

UCH-FC
DOC-Física
E14
C.2



FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

SOLUCIONES TIPO PARTÍCULA EN SISTEMAS
EXTENDIDOS

Doctorado en física



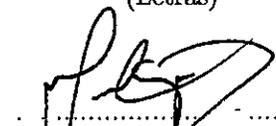
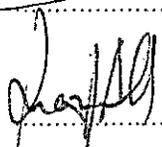
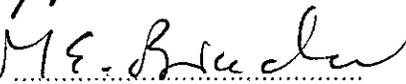
DANIEL ELIAS ESCAFF DIXON

2006

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACION TESIS DE DOCTORADO

DANIEL ELIAS ESCAFF DIXON

COMISIÓN EVALUADORA	CALIFICACIONES:		FIRMA
	NOTA (n°)	(Letras)	
PROFESOR GUÍA Marcel G. Clerc	7		
PROFESOR COMISIÓN Enrique Tirapegui Z.	7		
PROFESOR COMISIÓN Rodrigo Soto.	7		
PROFESOR COMISIÓN Orazio Descalzi.	7		
PROFESOR COMISIÓN Pierre Coulet.	7		
PROFESOR COMISIÓN Marc Etienne Brachet.	7		
NCTA FINAL EXAMEN DE TÍTULO			



SANTIAGO DE CHILE
DICIEMBRE - 2006

Nada más práctico que una buena teoría
L. BOLTZMANN

Lo más incomprensible en el mundo es que es comprensible... Es asombroso notar cómo surge- a medida que avanza la investigación experimental- un orden sublime de lo que parecía ser el caos. Y esto no puede ser sólo debido a la obra de la mente, sino a una cualidad inherente al mundo de la percepción... Sin embargo, si no se peca de vez en cuando contra la razón, no se llega a descubrir nada.
A. EINSTEIN



La voz de la razón es muy débil, pero a la larga siempre se impone.
S. FREUD

BIOGRAFÍA



Fig. 0.1: Foto del autor.

Nací en Santiago, un 8 de julio de 1978. Comencé mi enseñanza Primaria en el Liceo Experimental Manuel de Salas, para culminarla en el Colegio Ditzel. En este último establecimiento también realice la Secundaria.

En 1997 ingrese a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, de la Universidad de Chile, para luego cambiarme al Departamento de Física, de la Facultad de Ciencias, de la misma universidad, donde recibí el grado de Licenciado en Ciencias, con mención en Física, en el 2001. Tras este primer grado académico ingrese al plan de Doctorado en Ciencias, con mención en Física, grado que pretendo obtener con la presentación de esta tesis doctoral.

AGRADECIMIENTOS

En el desarrollo de esta tesis se ha contado con el apoyo de MECESUP UCH0008, FONDAP N° 11980002 y el proyecto ANILLO ACT 15 del programa bicentenario.

También se agradece la colaboración y disposición del Prof. M. G. Clerc. Las enseñanzas y discusiones con los profesores E. Tirapegi y O. Descalzi. Los siempre enriquecedores debates con M. Trejo y C. Falcon. Y los comentarios del Prof. R. Soto durante el periodo de redacción.

La gran parte de las simulaciones numéricas fueron hechas con el software *DimX* elaborado por el prof. P. Coulet y sus colaboradores.



Parte I

RESUMEN

0.1. RESUMEN

Esta tesis se centra en el estudio de las soluciones tipo partícula, exhibidas por sistemas extendidos (ecuaciones en derivadas parciales). O sea, soluciones cuya dinámica e interacción con otras soluciones de su misma especie, puede ser reducida a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, i.e. pueden ser tratadas como partículas. Específicamente, se estudio:

Ondas solitarias en una transición liquido-vapor, en un medio granular. En el régimen cuasi-sónico el sistema es aproximado por la ecuación de Korteweg de Vries. La estructura de bifurcaciones y la interacción de estas soluciones es estudiada, en orden de entender la vasta dinámica exhibida por el sistema cerca de la transición de fase.

Frentes y estructuras localizadas en un modelo prototipo en dinámica de poblaciones. El modelo considera una caminata aleatoria simple más un término no-lineal, que da cuenta de la conjugación de los elementos competitivos y cooperativos (efecto Allee), y la interacción a distancia. Matemáticamente, el modelo es no-local y presenta la coexistencia de distintos estados extendidos. Se construye el diagrama de fase del modelo, y se dilucida el mecanismo de nacimiento de las estructuras localizadas.

La dinámica de dominios, en presencia de ruido interno, en la ecuación de Ginzburg-Landau real supercrítica. Al considerar las fluctuaciones al equilibrio, la dinámica se ve radicalmente modificada, independientemente de la intensidad de estas. Este proceso es modelado, considerando una caminata aleatoria simple, para los kinks que separan los diferentes dominios, más un proceso de aniquilación. Los resultados obtenidos de este modelo, para el crecimiento del largo de los dominios, muestran un alto grado de concordancia con lo que se observa numéricamente. No obstante, cuando la intensidad del ruido se incrementa, y los procesos de creación de pares kink-antikink se hacen más probables, el sistema experimenta un resonancia estocástica.

Frentes que conectan rollos con un estado uniforme. Se realizó una descripción universal del fenómeno, vía ecuaciones de amplitud corregidas. Cuando el sistema es isótropo, el fenómeno de bloqueo, observado en sistemas unidimensionales, se pierde producto de una inestabilidad de zigzag. En este caso, la estabilidad lineal, de una interfase plana, y el proceso de coarsening, que sobreviene a la formación del zigzag, son estudiados en detalle. Mientras que, si se considera un sistema anisótropo, se recupera el bloqueo. En este caso, si incorporamos ruido al sistema, el movimiento del frente se desbloquea, ocasionando su propagación.

0.2. SUMMARY

This thesis is focused in the studied of particle like solutions in extended dynamical system (i.e. partial differential equations). It means, solutions which dynamic, and interaction with other solutions of the same sort, could be reduced to a system of ordinary differential equations. That is, they can be handled as "particles". Specifically, it is studied:

The solitary wave solutions exhibited at the onset of the phase transition in fluidized

granular matter. In the quasi-sonic limit the system is modeled by two Korteweg de Vries equations. The solitary wave interactions, and its bifurcation structure, is studied in order to understand the rich dynamics exhibited by the fluidized granular system at the onset of the gas-liquid phase transition.

Patterns, fronts, and localized structures of a prototypical model for population dynamics interaction. The physical content of the model is the coexistence of a simple random walk for the motion of the individuals with a nonlinearity in the competitive struggle for resources which simultaneously stresses the Allee effect and interaction at a distance. Mathematically, the model is non-local and exhibits coexistence between different stable extended states. The phase diagram was constructed, and the emergence of localized structures was elucidated.

The effect of noise on the coarsening process in the real super-critical Ginzburg-Landau equation. The presence of noise changes radically the domain dynamics of the deterministic system regardless of the noise intensity. To give account of the mechanism of this coarsening, a simple random walk model with annihilation process for the defects was considered. The results obtained for the average length size growth were in good agreement with numerical simulations. As the intensity of noise is increased the system shows a stochastic resonance for the amount of defect annihilation.

- A front between a roll and an uniform state. I made an universal description by a corrected amplitude equation method. When the system is isotropic, there is an interesting depinning effect as consequence of a zigzag instability. The linear stability of a plane interface and the coarsening dynamic of the zigzag was perused. When the system is anisotropic, the pinning effect, observed in one dimensional system, is recovered. In the last case, if we add noise to the model, the locked in the front movement is undid, inducing its propagation.

ÍNDICE GENERAL

Parte I	RESUMEN	3
0.1.	RESUMEN	4
0.2.	SUMMARY	4
Parte II	INTRODUCCIÓN GENERAL	8
Parte III	TÓPICOS, EN SISTEMAS EXTENDIDOS, ESTUDIADOS DURANTE EL DESARROLLO DE ESTA TESIS	16
1.	ONDAS SOLITARIAS EN UNA TRANSICION DE FASE TIPO VAN DER WAALS"	17
1.1.	INTRODUCCION	17
1.2.	FORMA NORMAL DE VAN DER WAALS	20
1.3.	BURBUJAS Y GOTAS	24
1.4.	ONDAS EN EL MODELO VdW	29
1.5.	SOLUCIÓN DE ONDA SOLITARIA PARA VdWc	34
1.6.	SOLITONES EN EL LIMITE CUASI-SONICO	37
1.6.1.	KdV a partir de VdWc	38
1.6.2.	Interacción solitón izquierdo-derecho	41
1.7.	EFFECTOS VISCOSOS	42
1.7.1.	Atenuación de los solitones en el régimen de viscosidad débil	43
1.7.2.	Cuando la difusión domina sobre la dispersión:	44
2.	FRENTES Y ESTRUCTURAS LOCALIZADAS EN DINAMICA POBLACIONAL	47
2.1.	INTRODUCCION	47
2.2.	COMPLEJIDAD EN MODELOS DE UNA SOLA ESPECIE	49
2.2.1.	Frentes	50

2.2.2. Interacción no-local y formación de patrones	55
2.3. MODELO DE NAGUMO NO-LOCAL	57
2.3.1. Inestabilidad espacial y formación de patrones	59
2.4. DINÁMICA DE DEFECTOS Y EL NACIMIENTO DE ESTRUCTURAS LOCALIZADAS	61
2.4.1. Nacimiento de estructuras localizadas para un influencia exponencial	65
2.4.2. Nacimiento de estructuras localizadas para influencias que decaen más rápido que un exponencial	72
2.4.3. Estructuras localizadas en R_3	76
3. DINÁMICA DE DOMINIOS EN PRESENCIA DE RUIDO INTERNO	81
3.1. INTRODUCCIÓN	81
3.2. INTERACCIÓN KINK-ANTIKINK EN PRESENCIA DE RUIDO DÉBIL	84
3.3. GAS DE PARES KINK-ANTIKINK EN PRESENCIA DE RUIDO DÉBIL	88
3.4. CREACIÓN VERSUS ANIQUILACIÓN: RESONANCIA ESTOCÁSTICA	93
4. FRENTE QUE CONECTAN ROLLOS CON UN ESTADO UNIFORME	95
4.1. INTRODUCCIÓN	95
4.2. FRENTE QUE CONECTAN ROLLOS CON UN ESTADO UNIFORME: CASO ISOTRÓPICO (DESBLOQUEO POR ZIG-ZAG)	101
4.3. FRENTE QUE CONECTAN ROLLOS CON UN ESTADO UNIFORME: CASO ANISÓTROPICO (RECUPERACIÓN DEL BLOQUEO)	110
4.3.1. Desbloqueo por ruido	115
Parte IV CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS	119
Bibliografía	123
Parte V Apéndices	125
Parte VI PUBLICACIONES	136

Parte II

INTRODUCCIÓN GENERAL

Los sistemas termodinámicos clásicos se caracterizan por relajarse a un único equilibrio, el máximo de la entropía, el cual es uniforme en el espacio y homogéneo en el tiempo (ver ref. [1], [2] o [3]). Cuando un sistema es mantenido fuera de este equilibrio, puede presentar comportamientos mucho más complejos. Por ejemplo, el sistema puede exhibir una gama de nuevos equilibrios estables (multi-estabilidad), los cuales pueden poseer una estructura (ver ref. [4]), i.e. las variables termodinámicas intensivas presentan comportamientos espacio-temporales complejos, tales como oscilaciones, formación de patrones, caos o caos espacio-temporal. Notemos que, este tipo de fenómenos es exhibido por sistemas macroscópicos (o sea, formados por un gran número de constituyentes fundamentales, que se juzgan microscópicos), de manera que siempre hay presente disipación de la energía mecánica, por lo cual estas formaciones suelen llamarse *estructuras disipativas* (ver ref. [5]).

En general, para mantener un sistema físico fuera del equilibrio, debemos someterlo a más de un termostato, i.e. que esté en contacto con más de un sistema grande, que trate de imponerle las propiedades de su equilibrio, sin que estas propiedades se vean afectadas por la dinámica del sistema en estudio (el cual es pequeño, en este sentido).

Uno de los ejemplos más típicos, en formación de patrones, es la inestabilidad convectiva o convección de Rayleigh-Benard (ver ref. [4] o [6]), la cual consiste en colocar un fluido dentro de dos placas paralelas y horizontales (es importante la presencia de gravedad), mantenidas a diferente temperatura. Si la placa, en la posición inferior, está más caliente que la que se encuentra en la posición superior, entonces, por dilatación térmica, el fluido en la parte más baja será más liviano. Esta situación es potencialmente inestable, pero, producto de la propia viscosidad del fluido, que se opone al movimiento de éste (a los gradientes en el campo de velocidades, para ser más preciso), se requiere de un gradiente de temperatura mínimo, para desestabilizar la configuración en que todo el fluido se encuentra en reposo. Una vez excedido este gradiente de temperatura, se desata la inestabilidad, la cual satura en la formación de rollos de convección (ver ref. [4]). O sea, al verse sometido a dos termostatos (dos temperaturas diferentes) el sistema converge a un nuevo equilibrio (que no es el termodinámico clásico), en el cual el fluido se encuentra en una situación de movimiento permanente (alimentada por el gradiente de temperatura), este nuevo movimiento convectivo se auto-organiza, formando una estructura periódica.

Claro que, cuando hablamos de dos termostatos, no nos referimos, únicamente, a dos temperaturas diferentes, sino, de modo general, a dos potenciales termodinámicos diferentes. Por ejemplo, en la reacción de Belousov-Zhabotinsky (ver ref. [4] o [7]), el sistema está obligado a mantener dos concentraciones constantes, i.e. está sometido a dos potenciales químicos diferentes. En este caso, el sistema, que consiste en dos reactantes que se dejan evolucionar libremente, presenta oscilaciones permanentes, i.e. se converge a un equilibrio, en el cual, las concentraciones de estas sustancias varían, de forma periódica, en el tiempo. Es interesante notar que, si sacamos estos dos termostatos, o sea dejamos que la concentración de las sustancias, que eran mantenidas constantes, evolucionen como parte del sistema, entonces el sistema evolucionará a un equilibrio estático. No obstante, esta evolución se realizara mediante oscilaciones amortiguadas, de las concentraciones de las sustancias en reacción, i.e. el transiente, al equilibrio termodinámico, no está caracterizado por una relajación monótona de las sustancias en reacción, sino por un

comportamiento oscilante de éstas.

Cuando hablamos de un sistema fuera del equilibrio, nos podemos estar refiriendo al caso de un sistema sometido a más de un termostato, el cual, mientras es mantenido en esta situación, exhibe nuevos equilibrios caracterizados por un comportamiento espacio-temporal más complejo. Pero, también podemos estar hablando de un sistema que se encuentra en una situación transitoria, i.e. convergiendo a cierto equilibrio, que puede ser el termodinámico clásico. Notemos que existe cierta ambigüedad semántica, cuando hablamos de fuera del equilibrio, puesto que nos referimos específicamente al equilibrio termodinámico, no obstante las estructuras disipativas son equilibrios estables del sistema. Ambos casos, el de formación de estructuras estables fuera del equilibrio termodinámico, como el estudio de las comportamientos transientes, son interesantes y susceptibles de ser analizados con una metodología común.

En efecto, una de la maneras más típicas de modelar, teóricamente, un sistema fuera del equilibrio, es mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, conocidos como *modelos continuos* (ver ref. [3] o [4]). La contraparte de estos métodos son los *modelos discretos*, cuya máxima expresión son los autómatas celulares. (ver ref. [4] o [8]), los cuales, no obstante, no están dentro de los objetos de estudio de esta tesis (que se concentra únicamente en los modelos continuos), por lo cual no nos referiremos a estos de aquí en adelante.

La construcción de un modelo continuo, para describir un sistema fuera del equilibrio, requiere, como primer paso, establecer un parámetro de orden, i.e. una campo continuo (que puede ser escalar o vectorial), que depende del espacio y el tiempo, y da cuenta de las variables termodinámicas intensivas, que presentan el comportamiento espacio-temporal complejo, que se quiere describir. Luego, este parámetro de orden satisface cierta ecuación diferencial en derivadas parciales, o integro-diferencial, en el caso más general, la cual exhibe, dentro de sus soluciones, la estructura disipativa que se quiere estudiar (por ejemplo, un patrón conformado por rollos, como en la convección de Rayleigh-Benard). Por lo cual, un sistema termodinámico clásico, también debiese ser susceptible a ser modelado de esta manera, mediante una ecuación diferencial, cuyo único atractor sea una solución en la cual el parámetro de orden sea uniforme en todo el espacio y carente de cualquier tipo de dinámica, la cual representa el máximo global de la entropía. Luego, los transientes del sistema físico corresponden a los transientes de la ecuación diferencial.

De modo que, el éxito en el modelamiento continuo de un sistema, depende de dos factores: la adecuada elección del parámetro de orden, de forma que de cuenta de los modos predominantes, que entran en juego, en el proceso fuera del equilibrio; y la construcción del modelo que dará cuenta de la evolución de este parámetro de orden (la ecuación diferencial que satisface). Este modelo es, por lo general, no-lineal, por ello, a este tipo de física se la suele llamar *física no-lineal*.

Como ya lo habíamos mencionado, cuando hablamos de un sistema fuera del equilibrio, estamos pensando en un sistema macroscópico, i.e. un sistema formado por muchos constituyentes fundamentales, cuyo tamaño es muy inferior (microscópico) a los tamaños típicos del sistema global. Luego, existe una separación de escala, entre las dimensiones macroscópicas y microscópicas del sistema, en la cual se sustenta la descripción continua de este conglomerado de entes que, a nivel microscópico, es discreto (incluso a

nivel mecano cuántico, podemos distinguir quantum fundamentales e indivisibles de energía, momentum angular, etc..., i.e. entes microscópicos discretos). Concretamente, el parámetro de orden representa las densidades de ciertas variables dinámicas intensivas (densidad de masa, momentum o energía, por ejemplo), lo cual requiere definir un elemento de volumen, que sea aproximadamente infinitesimal, a nivel macroscópico, de modo que, el parámetro de orden evaluado en algún punto contenido en elemento de volumen, represente la cantidad de la variable dinámica en este elemento. No obstante, este elemento de volumen debe contener un gran número de constituyentes fundamentales, de modo que una evolución determinista del parámetro de orden (mediante ecuaciones diferenciales) sea una buena descripción del sistema, o sea el elemento de volumen debe ser grande a escala microscópica (es aproximadamente infinitesimal, a escala macroscópica, y no un infinitésimo matemático exacto).

El ejemplo más clásico y pionero de esta separación de escala es la teoría cinética y la deducción de las ecuaciones de fluido a partir de ésta (ver ref. [2]). En las ecuaciones de Navier-Stokes el parámetro de orden son los campos hidrodinámicos, i.e. la densidad de masa, el campo de velocidades y la temperatura cinética, que representan cantidades promedios en cierto elemento de volumen infinitesimal, a nivel macroscópico, pero grande, a nivel microscópico. Este tipo de procedimientos no se limita a un gas ordinario, sino que se enmarca en un tipo más general de métodos, conocidos como *coarse-grained* (ver ref. [9]), los cuales no requieren, ni siquiera, que el sistema microscópico sea hamiltoniano. Si bien no existe un método unificado de *coarse-grained*, sino que cada caso particular requiere de cierta dosis de intuición, existe un elemento común a todos ellos, el cual consiste en que el parámetro de orden es un promedio (de cierta variable dinámica) es cierto elemento de volumen infinitesimal, a nivel macroscópico, pero grande, a nivel microscópico, e.g. se requiere de una separación de escala fuerte entre el nivel macroscópico y microscópico.

Notemos que hay, entonces, otro elemento vital en la correcta definición del parámetro de orden, el cual es la elección del set de variables intensivas que representa. Para que la descripción continua sea exitosa se debe lograr resumir las propiedades de un sistema con un enorme número de grados de libertad (el nivel microscópico) en un set más o menos pequeño de variables dinámicas (el nivel macroscópico). Esto es posible sólo si existe otra separación de escala, ahora temporal, entre modos rápidos y lentos de movimiento. Esto es, dentro de cada elemento de volumen, que contiene muchos constituyentes, existen un sin número de grados de movimiento altamente caóticos, que permiten una exploración rápida, de los posibles estados del sistema, en dicho elemento. De modo que el promedio en cierto intervalo de tiempo, infinitesimal a nivel macroscópico, pero grande, a nivel microscópico (lo suficientemente grande para permitir una exploración considerable, de los posibles estados) corresponda al promedio de ciertos modos lentos en el elemento de volumen. De la correcta identificación de todos los modos lentos depende el éxito, de la descripción continua, de un sistema físico dado.

Luego, si una descripción de estas características se puede efectuar siempre (lo cual es una mera hipótesis), entonces existe una homologación entre el comportamiento de la materia a gran escala, y las ecuaciones diferenciales. Si esta homologación existe y, más aun, no existe ninguna restricción general sobre el tipo de modelos no-lineales que puede satisfacer el parámetro de orden (cada sistema particular puede llevar consigo ciertas

restricciones, como cantidades conservadas, pero no son generales a cualquier sistema físico arbitrario). Entonces, el estudio general de los sistemas dinámicos no-lineales, i.e. la clasificación y caracterización de sus soluciones, de manera genérica, debiese equivaler a estudio de los comportamiento tipos que exhibe la materia fuera del equilibrio.

En esta tesis nos concentraremos en un tipo particular de soluciones que presentan la ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: las soluciones tipo partícula. Las cuales consisten en formaciones localizadas espacialmente, cuya dinámica puede ser reducida a un sistema dinámico ordinario, esto es, variables, como su posición, satisfacen una ecuación diferencial ordinaria, de modo que este objeto puede ser tratado como una partícula.

En el capítulo I, se estudiara el rol que desempeñan las ondas solitarias en una transición de fase tipo van der Waals, en un medio granular, i.e. un medio formado por partículas cuya interacción es disipativa. Concretamente, un sistema de esferas duras bidimensionales, en ausencia de gravedad, cuyas colisiones son inelásticas. Este sistema de partículas es colocado en una caja rectangular, donde una de sus dimensiones, digamos la horizontal, es mucho más grande que la otra (la vertical). En la dirección vertical el sistema se encuentra acotado por dos paredes, una rígida y elástica, y otra vibrante, de modo de mantenerlo fluidizado.

Este sistema exhibe una transición de fase tipo líquido-vapor. Acá, los modos lentos corresponden a el momentum horizontal total, en la dirección vertical, y la densidad de masa en la dirección vertical, ambas cantidades conservadas. Estos dos campos unidimensionales, que corresponden al parámetro de orden de la transición, satisfacen una ecuación diferencial tipo, la *forma normal de van der Waals*. Esta ecuación exhibe, en el régimen de viscosidad nula, la propagación de ondas solitarias. De hecho, cuando la amplitud de estas ondas es pequeña, el sistema se puede reducir a la ecuación de Korteweg de Vries (KdV).

Cuando ocurre el proceso de descomposición espinodal, en el régimen de viscosidad baja, se observará la propagación de cúmulos de materia atribuibles a ondas solitarias. En efecto, en este régimen, el decaimiento de la amplitud del soliton KdV es algebraico, en contraste con las ondas lineales, cuyo decaimiento es exponencial, luego, el rol de estas ondas es de suma importancia en este proceso. Este trabajo a sido reportado en ref. [10]:

En el capítulo II se realiza un estudio de los frentes y estructuras localizadas en la dinámica de poblaciones, teniendo en cuenta la interacción no-local entre los individuos que constituyen la especie. Es interesante notar que la vida es, probablemente, uno de los comportamientos más fascinantes que exhibe la materia fuera del equilibrio. En concreto, la dinámica de poblaciones, en un ecosistema, es un tópico susceptible de analizar con los métodos aquí descritos, en este caso el sistema microscópico lo constituyen los organismos que integran la población en estudio, mientras que el parámetro de orden (nivel macroscópico) sería la densidad de estos individuos, en el territorio que pueblan. En este caso, no está, aún, muy claro cómo modelar la interacción microscópica (probablemente se trate de un modelo probabilístico), no obstante se pueden proponer modelos macroscópicos fenomenológicos, que den cuenta de los aspectos primordiales de la dinámica de la población. En particular, en el capítulo II se estudia una extensión no-local del modelo de Nagumo, el cual es un modelo bi-estable, i.e. posee dos equilibrios estables, uno que representa la extinción de la especie, y otro que representa su

supervivencia.

La incorporación del término no-local, al modelo de Nagumo, produce nuevos fenómenos como la formación de patrones, lo cual ya había sido observado en generalizaciones no-locales del modelo de Fisher. No obstante, la bi-estabilidad de este modelo permite tener nuevos tipos de soluciones, como frentes entre dos estados estables, o dominios localizados de población (inmersos en una zona despoblada). A nivel del modelo de Nagumo local, no es posible observar la formación de dominios localizados, esto se puede entender fácilmente del hecho que la interacción de frentes (que son soluciones tipo partícula) es atractiva. Al considerar la no-localidad, la interacción de estas partículas se modifica, dando origen al nacimiento de estructuras localizadas. La caracterización analítica de este proceso es uno de los principales resultados de este capítulo, y se encuentra reportado en ref [11]. Cabe señalar que este tipo de estructuras localizadas de población han sido observados en la naturaleza.

En el capítulo III se estudia como el ruido modifica la dinámica de dominios. Como ya lo habíamos comentado; por el proceso de coarse-grained, el parámetro de orden representa una cantidad promedio en cierto elemento de volumen. No obstante, un sistema real nunca está exactamente en el promedio, sino en torno a él, i.e. el valor del parámetro de orden exhibe fluctuación. El ejemplo más clásico de esto son las fluctuaciones térmicas en la mecánica estadística del equilibrio. Que tan buena descripción del sistema son estos promedios depende del número de constituyentes fundamentales que haya en el elemento de volumen, i.e. de que tan fuerte sea la separación de escala entre el nivel microscópico y macroscópico. Mientras menos constituyentes haya en cada elemento (siendo más débil la separación de escala), más fluctuaciones, al comportamiento promedio, se observaran. De hecho en sistemas como los medios granulares o la dinámica de poblaciones (donde tanto granos con organismos vivientes son entes relativamente grandes), se observan fluctuaciones fuertes al equilibrio.

La manera de incorporar estas fluctuaciones al modelo macroscópico, es incorporando un ruido a la ecuación diferencial. En particular, en el capítulo III, se consideró un modelo bi-estable tipo, el cual posee, como equilibrio global, un estado completamente uniforme, donde todo el sistema se encuentra en uno de estos equilibrios estables. El transiente al equilibrio global pasa por varias etapas, siendo la más lenta una dinámica de dominios en lo cuales el sistema se encuentra en alguno de sus estados estables. Acá el sistema se puede modelar como un gas de pares kink-antikink, los cuales se van aniquilando progresivamente, dando origen al crecimiento de los dominios.

Cuando consideramos un sistema puramente determinista, la interacción entre pares es exponencialmente débil, por lo cual, el largo promedio de los dominios crece logarítmicamente en el tiempo. No obstante, al considerar la presencia de ruido, los procesos de transporte en el gas se ven drásticamente alterados, ocasionando que el largo promedio de los dominios crezca con la ley de potencia $t^{1/2}$. Todo esto ignorando los procesos de creación de pares kink-antikink inducidos por las fluctuaciones, cuando la intensidad del ruido es pequeña esta aproximación es buena, no obstante, cuando incrementamos ésta, se da origen a una resonancia estocástica, i.e. hay una intensidad de ruido óptima, en la cual el crecimiento de los dominios es más rápido, tras la cual, los procesos de creación de pares, destruyen la dinámica aquí descrita.

Lamentablemente, cuando se intentó publicar este trabajo, salió a la luz un trabajo

similar (ver ref. [12]), realizado hace más de 20 años. Pese a lo cual existe algunas diferencias (no mayores), que se intentarán enfatizar en alguna revista especializada en el tema.

En el capítulo IV se estudiaron los frentes entre un estado uniforme (estable) y un patrón conformado por rollos. En una dimensión espacial extendida, un frente que conecte un patrón con un estado uniforme, exhibe un bloqueo en su movimiento, i.e. esta estructura es estacionaria en toda una región de parámetros, la región de bloqueo. El origen de este bloqueo, se puede entender intuitivamente, tomando en cuenta que el nucleamiento de un pico del patrón (célula elemental de la estructura periódica), o su eliminación, requiere sortear cierta barrera de nucleación, lo cual impide que el frente se propague, aun cuando uno de los estados extendidos que conecta sea favorable. De allí que si agregamos ruido al sistema, el fenómeno se pierde, induciéndose la propagación del frente.

La formación de patrones a sido exitosamente descrita, de una forma universal, mediante ecuaciones de amplitud (ver ref. [4]), i.e. una ecuación efectiva para la envolvente del modo de Fourier dominante de la estructura periódica. No obstante, la implementación convencional de este método, falla al no poder explicar el fenómeno de bloqueo. En el capítulo IV mostramos que esto se debe a que, en el límite en que la ecuación de amplitud es válida, el bloqueo es exponencialmente pequeño, por lo cual no puede ser atrapado por una expansión polinomial (requerida en la deducción de la ecuación de amplitud). Acá también mostramos como corregir este método, de manera de explicar analíticamente el bloqueo.

La extensión más directa de un patrón unidimensional, a dos dimensiones espaciales, son los rollos. Considerando un modelo de Swift-Hohenberg quíntico isótropo, el cual posee un zona de coexistencia, entre rollos y un estado uniforme, se muestra que acá una interfase plana, que separe ambos estados, es transversalmente inestable: En este caso el sistema forma un zigzag, con lo cual el fenómeno de bloqueo se destruye. Este fenómeno es universal, en el sentido que la ecuación de amplitud que describe a este modelo, también exhibe la misma inestabilidad. El origen lineal de la inestabilidad, como el proceso de coarsening que sobreviene al zigzag son estudiados numéricamente. Una caracterización analítica de este proceso, intentando modelar las puntas del zigzag como soluciones tipo partículas, no es posible, poniendo en evidencia los límites de los métodos desarrollados en esta tesis (son métodos muy útiles, pero no lo explican todo). Los resultados de este trabajo han sido enviados a Phys. Rev. E.

El origen de esta inestabilidad radica en el hecho que, cuando la interfase plana presenta pequeñas irregularidades, en sistema intenta formar un rollo, pero en una dirección arbitraria (por la isotropía del sistema), lo cual genera una perturbación en la fase del patrón, la cual difunde, proceso que a su vez, perturba la interfase, desestabilizandola. De modo que, si suprimimos la isotropía, podemos suprimir la inestabilidad. De hecho, considerando una versión anisótropa del modelo de Swift-Hohenberg quíntico, la cual admite rollos solo en una dirección, se estabiliza la interfase plana, recuperandose el fenómeno bloqueo observado en sistemas unidimensionales. Acá sí es posible hacer una reducción dimensional, escribiendo una ecuación efectiva para la posición de la interfase, y, emplear los de interacción de soluciones tipo partículas, para estudiar sus propiedades. Entonces, al igual que en el caso unidimensional, si incorporamos ruido al sistema, el

movimiento del frente se desbloquea. Este proceso, de desbloqueo por ruido, es bien emulado por la ecuación efectiva para la interfase. Los resultados del caso anisótropo han sido aceptados para ser publicados en Eur. Phys. J.

En la mayor parte de las simulaciones numéricas mostradas en esta tesis, se utilizó un Runge-Kutta de orden 4, para la evolución temporal del sistema, y un método de diferencias finitas, para discretizar los operadores diferenciales espaciales (o una suma de Riemann ordinaria, si se trata de un operador integral). Luego, salvo que se diga explícitamente lo contrario, se subentenderá que el método empleado fue éste.

Parte III

TÓPICOS, EN SISTEMAS EXTENDIDOS,
ESTUDIADOS DURANTE EL DESARROLLO DE
ESTA TESIS

Capítulo 1

ONDAS SOLITARIAS EN UNA TRANSICION DE FASE TIPO VAN DER WAALS

1.1. INTRODUCCION

El estudio de los medios granulares en estado fluidizado ha estado en boga en el ultimo tiempo. Tanto por sus posibles aplicaciones como por el interés físico que despiertan en sí mismos. Este tipo de materia puede ser definida, en forma general, como un sistema de partículas cuya interacción es disipativa, i.e. una interacción mecano clásica que no conserva la energía. Por lo que sus constituyentes fundamentales, los *granos*, deben ser de un tamaño tal que todo efecto cuántico sea despreciable. De modo que, cuando dos granos interactúan, pueden pasar energía de manera continua a sus grados de libertad internos, dando origen a la disipación de la energía asociada a los grados de libertad traslacionales (o rotacionales) de estas partículas.

Dado que los granos van perdiendo su energía cinética a medida que interactúan, se debe proveer al sistema de una fuente externa y constante de energía para de mantenerlo fluidizado. Experimentalmente, esto se suele hacer colocando al sistema en un recipiente vibrante. De modo que se trata de un sistema fuera del equilibrio termodinámico, y variables macroscópicas como la densidad de granos, el momentum lineal o la energía cinética promediada, a la que nos referiremos como la *temperatura*, pueden exhibir un comportamiento espacio-temporal complejo como la formación de patrones u otro tipo de estructuras espaciales, oscilaciones permanentes, ondas no-lineales o caos.

El trabajo que se describe en este capítulo fue motivado por una experiencia numérica realizada por el Prof. R. Soto (ver ref. [13]), la cual consiste en la simulación de un sistema de esferas duras idénticas en dos dimensiones, cuya interacción es regida por la regla de choque:

$$\begin{aligned}v_1' + v_2' &= v_1 + v_2, \\v_1' - v_2' &= [\hat{t} \cdot (v_1 - v_2)] \hat{t} - r [\hat{n} \cdot (v_1 - v_2)] \hat{n},\end{aligned}$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades de las partículas antes de la colisión, mientras v_1' y v_2' corresponden a las velocidades posteriores a la colisión. La primera ecuación no es más que la conservación del momentum total. La segunda ecuación nos dice que la componente de la velocidad relativa tangencial a la coordenada relativa (dirección \hat{t}), se mantiene invariante tras la colisión; mientras que la componente normal, paralela a la coordenada relativa (dirección \hat{n}), invierte su dirección y su modulo sufre un decrecimiento caracterizado por el coeficiente de restitución $0 < r \leq 1$, donde, en el caso limite

$r = 1$ la colisión es elástica. O sea, es este coeficiente el que caracteriza la disipación de energía.

Puesto que el roce en la componente tangencial no ha sido considerado, los grados de libertad traslacionales y rotacionales de cada grano no interactúan entre sí. Luego, en la simulación numérica sólo se consideró el sistema constituido por los grados de libertad traslacionales de los granos.

Este sistema de partículas es colocado en una caja rectangular de ancho L_x , donde la posición en esta dirección esta caracterizada por la coordenada x , y largo L_y , donde la posición esta caracterizada por la coordenada y ; con una razón de aspecto $L_x/L_y \gg 1$. El sistema no esta sometido a la acción de la gravedad ($g = 0$). En la dirección x se toman condiciones de borde periódicas; mientras que la dirección y se encuentra limitada por dos paredes, una inmóvil, con respecto a la cual los granos colisionan elásticamente, y otra que vibra sinusoidalmente con una frecuencia ω y una amplitud A . En las colisiones de los granos con la pared vibrante se conserva la componente paralela a la pared del momentum lineal del grano, de modo que el momentum total del sistema en la direccion x es conservado. Un dibujo esquemático del sistema simulado se encuentra en la figura 1.1.

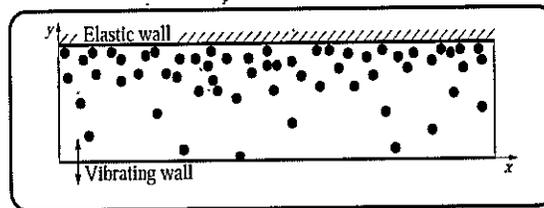


Fig. 1.1: Dibujo esquemático del sistema granular en estudio.

Las unidades del sistema son elegidas de modo que tanto la masa y el radio de cada esfera es igual a 1, también esta normalizada la velocidad asociada a la pared vibrante $A\omega = 1$. Luego el sistema queda definido por el número de partículas N , la razón de aspecto $L_x/L_y \gg 1$, la densidad global $\bar{n}_0 = N/(L_x L_y)$, y el coeficiente de restitución r .

Cuando la disipación es baja ($r \lesssim 1$), el sistema evoluciona a un equilibrio caracterizado por gradientes de densidad y temperatura en la dirección y , con ambos campos constantes en la dirección x . El sistema es más denso y frío cerca de la pared inmóvil (ver fig. 1.1).

A medida que incrementamos la disipación el sistema desarrolla una inestabilidad espacial, exhibiendo la coexistencia de dos fases, caracterizadas por densidades (en x) diferentes. Se observa que la evolución del sistema presenta, al menos, dos escalas de tiempo: una rápida, en la cual evoluciona a un estado homogéneo similar al del régimen de baja disipación; luego de permanecer un tiempo en este estado, repentinamente se forma una burbuja (región de densidad más baja) desarrollándose la transición de fase a una escala de tiempo mucho más lenta de lo que tarda en establecerse los perfiles de densidad y temperatura en la dirección y . Este proceso se ilustra en la figura 1.2.

El origen de esta inestabilidad radica en el hecho que, dado que la interacción entre los granos es disipativa, la temperatura es una función decreciente de la densidad. Lo

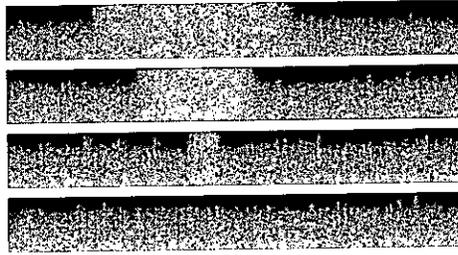


Fig. 1.2: Formación de una burbuja. El tiempo avanza de abajo hacia arriba.

que produce regiones en el espacio de parámetros donde la compresibilidad mecánica es negativa, i.e. la presión (o la componente del tensor de presiones en el eje x) también decrece con la densidad. Dando origen a una separación de fases similar a la observada en la transición líquido-vapor (ver ref. [1]), por lo que se llamo una “*transición de fase tipo van der Waals*”.

De manera análoga a la teoría de van der Waals, cuando la disipación es lo suficientemente pequeñas, la componente del tensor de presiones en el eje x , $p_{xx}(n_0)$, crece con la densidad global. Para un valor crítico del coeficiente de restitución esta función tiene un punto de inflexión, el punto de Maxwell, luego del cual se observa la aparición de una zona en la cual decrece. Es en esta ultima zona, donde un perfil de densidad constante en x es inestable. Todo el cuadro aquí descrito fue medido numéricamente y se puede apreciar en el gráfico 1.3.

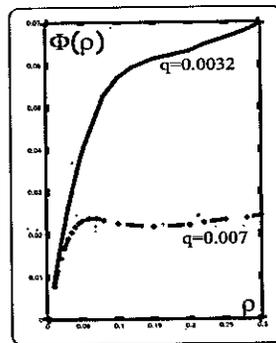


Fig. 1.3: Presión versus densidad, medida numéricamente en el medio granular simulado.

Luego, como en la transición líquido-vapor, podemos distinguir tres zonas en el espacio de parámetros (para este caso, el plano n_0 - r , si mantenemos las dimensiones de la caja constantes). Una en que el estado homogéneo es estable y el único equilibrio del sistema; una *region de coexistencia*, donde tanto el estado homogéneo como la burbuja son estables; y una *región de descomposición espinodal*, donde solo la burbuja es estable.

El fenómeno de aparición de una burbuja, descrito anteriormente, ocurre en la región de coexistencia, aquí el estado homogéneo es un estado metaestable que persiste por algún tiempo, el cual, luego de una gran fluctuación, desaparece nucleándose la burbuja.

En la región de descomposición espinodal, no existe la formación de un estado homogéneo previamente, aquí, en la escala rápida de tiempo, el sistema forma un gas de burbujas, las cuales, en la escala lenta, interactúan en un *coarsening* (dinámica de dominios de diferente densidad), dando como estado final una sola burbuja.

1.2. FORMA NORMAL DE VAN DER WAALS

Dado que existe una separación de escala en los tiempos característicos de evolución del sistema, es posible, en principio, construir una hidrodinámica para los modos más lentos de esta evolución. En el régimen ulterior (escala lenta), los modos más rápidos se convierten en variables esclavas de los más lentos, i.e. los modos rápidos se pueden eliminar adiabáticamente, con lo cual los modos lentos satisfacen ecuaciones hidrodinámicas autónomas.

Para hacer esto notemos que, puesto que la razón de aspecto $L_x/L_y \gg 1$, la dinámica en el eje y es rápida, luego, si $n(x, y, t)$ es la densidad de granos y $m_x(x, y, t)$ la densidad de momentum lineal en la dirección x , entonces podemos definir los campos

$$\rho(x, t) = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} n(x, y, t) dy \quad \text{y} \quad j(x, t) = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} m_x(x, y, t) dy,$$

ambos cantidades conservadas, por lo cual son modos lentos. No existen otros candidatos triviales a ser modos lentos, si bien no se puede asegurar fehacientemente que sean los únicos, vamos a trabajar sobre esta hipótesis. Luego, como son cantidades conservadas, satisfacen las ecuaciones de continuidad:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x j &= 0, \\ \partial_t j + \partial_x \Phi &= 0, \end{aligned}$$

donde Φ es el flujo de momentum (la conservación de la masa es igual a la de la teoría de gases usual, pues este principio no es afectado por la incorporación de la disipación). Por hipótesis, en el régimen ulterior estas ecuaciones son autónomas, e.g. Φ depende solo de ρ , j y sus derivadas espaciales. Más aún, dado que el sistema posee las simetrías de traslación espacial, $x \rightarrow x_0 + x$, traslación temporal, $t \rightarrow t_0 + t$ y reflexión con respecto al eje y , ($x \rightarrow -x$) \wedge ($j \rightarrow -j$), entonces:

$$\Phi = \Phi(\rho, \partial_x^{2n} \rho, j^2, \partial_x^{2n-1} j; n \in \mathbb{N}).$$

La dependencia de este flujo en la densidad puede ser interpretada como la presión hidroestática usual

$$P(\rho) = \Phi(\rho, 0, 0, 0).$$

Mientras que las dependencias lineales en $\partial_x j$ y j^2 como la viscosidad ($\partial_x \Phi = \nu \partial_{xx} j$) y la convección ($\partial_x \Phi = j \partial_x j$), respectivamente. Los términos en derivadas más altas no tiene un análogo en la hidrodinámica clásica (las ecuaciones de Navier-Stokes son una expansión en gradientes cortada al orden 2).

Consideremos una pequeña perturbación al estado homogéneo $\rho = n_0$, $j = 0$, de la forma

$$\delta\rho = \rho - n_0 \ll 1, \quad \delta j = j \ll 1,$$

despreciando la viscosidad y los gradientes altos (perturbación suave), obtenemos la ecuación de onda:

$$\partial_{tt}\delta\rho = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho=n_0} \right) \partial_{xx}\delta\rho.$$

De modo que, cuando $(\partial P/\partial\rho) > 0$ (función creciente de la densidad) el estado homogéneo es estable, siendo

$$v_s = \sqrt{\partial P/\partial\rho}$$

la velocidad de propagación del sonido en el medio. Cuando $(\partial P/\partial\rho) < 0$, el estado homogéneo se deviene inestable, dando origen a un proceso de descomposición espinodal en el que el sistema converge a dos nuevas densidades (estables), una más alta y otra más baja, de modo de mantener constante el número de granos. El punto en el espacio de parámetros donde ocurre esta bifurcación es el punto de Maxwell (o el punto crítico, en una transición líquido-vapor), i.e. cuando la presión tiene un punto de inflexión

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho=n_M} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=n_M} = 0,$$

para un valor crítico del coeficiente de restitución $r = r_c$. Cerca a la bifurcación, i.e. $n_0 = n_M + \Delta n_0$ y $r = r_c + \Delta r$, con $\Delta n_0/n_M \ll 1$ y $\Delta r/r_c \ll 1$, podemos aproximar, en torno al estado homogéneo $\rho = n_0$ y $j = 0$,

$$\begin{aligned} \Phi &\cong \Phi_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) \delta\rho + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \right) \frac{(\delta\rho)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \rho^3} \right) \frac{(\delta\rho)^3}{6} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial (j^2)} \right) (\delta j)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial (\partial_{xx}\rho)} \right) \partial_{xx}\delta\rho + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial (\partial_x j)} \right) \partial_x \delta j + \dots \\ &= \Phi_0 + \alpha_1 \delta\rho + \alpha_2 (\delta\rho)^2 + \alpha_3 (\delta\rho)^3 - \beta \partial_{xx}\delta\rho - \gamma \partial_x \delta j + \dots \end{aligned}$$

donde $\alpha_1 \ll 1$ y $\alpha_2 \ll 1$ pues $\Delta n_0/n_M \ll 1$ (estamos cerca del punto de Maxwell), los demás parámetros son $\mathcal{O}(1)$. Además supondremos que $\alpha_3 > 0$, puesto que en el punto de Maxwell la presión es una función monótonamente creciente de la densidad; $\gamma > 0$, de modo que la viscosidad corresponde a una genuina disipación de energía; y $\beta > 0$, esto para asegurar una saturación espacial (para longitudes de onda corta) de la inestabilidad. El último supuesto es más arbitrario que los demás, puesto que dicha saturación puede ocurrir para gradientes más altos, no obstante lo mantendremos en orden de dar una descripción fenomenológica lo más simple posible. Luego, rescalando el espacio $x \rightarrow \sqrt{\beta}x$ y el tiempo $t \rightarrow \sqrt{\beta}t$, y definiendo:

$$u = \sqrt{\alpha_3} \left(\delta\rho + \frac{\alpha_2}{3\alpha_3} \right) \ll 1, \quad \varepsilon = \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{3\alpha_3} \right) \ll 1 \quad \text{y} \quad \nu = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} \sim \mathcal{O}(1)$$

obtenemos la "Forma normal de van der Waals (VdW)":

$$\partial_{tt}u = \partial_{xx}(\varepsilon u + u^3 - \partial_{xx}u + \nu \partial_t u) \quad (1.2.1)$$

donde el parámetro de bifurcación es $\varepsilon \ll 1$, y el escalamiento de las variables es $u \sim \varepsilon^{1/2}$, $\partial_x \sim \varepsilon^{1/2}$ y $\partial_t \sim \varepsilon$. Notemos que se ha despreciado el término convectivo por ser de un orden superior (ε^3) al de la ecuación ($\varepsilon^{5/2}$).

Los argumentos usados en la construcción del modelo (1.2.1) son absolutamente generales, sólo se ha empleado el hecho que el sistema presenta una inestabilidad mecánica producto de una compresibilidad negativa ($\partial\rho/\partial P/\rho < 0$). Por lo tanto, cualquier sistema, que posea las mismas cantidades conservadas y tenga las mismas simetrías, el cual sufra una inestabilidad mecánica de este tipo, debiera ser bien modelado por (1.2.1) cerca de la bifurcación. Por ejemplo, la misma transición líquido-vapor. Acá se podría objetar que, en condiciones experimentales realistas las colisiones con las paredes no conservan el momentum, e.g. j no es una cantidad conservada. Este efecto se puede incorporar al modelo agregando una pequeña disipación de momentum

$$\partial_{tt}u = \partial_{xx}(\varepsilon u + u^3 - \partial_{xx}u + \nu\partial_t u) - \mu\partial_t u,$$

con $\mu \sim \varepsilon$, si $\mu \sim \mathcal{O}(1)$ esta disipación domina sobre la inercia y tenemos el modelo de Cahn-Hilliard (el momentum deja de ser un modo lento y se vuelve una variable esclava de la densidad). Acá el sistema entra en un régimen puramente difusivo, y se pierden todos los efectos ondulatorios (no hay ondas).

