Análisis Armónico sobre Espacios Cuadráticos en Dimensión par

Tesis

Entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por

Daniel Alberto Jiménez Briones

Octubre, 2000

Director de Tesis: Dr. Jorge Soto Andrade

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

Informe de Aprobación

Tesis de Doctorado

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

Daniel Alberto Jiménez Briones

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa Privada de Tesis rendido el día 21 de Septiembre de 2000.

Director de Tesis

Dr. Jorge Soto Andrade ....

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Jan Felipe van Diejen ....

Dr. Ricardo Baeza ....

Dr. Manuel Elgueta ....

Dr. Humberto Prado ....

A mí Dios Jehová
Esposa e Hijos

Agradezco a la Fundación Andes por el apoyo económico prestado durante mi formación preliminar, a la Universidad de Valparaíso por el apoyo economico durante el desarrollo de la tesis, así como a Jorge Soto Andrade por todo el esfuerzo realizado tanto en mi formación previa como en la guía de esta tesis.

Indice de Materia

Lista de Simbolos

k Cuerpo con q elementos, de característica distinta de dos.

$\mathbb{K}$ Extensión cuadrática de k

(E, Q) Espacio cuadrático no degenerado de dimensión par sobre k.

ε_Q Signo del espacio cuadrático (E, Q).

E_0 El conjunto de los vectores isótropos.

E_1 El conjunto de los vectores anisótropos.

G El grupo de similitudes de la forma cuadrática Q.

A, B, C Álgebras cuadráticas sobre k.

ε_A Signo del álgebra A

F Automorfismo de Frobenius del álgebra A.

N_A Aplicación Norma del álgebra A.

Tr_A Aplicación Traza del álgebra A.

$A^\times$ Grupo multiplicativo de los elementos inversibles del álgebra A.

$U_1(A)$ Circulo Unitario, formado de los elementos de norma 1 en el álgebra A.

$\mathcal{U}$ Proyección unitaria de $A^\times$ sobre $U_1(A)$.

$L^2(X)$ Espacio de las funciones complejas sobre el conjunto X.

$End_G(V)$ Álgebra conmutante (álgebra de endomorfismos) de la representación V de G.

$N(X, G)$ Álgebra de núcleos G-invariantes sobre $X \times X$.

$\delta_{i,j}$ $\delta_i(j)$ Delta de Kronecker

$H^\wedge$ Grupo de caracteres de un grupo finito conmutativo H

α, β, γ Caracteres del grupo $k^\times$.

Ω, Ψ Caracteres de $A^\times$.

ω, ψ Restricciones de los caracteres Ω, Ψ a $k^\times$.

ω_0, ψ_0 Denotas(cuando corresponde) los caracteresde $k^\times$ tales que Ω, Ψ son los levantamientos de ω_0, ψ_0, es decir $\Omega = \omega_0 \circ \mathrm{N}_A$.

Resumen

Sea k un cuerpo finito de característica distinta de dos, (E, Q) un espacio cuadrático no degenerado de dimensión par sobre k y G el grupo de similitudes de la forma cuadrática Q. La acción natural de G sobre el conjunto E se descompone en tres órbitas: la órbita trivial, la de los vectores isótropos E_0 y la de los vectores anisótropos E_1.

En una primera parte, se demuestra en forma geométrica que cada una de las álgebras conmutantes $End_G(L^2(E_0))$ y $End_G(L^2(E_1))$ es conmutativa; además obtenemos que sus dimensiones son $q+1$ y q^2-1 respectivamente.

Determinamos una familia completa de idempotentes primitivos y ortogonales de las álgebras conmutantes $End_G(L^2(E_0))$ y $End_G(L^2(E_1))$, cuya descripción se entrega en los teoremas 1 y 14. Obtenemos así la descomposición explícita en irreducibles de las representaciones sin multiplicidades $L^2(E_0)$ y $L^2(E_1)$.

Abstract

Let k be a finite field of characteristic different from two, (E, Q) an even dimensional non degenerate quadratic space over k and G the similarity group of the quadratic form Q. The natural action of G on E descomposes into 3 orbits: the trivial one, the orbit E_0 consisting of all isotropic vectors, and the orbit E_1 consisting of all anisotropic vectors.

In a first part it is shown in a geometric way that the algebras $End_G(L^2(E_0))$ and $End_G(L^2(E_1))$ are commutative; we also compute their dimensions to be $q+1$ and q^2-1 respectively.

We find a complete orthogonal family of primitive idempotents for the commuting algebras $End_G(L^2(E_0))$ and $End_G(L^2(E_1))$, whose description is given in theorems 1 and 14. We obtain in this way the explicit descomposition into irreducible components for the multiplicity-free representations $L^2(E_0)$ and $L^2(E_1)$ of G.

Introducción

Sea k un cuerpo finito de característica distinta de dos, (E, Q) un espacio cuadrático no degenerado de dimensión par sobre k y G el grupo de similitudes de la forma cuadrática Q.

En lo que sigue, designamos por $L^2(E)$ al espacio vectorial complejo de todas las funciones complejas sobre E, provisto del producto escalar definido positivo habitual. De la acción natural de G en E, se deduce una acción (o representación) lineal τ, llamada también natural, de G en el espacio vectorial $L^2(E)$, dada por $\tau_g(f) = f \circ g^{-1}$, para $g \in G$, $f \in L^2(E)$.

Nuestro objetivo es descomponer completamente la representación lineal τ de G en $L^2(E)$.Las componentes irreducibles suministradas por esta descomposición son los ingredientes necesarios para el análisis armónico (no conmutativo) sobre E.

Como la acción natural de G sobre el conjunto E se descompone en tres órbitas: la órbita trivial, reducida al vector nulo, la de los vectores isótropos, E_0, y la de los vectores anisótropos, E, la descomposición de la representación natural τ de G en $L^2(E)$, se reduce a la descomposición de sus subrepresentaciones $L^2(E_0)$ y $L^2(E_1)$.

Una propiedad clave de estas dos representaciones es que no tienen multiplicidades, es decir que se descomponen como una suma directa de subrepresentaciones irreducibles no isomorfas dos a dos.

Esto equivale al hecho que sus respectivas álgebras de endomorfismos, llamadas también álgebras conmutantes o de entrelazamiento, $End_G(L^2(E_0))$ y $End_G(L^2(E_1))$ son conmutativas, propiedad que demostramos en la primera parte de la tesis.

En seguida, logramos las descomposiciones buscadas encontrando una familia completa de proyectores ortogonales, que conmutan con la acción de G, para los espacios $L^2(E_0)$ y $L^2(E_1)$. Para obtener estos proyectores, trabajamos en las álgebras de endomorfismos $End_G(L^2(E_0))$ y $End_G(L^2(E_1))$, y construimos en cada una de ellas una familia completa de idempotentes primitivos y ortogonales. Esta construcción es especialmente delicada en el caso del álgebra $End_G(L^2(E_1))$, en que procedemos por etapas sucesivas, como se explica más abajo.

Nuestra construcción se apoya esencialmente en el concepto de álgebra cuadrática sobre el cuerpo de base k. La idea fundamental, que aparece a través de todo el desarrollo de la tesis, es asociar de manera natural a cada elemento a de una de las dos posibles álgebras cuadráticas A sobre k, un operador de entrelazamiento "genérico" $M_a \in End_G(L^2(E_1))$. En seguida, usando los caracteres del grupo multiplicativo del álgebra A, introducimos las "transformadas de Mellin" de estos operadores, a partir de las cuales es posible constuir con relativa facilidad la familia buscada de idempotentes primitivos y ortogonales en $End_G(L^2(E_1))$

Para lograr este resultado, la tesis quedó organizada del siguiente modo, que describimos a través del contenido de los distintos capítulos.

En el primer capítulo, entregamos las nociones básicas de la teoría de representaciones geométricas de grupos finitos. Además introducimos la nomenclatura y contexto en que se desarrolla la tesis. Finalmente se demuestra de manera elemental que las álgebras conmutantes de $L^2(E_0))$, $L^2(E_1)$ son conmutativas y se calculan sus dimensiones cuando la dimensión del espacio ambiente es mayor que 4.

También introducimos el concepto relevante de álgebra cuadrática sobre el cuerpo de base. Con su ayuda establecemos una correspondencia con las Q-configuraciones linealmente independientes en $E_1 \times E_1$ por intermedio de la norma y traza de cada posible álgebra cuadrática A, a menos de isomorfismo, a saber $A = k \times k$ o $A = \mathbb{K}$, la única extensión cuadrática del cuerpo k.

De manera más precisa: la Q-configuración, o G - órbita, de un par de vectores linealmente independientes $(x, y) \in E_1 \times E_1$ está caracterizada, en virtud del teorema de Witt para similitudes, por el triple $(Q(x), B(x, y), Q(y))$ módulo la acción por homotecia de $k^\times$.Podemos entonces tomar como representante de la Q-configuración al triple $(1, B(x,y)Q(x)^{-1}, Q(y)Q(x)^{-1})$,que es de la forma $(1, t, r)$, con $t \in k$, $r \in k^\times$.Ahora bien, estos triples se pueden obtener via traza y norma de las dos posibles álgebras cuadráticas sobre k, mediante la aplicación natural

$$\begin{array}{rccc} T: & (k \times k)^\times \dot{\cup} \mathbb{K}^\times & \longrightarrow & \{1\} \times k \times k^\times \\ & z & \longrightarrow & (1, tr(z), N(z)) \end{array}$$

que es epiyectiva, con fibra de cardinal constante igual a 2

En el segundo capítulo, nos dedicamos a descomponer $L^2(E_0)$. En una primera parte entregamos una descomposición elemental dada por diagonalización simultánea de los operadores de homotecia la cual no solamente es realizable en este caso sino también para el caso anisótropo. Construimos fórmulas que determinan tanto el número de vectores isótropos como anisótropos y finalmente nos concentramos en el espacio de las funciones complejas sobre las rectas isótropas, cuyo número de entrelazamiento es 3. Usando el operador de promedio sobre las rectas ortogonales, encontramos sus valores propios y con estos valores, construimos por el método habitual los proyectores propios, con lo cual logramos descomponer íntegramente este espacio. Transportando estos operadores al caso isótropo encontramos una familia completa de idempotentes primitivos y ortogonales para el álgebra conmutante de $L^2(E_0)$.

En el tercer capítulo, nos detenemos en el desarrollo de la tesis, para resaltar el hecho que el caso anterior, es decir, el del espacio de las funciones complejas sobre el conjunto de las rectas isótropas, suministra un ejemplo de grafo que es una q-deformación de los grafos n-octaedros, que no solamente involucra la q-deformación de los operadores de promedio canónicos, sino que también de su tipo de descomposición espectral.

En el cuarto capítulo, introducimos los operadores de entrelazamiento para el caso anisótropo y escudriñamos las propiedades de algunos productos de operadores de entrelazamiento.

En la segunda parte, analizamos en todo detalle el caso en que la dimensión del espacio E es 2. En este caso, salvo isomorfismo, cada una de las dos álgebras cuadráticas realizan el espacio cuadrático, con su norma como forma cuadrática Q. Este un caso atípico, ya que no aparecen todas las posibles Q-configuraciones, sino que sólo las que corresponden al álgebra cuadrática en cuestión. Por otra parte, el número de entrelazamiento depende del álgebra cuadrática y está dado por:

$$\frac{(q-1)\,(q+1-\varepsilon_A)}{2}$$

Para cada uno de los espacios cuadráticos el cálculo es análogo, así como la familia completa de idempotentes primitivos y ortogonales.

Los operadores de entrelazamiento que juegan aquí un rol clave aparecen parametrizados por elementos de las álgebras cuadráticas. Hacemos notar algunas propiedades de estos operadores, reducidos a la descomposición realizada a traves de diagonalización simultánea de los operadores de homotecia, que repercutirán finalmente en la descripción de los espacios imágenes de los proyectores ortogonales

En el quinto capítulo, nos dedicamos en forma exclusiva a calcular ciertos números geométricos, los cuales corresponden a los coeficientes de la combinación lineal que describe el producto de operadores canónicos en nuestra álgebra conmutante. Estos coeficientes se pueden calcular gracias a un sistema de ecuaciones invariante por el grupo G. El método empleado para resolver estos sistemas es encontrar representantes adecuados módulo G para los datos que definen el sistema, de modo de hacer más simple su resolución. El poder escoger representantes adecuados que cubran todas las posibles Q-configuraciones fue factible cuando el espacio cuadrático ambiente admite un plano totalmente hiperbólico, en el otro caso se realizó en dos etapas. Finalmente, establecimos las posibles soluciones linealmente dependientes, ya que algunas de ellas deben ser eliminadas y otras adjuntas a los operadores de homotecias.

En el sexto capítulo, nos dedicamos a reemplazar estos coeficientes, identificados en el capítulo anterior, y a reescribir nuestra combinación lineal en términos de otros operadores geométricos, a saber, operadores de homotecia, de suma sobre esferas y algunos productos notables.

Nuevamente aparece aquí en forma relevante la parametrización de los operadores de entrelazamiento "canónicos" a través de elementos de las álgebras cuadraticas, y no solamente esto sino que el hecho que su producto puede ser escrito con ayuda de la multiplicación en el álgebra respectiva. De esta manera, obtenemos en realidad una descripción bastante económica de la tabla de multiplicación del álgebra $End_G(L^2(E_1))$, gracias a las álgebras cuadráticas sobre k.

En el séptimo capitulo, introducimos las transformadas de Mellin de los operadores de entrelazamiento canónicos o geométricos, para pasar después a calcular sus productos, en búsqueda de los idempotentes primitivos, lo que nos lleva a calcular algunas sumas geométricas de caracteres. Con ellas logramos encontrar fórmulas adecuadas para poder constuir los operadores buscados dadas por el teorema 10.

En el último capítulo, introducimos una familia de operadores del álgebra conmutante $End_G(L^2(E_1))$, parametrizados por los caracteres de los grupos multiplicativos de las álgebras cuadráticas sobre k, que suministran idempotentes primitivos y ortogonales sólo cuando la parametrización se restrige a los caracteres que no son levantamiento de caracteres de $k^\times$. Ampliamos entonces esta familia usando los operadores provenientes de la transformada de Mellin de los operadores de promedio sobre esferas, aunque con ellos todavía no tenemos una familia completa de operadores idempotentes, primitivos y ortogonales. Introducimos una nueva subfamilia mediante combinaciones lineales de los operadores provenientes de levantamientos de caracteres de $k^\times$ y de las transformadas de Mellin de operadores de promedio sobre esferas, con lo cual obtenemos finalmente la familia completa de operadores idempotentes primitivos y ortogonales de nuestro espacio.

Así encontramos, en fin de cuentas, cuatro subfamilias de idempotentes primitivos y ortogonales dado por el teorema 14, los cuales están parametrizados de la misma forma que las representaciones irreducibles del grupo lineal $GL_2(k)$.

Concluimos esta tesis encontrando una descripción de los subespacios irreducibles de $L^2(E_1)$ asociados a esta familia completa de idempotente primitivos y ortogonales.

Al escudriñar el resultado final encontramos que las álgebras cuadraticas han gobernados de una manera esencial la descomposición de estos espacios cuadráticos.

Esta tesis no sólo entrega respuesta a un problema concreto, sino que deja abiertos otros problemas.

El más evidente de todos es resolver el caso análogo en que la dimensión del espacio ambiente es impar.

Otro de los problema es entender la estructura de nuestras álgebras conmutantes en términos de generadores asociados naturalmente a las álgebras cuadráticas.

También sería interesante desarrollar métodos geométricos análogos para construir las otras representaciones irreducibles del grupo de similitudes ortogonales de la forma cuadratica Q.

Asimismo, se podría transponer toda nuestra problemática, y quizás nuestros métodos, al caso del grupo de similitudes de una forma simpléctica.

Cabe señalar, finalmente, que el problema que abordamos en esta tesis, ha sido considerado desde un punto de vista no geométrico, sin construir las representaciones mismas, sino que sólo sus caracteres, para los grupos ortogonales finitos, en el caso de los vectores anisótropos (ver [1]). Para una reseña de los avances logrados en el análisis armónico sobre "espacios simétricos finitos" distintos de los nuestros, (ver [18, 19]).

Por otra parte, el análogo continuo del problema que nos interesa, a saber el análisis armónico sobre espacios cuadráticos reales, contrariamente al caso finito, ha recibido bastante atención, desde hace varias décadas. En efecto, el caso en que la forma cuadrática es suma de cuadrados positivos, es clásica la descomposición en irreducibles de la representación natural del grupo ortogonal en tres dimensiones en $L^2(S^2)$. Los proyectores que suministran esta descomposición, sin multiplicidades, aparecen como operadores integrales, cuyos núcleos están dados por los clásicos polinomios de Legendre, (ver [17, 20, 21])

El problema análogo en n dimensiones, se resuelve con ayuda de los polinomios de Gegenbauer, que generalizan los polinomios de Legendre (ver [17, 20]).

También ha sido considerado en la literatura el caso de las formas cuadráticas con signatura (p, q), bajo el nombre de "análisis armónico sobre hiperboloides", siempre para el caso del grupo ortogonal correspondiente (por ejemplo, el grupo de Lorentz), (ver [10, 14, 15, 16]) donde se explota la representación de Weil del grupo $SL(2, \mathbb{R})$ para obtener información sobre la descomposición buscada.

En este caso aparecen las funciones especiales Q_ν, compañeras de los polinomios de Legendre, en tres dimensiones.

Podemos entonces decir que los proyectores que hemos encontrado, y los núcleos que los definen, constituyen el análogo finito de los clásicos polinomios de Legendre y Gegenbauer, así como de sus funciones compañeras.

Sería también interesante investigar en qué medida nuestros métodos, traspuestos al caso continuo, podrían aportar nuevos puntos de vista o resultados para el análisis armónico sobre espacios cuadráticos reales.

Capítulo 1

Conceptos básicos

Sea k un cuerpo finito con q elementos, de carácterística distinta de 2.

1.1 Álgebras cuadráticas sobre un cuerpo finito.

Sea A un álgebra (unitaria) semi-simple de dimensión 2 sobre k, en cuyo caso decimos que A es una k-álgebra cuadrática.

Tenemos que las únicas k-álgebras cuadráticas, a menos de isomorfismo, son:

- La única extensión cuadrática $\mathbb{K}$ del cuerpo k, con el signo del álgebra $\varepsilon_{\mathbb{K}} = -1$.

- El álgebra escindida $k \times k$ sobre k, con el signo del álgebra $\varepsilon_{k\times k} = 1$.

Para cada una de estas álgebras tenemos:
El automorfismo de Frobenius:

$$F: \begin{array}{c} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ w \longmapsto w^q \end{array} \quad ; \quad F: \begin{array}{c} k \times k \to k \times k \\ (r,s) \longmapsto (s,r) \end{array}$$

y además los k monomorfismos canónicos de k en $k \times k$ y de k en K :

$$i: \begin{array}{c} k \to k \times k \\ t \longmapsto (t,t) \end{array} \quad ; \quad i: \begin{array}{c} k \to \mathbb{K} \\ t \longmapsto t \end{array}$$

Para ambas álgebras podemos definir las aplicaciones Traza y Norma

$$\mathrm{Tr}(a) = a + F(a); \quad \mathrm{N}(a) = aF(a)$$

Proposición 1 *Sean $r, s \in k$ y el polinomio cuadrático*

$$x^2 - rx + s,$$

entonces se cumple:

1. *El polinomio tiene una raíz doble en k si y sólo si su discriminante es nulo.*

2. *El polinomio tiene dos raíces distintas en k si y sólo si su discriminante es un cuadrado en $k^\times$.*

3. *El polinomio tiene dos raíces distintas en $\mathbb{K} - k$ si y sólo si su discriminante no es un cuadrado en k.*

Notación: Para efecto de esta tesis establecemos que cero es un cuadrado en k.

Proposición 2 *Sean A una k-álgebra cuadrática y $v, w \in A$ tales que*

$$\mathrm{N}(v) = \mathrm{N}(w) \quad y \quad \mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(w);$$

entonces

$$v = w \quad o \quad v = F(w).$$

Demostración: Sean $v, w \in A$ tales que

$$\mathrm{N}(v) = \mathrm{N}(w) \quad \text{y} \quad \mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(w);$$

entonces ambos elementos son raíces de:

$$x^2 - \mathrm{Tr}(v)x + \mathrm{N}(v).$$

Si $A = \mathbb{K}$, entonces tenemos que el polinomio tiene dos raíces, donde una es conjugada de la otra.

Si $A = k \times k$, entonces consideramos el polinomio con coeficientes en k, es decir,

$$x^2 - (v_1 + v_2)\, x + v_1 v_2 = x^2 - (w_1 + w_2)\, x + w_1 w_2,$$

y en cuyo caso, tiene a lo más dos raíces, así

$$v_1 = w_1 \quad \text{y} \quad v_2 = w_2 \quad \text{o} \quad v_1 = w_2 \quad \text{y} \quad v_2 = w_1,$$

con lo cual,

$$v = w \quad \text{o} \quad v = F(w).$$

$\square$

La proposición anterior, la podemos reescribir en el contexto de álgebras cuadráticas sobre k del siguiente modo.

Proposición 3 *Sean $r, s \in k$ y el polinomio cuadrático*

$$x^2 - rx + s$$

entonces se cumple:

1. *El polinomio tiene una raíz doble en k si y sólo si su discriminante es nulo.*

2. *El polinomio tiene dos raíces distintas (conjugadas) en $k \times k - k$ si y sólo si su discriminante es un cuadrado en $k^\times$.*

3. *El polinomio tiene dos raíces distintas (conjudadas) en $\mathbb{K} - k$ si y sólo si su discriminante no es un cuadrado en k.*

Consideremos ahora el álgebra cuadrática escindida $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ sobre $\mathbb{K}$. En ella entonces tenemos definidas las aplicaciones Traza y Norma; además tenemos los monomorfismos

$$i: \begin{array}{c} k \times k \to \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ (r,s) \longmapsto (r,s) \end{array} \;; \qquad i: \begin{array}{c} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ v \longmapsto (v, F(v)) \end{array}$$

Proposición 4 *Sea $v \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ tal que*

$$\mathrm{N}(v) \in k \quad y \quad \mathrm{Tr}(v) \in k,$$

entonces tenemos que

$$v \in k \times k \quad o \quad v \in \mathbb{K}.$$

Demostración: Con los valores de la norma y traza formamos el polinomio cuadrático con coeficientes en k,

$$x^2 - \mathrm{Tr}(v)x + \mathrm{N}(v),$$

por la propiedad anterior, tenemos que el polinomio tiene a lo más dos raíces.

Si el discriminante $(\mathrm{Tr}(v))^2 - 4\,\mathrm{N}(v)$, no es un cuadrado entonces el polinomio tiene dos raíces en $\mathbb{K}$, sean ellas

$$w, w' \in \mathbb{K},$$

donde las raíces son conjugadas:

$$F(w) = w'.$$

Así tenemos,

$$\mathrm{N}(v) = \mathrm{N}(w, F(w)) \quad y \quad \mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(w, F(w));$$

por las propiedades anteriores,

$$v = (w, F(w)) \quad \text{o} \quad v = (F(w), w),$$

con lo cual,

$$v \in \mathbb{K}.$$

Si el discriminante $(\mathrm{Tr}(v))^2 - 4\,\mathrm{N}(v)$, es un cuadrádo no nulo entonces el polinomio tiene dos raíces en k; sean ellas

$$r, s \in k.$$

Entonces (r, s) y (s, r), son las raíces del polinomio en $k \times k$. Por consiguiente,

$$\mathrm{N}(v) = \mathrm{N}(r, s) \quad y \quad \mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(s, r);$$

por la propiedad anterior,

$$v = (r, s) \quad \text{o} \quad v = (s, r),$$

con lo cual,

$$v \in k \times k.$$

$\square$

Definición 1 *Sea A un álgebra cuadrática sobre k denotamos por $A^\times$ al grupo multiplicativo de los elementos invertibles del álgebra.*

Proposición 5 *Sea A un álgebra cuadrática sobre k y $v \in A^\times$, entonces se cumple:*

1. *$(v - F(v))^2$ es un cuadrado no nulo en $k^\times$ si y sólo si $v \in (k \times k) - k$.*
2. *$(v - F(v))^2$ no es un cuadrado en $k^\times$ si y sólo si $v \in \mathbb{K} - k$.*

Demostración: Sea $v \in A$ entonces,

$$(v - F(v))^2 = (\mathrm{Tr}(v))^2 - 4\,\mathrm{N}(v) \in k,$$

es el discriminante del polinomio cuadrático,

$$x^2 - \mathrm{Tr}(v)x + \mathrm{N}(v),$$

que tiene raíces dependiendo de su discriminante, segun la proposición anterior. $\square$

Corolario 6 *Sean $t \in k^\times, r \in k$, entonces*

1. *$r^2 - 4t$ es un cuadrado no nulo en k si y sólo si existe $a \in (k \times k)^\times - k^\times$ tal que $\mathrm{N}(a) = t, \mathrm{Tr}(a) = r$.*
2. *$r^2 - 4t$ no es un cuadrado en k si y sólo si existe $a \in \mathbb{K}^\times - k^\times$ tal que $\mathrm{N}(a) = t, \mathrm{Tr}(a) = r$.*

Proposición 7 *Sea A un álgebra cuadrática y $U_1(A)$ el circulo unitario en A, entonces la sucesión*

$$1 \longrightarrow U_1(A) \xrightarrow[i]{} A^\times \xrightarrow[\mathrm{N}]{} k^\times \longrightarrow 1$$

es exacta.

Demostración: Tenemos que i es un monomorfismo y por definición

$$\ker \mathrm{N} = i(U_1(A)).$$

Ademas la norma N es epimorfismo, ya que

Para $A = k \times k$, es inmediato, basta observar $\mathrm{N}(t, 1) = t$.

Si $A = \mathbb{K}$, tenemos que $\mathrm{N}(w) = w^{q+1}$, luego tenemos el polinomio $w^{q+1} = 1$, el cual tiene a lo más $q + 1$ raíces, y como la norma es un morfismo tenemos

$$\frac{|A^\times|}{|k^\times|} \leq |U_1(A)| \leq q + 1.$$

Así,

$$|U_1(A)| = q + 1$$

con lo cual la Norma es un epimorfismo, con ello hemso demostrado que la sucesióin es exacta para las dos álgebras cuadráticas sobre k. □

Corolario 8 *Sea A un álgebra cuadrática sobre k y $a, b \in A^\times$, entonces*

$\mathrm{N}(a) = \mathrm{N}(b)$ *si y sólo si existe un elemento unitario $u \in A$ tal que $a = bu$.*

Definición 2 *Sean A una k-álgebra cuadrática. Se define la proyeccion unitaria*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{U}: & A^\times & \rightarrow & U_1(A) \\ & w & \longmapsto & \frac{w}{F(w)} \end{array}.$$

Proposición 9 *Sea A un álgebra cuadrática y $U_1(A)$ el circulo unitario en A, entonces la sucesión*

$$1 \longleftarrow U_1(A) \xleftarrow[\mathcal{U}]{} A^\times \xleftarrow[i]{} k^\times \longleftarrow 1$$

es exacta.

Demostración: Claramente i es un monomorfismo, además

$$w \in \ker(\mathcal{U}) \text{ si y sólo si } w = F(w) \text{ si y sólo si } w \in k^\times.$$

Por lo tanto,

$$\ker(\mathcal{U}) = k^\times = \operatorname{Im} i,$$

con lo cual $\mathcal{U}$ es epimorfismo, ya que

$$|\operatorname{Im}(\mathcal{U})| = \frac{|A^\times|}{|k^\times|} = |U_1(A)|.$$

□

Corolario 10 *Sean A un álgebra cuadrática sobre K y $v, w \in A^{\times}$ tales que,*

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{U}(v)) = \mathrm{Tr}(\mathcal{U}(w))$$

entonces

$$v = tw \quad \vee \quad v = tF(w) \text{ con } t \in k.$$

Demostración: Como los elementos $\mathcal{U}(v)$ y $\mathcal{U}(w)$ tienen igual norma entonces,

$$\mathcal{U}(v) = \mathcal{U}(w) \quad \text{o} \quad \mathcal{U}(v) = \mathcal{U}(F(w)),$$

por la proposición anterior tenemos la demostración. □

Proposición 11 *Sea A un álgebra cuadrática sobre k y α un carácter de $A^{\times}$, tal que*

$$\alpha|_{U_1(A)} = 1$$

entonces existe γ carácter de $k^{\times}$, tal que

$$\alpha = \gamma \circ \mathrm{N}_A$$

Demostración: Sea A un álgebra cuadrática sobre k y α un carácter de $A^{\times}$, tal que

$$\alpha|_{U_1(A)} = 1$$

como tenemos la sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & U_1(A) \arrow[r, "i"'] & A^{\times} \arrow[r, "\mathrm{N}"'] \arrow[d, "\alpha"'] & k^{\times} \arrow[r] & 1 \\ & & \mathbb{C} & & \end{tikzcd}$$

entonces, existe γ carácter de $k^{\times}$, tal que

$$\alpha = \gamma \circ \mathrm{N}_A$$

es decir,

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & U_1(A) \arrow[r, "i"] & A^{\times} \arrow[r, "\mathrm{N}"] \arrow[d, "\alpha"'] & k^{\times} \arrow[r] \arrow[dl, "\exists\gamma"] & 1 \\ & & \mathbb{C} & & \end{tikzcd}$$

□

Corolario 12 *Sea A un álgebra cuadrática sobre k y α un carácter de $A^\times$, entonces se cumple:*

La restricción de α a $U_1(A)$ es 1 si y sólo si $\alpha = \alpha \circ F = \alpha^F$.

Demostración: Sea A un álgebra cuadrática sobre k y α un carácter de $A^\times$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= 1, \quad \forall u \in U_1(A). \\ \alpha(\mathcal{U}(a)) &= 1, \quad \forall a \in A^\times. \\ \alpha\left(\frac{a}{F(a)}\right) &= 1, \quad \forall a \in A^\times. \\ \alpha(a) &= \alpha(F(a)), \quad \forall a \in A^\times. \\ \alpha &= \alpha \circ F. \end{aligned}$$

□

1.2 Representaciones geométricas.

Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Se dice que X es un G-conjunto, o que G actúa en X , si y sólo si hay una función denotada por $\cdot$ de $G \times X$ en X, es decir,

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

tal que,

$(\forall x \in X)\,(e \cdot x = x)$.

$(\forall x \in X)\,(\forall g, h \in G)\,(g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x)$.

Sea X un conjunto, se define el $\mathbb{C}$-espacio vectorial

$$L^2(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ función }\},$$

con el producto interno,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x \in X} f(x)\overline{g(x)}.$$

Así $L^2(X)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno definido positivo. También $L^2(X)$ es G-espacio vectorial, dado por la acción

$$\rho : G \to Aut_G\left(L^2(X)\right), \quad \rho(g) = \rho_g \in Aut_G\left(L^2(X)\right)$$
$$\rho_g : L^2(X) \to L^2(X), \quad (\rho_g f)(x) = f\left(g^{-1} \cdot x\right)$$

Definición 3 *Sea X un G-conjunto. Con las notaciones anteriores, decimos que $(L^2(X), \rho)$ es la representación natural de G asociada al G-conjunto X.*

1.2.1 El álgebra conmutante.

Dada una representación (W, τ) de G, se define el álgebra conmutante $End_G(W, \tau)$, como la sub-álgebra de $End(W)$ formada por los endomorfismos ϕ de W tales que

$$\tau_g \circ \phi = \phi \circ \tau_g \qquad \forall g \in G$$

Para determinar una base del álgebra $End_G(L^2(X), \rho)$, necesitamos definir los núcleos G-invariantes:

Sea X un G-conjunto, entonces G actúa en $X \times X$ en forma natural por componentes, es decir,

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, (x, y)) &\longmapsto (g \cdot x, g \cdot y) \end{aligned}.$$

Usando la descomposición en G-órbitas de $X \times X$, dada por:

$$X \times X = \cup_{i \in I} O_i,$$

para cada $i \in I$, podemos definir el respectivo núcleo K_i invariante por G, como sigue:

$$K_i(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in O_i \\ 0 & (x, y) \notin O_i \end{cases}$$

A cada una de las G-órbitas se le asocia entonces el operador $\phi_{K_i} \in End_G(L^2(X), \rho)$ definido por:

$$\left(\phi_{K_i} f\right)(x) = \sum_{y \in X} K_i(x, y) f(y).$$

Esto define un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras del álgebra $N(X, G)$ de los núcleos G-invariantes al álgebra $End_G(L^2(X), \rho)$:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & N(X, G) & \longrightarrow & End_G(L^2(X), \rho) \\ & K & \longmapsto & \phi_K \end{array}$$

con

$$\left(\phi_K f\right)(x) = \sum_{y \in X} K(x, y) f(y).$$

Además la multiplicación del álgebra de núcleos $N(X, G)$ está dada por:

$$\left(R * S\right)(x, y) = \sum_{z \in X} R(x, z) S(z, y)$$

Definición 4 *Sea T una aplicación*

$$T : X \longrightarrow X;$$

se dice T es una involución si y sólo si $T^2 = \mathrm{Id}$.

Definición 5 *Sea T una aplicación*

$$T : X \longrightarrow X;$$

entonces se define

$$\begin{array}{rccc} T^* : & N(X,G) & \longrightarrow & N(X,G) \\ & K & \longmapsto & K \circ (T \times T) \end{array} . \quad \begin{array}{rccc} \widehat{T} : & L^2(X) & \longrightarrow & L^2(X) \\ & f & \longmapsto & f \circ T \end{array}$$

Proposición 13 *Sea T una involución; entonces T^* es una involución lineal.*

Proposición 14 *Sea T una aplicación biyectiva; entonces T^* es un automorfismo de álgebras.*

Demostración: Sean $R, S \in N(X,G), a, b \in k$,

$$\begin{aligned} T^*(aR + bS) &= (aR + bS) \circ (T \times T) \\ &= [aR \circ (T \times T)] + [bS \circ (T \times T)] \\ &= a\,[R \circ (T \times T)] + b\,[S \circ (T \times T)] \\ &= aT^*(R) + bT^*(S) . \end{aligned}$$

con lo cual T^* es lineal.

Veamos ahora la multiplicación del álgebra

$$T^*(R * S) = (R * S) \circ (T \times T) .$$

Evaluando en $(x,y) \in X \times X$ tenemos

$$\begin{aligned} (R * S)(Tx, Ty) &= \sum_{z \in X} R(Tx, z) S(z, Ty) \\ &= \sum_{Tz' \in X} R(Tx, Tz') S(Tz', Ty) \\ &= \sum_{z' \in X} T^*(R)(x, z') T^*(S)(z', y) \\ &= (T^*(R) * T^*(S))(x, y) \end{aligned}$$

con lo cual,

$$T^*(R * S) = T^*(R) * T^*(S) .$$

□

Observación: Dadas las aplicaciones T, S de X en X, entonces

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^* .$$

Proposición 15 *Sea T una aplicación biyectiva, entonces*

$$\phi_{T^*(K)} = \widehat{T} \circ \phi_K \circ \widehat{T}^{-1}.$$

Demostración: Sean $K \in N(X,G), f \in L^2(X), x \in X$; tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\phi_{T^*(K)} f\right)(x) &= \sum_{y \in X} T^*(K)(x,y) f(y) \\
&= \sum_{y \in X} K(Tx, Ty) f(y) \\
&= \sum_{z \in X} K(Tx, z) f(T^{-1}z) \\
&= \sum_{z \in X} K(Tx, z) \left(f \circ T^{-1}\right)(z) \\
&= \left(\phi_K \left(\widehat{T}^{-1}(f)\right)\right)(Tx) \\
&= \left(\widehat{T} \circ \phi_K \circ \widehat{T}^{-1}\right)(f)(x)
\end{aligned}$$

□

Proposición 16 *Si T es una involución en X, entonces T^* es un automorfismo involutivo del álgebra $N(X,G)$.*

Observación: Note que el inverso de T^* es $(T^{-1})^*$.

Definición 6 *Sea T una involución en X; se dice que el álgebra $N(X,G)$ es T-simétrica si y sólo si*

$$R(x,y) = R(T(y), T(x)), \qquad (\forall (x,y) \in X \times X)\, (\forall R \in N(X,G)).$$

Se dice "simétrica" en lugar de Id-*simétrica.*

Proposición 17 *La aplicación J,*

$$\begin{array}{cccc} J: & N(X,G) & \longrightarrow & N(X,G) \\ & K & \longmapsto & J(K) \end{array}.$$

donde $J(K)(x,y) = K(y,x)$, es un anti-automorfismo del álgebra $N(X,G)$.

Demostración: Sean $R, S \in N(X,G), a, b \in k$,entonces

$$\begin{aligned}
J(aR + bS)(x,y) &= (aR + bS)(y,x) \\
&= (aR)(y,x) + (bS)(y,x) \\
&= a\left[J(R)(x,y)\right] + b\left[J(S)(x,y)\right] \\
&= aJ(R)(x,y) + bJ(S)(x,y) \\
&= \left[aJ(R) + bJ(S)\right](x,y)
\end{aligned}$$

con lo cual J es lineal.

