemos que

$$\Phi(t, \tilde{t}) A_k \Phi(\tilde{t}) \Pi_y[t_0, \tilde{t}] = \Phi(t) \Psi_y(\tilde{t}) \Pi_y[t_0, \tilde{t}] = \Phi(t) \Pi_y[t_0, \tilde{t}] = \Phi(t) \Pi_y[t_0, t], \quad (4.15)$$

pues entre \tilde{t} y t no hay discontinuidades. Además

$$\Phi(t, \tilde{t}) I_k(y(\tilde{t})) = \sum_{\tilde{t} \leq s < t} \Phi(t) \Pi_y(s, t) \Phi^{-1}(s) \Theta_y(s), \quad (4.16)$$

pues $\Theta_y(s) = 0$ si $s \in (\tilde{t}, t)$ y $\Phi(t) \Pi_y(\tilde{t}, t) \Phi^{-1}(\tilde{t}) \Theta_y(\tilde{t})$ es igual a $\Phi(t) \Phi^{-1}(\tilde{t}) I_k(y(\tilde{t}))$ ya que $\Pi_y(\tilde{t}, t) = I$.

Como $\Pi_y[s, t] = I$ para $s \in (\tilde{t}, t]$, tenemos también

$$\int_{\tilde{t}}^t \Phi(t, s) f(s, y(s)) ds = \int_{\tilde{t}}^t \Phi(t) \Pi_y[s, t] \Phi^{-1}(s) f(s, y(s)) ds. \quad (4.17)$$

Las igualdades (4.15), (4.16) y (4.17) determinan que $y(t) = G_y(t)$.

Continuando de esta manera nos podemos reducir recursivamente y en finitos pasos a mostrar que $y(t_1) = G_y(t_1)$, donde t_1 es el primer tiempo de impulso de la solución y , pero $G_y(t_1)$ toma la forma $\Phi(t_1) \Phi^{-1}(t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi[s, t_1] \Phi^{-1}(s) f(s, y(s)) ds$, lo que es $y(t_1)$ por la fórmula usual de variación de parámetros. \diamond

El lema anterior y su inverso se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 8 Una función $y : [t_0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ con T_y discreto, tal que $y(t_0) = y_0$, es solución de (4.13) si sólo si satisface (4.14) para todo $t \in [t_0, \beta)$.

Demostración: Si $y : [t_0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < t_0 < \beta \leq \infty$, es solución de (4.14), es claro que $y(t_0) = y_0$.

Sea t en (t_0, β) tal que $(t, \dot{y}(t)) \notin \Gamma$, entonces: la derivada de $\Phi(t) \Pi_y(t_0, t) \Phi^{-1}(t_0) y_0$ es $A(t) \Phi(t) \Pi_y(t_0, t) \Phi^{-1}(t_0) y_0$, la derivada de la expresión integral de (4.14) es

$$\int_{t_0}^t \Phi'(t) \Pi_y[s, t] \Phi^{-1}(s) f(s, y(s)) ds + f(t, y(t))$$

y la derivada de la sumatoria es

$$\sum_{t_0 < s \leq t} \Phi'(t) \Pi_y(s, t) \Phi^{-1}(s) \Theta_y(s),$$

pues $\Pi_y(\cdot, t)$ es constante en una vecindad de t , es decir, $y'(t) = A(t)y(t) + f(t, y(t))$.

Por otra parte si $t = \tau_k(y(t))$ para algún $k \geq 1$, entonces por la continuidad de Φ y el hecho que $\Pi_y(\cdot, t^+) = \Pi_y(\cdot, t) = \Phi^{-1}(t) A_k \Phi(t) \Pi_y(\cdot, t)$ tenemos que $y(t^+)$ es igual a

$$A_k \Phi(t) \Pi_y(t_0, t) \Phi^{-1}(t_0) y_0$$

sumado con

$$\int_{t_0}^t A_k \Phi(t) \Pi_y[s, t] \Phi^{-1}(s) f(s, y(s)) ds + \sum_{t_0 < s \leq t} \Phi(t) \Pi_y(s, t] \Phi^{-1}(s) \Theta_y(s),$$

como la sumatoria es igual a

$$\sum_{t_0 < s < t} A_k \Phi(t) \Pi_y(s, t) \Phi^{-1}(s) \Theta_y(s) + \Phi(t) \Pi_y(t, t] \Phi^{-1}(t) \Theta_y(y),$$

y en esta expresión el último sumando es igual a $I_k(y(t))$, reemplazando se obtiene

$$y(t^+) = A_k y(t) + I_k(y(t)).$$

La demostración ha finalizado. \diamond

Si las matrices A_k , $k \geq 1$, son invertibles y $\Phi(t_0) = I$, entonces la fórmula (4.14) puede ser escrita como

$$(\Phi(t) \Pi_y(t_0, t))^{-1} y(t) =$$

$$y_0 + \int_{t_0}^t (\Phi(s) \Pi_y(t_0, s))^{-1} f(s, y(s)) ds + \sum_{t_0 < s < t} (\Phi(s) \Pi_y(t_0, s^+))^{-1} \Theta_y(s), \quad (4.18)$$

para $t \in [t_0, \beta)$.

Supongamos que en la ecuación (4.13) tenemos $A(t) = 0$ si $t > 0$, y $A_k = I$ si $k \geq 1$, entonces la fórmula (4.14) corresponde a la ecuación integro-sumaria (2.5).

Si la ecuación (4.13) es del tipo impulsos a tiempos fijos, es decir, $\tau_k(x) \equiv \tau_k$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $k \geq 1$. Entonces

$$\Pi_y(t_0, t) = \prod_{k=p}^{p-1+i(t_0, t)} \Phi^{-1}(\tau_k) A_k \Phi(\tau_k),$$

donde $i(t_0, t)$ es el número de tiempos de impulsos fijos τ_k en (t_0, t) , $k \geq 1$, y $p \geq 1$ es tal que $(t_0, y_0) \in \Gamma_{p-1}$ o al interior de Ω_p . En este caso (4.14) coincide con la fórmula de variación de parámetros para E.D.I. tiempos fijos.

4.5 Acotamiento de soluciones

En esta sección estudiaremos la problemática de establecer condiciones generales sobre los elementos que definen el sistema lineal homogéneo (4.1) para asegurar que sus soluciones sean acotadas. En los procesos ordinarios y de impulsos en tiempos predeterminados, este problema se traslada a considerar hipótesis que impliquen el acotamiento de una matriz fundamental del sistema, es decir, el acotamiento de una base del espacio de soluciones. Con impulsos a tiempo variable las soluciones de (4.1) no forman un espacio vectorial, en principio no hay una matriz que domine el comportamiento de las soluciones.

En una primera parte vamos a observar mediante un ejemplo unidimensional

$$\begin{cases} x' = a(t)x, & t \neq \tau_k(x) \\ x(t^+) = a_k x, & t = \tau_k(x), \end{cases} \quad (4.19)$$

que el comportamiento de sus soluciones depende fuertemente de la geometría de las hiper-superficies Γ_k , $k \geq 1$, definidas por las funciones τ_k , $k \geq 1$.

Seguidamente separando cotas para la parte discreta y ordinaria de las soluciones de (4.1) establecemos condiciones para conseguir su acotamiento.

En una tercera parte mostraremos la Desigualdad de Gronwall para funciones continuas a pedazos, resultado que nos permitirá finalmente, mediante la fórmula de variación de parámetros (4.14), hacer una comparación entre (4.19), pero con impulsos a tiempos fijos, con una perturbada de ella, E.D.I. a tiempos variables de la forma

$$\begin{cases} y' = a(t)y + f(s, y), & t \neq \tau_k + \alpha_k(y) \\ y(t^+) = a_k y + I_k(y), & t = \tau_k + \alpha_k(y), \end{cases} \quad (4.20)$$

donde las funciones $f(s, y)$, $s > 0$; $I_k(y)$ y $\alpha_k(y)$, $k \geq 1$, son pequeñas en algún sentido que se especificará, para s y k grandes, esto para todo $y \in \mathfrak{R}$. Se mostrará que acotamiento de las soluciones de (4.19) implica acotamiento de las soluciones de (4.20).

4.5.1 Un ejemplo ilustrativo

Consideremos

$$\begin{cases} x' = 1, & t \neq \tau_k(x) \\ x(t^+) = x(t)/e, & t = \tau_k(x), \end{cases}$$

con $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ y donde $\tau_k : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $k \geq 1$, viene dada como la función inversa de $l_k : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, definida por

$$l_k(t) = \frac{t \cdot e^t}{k \cdot e^{k-1}}, \quad t > 0.$$

Notemos que cada l_k es continua, biyectiva, creciente y convexa, así $\tau_k : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $k \geq 1$, es continua, creciente y cóncava. En el párrafo siguiente vamos a probar que $\{\tau_k\}$ satisface las condiciones necesarias para definir una E.D.I. a tiempos variables en estudio.

Notemos que si $x \in (0, \infty)$, entonces $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ para todo $k \geq 1$. En efecto, si $t_i = \tau_i(x)$, $i = k, k+1$, entonces $l_k(t_k) = l_{k+1}(t_{k+1}) = x$, por lo tanto,

$$\frac{t_k e^{t_k}}{k e^{k-1}} = \frac{t_{k+1} e^{t_{k+1}}}{(k+1) e^k},$$

expresión que puede ser llevada a

$$e\left(\frac{t_k}{t_{k+1}}\right) = \left(\frac{k}{k+1}\right) \exp\left(t_{k+1}\left(1 - \frac{t_k}{t_{k+1}}\right)\right). \quad (4.21)$$

Si $t_k \geq t_{k+1}$, tendríamos que el lado izquierdo de (4.21) es mayor o igual a e (la base del logaritmo) y el lado derecho es menor o igual a 1, esto es una contradicción, luego $\tau_k(x) = t_k < t_{k+1} = \tau_{k+1}(x)$, para todo $x \in (0, \infty)$ y $k \geq 1$. Además como $\tau_k(x)e^{\tau_k(x)} = xke^{k-1}$, tenemos que si $k \rightarrow \infty$, entonces necesariamente $\tau_k(x) \rightarrow \infty$, para todo $x \in (0, \infty)$.

Afirmamos que esta ecuación satisface todas las hipótesis del Teorema 7. De hecho en este caso podemos tomar $\Phi(t) = e^t$, $t > 0$, y si $k \geq 1$ y $z \in (0, \infty)$, entonces

$$I_k(z) = e^{-1}z \quad (4.22)$$

y $\tilde{\tau}_k(z)$ viene dada implícitamente por $\tilde{\tau}_k(z) = \tau_k(\Phi(\tilde{\tau}_k(z))z)$, aplicando a ambos lados de esta igualdad la función l_k , se obtiene fácilmente la fórmula

$$\tilde{\tau}_k(z) = (ke^{k-1})z. \quad (4.23)$$

La condición $\tilde{\tau}_k(I_k(z)) \leq \tilde{\tau}_k(z) < \tilde{\tau}_{k+1}(I_k(z))$ también es fácilmente verificable, se reduce a mostrar que $kz/e \leq kz < (k+1)z$, lo que es evidente para $k \geq 1$ y $z > 0$.

Sea $x_0 \in (0, \infty)$ un valor de estado inicial, como $z(k) = e^{1-k}x_0$ es solución de la ecuación en diferencias (4.10) con $\eta = x_0$ y $p = 1$, el Teorema 7 nos dice que la función

$$x(t) = e^t e^{1-k}x_0, \quad t \in ((k-1)x_0, kx_0] \quad (4.24)$$

es una solución de la ecuación (4.19) considerada. Ésta es una función continua a pedazos, con pedazos estrictamente crecientes y con discontinuidades en instantes kx_0 , donde $x(kx_0^+) < x(kx_0)$, $k \geq 1$.

Notemos que:

- Si $x_0 > 1$, entonces $x((k-1)x_0^+) = (e^{x_0-1})^{k-1}x_0$ tiende a infinito cuando $k \rightarrow \infty$, luego $x(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- Si $x_0 = 1$, entonces $x(t) = e^{t-(k-1)}$, $t \in (k-1, k]$, es una solución periódica de período 1.
- Si $x_0 < 1$, entonces $x(kx_0) = ex_0/(e^{1-x_0})^k$ tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$, por lo tanto, $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

De modo que el comportamiento de las soluciones de esta ecuación es distinto respecto a lo que sucede con las E.D.I. a tiempos fijos. Si en la ecuación (4.19) considerada $\tau_k(x) \equiv \tau_k$ constante para $x > 0$, entonces uno y sólo uno de los comportamientos anteriores ocurriría, no importando cual sea el valor de x_0 , digamos que estaría determinado por la distribución en $(0, \infty)$ de los tiempos predeterminados $\{\tau_k\}$.

4.5.2 Un teorema de acotamiento

Definamos la función $\langle \cdot \rangle : (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ tal que $\langle a \rangle = a$ si $a > 1$ y $\langle a \rangle = a^{-1}$ si $0 < a < 1$. Notemos que si a y b son positivos, entonces $\langle ab \rangle \leq \langle a \rangle \langle b \rangle$ y $\langle a \rangle \leq b$ si y sólo si $b^{-1} \leq a \leq b$. Además $\langle a/b \rangle = \langle b/a \rangle \geq 1$, $\langle a/b \rangle = 1$ si y sólo si $a = b$ y $\langle a/b \rangle \leq \langle a/c \rangle \langle c/b \rangle$ para todo $c \in (0, \infty)$. Es decir, la función $\langle \cdot \rangle$ define cierto tipo de métrica, mayor profundidad y generalizaciones a más dimensiones pueden ser encontradas en [12], con las propiedades mostradas acá nos es suficiente.

Supongamos ahora que las soluciones de (4.1) intersectan a lo más cada hipersuperficie p -veces y que las matrices A_k , $k \geq 1$, no son cero. La última condición no es restrictiva si lo que nos motiva es buscar condiciones para el acotamiento de las soluciones, observemos que si una solución intersecta una hipersuperficie Γ_k para la cual $A_k = 0$, entonces esta solución es idénticamente cero después de ese instante y, por lo tanto, obviamente acotada.

Sea $x : (t_0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq t_0 < \beta \leq \infty$, solución de (4.1) tal que $x(t_0) = x_0$, para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$, indiquemos por $t_x^{k_i}$ el i -ésimo instante t , en que $\tau_k(x(t)) = t$, luego si las A_k , $k \geq 1$, conmutan con $A(t)$, $t > 0$, entonces por el Lema 10 se tiene

$$|x(t)| \leq \left(\prod_{t_0 < t_x^{k_i} < t} \|A_{k_i}\| \right) \exp\left(\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right) |x_0|. \tag{4.25}$$

Pero

$$\prod_{t_0 < t_x^{k_i} < t} \|A_{k_i}\| \leq \left(\prod_{k=1}^{k_x(t)} \langle \|A_k\| \rangle \right)^p,$$

donde $\Gamma_{k_x(t)}$ es la última hipersuperficie impactada por el gráfico de x antes del instante t , en efecto, la desigualdad se deduce a partir de $\|A_{k_i}\| \leq \langle \|A_{k_i}\| \rangle$, para todo $k_i \geq 1$ y que además en la productoria de la izquierda de la última desigualdad, dado $k \geq 1$, aparece $\|A_k\|$ a lo más p -veces, por lo tanto,

$$|x(t)| \leq \left(\prod_{k=1}^{\infty} \langle \|A_k\| \rangle \right)^p \exp\left(\int_{t_0}^{\infty} \|A(s)\| ds\right) |x_0|, \tag{4.26}$$

si los factores de la derecha en (4.26) existen.

Teorema 9 *Supongamos que en (4.1) $A_k \neq 0$, $k \geq 1$, y las soluciones intersectan cada hipersuperficie de impulso a lo más p -veces. Si*

a)

$$\prod_{k=1}^{\infty} \langle \|A_k\| \rangle < \infty \quad y \quad \int_0^{\infty} \|A(s)\| ds < \infty,$$

entonces cada solución de (4.1) es acotada.

b)

$$\prod_{k=1}^q \langle \|A_k\| \rangle \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \infty \quad \text{cuando } q \rightarrow \infty \quad y \quad \int_0^{\infty} \|A(s)\| ds < \infty,$$

entonces para cada solución $x : (t_0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq t_0 < \beta \leq \infty$, que impacta infinitas hipersuperficies, se tiene $|x(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \beta^-$.

c)

$$\int_0^t \|A(s)\| ds \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow \infty \text{ y } \prod_{k=1}^{\infty} \langle \|A_k\| \rangle < \infty,$$

entonces para cada solución $x : (t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $t_0 \geq 0$, se tiene $|x(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración: Notemos que la parte a) ya ha sido demostrada. Ahora si x es solución de (4.1) con condición inicial $x(t_0) = x_0 \neq 0$, entonces por (4.25) se tiene

$$\left\langle \frac{|x(t)|}{\left(\prod_{k=1}^{k_x(t)} \langle \|A_k\| \rangle\right)^p |x_0|} \right\rangle \leq \exp\left(\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right) \quad (4.27)$$

y

$$\left\langle \frac{|x(t)|}{\exp\left(\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right) |x_0|} \right\rangle \leq \left(\prod_{k=1}^{k_x(t)} \langle \|A_k\| \rangle\right)^p, \quad (4.28)$$

para todo $t > t_0$, en el dominio de x .