En el caso de viscosidad nula ($\nu = 0$), VdW es conservativo, en efecto, si consideramos el funcional

$$\mathcal{U}[u, p] = \int \left\{ \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon + u^2)^2 \right\} dx, \quad (1.2.2)$$

podemos escribir (1.2.1) de la forma:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_x \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta p} \right), & \partial_t p &= \partial_x \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta u} \right) \\ \implies \frac{d\mathcal{U}}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

donde $p = \sqrt{\alpha_3}j$, e.g. \mathcal{U} es una cantidad conservada que llamaremos la *energía* del sistema. El efecto de la viscosidad no es otro que disipar esta energía, de hecho, considerando el término viscoso ($\nu > 0$), se tiene

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = -\nu \int (\partial_t u)^2 dx \leq 0,$$

o sea la dinámica del sistema consiste en la *minimización de la energía*. No obstante este proceso de minimización no se realiza libremente, sino que respetando estrictamente las restricciones impuestas por la conservación de la masa y el momentum, i.e. el sistema converge al estado con menor energía (el equilibrio) que posea la misma masa y momentum que la condición inicial.

La ecuación (1.2.1) está caracterizada por los parámetros ε , ν y la densidad global u_0 y el flujo neto de masa p_0 definidos por:

$$u_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l u dx, \quad p_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l p dx,$$

con $l = \sqrt{\beta}L_x/2$. Para los equilibrios estacionarios del sistema, como densidades estables o estructuras espaciales tales como burbujas o gotas (regiones de densidad más alta inmersas en una densidad más baja) no juega ningún rol la viscosidad, además, dado que el sistema posee la invarianza galileana $p \rightarrow p + p_0$, el flujo neto de masa tampoco es un parámetro relevante. Luego el diagrama de fase de VdW está en el plano (ε, u_0) .

La presión hidroestática, en estas variables, toma la forma:

$$P(u) = \varepsilon u + u^3, \quad (1.2.3)$$

de modo que, la velocidad del sonido, sobre un estado de densidad uniforme $u = u_0$ es

$$v_s = \sqrt{\varepsilon + 3u_0^2}. \quad (1.2.4)$$

De aquí deducimos inmediatamente que la región de descomposición espinodal, en el espacio de parámetros (ε, u_0) , corresponde a la zona $R_1 = \{\varepsilon < -3u_0^2\}$. Este proceso se puede apreciar en fig. 1.4, donde se muestra un diagrama espacio-tiempo del perfil $\rho(x, t)$ para el sistema granular simulado, en la región de descomposición espinodal, la segunda imagen corresponde a una simulación numérica de (1.2.1).

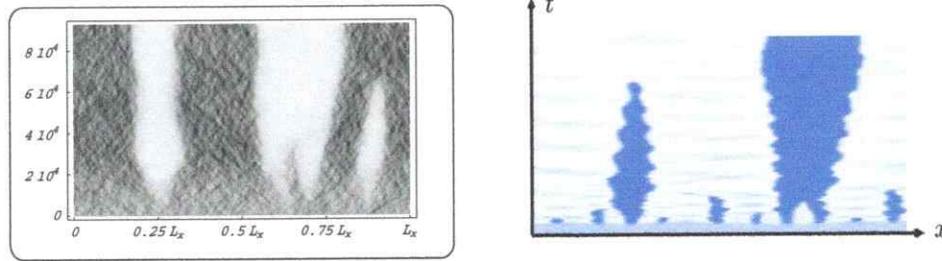


Fig. 1.4: Diagramas espacio-temporales del proceso de descomposición espinodal en una simulación numérica directa del medio granular (izquierda) y del modelo (1.2.1) (derecha).

La zona en que ocurre la separación de fases es más amplia, incluye la región de coexistencia, para su determinación podemos usar la construcción de Maxwell (ver ref. [1]), haciendo uso de la presión hidroestática (1.2.3). En efecto, el volumen específico corresponde a $v = 1/u$, y la curva $P(v)$, para ε fijo, puede ser interpretada como una "isoterma generalizada". De hecho, la pared vibrante juega el rol de un termostato, imponiendo al sistema una temperatura $T \sim m(A\omega)^2$ (con m la masa de los granos), el otro termostato al que está sometido el sistema son los grados de libertad internos de los granos, cuyo efecto se resume en el coeficiente de restitución r , a su vez, el efecto de ambos se resume en el parámetro de bifurcación ε . Esto no quiere decir que podamos, en general, formular una termodinámica para los medios granulares o los sistemas fuera del equilibrio (sometidos a más de un termostato), esto es sólo una analogía funcional para este caso particular. Luego, siguiendo la construcción de Maxwell, es fácil deducir que la separación de fase ocurre para $\varepsilon < -u_0^2$, e.g. la región de coexistencia corresponde a la zona $R_2 = \{-3u_0^2 < \varepsilon < -u_0^2\}$.

En esta última zona el estado homogéneo es estable, pero una perturbación finita puede resultar en la nucleación de una burbuja (siempre y cuando pase cierta barrera

de nucleación). Durante este proceso, por la conservación de la masa, se emiten dos ondas de densificación, las cuales, si la condición de borde es periódica, volverán a chocar con la burbuja haciendola oscilar. Producto de la viscosidad estas oscilaciones serán amortiguadas, convergiendo el sistema a una burbuja estacionaria. Este proceso se ilustra en la figura 1.5, donde se muestra un diagrama espacio-tiempo del perfil $\rho(x, t)$ para el sistema granular simulado, la segunda imagen corresponde a una simulación numérica de (1.2.1).

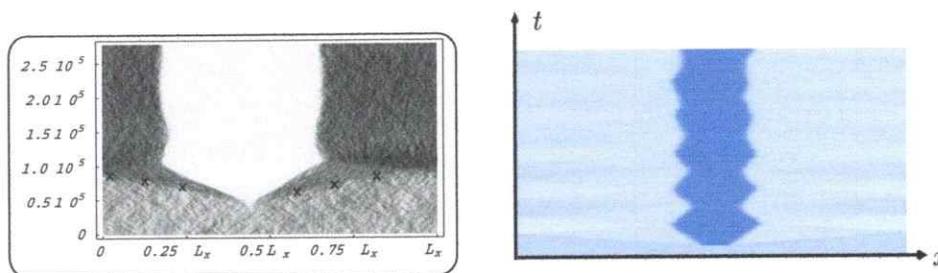


Fig. 1.5: Diagramas espacio-temporales del proceso de nucleación de un burbuja (en la región de coexistencia) para una simulación numérica directa del medio granular (izquierda) y del modelo (1.2.1) (derecha).

En la otra región, $R_3 = \{\varepsilon > -u_0^2\}$, el estado de densidad uniforme, $u = u_0$, es el único atractor. Las distintas regiones, en el espacio de parámetros, se encuentra en la figura (1.6).

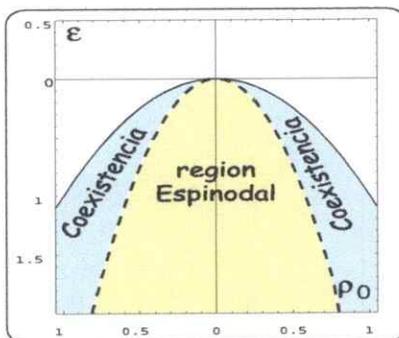


Fig. 1.6: Espacio de parámetros de la forma normal VdW. Donde se puede apreciar la región de descomposición espinodal R_1 (amarillo), región de coexistencia R_2 (gris) y la región donde sólo el estado de densidad uniforme es estable R_3 (blanco).

1.3. BURBUJAS Y GOTAS

Como ya se había comentado, la minimización de la energía se efectúa respetando la conservación de la masa y el momentum. Esto es, los equilibrios del sistema son mínimos

del funcional

$$U[u, p, \lambda, \bar{\lambda}] = \int \left\{ \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{1}{4} (\varepsilon + u^2)^2 + \lambda \left(u_0 - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l u dx' \right) + \bar{\lambda} \left(p_0 - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l p dx' \right) \right\} dx,$$

donde λ y $\bar{\lambda}$ son multiplicadores de Langrange. Además, debemos satisfacer las condiciones de borde, $u(x+2l) = u(x)$ y $p(x+2l) = p(x)$, y tener siempre presente la ausencia total de dinámica en el equilibrio ($\partial_t u = \partial_t p = 0$). Luego, para el momentum tenemos:

$$p = \bar{\lambda} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2l} \int_{-l}^l p dx = p_0$$

de modo que el equilibrio ($\partial_t u = 0 \implies \bar{\lambda} = \{cte.\}$) está caracterizado por un flujo constante de partículas. Mientras que el perfil de densidad satisface una ecuación tipo Newton

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \varepsilon u + u^3 + \lambda, \quad (1.3.1)$$

cuyas soluciones están sujetas a

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l u dx = u_0 \quad \text{y} \quad u(x+2l) = u(x), \quad (1.3.2)$$

con la condición de equilibrio $\partial_t p = 0 \implies \lambda = \{cte.\}$. Luego, las soluciones que representan una densidad uniforme $u = u_0$ son puntos fijos de (1.3.1), $\varepsilon u_0 + u_0^3 + \lambda = 0$. Si $u_0 \in R_1$ es un centro, mientras que $u_0 \in R_2 \cup R_3$ es un punto hiperbólico:

En general, (1.3.1) puede tener uno o tres puntos fijos, dependiendo de si el polinomio cúbico $\varepsilon u + u^3 + \lambda$ tiene, una o tres raíces reales. Cuando $\varepsilon < 0$ y $-2(-\varepsilon/3)^{3/2} < \lambda < 2(-\varepsilon/3)^{3/2}$ existen tres soluciones reales $u_1 < u_2 < u_3$, dos puntos hiperbólicos (u_1 y u_3) y un centro (u_2). Mientras que si $\lambda \geq \pm 2(-\varepsilon/3)^{3/2}$ el sistema posee tan sólo un punto hiperbólico.

Dado que (1.3.1) posee la simetría $u \rightarrow -u$ y $\lambda \rightarrow -\lambda$ nos vamos a concentrar en el caso $\lambda \geq 0$. En la figura 1.7 se muestran las trayectorias en el espacio de fase de esta ecuación para diferentes valores de los parámetros. Luego, si $\lambda < 2(-\varepsilon/3)^{3/2}$ existe un centro, y por lo tanto una familia de órbitas periódicas en torno a este, de las cuales, algunas pueden satisfacer (1.3.2). En efecto, una primera integración de (1.3.1) nos da

$$\frac{du}{dx} = \pm \sqrt{Q(u)/2} \quad \text{con} \quad Q(u) = u^4 + 2\varepsilon u^2 + 4\lambda u + 4E,$$

con E una constante de integración (que correspondería a la energía si (1.3.1) modelase un sistema mecánico). Cuando

$$-\frac{1}{4}u_2^4 - \frac{\varepsilon}{2}u_2^2 - \lambda u_2 < E < -\frac{1}{4}u_3^4 - \frac{\varepsilon}{2}u_3^2 - \lambda u_3,$$

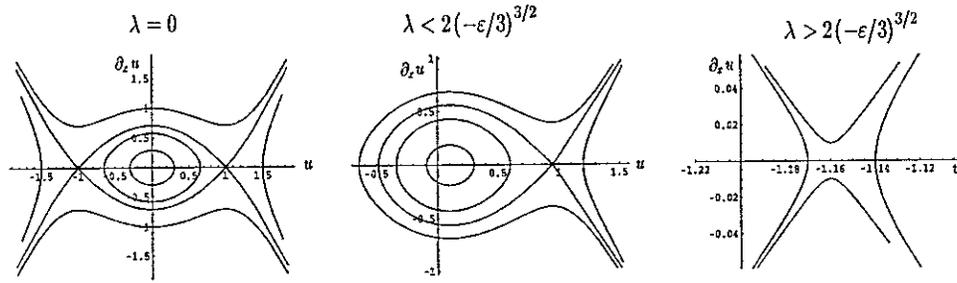


Fig. 1.7: Órbitas, en el espacio de fase, de la ecuación tipo Newton (1.3.1).

las cuatro raíces de Q son reales, y lo podemos escribir:

$$Q(u) = (u - r_1)(u - r_2)(r_3 - u)(r_4 - u),$$

con $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$. Notemos que $r_n = r_n(\lambda, E)$ a ε fijo. Luego, las soluciones periódicas son de la forma:

$$u(x) = r_1 + \frac{(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)}{(r_3 - r_1) - (r_3 - r_2)\text{sn}^2(\Delta(x - x_0) | m)}, \quad (1.3.3)$$

con $\Delta = \sqrt{(r_4 - r_2)(r_3 - r_1)}/2\sqrt{2}$, $m = (r_4 - r_1)(r_3 - r_2)/(r_4 - r_2)(r_3 - r_1)$ y $\text{sn}(\phi | m)$ un seno elíptico de Jacobi. Notemos que los puntos de retorno de estas trayectorias corresponden a r_2 y r_3 , de modo que representan "burbujas" de densidad r_2 inmersas en una densidad r_3 (o "gotas" de densidad r_3 inmersas en una densidad r_2 , si se prefiere, de todos modos la elección de $\lambda > 0$, implica que en el punto $(x - x_0) = 0$, tendremos una densidad r_2 , por lo cual nos referiremos a estas como burbujas).

Las soluciones (1.3.3) constituyen una familia de órbitas periódicas parametrizada por (λ, E) , de la cual solo algunos miembros satisfacen la restricción y la condición de borde (1.3.2). Para las soluciones burbujas debemos imponer que el periodo sea exactamente $2l$ y no un múltiplo entero de este. Este último tipo de soluciones, multi-burbujas (más de una burbuja), no son convenientes energéticamente, puesto que mientras más oscilaciones presente una solución durante un periodo $2l$, el término $(\partial_x u)^2/2$ hará un mayor aporte a la energía (1.2.2).

Entonces, si imponemos que (1.3.3) satisfaga (1.3.2), para valores de ε , u_0 y l dados, obtendremos un sistema de ecuaciones para el par (λ, E)

$$F_1(\lambda, E) = l \quad \text{y} \quad F_2(\lambda, E) = u_0, \quad (1.3.4)$$

donde

$$F_1(\lambda, E) = \frac{2\sqrt{2}K(m)}{\sqrt{(r_4 - r_2)(r_3 - r_1)}},$$

$$F_2(\lambda, E) = r_1 + \frac{(r_2 - r_1)\Pi(n | m)}{K(m)}$$

con $n = (r_3 - r_2)/(r_3 - r_1)$, $K(m)$ una integral elíptica completa de primera especie, mientras que $\Pi(n | m)$ es una integral elíptica de tercera especie.

Dado que la razón de aspecto es grande, es interesante estudiar el limite de un sistema muy grande $l \rightarrow \infty$. Para $\lambda \geq 0$ ($(r_2 - r_1) \geq (r_4 - r_3)$) existen dos maneras de hacer diverger el periodo ($F_1 \rightarrow \infty$ si $m \rightarrow 1$): una es tomar $(r_4 - r_3) \ll 1$ con $(r_2 - r_1) \sim \mathcal{O}(1)$, en este caso

$$r_3 \sim r_4 \sim u_3, \quad (r_2 - r_1) \sim 2\sqrt{2(-\varepsilon - u_3^2)}$$

de modo que $(-\varepsilon - u_3^2) \sim \mathcal{O}(1)$ (siempre estamos pensando que $\varepsilon < 0$, de manera que hallan burbujas), tomando esto en consideración ($(1 - n) \sim \mathcal{O}(1)$) podemos simplificar considerablemente el sistema de ecuaciones (1.3.4), y de allí inferir:

$$E \cong -\frac{1}{4}u_3^4 - \frac{\varepsilon}{2}u_3^2 - \lambda u_3, \quad u_3 \cong u_0.$$

De manera que la solución periódica (1.3.3) colapsa con una trayectoria homoclina, tomando la forma (ver fig. 1.8)

$$u = u_0 - \frac{2(3u_0^2 + \varepsilon)}{2u_0 + \sqrt{2(-u_0^2 - \varepsilon)} \cosh \left[\sqrt{(3u_0^2 + \varepsilon)}(x - x_0) \right]}. \quad (1.3.5)$$

Para esta burbuja, que corresponde a el limite exacto $l \rightarrow \infty$, la densidad global (u_0) equivale al valor asintótico de esta. Esto se debe a que su ancho es finito y no aporta de manera significativa, a la masa del sistema, cuando este es demasiado grande. Claramente esta solución existe solo en R_2 , por lo tanto las burbujas que observamos en la región de descomposición espinodal no corresponden a (1.3.5).

Una segunda forma de hacer diverger el periodo es tomar tanto $(r_4 - r_3) \ll 1$ como $(r_2 - r_1) \ll 1$, si bien, a primera vista, esto parece un caso particular del limite tomado previamente, el resultado es cualitativamente diferente. Acá $(-\varepsilon - u_3^2) \ll 1$ y $n \sim 1$, por lo cual $u_0 = F_2 \cong u_3$. De hecho

$$r_4 \sim r_3 \sim -r_2 \sim -r_1 \sim \sqrt{-\varepsilon},$$

y la órbita periódica (1.3.3) tiende más bien al colapso con las órbitas heteroclinas ($\lambda \approx 0$), tomando la forma aproximada (ver fig. 1.8)

$$u = \sqrt{-\varepsilon} \left\{ 1 + \tanh \left[\sqrt{\frac{-\varepsilon}{2}}(x - x_0) - \frac{\delta}{2} \right] - \tanh \left[\sqrt{\frac{-\varepsilon}{2}}(x - x_0) + \frac{\delta}{2} \right] \right\}, \quad (1.3.6)$$

con

$$\delta = \frac{(\sqrt{-\varepsilon} - u_0)l}{\sqrt{-\varepsilon}}.$$

De modo que esta burbuja, a diferencia de (1.3.5), es solo una aproximación para $l \gg 1$, y no el limite exacto $l \rightarrow \infty$, donde esta aproximación deja de tener sentido. Cave señalar que para la existencia de la solución (1.3.6) solo se debe estar en la región $R_1 \cup R_2$, o sea, donde hayan burbujas, y el sistema sea lo suficientemente grande, existen soluciones de esta forma.

Cuando el sistema es suficientemente grande el aporte a la energía (1.2.2) efectuado por los gradientes de densidad presentes en las burbujas (1.3.5) y (1.3.6) es despreciable

frente al aporte de los estados homogéneos que asintóticamente conectan. Puesto que estos últimos son proporcionales al tamaño, mientras que el aporte de los gradientes es independiente de l , y toma un valor finito en el límite $l \gg 1$. El aporte del momentum también es proporcional al tamaño, no obstante, por la invarianza galileana del sistema, este puede ser cambiado arbitrariamente (se puede cambiar a cero, por ejemplo), y no depende del tipo de burbuja a la que el sistema converja. En efecto, para la burbuja (1.3.5) se tendrá $\mathcal{U} \approx l(\varepsilon + u_0^2)^2/2 + \mathcal{O}(1)$, mientras que para (1.3.6) se tiene $\mathcal{U} \approx 0l + \mathcal{O}(1)$, o sea la energía de (1.3.5) diverge linealmente con el tamaño del sistema mientras que la energía de (1.3.6) se mantiene acotada. Luego, la burbuja (1.3.6) corresponde al mínimo de energía y por lo tanto al equilibrio. Notemos que esta estructura es un efecto de la finitud del sistema (cuando el sistema es exactamente infinito deja de existir), lo que ocurre que el sistema trata de alcanzar el mínimo global de energía ($u^2 \equiv \sqrt{-\varepsilon}$), pero al verse constreñido a conservar la masa, más la condición de borde periódica, que le impide expulsar o incorporar materia desde sus confines, la solución más eficiente que encuentra es la burbuja (1.3.6).

La burbuja (1.3.5), que solo existe en la región de coexistencia, es inestables. Cuando entramos a esta región desde R_3 ($u_0^2 \approx -\varepsilon$), esta estructura coincide con la burbuja estable (1.3.6), ambas soluciones aparecen por una bifurcación tipo saddle-node. Cuando ingresamos a la región de descomposición espinodal (1.3.5) colapsa con el estado homogéneo ($u = u_0$), desestabilizándolo. Esta burbuja inestable, en R_2 , corresponde a la separatriz, en el espacio funcional, entre el estado homogéneo ($u = u_0$) y la burbuja estable (1.3.6). Notemos que la energía del estado homogéneo $u = u_0$ diverge linealmente con el tamaño del sistema, luego, la subregión de R_2 en que este estado es metaestable (menos favorable energéticamente) abarca prácticamente toda la región de coexistencia. De todas maneras existe una pequeña zona, cerca de la curva $\varepsilon = -u_0^2$, en que el estado homogéneo es más favorable energéticamente (los gradientes pesan), si bien esta zona tiende a desaparecer cuando $l \rightarrow \infty$, este límite no tiene mucho sentido puesto que también desaparece la solución burbuja (1.3.6). En la figura 1.8 se muestran estas dos burbujas, y el estado homogéneo, en la región de coexistencia.

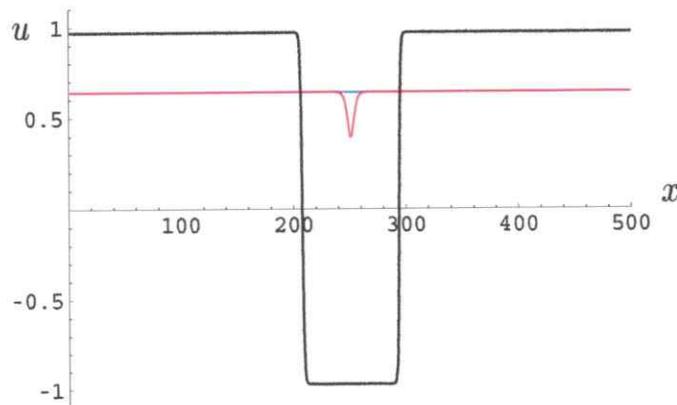


Fig. 1.8: Burbujas (1.3.6) (en rojo) y (1.3.6) (en negro), y estado homogéneo (en azul), para $u_0 = 0,63$ y $\varepsilon = -0,95$.

Es interesante observar que, si utilizamos la teoría termodinámica clásica (ver ref. [1]), para una transición de fase, tomando como ecuación de estado (1.2.3), i.e.

$$P = \varepsilon u_0 + u_0^3,$$

y haciendo que ε juegue el rol de la temperatura. Concluimos que: si $u_0^2 > -\varepsilon$, entonces la densidad u_0 es termodinámicamente estable; mientras que si $u_0^2 < -\varepsilon$, u_0 es termodinámicamente inestable, siendo estas densidades no accesibles físicamente y por lo tanto el sistema experimenta una transición de fase en la que lo podemos encontrar indistintamente con una densidad $\sqrt{-\varepsilon}$ o $-\sqrt{-\varepsilon}$. Esta conclusión coincide perfectamente con las propiedades del equilibrio del sistema dinámico (1.2.1), siendo este, aparentemente, una descripción alternativa de una transición de fase líquido-vapor. Si esta conjetura es correcta, la descripción ofrecida por (1.2.1) es más completa que la que emana de la termodinámica clásica, pues no solo nos da información del equilibrio, sino también del transiente, i.e. de como el sistema evoluciona al equilibrio. Lo cual robustece la idea de que la descripción más general y apropiada de los sistemas macroscópicos (en o fuera del equilibrio) es mediante ecuaciones diferenciales, siendo la termodinámica clásica solo un caso particular de una física macroscópica más general cimentada en la teoría de los sistemas dinámicos. Claro que el hecho que el equilibrio de (1.2.1) coincida con el predicho por la termodinámica, bien reputado experimentalmente, no implica que la descripción del transiente coincida con el que presenta el sistema físico real, esto debe ser verificado experimentalmente. No obstante, para que esta verificación empírica sea posible, se requiere previamente hacer una caracterización teórica del transiente exhibido por (1.2.1), i.e. hay que hacer predicciones teóricas, las cuales puedan ser verificadas o falseadas experimentalmente, en orden de corroborar o descartar la hipótesis aquí planteada. El transiente de (1.2.1) está dominado por la propagación de ondas, en lo que queda de este capítulo nos avocaremos al estudio de éstas.

1.4. ONDAS EN EL MODELO VdW

Consideremos la propagación de una onda lineal sobre un estado de densidad uniforme $u = u_0$, esto es, una perturbación de la forma $u = u_0 + \delta u e^{i(kx + \omega t)}$, donde δu es una constante infinitesimal. Luego, de (1.2.1), despreciando la viscosidad, obtenemos la relación de dispersión

$$\omega^2 = (\varepsilon + 3u_0^2) k^2 + k^4,$$

de modo que fuera de la región de descomposición espinodal esta perturbación es estable para toda longitud de onda. Para longitudes de onda lo suficientemente grandes ésta se propaga prácticamente con la velocidad del sonido (1.2.4), no obstante este medio es esencialmente dispersivo, y las ondas lineales son supersónicas, mientras más pequeña sea la longitud de onda más rápida será la velocidad de fase con respecto a la del sonido. Es fácil ver que la velocidad de grupo ($\partial\omega/\partial k$), asociada con el transporte de información a nivel lineal, también es supersónica y crece con el número de onda k . Esto es producto de la suposición que hicimos, al expandir el flujo de momentum Φ , de que la saturación espacial de la inestabilidad ocurre a gradientes cuárticos, si esta hipótesis no fuera cierta, de todas formas la saturación espacial debe ocurrir, por lo cual, para un número de onda lo suficientemente grande, tanto la velocidad de fase como la

velocidad de grupo deben ser supersónicas y crecientes con k . No obstante, dado que la forma normal VdW o cualquier generalización de esta a gradientes más altos, es una expansión en gradientes, no debiésemos prestar mucha atención a la información que ésta nos entrega para longitudes de onda cortas.

Si consideramos el efecto de la viscosidad, la relación de dispersión se modifica

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 + k^4 + i\nu k^2 \omega \implies \omega = \frac{1}{2} \left\{ i\nu k^2 \pm \sqrt{-\nu^2 k^4 + 4(v_s^2 k^2 + k^4)} \right\},$$

luego, $\text{Im}[\omega] > 0$ siempre, por lo tanto la amplitud de la onda lineal decrece en el tiempo disipando su energía. Más aún, $\text{Im}[\omega]$ crece con el número de onda k , de modo que las longitudes de onda más corta se amortiguan más rápido, lo que justifica una expansión en gradientes. De hecho, para una viscosidad lo suficientemente grande, $\nu > 2$, las longitudes de onda cortas serán sobre-amortiguadas, i.e.

$$\nu > 2\sqrt{v_s^2/k^2 + 1} \implies \text{Re}[\omega] = 0.$$

Para perturbaciones de amplitud finita debemos considerar los efectos no-lineales. En este caso la forma de un tren de ondas no será armónico, y debemos expresarlo en términos de funciones elípticas, básicamente una expresión similar a (1.3.3) en un sistema de referencia móvil, $x \rightarrow x - ct$, con c la velocidad de la onda. En todo caso, para amplitudes moderadas el escenario no será muy diferente del escenario lineal descrito anteriormente.

Un fenómeno cualitativamente diferente, que puede producir la no-linealidad, es la aparición de ondas solitarias o solitones. Las primeras corresponden a cúmulos de materia, o agujeros con menos materia, que se propagan sin modificar su forma, i.e. un paquete que se propaga sin dispersarse. A nivel lineal esto es imposible en un medio dispersivo como este, son las no-linealidades las que pueden contrarrestar el efecto de la dispersión lineal. Los solitones son una subcategoría de ondas solitarias, los cuales poseen una propiedad extra, cuando dos solitones colisionan preservan su estructura después de la colisión (ver ref. [15]). Claramente, estas estructuras solo pueden propagarse en el caso conservativo ($dU/dt = 0$), la presencia de viscosidad las atenuaría de modo de disipar su energía y hacer que el sistema converja al equilibrio. Luego, estos entes sólo habitan en el transiente, y al igual que las ondas lineales, pueden dar pistas importantes de como el sistema evoluciona al equilibrio.

Otro tipo de ondas no-lineales interesantes son los frentes, conexiones asintóticas entre dos estados uniformes de densidades diferentes. Como ya lo habíamos señalado previamente, en la región de coexistencia, donde el estado homogéneo es prácticamente siempre metaestable, una gran fluctuación, que sobrepase la barrera de nucleación (1.3.5), engendrará una burbuja del tipo (1.3.6). En el proceso de nucleación de esta burbuja, por la conservación de la masa, se generaran dos ondas de densificación, que corresponden a frentes. Si la viscosidad es grande estos frentes se propagan manteniendo un perfil monótono, por el contrario, cuando la viscosidad es baja el frente se descompone en un tren de solitones, este proceso se puede apreciar en fig. 1.9. A medida que los frentes de densificación se propagan la burbuja se enancha constituyéndose en dos frentes de desdensificación (ver fig. 1.9). Si el sistema fuese infinito este proceso continuaría indefinidamente, pero, dado las condición de borde periódica, los frentes de densificación

vuelven a chocar con la con la burbuja, haciendola oscilar, estas oscilaciones son amortiguadas por la viscosidad hasta que el sistema converge al equilibrio, i.e. la burbuja (1.3.6), cuyo ancho δ esta fijado por la masa de la condición inicial. Notemos que la misma burbuja (1.3.6) puede ser vista como un sistema constituido por dos frentes estacionarios, un kink y un anti-kink (que conectan los estados simetrico $\sqrt{-\varepsilon}$ y $-\sqrt{-\varepsilon}$), situados a una distancia δ .

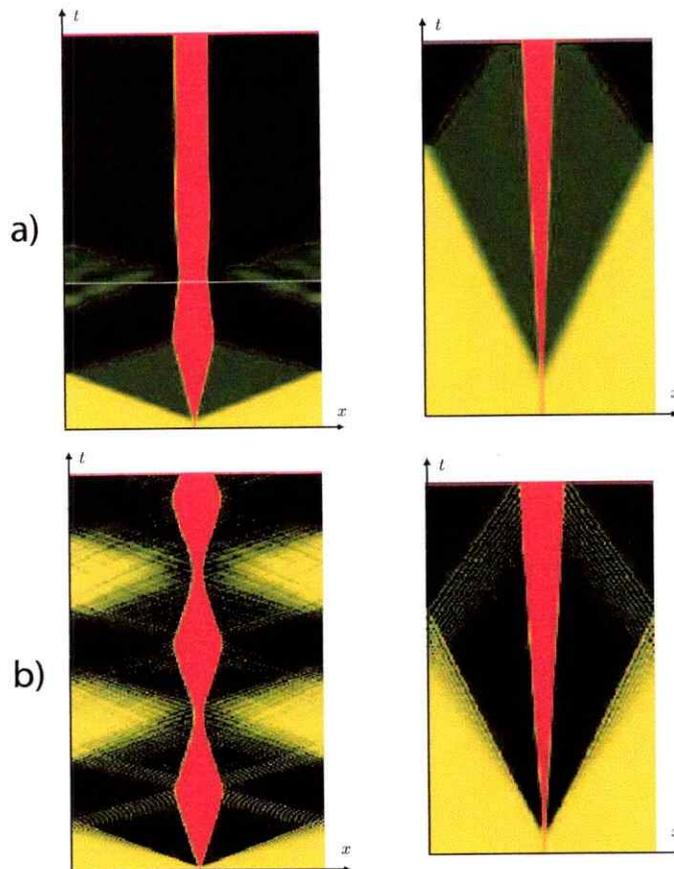


Fig. 1.9: Nucleación de un burbuja, en la región de coexistencia, para $u_0 = 0,63$ y $\varepsilon = -0,95$, en los regímenes de a) alta viscosidad, $\nu = 4$ y b) baja viscosidad, $\nu = 0,03$. A la derecha se ve el detalle de los primeros instantes del proceso de nucleación.

En la región de descomposición espinodal, el sistema primero se transforma en un gas de burbujas del tipo (1.3.6), para luego iniciar un coarsening, o sea un dinámica de dominios el los cuales el sistema posee localmente una densidad $\sqrt{-\varepsilon}$ ó $-\sqrt{-\varepsilon}$. El largo promedio de estos dominios crece en el tiempo, hasta que el sistema converge al equilibrio, i.e. una sola burbuja. La simulación numérica de este proceso (ver fig. 1.10) muestra que, cuando la viscosidad es baja, el gas de burbujas se encuentra sumergido en un mar de ondas (tanto lineales como no-lineales), acá el tiempo característico en que se disipa la energía de estas ondas es comparables con el tiempo característico en que desaparecen las burbujas (o las gotas). Al desaparecer una burbuja o una gota emite

dos solitones, que se propagan a la derecha y a la izquierda respectivamente (ver fig. 1.10.a y 1.10.b), y de esta manera transfiere su masa al resto del sistema. Al propagarse estos solitones por el medio, e ir chocando con los kinks y anti-kinks que separan los dominios de diferente densidad, transfieren la masa de la burbuja o gota fenecida a las demás y reexcitan el mar de ondas, manteniendo este régimen en el que los dominios de densidad uniforme se encuentran altamente activos. Cuando la viscosidad es alta, los ondas son rápidamente suprimidas, y las dominios de densidad uniforme se encuentran prácticamente estáticos (ver fig. 1.10.c), acá, cuando las burbujas o las gotas desaparecen difunden su masa el sistema y la propagación de ondas casi no se observa.

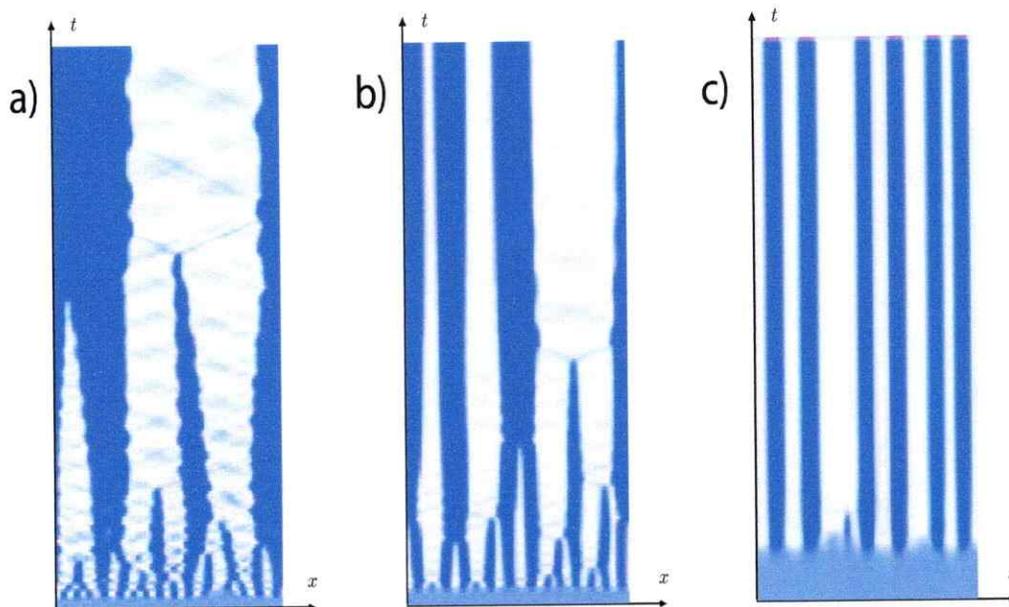


Fig. 1.10: Proceso de coarsening para $u_0 = 0$ y $\varepsilon = -0,5$, en los regímenes de a) baja viscosidad, $\nu = 0,05$, b) viscosidad moderada, $\nu = 0,5$ y c) alta viscosidad, $\nu = 5$.

Cabe señalar que, a medida que incrementamos la viscosidad, el proceso de coarsening se vuelve más ineficiente, esto es, el largo promedio de los dominios con densidad $\sqrt{-\varepsilon}$ o $-\sqrt{-\varepsilon}$ crece más lento. Esto resulta, a primera vista, contra-intuitivo, puesto que esperaríamos que, mientras más grande sea la disipación, el sistema converja más rápido al equilibrio. De hecho tenemos

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = -\nu \int (\partial_t u)^2 dx,$$

una interpretación apresurada de esta fórmula sería decir que, mientras mayor sea la viscosidad, la derivada temporal de la energía es más negativa y por lo tanto la velocidad con que esta decrece es mayor, e.g. deberíamos alcanzar el equilibrio más rápido. Sin embargo esta interpretación es incorrecta, puesto que, si la viscosidad es baja, la atenuación de las ondas también es baja, luego el termino $(\partial_t u)^2$ aporta más a la velocidad con que la energía decrece. De modo que existe una competencia entre estos dos

efectos, cuando la viscosidad es muy alta el gas de burbujas está prácticamente estático (casi todas las ondas son sobre-amortiguadas), y la velocidad con que el sistema va al equilibrio es pequeña. Por otro lado, cuando la viscosidad es muy pequeña el mar de ondas está muy activo, y el término $(\partial_t u)^2$ es grande, no obstante en este caso hay otra salvedad, aunque la velocidad resultante dU/dt sea pequeña el coarsening puede ser rápido, puesto que el sistema puede converger rápidamente a una sola burbuja sumergida en un mar de ondas altamente energizado, situación que no corresponde al equilibrio, que es una burbuja estrictamente estacionaria. Esto último es lo que se observa en la simulación numérica del caso cuasi-conservativo ($\nu \ll 1$), acá la dinámica más lenta no es el coarsening, sino la atenuación de las ondas. De hecho el coarsening es eficientísimo en el límite $\nu \rightarrow 0$, por lo cual uno podría preguntarse que pasa en el caso estrictamente conservativo ($\nu = 0$), acá no se minimiza la energía, sino que se conserva, sin embargo el proceso coarsening persiste, i.e. el sistema evoluciona a una sola burbuja inmersa en un mar de ondas cuya energía no mengua (ver fig. 1.11.a).

De modo que en el caso conservativo el sistema todavía presenta un comportamiento irreversible como es el coarsening, o sea estamos ante un caso de *irreversibilidad hamiltoniana*, donde el sistema sigue evolucionando hacia un equilibrio, que ya no corresponde al mínimo del funcional (1.2.2). En efecto, si bien este equilibrio puede ser cualitativamente similar al equilibrio del caso disipativo, es de una naturaleza esencialmente diferente, por ejemplo se observa que la burbuja resultante puede tener velocidad, e.g. se puede decir que el sistema converge más bien a una onda solitaria. Esta evidencia numérica sugiere fuertemente que el modelo VdW conservativo (VdWc de aquí en adelante) es ergódico y no-integrable, más aún presenta un comportamiento altamente caótico. De acá podemos conjeturar que el mar de ondas es turbulento, esto es, de acuerdo a la teoría de turbulencia débil de Zakharov, un gas de ondas interactuantes que termaliza a un equilibrio caracterizado por el máximo de una entropía (ver ref. [14]). Luego, podemos pensar el mar de ondas como un fluido caliente (cuya temperatura depende de la energía del sistema) sobre el cual se encuentran las burbujas, esto actuará como un fondo fluctuante que optimiza el proceso de coarsening.

Si bien, esta hipótesis del fondo fluctuante no pasa de ser una mera especulación, nos sugiere la idea de incorporar ruido en el modelo (1.2.1), de la forma

$$\partial_{tt}u = \partial_{xx}(\varepsilon u + u^3 - \partial_{xx}u + \nu \partial_t u) + \partial_{xx}\xi(x, t),$$

para conservar la masa y el momentum. Esto tiene un interés en sí mismo, puesto que, la descripción de un sistema, en esencia discreto (sistema de partículas clásicas), mediante campos continuos, conlleva un *coarse-graining* (ver la introducción), por lo cual estos campos sufren fluctuaciones que pueden ser modeladas incorporando un ruido. En efecto, los medios granulares, por estar constituidos por un número menor de partículas que un gas convencional, son altamente ruidosos. Luego, tomando un ruido blanco de intensidad η , $\langle \xi(x, t) \xi(x', t') \rangle = \eta \delta(x' - x) \delta(t' - t)$, se observa que el coarsening, incluso en el régimen de viscosidad alta, es mucho más eficiente (ver fig. 1.11.b). Esto se puede entender trivialmente del hecho que el ruido incrementa el término $(\partial_t u)^2$, no obstante en este caso la energía solo se minimiza en promedio. De modo que, si el ruido es muy grande, habrán muchas fluctuaciones a este proceso de minimización, las que afectarán la eficiencia del proceso de coarsening. Tanto como las burbujas desaparecen más rápido, el ruido creará nuevas burbujas, haciendo que el largo promedio no crezca muy rápido,

por lo cual habrá un valor óptimo de la intensidad η para el cual el coarsening será más eficiente. Un estudio detallado de como el ruido afecta el proceso de coarsening en un modelo más simple que (1.2.1) (ecuación de Ginzburg-Landau real), se encuentra en el capítulo III de esta tesis.

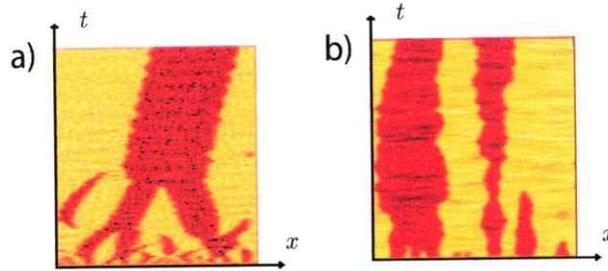


Fig. 1.11: Proceso de coarsening para $u_0 = 0$ y $\varepsilon = -0,5$, en los regímenes a) conservativo, $\nu = 0$ y b) alta viscosidad, $\nu = 3$, pero en presencia de ruido, $\eta = 0,5$.

De todas maneras existen diferencias cualitativas entre el proceso de coarsening en presencia de ruido y el coarsening en el caso conservativo o cuasi-conservativo (i.e. con una alta actividad de ondas). Si es verdad que el mar de ondas es turbulento y actúa como un fondo fluctuante, i.e. un ruido térmico generado por la propia ecuación, de todas formas procesos tales como la aniquilación de una burbuja afectarían el comportamiento de este, por ejemplo le transferirían energía haciéndolo “más caliente”. Más aún, en estos mismos procesos de transferencia de energía se requiere de un tiempo para que el mar de ondas se termalice, de hecho, si estos tiempos de termalización son del orden de los tiempos del coarsening el proceso se torna mucho más complejo, pues tanto el coarsening como la termalización del mar turbulento constituyen un mismo proceso de evolución al equilibrio que en este caso no tendría mucho sentido diferenciar. Numéricamente se observa que, cuando se considera el sistema en presencia de ruido en el régimen de alta viscosidad, la actividad de los dominios de densidad uniforme es completamente aleatoria (ver 1.11.b), por otro lado, cuando la viscosidad es baja, de modo que la atenuación de las ondas es lenta, se observa la propagación de cúmulos de materia con una velocidad bien definida (ver 1.11.a), que probablemente se traten de solitones. Que el sistema no sea integrable no quiere decir que no admite soluciones tipo onda solitaria, son soluciones particulares que coexisten con otro tipo de comportamientos más complejos. Dado la relevancia de este tipo de soluciones en el proceso de coarsening procederemos a un caracterización analítica más acabada de éstas.

1.5. SOLUCIÓN DE ONDA SOLITARIA PARA VdWc

Si consideremos el modelo VdWc en un sistema de referencia móvil $z = x - ct$, el perfil de densidades satisface la ecuación tipo Newton

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = (\varepsilon - c^2) u + u^3 + \lambda, \quad (1.5.1)$$

donde λ es una constante de integración compatible con condiciones de borde periódicas o de flujo nulo. Esta ecuación es idéntica a (1.3.1) si cambiamos $\varepsilon \rightarrow (\varepsilon - c^2)$, e.g. presentan el mismo tipo de soluciones, de modo que, nos concentraremos en el caso $\lambda \leq 0$. Considerando el sistema muy grande ($l \gg 1$), las soluciones de onda solitaria corresponden a órbitas homoclinas de (1.5.1), las cuales solo existen solo si $\varepsilon < c^2$ y $\lambda < 2((c^2 - \varepsilon)/3)^{3/2}$. Estas ondas solitarias se propagarán sobre una densidad u_0 (valor asintótico de la órbita homoclina), la cual, para un sistema lo suficientemente grande, corresponde a la densidad global, puesto que la cantidad de materia transportada por esta onda será despreciable frente a la masa total del sistema.

La velocidad de la onda solitaria está acotada

$$u_0^2 + \varepsilon < c^2 < v_s^2, \quad (1.5.2)$$

con v_s^2 la velocidad del sonido (1.2.4), o sea estas ondas son *subsónicas*. Para $\lambda < 0$ la densidad de base $u_0 < 0$, y la onda solitaria es “brillante”, o sea un cúmulo de materia cuya expresión analítica es

$$u = u_0 + \frac{2(3u_0^2 + \varepsilon - c^2)}{-2u_0 + \sqrt{2(c^2 - u_0^2 - \varepsilon)} \cosh \left[\sqrt{3u_0^2 + \varepsilon - c^2} (x - ct - x_0) \right]}. \quad (1.5.3)$$

Cuando $\lambda > 0$ la densidad de base $u_0 > 0$, y la onda solitaria es “oscura”, i.e. un agujero con menos material cuya expresión analítica corresponde a la transformación de simetría $u \rightarrow -u$ y $u_0 \rightarrow -u_0$ de (1.5.3). Si $\lambda = 0$, (1.5.1) posee dos órbitas heteroclinas, que representan soluciones kink o anti-kink

$$u = \pm \sqrt{c^2 - \varepsilon} \tanh \left[\sqrt{\frac{c^2 - \varepsilon}{2}} (x - ct - x_0) \right],$$

compatibles solo con condiciones de borde de flujo nulo. La forma de la onda (1.5.3) se puede apreciar en fig. 1.12.

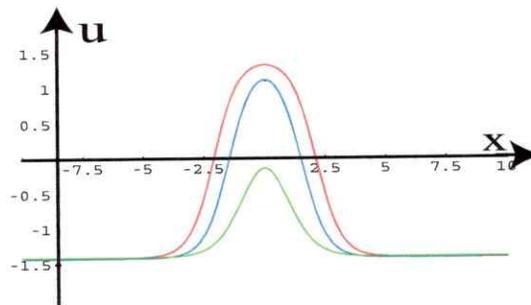


Fig. 1.12: Ondas solitarias, de diferente amplitud, que se propagan sobre el mismo estado homogéneo.

La amplitud de (1.5.3) decrece con la velocidad, y tiene la forma

$$A = \frac{2(3u_0^2 + \varepsilon - c^2)}{2|u_0| + \sqrt{2(c^2 - u_0^2 - \varepsilon)}}, \quad (1.5.4)$$

de modo que, cuando la velocidad de la onda solitaria se acerca a la del sonido, su amplitud tiende a cero. Mientras que cuando tiende a su cota inferior, $c^2 = u_0^2 + \varepsilon$, la solución (1.5.3) tiende al estado simétrico $u = -u_0$, claro que en este límite u_0 no se puede identificar con la densidad global, acá la onda solitaria se esta haciendo muy grande y por lo tanto acarrea mucha materia. De todas formas, los cúmulos de materia, que se propagan con una velocidad bien definida, observados en la simulación numérica son de una amplitud pequeña o moderada, por lo cual el ultimo limite es menos interesante que el primero.

Todo esto es válido sólo en R_3 , en la región de coexistencia $u_0^2 + \varepsilon < 0$, por lo cual la cota inferior de la velocidad deja de existir. Acá, cuando la velocidad de (1.5.3) tiende a cero, esta solución tiende a la burbuja inestable (1.3.5). Luego, la onda solitaria ya es inestable antes de convertirse en la burbuja (1.3.5), puesto que, dado que esta solución es linealmente inestable, implica que (1.5.3) debió ser linealmente marginal antes de transformarse en esta burbuja, i.e. con $c \neq 0$. Numéricamente se observa que, para $u_0 \in R_2$, cuando la velocidad de (1.5.3) esta lo suficientemente cerca de la del sonido, la onda es estable, mientras que si su velocidad disminuye bajo un valor crítico, la onda deviene inestable, y durante su propagación mengua su amplitud y se incrementa su velocidad, de modo de estabilizarla, durante el proceso se emite radiación para conservar la energía (1.2.2). Esto se puede apreciar en fig. 1.13.