Veamos ahora la multiplicación:

$$J(R*S) = J(S)*J(R).$$

Evaluando en $(x,y) \in X \times X$, tenemos

$$\begin{aligned}(J(R*S))(x,y) &= (R*S)(y,x)\\ &= \sum_{z\in X} R(y,z)S(z,x)\\ &= \sum_{z\in X} J(R)(z,y)J(S)(x,z)\\ &= \sum_{z\in X} J(S)(x,z)J(R)(z,y)\\ &= (J(S)*J(R))(x,y).\end{aligned}$$

Veamos que J es una involución.

$$J(J(R))(x,y) = J(R)(y,x) = R(x,y),$$

así, J es un anti-automorfismo del álgebra $N(X,G)$. □

Proposición 18 (Lema de Gel'fand) *Si $L, S : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ son tales que L es automorfismo de álgebras y S es un anti-automorfismo de álgebras, entonces $\mathbb{A}$ es conmutativa.* □

Proposición 19 *Si el álgebra $N(X,G)$ es T-simétrica, entonces es conmutativa.*

Demostración: En efecto, T-simétrica significa que $T^* = J$, con J de la proposición 17 □

1.3 Espacios cuádraticos de dimensión par.

Sea k un cuerpo finito con q elementos, K la única extensión cuadrática de k y (E,Q) un espacio cuadrático no degenerado de dimensión par sobre k, es decir,

$E = k^{2n}$; $Q(x) = \sum_{t=1}^{n} x_{2t-1}x_{2t}$; con el signo de la forma cuadrática $\varepsilon_Q = 1$, o bien

$E = k^{2n-2} \times K$; $Q(x) = \sum_{t=1}^{n-1} x_{2t-1}x_{2t} + N(z)$; con el signo de la forma cuadrática $\varepsilon_Q =$

además, B designa la forma bilineal asociada a Q, definida por:

$$B(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$$

Sea G el grupo de similitudes del espacio cuadrático (E, Q)

$$G = \{g \in Aut(E) \quad : \quad \left(\exists m_g \in k^{\times}\right)(\forall x \in E) \quad Q(gx) = m_g Q(x)\}$$

G actúa en forma natural sobre E; con ello tenemos la representación natural $(L^2(E), \rho)$ asociada a esta acción,

$$\begin{array}{l} \rho : G \to End_G\left(L^2(E)\right), \quad \rho(g) = \rho_g \in End_G\left(L^2(E)\right) \\ \rho_g : L^2(E) \to L^2(E), \quad \left(\rho_g f\right)(x) = f\left(g^{-1} \cdot x\right) \end{array}$$

Con el propósito de descomponer la representación natural $(L^2(E), \rho)$, notemos

primeramente que la acción de G sobre E no es transitiva, ya que tiene tres órbitas:

- Aquella que contiene al vector nulo.

- Aquella que contiene los vectores isótropos, que denotamos por E_0.

- Aquella que contiene a los vectores anisótropos, que denotamos por E_1.

Así obtenemos que,

$$E = \{0\} \cup E_0 \cup E_1,$$

lo que permite descomponer la representación:

$$L^2(E) \simeq L^2(\{0\}) \oplus L^2(E_0) \oplus L^2(E_1)$$

Para avanzar en la descomposición, nos apoyamos en el teorema de Witt, el que nos dice que dados dos pares de vectores linealmente independientes, existe un elemento de G que envía un par en el otro si y sólo si ambos pares tienen la misma $Q-$configuración. Es decir, dados los vectores $x, y, z, w \in E$, tales que $\{x, y\}, \{z, w\}$ son linealmente independientes, entonces:

Existe $g \in G$ tal que $g \cdot (x, y) = (z, w)$ si y sólo si existe $t \in k$, tal que $(Q(z), B(z, w), Q(w)) = (tQ(x), tB(x, y), tQ(y))$

o bien, más brevemente

$$(x, y) \underset{G}{\sim} (z, w) \Longleftrightarrow (Q(z), B(z, w), Q(w)) \equiv (Q(x), B(x, y), Q(y)) \mod k^{\times}$$

es decir, las G-órbitas de pares de vectores linealmente independientes en $E \times E$, están parametrizadas por las ternas en k^3 modulo $k^{\times}$ o Q-configuraciones.

1.3.1 Clasificación de las dobles G-órbitas.

Como tenemos en la primera parte una descomposición en órbitas, sólo nos concentraremos en clasificar Q-configuraciones sobre $E_0 \times E_0$ y $E_1 \times E_1$.

Las G-órbitas en $E_0 \times E_0$.

En el conjunto E_0 (vectores isótropos), subconjunto de E, tenemos las G-órbitas formadas por los pares de vectores linealmente independientes, que están parametrizada por las ternas en k^3 modulo $k^\times$, dadas por

$$(0,0,0),(0,1,0)$$

y las otras G-órbitas, formadas por pares de vectores proporcionales, o vectores linealmente dependientes.

Proposición 20 *Las G-órbitas en $E_0 \times E_0$ son:*

Las órbitas proporcionales:

$$O_t = \{(x,tx) \quad : \quad x \in E_0\}, \quad t \in k^\times$$

La órbita ortogonal:

$$\widetilde{O}_0 = \{(x,y) \quad : \quad \{x,y\} \text{ linealmente independientes y } B(x,y) = 0\}.$$

La órbita complementaria:

$$\widetilde{O}_1 = \{(x,y) \quad : \quad \{x,y\} \text{ linealmente independientes y } B(x,y) \neq 0\}.$$

Es decir,

$$E_0 \times E_0 = (\cup_{t \in k^\times} O_t) \cup \widetilde{O}_0 \cup \widetilde{O}_1$$

Observación: Si dimensión de E es 2, entonces la G-órbita $\widetilde{O}_0$ no existe.

Proposición 21 *Si la dimensión de E es 2, entonces tenemos que el número de entrelazamiento de $L^2(E_0)$ es:*

$$(q-1)+1=q$$

Si la dimensión de E es mayor o igual a 4, entonces tenemos que el número de entrelazamiento de $L^2(E_0)$ es:

$$(q-1)+2=q+1$$

Demostración: Si la dimensión de E es 2, entonces no existen elementos x, y tales que $\{x, y\}$ sean linealmente independientes y

$$(Q(x), B(x, y), Q(y)) = (0, 0, 0),$$

ya que en E_0 vale,

$$B(v, w) = Q(v + w).$$

Por ende si $\{x, y\}$ es un tal par de vectores ortogonales, entonces el plano que engendran es totalmente isótropo

$$B(\lambda x, \mu y) = Q(\lambda x + \mu y) = 0$$

y como la dimensión es menor que 4, entonces la forma cuadrática es degenerada. Es decir, en este caso el número de entrelazamiento es igual a q. □

Las G-órbitas en $E_1 \times E_1$.

En el conjunto E_1 (vectores anisótropos), subconjunto de E, tenemos que las G-órbitas formadas por los pares de vectores linealmente independientes, están

parametrizadas por las ternas en k^3 modulo $k^\times$, que están dadas por:

$$(a, b, c) \equiv (1, ba^{-1}, ca^{-1}); \qquad \text{con } a, c \in k^\times, b \in k$$

y las otras G-órbitas, formadas por los pares de vectores proporcionales, o vectores linealmente dependientes.

Proposición 22 *Sea E un espacio de dimensión mayor igual 4, entonces las G-órbitas en $E_1 \times E_1$ son:*

Las órbitas proporcionales:

$$O_t = \{(x, tx) \quad : \quad x \in E_1\}, \quad t \in k^\times$$

Las órbitas linealmente independientes $O_{(1,a,b)}$ definidas por:

$$\{(x, y) : \{x, y\} \text{ linealmente independientes}, \quad \frac{B(x, y)}{Q(x)} = a, \quad \frac{Q(y)}{Q(x)} = b\}.$$

Así,

$$E_1 \times E_1 = \left(\bigcup_{t \in k^\times} O_t \right) \cup \left(\bigcup_{a \in k, b \in k^\times} O_{(1,a,b)} \right).$$

Observación: El caso en que E tiene dimensión 2, será analizado con más detalles en la sección 4.1.

Proposición 23 *Si la dimensión de E es mayor o igual a 4, entonces tenemos que el número de entrelazamiento de $L^2(E_1)$ es:*

$$q(q-1)+(q-1)=q^2-1.$$

Observación: Notemos que para cada G-configuración $(1,a,b)$ existe z inversible perteneciente a una de las álgebras cuadráticas A tal que:

$$tr(z)=b, \quad N(z)=a;$$

es decir, existe $z \in A^\times$ tal que

$$(1, tr(z), N(z)) = (1,a,b)\,.$$

Cada Q-configuración tiene dos pre-imágenes, es decir, la aplicación

$$\begin{array}{cccc} T: & (k\times k)^\times \dot{\cup} \mathbb{K}^\times & \longrightarrow & \{1\}\times k \times k^\times \\ & z & \longrightarrow & (1, tr(z), N(z)) \end{array}$$

es epiyectiva, con fibra de cardinal constante igual a 2

1.4 Las álgebras conmutantes.

Veremos que cada una de nuestras álgebras conmutantes es conmutativa.

Recordemos el isomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{cccc} \phi: & N(E_i,G) & \longrightarrow & \mathbb{A}_i = End_G(L^2(E_i),\rho) \\ & K & \longmapsto & \phi_K \end{array},$$

Por intermedio de él, tenemos asociado a cada núcleo G-invariante proveniente de las órbitas O_t formadas por los pares de vectores proporcionales,

$$K_t(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y)\in O_t \\ 0 & (x,y)\in O_t \end{cases}$$

el correspondiente operador de entrelazamiento

$$\phi_{K_t}(f)(x) = f(tx) = (h_t f)(x)$$

Luego, tenemos que la subálgebra $\mathbb{A} = \{h_t \quad : \quad t\in k^\times\}$ de $\mathbb{A}_i$ es conmutativa y por ende el álgebra de núcleos asociada a esta álgebra $\mathbb{A}$ de operadores.

1.4.1 $End_G(L^2(E_0))$ es conmutativa.

Para cada una de las G-órbitas, tenemos el correspondiente núcleo asociado, definido por:

$$K_t(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in O_t \\ 0 & (x,y) \in O_t \end{cases}, \quad t \in k^\times,$$

$$L_t(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in \widetilde{O}_t \\ 0 & (x,y) \in \widetilde{O}_t \end{cases}, \quad t \in \{0,1\}.$$

Observación: Algunas propiedades de las órbitas linealmente independientes: son simétricas y respetan rectas. En efecto,

$$(x,y) \in \widetilde{O}_0 \Longleftrightarrow B(x,y) = 0 \Longleftrightarrow B(y,x) = 0 \Longleftrightarrow (y,x) \in \widetilde{O}_0.$$

Además, si $t \in k^\times, (x,y) \in \widetilde{O}_0$

$$(tx,y) \in \widetilde{O}_0, \quad \wedge \quad (x,ty) \in \widetilde{O}_0, \quad \wedge \quad (tx,ty) \in \widetilde{O}_0.$$

Análogamente

$$(x,y) \in \widetilde{O}_1 \Longleftrightarrow B(x,y) \neq 0 \Longleftrightarrow B(y,x) \neq 0 \Longleftrightarrow (y,x) \in \widetilde{O}_1.$$

Además si $t \in k^\times, (x,y) \in \widetilde{O}_1$

$$(tx,y) \in \widetilde{O}_1, \quad \wedge \quad (x,ty) \in \widetilde{O}_1, \quad \wedge \quad (tx,ty) \in \widetilde{O}_1.$$

Proposición 24 *El álgebra $End_G(L^2(E_0))$ es conmutativa.*

Demostración: La demostración la realizaremos en el álgebra de núcleos $N(E_0, G)$.
Primer caso: Las órbitas linealmente independientes.
Como $\{L_0, L_1, K_t, \quad t \in k^\times\}$ es una base del álgebra, entonces tenemos que

$$L_0 * L_1 = \sum_{t \in k^\times} c_t K_t + d_o L_0 + d_1 L_1;$$

pero evaluando en (x, tx), tenemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{t \in k^\times} c_t K_t + d_o L_0 + d_1 L_1\right)(x,tx) &= (L_0 * L_1)(x,tx) \\ c_t &= \sum_{z \in E_0} L_0(x,z) L_1(z,tx) \\ &= 0\end{aligned}$$

ya que debería existir $z \in E_0$ tal que $B(x,z) = 0 \quad \wedge \quad B(z,x) \neq 0$, lo que es una contradicción, por lo tanto,

$$L_0 * L_1 = d_o L_0 + d_1 L_1$$

Notemos que, por la observación anterior, los respectivos núcleos L_0, L_1 son simétricos, luego conmutan, ya que

$$\begin{aligned}
(L_0 * L_1)(x,y) &= (L_0 * L_1)(y,x) \\
&= \sum_{z \in E_0} L_0(y,z) L_1(z,x) \\
&= \sum_{z \in E_0} L_0(z,y) L_1(x,z) \\
&= \sum_{z \in E_0} L_1(x,z) L_0(z,y) \\
&= (L_1 * L_0)(x,y).
\end{aligned}$$

Segundo caso: Producto mixto,

$$\begin{aligned}
(K_t * L_s)(x,y) &= \sum_{z \in E_0} K_t(x,z) L_s(z,y) \\
&= L_s(tx,y) \\
&= L_s(x,t^{-1}y) \\
&= \sum_{z \in E_0} L_s(x,z) K_t(z,y) \\
&= (L_s * K_t)(x,y).
\end{aligned}$$

Recordemos que los núcleos provenientes de las órbitas formadas por vectores proporcionales forman una subálgebra conmutativa (sección 1.4).

Así hemos demostrado que el álgebra $End_G(L^2(E_0))$ es conmutativa. □

Observación: Notemos que la demostración anterior permite definir un automorfismo de álgebras dado por:

$$\begin{array}{rccc}
T: & N(E_0,G) & \longrightarrow & N(E_0,G) \\
& K_t & \longmapsto & K_{t^{-1}} \\
& L_0 & \longmapsto & L_0 \\
& L_1 & \longmapsto & L_1
\end{array}$$

de modo que la conmutatividad del álgebra $End_G(L^2(E_0))$ resulta también de la 18.

1.4.2 $End_G(L^2(E_1))$ es conmutativa.

Para poder demostrar la conmutatividad del álgebra, primero definiremos una función involutiva que preserva las G-órbitas en $E_1 \times E_1$.

Sobre el conjunto de los vectores anisótropos definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} T: & E_1 & \longrightarrow & E_1 \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{Q(x)} \end{array}$$

Algunas propiedades inmediatas de esta función son:

Lema 25 *Sean $t \in k^\times, x \in E_1$. Entonces*

$T(tx) = t^{-1}T(x)$

$Q(T(x)) = Q(x)^{-1}$

□

Con este lema, podemos demostrar:

Proposición 26 *T es una involución* $(T^2 = \mathrm{Id})$

Demostración: Sea $x \in E_1$; entonces

$$\begin{aligned} T(T(x)) &= T(x) \cdot Q(T(x))^{-1} \\ &= \frac{x}{Q(x)} \cdot Q(x) \\ &= x \end{aligned}$$

Así, T es una involución. □

Proposición 27 *Sean $x, y \in E_1$; entonces $(x,y), (T(y), T(x))$ pertenecen a la misma órbita en $E_1 \times E_1$, es decir,*

$$(x,y) \sim (T(y), T(x))$$

Demostración: Sean $x, y \in E_1$; supongamos que estos vectores son proporcionales, es decir, $y = tx$. Entonces

$$(T(tx), T(x)) \sim (t^{-1}T(x), T(x)) \sim (x, tx)$$

En el caso contrario, el conjunto $\{x, y\}$ es linealmente independiente, luego $\{T(x), T(y)\}$ es linealmente independiente, ya que T es biyectiva.

Veamos cual es la Q-configuración asociada a $(T(y), T(x))$

$$\begin{aligned} (Q(T(y)), B(T(y), T(x)), Q(T(x)) &\equiv \left(Q(y)^{-1}, (Q(y)Q(x))^{-1}\, B(y,x), Q(x)^{-1}\right) \\ &\equiv \left(Q(x), B(y,x), Q(y)\right). \end{aligned}$$

Así, tenemos que (x, y), y $(T(y), T(x))$ pertenecen a la misma órbita en $E_1 \times E_1$.□

Proposición 28 *El álgebra $End_G(L^2(E_1))$ es conmutativa*

Demostración: Debido al resultado que el álgebra de núcleos es T-simétrica y a la proposición 19, obtenemos que el álgebra $End_G(L^2(E_1))$ es conmutativa. □

Capítulo 2

Análisis ármonico sobre la órbita isótropa

Para iniciar la descomposición de la representación $L^2(E_0)$, recordamos que el número de entrelazamiento depende de la dimensión del espacio E y está dado por:

$$\dim End(L^2(E_0)) = q + 1 - \delta_2 (\dim E),$$

si $E_0 \neq \phi$.

2.1 Descomposición básica.

En la sección 1.4 tenemos la correspondencia entre los núcleos asociados a las órbitas proporcionales O_t y los operadores de entrelazamiento h_t, definidos por:

$$h_t f(x) = f(tx), \quad \text{con} \quad f \in L^2(E_0);$$

estos operadores son simultáneamente diagonalizables, con los siguientes subespacios propios

$$V_\alpha = \{f \in L^2(E_0) \mid f(tx) = \alpha(t) f(x), \quad \forall t \in k^\times\}, \quad \alpha \in (k^\times)^\wedge,$$

que nos permiten descomponer el espacio:

$$L^2(E_0) \simeq \bigoplus_{\alpha \in (k^\times)^\wedge} V_\alpha$$

Además, V_1 es reducible y se descompone como suma directa de

$$V_1^+ = \{f \in V_1 \mid f = cte\} \quad \text{y} \quad V_1^- = \{f \in V_1 \mid \sum f = 0\},$$

es decir,

$$V_1 = V_1^+ \oplus V_1^-$$

con lo cual tenemos la siguiente propiedad.

Proposición 29 *Sea (E, Q) espacio cuadrático con $E_0 \neq \phi$; entonces el espacio $L^2(E_0)$ se descompone del siguiente modo:*

$$L^2(E_0) \simeq \left(\bigoplus_{\alpha \in (k^\times)^\wedge - \{1\}} V_\alpha \right) \oplus V_1^- \oplus V_1^+$$

2.2 El caso de $\dim E = 2$.

Recordemos que en este caso el número de entrelazamiento es q, y en la proposición anterior tenemos descompuesta la representación natural en q sumandos. Luego, tenemos la siguiente

Proposición 30 *Sea (E, Q) espacio cuadrático de dimensión 2 con $E_0 \neq \phi$; entonces el espacio $L^2(E_0)$ se descompone en las siguientes subrepresentaciones irreducibles*

$$L^2(E_0) \simeq \left(\bigoplus_{\alpha \in (k^\times)^\wedge - \{1\}} V_\alpha \right) \oplus V_1^- \oplus V_1^+$$

Ahora bien, si el espacio E tiene dimensión 2, entonces a menos de isomorfismo, tenemos sólo dos casos posibles:

1. Si $E = \mathbb{K}$, la única extensión cuadrática de k, y $Q(z) = \mathrm{N}(z), \quad \forall z \in \mathbb{K}$, entonces tenemos.

   $$L^2(E_0) = \{0\}.$$

   ya que $E_0 = \phi$.

2. Si $E = k \times k$ y $Q(x) = x_1 x_2$, para $x \in k \times k$, entonces tenemos que la dimensión de $L^2(E_0)$ es $2q - 1$ y

   $$\dim V_\alpha = 2, \ si \ \ \alpha \neq 1, \ \dim V_1^\pm = 1$$

   Así, la descomposición en irreducibles es:

   $$L^2(E_0) \simeq \left(\bigoplus_{\alpha \in (k^\times)^\wedge - \{1\}} V_\alpha \right) \oplus V_1^- \oplus V_1^+$$

2.3 El caso $\dim E \geq 4$.

Sea $(E^{(n)}, Q)$ un espacio cuadrático no degenerado con $\dim E^{(n)} = 2n$. En este caso tenemos que el número de entrelazamiento de $L^2(E_0^{(n)})$ es $(q+1)$, ya que las $Q-$configuraciones pueden tomar el valor que faltaba en el caso anterior, es decir $(0, 0, 0)$.

Para descomponer, calculemos primero la dimensión de $L^2(E_0^{(n)})$, es decir, el cardinal de $E_0^{(n)}$, que denotamos por r_n, el cual obtendremos por recurrencia.

Consideremos la forma cuadrática reescrita del siguiente modo

$$Q(x) = Q_1(x') + x_{2n-1}x_{2n},$$

y busquemos sus raíces:

$$Q'(x') + x_{2n-1}x_{2n} = 0$$

Sea $s \in k$, tal que

$$Q'(x') = s = -x_{2n-1}x_{2n}$$

entonces:

Si $s = 0$, obtenemos $(2q-1)\,(1 + r_{n-1}) - 1$ soluciones no nulas.

Si $s \neq 0$, obtenemos $(q^{2n-2} - 1 - r_{n-1})\,(q-1)$ soluciones.

Con lo cual tenemos que el número de soluciones es:

$$\begin{aligned} r_n &= (2q-1)\,(1 + r_{n-1}) - 1 + \left(q^{2n-2} - 1 - r_{n-1}\right)(q-1) \\ r_n &= qr_{n-1} + q^{2n-2}(q-1) + q - 1 \end{aligned}$$

es decir,

$$r_n = (q^{n-1} + \varepsilon_Q)(q^n - \varepsilon_Q).$$

Observación: El cardinal de $\{x \in E^{(n)} \mid Q(x) = a \neq 0\}$ es igual a $q^{n-1}(q^n - \varepsilon_Q)$.

Recordemos que en la sección 2.1, tenemos la siguiente descomposición:

$$L^2(E_0) \simeq \bigoplus_{\alpha \in (k^\times)^\wedge} V_\alpha$$

Es claro que podemos identificar V_1 con $L^2(\mathcal{L}^{(n)})$, donde $\mathcal{L}^{(n)}$ es el conjunto de las rectas isótropas, de lo cual tenemos que el número de entrelazamiento es 3 para esta representación, ya que todas las G-órbitas proporcionales se reducen a la trivial sobre $\mathcal{L}^{(n)} \times \mathcal{L}^{(n)}$, y tenemos además las dos posibles Q-configuraciones, que se mantienen.

Notemos que la dimensión l_n de $L^2(\mathcal{L}^{(n)})$ está dada por:

$$l_n = \frac{(q^{n-1} + \varepsilon_Q)(q^n - \varepsilon_Q)}{q-1}.$$

2.3.1 Descomposición de $L^2(\mathcal{L}^{(n)})$.

Para obtener la descomposición del espacio $L^2(\mathcal{L}^{(n)})$, necesitamos definir los operadores de entrelazamiento que provienen de las ternas $(0,0,0), (0,1,0)$ además de la trivial, es decir,

Definición 7 *Sea $f \in L^2(\mathcal{L}^{(n)})$, entonces tenemos los operadores:*

$$\begin{aligned}
(N_0 f)(l) &= \sum_{\substack{l' \\ B(l,l')=0 \\ l \neq l'}} f(l') \\
(N_1 f)(l) &= \sum_{\substack{B(l,l') \neq 0 \\ l \neq l'}} f(l') \\
(\mathrm{Id}\, f)(l) &= f(l)
\end{aligned}$$

Además, a partir de ellos definimos los operadores

$$\begin{aligned}
\overline{N}_0 &= N_0 + \mathrm{Id} \\
\overline{N}_1 &= N_1 + \mathrm{Id} \\
S &= N_0 + N_1 + \mathrm{Id}
\end{aligned}$$

Obtendremos la descomposición vía los espacios propios asociado al operador $\overline{N}_0$. Para ello veamos primero algunas propiedades de estos operadores.

Proposición 31 *Con los operadores anteriores, tenemos*

$$\begin{aligned}
\overline{N}_0 S &= (v_n + 1)\, S \\
N_0 S &= v_n S
\end{aligned}$$

donde v_n es el número de sumandos de N_0, que vale ql_{n-1}.

Demostración: Sea $f \in L^2(\mathcal{L}^{(n)})$,entonces

$$\begin{aligned}
\left(\overline{N}_0 (Sf)\right)(l) &= \sum_{\substack{l' \\ B(l,l')=0'}} (Sf)(l') \\
&= \sum_{\substack{l' \\ B(l,l')=0}} \sum_{l''} f(l'') \\
&= v_n \sum_{l''} f(l'')
\end{aligned}$$

□

Además podemos calcular fácilmente el polinomio minimal de N_0, gracias al hecho que el entrelazamiento es 3.

Un primer resultado en esta dirección es:

Proposición 32 *Con las notaciones actuales tenemos:*

$$N_0^2 = (q^2 l_{n-2} + q - 1 - l_{n-1})N_0 + l_{n-1}S + (v_n - l_{n-1})\,\mathrm{Id} \tag{2.1}$$

Demostración: Sea $f \in L^2(\mathcal{L}^{(n)})$,

$$\begin{aligned}
(N_0\,(N_0 f))\,(l) &= \sum_{\substack{B(l,l')=0\\ l\neq l'}} (N_0 f)\,(l') \\
&= \sum_{\substack{l'\\ B(l,l')=0\\ l\neq l'}} \; \sum_{\substack{l''\\ B(l'',l')=0\\ l''\neq l'}} f(l'') \\
&= \sum_{l''} \sum_{\substack{l'\\ B(l,l')=0\\ B(l'',l')=0\\ l\neq l',l''\neq l'}} f(l'')
\end{aligned}$$

reagrupando de acuerdo a los distintos operadores, obtenemos

$$(N_0\,(N_0 f))\,(l) = \sum_{\substack{l''\\ B(l,l'')=0\\ l\neq l''}} \; \sum_{\substack{l'\\ B(l,l')=0\\ B(l'',l')=0\\ l\neq l',l''\neq l'}} f(l'') + \sum_{\substack{l''\\ B(l,l'')\neq 0}} \; \sum_{\substack{l'\\ B(l,l')=0\\ B(l'',l')=0\\ l\neq l',l''\neq l'}} f(l'') + \sum_{\substack{l'\\ B(l,l')=0\\ l\neq l'}} f(l)$$

$$(N_0\,(N_0 f))\,(l) = \left(q^2 l_{n-2} + q - 1\right)(N_0 f)\,(l) + l_{n-1}\,(N_1 f)\,(l) + v_n f(l)$$

Así tenemos

$$N_0^2 = \left(q^2 l_{n-2} + q - 1 - l_{n-1}\right) N_0 + l_{n-1}S + (v_n - l_{n-1})\,\mathrm{Id}$$

□

Proposición 33 *El polinomio minimal de* N_0 *es:*

$$\begin{aligned}
P(X) =& X^3 - \left(q^2 l_{n-2} + (q-1)\,l_{n-1} + q - 1\right) X^2 + \\
& - \left((q-1)\,l_{n-1} - q l_{n-1}\left(q^2 l_{n-2} + q - 1 - l_{n-1}\right)\right) X + q l_{n-1}\,(q-1)\,l_{n-1}
\end{aligned}$$

Demostración: Para determinar el polinomio cúbico, multiplicamos por N_0, la igualdad 2.1

$$\begin{aligned}
N_0^3 &= \left(q^2 l_{n-2} + q - 1 - l_{n-1}\right) N_0^2 + l_{n-1} N_0 S + (v_n - l_{n-1})\,N_0 \\
N_0^3 &= \left(q^2 l_{n-2} + q - 1 - l_{n-1}\right) N_0^2 + l_{n-1} v_n S + (v_n - l_{n-1})\,N_0
\end{aligned}$$

En esta ecuación reemplazamos $l_{n-1}S$, proveniente del despeje en la igualdad 2.1

$$\begin{aligned} N_0^3 &= v_n\left[N_0^2 - \left(q^2 l_{n-2} + q - 1 - l_{n-1}\right) N_0 - \left(v_n - l_{n-1}\right) \mathrm{Id}\right] + \\ &+ \left(q^2 l_{n-2} + q - 1 - l_{n-1}\right) N_0^2 + \left(v_n - l_{n-1}\right) N_0 \\ N_0^3 &= \left(v_n - l_{n-1} - v_n\left(q^2 l_{n-2} + q - 1 - l_{n-1}\right)\right) N_0 + \\ &+ \left(q^2 l_{n-2} + q - 1 - l_{n-1} + v_n\right) N_0^2 - v_n\left(v_n - l_{n-1}\right) \mathrm{Id} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} N_0^3 &= \left((q-1) l_{n-1} - q l_{n-1}\left(q^2 l_{n-2} + q - 1 - l_{n-1}\right)\right) N_0 \\ &+ \left(q^2 l_{n-2} + (q-1) l_{n-1} + q - 1\right) N_0^2 - q l_{n-1}(q-1) l_{n-1} \mathrm{Id} \end{aligned}$$

Con lo cual el polinomio anulador de N_0 es:

$$\begin{aligned} P(X) &= X^3 - \left(q^2 l_{n-2} + (q-1) l_{n-1} + q - 1\right) X^2 + \\ &- \left((q-1) l_{n-1} - q l_{n-1}\left(q^2 l_{n-2} + q - 1 - l_{n-1}\right)\right) X + q l_{n-1}(q-1) l_{n-1} \end{aligned}$$

□ Podemos factorizar el polinomio $P(X)$ como sigue:

$$P(X) = \left(X - q l_{n-1}\right)\left(X^2 - \left(q^2 l_{n-2} - l_{n-1} + q - 1\right) X - (q-1) l_{n-1}\right).$$

Substituyendo los valores de l_{n-1} y l_{n-2} en el coeficiente de X, obtenemos

$$\begin{aligned} q^2 l_{n-2} - l_{n-1} + q - 1 &= q^2 \frac{(q^{n-3} + \varepsilon_Q)(q^{n-2} - \varepsilon_Q)}{q-1} - \frac{(q^{n-2} + \varepsilon_Q)(q^{n-1} - \varepsilon_Q)}{q-1} + q - 1 \\ &= \frac{1}{q-1}\left(\varepsilon_Q q^{n-2}(q-1)^2 - 2(q-1)\right) \\ &= \left(\varepsilon_Q q^{n-1} - \varepsilon_Q q^{n-2} - 2\right) \end{aligned}$$

En el factor de segundo grado, remplazamos el coeficiente lineal; con esto procedemos a la factorización

$$\begin{aligned} & X^2 - \left(q^2 l_{n-2} - l_{n-1} + q - 1\right) X - (q^{n-2} + \varepsilon_Q)(q^{n-1} - \varepsilon_Q) = \\ &= X^2 - \left(\varepsilon_Q q^{n-1} - \varepsilon_Q q^{n-2} - 2\right) X - (q^{n-2} + \varepsilon_Q)(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \\ &= \left(X - (\varepsilon_Q q^{n-1} - 1)\right)\left(X + (\varepsilon_Q q^{n-2} + 1)\right) \end{aligned}$$

Así obtenemos

$$P(X) = \left(X - q l_{n-1}\right)\left(X - (\varepsilon_Q q^{n-1} - 1)\right)\left(X + (\varepsilon_Q q^{n-2} + 1)\right)$$

Proposición 34 *Los valores propios de N_0 son:*

$$\lambda = q l_{n-1}, \quad \mu = \varepsilon_Q q^{n-1} - 1, \quad \nu = -\varepsilon_Q q^{n-2} - 1$$

Proposición 35 *Los idempotentes primitivos (o proyectores indescomponibles) del álgebra* $End_G(L^2(\mathcal{L}^{(n)}))$ *son*

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{(q-1)^2}{(q^{2n-2}-1)(q^{n-2}+\varepsilon_Q)(q^n-\varepsilon_Q)}\,(N_0-\mu\,\mathrm{Id})\,(N_0-\nu\,\mathrm{Id})\\
P_2 &= \frac{-\varepsilon_Q\,(q-1)}{(q^{2n-2}-1)q^{n-2}(q+1)}\,(N_0-\lambda\,\mathrm{Id})\,(N_0-\nu\,\mathrm{Id})\\
P_3 &= \frac{\varepsilon_Q\,(q-1)}{(q^{n-2}+\varepsilon_Q)(q^n-\varepsilon_Q)q^{n-2}(q+1)}\,(N_0-\lambda\,\mathrm{Id})\,(N_0-\mu\,\mathrm{Id})
\end{aligned}
$$

□

Usando 2.1 podemos sustituir N_0^2 en los operadores; obtenemos así

$$
\begin{aligned}
&(N_0-a\,\mathrm{Id})\,(N_0-b\,\mathrm{Id})\\
&= N_0^2-(a+b)\,N_0+ab\,\mathrm{Id}\\
&= \left(\varepsilon_Q q^{n-1}-\varepsilon_Q q^{n-2}-2\right)N_0+l_{n-1}S+(q-1)l_{n-1}\,\mathrm{Id}-(a+b)\,N_0+ab\,\mathrm{Id}\\
&= l_{n-1}S+\left(\varepsilon_Q q^{n-1}-\varepsilon_Q q^{n-2}-2-(a+b)\right)N_0+\left[(q-1)l_{n-1}+ab\right]\mathrm{Id}
\end{aligned}
$$

Calculando en cada uno de los proyectores tenemos:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{q-1}{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)\,(q^n-\varepsilon_Q)}S\\
P_2 &= \frac{-\varepsilon_Q q^{n-2}-1}{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}(q+1)}S+\frac{1}{q^{n-2}(q+1)}\left[\varepsilon_Q N_0+\left(q^{n-2}+\varepsilon_Q\right)\mathrm{Id}\right]\\
P_3 &= \frac{\varepsilon_Q q^{n-1}-1}{(q^n-\varepsilon_Q)q^{n-2}(q+1)}S+\frac{1}{q^{n-2}(q+1)}\left[-\varepsilon_Q N_0+\left(q^{n-1}-\varepsilon_Q\right)\mathrm{Id}\right]
\end{aligned}
$$

Recuerde que la dimension de $L^2(\mathcal{L}^{(n)})$ es $\frac{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)(q^n-\varepsilon_Q)}{q-1}$

Proposición 36 *La dimensión de los espacios propios es respectivamente igual a:*

$$
\dim(V_\lambda)=1,\qquad \dim(V_\mu)=\frac{q(q^{n-2}+\varepsilon_Q)\,(q^n-\varepsilon_Q)}{q^2-1},\qquad \dim(V_\nu)=\frac{q^2(q^{2n-2}-1)}{q^2-1}
$$

Demostración: Para determinar las dimensiones de los espacios propios, calcularemos la traza de los correspondientes proyectores.