Si las hipótesis son las de b), entonces por (4.27) tenemos

$$\left(\prod_{k=1}^{k_x(t)} \langle \|A_k\| \rangle\right)^p \exp\left(-\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right) |x_0| \leq |x(t)|. \quad (4.29)$$

Si las hipótesis son las de c), entonces por (4.28) tenemos

$$\left(\prod_{k=1}^{k_x(t)} \langle \|A_k\| \rangle\right)^{-p} \exp\left(\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right) |x_0| \leq |x(t)|. \quad (4.30)$$

De (4.29) y (4.30) las conclusiones b) y c) son inmediatas, respectivamente. ◊

4.5.3 Desigualdad de Gronwall

El lema siguiente corresponde al equivalente de la Desigualdad de Gronwall para funciones continuas a pedazos.

Lema 14 Supongamos que $u : (t_0, \beta) \rightarrow [0, \infty)$, $0 < t_0 < \beta \leq \infty$, satisface la desigualdad

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t F(s)u(s) ds + \sum_{j=1}^k G(s_j)u(s_j), \quad t \in (s_k, s_{k+1}], \quad (4.31)$$

para cierta constante $c > 0$, funciones $F, G : (t_0, \beta) \rightarrow [0, \infty)$ y sucesión $\{s_k\}_{k \geq 0}$ tal que $t_0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k \rightarrow \beta$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces

$$u(t) \leq c \left(\prod_{q=1}^k (1 + G(s_q))\right) \exp\left(\int_{t_0}^t F(s) ds\right), \quad t \in (s_k, s_{k+1}]. \quad (4.32)$$

Demostración Procederemos por inducción sobre $k \geq 0$. Para $k = 0$, se reduce a chequear que $u(t) \leq c + \int^t F(s)u(s)ds$, $t \in (t_0, s_1]$, implica $u(t) \leq c \exp(\int^t F(s)ds)$, $t \in (t_0, s_1]$, lo que no es más que la Desigualdad de Gronwall usual.

Supongamos válido el lema para $1, 2, \dots, k-1$ y demostremos para k . Notemos que si $t \in (s_{k-1}, s_k]$, entonces la integral de (4.31) es igual a

$$\sum_{j=1}^k \int_{s_{j-1}}^{s_j} F(s) \left(c \prod_{q=1}^{j-1} (1 + G(s_q)) \right) \exp\left(\int_{t_0}^s F(z)dz\right) ds + \int_{s_k}^t F(z)u(z)dz,$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^k \left(c \prod_{q=1}^{j-1} (1 + G(s_q)) \right) e^{\int_{t_0}^{s_j} F(z)dz} [1 - e^{-\int_{s_{j-1}}^{s_j} F(z)dz}] + \int_{s_k}^t F(z)u(z)dz, \quad (4.33)$$

por otro lado la sumatoria de (4.31) es igual a

$$\sum_{j=1}^k G(s_j) \left(c \prod_{q=1}^{j-1} (1 + G(s_q)) \right) \exp\left(\int_{t_0}^{s_j} F(z)dz\right). \quad (4.34)$$

Luego al realizar la suma de (4.33) y (4.34) se obtiene

$$\sum_{j=1}^k \left(c \prod_{q=1}^{j-1} (1 + G(s_q)) \right) e^{\int_{t_0}^{s_j} F(z)dz} [(1 + G(s_j)) - e^{-\int_{s_{j-1}}^{s_j} F(z)dz}] + \int_{s_k}^t F(z)u(z)dz,$$

expresión cuya sumatoria se reduce a una telescópica y de lo cual queda

$$c \prod_{q=1}^k (1 + G(s_q)) \exp\left(\int_{t_0}^{s_k} F(z)dz\right) - c.$$

Resumiendo

$$u(t) \leq c \left(\prod_{q=1}^k (1 + G(s_q)) \right) e^{\int_{t_0}^{s_k} F(z)dz} + \int_{s_k}^t F(s)u(s)ds,$$

por la Desigualdad de Gronwall ordinaria se tiene (4.32). ◊

4.5.4 Acotamiento, homogénea v/s perturbada

Vamos a suponer, por el resto del capítulo, que en (4.20) y para todo $y \in \mathfrak{R}$ se tiene:

a) Existe función λ tal que

$$|f(s, y)| \leq \lambda(s)|y| \text{ para todo } s > 0.$$

b) Existe sucesión $\{\lambda_k\}$ tal que

$$|I_k(y)| \leq \lambda_k|y| \text{ para todo } k \geq 1.$$

Lema 15 Dadas $x : (t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ e $y : (t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ soluciones de (4.19) y (4.20) respectivamente, tales que $x(t_0) = y(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in \text{int}(\Omega_{k_0})$, algún $k_0 \geq 1$, cuyas gráficas intersectan cada hipersuperficie Γ_k , $k \geq k_0$, a lo más p -veces, entonces

$$|y(t)| \leq |x(t)| \left(\prod_{j=k_0}^{k_y(t)} (1 + \lambda_j) \right)^p \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(s) ds\right) |(\Pi_x[t_0, t])^{-1} \Pi_y(t_0, t)|, \quad (4.35)$$

para todo $t > t_0$.

Demostración Supongamos que anotamos por $\{s_k\}_{k \geq p}$ a la sucesión de tiempos de impulso de y , la solución de (4.20), en el intervalo (t_0, ∞) . Elijamos $\Phi(t)$ tal que $\Phi(t_0) = I$. Dado $t \in (t_0, \infty)$, entonces $s_k < y \leq s_{k+1}$, cierto $k \geq k_0 - 1$, en este caso por la fórmula (4.18) tenemos que

$$|(\Phi(t) \Pi_y(t_0, t))^{-1} |y(t)| \text{ es menor o igual que}$$

$$|x_0| + \int_{t_0}^t \lambda(s) |(\Phi(s) \Pi_y(t_0, s))^{-1} |y(s)| ds + \sum_{q=1}^k \lambda_{G(s_q)} |(\Phi(s_q) \Pi_y(t_0, s_q))^{-1} |y(s_q)|,$$

donde $G(s_q)$ es el entero $k \leq 1$ tal que $\tau_k(y(s_q)) = s_q$. Por el lema anterior tenemos

$$|(\Phi(t) \Pi_y(t_0, t))^{-1} |y(t)| \leq |x_0| \left(\prod_{q=1}^k (1 + \lambda_{G(s_q)}) \right) \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(s) ds\right).$$

Luego nos queda

$$|y(t)| \leq |\Phi(t) \Pi_y(t_0, t)| |x_0| \left(\prod_{q=k_0}^{k_y(t)} (1 + \lambda_q) \right)^p \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(s) ds\right),$$

multiplicando y dividiendo por $|\Pi_x[t_0, t]|$ y ya que $x(t) = \Phi(t) \Pi_x[t_0, t] x_0$, se obtiene (4.35). \diamond

Supongamos ahora que x e y del Lema 15 intersectan cada hipersuperficie exactamente una vez, $p = 1$, y que se tiene $|\alpha_k(y)| < \beta_k$ para $k \geq N$, cierto $N \geq 1$, tal que $\beta_k < \tau_{k+1} - \tau_k$, para todo $k \geq N$. Si $t \in [\tau_k + \beta_k, \tau_{k+1} - \beta_{k+1}]$ para algún $k \geq N$, entonces $k_x(t) = k_y(t) = k$ y luego

$$|y(t)| \leq |x(t)| \left(\prod_{q=k_0}^{k_y(t)} (1 + \lambda_q) \right) \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(s) ds\right).$$

Si en cambio $t \in (\tau_k - \beta_k, \tau_k + \beta_k)$ para algún $k \geq N$, entonces $k_x(t)$ y $k_y(t)$ difieren a los más en una unidad y por lo tanto,

$$|y(t)| \leq |x(t)| \left(\prod_{q=k_0}^{k_y(t)} (1 + \lambda_q) \right) \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(s) ds\right) \langle a_k \rangle.$$

En ambos casos al considerar

$$\prod_{q=1}^{\infty} (1 + \lambda_q) < \infty \text{ y } \int_0^{\infty} \lambda(s) ds < \infty,$$

entonces el acotamiento de la solución x de (4.19) implica el acotamiento de la solución y de (4.20).

Capítulo 5

ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS IMPULSIVOS

Este capítulo está orientado a estudiar estabilidad de soluciones de E.D.I. de pulsos consecutivos. Definimos estabilidad de los puntos de impulso de una solución y estabilidad en el sentido de Lyapunov. Presentamos dos resultados que exhiben condiciones para la estabilidad de los puntos de impulso y un tercero para la estabilidad tipo Lyapunov. Finalmente analizamos la estabilidad en casos particulares de E.D.I.

5.1 Observaciones y definiciones

El realizar un análisis de estabilidad pasa por cuantificar y controlar, desde las condiciones de inicio, la cercanía de dos soluciones de la ecuación implicada. Si para el tipo de E.D.I. que estamos considerando, en cada tiempo, atendemos sólo a la distancia que separa los valores de estado de las soluciones, surge la dificultad natural de tratar con funciones continuas a pedazos que tienen sus saltos en tiempos distintos para cada una de ellas. La complicación principal tiene relación con la imposibilidad de realizar comparaciones puntuales de las imágenes en vecindades de los tiempos de discontinuidad de una u otra solución. Este problema se ha resuelto dando ajustadas definiciones de lo que se entiende por estabilidad evitando la comparación en estos tiempos de impulso. Prestaremos particular atención a la medida de la distancia entre los puntos de impulso de dos soluciones en una misma hipersuperficie de impulso. Esto permitirá definir el concepto de estabilidad de los puntos de impulso de las soluciones. En caso de E.D.I. no necesariamente de pulsos consecutivos dos soluciones en cada instante cercanas no tienen que intersectar (sus gráficos) las mismas hipersuperficies de impulsos, y de hacerlo ambas exactamente una vez por hipersuperficie, la distancia entre los puntos de impulso en la k -ésima hipersuperficie, $k \geq 1$, puede ir creciendo junto con k .

Como sabemos las hipersuperficies de impulso Γ_k , $k \geq 1$, están definidas por funciones $\tau_k : \Omega \rightarrow (0, \infty)$, $k \geq 1$, de clase C^1 , tales que $\{\tau_k(x)\}$ es una sucesión no acotada y estrictamente creciente de tiempos para cada x en Ω , un abierto conexo de \mathfrak{R}^n .

Recordemos que dados $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \Omega$, al considerar el P.V.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x) \\ x(t^+) = I_k(x), & t = \tau_k(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

estamos suponiendo las condiciones generales (i) a (iv) de 2.1.

Se supondrá también que las funciones $I_k : \Omega \rightarrow \Omega$, $k \geq 1$, son continuas en todo su dominio y que se cumplen las condiciones del Teorema 1, sección 2.3 y del Teorema 3, sección 2.5, con lo cual aseguramos existencia de soluciones y pulsos consecutivos.

Introduciremos ahora algunas definiciones y notaciones técnicamente apropiadas para el estudio de la estabilidad con que las soluciones de (5.1) intersectan eventualmente las hipersuperficies de impulsos Γ_k , $k \geq 1$.

Para un par de soluciones x y \tilde{x} de (5.1) que sabemos sus gráficos intersectan sólo una vez alguna hipersuperficie Γ_k , $k \geq 1$, en respectivos tiempos t_x^k y $t_{\tilde{x}}^k$, denotamos por $D_k(x, \tilde{x})$ la distancia

$$|t_x^k - t_{\tilde{x}}^k| + |x(t_x^k) - \tilde{x}(t_{\tilde{x}}^k)|$$

(en el espacio de fase generalizado) entre los puntos $(t_x^k, x(t_x^k))$ y $(t_{\tilde{x}}^k, \tilde{x}(t_{\tilde{x}}^k))$ de Γ_k , $k \geq 1$.

Al definir estabilidad de una solución para este tipo de E.D.I. hay que poner especial atención dónde tomamos la condición inicial. Por ejemplo, si $x : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$, es solución tal que $x(t_0) = x_0$, para $(t_0, x_0) \in \Gamma_p$, algún $p \geq 1$, puede ocurrir que (t_0, \tilde{x}_0) pertenezca al interior de Ω_{p+1} para todo $\tilde{x}_0 \neq x_0$. Luego para cada solución $\tilde{x} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \neq x_0$, no importando la cercanía de \tilde{x}_0 con x_0 , la primera hipersuperficie de impulso alcanzada será Γ_{p+1} , no así para x que es Γ_p , por lo tanto, x siempre tendrá un impulso de ventaja, si este impulso no es nulo, el control vía cercanía de las condiciones iniciales es imposible. Para evitar dicho problema siempre tomaremos en (5.1) el punto (t_0, x_0) en el interior de algún Ω_p , lo que anotaremos por $(t_0, x_0) \in \text{int}(\Omega_p)$.

Definición 8 Sea $x \in SP([t_0, \infty), \{\tau_k\})$, $x(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in \text{int}(\Omega_p)$, $p \geq 1$, una solución de (5.1). Decimos que x es de:

- (a) puntos de impulso estables si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para cada solución $\tilde{x} \in SP([t_0, \infty), \{\tau_k\})$ de (5.1) con $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$, se tiene

$$D_k(x, \tilde{x}) < \varepsilon, \text{ si } |x_0 - \tilde{x}_0| < \delta, \text{ para todo } k \geq p.$$

- (b) puntos de impulso asintóticamente estables si x es de puntos de impulso estables y existe $\delta > 0$ tal que si $\tilde{x} \in SP([t_0, \infty), \{\tau_k\})$ es solución de (5.1) con $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$, entonces

$$D_k(x, \tilde{x}) \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty, \text{ si } |x_0 - \tilde{x}_0| < \delta.$$

La definición que sigue a continuación presenta un concepto de estabilidad o cuasi-estabilidad tipo Lyapunov para soluciones de E.D.I. a tiempos variables y sin pulsaciones, basada en los trabajos de Perestyuk y Samoilenko, ver [29].

Definición 9 Una solución $x \in SP([t_0, \infty), \{\tau_k\})$ de (5.1) tal que $x(t_0) = x_0$ y $(t_0, x_0) \in \text{int}(\Omega_p)$, algún $p \geq 1$, es estable si para cada $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x_0 - \tilde{x}_0| < \delta$ implica $|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$, para todo $t \geq t_0$, $|t - t_x^k| > \eta$ y $k \geq p$, donde $\tilde{x} \in SP([t_0, \infty), \{\tau_k\})$ es una solución de (5.1) con $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$.

La estabilidad de los puntos de impulso de una solución no implica su estabilidad en el sentido de Lyapunov definida arriba. Mostraremos ahora un ejemplo de aquello en una E.D.I. a tiempos fijos.

Ejemplo 1: Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, & t \neq k^2 \log 2 \\ x(t^+) = 4^k x, & t = k^2 \log 2, \end{cases} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathfrak{R}. \quad (5.2)$$

Sea $x_0 \in \mathfrak{R}$, denotamos por $x_{x_0} : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$, para efectos de este ejemplo, la única solución de (5.2) tal que $x_{x_0}(0) = x_0$. Sabemos que

$$x_{x_0}(t) = e^{-t} \left(\prod_{0 < j^2 \log(2) < t} 4^j \right) x_0 = e^{-t} 2^{i(t)(i(t)+1)} x_0,$$

para todo $t \in [0, \infty)$ y donde $i(t)$ es el número de tiempos de impulso $t_k = k^2 \log(2)$, $k \geq 1$, de x_{x_0} tal que $t_k < t$. Notemos que si $x_0, x_1 \in \mathfrak{R}$ y $k \geq 1$, entonces

$$D_k(x_{x_0}, x_{x_1}) = e^{-t_k} 2^{i(t_k)(i(t_k)+1)} |x_0 - x_1| = 2^{-k} |x_0 - x_1|.$$

Por lo tanto, las soluciones son de puntos de impulso asintóticamente estables, pues $2^{-k} |x_0 - x_1| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Por otro lado, las soluciones no son estables. En efecto, si fijamos $\eta > 0$, independientemente de $k \geq 1$, tal que $0 < \eta < t_{k+1} - t_k$, lo que es posible pues $t_{k+1} - t_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces

$$|x_{x_0}(t_k + \eta) - x_{x_1}(t_k + \eta)| = e^{-t_k} e^{-\eta} 2^{i(t_k^+)(i(t_k^+)+1)} |x_0 - x_1| = e^{-\eta} 2^k |x_0 - x_1|,$$

valor que tiende a ∞ cuando $k \rightarrow \infty$. Ver Figura 5.1

Hacemos notar también que la Lyapunov estabilidad de una solución tampoco implica la estabilidad de sus puntos de impulso. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2: Estudiemos la E.D.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & t \neq \tau_k(x) \\ x(t^+) = \alpha x, & t = \tau_k(x), \end{cases} \quad (t, x) \in [0, \infty) \times (-1, 1), \quad (5.3)$$

donde $1/2 < \alpha < 1$ y $\tau_k(x) = t_k + 2^{k-1}|x|$, para $x \in (-1, 1)$, en que $t_k = 10k + 2^{k-1} - 1$, $k \geq 1$. Es claro que $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x) \rightarrow \infty$ si $k \rightarrow \infty$, para todo $x \in (-1, 1)$.