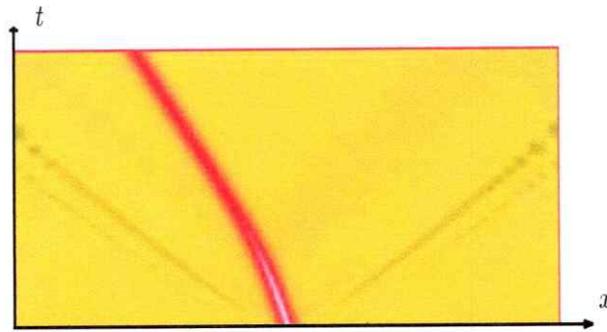


Fig. 1.13: Onda solitaria inestable, de gran amplitud, en la zona de coexistencia, $u_0 = -0,6$ y $\varepsilon = -0,5$, en régimen cuasi-conservativo $\nu = 0,01$. Durante su propagación transita a una onda de menor amplitud estable.

En la región de descomposición espinodal se tiene que $3u_0^2 + \varepsilon < 0$, por lo cual una solución como (1.5.3), con $u_0 \in R_1$, deja de tener sentido. Acá el sistema selecciona dos nuevas densidades, $u = \pm\sqrt{-\varepsilon}$, las cuales son estables (de hecho corresponden al mínimo global de la energía) y pueden soportar la propagación de ondas solitarias, las cuales, si el dominio de densidad uniforme es lo suficientemente grande, serán aproximadas por (1.5.3). Más precisamente, tendremos soluciones de la forma

$$u = \pm\sqrt{-\varepsilon} \mp \frac{\sqrt{2}(-2\varepsilon - c^2)}{\sqrt{-2\varepsilon + |c| \cosh \left[\sqrt{(-2\varepsilon - c^2)}(x - ct - x_0) \right]}}, \quad (1.5.5)$$

con $c^2 < -2\varepsilon$. Éstas son el tipo de ondas solitarias que se propagan por el sistema durante el proceso de coarsening, también en la región de coexistencia se pueden propagar

objetos como éste, cuando el sistema se encuentra en la burbuja (1.3.6), aunque aquí no juegan un rol preponderante en el proceso de nucleación de esta burbuja. Notemos que (1.5.5), cuando $c \rightarrow 0$, tiende a la densidad simétrica $\mp\sqrt{-\varepsilon}$, o mejor dicho, cuando el sistema es finito tiende a una burbuja que corresponde tanto a la burbuja estable como la inestable, i.e a (1.3.3) con $u_0 = \pm\sqrt{-\varepsilon}$, y $l \neq \infty$ aunque $l \gg 1$ (recordemos que todas estas órbitas homoclinas son sólo aproximaciones para un sistema grande, las soluciones exactas son órbitas periódicas, descritas por funciones elípticas, que se parecen mucho a las homoclinas cuando l es lo suficientemente grande). De modo que, estamos en el punto en que ambas burbujas aparecen por saddle-node, por lo tanto corresponden a una solución marginal linealmente, entonces (1.5.5) es marginal cuando $c \rightarrow 0$, e.g. es estable $\forall |c| > 0$.

En resumen, la estructura de bifurcaciones de la onda solitaria (1.5.3) es la siguiente: cuando $u_0 \in R_3$, y la velocidad de la onda esta acotada según (1.5.2), esta solución es estable; si $u_0 = \pm\sqrt{-\varepsilon}$, la onda tiende a una solución marginal en el límite $c \rightarrow 0$, luego, para $u_0 \in R_2$, la onda es estable para velocidades cercanas a la del sonido e inestable para velocidades cercanas a 0; cuando ingresamos en la región de descomposición espinodal (1.3.5) y (1.5.3) colapsan con el estado uniforme $u = u_0$, desestabilizandolo.

1.6. SOLITONES EN EL LIMITE CUASI-SONICO

Como ya lo habíamos señalado, estos cúmulos de materia (o carencia de ella), que se observan, propagandose con una velocidad bien definida, durante el proceso de coarsening, son de una amplitud moderada o pequeña. Es discutible si estos entes son paquetes de ondas lineales o ondas no-lineales del tipo (1.5.5), de todas formas la existencia de estas ondas solitarias debiese implicar que el sistema, de manera espontanea, las excita durante un proceso dinámico complejo como el coarsening. Esto no quiere decir que las ondas lineales no jueguen un rol importante, sino que las ondas solitarias también lo hacen.

Consideremos entonces, de forma general, la onda (1.5.3) en el límite $A \ll 1$, con $u_0 \sim \mathcal{O}(1)$. Que corresponde a una velocidad muy cercana a la del sonido (*límite cuasi-sonico*), i.e. si $c = v_s - w$, entonces $0 < w/v_s \ll 1$. Acá la onda adopta la forma aproximada

$$u - u_0 \simeq \frac{v_s w}{-u_0} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{v_s w}{2}} \{x \pm (v_s - w)t - x_0\} \right] + \mathcal{O}(w^2), \quad (1.6.1)$$

expresión que corresponde a los típicos solitones de la ecuación de Boussinesq o Korteweg de Vries (KdV). Más aún, tiene la típica relación amplitud (A) ancho (σ) de un solitón KdV

$$A \sim \sigma^2 \sim \mathcal{O}(w),$$

donde hemos supuesto todos los demás parámetros $\mathcal{O}(1)$. Lo que nos sugiere introducir la siguiente aproximación:

1.6.1. KdV a partir de VdWc

Consideremos el cambio de variables

$$\bar{t} = v_s^2 t, \quad \bar{x} = v_s \hat{x}, \quad u = u_0 + \frac{v_s^2}{-3u_0} v \quad \text{y} \quad \beta = \frac{v_s^2}{9u_0^2},$$

luego, VdWc adopta la forma

$$\partial_{\bar{t}\bar{t}} v = \partial_{\bar{x}\bar{x}} (v - v^2 + \beta v^3 - \partial_{\bar{x}\bar{x}} v). \quad (1.6.2)$$

Tomando como inspiración la relación entre la amplitud y el ancho del soliton KdV, exhibida por (1.6.1), introduciremos el escalamiento

$$\xi = \chi(\bar{x} - \bar{t}); \quad \zeta = \chi(\bar{x} + \bar{t}) \quad \text{y} \quad \tau = \chi^3 \bar{t},$$

y supondremos que podemos expandir v de la forma

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \chi^{2n} v_n,$$

donde $\chi \sim \mathcal{O}(\sqrt{w})$ es un parámetro pequeño. Notemos que ξ y ζ corresponden a sistemas de referencia móvil que se desplazan a la derecha o a la izquierda con la velocidad del sonido, i.e. están vinculados con las soluciones de D'Alembert de la ecuación de onda asociada a (1.6.2). La escala de tiempo lenta, τ , se relaciona con la variación a la velocidad del sonido con que se propagan las ondas no-lineales (de (1.6.1) vemos que es $\mathcal{O}(w^{3/2})$). Para v hemos supuesto que la amplitud de las ondas en estudio se puede expandir en potencias de w .

Entonces, introduciendo este ansatz en (1.6.2), e igualando orden por orden en χ , el primer orden nos da la ecuación de onda

$$\partial_{\xi\zeta} v_1 = 0 \quad \implies \quad v_1 = f(\xi, \tau) + g(\zeta, \tau), \quad (1.6.3)$$

cuya solución general es la solución de D'Alembert mostrada arriba. Luego, tomando esta solución, el segundo orden nos da

$$4\partial_{\xi\zeta} v_2 = \partial_{\xi} [-2\partial_{\tau} f + 2f\partial_{\xi} f + \partial_{\xi\xi\xi} f] + \partial_{\zeta} [2\partial_{\tau} g + 2g\partial_{\zeta} g + \partial_{\zeta\zeta\zeta} g] + 2(\partial_{\zeta} + \partial_{\xi})^2 fg, \quad (1.6.4)$$

que es una ecuación lineal inhomogénea para v_2 . Luego, si queremos que las solución sean acotada (v_2 acotada, de modo que el método sea consistente), el lado derecho de (1.6.4) no debe contener elementos en el kernel del operador de onda $\partial_{\xi\zeta}$, i.e. debemos imponer la condición de solubilidad

$$\partial_{\xi} [-2\partial_{\tau} f + 2f\partial_{\xi} f + \partial_{\xi\xi\xi} f] = -\partial_{\zeta} [2\partial_{\tau} g + 2g\partial_{\zeta} g + \partial_{\zeta\zeta\zeta} g].$$

Puesto que el lado izquierdo de esta ecuación depende solo de ξ mientras que el lado derecho solo de ζ ambos deben ser iguales a una constante. Más aún, dado que estamos

interesados en soluciones tipo ondas solitarias, $f \rightarrow 0$ cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$ y $g \rightarrow 0$ cuando $\zeta \rightarrow \pm\infty$, la condición de solubilidad queda:

$$-2\partial_\tau f + 2f\partial_\xi f + \partial_{\xi\xi\xi} f = 0 \quad (1.6.5)$$

$$2\partial_\tau g + 2g\partial_\zeta g + \partial_{\zeta\zeta\zeta} g = 0 \quad (1.6.6)$$

que corresponden a dos ecuaciones KdV asociadas a sistemas de referencia que se desplazan con la velocidad del sonido hacia la derecha (1.6.5) o hacia la izquierda (1.6.6). La diferencia en el signo nos asegura que sus soluciones se propagaran en contra de la velocidad del sistema de referencia en cuestión, i.e. son subsónicas.

La ventaja de esta aproximación es que reducimos el problema a una ecuación integrable bien conocida, o sea una ecuación cuyas propiedades se encuentran ampliamente estudiadas en la literatura (ver, por ejemplo ref., [15]). De hecho nos provee de un argumento analítico paralelo a la heurística realizada en el parágrafo anterior para asegurar la estabilidad de la onda solitaria (1.5.3), con velocidades cercanas a la del sonido, en este límite la onda es un genuino solitón, i.e. una solución tipo partícula que al interactuar con otras soluciones de su misma especie no sufre modificaciones morfológicas. En efecto, otra de las ventajas de esta aproximación es que nos permite estudiar la interacción de las ondas no-lineales en este límite, como la interacción solitón-solitón. Para ello tomemos (1.6.5) y redefinamos $\tau = -2T$ y $f = 6\phi$, con lo cual obtenemos una forma estándar de la ecuación KdV

$$\partial_T \phi + 12\phi\partial_\xi \phi + \partial_{\xi\xi\xi} \phi = 0. \quad (1.6.7)$$

Esta ecuación tiene solución exacta, para cualquier perfil inicial, mediante el método de scattering inverso (ver ref. [15]). También existen otros métodos alternativos para construir soluciones particulares de (1.6.7), uno que resulta particularmente práctico para nuestros propósitos es el método de Hirota para construir una solución de N-solitones. Los detalles de este método se encuentran en el Apéndice A de esta tesis, luego, siguiendo este apéndice tenemos que la solución de 1-soliton tiene la forma

$$\phi_{1S} = \frac{a^2}{4} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{a}{2} (\xi - a^2 T) + \gamma \right], \quad (1.6.8)$$

la cual es corresponde a (1.6.1) si reconocemos

$$\chi = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2w}{v_s}},$$

que es $\mathcal{O}(\sqrt{w})$ como lo habíamos supuesto, i.e. hasta aquí el método es consistente. La solución de 2-solitones tiene la forma

$$\phi_{2S} = \partial_{\xi\xi} \left\{ \log \left(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 e^{\theta_1 + \theta_2} \right) \right\}, \quad (1.6.9)$$

con

$$\theta_i = a_i \xi - a_i^3 T + \gamma_i,$$

donde a_1 y a_2 corresponden a la amplitud que cada solitón. Mientras que $\theta_1 \sim 0$ ó $\theta_2 \sim 0$ corresponden, en un instante T dado, a la región del espacio donde se encuentra

el cumulo de materia transportado por cada solitón, luego, $\theta_1 \sim \theta_2 \sim 0$ corresponde al lapso de tiempo en que ocurre la colisión, digamos en torno a un instante $T \sim \mathcal{O}(1)$ (si las fases $\gamma_i \sim \mathcal{O}(1)$). De modo que, para ver el efecto de la colisión sobre los solitones, podemos suponer, sin pérdida de generalidad $a_1 > a_2$, o sea el solitón "1" es más rápido que el solitón "2", e.g. el solitón "2" es impactado desde la izquierda por el soliton "1". Luego, si nos colocamos en la región del espacio donde se encuentra el soliton "1", $\theta_1 \sim 0$, en un tiempo muy anterior a la colisión, digamos $T \sim -\infty$, tenemos que, en esta región del espacio $\theta_2 \sim -\infty$, por lo cual podemos aproximar (1.6.9)

$$\phi_{2S}(\theta_1 \sim 0; T \sim -\infty) \approx \partial_{\xi\xi} \left\{ \log(1 + e^{\theta_1}) \right\} \approx \frac{a_1^2}{4} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{a_1}{2} (\xi - a_1^2 T) + \gamma_1 \right],$$

mientras que, si continuamos en la región donde se encuentra el soliton "1", $\theta_1 \sim 0$, pero ahora en un tiempo muy posterior a la colisión, digamos $T \sim \infty$, de modo que ahora $\theta_2 \sim \infty$, obtendremos que (1.6.9) se aproxima a

$$\begin{aligned} \phi_{2S}(\theta_1 \sim 0; T \sim \infty) &\approx \partial_{\xi\xi} \left\{ \log \left(e^{\theta_2} \left(1 + \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 e^{\theta_1} \right) \right) \right\} \\ &\approx \frac{a_1^2}{4} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{a_1}{2} (\xi - a_1^2 T) + \gamma_1 + \log \left[\left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 \right] \right]. \end{aligned}$$

Efectuando el mismo análisis en la región donde se encuentra el solitón "2", $\theta_2 \sim 0$, concluimos que

$$\phi_{2S}(T \sim \pm\infty) \approx \sum_{i=1}^2 \frac{a_i^2}{4} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{a_i}{2} (\xi - a_i^2 T) + \gamma_i + \Delta_i^\pm \right],$$

donde

$$\Delta_1^- = \Delta_2^+ = 0 \quad \text{y} \quad \Delta_1^+ = \Delta_2^- = \log \left[\left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 \right]. \quad (1.6.10)$$

Luego, tras colisionar dos solitones de la forma (1.6.8), ni su estructura ni la amplitud que poseían antes de la colisión, se ve afectada después de esta. Los solitones solo experimentan un cambio de fase, i.e. el solitón más alto y delgado (por lo tanto el más rápido) sufre un incremento en su fase igual al decremento experimentado por el más bajo y ancho. Cave señalar que, durante el proceso de colisión, la estructura que se forma es mucho más compleja que la mera superposición de soluciones del tipo (1.6.8), esta estructura es descrita, de forma exacta, por (1.6.9). Este proceso se ilustra en fig. 1.14.a.

En la figura 1.14.b se muestra el proceso de colisión de dos solitones en VdW, para una viscosidad pequeña pero no nula, i.e. están siendo atenuados. Ambos propagándose en la misma dirección, acá el soliton más alto y delgado es el más lento, puesto que la aproximación KdV describe la velocidad relativa y opuesta a la del sonido. Para hacer más realista la situación, la condición inicial se preparó con un poco de ruido, de modo que la interacción se produce en un medio donde hay otras ondas propagándose. Acá se pudo observar el cambio de fase predicho por KdV, i.e. esta es una buena descripción de la interacción de solitones que se propagan en la misma dirección.

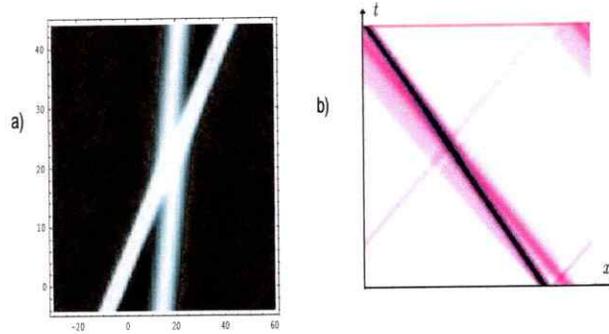


Fig. 1.14: Interacción solitón-solitón: a) diagrama espacio-temporal de la formula analítica de Hirota (1.6.9), para solitones KdV; b) interacción en el modelo VdW (en R_3), con $u_0 = -0,8$, $\varepsilon = -0,3$ y $\nu = 0,08$.

1.6.2. Interacción solitón izquierdo-derecho

Otro fenómeno importante, presente en la dinámica transiente exhibida por VdW, es la interacción entre ondas que se propagan hacia la izquierda con ondas que se propagan hacia derecha. Al nivel aproximativo desarrollado hasta acá dicha interacción es nula, puesto que las ecuaciones (1.6.5) y (1.6.6) están desacopladas. De modo que esta interacción, al menos en el régimen cuasi-sónico, es débil, y a primer orden (o sea, a nivel la solución de D'Alembert (1.6.3)), cuando un solitón que se desplaza a la derecha se encuentra con otro que se desplaza hacia la izquierda el resultado es la mera superposición lineal de ambos, i.e. uno es transparente al otro. No obstante, dado que VdW es una ecuación no-lineal, cierto efecto deben sufrir, para dilucidar esta corrección debemos resolver el segundo orden, el cual, ya impuesta la condición de solubilidad, es de la forma

$$\partial_{\xi\zeta} v_2 = \frac{1}{2}(\partial_{\zeta} + \partial_{\xi})^2 f g,$$

que depende, por supuesto, de la solución que hayamos escogido para el orden anterior, es la solución que corrige, i.e. estamos obteniendo una estimación de la forma $v \approx \chi^2 v_1 + \chi^4 v_2$, con $\chi \ll 1$. Luego, invirtiendo el operador de onda, obtenemos

$$v_2 = V_R(\xi, \tau) + V_L(\zeta, \tau) + \frac{1}{2} \left[(\partial_{\zeta} g) \left(\int d\xi f \right) + 2fg + (\partial_{\xi} f) \left(\int d\zeta g \right) \right], \quad (1.6.11)$$

donde V_R y V_L corresponden a las correcciones de las soluciones de D'Alembert f y g , al orden $\mathcal{O}(\chi^4)$, sin contar el efecto de una sobre la otra. Si tomamos como solución de base solitones de la forma (1.6.8), i.e.

$$f = \frac{3}{2} a_R^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\theta_R}{2} \right] \quad \text{y} \quad g = \frac{3}{2} a_L^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\theta_L}{2} \right],$$

con

$$\theta_R = a_R \xi + 2a_R^3 \tau + \gamma_R \quad \text{y} \quad \theta_L = a_L \xi + 2a_L^3 \tau + \gamma_L,$$

las correcciones V_R y V_L serán las correcciones a (1.6.1) de orden $\mathcal{O}(w^2)$. Para determinar el término de interacción en (1.6.11), notemos que tenemos la libertad en una

constante de integración, los términos en $\partial_\xi f$ o $\partial_\zeta g$ pueden ser interpretados, dado que son correcciones pequeñas, como traslaciones de las soluciones de base $f \rightarrow f + c_R \chi^2 \partial_\xi f$ y $g \rightarrow f + c_L \chi^2 \partial_\zeta g$, o sea cambios de fase. Luego, considerando que no hay correcciones arbitrarias a la fase al segundo orden, i.e. todo cambio de fase se debe a la interacción, el término de interacción en (1.6.11) queda

$$W(\xi, \zeta, \tau) = \frac{9}{4} a_R a_L [-a_L^2 \operatorname{sech}^2(\theta_L/2) \tanh(\theta_L/2) (\tanh(\theta_R/2) + 1) \\ + a_R a_L \operatorname{sech}^2(\theta_R/2) \operatorname{sech}^2(\theta_L/2) \\ - a_R^2 \operatorname{sech}^2(\theta_R/2) \tanh(\theta_R/2) (\tanh(\theta_L/2) + 1)].$$

De modo que, cuando los dos solitones se encuentran, el resultado es un objeto con una amplitud levemente superior que la superposición de ambos. Luego de la colisión ambos experimentan un pequeño desfase hacia la dirección donde se encuentra el otro solitón.

1.7. EFECTOS VISCOSOS

Hasta el momento nos hemos concentrado en el caso conservativo, $\nu = 0$, al menos en el estudio de las ondas no-lineales. Puesto que estos objetos juegan un rol relevante en el regimen de baja viscosidad, nos concentraremos en este limite. Concretamente, definimos

$$\nu = \chi \mu,$$

donde μ es un parámetro que puede ser tomado de orden 1 o pequeño, pero de manera independiente del parámetro de escalamiento χ , de modo que en nuestro esquema perturbativo, i.e. cuando igualamos cada orden en χ , μ no juega ningún rol. Entoces (1.6.2) queda:

$$\partial_{\tau\tau} v = \partial_{xx}(v - v^2 + \beta v^3 - \partial_{xx} v + \chi^2 \mu \partial_x v), \quad (1.7.1)$$

y siguiendo el mismo procedimiento que en el parágrafo anterior, obtenemos:

$$-2\partial_\tau f + 2f\partial_\xi f + \partial_{\xi\xi\xi} f = -\mu\partial_{\xi\xi} f \quad (1.7.2)$$

$$2\partial_\tau g + 2g\partial_\zeta g + \partial_{\zeta\zeta\zeta} g = \mu\partial_{\zeta\zeta} g, \quad (1.7.3)$$

donde todas las variables son las mismas que en el caso conservativo. Estas ecuaciones corresponden a la KdV-Burgers, que es una modificación de KdV que agrega un término de difusión. Acá la diferencia de signo tiene el mismo origen que en el caso anterior, i.e. la naturaleza subsónica de los solitones, pero en este caso no podemos invertir el tiempo, pues el término disipativo quiebra la simetría de inversión temporal, si lo hiciéramos tendríamos anti-difusión, acá lo correcto es invertir el espacio (en el caso de (1.6.5) estas dos opciones son completamente análogas). Luego, si tomamos $\tau = 2T$, $f = 6\phi$ e invertimos el espacio $\xi \rightarrow -\xi$, obtenemos:

$$\partial_T \phi + 12\phi\partial_\xi \phi + \partial_{\xi\xi\xi} \phi = \mu\partial_{\xi\xi} \phi, \quad (1.7.4)$$

que es la forma estándar de KdV-Burgers.

1.7.1. Atenuación de los solitones en el régimen de viscosidad débil

Para estudiar el efecto que tiene el término difusivo sobre los solitones (1.6.8) consideremos el siguiente análisis perturbativo en el parámetro μ (o sea estamos considerando viscosidad muy pequeña, $\mu \ll 1$). Tomemos dos escalas de tiempo

$$T_0 = T \quad \text{y} \quad T_1 = \mu T,$$

donde la primera de éstas, T_0 , es la escala típica en la que se mueve el solitón, mientras que T_1 es la escala lenta en que varía éste producto de la viscosidad, esto es (a primer orden al menos) como varían las parámetros que lo caracterizan, i.e su amplitud a y su fase γ . Entonces, tomando la solución (1.6.8), introducimos el ansatz:

$$\phi = \phi_{1S}(\xi, T_0, a(T_1), \gamma(T_1)) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \phi^{(n)}.$$

De este modo el primer orden es trivial por el ansatz, mientras que el segundo orden da:

$$\mathcal{L}\phi^{(1)} = \partial_{\xi\xi}\phi_{1S} - (\partial_{T_1}a) \frac{\partial\phi_{1S}}{\partial a} - (\partial_{T_1}\gamma) \frac{\partial\phi_{1S}}{\partial\gamma}, \quad (1.7.6)$$

que es una ecuación lineal inhomogénea para $\phi^{(1)}$, donde el operador lineal es:

$$\mathcal{L} = \partial_{T_0} + 12\phi_{1S}\partial_{\xi} + 12(\partial_{\xi}\phi_{1S}) + \partial_{\xi\xi\xi}.$$

Introduciendo el producto interno:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \phi \psi \quad \text{con} \quad z = \frac{a}{2}(\xi - a^2T),$$

obtenemos que el hermítico conjugado de \mathcal{L} es:

$$\mathcal{L}^{\dagger} = -(\partial_{T_0} + 12\phi_{1S}\partial_{\xi} + \partial_{\xi\xi\xi})$$

e.g., para que (1.7.6) sea soluble, su lado derecho debe ser ortogonal al kernel de \mathcal{L}^{\dagger} . Claramente

$$\mathcal{L}^{\dagger}\phi_{1S} = 0$$

pues esta no es otra cosa que lo ecuación KdV (1.6.7) para ϕ_{1S} , que es precisamente una solución de esta. Luego,

$$\left\langle \frac{\partial\phi_{1S}}{\partial\gamma} \middle| \phi_{1S} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial\phi_{1S}}{\partial a} \middle| \phi_{1S} \right\rangle = \frac{\|\phi_{1S}\|^2}{a}$$

por paridad, más aún $\partial_{\xi\xi}\phi_{1S}$ es par y ortogonal a $\partial\phi_{1S}/\partial\gamma$ (que es impar), por lo tanto

$$\frac{d\gamma}{dT} = 0. \quad (1.7.7)$$

Este resultado es evidente si se considera la invarianza traslacional del sistema, simetría que no es quebrada por el término difusivo. Por otro lado

$$\frac{da}{dT} = -\frac{\mu}{5} a^3, \quad (1.7.8)$$

de modo que el decaimiento de la amplitud de (1.6.8) es algebraico, y por lo tanto lo suficientemente lento como para que el solitón dure un tiempo largo antes de difundirse y desaparecer. En efecto, la integración de (1.7.8) da

$$a(T) = \frac{\sqrt{10}a_i}{\sqrt{10 + \mu a_i^2 (T - T_i)}},$$

donde $a_i = a(T_i)$, la amplitud inicial. Este proceso se ilustra en fig 1.15.a.

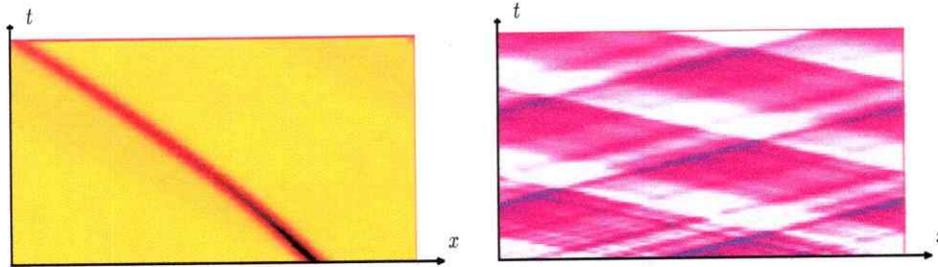


Fig. 1.15: Atenuación de solitones: a) Atenuación de un solitón, para $u_0 = -0,4$, $\varepsilon = -0,16$ y $\nu = 0,15$; b) El sistema, ante una condición inicial ruidosa, con $u_0 = -0,8$, $\varepsilon = -0,3$ y $\nu = 0,2$.

Luego, mientras la atenuación de las ondas lineales es exponencial, los solitones experimentan un atenuación comparativamente mucho más lenta, $A \sim t^{-1/2}$, por lo cual pueden propagarse por un tiempo mucho más largo en un medio débilmente viscoso. De modo que, en el proceso de coarsening, se esperaría que jugara un rol más relevante, que las ondas lineales, en el transpaso de información de una burbuja a otra, al menos cuando el gas de burbujas está lo suficientemente diluido. Previamente se comentaba que, no era fácil discernir si los cúmulos de materia, que se observa propagarse durante el coarsening, son solitones o paquetes de ondas lineales. Probablemente, en un medio con un alta actividad de ondas, ambos fenómenos están presentes simultáneamente, pero los paquetes lineales son atenuados de una manera mucho más violenta, por la viscosidad, que los solitones. Luego, estos últimos persisten por mucho más tiempo, por lo que podríamos decir que el mar de ondas es, predominantemente, un mar de solitones. En efecto, en la figura 1.15.b se muestra al sistema, ante una condición inicial ruidosa, en R_3 , acá se ve que la radiación lineal es rápidamente atenuada, para prevalecer la propagación de solitones.

1.7.2. Cuando la difusión domina sobre la dispersión:

Si tomemos en (1.7.2) $\tau = 2T/\mu$, $f = \phi/2$ y $\xi = -\eta/\mu$, la ecuación queda de la forma

$$\partial_T \phi + \phi \partial_\eta \phi + \frac{1}{\mu} \partial_{\eta\eta} \phi = \partial_{\eta\eta} \phi$$

consideremos ahora la viscosidad alta (μ alto, pero $\nu = \chi\mu$ puede tener un valor arbitrario dependiendo de como se relacionan la amplitud de la perturbación con la disipación del medio), luego, podemos despreciar el termino dispersivo, con lo cual obtenemos

$$\partial_T \phi + \phi \partial_\eta \phi = \partial_{\eta\eta} \phi, \quad (1.7.9)$$

que es la ecuación de Burgers, si introducimos la transformación de Cole-Hopf

$$\phi = -2\partial_\eta \{\log \Psi\}, \quad (1.7.10)$$

en (1.7.9), esta nos queda

$$\partial_\eta \left\{ \frac{\partial_T \Psi}{\Psi} - \frac{\partial_{\eta\eta} \Psi}{\Psi} \right\} = 0 \implies \partial_T \Psi + c(T) \Psi = \partial_{\eta\eta} \Psi$$

y, como la constante de integración $c(T)$ puede ser absorbida en Ψ sin afectar a ϕ , la tomamos igual a cero, obteniendo

$$\partial_T \Psi = \partial_{\eta\eta} \Psi, \quad (1.7.11)$$

que es la ecuación de difusión lineal. La que tiene solución exacta para cualquier perfil inicial

$$\Psi(\eta, 0) = \psi_0(\eta) \implies \Psi(\eta, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta' P(\eta - \eta' | T) \psi_0(\eta'),$$

donde $P(X|T)$ es el típico propagador gaussiano de (1.7.11):

$$P(X|T) = \exp\left\{-\frac{X^2}{4T}\right\} / \sqrt{4\pi T}$$

Esto implica que (1.7.9) también tiene solución exacta para un perfil inicial arbitrario, en efecto:

$$\phi(\eta, 0) = \phi_0(\eta) \implies \psi_0(\eta) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} ds \phi_0(s)\right\}$$

Un ejemplo sencillo es la propagación de un frente, para esto consideremos el perfil inicial:

$$\phi_0(\eta) = a(1 - \tanh[\eta/\lambda])$$

si tomamos:

$$\begin{aligned} \lambda = 2/a &\implies \psi_0(\eta) = e^{-a\eta/2} \cosh\left[\frac{a\eta}{2}\right] \\ &\implies \Psi(\eta, T) = e^{-a(\eta-aT)/2} \cosh\left[\frac{a}{2}(\eta - aT)\right] \end{aligned}$$

de este modo obtenemos la solución frente para (1.7.9)

$$\phi = a \left(1 - \tanh \left[\frac{a}{2} (\eta - aT) \right] \right). \quad (1.7.12)$$

De modo que, cuando los efectos difusivos, que induce la viscosidad, dominan sobre los dispersivos, el modelo VdW admite la propagación de un frente monótono. Como ya lo habíamos mencionado, en la región de coexistencia, cuando el sistema nuclea espontáneamente una burbuja, emite frentes de densificación y desdensificación, los cuales mantienen un perfil monótono durante su propagación cuando la viscosidad del medio es alta. De no ser así el frente se descompone en un tren de ondas no lineales (ver fig. 1.9).

En el sistema granular simulado, que fue la motivación original del modelo VdW, se observa que los frentes de densificación y desdensificación, durante el proceso de nucleación de una burbuja, mantienen un perfil monótono. Por lo cual se puede inferir que el sistema se encuentra en un régimen de viscosidad alta. Los intentos de observar solitones en este medio han sido infructuosos, lo cual robustece la idea que la viscosidad efectiva es elevada. Al parecer estamos más bien ante un sistema muy ruidoso, pero a la vez muy viscoso, e.g. se observan muchas fluctuaciones que no son atribuibles a la propagación de ondas.

Dada la universalidad en la deducción del modelo VdW (se utilizan solo supuestos muy elementales), es de esperar que existan otros sistemas que sean descritos por esta aproximación, los cuales se encuentren en un régimen de viscosidad baja. Por ejemplo, el Prof. N. Mujica está efectuando experimentos en una monocapa granular, la cual exhibe una transición de fase similar a la estudiada en este capítulo. Aunque en este caso no se conserva el momento, y el análogo más apropiado parecer ser una transición líquido-sólido, y no líquido-vapor, existe cierta evidencia experimental preliminar de que el sistema exhibe la propagación de ondas, al menos en la fase líquida. Si bien, los resultados aquí obtenidos no son directamente aplicables a este caso, se vislumbra cierta esperanza de que, tras las modificaciones pertinentes, se pueda encontrar una aplicación al desarrollo teórico efectuado en este capítulo.

Capítulo 2

FRENTES Y ESTRUCTURAS LOCALIZADAS EN DINAMICA POBLACIONAL

2.1. INTRODUCCION

Uno de los comportamientos más fascinantes que puede presentar la materia fuera del equilibrio es la vida. La cual es, probablemente, la respuesta auto-organizativa más compleja que exhibe la naturaleza. La formación, funcionamiento e interacción de estructuras vivientes es un tema completamente abierto aún, y la posible matematización de estos procesos es un área donde la experiencia adquirida en la física, en la descripción matemática de otros procesos naturales, puede ser de gran utilidad.

Un tema de particular interés es el comportamiento de una especie en un ecosistema. Concretamente, como evoluciona el número de individuos y su distribución territorial en función de las condiciones a las que están sometidos. Ya por 1789, Thomas Malthus advierte el peligro que implica el crecimiento geométrico de la población versus un crecimiento aritmético de la producción agrícola. No obstante, la hambruna predicha por este razonamiento nunca ocurrió (aunque cabe señalar que esta teoría ha sido bastante caricaturizada a lo largo de la historia), éste pone en relieve uno de los ingredientes fundamentales que determinan el crecimiento de una población en un ambiente natural, los *factores reproductivos*. Por ejemplo, si consideramos una población de células, que se reproducen por simple división mitótica, tendremos que cada generación posee el doble de individuos que la generación que le precedió, i.e. transcurridas n generaciones la población se habrá incrementado en un factor 2^n .

Luego, en un caso idealizado, en que la especie se pueda reproducir libremente, sin que ningún otro elemento interfiera en este proceso, la población crecerá exponencialmente. Esto, claramente, no corresponde a lo que habitualmente observamos en la naturaleza, acá existen una serie de factores externos que mellan este crecimiento. Por ejemplo, la disponibilidad de recursos presentes en el medio es limitada, de modo que la población no puede crecer indefinidamente. También elementos tales como la presencia de depredadores, enfermedades, migraciones o adversidades climáticas menguaron el crecimiento de la población. Haciendo que, en el caso más realista, la evolución del número de individuos sea un fenómeno bastante complejo.

Una de las maneras más típicas de describir este proceso es considerar la densidad de individuos, por unidad de área, como un campo continuo $u = u(\vec{x}, t)$ (descripción continua). En primera aproximación, nos podemos concentrar en una sola especie, o sea,

consideramos la población de un determinado organismo como un sistema autónomo y resumimos los efectos del resto del ecosistema en los parámetros que caracterizan su evolución. Esto es solo una aproximación, puesto que el resto del ecosistema se ve afectado por la evolución de la población en cuestión, por lo cual no son parámetros fijos, sino variables dinámicas cuya evolución esta acoplada con la de u . O sea, estamos aproximando al resto del ecosistema como una colección de termostatos que le imponen ciertas condiciones ambientales a la especie en estudio, sin que estas condiciones sean significativamente afectadas por el comportamiento de esta población.

Luego, una segunda aproximación será considerar el territorio en que se encuentra inmersa la especie como un plano euclideo homogéneo e isótropo, i.e. estamos despreciando todas las irregularidades topográficas del terreno. De manera que, si nos concentramos en organismos simples, podemos modelarlos como partículas brownianas i.e. el transporte será difusivo y la densidad poblacional evolucionara según una ecuación de la forma

$$\partial_t u = D \nabla^2 u + G(u), \quad (2.1.1)$$

donde el modelamiento de $G(u)$ dará cuenta de los efectos dominantes que determinan la evolución de la población. Por ejemplo, si tan solo tomamos en cuenta la reproducción de la especie, tendremos la dependencia lineal $G(u) = ku$, de modo que, para $k > 0$, el número de individuos crece exponencialmente. Una manera de modelar el hecho que, los recursos disponibles en el ecosistema son limitados, y, por lo tanto el crecimiento de la población debe saturar, es mediante la no-linealidad logística $G(u) = (r - u)u$, donde $r > 0$ cuantifica la cantidad de recursos disponibles en el medio, de modo que la especie se pueda mantener. Este modelo es conocido como la ecuación de Fisher (ver ref. [16] o [17]) y posee un repelente uniforme en $u = 0$ y un atractor uniforme en $u = r$, que representa una densidad de equilibrio a la cual el sistema llega de acuerdo a la cantidad de recursos el medio le ofrece para su subsistencia.

En el modelo logístico la interacción entre los individuos que constituyen la población es puramente competitiva. Mientras menos congéneres tenga un individuo a su alrededor, menos competencia habrá por los recursos, de modo que su descendencia puede ser más abundante. Para muchas especies, la interacción entre los individuos que la constituyen, no es únicamente competitiva, sino que existen también elementos cooperativos, por ejemplo, la presencia de depredadores, implica que la cercanía a un grupo de congéneres disminuya la probabilidad de ser depredado, dando origen al comportamiento gregario observado en muchas especies. Existe, entonces, un tercer elemento a ser considerado, la *adversidad del medio*, o sea, debemos incorporar al modelamiento los factores hostiles que conspiran contra el desarrollo de la especie, y que implican que, para lograr su supervivencia, la población debe exceder cierta masa crítica. Por ejemplo, en las zonas de transición entre la sabana y el desierto en África, donde la disponibilidad del recurso hídrico es escasa, la población vegetal debe exceder cierta densidad crítica de modo reducir el impacto de la evaporación y lograr el agua que necesita para sobrevivir (ver ref. [18]).

Una manera de incorporar el efecto de la adversidad en (2.1.1) es cambiando la no-linealidad logística por una cubica, $G = u(u - a)(b - u)$, ecuación que es conocida como modelo de Nagumo (ver ref. [16]). Sin pérdida de generalidad podemos tomar $0 \leq a \leq b$, luego, el modelo de Nagumo posee un atractor uniforme en $u = 0$, que representa la

extinción de la especie, un repelot uniforme en $u = a$, que representa la densidad crítica, que debe exceder la población para lograr su supervivencia, y un atractor uniforme en $u = b$ que representa la saturación del crecimiento de la especie por la finitud de los recursos. En la figura 2.1 se puede apreciar las diferencias entre la no-linealidad logística y bi-estable presente en el modelo de Nagumo.

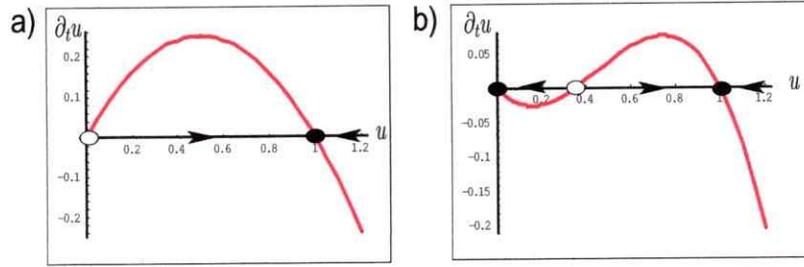


Fig. 2.1: Diferencia entre las no-linealidades a) logística, y b) de Nagumo. Los puntos negros representan atractores, mientras que lo blancos repelotes.

A diferencia de la ecuación de Fisher, el modelo de Nagumo posee un parámetro fundamental, $\alpha = a/b \implies \alpha \in [0, 1]$, el cual no puede ser cambiado arbitrariamente reescalando las variables, este parámetro constituye una medida de la adversidad del medio por lo cual nos referiremos a él como la *adversidad*. En efecto, el modelo de Nagumo es variacional

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u}, \quad \text{con} \quad \mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{D(\nabla u)^2}{2} + \frac{ab}{2}u^2 - \frac{a+b}{3}u^3 + \frac{u^4}{4} \right\} d^2x,$$

donde Ω es el dominio bajo estudio. Luego, la dinámica de esta ecuación consiste en la minimización de este funcional, $d\mathcal{F}/dt \leq 0$, la *energía libre* del sistema. El estado de densidad nula posee una energía libre $\mathcal{F}[u \equiv 0] = 0$, mientras que, el estado que representa una densidad poblacional estable posee una energía libre $\mathcal{F}[u \equiv b] = (b^4 \int_{\Omega} dx/6) (\alpha - 1/2)$. De modo que, cuando la adversidad $\alpha < 1/2$, el estado $u = b$ es más favorable energéticamente, en este caso podemos decir que el medio en el cual está imbuida la especie no es adverso a la existencia de esta, en el caso contrario, $\alpha > 1/2$, la población se encuentra en un medio hostil donde $u = 0$ (que representa su extinción) es más favorable energéticamente. Notemos que existe un punto particular, $\alpha = 1/2$, donde ambos estados estables son equivalentes energéticamente, el *punto de Maxwell*.

2.2. COMPLEJIDAD EN MODELOS DE UNA SOLA ESPECIE

Hasta el momento solo hemos comentado las propiedades de atractores uniformes espacialmente. Para modelos del tipo (2.1.1), donde el transporte es difusivo y no poseen una longitud intrínseca, pequeñas perturbaciones, inhomogéneas espacialmente, a un

estado de densidad uniforme estable, convergerán a este de forma difusiva, i.e. los gradientes más altos convergen más rápido. Un fenómeno interesante, que involucra variaciones espaciales finitas, presente en modelos del tipo (2.1.1), es la propagación de frente.

2.2.1. Frentes

Uno de los fenómenos más estudiados en dinámica poblacional, es la propagación de un frente de población en la ecuación de Fisher (ver ref. [16] o [17]), i.e. la propagación de un estado estable ($u = r$) sobre otro inestable ($u = 0$), conocidos como *frentes de Fisher-Kolmogoroff-Petrovsky-Piskunov* (o frente FKPP). La importancia de estos frentes radica en que representan la propagación de una especie sobre un territorio en el que no existía, por lo cual puede ser utilizado para modelar la propagación de una plaga o peste, o de una especie invasora sobre un ecosistema que no posee elementos adversos contra ella (como depredadores naturales o enfermedades que la diezmen).

De modo que, un asunto relevante en el estudio de un frente FKPP es la velocidad con que se propaga. Si nos concentramos en una dimensión espacial ($\nabla^2 = \partial_{xx}$), dado que, tanto el espacio como el tiempo son homogéneos y las densidades en cuestión uniformes (no quiebran estas simetrías) la velocidad del frente debe ser constante, lo cual es consistente con lo que se observa numéricamente (ver. fig. 2.2). Luego, si consideramos la ecuación de Fisher en un sistema de referencia móvil, $z = x - ct$, esta se reduce a una ecuación tipo Newton

$$D\partial_{zz}u + c\partial_zu + (r - u)u = 0,$$

donde la velocidad del frente c juega el rol de un roce viscoso, si el frente se propaga hacia la derecha ($c > 0$), o una inyección de energía, si el frente se propaga hacia la izquierda ($c < 0$), ambas situaciones son simétricas por la isotropía del sistema. Luego, para esta ecuación $u = 0$ es un equilibrio estable, y puesto que el sistema no puede tener densidades negativas, la dinámica en torno a este debe estar sobre amortiguada, i.e. $c^2 \geq 4Dr$. Lo cual nos da un cota inferior a las posibles velocidades que puede tener el frente.

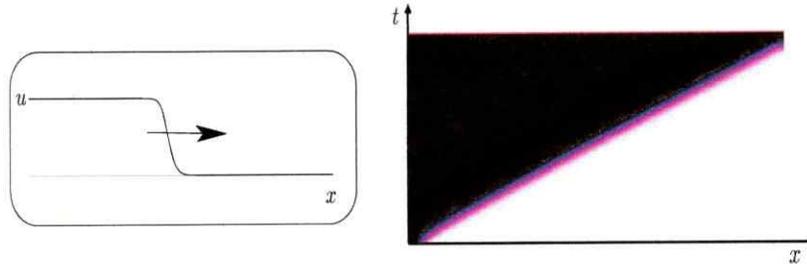


Fig. 2.2: Propagación de un frente FKPP, para la ecuación de Fisher con $r = 0,5$ y $D = 1$. En el diagrama espacio-temporal (mientras más oscuro es más grande el parámetro de orden, con $u = r$, negro y $u = 0$ blanco) se infiere que la velocidad del frente es constante.

La velocidad de un frente FKPP depende de la condición inicial. Para cualquier perturbación compacta del estado $u = 0$ el sistema converge asintóticamente a dos

frentes, que se propagan a la derecha y a la izquierda respectivamente, con la mínima velocidad posible $c = \pm 2\sqrt{Dr}$ (ver ref. [16] o [17]). Esta es la situación más realista, por lo cual este es el tipo de frentes que deberíamos observar en la naturaleza.

Para el modelo de Nagumo también podemos tener frentes FKPP que se propaguen sobre el estado inestable $u = a$. No obstante, en este caso no tienen un gran interés físico, puesto que, la densidad poblacional, que es una descripción continua de un sistema discreto, es una cantidad fluctuante, de modo que, si por alguna razón el sistema se encontrara en $u = a$, espontáneamente sale de este estado. Esto no ocurre para una densidad nula $u = 0$, puesto que, como no es posible la generación espontánea de organismos, si el sistema se encuentra en este estado, permanece en él, aún cuando esta situación sea inestable como en el caso logístico. Para el caso de Nagumo, un fenómeno más interesante son los frentes que conectan los dos estados estables $u = 0$ y $u = b$. Acá, por las mismas razones, que en el caso anterior, la velocidad con que se propagan estos frentes es constante, luego, concentrandonos en una dimensión espacial, si nos paramos en un sistema de referencia móvil $z = x - ct$, la ecuación de Nagumo queda

$$D\partial_{zz}u + c\partial_zu + u(u-a)(b-u) = 0, \quad \text{o} \quad \partial_z \left\{ \frac{D(\partial_zu)^2}{2} + V(u) \right\} = -c(\partial_zu)^2$$

con $V(u) = -abu^2/2 + (a+b)u^3/3 - u^4/4$. Pero en este caso los dos puntos que conecta el frente corresponden a puntos hiperbólico de esta ecuación tipo Newton, la velocidad del frente también juega el rol de una disipación o inyección de energía ($D(\partial_zu)^2/2 + V(u)$) de acuerdo a la dirección en la cual se propaga el frente. Luego, una solución frente corresponde a una órbita heteroclina de este sistema dinámico, la cual solo existe para un valor preciso de la velocidad c , i.e. el valor de c capaz de variar la energía $V(0) \rightleftharpoons V(b)$ de una trayectoria que conecta asintóticamente (en $z = \pm\infty$) las dos densidades estables del modelo de Nagumo. De modo que, si suponemos que existe la solución frente $u_F(x - ct)$, su velocidad queda determinada por

$$c = \pm \frac{b^4(\alpha - 1/2)}{6 \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u_F)^2 dx}$$

donde el signo + corresponde a conectar $u = 0$ desde $z = -\infty$ con $u = b$ en $z = \infty$, mientras que el signo - corresponde a lo conexión inversa. Si bien, esta relación no es muy útil, puesto que no conocemos ni c ni $u_F(c)$, queda claro, por lo argumentos energéticos expuestos, que para un valor dado de α , solo existe un tipo de frente, que se propaga con una velocidad bien definida (ver fig. 2.3).