Traza del operador P_1 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(P_1) &= \sum_l P_1(\delta_l)(l) \\
&= \frac{q-1}{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)(q^n-\varepsilon_Q)} \sum_l S(\delta_l)(l) \\
&= \frac{q-1}{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)(q^n-\varepsilon_Q)} \sum_l \sum_{l'} (\delta_l)(l') \\
&= \frac{q-1}{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)(q^n-\varepsilon_Q)} \sum_l 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Calculemos la traza del operador P_2

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(P_2) &= \frac{-\varepsilon_Q q^{n-2}-1}{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}(q+1)} \mathrm{Tr}(S) + \frac{1}{q^{n-2}(q+1)} \left[\varepsilon_Q \mathrm{Tr}(N_0) + \left(q^{n-2}+\varepsilon_Q\right) \mathrm{Tr}(\mathrm{Id})\right] \\
&= \frac{-\varepsilon_Q q^{n-2}-1}{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}(q+1)} \mathrm{Tr}(S) + \frac{1}{q^{n-2}(q+1)} \left(q^{n-2}+\varepsilon_Q\right) \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}) \\
&= \left[\frac{-\varepsilon_Q q^{n-2}-1}{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}(q+1)} + \frac{(q^{n-2}+\varepsilon_Q)}{q^{n-2}(q+1)}\right] \frac{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)(q^n-\varepsilon_Q)}{q-1} \\
&= \frac{q\,(q^{n-2}+\varepsilon_Q)(q^n-\varepsilon_Q)}{(q+1)(q-1)}.
\end{aligned}$$

Notemos que la traza de N_0 es cero, ya que la suma se realiza sobre elementos diferentes, es decir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(N_0) &= \sum_l (N_0\delta_l)(l) \\
&= \sum_l \sum_{\substack{l' \\ B(l,l')=0 \\ l\neq l'}} \delta_l(l') = 0
\end{aligned}$$

Calculemos la traza del operador P_3

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(P_3) &= \frac{\varepsilon_Q q^{n-1}-1}{(q^n-\varepsilon_Q)q^{n-2}(q+1)} \mathrm{Tr}(S) + \frac{1}{q^{n-2}(q+1)} \left[-\varepsilon_Q \mathrm{Tr}(N_0) + \left(q^{n-1}-\varepsilon_Q\right) \mathrm{Tr}(\mathrm{Id})\right] \\
&= \frac{\varepsilon_Q q^{n-1}-1}{(q^n-\varepsilon_Q)q^{n-2}(q+1)} \mathrm{Tr}(S) + \frac{q^{n-1}-\varepsilon_Q}{q^{n-2}(q+1)} \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}) \\
&= \frac{q^{n-1}-\varepsilon_Q}{q^{n-2}(q+1)} \left[\frac{q^n}{q^n-\varepsilon_Q}\right] \frac{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)(q^n-\varepsilon_Q)}{q-1} \\
&= \frac{q^2(q^{2n-2}-1)}{q^2-1}.
\end{aligned}$$

□

Las ecuaciones funcionales que definen a los subespacios propios están dadas por:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} P_1 &= \left\{ f \in L^2(E_0) \quad : \quad f = cte. \right\} = \left\{ f \in L^2(E_0) \quad : \quad Sf = 0 \right\}. \\
\operatorname{Im} P_2 &= \left\{ f \in L^2(E_0) \quad : \quad N_0 f = \left(\varepsilon_Q q^{n-1} - 1 \right) f \right\}. \\
\operatorname{Im} P_3 &= \left\{ f \in L^2(E_0) \quad : \quad N_0 f = -\left(\varepsilon_Q q^{n-2} + 1 \right) f \right\}.
\end{aligned}$$

Teorema 1 *La representación natural $L^2(E_0)$ de G, asociada a los vectores isótropos, se descompone en subrepresentaciones irreducibles como sigue:*

$$L^2(E_0) \simeq \bigoplus_{\alpha \in (k^\times)^\wedge} V_\alpha \simeq \operatorname{Im} P_1 \oplus \operatorname{Im} P_2 \oplus \operatorname{Im} P_3 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in (k^\times)^\wedge - \{1\}} V_\alpha \right)$$

donde

$$\begin{aligned}
\dim(V_\alpha) &= \frac{(q^{n-1} + \varepsilon_Q)(q^n - \varepsilon_Q)}{q-1}, \quad \forall \alpha \in \left(k^\times\right)^\wedge - \{1\} \\
\dim(\operatorname{Im} P_1) &= 1, \\
\dim(\operatorname{Im} P_2) &= \frac{q(q^{n-2} + \varepsilon_Q)\,(q^n - \varepsilon_Q)}{q^2 - 1}, \\
\dim(\operatorname{Im} P_3) &= \frac{q^2(q^{2n-2} - 1)}{q^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Deformación de Grafos

En este capítulo, nos interesamos en un problema del cual tenemos varios ejemplos, a saber el problema de la deformación de grafos:

Dado un grafo Γ, se trata de encontrar una familia de grafos Γ_q, dependiente de un parámetro q, de modo que al tomar Γ_q para $q = 1$, se recupere el grafo Γ, dado inicialmente. Por analogía con las deformaciones cuánticas de un sistema físico clásico, se suele decir que tomar $q = 1$, es pasar al límite clásico: $q \longrightarrow 1$.

3.1 El grafo asociado al grupo lineal.

Sea $G = GL_n(k)$ el grupo de las transformaciones lineales de k^n y $\mathcal{L}^{(n)}$ el conjunto de las rectas vectoriales en k^n.

En este conjunto $\mathcal{L}^{(n)}$, tenemos que el grupo lineal G actúa de manera doblemente transitiva, es decir, la acción

$$\begin{array}{rlcl} \cdot : & GL_n \times \mathcal{L}^{(n)} \times \mathcal{L}^{(n)} & \longrightarrow & \mathcal{L}^{(n)} \times \mathcal{L}^{(n)} \\ & (g,(l,l')) & \longmapsto & (g \cdot l, g \cdot l') \end{array}$$

tiene solamente dos órbitas (la diagonal y su complemento en $\mathcal{L}^{(n)} \times \mathcal{L}^{(n)}$)

Con la órbita no trivial, obtenemos el operador de promedio

$$\widetilde{N} f(x) = \frac{q-1}{q^n - 1} \sum_{\substack{y \in \mathcal{L}^{(n)} \\ x \neq y}} f(y)$$

el cual tiene como valores propios a:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1$$

Usando los subespacios propios, tenemos que la representación natural $L^2\left(\mathcal{L}^{(n)}\right)$, se descompone en dos representaciones irreducibles.

$$L^2\left(\mathcal{L}^{(n)}\right) = V_0 \oplus V_1.$$

a saber,

$$V_1 = \{\text{funciones constantes}\}\,, \quad V_0 = \{\text{funciones de suma nula}\}\,,$$

cuyas dimensiones son:

$$\dim(V_1) = 1, \quad \dim(V_0) = q\frac{q^{n-1}-1}{q-1}.$$

Al G-conjunto $\mathcal{L}^{(n)}$ le asociamos el grafo completo Γ_q^n con conjunto de vértices $\mathcal{L}^{(n)}$. Entonces en Γ_q^n todos los pares de vértices distintos son adyacentes.

Así obtenemos que el número de vértices de Γ_q^n es:

$$\left|\mathcal{L}^{(n)}\right| = \frac{q^n-1}{q-1}$$

y su valencia es $q\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$. La distancia geodésica en este grafo tiene 2 posibles valores: 0 y 1.

3.1.1 Paso al límite clásico $q \to 1$.

En el grafo anterior, si el número de vértices l_n de Γ_q^n lo consideremos como una función de la variable q, entonces tenemos que el número de vértices es:

$$l_n(q) = \frac{q^n-1}{q-1};$$

análogamente la valencia del grafo, (número de vertices a distancia 1 de un vértice dado) es:

$$v_n(q) = \frac{q\,(q^{n-1}-1)}{q-1}$$

y su diámetro

$$D(q) = 1.$$

puesto que la imagen de la distancia geodésica d es:

$$\operatorname{Im} d = \{0, 1\}$$

Para cada una de las funciones anteriores, podemos calcular el límite cuando q tiende a 1, que en este caso corresponde simplemente a evaluar en $q = 1$. Tenemos así:

$$\lim_{q\to 1} \frac{q^n-1}{q-1} = n,$$

análogamente para la valencia,

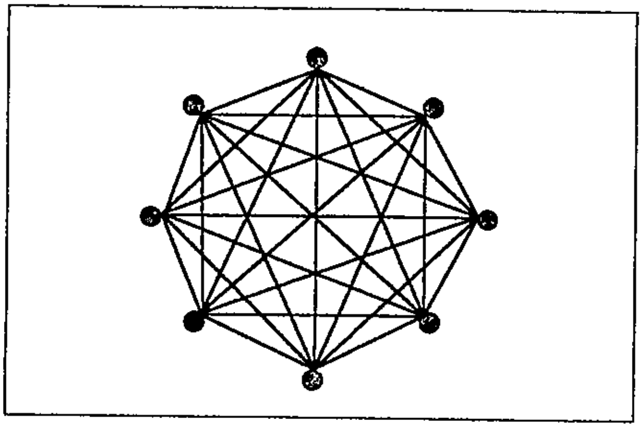
$$\lim_{q\to 1} \frac{q\,(q^{n-1}-1)}{q-1} = n-1$$

y también para el diámetro

$$\lim_{q\to 1} 1 = 1$$

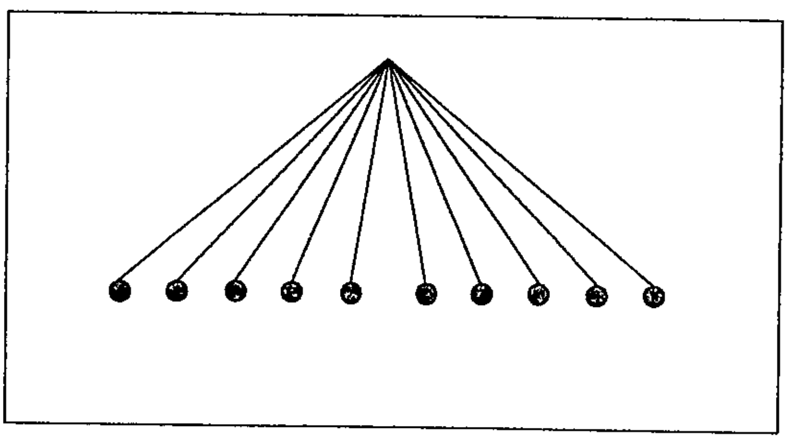
Con estos valores podemos construir un grafo regular Γ_1^n con n vértices, con valencia $n-1$, cuya distancia geodesica sólo toma 2 valores y cuyo diámetro es 1.

Una representación gráfica del grafo es un polítopo regular; en forma más explícita es un n-tetraedro o un grafo completo con n-vértices,



Caso particular $n = 8$

A este grafo Γ_1^n, le podemos asociar un árbol genealógico con una generación de n individuos todos adyacente.



caso particular $n = 10$

Con esta noción es fácil establecer que el grupo de automorfismos del grafo es:

$$G_1 = S_n$$

donde S_n es el grupo de las permutaciones de n elementos.

No es difícil descomponer la acción natural del grupo G_1 (de los automorfismos del grafo) en la representación natural asociada al grafo. En efecto, en esta representación, tenemos el operador de promedio:

$$\widetilde{N}_o f(x) = \frac{1}{n} \sum_{x \text{ ad } y} f(y)$$

cuyos valores propios son:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0$$

con subespacios propios asociados:

$$\begin{aligned} V_1 \quad &= \{\text{funciones constantes }\} \\ V_{n-1} \quad &= \{ \text{ funciones de suma nula } \} \end{aligned}$$

donde el subíndice indica la dimensión.

Esto es lo que esperábamos, ya que

$$(\alpha = 1, \beta = 0) \underset{q \to 1}{\longrightarrow} (\alpha = 1, \beta = 0)$$

y para las dimensiones respectivas se tiene:

$$(\dim V_\alpha,\ \dim V_\beta,) \underset{q \to 1}{\longrightarrow} (1, n-1).$$

3.2 El grafo asociado al grupo de similitudes ortogonales

Sea $(E^{(n)}, Q)$ un espacio cuadrático no degenerado de dimensión $2n$, cuya forma cuadrática Q está dada por

$$Q(x) = \sum_{t=1}^{n} x_{2t-1} x_{2t}$$

Sea $\mathcal{L}^{(n)}$ el conjunto de las rectas (vectoriales) isótropas de $E^{(n)}$; a este conjunto le asociamos el grafo Γ_q^n, cuyos vértices son las rectas isótropas y cuyas aristas son los pares (desordenados) de rectas isótropas ortogonales. Así obtenemos que el número de vértices es l_n y la valencia v_n. La distancia geodésica tiene 3 posibles valores y el diámetro de Γ_q^n es igual a 2

Tenemos que $L^2\left(\mathcal{L}^{(n)}\right)$ es la representación natural de G descompuesta en el capítulo anterior.

3.2.1 Paso al límite clásico $q \to 1$.

En el grafo anterior, si el número de vértices l_n de Γ_q^n lo consideramos como una función de la variable q, escribiremos:

$$l_n(q) = \frac{(q^{n-1}+1)(q^n-1)}{q-1};$$

análogamente la valencia del grafo (número de vertices a distancia 1 de un vértice dado) es:

$$v_n(q) = \frac{q(q^{n-2}+1)\,(q^{n-1}-1)}{q-1};$$

el número de vértices a distancia dos de un vértice dado es:

$$d_2(q) = q^{2n-2};$$

y el diámetro de Γ_q^n es:

$$D(q) = 2.$$

Para cada una de las funciones anteriores, podemos calcular el límite clásico cuando q tiende a 1. Tenemos así:

$$\lim_{q\to 1} \frac{(q^{n-1}+1)(q^n-1)}{q-1} = 2n,$$

análogamente para la valencia:

$$\lim_{q\to 1} \frac{q(q^{n-2}+1)q^{n-1}-1}{q-1} = 2(n-1),$$

para el número de vértices a distancia dos de un vértice dado:

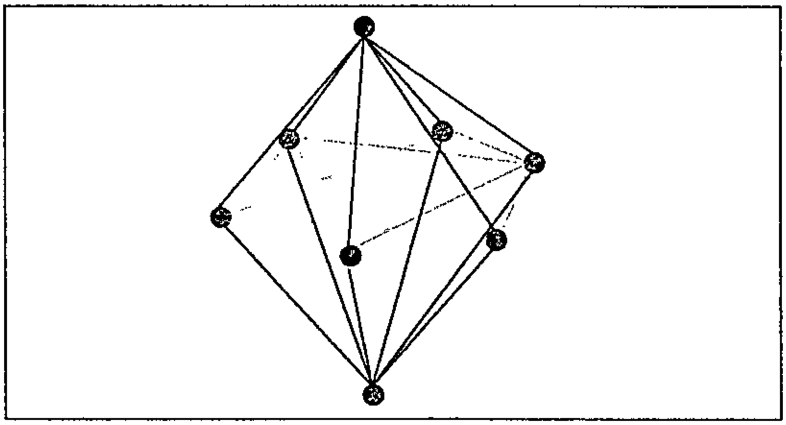
$$\lim_{q\to 1} q^{2n-2} = 1,$$

y también para el diámetro:

$$\lim_{q\to 1} 2 = 2.$$

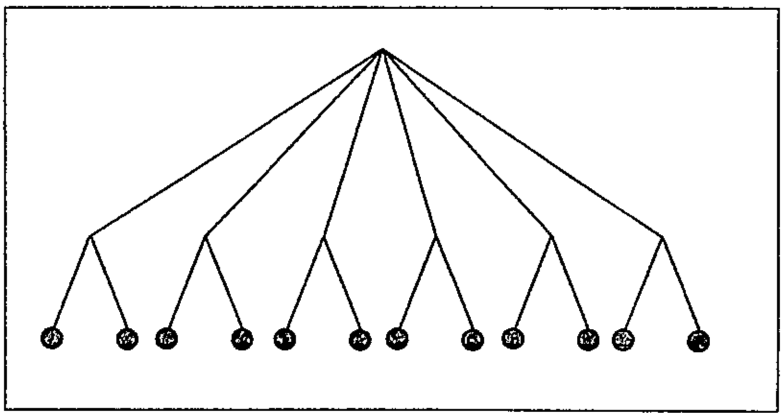
Con estos valores podemos construir un grafo regular Γ_1^n con $2n$ vértices, con valencia $2n-2$, con un solo vértice a distancia dos de cualquier vértice, y de diámetro 2.

Encontramos que una representación gráfica del grafo que cumple con estas condiciones, es un polítopo regular; en forma más explícita es un $2n$-octaedro regular.



Caso particular $n = 4$

En este grafo Γ_1^n esta intrínsicamente asociado a cada vértice su vértice antípoda; con esta noción podemos asociar a Γ_1^n un árbol genealógico (o árbol con raíz), de dos generaciones, donde los "hermanos" de los nodos de la última generación son los antípodas y los otros nodos son sus "primos", como se ilustra en la figura:



caso particular $n = 6$

Con esta noción es fácil establecer que el grupo G_1 de los automorfismos del grafo es

$$G_1 = C_2^n \rtimes S_n$$

(producto semidirecto, con C_2^n distinguido), donde C_2 es el grupo con dos elementos y S_n es el grupo de permutaciones de n elementos.

Con la noción de antípoda, es muy fácil descomponer la acción natural del grupo G_1 en la representación natural asociada al grafo, en esta representación tenemos también asociado el operador de promedio,

$$\widetilde{N}_o f(x) = \frac{1}{2n-2} \sum_{x \text{ ad } y} f(y);$$

(donde x ad y significa que x es adyacente a y en el grafo), cuyos valores propios son:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{-1}{n-1}$$

y cuyos subespacios propios asociados son:

$$\begin{array}{ll} V_1 & = \{\text{funciones ctes .}\} \\ V_n & = \{\text{funciones de suma cero sobre antípodas }\} \\ V_{n-1} & = \{\text{funciones con igual valor sobre antípodas y de suma cero }\} \end{array}$$

donde el subíndice indica la dimensión.

Lo que esperábamos, ya que

$$(\alpha = 1, \beta = \frac{q^{n-1}-1}{v_n}, \gamma = -\frac{q^{n-2}+1}{v_n}) \underset{q \to 1}{\longrightarrow} (1, 0, \frac{-1}{n-1})$$

y análogamente para las dimensiones:

$$(\dim V_\alpha,\ \dim V_\beta,\ \dim V_\gamma) \underset{q \to 1}{\longrightarrow} \qquad (1, n, n-1).$$

Capítulo 4

Análisis ármonico sobre la órbita anisótropa

Sea (E, Q) un espacio cuadrático no degenerado de dimensión par sobre k y E_1 el conjunto de los vectores anisótropos en E.

Definición 8 *Sea A un álgebra cuadrática sobre k y $z \in A^\times$, $t \in k$; entonces introducimos los operadores de entrelazamiento M_z, $\overline{M}_z$, S_t y h_t en $L^2(E_1)$.*

1.

$$(M_z f)(x) = \sum_{\substack{y \in E_1 \\ B(x,y) = \mathrm{Tr}(z) Q(x) \\ Q(y) = \mathrm{N}(z) Q(x) \\ \{x,y\}\ l.i.}} f(y);$$

2.

$$(\overline{M}_z f)(x) = \sum_{\substack{y \in E_1 \\ B(x,y) = \mathrm{Tr}(z) Q(x) \\ Q(y) = \mathrm{N}(z) Q(x)}} f(y);$$

3.

$$(S_t f)(x) = \sum_{\substack{y \in E_1 \\ Q(y) = t Q(x)}} f(y);$$

4.

$$(h_t f)(x) = f(tx).$$

Observación: Los operadores h_t son diagonalizables simultáneamente y sus espacios propios están dados por

$$V_\gamma = \left\{ f \in L^2(E_1) \quad | \quad f(tx) = \gamma(t) f(x), \quad \forall t \in k^\times \right\},$$

donde $\gamma \in (k^\times)^\wedge$.

Proposición 37 *Sea $a \in A^{\times}$, entonces*

$$\overline{M}_a = M_a \quad ; \quad a \notin k.$$
$$\overline{M}_a = M_a + h_a \quad ; \quad a \in k.$$

Demostración: Basta tener presente que

$$B(x, x) = 2Q(x),$$

de modo que

$$B(x, tx) = tB(x, x) = 2tQ(x) = \mathrm{Tr}(t)Q(x).$$

Además

$$Q(tx) = \mathrm{N}(t)Q(x).$$

□

Proposición 38 *Sean $t, r \in k^{\times}, a \in A^{\times}$, entonces*

1. $M_{\overline{a}} = M_a$;
2. $S_t S_r = q^{n-1}(q^n - \varepsilon_Q)S_{tr}$;
3. $S_r h_t = S_{t^2 r}$;
4. $M_a h_t = M_{ta}$;
5. $M_a S_t = (q^{2n-2} + \varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1})\, S_{t\,\mathrm{N}(a)}$, con $a \in A^{\times} - k^{\times}$.
6. $M_a S_t = (q^{2n-2} - 1)\, S_{t\,\mathrm{N}(a)}$, con $a \in k^{\times}$.

Demostración: Sean $a \in (k \times k)^{\times}$, $r \in k^{\times}$, y $f \in L^2(E_1)$.

1.

$$(M_{\overline{a}} f)(x) = \sum_{\substack{y \in E_1 \\ B(x,y) = \mathrm{Tr}(\overline{a})Q(x) \\ Q(y) = \mathrm{N}(\overline{a})Q(x) \\ \{x,y\} \text{ l.i.}}} f(y) = \sum_{\substack{y \in E_1 \\ B(x,y) = \mathrm{Tr}(a)Q(x) \\ Q(y) = \mathrm{N}(a)Q(x) \\ \{x,y\} \text{ l.i.}}} f(y) = (M_a f)(x).$$

2.

$$(S_t\,(S_r f))(x) = \sum_{\substack{y \in E_1 \\ Q(y) = tQ(x).}} (S_r f)\,(y) = \sum_{\substack{y \in E_1 \\ Q(y) = tQ(x)}} \sum_{\substack{y' \in E_1 \\ Q(y') = rQ(y)}} f(y')$$
$$= \sum_{\substack{y, y' \in E_1 \\ Q(y') = trQ(x) \\ Q(y) = tQ(x)}} f(y') = \sum_{\substack{y' \in E_1 \\ Q(y') = trQ(x)}} \sum_{\substack{y \in E_1 \\ Q(y) = tQ(x)}} f(y') = q^{n-1}(q^n - \varepsilon_Q)S_{tr}.$$

3.

$$
\begin{aligned}
(S_r\,(h_t f))(x) &= \sum_{\substack{y\in E_1 \\ Q(y)=rQ(x).}} (h_t f)\,(y) = \sum_{\substack{y\in E_1 \\ Q(y)=rQ(x)}} f(ty) \\
&= \sum_{\substack{y'\in E_1 \\ Q(t^{-1}y')=rQ(x)}} f(y') = \sum_{\substack{y'\in E_1 \\ Q(y')=t^2 rQ(x)}} f(y') = (S_{t^2 r} f)(x)
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
(M_a\,(h_t f))(x) &= \sum_{\substack{y\in E_1 \\ B(x,y)=\mathrm{Tr}(a)Q(x) \\ Q(y)=\mathrm{N}(a)Q(x) \\ \{rx,y\}\text{ l.i.}}} (h_t f)\,(y) = \sum_{\substack{y\in E_1 \\ B(x,y)=\mathrm{Tr}(a)Q(x) \\ Q(y)=\mathrm{N}(a)Q(x) \\ \{x,y\}\text{ l.i.}}} f(ty) \\
&= \sum_{\substack{y'\in E_1 \\ B(x,t^{-1}y')=\mathrm{Tr}(a)Q(x) \\ Q(t^{-1}y')=\mathrm{N}(a)Q(x) \\ \{x,t^{-1}y'\}\text{ l.i.}}} f(y') = \sum_{\substack{y'\in E_1 \\ B(x,y')=\mathrm{Tr}(ta)Q(x) \\ Q(y')=\mathrm{N}(ta)Q(x) \\ \{x,y'\}\text{ l.i.}}} f(y') = (M_{ta} f)(x).
\end{aligned}
$$

Demostración de 5. y 6.

$$
\begin{aligned}
(M_a\,(S_t f))(x) &= \sum_{\substack{y\in E_1 \\ B(x,y)=\mathrm{Tr}(a)Q(x) \\ Q(y)=\mathrm{N}(a)Q(x) \\ \{rx,y\}\text{ l.i.}}} (S_t f)\,(y) = \sum_{\substack{y\in E_1 \\ B(x,y)=\mathrm{Tr}(a)Q(x) \\ Q(y)=\mathrm{N}(a)Q(x) \\ \{x,y\}\text{ l.i.}}} \sum_{\substack{y'\in E_1 \\ Q(y')=tQ(y)}} f(y') \\
&= \sum_{\substack{y\in E_1 \\ B(x,y)=\mathrm{Tr}(a)Q(x) \\ Q(y)=\mathrm{N}(a)Q(x) \\ \{x,y\}\text{ l.i.}}} \sum_{\substack{y'\in E_1 \\ Q(y')=t\,\mathrm{N}(a)Q(x)}} f(y') = d_a S_{tN(a)}.
\end{aligned}
$$

donde d_a es el número de sumandos de M_a y tenemos que

$$
d_a = \begin{cases} q^{2n-2} + \varepsilon_Q \varepsilon_A q^{n-1} & a \in A - k \\ q^{2n-2} - 1 & a \in k^\times \end{cases},
$$

resultado que será demostrado en el capítulo 5. □

Corolario 39 *Sean* $t, r \in k^\times, a \in A^\times,\ f \in V_\gamma, \gamma \in (k^\times)^\wedge$, *entonces*

1. $(M_a f)\,(tx) = \gamma(t)\,(M_a f)\,(x)$;
2. $(M_{ta} f)\,(x) = \gamma(t)\,(M_a f)\,(x)$;
3. $(S_r f)\,(tx) = \gamma(t)\,(S_r f)\,(x)$;

4. $\left(S_{t^2r}f\right)(x) = \gamma(t)\left(S_rf\right)(x)$.

Demostración: Recordemos que el álgebra $End_G(L^2(E_1))$ es conmutativa, luego tenemos

$$h_tM_a = M_{ta} = M_ah_t.$$

y

$$h_tS_r = S_{t^2r} = S_rh_t.$$

Dados $a \in (k \times k)^\times$,$r \in k^\times$, y $f \in V_\gamma$.
Probaremos 1 y 2.

$$\begin{aligned}(M_af)(tx) &= h_t(M_af)(x)\\ &= \left(M_{ta}f\right)(x)\\ &= M_a(h_tf)(x)\\ &= \gamma\left(r\right)\left(M_af\right)(x).\end{aligned}$$

Ahora demostraremos de 3 y 4.

$$\begin{aligned}(S_rf)(tx) &= h_t(S_rf)(x)\\ &= (S_{t^2r}f)(x)\\ &= S_r(h_tf)(x)\\ &= \gamma\left(r\right)\left(S_tf\right)(x)\end{aligned}$$

□

4.1 El caso $\dim E = 2$.

Sea (E, Q) un espacio cuadrático no degenerado de dimensión 2 sobre k, que realizamos como (A, N_A), con A un álgebra cuadrática sobre k, es decir,

$A = \mathbb{K}$: la única extensión cuadrática de k.

$A = k \times k$: el álgebra cuadrática escindida sobre k.

Antes de iniciar la descomposición en irreducibles, esclareceremos con mas detalle el número de entrelazamiento.

Proposición 40 *Sea A un álgebra cuadrática sobre k, entonces*

$$\dim(End_G(L^2(A^\times))) = \frac{\left(q + 1 - \varepsilon_Q\right)\left(q - 1\right)}{2}.$$

Demostración: Recordemos que la dimensión del álgebra $End_G(L^2(A^\times))$ es igual a la dimensión del álgebra de núcleos G-invariantes en $A^\times \times A^\times$.

Una base del álgebra $N(A^\times, G)$, está constituida por dos tipos de núcleos aquellos provenientes de las G-órbitas formadas por los vectores proporcionales, y aquellas provenientes de las órbitas por los vectores linealmente independientes parametrizadas por las Q-configuraciones.

Por lo anterior, sólo falta analizar cuáles Q-configuraciones se pueden realizar. Para ello tenemos:

- Las Q-configuraciones $(1, 2t, t^2)$, no son realizables por elementos linealmente independientes, ya que,

$$(\mathrm{N}(z), \mathrm{Tr}\,(zF(w))\,, \mathrm{N}(w)) = (1, 2t, t^2)$$

implica

$$\mathrm{Tr}\,(zF(w)) = 2t\,\mathrm{N}(z), \quad \mathrm{N}(w) = t^2\,\mathrm{N}(z)$$

es decir,

$$\mathrm{Tr}\,(zF(w)) = \mathrm{Tr}\,(t\,\mathrm{N}(z))\,, \quad \mathrm{N}(zF(w)) = \mathrm{N}(t\,\mathrm{N}(z))$$

luego

$$zF(w) = t\,\mathrm{N}(z)$$

y por ende

$$w = tz.$$

Nos falta determinar que Q-configuración $(1, a, b)$, que no sean del tipo anterior, son realizables como $(1, \mathrm{Tr}(z), \mathrm{N}(z))$, es decir. Dados $a \in k, b \in k^\times$, existe $z \in A^\times - k^\times$ tal que

$$\mathrm{Tr}(z) = a, \quad \mathrm{N}(z) = b$$

Tenemos la respuesta a través de los resultados de la primera sección del capítulo 1, distinguiendo los casos:

- Si $A = \mathbb{K}$, entonces existe $z \in A^\times - k^\times$ tal que la terna es $(1, a, b)$ es realizable como $(1, \mathrm{Tr}\,(z)\,, \mathrm{N}\,(z))$ si y sólo si $b^2 - 4a$ es un no cuadrado en k
- Si $A = k \times k$, entonces existe $z \in A^\times - k^\times$ tal que la terna es $(1, a, b)$ es realizable como $(1, \mathrm{Tr}\,(z)\,, \mathrm{N}\,(z))$ si y sólo si $b^2 - 4a$ es un cuadrado en $k^\times$.

Luego, el número de entrelazamiento es:

$$(q-1) + \frac{(q-1)\,(q-1-\varepsilon_Q)}{2} = \frac{(q+1-\varepsilon_Q)\,(q-1)}{2}.$$

□

4.1.1 Operadores del álgebra de entrelazamiento.

Los operadores de entrelazamiento M_v asociado a $v \in A^\times$ de los núcleos G-invariantes están definidos por

$$M_v(f)(x) = \sum_{\substack{y \in A^\times \\ \mathrm{Tr}(x\bar{y}) = \mathrm{Tr}(v)\,\mathrm{N}(x) \\ \mathrm{N}(y) = \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(x) \\ \{x,y\} \text{ l.i.}}} f(y).$$

con $v \in A$ y $f \in L^2(A^\times)$.

Para reescribir en forma más transparente el operador, resolveremos el sistema y con ello podmos lograr nuestro objetivo.

Proposición 41 *Dados $x, v \in A^\times$ fijos, entonces el conjunto solución del sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathrm{Tr}(xF(y)) & = & \mathrm{Tr}(v)\,\mathrm{N}(x) \\ \mathrm{N}(y) & = & \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(x) \end{array}\right|$$

en $A^\times$ es:

$$S = \{xv, xF(v)\}$$

Demostración: Notemos amplificando la segunda ecuación por $\mathrm{N}(x)$

$$\mathrm{N}(y)\,\mathrm{N}(x) = \mathrm{N}(y)\,\mathrm{N}(x)^2$$
$$\mathrm{N}(xF(y)) = \mathrm{N}(\mathrm{N}(x)y)$$

con lo cual, el sistema se expresa:

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathrm{Tr}(xF(y)) & = & \mathrm{Tr}(\mathrm{N}(x)v) \\ \mathrm{N}(xF(y)) & = & \mathrm{N}(\mathrm{N}(x)v) \end{array}\right|$$

Por lo tanto, tenemos elementos de igual traza y norma, es decir

$$xF(y) = \mathrm{N}(x)v \quad \text{o} \quad F(x)y = \mathrm{N}(x)v.$$

o bien,

$$y = xv \quad \vee \quad y = xF(v).$$

□

Corolario 42 *Sean $v \in A$, $f \in L^2(A^\times)$, entonces*

$$M_v(f)(x) = \begin{cases} 0 & v \in k \\ f(xv) + f(xF(v)) & v \notin k \end{cases}.$$

El corolario anterior suguiere redefinir nuestro operador M_v

Definición 9 *Sean $v \in A^{\times}$, $f \in L^2(A^{\times})$, entonces*

$$\overline{M}_v(f)(x) = \begin{cases} 2f(xv) & v \in k \\ M_v(f)(x) & v \notin k \end{cases}.$$

Observación: Con esta definición tenemos que

$$\overline{M}_v(f)(x) = f(xv) + f(x\overline{v}).$$

Proposición 43 *Sea $v \in A^{\times}$, entonces*

$$\overline{M}_v = \overline{M}_{\overline{v}}.$$

4.1.2 Producto de los operadores canónicos.

Teorema 2 *Sean $v, w \in A^{\times}$; entonces la compuesta de los operadores de entrelazamiento $\overline{M}_v$ y $\overline{M}_w$ está dada por*

$$\overline{M}_v\overline{M}_w = \overline{M}_{vw} + \overline{M}_{v\overline{w}}.$$

Demostración: Sean $v, w \in A^{\times}, f \in L^2(A^{\times})$ entonces

$$\begin{aligned} \overline{M}_v(\overline{M}_w f)(x) &= \left(\overline{M}_w f\right)(xv) + \left(\overline{M}_w f\right)(xF(v)) \\ &= f(xvw) + f(xvF(w)) + f(xF(v)w) + f(xF(vw)) \\ &= \left(\overline{M}_{vw} f\right)(x) + \left(\overline{M}_{vF(w)} f\right)(x). \end{aligned}$$

□

4.1.3 Transformadas de Mellin de los operadores canónicos y sus productos.

Sea $\alpha \in (A^{\times})^{\wedge}$, se define la transformada de Mellin de los operadores $\overline{M}_v$ con $v \in A^{\times}$ por

$$\overline{M}_\alpha = \sum_{v \in A^{\times}} \alpha(v)\overline{M}_v.$$

Proposición 44 *Sea $\alpha \in (A^{\times})^{\wedge}$, entonces*

$$\overline{M}_\alpha = \overline{M}_{\overline{\alpha}}.$$

Demostración: Sea $\alpha \in (A^\times)^\wedge$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{M}_\alpha &= \sum_{v \in A^\times} \alpha(v)\overline{M}_v;\\
&= \sum_{v \in A^\times} \alpha(v)\overline{M}_{F(v)};\\
&= \sum_{w \in A^\times} \alpha^F(w)\overline{M}_w;\\
&= \overline{M}_{\alpha^F}.
\end{aligned}$$

□

Para esclarecer el producto de estos operadores tenemos el siguiente teorema

Teorema 3 *Sean $\alpha, \beta \in (A^\times)^\wedge$, entonces*

1. *Si $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \neq \beta^F$,*
$$\overline{M}_\alpha \overline{M}_\beta = 0.$$
2. *Si $\alpha = \beta$ o bien $\alpha = \beta^F$,*
$$\overline{M}_\alpha \overline{M}_\beta = \left|A^\times\right| \overline{M}_\alpha.$$
3. *Si $\alpha = \beta$ y $\alpha = \beta^F$,*
$$\overline{M}_\alpha \overline{M}_\beta = 2\left|A^\times\right| \overline{M}_\alpha.$$

Demostración: Sean $\alpha, \beta \in (A^\times)^\wedge$, entonces el producto de las transformadas de Mellin está dado por:

$$\begin{aligned}
\overline{M}_\alpha \overline{M}_\beta &= \sum_{v,w \in A^\times} \alpha(v)\beta(w)\overline{M}_v\overline{M}_w;\\
&= \sum_{v,w \in A^\times} \alpha(v)\beta(w)\left(\overline{M}_{vw} + \overline{M}_{vF(w)}\right);\\
&= \sum_{v,z \in A^\times} \left(\alpha\beta^{-1}\right)(v)\beta(z)\overline{M}_z + \sum_{v,z \in A^\times} \left(\alpha\beta^{-F}\right)(v)\beta^F(z)\overline{M}_z;\\
&= \left|A^\times\right| \delta_{\alpha,\beta}\overline{M}_\beta + \left|A^\times\right| \delta_{\alpha,\beta^F}\overline{M}_\beta.
\end{aligned}$$

Así,

$$\overline{M}_\alpha \overline{M}_\beta = \left|A^\times\right| \left[\delta_{\alpha,\beta} + \delta_{\alpha,\beta^F}\right] \overline{M}_\beta.$$

□

Con el propósito de encontrar proyectores, usaremos la siguiente normalización.

Definición 10 *Sea* $\alpha \in (A^{\times})^{\wedge}$, *definimos*

$$\widetilde{M_\alpha} = \frac{\left|\{\alpha, \alpha^F\}\right|}{2\left|A^{\times}\right|}\overline{M}_\alpha.$$

Teorema 4 *Sean* $\alpha, \beta \in (A^{\times})^{\wedge}$, *entonces*

1. *Si* $\alpha \neq \beta$ *y* $\alpha \neq \beta^F$,
$$\widetilde{M_\alpha}\widetilde{M_\beta} = 0.$$

2. *Si* $\alpha = \beta$ *o* $\alpha = \beta^F$,
$$\widetilde{M_\alpha}\widetilde{M_\beta} = \widetilde{M_\alpha}.$$

Con esto hemos encontrado una familia ortogonal de proyectores dada por:

$$\mathcal{F} = \{\widetilde{M_\alpha} \quad : \quad \{\alpha, \alpha^F\} \in X\}$$

donde $X = \left\{\{\alpha, \alpha^F\} \text{ tal que } \alpha \in (A^{\times})^{\wedge}\right\}$.

Calcularemos la traza de los proyectores:

$$tr\left(\widetilde{M_\alpha}\right) = \sum_{x \in A^{\times}} \widetilde{M_\alpha}\left(\delta_x\right)(x);$$

$$tr\left(\widetilde{M_\alpha}\right) = \sum_{x \in A^{\times}} \frac{\left|\{\alpha, \alpha^F\}\right|}{2\left|A^{\times}\right|} \sum_{v \in A^{\times}} \alpha(v)\overline{M}_v\left(\delta_x\right)(x);$$

$$tr\left(\widetilde{M_\alpha}\right) = \frac{\left|\{\alpha, \alpha^F\}\right|}{2\left|A^{\times}\right|} \sum_{v \in A^{\times}} 2\alpha(1) = \frac{\left|\{\alpha, \alpha^F\}\right|}{2\left|A^{\times}\right|} 2\left|A^{\times}\right|;$$

$$tr\left(\widetilde{M_\alpha}\right) = \left|\{\alpha, \alpha^F\}\right|.$$

de donde,

$$\dim(\operatorname{Im}\widetilde{M_\alpha}) = 2 \text{ si } \alpha \neq \alpha^F$$
$$\dim(\operatorname{Im}\widetilde{M_\alpha}) = 1 \text{ si } \alpha = \alpha^F$$

Notemos que $f \in \operatorname{Im}\widetilde{M_\alpha}$ es equivalente a

$$\frac{\left|\{\alpha, \alpha^F\}\right|}{2}\left[\sum_{a \in A^{\times}} \alpha(a) f(ax) + \sum_{a \in A^{\times}} \alpha^F(a) f(ax)\right] = \left|A^{\times}\right| f(x), \quad \forall x \in A^{\times}.$$

de otro modo

$$\left|\{\alpha, \alpha^F\}\right| \sum_{a \in A^{\times}} \left(\frac{\alpha + \alpha^F}{2}\right)(a) f(ax) = \left|A^{\times}\right| f(x), \quad \forall x \in A^{\times}.$$

Teorema 5 *Sea A un álgebra cuadrática sobre k, entonces la descomposición de la representacion $L^2(E_1)$ de G en irreducibles está dada por:*

$$L^2(E_1) = L^2(A^\times) = \bigoplus_{\{\alpha,\overline{\alpha}\}\in X} \operatorname{Im} \widetilde{M_\alpha}$$

donde $X = \left\{ \{\alpha, \alpha^F\} \text{ tal que } \alpha \in (A^\times)^\wedge \right\}$ *y* $dim(\operatorname{Im} \widetilde{M_\alpha}) = \left| \{\alpha, \alpha^F\} \right|$.