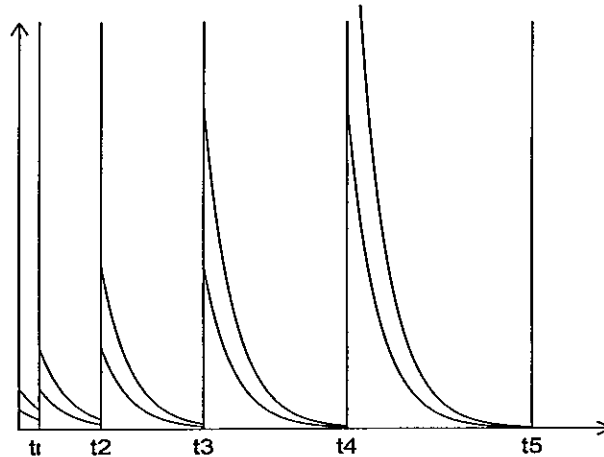


Figura 5.1: Las soluciones son de puntos de impulso estables, pero no estables.

La solución $x : [0, \infty) \rightarrow (-1, 1)$ de (5.3) tal que $x(0) = x_0$, algún $x_0 \in (-1, 1)$, está dada por

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 < t \leq \tau_1(x_0) \\ x_0 \alpha^k & \text{si } \tau_k(x_0 \alpha^{k-1}) < t \leq \tau_{k+1}(x_0 \alpha^k), \end{cases} \quad (5.4)$$

observemos que $\tau_k(x_0 \alpha^{k-1}) = t_k + (2\alpha)^{k-1}|x_0|$ es estrictamente creciente con k para todo $x_0 \in (-1, 1)$.

Esta solución tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$, es decir, la solución nula $\theta(t) = 0, t > 0$, de (5.3) es asintóticamente estable. Sin embargo, como los $\{t_k\}$ son los tiempos de impulso de θ , se tiene que $D_k(x, \theta)$ es mayor o igual que

$$|\tau_k(x_0 \alpha^{k-1}) - t_k| = (2\alpha)^{k-1}|x_0|,$$

que tiende a infinito cuando $k \rightarrow \infty$, es decir, θ no es de puntos de impulso estables. Ver Figura 5.2.

Si la ecuación (5.1) es una E.D.I. a tiempos de impulso fijos, entonces Lyapunov estabilidad implica estabilidad de los puntos de impulso. En efecto, supongamos que en (5.1) $\tau_k(x) = t_k$ constante, para todo $x \in \Omega$ y $k \geq 1$. Sean x y \tilde{x} pertenecientes a $SP([t_0, \infty), \{t_k\})$ y soluciones de (5.1) con $x(t_0) = x_0$ y $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ tal que $(t_0, x_0), (t_0, \tilde{x}_0) \in \text{int}(\Omega_p)$ para algún $p \geq 1$. Si x es estable, entonces dado $\varepsilon > 0$ y $\eta_n > 0, \eta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, existe $\delta_n > 0$ tal que $|x(t_0) - \tilde{x}(t_0)| < \delta_n$ implica

$$|x(t_k - (3/2)\eta_n) - \tilde{x}(t_k - (3/2)\eta_n)| < \varepsilon,$$

para todo $k \geq p$.

Como podemos suponer que δ_n es decreciente, haciendo tender n al infinito y notando que x y \tilde{x} son continuas por la izquierda en cada $t_k, k \geq p$, deducimos

$$D_k(x, \tilde{x}) = |x(t_k) - \tilde{x}(t_k)| < \varepsilon,$$

para todo $k \geq p$.

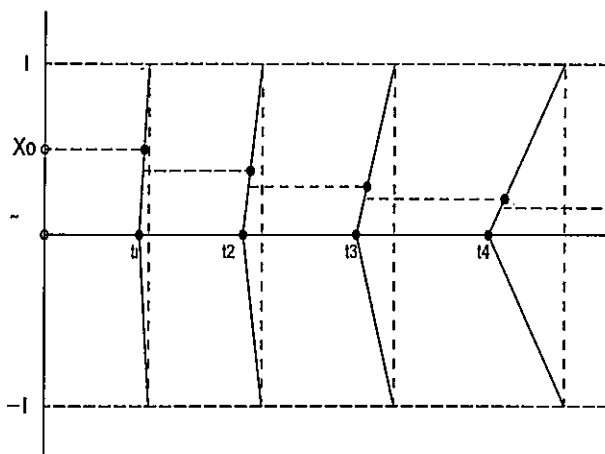


Figura 5.2: La solución nula es estable, pero no los puntos de impulso de ésta.

5.2 Primer teorema de estabilidad a nivel de impulsos

Mostraremos en esta sección un resultado que nos asegura la presencia de puntos de impulso estables para soluciones de una amplia clase de ecuaciones. Posteriormente daremos un teorema que afirma que esas condiciones también son suficientes para tener la estabilidad (en el sentido de la Definición 9) de estas soluciones.

Vamos a considerar que la ecuación (5.1) satisface las siguientes hipótesis:

H_1 : (a) Existe una sucesión de números reales no negativos $\{M_k\}$ tal que si $(t, x) \in \Omega_k$, $k \geq 1$, entonces

$$|f(t, x)| \leq M_k.$$

(b) Existe una función $\lambda : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que si $(t, x), (t, \tilde{x}) \in \Omega$, entonces

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq \lambda(t)|x - \tilde{x}|.$$

(c) Existe una sucesión de números reales no negativos $\{N_k\}$ tal que si $x, \tilde{x} \in \Omega$ y $k \geq 1$, entonces

$$|I_k(x) - I_k(\tilde{x})| \leq N_k|x - \tilde{x}|.$$

(d) Existe una sucesión de números reales no negativos $\{\beta_k\}$ tal que si $x, \tilde{x} \in \Omega$ y $k \geq 1$, entonces

$$|\tau_k(x) - \tau_k(\tilde{x})| \leq \beta_k|x - \tilde{x}|.$$

H_2 : La función τ_k satisface la condición

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x) f(t, x) \leq 0, \quad (t, x) \in \Omega_k,$$

para todo $k \geq 1$.

Dadas funciones x y \tilde{x} en $SP([t_0, \infty), \{\tau_k\})$, $t_0 > 0$, tal que $x(t_0) = x_0$ y $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ con (t_0, x_0) y (t_0, \tilde{x}_0) en $int(\Omega_p)$, $p \geq 1$, denotaremos por \underline{t}_k y \bar{t}_k al mínimo y al máximo entre t_x^k y $t_{\tilde{x}}^k$ respectivamente, $k \geq p$. Además, en este caso, haremos las lecturas $t_x^{p-1} = t_{\tilde{x}}^{p-1} = t_0$, $D_{p-1}(x, \tilde{x}) = |x_0 - \tilde{x}_0|$, $N_{p-1} = 1$ y $M_{p-1} = 0$.

Lema 16 *Asumamos las condiciones H_1 y H_2 . Entonces para cada par de soluciones $x, \tilde{x} \in SP([t_0, \infty), \{\tau_k\})$, con $(t_0, x(t_0)), (t_0, \tilde{x}(t_0)) \in int(\Omega_p)$, algún $p \geq 1$, de (5.1) se cumple que $D_k(x, \tilde{x})$ es menor o igual que*

$$\max\{N_{k-1}, M_k\} \cdot \max\{1, \exp(\int_{\bar{t}_{k-1}}^{\underline{t}_k} \lambda(s)ds)\} \cdot [1 + (1 + M_{k-1})\beta_k]D_{k-1}(x, \tilde{x}), \quad (5.5)$$

para todo $k \geq p$.

Demostración: Sean $x, \tilde{x} \in SP([t_0, \infty), \{\tau_k\})$ soluciones de (5.1) como en las hipótesis del lema, fijemos $k \geq p$, entonces tenemos esencialmente los siguientes ordenamientos para sus tiempos de choque en las superficies Γ_{k-1} y Γ_k .

1. $t_x^{k-1} < t_x^k \leq t_{\tilde{x}}^{k-1} < t_{\tilde{x}}^k$,
2. $t_x^{k-1} \leq t_{\tilde{x}}^{k-1} < t_x^k \leq t_{\tilde{x}}^k$, y
3. $t_{\tilde{x}}^{k-1} \leq t_x^{k-1} < t_x^k \leq t_{\tilde{x}}^k$.

Caso 1: Notemos que

$$\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1}+) = I_{k-1}(\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1}))$$

y

$$x(t_x^k) = I_{k-1}(x(t_x^{k-1})) + \int_{t_x^{k-1}}^{t_x^k} f(s, x(s))ds.$$

Entonces por $H_1(a)$ y $H_1(c)$, la expresión $|\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1}+) - x(t_x^k)|$ es menor o igual que

$$N_{k-1}|\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1}) - x(t_x^{k-1})| + M_k|t_x^k - t_x^{k-1}|.$$

Como $t_x^k \leq t_{\tilde{x}}^{k-1}$, se tiene que $|t_x^k - t_x^{k-1}| \leq |t_{\tilde{x}}^{k-1} - t_x^{k-1}|$, por lo tanto,

$$|\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1}+) - x(t_x^k)| \leq \max\{N_{k-1}, M_k\}D_{k-1}(\tilde{x}, x). \quad (5.6)$$

Por $H_2(a)$, la función $\tau_k \circ \tilde{x}$ es necesariamente no creciente. Usando este hecho y la relación $t_{\tilde{x}}^{k-1} < t_x^k$ tenemos que $|t_{\tilde{x}}^k - t_x^k| = (\tau_k \circ \tilde{x})(t_{\tilde{x}}^k) - (\tau_k \circ x)(t_x^k)$ es menor o igual que $(\tau_k \circ \tilde{x})(t_{\tilde{x}}^{k-1}+) - (\tau_k \circ x)(t_x^k)$. Así, por $H_1(d)$ y (5.6) se concluye

$$|t_{\tilde{x}}^k - t_x^k| \leq \beta_k \max\{N_{k-1}, M_k\}D_{k-1}(\tilde{x}, x). \quad (5.7)$$

Además, ya que

$$\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^k) = I_{k-1}(\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1})) + \int_{t_{\tilde{x}}^{k-1}}^{t_{\tilde{x}}^k} f(s, \tilde{x}(s))ds$$

y

$$x(t_x^k) = I_{k-1}(x(t_x^{k-1})) + \int_{t_x^{k-1}}^{t_x^k} f(s, x(s))ds.$$

concluimos que $|\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^k) - x(t_x^k)|$ es menor o igual a la expresión

$$N_{k-1}|\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1}) - x(t_x^{k-1})| + M_k|t_{\tilde{x}}^k - t_x^{k-1}| + M_k|t_x^k - t_x^{k-1}|.$$

Como $|t_{\tilde{x}}^k - t_x^{k-1}| \leq |t_{\tilde{x}}^k - t_x^k|$ y $|t_x^k - t_x^{k-1}| \leq |t_{\tilde{x}}^{k-1} - t_x^{k-1}|$, por (5.7) conseguimos la desigualdad

$$D_k(x, \tilde{x}) \leq (\max\{N_{k-1}, M_k\})[1 + (1 + M_{k-1})\beta_k]D_{k-1}(x, \tilde{x}). \quad (5.8)$$

Caso 2: Notemos que

$$\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1}+) = I_{k-1}(\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1}))$$

y

$$x(t_x^{k-1}) = I_{k-1}(x(t_x^{k-1})) + \int_{t_x^{k-1}}^{t_x^{k-1}} f(s, x(s))ds.$$

Entonces, tal como en el Caso 1, tenemos

$$|\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1}+) - x(t_x^{k-1})| \leq \max\{N_{k-1}, M_k\}D_{k-1}(\tilde{x}, x). \quad (5.9)$$

Si $t \in (t_{\tilde{x}}^{k-1}, t_x^k]$, entonces por $H_1(b)$ y la Desigualdad de Gronwall ordinaria se concluye

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq |\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1}+) - x(t_x^{k-1})| \exp\left(\int_{t_x^{k-1}}^t \lambda(s)ds\right).$$

En consecuencia, por (5.9), se tiene para $t \in (t_{\tilde{x}}^{k-1}, t_x^k]$,

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq \max\{N_{k-1}, M_k\}D_{k-1}(\tilde{x}, x) \exp\left(\int_{t_x^{k-1}}^t \lambda(s)ds\right). \quad (5.10)$$

Aquí $|t_{\tilde{x}}^k - t_x^k| = (\tau_k \circ \tilde{x})(t_{\tilde{x}}^k) - (\tau_k \circ x)(t_x^k)$, como por H_2 la familia de funciones $\tau_k \circ \tilde{x}$, $k \geq 1$, es no creciente y además $t_x^k \leq t_{\tilde{x}}^k$, al poner $t = t_x^k$ en (5.10), es posible conseguir

$$|t_{\tilde{x}}^k - t_x^k| \leq \beta_k \max\{N_{k-1}, M_k\}D_{k-1}(\tilde{x}, x) \exp\left(\int_{t_x^{k-1}}^{t_x^k} \lambda(s)ds\right). \quad (5.11)$$

Por otro lado, sabemos que

$$\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^k) = I_{k-1}(\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1})) + \int_{t_{\tilde{x}}^{k-1}}^{t_{\tilde{x}}^k} f(s, \tilde{x}(s))ds + \int_{t_x^k}^{t_{\tilde{x}}^k} f(s, \tilde{x}(s))ds$$

y similarmente

$$x(t_x^k) = I_{k-1}(x(t_x^{k-1})) + \int_{t_x^{k-1}}^{t_x^{k-1}} f(s, x(s))ds + \int_{t_x^k}^{t_x^k} f(s, x(s))ds,$$

al hacer la diferencia, las hipótesis H_1 implican que $|\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^k) - x(t_x^k)|$ es menor o igual a

$$N_{k-1}|\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^{k-1}) - x(t_x^{k-1})| + \int_{t_x^{k-1}}^{t_x^k} \lambda(s)|\tilde{x}(s) - x(s)|ds +$$

$$M_k |t_{\tilde{x}}^k - t_x^k| + M_k |t_{\tilde{x}}^{k-1} - t_x^{k-1}|,$$

esta última expresión, por (5.11), es a su vez menor o igual que

$$\begin{aligned} & \max\{N_{k-1}, M_k\} D_{k-1}(\tilde{x}, x) \left[1 + \beta_k M_k \exp\left(\int_{t_{\tilde{x}}^{k-1}}^{t_x^k} \lambda(s) ds\right) \right] + \\ & \int_{t_{\tilde{x}}^{k-1}}^{t_x^k} \lambda(s) |\tilde{x}(s) - x(s)| ds. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Reemplazando (5.10) en la integral de (5.12) se deduce que esta última integral es menor o igual que

$$\max\{N_{k-1}, M_k\} D_{k-1}(\tilde{x}, x) \left[\exp\left(\int_{t_{\tilde{x}}^{k-1}}^{t_x^k} \lambda(s) ds\right) - 1 \right].$$

En consecuencia $|\tilde{x}(t_{\tilde{x}}^k) - x(t_x^k)|$ es menor o igual que

$$\max\{N_{k-1}, M_k\} D_{k-1}(\tilde{x}, x) (1 + \beta_k M_k) \exp\left(\int_{t_{\tilde{x}}^{k-1}}^{t_x^k} \lambda(s) ds\right). \quad (5.13)$$

De las desigualdades (5.11) y (5.13) sigue que $D_k(\tilde{x}, x)$ es menor o igual a

$$\max\{N_{k-1}, M_k\} D_{k-1}(\tilde{x}, x) [1 + (1 + M_k)\beta_k] \exp\left(\int_{t_{\tilde{x}}^{k-1}}^{t_x^k} \lambda(s) ds\right). \quad (5.14)$$

Caso 3: Esta última posibilidad es absolutamente similar al Caso 2.

Con independencia de los casos (5.8) y (5.14) pueden ser expresadas mediante la relación (5.5).◊

Teorema 10 *Supongamos que las soluciones de (5.1) intersectan cada superficie exactamente una vez y además*

$$\int_0^\infty \lambda(s) ds < \infty \quad \text{y} \quad \prod_{k \geq 1} [1 + (1 + M_{k-1})\beta_k] < \infty. \quad (5.15)$$

Si $x : [t_0, \infty) \rightarrow \Omega$, $t_0 > 0$, es solución de (5.1) tal que $x(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in \text{int}(\Omega_p)$, $p \geq 1$, y

(a) $\prod_{k \geq 1} \max\{N_k, M_k\} < \infty$, entonces x es de puntos de impulso estables.