Esta única velocidad es proporcional a la diferencia de energía libre entre las densidades conectadas por el frente, i.e. el estado de menor energía se propaga sobre el más energético. De modo que la propagación del frente no es más que una manifestación del proceso de minimización de la energía libre que rige la dinámica del modelo de Nagumo. Cuando el medio es favorable a la existencia de la población, $\alpha < 1/2$, esta se propaga invadiendo el territorio en estudio, en caso contrario la especie va desapareciendo vía un frente de extinción. Esto es completamente general, y valido en 2 dimensiones, lo cual nos sugiere un modo de modelar el efecto de las irregularidades topográficas del terreno como zonas más o menos adversas, la especie tendera a existir en las zonas que le son

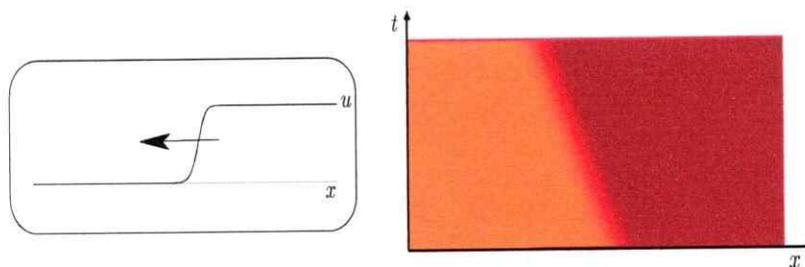


Fig. 2.3: Propagación de un frente, para el modelo de Nagumo, con $a = 0,6$, $b = 1$ y $D = 1$. En el diagrama espacio-temporal el rojo implica $u = b$, mientras que el amarillo $u = 0$.

favorables. Por ejemplo en la figura 2.4 se observa el modelamiento de un río simulando la ecuación de Nagumo en 2D con una adversidad dependiente del espacio,

$$\alpha(x, y) = 1 - \operatorname{sech} [(x - A \cos(\omega y)) / \lambda],$$

donde λ da cuenta de la región, entorno al río, en la cual, la influencia de este, la hace favorable a la existencia de la especie, mientras que A y ω modelan las oscilaciones del torrente fluvial. La figura 2.4 muestra la propagación de un frente de población en torno al río, notemos que la población no penetra en las zonas que le son adversa, $\alpha(x, y) > 1/2$. Estos son los típicos patrones de poblamiento que se observan en torno a un recurso que es vital para la subsistencia de la especie, incluso humana. En nuestro mismo país, por ejemplo, la población se concentra en las zonas costeras o la depresión central, evitando las regiones montañosas que le son más adversas.

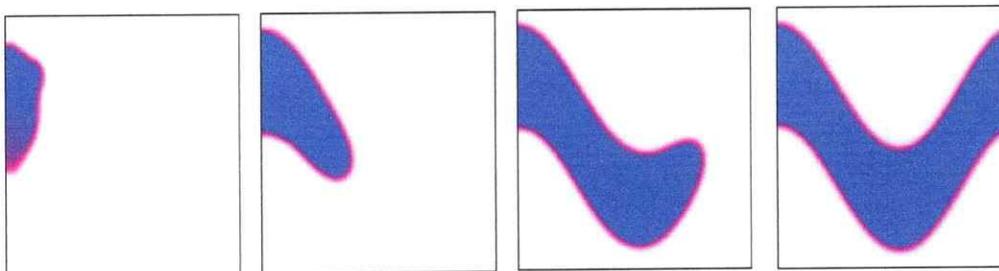


Fig. 2.4: Modelamiento de un río, vía una adversidad dependiente del espacio. Las zonas más moradas significan que el parámetro de orden está más cerca de 1, mientras que las más blancas están en 0. El tiempo avanza de izquierda a derecha.

En el punto de Maxwell, $\alpha = 1/2$, la velocidad del frente es nula, $c = 0$, puesto que ambas densidades son equivalentes energéticamente. Acá, el frente es solución del sistema estacionario $\partial_t u = 0$, i.e.

$$D\partial_{xx}u + u(u - a)(b - u) = 0 \implies \frac{D}{2} (\partial_x u)^2 + V(u) = E,$$

con E una constante de integración. El cual, para $\alpha = 1/2$, posee las órbitas heteroclina

$$u_F^\pm = \frac{b}{2} \left[1 \pm \tanh \left(\frac{b(x - x_0)}{2\sqrt{2D}} \right) \right], \quad (2.2.1)$$

correspondientes al frente estacionario. En general (fuera del punto de Maxwell) el sistema estacionario posee órbitas homoclinas que corresponden a estructuras localizadas. Si bien, el frente estacionario es estable, las estructuras localizadas no lo son. Para ver esto, primero estudiemos la estabilidad lineal del frente (4.1.4), i.e. introduciendo la perturbación

$$u = u_F^\pm(x) + \phi(x, t) \quad \text{con} \quad \phi \ll 1,$$

en el modelo de Nagumo y linealizando en con respecto a ϕ , encontramos

$$\partial_t \phi = \mathcal{L} \phi \implies \phi(x, t) = e^{t\mathcal{L}} \phi(x, 0) \quad \text{con} \quad \mathcal{L} = D\partial_{xx} + \left. \frac{\partial G}{\partial u} \right|_{u=u_F^\pm}$$

para $G = u(u-b/2)(b-u)$. Luego, si todos los autovalores de \mathcal{L} son negativos, la solución (4.1.4) es linealmente estable. Este problema lineal es análogo a una partícula cuántica regida por el hamiltoniano $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$, e.g. la solución (4.1.4) es linealmente estable si todas las energías permitidas de esta partícula son positivas. Es claro que

$$\mathcal{H} \partial_x u_F^\pm = -\partial_x \{ D\partial_{xx} u_F^\pm + G(u_F^\pm) \} = 0,$$

y, puesto que $\partial_x u_F^\pm = \pm \left(b^2/4\sqrt{2D} \right) \text{sech}^{\frac{3}{2}} \left(b(x-x_0)/2\sqrt{2D} \right)$ no posee ningún cero, corresponde al estado fundamental de la partícula. Luego, \mathcal{L} posee un autovalor nulo, siendo todos los demás negativos, de modo que la solución (4.1.4) es linealmente marginal. La existencia de este modo neutro, *modo de goldstone*, se debe a la invarianza traslacional del sistema, i.e. una traslación infinitesimal $u_F^\pm \rightarrow u_F^\pm + \Delta x \partial_x u_F^\pm$ no tiene dinámica. O sea, una traslación del frente también es solución, de aquí podemos inferir que el modo marginal no engendra ninguna inestabilidad no-lineal, por lo cual la solución frente es estable (aunque una perturbación arbitraria de (4.1.4) puede ocasionar que el sistema converja a un frente trasladado con respecto al original).

No obstante, este modo de goldstone hace que un frente estacionario sea estructuralmente inestable, i.e. ante un pequeña perturbación paramétrica, que saque al sistema del punto de Maxwell, este modo adquiere dinámica, ocasionando que el frente se mueva de acuerdo al proceso de minimización de la energía libre. En este sentido podemos pensar al frente como una partícula caracterizada por su posición (esta partícula no tiene inercia, i.e. tampoco tiene momento), por ejemplo, cuando un frente $u_F^\pm(x-X)$ se encuentra fuera del punto de Maxwell podemos pensar que esta sometido a una "fuerza" constante $\dot{X} = c$.

Luego, una manera de indagar la existencia y estabilidad de estructuras localizadas es considerar un sistema integrado por dos frentes, una partícula u_F^+ y una antipartícula u_F^- . De modo que, un dominio localizado de población inmerso en una región que no está poblada (ver fig. 2.5), se puede estudiar introduciendo el ansatz

$$u = u_F^+(x - X_+(t)) + u_F^-(x - X_-(t)) - b + \phi_1(x, X_+, X_-),$$

para $X_- > X_+$, más aún, para que este ansatz sea un buena aproximación, los frentes deben encontrarse alejados $(X_- - X_+) \gg \sqrt{D}/b$, y el sistema debe estar cerca del punto de Maxwell $\alpha = 1/2 + \delta\alpha$ con $\delta\alpha \ll 1$, de modo que el movimiento de estas soluciones tipo partícula sea lento y podamos usar como solución de base (4.1.4). ϕ_1 es un pequeña

corrección que da cuenta de que la suma de dos soluciones no es solución, por muy alejados que estén los frentes se sentirán mutuamente por la corrección exponencial que uno infiere en el corazón del otro, i.e. las correcciones son del orden

$$\dot{X}_- \sim \dot{X}_+ \sim \phi_1 \sim \delta\alpha \sim e^{-b(X_- - X_+)/\sqrt{2D}},$$

con lo cual hemos impuesto que el corrimiento del punto de Maxwell $\delta\alpha$ sea del orden de la interacción entre los frentes, de no ser así una de estas fuerzas domina completamente la dinámica.

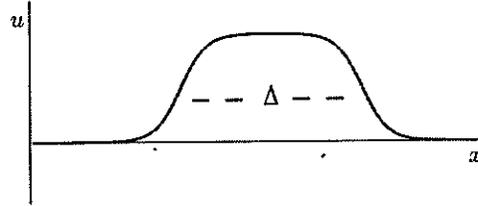


Fig. 2.5: Dibujo esquemático de un dominio localizado de población.

Entonces, introduciendo este ansatz en el modelo de Nagumo, si nos concentramos en la región del espacio donde se encuentra uno de los defectos (zona de gradientes altos en que ocurre la transición de una densidad a otra), por ejemplo $x \sim X_+$, tenemos que, a primer orden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi_1 = & -\dot{X}_+ \partial_x u_F^+(x - X_+) + \delta\alpha (b^2 u_F^+(x - X_+) - b u_F^+(x - X_+)^2) \\ & + 3 (b^2 u_F^+(x - X_+) - b u_F^+(x - X_+)^2) e^{b(x - X_-)/\sqrt{2D}}, \end{aligned}$$

con $\mathcal{L} = D\partial_{xx} + \partial G/\partial u|_{u=u_F^+(x - X_+)}$. Que es una ecuación lineal inhomogénea para ϕ_1 , la cual tiene solución si y solo si el lado derecho pertenece a la imagen de \mathcal{L} . Si introducimos el producto interno

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi \phi \, dx, \quad (2.2.2)$$

\mathcal{L} es hermítico, de modo que esta ecuación es soluble si el lado derecho es ortogonal al kernel de \mathcal{L} . Como ya lo habíamos discutido $\ker[\mathcal{L}] = \{\partial_x u_F^+(x - X_+)\}$, de modo que tenemos la condición de solubilidad

$$\dot{X}_+ = b\sqrt{2D}\delta\alpha + 6b\sqrt{2D}e^{-b(X_- - X_+)/\sqrt{2D}}.$$

Notemos que todo este análisis ha sido hecho en la región del espacio donde se localiza uno de los defectos $x \sim X_+$, si bien el producto interno (2.2.2) requiere información de todo el espacio, dado que el $\ker[\mathcal{L}]$ es prácticamente nulo, salvo en $x \sim X_+$, el resultado de la integración es correcto al primer orden. Luego, efectuando el mismo análisis en la región donde se encuentra el otro defecto $x \sim X_-$, obtenemos la ecuación de movimiento para esta partícula

$$\dot{X}_- = -b\sqrt{2D}\delta\alpha - 6b\sqrt{2D}e^{-b(X_- - X_+)/\sqrt{2D}}.$$

Si definimos la coordenada del centro de masa $X_{CM} = (X_- + X_+)/2$ (aunque las partículas no tienen inercia esto es solo una analogía) y la coordenada relativa $\Delta = (X_- - X_+)$, que representa el ancho del dominio poblado, tenemos que el sistema de dos frentes se rige por las ecuaciones

$$\dot{X}_{CM} = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\Delta} = \eta - 12b\sqrt{2D}e^{-b\Delta/\sqrt{2D}}, \quad (2.2.3)$$

con $\eta = -2b\sqrt{2D}\delta\alpha$. De modo que el centro de masa no tiene dinámica, como era de esperar por la invarianza traslacional del sistema. De la ecuación para la coordenada relativa concluimos que la interacción de defectos es atractiva, incluso en el punto de Maxwell, $\eta = 0$, los defectos se atraerán hasta aniquilarse mutuamente, esto se debe a que los gradientes son costosos energéticamente, de modo que el sistema tratará de eliminarlos. Fuera del punto de Maxwell, cuando el medio es favorable a la existencia de la especie, $\eta > 0$, existe un ancho de equilibrio en el cual se contrarrestan la fuerza de atracción entre los defectos y la fuerza que tiende a hacer que predomine la densidad $u = b$, no obstante esta configuración es claramente inestable. De modo que el modelo de Nagumo no posee estructuras localizadas estables. Cave comentar que, siguiendo el mismo análisis para hoyos (zonas sin población inmersas en una región poblada) concluimos que, cuando el medio es adverso, $\eta < 0$, existen hoyos inestables. Estas estructuras corresponden a la barrera de nucleación de la densidad menos energética a partir de la más energética.

2.2.2. Interacción no-local y formación de patrones

Hasta el momento hemos considerado que la interacción entre los individuos que constituyen la especie es local, i.e. cada miembro de la especie se ve afectado solo por la presencia de otros individuos que se encuentran en su alrededor inmediato. Esta situación no es realista, por ejemplo, un individuo se alimenta en una región que es compartida con muchos otros, y la competencia por este recurso no es solo con los que se encuentran inmediatamente cerca, sino en cierto rango de distancia. Este efecto se puede incorporar en el modelo de Fisher (ver ref. [19] o [20]) haciendo que el término que da la saturación en el crecimiento de la población no sólo dependa de la densidad local de individuos, sino que de la densidad en cierto rango de interacción efectiva,

$$G(u) = \left(r - \int_{\Omega} u' f_{\sigma}(\vec{x}, \vec{x}') d^n x' \right) u,$$

donde u' significa u evaluada en \vec{x}' , f_{σ} , que llamaremos la *función influencia* o simplemente *influencia*, es una función de un ancho característico σ , que es el rango típico de la interacción no-local y que llamaremos *rango de influencia*, y n la dimensión del espacio. Si consideramos el espacio homogéneo e isotrópico tenemos que $f_{\sigma}(\vec{x}, \vec{x}') = f_{\sigma}(|\vec{x} - \vec{x}'|)$, estando está normalizada en el dominio en estudio $\int_{\Omega} f_{\sigma} d^n x = 1$ (de no ser así, sólo renormalizaríamos r).

Notemos que este sistema posee una longitud intrínseca $\sigma = \sqrt{D}/r$, que no depende de las unidades y es, por lo tanto, un parámetro fundamental que no podemos cambiar a arbitrio reescalando las variables (si se prefiere, la cantidad adimensional $\sqrt{D}/r\sigma$). La

existencia de esta longitud nos hace sospechar que el sistema podría tener una inestabilidad espacial tipo Turing (ver ref. [21]), de hecho, si consideramos una perturbación en el espacio de Fourier de la densidad de equilibrio $u = r$, de la forma

$$u = r + \varepsilon e^{\vec{k} \cdot \vec{x} + \lambda t}$$

con $\varepsilon \ll 1$, obtenemos que el espectro de esta solución queda

$$\lambda(k) = -Dk^2 - r\hat{f}_\sigma(k),$$

donde \hat{f}_σ es la transformada de Fourier de la función influencia (con $k = |\vec{k}|$, la única dependencia de λ , por la homogeneidad e isotropía del sistema). De modo que, la estabilidad del estado uniforme $u = r$ depende del tipo de influencia que consideremos y la dimensión del espacio en estudio, en general, la influencia debe ser una función con un máximo en $|\vec{x} - \vec{x}'| = 0$, que mengua a medida que nos alejamos de este punto. Un modelo muy simple es tomar una influencia tipo salto, i.e. una función constante en todo el rango de influencia, y cero en el resto del dominio Ω . Luego, en 1-dimensión espacial tenemos

$$f_\sigma(x, x') = \frac{\theta(\sigma - |x - x'|)}{2\sigma} \implies \hat{f}_\sigma(k) = \frac{\sin(k\sigma)}{k\sigma},$$

con θ la función de Heaviside, mientras que en 2-dimensiones

$$f_\sigma(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\theta(\sigma - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{\pi\sigma^2} \implies \hat{f}_\sigma(k) = \frac{2J_1(k\sigma)}{k\sigma},$$

donde J_1 es una función de Bessel de primera especie de orden 1. En ambos caso el sistema puede sufrir una inestabilidad espacial, cuando el rango de influencia es lo suficientemente grande, en fig. 2.6 se muestra el espectro de $u = r$ para diferentes valores del rango de influencia, acá se aprecia que $\lambda(k)$ empieza a tomar valores positivos para una longitud de onda no nula. Esta inestabilidad da origen a la formación de patrones, estructuras periódicas extendidas como las que muestra la simulación de este modelo en fig. 2.6.

Cave señalar que este modelo continuo ha podido ser construido a partir de un modelo microscópico para "bichos brownianos" (ver ref. [20]). La transición que da origen a la formación de patrones es supercrítica (ver ref. [22]), de modo que esta estructura nunca coexiste con la densidad uniforme $u = r$.

La formación de estructuras localizadas es un fenómeno ampliamente observado en dinámica poblacional, esta parece ser, en muchos casos, un repuesta autorganizativa del sistema ante la adversidad del medio. En la interacción de las individuos que constituyen la especie existen elementos cooperativos, que hacen que la población deba exceder cierto número para que sea factible su supervivencia, produciendo que, en ciertas región del territorio que habita, se logren establecer domineos de población localizados estables (o metaestables, pero con una vida media grande en comparación a los tiempos de observación del fenómeno). Como ya lo habíamos señalado, en las región de transición entre la sabana y el desierto en África, la población vegetal se encuentra sometida a una gran adversidad, producto de la escasas de agua, acá se observa la formación de estructuras localizadas en orden de minimizar el efecto de la evaporación.

El modelo de Nagumo no pose ninguna estructura localizada estable, si bien se pueden generar dominios localizados de población tomando una adversidad dependiente del espacio (como en el modelamiento del río), esto no siempre corresponde a lo que ocurre en

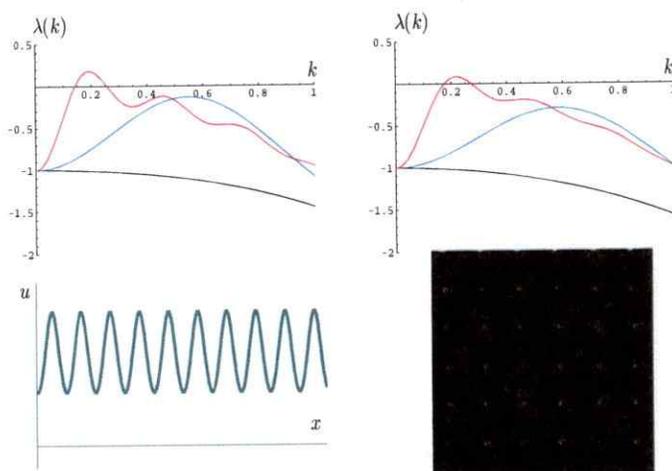


Fig. 2.6: Espectro de la solución uniforme $u = r$, y la formación de un patrón, para el modelo de Fisher no-local, en 1-dimensión (izquierda), y en 2-dimensiones (derecha). En ambos casos $D = 1$ y $r = 1$, mientras que $\sigma = 2$ (negro), $\sigma = 7$ (azul) y $\sigma = 23$ (rojo). La simulación en 2-dimensiones no fue hecha por el autor, sino que es gentileza del Consortium of the Americas for Interdisciplinary Science, en el Department of Physics and Astronomy, University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, USA.

la naturaleza, puesto que la formación de estructuras localizadas no está siempre asociada a una imposición externa del medio sobre el sistema de organismos (también existen estos casos, desde luego), sino a una respuesta autorganizativa espontánea del sistema, inmerso en un medio aproximadamente homogéneo. En las mismas comunidades humanas, donde los factores cooperativos son de gran relevancia, la especie se autorganiza en pueblos o ciudades, dejando otras zonas menos pobladas, los campos, de las cuales, no obstante, usufructúa de sus recursos, i.e. esta formación de estructuras no puede ser comprendida mediante una adversidad dependiente del espacio.

Una manera de incorporar estructuras localizadas en modelos de una especie es generalizando el modelo de Nagumo, introduciendo el hecho que la interacción entre los individuos no es local. Concretamente, nos concentraremos en la generalización variacional

$$\partial_t u = D \nabla^2 u - abu + (a + b)u^2 - u \int_{\Omega} u'^2 f_{\sigma}(x, x') d^2 x', \quad (2.2.4)$$

que posee este tipo de soluciones. En la que queda de este capítulo caracterizaremos en detalle la dinámica de este modelo, con especial énfasis en la amplia gama de estructuras localizadas que posee.

2.3. MODELO DE NAGUMO NO-LOCAL

Consideremos (2.2.4) en una dimensión espacial y en variables adimensionalizadas

$$\partial_t u = \partial_{xx} u - \alpha u + (\alpha + 1) u^2 - u \int_{\Omega} u'^2 f_{\sigma}(x, x') dx', \quad (2.3.1)$$

donde, por la homogeneidad e isotropía del sistema

$$f_{\sigma}(x, x') = f_{\sigma}(x - x'), \text{ con } f_{\sigma}(z) \text{ PAR, y } \int_{\Omega} f_{\sigma}(x, x') dx' = 1. \quad (2.3.2)$$

El rango de influencia esta medido en las unidades naturales del sistema (\sqrt{D}/b), y en el limite local, $\sigma \rightarrow 0 \implies f_{\sigma}(x, x') \rightarrow \delta(x - x')$, recuperamos el modelo de Nagumo. De modo que, en estas variables adimensionales, los atractores del sistema sin espacio quedad en $u = 0$, estado de no-población, y $u = 1$, estado de población uniforme, mientras que el repelor coincide con el parámetro de adversidad, lo que nos da una visión mucho más intuitiva de este parámetro, en el sentido de que si está más cerca de el estado de no-población, el estado de población uniforme es más estable, y vice versa.

El sistema tiene dos parámetros fundamentales: la adversidad, que resume las propiedades ambientales a las cuales esta sometido; y el rango de influencia, que represente las propiedades internas del sistema. De modo que el diagrama de fase de la ecuación es en un plano.

Este sistema es variacional, i.e. su dinámica consiste en la minimización del funcional

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{\alpha}{2} u^2 - \frac{(\alpha + 1)}{3} u^3 \right\} dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \int_{\Omega} u^2 u'^2 f_{\sigma}(x, x') dx dx', \quad (2.3.3)$$

la energía libre del sistema. El único requerimiento para que (2.3.1) sea variacional es que la función influencia tenga la simetría $f_{\sigma}(x, x') = f_{\sigma}(x', x)$, lo que es menos restrictivo que (2.3.2). Para esta energía libre se sigue teniendo que el estado de no-población tiene la energía $\mathcal{F}[u = 0] = 0$, mientras que el estado de población uniforme $\mathcal{F}[u = 1] = (\int_{\Omega} dx/6) (\alpha - 1/2)$. De modo que el punto de Maxwell continua en $\alpha = 1/2$.

Notemos que el termino no-local puede ser expandido en derivadas (esto requiere que $\Omega = (-\infty, \infty)$ y u sea analítica), en efecto, si consideramos

$$\mathcal{N}\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x') f_{\sigma}(x, x') dx', \quad (2.3.4)$$

el operador no-local, entonces, haciendo uso de las propiedades (2.3.2),

$$\mathcal{N} = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j \partial_x^{2j} \text{ con } \eta_j = \frac{1}{(2j)!} \int_{-\infty}^{\infty} z^{2j} f_{\sigma}(z) dz. \quad (2.3.5)$$

Esta expansión no es valida para cualquier función de influencia, por ejemplo, una condición necesaria para la convergencia de esta serie es que la influencia decaiga más rápido que cualquier polinomio en infinito. Más adelante comentaremos las implicancias que

tiene la convergencia de esta serie sobre el comportamiento del modelo (2.3.1), en particular en el estudio de las estructuras localizadas.

Cave señalar, también, que el operador no-local es hermitico ante el producto interno (2.2.2), independientemente de si es valida o no la expansión (2.3.5), esto es consecuencia directa de (2.3.2), o, más bien, de la simetría $f_\sigma(x, x') = f_\sigma(x', x)$. De hecho, podemos decir que la homogeneidad del espacio produce que $[\mathcal{N}, \partial_x] = 0$ (con $[\cdot, \cdot]$ un conmutador), mientras que esta simetría, sumada a la isotropía, producen la hermeticidad $\mathcal{N} = \mathcal{N}^\dagger$.

2.3.1. Inestabilidad espacial y formación de patrones

Es claro que, dado que el termino no-local es no-lineal, este no produce ningún efecto sobre la estabilidad lineal del estado de no-población, la dinámica en torno a este sigue siendo difusiva. Tampoco puede estabilizar el repelotamiento uniforme $u = \alpha$, puesto que es inestable a una perturbación espacialmente uniforme (esto no lo modifica la interacción no-local). Donde si pueden ocurrir cosas interesantes es en el estado de población uniforme, en efecto, si introducimos la perturbación

$$u = 1 + \phi(x, t) \quad \text{con} \quad \phi \ll 1,$$

en (2.3.1), y linealizamos con respecto a ϕ , obtenemos

$$\partial_t \phi = \mathcal{L} \phi \implies \phi(x, t) = e^{t\mathcal{L}} \phi(x, 0) \quad \text{con} \quad \mathcal{L} = \partial_{xx} + (1 + \alpha) - 2\mathcal{N},$$

Claramente los auto-vectores de \mathcal{L} son $\{e^{ikx}\}_{k \in (-\infty, \infty)}$, pues $[\mathcal{L}, \partial_x] = 0$. Luego, el espectro del estado de población uniforme (auto-valores de \mathcal{L}) tiene la forma

$$\lambda(k) = -k^2 + (\alpha + 1) - 2\hat{f}_\sigma(k). \quad (2.3.6)$$

Aquí, al igual que en la generalización no-local de modelo de Fisher, cuando el rango de influencia es lo suficientemente grande, el estado de población uniforme sufre un inestabilidad espacial, dando origen a la formación de patrones. En efecto, si consideramos una influencia tipo salto

$$f_\sigma(z) = \frac{\theta(\sigma + z)\theta(\sigma - z)}{2\sigma} \implies \hat{f}_\sigma(k) = \frac{\sin(k\sigma)}{k\sigma}, \quad (2.3.7)$$

en la figura 2.7.a (izquierda), se observa que a medida que incrementamos el rango de influencia, el espectro (2.3.6) toma valores positivos para ciertas longitudes de onda k . Numéricamente se observa que, cuando la inestabilidad ocurre el sistema forma un patrón como el que se aprecia en la figura 2.7.a (derecha). Por razones que se explicarán más adelante, también se estudio en detalle el caso de una influencia exponencial

$$f_\sigma(z) = \frac{e^{-|z|/\sigma}}{2\sigma} \implies \hat{f}_\sigma(k) = \frac{1}{1 + (k\sigma)^2}, \quad (2.3.8)$$

acá el sistema también sufre una inestabilidad espacial, como se aprecia en la 2.7.b (izquierda). Dando origen a la formación de un patrón (ver fig. 2.7.b (derecha)).

En el espacio de parámetros (α, σ) del modelo (2.3.1) la curva que separa la región en que el estado uniforme es estable, de la región en que es inestable $\sigma = S(\alpha)$, queda

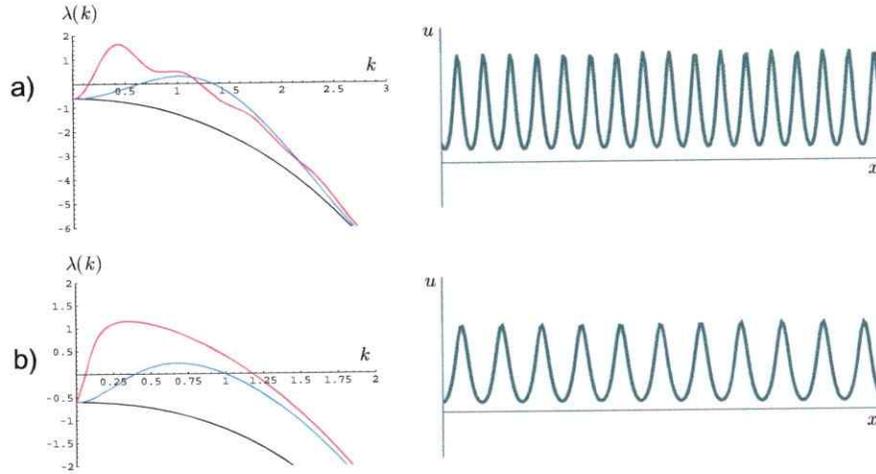


Fig. 2.7: Espectros del estado de población uniforme (izquierda) y formación de un patrón (derecha). Para: a) una influencia tipo salto, donde se muestra los espectros (izquierda) para una adversidad $\alpha = 0,4$, y $\sigma = 1$ (negro), $\sigma = 3$ (azul) y $\sigma = 10$ (rojo), en el lado derecho se ve el patrón que se forma tras la inestabilidad, en un simulación numérica que toma condiciones de borde periódicas ($\alpha = 0,4$ y $\sigma = 3$, i.e. línea azul). Y b) una influencia exponencial, donde se muestra los espectros (izquierda) para una adversidad $\alpha = 0,4$, y $\sigma = 0,5$ (negro), $\sigma = 2$ (azul) y $\sigma = 11$ (rojo), en el lado derecho se ve el patrón que se forma tras la inestabilidad, en un simulación numérica que toma condiciones de borde de flujo nulo ($\alpha = 0,4$ y $\sigma = 2$, i.e. línea azul).

determinada por la condición $\lambda(k) = 0$ y $d\lambda/dk = 0$, i.e. cuando este estado es linealmente marginal, un modo nulo k_c , asociado al máximo global de $\lambda(k) = 0$. Para una influencia exponencial

$$S(\alpha) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \alpha}}{1 + \alpha}, \quad (2.3.9)$$

donde $\sigma < S(\alpha)$ implica que el estado de población uniforme es estable, mientras que para $\sigma > S(\alpha)$ es inestable. Esta separatriz se muestra en la figura 2.8 (izquierda). En el caso de una influencia tipo salto el calculo de la curva $S(\alpha)$ involucra un sistema de ecuaciones trascendentales que debe ser resuelto de forma numérica, en la figura 2.8 (derecha) se puede ver la forma de esta curva.

En el apéndice B de esta tesis se realiza un análisis débilmente no-lineal en torno a esta inestabilidad, i.e. $\sigma \sim S(\alpha)$. De acá concluimos que la amplitud, A , de la primera longitud de onda en hacerse inestable, i.e. el máximo k_M de $\lambda(k)$, satisface, cuando es pequeña ($A \sim \sqrt{\lambda(k_M)}$), la ecuación

$$\partial_t A = \lambda(k_M) A - \beta A^3,$$

con (ver apéndice B para los detalles)

$$\beta = \left\{ \frac{(1 - k_c^2)^2}{\alpha - 1} + \frac{(\hat{f}_\sigma(2k_c) - k_c^2)^2}{2(-4k_c^2 + (\alpha + 1) - 2\hat{f}_\sigma(2k_c))} + \frac{1}{4}(\hat{f}_\sigma(2k_c) + 2) \right\},$$

donde hemos aproximado $k_M \simeq k_c$ pues $\sigma \sim S(\alpha)$, por lo cual $\beta = \beta(\alpha)$ (evaluamos este coeficiente en la curva $S(\alpha)$). Luego, si $\beta(\alpha) > 0$ la bifurcación es supercrítica, i.e. cuando ocurre la inestabilidad se forma un pequeño patrón, de amplitud $A = \sqrt{\lambda(k_M)/\beta(\alpha)}$ (si $\beta(\alpha) \sim \mathcal{O}(1)$). Tanto para una influencia tipo salto, como para una influencia exponencial, el coeficiente $\beta(\alpha)$ es positiva para una adversidad baja o moderada, pero se vuelve negativo para una adversidad alta. De modo que existe un valor crítico de la adversidad α_c para el cual $\beta(\alpha_c) = 0$, en el caso de una influencia tipo salto $\alpha_c \cong 0,742$ mientras que en el caso exponencial $\alpha_c \cong 0,657$, no obstante el fenómeno es cualitativamente similar en ambos casos. Luego, para $\alpha > \alpha_c$ la bifurcación es subcrítica, y no puede ser atrapada mediante un análisis débilmente no-lineal. Numéricamente se observa que, cuando pasamos esta transición el sistema forma un patrón que gran amplitud a medida que se desarrolla la inestabilidad del estado de población uniforme, este patrón ya existía al momento de la inestabilidad, eventualmente se formó por saddle-node dando origen a un patrón inestable, el cual, tras colisionar con el estado de población uniforme, produce su inestabilidad. Cuando la adversidad es extremadamente alta, $\alpha \rightarrow 1^-$, no se observa la formación de ningún patrón tras la inestabilidad, acá el sistema converge al estado de no-población, siendo este, aparentemente, el único atractor del sistema.

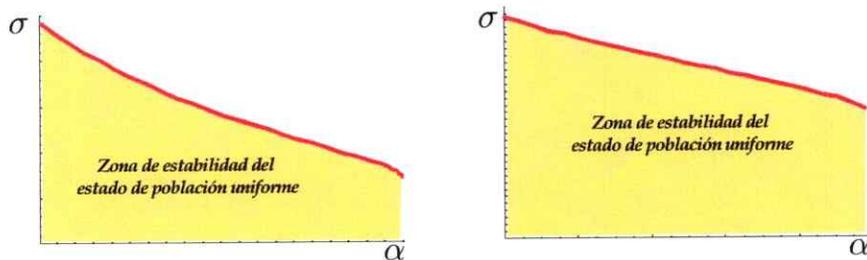


Fig. 2.8: Zona, en el espacio de parámetros, donde el estado de población uniforme es estable (en amarillo), para una influencia exponencial (izquierda), y una influencia tipo salto (derecha).

2.4. DINÁMICA DE DEFECTOS Y EL NACIMIENTO DE ESTRUCTURAS LOCALIZADAS

Como era de esperar a priori, el modelo de Nagumo no-local (2.3.1) exhibe la propagación de frentes, entre el estado de no-población y el estado de población uniforme, en la región de parámetros $\sigma < S(\alpha)$. Estas soluciones tipo partícula se desplazan con una velocidad constante y proporcional a la diferencia de energía libre de los estados uniformes que conectan, i.e. son órbitas heteroclinas de un sistema integro-diferencial ordinario, que corresponde a escribir el modelo (2.3.1) en un sistema de referencia móvil $z = x - ct$. En el punto de Maxwell, el frente es estacionario, puesto que ambas densidades uniformes son equivalentes energéticamente, esta solución corresponde, entonces, a una órbita heteroclina del sistema estacionario

$$\partial_{xx}u - \alpha u + (\alpha + 1)u^2 - u\mathcal{N}u^2 = 0. \quad (2.4.1)$$

Este sistema es de vital importancia en un modelo variacional como (2.3.1), puesto que todos los atractores del sistema deben ser mínimos del funcional (2.3.3), i.e. soluciones de la ecuación $\delta\mathcal{F}/\delta u = 0$, que corresponde a (2.4.1), más aún, los repelores son máximos, o puntos sillas, de este funcional, de modo que también son soluciones de (2.4.1). Por ejemplo, el patrón corresponde a una órbita periódica de (2.4.1). En este sentido podemos decir que la energía libre es la acción del sistema estacionario.

Cuando el rango de influencia es pequeño, numéricamente se observa que los frentes corresponden a perfiles de densidad monótonos (ver fig. 2.9 (izquierda)), de modo que el comportamiento es cualitativamente similar al límite local $\sigma \rightarrow 0$. A medida que aumentamos el rango de influencia, y los efectos no-locales se hacen más intensos, el frente, en el tramo en que converge al estado de población uniforme, presenta oscilaciones amortiguadas (ver fig. 2.9 (derecha)). Cave señalar que, para la simulación numérica de frentes se deben tomar condiciones de borde de flujo nulo (con condiciones de borde periódicas siempre obtenemos dos frentes), por lo cual se debe especificar como se trató el termino no-local. Para evitar efectos de borde, i.e. que el sistema sufra una truncatura de la interacción no-local en sus confines (produciéndose allí otros efectos, que no estamos interesados en estudiar), se consideró una reflexión especular perfecta, o sea, como si tuviéramos dos espejos en los bordes (de modo que el sistema sigue interactuando con su imagen).

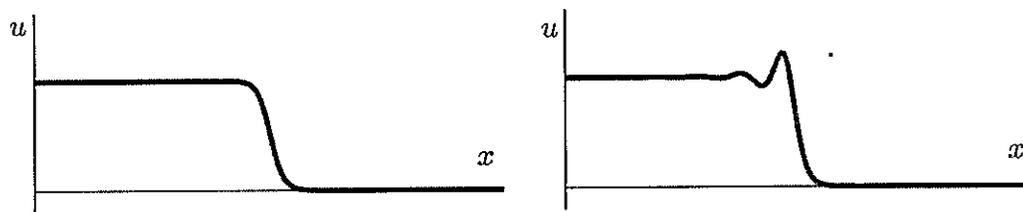


Fig. 2.9: Frentes estacionarios entre el estado de no-población y el estado de población uniforme, en el punto de Maxwell, para un influencia exponencial, con $\sigma = 0,1$ (izquierda), y $\sigma = 0,8$ (derecha).

Si seguimos incrementando el rango de influencia, de modo que $\sigma > S(\alpha)$, el estado de población uniforme deviene inestable, dando origen al patrón, i.e. tenemos un frente que conecta el estado patrón con el estado de no-población (ver fig. 2.10). Si bien, se puede decir que en este caso pasamos de tener un frente con oscilaciones amortiguadas a un frente con oscilaciones permanentes, en esta transición se produce un cambio cualitativo en la dinámica. A diferencia del caso en que el frente conecta dos estados espacialmente uniformes, donde esta solución es estacionaria solo en un punto, el punto de Maxwell, acá el frente será estacionario en toda una región de parámetros, la *región de bloqueo* o *pinning range* (ver ref. [23]), como lo ilustra la figura 2.10 (derecha). En este caso, dado que, por la isotropía del espacio, el sistema estacionario es reversible, si hay una órbita periódica, entonces hay una familia de órbitas periódicas (ver ref. [24]), luego, a medida que movemos los parámetros, la órbita heteroclina persiste puesto que puede seleccionar diferentes miembros de esta familia para conectar con el estado de no-población. En este sentido, una trayectoria heteroclina que conecte una órbita periódica con un punto hiperbólico (u otra órbita periódica) es estructuralmente estable para un sistema reversible,

no así una conexión heteroclina entre dos puntos hiperbólicos, que solo es un accidente para un valor preciso de los parámetros. Desde un punto de vista dinámico, podríamos decir que, el bloqueo en el movimiento de estos frentes, se debe a que para propagarse este debe sobrepasar cierta barrera de nucleación, o sea existe un esfuerzo energético asociado a crear o destruir un *pico* (célula elemental de la estructura periódica), e.g. el frente es un mínimo local de la energía libre. De allí que, si agregamos ruido al sistema, el bloqueo se rompe y el frente comienza a propagarse, minimizando la energía libre (ver ref. [25]).

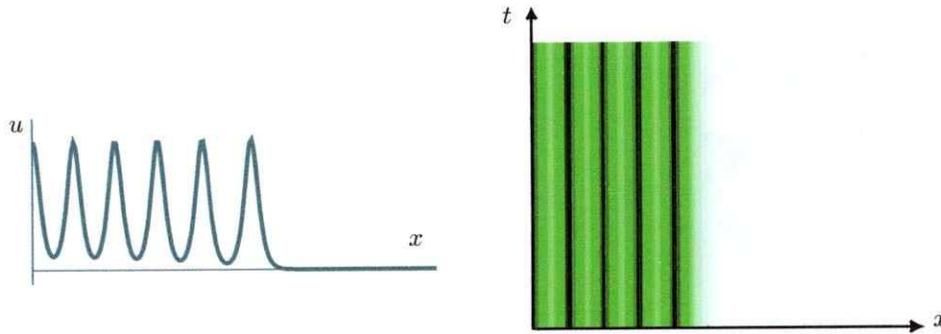


Fig. 2.10: Frente estacionario entre el estado de no-población y el estado patrón, en la región de bloqueo, para un influencia tipo salto, con $\alpha = 0,55$ y $\sigma = 2,6$. La figura a la izquierda muestra el perfil de densidad de esta estructura, mientras que, a la derecha, el diagrama espacio-temporal evidencia la ausencia de dinámica.

Fuera de la región de bloqueo, el frente entre el estado periódico y el estado de no-población, se propaga produciendo que el estado más favorable energéticamente invada el espacio (ver fig. 2.11). No obstante, en este caso la dinámica también es cualitativamente distinta a la exhibida por un frente que conecta dos estados uniformes estables, puesto que, al ser la formación del patrón un quiebre espontaneo de la simetría de traslación espacial, la velocidad de propagación del frente no es constante, sino periódica, la partícula siente la presencia del patrón. En efecto, mientras el frente que conecta el estado de no-población con el estado de población uniforme, se desplaza como una estructura rígida, aún cuando posee oscilaciones espaciales bien marcadas (ver fig. 2.11.a), el patrón, lejos de la interfase, se mantiene estático, y el frente se propaga mediante un mecanismo de nucleación (o aniquilación) de picos mucho más complejo. En la figura 2.11.b se muestra la propagación de un frente en la cual el patrón invade al estado de no-población, para un influencia exponencial, acá el pico que se encuentra en el borde se fisiona dando origen a dos picos, este proceso se repite periódicamente ocasionando la propagación del frente. En la figura 2.11.c se muestra este proceso de propagación para la influencia tipo salto, en este caso se nuclea un pico, en una posición intermedia, entre el tercer y segundo pico, contados desde en que se encuentra en el borde, o si se prefiere, el segundo y tercer pico se transforman en tres picos. Mientras que en la figura 2.11.d se muestra el mismo proceso, para un influencia tipo salto, pero en otra región de parámetros, acá se nuclea un pico en el borde de la interfase, y de esta manera se propaga el frente (en este caso es más discutible si la velocidad del frente es periódica, y, probablemente dependa de como se mida). En todos estos casos el patrón, lejos de la interfase, se mantiene más o

menos estático, i.e. el frente no se propaga como un estructura rígida. Éstas observaciones numéricas dan cuenta de que el proceso de propagación de este tipo de frentes exhibe una gran complejidad, y no puede ser entendido mediante un método analítico simple, por ejemplo, acá no nos podemos pasar a un sistema de referencia móvil, en este proceso el tiempo y el espacio deben ser considerados por separado.

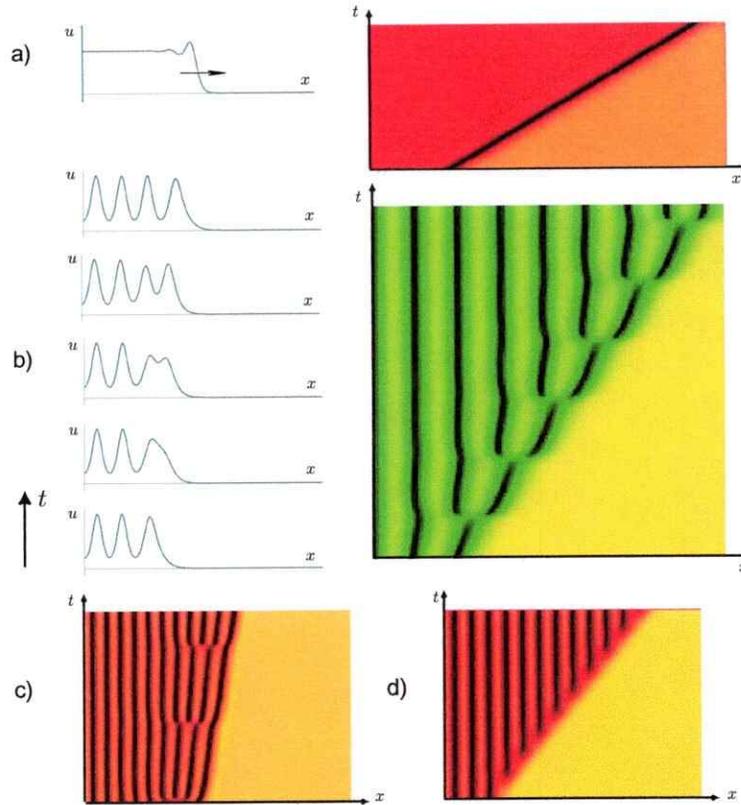


Fig. 2.11: Propagación de frentes: a) Un frente que conecta el estado de población uniforme con el estado de no-población, para una influencia tipo salto, con $\alpha = 0,45$ y $\sigma = 2,45$, al la izquierda se aprecia el perfil de densidades del frente, mientras que a la derecha el diagrama espacio-temporal de su propagación. b) La propagación de un frente que conecta un patrón con el estado de no-población, para una influencia exponencial, con $\alpha = 0,08$ y $\sigma = 2,4$, al la izquierda se ve el detalles, del proceso de fisión de un pico, mientras que a la derecha el diagrama espacio-temporal de muchos de estos eventos. c) El diagrama espacio-temporal del proceso de propagación, para una influencia tipo salto, con $\alpha = 0,31$ y $\sigma = 2,9$. d) El diagrama espacio-temporal del proceso de propagación, para una influencia tipo salto, con $\alpha = 0,054$ y $\sigma = 3,32$.

La formación del patrón es una respuesta autorganizativa de la especie para enfrentar la adversidad del medio, en la que se conjugan los elementos competitivos y cooperativos de la interacción de los organismos que la constituyen. En efecto, cuando la población se encuentra en el estado patrón, aún cuando este no sea favorable energéticamente puesto que el medio le es adverso, la especie puede sobrevivir habiendo regiones despobladas

en el territorio que habita, esto gracias al fenómeno de bloqueo que exhiben este tipo de soluciones. Más aún, el mismo estado patrón es más robusto que el estado de densidad uniforme, este último, cuando deviene inestable, continua siendo equivalente energéticamente al estado de no-población en el punto $\alpha = 1/2$, no obstante, por tratarse de una solución repulsiva debe ser un máximo local, o un punto silla, de la energía libre, de modo que la solución patrón debe tener una energía inferior a la de este repelente, e.g. para cierto rango de $\alpha > 1/2$ el patrón continua siendo más conveniente energéticamente que el estado de no-población, por lo cual es una mejor manera de enfrentar un medio más adverso. De hecho la curva $S(\alpha)$ decrece con α , i.e. cuando la adversidad es mayor el sistema presenta el patrón antes.

Sin embargo, existe una respuesta auto organizativa que se manifiesta antes que la formación del patrón, i.e. $\sigma < S(\alpha)$, la cual es la formación de estructuras localizadas. Este sistema exhibe dominios localizados de población estables, inmersos en zonas despobladas, incluso cuando el medio le es adverso $\alpha > 1/2$. Estas soluciones corresponden a órbitas homoclinas del sistema estacionario (2.4.1), las cuales son estructuralmente estables para un sistema reversible como este. Para estudiar su estabilidad y caracterizar algunas de sus propiedades, podemos emplear el mismo método de interacción de defectos que usamos para el caso local, luego, debemos estudiar en mayor detalle (2.4.1).