Demostración: Tenemos que $L^2(A^\times)$ se ha descompuesto en suma de las espacios imagenes de los proyectores.

Además el número de sumandos de la descomposición coincide con el número de entrelazamiento de la representación, por lo tanto, cada una de los espacios imagenes son subrepresentaciones irreducible. □

Capítulo 5

Números geométricos en (E, Q)

Sea (E, Q) un espacio cuadrático no degenerado de dimensión mayor que 2 sobre k y A, B álgebras cuadráticas sobre k.

En este capítulo denotaremos al automorfismo de Frobenius por$^-$ ya que es más fácil en este caso y no hay peligros de confusión con el conjugado complejo.

Dado $v \in A^\times$, tenemos asociados el operador de entrelazamiento M_v dado por la Q-configuración $(1, \mathrm{Tr}(v), \mathrm{N}(v))$, es decir,

$$M_v(f)(x) = \sum_{\substack{y \in E_1 \\ B(x,y)=\mathrm{Tr}(v)Q(x) \\ Q(y)=\mathrm{N}(v)Q(x) \\ \{x,y\} \text{ l.i.}}} f(y)$$

con $f \in L^2(E_1)$.

Proposición 45 *Sea $v \in A^\times$, entonces el número de sumandos del operador M_v es igual a:*

$$\begin{aligned} d_v &= q^{2n-2} + \varepsilon_Q q^{n-1}; \quad v \in k \times k - k. \\ d_v &= q^{2n-2} - 1; \quad v \in k. \\ d_v &= q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}; \quad v \in \mathbb{K} - k. \end{aligned}$$

o bien, de manera general:

$$d_v = q^{2n-2} + \varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1}, \quad v \in A - k.$$

Demostración: Sea $v \in A^\times$. Determinar el número de sumandos de M_v, es equivalente a determinar, cuántas soluciones linealmente independientes tiene el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} B(x,y) &=& \mathrm{Tr}(v)\, Q(x) \\ Q(y) &=& \mathrm{N}(v) Q(x) \end{array}\right|$$

Notemos que el sistema es invariante por el grupo de similitudes de la forma cuadrática y la dimensión de E es mayor o igual que cuatro; entonces, salvo isomorfismo, tenemos que

$$E = k \oplus k \oplus E'; \quad Q(x) = x_1 x_2 + Q(x')$$

donde $x = x_1 + x_2 + x' \in k \oplus k \oplus E'$

Sea $x = e_1 + e_2 \in E_1$. Reemplazando en el sistema obtenemos

$$\begin{array}{rcl|} y_1 + y_2 & = & \mathrm{Tr}\,(v) \\ Q(y) & = & \mathrm{N}(v) \\ \hline \end{array}$$

despejando $y_1$de la primera ecuación, tenemos,

$$y_1 = \mathrm{Tr}\,(v) - y_2$$

reemplazando en la segunda ecuación obtenemos

$$Q(y') = y_2^2 - \mathrm{Tr}\,(v)\, y_2 + N(v).$$

Obtenemos entonces que

Si $v \in k$, entonces el número de soluciones es:

$$\left(q^{n-2} + \varepsilon_Q\right)\left(q^{n-1} - \varepsilon_Q\right) + (q-1)\, q^{n-2}\left(q^{n-1} - \varepsilon_Q\right) = q^{2n-2} - 1.$$

Si $v \in k \times k - k$, entonces es

$$2\left(q^{n-2} + \varepsilon_Q\right)\left(q^{n-1} - \varepsilon_Q\right) + 2 + (q-2)\, q^{n-2}\left(q^{n-1} - \varepsilon_Q\right) = q^{2n-2} + \varepsilon_Q q^{n-1}.$$

Si $v \in \mathbb{K} - k$, entonces es

$$q^{n-1}\left(q^{n-1} - \varepsilon_Q\right) = q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}.$$

□

Como una base del álgebra de núcleos invariantes está dada por las órbitas proporcionales y aquellas parametrizadas por las Q-configuraciones, entonces tenemos que dados $v \in A^\times, w \in B^\times$, se tiene que

$$M_v * M_w = \sum_{\substack{a \in k \\ b \in k^\times}} c_{a,b}^{v,w} M_{(1,a,b)} + \sum_{r \in k^\times} d_r^{v,w} h_r.$$

Para mejorar este resultado, calcularemos este producto de operadores directamente.

Sean $v \in A^\times, w \in B^\times, f \in L^2(E_1)$. El cálculo del producto de los operadores M_v y M_w perteneciente al álgebra $End_G(L^2(E_1))$, está dado por:

$$M_v(M_wf)(x) = \sum_{\substack{y\in E_1\\ B(x,y)=\mathrm{Tr}(v)Q(x)\\ Q(y)=\mathrm{N}(v)Q(x)\\ \{x,y\}\ \mathrm{l.i.}}} (M_wf)(y)$$

$$\begin{aligned} M_v(M_wf)(x) &= \sum_{\substack{y,z\in E_1\\ B(x,y)=\mathrm{Tr}(v)Q(x)\\ B(y,z)=\mathrm{Tr}(w)Q(y)\\ Q(z)=\mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)Q(x)\\ Q(y)=\mathrm{N}(w)Q(x)\\ \{x,y\},\{y,z\}\ \mathrm{l.i}}} f(z)\\ &= \sum_{a\in k}\ \sum_{\substack{z\in E_1\\ B(x,z)=aQ(x)\\ Q(z)=\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)Q(x)}}\ \sum_{\substack{y\in E_1\\ B(x,y)=\mathrm{Tr}(v)Q(x)\\ B(y,z)=\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v)Q(x)\\ Q(y)=\mathrm{N}(v)Q(x)\\ \{x,y\},\{y,z\}\ \mathrm{l.i}}} f(z)\\ &= \sum_{a\in k} c_a^{v,w} M_{(1,a,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} f(x) + \sum_{r\in k^\times} d_r^{v,w} h_r f(x)) \end{aligned}$$

En efecto $c_a^{v,w}$ no es otra cosa que el número de soluciones linealmente independientes con X, Z del sistema de ecuaciones, es decir:

Dados $v \in A^\times, w \in B^\times$ y los vectores $X, Z \in E_1$ fijos tales que $B(X,Z) = a$, $c_a^{v,w}$ es el número de vectores $Y \in E_1$, que son solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} B(X,Y) &=& \mathrm{Tr}\,(v)\,Q(X)\\ B(Y,Z) &=& \mathrm{Tr}(w)Q(Y)\\ Q(Y) &=& \mathrm{N}(v)Q(X).\\ Q(Z) &=& \mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)Q(X) \end{array}\right|$$

y $\{X,Y\}, \{Y,Z\}$ son conjuntos linealmente independientes.

Como el grupo de similitudes actúa transitivamente sobre las órbitas parametrizadas por las Q-configuraciones, es decir, sobre las órbitas parametrizadas por,

$$(Q(X), B(X,Z), Q(Z))$$

y el sistema es invariante por el grupo de similitudes, entonces basta con tomar un par de vectores representante de cada órbita.

5.1 Resolución del sistema.

En esta sección nos dedicaremos exclusivamente a resolver el sistema de ecuaciones y en la siguiente sección a determinar cuáles de las soluciones son linealmente independientes.

Dados $v \in A^{\times}, w \in B^{\times}$, los vectores $X, Z \in E_1$ fijos tales que $B(X,Z) = t \in k$, necesitamos determinar el número de soluciones $e_t^{v,w}$del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} B(X,Y) & = & \mathrm{Tr}\,(v)\,Q(X) \\ B(Y,Z) & = & \mathrm{Tr}(w)Q(Y) \\ Q(Y) & = & \mathrm{N}(v)Q(X) \\ Q(Z) & = & \mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)Q(X) \end{array}\right|$$

es decir, necesitamos determinar la cantidad de vectores $Y \in E_1$, que son soluciones del sistema.

5.1.1 El caso en que E no contiene un plano totalmente isótropo.

Escogeremos los vectores $X, Z \in E = k \oplus k \oplus \mathbb{K}$, para los distintos tipos de Q-configuraciones y denotaremos por $e_t^{v,w}$ el número de soluciones del sistema en cada caso.

Primer Caso : Consideremos la configuración $(1, t, \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))$, tal que

$$\Delta = \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) - \frac{1}{4}t^2 \in \square^{\times}$$

En este caso los vectores en $k \oplus k \oplus \mathbb{K}$, están dados por:

$$X = e_1 + e_2; \quad Y = y_1e_1 + y_2e_2 + a; \quad Z = \mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)se_1 + s^{-1}e_2$$

con

$$y = y_1e_1 + y_2e_2, \quad z = Z, \quad \mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)s + s^{-1} = t, \quad s \in k^{\times}$$

Reemplazando en el sistema los vectores obtenemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}(y) & = & \mathrm{Tr}(v) \\ \mathrm{Tr}(y\bar{z}) & = & \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) \\ \mathrm{N}(y) + \mathrm{N}(a) & = & \mathrm{N}(v) \end{array}\right|$$

De las dos primeras ecuaciones y como $\Delta \in \square^{\times}$ tenemos que $Z \notin k$, despejando obtenemos,

$$y_1 = \mathrm{Tr}(v) - y_2, \quad y_2 = \frac{1}{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)s - s^{-1}}(\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) - s^{-1}\,\mathrm{Tr}(v)).$$

Nos falta analizar la tercera ecuación:

Si $\mathrm{N}(v) \neq \mathrm{N}(y)$

$$e_t^{v,w} = q + 1$$

Si $\mathrm{N}(v) = \mathrm{N}(y)$

$$e_t^{v,w} = 1$$

Observación: Si $\mathrm{N}(v) = \mathrm{N}(y)$,

$$\begin{array}{rcl|} \mathrm{Tr}(y) & = & \mathrm{Tr}(v) \\ \mathrm{Tr}(y\bar{z}) & = & \mathrm{Tr}(\mathrm{N}(v)w) \\ \mathrm{N}(y) + \mathrm{N}(a) & = & \mathrm{N}(v) \\ \hline \end{array}$$

Calculemos la norma de $y\bar{z}$

$$\mathrm{N}(y\bar{z}) = \mathrm{N}(y)\,\mathrm{N}(z) = \mathrm{N}(v)^2\,\mathrm{N}(w) = \mathrm{N}(\mathrm{N}(v)w).$$

luego tenemos

$$\mathrm{Tr}(y\bar{z}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{N}(v)w); \quad \mathrm{N}(y\bar{z}) = \mathrm{N}(\mathrm{N}(v)w).$$

Así

$$\begin{gathered} y\bar{u} = \mathrm{N}(v)w; \quad y\bar{u} = \mathrm{N}(v)\overline{w} \\ y = \frac{w}{\mathrm{N}(w)}z; \quad y = \frac{\overline{w}}{\mathrm{N}(w)}z \end{gathered}$$

por lo tanto,

$$\begin{gathered} y = \frac{w}{\mathrm{N}(w)}z = v; \quad y = \frac{\overline{w}}{\mathrm{N}(w)}z = v \\ y = \frac{w}{\mathrm{N}(w)}z = \overline{v}; \quad y = \frac{\overline{w}}{\mathrm{N}(w)}z = \overline{v}. \end{gathered}$$

o sea

$$z = vw; \quad z = v\overline{w}, \quad z = \overline{v}w; \quad z = \overline{vw}$$

es decir,

$$t = \mathrm{Tr}(vw); \quad t = \mathrm{Tr}(v\overline{w}).$$

□

Segundo Caso: Consideremos la configuración $(1, t, \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))$, tal que

$$\triangle = \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) - \frac{1}{4}t^2 \notin \square.$$

En este caso los vectores en $k \oplus k \oplus \mathbb{K}$ que escogemos son:

$$X = 1; \quad Y = y_1e_1 + y_2e_2 + a; \quad Z = u$$

donde,

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2, \quad \mathrm{N}(u) = \mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v), \quad \mathrm{Tr}(u) = t, \quad u \in \mathbb{K}^\times.$$

Reemplazando y simplificando el sistema se obtiene:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}(a) & = & \mathrm{Tr}(v) \\ \mathrm{Tr}(a\overline{u}) & = & \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) \\ \mathrm{N}(y) + \mathrm{N}(a) & = & \mathrm{N}(v) \end{array}\right|$$

De las dos primeras ecuaciones y de $\triangle \notin \square$ tenemos que $Z \notin k$ y despejando obtenemos

$$a_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(v), \quad a_2 = \frac{1}{2u_2\delta_0}(u_1\,\mathrm{Tr}(v) - \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v)),$$

donde δ_0 es un no cuadrado en k.

Nos falta analizar la tercera ecuación:

Si $\mathrm{N}(v) \neq \mathrm{N}(a)$

$$e_t^{v,w} = q - 1$$

Si $\mathrm{N}(v) = \mathrm{N}(a)$

$$e_t^{v,w} = 2q - 1$$

Observación: Si $\mathrm{N}(v) = \mathrm{N}(a)$,

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}(a) & = & \mathrm{Tr}(v) \\ \mathrm{Tr}(a\overline{u}) & = & \mathrm{Tr}(\mathrm{N}(v)w) \\ \mathrm{N}(y) + \mathrm{N}(a) & = & \mathrm{N}(v) \end{array}\right|$$

Calculemos la norma de $a\overline{u}$

$$\mathrm{N}(a\overline{u}) = \mathrm{N}(a)\,\mathrm{N}(u) = \mathrm{N}(v)^2\,\mathrm{N}(w) = \mathrm{N}(\mathrm{N}(v)w).$$

luego tenemos

$$\mathrm{Tr}(a\overline{u}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{N}(v)w); \quad \mathrm{N}(a\overline{u}) = \mathrm{N}(\mathrm{N}(v)w).$$

Así,

$$a\overline{u} = \mathrm{N}(v)w; \quad a\overline{u} = \mathrm{N}(v)\overline{w}$$
$$a = \frac{w}{\mathrm{N}(w)}u; \quad a = \frac{\overline{w}}{\mathrm{N}(w)}u$$

por lo tanto,

$$a = \frac{w}{\mathrm{N}(w)}u = v; \quad a = \frac{\overline{w}}{\mathrm{N}(w)}u = v$$
$$a = \frac{w}{\mathrm{N}(w)}u = \overline{v}; \quad a = \frac{\overline{w}}{\mathrm{N}(w)}u = \overline{v}.$$

o sea,

$$u = vw; \quad u = v\overline{w}, \quad u = \overline{v}w; \quad u = \overline{vw}$$

es decir,

$$t = \mathrm{Tr}(vw); \quad t = \mathrm{Tr}(v\overline{w})$$

Tercer Caso: Consideremos la configuración $(1, t, \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))$, tal que

$$\Delta = \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) - \frac{1}{4}t^2 = 0.$$

En este caso los vectores en $k \oplus k \oplus \mathbb{K}$ que escogemos son:

$$X = 1; \quad Y = y_1e_1 + y_2e_2 + a; \quad Z = e_2 + s$$

con,

$$y = y_1e_1 + y_2e_2, \quad s^2 = \mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v), \quad t = 2s.$$

Resolvamos el siguiente sistema, obtenido por simplificación del sistema original.

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}(a) & = & \mathrm{Tr}(v) \\ y_1 + s\,\mathrm{Tr}(a) & = & \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) \\ \mathrm{N}(y) + \mathrm{N}(a) & = & \mathrm{N}(v) \end{array}\right|$$

De las dos primeras ecuaciones y de $\Delta \notin \square$, tenemos que $Z \notin k$ y despejando obtenemos

$$y_1 = \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) - s\,\mathrm{Tr}(v)$$

luego

$$\mathrm{Tr}(a) = \mathrm{Tr}(v)$$
$$\mathrm{N}(a) = \mathrm{N}(v) - (\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) - s\,\mathrm{Tr}(v))\,y_2$$

Si $\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) \neq s\,\mathrm{Tr}(v)$, entonces $t \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \quad \vee \quad t \neq \mathrm{Tr}(vw)$, luego

$$e_t^{v,w} = q$$

Si $\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) = s\,\mathrm{Tr}(v)$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v))^2 &= (s\,\mathrm{Tr}(v))^2\\(\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v))^2 &= \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)\,(\mathrm{Tr}(v))^2\\\mathrm{Tr}(u(w)) &= \mathrm{Tr}(\dot{u}(v))\end{aligned}$$

- Si $w = rv$; $\quad v, r \in k^\times$, $\quad t = \mathrm{Tr}(vw)$,

$$e_t^{v,w} = q$$

- Si $w = rv \quad \vee \quad w = r\overline{v}$; $\quad v \in k{\times}k{-}k$, $\quad r \in k^\times \quad t = \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \quad \vee \quad t = \mathrm{Tr}(vw)$,

$$e_t^{v,w} = 0$$

- Si $w = rv \quad \vee \quad w = r\overline{v}$; $\quad v \in \mathbb{K} - k$, $\quad r \in k^\times \quad t = \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \quad \vee \quad t = \mathrm{Tr}(vw)$,

$$e_t^{v,w} = 2q$$

Proposición 46 *Sean* $v \in A^\times, w \in B^\times, \Delta = \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) - \frac{1}{4}t^2$. *Entonces el cardinal* $e_t^{v,w}$ *del conjunto solución del sistema está dado por:*

Para $\Delta \in \square^\times$,

Si $t = \mathrm{Tr}(vw) \quad \vee \quad t = \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ entonces $e_t^{v,w} = 1$.
Si $t \neq \mathrm{Tr}(vw) \quad \wedge \quad t \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ entonces $e_t^{v,w} = q + 1$.

Para $\Delta = 0$,

Si $t = 2vw \quad \wedge \quad v = \overline{v}$ entonces $e_t^{v,w} = q$.
Si $t \neq 2vw \quad \wedge \quad t \neq 2\overline{v}w$ entonces $e_t^{v,w} = q$.
Si $t = 2vw \quad \wedge \quad v \neq \overline{v}$ entonces $e_t^{v,w} = (1 + \varepsilon_A)\,q$.
Si $t = 2\overline{v}w \quad \wedge \quad v \neq \overline{v}$ entonces $e_t^{v,w} = (1 + \varepsilon_A)\,q$.

Para $\Delta \notin \square$,

Si $t = \mathrm{Tr}(vw) \quad \wedge \quad t = \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ entonces $e_t^{v,w} = 2q - 1$.
Si $t \neq \mathrm{Tr}(vw) \quad \wedge \quad t \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ entonces $e_t^{v,w} = q - 1$.

5.1.2 El caso en que E contiene un plano totalmente isótropo.

En este caso, tenemos la posibilidad de escoger $X, Z \in E_1$, de modo que estos vectores cubran todas las posibles Q-configuraciones.

En otras palabras, consideremos los vectores $X = e_1 + e_2$; $\quad Z = te_2 + e_3 + \mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)e_4$ y resolvamos con ellos el sistema.

$$\begin{array}{rcl|} B(X,Y) & = & \mathrm{Tr}\,(v)\,Q(X) \\ B(Y,Z) & = & \mathrm{Tr}(w)Q(Y) \\ Q(Y) & = & \mathrm{N}(v)Q(X) \\ Q(Z) & = & \mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)Q(X) \\ \hline \end{array}$$

reemplazando tenemos,

$$\begin{array}{rcl|} y_1+y_2 & = & \mathrm{Tr}(v) \\ ty_1+\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)y_3+y_4 & = & \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) \\ y_1y_2+y_3y_4+Q'(y) & = & \mathrm{N}(v) \\ \hline \end{array}$$

Despejando de las dos primeras ecuaciones y reemplazando en la tercera, obtenemos

$$\mathrm{N}(v)=y_1(\mathrm{Tr}(v)-y_1)+y_3(\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v)-\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)y_3-ty_1)+Q'(y')$$

Completando cuadrados

$$\frac{1}{4}\overset{2}{\mathrm{Tr}}(v)-\mathrm{N}(v)=(y_1-\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(v)-ty_3))^2+(\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)-\frac{1}{4}t^2)y_3^2+$$
$$+\,(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(v)t-\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v))y_3+Q'(y')$$

Si $\Delta=-\left(\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)-\frac{1}{4}t^2\right)\neq 0$, entonces

$$\frac{\mathrm{N}(v)}{4}\left[t^2-\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{Tr}(w)\cdot t+\overset{2}{\mathrm{Tr}}(w)\,\mathrm{N}(v)-4\,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)+\mathrm{N}(w)\,\overset{2}{\mathrm{Tr}}(v)\right]/(-\Delta)$$
$$=(y_1-\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(v)-ty_3))^2+\left(y_3+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(v)t-\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v))/(-\Delta)\right)^2\times$$
$$\times\,(-\Delta)+Q'(y'')$$

Definamos el polinomio

$$P_{v,w}(t)=t^2-\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{Tr}(w)\cdot t+(\mathrm{Tr}(w))^2\,\mathrm{N}(v)-4\,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)+\mathrm{N}(w)\,(\mathrm{Tr}(v))^2$$

Simplificando y reemplazando obtenemos

$$\frac{\mathrm{N}(v)}{4}P_{v,w}(t)=\left(\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)-\frac{1}{4}t^2\right)\left(y_1-\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(v)-ty_3)\right)^2+$$
$$+\left[\left(\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)-\frac{1}{4}t^2\right)y_3+\frac{1}{4}(\mathrm{Tr}(v)t-2\,\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v)\right]^2+Q'(y'')$$

donde los ceros o raíces de $P_{v,w}(t)$ en $\mathbb{K}$ son $\operatorname{Tr}(vw)$ y $\operatorname{Tr}(v\overline{w})$

Si $\Delta = -\left(\mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v) - \frac{1}{4}t^2\right) = 0$,

$$\frac{1}{4}\overset{2}{\operatorname{Tr}}(v) - \mathrm{N}(v) = \left(y_1 - \frac{1}{2}(\operatorname{Tr}(v) - ty_3)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(tv) - \operatorname{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v)\right)y_3 + Q'(y'')$$

Simplificando,

$$\left(\frac{1}{4}\overset{2}{\operatorname{Tr}}(v) - \mathrm{N}(v)\right) - \frac{1}{4}\left(2\operatorname{Tr}(tv) - 4\operatorname{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v)\right)y_3 = (y_1 - \frac{1}{2}(\operatorname{Tr}(v) - ty_3))^2 + Q'(y'')$$

$$(y_1 - \frac{1}{2}(\operatorname{Tr}(v) - ty_3))^2 + Q'(y'') = \frac{1}{4}\left(v - F(v)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(2\operatorname{Tr}(v)t - 4\operatorname{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v)\right)y_3$$

Observación: Notemos que tenemos una forma cuadrática igualada a una expresión lineal

$$Q''(y'') = a + by_3.$$

Nos interesa determinar cuando esta expresión lineal se transforma en una constante. Para ello tenemos el siguiente lema

Lema 47 *Sean $v \in A^\times, w \in B^\times, t \in k^\times$ tales que*

$$\operatorname{Tr}(v)t - 2\,\mathrm{N}(v)\operatorname{Tr}(w) = 0 \quad \wedge \quad \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) - \frac{1}{4}t^2 = 0$$

1. *Si $A = B = \mathbb{K}$, entonces $v = s\overline{w}$ o $v = sw$ con $s \in k$.*

2. *Si $A = B = k \times k$, entonces $v = s\overline{w}$ o $v = sw$ con $s \in k$.*

Demostración: Notemos que las ecuaciones del enunciado equivalen a

$$\operatorname{Tr}(w) = \operatorname{Tr}(\frac{t}{2v}) \quad \wedge \quad \mathrm{N}(w) = \mathrm{N}(\frac{t}{2v})$$

luegos ambos elementos pertenece a la misma álgebra cuadratica por lo tanto

$$w = \frac{t}{2v} = \frac{t}{2\,\mathrm{N}(v)}\overline{v} \quad \text{o} \quad w = \frac{t}{2\overline{v}} = \frac{t}{2\,\mathrm{N}(v)}v$$

□

Teorema 6 *Sean $v \in A^\times, w \in B^\times, \Delta = \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) - \frac{1}{4}t^2$, entonces el número $e_t^{v,w}$ de soluciones del sistema es:*

Para $\Delta \in \square^\times$:

Si $t = \mathrm{Tr}(vw) \quad \vee \quad t = \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ entonces $e_t^{v,w} = q^{2n-3} + \varepsilon_Q\left(q^{n-1} - q^{n-2}\right)$
Si $t \neq \mathrm{Tr}(vw) \quad \wedge \quad t \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ entonces $e_t^{v,w} = q^{2n-3} - \varepsilon_Q q^{n-2}$.

Para $\Delta = 0$:

Si $t = 2vw \quad \wedge \quad v = \overline{v}$ entonces $e_t^{v,w} = q^{2n-3}$.
Si $t \neq 2vw \quad \wedge \quad t \neq 2\overline{v}w$ entonces $e_t^{v,w} = q^{2n-3}$.
Si $t = 2vw \quad \wedge \quad v \neq \overline{v}$ entonces $e_t^{v,w} = q^{2n-3} + \varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}$.
Si $t = 2\overline{v}w \quad \wedge \quad v \neq \overline{v}$ entonces $e_t^{v,w} = q^{2n-3} + \varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}$.

Para $\Delta \notin \square$:

Si $t = \mathrm{Tr}(vw) \quad \wedge \quad t = \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ entonces $e_t^{v,w} = q^{2n-3} - \varepsilon_Q\left(q^{n-1} - q^{n-2}\right)$
Si $t \neq \mathrm{Tr}(vw) \quad \wedge \quad t \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ entonces $e_t^{v,w} = q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-2}$.

Observación: Notemos que la proposición 46, es un caso particular de este teorema.

5.2 Situaciones linealmente dependientes.

En la sección anterior hemos encontrado el números de soluciones del siguiente sistema:

Sean $v \in A^\times, w \in B^\times, x, z \in E_1$, fijos tales que $B(x,z) = t$, se da el sistema en $y \in E_1$

$$\left.\begin{array}{rcl} B(x,y) & = & \mathrm{Tr}(v)Q(x) \\ B(y,z) & = & \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v)Q(x) \\ Q(z) & = & \mathrm{N}(w)Q(y) \\ Q(y) & = & \mathrm{N}(v)Q(x) \end{array}\right| \tag{5.1}$$

Un problema que debemos analizar es cuándo el conjunto $\{x,z\}$ es linealmente dependiente, ya que el número de soluciones que nos interesa tiene que ver con el coeficiente de las homotecias en la expresión de la compuesta de operadores canónicos; otro problema es que algunas soluciones no son válidas, ya que provienen del hecho que $\{x,y\}$ o $\{y,z\}$ son linealmente dependientes

soluciones del sistema linealmente dependientes:

Proposición 48 *El sistema (5.1) tiene una solución del tipo $y = rx$ si y sólo si $(r = v \in k)$.*

Demostración:

$$\left.\begin{array}{rcl} B(x,rx) & = & \mathrm{Tr}(v)Q(x) \\ Q(rx) & = & \mathrm{N}(v)Q(x) \end{array}\right|$$

Así obtenemos,

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}(r) = 2r & = & \mathrm{Tr}(v) \\ \mathrm{N}(r) = r^2 & = & \mathrm{N}(v) \end{array}\right|$$

con lo cual,

$$r = v \in k.$$

□

Proposición 49 *El sistema (5.1) tiene una solución del tipo* $z = ry$ *si y sólo si* $(r = w \in k)$.

Demostración:

$$\left.\begin{array}{rcl} B(y,ry) & = & \mathrm{Tr}(w)Q(y) \\ Q(ry) & = & \mathrm{N}(w)Q(y) \end{array}\right|$$

Así obtenemos,

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}(r) = 2r & = & \mathrm{Tr}(w) \\ \mathrm{N}(r) = r^2 & = & \mathrm{N}(w) \end{array}\right|$$

con lo cual,

$$r = w \in k$$

□

Proposición 50 *El sistema (5.1) tiene una solución* $y = lx$, *con* $z = rx$ *si y sólo si* $(v = l \in k \quad \wedge \quad r = w \in k)$.

Demostración:

$$\left.\begin{array}{rcl} B(x,lx) & = & \mathrm{Tr}(v)Q(x) \\ B(ux,rx) & = & \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v)Q(x) \\ Q(lx) & = & \mathrm{N}(v)Q(x) \\ Q(rx) & = & \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)Q(x) \end{array}\right|$$

Así obtenemos,

$$\left.\begin{array}{rcl} 2l & = & \mathrm{Tr}(v) \\ 2lr & = & \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) \\ l^2 & = & \mathrm{N}(v) \\ r^2 & = & \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) \end{array}\right|$$

o bien,

$$\left.\begin{array}{rcl} 2l & = & \mathrm{Tr}(v) \\ l^2 & = & \mathrm{N}(v) \end{array}\right| \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{rcl} 2lr & = & \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) \\ r^2 & = & \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) \end{array}\right|$$

con lo cual,

$$v = l \in k \quad \wedge \quad r = w \in k$$

$\square$

Coeficientes de las homotecias.

Proposición 51 *Sea $z = rx \in E_1, r \in k^\times$. El sistema (5.1) es consistente si y sólo si*

$$r = vw \in k \quad \vee \quad r = \overline{v}w \in k.$$

Demostración: Supongamos que $z = rx \in E_1, r \in k^\times$, y el sistema tiene solución en E_1

$$\left.\begin{array}{rcl} B(x,y) & = & \mathrm{Tr}(v)Q(x) \\ B(y,rx) & = & \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v)Q(x) \\ Q(rx) & = & \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)Q(x) \end{array}\right|.$$

Así obtenemos,

$$\left.\begin{array}{rcl} r\,\mathrm{Tr}(v) & = & \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v) \\ r^2 & = & \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) \end{array}\right|.$$

luego,

$$\mathrm{Tr}(rv) = \mathrm{Tr}(\mathrm{N}(v)w) \quad \mathrm{N}(rv) = \mathrm{N}(\mathrm{N}(v)w).$$

Así,

$$rv = \mathrm{N}(v)w \quad \vee \quad rv = \mathrm{N}(v)\overline{w}.$$

con lo cual,

$$r = \overline{v}w \in k^\times \quad \vee \quad r = vw \in k^\times.$$

Además, si $r = \overline{v}w \in k^\times$, entonces definimos $z = rx$

$$\begin{array}{rcl|} B(x,y) & = & \mathrm{Tr}(v)Q(x) \\ \overline{v}wB(y,x) & = & \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{N}(v)Q(x) \\ (\overline{v}w)^2\,Q(x) & = & \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)Q(x) \\ \hline \end{array}$$

Simplificando, se nos reducimos a

$$\begin{array}{rcl|} B(x,y) & = & \mathrm{Tr}(v)Q(x) \\ \hline \end{array}$$

ecuación que siempre tiene soluciones. $\square$

Teorema 7 *Sean* $v \in A^\times, w \in B^\times, \Delta = \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) - \frac{1}{4}t^2$. *Escribamos*

$$M_v \circ M_w = \sum_{t \in k} c_t^{v,w} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \sum_{t \in k} d_t^{v,w} h_t.$$

entonces,

Para $\Delta \in \square^\times$:

Si $(v, w \in k) \quad \wedge \quad t = \mathrm{Tr}(vw)$ *entonces,*

$$c_t^{v,w} = q^{2n-3} + \varepsilon_Q \left(q^{n-1} - q^{n-2}\right) - 1.$$

Si $(v, w \notin k) \quad \wedge \quad (t = \mathrm{Tr}(vw) \quad \vee \quad t = \mathrm{Tr}(v\overline{w}))$ *entonces,*

$$c_t^{v,w} = q^{2n-3} + \varepsilon_Q \left(q^{n-1} - q^{n-2}\right).$$

Si $t \neq \mathrm{Tr}(vw) \quad \wedge \quad t \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ *entonces,*

$$c_t^{v,w} = q^{2n-3} - \varepsilon_Q q^{n-2}.$$

Para $\Delta = 0$:

Si $t = 2vw \quad \wedge \quad v, w \in k$ *entonces,*

$$c_t^{v,w} = q^{2n-3} - 2.$$

Si $t \neq 2vw \quad \wedge \quad t \neq 2\overline{v}w$ *entonces,*

$$c_t^{v,w} = q^{2n-3}.$$

Si $v \notin k \quad \wedge \quad (t = 2vw \quad \vee \quad t = 2\overline{v}w)$ *entonces,*

$$c_t^{v,w} = q^{2n-3} + \varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1}.$$

Para $\triangle \notin \square$:
Si $(v,w \in k) \quad \wedge \quad t = \mathrm{Tr}(vw) \quad \wedge \quad t = \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ *entonces,*

$$c_t^{v,w} = q^{2n-3} + \varepsilon_Q \left(q^{n-2} - q^{n-1}\right) - 1.$$

Si $(v,w \notin k) \quad \wedge \quad t = \mathrm{Tr}(vw) \quad \wedge \quad t = \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ *entonces*

$$c_t^{v,w} = q^{2n-3} + \varepsilon_Q \left(q^{n-2} - q^{n-1}\right).$$

Si $t \neq \mathrm{Tr}(vw) \quad \wedge \quad t \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})$ *entonces,*

$$c_t^{v,w} = q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-2}.$$

Ádemas, los únicos casos en que $d_t^{v,w}$ *no es nulo son:*

Si $t = vw \quad \wedge \quad v,w \in k$, *entonces,*

$$d_t^{v,w} = q^{2n-2} - 1.$$

Para $A = B$,
Si $\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(w) = 0 \quad \wedge \quad r^2 = \mathrm{N}(vw)$, *entonces,*

$$d_r^{v,w} = q^{2n-2} + \varepsilon_Q \varepsilon_A q^{n-1}.$$

Si $(w = sv \quad \wedge \quad w = s\overline{v}) \quad \wedge \quad s \in k^{\times}, \mathrm{Tr}(v) \neq 0, v \notin k$, *entonces,*

$$d_{s\,\mathrm{N}(v)}^{v,w} = q^{2n-2} + \varepsilon_Q \varepsilon_A q^{n-1}.$$

Observación: Necesitamos establecer algunas propiedades previas antes de poder entrar en el cálculo explícito de la compuesta

Proposición 52 *Sean* $s, r \in k^{\times}$, *tal que*
Si $r = s^2$, *entonces*

$$S_r = \sum_{t \in k} M_{(1,t,r)} + h_s + h_{-s}$$

$$S_r = \sum_{t \in k} \overline{M}_{(1,t,r)}$$

Si $r \notin \square$, *entonces*

$$S_r = \sum_{t \in k} M_{(1,t,r)}$$

$$S_r = \sum_{t \in k} \overline{M}_{(1,t,r)}$$

Demostración: Sean $s, r \in k^{\times}$, tales que

Si $r = s^2$, entonces

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{t\in k} M_{(1,t,r)} + h_s + h_{-s}\right) f(x) \\
&= \sum_{t\in k} M_{(1,t,r)} f(x) + h_s f(x) + h_{-s} f(x) \\
&= \sum_{t\in k} \left(\sum_{\substack{y\in E_1 \\ B(x,y)=tQ(x) \\ Q(y)=rQ(x) \\ \{x,y\} \text{ l.i.}}} f(y) \right) + f(sx) + f(-sx) \\
&= \sum_{t\in k} \left(\sum_{\substack{y\in V \\ B(x,y)=tQ(x) \\ Q(y)=rQ(x)}} f(y) \right) \\
&= \sum_{\substack{y\in V \\ Q(y)=rQ(x)}} f(y) = S_r f(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Notación: Sea $U_{1,r}$ el círculo de radio r en $k \times k$ y $U_{2,r}$ el círculo de radio r en $\mathbb{K}$, y $\varepsilon_Q \varepsilon_A$, el producto de los signos del álgebra A y de la forma cuadrática. Reescribiendo la proposición anterior con estas notaciones tenemos:

Proposición 53 *Sean $s, r \in k^{\times}$.*

Si $r = s^2$, entonces

$$S_r = \frac{1}{2}\left(\sum_{u\in U_{1,r}} M_u + \sum_{u\in U_{2,r}} M_u \right) + h_s + h_{-s}$$

Si $r \notin \square$, entonces

$$S_r = \frac{1}{2}\left(\sum_{u\in U_{1,r}} M_u + \sum_{u\in U_{2,r}} M_u \right)$$

Demostración: Sean $s, r \in k^{\times}$, tal que

Si $r = s^2$, entonces

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{u\in U_{1,r}} M_u + \sum_{u\in U_{2,r}} M_u\right) + h_s + h_{-s}\right] f(x) \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(M_u f(x) + \sum_{u\in U_{2,r}} M_u f(x)\right) + h_s f(x) + h_{-s} f(x)\right] \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{u\in U_{1,r}} M_{(1,\mathrm{Tr}(u),r)} f(x) + \sum_{u\in U_{2,r}} M_{(1,\mathrm{Tr}(u),r)} f(x)\right) + f(sx) + f(-sx)\right] \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{u\in U_{1,r}} \overline{M}_{(1,\mathrm{Tr}(u),r)} f(x) + \sum_{u\in U_{2,r}} \overline{M}_{(1,\mathrm{Tr}(u),r)} f(x)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(2\sum_{t\in k} \overline{M}_{(1,t,r)}\right) f(x) = S_r f(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 6

Composición de operadores canónicos

Seguiremos denotando en este capítulo al automorfismo de Frobenius por $^{-}$ ya que es más fácil en este caso y no hay peligros de confusión con el conjugado complejo.