(b) $\prod_{k=1}^j \max\{N_k, M_k\} \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$, entonces x es de puntos de impulso asintóticamente estables.

Demostración: Sean x, \tilde{x} soluciones de (5.1) sobre $[t_0, \infty)$, con condiciones iniciales tal que $(t_0, x(t_0)), (t_0, \tilde{x}(t_0)) \in \text{int}(\Omega_p)$, $p \geq 1$, entonces es aplicable el Lema 16 y recursivamente obtenemos que para $k \geq p$, $D_k(x, \tilde{x})$ es menor o igual que

$$\left(\prod_{j=p}^k \max\{N_{j-1}, M_j\} \right) \left(\prod_{j=p}^k [1 + (1 + M_{j-1})\beta_j] \right) \left(\prod_{j=p}^k \max \left\{ 1, e^{\int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda(s) ds} \right\} \right) D_{p-1}(x, \tilde{x}). \quad (5.16)$$

El tercer factor en (5.16) es menor que $\exp(\int_{t_0}^{t_k} \lambda(s) ds)$. De las condiciones (5.15) deducimos que existe $K > 0$ tal que

$$D_k(x, \tilde{x}) \leq K \left(\prod_{j=p}^k \max\{N_{j-1}, M_j\} \right) D_{p-1}(x, \tilde{x}), \quad k \geq p. \quad (5.17)$$

El teorema se consigue inmediatamente de la desigualdad (5.17). \diamond

5.3 Segundo teorema de estabilidad a nivel de impulsos

En esta sección consideramos $\Omega = \mathfrak{R}^n$ y asumimos que (5.1) satisface la hipótesis H_1 , en que $H_1(a)$ es remplazada por la existencia de $M > 0$ tal que

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \text{para todo } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathfrak{R}^n.$$

Además la diferenciabilidad de las funciones de impulso y del campo en función del estado.

Fijemos $y \in \mathfrak{R}^n$ y $k \geq 1$. Definamos la función $F_{y,k} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ que a $x \in \mathfrak{R}^n$ asocia el valor

$$F_{y,k}(x) = I_k(y) + \int_{\tau_k(y)}^{\tau_{k+1}(x)} f(s, x(s; \tau_k(y), I_k(y))) ds, \quad (5.18)$$

donde $x(s) = x(s; t_0, x_0)$, $s > 0$, denota la única solución de $x' = f(s, x)$, en $(0, \infty) \times \mathfrak{R}^n$, tal que $x(t_0) = x_0$. Notemos que $F_{y,k}(\tilde{x}) = x(\tau_{k+1}(\tilde{x}); \tau_k(y), I_k(y))$.

Si $x_1, x_2 \in \mathfrak{R}^n$, entonces

$$|F_{y,k}(x_1) - F_{y,k}(x_2)| = \left| \int_{\tau_{k+1}(x_2)}^{\tau_{k+1}(x_1)} f(s, x(s)) ds \right|,$$

luego

$$|F_{y,k}(x_1) - F_{y,k}(x_2)| \leq M \beta_{k+1} |x_1 - x_2|,$$

es decir, si $M \beta_{k+1} < 1$, la función $F_{y,k}$ es una contracción y por lo tanto, existe un único punto fijo de $F_{y,k}$ en \mathfrak{R}^n , que denotaremos $X(y)$.

Notemos que

$$x(\tau_{k+1}(X(y))) = F_{y,k}(X(y)) = X(y),$$

de donde, si $t_y = \tau_{k+1}(X(y))$, entonces $t_y = \tau_{k+1}(x(t_y))$, en otras palabras $(t_y, x(t_y)) \in \Gamma_{k+1}$.

Solo resta probar que $t_y > \tau_k(I_k(y))$ para que la solución x de la E.D.O. asociada restringida al intervalo $(\tau_k(y), t_y]$ y definida como y en $\tau_k(y)$, sea solución de la impulsiva (5.1) con condición inicial $x(\tau_k(y)) = y$.

Notemos que

$$\left| \frac{\partial \tau_{k+1}}{\partial x}(x(t)) f(t, x(t)) \right| \leq \beta_{k+1} M,$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial \tau_{k+1}}{\partial x}(x(t)) f(t, x(t)) - 1 < \beta_k M - 1 < 0.$$

De modo que $(\tau_{k+1}(x(t)) - t)' < 0$, en otras palabras $\tau_{k+1}(x(t)) - t$ es una función decreciente que para $t = t_y$ es cero y para $t = \tau_k(I_k(y))$ es positiva, luego $t_y > \tau_k(I_k(y))$.

La función $X(y)$ permite que a cada par $(\tau_k(y), y) \in \Gamma_k$ asociemos el punto $(t_y, X(y))$ que le correspondería en Γ_{k+1} siguiendo el sentido de una curva integral de (5.1).

Para conseguir estabilidad de los puntos de impulso interesa encontrar condiciones para que esta asociación de Γ_k en Γ_{k+1} satisfaga una condición de Lipschitz uniforme, esto por ejemplo mediante el acotamiento de la derivada de $X(y)$ como función de y .

Entonces $X(y)$, como función de $y \in \mathbb{R}^n$, está dada implícitamente por la ecuación

$$X(y) = F_{y,k}(X(y)) = x(\tau_{k+1}(X(y)); \tau_k(y), I_k(y)),$$

donde supondremos que la función I_k es diferenciable en todo \mathbb{R}^n , e igualmente $f(s, x)$ como función de x , para $s > 0$ tal que $(s, x) \in \text{int}(\Omega_{k+1})$. Diferenciando a ambos lados se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y}(y) &= \frac{\partial x}{\partial t}(\tau_{k+1}(X(y)); \tau_k(y), I_k(y)) \frac{\partial \tau_{k+1}}{\partial y}(X(y)) \frac{\partial X}{\partial y}(y) \\ &+ \frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau_{k+1}(X(y)); \tau_k(y), I_k(y)) \frac{\partial \tau_k}{\partial y}(y) + \frac{\partial x}{\partial I}(\tau_{k+1}(X(y)); \tau_k(y), I_k(y)) \frac{\partial I_k}{\partial y}(y), \end{aligned}$$

como

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\tau_{k+1}(X(y)); \tau_k(y), I_k(y)) = f[\tau_{k+1}(X(y)), x(\tau_{k+1}(X(y)); \tau_k(y), I_k(y))],$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau_{k+1}(X(y)); \tau_k(y), I_k(y)) = -\frac{\partial x}{\partial I}(\tau_{k+1}(X(y)); \tau_k(y), I_k(y)) f[\tau_k(y), I_k(y)]$$

y $\frac{\partial x}{\partial I}(t; \tau_k(y), I_k(y))$ es solución de

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t; \tau_k(y), I_k(y))) z(t)$$

tal que $z(\tau_k(y)) = I$, la matriz identidad. Luego es solución de la ecuación integral

$$z(t) = I + \int_{\tau_k(y)}^t \frac{\partial f}{\partial x}[s, x(s; \tau_k(y), I_k(y))] z(s) ds,$$

por lo tanto, por hipótesis $H_1(b)$ obtenemos

$$|z(t)| \leq 1 + \int_{\tau_k(y)}^t \lambda(s) |z(s)| ds,$$

de donde, por la Desigualdad de Gronwall, tenemos

$$\left| \frac{\partial x}{\partial I}(t; \tau_k(y), I_k(y)) \right| \leq \exp\left(\int_{\tau_k(y)}^t \lambda(s) ds\right).$$

Al asumir las hipótesis $H_1(a), (b), (c)$, se tiene la desigualdad

$$\left| \frac{\partial X}{\partial y}(y) \right| \leq M\beta_{k+1} \left| \frac{\partial X}{\partial y}(y) \right| + (N_k + M\beta_k) \exp\left(\int_{\tau_k(y)}^{\tau_{k+1}(X(y))} \lambda(s) ds\right),$$

ya que estamos bajo es supuesto $M\beta_{k+1} < 1$, tenemos

$$\left| \frac{\partial X}{\partial y}(y) \right| \leq \frac{N_k + M\beta_k}{1 - M\beta_{k+1}} \exp\left(\int_{\tau_k(y)}^{\tau_{k+1}(X(y))} \lambda(s) ds\right).$$

Definamos

$$\underline{\alpha}_k = \inf\{\tau_k(y) : y \in \mathfrak{R}^n\} \quad \text{y} \quad \bar{\alpha}_k = \sup\{\tau_k(y) : y \in \mathfrak{R}^n\},$$

observemos que el ínfimo siempre existe y eventualmente el supremo es infinito. Notando que $\underline{\alpha}_k \leq \tau_k(y) < \tau_{k+1}(X(y)) \leq \bar{\alpha}_{k+1}$, para todo $y \in \mathfrak{R}^n$, integrando la última desigualdad se tiene

$$|X(y_1) - X(y_2)| \leq \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial X}{\partial y}(y) \right| dy \leq \frac{N_k + M\beta_k}{1 - M\beta_{k+1}} \exp\left(\int_{\underline{\alpha}_k}^{\bar{\alpha}_{k+1}} \lambda(s) ds\right) |y_1 - y_2|, \quad (5.19)$$

para todo $y_1, y_2 \in \mathfrak{R}^n$.

Si x_1 y $x_2 \in SP([t_0, \infty), \{\tau_k\})$ son soluciones de (5.1) con $(t_0, x_1(t_0))$ y $(t_0, x_2(t_0))$ en el interior de Ω_p , algún $p \geq 1$, entonces

$$D_{k+1}(x_1, x_2) \leq (1 + \beta_{k+1}) |x_1(t_{x_1}^{k+1}) - x_2(t_{x_2}^{k+1})|.$$

Como $x_i(t_{x_i}^{k+1}) = \bar{x}(x_i(t_{x_i}^k))$, $i = 1, 2$, por (5.19) tenemos

$$D_{k+1}(x_1, x_2) \leq (1 + \beta_{k+1}) \left[\frac{N_k + M\beta_k}{1 - M\beta_{k+1}} \exp\left(\int_{\underline{\alpha}_k}^{\bar{\alpha}_{k+1}} \lambda(s) ds\right) \right] D_k(x_1, x_2),$$

de donde

$$D_k(x_1, x_2) \leq \left(\prod_{j=p+1}^k (1 + \beta_j) \left[\frac{N_{j-1} + M\beta_{j-1}}{1 - M\beta_j} \exp\left(\int_{\underline{\alpha}_{j-1}}^{\bar{\alpha}_j} \lambda(s) ds\right) \right] \right) D_p(x_1, x_2).$$

En resumen hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 11 Consideremos las hipótesis H_1 , pág. 64, y que existe $M > 0$ tal que $M > M_k$ y $M\beta_k < 1$ para todo $k = 1, 2, \dots$. Si $x : [t_0, \infty) \rightarrow \Omega$, $t_0 \geq 0$, $(t_0, x(t_0)) \in \text{int}(\Omega_p)$, $p \geq 1$, es solución de (5.1) y

$$a_j = (1 + \beta_j) \left[\frac{N_{j-1} + M\beta_{j-1}}{1 - M\beta_j} \exp \left(\int_{\underline{\alpha}_{j-1}}^{\bar{\alpha}_j} \lambda(s) ds \right) \right] \quad j > p,$$

es tal que:

- (a) $\prod_{j \geq p} a_j < \infty$, entonces x es de puntos de impulso estables,
- (b) $\prod_{j \geq p}^k a_j \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces x es de puntos de impulso asintóticamente estables.

Ejemplo: Consideremos la E.D.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\sin^2(x)}{2^t}, & t \neq \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x+1} + k \right) \\ x(t^+) = \frac{x}{4}, & t = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x+1} + k \right), \quad t \in (0, \infty) \times (0, \infty). \end{cases}$$

Notemos que

$$\frac{\partial \tau_{k+1}}{\partial x}(x) f(\tau_k(x), x) = \frac{1}{4} \frac{1}{(x+1)^2} \frac{\sin^2(x)}{2^{\tau_k(x)}} < \frac{1}{4} \frac{1}{2^{\frac{k}{4}}} < 1,$$

para todo $x \in (0, \infty)$ y $k = 1, 2, \dots$. Además

$$\tau_k(I_k(x)) = \frac{1}{4} \left(\frac{x/4}{x/4+1} + k \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x+1} + k \right) = \tau_k(x),$$

pues la función $\frac{x}{x+1}$, es creciente en $(0, \infty)$. Como también

$$\tau_k(x) = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{x+1} + k + 1 \right) < \frac{1}{4} \left(\frac{x/4}{x/4+1} + k + 1 \right) = \tau_{k+1}(I_k(x)),$$

hemos mostrado que la ecuación es de pulsos consecutivos.

Demostremos ahora que esta E.D.I. satisface las condiciones del teorema anterior, más precisamente, veremos que sus soluciones son de puntos de impulso asintóticamente estables.

Notemos que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq 2^{-t} |\sin(x_1) + \sin(x_2)| |\sin(x_1) - \sin(x_2)| \leq 2^{-(t-1)} |x_1 - x_2|,$$

además

$$|I_k(x_1) - I_k(x_2)| = \frac{1}{4} |x_1 - x_2|$$

y

$$|\tau_k(x_1) - \tau_k(x_2)| \leq \frac{1}{4} \left| \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1} \right| \leq \frac{1}{4} |x_1 - x_2|,$$

para todo x_1 y $x_2 \in \mathfrak{R}^n$, y $k = 1, 2, \dots$.

De modo que podemos considerar: $\lambda(t) = 2^{-(t-1)}$, para $t \in (0, \infty)$; $N_k = 1/4$ y $\beta_k = 1/4$, para todo $k = 1, 2, \dots$.

Por otro lado, como la función $\frac{x}{x+1}$, $x > 0$, es estrictamente creciente, dado $k = 1, 2, \dots$, el conjunto $\{\tau_k(x)/x > 0\}$ tiene ínfimo $\underline{\alpha}_k = k/4$ y supremo $\bar{\alpha}_k = (k+1)/4$. Así

$$\gamma_k = \int_{\underline{\alpha}_{k-1}}^{\bar{\alpha}_k} \lambda(s) ds = \frac{2^{3/4}}{\log(2)} [2^{1/2} - 1] \frac{1}{2^{k/4}},$$

luego

$$a_k = (1 + 1/4) \frac{1/4 + 1/4}{1 - 1/4} \exp(\gamma_k) = \frac{5}{6} \exp(\gamma(k)).$$

Por lo tanto,

$$\prod_{k=1}^n a_k = \left(\frac{5}{6}\right)^n \exp\left(\frac{2^{1/2}}{\log(2)} [2^{1/4} + 1] \left[1 - \left(\frac{1}{2^{1/4}}\right)^n\right]\right)$$

expresión que tiende a 0, cuando $n \rightarrow \infty$, ya que $|f(t, x)| \leq M = 1$ y $M\beta_k = 1/4 < 1$, para todo $k = 1, 2, \dots$, por parte (b) del Teorema 11, las soluciones de dominio $[t_0, \infty)$, $t_0 > 0$, son de puntos de impulso asintóticamente estables.

5.4 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Teorema 12 Si la ecuación (5.1) es tal que existen $M, N > 0$ y $\lambda \in L_1[t_0, \infty)$ satisfaciendo

1. $|f(t, x)| \leq M$, $(t, x) \in [t_0, \infty) \times \Omega$,
2. $|f(t, x) - f(t, y)| \leq \lambda(t)|x - y|$, $(t, x), (t, y) \in [t_0, \infty) \times \Omega$,
3. $|I_k(x) - I_k(y)| \leq N|x - y|$, $x, y \in \Omega$.

Entonces cada solución de (5.1) sobre (t_0, ∞) de puntos de impulso estables también es estable.

Demostración: Sea x una solución de (5.1) sobre (t_0, ∞) de puntos de impulso estables. Sean $\varepsilon, \eta > 0$, elijamos

$$\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{\max\{N, M\}} \exp\left(-\int_{t_0}^{\infty} \lambda(s) ds\right), \eta\right\}.$$

Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\tilde{x} \in SP([t_0, \infty), \{\tau_k\})$ es solución de (5.1) y $|x(t_0) - \tilde{x}(t_0)| < \delta$ entonces $D_k(x, \tilde{x}) < \varepsilon_1$ para todo $k \geq 1$.

Sea $t \in (t_0, \infty)$ condicionado a $|t - t_x^k| > \eta$, entonces $t \in (t_x^k, t_x^{k+1})$ para algún $k \geq 1$ (t existe si $t_x^k + \eta < t < t_x^{k+1} - \eta$).

Luego $\bar{t}_k = \max\{t_x^k, t_x^k\} < t < \min\{t_x^{k+1}, t_x^{k+1}\} = \underline{t}^{k+1}$, pues $|t_x^k - t_x^k| < D_k(x, \tilde{x}) < \varepsilon_1 < \eta$ para todo $k \geq 1$.