2.4.1. Nacimiento de estructuras localizadas para un influencia exponencial

Para el caso de una influencia exponencial el sistema estacionario (2.4.1) puede ser reducido a un sistema dinámico cuadrimensional. En efecto, si consideramos la ecuación lineal inhomogénea

$$(\partial_{xx} - \kappa^2)v = -\kappa^2 u^2,$$

la función de Green, para el operador $(\partial_{xx} - \kappa^2)$, es

$$G_\kappa(x, x') = \frac{\kappa}{2} e^{-\kappa|x-x'|} \implies (\partial_{xx} - \kappa^2)G_\kappa(x, x') = -\kappa^2 \delta(x - x'),$$

que corresponde al modelo de influencia exponencial (2.3.8) si reconocemos $\kappa = 1/\sigma$. Luego, si imponemos que v sea acotada en todo el espacio (de modo que no consideramos las soluciones homogéneas), entonces

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} u'^2 f_\sigma(x, x') dx',$$

de modo que (2.4.1) se reduce a

$$\begin{aligned} \partial_{xx}u &= \alpha u - (1 + \alpha)u^2 + uv, \\ \partial_{xx}v &= \kappa^2(v - u^2). \end{aligned}$$

La dinámica de este sistema es generada por el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}p_u^2 - \kappa^2 p_v^2 - \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{(1 + \alpha)}{3}u^3 + \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{2}u^2v, \quad (2.4.2)$$

el cual no tiene un análogo mecánico pues la energía cinética (la forma cuadrática en los momenta generalizados) no es definida positiva. De todas formas es una cantidad conservada que podemos llamar la *energía* del sistema. Luego, las ecuaciones canónicas para (2.4.2) son

$$\begin{aligned} \partial_x u &= p_u, \\ \partial_x p_u &= \alpha u - (1 + \alpha) u^2 + uv, \\ \partial_x v &= -2\kappa^2 p_v, \\ \partial_x p_v &= \frac{1}{2} (u^2 - v). \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Este sistema dinámico es reversible, i.e. es invariante ante la transformación

$$x \longrightarrow -x, \quad p_u \longrightarrow -p_u \quad \text{y} \quad p_v \longrightarrow -p_v,$$

que define el plano de simetría

$$\Pi = \{(u, p_u, v, p_v) / p_u = p_v = 0\},$$

claramente $\dim(\Pi) = 2$. De manera que todas las órbitas son simétricas respecto al plano Π , si una de estas trayectorias intercepta Π será continuada al otro lado por su reflexión especular, i.e. este plano de reversibilidad es como un espejo en el espacio de fase de (2.4.3).

Los puntos fijos de (2.4.3) son

$$(u, p_u, v, p_v) = (0, 0, 0, 0), \quad (\alpha, 0, \alpha^2, 0) \quad \text{y} \quad (1, 0, 1, 0)$$

que corresponden al estado de no-población $u = 0$, la densidad uniforme repulsiva $u = \alpha$ y el estado de población uniforme $u = 1$ (todos pertenecen a Π). El estado de no-población es un punto hiperbólico, en efecto, si linealizamos (2.4.3) en torno a este punto, la dinámica se rige por el operador lineal

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\kappa^2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

de auto-valores

$$\Lambda = \pm\sqrt{\alpha} \quad \text{o} \quad \Lambda = \pm\kappa,$$

De modo que existen dos variedades

$$\mathcal{W}_0^\pm = \left\{ (u, p_u, v, p_v) / \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (u, p_u, v, p_v) = (0, 0, 0, 0) \right\},$$

una estable, \mathcal{W}_0^+ , y la otra inestable, \mathcal{W}_0^- . En ambos casos $\dim(\mathcal{W}_0^\pm) = 2$. Notemos que, para este operador lineal, los sub-espacios generados por (u, p_u) y (v, p_v) son invariantes, de modo que el comportamiento asintótico del perfil de densidad u está enteramente caracterizado por el exponente $\pm\sqrt{\alpha}$.

La dinámica en torno a la solución repulsiva $u = \alpha$ esta gobernada por

$$L_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha(1+\alpha) & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\kappa^2 \\ \alpha & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

que posee los auto-valores

$$\Lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ [1 - (1+\alpha)\alpha\sigma^2] \pm \sqrt{[1 - (1+\alpha)\alpha\sigma^2]^2 + 4(1-\alpha)\alpha\sigma^2} \right\}},$$

dado que $(1-\alpha)\alpha\sigma^2 > 0$, pues $\alpha \in [0, 1]$, siempre existen dos auto-valores que son imaginarios puros. Luego, existe una variedad de dimensión 2, la cual contiene este punto y órbitas cerradas en torno a este.

Mientras que la dinámica en torno al estado de población uniforme es regida por

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(1+\alpha) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\kappa^2 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

de auto-valores

$$\Lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ [1 - (1+\alpha)\sigma^2] \pm \sqrt{[1 - (1+\alpha)\sigma^2]^2 - 4(1-\alpha)\sigma^2} \right\}}, \quad (2.4.4)$$

Acá, a diferencia de los casos anteriores, tenemos tres posibilidades. Cuando el rango de influencia es pequeño, $\sigma < \Sigma(\alpha)$, los cuatro auto-valores de L_1 son reales puros, donde

$$\Sigma(\alpha) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1-\alpha}}{1+\alpha}. \quad (2.4.5)$$

En esta región de parámetros, $R_1 = \{\sigma < \Sigma(\alpha)\}$, el estado de población uniforme es un punto hiperbólico, i.e. existen dos variedades

$$\mathcal{W}_1^\pm = \left\{ (u, p_u, v, p_v) / \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (u, p_u, v, p_v) = (0, 0, 0, 0) \right\},$$

una estable, \mathcal{W}_1^+ , y la otra inestable, \mathcal{W}_1^- , tales que $\dim(\mathcal{W}_1^\pm) = 2$. En este caso, la órbitas pertenecientes a la variedad estables se acercan monótonamente al estado de población uniforme, a medida que $x \rightarrow \infty$, o sea que la dinámica, en esta variedad, esta sobre-amortiguada. En la variedad inestable ocurre lo mismo, pero en el limite $x \rightarrow -\infty$, de hecho

$$(u, p_u, v, p_v) \in \mathcal{W}_1^+ \iff (u, -p_u, v, -p_v) \in \mathcal{W}_1^-,$$

por la reversibilidad de (2.4.3).

En la curva $\sigma = \Sigma(\alpha)$, el operador L_1 es degenerado y posee dos auto-valores reales (uno positivo y otro negativo), i.e. tanto el par positivo como el par negativo de auto-valores de L_1 colisionan en el eje real. Si seguimos incrementando el rango de influencia estos auto-valores entran en el plano complejo (ver fig. 2.12). Luego, en la región de parámetros $R_2 = \{\Sigma(\alpha) < \sigma < S(\alpha)\}$, donde la curva $S(\alpha)$ coincide con (2.4.3), el operador L_1 posee cuatro auto-valores complejos con parte real y parte imaginaria no nula. De modo que en R_2 el estado de población uniforme continua siendo un punto hiperbólico, e.g. las variedades \mathcal{W}_1^\pm siguen existiendo, pero en este caso las órbitas que pertenecen a la variedad estable se acercan a este punto hiperbólico, en $x \rightarrow \infty$, oscilando en torno a éste, i.e. la dinámica en esta variedad esta sub-amortiguada; igualmente en la variedad inestable, pero en $x \rightarrow -\infty$. Notemos que, dado la simetría de reversibilidad, que impone que si existe un auto-valor Λ , entonces existe $-\Lambda$; y que los coeficiente de L_1 son reales, de modo que si existe un auto-valor Λ , entonces existe Λ^* , se tiene que los cuatro auto-valores son simétricos en los cuatro cuadrantes del plano complejo.

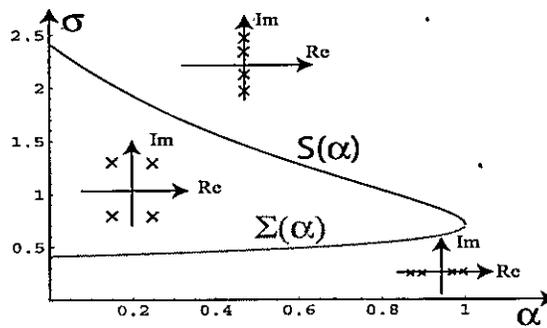


Fig. 2.12: Diagrama de bifurcaciones del estado de población uniforme, para un influencia exponencial.

En la curva $\sigma = S(\alpha)$ tanto el par de auto-valores con parte imaginaria positiva, como el par con parte real negativa, colisionan en el eje imaginario. Luego, para $R_3 = \{\sigma < S(\alpha)\}$ los cuatro auto-valores son imaginarios puros, y el estado de población uniforme deja de ser un punto hiperbólico para transformarse en un centro, e.g. las variedades \mathcal{W}_1^\pm dejan de existir y el estado de población uniforme se encuentra completamente rodeado por una familia de órbitas periódicas. Una de estas órbitas es seleccionada para ser en patrón exhibido por (2.3.1).

En la región $R_1 \cup R_2$ las variedades \mathcal{W}_0^\pm y \mathcal{W}_1^\pm son objetos de dimensión 2, al igual que el plano de reversibilidad Π . Dado que el espacio de fase de (2.4.3) es de dimensión 4, lo genérico es que estas variedades intercepten el plano Π en un objeto dimensión 0,

$$4 - \dim(\mathcal{W}_0^\pm) - \dim(\Pi) = 4 - \dim(\mathcal{W}_1^\pm) - \dim(\Pi) = 0,$$

i.e. una colección numerable de puntos. Puesto que, un órbita perteneciente a estas variedades que intercepte el plano de reversibilidad Π , debe ser continuada, al otro lado del plano, por su contraparte simétrica, corresponde a una órbita homoclina, i.e. a una estructura localizada del modelo (2.3.1).

En principio, las variedades \mathcal{W}_0^+ y \mathcal{W}_1^- , o \mathcal{W}_0^- y \mathcal{W}_1^+ , también deben interceptarse en puntos, pero, dado que, si un punto pertenece a ambas variedades, la órbita completa, a la que pertenece dicho punto, debe estar contenida en ambas variedades, se tiene que $\dim(\mathcal{W}_0^+ \cap \mathcal{W}_1^-) = \dim(\mathcal{W}_0^- \cap \mathcal{W}_1^+) = 1$, i.e. no son genéricas en un espacio de dimensión 4. Este tipo de órbitas corresponden a heteroclinas, por lo cual, estas soluciones no son genéricas. En particular, para un sistema hamiltoniano como (2.4.3), la existencia de una trayectoria que conecte asintóticamente el estado de no-población con un estado de población uniforme, requiere que estos dos puntos hiperbólicos tengan la misma energía (2.4.2), i.e.

$$H(0, 0, 0, 0) = H(1, 0, 1, 0) = 0,$$

lo cual ocurre solamente en el punto de Maxwell $\alpha = 1/2$, por lo cual son un accidente para un valor puntual de los parámetros.

Esta órbita heteroclina corresponde al frente estacionario de (2.3.1), fuera de el punto de Maxwell estas soluciones tipo partículas adquieren una velocidad proporcional a la diferencia de energía libre entre las densidades que asintóticamente conectan. El frente móvil es una conexión heteroclina en algún sistema móvil, $\partial_t = -c\partial_x$, pero, dado la escasa robustez de este tipo de órbitas, existen sólo para un valor dado de c . Por eso, a diferencia de un frente FKPP, este tipo de frentes se desplaza con una velocidad única.

Si bien, las órbitas homoclinas, que son intersecciones entre las variedades \mathcal{W}_0^+ y \mathcal{W}_0^- , o \mathcal{W}_1^+ y \mathcal{W}_1^- , también son objetos de dimensión 1, la existencia del plano de reversibilidad las hace robustas (i.e. en un sistema dinámico arbitrario este tipo de órbitas no son habituales). Las órbitas que nacen de la intercepción de \mathcal{W}_0^+ con \mathcal{W}_0^- , representan dominios localizados de población inmersos en una zona despoblada. Para estudiar el tamaño y estabilidad de estos dominios podemos emplear un método de interacción de defectos similar al usado en el caso local, i.e. tomar como solución de base el frente estacionario, y estudiar el comportamiento de un sistema de dos frentes en torno al punto de Maxwell.

Denotemos, entonces, por u_F^+ la conexión asintótica del estado de no-población, desde $x \rightarrow -\infty$, con el estado de población uniforme, en $x \rightarrow \infty$, i.e. corresponde a la órbita heteroclina $\mathcal{W}_0^- \cap \mathcal{W}_1^+$. Mientras que u_F^- denotara la órbita simétrica, respecto del plano Π , i.e. $\mathcal{W}_0^+ \cap \mathcal{W}_1^-$, la anti-partícula asociada a la partícula u_F^+ . Luego, un dominio localizado de población queda descrito por el ansatz

$$u = u_F^+(x + \Delta(t)/2) + u_F^-(x - \Delta(t)/2) - 1 + \phi_1(x, \Delta),$$

donde, dado la invarianza traslacional del sistema, hemos colocado inmediatamente la coordenada relativa entre las partículas, $\Delta \ll 1$, (el centro de masa no tiene dinámica). Y consideraremos el sistema en torno al punto de Maxwell, $\alpha = 1/2 + \delta\alpha$, con $\delta\alpha \ll 1$.

Acá la interacción asintótica entre frentes, a diferencia del caso local, ocurre mediante dos mecanismos: la corrección que un frente infiere sobre el corazón otro, que es de orden $\mathcal{O}(e^{-|\text{Re}(\Lambda)|\Delta})$, donde Λ viene dado por (2.4.4); y como una interfase ve a la otra producto de la interacción no-local, que es de orden $\mathcal{O}(e^{-\Delta/\sigma})$. Tras un poco de álgebra, se puede demostrar que $|\text{Re}(\Lambda)|\sigma < 1$, luego, el primer mecanismo domina sobre el segundo. De modo que, el primer orden queda

$$\phi_1 \sim \dot{\Delta} \sim \delta\alpha \sim e^{-|\text{Re}(\Lambda)|\Delta},$$

e.g. la interacción de defectos esta gobernada por el comportamiento asintótico en torno al estado de población uniforme. En la región R_1 tenemos que

$$1 - u_F^\pm(x \sim \pm\infty) \simeq be^{\mp\rho x},$$

con $\rho = \min\{|A|\}$, y $b > 0$ una constante que debe ser determinada numéricamente. Entonces, siguiendo el mismo procedimiento que en el caso local, puesto que la invarianza traslacional nos provee de un modo de goldstone, obtenemos la condición de solubilidad

$$\dot{\Delta} = \eta - Ae^{-\rho\Delta}, \quad (2.4.6)$$

con

$$A = b^2 \left(\langle \partial_x u_F^\pm e^{\rho x} | \mathcal{N} | u_F^{\pm 2} \rangle + 2 \langle u_F^\pm e^{\rho x} | \mathcal{N} | u_F^\pm \partial_x u_F^\pm \rangle - 3 \langle \partial_x u_F^\pm | u_F^\pm e^{\rho x} \rangle - 2 \langle e^{\rho x} | \mathcal{N} - 1 | \partial_x u_F^\pm \rangle \right) / \langle \partial_x u_F^\pm | \partial_x u_F^\pm \rangle,$$

y $\eta = 2c$, donde c es la velocidad de un frente libre, al primer orden en $\delta\alpha$, i.e.

$$c = \frac{-\delta\alpha}{6 \langle \partial_x u_F^\pm | \partial_x u_F^\pm \rangle}.$$

De modo que en R_1 tenemos el mismo comportamiento cualitativo que en el limite local $\sigma \rightarrow 0$. Acá el rango de influencia es todavía pequeño para producir un cambio significativo en la dinámica. Esencialmente, persiste el comportamiento predicho por (2.2.3), e.g. en R_1 no hay estructuras localizadas estables.

No obstante en R_2 la interacción no-local es capaz de producir un cambio cualitativo de la dinámica. Si escribimos

$$\Lambda = \pm\rho \pm i\omega, \quad \text{con } \rho > 0 \text{ y } \omega > 0, \\ \implies 1 - u_F^\pm(x \sim \pm\infty) \simeq be^{\mp\rho x} \cos(\omega\Delta),$$

para Λ dado por (2.4.4), la condición de solubilidad da la ecuación de interacción de defectos

$$\dot{\Delta} = \eta - Ae^{-\rho\Delta} \cos(\omega\Delta). \quad (2.4.7)$$

Acá, a diferencia de R_1 y el limite local $\sigma \rightarrow 0$, en el punto de Maxwell, $\eta = 0$, tenemos infinitos dominios localizados estables (una infinidad numerable). Los dominios más grandes van desapareciendo, por saddle-node, a medida que nos alejamos del punto de Maxwell. El dominio más pequeño es el que perdura más, i.e. vive en una región más extensa del espacio de parámetros. Un dibujo esquemático de esta fuerza se encuentra en la figura 2.13. La forma de estos dominios localizados de población se puede apreciar en la figura 2.14, los dominios más grandes contienen un mayor número de oscilaciones amortiguadas en su interior, de modo que el dominio más pequeño esta constituido por un solo pico (ver fig. 2.14.a). Esta última estructura es la más robusta de todas, en el sentido que habita en una región de parámetros más grande, esta región ha sido determinada numéricamente y se puede apreciar en la figura 2.15 (notemos que, por haber sido deducida mediante un análisis asintótico, (2.4.7) no da una buena descripción cuantitativa de las estructuras más pequeñas).

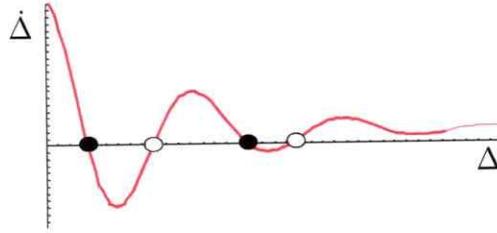


Fig. 2.13: Dibujo esquemático de la fuerza de interacción de defectos en R_2 , (2.4.7). Los puntos negros representan atractores (anchos de dominios localizados estables), mientras que los blancos repelores (anchos de dominios localizados inestables).

Entonces, si nos movemos por la curva $\alpha = 1/2$, desde la región de parámetros R_1 , al ingresar a R_2 , súbitamente aparecen, por saddle-node, una infinidad de estructuras localizadas. Luego, en la intersección de las curvas $\alpha = 1/2$ y $\sigma = \Sigma(\alpha)$, i.e. el punto

$$P = (\alpha, \sigma) = (1/2, \Sigma(1/2)) = (1/2, \sqrt{2}/3),$$

se produce un cambio cualitativo en la dinámica, el nacimiento de estructuras localizadas. Notemos que, también a partir de este punto el frente estacionario deja de ser monótono para presentar oscilaciones amortiguadas, es este evento el que cambia la interacción de defectos y produce la estabilización de los dominios localizados. En la figura 2.15 se ve que, la región de existencia de la estructura más pequeña, tiene un vértice en P , en general las región donde habitan los dominios localizados (contenidas en la región donde habita el más pequeño), tiene un vértice en P .

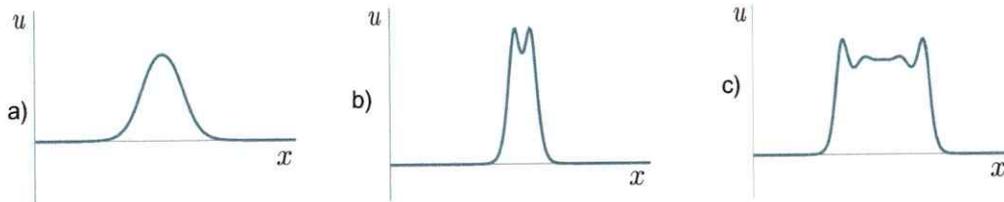


Fig. 2.14: Dominios localizados de población, observados en el modelo (2.3.1), para una influencia exponencial, con a) $\sigma = 1,3$ y $\alpha = 0,55$, b) $\sigma = 1,4$ y $\alpha = 0,49$ y c) $\sigma = 1,4$ y $\alpha = 0,5$.

Cave señalar que, puesto que el comportamiento asintótico en torno al estado de no-población está caracterizado por un exponente siempre real $\sqrt{\alpha}$, no esperamos la existencia de hoyos estables, i.e. zonas deshabitadas inmersas en una región poblada. Numéricamente tampoco se han observado este tipo de soluciones.

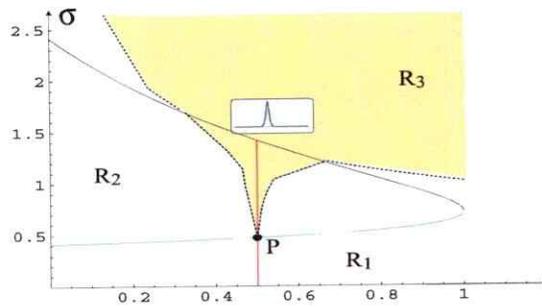


Fig. 2.15: Región en la que habita la estructura localizada más elemental, conformada por tan sólo un pico, para una influencia exponencial. El punto negro, P , corresponde al punto donde nace esta, y todas, las estructuras localizadas.

2.4.2. Nacimiento de estructuras localizadas para influencias que decaen más rápido que un exponencial

El resultado anterior puede ser generalizado, cuando la influencia decae más rápido que una exponencial. En efecto, en este caso, puesto que la interacción no-local entre dos interfaces mengua, a medida que se alejan, más rápido que una exponencial, si, el comportamiento asintótico, en torno al estado de población uniforme, es exponencial, entonces este dominará la interacción lejana de los defectos.

Cuando la expansión en derivadas (2.3.5) del operador no-local converge, entonces, podemos pensar el sistema estacionario (2.4.1) como un sistema dinámico ordinario de dimensión infinita. Por lo cual, resulta razonable suponer que el comportamiento asintótico, en torno a un punto fijo de (2.4.1), es exponencial. En efecto, para el estado de no-población, si tomamos el ansatz $u = \varepsilon e^{\Lambda x}$ con $\varepsilon \ll 1$, y linealizamos (2.4.1) en torno a este punto, obtenemos $\Lambda = \pm \sqrt{\alpha}$, que coincide con el caso de una influencia exponencial, puesto que aquí el término no-local no juega ningún rol. Por lo cual, en este caso, tampoco esperaríamos encontrar hoyos estables.

Para la densidad repulsiva $u = \alpha$, si tomamos $u = \alpha + \varepsilon e^{\Lambda x}$ con $\varepsilon \ll 1$, obtenemos

$$\Lambda^2 + (1 + \alpha)\alpha - 2\alpha^2 g_\sigma(\Lambda) = 0,$$

con

$$g_\sigma(\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \cosh(\Lambda z) f_\sigma(z) dz,$$

esta integral converge sólo si la función influencia decae más rápido que una exponencial, luego, el supuesto de que el comportamiento asintótico, en torno a un punto fijo de (2.4.1), es exponencial, es sólo válido en este caso.

Notemos que si tomamos

$$\Lambda = i\omega \implies -\omega^2 + (1 + \alpha)\alpha - 2\alpha^2 \hat{f}_\sigma(\omega) = 0,$$

el lado izquierdo de esta ecuación, para $\omega = 0$, vale $(1 - \alpha)\alpha > 0$, mientras que, cuando $\omega \gg 1$, se tiene que $-\omega^2 + (1 + \alpha)\alpha - 2\alpha^2 \hat{f}_\sigma(\omega) < 0$, e.g. esta ecuación tiene siempre al menos dos raíces reales. Luego, siempre existen al menos dos auto-valores imaginarios, con lo que tenemos el mismo comportamiento cualitativo que en el caso de una influencia exponencial.

Mientras que, para el estado de población uniforme, si tomamos $u = 1 + \epsilon e^{\Lambda x}$, obtenemos

$$\Lambda^2 + (1 + \alpha) - 2g_\sigma(\Lambda) = 0, \tag{2.4.8}$$

luego, son las raíces de esta ecuación las que determinaran la interacción de los defectos. Por ejemplo, si nos concentramos en el caso de una influencia tipo salto, i.e. (2.3.7), donde

$$g_\sigma(\Lambda) = \frac{\sinh(\Lambda\sigma)}{\Lambda\sigma},$$

tenemos que (2.4.8) tiene infinitas soluciones. En la figura 2.16.a se muestran las curvas de nivel de la parte real (en rojo) y la parte imaginaria (en azul) de (2.4.8) en el plano complejo. De modo que las intersecciones de estas curvas corresponden a las raíces de (2.4.8), las cuales son, evidentemente, infinitas, por la naturaleza de esta ecuación trascendental. Esto es consistente con pensar (2.4.1) como un sistema dinámico de dimensión infinita.

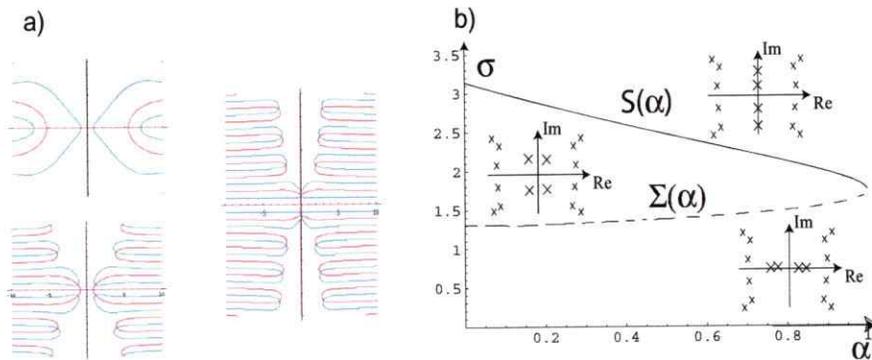


Fig. 2.16: a) Curvas de nivel de la parte real (en rojo) y la parte imaginaria (en azul) de (2.4.8) en el plano complejo, para una influencia tipo salto, las intersecciones corresponden a los auto-valores del estado de población uniforme. b) Estructura de bifurcaciones del estado de población uniforme, para una influencia tipo salto.

Puesto que estamos interesados en el comportamiento asintótico en torno a este punto, los auto-valores que dominarán en este régimen son los más cercanos al eje imaginario (la variedad central), pues poseen la parte real más pequeña, i.e.

$$\left\{ \Lambda = \pm \rho \pm i\omega/\rho = \min_{\Lambda} \{ |\operatorname{Re}(\Lambda)| \} \right\}.$$

Acá, al igual que en el caso de una influencia exponencial, tenemos tres casos: que $\omega = 0$ pero $\rho \neq 0$, que corresponde a la región $R_1 = \{ \sigma < \Sigma(\alpha) \}$, i.e. ocurre cuando el rango de influencia es pequeño, pero, en este caso, la curva $\sigma = \Sigma(\alpha)$ debe ser calculada

numéricamente, en la figura 2.16.b se puede ver esta curva para el modelo de influencia (2.3.7); que tanto $\rho \neq 0$ como $\omega \neq 0$, que corresponde a $R_2 = \{\Sigma(\alpha) < \sigma < S(\alpha)\}$, donde nuevamente la curva $\sigma = S(\alpha)$ coincide con la curva en la cual el estado de población uniforme se vuelve inestable; y $\rho = 0$ con $\omega \neq 0$, que corresponde a $R_3 = \{\sigma > S(\alpha)\}$, notemos que

$$\Lambda = i\omega \implies -\omega^2 + (1 + \alpha) - 2\hat{f}_\sigma(\omega) = 0,$$

luego, cuando $\omega = 0$, el lado izquierdo de esta ecuación vale $(\alpha - 1) < 0$, mientras que, para $\omega \gg 1$, se tiene que $-\omega^2 + (1 + \alpha) - 2\hat{f}_\sigma(\omega) < 0$, e.g. si esta ecuación tiene raíces reales, necesariamente son más de cuatro, de modo que en R_3 hay al menos cuatro autovalores imaginarios puros. Luego, cuando el sistema estacionario se encuentra en R_3 , en su espacio de fase (de dimensión infinita, en principio) existe una variedad de dimensión al menos 4, la cual contiene al estado de población uniforme y una familia de órbitas periódicas en torno a este, una de las cuales es seleccionada para ser el estado patrón.

De modo que, en R_1 , la interacción asintótica de defectos obedece la ecuación

$$\dot{\Delta} = \eta - Ae^{-\rho\Delta},$$

donde los coeficientes η y A tienen la misma expresión formal que en el caso de una influencia exponencial (aunque deben ser evaluados con los b , u_F^\pm y \mathcal{N} correspondientes al modelo de influencia en estudio). Mientras que en R_2 tenemos

$$\dot{\Delta} = \eta - Ae^{-\rho\Delta} \cos(\omega\Delta),$$

luego, al ingresar a esta región, aparece una familia de estructuras localizadas. El surgimiento de estos dominios localizados estables, también guarda relación con la aparición de oscilaciones amortiguadas en la solución frente, las cuales son capaces de modificar la interacción asintótica de defectos, estabilizando estos objetos localizados. En la figura 2.17 se pueden apreciar algunos dominios localizados, observados para una influencia tipo salto.

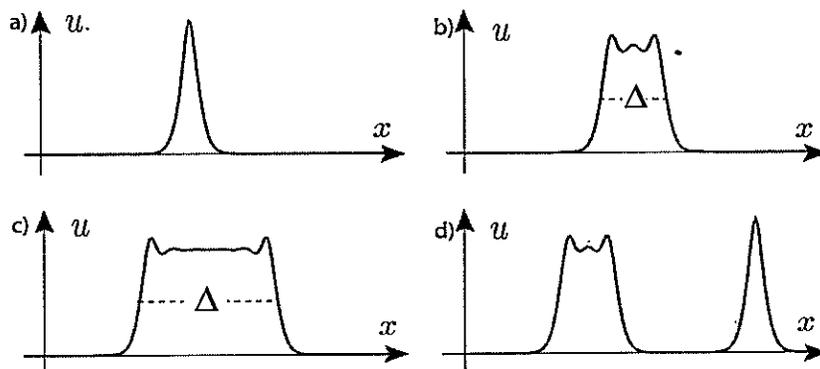


Fig. 2.17: Dominios localizados de población, observados en el modelo (2.3.1), para una influencia tipo salto, con $\sigma = 2,5$ y $\alpha = 0,51$, donde se muestra a) un estructura elemental, constituida por un solo pico, b) y c) dominio localizado más extenso, d) la coexistencia de dos estructuras localizadas.

perfil de densidad u , en efecto, en este caso $\eta_j = \sigma^{2j}$, de modo que (2.3.5) es una serie geométrica, i.e. converge si

$$\partial_x u/u \sim 1/l \implies \sigma/l < 1,$$

luego, en el caso que converja, podemos invertir el operador no-local

$$(1 - (\sigma\partial_x)^2) \mathcal{N} = 1,$$

que es completamente análogo al argumento de la función de Green que usamos, i.e. $(1 - (\sigma\partial_x)^2)$ es el inverso del operador no-local (que es invertible en un espacio restringido a funciones acotadas). Cuando la influencia decae más lento que una exponencial, g_σ no converge, de modo que el comportamiento asintótico, en torno a un punto fijo del sistema estacionario (2.4.1), no es exponencial, acá, probablemente se trate de un ley de potencia, y, dependiendo de esta ley, la interacción de defectos es gobernada por la interacción no-local o el comportamiento asintótico del frente. Este caso, de alta no-localidad, esta todavía en estudio, no obstante uno esperaría que la interacción no local, entre los individuos que constituyen la especie, luego de cierta distancia cesara, i.e. que la influencia fuera nula después de cierto rango (como el modelo tipo salto (2.3.7)), de todas formas; si dicho rango fuera grande, y la interacción, a distancias medias, fuera altamente no-local, un análisis de este caso puede tener un interés real, aparte de interés académico que despierta el comportamiento asintótico de la solución frente.

2.4.3. Estructuras localizadas en R_3

Cuando se forma el patrón, las órbitas homoclinas de (2.4.1), que parten y culminan en el estado de no-población, ahora pasan cerca de las órbitas periódicas que rodean al estado de población uniforme. Como habíamos comentado anteriormente, la existencia de órbitas heteroclinas perdura en toda una región del espacio de parámetros, la región de bloqueo. Las órbitas homoclinas habitan en una región que se intercepta con la región de bloqueo, pero ninguna de las dos contiene completamente a la otra, i.e. existen regiones donde hay órbitas heteroclinas pero no hay homoclinas, y a su vez hay región donde hay homoclinas pero no heteroclinas (ver ref. [24] o [26]).

En estos caso las estructuras localizadas (las órbitas homoclinas) corresponden a un patrón localizado (ver fig. 2.19.a y 2.19.b), de modo que podemos clasificarlas de acuerdo al número de picos de población que se encuentran inmersos en una zona despoblada. Luego, la estructura más elemental es la conformada tan solo por un pico, y, podríamos pesar las estructuras más grandes como un arreglo de N estructuras elementales. La región de parámetros donde habitan estas estructuras depende del número de picos que posean, cuando el número de picos tiende a infinito, esta región tiende a la región de bloqueo (la estructura localizada tiende a un frente).

También existen órbitas homoclinas que parten y culminan en el estado patrón, las cuales representan hoyos, i.e. zonas despobladas en medio de la configuración periódica de población, las cuales, en este caso, son estables, o al menos eso se observa numéricamente (ver fig. 2.19.c). Su tamaño se puede catalogar dependiendo de el número de picos ausentes en la estructura periódica, y su estructura de bifurcaciones es similar y simétrica a la de los patrones localizados (ver ref. [24] o [26]).

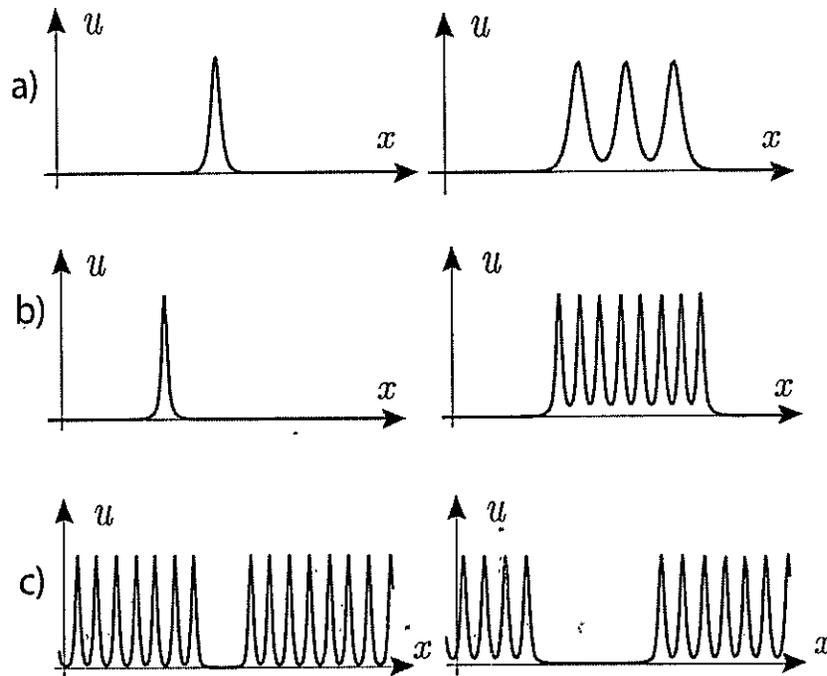


Fig. 2.19: Patrones localizados. a) Para una influencia exponencial, con $\sigma = 1,7$ y $\alpha = 0,6$, acá se ve la estructura elemental (izquierda), conformada por tan solo un pico, y un patrón localizado constituido por tres picos (derecha). b) Una influencia tipo salto, con $\sigma = 2,5$ y $\alpha = 0,618$. c) Hoyos para un influencia tipo salto con $\sigma = 2,5$ y $\alpha = 0,56$ (izquierda) y $\sigma = 2,6$ y $\alpha = 0,48$ (derecha).

En este caso, un análisis dinámico, similar al efectuado para estudiar los dominios localizados, no es posible. Al igual que en la propagación de frentes, los mecanismos de desestabilización de estos objetos pueden tornarse bastante más complejos, como se muestra en la figura 2.20, donde se exhibe el proceso de fisión de un pico, el cual es similar al que se observa en la propagación de un frente periódico. Existen caso más simples en los que esta dinámica puede ser atrapada mediante un método de interacción asintótica de defectos. Esto requiere que la solución periódica aparezca por saddle-node en torno a la densidad uniforme en conexión, para que luego la solución periódica inestable (que aparece junto a la estable tras esta bifurcación) colapse con la densidad uniforme, desestabilizándola, si estas dos bifurcaciones ocurren muy cerca, en el espacio de parámetros, estamos ante una bifurcación débilmente subcrítica que puede ser analizada mediante ecuaciones de amplitud. En el capítulo IV se presentan algunos detalles de este método, orientados a dar una explicación dinámica del fenómeno de bloqueo en el movimiento del frente, en ref. [27] se encuentra su aplicación al estudio de patrones localizados. Sin embargo es claro que esta concatenación de eventos no ocurre en (2.3.1), donde el estado de no-población no sufre bifurcación alguna.

Como ya lo habíamos comentado, la estructura más elemental es la constituida por un solo pico, ésta es morfológicamente similar al pico de población observado en R_2 . En efecto, la región de parámetros en que mora este ente abarca tanto R_2 como R_3

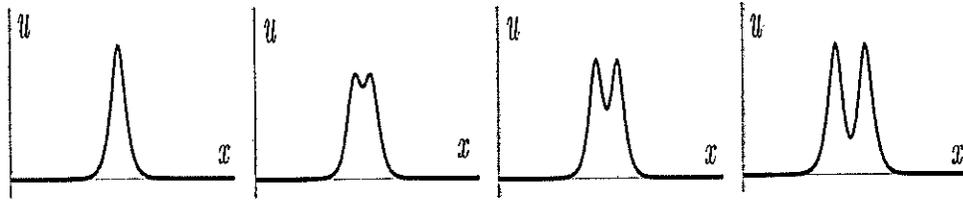


Fig. 2.20: Proceso de fisión de un pico, para un influencia exponencial, con $\alpha = 0,08$ y $\sigma = 2,4$. El tiempo avanza de izquierda a derecha.

en las figuras 2.15 y 2.18. Esta solución tipo partícula representa el asentamiento más básico de población, por lo cual, la interacción de dos de estas partícula puede modelar la interacción de dos comunidades o colonias. Dado que estas colonias se sirven de un territorio para la obtención de los recursos necesarios para su subsistencia, uno esperaría que si encontramos dos o más de estas agrupaciones coexistiendo en un mismo territorio; se conflictaran tendiendo a repelerse o a la aniquilación del competidor.

Esta interacción es lo suficientemente simple para ser atrapada con los métodos analíticos desarrollados en este capítulo. En efecto, si denotamos por $\zeta(x) = \zeta(-x)$ a la órbita homoclina de (2.4.1) que consta de tan sólo un pico, entonces, un sistemas constituido por dos de estas soluciones tipo partícula puede ser analizado mediante el ansatz

$$u = \zeta(x - X_1(t)) + \zeta(x - X_2(t)) + \phi(x, X_1, X_2),$$

con $X_1 < X_2$, la distancia entre las partículas, $X_2 - X_1$, es mucho mayor que el ancho característico del pico. Luego, un sistema constituido por dos de estas estructuras es aproximadamente la suma de dos estructuras individuales, salvo una pequeña corrección $\phi \ll 1$ (producto de que el sistema es no-lineal).

Entonces, la interacción entre estos entes se realizará mediante dos mecanismos: La corrección exponencial que una infiere sobre la otra, que, dado que el comportamiento asintótico es torno al estado de no-población esta caracterizado por el exponente $\sqrt{\alpha}$; es de orden $\mathcal{O}(e^{-\sqrt{\alpha}(X_2-X_1)})$; y la interacción no local entre estos objetos, la cual depende del modelo de influencia tomado. Cuando la influencia decae más rápido que una exponencial, el primer mecanismo es siempre dominante, en el caso de una influencia exponencial, ambos mecanismos compiten. Una variante de lo que hemos hecho hasta ahora, es colocar este sistema en una situación de alta no-localidad, i.e. estudiar la interacción de estas partículas en la región de parámetros $Q = \{\sigma > 1/\sqrt{\alpha}\} \subset R_3$. De modo que el orden dominante queda

$$\phi \sim \dot{X}_1 \sim \dot{X}_2 \sim e^{-(X_2-X_1)/\sigma},$$

luego, si nos colocamos en la región del espacio donde se encuentra una de las partículas, por ejemplo $x \sim X_1$, he introducidos este ansatz en (2.3.1), al primer orden obtenemos

$$\mathcal{L}\phi = \dot{X}_1 \partial_x \zeta(x - X_1) + \zeta(x - X_1) \mathcal{N}\zeta^2(x - X_2),$$

donde el operador lineal \mathcal{L} tiene la forma

$$\mathcal{L}\phi = \partial_{xx}\phi - \alpha\phi + 2(\alpha + 1)\zeta(x - X_1)\phi - 2\zeta(x - X_1)\mathcal{N}\zeta(x - X_1)\phi - \phi\mathcal{N}\zeta^2(x - X_1).$$

Dado que tenemos el modo de goldstone $\partial_x\zeta(x - X_1) \in \ker[\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger]$, esta ecuación tiene la condición de solubilidad

$$\dot{X}_1 = -Ke^{-(X_2 - X_1)/\sigma}, \quad (2.4.9)$$

análogamente, para $x \sim X_2$, tenemos

$$\dot{X}_2 = Ke^{-(X_2 - X_1)/\sigma}. \quad (2.4.10)$$

En ambos casos aparece el coeficiente

$$K = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z/\sigma} F(z) dz}{\sigma \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x \zeta)^2 dx},$$

con

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) \partial_x \zeta(x) (\zeta^2(z - x) - \zeta^2(z + x)) dx.$$

Claramente F es impar, además $F(z \sim \pm\infty) \sim e^{-2\sqrt{\alpha}|z|}$, lo que asegura la convergencia de la integral en el numerador de K . Puesto que ζ representa la estructura constituida por un solo pico ($\zeta(x) = \zeta(-x)$ y $\partial_x \zeta = 0$ ssi $x = 0$), se deduce que $F(z \leq 0) \geq 0$, luego, como la integral en el numerador de K prioriza la región de integración $z < 0$, se tiene que $K > 0$, e.g. *la interacción es repulsiva* (ver fig. 2.21).

De modo que, si consideramos un gas de estas estructuras, la interacción entre ellas será, predominantemente, con los vecinos más cercanos, i.e. cada partícula sentirá una fuerza de tipo (2.4.9) o (2.4.10) proveniente del vecino que se encuentre más cerca a su derecha o a su izquierda respectivamente. Luego, para un gas de N estructuras situadas en posiciones $\{X_n\}_{n=1}^N$, la ecuación de movimiento de la partícula n -ésima corresponde a

$$\dot{X}_n = K (e^{-(X_n - X_{n-1})/\sigma} - e^{-(X_{n+1} - X_n)/\sigma}) \quad \text{con } m < n \implies X_m < X_n. \quad (2.4.11)$$

Si colocamos este sistema de partículas en un medio finito, por ejemplo, con condiciones de borde periódicas, éstas se repelerán hasta quedar todas equidistantes, configuración que es estable. O sea que el sistema evolucionara a una configuración periódica de picos, más aún, podemos hacer tender a infinito el tamaño del sistema a medida que incorporamos más estructuras ($N \rightarrow \infty$ también), con lo cual mantendríamos esta configuración periódica estable. Por otro lado, cualquier arreglo periódico de picos debe corresponder a una órbita periódica del sistema estacionario (2.4.3), i.e. un patrón. Dado que el espaciamento entre los picos depende del número inicial de ellos (o su densidad para un sistema infinito), *podemos tener un patrón de una longitud de onda arbitrariamente grande, el cual es estable*. O, dicho de otro modo, en la región de parámetros

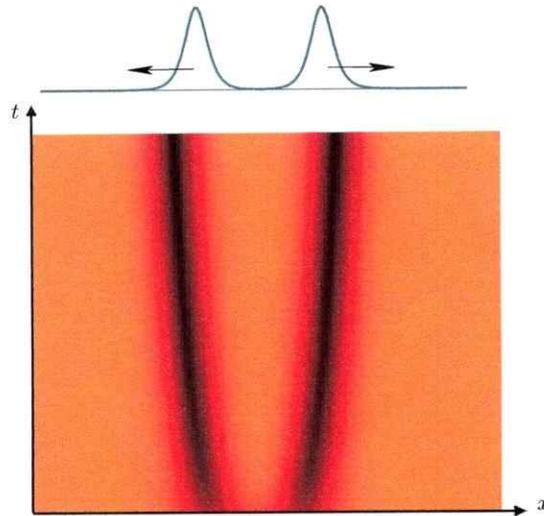


Fig. 2.21: Repulsión de picos, para un influencia exponencial, con $\alpha = 0,6$ y $\sigma = 3$. Arriba se ve un dibujo esquemático de la interacción, mientras que abajo se encuentra un diagrama espacio-temporal del proceso.

Q existe una familia de órbitas periódicas, en torno al estado de población uniforme y en cuyo borde esta la órbita homoclina ζ . Dentro de esta familia hay una infinidad de miembros (limitados por la homoclina ζ), que corresponden a patrones estables de (2.3.1).

El razonamiento anterior puede parecer contradictorio con la existencia de patrones localizados constituidos por muchos picos (o el mismo fenómeno de bloqueo en los frentes), no debemos olvidar que en este caso, por encontrarse muy cerca los picos, no se puede aproximar al sistema por (2.4.11), valida solo para grandes distancias. De todas formas, cuando el rango de influencia es muy grande, los picos del patrón son muy pronunciados, y no se observan más que estructuras elementales o arreglos periódicos de estas, no habiendo ya, en este régimen, ni frentes bloqueados, ni patrones multi-picos localizados, ni hoyos.

Esto sugiere que una mejor manera de estudiar analíticamente estas formaciones es concentrarse en su célula elemental, el pico, y no en la interacción de defectos (como en el caso de dominios uniformes). Claro que procesos como la fisión o fusión de picos, o la misma interacción cercana (no asintótica), lucen bastante complejos como para ser estudiados en un esquema aproximativo tan simple como el desarrollado en este capítulo. No obstante alguna esperanza se vislumbra en tratar estos procesos como interacciones más sofisticadas de pico-partículas, de hecho, en un esquema muy simple obtuvimos cierta información importante del estado patrón para un influencia exponencial, i.e. existe una familia infinita de patrones estable y su longitud de onda es arbitrariamente grande (existe una cota inferior, por supuesto, que se debe a la interacción cercana). De momento algunos esfuerzos se están invirtiendo en esta dirección.

Capítulo 3

DINÁMICA DE DOMINIOS EN PRESENCIA DE RUIDO INTERNO

3.1. INTRODUCCIÓN

El proceso de "coarse-grained" que lleva con sigla la descripción continua de un sistema (por medio de ecuaciones diferenciales parciales), en principio discreto, requiere la eliminación adiabática de muchos grados de libertad internos del sistema. O sea, se presupone la existencia de distintas escalas de tiempo en la dinámica del sistema, una rápida, en la cual el sistema va localmente a cierto tipo de equilibrio, y otra lenta, en que el sistema evoluciona a un equilibrio global. Por ejemplo, en la teoría cinética de gases, el sistema primero maximiza la entropía local (dinámica rápida), para luego obedecer la ecuaciones de Navier-Stokes (dinámica lenta).

En un sistema biestable, el cual posee dos equilibrios equivalentes, forzados por alguna simetría (o producto de una transición de fase originada en un quiebre espontáneo de simetría). Por ejemplo, en sistemas ferromagnéticos, las configuraciones con spin-up o spin-down. El sistema, primero va localmente a una de estos equilibrios, la dinámica rápida, por luego entrar en una dinámica de dominios en los que el sistema se encuentra en uno de estos dos equilibrios. Eventualmente, si el sistema exhibe un comportamiento termodinámico clásico, el resultado final de esta dinámica de dominios, o coarsening, será un estado completamente uniforme, en el que el sistema se encuentra en uno de estos equilibrios.