Sean $v \in A^\times, w \in B^\times$; tenemos que la compuesta de los operadores de entrelazamiento asociados a v y w está expresada por:

$$M_v \circ M_w = \sum_{t \in k} c_t^{a,v} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \sum_{t \in k^\times} d_t^{v,w} h_t.$$

Recordemos que el discriminante Δ de la Q-terna o Q-configuración $(1, t, \mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v))$ es $t^2 - 4\,\mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)$, es decir,

$$\Delta(1, t, \mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)) = t^2 - 4\,\mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)$$

Primer Caso: Sean $v, w \in k, r^2 = \mathrm{N}(vw)$

Analicemos los sumandos de nuestra combinación lineal en este caso, de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, es decir,

$$\Delta(1, t, \mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)) = t^2 - 4\,\mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)$$

del teorema 7.

El discriminante se anula si y sólo si $t = \pm 2vw$.

Además como $v, w \in k$, tenemos

$$\mathrm{Tr}(vw) = 2wv = \mathrm{Tr}(v\overline{w}).$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \notin \square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v))} + \left(q^{2n-3} - 2\right) M_{(1,2wv,\mathrm{N}(wv))} +$$

$$q^{2n-3} M_{(1,-2vw,\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \in \square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v))} + \left(q^{2n-2} - 1\right) h_{wv}.$$

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v)} - (2+\varepsilon_Q q^{n-2})M_{(1,2wv,\mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v))} - \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,-2wv,\mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v))} - 2\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(w)\,\mathrm{N}(v))} + \left[h_{wv}\left(q^{2n-2}-1\right) - (h_{wv}+h_{-wv})\left(q^{2n-3}+\varepsilon_Q q^{n-2}\right)\right].$$

Así,

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)} - 2M_{wv} - \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u + \left[(q^{2n-2}-1)h_{wv} - \left(q^{2n-3}+\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_{wv}+h_{-wv})\right].$$

Usando la proposición 53, sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la fórmula y obtenemos

$$M_vM_w = -2M_{wv} + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) + q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(wv)} + \left(q^{2n-2}-1\right)h_{wv} - q^{2n-3}\left(h_{wv}+h_{-wv}\right).$$

Definición 11 *Dado $r\in k^\times$, entonces denotamos por $U_{1,r}$ al círculo de radio r en $k\times k$, y $U_{2,r}$ al círculo de radio r en $\mathbb{K}$ y definimos los operadores:*

$$D_r = \frac{1}{2}\left(\sum_{u\in U_{1,r}} M_u - \sum_{u\in U_{2,r}} M_u\right)$$

$$\mathring{S}_r = \frac{1}{2}\left(\sum_{u\in U_{1,r}} M_u + \sum_{u\in U_{2,r}} M_u\right).$$

Proposición 54 *Dado $r\in k^\times$, entonces*

$$\mathring{S}_r f(x) = \sum_{\substack{Q(y)=rQ(x)\\ \{x,y\}\ l.i.}} f(y).$$

Además

$$\mathring{S}_r = \begin{cases} S_r & Si\ r\notin\square \\ S_r - h_s - h_{-s} & Si\ r=s^2\in\square \end{cases}$$

Demostración: Basta tener presente la propiedad 53 □

Con estas notaciones, para $v,w\in k^\times$, tenemos

$$M_vM_w = -2M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2}D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)} + \left(q^{2n-2}-1\right)h_{wv}.$$

6.1 El caso del álgebra escindida $k \times k$.

Consideremos los vectores v, w en el álgebra $k \times k$.

Caso 1.1 Supongamos que $v, w \in (k \times k)^{\times}$, tales que,

$$\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(w) = 0, \quad r^2 = \mathrm{N}(vw).$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta = 0 \text{ si y sólo si } t = \pm 2v_1w_1.$$

Además tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(vw) &= 2v_1w_1,\\ \mathrm{Tr}(v\overline{w}) &= -2v_1w_1.\end{aligned}$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$\begin{aligned}M_vM_w = {} & (q^{n-1} + \varepsilon_Q)q^{n-2} \sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-1}\right) M_{(1,2v_1w_1,\mathrm{N}(vw))} + \\ & \left(q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-1}\right) M_{(1,-2v_1w_1,\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\in\square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + \\ & \left(q^{2n-2} + \varepsilon_Q q^{n-1}\right)(h_r + h_{-r}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_vM_w = {} & (q^{n-1} + \varepsilon_Q)q^{n-2} S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q(q^{n-1} - q^{n-2})M_{(1,2v_1w_1,\mathrm{N}(vw))} + \\ & \varepsilon_Q(q^{n-1} - q^{n-2})M_{(1,-2v_1w_1,\mathrm{N}(vw))} - 2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\in\square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + \\ & \left(q^{2n-2} + \varepsilon_Q q^{n-1} - q^{2n-3} - \varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r + h_{-r})\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}M_vM_w = {} & (q^{n-1} + \varepsilon_Q)q^{n-2} S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u + \\ & \left(q^{2n-2} + \varepsilon_Q q^{n-1} - q^{2n-3} - \varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r + h_{-r}).\end{aligned}$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2} S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_v M_w = \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) + q^{2n-3} S_{\mathrm{N}(vw)} + \left(q^{2n-2} + \varepsilon_Q q^{n-1} - q^{2n-3}\right)\left(h_r + h_{-r}\right).$$

O bien,

$$M_v M_w = \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) + \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)} + \left(q^{2n-2} + \varepsilon_Q q^{n-1}\right)\left(h_r + h_{-r}\right).$$

Caso 1.2 Supongamos que los vectores $v, w \in (k\times k)^{\times}$, son tales que,

$$w = s\overline{v},\quad \mathrm{Tr}(v)\neq 0,\quad v\notin k,\quad s\in k^{\times},\quad r = s\,\mathrm{N}(v)\in k^{\times}.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta = 0 \text{ si y sólo si } t = \pm 2s\,\mathrm{N}(v).$$

Además tenemos

$$\mathrm{Tr}(vw) = 2s\,\mathrm{N}(v),$$
$$\mathrm{Tr}(v\overline{w}) \neq \pm 2s\,\mathrm{N}(v).$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la Q-terna:

$$M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-1}\right) M_{(1,2s\,\mathrm{N}(v),\mathrm{N}(vw))} + q^{2n-3} M_{(1,-2s\,\mathrm{N}(v),\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-3} + \varepsilon_Q\left(q^{n-1} - q^{n-2}\right)\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{a\in k\\ t\neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})\\ \Delta\in\square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + (q^{2n-2} + \varepsilon_Q q^{n-1}) h_r.$$

$$
\begin{aligned}
M_v M_w = {} & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q(q^{n-2}-q^{n-1})M_{(1,2s\,\mathrm{N}(v),\mathrm{N}(vw))} - \\
& \varepsilon_Q q^{n-2} M_{(1,-2s\,\mathrm{N}(v),\mathrm{N}(vw))} + \varepsilon_Q\left(-2q^{n-2}+q^{n-1}\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} + \\
& \left(q^{2n-2}+\varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r - \left(q^{2n-3}+\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r}) - \\
& 2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{t\in k\\ t\neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_v M_w = {} & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q q^{n-1} M_{(1,2s\,\mathrm{N}(v),\mathrm{N}(vw))} + \\
& \varepsilon_Q q^{n-1} M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} - \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{l\in k^\times} M_{(\mathrm{N}(v)l,\mathrm{N}(w)l^{-1})} + \\
& \left(q^{2n-2}+\varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r - \left(q^{2n-3}+\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r}).
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
M_v M_w = {} & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw}+M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u\in U_1,\mathrm{N}(vw)} M_u + \\
& \left[\left(q^{2n-2}+\varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r - \left(q^{2n-3}+\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r})\right].
\end{aligned}
$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2} S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
M_v M_w = {} & \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw}+M_{v\overline{w}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) + \\
& q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(vw)} + \left[\left(q^{2n-2}+\varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r - q^{2n-3}(h_r+h_{-r})\right].
\end{aligned}
$$

O bien,

$$
\begin{aligned}
M_v M_w = {} & \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw}+M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(vw)} + \\
& \left(q^{2n-2}+\varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r.
\end{aligned}
$$

Caso 1.3 Supongamos que los vectores $v, w \in (k\times k)^\times$ son tales que,

$$w = sv, \quad \mathrm{Tr}(v)\neq 0, \quad v\notin k, \quad s\in k^\times.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7 que verifica

$$\Delta = 0 \text{ si y sólo si } t = \pm 2s\,\mathrm{N}(v).$$

Además tenemos

$$\mathrm{Tr}(vw) \neq \pm 2s\,\mathrm{N}(v),$$
$$\mathrm{Tr}(v\overline{w}) = 2s\,\mathrm{N}(v).$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$\begin{aligned}M_vM_w = {} & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ \triangle\notin\square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-3}+\varepsilon_Q q^{n-1}\right) M_{(1,2s\,\mathrm{N}(v),\mathrm{N}(vw))} + \\ & q^{2n-3}M_{(1,-2s\,\mathrm{N}(v),\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-3}+\varepsilon_Q\left(q^{n-1}-q^{n-2}\right)\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + \\ & q^{n-2}(q^{n-1}-\varepsilon_Q)\sum_{\substack{t\in k\\ t\neq \mathrm{Tr}(vw)\\ \triangle\in\square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + (q^{2n-2}+\varepsilon_Q q^{n-1})h_r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_vM_w = {} & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q(q^{n-2}-q^{n-1})M_{(1,2s\,\mathrm{N}(v),\mathrm{N}(vw))} - \\ & \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,-2s\,\mathrm{N}(v),\mathrm{N}(vw))} + \varepsilon_Q\left(-2q^{n-2}+q^{n-1}\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} - \\ & 2\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ t\neq \mathrm{Tr}(vw)\\ \triangle\in\square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-2}+\varepsilon_Q q^{n-1}\right)h_r - \\ & \left(q^{2n-3}+\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_vM_w = {} & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q q\left[^{n-1}M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} + M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))}\right] - \\ & \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U} M_{vwu} + \left[\left(q^{2n-2}+\varepsilon_Q q^{n-1}\right)h_r - \left(q^{2n-3}+\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r})\right].\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}M_vM_w = {} & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw}+M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u + \\ & \left[\left(q^{2n-2}+\varepsilon_Q q^{n-1}\right)h_r - \left(q^{2n-3}+\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r})\right].\end{aligned}$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$\begin{aligned}M_vM_w = {} & \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw}+M_{v\overline{w}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) + \\ & q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(vw)} + \left[\left(q^{2n-2}+\varepsilon_Q q^{n-1}\right)h_r - q^{2n-3}(h_r+h_{-r})\right].\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned}M_vM_w = &\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)} + \\ &\left(q^{2n-2} + \varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r.\end{aligned}$$

Caso 1.4 Supongamos que los vectores $v, w \in (k \times k)^\times$ son tales que,

$$v \in k, \quad w \notin k, \quad \mathrm{N}(vw) = r^2, \quad r \in k^\times.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta = 0 \text{ si y sólo si } t = \pm 2r.$$

Además tenemos

$$\mathrm{Tr}(v\overline{w}) = \mathrm{Tr}(vw) \neq \pm 2r.$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la Q−terna:

$$\begin{aligned}M_vM_w = &(q^{n-1} + \varepsilon_Q)q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + q^{2n-3}M_{(1,2r,\mathrm{N}(vw))} + q^{2n-3}M_{(1,-2r,\mathrm{N}(vw))} + \\ &(q^{n-2} + \varepsilon_Q)(q^{n-1} - \varepsilon_Q)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q)\sum_{\substack{t\in k\\ t\neq \mathrm{Tr}(vw)\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_vM_w = &(q^{n-1} + \varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,2r,\mathrm{N}(vw))} - \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,-2r,\mathrm{N}(vw))} + \\ &\left(-2\varepsilon_Q q^{n-2} + \varepsilon_Q q^{n-1} - 1\right)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} - 2\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ t\neq \mathrm{Tr}(vw)\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} - \\ &\left(q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-2}\right)\left(h_r + h_{-r}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_vM_w = &(q^{n-1} + \varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \left(\varepsilon_Q q^{n-1} - 1\right)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} - \\ &\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \left(q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-2}\right)\left(h_r + h_{-r}\right).\end{aligned}$$

Así,

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \left(\varepsilon_Q q^{n-1}-1\right)M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \left(q^{2n-3}+\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r}).$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_vM_w = \left(\varepsilon_Q q^{n-1}-1\right)M_{vw} + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) + + q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(vw)} - q^{2n-3}(h_r+h_{-r}).$$

O bien,

$$M_vM_w = \left(\varepsilon_Q q^{n-1}-1\right)M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2}D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)}.$$

Caso 1.5 Supongamos que los vectores $v, w \in (k\times k)^\times$ son tales que,

$$v\in k,\quad w\notin k,\quad \mathrm{N}(vw)\notin \square.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante $\triangle$ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\triangle \neq 0.$$

Además tenemos

$$\mathrm{Tr}(vw) = \mathrm{Tr}(v\overline{w})$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la Q−terna:

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ \triangle\notin\square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + (q^{n-2}+\varepsilon_Q)(q^{n-1}-\varepsilon_Q)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}(q^{n-1}-\varepsilon_Q)\sum_{\substack{t\in k\\ t\neq \mathrm{Tr}(vw)\\ \triangle\in\square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))}.$$

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \left(-2\varepsilon_Q q^{n-2}+\varepsilon_Q q^{n-1}-1\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} - 2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{t\in k\\ t\neq \mathrm{Tr}(vw)\\ \triangle\in\square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))}.$$

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \left(\varepsilon_Q q^{n-1}-1\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw)s)} - \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u.$$

Así,

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \left(\varepsilon_Q q^{n-1}-1\right) M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u.$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos :

$$M_vM_w = q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(vw)} + \left(\varepsilon_Q q^{n-1}-1\right) M_{vw} + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right)$$

O bien,

$$M_vM_w = q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)} + \left(\varepsilon_Q q^{n-1}-1\right) M_{vw} - \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)}.$$

Caso 1.6 Supongamos que los vectores $v, w \in (k\times k)^{\times}$ son tales que,

$$v\notin k,\quad w\notin k,\quad \mathrm{N}(vw)\notin\square.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante $\triangle$ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\triangle\neq 0.$$

además tenemos

$$\mathrm{Tr}(vw)\neq \mathrm{Tr}(v\overline{w}).$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}(q^{n-1}-\varepsilon_Q)\sum_{\substack{t\in k\\ t\neq \mathrm{Tr}(vw)\\ t\neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))}$$
$$q^{n-2}\left(q^{n-1}+\varepsilon_Q\left(q-1\right)\right)M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))}+$$
$$q^{n-2}\left(q^{n-1}+\varepsilon_Q\left(q-1\right)\right)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))}.$$

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)}+\varepsilon_Q\left(-2q^{n-2}+q^{n-1}\right)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))}+$$
$$\varepsilon_Q\left(-2q^{n-2}+q^{n-1}\right)M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))}-2\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ t\neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})\\ t\neq \mathrm{Tr}(vw)\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))}.$$

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)}+\varepsilon_Q q^{n-1}M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))}+$$
$$\varepsilon_Q q^{n-1}M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))}-\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u.$$

Así,

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)}+\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw}+M_{v\overline{w}}\right)-\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u.$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_vM_w = q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(vw)}+\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw}+M_{v\overline{w}}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u-\sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right)$$

O bien,

$$M_vM_w = q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)}+\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw}+M_{v\overline{w}}\right)-\varepsilon_Q q^{n-2}D_{\mathrm{N}(vw)}.$$

Caso 1.7 Supongamos que los vectores $v,w\in(k\times k)^\times$, son tales que,

$$\mathrm{N}(vw)=r^2\in\square,\quad v\neq sw,\quad v\neq s\overline{w},\quad s\in k^\times.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta = 0 \text{ si y sólo si } a = \pm 2r.$$

Además tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(vw) = \pm 2r &\Longleftrightarrow v = s\overline{w}, \ \text{ con } s \in k^{\times}, \\ \mathrm{Tr}(v\overline{w}) = \pm 2r &\Longleftrightarrow v = sw, \ \text{ con } s \in k^{\times} \end{aligned}$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la Q−terna:

$$\begin{aligned} M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \notin \square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} + {} & q^{2n-3} M_{(1,2r,\mathrm{N}(vw))} + \\ & q^{2n-3} M_{(1,-2r,\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-3} + \varepsilon_Q \left(q^{n-1} - q^{n-2}\right)\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + \\ & \left(q^{2n-3} + \varepsilon_Q \left(q^{n-1} - q^{n-2}\right)\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} + \\ & q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{t \in k \\ t \neq \mathrm{Tr}(vw) \\ t \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \\ \Delta \in \square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_v M_w = {} & (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q \left(-2q^{n-2} + q^{n-1}\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + \\ & \varepsilon_Q \left(-2q^{n-2} + q^{n-1}\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} - q^{n-2} M_{(1,2r,\mathrm{N}(vw))} - q^{n-2} M_{(1,-2r,\mathrm{N}(vw))} - \\ & 2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ t \neq \mathrm{Tr}(vw) \\ t \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \\ \Delta \in \square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(vw))} - (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \left(h_r + h_{-r}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_v M_w = {} & (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q q^{n-1} M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + \varepsilon_Q q^{n-1} M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} - \\ & \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u \in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u - (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \left(h_r + h_{-r}\right). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} M_v M_w = {} & (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q q \left({}^{n-1} M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u \in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \\ & (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \left(h_r + h_{-r}\right). \end{aligned}$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2} S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_v M_w = \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) +$$
$$q^{2n-3} S_{\mathrm{N}(vw)} - q^{2n-3}\left(h_r + h_{-r}\right)$$

O bien,

$$M_v M_w = \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)}$$

6.2 El caso del álgebra no escindida $\mathbb{K}$.

Consideremos ahora los vectores v, w en el álgebra $\mathbb{K}$.
Caso 2.1 Supongamos que los vectores $v, w \in \mathbb{K}^\times$, son tales que,

$$\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(w) = 0, \quad \mathrm{N}(vw) = r^2 \quad t \in k^\times.$$

Así tenemos que $v = tw$. Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta = 0 \text{ si y sólo si } a = \pm 2t\,\mathrm{N}(w).$$

Además tenemos,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(vw\right) &= tw^2 + t\overline{w}^2 = t\left(w+\overline{w}\right)^2 - 2tw\overline{w} = -2t\,\mathrm{N}(w),\\ \mathrm{Tr}\left(v\overline{w}\right) &= tw\overline{w} + t\overline{w}w = 2t\,\mathrm{N}(w).\end{aligned}$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la Q–terna:

$$\begin{aligned}M_v M_w = {} & (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \sum_{\substack{a\in k\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-3} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right) M_{(1,-2t\,\mathrm{N}(w),\mathrm{N}(vw))} + \\ & \left(q^{2n-3} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right) M_{(1,2t\,\mathrm{N}(w),\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{a\in k\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + \\ & \left(q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right)\left(h_r + h_{-r}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_v M_w = {} & (q^{n-1} - \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q (q^{n-1} - q^{n-2}) M_{(1,-2t\,\mathrm{N}(w),\mathrm{N}(vw))} - \\ & \varepsilon_Q (q^{n-1} - q^{n-2}) M_{(1,2t\,\mathrm{N}(w),\mathrm{N}(vw))} + 2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{a\in k\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + \\ & \left(q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1} - q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-2}\right)\left(h_r + h_{-r}\right).\end{aligned}$$

Así,

$$M_vM_w = (q^{n-1} - \varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) + \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u + \left(q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1} - q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r + h_{-r}).$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_vM_w = -\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) + q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(vw)} + \left(q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1} - q^{2n-3}\right)(h_r + h_{-r}).$$

O bien,

$$M_vM_w = -\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2}D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)} + \left(q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right)(h_r + h_{-r}).$$

Caso 2.2 Supongamos que los vectores $v, w \in \mathbb{K}^\times$, son tales que,

$$v = tw, \quad \mathrm{Tr}(w) \neq 0, \quad t \in k.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta = 0 \text{ si y sólo si } a = \pm 2t\,\mathrm{N}(w).$$

Además tenemos,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(vw) &\neq \pm 2t\,\mathrm{N}(w),\\ \mathrm{Tr}(v\overline{w}) &= tw\overline{w} + t\overline{w}w = 2t\,\mathrm{N}(w).\end{aligned}$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$M_vM_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q)q^{n-2} \sum_{\substack{a\in k\\ a\neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-3} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right) M_{(1,-2t\,\mathrm{N}(w),\mathrm{N}(vw))} + q^{2n-3}M_{(1,2t\,\mathrm{N}(w),\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}\left[q^{n-1} - \varepsilon_Q q + \varepsilon_Q\right] M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{a\in k\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r.$$

$$M_vM_w = (q^{n-1} - \varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q \left(2q^{n-2} - q^{n-1}\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} - \\ \varepsilon_Q(q^{n-1} + q^{n-2})M_{(1,2t\,\mathrm{N}(w),\mathrm{N}(vw))} + 2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{a\in k\\ a\neq \mathrm{Tr}(v\overline{w})\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + \\ \left[\left(q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r - \left(q^{2n-3} - \varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r + h_{-r})\right].$$

$$M_vM_w = (q^{n-1} - \varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q q^{n-1}M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} - \varepsilon_Q q^{n-1}M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} + \\ \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u + \left[\left(q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r - \left(q^{2n-3} - \varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r + h_{-r})\right].$$

Así,

$$M_vM_w = (q^{n-1} - \varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) + \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u + \\ \left[\left(q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r - \left(q^{2n-3} - \varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r + h_{-r})\right].$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_vM_w = -\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) + \\ q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(vw)} + \left[\left(q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r - q^{2n-3}(h_r + h_{-r})\right].$$

O bien,

$$M_vM_w = -\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2}D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)} + \\ \left(q^{2n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_r.$$

Caso 2.3 Supongamos que los vectores $v, w \in \mathbb{K}^\times$, son tales que,

$$v = t\overline{w}, \quad \mathrm{Tr}(w) \neq 0, \quad t \in k.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta = 0 \text{ si y sólo si } a = \pm 2t\,\mathrm{N}(w).$$

Además tenemos,

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(vw) &= tw\overline{w} + t\overline{w}w = 2t\,\mathrm{N}(w),\\ \operatorname{Tr}(v\overline{w}) &\neq \pm 2t\,\mathrm{N}(w).\end{aligned}$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$\begin{aligned}M_vM_w = {}& (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}\sum_{\substack{a\in k\\ a\neq \operatorname{Tr}(v\overline{w})\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-3}-\varepsilon_Q q^{n-1}\right) M_{(1,2t\,\mathrm{N}(w),\mathrm{N}(vw))} +\\ & q^{2n-3}M_{(1,-2t\,\mathrm{N}(w),\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}\left[q^{n-1}-\varepsilon_Q q+\varepsilon_Q\right] M_{(1,\operatorname{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} +\\ & q^{n-2}(q^{n-1}-\varepsilon_Q)\sum_{\substack{a\in k\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + \left(q^{2n-2}-\varepsilon_Q q^{n-1}\right)h_r.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_vM_w = {}& (q^{n-1}-\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q q^{n-2}\,(2-q)\,M_{(1,\operatorname{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} +\\ & \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,\operatorname{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + \varepsilon_Q\left(q^{n-2}-q^{n-1}\right)M_{(1,2t\,\mathrm{N}(w),\mathrm{N}(v))} +\\ & 2\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{\substack{a\in k\\ a\neq \operatorname{Tr}(v\overline{w})\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} +\\ & \left[\left(q^{2n-2}-\varepsilon_Q q^{n-1}\right)h_r - \left(q^{2n-3}-\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r})\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_vM_w = {}& (q^{n-1}-\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q q^{n-1}M_{(1,\operatorname{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} - \varepsilon_Q q^{n-1}M_{(1,\operatorname{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} +\\ & \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U} M_{vwu} + \left[\left(q^{2n-2}-\varepsilon_Q q^{n-1}\right)h_r - \left(q^{2n-3}-\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r})\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_vM_w = {}& (q^{n-1}-\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{v\overline{w}}+M_{vw}\right) + \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u +\\ & \left[\left(q^{2n-2}-\varepsilon_Q q^{n-1}\right)h_r - \left(q^{2n-3}-\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r})\right].\end{aligned}$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$\begin{aligned}M_vM_w = {}& -\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{v\overline{w}}+M_{vw}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) +\\ & q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(vw)} + \left[\left(q^{2n-2}-\varepsilon_Q q^{n-1}\right)h_r - q^{2n-3}(h_r+h_{-r})\right].\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned}M_vM_w = {}& -\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{v\overline{w}}+M_{vw}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2}D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)} +\\ & \left(q^{2n-2}-\varepsilon_Q q^{n-1}\right)h_r.\end{aligned}$$

Caso 2.4 Supongamos que los vectores $v, w \in \mathbb{K}^\times$, son tales que,

$$v \in k, \quad w \notin k, \quad \mathrm{N}(w) \in \square, \quad \mathrm{N}(vw) = r^2.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante $\triangle$ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\triangle = 0 \text{ si y sólo si } a = \pm 2r.$$

Además tenemos,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(vw) &\neq \pm 2r,\\ \mathrm{Tr}(vw) &= \mathrm{Tr}(v\overline{w}).\end{aligned}$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$\begin{aligned}M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2} \sum_{\substack{a\in k\\ a\neq \mathrm{Tr}(vw)\\ \triangle\notin\square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + q^{2n-3}M_{(1,2r,\mathrm{N}(vw))} +\\ q^{2n-3}M_{(1,-2r,\mathrm{N}(vw))} + \left[q^{2n-3}+\varepsilon_Q q^{n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1} - 1\right] M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} +\\ q^{n-2}(q^{n-1}-\varepsilon_Q) \sum_{\substack{a\in k\\ \triangle\in\square^\times}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_vM_w = (q^{n-1}-\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,2r,\mathrm{N}(vw))} + \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,-2r,\mathrm{N}(vw))} -\\ \left(\varepsilon_Q q^{n-1} + 1 - 2\varepsilon_Q q^{n-2}\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + 2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{a\in k\\ \triangle\in\square^\times}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} -\\ \left(q^{2n-3} - \varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r + h_{-r}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_vM_w = (q^{n-1}-\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \left(\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} +\\ \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \left(q^{2n-3}-\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r}).\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}M_vM_w = (q^{n-1}-\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \left(\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right) M_{vw} + \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u -\\ \left(q^{2n-3}-\varepsilon_Q q^{n-2}\right)(h_r+h_{-r}).\end{aligned}$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2} S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_v M_w = -\left(\varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) M_{vw} + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) +$$
$$q^{2n-3} S_{\mathrm{N}(vw)} - q^{2n-3}\left(h_r + h_{-r}\right).$$

O bien,

$$M_v M_w = -\left(\varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3} \mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)}.$$

Caso 2.5 Supongamos que los vectores $u, w \in \mathbb{K}^\times$, son tales que,

$$v \in k, \quad w \notin k, \quad \mathrm{N}(w) \notin \square.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta \neq 0.$$

Además tenemos,

$$\mathrm{Tr}(vw) = v\,\mathrm{Tr}(w) = \mathrm{Tr}(v\overline{w}).$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \sum_{\substack{a\in k\\ a\neq \mathrm{Tr}(vw)\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{a\in k\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} +$$
$$\left[q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1} - 1\right] M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))}.$$

$$M_v M_w = (q^{n-1} - \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(vw)} - \left(\varepsilon_Q q^{n-1} + 1 - 2\varepsilon_Q q^{n-2}\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} +$$
$$2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{a\in k\\ a\neq \mathrm{Tr}(vw)\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))}.$$

Así,

$$M_v M_w = (q^{n-1} - \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(vw)} - \left(\varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) M_{vw} + \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u.$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2} S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_v M_w = q^{2n-3} S_{\mathrm{N}(vw)} - \left(\varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) M_{vw} + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2} \left(\sum_{u \in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u \in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u \right).$$

O bien,

$$M_v M_w = q^{2n-3} \overset{o}{S}_{\mathrm{N}(vw)} - \left(\varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)}.$$

Caso 2.6 Supongamos que los vectores $v, w \in \mathbb{K}^{\times}$, son tales que,

$$v, w \notin k, \quad \mathrm{N}(vw) \notin \square.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante $\triangle$ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\triangle \neq 0.$$

Además tenemos,

$$\mathrm{Tr}(vw) \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w}).$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la Q−terna:

$$\begin{aligned} M_v M_w = {} & (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \sum_{\substack{a \in k \\ a \neq \mathrm{Tr}(vw) \\ a \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \\ \triangle \notin \square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{a \in k \\ \triangle \in \square^{\times}}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + \\ & \left[q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right] M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + \\ & \left[q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right] M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_v M_w = {} & (q^{n-1} - \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q \left(2q^{n-2} - q^{n-1}\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + \\ & \varepsilon_Q \left(2q^{n-2} - q^{n-1}\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} + 2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{a \in k \\ a \neq \mathrm{Tr}(vw) \\ a \neq \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \\ \triangle \notin \square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))}. \end{aligned}$$

Así,

$$M_v M_w = (q^{n-1} - \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q q^{n-1} \left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) + \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u \in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u.$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2} S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_v M_w = q^{2n-3} S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right).$$

O bien,

$$M_v M_w = q^{2n-3} \overset{\circ}{S}_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)}.$$

Caso 2.7 Supongamos que los vectores $v, w \in \mathbb{K}^\times$, son tales que,

$$v, w \notin k, \quad \mathrm{N}(vw) \in \square, \quad \mathrm{N}(w) = r^2, \quad (v \neq tw, \quad v \neq t\overline{w}).$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante $\triangle$ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\triangle = 0 \text{ si y sólo si } a = \pm 2r.$$

Además tenemos,

$$(\mathrm{Tr}(vw) = \pm 2r) \iff (\text{existe } t \in k, v = t\overline{w}),$$
$$(\mathrm{Tr}(v\overline{w}) = \pm 2r) \iff (\text{existe } t \in k, v = tw).$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \sum_{\substack{a\in k \\ a\neq \mathrm{Tr}(vw) \\ a\neq \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \\ \triangle\notin\square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{a\in k \\ \triangle\in\square^\times}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} +$$
$$q^{2n-3} M_{(1,-2r,\mathrm{N}(vw))} + \left[q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right] M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} +$$
$$q^{2n-3} M_{(1,2r,\mathrm{N}(vw))} + \left[q^{2n-3} + \varepsilon_Q q^{n-2} - \varepsilon_Q q^{n-1}\right] M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))}.$$

$$M_v M_w = (q^{n-1} - \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(vw)} + \varepsilon_Q q^{n-2} M_{(1,2r,\mathrm{N}(vw))} + \varepsilon_Q q^{n-2} M_{(1,-2r,\mathrm{N}(vw))} +$$
$$\varepsilon_Q\left(2q^{n-2} - q^{n-1}\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} + \varepsilon_Q\left(2q^{n-2} - q^{n-1}\right) M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} +$$
$$2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{a\in k \\ a\neq \mathrm{Tr}(vw) \\ a\neq \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \\ \triangle\notin\square}} M_{(1,a,\mathrm{N}(vw))} - (q^{n-1} - \varepsilon_Q) q^{n-2}\left(h_r + h_{-r}\right).$$

$$.M_vM_w = (q^{n-1}-\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q q^{n-1}M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(vw))} - \varepsilon_Q q^{n-1}M_{(1,\mathrm{Tr}(v\overline{w}),\mathrm{N}(vw))} + \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - (q^{n-1}-\varepsilon_Q)q^{n-2}\left(h_r+h_{-r}\right).$$

Así,

$$M_vM_w = (q^{n-1}-\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(vw)} - \varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw}+M_{v\overline{w}}\right) + \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - (q^{2n-3}-\varepsilon_Q q^{n-2})\left(h_r+h_{-r}\right).$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_vM_w = -\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw}+M_{v\overline{w}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) + + q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(vw)} - q^{2n-3}\left(h_r+h_{-r}\right).$$

O bien,

$$M_vM_w = -\varepsilon_Q q^{n-1}\left(M_{vw}+M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2}D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)}.$$

6.3 El caso mixto.

Si los vectores están en distintas álgebras cuadraticas.
Caso 3.1 Supongamos que $v\in(k\times k)^{\times}, w\in\mathbb{K}^{\times}$, son tales que,

$$\mathrm{Tr}(v)=\mathrm{Tr}(w)=0.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante $\triangle$ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\triangle\neq 0.$$

Además tenemos,

$$\mathrm{Tr}(vw)\notin k \quad\wedge\quad \mathrm{Tr}(v\overline{w})\notin k.$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ \triangle\notin\square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + q^{n-2}(q^{n-1}-\varepsilon_Q)\sum_{\substack{t\in k\\ \triangle\in\square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))}$$

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - 2\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))}$$

$$M_vM_w = (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_1} M_{vwu}$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_vM_w = q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right)$$

O bien,

$$M_vM_w = q^{2n-3}\overset{\circ}{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - \varepsilon_Q q^{n-2}D_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)}.$$

Caso 3.2 Supongamos que $v\in(k\times k)^\times, w\in\mathbb{K}^\times$, son tales que,

$$v\in k,\quad w\notin k,\quad \mathrm{N}(vw)=r^2,\quad vw\in\mathbb{K}.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta = 0 \text{ si y sólo si } t=\pm 2r.$$

Además tenemos

$$\mathrm{Tr}(v\overline{w}) = \mathrm{Tr}(vw) \neq \pm 2r$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$\begin{aligned}M_vM_w = {}& (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ t\neq\mathrm{Tr}(vw)\\ \Delta\notin\square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)))} + q^{2n-3}M_{(1,2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \\ & q^{2n-3}M_{(1,-2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + (q^{n-2}-\varepsilon_Q)(q^{n-1}+\varepsilon_Q)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \\ & q^{n-2}(q^{n-1}-\varepsilon_Q)\sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\in\square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_vM_w = {} & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - \\
& \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,-2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - \varepsilon_Q(q^{n-1}+\varepsilon_Q)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - \\
& 2\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\in\square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}\left(h_r+h_{-r}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_vM_w = {} & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - \\
& \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,-2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - (\varepsilon_Q q^{n-1}+1)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - \\
& 2\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\in\square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}\left(h_r+h_{-r}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_vM_w = {} & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - (\varepsilon_Q q^{n-1}+1)M_{vw} - \\
& \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u - (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}\left(h_r+h_{-r}\right)
\end{aligned}
$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
M_vM_w = {} & (\varepsilon_Q q^{n-1}+1)M_{vw} + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right) + \\
& + q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - q^{2n-3}\left(h_r+h_{-r}\right)
\end{aligned}
$$

O bien,

$$
M_vM_w = (\varepsilon_Q q^{n-1}+1)M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2}D_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} + q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)}
$$

Caso 3.3 Supongamos que $v\in(k\times k)^{\times}, w\in\mathbb{K}^{\times}$, son tales que,

$$
v\notin k,\quad w\in k,\quad \mathrm{N}(vw)=r^2,\quad vw\in k\times k.
$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$
\Delta = 0 \text{ si y sólo si } t=\pm 2r.
$$