Así

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| = |x(t_x^k+) + \int_{t_x^k}^t f(s, x(s)) ds - \tilde{x}(t_x^k+) - \int_{t_x^k}^t f(s, x(s)) ds|$$

que es menor o igual que

$$\begin{aligned} &\leq |I_k(x(t_x^k)) - I_k(\tilde{x}(t_x^k))| + \left| \int_{\underline{t}^k}^{\bar{t}_k} f(s, \dot{}) ds \right| + \left| \int_{\underline{t}^k}^t (f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))) ds \right| \\ &\leq N|x(t_x^k) - \tilde{x}(t_x^k)| + M|\bar{t}_k - \underline{t}^k| + \int_{\underline{t}^k}^t \lambda(s)|x(s) - \tilde{x}(s)| ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \max\{N, M\}D_k(x, \tilde{x}) + \int_{\underline{t}^k}^t \lambda(s)|x(s) - \tilde{x}(s)| ds.$$

La desigualdad de Gronwall permite escribir

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq$$

$$\max\{N, M\} \exp\left(\int_{\underline{t}^k}^t \lambda(s) ds\right) D_k(x, \tilde{x}) \leq \max\{N, M\} \exp\left(\int_{t_0}^{\infty} \lambda(s) ds\right) \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

lo que finaliza la demostración. ◊

Ejemplo: Tomemos $\alpha > 1$ y la E.D.I.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{t^2} \frac{x}{1+x}, & t \neq 10k + \frac{1}{k^\alpha(x+1)} \\ x(t^+) = \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)x, & t = 10k + \frac{1}{k^\alpha(x+1)}, \end{cases} \quad (5.20)$$

cuando $(t, x) \in [1, \infty) \times [0, \infty)$.

En la región limitada por Γ_k y Γ_{k+1} , $k \geq 1$, un punto (t, x) es tal que $10k < \tau_k(x) < t$.

Notemos que

$$|f(t, x)| = \frac{1}{t^2} \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{100k^2}.$$

Definamos $M_k = \frac{1}{100k^2}$.

Además para $(t, x), (t, y)$ cualesquiera en $[1, \infty) \times [0, \infty)$ tenemos

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \frac{1}{t^2} \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| = \frac{1}{t^2} \left| \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \right| \leq \frac{1}{t^2} |x-y|.$$

Definamos $\lambda(t) = \frac{1}{t^2}$.

Por otro lado,

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leq N_k |x - y|,$$

con

$$N_k = 1 + \frac{1}{2^k}$$

y

$$|\tau_k(x) - \tau_k(y)| = \frac{1}{k^\alpha} \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| \leq \frac{1}{k^\alpha} |x - y|,$$

para todo $k \geq 1$ y $x, y \in [0, \infty)$. Sea $\beta_k = \frac{1}{k^\alpha}$, $k \geq 1$.

También tenemos $\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x)f(t, x) < 0$, pues para todo $k \geq 1$, la función $\tau_k(x) = 10k + \frac{1}{k^\alpha(x+1)}$ es decreciente con respecto a x y $f(t, x) = \frac{1}{t^2} \frac{x}{1+x}$ es positivo, si $x \in [0, \infty)$ y $t \in [1, \infty)$.

Hemos mostrado que (5.20) satisface $[H_1]$ y $[H_2]$.

Observemos que

$$\prod_{j=1}^{\infty} \max\left\{1 + \frac{1}{2^j}, \frac{1}{100j^2}\right\} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^j}\right) < \infty,$$

$$\prod_{j=1}^{\infty} [1 + (1 + M_{j-1})\beta_j] \leq \prod_{j=1}^{\infty} [1 + 2\beta_j] = \prod_{j=1}^{\infty} \left[1 + \frac{2}{j^\alpha}\right] < \infty$$

y $\lambda \in L_1[1, \infty)$. De modo que se cumplen las condiciones del Teorema 10 para que las soluciones de (5.20) sean de puntos de impulso estables en $[1, \infty)$ y por el Teorema 12 también estas son estables.

5.5 Estabilidad en casos lineales

Definición 10 La familia $\{\tau_k\}$ se llamará acotada si para cada $k \geq 1$, existen t_k, T_k , $0 < t_k < T_k$, tal que $Im(\tau_k)$ es subconjunto del intervalo (t_k, T_k) . Además se llamará separable si es posible elegir los $\{(t_k, T_k)\}_{k \geq 1}$ disjuntos.

Teorema 13 Si todo par de soluciones de (4.1) pertenecientes a $PC([t_0, \infty), \{\tau_k\})$ intersecan las mismas superficies el mismo número de veces, la familia $\{\tau_k\}$ es separable por $\{(t_k, T_k)\}_{k \geq 1}$ tal que $T_k - t_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, y además la matriz A_k , $k \geq 1$, conmuta con $A(t)$, $t > 0$. Entonces cada solución acotada de (4.1) con condición inicial $(t_0, x(t_0))$ en el interior de algún Ω_p , $p \geq 1$, es estable.

Demostración: Sea $x : [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}^n$ una solución acotada de (4.1). Dados $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$, sabemos que existe $p \geq 1$ tal que $0 < T_i - t_i < \eta$ para todo $i \geq p$. Si $t > T_p$ y $|t - t_x^i| > \eta$ entonces existe $k \geq p$ tal que $t_x^k < t < t_x^{k+1}$ y $t_x^{k+1} - t > \eta > T_{k+1} - t_{k+1} > t_x^{k+1} - t_{k+1}$, de modo que $t < t_{k+1}$. Análogamente se deduce $T_k < t$. Como en el intervalo (T_k, t_{k+1}) no hay tiempos de impulso de solución alguna y los gráficos de las soluciones intersecan las mismas superficies con igual frecuencia tenemos que

$$\Pi_x(T_k; t) = \Pi_{\tilde{x}}(T_k, t) = I,$$

para toda otra solución $\tilde{x} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}^n$ con $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ y (t_0, \tilde{x}_0) al interior de Ω_p . Como las matrices conmutan

$$\Pi_x(t_0, T_k) = \prod_{i=p}^k A_i = \Pi_{\tilde{x}}(t_0, T_k), \tag{5.21}$$

luego

$$x(t) - \tilde{x}(t) = \Phi(t)\Pi_x(t_0, T_{k(t)})\Phi^{-1}(t_0^+)[x_0 - \tilde{x}_0]$$

y la conclusión del teorema es inmediata.◊

5.6 Estabilidad de E.D.I. con sucesión uniforme de hiperplanos de impulso

En relación con el apartado 2.6 consideremos ahora aquellas ecuaciones para las cuales $\tau_k(x) = \tau(x) + s_k$, para todo $x \in \Omega$ y $k \geq 1$, donde $\tau : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ es una función de clase C^1 y la sucesión de términos positivos $\{s_k\}_{k \geq 1}$ es estrictamente creciente y no acotada. En otras palabras cada superficie de impacto Γ_k , $k \geq 1$, de (5.1) es esencialmente la superficie $\Gamma : t = \tau(x)$, pero desplazada s_k unidades en el eje y sentido positivo del tiempo.

Igualmente se prueba que estas ecuaciones son equivalentes, vía la transformación (2.13) a E.D.I. de la forma

$$\begin{cases} y' = F(s, y), & s \neq s_k \\ y(\bar{s}_k^+) = I_k(y), & s = s_k, \end{cases} \quad (s, y) \in (-\infty, \infty) \times \Omega, \quad (5.22)$$

donde $\bar{s}_k = G_k(y)$ para cierta función $G_k : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ tal que $s_k \leq G_k(y) < s_{k+1}$, $y \in \Omega$ y $k \geq 1$.

Una ecuación tipo (5.22) describe un proceso donde el estado $y(s)$, $s > 0$, varía continuamente, según la E.D.O. asociada, sólo hasta algún $s = s_k$, que es cuando salta en el espacio de fase y también en el tiempo (esto último es la gran diferencia con las E.D.I. a tiempos fijos usuales del apartado 1.3.3.) para continuar evolucionando en forma continua desde el valor $I_k(y(s))$, pero ahora desde el instante $\bar{s}_k = G_k(y(s))$ y hasta alcanzar s_{k+1} , para luego volver a impulsarse. Siendo algo más precisos, una función $y : J \rightarrow \Omega$, $J = (\alpha_1, s_1] \cup \dots \cup (\alpha_p, s_p]$, $s_k \leq \alpha_{k-1}$, $k = 1, \dots, p-1$, es solución de (4.19) si $y'(s) = F(s, y(s))$ para $s \in J \setminus \{s_k\}$ y además $y(\bar{s}_k^-) = y(s_k)$, $G_k(y(s_k)) = \alpha_{k+1}$ e $y(\alpha_k^+) = I_k(y(s_k))$, $k = 1, \dots, p$.

Haremos uso de esta equivalencia para mostrar un resultado de estabilidad de soluciones de ecuaciones con sucesión uniforme de superficies de impulso.

Sabemos que al suponer

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(x) \cdot f(t, x) < 1, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \quad (5.23)$$

y además

$$\tau_k(I_k(x)) \leq \tau_k(x) < \tau_{k+1}(I_k(x)), \quad x \in \Omega, \quad k \geq 1. \quad (5.24)$$

Entonces (5.1) es equivalente a la E.D.I. a tiempos fijos

$$\begin{cases} y'(s) = \frac{f(s+\tau(y), y)}{1 - \frac{\partial \tau}{\partial x}(y) \cdot f(s+\tau(y), y)}, & s \neq s_k \\ y(\bar{s}_k(y)^+) = I_k(y), & s = s_k. \end{cases} \quad (5.25)$$

donde $\bar{s}_k(y) = s_k + \tau(y) - \tau(I_k(y))$, es tal que $s_k \leq \bar{s}_k(y) < s_{k+1}$, para todo $y \in \Omega$ y $k \geq 1$.

Vamos a estudiar la estabilidad de las soluciones de esta última ecuación para el caso en que $f(t, x) = f(x)$, $x \in \Omega$, $t > 0$, i.e., autonomía de la ecuación ordinaria asociada a (5.1). Supongamos que y e \tilde{y} son soluciones de (5.25), si s_k y s_{k+1} están en el dominio de ambas soluciones, entonces la distancia entre los tiempos de avance, $|\bar{s}_k(y) - \bar{s}_k(\tilde{y})|$, está mayorada por

$$|\tau(y(s_k)) - \tau(\tilde{y}(s_k))| + |\tau(I_k(y(s_k))) - \tau(I_k(\tilde{y}(s_k)))|.$$

Al suponer que $\tau(x) = Ax$, $A \in M_{1 \times n}(\mathfrak{R})$, para todo $x \in \Omega$, y que existe sucesión de reales positivos $\{N_k\}$ tal que

$$|I_k(x) - I_k(\tilde{x})| \leq N_k|x - \tilde{x}| \text{ para todo } x, \tilde{x} \in \Omega,$$

se concluye la desigualdad

$$|\bar{s}_k(y) - \bar{s}_k(\tilde{y})| \leq \|A\|(1 + N_k)|y(s_k) - \tilde{y}(s_k)|. \quad (5.26)$$

Definamos $s_{max} = \max\{\bar{s}_k(y), \bar{s}_k(\tilde{y})\}$, sin pérdida de generalidad vamos a suponer $s_{max} = \bar{s}_k(y)$, entonces para $t \in (s_{max}, s_{k+1}]$ tenemos

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y(s_{max}^+) - \tilde{y}(s_{max}^+)| + \int_{s_{max}}^t \left| \frac{f(y(s))}{1 - \|A\|f(y(s))} - \frac{f(\tilde{y}(s))}{1 - \|A\|f(\tilde{y}(s))} \right| ds. \quad (5.27)$$

Si suponemos las desigualdades

$$|f(y) - f(\tilde{y})| \leq \lambda|y - \tilde{y}| \text{ para todo } y, \tilde{y} \in \Omega,$$

y

$$|f(y)| \leq M, \text{ para todo } y \in \Omega \text{ tal que } \|A\|M < 1,$$

se tiene que

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y(s_{max}^+) - \tilde{y}(s_{max}^+)| + \frac{\lambda}{(1 - \|A\|M)^2} \int_{s_{max}}^t |y(s) - \tilde{y}(s)| ds, \quad (5.28)$$

para $t \in (s_{max}, s_{k+1}]$.

Por Desigualdad de Gronwall usual tenemos

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y(s_{max}^+) - \tilde{y}(s_{max}^+)| \exp\left(\frac{\lambda(t - s_{max})}{(1 - \|A\|M)^2}\right), \quad (5.29)$$

para todo $t \in (s_{max}, s_{k+1}]$.

Por otro lado, notemos que

$$|y(s_{max}^+) - \tilde{y}(s_{max}^+)| = |I_k(y(s_k)) - I_k(\tilde{y}(s_k)) + \int_{\bar{s}_k(\tilde{y}(s_k))}^{\bar{s}_k(y(s_k))} \frac{f(\tilde{y}(s))}{1 - Af(\tilde{y}(s))} ds|$$

que es menor o igual que

$$N_k|y(s_k) - \tilde{y}(s_k)| + \frac{M}{1 - \|A\|M}|s_{max} - s_{min}|,$$

donde $s_{\min} = \min\{\bar{s}_k(y), \bar{s}_k(\tilde{y})\}$, por la desigualdad (5.26) tenemos

$$|y(s_{\max}^+) - \tilde{y}(s_{\max}^+)| \leq \frac{N_k + \|A\|M}{1 - \|A\|M} |y(s_k) - \tilde{y}(s_k)|.$$

Finalmente reemplazando en (5.29) con $t = s_{k+1}$ se tiene

$$|y(s_{k+1}) - \tilde{y}(s_{k+1})| \leq \frac{N_k + \|A\|M}{1 - \|A\|M} \exp\left(\frac{\lambda(s_{k+1} - s_{\max})}{(1 - \|A\|M)^2}\right) |y(s_k) - \tilde{y}(s_k)|. \quad (5.30)$$

Podemos escribir

$$|y(s_{k+1}) - \tilde{y}(s_{k+1})| \leq \prod_{j=1}^k \left(\frac{N_j + \|A\|M}{1 - \|A\|M}\right) \exp\left(\frac{\lambda(s_{k+1} - s_1)}{(1 - \|A\|M)^2}\right) |y(s_1) - \tilde{y}(s_1)|. \quad (5.31)$$

Entonces si definimos

$$a_j = \left(\frac{N_j + \|A\|M}{1 - \|A\|M}\right) \exp\left(\frac{\lambda(s_{j+1} - s_j)}{(1 - \|A\|M)^2}\right), \quad (5.32)$$

para todo $j \geq 1$, una condición del tipo

- (i) $\prod_{j \geq 1} a_j < \infty$, implica que las soluciones de (5.25) son de puntos de impulso estables.
- (ii) $\prod_{j=1}^k a_j \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, implica que las soluciones de (5.25) son de puntos de impulso asintóticamente estables.

La pregunta natural es si estas últimas observaciones también son inferibles para las soluciones de la ecuación original (5.22). La respuesta es el siguiente resultado.

Teorema 14 *Sea la E.D.I.*

$$\begin{cases} x'(s) = f(x), & t \neq Ax + s_k \\ x(t^+) = I_k(x), & t = Ax + s_k, \end{cases} \quad (5.33)$$

con $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, donde $A \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$ y tal que

- (i) $|I_k(x) - I_k(\tilde{x})| \leq N_k |x - \tilde{x}|$, para todo $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$,
- (ii) $|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \lambda |x - \tilde{x}|$, para todo $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$,
- (iii) $|f(x)| \leq M$ y $\|A\|M < 1$, y
- (iv) $0 \leq A(x - I_k(x)) < s_{k+1} - s_k$, $\{s_k\}$ estrictamente creciente y positiva.

Entonces si a_j está definido por (5.32) y

- (v) $\prod_{j > 1} (1 + \|A\|) a_j < \infty$, las soluciones de (5.33) son de puntos de impulso estables.
- (vi) $\prod_{j=1}^k (1 + \|A\|) a_j \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, las soluciones de (5.33) son de puntos de impulso asintóticamente estables.

Demostración: La demostración se obtiene al observar que si x y \tilde{x} son soluciones de (5.33) entonces $D_k(x, \tilde{x}) \leq (\|A\| + 1)|y(s_k) - \tilde{y}(s_k)|$, en que y e \tilde{y} son las correspondientes soluciones de (5.25). \diamond

Notemos que en el teorema anterior el producto $\prod_{j=1}^k (1 + \|A\|)a_j$ puede ser escrito de la manera siguiente

$$\left(\frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|M}\right)^k \left[\exp\left(\frac{\lambda}{(1 - \|A\|M)^2}\right)\right]^{s_{k+1} - s_1} \prod_{j=1}^k (N_j + \|A\|M), \quad (5.34)$$

y si $\|A\|M \neq 0$, también como

$$\left(\frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|M}\|A\|M\right)^k \left[\exp\left(\frac{\lambda}{(1 - \|A\|M)^2}\right)\right]^{s_{k+1} - s_1} \prod_{j=1}^k \left(\frac{N_j}{\|A\|M} + 1\right). \quad (5.35)$$

El factor del medio en (5.35) es una potencia cuya base es mayor que uno, es decir, éste crece junto con k , el ritmo de crecimiento depende de la distribución de los tiempos $\{s_k\}$ en $(0, \infty)$. Observemos que la base disminuye cuando $\|A\|M$ disminuye.