Un modelo prototipo de un sistema biestable es la ecuación de Ginzburg-Landau real, la cual, en variables adimensionales y en una dimensión espacial, tiene la forma

$$\partial_t u = u - u^3 + \partial_{xx} u, \quad (3.1.1)$$

donde el campo escalar u es el parámetro de orden que representa los modos lentos de la dinámica. Este sistema es, esencialmente, equivalente al modelo de Nagumo local, en el punto de Maxwell (ver capítulo anterior), de hecho es variacional, i.e. posee la energía libre

$$\mathcal{F}[u] = \int \left(\frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{1}{4} (u^2 - 1)^2 \right) dx,$$

y su dinámica consiste en la minimización de este funcional. Luego, este sistema posee un repelente uniforme $u = 0$ y dos atractores uniformes $u = \pm 1$, que son equivalentes energéticamente (por la simetría $u \rightarrow -u$), e.g. este sistema admite como solución una

conexión espacial estacionaria entre estos dos estados, un kink u_+ o antikink u_- ,

$$u_{\pm}(x) = \pm \tanh\left(\frac{x - X^{\pm}}{\sqrt{2}}\right). \quad (3.1.2)$$

Notemos que, cuando hablamos de una separación de escalas, en la dinámica, no necesariamente nos referimos a dos. Pueden haber muchas escalas de tiempo vinculadas a la evolución de un sistema físico al equilibrio. Una primera escala sería, en este caso, la reducción de toda la dinámica a la evolución autónoma del parámetro de orden u , i.e. todos los otros grados de movimiento se vuelven esclavos de u . Una segunda escala sería que el parámetro de orden alcanzara el equilibrio localmente, i.e. el establecimiento de dominios en los cuales el sistema se encuentra en $u = \pm 1$. La tercera y última escala, la más lenta de todas, sería una dinámica de dominios tendiente a uniformizar el sistema, i.e. que el sistema alcance el mínimo global de la energía libre, que consiste en un estado completamente uniforme, con $\mathcal{F} = 0$.

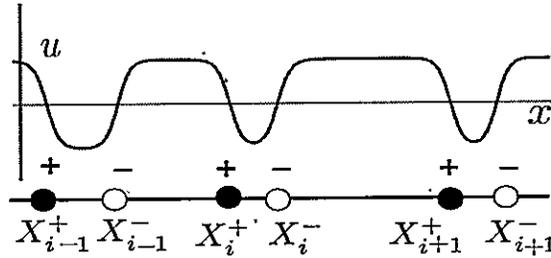


Fig. 3.1: Dibujo esquemático de un gas de pares kink-antikinks.

Cuando el sistema se encuentra en este último régimen, el *régimen ulterior*, se puede ver como un gas constituido por pares de kink-antikink (evidentemente, es topológicamente imposible encontrar dos kinks o dos antikinks consecutivos). Como ya lo habíamos discutido en el capítulo II, la interacción entre estas partículas es atractiva, ocasionando que colisionen y se aniquilen mutuamente, de esta forma elimina el sistema los gradientes engendrados por estos defectos, los cuales le son costosos energéticamente. Luego, si el gas está lo suficientemente diluido, podemos emplear los métodos asintóticos del capítulo anterior, de modo que la interacción kink-antikink es exponencialmente débil, por lo cual la dinámica del gas está regida esencialmente por la interacción de los vecinos cercanos, i.e. si consideramos un gas de N pares kink-antikink, en posiciones $\{X_i^+, X_i^-\}_{i=1}^N$, con $X_i^+ < X_i^- < X_{i+1}^+$ (ver fig. 3.1), la ecuación de movimiento de este sistema de partículas es

$$\begin{aligned} \dot{X}_i^+ &= 6\sqrt{2} \left(e^{-\sqrt{2}(X_i^- - X_i^+)} - e^{-\sqrt{2}(X_i^+ - X_{i-1}^-)} \right), \\ \dot{X}_i^- &= 6\sqrt{2} \left(e^{-\sqrt{2}(X_{i+1}^+ - X_i^-)} - e^{-\sqrt{2}(X_i^- - X_i^+)} \right). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Notemos que este sistema es muy similar al gas de picos estudiado en el capítulo II, pero con una diferencia esencial, aca la interacción entre las partículas es atractiva, de modo que una configuración en la cual todas las partículas estén equidistantes es

inestable. La dinámica de este sistema tiende al aglutinamiento de todos los entes que lo constituyen, por supuesto que, a medida que los kink y antikink se van encontrando, se aniquilan mutuamente. De modo que (3.1.3) no es una descripción completa del fenómeno en estudio, falta incorporar el proceso de aniquilación, lo que implica que N es un número variable, que decrece en el tiempo.

Una medida de cuán avanzado está el proceso de coarsening es el largo promedio de los dominios en que el sistema se encuentra en estados distintos, el cual es función del número de pares kink-antikinks, en efecto, si consideramos un sistema de largo L_0 , con condiciones de borde periódicas, tenemos que

$$\langle L \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n [(X_i^- - X_i^+) + (X_i^+ - X_{i-1}^-)]}{2N} = \frac{L_0}{2N}.$$

El sistema (3.1.3) es invariante ante la transformación

$$\begin{aligned} (X_i^- - X_i^+) &\longrightarrow (X_i^- - X_i^+) + \alpha, \\ (X_i^+ - X_{i-1}^-) &\longrightarrow (X_i^+ - X_{i-1}^-) + \alpha, \\ t &\longrightarrow t + \sqrt{2}\alpha t, \end{aligned}$$

que corresponde a una dilatación uniforme del tamaño de todos los dominios, acompañada de una dilatación del tiempo. Mientras más grandes sean los dominios, más lenta es la dinámica, pues la interacción kink-antikinks decrece exponencialmente con la distancia. Luego, si suponemos autosimilitud (de un modo análogo al teorema de virial, en mecánica clásica, ver ref. [28]), el largo promedio debe cumplir

$$\langle L(t) \rangle + \alpha = \left\langle L \left(e^{\sqrt{2}\alpha t} \right) \right\rangle \implies \langle L(t) \rangle = \log(t) / \sqrt{2},$$

de modo que

$$N(\dot{t}) \sim 1 / \log(t), \quad (3.1.4)$$

Notemos que el crecimiento del largo promedio, o decrecimiento del número de pares, es bastante lento (logarítmico), esto se debe a que la interacción kink-antikink es muy débil (exponencial).

No obstante, todos los grados de libertad despreciados en el proceso de coarse-grained, están, de algún modo, presentes en un sistema real. Éstos son grados desordenados de movimiento, que pueden ser incorporados a la descripción continua como fluctuaciones estocásticas al parámetro de orden. Por ejemplo, en la teoría cinética clásica, el caos molecular induce las fluctuaciones térmicas al equilibrio termodinámico, i.e. la hipótesis de caos molecular de Boltzman permite suponer que las variaciones al equilibrio son aleatorias y descorreladas (siguiendo la distribución de Maxwell), aún cuando provengan de un sistema microscópicamente determinista. Claro que esto no es privativo de un sistema macroscópico que, microscópicamente sea hamiltoniano, en los ejemplos que hemos estudiado en esta tesis, i.e. un medio granular, donde la dinámica microscópica es disipativa, y la dinámica poblacional, donde su modelación microscópica es todavía un tema abierto (es probablemente estocástica), también existen fluctuaciones a las variables de coarse-grained, producto de procesos microscópicos ignorados.

Entonces, una manera simple de incorporar estos procesos microscópicos al modelo (3.1.1), es incorporar un ruido aditivo

$$\partial_t u = u - u^3 + \partial_{xx} u + \sqrt{\varepsilon} \zeta(x, t), \quad (3.1.5)$$

con ζ un proceso gaussiano de valor medio nulo, $\langle \zeta(x, t) \rangle = 0$, y correlación

$$\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = \delta(t' - t) \delta(x' - x),$$

mientras que ε es la intensidad del ruido (proporcional a la temperatura en un sistema termodinámico). Aparentemente, la incorporación de este término no debiese modificar mayormente la dinámica, i.e. a priori, un podría decir que sólo introduce fluctuaciones a la dinámica determinista que, en promedio, tienen un efecto nulo. No obstante, vamos a ver que esta conjetura es falsa.

En efecto, en el caso de la forma normal de van der Waals, ya habíamos observado que el coarsening, en el régimen de viscosidad alta, es acelerado por la presencia de ruido. Si bien, este fenómeno no corresponde al que estudiaremos en este capítulo, puesto que allí el sistema posee dos cantidades conservadas, la masa y el momentum, que cambian cualitativamente el proceso, en el modelo (3.1.5) también se observa que la presencia de ruido altera considerablemente las propiedades de el coarsening (i.e. la ley (3.1.4)); haciendolo más eficiente.

Cabe señalar que la también puede existir un relación con el coarsening en el caso conservativo o cuasi-conservativo, en la forma normal de van der Waals, aunque más lejana. Aca, el mar de ondas en que se encuentran sumergidos los dominios, corresponde a grados desordenados de movimiento, que pueden desempeñar un rol similar al del ruido. Éstos corresponden a grados de libertad internos del modelo determinista y no a grados de libertad microscópicos despreciados del sistema físico que se está modelando. Aunque, desde un punto de vista puramente teórico, ambos casos lucen similares, es importante remarcar que, en el modelamiento continuo de un sistema físico real, siempre existe una fuente de ruido externa a la ecuación en derivadas parciales. Sin embargo, a esta fuente de ruido se la conoce como ruido interno (que es generalmente aditivo), en el sentido que proviene de grados de libertad internos del sistema en estudio y no de las condiciones de laboratorio al la que está sometido éste.

3.2. INTERACCIÓN KINK-ANTI-KINK EN PRESENCIA DE RUIDO DÉBIL

Un modo de entender como la presencia de ruido modifica el proceso de coarsening en la ecuación (3.1.5) es estudiar como se afecta el comportamiento del gas de pares kink-antikink.

En el Apéndice C se encuentra un estudio detallado de como, la presencia un ruido débil, $\varepsilon \ll 1$, afecta a la solución estacionaria (4.3.7). Como en los casos deterministas (puesto que existe un modo de goldstone) la posición del defecto adquiere dinámica, $u_{\pm} = u_{\pm}(x - X^{\pm})$, y se comporta como una partícula browniana

$$\dot{X}^{\pm} = \sqrt{\eta} \xi(t), \quad (3.2.1)$$

con $\eta \equiv 3\varepsilon/\sqrt{8}$, $\langle \xi(t) \rangle = 0$, y $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$ un ruido blanco.

Luego, como la interacción kink-antikink es exponencialmente débil, si el gas está lo suficientemente diluido, la podemos despreciar frente a los procesos de transporte inducidos por el ruido. O sea, estamos diciendo que, dado que la velocidad del defecto decrece exponencialmente con la distancia a la que se encuentran sus vecinos, su movimiento estará dominado por las fluctuaciones a su posición original, que son de orden $\sqrt{\eta t}$, i.e. dominan sobre las variaciones logarítmicas que induce la interacción determinista no importando cuan pequeña sea la intensidad del ruido η . De manera que podemos modelar el gas de pares kink-antikink como un gas de partículas brownianas que, cuando colisionan, se aniquilan mutuamente, de aquí podemos conjeturar que $N \sim t^{-1/2}$, lo cual es mucho más eficiente que el caso determinista. En la figura 3.2 se muestra dos simulaciones numéricas del modelo (3.1.5), con y sin ruido, un mera inspección visual nos dice que la tasa de aniquilaciones es superior en el caso ruidoso. Claro que, grandes fluctuaciones, pueden engendrar la creación de un par kink-antikink, aunque el problema de los tiempos de Kramer, para un sistema extendido como (3.1.5), aún no está resuelto, es bastante intuitivo que, si el ruido es pequeño, la creación de un par kink-antikink es un evento muy improbable. Luego, en el régimen de ruido débil, los procesos de creación son despreciables frente a los procesos de aniquilación.

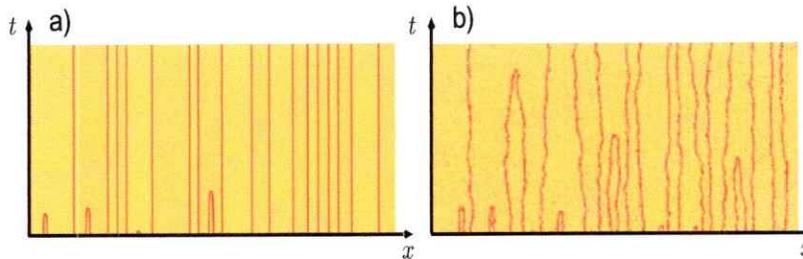


Fig. 3.2: Diagrama espacio-temporal de (3.1.5) con a) $\eta = 0$ y b) $\eta = 0,55$. Las zonas más rojas indican que el parámetro de orden está más cerca de 0, mientras que en las zonas más amarillas está más lejos de este valor.

En efecto, para analizar como el ruido modifica la interacción kink-antikink, llamemos \mathcal{S} al conjunto que posee todos los estados posibles de un sistema integrado por un par de estas partículas. Luego, puesto que este sistema constituye un proceso markoviano, su dinámica está completamente caracterizada por la probabilidad condicional $P(\psi, t | \psi', t') \equiv P(\psi, t)$, de que el sistema este en el estado $\psi \in \mathcal{S}$ en un tiempo t si estaba en el estado $\psi' \in \mathcal{S}$ en t' , la cual satisface la ecuación maestra

$$\partial_t P(\psi, t) = \sum_{\phi \in \mathcal{S}} [w(\phi | \psi) P(\phi, t) - w(\psi | \phi) P(\psi, t)],$$

donde $w(\phi | \psi)$ es la probabilidad de transición del estado ϕ al estado ψ .

Podemos dividir el conjunto de estados $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_0$: donde \mathcal{S}_2 contiene todos los estados donde el par aún no se auto-aniquilado, y las partículas se encuentra en las posiciones $\{X^+, X^-\}$, i.e. es isomorfo a Ω , el dominio donde se encuentran las partículas;

mientras que \mathcal{S}_0 contiene el estado donde el par ya se a auto-aniquilado, i.e. contiene sólo un elemento. Entonces, podemos escribir la probabilidad condicional

$$P(\psi, t) = \begin{cases} P_2(X^+, X^-, t) & \text{si } \psi \in \mathcal{S}_2, \\ P_0(t) & \text{si } \psi \in \mathcal{S}_0, \end{cases}$$

donde se tiene que

$$\int_{\Omega} P_2(X^+, X^-, t) dX^+ dX^- + P_0(t) = 1.$$

Luego, podemos definir el número de pares como la probabilidad de que las partículas no se hallan aniquilado

$$N(t) = \int_{\Omega} P_2(X^+, X^-, t) dX^+ dX^- = 1 - P_0(t), \quad (3.2.2)$$

con lo cual $0 \leq N \leq 1$, como era de esperar para un sistema integrado sólo por un par.

Para escribir la probabilidad de transición, notemos que, no existen transiciones de \mathcal{S}_0 a \mathcal{S}_2 , o sea, una vez aniquilado el par no puede reaparecer, e.g. P_2 satisface un ecuación autónoma, mientras que la dinámica de P_0 es completamente esclava de P_2 . Mientras que, el transporte en \mathcal{S}_2 es puramente difusivo, puesto que estamos despreciando la interacción determinista, no consideraremos el termino de deriva en la ecuación de Fokker-Planck para P_2 . Luego, podemos escribir la ecuación maestra

$$\partial_t P_2 = \left\{ \frac{\eta}{2} (\partial_{X^+ X^+} + \partial_{X^- X^-}) - W(X^+ - X^-) \right\} P_2, \quad (3.2.3)$$

$$\partial_t P_0 = \int_{\Omega} W(X^+ - X^-) P_2(X^+, X^-, t) dX^+ dX^-, \quad (3.2.4)$$

donde $W(X^+ - X^-)$ representa la probabilidad de transición de \mathcal{S}_2 a \mathcal{S}_0 , i.e. modela el proceso de aniquilación. De modo que W debe ser una función positiva y par, la cual sólo depende de la distancia entre las partículas, por la invarianza traslacional del sistema. Luego, podemos separar la dinámica del centro de masa $Y = (X^+ + X^-)/2$ y la coordenada relativa $X = (X^+ - X^-)$, i.e. si tomamos $P_2 = U(X, t) V(Y, t)$ podemos separar la ecuación (3.2.3)

$$\partial_t V = \frac{\eta}{4} \partial_{YY} V,$$

$$\partial_t U = (\eta \partial_{XX} - W(X)) U,$$

De modo que el centro de masa se comporta como una partícula browniana ordinaria. Mientras que la coordenada relativa satisface un ecuación de difusión, con un sumidero de probabilidad, que representa el proceso de aniquilación. Luego, para tener una expresión precisa del número de pares (3.2.2), debemos modelar W , dado que estamos considerando un sistema altamente diluido, podemos tomar la interacción entre las partículas puramente puntual, i.e. $W(X) = \delta(X)$. Luego, tomando $X = \eta Z$ y $t = \eta T$ tenemos

$$\partial_T U = (\partial_{ZZ} - \delta(Z)) U,$$

Para resolver esta ecuación podemos calcular el propagador

$$U(Z, T) = \int dZ' p(Z', Z | T) U(Z', 0),$$

para lo cual necesitamos diagonalizar el operador $\mathcal{L} = -\partial_{ZZ} + \delta(Z)$. Luego, claramente las auto-funciones de \mathcal{L} son pares o impares, y tienen la forma

$$u_k^E(Z) = \begin{cases} \frac{(2ik-1)e^{ikZ} + (2ik+1)e^{-ikZ}}{\sqrt{4\pi(4k^2+1)}} & \text{if } Z > 0, \\ \frac{(2ik+1)e^{ikZ} + (2ik-1)e^{-ikZ}}{\sqrt{4\pi(4k^2+1)}} & \text{if } Z < 0. \end{cases}$$

$$u_k^O(Z) = \frac{e^{ikZ} - e^{-ikZ}}{\sqrt{4\pi}}$$

donde el índice continuo $k \in (0, \infty)$. El auto-valor asociado a estas auto-funciones sólo, depende del índice k , y no de la paridad, tomando el valor $\lambda_k = k^2$. De modo que el propagador toma la forma

$$p(Z', Z | T) = \int_0^\infty dk u_k^E(Z')^* u_k^E(Z) e^{-k^2 T} + \int_0^\infty dk u_k^O(Z')^* u_k^O(Z) e^{-k^2 T}$$

o, después de un poco de álgebra,

$$p(Z', Z | T) = \theta(-Z') \theta(-Z) [p_G(Z' - Z | T) - q^{(-)}(Z' + Z | T)] \\ + [\theta(-Z') \theta(Z) + \theta(Z') \theta(-Z)] r(Z' - Z | T) \\ + \theta(Z') \theta(Z) [p_G(Z' - Z | T) - q^{(+)}(Z' + Z | T)],$$

donde θ es la función de Heaviside, y

$$p_G(Z | T) = \frac{e^{-Z^2/4T}}{\sqrt{4\pi T}},$$

$$q^{(\pm)}(Z | T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-k^2 T - ikZ}}{1 \pm 2ik},$$

$$r(Z | T) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{ik}{1 + 2ik} e^{-k^2 T + ikZ}.$$

De modo que, si tomamos la condición inicial determinista $U(X, 0) = \delta(X - X_0)$, i.e. las partículas se encuentran a una distancia X_0 con probabilidad 1, y calculando el número de pares según la prescripción (3.2.2), obtenemos

$$N(t) = \operatorname{erf} \left(\frac{X_0}{2\sqrt{\eta t}} \right). \quad (3.2.5)$$

Notemos que, asintóticamente $t \gg 1$, el número de partículas tiene la forma

$$N(t \sim \infty) \simeq \frac{X_0}{\sqrt{\eta t}} + \mathcal{O}(t^{-3/2}),$$

O sea, tal cual se había conjeturado, para tiempos grandes $N \sim t^{-1/2}$, al menos para un sistema integrado por un sólo par kink-antikink. En la figura 3.3 se muestran los resultados de una simulación numérica de un sistema integrado por dos partículas brownianas, las cuales, si se encuentran a una distancia inferior a un rango $\delta \ll 1$, se aniquilan con probabilidad 1. Los puntos representan el número promedio de partículas, para 2000 realizaciones, la línea continua, en rojo, es la ley (3.2.5) que acabamos de obtener, mientras que la línea continua, en azul, es la ley asintótica $N \sim t^{-1/2}$. De modo que el comportamiento $N \sim t^{-1/2}$ anda bastante bien, salvo en el origen ($t \sim 0$) donde las correcciones $\mathcal{O}(t^{-3/2})$ son importantes.

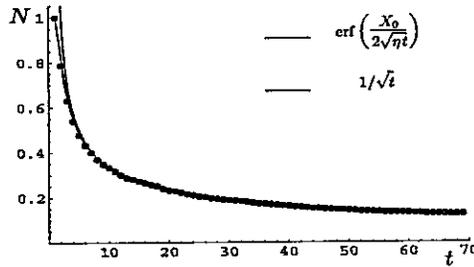


Fig. 3.3: Número promedio de pares N , sobre 2000 realizaciones, para un sistema integrado por dos partículas brownianas, las cuales, si se encuentran a una distancia inferior a un rango $\delta = 0,1$, se aniquilan con probabilidad 1. Inicialmente, las partículas se encuentran a una distancia $X_0 = 1$.

El par kink-antikink es la unidad básica del gas que estamos estudiando, y, por lo tanto, las propiedades de su interacción determinaran las propiedades dinámicas del sistema. Si bien, se podría alegar que, al considerar un conglomerado mayor de estos pares, es posible que el sistema exhiba un comportamiento emergente, que modificara esta situación, podemos razonar de la siguiente forma: si tenemos dos gases de pares kink-antikink, que decaen con un ley determinada (digamos $N \sim t^{-1/2}$), si juntamos ambos sistemas, el nuevo gas (conformado por ambos), debe decaer con la misma ley. Claro que si juntamos dos sistemas pequeños (como el conformado por un solo par), las nuevas interacciones que aparecen, al ser juntados, son relevantes en el comportamiento de la dinámica global del sistema, por lo cual haremos un bosquejo de lo que ocurre cuando consideramos un gas con $N > 1$ de estos pares (el cual es un problema de N cuerpos mucho más complicado):

3.3. GAS DE PARES KINK-ANTIKINK EN PRESENCIA DE RUIDO DÉBIL

El comportamiento es cualitativamente similar cuando se considera un sistema integrado por más de estas partículas. Puesto que naturalmente los kink y antikink están intercalados, no tiene sentido diferenciarlos, luego consideraremos un gas de $2N_0$ partículas brownianas unidimensionales, en posiciones $\{X_i^+, X_i^-\}_{i=1}^{N_0} = \{X_i\}_{i=1}^{2N_0}$, que, cuando colisionan con su vecino, se aniquilan mutuamente. Claro que, a medida que se van

aniquilando, dejan de tener una posición definida, de todas formas podemos identificar a cada partícula por el número $i \in \{1, \dots, 2N_0\}$, independientemente de si está o no aniquilada.

Luego, si llamamos \mathcal{S} al conjunto de todos los posibles estados de este sistema, tenemos que este proceso markoviano queda determinado por la probabilidad condicional $P(\psi, t | \psi', t') \equiv P(\psi, t)$, de que el sistema este en el estado $\psi \in \mathcal{S}$ en un tiempo t si estaba en el estado $\psi' \in \mathcal{S}$ en t' , la cual satisface la ecuación maestra

$$\partial_t P(\psi, t) = \sum_{\phi \in \mathcal{S}} [w(\phi | \psi) P(\phi, t) - w(\psi | \phi) P(\psi, t)],$$

con $w(\phi | \psi)$ la probabilidad de transición del estado ϕ al estado ψ .

Hasta aca es identico al caso de solo un par, pero, en este caso el conjunto de estados posibles \mathcal{S} admite una gama mucho más amplia de posibilidades, dependiendo de cuantas partículas se han aniquilado. De hecho, si introducimos el conjunto

$$\begin{aligned} \Lambda_n = \{ & \sigma_n = \{i_1, \dots, i_{2(N_0-n)}\} / \forall j \in \{1, \dots, 2(N_0-n)\} \\ & (i_j \in \{1, \dots, 2N_0\}) \wedge (1 \leq i_j \leq 2N_0) \\ & \wedge (i_{j-1} < i_j) \wedge (i_{j-1} + i_j \text{ es impar}) \} \end{aligned}$$

podemos separar el conjunto de estados

$$\mathcal{S} = \left(\bigcup_{n=0}^{N_0-1} \bigcup_{\sigma_n \in \Lambda_n} S_{2(N_0-n)}^{\sigma_n} \right) \cup S_0$$

aca $S_{2(N_0-n)}^{\sigma_n}$ contiene los estados donde las partículas en el conjunto σ_n aún no se han aniquilado, encontrandose en las posiciones $\{X_i\}_{i \in \sigma_n}$, mientras las partículas en $\sigma_0 - \sigma_n$ ya están aniquilados. S_0 contiene el estado donde todas las partículas se han aniquilado.

Si introducimos

$$\Gamma_{n+1}^{\sigma_n} = \{ \sigma_{n+1} \in \Lambda_{n+1} / \sigma_{n+1} = \sigma_n - \{i_{j-1}, i_j\} \text{ con } \{i_{j-1}, i_j\} \subset \sigma_n \}$$

dado que el evento de que dos o más pares kink-antikink se aniquilen simultáneamente es muy improbable, sólo consideraremos transiciones de $S_{2(N_0-n)}^{\sigma_n}$ a $S_{2(N_0-n-1)}^{\sigma_{n+1}}$ con $\sigma_{n+1} \in \Gamma_{n+1}^{\sigma_n}$.

De modo que, tomando el tercer conjunto

$$\Xi_{n-1}^{\sigma_n} = \{ \sigma_{n-1} \in \Lambda_{n-1} \cap \sigma_n \in \Gamma_n^{\sigma_{n-1}} \},$$

podemos reconocer en la ecuación maestra, para $\psi \in S_{2(N_0-n)}^{\sigma_n}$, tres términos

$$\begin{aligned} \partial_t P(\psi, t) = & \sum_{\phi \in S_{2(N_0-n)}^{\sigma_n}} [w(\phi | \psi) P(\phi, t) - w(\psi | \phi) P(\psi, t)] \\ & + \sum_{\substack{\phi \in S_{2(N_0-n-1)}^{\sigma_{n-1}} \\ \sigma_{n-1} \in \Xi_{n-1}^{\sigma_n}}} w(\phi | \psi) P(\phi, t) \\ & - \sum_{\substack{\phi \in S_{2(N_0-n-1)}^{\sigma_{n+1}} \\ \sigma_{n+1} \in \Gamma_{n+1}^{\sigma_n}}} w(\psi | \phi) P(\psi, t). \end{aligned}$$

El primero de estos términos representa el transporte al interior de $S_{2(N_0-n)}^{\sigma_n}$, el cual es puramente difusivo. El segundo término representa el incremento de la probabilidad de estar en $S_{2(N_0-n)}^{\sigma_n}$ producto de los procesos de aniquilación en los estados que poseen más partículas. Mientras que el tercer término representa el decrecimiento de la probabilidad de estar en $S_{2(N_0-n)}^{\sigma_n}$ producto de los procesos de aniquilación en $S_{2(N_0-n)}^{\sigma_n}$.

Luego, si escribimos

$$P(\psi, t) = \begin{cases} P_{2(N_0-n)}^{\sigma_n}(\{X_i\}_{i \in \sigma_n}, t) & \text{if } \psi \in S_{2(N_0-n)}^{\sigma_n}, \\ P_0(t) & \text{if } \psi \in S_0, \end{cases}$$

debemos dar una expresión para la probabilidad de transición en función de la posición de las partículas. En efecto, si consideramos el estado $\psi \in S_{2(N_0-n)}^{\sigma_n}$, donde las partículas se encuentran en $\{X_i\}_{i \in \sigma_n}$, y el estado $\phi \in S_{2(N_0-n-1)}^{\sigma_{n+1}}$ con $\sigma_{n+1} = \sigma_n - \{i_{j-1}, i_j\}$ (y $\{i_{j-1}, i_j\} \subset \sigma_n$), donde las partículas se encuentran en $\{\bar{X}_i\}_{i \in \sigma_{n+1}}$, entonces

$$w(\psi | \phi) = W(X_{i_{j-1}} - X_{i_j}) \prod_{i \in \sigma_{n+1}} \delta(X_i - \bar{X}_i),$$

donde W es la misma función que en la interacción de un solo par. El segundo factor de cuenta de que, cuando dos partículas se aniquilan mutuamente, el sistema va a un estado donde el resto de las partículas se encuentran en las mismas posiciones que ocupaban antes de que ocurriera la aniquilación. Luego, la ecuación maestra se descompone en la jerarquía

$$\begin{aligned} \partial_t P_{2N_0}^{\sigma_0} &= \left(\sum_{i=1}^{2N_0} \partial_{X_i X_i} - \sum_{i=2}^{2N_0} W(X_i - X_{i-1}) \right) P_{2N_0}^{\sigma_0} \\ &\vdots \\ \partial_t P_{2(N_0-n)}^{\sigma_n} &= \sum_{i \in \sigma_n} \partial_{X_i X_i} P_{2(N_0-n)}^{\sigma_n} \\ &\quad - \sum_{i_j \in \sigma_n - \left\{ \min_{i \in \sigma_n} (i) \right\}} W(X_{i_j} - X_{i_{j-1}}) P_{2(N_0-n)}^{\sigma_n} \\ &\quad + \sum_{\sigma_{n-1} \in \Xi_{n-1}^{\sigma_n} \Omega} \int dY dZ W(Y - Z) P_{2(N_0-n+1)}^{\sigma_{n-1}}(\{X_i\}_{i \in \sigma_{n-1}} = \{X_i\}_{i \in \sigma_n} \cup \{Y, Z\}; t) \\ &\quad \vdots \\ \partial_t P_0 &= \sum_{\sigma_{N_0-1} \in \Lambda_{N_0-1}} \int dY dZ W(Y - Z) P_{2N_0-1}^{\sigma_{N_0-1}}(\{X_i\}_{i \in \sigma_{N_0-1}} = \{Y, Z\}; t), \end{aligned}$$

donde, para efectuar la sumatorias (en los términos que representan sumideros de probabilidad) se tomaron condiciones de borde de flujo nulo, o un sistema infinito ($\Omega =$

$(-\infty, \infty)$). Se puede escribir esta jerarquía para un sistema con condiciones de periódicas definiendo, por ejemplo, $i_0 = i_{2(N_0-n)} \in \sigma_n$, no obstante estos detalles no alteran de manera significativa el análisis grueso del sistema.

Luego, la probabilidad de que en el sistema hayan m pares de partículas, los cuales aún no se han auto-aniquilado, es

$$Q_m(t) = \sum_{\substack{\sigma_{N_0-m} \\ \in \Lambda_{N_0-m}}} \int_{\Omega} P_{2m}^{\sigma_{N_0-m}} \prod_{i \in \sigma_{N_0-m}} dX_i,$$

de modo que, el número promedio de pares kink-antikinks es

$$N(t) = \sum_{m=1}^{N_0} m Q_m(t).$$

Un calculo exacto del número de pares N , para un modelo dado de la probabilidad de transición W , es bastante difícil de hacer, no obstante, podemos hacer ciertas observación sobre su comportamiento asintótico. Claramente, para $t \gg 1$, N no puede depender del número inicial de pares N_0 , si en un instante, $t = t_0$, el sistema tiene N_0 , esto bien puede corresponder al instante inicial, como a un punto intermedio de su evolución. Esto puede sonar contradictorio con pretender establecer un comportamiento asintótico para N , puesto que $t \sim \infty$ es un instante tan arbitrario como el inicial. Lo que ocurre es que, dado que la incógnita de la ecuación maestra es una probabilidad condicional, ésta debe ser resuelta suponiendo una condición inicial determinista (como en el caso de un par). Luego, transcurrido un tiempo largo, una realización dada del proceso, puede tener un número cualquiera de pares (con cierta probabilidad, por supuesto), en cualquier posición. Lo que nos da, el número N , es el promedio para, en principio, infinitas realizaciones (en la práctica sólo un número grande). Cuando hablamos del comportamiento asintótico, nos referimos a un momento en que las posibles realizaciones del proceso estén tan desordenados entre si, que se haya perdido la memoria de la condición inicial que las engendro (que ocurra esta pérdida de memoria es bastante plausible en un proceso markoviano como este).

Entonces, los Q_m , con m grande, no debiesen jugar el comportamiento asintótico del número de pares, de manera que si el sistema parte con un número $N_0 + 1$ de pares, N debiese tener el mismo comportamiento que él que tendría si hubiésemos partido con N_0 . Por ejemplo, en la figura 3.4 se muestran los resultados para una simulación numérica 4 partículas brownianas, las cuales, si se encuentran a una distancia inferior a un rango $\delta \ll 1$, se aniquilan con probabilidad 1, los gráficos son promedios para 2000 realización. En el gráfico 3.4.b se muestra Q_4 , el cual decae rápidamente, en un tiempo breve, en el gráfico 3.4.c se muestra Q_2 , el cual, mientras Q_4 decae, crece, para luego exhibir el mismo comportamiento que en el caso de un solo par, en el gráfico 3.4.a se muestra N . O sea, dado el violento decaimiento de la probabilidad de tener dos pares, el comportamiento asintótico de N corresponde al de un solo par (Q_2), el cual, como ya lo habíamos discutido en el parágrafo, es $N \sim t^{-1/2}$. Luego, razonando de manera inductiva, podemos inferir que, independientemente de cuantos pares tenga el sistema, el número de ellos decae con la ley

$$N \sim t^{-1/2}. \tag{3.3.1}$$

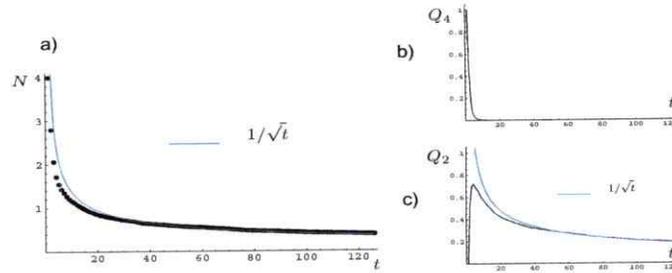


Fig. 3.4: Promedio sobre 2000 realizaciones, para un sistema de 4 partículas ($\delta = 0,1$), donde se midió a) N , b) Q_4 y c) Q_2 .

Esta inducción podría llevar al error de pensar que el comportamiento asintótico de N corresponde única y exclusivamente al de Q_2 , el cual, por el resultado del párrafo anterior, es trivialmente $N \sim t^{-1/2}$. Si bien esto es correcto para tiempos muy grandes, el régimen $N \sim t^{-1/2}$ se alcanza mucho antes que Q_2 domine la dinámica. En efecto, en la figura 3.5 se muestran los resultados de una simulación numérica de un sistema formado por 100 partículas brownianas, las cuales, si se encuentran a una distancia inferior a un rango $\delta \ll 1$, se aniquilan con probabilidad 1, los gráficos corresponden a un promedio de 400 realizaciones. Del gráfico 3.4.a se ve que, claramente, el número de pares decae con la ley (3.3.1), no obstante, en los gráficos 3.4.b, 3.4.c, 3.4.d y 3.4.e, donde se muestran Q_{100} , Q_{14} , Q_8 y Q_2 respectivamente, se ve que el sistema está lejos de entrar en el régimen en que la dinámica este regida por Q_2 . En efecto, esta cantidad recién empieza a crecer, en el ultimo tramo de la medición. Esta inducción debiese entenderse, más bien, en el sentido que comentábamos en el párrafo anterior, de que si juntamos dos sistemas, que decaen con la misma ley, el sistema resultante debe decaer con esta ley.

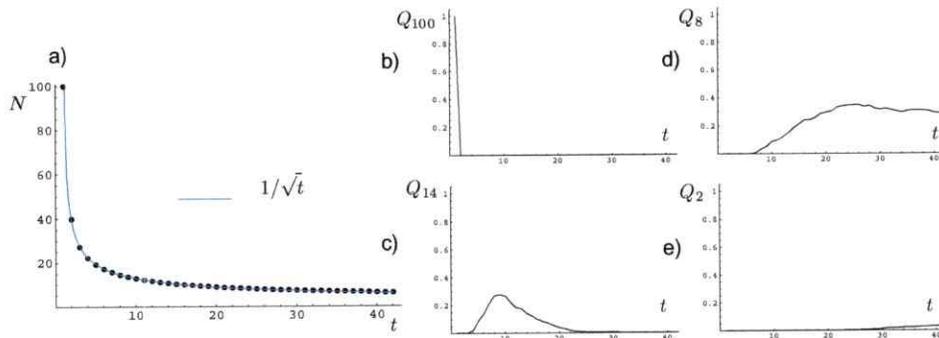


Fig. 3.5: Promedio sobre 400 realizaciones, para un sistema de 100 partículas ($\delta = 0,1$), donde se midió a) N , b) Q_{100} , c) Q_{14} , d) Q_8 y e) Q_2 .

Resultado numérico en la ecuación (3.1.5): Hasta el momento nos hemos concentrado en el modelo del gas de partículas brownianas con un proceso de aniquilación. No obstante, este gas pretende modelar el proceso de coarsening en (3.1.5), donde hemos hecho muchas

aproximaciones como despreciar tanto la interacción determinista entre un kink y un antikink, como los procesos de creación de pares. En el figura 3.6 se muestra los resultados de un simulación numérica de (3.1.5), concretamente el número promedio de defectos (se midió el número de ceros de u), para 100 realizaciones. Se ve que la ley (3.3.1) describe bastante bien el comportamiento de esta variable (línea azul), también se probó un ajuste con la ley (3.2.5), el cual funciona mejor cerca del origen (t chico), lo cual evidencia correcciones de orden $\mathcal{O}(t^{-3/2})$.

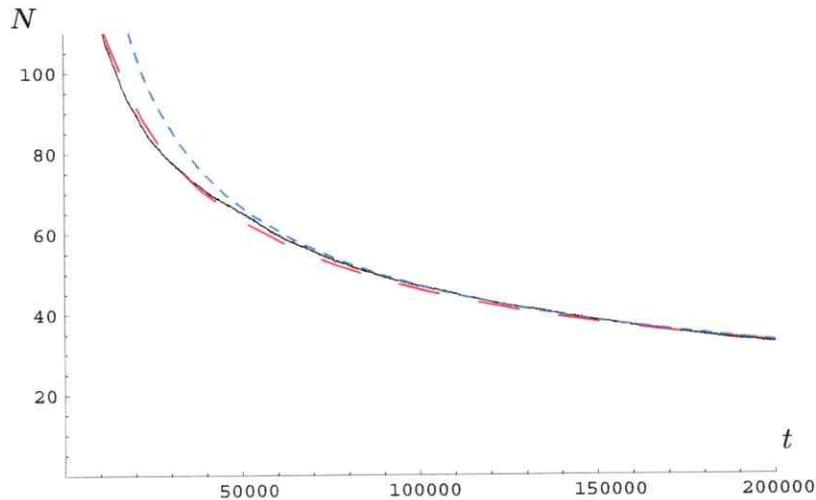


Fig. 3.6: Número de defectos, en función del tiempo, para la ecuación (3.1.5), con $\eta = 0,3$ (línea negra), en un promedio de 100 realizaciones. En azul un ajuste con la ley (3.3.1), y en rojo un ajuste con la ley (3.2.5).

De modo que, los procesos de transporte de los defectos son esencialmente difusivos (como la habíamos supuesto) y los procesos de creación despreciables. Lo último, claro está, sólo en el régimen de ruido débil, cuando empezamos a incrementar la intensidad del ruido, esta situación cambia, como veremos a continuación.

3.4. CREACIÓN VERSUS ANIQUILACIÓN: RESONANCIA ESTOCÁSTICA

A medida que incrementamos la intensidad del ruido, los procesos de transporte de defectos se hacen más ágiles, causando que el proceso de coarsening se vuelva más eficiente ($N \sim (\eta t)^{-1/2}$). No obstante, también incrementamos la probabilidad de que las fluctuaciones creen, espontáneamente, un nuevo par kink-antikink, lo cual conspira contra la eficiencia del proceso de coarsening. Luego, a medida que el ruido se hace más intenso, estos dos efectos empiezan a competir.

Numéricamente se observa que, cuando la intensidad del ruido es pequeña o moderada, el coarsening se hace más eficiente, a medida que la vamos incrementamos. Pero,

al pasar un intensidad umbral, el coarsening se empieza a tornar más lento, hasta ser totalmente destruido por el ruido. En efecto, en el gráfico 3.7, se muestra la cantidad $1/N$, en un tiempo dado, en función de la intensidad del ruido, lo cual constituye un medida de que tan eficiente es el coarsening. Para cada intensidad η , que se midió, el sistema partió de la misma condición inicial.

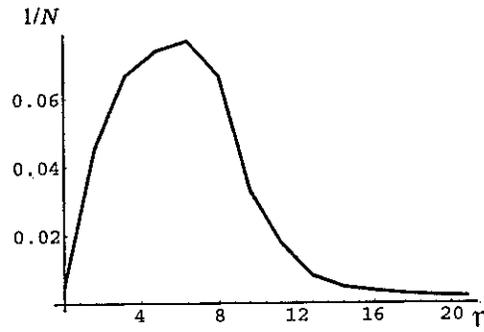


Fig. 3.7: Resonancia estocástica.

De modo que, existe un valor optimo de la intensidad del ruido, para el cual el coarsening es más eficiente, en este sentido podríamos hablar de un resonancia estocástica.

Capítulo 4

FRENTE QUE CONECTAN ROLLOS CON UN ESTADO UNIFORME

4.1. INTRODUCCIÓN

Con ya lo habíamos comentado en el capítulo II, cuando consideramos un frente, en un sistema unidimensional, que conecta un estado uniforme con un patrón, este sufre un bloqueo, i.e. no se propaga en toda una región de parámetros, la región de bloqueo. Esto se debe a que, en el sistema estacionario, asociado a un sistema unidimensional, una órbita heteroclina que conecte un punto hiperbólico con una órbita periódica es estructuralmente estable si dicho sistema es reversible (i.e. el espacio es isótropo). Cuando consideramos dos dimensiones espaciales extendidas estos argumentos geométricos no son directamente exportables, aca el sistema estacionario es una ecuación en derivadas parciales, por lo cual no podemos aplicar la teoría de sistemas dinámicos ordinarios para estudiar sus propiedades.

En ciertos modelos unidimensionales simples, también es posible realizar una teoría dinámica para estudiar el fenómeno de bloqueo, basada en el hecho de que un frente es una solución tipo partícula. En efecto, consideraremos el modelo de Swift-Hohemberg subcrítico

$$\partial_t u = \varepsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2)^2 u, \quad (4.1.1)$$

donde $u(x, t)$ es el parámetro de orden. Este modelo, propuesto en el estudio de la inestabilidad convectiva en fluidos (ver ref. [4]), es de codimensión 3, i.e. necesitamos que los tres parámetros $\nu \sim q^2 \sim \varepsilon^{1/2}$ sean pequeños, con $u \sim \varepsilon^{1/4}$, $\partial_t \sim \varepsilon$ y $\partial_x \sim \varepsilon^{1/4}$, para que tenga validez cuantitativa. No obstante, en orden de realizar una separación de escala, entre el patrón exhibido por este modelo, y el defecto que nos proponemos estudiar, supondremos, de aquí en adelante $q \sim \mathcal{O}(1)$ (manteniendo $\nu \sim \varepsilon^{1/2}$), este es un modelo matemático prototipo que exhibe el fenómeno que estamos interesados en estudiar.

Luego, la solución uniforme $u = 0$ sufre una inestabilidad espacial, de hecho, si tomamos la perturbación $u = \delta e^{ikx + \lambda t}$ en el espacio de Fourier (con $\delta \ll 1$), obtenemos que el espectro de esta solución tiene la forma

$$\lambda(k) = \varepsilon - (k^2 - q^2)^2,$$

de modo que, para $\varepsilon = 0$ el modo con número de onda q es linealmente marginal, mientras que el resto es estable, si $\varepsilon > 0$ existe un infinidad de modos, con un número

de onda en torno a q , que son linealmente inestables. Numéricamente se observa que, tras esta inestabilidad, el sistema exhibe la formación de un patrón (ver fig. 4.1.a), esta estructura periódica muestra histéresis, i.e. persiste en $\varepsilon < 0$, por lo cual la bifurcación es subcrítica. De modo que existe un región de parámetros en la cual coexisten el patrón con el estado uniforme $u = 0$, por lo que esperaríamos observar frentes que conecten estas dos soluciones estables. De hecho, dentro de la región de coexistencia existe un subregión en la cual se observan frentes estacionarios (ver fig. 4.1.b), la cual corresponde a la región de bloqueo.

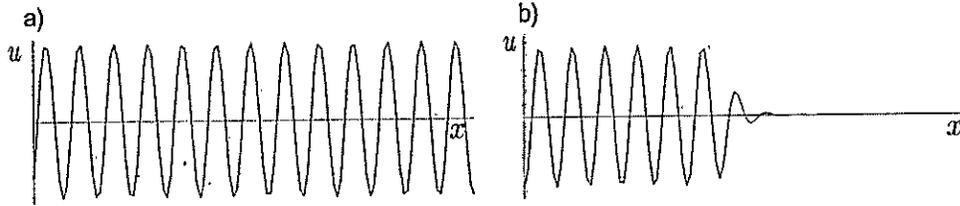


Fig. 4.1: Simulación numérica del modelo (4.1.1), aquí se muestra a) el patrón exhibido por esta ecuación, para $\varepsilon = 0,1$, $\nu = 1$ y $q = 0,7$, donde se tomaron condiciones de borde periódicas, y b) un frente bloqueado, entre el patrón y el estado uniforme, para $\varepsilon = -0,16875$, $\nu = 1$ y $q = 0,7$, donde se tomaron condiciones de flujo nulo.

Cerca de la inestabilidad, $|\varepsilon| \ll 1$, la amplitud del patrón es pequeña $\mathcal{O}(\nu^{1/2})$. Puesto que aca, los modos inestable tienen un longitud de onda muy cercana a q , $\lambda > 0$ implica que $|k - q| < \varepsilon^{1/2}/2q$, mientras que la dinámica del modo más inestable ($q = k$) tiene un tiempo característico $\lambda^{-1} = \varepsilon^{-1}$, i.e. muy lento, podemos introducir el ansatz

$$u = \sqrt{\frac{3\nu}{10}} \left(A \left(T = \frac{9\nu^2 t}{10}, X = \frac{3\nu x}{2q\sqrt{10}} \right) e^{iqx} + c.c. \right) + \nu^{5/2} w_1 + \nu^{9/2} w_2 + \dots$$

donde $w_n(x, T)$ son pequeñas correcciones que dan cuenta de los efectos anarmónicos (la solución patrón exacta no es una función trigonométrica). Entonces, introduciendo este ansatz en el modelo (4.1.1), obtenemos, al orden $\mathcal{O}(\nu^{5/2})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}w_1 = & (-\partial_T A + \mu A + |A|^2 A - |A|^4 A + \partial_{XX} A) e^{iqx} \\ & + \frac{A^3}{3} \left(1 - \frac{3}{2} |A|^2 \right) e^{3iqx} - \frac{A^5}{10} e^{5iqx} + c.c. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

con $\mathcal{L} = (9\sqrt{3}/10\sqrt{10}) (\partial_{xx} + q^2)^2$ y $\mu = 10\varepsilon/9\nu^2 \sim \mathcal{O}(1)$. Claramente $\ker[\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger] = \{e^{\pm iqx}\}$, luego, la condición de solubilidad más simple de esta ecuación, se obtiene de la asunción clásica de la teoría de multi-escalas (ver ref. [29]), que consiste en tomar las escalas x y X como variables independientes, i.e.

$$\partial_T A = \mu A + |A|^2 A - |A|^4 A + \partial_{XX} A. \quad (4.1.3)$$

Esta ecuación de amplitud tiene las soluciones uniformes: $A = 0$, que representa a $u = 0$, y es estable sólo para $\mu < 0$; y

$$|A_\pm| = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\mu} \right)},$$

las cuales aparecen por saddle-node en $\mu = -1/4$, representando un patrón estable de amplitud A_+ y número de onda q , y un patrón inestable de amplitud A_- y número de onda q , el cual colisiona con $A = 0$ en $\mu = 0$, desestabilizandola. En la figura 4.2 se ilustra el diagrama de bifurcaciones descrito.