Además tenemos,

$$
\mathrm{Tr}(v\bar{w}) = \mathrm{Tr}(vw) \neq \pm 2r.
$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$
\begin{aligned}
M_vM_w = & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\notin\Box}} M_{1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + q^{2n-3}M_{(1,2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \\
& q^{2n-3}M_{(1,-2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + (q^{n-2}+\varepsilon_Q)(q^{n-1}-\varepsilon_Q)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \\
& q^{n-2}(q^{n-1}-\varepsilon_Q)\sum_{\substack{t\in k\\ t\neq\mathrm{Tr}(vw)\\ \Delta\in\Box^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_vM_w = & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - \\
& \varepsilon_Q q^{n-2}M_{(1,-2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \varepsilon_Q(q^{n-1}-\varepsilon_Q)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - \\
& 2\varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{\substack{t\in k\\ \Delta\in\Box^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - (q^{n-1}+1)q^{n-2}\left(h_r+h_{-r}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_vM_w = & (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} + (\varepsilon_Q q^{n-1}-1)M_{vw} - \\
& \varepsilon_Q q^{n-2}\sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u - (q^{n-1}+\varepsilon_Q)q^{n-2}\left(h_r+h_{-r}\right).
\end{aligned}
$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2}S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos

$$
\begin{aligned}
M_vM_w = & q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - q^{2n-3}\left(h_r+h_{-r}\right) + (\varepsilon_Q q^{n-1}-1)M_{vw} + \\
& \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2}\left(\sum_{u\in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u\in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u\right).
\end{aligned}
$$

O bien

$$M_vM_w = q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} + (\varepsilon_Q q^{n-1}-1)M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2}D_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)}.$$

Caso 3.4 Supongamos que $v\in(k\times k)^\times, w\in\mathbb{K}^\times$, son tales que,

$$v\in k,\quad w\notin k,\quad \mathrm{N}(vw)\notin\Box,\quad vw\in\mathbb{K}.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta\neq 0.$$

Además tenemos,

$$\mathrm{Tr}(vw) = \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \in k.$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$\begin{aligned} M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} & \sum_{\substack{t \in k \\ t \neq \mathrm{Tr}(vw) \\ \Delta \notin \square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \\ & q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \in \square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \\ & (q^{n-2} - \varepsilon_Q)(q^{n-1} + \varepsilon_Q) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \notin \square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - \varepsilon_Q (q^{n-1} + \varepsilon_Q) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \\ q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \in \square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - (\varepsilon_Q q^{n-1} + 1) M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - \\ 2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \in \square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))}. \end{aligned}$$

$$M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - (\varepsilon_Q q^{n-1} + 1) M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u \in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u.$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2} S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$\begin{aligned} M_v M_w = q^{2n-3} S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - (\varepsilon_Q q^{n-1} + 1) M_{vw} + \\ \frac{1}{2} \varepsilon_Q q^{n-2} \left(\sum_{u \in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u \in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u \right). \end{aligned}$$

O bien,

$$M_v M_w = q^{2n-3} \mathring{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - (\varepsilon_Q q^{n-1} + 1) M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)}.$$

Caso 3.5 Supongamos que $v \in (k \times k)^{\times}, w \in \mathbb{K}^{\times}$, son tales que,

$$v \notin k, \quad w \in k, \quad \mathrm{N}(vw) \notin \square, \quad vw \in k \times k.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta \neq 0.$$

Además tenemos,

$$\mathrm{Tr}(vw) = \mathrm{Tr}(v\overline{w}).$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$M_vM_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q)q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \notin \square}} M_{1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{t \in k \\ t \neq w \\ \Delta \in \square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} +$$
$$.(q^{n-2} + \varepsilon_Q)(q^{n-1} - \varepsilon_Q)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))}.$$

$$M_vM_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q)q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \notin \square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \varepsilon_Q(q^{n-1} - \varepsilon_Q)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} +$$
$$q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \in \square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))}.$$

$$M_vM_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} + (\varepsilon_Q q^{n-1} - 1)M_{(1,\mathrm{Tr}(vw),\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} -$$
$$2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \in \square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(ww))}.$$

$$M_vM_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q)q^{n-2}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} + (\varepsilon_Q q^{n-1} - 1)M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u \in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u.$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2} S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_vM_w = (\varepsilon_Q q^{n-1} - 1)M_{vw} + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2} \left(\sum_{u \in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u \in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u \right) +$$
$$q^{2n-3}S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)}.$$

O bien,

$$M_v M_w = q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} + (\varepsilon_Q q^{n-1} - 1)M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)}.$$

Caso 3.6 Supongamos que $v \in (k \times k)^{\times}, w \in \mathbb{K}^{\times}$, son tales que,

$$v \notin k, \quad w \notin k, \quad \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) \notin \square.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante $\triangle$ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\triangle \neq 0.$$

Además tenemos,

$$\mathrm{Tr}(vw) \notin k, \quad \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \notin k.$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la $Q-$terna:

$$\begin{aligned} M_v M_w &= (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ \triangle \notin \square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{t \in k \\ \triangle \in \square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} \\ &= (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - 2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ \triangle \in \square^{\times}}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} \\ M_v M_w &= (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u \in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u \end{aligned}$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2} S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_v M_w = q^{2n-3} S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} + \frac{1}{2}\varepsilon_Q q^{n-2} \left(\sum_{u \in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u \in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u \right).$$

O bien,

$$M_v M_w = q^{2n-3}\mathring{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)}.$$

Caso 3.7 Supongamos que $v \in (k \times k)^{\times}, w \in K^{\times}$, son tales que,

$$v \notin k, \quad w \notin k, \quad \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) = r^2 \in \square.$$

Analicemos los sumandos en este caso de acuerdo al discriminante Δ de la Q-terna, dado en el teorema 7, que verifica

$$\Delta = 0 \text{ si y sólo si } a = \pm 2r.$$

Además tenemos,

$$\mathrm{Tr}(vw) \notin k, \mathrm{Tr}(v\overline{w}) \notin k.$$

Remplazando en la compuesta los coeficientes de cada sumando y agrupando de acuerdo al discriminante de la Q−terna:

$$M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \notin \square}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + q^{2n-3} M_{(1,2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} +$$
$$q^{2n-3} M_{(1,-2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + q^{n-2}(q^{n-1} - \varepsilon_Q) \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \in \square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))}.$$

$$M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - \varepsilon_Q q^{n-2} \left[M_{(1,2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + M_{(1,-2r,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} \right] -$$
$$2\varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{\substack{t \in k \\ \Delta \in \square^\times}} M_{(1,t,\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} - (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \left(h_r + h_{-r} \right).$$

$$M_v M_w = (q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - \varepsilon_Q q^{n-2} \sum_{u \in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u -$$
$$(q^{n-1} + \varepsilon_Q) q^{n-2} \left(h_r + h_{-r} \right).$$

Usando la proposición 53 sustituimos $\varepsilon_Q q^{n-2} S_{\mathrm{N}(wv)}$ para homogeneizar la formula y obtenemos:

$$M_v M_w = q^{2n-3} S_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w))} + \frac{1}{2} \varepsilon_Q q^{n-2} \left(\sum_{u \in U_{2,\mathrm{N}(vw)}} M_u - \sum_{u \in U_{1,\mathrm{N}(vw)}} M_u \right) -$$
$$q^{2n-3} \left(h_r + h_{-r} \right)$$

O bien,

$$M_v M_w = q^{2n-3} \mathring{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)}$$

Teorema 8 *Sean A, B álgebras cuadráticas sobre k y $v \in A^{\times}, w \in B^{\times}$. Entonces tenemos que la compuesta de operadores $M_v M_w$ se expresa de la manera siguiente:*

1. Si $v, w \in k$, entonces

$$M_v M_w = -2M_{wv} - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} + q^{2n-3} \mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)} + \left(q^{2n-2} - 1\right) h_{wv}.$$

2. Si $v \notin k, \quad w \in k$, entonces

$$M_v M_w = \left(\varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1} - 1\right) M_{vw} - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3} \mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)}$$

3. Si $A = B, \quad \mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(w) = 0, \quad r^2 = \mathrm{N}(vw)$, entonces

$$M_v M_w = \varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1} \left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3} \mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)} + \left(q^{2n-2} + \varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1}\right) \left(h_r + h_{-r}\right).$$

4. Si $A = B, \quad (w = s\overline{v} \quad \text{o} \quad w = sv), \quad \mathrm{Tr}(v) \neq 0, \quad v \notin k, \quad s \in k$, entonces

$$M_v M_w = \varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1} \left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3} \mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)} + \left(q^{2n-2} + \varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1}\right) h_{s\,\mathrm{N}(v)}.$$

5. Si $A = B, \quad v \notin k, \quad w \notin k$, entonces

$$M_v M_w = \varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1} \left(M_{vw} + M_{v\overline{w}}\right) - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(vw)} + q^{2n-3} \mathring{S}_{\mathrm{N}(vw)}.$$

6. Si $\ A \neq B, \quad v \notin k, \quad w \notin k$, entonces

$$M_v M_w = q^{2n-3} \mathring{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} - \varepsilon_Q q^{n-2} D_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)}.$$

Capítulo 7

Transformada de Mellin

En lo que sigue, A y B son álgebras cuadráticas sobre el cuerpo k.

Para cada $\alpha \in (k^\times)^\wedge$ tenemos un "levantamiento" natural a $(A^\times)^\wedge$ dado por $\alpha \circ \mathrm{N}_A$, es decir, tenemos un monomorfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} (k^\times)^\wedge & \hookrightarrow & (A^\times)^\wedge \\ \alpha & \longrightarrow & \alpha \circ \mathrm{N}_A \, . \end{array}$$

donde N_A es la norma del álgebra A.

Recordemos que denotamos por F el automorfismo de Frobenius del álgebra cuadrática A. Para $\Psi \in (A^\times)^\wedge$, tenemos entonces

$$\begin{array}{cccc} F: & (A^\times)^\wedge & \longrightarrow & (A^\times)^\wedge \\ & \Psi & \longrightarrow & \Psi^F = \Psi \circ F \end{array}$$

Finalmente usaremos las letras mayúsculas del alfabeto griego para denotar los caracteres de los grupos multiplicativos de las álgebras cuadráticas y la correspondiente letra minúscula para denotar la restricción del carácter al cuepo $k^\times$, Además, cuando corresponda, la letra minuscula sub cero para denotar el carácter del grupo multiplicativo $k^\times$, del cual proviene el levantamiento, es decir:

Si $\Psi \in (A^\times)^\wedge$ entonces $\Psi|_{k^\times} = \psi$.

Si $\Psi \in (A^\times)^\wedge$, $\Psi = \Psi^F$ entonces $\Psi = \psi_0 \circ \mathrm{N}_A$.

Para cada álgebra cuadrática A se puede definir la transformada de Mellin para los operadores de entrelazamiento canónicos M_a $(a \in A)$.

Definición 12 *Sean* $\Omega \in (A^\times)^\wedge$, $\alpha \in (k^\times)^\wedge$.

1. *Se define la transformada* M_Ω *dada por*

$$M_\Omega = \sum_{a \in A^\times} \Omega(a) M_a$$

2. *Se define la transformada $\overline{M}_\Omega$ dada por*
$$\overline{M}_\Omega = \sum_{a \in A^\times} \Omega(a)\overline{M}_a$$

3. *Se define la transformada h_α dada por*
$$h_\alpha = \sum_{t \in k^\times} \alpha(t) h_t.$$

4. *Se define la transformada S_α dada por*
$$S_\alpha = \sum_{t \in k^\times} \alpha(t) S_t$$

5. *Se define la transformada D_α dada por*
$$D_\alpha = \sum_{t \in k^\times} \alpha(t) D_t$$

6. *Se define la transformada $\mathring{S}_\alpha$ dada por*
$$\mathring{S}_\alpha = \sum_{t \in k^\times} \alpha(t) \mathring{S}_t$$

Proposición 55 *Sean $\alpha, \beta \in (k^\times)^\wedge$, entonces*

1. $S_\alpha S_\beta = q^{n-1}(q^n - \varepsilon_Q)\,(q-1)\,\delta_{\alpha,\beta} S_\alpha$
2. $h_\alpha S_\beta = (q-1)\,\delta_{\alpha,\beta^2} S_\beta$
3. $h_\alpha h_\beta = (q-1)\,\delta_{\alpha,\beta} h_\alpha.$

Demostración: 1.- Sean $\alpha, \beta \in (k^\times)^\wedge$, entonces
$$\begin{aligned}
S_\alpha S_\beta &= \sum_{t \in k^\times} \alpha(t) S_t \sum_{r \in k^\times} \beta(r) S_r \\
&= \sum_{r,t \in k^\times} \alpha(t)\beta(r) S_t S_r \\
&= q^{n-1}(q^n - 1) \sum_{r,t \in k^\times} \alpha(t)\beta(r) S_{tr} \\
&= q^{n-1}(q^n - 1) \sum_{s \in k^\times} \left(\sum_{\substack{r,t \in k^\times \\ rt = s}} \alpha(t)\beta(r) \right) S_s \\
&= q^{n-1}(q^n - 1)(q-1)\delta_{\alpha,\beta} \sum_{s \in k^\times} \beta(s) S_s \\
&= q^{n-1}(q^n - 1)(q-1)\delta_{\alpha,\beta} \cdot S_\beta
\end{aligned}$$

2.- Sean $\alpha, \beta \in (k^\times)^\wedge$, entonces

$$\begin{aligned}
h_\alpha S_\beta &= \sum_{t\in k^\times} \alpha(t) h_t \sum_{r\in k^\times} \beta(r) S_r \\
&= \sum_{r,t\in k^\times} \alpha(t)\beta(r) h_t S_r \\
&= \sum_{r,t\in k^\times} \alpha(t)\beta(r) S_{t^2 r} \\
&= \sum_{r,t\in k^\times} \alpha(t)\beta(st^{-2}) S_s \\
&= \left(\sum_{t\in k^\times} \alpha\beta^{-2}(t)\right) \sum_{s\in k^\times} \beta(s) S_s.
\end{aligned}$$

3.- Sean $\alpha, \beta \in (k^\times)^\wedge$, entonces

$$\begin{aligned}
h_\alpha h_\beta &= \sum_{t\in k^\times} \alpha(t) h_t \sum_{r\in k^\times} \beta(r) h_r \\
&= \sum_{r,t\in k^\times} \alpha(t)\beta(r) h_{tr} \\
&= (q-1)\,\delta_{\alpha,\beta} h_\alpha.
\end{aligned}$$

□

Estos resultados sugieren definir la siguiente normalización:

Definición 13 *Sea $\alpha \in (k^\times)^\wedge$, entonces*

$$\widetilde{S}_\alpha = \frac{1}{q^{n-1}(q^n - \varepsilon_Q)(q-1)} S_\alpha; \qquad \widetilde{h}_\alpha = \frac{1}{q-1} h_\alpha$$

Traduciendo la anterior proposición a los operador normalizados, obtenemos.

Proposición 56 *Sean $\alpha, \beta \in (k^\times)^\wedge$, entonces*

1. $\widetilde{S}_\alpha \widetilde{S}_\beta = \delta_{\alpha,\beta} \widetilde{S}_\alpha$.
2. $\widetilde{h}_\alpha \widetilde{S}_\beta = \delta_{\alpha,\beta^2} \widetilde{S}_\alpha$.
3. $\widetilde{h}_\alpha \widetilde{h}_\beta = \delta_{\alpha,\beta} \widetilde{h}_\alpha$.

Proposición 57 *Sean $\Omega \in \left((k\times k)^\times\right)^\wedge, \Psi \in (\mathbb{K}^\times)^\wedge, \alpha, \beta \in (k^\times)^\wedge$, y N_1 la norma asociada al álgebra $k \times k$, N_2 la norma asociada al álgebra $\mathbb{K}$. Entonces*

1. $M_\Omega = M_{\Omega^F}, \quad M_\Psi = M_{\Psi^F}$

2. $\overline{M}_\Omega = M_\Omega + h_\omega; \quad \overline{M}_\Psi = M_\Psi + h_\psi$

3. $M_\Omega S_\alpha = (\varepsilon_Q q^{n-1} + 1)(q-1)\left[-\delta_{\omega,\alpha^2} + \varepsilon_Q q^{n-1}(q-1)\,\delta_{\Omega,\alpha\circ\mathrm{N}_1}\right] S_\alpha$

4. $M_\Psi S_\alpha = (\varepsilon_Q q^{n-1} - 1)(q-1)\left[\delta_{\psi,\alpha^2} + \varepsilon_Q q^{n-1}(q+1)\,\delta_{\Psi,\alpha\circ\mathrm{N}_2}\right] S_\alpha$

5. $h_\alpha M_\Omega = (q-1)\,\delta_{\alpha,\omega} M_\Omega; \quad h_\alpha M_\Psi = (q-1)\,\delta_{\alpha,\psi} M_\Psi.$

6. $h_\alpha \overline{M}_\Omega = (q-1)\,\delta_{\alpha,\omega} M_\Omega; \quad h_\alpha \overline{M}_\Psi = (q-1)\,\delta_{\alpha,\psi} M_\Psi.$

Demostración: Sea A un álgebra cuadrática sobre k.

1.- Sea $\Omega \in (A^\times)^\wedge$. Entonces

$$\begin{aligned} M_\Omega &= \sum_{a\in A^\times} \Omega(a) M_a \\ &= \sum_{a\in A^\times} \Omega(a) M_{\overline{a}} \\ &= \sum_{b\in A^\times} \Omega(\overline{b}) M_b \\ &= \sum_{b\in A^\times} \Omega^F(b) M_b \\ &= M_{\Omega^F}. \end{aligned}$$

2.- Sea $\Omega \in (A^\times)^\wedge$. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{M}_\Omega &= \sum_{a\in A^\times} \Omega(a) \overline{M}_a \\ &= \sum_{t\in k^\times} \Omega(t)\,(M_t + h_t) + \sum_{a\in A-k} \Omega(a) \dot{M}_a \\ &= \sum_{a\in A^\times} \Omega(a) M_a + \sum_{t\in k^\times} \omega(t) h_t \\ &= M_\Omega + h_\omega \end{aligned}$$

3.- Sean $\alpha \in (A^\times)^\wedge, \gamma \in (k^\times)^\wedge$. Entonces

$$\begin{aligned} M_\Omega S_\alpha &= \sum_{a\in A^\times} \Omega(a) M_a \sum_{t\in k^\times} \alpha(t) S_t \\ &= \sum_{t\in k^\times} \sum_{a\in A^\times} \alpha(t)\Omega(a) S_t M_a \\ &= \sum_{t\in k^\times} \sum_{a\in A^\times} \alpha(t)\Omega(a) d_a S_{t\mathrm{N}(a)} \end{aligned}$$

donde d_a es el número de sumandos de M_a, definido en el capítulo 5.

$$
\begin{aligned}
M_\Omega S_\alpha &= \sum_{r\in k^\times}\sum_{a\in A^\times} d_a\alpha(r\,\mathrm{N}(a)^{-1})\Omega(a)S_r\\
&= \left(\sum_{a\in A^\times} d_a\left(\Omega\left(\alpha\circ\mathrm{N}^{-1}\right)\right)(a)\right)\left(\sum_{r\in k^\times}\alpha(r)S_r\right)\\
&= \left(\sum_{a\in A^\times} d_a\left(\Omega\left(\alpha\circ\mathrm{N}\right)^{-1}\right)(a)\right)S_\alpha
\end{aligned}
$$

Pongamos $\eta = \Omega\left(\alpha\circ\mathrm{N}\right)^{-1}$

$$
\begin{aligned}
M_\Omega S_\alpha &= \left[\left(q^{2n-2}-1\right)\sum_{a\in k^\times}\eta(a) + \left(q^{2n-2}+\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}\right)\sum_{a\in A-k}\eta(a)\right]S_\alpha.\\
&= \left[-\left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)\sum_{a\in k^\times}\eta(a) + \left(q^{2n-2}+\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}\right)\sum_{a\in A^\times}\eta(a)\right]S_\alpha\\
&= \left[-\left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)(q-1)\delta_{\omega,\alpha^2} + \left(q^{2n-2}+\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}\right)\left|A^\times\right|\delta_{\Omega,\alpha\circ\mathrm{N}}\right]S_\gamma.
\end{aligned}
$$

5.- Sean $\Omega\in\left(A^\times\right)^\wedge, \alpha\in\left(k^\times\right)^\wedge$; entonces

$$
\begin{aligned}
h_\alpha M_\Omega &= \sum_{t\in k^\times}\alpha(t)h_t\sum_{a\in A^\times}\Omega(a)M_a\\
&= \sum_{t\in k^\times}\sum_{a\in A^\times}\alpha(t)\Omega(a)h_tM_a\\
&= \sum_{t\in k^\times}\sum_{a\in A^\times}\alpha(t)\Omega(a)M_{ta}\\
&= \sum_{t\in k^\times}\sum_{b\in A^\times}\alpha(t)\Omega(t^{-1}b)M_b\\
&= \sum_{t\in k^\times}\alpha(t)\Omega(t^{-1})\sum_{b\in A^\times}\Omega(b)M_b\\
&= \sum_{t\in k^\times}(\Omega^{-1}\alpha)(t)M_\Omega\\
&= (q-1)\,\delta_{\omega,\alpha}M_\Omega.
\end{aligned}
$$

6.- Sean $\Omega\in\left(A^\times\right)^\wedge, \alpha\in\left(k^\times\right)^\wedge$, entonces

$$
\begin{aligned}
h_\alpha\overline{M}_\Omega &= h_\alpha\left(M_\Omega+h_\omega\right)\\
&= h_\alpha M_\Omega + h_\alpha h_\omega\\
&= (q-1)\,\delta_{\omega,\alpha}M_\Omega + (q-1)\,\delta_{\omega,\alpha}h_\omega\\
&= (q-1)\,\delta_{\omega,\alpha}\left(M_\Omega+h_\omega\right)\\
&= (q-1)\,\delta_{\omega,\alpha}\overline{M}_\Omega.
\end{aligned}
$$

□

Proposición 58 *Sea* $\gamma \in (k^{\times})^{\wedge}$; *entonces*

$$2S_\gamma = \overline{M}_{\gamma \circ \mathrm{N}_1} + \overline{M}_{\gamma \circ \mathrm{N}_2}$$

donde N_1 *es la norma asociada al álgebra cuadrática* $k \times k$ *y* N_2 *es la norma asociada al álgebra cuadrática* $\mathbb{K}$.

Demostración: Sea $\gamma \in (k^{\times})^{\wedge}$

$$\begin{aligned}
\overline{M}_{\gamma \circ \mathrm{N}_1} + \overline{M}_{\gamma \circ \mathrm{N}_2} &= \sum_{a \in (k \times k)^{\times}} (\gamma \circ \mathrm{N}_1)(a)\overline{M}_a + \sum_{z \in K^{\times}} (\gamma \circ \mathrm{N}_2)(z)\overline{M}_z \\
&= \sum_{t \in k^{\times}} \sum_{u \in U_{1,t}} (\gamma \circ \mathrm{N}_1)(u)\overline{M}_u + \sum_{t \in k^{\times}} \sum_{u \in U_{2,t}} (\gamma \circ \mathrm{N}_2)(u)\overline{M}_u \\
&= \sum_{t \in k^{\times}} \gamma(t) \left(\sum_{u \in U_{1,t}} \overline{M}_u + \sum_{u \in U_{2,t}} \overline{M}_u \right) \\
&= \sum_{t \in k^{\times}} \gamma(t) 2S_t = 2S_\gamma
\end{aligned}$$

□

Corolario 59 *Sea* $\gamma \in (k^{\times})^{\wedge}$, *entonces*

$$\varepsilon_A \left(S_\gamma - \overline{M}_{\gamma \circ \mathrm{N}_A} \right) = \varepsilon_B \left(S_\gamma - \overline{M}_{\gamma \circ \mathrm{N}_B} \right)$$

donde A, B *son álgebras cuadráticas sobre* k.

7.1 Sumas geométricas de caracteres.

Estas sumas tienen su interés, ya que aparecen en forma natural al componer transformadas de Mellin de operadores de entrelazamiento canónicos, definidas con más precisión en la proxima sección.

Proposición 60 *Sean* $\Psi \in (A^{\times})^{\wedge}, \Omega \in (B^{\times})^{\wedge}$; *entonces*

$$\sum_{r,s \in k^{\times}} \Psi(r)\Omega(s)h_{rs} = \begin{cases} 0 & si \;\; \psi \neq \omega \\ (q-1)\, h_\psi & si \;\; \psi = \omega \end{cases}$$

Demostración: Sean $\Psi \in (A^\times)^\wedge, \Omega \in (B^\times)^\wedge$,

$$\begin{aligned}\sum_{r,s\in k^\times} \Psi(r)\Omega(s)h_{rs} &= \sum_{r,t\in k^\times} \Psi(r)\Omega(tr^{-1})h_t \\ &= \left(\sum_{r\in k^\times} \Psi\Omega^{-1}(r)\right)\sum_{r\in k^\times} \Omega(t)h_t \\ &= \left(\sum_{r\in k^\times} \left(\Psi\Omega^{-1}\right)(r)\right) h_\Omega.\end{aligned}$$

□

Observación: Recordemos que para un grupo conmutativo H, tenemos que el álgebra de grupo $L^1(H)$ es conmutativa y los caracteres del grupo forman una base de idempotentes primitivos ortogonales con el producto de convolución, dado por,

$$(\Psi * \Omega)(t) = \frac{1}{|H|}\sum_{\substack{r,s\in H\\ rs=t}} \Psi(r)\Omega(s).$$

Proposición 61 *Sean* $\Psi, \Omega \in (A^\times)^\wedge$, *entonces*

$$\sum_{\substack{a\in A^\times\\ s\in k^\times}} \Psi(a)\Omega(sa)h_{s\mathrm{N}(a)} = \begin{cases} 0 & si \quad \Psi \neq \Omega^F \\ |A^\times|\, h_\omega & si \quad \Psi = \Omega^F \end{cases}$$

Demostración: Sean $\Psi, \Omega \in (A^\times)^\wedge$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a\in A^\times\\ s\in k^\times}} \Psi(a)\Omega(sa)h_{s\mathrm{N}(a)} &= \sum_{s,t\in k^\times} \Omega(s)\left[\sum_{\substack{a\in A^\times\\ \mathrm{N}(a)=t}} (\Psi\Omega)(a)\right] h_{st} \\ &= \delta_{(\Psi\Omega),(\Psi\Omega)^F}\cdot |U_A| \sum_{s,t\in k^\times} \omega(s)\,\upsilon(t)h_{st}\end{aligned}$$

donde $\Psi\Omega = \upsilon \circ \mathrm{N}_A$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a\in A^\times\\ s\in k^\times}} \Psi(a)\Omega(sa)h_{s\mathrm{N}(a)} &= \delta_{(\Psi\Omega),(\Psi\Omega)^F}\cdot |U_A|\,(q-1)\sum_{r\in k^\times} (\omega * \upsilon)(r)\cdot h_r \\ &= \delta_{(\Psi\Omega),(\Psi\Omega)^F}\cdot \delta_{\omega,\upsilon}\cdot |A^\times| \sum_{r\in k^\times} \omega(r)h_r \\ &= \delta_{(\Psi\Omega),(\Psi\Omega)^F}\cdot \delta_{\omega,\upsilon}\cdot |A^\times|\cdot h_\omega\end{aligned}$$

Como $(\Psi\Omega) = (\Psi\Omega)^F = \upsilon \circ \mathrm{N}_A$, $\quad \Omega|_{k^\times} = \omega$, tenemos que, evaluando en $u_t \in A$, un elemento de norma t :

$$\begin{aligned} \Psi\Omega\,(u_t) &= \upsilon(t), \quad \upsilon(t) = \omega(t) = \Omega(u_t\overline{u_t}) \\ (\Psi\Omega)\,(u_t) &= \upsilon(t), \quad \upsilon(t) = \left(\Omega\Omega^F\right)(u_t) \\ \Psi\,(u_t) &= \Omega^F(u_t) \end{aligned}$$

Con lo cual $\Psi = \Omega^F$. ☐

Proposición 62 *Sean* $\Psi \in (A^\times)^\wedge$, $\quad \Omega \in (B^\times)^\wedge$, *entonces*

$$\sum_{r\in k^\times} \sum_{\substack{a\in A^\times, b\in B^\times \\ \mathrm{N}(ab)=\mathrm{N}(r)}} \Psi(a)\Omega(b)h_r = \begin{cases} \frac{|A^\times||B^\times|}{q-1} h_\psi & si \quad \Psi = \psi_0 \circ \mathrm{N}_A, \quad \Omega = \psi_0 \circ \mathrm{N}_B \\ 0 & en\ caso\ contario \end{cases}$$

Demostración: Sean $\Psi \in (A^\times)^\wedge$, $\quad \Omega \in (B^\times)^\wedge$,

$$\begin{aligned} &\sum_{r\in k^\times} \sum_{\substack{a\in A^\times, v\in B^\times \\ \mathrm{N}(a)\,\mathrm{N}(v)=\mathrm{N}(r)}} \Psi(a)\Omega(v)h_r \\ &= |U_A||U_B|\delta_{\Psi,\Psi^F} \cdot \delta_{\Omega,\Omega^F} \sum_{r\in k^\times} \left(\sum_{\substack{s,t\in k^\times \\ st=r^2}} \psi_0(s)\omega_0(t) \right) h_r \\ &= |U_A||U_B|\delta_{\Psi,\Psi^F} \cdot \delta_{\Omega,\Omega^F} \sum_{r\in k^\times} (\psi_0 * \omega_0)\left(r^2\right) h_r \\ &= |U_A||U_B|(q-1)\delta_{\Psi,\Psi^F} \cdot \delta_{\Omega,\Omega^F} \cdot \delta_{\psi_0,\omega_0} \sum_{r\in k^\times} \psi_0\left(r^2\right) h_r \\ &= \frac{|A^\times||B^\times|}{q-1} \delta_{\Psi,\Psi^F} \cdot \delta_{\Omega,\Omega^F} \cdot \delta_{\psi_0,\omega_0} \sum_{r\in k^\times} (\psi_0 \circ \mathrm{N})\,(r)\, h_r \\ &= \frac{|A^\times||B^\times|}{q-1} \delta_{\Psi,\Psi^F} \cdot \delta_{\Omega,\Omega^F} \cdot \delta_{\psi_0,\omega_0} \sum_{r\in k^\times} \Psi\,(r)\, h_r \\ &= \frac{|A^\times||B^\times|}{q-1} \delta_{\Psi,\Psi^F} \cdot \delta_{\Omega,\Omega^F} \cdot \delta_{\psi_0,\omega_0} \cdot h_\psi. \end{aligned}$$

☐

Proposición 63 *Sean* $\Psi, \Omega \in (A^\times)^\wedge$,

$$\sum_{a,b\in A^\times} \Psi(a)\Omega(b)M_{ab} = \begin{cases} 0 & si \quad \Omega \neq \Psi \\ |A^\times|\, M_\Omega & si \quad \Omega = \Psi \end{cases}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b\in A^\times} \Psi(a)\Omega(b)M_{ab} &= \sum_{c\in A^\times}\left(\sum_{\substack{a,b\in A^\times\\ ab=c}} \Psi(a)\Omega(b)\right) M_c \\
&= \left|A^\times\right| \sum_{c\in A^\times} (\Psi * \Omega)(c)\, M_c \\
&= \delta_{\Psi,\Omega} \left|A^\times\right| \sum_{c\in A^\times} \Omega(c)\, M_c \\
&= \delta_{\Psi,\Omega} \left|A^\times\right| M_\Omega.
\end{aligned}$$

□

Corolario 64 *Sean* $\Psi, \Omega \in (A^\times)^\wedge$, *entonces*

$$\sum_{a,b\in A^\times} \Psi(a)\Omega(b)M_{a\bar{b}} = \begin{cases} 0 & si \quad \Omega \neq \Psi^F \\ \left|A^\times\right| M_\alpha & si \quad \Omega = \Psi^F \end{cases}$$

Proposición 65 *Sean* $\Psi \in (A^\times)^\wedge, \Omega \in (B^\times)^\wedge$, *entonces*

$$\sum_{a\in A^\times, r\in k^\times} \Psi(a)\Omega(r)M_{ra} = \begin{cases} 0 & si \quad \psi \neq \omega \\ (q-1)\, M_\Psi & si \quad \psi = \omega \end{cases}$$

Demostración: Sean $\Psi \in (A^\times)^\wedge, \Omega \in (B^\times)^\wedge$,

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in A^\times, r\in k^\times} \Psi(a)\Omega(r)M_{ra} &= \sum_{c\in A^\times, r\in k^\times} \Psi(cr^{-1})\Omega(r)M_c; \quad c = ra. \\
&= \left(\sum_{r\in k^\times} \left(\Psi^{-1}\Omega\right)(r)\right)\left(\sum_{c\in A^\times} \Psi(c)M_c\right) \\
&= \left(\sum_{r\in k^\times} \left(\Psi^{-1}\Omega\right)(r)\right) M_\Psi.
\end{aligned}$$

□

Proposición 66 *Sean* A, B, C *álgebras cuadráticas sobre el cuerpo* k *y* $\Psi \in (A^\times)^\wedge$,

$\Omega \in (B^\times)^\wedge$, *además* U_r *es el círculo de radio* r *en* $C^\times$. *Entonces*

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Psi(a)\Omega(b)\left(\sum_{u\in U_{\mathrm{N}(a)\,\mathrm{N}(b)}} M_u\right)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{|A^\times|\,|B^\times|}{q-1} M_{\psi_0\circ \mathrm{N}_C} & si \quad \Psi = \psi_0 \circ \mathrm{N}_A \quad \wedge \quad \Omega = \psi_0 \circ \mathrm{N}_B \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Demostración: Sean $\Psi \in (A^\times)^\wedge, \Omega \in (B^\times)^\wedge$,

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Psi(a)\Omega(b)\left(\sum_{u\in U_{\mathrm{N}(a)\,\mathrm{N}(b)}} M_u\right)$$
$$= \sum_{r,s\in k^\times}\left(\sum_{\substack{a\in A^\times\\ \mathrm{N}(a)=s}} \Psi(a)\right)\left(\sum_{\substack{b\in B^\times\\ \mathrm{N}(b)=r}} \Omega(b)\right)\left(\sum_{u\in U_{rs}} M_u\right)$$
$$= \delta_{\Psi,\Psi^F}\cdot\delta_{\Omega,\Omega^F}|U_A||U_B| \sum_{r,s\in k^\times}\psi_0(r)\omega_0(s)\left(\sum_{u\in U_{rs}} M_u\right)$$
$$= |U_A||U_B|\delta_{\Psi,\Psi^F}\cdot\delta_{\Omega,\Omega^F}\sum_{t\in k^\times}\sum_{\substack{r,s\in k^\times\\ rs=t}}\psi_0(r)\omega_0(s)\left(\sum_{u\in U_t} M_u\right)$$
$$= |U_A||U_B|\delta_{\Psi,\Psi^F}\cdot\delta_{\Omega,\Omega^F}\sum_{t\in k^\times}\left(\psi_0 * \omega_0\right)(t)\left(\sum_{u\in U_t} M_u\right)$$
$$= |U_A||U_B|\,(q-1)\,\delta_{\Psi,\Psi^F}\cdot\delta_{\Omega,\Omega^F}\cdot\delta_{\psi_0,\omega_0}\sum_{t\in k^\times}\psi_0(t)\left(\sum_{u\in U_t} M_u\right)$$
$$= \frac{|A^\times|\,|B^\times|}{(q-1)}\delta_{\Psi,\Psi^F}\cdot\delta_{\Omega,\Omega^F}\cdot\delta_{\psi_0,\omega_0}\sum_{t\in k^\times}\left(\sum_{u\in U_t}\left(\psi_0\circ\mathrm{N}_C\right)(u) M_u\right)$$
$$= \frac{|A^\times|\,|B^\times|}{(q-1)}\delta_{\Psi,\Psi^F}\cdot\delta_{\Omega,\Omega^F}\cdot\delta_{\psi_0,\omega_0}\cdot M_{\psi_0\circ\mathrm{N}_C}$$

□

Proposición 67 *Sean* A, B, C *álgebras cuadráticas sobre el cuerpo* k *y* $\Psi \in (A^\times)^\wedge$,

$\Omega \in (B^\times)^\wedge$, *además* U_r *es el círculo de radio* r *en* $C^\times$, *entonces*

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Psi(a)\Omega(b)D_{\mathrm{N}(a)\,\mathrm{N}(b)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{|A^\times|\,|B^\times|}{2\,(q-1)}\left(M_{\psi_0\circ \mathrm{N}_1} - M_{\psi_0\circ\mathrm{N}_2}\right) & si \quad \Psi = \psi_0\circ \mathrm{N}_A \;\wedge\; \Omega = \psi_0\circ\mathrm{N}_B \\ & \qquad\qquad A\neq B \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Demostración: Sean $\Psi \in (A^\times)^\wedge, \Omega \in (B^\times)^\wedge$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Psi(a)\Omega(b))D_{\mathrm{N}(a)\,\mathrm{N}(b)} \\
&= \sum_{r,s\in k^\times}\left(\sum_{\substack{a\in A^\times\\ \mathrm{N}(a)=s}}\Psi(a)\right)\left(\sum_{\substack{b\in B^\times\\ \mathrm{N}(b)=r}}\Omega(b)\right)D_{rs} \\
&= |U_A||U_B|\delta_{\Psi,\Psi^F}\cdot\delta_{\Omega,\Omega^F}\sum_{r,s\in k^\times}\psi_0(r)\omega_0(s)D_{rs} \\
&= |U_A||U_B|\delta_{\Psi,\Psi^F}\cdot\delta_{\Omega,\Omega^F}\sum_{t\in k^\times}\sum_{\substack{r,s\in k^\times\\ rs=t}}\psi_0(r)\omega_0(s)D_{rs} \\
&= |U_A||U_B|\,(q-1)\,\delta_{\Psi,\Psi^F}\cdot\delta_{\Omega,\Omega^F}\sum_{t\in k^\times}(\psi_0 * \omega_0)\,(t)D_t \\
&= |U_A||U_B|\,(q-1)\,\delta_{\Psi,\Psi^F}\cdot\delta_{\Omega,\Omega^F}\cdot\delta_{\psi_0,\omega_0}\sum_{t\in k^\times}\psi_0(t)D_t
\end{aligned}$$

recordemos que

$$D_t = \frac{1}{2}\left(\sum_{u\in U_{1,t}} M_u - \sum_{u\in U_{2,t}} M_u\right).$$

donde $U_{1,t}$ es el círculo de radio t en $k\times k$ y $U_{2,t}$ es el círculo de radio t en $\mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\sum_{t\in k^\times}\psi_0(t)D_t &= \frac{1}{2}\sum_{t\in k^\times}\psi_0(t)\left(\sum_{u\in U_{1,t}} M_u - \sum_{u\in U_{2,t}} M_u\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{t\in k^\times}\psi_0(t)\sum_{u\in U_{1,t}} M_u - \sum_{t\in k^\times}\psi_0(t)\sum_{u\in U_{2,t}} M_u\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(M_{\psi_0\circ\mathrm{N}_1} - M_{\psi_0\circ\mathrm{N}_2}\right)
\end{aligned}$$

□

Proposición 68 *Sean* $\Psi \in (A^\times)^\wedge, \Omega \in (B^\times)^\wedge$, *entonces*

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Psi(a)\Omega(b)S_{\mathrm{N}(a)\,\mathrm{N}(b)} = \begin{cases} \dfrac{|A^\times||B^\times|}{|k^\times|}S_{\psi_0} & si \quad \Psi = \psi_0 \circ \mathrm{N}_A; \quad \Omega = \psi_0 \circ \mathrm{N}_B \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Demostración: Sean $\Psi \in (A^\times)^\wedge, \Omega \in (B^\times)^\wedge$

$$\begin{aligned} \sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Psi(a)\Omega(b)S_{\mathrm{N}(a)\,\mathrm{N}(b)} &= \sum_{r,s\in k^\times} \left(\sum_{\substack{a\in A^\times \\ \mathrm{N}(a)=s}} \Psi(a) \right) \left(\sum_{\substack{b\in B^\times \\ \mathrm{N}(b)=r}} \Omega(b) \right) S_{rs} \\ &= \delta_{\Psi,\Psi^F} \cdot \delta_{\Omega,\Omega^F} |U_A||U_B| \sum_{r,s\in k^\times} \psi_0(r)\omega_0(s)S_{rs} \\ &= \delta_{\Psi,\Psi^F} \cdot \delta_{\Omega,\Omega^F} \sum_{t\in k^\times} \left(\sum_{\substack{r,s\in k^\times \\ rs=t}} \psi_0(r)\omega_0(s) \right) S_t \\ &= |U_A||U_B|\delta_{\Psi,\Psi^F} \cdot \delta_{\Omega,\Omega^F} \cdot \delta_{\psi_0,\omega_0} (q-1) \sum_{t\in k^\times} \psi_0(t)S_t \\ &= \frac{|A^\times||B^\times|}{(q-1)} \delta_{\Psi,\Psi^F} \cdot \delta_{\Omega,\Omega^F} \cdot \delta_{\psi_0,\omega_0} S_{\psi_0} \end{aligned}$$

□

Corolario 69 *Sean* $\Psi \in (A^\times)^\wedge, \Omega \in (B^\times)^\wedge$, *entonces*

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Psi(a)\Omega(b)\mathring{S}_{\mathrm{N}(a)\,\mathrm{N}(b)} = \begin{cases} \dfrac{|A^\times||B^\times|}{|k^\times|}\mathring{S}_{\psi_0} & si \quad \Psi = \psi_0 \circ \mathrm{N}_A, \quad \Omega = \psi_0 \circ \mathrm{N}_B \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

7.2 Tabla de multiplicación de los operadores de Mellin.

Al considerar los coeficientes del teorema 8 anterior, podemos escribir la multiplicación de los operadores M_Ω y M_Ψ a través de los siguientes sumandos:

Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \Psi \in (B^\times)^\wedge$, entonces

$$\begin{aligned} M_\Omega M_\Psi &= \sum_{v\in A^\times} \Omega(v)M_v \sum_{w\in B^\times} \Psi(w)M_w \\ &= \sum_{v\in A^\times} \sum_{w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)M_vM_w \\ &= \sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)\left(A(v,w) + B(v,w) + C(v,w) + D(v,w)\right) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A(v,w) &= a(v,w)\mathring{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} \\ B(v,w) &= b(v,w)D_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} \\ C(v,w) &= c(v,w)M_{vw} + c'(v,w)M_{vF(w)} \\ D(v,w) &= \sum_{t\in k^\times} d_t^{v,w} h_t. \end{aligned}$$

con los coeficientes $a(v,w), b(v,w), c(v,w), c'(v,w), d_t^{v,w}$ dados por el teorema 8. El primer sumando lo tenemos con el siguiente lema.