El primer factor en (5.35) puede controlar e incluso dominar el crecimiento del segundo y eventualmente el del tercer factor, pues la base de esta potencia se hace menor que uno si establecemos la condición $2\|A\| + \|A\|^2 < 1/M$.

Existen sucesiones $\{N_j\}$ que hacen del tercer término en (5.35) un factor convergente cuando $k \rightarrow \infty$.

Notemos también que si $\|A\| = 0$ (i.e., $A = 0$) entonces estamos en el caso de una E.D.I. en tiempos fijos y la condición que (5.34) otorga para la estabilidad de los puntos de impulso es que la sucesión

$$e^{\lambda[s_{k+1} - s_1]} \prod_{j=1}^k N_j$$

sea convergente, que es la condición que naturalmente obtendríamos para el caso del impulso en tiempos fijos.

Ahora si quisieramos estudiar directamente la estabilidad de los puntos de impulso de un sistema del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = 0, & t \neq \tau_k(x) = Ax + s_k \\ x(t^+) = I_k(x), & t = \tau_k(x) = Ax + s_k, \end{cases} \quad (5.36)$$

entonces es necesario comparar para dos soluciones x y \tilde{x} la distancias entre sus puntos de impulso en dos hipersuperficies sucesivas, es decir, $D_{k+1}(x, \tilde{x})$ con $D_k(x, \tilde{x})$. Si denotamos los puntos de impulso por $(\tau_j(x_j), x_j)$ y $(\tau_j(\tilde{x}_j), \tilde{x}_j)$, $j = k, k + 1$, tenemos que

$$D_{k+1}(x, \tilde{x}) = |x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1}| + |Ax_{k+1} - A\tilde{x}_{k+1}| \leq (1 + \|A\|)|I_k(x_k) - I_k(\tilde{x}_k)|,$$

luego

$$D_{k+1}(x, \tilde{x}) \leq (1 + \|A\|)N_k D_k(x, \tilde{x}).$$

Así una condición para la estabilidad de los puntos de impulso es que la sucesión

$$(1 + \|A\|)^k \prod_{j=1}^k N_j$$

sea convergente. Esta es justamente la condición que entrega (5.34) al reemplazar en ella $M = \lambda = 0$.

Capítulo 6

APLICACIONES A LA BIOECONOMÍA MATEMÁTICA

Nos centramos en este último capítulo a mostrar el uso de las ecuaciones diferenciales impulsivas en el área de la administración de recursos naturales renovables. Se construyen tres modelos que ejemplifican las ecuaciones impulsivas autónomas, las de tiempos de impulso predeterminados y las de tiempos de impulso variables.

6.1 Introducción

La necesidad de construir modelos racionales cada vez más ajustados a la realidad significa un gran estímulo para el desarrollo de los cuerpos teóricos que los sostienen. No hay duda en que las E.D.I. han sido inspiradas para definir y estudiar con precisión leyes de evolución de una serie de fenómenos naturales. Hemos elegido la Bioeconomía Matemática, por simple afición, como ejemplo de sector temático donde bosquejar este potencial modelador.

La Bioeconomía Matemática, rama de lo que hoy se conoce como Gestión de Poblaciones, es la ciencia que estudia la economía en la extracción y preservación de los recursos renovables mediante modelación matemática y simulación de los procesos. Autores como Gordon, Hardin, Schaefer y Clark, entre otros, ver [7],[8],[9] y [16], han dado cuerpo a las bases de esta emergente área de estudio. Esta disciplina se centra en los recursos autoregenerativos, es decir, en cualquier población de animales o plantas de interés económico y con alguna capacidad de reproducirse y desarrollarse. Biológicamente interesa conocer los estadios y los flujos que caracterizan la dinámica del ciclo de vida de estas especies en ambientes determinados. El problema económico radica en optimizar las utilidades de las empresas extractivas, pero sin descuidar la preservación del recurso, esto es, asegurar la sustentabilidad del negocio. Las matemáticas aparecen como herramienta de especificación y análisis de las relaciones existentes entre las variables involucradas que se consideren relevantes al problema.

El desarrollo tecnológico como así también, en ciertos casos, las fuertes demandas, hacen que la industria extraiga, en términos relativos, grandes volúmenes en breves intervalos de tiempo. Prolongar estas condiciones de producción puede llevar el tamaño de estos bienes a niveles críticos que comprometen la capacidad reproductiva de la población biológica y a futuro la actividad económica misma. Frente a situaciones como estas los gobiernos intentan

ejercer control, por ejemplo, mediante la imposición de cuotas de captura y períodos de veda.

En este capítulo ilustraremos el uso de las E.D.I. en el estudio (construcción de modelos y posterior análisis) del efecto sobre el tamaño de la población (biomasa), de regulaciones extractivas basadas en la prohibición de cosecha cuasipermanente. Nos concentramos en sistemas en que la cantidad del recurso disponible varía continuamente, según su biología y su medio, mientras no exista autorización de captura, y tal que de haber levantamiento de veda los montos extraídos son proporcionales al tamaño de la biomasa y se logran rápidamente, constituyendo un verdadero salto en la continuidad del crecimiento. La condición de proporcionalidad de la captura a la biomasa presente es razonable bajo los supuestos de un esfuerzo (variable que concentra todos los inputs humanos y técnicos) constante en cada cosecha y una captura por unidad de tal esfuerzo proporcional al tamaño del recurso en dicho instante (hipótesis de Schaefer). Nos damos la libertad de obviar alguna rigurosidad respecto a los conceptos propios de la ecología y la economía apelando a la intuición del lector, para privilegiar los elementos matemáticos involucrados.

El procedimiento matemático clásico para definir leyes de evolución de poblaciones en bioeconomía ha sido establecer ya sea ecuaciones en diferencias o ecuaciones diferenciales ordinarias. Las primeras determinan, a causa de la discretización del tiempo, funciones de biomasa tipo escalera, en contraste con las trayectorias continuas surgidas de una E.D.O. Los procesos de crecimiento y extracción de recursos que ahora estudiaremos presentan evoluciones del tamaño poblacional continuas, pero abruptamente tienen drásticos cambios de estado, es decir, son funciones continuas por pedazos. Sabemos que este tipo de funciones aparece naturalmente al tener soluciones de Ecuaciones Diferenciales Impulsivas.

Si consideramos que $[0, \infty)$ es el conjunto de tamaños posibles de un recurso y designamos por $x : (t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $t_0 > 0$, a la función que nos dice su tamaño $x(t)$ en un instante $t > t_0$, entonces $\{x(t) : t > t_0, x(t_0) = x_0\}$, representa una trayectoria de crecimiento posible a partir de un tiempo inicial $t_0 \geq 0$ y una biomasa inicial $x_0 \geq 0$. Esta trayectoria evolutiva está gobernada por una ley de crecimiento propia a la naturaleza del recurso, de la forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1)$$

mientras no alcance algún tiempo de extracción t , definido por una condición del tipo $(t, x(t)) \in \Gamma$, algún $\Gamma \subset (0, \infty) \times [0, \infty)$, en el que, por efecto de una función de captura I_t , esta población se reduce instantáneamente al valor

$$x(t^+) = I_t(x(t)), \quad (6.2)$$

para seguir evolucionando según (6.1) hasta un nuevo tiempo de cosecha.

Es decir, la biomasa del recurso está determinada por la E.D.I.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & (t, x(t)) \notin \Gamma \\ x(t^+) = I_t(x(t)), & (t, x(t)) \in \Gamma. \end{cases} \quad (6.3)$$

Notemos que cada selección de las funciones I_t , $t > 0$ y del conjunto Γ , únicas variables controlables, representa una política regulatoria de la captura en el tiempo. En lo que sigue estudiaremos variados casos, según se elijan estas regulaciones, que involucran distintos tipos de E.D.I..

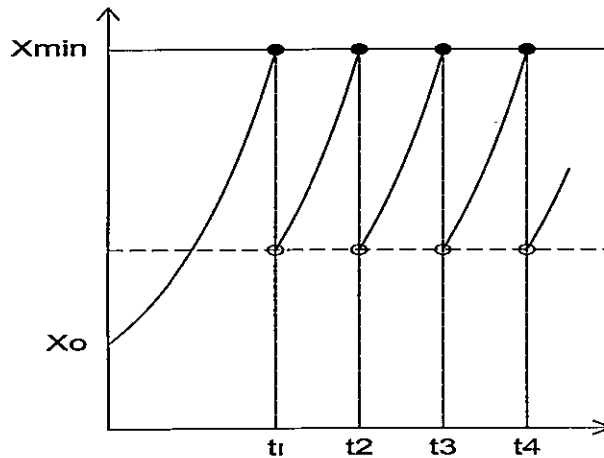


Figura 6.1: Solución de (6.4) con condición inicial $x_0 \in (0, x_{min})$.

6.2 Cosecha a nivel predeterminado de biomasa (E.D.I. autónoma)

Podemos imaginar una regulación, que por ejemplo imponga a la industria alcanzar un instante de captura t si y sólo si el tamaño de la biomasa es mayor o igual que cierto nivel mínimo x_{min} , es decir, estamos en el caso en que Γ es la región $(0, \infty) \times (x_{min}, \infty)$.

Un modelo simple se logra al suponer un hábitat cerrado (sin migraciones), en el que un solo recurso renovable en condiciones ideales tiene una tasa de crecimiento per cápita (tasa de nacimientos menos tasa de mortalidad, ambas per cápita) constante igual a R . Si además la regulación define capturar, en cada instante de extracción, una proporción h , $0 < h < 1$, de la biomasa presente, entonces la E.D.I. (6.3) toma la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Rx, & x(t) < x_{min} \\ x(t^+) = (1-h)x, & x(t) \geq x_{min}, \end{cases} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times [0, \infty). \quad (6.4)$$

Esta ecuación es un ejemplo de sistema dinámico discontinuo, definido en el apartado 1.3.2..

Sea x_0 , $0 < x_0 < x_{min}$, la población al inicio, tiempo cero, del proceso. Si $R < 0$, entonces es claro que el recurso va a la extinción y no se producen capturas. Si $R = 0$, entonces el tamaño de éste permanece constante en un equilibrio estructural inestable. En el caso $R > 0$, la solución x de (6.4) tal que $x(0) = x_0$ (la unicidad es inmediata) es eventualmente periódica, en el sentido que desde el instante $t_1 = (1/R)\log(x_{min}/x_0)$ es periódica de período $s = (1/R)\log(1/(1-h))$, ver Figura 6.1.

De hecho la sucesión $t_k = t_1 + (k-1)s$, $k \geq 1$, corresponde a los sucesivos instantes de extracción y además

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{Rt}, & \text{si } t \in (0, t_1) \\ (1-h)x_{min} e^{R(t-\tau_k)}, & \text{si } t \in (\tau_k, t_{k+1}], k \geq 1. \end{cases}$$

Como la captura en cada cosecha es hx_{min} , la función $H(h)$, que representa la captura

por unidad de tiempo dependiendo del factor de extracción h , está dada por

$$H(h) = h \frac{x_{min}}{s} = Rh \frac{x_{min}}{\log(1/(1-h))}.$$

Un problema económico de interés es saber cuál $h \in (0, 1)$ maximiza $H(h)$. Para responder notemos que

$$(\log(1-h))^2 H'(h) = -Rx_{min} \left[\left(\frac{1}{1-h} - 1 \right) - \log\left(\frac{1}{1-h} \right) \right],$$

de donde deducimos que $H'(h) < 0$, es decir, capturas por unidad de tiempo mayores se obtienen cuando $h \rightarrow 0$. En otras palabras al capturar menos, pero cuando se está permitido (cuando la biomasa alcanza el nivel x_{min}), aumenta la frecuencia de cosecha y se optimiza la producción por unidad de tiempo.

6.3 Cosecha en tiempos predeterminados (E.D.I. a tiempos fijos)

Una redacción de esta sección desde una perspectiva más bioeconómica puede ser encontrada en [13].

Desde la ecología sabemos que una gran variedad de especies, en ambientes cerrados y no sometidas a una extracción, presentan tasas de crecimiento que determinan, transcurrido cierto tiempo que los tamaños de las poblaciones tienden a valores constantes, definidas por la literatura como capacidades de sustentación del ambiente. Cuando una población es un recurso económico la cosecha evidentemente afecta la tasa de mortalidad, sabido es que varios modelos predicen que si esta no es excesiva, entonces el tamaño se ajusta a un nuevo estado de equilibrio. En caso de cosecha moderada en tiempos puntuales, cada ciertos intervalos, es de esperar más bien equilibrio en el sentido de la existencia de ciclos a los que el tamaño de la población converge. En esta sección establecemos y estudiamos un modelo de crecimiento con tasa de crecimiento per cápita del tipo logístico, con cosecha proporcional al recurso presente, pero a diferencia de (6.4), ahora dicha captura ocurre en instantes predefinidos y periódicos. El primer modelo logístico de extracción, definido por una E.D.O., fue introducido por Gordon, la diferencia fundamental con el que ahora presentamos está en que ya no hay una tasa continua de extracción sino que esta variable se discretiza y realiza en ciertos instantes puntuales y uniformemente espaciados.

Supondremos tiempos de extracción $\tau_k = ks$, $k \geq 1$, es decir, cada intervalos de longitud $s > 0$. Si $x(t)$ representa la biomasa en el instante $t \in (0, \infty)$, entonces mientras no exista cosecha asumiremos la ley de evolución

$$\dot{x} = R\left(1 - \frac{x}{K}\right)x, \quad t \neq \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

En (6.5), el parámetro R es una constante positiva llamada tasa de crecimiento intrínseca (revela el potencial biótico de la especie) y la constante $K > 0$ es la ya mencionada capacidad de sustentación del ambiente. Si $t = \tau_k$, para algún $k = 1, 2, \dots$, entonces en este instante se captura un factor h , $0 \leq h \leq 1$, de la población presente. Estamos entonces frente a la ecuación diferencial impulsiva a tiempos fijos

$$\begin{cases} \dot{x} = R(1 - \frac{x}{K})x, & t \neq \tau_k \\ x(t^+) = (1 - h)x, & t = \tau_k. \end{cases} \quad (6.6)$$

La cuestión más natural a responder es cómo es el comportamiento de las soluciones. Si no hay remoción del recurso, $h = 0$, cada solución se aproxima a K cuando t tiende a infinito, con independencia del tamaño inicial x_0 de la población. Notemos que cuando x_0 es pequeño, con respecto a K , las soluciones x presentan un crecimiento exponencial dominado por $\dot{x} = Rx$ durante un cierto período de tiempo, hasta que el factor $1 - \frac{x}{K}$ comienza a afectar el ritmo de crecimiento, determinando así un comportamiento sigmoideo en las trayectorias. Si $h = 1$ se cosecha toda la población en el instante τ_1 y obviamente $x(t) = 0$ para todo $t > \tau_1$. En lo que sigue supondremos $0 < h < 1$, mostramos explícitamente las soluciones y su comportamiento asintótico.

Lema 17 Dado $x_0 > 0$, la solución $x(t)$ de (6.6) tal que $x(0^+) = x_0$ es

$$\frac{Kx_0M^k e^{R(t-\tau_k)}}{K + x_0(e^{Rs} - 1)(M^k - 1)/(M - 1) + x_0M^k(e^{R(t-\tau_k)} - 1)}, \quad (6.7)$$

si $\tau_k < t \leq \tau_{k+1}$ para algún $k = 0, 1, 2, \dots$ ($\tau_0 = 0$), y $M = e^{Rs}(1 - h) \neq 1$. Si $M = 1$, en (6.7) la expresión $(M^k - 1)/(M - 1)$ se asume igual a k , $k = 0, 1, \dots$

Demostración: Supongamos $M \neq 1$. Si $t \in (0, \infty)$ es tal que $t \neq \tau_k$ para todo $k = 1, 2, \dots$, entonces existe $j \geq 0$ con $\tau_j < t < \tau_{j+1}$. Luego $\dot{x}(t)$ es igual a

$$\frac{Re^{R(t-\tau_j)}A(B + x_0M^j(e^{R(t-\tau_j)} - 1)) - e^{R(t-\tau_j)}A(Rx_0M^je^{R(t-\tau_j)})}{(B + x_0M^j(e^{R(t-\tau_j)} - 1))^2}$$

en que $A = Kx_0M^j$ y $B = K + x_0(e^{Rs} - 1)(M^j - 1)/(M - 1)$, factorizando tenemos

$$\dot{x}(t) = \frac{RAe^{R(t-\tau_j)}}{B + x_0M^j(e^{R(t-\tau_j)} - 1)} \times \frac{B - x_0M^j}{B + x_0M^j(e^{R(t-\tau_j)} - 1)}.$$

En este producto el primer factor es $Rx(t)$ y el otro $1 - \frac{x(t)}{K}$.