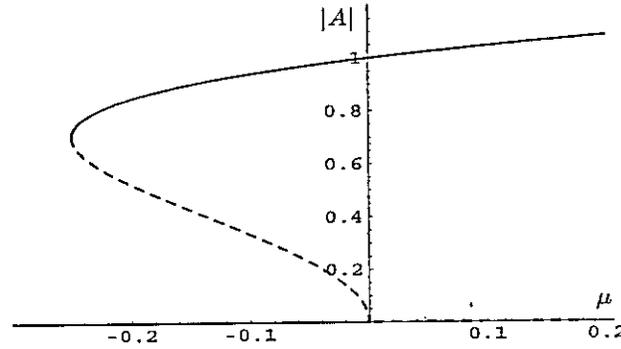


Fig. 4.2: Diagrama de bifurcaciones de la ecuación de amplitud (4.1.3). Las líneas continuas representan soluciones uniformes estables, mientras que las quebradas, soluciones inestables.

Este sistema es variacional, i.e. minimiza la energía libre

$$\mathcal{F}[A, A^*] = \int \left\{ |\partial_X A|^2 - \mu |A|^2 - \frac{|A|^4}{2} + \frac{|A|^6}{3} \right\} dX,$$

y tiene, como solución, un frente estacionario, únicamente es el punto de Maxwell $\mu_M = -3/16$. En efecto, en coordenadas polares $A = \rho e^{i\theta}$, este frente tiene la expresión analítica

$$\rho_F^\pm = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{1 + e^{\pm\sqrt{3}(X-P)/2}}} \quad \text{y} \quad \theta_F = \phi, \quad (4.1.4)$$

donde P y ϕ son constantes arbitrarias. Fuera del punto de Maxwell esta estructura comienza a moverse de acuerdo al proceso de minimización de la energía libre.

De modo que, con una aproximación tan rudimentaria como ésta, no somos capaces de explicar el fenómeno de bloqueo. Aca, reducimos el problema de un frente que conecta una estructura periódica con un estado uniforme, a un frente que conecta dos estados uniformes, el cual no exhibe bloqueo. Puesto que, el origen del bloqueo radica en el hecho de que, cuando el sistema estacionario asociado a (4.1.1), presenta órbitas periódicas, estas aparecen en familia, por lo cual la conexión heteroclina puede ir seleccionando distintos miembros de esta familia a medida que movemos los parámetros, la ecuación de amplitud debe dar cuenta de este hecho. En (4.1.3) el patrón es aproximado por el modo de Fourier dominante, $\text{Re}[Ae^{iqx}]$, no obstante las correcciones anarmónicas a esta solución pueden dar cuenta de miembros, de la familia de órbitas periódicas, ignorados en esta aproximación, por encontrarse muy cerca del modo dominante, sobre los cuales, no obstante, se sustente la robustez de la órbita heteroclina.

De hecho, resulta sospechoso que la solución frente (4.1.4) posea dos simetrías continuas: la invarianza traslacional (P arbitrario) y la invarianza de fase (ϕ arbitrario), siendo

que el problema de partida, el modelo (4.1.1), sólo posee una, la invarianza traslacional, más la simetría discreta $u \rightarrow -u$. La aparición del patrón es en quiebre espontáneo de invarianza traslacional, por lo cual puede aparecer en cualquier posición (o con cualquier fase), más aún, esta estructura periódica es invariante a traslaciones discretas, $x \rightarrow x + 2n\pi/q$, con n entero. De modo que si desfazamos el patrón $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, debemos realizar $P \rightarrow P + 3\nu\delta\phi/2q^2\sqrt{10}$, para que esta transformación sea una transformación de simetría, e.g., tanto cambios en ϕ como en P están asociados a traslaciones en el sistema de partida, las cuales no son independientes entre si. No obstante, dada la simetría discreta que preserva el patrón, sumada a la invarianza $u \rightarrow -u$, podemos hacer cambios discretos $P \rightarrow P + 3n\pi\nu/2q^2\sqrt{10}$, sin la necesidad de variar ϕ . Luego, (4.1.3) introduce una simetría parasita, la cual no está contenida en el sistema de partida, esta falsa simetría juega un rol preponderante en la propagación del frente, pues es el modo de goldstone, asociado una traslación infinitesimal, él que adquiere dinámica fuera del punto de Maxwell. De alguna forma la solución tipo partícula (4.1.4) siente una reminiscencia del patrón, que le recuerda que no cualquier traslación es una transformación de simetría, sino, sólo aquellas que son múltiplos semienteros de la longitud de onda del patrón, i.e. una fuerza extra que da cuenta del esfuerzo que le significa al sistema nuclear un pico, la cual es responsable del bloqueo en el movimiento del frente en torno al punto de Maxwell.

Una manera muy simple de incorporar directamente las correcciones anarmónicas en la ecuación de amplitud (los armónicos superiores que posee el patrón real), y, a la vez remover la simetría parasita, es imponer que todo el lado derecho de (4.1.2) sea nulo (ver ref. [25] o [30]), i.e.

$$\begin{aligned} \partial_T A = \mu A + |A|^2 A - |A|^4 A + \partial_{XX} A \\ + \frac{A^3}{3} \left(1 - \frac{3}{2} |A|^2\right) e^{i\kappa X} - \frac{A^5}{10} e^{2i\kappa X}, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

donde $\kappa = 4\sqrt{10}q^2/3\nu \gg 1$ (pues supusimos $q \sim \mathcal{O}(1)$), de modo que estos nuevos términos oscilan rápidamente en el espacio, por ello son usualmente despreciados. Dado que, según la teoría de multi-escalas standard, son ortogonales a $\ker[\mathcal{L}^\dagger]$, los llamaremos *términos no-resonantes*. No obstante esta asunción es falsa, puesto que x y X no son variables independientes, sino dos escalas de un mismo y único espacio (es absurdo pretender que de la nada aparezcan dos espacios independientes), e.g. las variaciones espaciales de la amplitud, A , inducen que es estos términos no sean ortogonales a $\ker[\mathcal{L}^\dagger]$, aunque su proyección en este subespacio sea pequeña. Una manera de incorporar estas correcciones es mediante (4.1.5).

Luego, dado que los términos no-resonantes son pequeños, su efecto puede ser estudiado como una perturbación a la ecuación de amplitud (4.1.3). En efecto, si introducimos el ansatz

$$A = (\rho_F^\dagger(X - P(T)) + \delta\rho(X, P)) e^{i\delta\theta(X, P)},$$

en (4.1.5), cerca del punto de Maxwell $\mu = \mu_M + \delta\mu$, con $\delta\mu \sim \dot{P} \ll 1$. Haciendo uso del modo de goldstone asociado a (4.1.4), obtenemos la condición de solubilidad, para $\delta\rho$, al orden dominante $\mathcal{O}(e^{-2\pi\kappa/\sqrt{3}})$

$$\dot{P} = \gamma - \Gamma \cos(\kappa P), \quad (4.1.6)$$

con

$$\gamma = \frac{8\delta\mu}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad \Gamma = \frac{2\pi\kappa^3}{3 \sinh(2\pi\kappa/\sqrt{3})}.$$

Esta ecuación, para $\gamma < \Gamma$, posee infinitos puntos de equilibrio $\cos(\kappa P_{eq}) = \gamma/\Gamma$, que se van alternando entre atractores y repelores. Luego, en esta región de parámetros, que corresponde a la región de bloqueo, la posición del frente queda inmóvil en alguno de estos infinitos equilibrios estables, lo cuales están equiespaciados, y su distancia corresponde al la mitad de la longitud de onda del patrón. Fuera de la región de bloqueo, $\gamma > \Gamma$, todos estos puntos desaparecen por saddle-node, y el frente se propaga con una velocidad periódica, de modo que el estado extendido más favorable energéticamente invade al otro.

Sin embargo, estos atractores no son equivalentes, de hecho, si escribimos $\dot{P} = -\partial U/\partial P$, tenemos que

$$U = -\gamma P - \frac{\Gamma}{\kappa} \sin(\kappa P),$$

luego, para $\gamma < 0$, mientras más grande sea el P_{eq} estable, es más favorable energéticamente el atractor; en el caso contrario, $\gamma > 0$, ocurre la situación inversa. Sólo en el punto de Maxwell, $\gamma = 0$, todos los equilibrios estables son equivalentes energéticamente, i.e. fuera del punto de Maxwell, alguno de los dos estados extendidos es más favorable; pero no invade el espacio pues debe sortear cierta barrera de nucleación para poder propagarse, lo que bloquea su movimiento.

Luego, si agregamos ruido al sistema, como en el capítulo III, el defecto sentirá una fuerza estocástica extra, y (4.1.6) se transformara en una ecuación tipo Langevin (ver Apéndice C o ref. [25] o [30]),

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \varepsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2)^2 u + \sqrt{\eta} \zeta(x, t) \\ \implies \dot{P} &= -\frac{\partial U}{\partial P} + \sqrt{\eta} \xi(t), \end{aligned}$$

con $\eta = 160\sqrt{10}\bar{\eta}/27\sqrt{3}q\nu^2$, mientras que $\langle \zeta(x, t)\zeta(x', t') \rangle = \delta(t-t')\delta(x-x')$ y $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t')$ son ruidos blancos (gaussianos). De modo que, fuera del punto de Maxwell, las fluctuaciones ocasionaran que sea más probable una transición desde un atractor más energético a uno menos energético, haciendo que, en promedio, el frente se propague de modo que el estado extendido más conveniente invade el espacio (ver ref. [25] o [30]). En la figura 4.3.a se exhibe una simulación numérica de este proceso, para el modelo (4.1.1), donde el movimiento del frente se desbloquea por acción del ruido. En la figura 4.3.b se muestra este proceso para el modelo de Nagumo no-local, (2.3.1), estudiado en el capítulo II, si bien, en este caso, no es válido el esquema aproximativo que acabamos de exponer; el sistema presenta el mismo proceso de desbloqueo, i.e. este fenómeno es robusto. Notemos que, en este último caso, el ruido es capaz de excitar el mecanismo de fisión de picos, mediante el cual el frente se propaga de manera determinista, pero dentro de la región de bloqueo, osea, en general un frente bloqueado es un equilibrio metaestable, y en presencia de ruido, el frente tiende a propagarse, de acuerdo a los mecanismos propios que posea el sistema en estudio. Para que este fenómeno ocurra, debemos estar en un sistema muy lejos del equilibrio (como es el caso de la formación de patrones), pues estamos sacando energía de las fluctuaciones para convertirla en un movimiento directo, i.e. esto opera como un motor browniano.

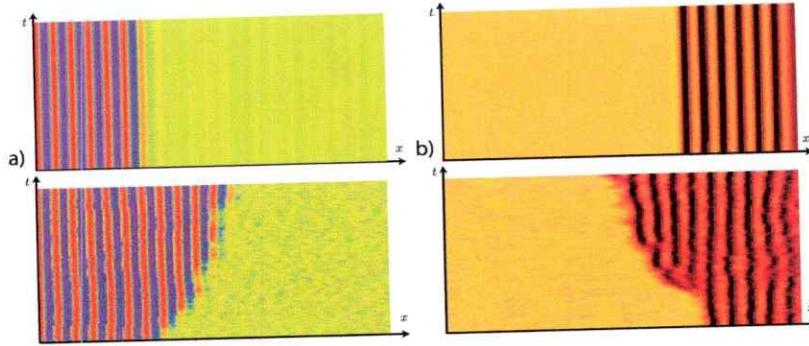


Fig. 4.3: Desbloqueo por ruido para: a) el modelo 4.1.1, con $\nu = 1$, $q = 0,7$ y $\varepsilon = -0,16$, sin ruido (arriba) y con ruido, $\bar{\eta} = 0,4$ (abajo); b) el modelo 2.3.1, para una influencia tipo salto, con $\alpha = 0,35$ y $\sigma = 2,5$, sin ruido (arriba) y con ruido (abajo).

Por lo cual, tanto los patrones localizados al igual que los dominios localizados, son estructuras metaestables, que perduran por algún tiempo, pero son finalmente destruidas por el ruido.

Notemos que la región de bloqueo, $\gamma < \Gamma$, es extremadamente pequeña, $\delta\mu \sim \mathcal{O}(e^{-2\pi\kappa/\sqrt{3}})$, en este limite. Este es sólo producto de escalamiento que hicimos, que a su vez nos permitió entender analíticamente el fenómeno de bloqueo, mediante un método perturbativo. Fuera de este limite particular el comportamiento es cualitativamente similar, aca, eso si, la región de bloqueo tiene un tamaño arbitrario (depende del sistema en estudio), y de orden $\mathcal{O}(1)$, en general. En la literatura se atribuye este fenómeno, y la falla del método de ecuaciones de amplitud para explicarlo, a un efecto no adiabático (ver ref. [23]), puesto que el tamaño del defecto es del orden de la longitud de onda del patrón. Si bien en el caso más general (no suponiendo nada pequeño) esto es así, en el limite que acabamos de estudiar esto es falso, pues el tamaño del defecto (4.1.4) si es mucho mayor que la longitud de onda del patrón. Esto puede parecer contradictorio con lo que se observa en las simulaciones numéricas del modelo (4.1.1), lo que ocurre aquí es que estamos fuera de este limite muy particular. Aca la región de bloqueo es exponencialmente pequeña, por lo que resulta natural que el método de multi-escalas prediga que, a primer orden, es un punto, son las correcciones superiores las que nos dicen que es un objeto de dimensión superior en el espacio de parámetros. Más aún, puesto que la deducción de la ecuación de amplitud pasa por una expansión polinomial en algún parámetro pequeño, $\xi = \nu^{1/2}$ en nuestro caso, nunca vamos a poder atrapar un fenómeno exponencialmente pequeño, como el bloqueo, mediante la implementación convencional de este método, pues la serie de potencia, de e^{-C/ξ^2} , en torno a $\xi = 0$, es exactamente cero (osea, no hay bloqueo en la corrección w_1, w_2, w_3, \dots , se pierde a todo orden). Es por esto que, para explicar el bloqueo, mediante una ecuación de amplitud, debe recurrir a una estrategia un tanto tosca, como es la inclusión directa de los términos no resonantes.

Resulta natural preguntarse que ocurre con este fenómeno en un sistema de bidimensional, donde, por lo demás, se realiza la mayor parte de los experimentos en formación de patrones. La estructura más similar al patrón unidimensional, aquí estudiado, son los

rollos (ver ref. [4]), donde el pico unidimensional se extiende uniformemente en la nueva dimensión espacial incorporada (el pico se transforma en un rollo). No obstante, la incorporación de esta nueva dimensión espacial, trae consigo nuevos fenómenos, haciendo que el bloqueo pueda desaparecer, como se mostrara a continuación.

4.2. FRENTE QUE CONECTAN ROLLOS CON UN ESTADO UNIFORME: CASO ISOTRÓPICO (DESBLOQUEO POR ZIG-ZAG)

Consideremos la extensión isotrópica del modelo (4.1.1), a dos dimensiones espaciales

$$\partial_t u = \varepsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\nabla^2 + q^2)^2 u, \quad (4.2.1)$$

con $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$, $u \sim \nu^{1/2}$, y seguiremos pensando que $\nu \sim \varepsilon^{1/2} \ll 1$, pero $q \sim \mathcal{O}(1)$. Esta extensión tiene como solución patrones conformados por rollos, los cuales tienen una estructura de bifurcaciones muy similar a la del patrón unidimensional estudiado en el parágrafo anterior. De hecho, el espectro de la solución uniforme $u = 0$ es

$$\lambda(k_x, k_y) = \varepsilon - (k^2 - q^2)^2, \quad (4.2.2)$$

donde $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. De modo que, para $\varepsilon > 0$, esta solución es inestable, y el sistema exhibe la formación de rollos. No obstante, dado la isotropía del sistema, los rollos pueden aparecer con una orientación. Espontáneamente, el sistema selecciona localmente una orientación, dando como resultado dominios en los cuales el sistema se encuentra en un estado conformado por rollos, con alguna orientación determinada (ver fig. 4.4.a). En algunos casos el sistema entra en una dinámica de dominios, tras la cual termina en un estado conformado por rollos con una orientación fija en todo el espacio (ver fig. 4.4.b). En otros casos se observa la formación de una estructura laberíntica, que, numéricamente, aparenta ser estable.

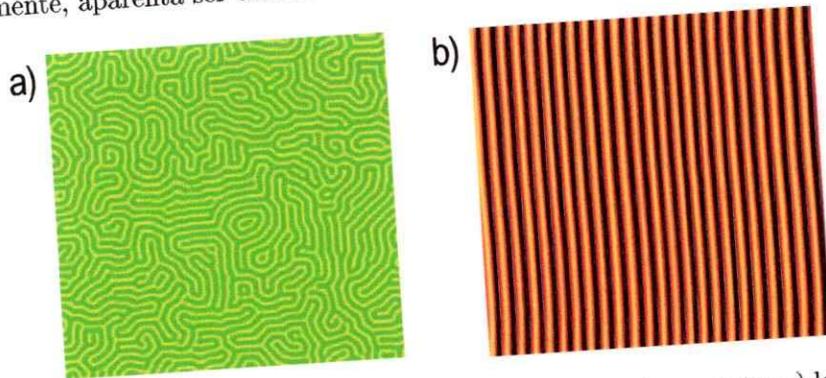


Fig. 4.4: Simulación numérica isoespectral del modelo (4.2.1), aquí se muestra a) la generación espontánea de dominios con rollos orientados en distintas direcciones, para $\varepsilon = 0,234$, $\nu = 1$ y $q = 1$, y b) rollos bien orientados para $\varepsilon = 0,15$, $\nu = 1$ y $q = 0,7$.

De todas maneras, ya sea por la evolución natural del sistema, o manipulando la condición inicial, numéricamente se observa que existen rollos estables, los cuales exhiben histéresis, i.e. persisten en $\varepsilon < 0$. Luego, al igual que en el caso unidimensional, hay una región de coexistencia en la cual pueden haber frentes que conecten el rollo con el estado uniforme $u = 0$.

Si colocamos una de estas estructuras, i.e. una interface plana que separa el espacio en dos regiones: una en la cual el sistema se encuentra en el estado uniforme $u = 0$; y la otra en rollos cuya orientación es paralela a la interface (ver fig. 4.5). La simulación numérica de este objeto muestra que sufre una inestabilidad transversal, i.e. en la interface, primeramente plana, aparece una longitud de onda bien definida (ver fig. 4.5.a). Tras lo cual se forma una estructura tipo zigzag, esto es, pendientes bien definidas, separadas por vértices prácticamente puntuales, cúspides y valles (ver fig. 4.5.b o 4.5.c) que podríamos identificar como partículas y antipartículas. En efecto, el tramo ulterior de la dinámica consiste en una coarsening, en el cual cúspides y valles se van aniquilando mutuamente, incrementando el largo promedio en que la interface se encuentra con una sola pendiente.

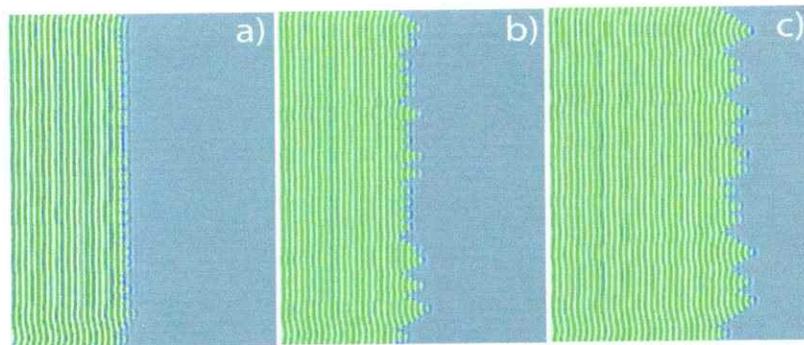


Fig. 4.5: Inestabilidad transversal de la interfase plana, y formación del zigzag. Las figuras corresponden a una simulación de (4.2.1), para $\varepsilon = -0,16$, $\nu = 1$ y $q = 0,9$, con el tiempo creciendo de izquierda a derecha.

Cave señalar que, debido a que la simulación de (4.2.1) se realizó utilizando un método iso espectral, se tienen condiciones de borde periódicas en todos los confines del sistema. Cuando aquí hablamos del frente, lo hacemos de un modo idealizado, pensando que la interfase divide dos regiones seminfinitas. No obstante, la estructura real simulada son dos frentes muy alejados uno del otro, en la figura 4.5 se muestra sólo la región del espacio donde se encuentra uno de estos objetos.

Luego, resulta tentador tratar de describir este proceso con los métodos desarrollados en esta tesis, i.e. reducir el sistema de cúspides y valles a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, en los que estos entes jueguen el rol de partículas y antipartículas. No obstante, veremos que esta reducción no es posible de hacer en este caso.

Primero que nada veamos la universalidad de este proceso, i.e. su descripción mediante ecuaciones de amplitud. Si perdiera de generalidad supondremos que el rollo se encuentra orientado en la dirección x (i.e. $\vec{k} = (q, 0)$), luego, cerca de la inestabilidad $|\varepsilon| \ll 1$, los números de onda críticos, en la dirección paralela al rollo, escalan de la

misma manera que en el caso unidimensional, $|k_x - q| < \varepsilon^{1/2}/2q$, pero, por tratarse este patrón de un quiebre espontáneo de la simetría rotacional, los números de onda críticos perpendiculares al rollo escala de una manera diferente, de hecho, del espectro (4.2.2) concluimos que $k_y < \varepsilon^{1/4}$ para $k_x \sim q$, el tiempo característico con que estos modos inestables evolucionan sigue siendo de orden ε^{-1} , luego, tomamos el ansatz

$$u = \sqrt{\frac{3\nu}{10}} \left(A \left(T = \frac{9\nu^2 t}{10}, X = \frac{3\nu x}{2q\sqrt{10}}, Y = \sqrt{\frac{3\nu}{\sqrt{10}}} y \right) e^{iqx} + c.c. \right) + \nu^{5/2} w_1 + \nu^{9/2} w_2 + \dots$$

é introduciéndolo en (4.2.1), y procediendo de la manera usual, obtenemos la condición de solubilidad clásica (suponiendo las escalas x y X , independientes), al orden $\mathcal{O}(\nu^{5/2})$,

$$\partial_T A = \mu A + |A|^2 \dot{A} - |A|^4 A + (\partial_X - i\partial_{YY})^2 A, \quad (4.2.3)$$

con $\mu = 10\varepsilon/9\nu^2$. Esta ecuación de amplitud es una versión subcrítica de la famosa ecuación de Newell-Whitehead-Segel (ver ref. [4]), donde la anisotropía del operador $(\partial_X - i\partial_{YY})^2$ da cuenta del quiebre en la simetría rotacional que significa la aparición del rollo. Este modelo también es variacional, i.e. su dinámica consiste en la minimización de la energía libre

$$\mathcal{F}[A, A^*] = \int \left\{ |(\partial_X - i\partial_{YY}) A|^2 - \mu |A|^2 - \frac{|A|^4}{2} + \frac{|A|^6}{3} \right\} dX dY.$$

Luego, (4.2.3) tiene las mismas soluciones uniformes que (4.1.3) y comparten la misma estructura de bifurcaciones (ver fig. 4.2). En partículas, el frente (4.1.4) también es una solución exacta de (4.2.3), en el punto de Maxwell $\mu_M = -3/16$, la cual representa una interface plana entre un rollo y el estado uniforme $u = 0$. Esta solución sufre la misma inestabilidad que el frente plano en el modelo (4.2.1), en efecto, en la figura 4.6 se muestra una simulación numérica de la ecuación (4.2.3), en el punto de Maxwell, tomando como condición inicial el frente (4.1.4) más un poco de ruido. Aca se empleo un método de diferencias finitas, lo que nos da más libertad en la elección de las condiciones de borde, en la dirección Y (paralela a la interfase plana) se tomaron condiciones de borde periódicas, mientras que en X (dirección ortogonal a la interfase plana) se tomo flujo nulo.

Luego la ecuación de amplitud (4.2.3) presenta la misma inestabilidad, i.e. primero aparece una longitud de onda bien definida, después de la cual, la interfase forma una estructura tipo zigzag, la cual comienza un proceso de coarsening, en el cual las cúspides y valles se van auto-aniquilando.

De modo que, esta inestabilidad de zigzag es universal, en el sentido de que cualquier modelo que tenga la misma estructura de bifurcaciones que (4.2.1), y comparta las mismas simetrías, debiese exhibir el mismo comportamiento. Notemos que aquí no hemos considerado los términos no-resonantes, esto se debe a que, la simetría parasita introducida por (4.2.3), no juega ningún rol en la desestabilización de la interfase plana, aca el principal ingrediente es el quiebre en la simetría rotacional. En efecto, en la figura 4.7, se muestra una simulación numérica de la ecuación de amplitud, incluyendo estas correcciones, el proceso es esencialmente el mismo, por lo cual, de aquí en adelante nos

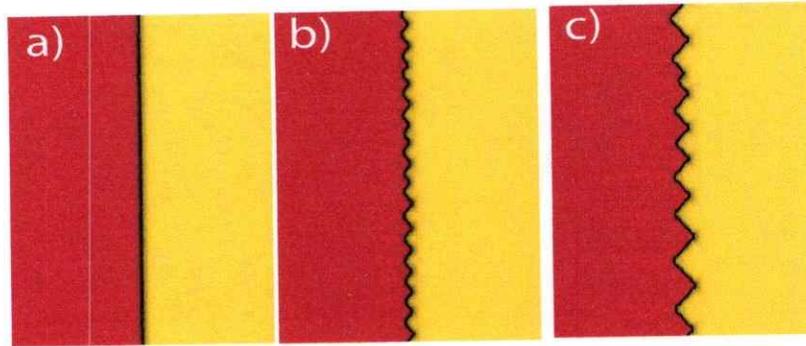


Fig. 4.6: Inestabilidad transversal de la interfase plana, y formación del zigzag, para el modelo (4.2.3), en el punto de Maxwell. El tiempo crece de izquierda a derecha.

concentraremos únicamente en (4.2.3). Claro que ésta introduce una deriva anómala, en torno al punto de Maxwell, no obstante, los aspectos esenciales de la inestabilidad están contenidos en la ecuación de amplitud (4.2.3), el resto son correcciones de orden superior.

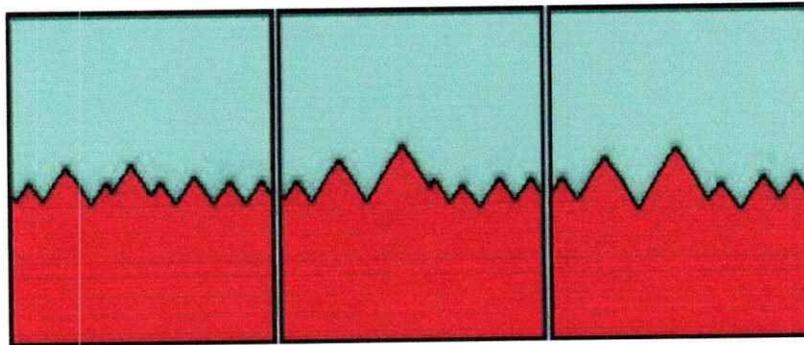


Fig. 4.7: Formación del zigzag y coarsening, para el modelo (4.2.3) más los términos no resonantes, en el punto de Maxwell. El tiempo crece de izquierda a derecha.

Cave señalar que, en ref. [31], se halla un estudio de un frente que conecta un rollo con un estado uniforme en la ecuación de Swift-Hohemberg cubica, aca la estructura de bifurcaciones es distinta y por lo tanto no es posible describir el fenómeno mediante la ecuación de amplitud (4.2.3). En este caso la interfase plana también es inestable, pero el proceso no-lineal, que sigue al desarrollo de esta inestabilidad, es distinto, observado se la formación de dedos, y no de un zig-zag con el consiguiente proceso de coarsening, e.g. en este caso la respuesta no-lineal del sistema no es capaz de saturar la inestabilidad. No obstante, en nuestro caso, por contar con una ecuación de amplitud, podemos asegurar que el proceso es universal, i.e. existe una clase infinita de modelos (que comparten la misma estructura de bifurcaciones y simetrías que (4.2.1)), los cuales exhiben la misma fenomenología.

Este tipo de inestabilidad en una interfase plana, y la formación de un zigzag, a sido observado en otros contextos, como frentes de solidificación, en crecimiento de cristales

(ver ref. [32]), o paredes de Ising en cristales líquidos nematicos (ver ref. [33]). La descripción teórica más típica de estos procesos consiste en escribir una ecuación efectiva para la posición de la interfase, que, por la invarianza traslacional del sistema, debe tener la forma $\partial_T P = J(\partial_Y P)$, o bien, escribiendo $Q = \partial_Y P$,

$$\partial_T Q = \partial_Y J(Q).$$

Típicamente, si la inestabilidad ocurre para un valor dado de los parámetros, se puede hacer una expansión en gradientes, cerca del punto en que la interfase plana se deviene inestable, dando como resultado modelos como el de Cahn-Hilliard (CH)

$$J = \partial_Y (\varepsilon Q + Q^3 - \partial_{YY} Q),$$

o generalizaciones como la ecuación de Cahn-Hilliard convectiva (CHc) (ver ref. [32])

$$J = \partial_Y (\varepsilon Q + Q^3 - \partial_{YY} Q) + \delta Q^2,$$

donde el parámetro de bifurcación $|\varepsilon| \ll 1$, i.e. debemos estar cerca de la inestabilidad para que la expansión en gradientes sea válida. La principal diferencia entre modelo CH y CHc es que, en este último, la cantidad $\int P dY$ deja de ser conservada, i.e. el área de uno de los estados extendidos crece a expensas del otro. Aca también se debe tener que $\delta \ll 1$, sino el proceso de coarsening se destruye, dando origen a una transición al caos espacio-temporal, pasando por la formación de patrones (ver ref. [34]), de hecho, en el límite $\delta \rightarrow \infty$, el modelo CHc se reduce a la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky. En este tipo de modelos la interacción de defectos está gobernada por efectos de "matching", entre el kink y el antikink (ver ref. [35] o [36]), no obstante, para el modelo CH la ley de coarsening sigue siendo logarítmica, $\langle L \rangle \sim \log(T)$ (ver ref. [35]), mientras que el modelo CHc sufre un crossover, pasando de ser $\langle L \rangle \sim \sqrt{T}$ a $\langle L \rangle \sim \log(T)$ cuando el gas de defectos está lo suficientemente diluido (ver ref. [36]).

No obstante, intentar realizar un análisis de este tipo, para (4.2.3), no es posible. Tomando como solución de base el frente (4.1.4), i.e. un ansatz de la forma $A = (\rho_F^+ (X - P(Y, T)) + \delta \rho(X, Y, P)) e^{\delta \theta(X, Y, P)}$, y efectuando una expansión en gradientes se concluye que la interfase es linealmente estable (salvo un modo neutro asociado a la invarianza traslacional), en el punto de Maxwell. Lo cual está en abierta contradicción con lo que se observa numéricamente, en efecto, en la figura 4.8 se encuentra una medición de el espectro de la función $P(Y, T)$ (línea punteada), concretamente se considero la interfase plana más una pequeña perturbación estocástica, $P = P_0 + \delta P(Y, T)$ con $\delta P \ll 1$, la cual se dejó evolucionar por un tiempo breve, de modo que el sistema estuviera en un régimen lineal $\partial_T \delta P = \mathcal{L}(\partial_Y) \delta P$, lo que se muestra en este gráfico el la transformada de Fourier $\sigma(k) = \mathcal{L}(ik)$. El criterio para discernir que el sistema estuviera en un régimen lineal fue que la función $\log(p_k(T))$ (con p_k la transformada de Fourier de δP) fuese aproximadamente lineal, luego su pendiente corresponde a $\sigma(k)$. La línea continua en 4.8 corresponde a un ajuste con un espectro tipo CH, i.e. $\sigma(k) = \alpha k^2 - \beta k^4$, el cual funciona bastante bien, salvo en el origen ($k \sim 0$), donde el espectro numérico parece ser casi plano. Cave enfatizar que para que una expansión en gradientes sea válida se requiere que muy pocos modos, cercanos al origen, sean inestables, con tiempos característicos de crecimiento muy lentos, i.e. $\sigma \ll 1$, esto claramente no ocurre en este caso. Aca la interfase es de por si inestable, osea, no hay un parámetro de control

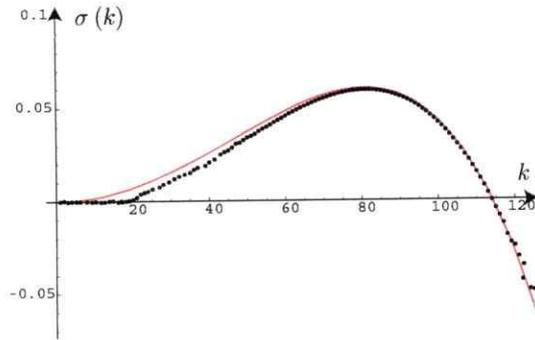


Fig. 4.8: Espectro numérico de una interfase plana, para el modelo (4.2.3), en el punto de Maxwell. Lo cual muestra que es linealmente inestable. La curva continua, en rojo, es un ajuste con un espectro tipo CH $\sigma(k) = \alpha k^2 - \beta k^4$.

de la inestabilidad (un parámetro de bifurcación, que pueda tomarse arbitrariamente pequeño), por lo cual no es tan sorprendente que este tipo de análisis fallen.

Resulta pertinente, de todas formas, mirar con más cuidado la estructura del zigzag, ver de que tipo son los kinks y antikinks que la conforman. En la figura 4.9.a se muestra la función $P(Y, T)$, mientras que en 4.9.b se muestra se derivada $Q = \partial_Y P$. En esta ultima figura se ve, que entre los defectos, la derivada Q toma un valor más o menos constante, por lo cual podemos afirmar que las pendientes de las zonas que median entre una cúspide y un valle, o un valle y una cúspide, son más o menos constantes, y de signo contrario. Por otro lado, entorno al defecto se observan oscilaciones del campo Q , en el capítulo II vimos que, si estas oscilaciones se deben al comportamiento asintótico de alguna órbita heteroclina (asociada con lo kinks), se modifica la interacción de defectos dando origen a estructuras localizadas, lo cual pararía el proceso de coarsening. No obstante, en modelos como CHc, se observan estructuras similares, las cuales, sin embargo, no guardan relación con el comportamiento asintótico de las órbitas heteroclinas asociadas con los kinks y antikinks de este modelo (que si son funciones monótonas), si no que son producto de un efecto de “matching”, aca los valores que asintóticamente conectan estas soluciones no coinciden, por lo cual, cuando colocamos dos de estos defectos juntos, el sistema se debe ajustar, lo que ocasiona estas protuberancia (ver ref. [36]), aunque en este caso, sólo se observan a un lado del defecto (y no en ambos lados como se ve en fig. 4.9.b). Si bien, esto modifica radicalmente la interacción de defectos en CHc, produciendo el crossover ya comentado, no para el proceso de coarsening.

No obstante, dado que en nuestro caso no tenemos un modelo de la forma $\partial_T P = J(\partial_Y P)$, toda esta discusión resulta un tanto bizantina, aca debemos medir directamente el proceso de coarsening. El resultado aquí también es sorprendente, en un comienzo pareciera que, el largo promedio entre cúspides y valles (en el capítulo III se explican las ideas y procedimientos en la medición de un coarsening), sigue un ley de potencia $\langle L \rangle \sim T^{0.22}$ (ver fig. 4.10), para luego acelerarse, un buen ajuste se consigue una la curva de la forma $\langle L \rangle \sim [\log(T/T_0)]^{-1}$ (ver fig. 4.10). Esta aceleración del proceso es completamente contra intuitiva y anómala, puesto que uno esperaría que a medida que el gas de defectos se va diluyendo, producto de los procesos de aniquilación, la interacción

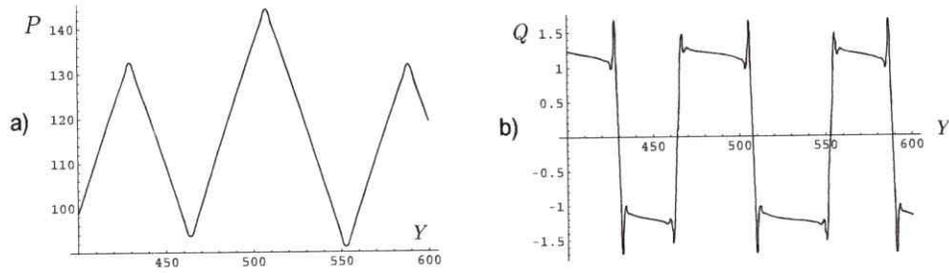


Fig. 4.9: Spline cubico de a) la interfase, y b) su derivada.

entre estos entes se debilitara, lo cual debiese desacelerar el coarsening. Lo que ocurre en este caso es que las cúspides y valles “no son soluciones tipo partículas”, si no que son parte de un proceso global que sufre el sistema como un todo, incluso lejos de la interfase.

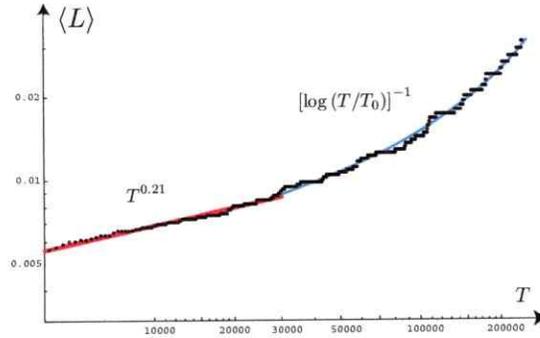


Fig. 4.10: Largo promedio, entre cúspides y valles, en función del tiempo.

En efecto, en la figura 4.11 se muestra como se van modificando $U = \text{Re}[A]$ y $V = \text{Im}[A]$ durante el proceso de coarsening (se tomo una condición inicial con $\phi = 0$, real pura), lo cual es una medida de como se modifica lo fase local del patrón durante el desarrollo de esta inestabilidad (una medición directa de la fase es complicado por el error numérico que conlleva). De hecho, en la simulación numérica directa del modelo (4.2.1) (ver fig. 4.5), se ve como, a medida que la estructura de zigzag se forma, el patrón, lejos de la interfase, va desfasandose con un zigzag similar al que presenta la interfase. Es fácil ver que, pequeñas irregularidades en la fase tiende a uniformizarse mediante mecanismos difusivos, para ello podemos introducir en (4.2.3) la perturbación $A = \rho^+ e^{i\delta\theta(X,Y,T)}$, con $\rho^+ = |A_+|$ la amplitud del patrón (i.e. estamos pensando en mantener al sistema en el estado patrón, y ver que comportamiento tienen pequeños desfases), con lo que obtenemos

$$\partial_T \delta\theta = \partial_{XX} \delta\theta - \partial_{YYYY} \delta\theta,$$

e.g. las irregularidades difunden en la dirección X e hiperdifunden en la dirección Y . Luego, en una etapa temprana del proceso, i.e. cuando tenemos una interfase prácticamente plana, salvo pequeñas irregularidades, y la fase es casi uniforme, estas pequeñas

irregularidades existan la fase en torno a ellas. Estas fluctuaciones de la fase se van difundiendo al interior del patrón, pero, producto del mismo proceso difusivo, ahora dentro del patrón, estas irregularidades en la fase empujan el proceso de coarsening en la interfase. Luego, existe un mecanismo de retroalimentación, mediante el cual la interfase inducen irregularidades en la fase, las cuales, a su vez, inducen el proceso de coarsening en la interfase. Esto explica la curiosa aceleración del coarsening, puesto que mientras más avanzado se encuentre este proceso, las irregularidades en la fase se habrán difundido a regiones más alejadas de la interfase, ocasionando que la dinámica de coarsening se vea urgida por un trozo más grande del sistema. Haciendo que el proceso sea cada vez más no-local, y por lo tanto no pueda ser descrito mediante una ecuación de la forma $\partial_T P = J(\partial_Y P)$, que presupone que toda la información relevante se encuentra entorno a la interfase, $X \sim P(Y, T)$. Cave señalar que, si proceso de coarsening se torna cada vez más no-local, el sistema sentirá los bordes mucho antes que la interfase los toque, luego, la aceleración excesiva que se observa en la etapa terminal de este proceso, quizás sea un efecto de borde.

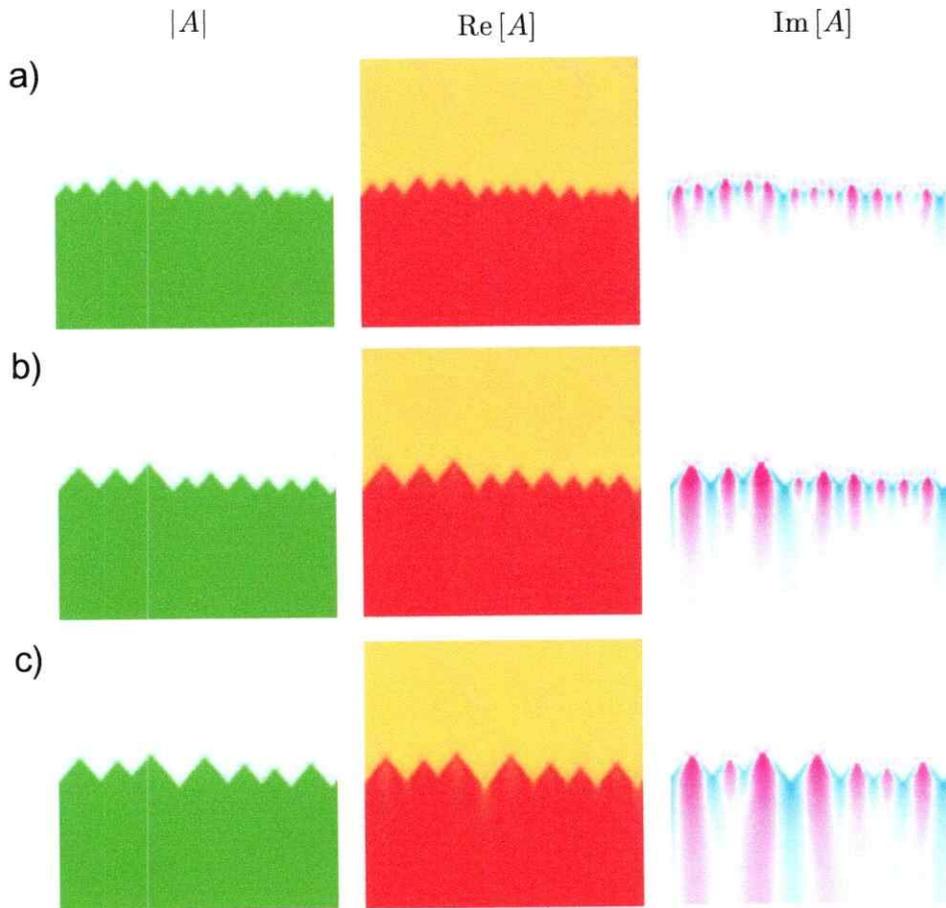


Fig. 4.11: Modulo y partes reales e imaginarias de la amplitud A . El tiempo avanza desde arriba hacia abajo.

Luego, hemos dilucidado el mecanismo que gobierna el coarsening, pero aún no hemos entendido el mecanismo que gatilla la inestabilidad, i.e. como las pequeñas irregularidades iniciales, en la interfase, son capaces de excitar la fase. En la etapa temprana del proceso (antes que se forme un zigzag bien definido), las excitaciones en la fase son entorno a la interfase, de hecho, en la construcción del espectro 4.8, supusimos localidad, i.e. que el sistema puede ser descrito por una ecuación de la forma $\partial_T \delta P = \mathcal{L}(\partial_Y) \delta P$. Si bien, esto puede resultar un poco contradictorio con lo comentado anteriormente, la coherencia que muestra el espectro 4.8, es un fuerte evidencia de que, en el régimen lineal (cuando el zigzag aún no está bien formado) ésta es una muy buena aproximación, no así en el régimen no-lineal, donde las irregularidades en la fase se han difundido lejos de la interfase.

En efecto, si consideramos la condición inicial real $A(T = T_0) = U_0 = \rho_F^+(X - P_0 + \delta P(Y, T))$, con $\delta P \ll 1$, i.e. la solución frente (4.1.4) más pequeñas irregularidades en la interfase, en un momento infinitesimalmente ulterior $T_0 + \Delta T$, la parte imaginaria de la amplitud V sufrirá una variación

$$\Delta V \approx 2\rho_F'(\partial_{YY}\delta P) \Delta T,$$

con $\rho_F' = d\rho_F/dX$, por lo tanto, esta variación es local (entorno a la interfase $\rho_F' \approx 0$ si $X \sim P$), y lo que produce la excitación inicial son las pequeñas concavidades en la interfase irregular, que actúan como "fuentes de fase", que luego se difunden a zonas lejanas al defecto. Esta variación a su vez reexcita la parte real, ocasionando que el modo de goldstone, asociado a la solución frente (4.1.4), se mueva, desatando la inestabilidad. Luego, toda la interacción entre la parte real e imaginaria de la amplitud, o entre el modulo y la fase, se produce a través del termino

$$\text{Im} [(\partial_X - i\partial_{YY})^2] = -2\partial_{XYY}$$

del operador de Newell-Whitehead-Segel. Este operador representa el quiebre espontaneo en simetría rotacional que significa la aparición de un rollo en un isotrópico, en efecto, el hecho que las curvas de nivel del espectro (4.2.2), en el plano (k_x, k_y) , sean círculos centrados en $(0; 0)$, produce que las escalas $|k_x - q| \sim \varepsilon^{1/2}$ y $k_y \sim \varepsilon^{1/4}$ sean diferentes.

Lo que ocurre, entonces, es que en las pequeñas irregularidades en la interfase, el sistema trata de formar un rollo, pero con una orientación arbitraria, que raramente coincide con la del rollo tras de él. Luego, el sistema trata de acomodarse localmente, lo que produce una perturbación en la fase (pequeñas perturbaciones en la fase, pueden interpretarse como pequeñas rotaciones del rollo). Las cuales se difunde, al interior del patrón, activando el mecanismo de retroalimentación que da origen al zigzag. De modo que, si el sistema no fuese isotrópico, y sólo admitiera rollos en una dirección determinada, esta inestabilidad no debiese ocurrir, a continuación procederemos a estudiar este caso.

4.3. FRENTE QUE CONECTAN ROLLOS CON UN ESTADO UNIFORME: CASO ANISÓTROPO (RECUPERACIÓN DEL BLOQUEO)

Consideremos ahora la extensión anisótropa del modelo (4.1.1), a dos dimensiones espaciales

$$\partial_t u = \varepsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2)^2 u + \partial_{yy} u, \quad (4.3.1)$$

donde $u \sim \nu^{1/2}$ es el parámetro de orden, y $\nu \sim \varepsilon^{1/2} \ll 1$, pero $q \sim \mathcal{O}(1)$. En este caso se tiene una difusión ordinaria en la dirección y , por lo cual, el sistema sólo admite rollos paralelos a esta dirección. En efecto, el espectro de la solución uniforme $u = 0$, adopta la forma

$$\lambda(k_x, k_y) = \varepsilon - (k_x^2 - q^2)^2 - k_y^2, \quad (4.3.2)$$

por lo cual es inestable, para $\varepsilon > 0$, pero el primer modo de Fourier, en devenir inestable, es $e^{\pm qx}$, i.e. rollos perpendiculares al eje x . La estructura de bifurcaciones de este patrón es idéntica a la del caso unidimensional o el caso isótropo. De modo que existe una zona, en $\varepsilon < 0$, en que esta estructura coexiste con un estado uniforme $u = 0$ estable, donde se pueden observar frentes entre estos dos estados extendidos.