Lema 70 *Sean* $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \Psi \in (B^\times)^\wedge$; *entonces*

$$\sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)\left(A(v,w)\right) = \begin{cases} q^{2n-3}\dfrac{|A^\times|\,|B^\times|}{(q-1)} S_\gamma & \text{si} \quad \Omega = \psi_0 \circ \mathrm{N}_A \quad \wedge \quad \Psi = \psi_0 \circ \mathrm{N}_B \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Demostración: Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \Psi \in (B^\times)^\wedge$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)\left(A(v,w)\right) &= \sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)a(v,w)\mathring{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} \\ &= q^{2n-3} \sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)\mathring{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} \\ &= \sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)\mathring{S}_{\mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w)} \end{aligned}$$

Por la proposición 69 tenemos la demostración del primer lema. □

Obtenemos el segundo sumando a través del siguiente enunciado:

Lema 71 *Sean* $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \Psi \in (B^\times)^\wedge$; *entonces*

Si $A \neq B$; $\quad \Omega = \psi_0 \circ \mathrm{N}_A \quad$ *y* $\quad \Psi = \psi_0 \circ \mathrm{N}_B$

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)B(a,b) = -\frac{1}{2}q^{n-2}\left(q-1\right)^2\left((q+1)\left[\varepsilon_A\varepsilon_Q M_\Omega + \varepsilon_B\varepsilon_Q M_\Psi\right]\right.$$

Si $A = B$; $\quad \Omega = \psi_0 \circ \mathrm{N}_A \quad$ *y* $\quad \Psi = \psi_0 \circ \mathrm{N}_B$

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)B(a,b) = q^{n-2}\frac{|A^\times|^2}{(q-1)}\varepsilon_A\varepsilon_Q\left[S_{\psi_0} - \overline{M}_\Psi\right]$$

En los otros casos tenemos

$$\sum_{a\in A^\times,b\in B^\times}\Omega(a)\Psi(b)B(a,b)=0$$

Demostración: Sean $\Omega\in(A^\times)^\wedge,\Psi\in(B^\times)^\wedge$, donde U es el círculo unitario de $A^\times$

$$\begin{aligned}\sum_{v\in A^\times,w\in B^\times}\Omega(v)\Psi(w)\left(B(v,w)\right)&=\sum_{v\in A^\times,w\in B^\times}\Omega(v)\Psi(w)b_{A,B}D_{N(v)N(w)}\\&=-q^{n-2}\varepsilon_Q\sum_{v\in A^\times,w\in B^\times}\Omega(v)\Psi(w)D_{N(v)N(w)}\end{aligned}$$

Usando la proposición 67 en cada caso

$$\begin{aligned}&\sum_{v\in A^\times,w\in B^\times}\Omega(v)\Psi(w)\left(B(v,w)\right)\\&=-\frac{q^{n-2}\left|A^\times\right|\left|B^\times\right|}{2\left(q-1\right)}\varepsilon_Q\cdot\delta_{\Psi,\Psi^F}\cdot\delta_{\Omega,\Omega^F}\cdot\delta_{\psi_0,\omega_0}\cdot\left(M_{\psi_0\circ\mathrm{N}_1}-M_{\psi_0\circ\mathrm{N}_2}\right)\end{aligned}$$

Si $A\neq B,\quad\Psi=\Psi^F=\psi_0\circ\mathrm{N}_A,\quad\Omega=\Omega^F=\psi_0\circ\mathrm{N}_B$, entonces

$$\sum_{v\in A^\times,w\in B^\times}\Omega(v)\Psi(w)\left(B(v,w)\right)=\frac{1}{2}q^{n-2}\frac{\left|A^\times\right|\left|B^\times\right|}{(q-1)}\left[\varepsilon_A\varepsilon_QM_\Omega+\varepsilon_B\varepsilon_QM_\Psi\right]$$

Si $A=B,\quad\Psi=\Psi^F=\psi_0\circ\mathrm{N}_A,\quad\Omega=\Omega^F=\psi_0\circ\mathrm{N}_B$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{v\in A^\times,w\in B^\times}\Omega(v)\Psi(w)\left(B(v,w)\right)&=-\frac{q^{n-2}\left|A^\times\right|\left|B^\times\right|}{2\left(q-1\right)}\varepsilon_Q\cdot\left(M_{\psi_0\circ\mathrm{N}_1}-M_{\psi_0\circ\mathrm{N}_2}\right)\\&=q^{n-2}\frac{\left|A^\times\right|^2}{(q-1)}\varepsilon_A\varepsilon_Q\left[S_{\psi_0}-\overline{M}_\Psi\right]\end{aligned}$$

Así tenemos la demostración del lema. □

Obtenemos el tercer sumando a partir del siguiente lema:

Lema 72 *Sean $\Omega\in(A^\times)^\wedge,\Psi\in(B^\times)^\wedge$; entonces tenemos la siguientes posibilidades:*

Si $A=B,\quad\Omega\neq\Psi,\quad\Omega\neq\Psi^F,\quad\omega=\psi$, entonces

$$\sum_{a\in A^\times,b\in B^\times}\Omega(a)\Psi(b)C(a,b)=-\left(q-1\right)\left[\left(\varepsilon_B\varepsilon_Qq^{n-1}+1\right)M_\Omega+\left(\varepsilon_A\varepsilon_Qq^{n-1}+1\right)M_\Psi\right].$$

Si $A = B$, $\left(\Omega = \Psi \quad o\ excluyente \quad \Omega = \Psi^F\right)$, *entonces*

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)C(a,b) = (q-1)\left[\varepsilon_A\varepsilon_Q q^n - (2\varepsilon_A\varepsilon_Q + \varepsilon_Q)\, q^{n-1} - 2\right] M_\Omega.$$

Si $A = B$, $\Omega = \Psi^F$, $\Omega = \Psi$, *entonces*

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)C(a,b) = 2\,(q-1)\left[\varepsilon_A\varepsilon_Q q^n - (\varepsilon_A\varepsilon_Q + \varepsilon_Q)\, q^{n-1} - 1\right] M_\Omega.$$

Si $A \neq B$, $\omega = \psi$, *entonces*

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)C(a,b) = -\,(q-1)\left[\left(\varepsilon_B\varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) M_\Omega + \left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) M_\Psi\right].$$

En caso contrario tenemos

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)C(a,b) = 0.$$

Demostración: Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \Psi \in (B^\times)^\wedge$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)\left(C(v,w)\right) \\
&= \sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)\left(c(v,w)M_{vw} + c'(a,b)M_{vF(w)}\right) \\
&= \varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}\delta_{A,B} \sum_{v,w\in A^\times} \Omega(v)\Psi(w)\left(M_{vw} + M_{vF(w)}\right) - \\
&\quad \left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) \sum_{v\in A^\times, s\in k^\times} \Omega(v)\Psi(s)M_{sv} - \\
&\quad \left(\varepsilon_B\varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) \sum_{w\in B^\times, s\in k^\times} \Omega(s)\Psi(v)M_{sv}
\end{aligned}$$

Solamente resaltaremos los caso no nulos provenientes de las proposiciones 65, 63 y su corolario; de acuerdo a ello tenemos los siguientes casos:

Si $A = B$; $\Omega = \Psi$ o bien $\Omega = \Psi^F$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)\left(C(v,w)\right) \\
&= \varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}\cdot\left|A^\times\right|\cdot M_\Omega - 2\left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right)(q-1)\, M_\Omega \\
&= (q-1)\left[\varepsilon_A\varepsilon_Q q^n - (2\varepsilon_A\varepsilon_Q + \varepsilon_Q)\, q^{n-1} - 2\right] M_\Omega.
\end{aligned}$$

Si $A = B$; $\Omega = \Psi$ y $\Omega = \Psi^F$, entonces

$$\sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)\left(C(v,w)\right)$$
$$= 2\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}\cdot\left|A^\times\right|\cdot M_\Omega - 2\left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)(q-1)M_\Omega$$
$$2(q-1)\left[\varepsilon_A\varepsilon_Q q^n - (\varepsilon_A\varepsilon_Q+\varepsilon_Q)q^{n-1}-1\right]M_\Omega.$$

Si $A = B$; $\Omega \neq \Psi$ y $\Omega \neq \Psi^F$ y $\omega = \psi$, entonces

$$\sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)\left(C(v,w)\right)$$
$$= (q-1)\left(c'(A,B)M_\Omega + c''(A,B)M_\Psi\right)$$
$$= -(q-1)\left[\left(\varepsilon_B\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)M_\Omega + \left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)M_\Psi\right].$$

Si $A \neq B$; y $\omega = \psi$, entonces

$$\sum_{v\in A^\times, w\in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)\left(C(v,w)\right)$$
$$= (q-1)\left(c'(A,B)M_\Omega + c''(A,B)M_\Psi\right)$$
$$= -(q-1)\left[\left(\varepsilon_B\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)M_\Omega + \left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)M_\Psi\right].$$

□

Lema 73 *Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \Psi \in (B^\times)^\wedge$, entonces tenemos*

Si $A = B$, $\Omega \neq \Psi$, $\Omega \neq \Psi^F$, $\omega = \psi$, entonces

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)D(a,b) = -\left(q^{n-1}+\varepsilon_A\varepsilon_Q\right)^2(q-1)h_\psi$$

Si $A = B$, ($\Omega = \Psi$ o excluyente $\Omega = \Psi^F$), entonces

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)D(a,b) = (q-1)\left(q^{n-1}+\varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\left(q^n - (1+\varepsilon_A q^{n-1} - \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\cdot h_\psi$$

Si $A = B$, $\Omega = \Psi$, $\Omega = \Psi^F$, entonces

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)D(a,b)$$
$$= (q-1)\left[\left(q^{2n-1}-q^{2n-2}-q^{2n-3}-1\right) - 2\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}(q-\varepsilon_A+1)\right]\cdot h_\psi$$

Si $A \neq B$, $\omega = \psi$, ($\Omega \neq \Omega^F$ o $\Psi \neq \Psi^F$), entonces

$$\sum_{a\in A^\times, b\in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)D(a,b) = \left(q^{2n-2}-1\right)(q-1)h_\psi.$$

Si $A \neq B, \quad \Omega = \Omega^F, \quad \Psi = \Psi^F, \quad \omega_0 = \psi_0$, *entonces*

$$\sum_{a \in A^\times, b \in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)D(a,b) = (q-1)\left[-q^{2n-1} + q^{2n-3} + q^{2n-2} - 1\right] h_\psi.$$

En caso contrario, tenemos

$$\sum_{a \in A^\times, b \in B^\times} \Omega(a)\Psi(b)D(a,b) = 0$$

Demostración: Reemplazando los coeficientes y reordenando tenemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{v \in A^\times, w \in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)D(v,w) \\
&= -q^{2n-3} \sum_{r \in k^\times} \sum_{\substack{v \in A^\times, w \in B^\times \\ \mathrm{N}(v)\,\mathrm{N}(w) = r^2}} \Omega(v)\Psi(w)h_r + \\
&\quad q^{n-1}\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\delta_{A,B} \sum_{v \in A^\times, s \in k^\times} \Omega(v)\Psi(sv)h_{s\,\mathrm{N}(v)} + \\
&\quad q^{n-1}\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\delta_{A,B} \sum_{v \in A^\times, s \in k^\times} \Omega(v)\Psi(s\bar{v})h_{s\,\mathrm{N}(v)} + \\
&\quad \left[q^{2n-2} - 1 - 2\delta_{A,B}q^{n-1}\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\right] \sum_{v,w \in k^\times} \Omega(v)\Psi(w)h_{vw}
\end{aligned}$$

El cálculo de cada sumando lo tenemos resuelto en las proposiciones 60,61,62 y solamente desarrollaremos los casos no nulos.

Si $A = B, \quad \Omega \neq \Psi \quad$ y $\quad \Omega \neq \Psi^F \quad$ y $\quad \omega = \psi$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{v \in A^\times, w \in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)D(v,w) \\
&= -\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)^2 (q-1)\, h_\psi
\end{aligned}$$

Si $A = B, \quad (\Omega = \Psi \quad$ o bien $\quad \Omega = \Psi^F)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{v \in A^\times, w \in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)D(v,w) \\
&= \left[\left[q^{2n-2} - 1 - 2q^{n-1}\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\right](q-1) + q^{n-1}\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\left|A^\times\right|\right] \cdot h_\psi \\
&= \left(-\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)^2 (q-1) + q^{n-1}\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right) \cdot \left|A^\times\right|\right) \cdot h_\psi \\
&= \left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\left(-\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)(q-1) + q^{n-1}\left|A^\times\right|\right) \cdot h_\psi \\
&= \left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)(q-1)\left(-q^{n-1} - \varepsilon_A\varepsilon_Q + q^n - \varepsilon_A q^{n-1}\right) \cdot h_\psi \\
&= (q-1)\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\left(q^n - (1 + \varepsilon_A q^{n-1} - \varepsilon_A\varepsilon_Q\right) \cdot h_\psi
\end{aligned}$$

Si $A = B$, $\quad \Omega = \Psi \quad$ y $\quad \Omega = \Psi^F$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{v \in A^\times, w \in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)D(v,w) \\
&= \left[-\frac{q^{2n-3}\left|A^\times\right|^2}{(q-1)} - \left(q^{n-1} + \varepsilon_A \varepsilon_Q\right)^2 (q-1) + 2q^{n-1}\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\left|A^\times\right| \right] \cdot h_\psi \\
&= (q-1)\left(-q^{2n-3}\left(q-\varepsilon_A\right)^2 - \left(q^{n-1}+\varepsilon_A\varepsilon_Q\right)^2 + 2q^{n-1}\left(q^{n-1}+\varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\left(q-\varepsilon_A\right)\right) \cdot h_\psi \\
&= (q-1)\left[\left(q^{2n-1} - q^{2n-2} - q^{2n-3} - 1\right) - 2\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}(q-\varepsilon_A+1)\right] \cdot h_\psi
\end{aligned}$$

Si $A \neq B$, $\quad \Omega = \Omega^F \quad$ y $\quad \Psi = \Psi^F \quad$ y $\quad \omega_0 = \psi_0$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{v \in A^\times, w \in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)D(v,w) \\
&= -q^{2n-3}(q^2-1)(q-1)h_\psi + \left(q^{2n-2}-1\right)(q-1)\,h_\psi \\
&= \left[-q^{2n-1} + q^{2n-3} + q^{2n-2} - 1\right](q-1)\,h_\psi
\end{aligned}$$

Si $A \neq B$, $\quad (\Omega \neq \Omega^F \quad$ o $\quad \Psi \neq \Psi^F) \quad$ y $\quad \omega = \psi$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{v \in A^\times, w \in B^\times} \Omega(v)\Psi(w)D(v,w) \\
&= \left(q^{2n-2}-1\right)(q-1)\,h_\psi
\end{aligned}$$

□

Los lemas anteriores corresponden a los pasos que permiten la demostración del siguiente teorema.

Teorema 9 *Sean* $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \Psi \in (B^\times)^\wedge$, *entonces*

1. *Si* $\omega \neq \psi$, *entonces*

$$M_\Omega M_\Psi = 0$$

2. *Si* $A \neq B$, $\quad \omega = \psi$, $\quad (\Omega \neq \Omega^F \quad$ *o* $\quad \Psi \neq \Psi^F)$, *entonces*

$$\begin{aligned}
M_\Omega M_\Psi = &-(q-1)\left[\left(\varepsilon_B\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)M_\Omega + \left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)M_\Psi\right] + \\
&+\left(q^{2n-2}-1\right)(q-1)\,h_\psi
\end{aligned}$$

3. *Si* $A \neq B$, $\quad \Omega = \Omega^F$, $\quad \Psi = \Psi^F$, $\quad \omega = \psi$, $\quad \omega_0 \neq \psi_0$, *entonces*

$$\begin{aligned}
M_\Omega M_\Psi = &-(q-1)\left[\left(\varepsilon_B\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)M_\Omega + \left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)M_\Psi\right] + \\
&+\left[-q^{2n-1} + q^{2n-3} + q^{2n-2} - 1\right](q-1)\,h_\psi
\end{aligned}$$

4. Si $A \neq B, \quad \Omega = \Omega^F, \quad \Psi = \Psi^F, \quad \omega_0 = \psi_0$*, entonces*

$$\begin{aligned}
M_\Omega M_\Psi = {} & q^{2n-3}(q^2-1)(q-1)S_{\omega_0} \\
& - \frac{1}{2}q^{n-2}(q-1)^2\left((q+1)\left[\varepsilon_A\varepsilon_Q M_\Omega + \varepsilon_B\varepsilon_Q M_\Psi\right]\right. \\
& - (q-1)\left[\left(\varepsilon_B\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)M_\Omega + \left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)M_\Psi\right] + \\
& + \left[-q^{2n-1}+q^{2n-3}+q^{2n-2}-1\right](q-1)\,h_\Psi
\end{aligned}$$

5. Si $A = B, \quad \Omega \neq \Psi, \quad \Omega \neq \Psi^F, \quad \omega = \psi$*, entonces*

$$M_\Omega M_\Psi = -(q-1)\left(\varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)\left[M_\Omega + M_\Psi\right] - \left(q^{n-1}+\varepsilon_A\varepsilon_Q\right)^2(q-1)\,h_\psi$$

6. Si $A = B, \quad (\Omega = \Psi$ *o excluyente* $\Omega = \Psi^F)$*, entonces*

$$\begin{aligned}
M_\Omega M_\Psi = {} & (q-1)\left[\varepsilon_A\varepsilon_Q q^n - (2\varepsilon_A\varepsilon_Q + \varepsilon_Q)\,q^{n-1} - 2\right]M_\Omega + \\
& + (q-1)\left(q^{n-1}+\varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\left(q^n - (1+\varepsilon_A q^{n-1} - \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\cdot h_\Psi
\end{aligned}$$

7. Si $A = B, \quad \Omega = \Psi = \Psi^F$*, entonces*

$$\begin{aligned}
M_\Omega M_\Psi = {} & q^{n-2}\left(q^{n-1}+\varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\frac{|A^\times|^2}{(q-1)}S_{\omega_0} + \\
& + (q-1)\,\varepsilon_Q\left[2\varepsilon_A q^n - 2(\varepsilon_A+1)\,q^{n-1} - 2 - \varepsilon_A q^{n-2}\left(\frac{|A^\times|}{(q-1)}\right)^2\right]M_\Omega + \\
& + (q-1)\left(q^{n-1}+\varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\left[q^n - q^{n-1} - q^{n-2} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right]\cdot h_\omega
\end{aligned}$$

Demostración: Al considerar los coeficientes de la compuesta de los operadores M_v y M_w en el teorema anterior, aparecen cuatro tipos de sumandos, los cuales permiten escribir la compuesta de los operadores M_Ω y M_Ψ a su vez en cuatro sumandos, cada uno de los cuales corresponde a uno de los lemas precedentes, de donde se sigue la demostración. □

Al traducir el teorema anterior en términos de los operador $\overline{M}$, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 10 *Sean* $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \Psi \in (B^\times)^\wedge$; *entonces*

1. Si $\omega \neq \psi$*, entonces*

$$\overline{M}_\Omega \overline{M}_\Psi = 0$$

2. *Si* $A = B$, $\Omega \neq \Psi$, $\Omega \neq \Psi^F$, $\omega = \psi$, *entonces*

$$\overline{M}_\Omega \overline{M}_\Psi = -q^{n-1}(q-1)\left[\varepsilon_B\varepsilon_Q \overline{M}_\Omega + \varepsilon_A\varepsilon_Q \overline{M}_\Psi\right] - \varepsilon_A\varepsilon_B q^{2n-2}(q-1)\, h_\psi$$

3. *Si* $A \neq B$, $\omega = \psi$, $(\Omega \neq \Omega^F$ *o* $\Psi \neq \Psi^F)$, *entonces*

$$\overline{M}_\Omega \overline{M}_\Psi = -q^{n-1}(q-1)\left[\varepsilon_B\varepsilon_Q \overline{M}_\Omega + \varepsilon_A\varepsilon_Q \overline{M}_\Psi\right] - \varepsilon_A\varepsilon_B q^{2n-2}(q-1)\, h_\psi$$

4. *Si* $A \neq B$, $\Omega = \Omega^F$, $\Psi = \Psi^F$, $\omega = \psi$, $\omega_0 \neq \psi_0$, *entonces*

$$\begin{aligned}\overline{M}_\Omega \overline{M}_\Psi = -q^{n-1}(q-1)\left[\varepsilon_B\varepsilon_Q \overline{M}_\Omega + \varepsilon_A\varepsilon_Q \overline{M}_\Psi\right] + \\ q^{2n-3}\left[-q^2 + q + 1\right](q-1)\, h_\psi\end{aligned}$$

5. *Si* $A \neq B$, $\Omega = \Omega^F$, $\Psi = \Psi^F$, $\omega_0 = \psi_0$, *entonces*

$$\begin{aligned}\overline{M}_\Omega \overline{M}_\Psi = q^{2n-3}(q^2-1)(q-1)S_{\psi_0} + q^{2n-3}\left[-q^2 + q + 1\right](q-1)\, h_\psi - \\ q^{n-2}(q-1)\frac{q^2 - 2q - 1}{2}\left[\varepsilon_B\varepsilon_Q \overline{M}_\Omega + \varepsilon_A\varepsilon_Q \overline{M}_\Psi\right]\end{aligned}$$

6. *Si* $A = B$, $(\Omega = \Psi$ *o excluyente* $\Omega = \Psi^F)$, *entonces*

$$\begin{aligned}\overline{M}_\Omega \overline{M}_\Psi = (q-1)\left[\varepsilon_A\varepsilon_Q q^n - (2\varepsilon_A\varepsilon_Q + \varepsilon_Q)\, q^{n-1}\right]\overline{M}_\Psi + \\ q^{2n-2}(q-1)\,(q - (1+\varepsilon_A)\cdot h_\psi\end{aligned}$$

7. *Si* $A = B$, $\Omega = \Psi = \Psi^F$, *entonces*

$$\begin{aligned}\overline{M}_\Omega \overline{M}_\Psi = q^{n-2}\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\frac{|A^\times|^2}{(q-1)}S_{\psi_0} + \\ \varepsilon_A\varepsilon_Q q^{n-2}(q-1)\left[q^2 - 2q - 1\right]\overline{M}_\Psi + \\ (q-1)\, q^{2n-3}\left[q^2 - q - 1\right]\cdot h_\psi\end{aligned}$$

Demostración:

En la demostración hay que tener presente solamente los siguientes dos casos:

Si $\omega \neq \psi$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{M}_\Omega \overline{M}_\Psi &= (M_\Omega + h_\omega)(M_\Psi + h_\psi) \\ &= M_\Omega M_\Psi + M_\Omega h_\psi + M_\Psi h_\omega + h_\psi h_\omega \\ &= 0\end{aligned}$$

Si $\omega = \psi$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{M}_{\Omega}\overline{M}_{\Psi} &= (M_{\Omega} + h_{\omega})\,(M_{\Psi} + h_{\Psi}) \\
&= M_{\Omega}M_{\Psi} + M_{\Omega}h_{\psi} + M_{\Psi}h_{\omega} + h_{\psi}h_{\omega} \\
&= M_{\Omega}M_{\Psi} + (q-1)M_{\Omega} + (q-1)M_{\Psi} + (q-1)h_{\psi}
\end{aligned}$$

□

Capítulo 8

Los proyectores del álgebra $End_G(L^2(E_1))$.

El objetivo de este capítulo es explicitar una familia completa de idempotentes primitivos y ortogonales del álgebra $End_G(L^2(E_1))$. Para proceder en esta dirección, podemos observar que el teorema anterior sugiere introducir una primera normalización del operador $\overline{M}_\Omega$, dada por:

Definición 14 *Sea $\Omega \in (A^\times)^\wedge$, entonces definimos*

$$\widetilde{M_\Omega} = \frac{1}{q^{n-1}(q-1)}\overline{M}_\Omega$$

Definición 15 *Recordemos las notaciones que estamos empleando en esta tesis, antes de enunciar el siguiente teorema:*

1. *Para un carácter de $A^\times$ que es un levantamiento de un carácter de $k^\times$, usamos la letra en minúscula sub cero para denotar el carácter del cual procede.Por ejemplo, si $\Omega = \Omega^F$ entonces $\Omega = \omega_0 \circ \mathrm{N}_A$.*

2. *Para un carácter de $A^\times$, usamos la letra en minúscula para denotar la restricción a $k^\times$. Por ejemplo, cuando $\Omega \in (A^\times)^\wedge$, entonces $\Omega|_{k^\times} = \omega$.*

Con la normalización que hemos introducido, el teorema 10 se traduce en términos de los operadores $\widetilde{M_\Omega}$ por el:

Teorema 11 *Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \Psi \in (B^\times)^\wedge$.*

1. *Si $\omega \neq \psi$, entonces*

$$\widetilde{M_\Omega}\widetilde{M_\Psi} = 0.$$

2. *Si $A = B$, $\quad \Omega \neq \Psi, \quad \Omega \neq \Psi^F, \quad \omega = \psi$, entonces*

$$\widetilde{M_\Omega}\widetilde{M_\Psi} = -\varepsilon_Q\left[\varepsilon_B\widetilde{M_\Omega} + \varepsilon_A\widetilde{M_\Psi}\right] - \varepsilon_A\varepsilon_B\widetilde{h}_\psi.$$

3. *Si* $A \neq B$, $(\Omega \neq \Omega^F$ *o* $\Psi \neq \Psi^F)$ *y* $\omega = \psi$, *entonces*

$$\widetilde{M}_\Omega \widetilde{M}_\Psi = -\varepsilon_Q \left[\varepsilon_B \widetilde{M}_\Omega + \varepsilon_A \widetilde{M}_\Psi\right] - \varepsilon_A \varepsilon_B \widetilde{h}_\psi.$$

4. *Si* $A \neq B$, $\Omega = \Omega^F$, $\Psi = \Psi^F$, $\omega = \psi$, $\omega_0 \neq \psi_0$, *entonces*

$$\widetilde{M}_\Omega \widetilde{M}_\Psi = -\left[\varepsilon_B \varepsilon_Q \widetilde{M}_\Omega + \varepsilon_A \varepsilon_Q \widetilde{M}_\Psi\right] + \left[\frac{-q^2+q+1}{q}\right] \widetilde{h}_\psi.$$

5. *Si* $A \neq B$, $\Omega = \Omega^F$, $\Psi = \Psi^F$, $\omega_0 = \psi_0$, *entonces*

$$\overline{M}_\Omega \overline{M}_\Psi = \frac{q+1}{q} S_{\psi_0} - \frac{q^2+2q-1}{2q}\left[\varepsilon_B \varepsilon_Q \widetilde{M}_\Omega + \varepsilon_A \varepsilon_Q \widetilde{M}_\Psi\right] + \left[\frac{-q^2+q+1}{q}\right] \widetilde{h}_\psi.$$

6. *Si* $A = B$, $(\Omega = \Psi$ *o excluyente* $\Omega = \Psi^F)$, *entonces*

$$\widetilde{M}_\Omega \widetilde{M}_\Psi = \varepsilon_A \varepsilon_Q \left[q - 2 - \varepsilon_A)\right] \widetilde{M}_\Psi + (q - 1 - \varepsilon_A) \cdot \widetilde{h}_\psi.$$

7. *Si* $A = B$, $\Omega = \Psi = \Psi^F$, *entonces*

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_\Omega \widetilde{M}_\Psi = &\frac{(q^{n-1} + \varepsilon_A \varepsilon_Q)(q - \varepsilon_A)^2}{q^n(q-1)} S_{\psi_0} + \varepsilon_A \varepsilon_Q \frac{q^2 - 2q - 1}{q} \widetilde{M}_\Psi \\ &+ \frac{q^2 - q - 1}{q} \cdot \widetilde{h}_\psi.\end{aligned}$$

Observación: Notemos que los casos en los cuales se separa este teorema es equivalente a preguntarse cuales son los posibles cardinales de los conjuntos $\{\Omega\Omega^F, \Psi\Psi^F\}$,$\{\Omega, \Omega^F, \Psi, \Psi^F\}$

Definición 16 *Sea* A *una álgebra cuadrática sobre* k *y* $\Omega \in (A^\times)^\wedge$; *entonces* Ω *se llama genérico si y sólo si* $\Omega \neq \Omega^F$.

8.1 Construcción de los proyectores

Al considerar las igualdades 1, 2 y 3 del teorema anterior y la búsqueda de proyectores (es decir, idempotentes), podemos expresar la condición de idempotencia como un sistema de ecuaciones, cuya resolución nos lleva a la siguiente definición.

Definición 17 *Sea $\Omega \in (A^\times)^\wedge$; introducimos*

$$P_\Omega = \frac{1}{q-\varepsilon_A}\left(\widetilde{h}_\omega + \varepsilon_A\varepsilon_Q\widetilde{M}_\Omega\right) = P_{\Omega^F}$$

Teorema 12 *Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \Psi \in (B^\times)^\wedge$, entonces*

1. *Si $(\omega \neq \psi)$ o $(A = B,\ \Omega \neq \Psi,\ \Omega \neq \Psi^F,\ \omega = \psi)$ o $(A \neq B,\ \omega = \psi,\ (\Omega \neq \Omega^F$ o $\Psi \neq \Psi^F))$, entonces*

$$P_\Omega P_\Psi = 0$$

2. *Si $A \neq B,\ \Omega = \Omega^F,\ \Psi = \Psi^F,\ \omega = \psi,\ \omega_0 \neq \psi_0$, entonces*

$$P_\Omega P_\Psi = \frac{1}{q}\widetilde{h}_\psi$$

3. *Si $A \neq B,\ \Omega = \Omega^F,\ \Psi = \Psi^F,\ \omega_0 = \psi_0$, entonces*

$$P_\Omega P_\Psi = \frac{1}{q(q-1)}S_{\psi_0} + \frac{1}{q}\widetilde{h}_\psi$$

4. *Si $A = B,\ (\Omega = \Psi$ o bien $\Omega = \Psi^F)$, entonces*

$$P_\Omega P_\Psi = P_\Omega$$

5. *Si $A = B,\ \Omega = \Psi = \Psi^F$, entonces*

$$P_\Omega P_\Psi = \frac{1}{q}\left[\left(q^{n-1} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\right)\left(q^n - \varepsilon_Q\right)\widetilde{S}_{\psi_0} + \left(q + \varepsilon_A\right)P_\Omega\right]$$

Demostración: Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \Psi \in (B^\times)^\wedge$, entonces

$$\begin{aligned} P_\Omega P_\Psi &= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)(q-\varepsilon_B)}\left(\widetilde{h}_\omega + \varepsilon_A\varepsilon_Q\widetilde{M}_\Omega\right)\left(\widetilde{h}_\Psi + \varepsilon_B\varepsilon_Q\widetilde{M}_\Psi\right) \\ &= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)(q-\varepsilon_B)}\left(\varepsilon_B\varepsilon_A\widetilde{M}_\Omega\widetilde{M}_\Psi + \varepsilon_A\varepsilon_Q\widetilde{h}_\psi\widetilde{M}_\Omega + \varepsilon_B\varepsilon_Q\widetilde{h}_\omega\widetilde{M}_\Psi + \widetilde{h}_\omega\widetilde{h}_\psi\right) \end{aligned}$$

Notemos tres posibles casos.