Ahora si $t = \tau_k$ para algún $k = 1, 2, \dots$, entonces

$$x(\tau_k^+) = \lim_{t \rightarrow \tau_k^+} x(t) = \frac{Kx_0M^k}{K + x_0(e^{Rs} - 1)(M^k - 1)/(M - 1)},$$

expresión que es igual a $(1 - h)x(\tau_k)$. En efecto,

$$\begin{aligned} (1 - h)x(\tau_k) &= Me^{-Rs}x(\tau_k) = \frac{Me^{-Rs}Kx_0M^{k-1}e^{Rs}}{K + x_0(e^{Rs} - 1)\frac{M^k - 1}{M - 1} + x_0M^{k-1}(e^{Rs} - 1)} \\ &= \frac{Kx_0M^k}{K + x_0(e^{Rs} - 1)[(M^{k-1} - 1)/(M - 1) + M^{k-1}]}, \end{aligned}$$

como $(M^{k-1} - 1)/(M - 1) + M^{k-1} = (M^k - 1)/(M - 1)$ se consigue finalmente la igualdad. La demostración para $M = 1$ es similar. \diamond

Destaquemos que la solución $x(t)$ del lema anterior tiene dominio $(0, \infty)$, es de valores positivos y además $M = e^{Rs}(1-h) > 0$. Si $M < 1$, es decir, si la proporción de la captura h supera el parámetro combinado $1 - e^{-Rs}$, tenemos $M^k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, luego $x(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. La constante M es menor que uno, por ejemplo, si al fijar en ella dos de los tres parámetros que la definen, entonces la tasa R o el tiempo entre cosechas s son suficientemente disminuidos o la extracción por unidad h es aumentada. Si $M = 1$, entonces la solución $x(t)$, $\tau_k < t \leq \tau_{k+1}$, algún $k = 0, 1, \dots$, está mayorada por

$$\frac{Kx_0e^{Rs}}{K + x_0(e^{Rs} - 1)k},$$

cota convergente a cero cuando $t \rightarrow \infty$, pues $k \rightarrow \infty$.

Si $M > 1$, tenemos el resultado que sigue a continuación.

Lema 18 Sea $M > 1$, si en (6.6) $x_0 = K \frac{M-1}{e^{Rs}-1}$ (un valor positivo), entonces $x(t)$, $t \in (0, \infty)$, es una función periódica de período s .

Demostración: Si $t \in (0, \infty)$, entonces existe $k = 0, 1, \dots$ tal que $\tau_k < t \leq \tau_{k+1}$. Notemos que $x(t)$ es igual a

$$\frac{K^2 \left(\frac{M-1}{e^{Rs}-1}\right) M^k e^{R(t-\tau_k)}}{K + K \left(\frac{M-1}{e^{Rs}-1}\right) (e^{Rs} - 1) \frac{M^k - 1}{M-1} + K \left(\frac{M-1}{e^{Rs}-1}\right) M^k (e^{R(t-\tau_k)} - 1)},$$

al simplificar por K y amplificar por $e^{Rs} - 1$ se logra

$$\frac{K(M-1)M^k e^{R(t-\tau_k)}}{(e^{Rs} - 1) + (M-1)(e^{Rs} - 1)(M^k - 1)/(M-1) + (M-1)M^k(e^{R(t-\tau_k)} - 1)}.$$

Esta expresión es fácilmente llevable a

$$\frac{K(M-1)e^{R(t-\tau_k)}}{(e^{Rs} - 1) + (M-1)(e^{R(t-\tau_k)} - 1)}$$

y seguidamente a $\frac{Ke^{R(t-\tau_k)}}{K/x_0 + (e^{R(t-\tau_k)} - 1)}$. Desde aquí es muy claro que $x(t+s) = x(t)$, pues $(t+s) - \tau_{k+1} = t - \tau_k$. \diamond

Designemos por $x_p(t)$, $t > 0$, a la solución periódica dada por el lema anterior, es decir,

$$x_p(t) = \frac{K}{(K/x_0^* - 1)e^{-R(t-\tau_k)} + 1}, \quad (6.8)$$

si $\tau_k < t \leq \tau_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$, donde entendemos que

$$x_0^* = K \frac{(1-h)e^{Rs} - 1}{e^{Rs} - 1}. \quad (6.9)$$

Teorema 15 Sea $M > 1$ y $x_0 > 0$. Si $x(t)$ es la solución de (6.6) tal que $x(0^+) = x_0$, entonces

$$|x(t) - x_p(t)| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Demostración: Notemos que la expresión que en la demostración del Lema 18 llamamos B se puede expresar por $K + x_0(K/x_0^*)(M^k - 1)$, luego como $|x(t) - x_p(t)|$, para $\tau_k < t \leq t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$, es igual a

$$Ke^{R(t-\tau_k)} \left| \frac{x_0 M^k}{B + x_0 M^k (e^{R(t-\tau_k)} - 1)} - \frac{1}{K/x_0^* + (e^{R(t-\tau_k)} - 1)} \right|,$$

es posible conseguir la cota

$$\frac{Ke^{Rs}}{B(K/x_0^*)} |x_0 M^k (\frac{K}{x_0^*} + (e^{R(t-\tau_k)} - 1)) - K - x_0 (\frac{K}{x_0^*})(M^k - 1) - x_0 M^k (e^{R(t-\tau_k)} - 1)|,$$

la expresión en valor absoluto se reduce a $(K/x_0^*)|x_0 - x_0^*|$, concluimos que

$$|x(t) - x_p(t)| \leq \frac{e^{Rs}|x_0 - x_0^*|}{1 + (x_0/x_0^*)(M^k - 1)}$$

que tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$, pues $M^k \rightarrow \infty$. \diamond

Conrad, ver [11], dice: "Una función de producción define el máximo nivel de salidas (outputs) obtenibles desde un lote de entradas (inputs). Esta es la manera economicista de caracterizar la tecnología por la cual inputs producen outputs."

En la cosecha de un recurso en específico se puede considerar que los outputs son medibles como el volumen de captura o cosecha. Recordemos que los inputs que se utilizan en el proceso de cosecha los hemos asumidos constantes y posibles de cuantificar en una única variable llamada "esfuerzo" y que denotamos E . Si la captura por unidad de esfuerzo es proporcional al tamaño del recurso en dicho instante, entonces para una trayectoria cualquiera $x(t)$ de la biomasa, es decir, x dada por (6.7), la k -ésima captura $y(\tau_k)$, $k = 1, 2, \dots$ está dada por

$$y(\tau_k) = hx(\tau_k), \text{ donde } h = qE, \tag{6.10}$$

para algún q positivo, que la literatura específica llama coeficiente de capturabilidad.

Desde el teorema anterior se concluye que para k suficientemente grande $y(\tau_k)$ tiende a estabilizarse al valor $hx_p(\tau_k)$, el cual es igual a

$$\frac{qEK}{(K/x_0^* - 1)e^{-Rs} + 1},$$

este cociente se puede modificar hasta poder escribir

$$y := y(\tau_k) = \frac{qE}{1 - qE} x_0^*, \text{ para todo, } k = 1, 2, \dots \tag{6.11}$$

Destaquemos que $x_0^* = x_0^*(E, s)$, pues q , R y K son constantes endógenas al sistema, en cambio E y s es factible considerarlas como parámetros de control que determinan un régimen de captura.

Supongamos, sin pérdida de generalidad para nuestros fines, $q = 1$. Tenemos que en un intervalo de longitud s de tiempo la captura estable es y , el problema que nos planteamos ahora es hallar la combinación de esfuerzo (E unidades) y frecuencia de cosecha (cada s unidades de tiempo) que maximiza una captura estable por unidad de tiempo, esto es optimizar la función

$$H(E, s) := \frac{y}{s}, \quad (6.12)$$

en la región, $s > 0$, $0 < E < 1$ y $M = e^{Rs}(1 - E) > 1$.

Notemos que

$$H(E, s) = \frac{EK}{s} \left(1 - \frac{E}{1 - E} \frac{1}{e^{Rs} - 1} \right)$$

para (s, E) en la región indicada.

Fijemos $s > 0$, ¿cuál es el esfuerzo que maximiza H para esta frecuencia $s > 0$? La derivada parcial de H con respecto a E ,

$$\frac{\partial H}{\partial E} = \frac{K}{s} \left(1 - \frac{(2 - E)E}{(1 - E)^2(e^{Rs} - 1)} \right),$$

se anula cuando $(2 - E)E = (1 - E)^2(e^{Rs} - 1)$, lo que nos lleva a la cuadrática en E

$$E^2 e^{Rs} - E(2e^{Rs}) + (e^{Rs} - 1) = 0,$$

que se soluciona en el intervalo $(0, 1 - e^{-Rs})$ para

$$\tilde{E} = 1 - e^{-Rs/2}.$$

Al variar s en $(0, \infty)$, en la región indicada se genera una curva que para cada $s > 0$ indica el esfuerzo necesario para lograr una captura por unidad de tiempo estable óptima. Ver Figura 6.2.

En efecto, dado $s > 0$, si $0 < E < \tilde{E}$, entonces $\frac{\partial H}{\partial E} > 0$; si $\tilde{E} < E < 1 - e^{-Rs}$ e, entonces $\frac{\partial H}{\partial E} < 0$. En otras palabras H tiene un máximo en \tilde{E} . El valor de dicho óptimo es

$$H(\tilde{E}) = \frac{KR}{2} \frac{1 - e^z}{z e^z + 1},$$

con $z = -\frac{Rs}{2}$.

Nos preguntamos por la existencia global de un óptimo, para ello estudiamos la derivada de (6.12) con respecto a $s > 0$. Tenemos que

$$\dot{H}(z) = \frac{KR}{2} \frac{1 + 2ze^z - e^{2z}}{(e^z + 1)^2} \text{ y } \dot{z}(s) = -\frac{R}{2},$$

luego el signo de $\dot{H}(s) = \dot{H}(z)\dot{z}(s)$ para $s > 0$, depende del signo de $p(z) = 1 + 2ze^z - e^{2z}$ cuando $z < 0$. Notemos que $\dot{p}(z) = 2e^z q(z)$ con $q(z) = (1 + z) - e^z$, pero $e^z > 1 + z$ para $z < 0$ con igualdad si $z = 0$, por lo tanto, $q(z) < 0$ para $z < 0$, así p es estrictamente

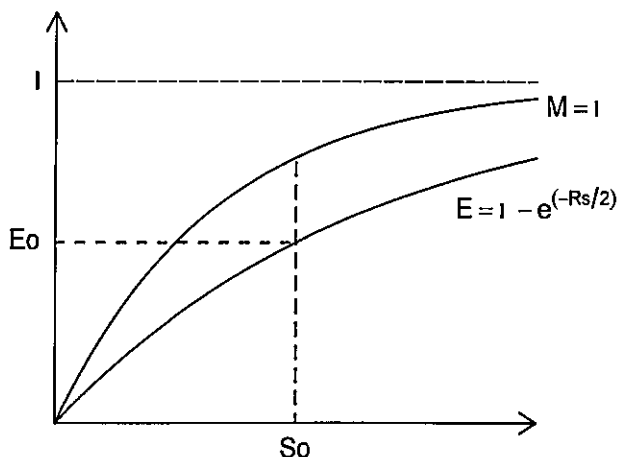


Figura 6.2: Curva de esfuerzo óptimo para la frecuencia de captura $1/s$

decreciente en $(-\infty, 0)$, como $p(0) = 0$, se tiene $p(z) > 0$ en $(-\infty, 0)$. Concluimos que $H(s)$ es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$.

Rendimientos estables por unidad de tiempo más óptimos se logran entonces aumentando la frecuencia $1/s$ de las capturas, pero ajustando (disminuyendo) el esfuerzo al valor $\tilde{E} = 1 - e^{-Rs/2}$.

El valor del rendimiento estable al cual nos aproximamos cuando aumentamos la frecuencia es

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(\tilde{E}) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{KR}{2} \frac{1 - e^z}{z e^z + 1} = \frac{KR}{4}.$$

Este coincide con el valor que, para modelos ordinarios, se conoce como producción sostenible máxima.

6.4 Cosecha en tiempos según valor de la biomasa (proceso impulsivo a tiempos variables)

Nos vamos a situar en el caso de una política de pesca regular en el tiempo, una que determina el instante del levantamiento de veda como función del volumen del recurso presente. Si $x(s)$ es el tamaño de la población en el instante s , entonces tras la k -ésima captura, la próxima, la $(k + 1)$ -ésima, se efectuará en un futuro y más cercano tiempo $t > s$ en el que se cumple una condición del tipo $\tau_{k+1}(x(t)) = t$, es decir, estamos en presencia de tiempos variables de extracción condicionados según una familia de funciones $\tau_k : (0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$, $k \geq 1$.

Natural es considerar que τ_k , $k \geq 1$, sea una función decreciente, digamos que este supuesto implica que a mayor biomasa, el tiempo de espera para la captura siguiente sea menor. También resulta claro una condición del tipo $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$, para todo $x \in (0, \infty)$ y $k \geq 1$, ésta asegura que el momento de la k -ésima captura sea anterior al respectivo de la $(k + 1)$ -ésima. El desear que la normativa para determinar cierto instante de captura sea una constante impone que $\tau_{k+1}(x)$ sea igual a $\tau_k(x)$, para $k \geq 1$, salvo por un parámetro positivo α .

Una posibilidad simple para que τ_k , $k \geq 1$, satisfaga las hipótesis del párrafo anterior es suponer linealidad, es decir, $\tau_k(x) = -mx + k\alpha$, para algún $m > 0$ y para todo $x \in (0, \infty)$ y $k \geq 1$. El proceso impulsivo que establecemos es algo distinto al determinado por una E.D.I. como las descritas en 1.3.4. En efecto, en este caso cuando una trayectoria evolutiva ha intersectado una superficie $\Gamma_k : t = \tau_k(x)$, esta barrera de inmediato es levantada del espacio de fase generalizado y la próxima posible hipersuperficie a impactar es Γ_{k+1} . Eliminamos de este modo a priori la posibilidad de pulsaciones.

Suponiendo una tasa de crecimiento per cápita de la población constante R y un factor de extracción h , $0 < h < 1$, tenemos el siguiente proceso impulsivo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Rx, & t \neq -mx + k\alpha \\ x(t^+) = (1-h)x, & t = -mx + k\alpha, \end{cases} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathfrak{R}^+. \quad (6.13)$$

Interesa preguntarse por el efecto sobre una pesca sustentable de variaciones en los parámetros h , α y m . Vamos a suponer $R > 0$, pues de lo contrario inevitablemente el recurso tiende a la extinción.

Si en el tiempo de cosecha t_0 , el nivel de población es x_0 , es decir, si $(t_0, x_0) \in \Gamma_p$ para algún $p \geq 1$, entonces x_0 es reducido a $(1-h)x_0$ y la posterior evolución del tamaño del recurso es solución del P.V.I. definido por (6.13) y la condición $x(t_0^+) = (1-h)x_0$. Por el Lema 11 del Capítulo 4, este P.V.I. es equivalente a

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = 0, & t \neq \tilde{\tau}_k(y), \\ y(t^+) = (1-h)y, & t = \tilde{\tau}_k(y), \\ y(t_0) = (1-h)x_0, & (t, y) \in (0, \infty) \times \mathfrak{R}^+. \end{cases} \quad (6.14)$$

Recordemos que las funciones $\tilde{\tau}_k$, $k \geq 1$, están definidas implícitamente por

$$t = -m(\Phi(t)y) + k\alpha, \quad k \geq 1, \quad (6.15)$$

en que $\Phi(t) = e^{R(t-t_0)}$, $t > t_0$. En otras palabras, las superficies de impulso $\tilde{\Gamma}_k$, $k \geq 1$, de (6.14), al despejar y desde (6.15) están dadas por

$$\tilde{\Gamma}_k : y = -\frac{1}{m}(t - k\alpha)e^{-R(t-t_0)}, \quad t < k\alpha, \quad k \geq 1,$$

ver Figura 6.3.