Primer caso: $\omega \neq \psi$

Entonces

$$\widetilde{M}_\Omega \widetilde{M}_\Psi = \widetilde{h}_\psi \widetilde{M}_\Omega = \widetilde{h}_\omega \widetilde{M}_\Psi = \widetilde{h}_\omega \widetilde{h}_\psi = 0,$$

luego

$$P_\Omega P_\Psi = \frac{1}{(q-\varepsilon_A)(q-\varepsilon_B)} \cdot 0 = 0$$

Segundo caso: $\omega = \psi; \quad M_\Omega \neq M_\Psi$
Entonces

$$\begin{aligned} P_\Omega P_\Psi &= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)(q-\varepsilon_B)} \left(\varepsilon_B \varepsilon_A \widetilde{M}_\Omega \widetilde{M}_\Psi + \varepsilon_A \varepsilon_Q \widetilde{h}_\psi \widetilde{M}_\Omega + \varepsilon_B \varepsilon_Q \widetilde{h}_\omega \widetilde{M}_\Psi + \widetilde{h}_\omega \widetilde{h}_\psi \right) \\ &= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)(q-\varepsilon_B)} \left(\varepsilon_B \varepsilon_A \widetilde{M}_\Omega \widetilde{M}_\Psi + \varepsilon_A \varepsilon_Q \widetilde{M}_\Omega + \varepsilon_B \varepsilon_Q \widetilde{M}_\Psi + \widetilde{h}_\psi \right) \end{aligned}$$

Tercer caso: $M_\Omega = M_\Psi$
Entonces

$$\begin{aligned} P_\Omega P_\Omega &= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)^2} \left(\widetilde{M}_\Omega \widetilde{M}_\Omega + 2\varepsilon_A \varepsilon_Q \widetilde{h}_\omega \widetilde{M}_\Omega + \widetilde{h}_\omega \widetilde{h}_\omega \right) \\ &= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)^2} \left(\widetilde{M}_\Omega \widetilde{M}_\Omega + 2\varepsilon_A \varepsilon_Q \widetilde{M}_\Omega + \widetilde{h}_\omega \right). \end{aligned}$$

La demostración concluye aplicando uno de los tres casos anteriores a las distintas alternativas del teorema anterior. □

Notemos que el teorema 12 suministra una familia de idempotentes primitivos del álgebra conmutante que aún no es completa, ya que su cardinal debería ser igual a la dimensión del algebra de nucleos G-invariantes y aún no lo es.

Observación: Sea A una álgebra cuadrática sobre k. Tenemos que el grupo de Galois $\Gamma = \{\mathrm{Id}, F\}$ actúa sobre el conjunto $X = \{\Omega \in (A^\times)^\wedge \mid \Omega$ carácter genérico$\}$, con

$$\frac{(q-1)(q-1-\varepsilon_A)}{2}$$

órbitas. Denotemos por $A_1^\wedge$ un sistema de representantes de estas órbitas

Entonces la subfamilia de operadores:

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ P_\Omega \mid \Omega \in (k \times k)_1^\wedge \right\} \cup \left\{ P_\Omega \mid \Omega \in (\mathbb{K})_1^\wedge \right\}$$

es una familia de proyectores ortogonales.

En la búsqueda de los proyectores que faltan, podemos establecer las siguientes proposiciones.

Proposición 74 *Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \alpha \in (k^\times)^\wedge$, entonces*

$$P_\Omega S_\alpha = \left(\varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) \delta_{\Omega, \alpha \circ \mathrm{N}_A} S_\alpha$$
$$P_\Omega \widetilde{S}_\alpha = \left(\varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) \delta_{\Omega, \alpha \circ \mathrm{N}_A} \widetilde{S}_\alpha$$

Además, si $\Omega \neq \Omega^F$

$$P_\Omega S_\alpha = 0$$

Demostración: Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \alpha \in (k^\times)^\wedge$, entonces

$$\begin{aligned}
P_\Omega S_\alpha &= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)} \left(\widetilde{h}_\omega + \varepsilon_A \varepsilon_Q \widetilde{M_\Omega}\right) S_\alpha \\
&= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)} \left(\widetilde{h}_\omega S_\alpha + \varepsilon_A \varepsilon_Q \widetilde{M_\Omega} S_\alpha\right) \\
&= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)(q-1)} \left[h_\omega S_\alpha + \frac{\varepsilon_A \varepsilon_Q}{q^{n-1}} (M_\Omega + h_\omega) S_\alpha\right] \\
&= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)(q-1)} \left[\frac{q^{n-1} + \varepsilon_A \varepsilon_Q}{q^{n-1}} h_\omega S_\alpha + \frac{\varepsilon_A \varepsilon_Q}{q^{n-1}} M_\Omega S_\alpha\right] \\
&= \frac{q^{n-1} + \varepsilon_A \varepsilon_Q}{q^{n-1}(q-\varepsilon_A)} \delta_{\omega, \alpha^2} S_\alpha - \frac{q^{n-1} + \varepsilon_A \varepsilon_Q}{q^{n-1}(q-\varepsilon_A)} \delta_{\omega, \alpha^2} S_\alpha + \left(\varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) \delta_{\Omega, \alpha \circ \mathrm{N}_A} S_\alpha \\
&= \left(\varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) \delta_{\Omega, \alpha \circ \mathrm{N}_A} S_\alpha.
\end{aligned}$$

□

Proposición 75 *Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \alpha \in (k^\times)^\wedge$, entonces*

$$P_\Omega h_\alpha = (q-1)\, \delta_{\omega, \alpha} P_\Omega$$
$$P_\Omega \widetilde{h}_\alpha = \delta_{\omega, \alpha} P_\Omega$$

Demostración: Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \alpha \in (k^\times)^\wedge$

$$\begin{aligned}
P_\Omega h_\alpha &= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)} \left(\widetilde{h}_\omega + \varepsilon_A \varepsilon_Q \widetilde{M_\Omega}\right) h_\alpha \\
&= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)} \left(\widetilde{h}_\omega h_\alpha + \varepsilon_A \varepsilon_Q \widetilde{M_\Omega} h_\alpha\right) \\
&= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)(q-1)} \left[h_\omega h_\alpha + \frac{\varepsilon_A \varepsilon_Q}{q^{n-1}} (M_\Omega + h_\omega) h_\alpha\right] \\
&= \frac{1}{(q-\varepsilon_A)(q-1)} \left[\frac{q^{n-1} + \varepsilon_A \varepsilon_Q}{q^{n-1}} h_\omega h_\alpha + \frac{\varepsilon_A \varepsilon_Q}{q^{n-1}} M_\Omega h_\alpha\right]
\end{aligned}$$

evaluando en los respectivos productos, tenemos

$$\begin{aligned}
P_\Omega h_\alpha &= \left[\frac{q^{n-1}+\varepsilon_A\varepsilon_Q}{q^{n-1}(q-\varepsilon_A)}h_\omega + \frac{\varepsilon_A\varepsilon_Q}{q^{n-1}(q-\varepsilon_A)}M_\Omega\right]\delta_{\alpha,\omega} \\
&= \left[\frac{1}{(q-\varepsilon_A)}h_\omega + \frac{\varepsilon_A\varepsilon_Q}{q^{n-1}(q-\varepsilon_A)}\overline{M}_\Omega\right]\delta_{\alpha,\omega} \\
&= \left[\frac{(q-1)}{(q-\varepsilon_A)}\widetilde{h}_\omega + \frac{\varepsilon_A\varepsilon_Q(q-1)}{(q-\varepsilon_A)}\widetilde{M_\Omega}\right]\delta_{\alpha,\omega} \\
&= \frac{(q-1)}{(q-\varepsilon_A)}\left[\widetilde{h}_\omega + \varepsilon_A\varepsilon_Q\widetilde{M_\Omega}\right]\delta_{\alpha,\omega} \\
&= (q-1)\,\delta_{\alpha,\omega}P_\Omega.
\end{aligned}$$

□

Los operadores que son transformadas de Mellin de los operadores de promedio esférico son ortogonales a los proyectores de la familia $\mathcal{F}_1$, pero no así las transformadas de Mellin de loa operadores de homotecia, lo que nos lleva a resolver nuevos sistemas con las relaciones que ya tenemos, de los cuales obtenemos los siguientes resultados.

Proposición 76 *Sea* $\alpha \in (k^\times)^\wedge$, *entonces*

$$(q-1)\,P_{\alpha\circ\mathrm{N}_{k\times k}} - (q+1)\,P_{\alpha\circ\mathrm{N}_{\mathbb{K}}} = \frac{2\varepsilon_Q}{q^{n-1}(q-1)}S_\alpha$$

donde $\mathrm{N}_{k\times k}$, *es la norma asociada al álgebra* $k\times k$, $\mathrm{N}_{\mathbb{K}}$ *es la norma asociada al álgebra* $\mathbb{K}$.

Observación: Otra forma de escribir la propiedad anterior es

$$\sum_A \varepsilon_A\,|U_1(A)|\,P_{\alpha\circ\mathrm{N}_A} = \frac{2\varepsilon_Q}{q^{n-1}(q-1)}S_\alpha$$

donde A recorre los dos tipos de isomorfía de álgebras cuadráticas, $\alpha \in (k^\times)^\wedge$, y $U_1(A)$ es el círculo unitario de A.

Demostración: Sea $\alpha \in (k^\times)^\wedge$, denotemos $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_{k\times k}; \mathrm{N}_2 = \mathrm{N}_{\mathbb{K}}$. Por proposición 58 tenemos

$$\begin{aligned}
2S_\alpha &= \overline{M}_{\alpha\circ\mathrm{N}_1} + \overline{M}_{\alpha\circ\mathrm{N}_2} \\
2\frac{\varepsilon_Q}{q^n(q-1)}S_\alpha &= \frac{\varepsilon_Q}{q^n(q-1)}\overline{M}_{\alpha\circ\mathrm{N}_1} + \frac{\varepsilon_Q}{q^n(q-1)}\overline{M}_{\alpha\circ\mathrm{N}_2} \\
2\frac{\varepsilon_Q}{q^n(q-1)}S_\alpha &= \varepsilon_Q\widetilde{M}_{\alpha\circ\mathrm{N}_1} + \varepsilon_Q\widetilde{M}_{\alpha\circ\mathrm{N}_2} \\
2\frac{\varepsilon_Q}{q^n(q-1)}S_\alpha &= h_{\alpha^2} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\widetilde{M}_{\alpha\circ\mathrm{N}_1} - h_{\alpha^2} - \varepsilon_B\varepsilon_Q\widetilde{M}_{\alpha\circ\mathrm{N}_2} \\
2\frac{\varepsilon_Q}{q^n(q-1)}S_\alpha &= \left(h_{\alpha^2} + \varepsilon_A\varepsilon_Q\widetilde{M}_{\alpha\circ\mathrm{N}_1}\right) - \left(h_{\alpha^2} + \varepsilon_B\varepsilon_Q\widetilde{M}_{\alpha\circ\mathrm{N}_2}\right) \\
2\frac{\varepsilon_Q}{q^n(q-1)}S_\alpha &= (q-1)\,P_{\alpha\circ\mathrm{N}_1} - (q+1)\,P_{\alpha\circ\mathrm{N}_2}
\end{aligned}$$

Definición 18 *Sea $\alpha \in (k^\times)^\wedge$, entonces*

$$T_\alpha = \frac{q}{q+1}P_{(\alpha,\alpha)} - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\widetilde{S}_\alpha$$

Proposición 77 *Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \alpha, \beta \in (k^\times)^\wedge$, entonces*

1. $T_\alpha\widetilde{S}_\beta = 0$.
2. $T_\alpha T_\beta = \delta_{\alpha,\beta}T_\alpha$.
3. *Si $\Omega \neq \Omega^F$ entonces $T_\alpha P_\Omega = 0$.*

Demostración: Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \alpha, \beta \in (k^\times)^\wedge$

1.

$$\begin{aligned}
T_\alpha\widetilde{S}_\beta &= \left[\frac{q}{q+1}P_{(\alpha,\alpha)} - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\widetilde{S}_\alpha\right]\widetilde{S}_\beta \\
&= \frac{q}{q+1}P_{(\alpha,\alpha)}\widetilde{S}_\beta - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\widetilde{S}_\alpha\widetilde{S}_\beta \\
&= \frac{q\left(\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)}{q+1}\delta_{\alpha,\beta}\widetilde{S}_\beta - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\delta_{\alpha,\beta}\widetilde{S}_\beta \\
&= 0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
T_\alpha T_\beta &= \left[\frac{q}{q+1}P_{(\alpha,\alpha)} - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\widetilde{S}_\alpha\right]\left[\frac{q}{q+1}P_{(\beta,\beta)} - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\widetilde{S}_\beta\right] \\
&= \left(\frac{q}{q+1}\right)^2 P_{(\alpha,\alpha)}P_{(\beta,\beta)} - \left(\frac{q}{q+1}\right)^2\left(\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)\left[P_{(\beta,\beta)}\widetilde{S}_\alpha + P_{(\alpha,\alpha)}\widetilde{S}_\beta\right] + \\
&\quad \left(\frac{q}{q+1}\right)^2\left(\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)^2\widetilde{S}_\alpha\widetilde{S}_\beta
\end{aligned}$$

Si $\alpha = \beta$, entonces

$$\begin{aligned}
T_\alpha^2 = &\left(\frac{q}{q+1}\right)^2 \left[\frac{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)(q^n-\varepsilon_Q)}{q}\widetilde{S}_\alpha + \frac{q+1}{q}P_{(\alpha,\alpha)}\right] - \\
&2\left(\frac{q}{q+1}\right)^2 \left(\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)^2 \widetilde{S}_\alpha + \left(\frac{q}{q+1}\right)^2 \left(\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)^2 \cdot \widetilde{S}_\alpha \\
= &\left(\frac{q}{q+1}\right)^2 \left[\frac{(q^{n-1}+\varepsilon_Q)(q^n-\varepsilon_Q)}{q}\widetilde{S}_\alpha + \frac{q+1}{q}\cdot P_{(\alpha,\alpha)}\right] - \left(\frac{q}{q+1}\right)^2 \left(\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)^2 \widetilde{S}_\alpha \\
= &\frac{q}{q+1}\cdot P_{(\alpha,\alpha)} - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\widetilde{S}_\alpha = T_\alpha
\end{aligned}$$

Si $\alpha \neq \beta$, entonces

$$\begin{aligned}
T_\alpha T_\beta = &\left[\frac{q}{q+1}\cdot P_{(\alpha,\alpha)} - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\widetilde{S}_\alpha\right]\left[\frac{q}{q+1}\cdot P_{(\beta,\beta)} - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\widetilde{S}_\beta\right] \\
= &\left(\frac{q}{q+1}\right)^2 \cdot P_{(\alpha,\alpha)}P_{(\beta,\beta)} - \left(\frac{q}{q+1}\right)^2 \left(\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)\cdot\left[P_{(\beta,\beta)}\widetilde{S}_\alpha + P_{(\gamma,\gamma)}\widetilde{S}_\beta\right] + \\
&\left(\frac{q}{q+1}\right)^2 \left(\varepsilon_Q q^{n-1}+1\right)^2 \widetilde{S}_\alpha\widetilde{S}_\beta \\
= &\,0
\end{aligned}$$

3. Si $\Omega \neq \Omega^F$, entonces

$$\begin{aligned}
T_\alpha P_\Omega &= \left[\frac{q}{q+1}P_{(\alpha,\alpha)} - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\widetilde{S}_\alpha\right]P_\Omega \\
&= \frac{q}{q+1}P_{(\alpha,\alpha)}P_\Omega - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\widetilde{S}_\alpha P_\Omega \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 13 *Sean (E,Q) un espacio cuadrático de dimensión par sobre k y sea A un álgebra cuadrática sobre k. y $A_1^\wedge$ es un sistema de representantes de las órbitas.del grupo de Galois sobre el conjunto de caracteres genérico.sobre $(A^\times)^\wedge$. Entonces*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = &\left\{T_\Omega \quad : \quad \Omega \in \left(k^\times\right)^\wedge\right\} \cup \left\{\widetilde{S}_\Omega \quad : \quad \Omega \in \left(k^\times\right)^\wedge\right\} \\
&\cup \left\{P_\Omega \quad : \quad \Omega \in \mathbb{K}_1^\wedge\right\} \cup \left\{P_\Omega \quad : \quad \Omega \in (k\times k)_1^\wedge\right\}
\end{aligned}$$

es una familia completa de idempotentes primitivos y ortogonales para el álgebra $End_G(L^2(E_1))$.

8.2 Calculo de trazas

A continuación calcularemos la dimensión de los respectivos espacios imagen de los proyectores.

Proposición 78 *Sean* $v \in A^{\times}, \Omega \in (A^{\times})^{\wedge}$, *entonces*

1. $\mathrm{Tr}(M_v) = 0$
2. $\mathrm{Tr}(\overline{M}_v) = |E_1|\,\delta_1(v)$
3. $\mathrm{Tr}(M_\Omega) = 0$
4. $\mathrm{Tr}(\overline{M}_\Omega) = |E_1|$
5. $\mathrm{Tr}(\widetilde{M}_\Omega) = \frac{|E_1|}{q^{n-1}(q-1)}$

Demostración: Sean $v \in A^{\times}, \Omega \in (A^{\times})^{\wedge}$. Entonces

1.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(M_v\right) &= \sum_{x\in E_1} M_v\left(\delta_x\right)(x)\\ &= \sum_{x\in E_1}\sum_{\substack{y\in E_1\\ B(x,y)=\mathrm{Tr}(v)Q(x)\\ Q(y)=\mathrm{N}(v)Q(x)\\ \{x,y\}\ \mathrm{l.i.}}} \delta_x(y) = 0\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(M_v\right) = \sum_{x\in E_1}\overline{M}_v\left(\delta_x\right)(x) &= \sum_{x\in E_1}\sum_{\substack{y\in E_1\\ B(x,y)=\mathrm{Tr}(v)Q(x)\\ Q(y)=\mathrm{N}(v)Q(x)}}\delta_x(y)\\ &= \sum_{x\in E_1}\delta_1(v) = |E_1|\,\delta_1(v)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(M_\Omega\right) &= \sum_{v\in A}\Omega(v)\,\mathrm{Tr}\left(M_v\right)\\ &= \sum_{v\in A}\Omega(v)\,0\\ &= 0.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left(\overline{M}_{\Omega}\right) &= \sum_{v\in A^{\times}} \Omega(v)\operatorname{Tr}\left(\overline{M}_{v}\right) \\ &= \sum_{v\in A^{\times}} \Omega(v)\,|E_1|\,\delta_1(v) \\ &= |E_1| \sum_{v\in A^{\times}} \Omega(v)\,\delta_1(v) \\ &= |E_1|\,.\end{aligned}$$

□

Proposición 79 *Sean* $t \in k^{\times}, \Omega \in (k^{\times})^{\wedge}$, *entonces*

1. $\operatorname{Tr}(h_t) = |E_1|\,\delta_1(t)$
2. $\operatorname{Tr}(S_t) = |E_1|\,\delta_1(t)$
3. $\operatorname{Tr}(h_\Omega) = |E_1|$
4. $\operatorname{Tr}(S_\Omega) = |E_1|$

Demostración: Sean $t \in k^{\times}, \Omega \in (k^{\times})^{\wedge}$. Entonces

1.

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(h_t) &= \sum_{x\in E_1} h_t(\delta_x)(x) \\ &= \sum_{x\in E_1} \delta_x(tx) = |E_1|\cdot\delta_1(t)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(S_t) &= \sum_{x\in E_1} S_t(\delta_x)(x) = \sum_{x\in E_1} \sum_{\substack{y\in E_1\\ Q(y)=tQ(x)}} \delta_x(y) \\ &= \sum_{x\in E_1} \delta_1(v) = |E_1|\,\delta_1(t)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(h_\Omega) &= \sum_{t\in k^{\times}} \Omega(t)\operatorname{Tr}(h_t) \\ &= \sum_{t\in k^{\times}} \Omega(t)\,|E_1|\,\delta_1(t) \\ &= |E_1|\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(S_\Omega) &= \sum_{t\in k^\times} \Omega(t) \operatorname{Tr}(S_t) \\
&= \sum_{t\in k^\times} \Omega(t) |E_1| \delta_1(t) \\
&= |E_1|
\end{aligned}$$

□

Proposición 80 *Sea* $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \quad \Omega \neq \Omega^F, \quad \alpha \in (k^\times)^\wedge$, *entonces*

1.

$$\operatorname{Tr}(P_\Omega) = \frac{(q^n - \varepsilon_Q)(q^{n-1} + \varepsilon_A \varepsilon_Q)}{q - \varepsilon_A}$$

2.

$$\operatorname{Tr}(\widetilde{S}_\alpha) = 1$$

3.

$$\operatorname{Tr}(T_\alpha) = \frac{q^2 (q^{2n-2} - 1)}{q^2 - 1}$$

Demostración: Sean $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \quad \Omega \neq \Omega^F, \quad \alpha \in (k^\times)^\wedge$; entonces

1.

$$\begin{aligned}
P_\Omega &= \frac{1}{q - \varepsilon_A} \left(\widetilde{h}_\omega + \varepsilon_A \varepsilon_Q \widetilde{M_\Omega} \right) \\
\operatorname{Tr}(P_\Omega) &= \frac{1}{q - \varepsilon_A} \left(\operatorname{Tr}\left(\widetilde{h}_\omega\right) + \varepsilon_A \varepsilon_Q \operatorname{Tr}\left(\widetilde{M_\Omega}\right) \right) \\
&= \frac{1}{q - \varepsilon_A} \left(\frac{|E_1|}{q-1} + \varepsilon_A \varepsilon_Q \frac{|E_1|}{q^{n-1}(q-1)} \right) \\
&= \frac{1}{q - \varepsilon_A} \left(q^{n-1}(q^n - \varepsilon_Q) + \varepsilon_A \varepsilon_Q (q^n - \varepsilon_Q) \right) \\
&= \frac{(q^n - \varepsilon_Q)(q^{n-1} + \varepsilon_A \varepsilon_Q)}{q - \varepsilon_A}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\widetilde{S}_\alpha\right) &= \frac{1}{q^{n-1}\left(q^n-\varepsilon_Q\right)\left(q-1\right)}\mathrm{Tr}\left(S_\alpha\right)\\
&= \frac{1}{q^{n-1}\left(q^n-\varepsilon_Q\right)\left(q-1\right)}\left|E_1\right|\\
&= 1
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(T_\alpha\right) &= \frac{q}{q+1}\mathrm{Tr}\left(P_{(\alpha,\alpha)}\right) - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\mathrm{Tr}\left(\widetilde{S}_\alpha\right)\\
&= \frac{q}{q+1}\cdot\frac{\left(q^n-\varepsilon_Q\right)\left(q^{n-1}+\varepsilon_Q\right)}{q-1} - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\\
&= \frac{\left(q^n-\varepsilon_Q\right)\left(q^n+\varepsilon_Q q\right) - \left(\varepsilon_Q q^n + q\right)\left(q-1\right)}{\left(q+1\right)\left(q-\varepsilon_A\right)}\\
&= \frac{q^2\left(q^{2n-2}-1\right)}{q^2-1}.
\end{aligned}$$

□

Observación: Notemos que con la suma de todas las posibles trazas, obtenemos el cardinal del conjunto E_1 de los vectores anisótropos, lo cual (re)demuestra que nuestra familia de proyectores es completa:

$$\begin{aligned}
&\frac{q(q-1)}{2}\frac{\left(q^n-\varepsilon_Q\right)\left(q^{n-1}-\varepsilon_Q\right)}{q+1} + \frac{(q-2)(q-1)}{2}\frac{\left(q^n-\varepsilon_Q\right)\left(q^{n-1}+\varepsilon_Q\right)}{q-1} +\\
&(q-1)+(q-1)\frac{q^2\left(q^{2n-2}-1\right)}{q^2-1}\\
&= \frac{\left(q^n-\varepsilon_Q\right)}{2\left(q+1\right)}\left[\left(q^{n-1}-\varepsilon_Q\right)q(q-1) + (q-2)(q+1)\left(q^{n-1}+\varepsilon_Q\right)\right] + \frac{q^{2n}-1}{q+1}\\
&= \left(q^n-\varepsilon_Q\right)q^{n-1}\left(q-1\right) = \left|E_1\right|
\end{aligned}$$

Teorema 14 *Sean (E,Q) un espacio cuadrático de dimensión $2n$ sobre k y sea A un álgebra cuadrática sobre k, entonces la representación $L^2(E_1)$ de G se descompone en irreducibles como sigue:*

$$L^2(E_1) = \left(\bigoplus_{\Omega\in\mathbb{K}_1^\wedge}\mathrm{Im}\,P_\Omega\right)\oplus\left(\bigoplus_{\Omega\in(k\times k)_1^\wedge}\mathrm{Im}\,P_\Omega\right)\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in(k^\times)^\wedge}\mathrm{Im}\,\widetilde{S}_\alpha\right)\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in(k^\times)^\wedge}\mathrm{Im}\,T_\alpha\right)$$

con

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Im}\,P_\Omega) &= \frac{\left(q^n-\varepsilon_Q\right)\left(q^{n-1}+\varepsilon_A\varepsilon_Q\right)}{q-\varepsilon_A},\\
\dim(\mathrm{Im}\,\widetilde{S}_\alpha) &= 1,\\
\dim(\mathrm{Im}\,T_\alpha) &= \frac{q^2\left(q^{2n-2}-1\right)}{q^2-1}
\end{aligned}$$

8.3 Descripción de los subespacios irreducibles de $L^2(E_1)$.

Antes de describir las imágenes de los proyectores, reescribiremos los proyectores.

Sea $\Omega \in (A^\times)^\wedge$, tal que $\Omega \neq \Omega^F$; entonces

$$P_\Omega = \frac{1}{|A^\times|}h_\omega + \frac{\varepsilon_A\varepsilon_Q}{|A^\times|\,q^{n-1}}(M_\Omega + h_\omega)$$
$$P_\Omega = \frac{q^{n-1}+\varepsilon_A\varepsilon_Q}{q^{n-1}|A^\times|}h_\omega + \frac{\varepsilon_A\varepsilon_Q}{|A^\times|\,q^{n-1}}M_\Omega$$

Sea $\alpha \in (k^\times)^\wedge$,

$$T_\alpha = \frac{q}{q+1}P_{(\alpha,\alpha)} - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1}\widetilde{S}_\alpha$$

además usando la proposición 55 tenemos

Proposición 81 *Sea $\Omega \in (A^\times)^\wedge, \alpha, \beta \in (k^\times)^\wedge$, entonces*

1. $\widetilde{h}_\alpha P_\Omega = \delta_{\alpha,\omega}P_\Omega$.
2. $\widetilde{h}_\alpha S_\beta = \delta_{\alpha,\beta^2}S_\beta$.
3. $\widetilde{h}_\alpha T_\beta = \delta_{\alpha,\beta^2}T_\beta$.

□

Además recordemos la descomposición básica obtenida a partir de los operadores de homotecia, los cuales son diagonalizables simultáneamente:

$$L^2(E_1) = \oplus_{\gamma\in(k^\times)^\wedge}V_\gamma$$

donde $V_\gamma = \{f \in L^2(E_1) \quad | \quad f(tx) = \gamma(t)f(x) \quad \forall t \in k^\times\}$

Lema 82 *Dados $\alpha, \gamma \in (k^\times)^\wedge$, $f \in V_\gamma$, se tiene*

$$\widetilde{h}_\alpha f = \delta_{\alpha,\gamma^{-1}}f$$

Demostración: Evaluando en $x \in E_1$

$$\left(\widetilde{h}_\alpha f\right)(x) = \frac{1}{q-1}\sum_{t\in k^\times}(\alpha\gamma)(t)f(x)$$
$$= \delta_{\alpha,\gamma^{-1}}f(x).$$

□

Proposición 83 *Sea* $\alpha \in (k^\times)^\wedge$, *entonces*

$$V_\alpha = \left(\bigoplus_{\Omega \in \mathbb{K}_1^\wedge,\quad \Omega|_{k^\times} = \alpha^{-1}} \operatorname{Im} P_\Omega \right) \oplus \left(\bigoplus_{\Omega \in (k\times k)_1^\wedge,\quad \Omega|_{k^\times} = \alpha^{-1}} \operatorname{Im} P_\Omega \right) \oplus$$
$$\left(\bigoplus_{\beta \in (k^\times)^\wedge,\quad \beta^2 = \alpha^{-1}} \operatorname{Im} T_\beta \right) \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in (k^\times)^\wedge,\quad \beta^2 = \alpha^{-1}} \operatorname{Im} \widetilde{S}_\beta \right)$$

Los espacios imagen de los proyectores

En una primera etapa, describiremos la ecuación funcional para el proyector P_Ω, con $f \in \operatorname{Im} P_\Omega$

$$\begin{aligned} f &= P_\Omega f \\ f &= \frac{q^{n-1} + \varepsilon_A \varepsilon_Q}{q^{n-1}\left|A^\times\right|} h_\omega f + \frac{\varepsilon_A \varepsilon_Q}{\left|A^\times\right| q^{n-1}} M_\Omega f \\ \varepsilon_A \varepsilon_Q M_\Omega f &= q^{n-1}\left|A^\times\right| f - \left(q^{n-1} + \varepsilon_A \varepsilon_Q\right) h_\omega f \\ M_\Omega f &= \varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1}\left|A^\times\right| \cdot f - \left(\varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) \cdot h_\omega f \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\operatorname{Im} P_\Omega = \left\{ f \in L^2(E_1) \quad | \quad M_\Omega f = \varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1}\left|A^\times\right| \cdot f - \left(\varepsilon_A \varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) \cdot h_\omega f \right\}$$

reescribiendo usando el lema 82, tenemos

$$\operatorname{Im} P_\Omega = \left\{ f \in V_{\overline{\omega}} \quad | \quad M_\Omega f = \varepsilon_A \varepsilon_Q (q-1)\left[q^n - \varepsilon_A q^{n-1} - q^{n-1} - \varepsilon_A \varepsilon_Q\right] \cdot f \right\}$$

Para los proyectores dados por el parámetro $\alpha \in (k^\times)^\wedge$ tenemos la ecuación funcional dada por

$$\begin{aligned} f &= \widetilde{S}_\alpha f \\ |E_1|\, f &= S_\alpha f \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} \widetilde{S}_\alpha = \left\{ f \in L^2(E_1) \quad : \quad S_\alpha f = |E_1|\, f \right\}.$$

Al rescribir la ecuación funcional en la variable correspondiente, se obtiene las funciones constantes sobre las Q-esferas, es decir

$$(\forall x, y \in E_1)\,(f(x) = f(y) \Longleftrightarrow Q(x) = Q(y))$$

y radialmente $\overline{\alpha}$-homogéneas:

$$\left(\forall t \in k^\times\right)(\forall x \in E_1)\,(f(tx) = \overline{\alpha}(t) f(x))$$

es decir,

$$\operatorname{Im}\widetilde{S}_\alpha = \left\{ \begin{array}{lcl} f \in L^2(E_1) & : & f \text{ es constante sobre las esferas y} \\ & & \text{radialmente } \overline{\alpha}\text{-homogéneas} \end{array} \right\}.$$

Para la otra familia de proyectores parametrizados por el parámetro $\alpha \in (k^\times)^\wedge$, tenemos la ecuación funcional dada por

$$\begin{aligned} f &= T_\alpha f \\ f &= \left(\frac{q}{q+1} P_{(\alpha,\alpha)} - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1} \widetilde{S}_\alpha \right) f \\ f &= \frac{q}{q+1} \left(\frac{q^{n-1} + \varepsilon_Q}{q^{n-1}\,|A^\times|} h_{\alpha^2} + \frac{\varepsilon_Q}{q^{n-1}\,|A^\times|} M_{(\alpha,\alpha)} \right) f - \frac{\varepsilon_Q q^n + q}{q+1} \widetilde{S}_\alpha f \end{aligned}$$

Recordando que los subespacios propios asociados son ortogonales, tenemos

$$(q+1)\, q^{n-2}\, |A^\times|\, f = \left(q^{n-1} + \varepsilon_Q\right) h_{\alpha^2} f + \varepsilon_Q M_{(\alpha,\alpha)} f \quad \text{y} \quad S_\alpha f = 0$$

Así

$$M_{(\alpha,\alpha)} f = \varepsilon_Q \,(q+1)\, q^{n-2} \,(q-1)^2 f - \left(\varepsilon_Q q^{n-1} + 1\right) h_{\alpha^2} f \quad \text{y} \quad S_\alpha f = 0$$

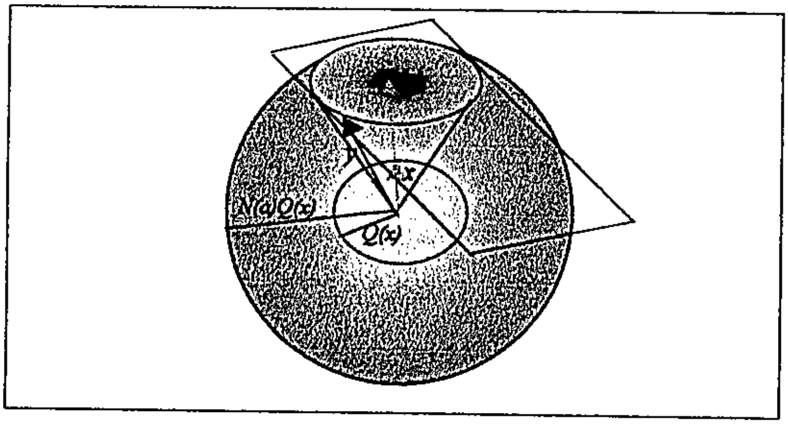
es decir,

$$\operatorname{Im} T_\alpha = \left\{ \begin{array}{lcc} f \in L^2(E_1) & : & M_{(\alpha,\alpha)} f = \varepsilon_Q q^{n-2} (q-1)^2 (q+1) f - (\varepsilon_Q q^{n-1} + 1)\, h_{\alpha^2} f, \\ & & S_\alpha f = 0 \end{array} \right\}.$$

Usando el lema 82, tenemos

$$\operatorname{Im} T_\alpha = \left\{ \begin{array}{lcc} f \in V_{\overline{\alpha}^2} & : & M_{(\alpha,\alpha)} f = \varepsilon_Q (q-1)\left(q^n - q^{n-2} - q^{n-1} - \varepsilon_Q\right) f \\ & & S_\alpha f = 0 \end{array} \right\}.$$

Por último, tenemos una visualización del operador M_a, como un operador de promedio "cónico", cuyo efecto sobre una función f, evaluado en un vector $x \in E_1$, corresponde a sumar los valores de f sobre todos los vectores de la esfera de radio $\mathrm{N}(a)Q(x)$ que cumplen la condición de tener un "producto escalar" $B(x,y)$ con x dado por $\mathrm{Tr}(a)Q(x)$, es decir, corresponde a sumar sobre los valores de f en todos los vectores y en la traza del cono $B(x,y) = \mathrm{Tr}(a)Q(x)$ sobre la esfera de radio $\mathrm{N}(a)Q(x)$ (como por ejemplo el vector pintado de negro en la figura).



Representación gráfica de $M_a f(x)$

Bibliografía

[1] Bannai, E., Hao, S., Song, S-Y, Character Tables of the association schemes of finite orthogonal groups acting on the anisotropic points, J. Combin. Theory Ser. A 54(1990), 164-200.

[2] Bourbaki, N. Algèbre, Chapitres I, II, III. Hermann, Paris, 1968.

[3] Bourbaki, N., Groupes et Algèbres de Lie Chapitre IV, V, VI. Hermann, Paris, 1968

[4] Bourbaki, N., Algèbre, Chapitre VII. Hermann, Paris, 1969.

[5] Carter R. W., Simple Groups of Lie Type, J. Wiley, New York, 1972

[6] Curtis, C.W., Reiner I., Representation Theory of finite Groups and Associative Algebras, Intercience Publishers, New York,.1962

[7] Curtis, C W., Reiner.I., Methods of Representationes theory Vol I, II, Wiley, New York, .1981-1987.

[8] Dieudonné J., La geómetrie des groupes classiques, Springer-Verlag, Berlin 1963

[9] Dieudonné J., Sur les groupes classiques, Hermann, Paris, 1967

[10] Howe, R., On some results of Strichartz, Rallis and Schiffmann, J. Functional Anal., 32 (1979), 297-303

[11] James, G.D., Kerber, A., The Representation theory of the Symmetric Group; Encyclopedia of Mathematics, vol 16 , Addison Wesley; Palo Alto, 1981.

[12] Serre, J.- P., Représentations Linéaires des Groupes Finis, Hermann, Paris, 1971

[13] Soto-Andrade, J., Geometrical Gel'fand models tensor quotients and Weil representations , Proc Symp. Pure Math, 47, p. 305 - 316 , Amer. Math. Soc., Providence, 1987

[14] Soto-Andrade, J., Teoria Geométrica de Representaciones de Grupos, Notas III ELAM, Santiago, 1988.

[15] Soto-Andrade, J., Représentations de certains groupes symplectiques finis, Bull. Soc. Math. France Mém, N°55-56, (1978), 5-334.

[16] Strichartz, R., Harmonic Analysis on Hiperboloids, J. Functional Anal. 12(1973), 341-383.

[17] Terras, A.,1988.Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications, I, II, Springer-Verlag, New .York, 1985

[18] Terras, A., Fourier Analysis on Finite Groups and Applications, U.C.S.D. Lecture Notes, San Diego, 1992.

[19] Terras, A., Survey of Spectra of Laplacians on Finite Symmetric Spaces, Experiment. Math., 5(1966), 15-32.

[20] Vilenkin.A., Fonctions spéciales et théorie de représentations des groupes, Dunod, Paris,1970

[21] Whittaker and Watson, Modern Analysis, Cambridge,1900.