La solución a (6.15) es

$$y(t) = (1-h)^k x_0, \quad \text{si } t \in (t_{k-1}, t_k],$$

donde t_k , $k \geq 1$, es tal que $(t_k, y(t_k)) \in \tilde{\Gamma}_{p+k}$, $k \geq 1$, es decir, fijando $k \geq 1$,

$$(1-h)^k x_0 = -\frac{1}{m}(t_k - (k+p)\alpha)e^{-R(t_k-t_0)},$$

condición que podemos escribir como

$$[(t_k - t_0) - k\alpha] - mx_0(1 - [(1-h)e^{R\alpha}]^k e^{R[(t_k-t_0)-k\alpha]}) = 0. \quad (6.16)$$

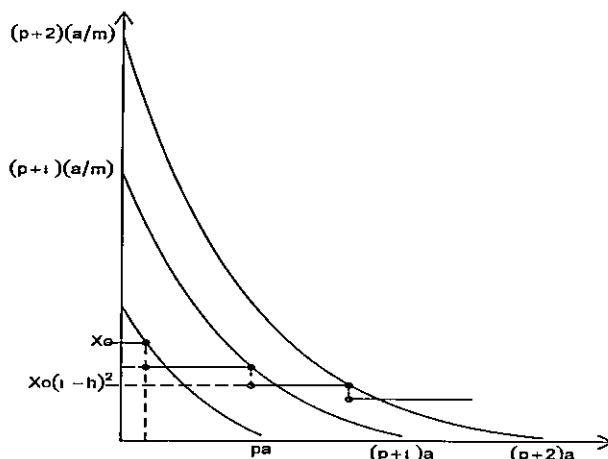


Figura 6.3: Gráfico de la solución del sistema (6.14)

Estos tiempos t_k , $k \geq 1$, efectivamente existen. De hecho si hacemos el cambio de variable $z_k = t_k - t_0$ y llamamos $f(z_k)$ al lado izquierdo de (6.16), entonces como $f(0) < 0$ y $f(z) \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow \infty$, la ecuación $f(z_k) = 0$ tiene solución positiva, además única ya que $f'(z) > 0$ si $z > 0$.

Volviendo a (6.13), la solución x tal que $x(t_0^+) = (1 - h)x_0$ es

$$x(t) = \Phi(t)(1 - h)^k x_0, \text{ si } t \in (t_{k-1}, t_k], k \geq 1. \tag{6.17}$$

La intención al construir un modelo bioeconómico es buscar capturas estables en el tiempo. Una posibilidad es preguntarnos cuándo la solución (6.17) es periódica. En otras palabras, condiciones sobre los parámetros para que exista entero $q \geq 1$, de modo que tras q -cosechas recuperemos el nivel original de biomasa, esto es,

$$x(t_q) = e^{R(t_q - t_0)}(1 - h)^q x_0 = x_0,$$

por lo tanto,

$$(1 - h)^q e^{R(t_q - t_0)} = 1. \tag{6.18}$$

Remplazando esta expresión en (6.16) con $k = p$, tenemos que $t_q - t_0 = q\alpha$. Igualdad que al ser llevada a (6.18) permite deducir $h = 1 - e^{-R\alpha}$.

Volviendo a (6.16) con esta condición se tiene

$$[(t_k - t_0) - k\alpha] - m x_0 (1 - e^{R[(t_k - t_0) - k\alpha]}) = 0, \tag{6.19}$$

para todo, $k \geq 1$.

Ya discutimos que (6.19) tiene una única solución, esta a simple vista es $t_k - t_0 = k\alpha$, para todo, $k \geq 1$. Resumiendo si $h = 1 - e^{-R\alpha}$, entonces la solución (6.17) es periódica de período α , para todo $x_0 > 0$, y tras una cosecha la próxima es el mismo nivel x_0 .

Notemos que, no es difícil probarlo, si $h > 1 - e^{-R\alpha}$ (resp. $<$), entonces $t_k - t_0 > k\alpha$ (resp. $<$), $k \geq 1$. Ver Figura 6.4, 6.5 y 6.6.

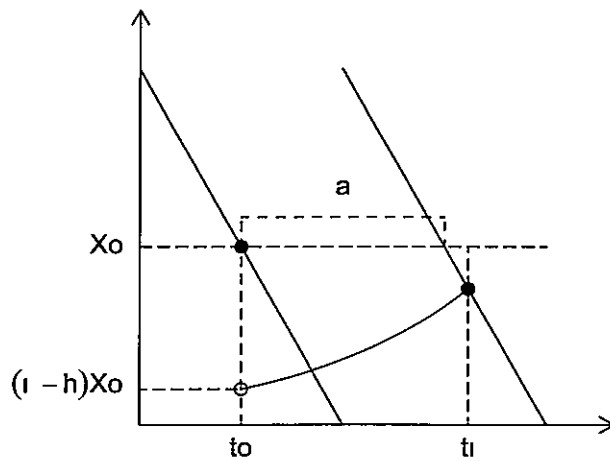


Figura 6.4: Si $h > 1 - e^{-R\alpha}$, entonces $t_{k+1} - t_k > \alpha$ y $x_{k+1} < x_k$.

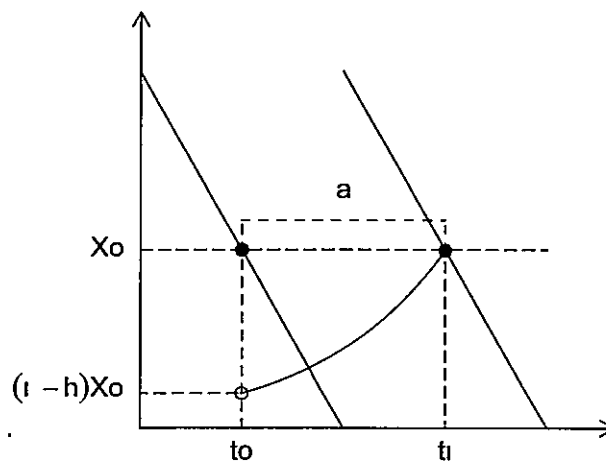


Figura 6.5: Si $h = 1 - e^{-R\alpha}$, entonces $t_{k+1} - t_k = \alpha$ y $x_{k+1} = x_k$.

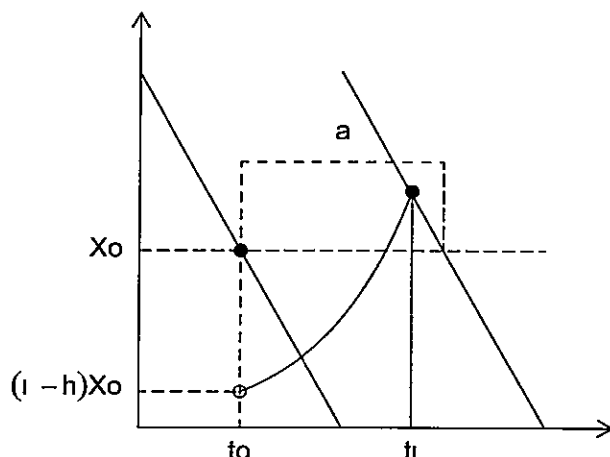


Figura 6.6: Si $h < 1 - e^{-R\alpha}$, entonces $t_{k+1} - t_k < \alpha$ y $x_{k+1} > x_k$.

En ambos casos interesa el comportamiento futuro de la solución. En particular la evolución del nivel $x_k = x(t_k)$, $k \geq 1$, de la biomasa, es decir, el tamaño del recurso exactamente antes de la $(k + 1)$ -ésima cosecha.

De (6.16) se deduce la identidad

$$x_k - x_0 = -\frac{1}{m}[(t_k - t_0) - k\alpha], \quad k \geq 1. \tag{6.20}$$

Luego si $h > 1 - e^{-R\alpha}$ (resp. $<$), entonces $x_k < x_0$ (resp. $>$), $k \geq 1$.

De (6.20) se concluye

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{1}{m}[(t_{k+1} - t_k) - \alpha], \quad k \geq 1, \tag{6.21}$$

que no es más que (6.20) con la condición inicial x_k en el instante t_k , $k \geq 1$. Por lo tanto, si $h > 1 - e^{-R\alpha}$ (resp. $<$), entonces $x_{k+1} < x_k$ (resp. $>$), $k \geq 1$.

Resumiendo si $h > 1 - e^{-R\alpha}$, la sucesión $\{x_k\}$ es monótona decreciente acotada por 0, por lo tanto, convergente. De (6.21) se deduce que $t_{k+1} - t_k \rightarrow \alpha$ cuando $k \rightarrow \infty$. Además como $x_k = e^{R[(t_k - t_0) - k\alpha]}(e^{R\alpha}(1 - h))^k x_0$, se tiene que $x_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, es decir, el recurso va a la extinción.

Ahora si $h < 1 - e^{-R\alpha}$, definimos $\beta = (1 - h)e^{R\alpha} > 1$ y observamos que remplazando (6.20) en (6.16) tenemos la identidad

$$x_k - x_0 \beta^k e^{-Rm(x_k - x_0)} = 0, \quad k \geq 1. \tag{6.22}$$

Así tenemos que x_k es una función implícita de k , tomando k como variable continua y derivando se obtiene

$$x'_k = \frac{x_k \log(\beta)}{1 + Rm x_k} > 0 \text{ y } x''_k = \frac{x'_k \log(\beta)}{(1 + Rm x_k)^2} > 0.$$

Luego x_k crece convexamente con $k \in (0, \infty)$, por lo tanto, $x_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Concluimos que capturando un factor menor que $1 - e^{-R\alpha}$ aseguramos montos crecientes cada α unidades de tiempo.

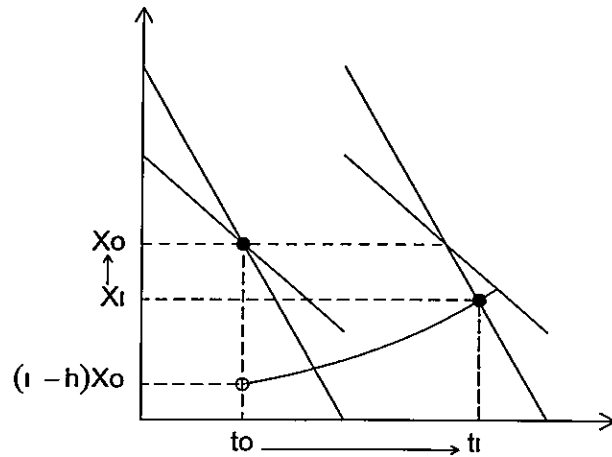


Figura 6.7: Desplazamiento de t_1 y x_1 al crecer m , caso $h > 1 - e^{-R\alpha}$.

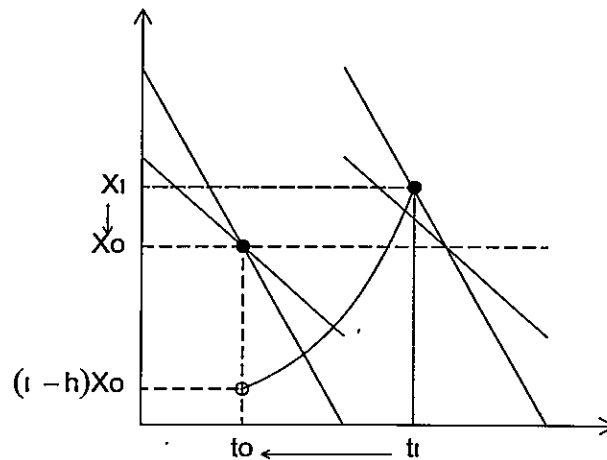


Figura 6.8: Desplazamiento de t_1 y x_1 al crecer m , caso $h < 1 - e^{-R\alpha}$.

¿Qué efecto tiene sobre la captura variaciones sobre la pendiente m de la recta $\Gamma_k : t = -mx + k\alpha$, $k \geq 1$? La k -ésima captura es proporcional a la biomasa x_k , $k \geq 1$. Notemos que de (6.22) se obtiene

$$x'_k(m) = -\frac{Rx_k(m)[x_k(m) - x_0]}{1 + Rmx_k(m)}, \quad k \geq 1,$$

de donde si $(1-h)e^{R\alpha} < 1$ (resp. $>$), entonces la k -ésima cosecha crece (resp. decrece), $k \geq 1$. Ver Figura 6.7 y Figura 6.8.

Bibliografía

- [1] Bainov, D.D. y Covachev, V. Chr. 1994. Impulsive differential equations with a small parameter, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol. 24, World Scientific Publishing Co.
- [2] Bainov, D.D. y Simeonov, P.S. 1989. Systems with impulse effect. Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications. Ellis Horwood Limited.
- [3] Bainov, D.D. y Simeonov, P.S. 1987. Differentiability of solutions of systems with impulse effect with respect to initial data and parameter, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 15, 251-269.
- [4] Bainov, D.D. y Kostadinov, S.I. 1996. Abstract impulsive differential equations, Descartes Press, Koriyama.
- [5] Benchohra, M. y Boucherif, A. 2000. Initial value problems for impulsive differential inclusions of first order, Differ. Equ. Dyn. Syst. 8, 51-66.
- [6] Beverton, R.J.H. y Holt, S.J. 1957. On the dynamics of exploited fish populations. Ministry of Agriculture, Fisheries and Food, London, Fish. Invest. Ser. 2(19).
- [7] Clark, C.W. 1989. Bioeconomic modeling and resource management. Applied Mathematical Ecology. Biomathematics, Vol. 18, Springer-Verlag, 11-57.
- [8] Clark, C.W. 1976. Mathematical bioeconomic: the optimal management of renewable resources. Wiley Interscience, New York.
- [9] Clark, C.W. 1985. Bioeconomic modelling and fisheries management, Wiley Interscience, New York.
- [10] Coddington, E.A. y Levinson, N. 1955. Theory of ordinary differential equations. Int. Series in Pure y Applied Math. McGraw-Hill Book Company, Inc.
- [11] Conrad, J.M. y Clark, C.W. 1987. Natural resource economics. Cambridge: Cambridge University Press.
- [12] Córdova, F. y Pinto, M. Por aparecer. From Quotient Comparison to a Proportional Calculus.
- [13] Córdova, F. y Pinto, M. 2002. Bioeconomía matemática explotación y preservación. Cubo Matemática Educacional. Vol. 4, N 1, 49 -64.

- [14] DeCarlo, R. y col. 2000. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proceedings of the IEEE*, Vol 88, 7, July, 1069-1082.
- [15] Frigon, M. y O'Reyan. D. 1995. Boundary value problems for second order impulsive differential equations, *J. math. Anal. Appl.* 193, 96-113.
- [16] Gordon, H.S. 1954. The economic theory of a common property resource: the fishery, *J. Polit. Economy* 62, 124-142.
- [17] Halanay, A. y Wexler, D. 1971. *Qualitative theory of impulsive systems*, Editura Academici Republici Socialiste Romania, Bucuresti, Mir, Moscow.
- [18] Hu, S. y Lakshmikantham, V. To appear. Existence and continuation results for impulsive differential equations.
- [19] Lakshmikantham, V. y col. 1989. *Theory of impulsive differential equations*, Series in Modern Applied Math., Vol 6, World Scientific.
- [20] Lakshmikantham, V. y Liu, X. 1998. Impulsive hybrid systems and satability theory. *Dynamics Sistesms and Appl.*, 7, 1-9.
- [21] Lakshmikantham, V. y Liu, X. 1989. On quasistability for impulsive differential systems. *Nonlinear Analysis*, 13, 819-828.
- [22] Liu, X. 1988. Quasi-stabilily and Lyapunov functions. *Appl. Anal.* Vol. 31, 3, 201-213.
- [23] Mil'man, V.D. y Myshkis, A.D. 1960. On the stability of motion in the presence of impulsos. *Sib. Math. J.* 1, 233-237.
- [24] Mil'man, V.D. y Myshkis, A.D. 1963. Random impulses in linear dynamical systems. *Approximate Methods of Solution of Differential Equations*. Publ. House Acad. Sci. Ukr. SSR, Kiev, 64-81.
- [25] Myshkis, A.D. y Samoilenko, A.M. 1967. Systems with impulses with prescribed moments of time. *Mat. Sbornik.* 74, 202-208.
- [26] Pandit, S.G. y Deo, S.G. 1982. *Differential systems involving impulses*. Springer, Berlin.
- [27] Perestyuk, N.A. y Samoilenko, A.M. 1987. *Differential equations with impulse effect*. Kiev, Vishcha Shkola.
- [28] Perestyuk, N.A. y Samoilenko, A.M. 1977. Stability of solutions of differential equations with impulse effect. *Diff. Uravn.*, 13, 1981-1992.
- [29] Perestyuk, N.A. y Samoilenko, A.M. 1981. On the stability of systems with impulse effect. *Diff. Uravn.*, 11, 1995-2001.
- [30] Pollard, D. 1984. *Convergence of stochastic processes*. Springer-Verlag New York Inc.
- [31] Reinfelds, A. 1997. Dynamical equivalence of impulsive differential equations, *Nonlinear Anal.* 30, 5, 2743-2752.

- [32] Samoilenko, A.M. y Perestyuk, N.A. 1995. Impulsive Differential Equations. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 14.
- [33] Simeonov, P.S. 1986. Existence, uniqueness and continuability of solutions of systems with impulse effect, *Godishnik VUZ Appl. Math.* 22.
- [34] Simeonov, P.S. y Bainov, D.D. 1988. Stability of the solutions of singularly perturbed systems with impulse effect, *J. Math. Anal. and Appl.*, 136, 575-588.
- [35] Zavaliscin, S.T., Sesekin, A.N. y Drozdenko, S.E. 1983. Dynamical systems with impulse structure. Middle - Ural Publishing House, Sverdlovsk, 112. (in Russian).