Aca, si colocamos una interfase plana, en la misma región de parámetros en que se observa bloqueo, en una dimensión, ésta es transversalmente estable y no se propaga, i.e. se recupera el fenómeno de bloqueo observado en sistemas unidimensionales. En efecto, en la figura 4.12 se muestra la simulación una interfase inicialmente irregular, la cual converge a una interfase plana a medida que el sistema evoluciona, para luego permanecer en este equilibrio estacionario. El mecanismo con el cual se atenúan estas irregularidades aparenta ser difusivo.

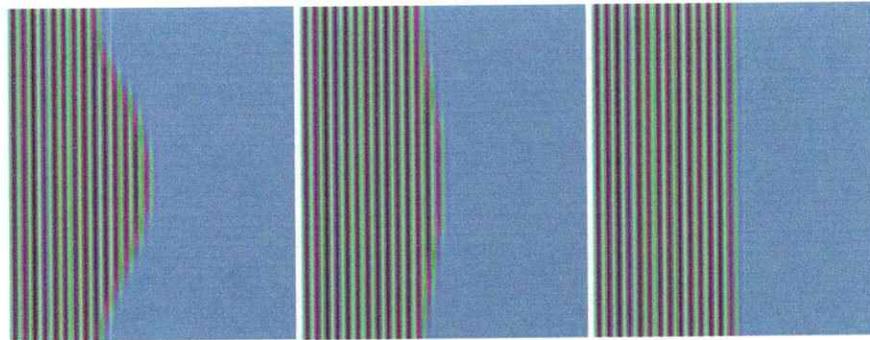


Fig. 4.12: Interfase entre un estado uniforme, y rollos, para el modelo (4.3.1). Inicialmente, la interfase tiene una forma tipo campana, la que luego, evoluciona a una forma plana, evidenciando su estabilidad transversal. El tiempo avanza de izquierda a derecha.

Luego, para escribir una ecuación de amplitud, que describa el fenómeno, notemos que, cerca de la inestabilidad $0 < \varepsilon \ll 1$, los modos críticos, en el plano (k_x, k_y) , están

contenidos en dos elipses centradas en los puntos $(\pm q, 0)$, i.e.

$$\left(\frac{k_x \pm q}{\varepsilon^{1/2}/2q}\right)^2 + \left(\frac{k_y}{\varepsilon^{1/2}}\right)^2 = 1,$$

luego, aca tanto $|k_x - q|$ como k_y escalan de la misma manera $(\varepsilon^{1/2})$, mientras que el tiempo característico con que evolucionan estos modos sigue siendo de orden ε^{-1} . Entonces introduciremos el ansatz

$$u = \sqrt{\frac{3\nu}{10}} \left(A \left(T = \frac{9\nu^2 t}{10}, X = \frac{3\nu x}{2q\sqrt{10}}, Y = \frac{3\nu y}{\sqrt{10}} \right) e^{iqx} + c.c. \right) + \nu^{5/2} w_1 + \nu^{9/2} w_2 + \dots$$

en (4.3.1), con lo cual obtenemos, al orden $\mathcal{O}(\nu^{5/2})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}w_1 = & (-\partial_T A + \mu A + |A|^2 A - |A|^4 A + \nabla^2 A) e^{iqx} \\ & + \frac{A^3}{3} \left(1 - \frac{3}{2} |A|^2 \right) e^{3iqx} - \frac{A^5}{10} e^{5iqx} + c.c. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

con $\mu = 9\varepsilon/10\nu^2$, $\nabla^2 = \partial_{XX} + \partial_{YY}$ y $\mathcal{L} = (9/10)(\partial_{xx} + q^2)^2$. Luego, la condición de solubilidad habitual de (4.3.3), nos provee la ecuación de amplitud

$$\partial_T A = \mu A + |A|^2 A - |A|^4 A + \nabla^2 A. \quad (4.3.4)$$

Ésta es la extensión más trivial de (4.1.3) a dos dimensiones, posee las mismas soluciones uniformes, y tienen la misma estructura de bifurcaciones (ver fig. refDiagBif), mientras que su dinámica consiste en la minimización de la energía libre

$$\mathcal{F}[A, A^*] = \int \left\{ |\nabla A|^2 - \mu |A|^2 - \frac{|A|^4}{2} + \frac{|A|^6}{3} \right\} dX dY.$$

Luego, (4.3.4) sólo posee un frente estacionario, del tipo (4.1.4), en el punto de Maxwell $\mu_M = -3/16$, pero en este caso, esta interfase plana es transversalmente estable. En efecto, una simulación numérica de esta solución, se muestra en la figura 4.1.4.a, tomando como condición inicial (4.1.4), pero, con una posición (P) que varía a lo largo de Y (con forma de campana), el sistema naturalmente converge a una interfase plana. Aca se uso un método de diferencias finitas, por lo cual se tomaron condiciones de borde periódicas en el eje Y , y flujo nulo en el eje X .

De modo que en este caso (4.3.4), nuevamente se pierde el fenómeno de bloqueo exhibido por (4.3.1). Aca vuelve a ser urgente la remoción de la simetría parasita introducida por (4.3.4), para una descripción cualitativa del sistema. Más aún, dado que el operador laplaciano (∇^2) es invariante rotacional, cualquier rotación del frente (4.1.4), en el plano (X, Y) , es una solución equivalente y, por lo tanto, con las mismas propiedades. Esto entra en evidente contradicción con la naturaleza anisótropa del modelo de partida (4.3.1), que sólo admite como solución rollos paralelos al eje Y . Aca un interfase que este inclinada, con respecto al eje Y , es un frente de una naturaleza totalmente diferente, puesto que cortara los rollos, ocasionando un comportamiento dinámico cualitativamente

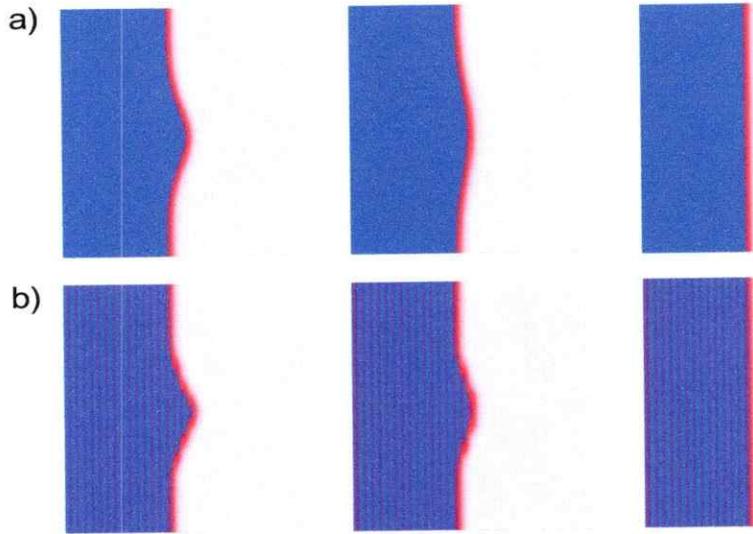


Fig. 4.13: Estabilidad transversal de una interfase plana los modelos a) (4.3.4), i.e. sin términos no resonantes, y b) (4.3.5), i.e. con términos no resonantes. El tiempo avanza de izquierda a derecha.

distinto. Luego, en este caso, más que en el caso unidimensional, nos urge emendar la ecuación de amplitud (4.3.4), pues no sólo introduce una simetría parasita, sino dos.

Procediendo de manera análoga al caso unidimensional, podemos incluir los términos no resonantes, imponiendo que el lado derecho de (4.3.3) sea nulo, i.e.

$$\begin{aligned} \partial_T A = & \mu A + |A|^2 A - |A|^4 A + \nabla^2 A \\ & + \frac{A^3}{3} \left(1 - \frac{3}{2} |A|^2 \right) e^{i\kappa X} - \frac{A^5}{10} e^{2i\kappa X}, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

con $\kappa = 4\sqrt{10}q^2/3\nu \gg 1$. Donde, al igual que en una dimensión espacial, los términos no resonantes son rápidamente oscilantes (por el escalamiento, en las variables, que supusimos), por lo cual su efecto puede ser estudiado como una perturbación a (4.3.4).

Entonces, puesto que aca las irregularidades iniciales en la interfase no producen una excitación en la fase, que luego difunde lejos de ella, dado que el sistema de partida es anisótropo (i.e. sólo admite patrones paralelos al eje Y , por lo cual no debe efectuar ningún ajuste en la interfase, que perturbe la fase). Vamos a suponer que todo lo que ocurre con estas irregularidades es local, i.e. se puede describir con un ecuación de la forma $\partial_T P = K(P)$ (no de la forma $\partial_T P = J(\partial_Y P)$, pues los términos no resonantes quiebran la invarianza traslacional). Más aún, dado que numéricamente la interfase plana se muestra estable (ver fig. 4.1.4.b), consideraremos que es válida una expansión en gradientes para describir el sistema. Concretamente, nos pararemos cerca del punto de Maxwell $\mu = \mu_M + \delta\mu$ con $\delta\mu \ll 1$, e introduciremos, en (4.3.5), el ansatz

$$A = (\rho_F^+(X - P(Y, T)) + \delta\rho(X, P)) e^{i\delta\theta(X, P)},$$

con $\delta\mu \sim \partial_T P \sim \partial_{YY} P \sim \delta\rho \sim \delta\theta \ll 1$. Luego, procediendo de la manera habitual, pero ahora utilizando el modo de goldstone, asociado a la solución de base (4.1.4), sólo para eliminar la dimensión espacial X , la condición de solubilidad nos provee de la ecuación unidimensional

$$\partial_T P = \partial_{YY} P + \gamma - \Gamma \cos(\kappa P), \quad (4.3.6)$$

donde $\gamma = 8\delta\mu/\sqrt{3}$ y $\Gamma = 2\pi\kappa^3/3 \sinh(2\pi\kappa/\sqrt{3}) \sim \mathcal{O}(e^{-2\pi\kappa/\sqrt{3}})$. Esta ecuación, para $\gamma = 0$ y $\Gamma = 0$, describe el comportamiento de las irregularidades, de una interfase plana, en la ecuación de amplitud (4.3.4), mostrada en la figura 4.1.4.a, el cual es difusivo como lo habíamos conjeturado. Al incorporar los términos no resonantes, $\Gamma \neq 0$, las soluciones uniformes del sistema son $p_n^s = (4n+3)\pi/2\kappa$, que se trata de estados estables, o $p_n^u = (4n+1)\pi/2\kappa$, que son inestables, donde, en ambos casos, n es un entero arbitrario. En este caso, $\gamma = 0$, todos los estados uniformes estables son equivalentes energéticamente, de hecho, la ecuación (4.3.6) es variacional, minimizando el funcional

$$\mathcal{U}[P] = \int \left\{ \frac{1}{2} (\partial_Y P)^2 + U(P) \right\} dY \quad \text{con} \quad U(P) = -\gamma P - \frac{\Gamma}{\kappa} \sin(\kappa P).$$

Luego, en el punto de Maxwell, $\gamma = 0$, es posible tener una conexión espacial estacionaria entre dos estados uniformes consecutivos (ver fig. 4.14.a), i.e. un kink (P_+) o un antikink (P_-)

$$P_{\pm} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{(4n+3)\pi}{2\kappa} + 4 \arctan \left(e^{\pm(Y-Y_0)/\sqrt{\Gamma\kappa}} \right) \right], \quad (4.3.7)$$

que, evidentemente, coincide con la solución kink de la ecuación de Sine-Gordon (ver ref. [15]). La interacción de estas soluciones tipo partículas es atractiva, en efecto, procediendo de la manera habitual (ver capítulo II), si consideramos un sistema integrado un par kink-antikink, situados a una distancia Δ (ver fig 4.14.b), cerca del punto de Maxwell, $\gamma/\Gamma \ll 1$, se tiene que

$$\Delta = - \left(\frac{8}{\sqrt{\Gamma\kappa}} \right) e^{-\Delta/\sqrt{\Gamma\kappa}} + \frac{\pi\gamma}{2\Gamma\sqrt{\Gamma\kappa}},$$

donde hemos supuesto que el kink se encuentra a la izquierda del antikink; el análisis de esta configuración es general, si se tiene en cuenta, que (4.3.6) es invariante ante la transformación $P \rightarrow -P$, $\gamma \rightarrow -\gamma$ y $\Gamma \rightarrow -\Gamma$ (que corresponde a la inversión $X \rightarrow -X$). De modo que, cuando $\gamma > 0$, existe un estructura localizada inestable, de ancho $\Delta = \sqrt{\Gamma\kappa} \log(16\Gamma/\pi\gamma)$, que corresponde a la barrera de nucleación del estado uniforme más conveniente energéticamente. Mientras más nos alejamos del punto de Maxwell, el ancho de esta barrera disminuye.

Todo esto es válido cerca del punto de Maxwell, $\gamma/\Gamma \ll 1$, a medida que nos seguimos alejando de este, ocurre otra bifurcación, para $\gamma/\Gamma > 1$ todos los estados uniformes desaparecen por saddle-node. Aca, la interface plana comienza a propagarse, con una velocidad periódica, de acuerdo al proceso de minimización de la energía libre. De modo que, la región de bloqueo corresponde a $\gamma/\Gamma < 1$, donde el sistema posee los atractores uniformes $\cos(\kappa p_n^s) = \gamma/\Gamma$ con $\sin(\kappa p_n^s) < 1$ (los repelores corresponden a $\sin(\kappa p_n^u) > 1$), que representan una interfase plana estable. Notemos que, al igual que en el caso unidimensional, $p_{n+1}^s - p_n^s = 2\pi/\kappa$, que corresponde a la mitad de la longitud de onda del patrón (en la escala original x).

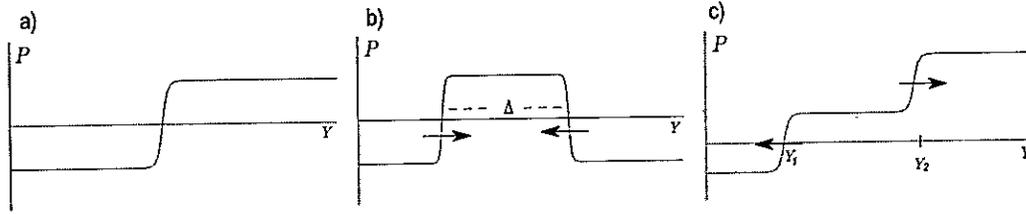


Fig. 4.14: Simulación numérica de la ecuación (4.3.6), en el punto de Maxwell, donde se muestra a) la solución kink (4.3.7), b) un sistema integrado por un kink y un antikink, donde las flechas simbolizan la interacción atractiva, y c) un sistema integrado por dos kinks, donde las flechas simbolizan la interacción repulsiva.

Otro tipo de soluciones interesantes, que exhibe el modelo (4.3.6), son los escalones, i.e. soluciones que conectan asintóticamente dos atractores no consecutivos, osea p_m^s con p_n^s , donde $|m - n| > 1$. Notemos, que, en el punto de Maxwell, el sistema estacionario asociado a (4.3.6), que corresponde a un péndulo ideal, sólo posee órbitas heteroclinas que conecten p_n^s con $p_{n\pm 1}^s$. Por lo cual no esperaríamos tener kinks (o antikink) que conectaran dos estados no consecutivos.

Una manera de estudiar la dinámica de un escalón es considerar un sistema constituido por dos kinks del tipo (4.3.7), uno que conectara p_n^s con p_{n+1}^s , en el punto Y_1 , y otro que conectara p_{n+1}^s con p_{n+2}^s en Y_2 , para $Y_1 \ll Y_2$, como se ve en fig. 4.14.c. Este es el escalón más elemental, y es completamente simétrico al constituido por dos antikinks. Luego, si nos paramos cerca del punto de Maxwell, $\gamma/\Gamma \ll 1$, e introducimos el ansatz

$$P = P_+(Y - Y_1(T)) + P_+(Y - Y_2(T)) + \delta P(Y, Y_1, Y_2)$$

en (4.3.6), donde $\delta P \sim \dot{Y}_1 \sim \dot{Y}_2 \sim \gamma/\Gamma \sim e^{-(Y_2 - Y_1)/\sqrt{\Gamma\kappa}}$. Procediendo del modo habitual, obtenemos que el sistema de dos kinks se rige por las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= -\left(\frac{4}{\sqrt{\Gamma\kappa}}\right) e^{-(Y_2 - Y_1)/\sqrt{\Gamma\kappa}} + \frac{\pi\gamma}{4\Gamma\sqrt{\Gamma\kappa}}, \\ \dot{Y}_2 &= \left(\frac{4}{\sqrt{\Gamma\kappa}}\right) e^{-(Y_2 - Y_1)/\sqrt{\Gamma\kappa}} + \frac{\pi\gamma}{4\Gamma\sqrt{\Gamma\kappa}}, \end{aligned}$$

o bien, tomando la coordenada del centro de masa, $Y_c = (Y_2 + Y_1)/2$, y la coordenada relativa, $\Delta = (Y_2 - Y_1)$,

$$\dot{Y}_c = \frac{\pi\gamma}{4\Gamma\sqrt{\Gamma\kappa}}, \quad \dot{\Delta} = \left(\frac{8}{\sqrt{\Gamma\kappa}}\right) e^{-\Delta/\sqrt{\Gamma\kappa}}. \quad (4.3.8)$$

Claramente, fuera del punto de Maxwell, el sistema sufre un deriva neta, de acuerdo al proceso de minimización de la energía \mathcal{U} . Lo más interesante aquí es, que si bien el centro de masa se desplaza con una velocidad constante, el sistema tiene una dinámica interna, vinculada, por supuesto, con la inexistencia de órbitas heteroclinas (en el sistema estacionario), que conecten dos estados uniformes estables no consecutivos.

Aca, la interacción entre las partículas es repulsiva. Esto se puede entender intuitivamente si tomamos en cuenta que, cuando conectamos dos atractores uniformes consecutivos, en el punto de Maxwell, el sistema no tiene como eliminar los gradientes que

engendra esta conexión, los cuales, no obstante, le son costosos energéticamente. Sin embargo, cuando conectamos dos atractores uniformes, los cuales están intercalados por otro (i.e. p_n^s con $p_{n\pm 2}^s$), el sistema tiende a propagar el estado intermedio ($p_{n\pm 1}^s$), de modo de expulsar estos gradientes a los bordes, y de esa manera eliminarlos.

Luego, dado que la interacción entre kinks (o antikinks) es repulsiva, si consideramos un gas infinito de estas partículas, este tenderá a una configuración en que todos estos entes se encuentren equidistantes, i.e. una escalera infinita, donde todos los peldaños son iguales, y su tamaño depende de la densidad inicial de partículas. Esta estructura es claramente estable, siendo estacionaria en el punto de Maxwell, o desplazándose con una velocidad constante, fuera de él. En el sistema estacionario asociado a (4.3.6), en el punto de Maxwell, que corresponde a un péndulo ideal ($\partial_{YY}P = \Gamma \cos(\kappa P)$), esta escalera representa al péndulo girando de manera perpetua, i.e. las órbitas abiertas en el espacio de fase de un péndulo, luego, si estas órbitas están lo suficientemente cerca de las heteroclinas, de modo que el análisis asintótico que efectuamos, sea válido, entonces, estas órbitas son soluciones estables de (4.3.6). Del mismo modo se puede decir que las órbitas periódicas, cercanas a las heteroclinas, son soluciones inestables de (4.3.6), pues la interacción kink-antikink es atractiva. De todas formas, cualquier estructura de escalones finita, tendrá una dinámica interna, de modo que se ira desparrajando.

Como habíamos mencionado, (4.3.4) introduce una nueva simetría parasita, i.e. una invarianza rotacional espuria, según la cual, la interfase plana puede tener una orientación arbitraria. Al incluir los términos no resonantes, removiendo esta simetría parasita, si la interfase no es paralela a los rollos, corresponde a la escalera infinita que acabamos de estudiar (donde, el tamaño de los peldaños depende del ángulo que forme la interfase con los rollos). Luego, un frente de tales características es estacionario sólo en el punto de Maxwell, propagándose con una constante y paralela a los rollos, fuera de este punto, pero en la región de bloqueo, o una velocidad periódica (ya no paralela a los rollos) fuera de la región de bloqueo.

4.3.1. Desbloqueo por ruido

Al igual que en el caso unidimensional, si incorporamos ruido al modelo (4.3.1), i.e.

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \varepsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2) u + \partial_{yy} u + \sqrt{\eta} \zeta(x, y, t), & (4.3.9) \\ \text{con } \langle \zeta(x, y, t) \rangle &= 0 \quad \text{y} \quad \langle \zeta(x, y, t) \zeta(x', y', t') \rangle = \delta(t' - t) \delta(x' - x) \delta(y' - y), \end{aligned}$$

el bloqueo se pierde. En efecto, en la figura 4.15 se muestra una simulación numérica del modelo (4.3.9), aca se observa un frente en la región de boqueo, pero, la presencia de ruido, induce que este objeto se propague. El mecanismo de propagación es el siguiente: primero el ruido nuclea fragmentos de rollo, tras el ultimo rollo completo que determina la posición de la interfase plana, estos fragmentos, luego, se propagan en la dirección paralela a la interfase, dando origen a un nuevo rollo completo, y, por lo tanto, la interfase avanza un distancia equivalente a la mitad longitud de onda del patrón. Este proceso se repite, dando origen a la propagación del patrón, por supuesto que, cambiando los parámetros, se observa el proceso inverso, i.e. la propagación del estado uniforme sobre el patrón. Cave señalar que, la nucleación de los fragmentos de rollo parece ser un proceso predominantemente aleatorio, mientras que la propagación de éstos, a lo largo de la

dirección paralela a la interfase, parece, más bien, ser un proceso predominantemente determinista, i.e. esta propagación se efectúa con una velocidad más o menos constante.

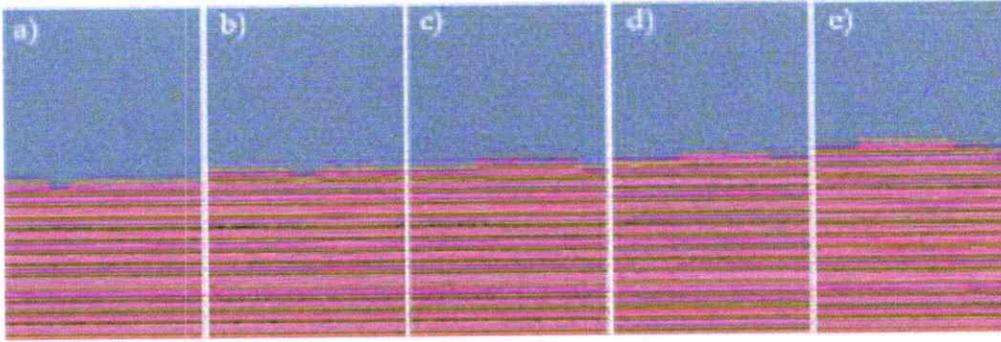


Fig. 4.15: Desbloqueo por ruido, en el modelo (4.3.9), para $\varepsilon = -0,165$, $\nu = 1$ y $q = 0,7$. El tiempo avanza de izquierda a derecha.

Aca, es posible efectuar la misma reducción dimensional que en el caso determinista, i.e. escribir una ecuación efectiva para la posición de la interfase $X = P(Y, T)$. En efecto, procediendo de la misma manera, y tratando el ruido como se muestra en el apéndice C, obtenemos

$$\partial_T P = \partial_{YY} P + \gamma - \Gamma \cos(\kappa P) + \sqrt{\eta} \xi(Y, T), \quad (4.3.10)$$

con $\eta = 160\bar{\eta}/81\sqrt{3}q\nu$ y $\langle \xi(Y, T) \xi(Y', T') \rangle = \delta(T - T') \delta(Y - Y')$, que corresponde a (4.3.6) más un ruido blanco. Este modelo reproduce bien la fenomenología exhibida por los frente de (4.3.9), en la figura 4.16 se muestra una simulación numérica de este, en la región de bloqueo $0 < \gamma < \Gamma$, aca, el sistema se encuentra inicialmente en una de sus estados uniformes p_n^s , pero, producto de las fluctuaciones, una porción del sistema transita al estado p_{n+1}^s (fragmento de rollo), el cual se propaga, sobre p_n^s , de acuerdo al proceso de minimización de la energía \mathcal{U} . Esto se va repitiendo sucesivamente, ocasionando transiciones de $p_n^s \rightarrow p_{n+1}^s$, luego, $p_{n+1}^s \rightarrow p_{n+2}^s$, i.e. el frente se va propagando. Por supuesto que, para $-\Gamma < \gamma < 0$, se observa el proceso inverso, osea sucesivas transiciones $p_n^s \rightarrow p_{n-1}^s \rightarrow p_{n-2}^s$, que representan la propagación del estado uniforme (sobre el patrón), y son absolutamente simétricas a las que representan la propagación del patrón, a este nivel aproximativo, puesto que (4.3.10) es invariante ante la transformación $P \rightarrow -P$, $\gamma \rightarrow -\gamma$ y $\Gamma \rightarrow -\Gamma$.

Claro que, en la región $0 < \gamma < \Gamma$, si el sistema se encuentra en un estado uniforme p_n^s , existe tanto una probabilidad que un fragmento de este transite al estado p_{n+1}^s , como que transite a p_{n-1}^s . No obstante, esta ultima probabilidad es menor, puesto que, al no ser p_{n-1}^s preferible energéticamente ante p_n^s , la barrera de nucleación, que debe sortear la fluctuación que lo engendre, es mayor. Osea, existe una fuerza determinista, $-\delta\mathcal{U}/\delta P$, superior, por lo cual ξ debe ser mayor, para poder contrarrestarla, e.g. el evento es más improbable. Más aún, aunque un gran fluctuación llevase un trozo del sistema al estado p_{n-1}^s , por el proceso de minimización de \mathcal{U} , el resto del sistema, en p_n^s , invadirá este trozo, ocasionando que el sistema, en su totalidad, vuelva a p_n^s . La única forma que el sistema retroceda a p_{n-1}^s , es que una gran fluctuación lo llevase, en su totalidad, al estado p_{n-1}^s ,

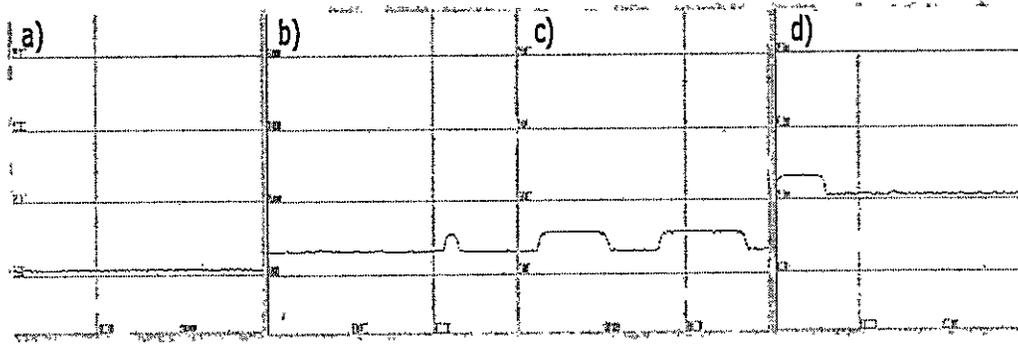


Fig. 4.16: Simulación numérica de la ecuación (4.3.10), para $\gamma/\Gamma = 0,95$ y $\eta = 1,0$. Lo que modela el desbloqueo por ruido.

osea la fluctuación no sólo debe ser grande, sino que actuar coordinadamente en todo el espacio, lo cual, dado que ξ es δ -correlado en el espacio, es altamente improbable.

Luego, cerca del punto de Maxwell $0 < \gamma \ll \Gamma$, el estado uniforme p_{n+1}^s tiene una barrera de nucleación, con respecto a p_n^s , que consiste en la estructura localizada inestable, i.e. el punto de equilibrio inestable, que posee el sistema integrado por un par kink-antikink. Osea, si una fluctuación es capaz de ocasionar que un trozo del sistema, de un largo superior a $\sqrt{\Gamma\kappa} \log(16\Gamma/\pi\gamma)$, transite de p_n^s a p_{n+1}^s , entonces, el sistema, por su propia evolución determinista, se encarga de generar el estado uniforme p_{n+1}^s . De modo que la transición $p_n^s \rightarrow p_{n+1}^s$ involucra dos tiempos, el tiempo medio en que el ruido es capaz de generar que un trozo, de un largo igual a superior a $\sqrt{\Gamma\kappa} \log(16\Gamma/\pi\gamma)$, transite de p_n^s a p_{n+1}^s , y el tiempo que tarda el sistema, por su propia evolución determinista, en que el estado p_{n+1}^s invada todo el espacio (este ultimo tiempo depende del largo del sistema). Si el ruido es pequeño, $\eta \ll 1$, el primero de estos tiempos es mucho más largo. Cuando la intensidad de ruido no es tan pequeña, y ambos tiempos son del mismo orden, se puede observar la formación de terrazas (ver fig. 4.16), i.e. cuando el estado p_{n+1}^s se está todavía propagando sobre p_n^s , el ruido genera un trozo que se encuentra en p_{n+2}^s .

El argumento anterior pareciera ser una generalización de los tiempos de Kramer, para un sistema extendido como (4.3.10). No obstante, este razonamiento es válido únicamente cerca del punto de Maxwell. En general, la estructura localizada inestable corresponde a una órbita homoclina del sistema estacionario $\partial_{YY}P = -\gamma + \Gamma \cos(\kappa P)$, pero las características de esta órbita cambian a medida que nos alejamos del punto de Maxwell. Por ejemplo, cerca del saddle-node $\gamma \lesssim \Gamma$, justo antes de que p_n^s colisione con p_n^u , desapareciendo, la órbita homoclina tiene la expresión aproximada

$$P \approx 2\pi n + \frac{\beta^2}{\kappa} \left[-1 + 3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\beta(Y - Y_0)}{2\sqrt{3\Gamma\kappa}} \right) \right],$$

con $\beta = [2(1 - \gamma/\Gamma)]^{1/4} \ll 1$, de modo que, a medida que nos aproximamos al saddle-node, $\beta \rightarrow 0^+$, la amplitud de la estructura localizada inestable tiende a cero, mientras que su ancho tiende a infinito. Luego, en este caso, puede sea más probable una fluctuación que produzca una perturbación un poco más grande, pero más angosta, que esta órbita, la que de todas formas saque al sistema de la debilitada cuenca de atracción

de p_n^s . Osea, es posible que, la perturbación más probable de generar con el ruido ξ , de modo que saque al sistema de la cuenca de atracción de p_n^s , llevandolo a la cuenca de atracción de p_{n+1}^s , no un equilibrio inestable, que medie entre estos dos atractores uniformes. Lo mismo podría ocurrir muy cerca del punto de Maxwell, donde el ancho de la estructura localizada inestable también tiende a infinito.

El problema de la generalización de los tiempos de Kramer, para un sistema extendido, es un problema aún abierto, en el cual estamos trabajando. Su solución es de vital importancia en una amplia gama de problemas en la física de la materia fuera del equilibrio termodinámico. En particular, para una estimación teórica de la velocidad de propagación del frente aquí estudiado.

Parte IV

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

Durante el desarrollo de esta tesis se han estudiado varios tópicos en sistemas extendidos, con especial énfasis en las soluciones tipo partícula, y la dinámica de defectos como pilar fundamental para entender los procesos de coarsening en diferentes contextos. Por tópico, los resultados más importantes y las preguntas abiertas que quedan son:

Ondas solitarias en una transición de fase tipo van der Waals: En la forma normal de Van der Waals, modelo prototipo que describe una transición líquido-vapor, se observa que, durante el proceso de descomposición espinodal, en un régimen de viscosidad baja o moderada, el sistema exhibe una alta actividad de ondas. Aparentemente, en el proceso de coarsening, que sobreviene a la descomposición espinodal, la transferencia de información (masa, momentum, etc...) entre las burbujas se realiza mediante solitones.

La forma normal de Van der Waals, en el régimen de viscosidad nula, admite, como solución, la propagación de ondas solitarias, las cuales son subsónicas. Si la amplitud de estas ondas es pequeña o moderada, son estables. Si el sistema se encuentra en la región de coexistencia, las ondas solitarias de amplitud grande son inestables.

En el régimen cuasi-sónico (ondas solitarias con una velocidad cercana a la del sonido), el sistema puede ser aproximado por la ecuación de Korteweg de Vries. La interacción solitón-solitón, predicha por esta ecuación, emula satisfactoriamente lo que se observa directamente de la simulación numérica de la forma normal de Van der Waals.

En el régimen de viscosidad baja, la atenuación de solitones es algebraica, por lo cual debiesen jugar un rol más relevante, que las ondas lineales, en el proceso de coarsening, cuya atenuación es exponencial.

La forma normal de Van der Waals fue motivada originalmente en el estudio de una transición de fase líquido-vapor, en una simulación numérica de un medio granular. La observación directa de este sistema sugiere que la viscosidad efectiva es alta, de modo que la atenuación de las ondas es muy violenta y por lo cual no desempeñan un rol importante en los procesos que este sistema exhibe. Por lo tanto, queda pendiente encontrar procesos físicos similares, en los cuales la viscosidad efectiva sea baja, de manera que los resultados obtenidos en este capítulo no sean puramente académicos y tengan una aplicación real.

Frentes y estructuras localizadas en dinámica poblacional: Una manera simple de modelar la conjugación de factores competitivos y cooperativos, en el modelamiento continuo de una población, es mediante un modelo biestable. Donde uno de los atractores represente la extinción de la especie, mientras el otro, su supervivencia. Esto nos da la definición de un parámetro fundamental del sistema, el cual constituye una medida de la adversidad del medio en el que se encuentra inmersa la población. Si a este modelo le incorporamos un transporte difusivo de los organismos que forman la población, más la interacción no-local de estos, podemos reproducir muchos de los comportamientos complejos que exhiben las poblaciones en la naturaleza, como la formación de patrones y estructuras localizadas.

Un mecanismo genérico, para engendrar dominios localizados estables, es la aparición de oscilaciones amortiguadas en la solución frente (en el punto de Maxwell). Las cuales modifican la interacción de defectos, estabilizando estas formaciones. Si el sistema exhibe un régimen en el cual los frentes son monótonos, y la interacción de defectos es atractiva, entonces existe un punto en el espacio de parámetros del sistema, en el cual nacen todas las estructuras localizadas. Este punto coincide con la aparición de las oscilaciones

amortiguadas en la solución frente.

Aún queda pendiente una caracterización analítica de estos procesos cuando la influencia de la interacción no-local decae más lento que una exponencial. También falta una caracterización de este tipo para la formación de patrones localizados, en este caso parece más pertinente concentrarse en la célula elemental de la estructura periódica, el pico, el cual representa el asentamiento más básico de población, i.e. la colonia elemental. Siendo las estructuras localizadas más complejas sistemas integrados por varias de estas soluciones tipo partícula.

Dinámica de dominios en presencia de ruido interno: En un sistema unidimensional simple, como la ecuación de Ginzburg-Landau real (cúbica), la dinámica de dominios está gobernada por la interacción asintótica de los pares kink-antikink. La cual es exponencialmente débil, por lo cual el crecimiento, del largo promedio de los dominios, es logarítmico.

Si consideramos la presencia de ruido, esta situación cambia drásticamente. Acá el coarsening está dominado por el transporte difusivo de los defectos, lo cual induce que sea mucho más eficiente, produciendo que el largo promedio crezca con la ley de potencia $t^{1/2}$.

Todo esto es válido, siempre y cuando las fluctuaciones sean lo suficientemente débiles, de modo que los procesos de creación de pares kink-antikink sean despreciables. Si esto no ocurre, los procesos de creación de pares empiezan a conspirar contra la eficiencia del coarsening, ocasionando una resonancia estocástica, i.e. existe un valor óptimo, para la intensidad del ruido, tras el cual la eficiencia del coarsening empieza a menguar.

En un futuro, sería interesante estudiar cómo el ruido altera el proceso de coarsening en sistemas que poseen cantidades conservadas, como Cahn-Hilliard o la forma normal de Van der Waals. Así como el coarsening en presencia de turbulencia débil en un sistema hamiltoniano (o cuasi-hamiltoniano) ergódico.

Frentes que conectan rollos con un estado uniforme: Si consideramos una interfase plana, que separe una región con rollos, de una uniforme, en un sistema isótropo, ésta es transversalmente inestable. El origen de la inestabilidad radica precisamente en la isotropía del sistema, puesto que la formación de rollos es un quiebre espontáneo de esta simetría, el sistema puede formarlos con cualquier orientación (dependiendo de la condición inicial). Luego, en una pequeña irregularidad en la interfase plana, el sistema tratará de formar localmente un rollo en una dirección arbitraria, lo cual ocasiona una perturbación local en la fase del patrón, que a su vez reexcita la interfase, desestabilizándola. Tras la inestabilidad el sistema forma un zigzag, el cual entra en un coarsening, en donde los vértices de la estructura se van aniquilando unos a otros.

Las perturbaciones en la fase se van difundiendo lejos de la interfase, pero, a su vez, este mismo proceso difusivo trata de atenuar estas irregularidades. De modo que, a medida que se desarrolla la inestabilidad, el proceso de coarsening es influenciado por regiones cada vez más lejanas a la interfase, haciéndose, en este sentido, cada vez más no-local.

Esto impide que los vértices del zigzag puedan ser tratados como soluciones tipo partícula, de la manera en que hemos tratado otros tipos de defectos durante el desarrollo de esta tesis. Esto pone en evidencia los límites de los métodos desarrollados en este

trabajo.

Puesto que el origen de inestabilidad radica en la isotropía del sistema, i.e. que puede formar rollos con cualquier orientación. Si suprimimos esta simetría, i.e. consideramos un sistema que sólo admita rollos en una dirección determinada, la interfase plana se estabiliza. En este caso recuperamos el fenómeno de bloqueo observado en sistemas unidimensionales, y es posible reducir el problema a una ecuación efectiva para la posición de la interfase.

En el caso anisótropo, al igual que en el caso unidimensional, si incorporamos ruido al sistema, el movimiento del frente se desbloquea, ocasionando su propagación.

Acá falta un tratamiento analítico más pulido, de la inestabilidad de zigzag, en el caso isótropo. También encontrar una estimación teórica, para la propagación del frente, inducida por ruido, en el caso anisótropo. Lo que pasa por una generalización de los tiempo de Kramer, para un sistema extendido, problema que aún no se a resuelto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. B. Callen, *Thermodynamic and an Introduction to Thermostatistics* (Copyright, USA, 1985).
- [2] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley and Sons, New York, 1987).
- [3] L. Landau and L. Lifschitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. V* (Pergamon Press, New York, 1987).
- [4] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 51 (1993).
- [5] I. Prigogine, *La thermodynamique de la vie* (La Recherche, 1974).
- [6] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover Publications, New York, 1981).
- [7] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984).
- [8] S. Wolfram, *A New Kind of Science* (Champaign, IL, 2002).
- [9] N.G. van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry* (North Holland, Amsterdam, 1981).
- [10] M. G. Clerc and D. Escaff, *Physica A* **371**, 33 (2006).
- [11] M. G. Clerc, D. Escaff and V. M. Kenkre, *Phys. Rev. E* **72**, 056217 (2005).
- [12] K. Kawasaki and T. Nagai, *Physica A* **175**, 121 (1983).
- [13] M. Argentina, M. G. Clerc and R. Soto, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 044301 (2002).
- [14] V. E. Zakharov, *Nonlinear Waves and Weak Turbulence* (Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1998).
- [15] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equation* (Academic Press, London, 1988).
- [16] J. D. Murray, *Mathematical Biology* (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
- [17] R.A. Fisher, *Ann. Eugenics* **7**, 355 (1937); A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piskunov, *Bull. Univ. Moskou Ser. Int. Se. A* **1**, 1(1937)
- [18] O. Lejeune, M. Tlidi and P. Couteron, *Phys. Rev. E* **66**, 010901 (2002).

- [19] M. A. Fuentes, M. N. Kuperman and V. M. Kenkre, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 158104 (2003).
- [20] E. Hernandez-Garcia and C. Lopez, *Phys. Rev. E* **70**, 016216 (2004); C. Lopez and E. Hernandez-Garcia, *Physica D* **199**, 223 (2004);
- [21] A.M. Turing, *Phil. Tran. Roy. Soc. B*, **237**, 37 (Londres, 1952).
- [22] M. A. Fuentes, M. N. Kuperman and V. M. Kenkre, *J. Phys. Chem. B* **108**, 10505 (2004).
- [23] Y. Pomeau, *Physica D* **23**, 3 (1986);
- [24] P. Couillet, C. Riera and C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3069 (2002).
- [25] M. G. Clerc, C. Falcon and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 148302 (2005).
- [26] P. Couillet, *Int. J. of Bif. and Ch.*, **12**, 2445 (2002).
- [27] M.G. Clerc and C. Falcon, *Physica A* **356**, 48 (2005).
- [28] L. Landau and L. Lifschitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. I* (Pergamon Press, New York, 1987).
- [29] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods Scientists and Engineers* (Mc Graw, New York, 1978).
- [30] M. G. Clerc, C. Falcon and E. Tirapegui, *Phys. Rev. E* **74**, 011303 (2006).
- [31] A. Hagber, A. Yochelis, H. Yizhaq, C. Elphick, L. Pismen and E. Meron, *Physica D* **217**, 186 (2006).
- [32] A.A. Golovin, S.H. Davis and A.A. Nepomnyashchy, *Physica D* **122**, 202 (1998).
- [33] C. Chevallard, M. Clear, P. Couillet and J. M. Gilli, *Phys. J. E* **1**, 179 (2000); *Europhys. Lett.* **58**, 686 (2002).
- [34] A.A. Golovin, A.A. Nepomnyashchy, S.H. Davis and M.A. Zaks, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1550 (2001).
- [35] H. Calisto, M. G. Clear, R. Rojas and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3805 (2000); M. Argentina, M. G. Clear, R. Rojas and E. Tirapegui, *Phys. Rev. E* **71**, 046210 (2005).
- [36] S. J. Watson, F. Otto, B. Y. Rubinstein and S. H. Davis, *Physica D* **178**, 127 (2003); A. Podolny, M.A. Zaks, B.Y. Rubinstein, A.A. Golovin and A.A. Nepomnyashchy, *Physica D* **201**, 291 (2005).

Parte V

APÉNDICES

APÉNDICE A: Solución de N-solitones de Hirota para la ecuación de Korteweg de Vries

Tomando la ecuación de Korteweg de Vries (KdV)

$$\partial_T \phi + 12\phi \partial_\xi \phi + \partial_{\xi\xi\xi} \phi = 0,$$

e introduciendo la transformación de Cole-Hopf

$$\phi = \partial_{\xi\xi} \{\log f\},$$

obtenemos

$$f \partial_{\xi T} f - \partial_\xi f \partial_T f + 3 (\partial_{\xi\xi} f)^2 - 4 \partial_\xi f \partial_{\xi\xi\xi} f + f \partial_{\xi\xi\xi\xi} f = 0.$$

Consideremos ahora la expansión formal:

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n f^{(n)},$$

donde α es un parámetro que tiene que ver con la invarianza traslacional del problema, y el término a orden cero se toma igual a la unidad por conveniencia (esto quedara más claro a medida que se desarrolle el método). Luego, igualando orden por orden,

$$\begin{aligned} (\partial_{\xi\xi\xi\xi} + \partial_{\xi T}) f^{(1)} &= 0, \\ (\partial_{\xi\xi\xi\xi} + \partial_{\xi T}) f^{(2)} &= -(f^{(1)} \partial_{\xi T} f^{(1)} - \partial_\xi f^{(1)} \partial_T f^{(1)} + 3 (\partial_{\xi\xi} f^{(1)})^2 \\ &\quad - 4 \partial_\xi f^{(1)} \partial_{\xi\xi\xi} f^{(1)} + f^{(1)} \partial_{\xi\xi\xi\xi} f^{(1)}), \\ (\partial_{\xi\xi\xi\xi} + \partial_{\xi T}) f^{(3)} &= -(f^{(2)} \partial_{\xi T} f^{(1)} - \partial_\xi f^{(2)} \partial_T f^{(1)} + 6 \partial_{\xi\xi} f^{(2)} \partial_{\xi\xi} f^{(1)} \\ &\quad - 4 \partial_\xi f^{(2)} \partial_{\xi\xi\xi} f^{(1)} + f^{(2)} \partial_{\xi\xi\xi\xi} f^{(1)} + f^{(1)} f^{(1)} \partial_{\xi T} f^{(2)} \\ &\quad - \partial_\xi f^{(1)} \partial_T f^{(2)} - 4 \partial_\xi f^{(1)} \partial_{\xi\xi\xi} f^{(2)} + f^{(1)} \partial_{\xi\xi\xi\xi} f^{(2)}), \\ (\partial_{\xi\xi\xi\xi} + \partial_{\xi T}) f^{(4)} &= \dots \end{aligned}$$

obtenemos una jerarquía de ecuaciones lineales que involucran al mismo operador lineal a todo orden, y la solución de un orden dado requiere de la solución de los anteriores. El primer orden implica:

$$f^{(1)} = \sum_{i=1}^N e^{\theta_i} \quad \text{con} \quad \theta_i = a_i \xi - a_i^3 T + \gamma_i$$

donde a_i y γ_i son parámetros arbitrarios. La solución de los órdenes siguientes depende de la elección particular de $f^{(1)}$ que se haga, en efecto, esto nos dará las soluciones de N-solitones:

Solucion de 1-soliton: Tomando

$$f^{(1)} = e^\theta,$$

implica

$$(\partial_{\xi\xi\xi\xi} + \partial_{\xi T}) f^{(2)} = 0,$$

de modo que, tomando la solución más simple:

$$f^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq 2,$$

obtenemos

$$f = 1 + e^\theta,$$

donde hemos absorbido α en la fase γ (aquí se puede ver que está relacionado con la invarianza traslacional), con lo cual obtenemos:

$$\phi_{1S} = \partial_{\xi\xi} \{ \log(1 + e^\theta) \} = \frac{a^2}{4} \text{Sech}^2 \left[\frac{a}{2} (\xi - a^2 T) + \gamma \right],$$

que corresponde a la solución de 1-soliton (aquí se ve la conveniencia de tomar f al orden cero como uno).

Solucion de 2-solitones: Tomando:

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2},$$

implica:

$$(\partial_{\xi\xi\xi\xi} + \partial_{\xi T}) f^{(2)} = 3a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2},$$

tomando la solución particular:

$$f^{(2)} = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 e^{\theta_1 + \theta_2},$$

tenemos:

$$(\partial_{\xi\xi\xi\xi} + \partial_{\xi T}) f^{(3)} = 0,$$

luego, nuevamente tomamos la solución más simple:

$$f^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq 3,$$

y obtenemos:

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 e^{\theta_1 + \theta_2},$$

de modo que

$$\phi_{2S} = \partial_{\xi\xi} \left\{ \log \left(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 e^{\theta_1 + \theta_2} \right) \right\},$$

que corresponde a la solución de 2 solitones (en el capítulo I se ve con más claridad).

De esta forma, podemos ir calculando la solución de 3 solitones ($N = 3$), etc.

APÉNDICE B: Análisis débilmente no-lineal, en torno a la inestabilidad espacial, para el modelo de Nagumo no-local.

Para estudiar la saturación no-lineal de la inestabilidad espacial, que exhibe el modelo de Nagumo no-local, i.e.

$$\partial_t u = \partial_{xx} u - \alpha u + (\alpha + 1) u^2 - u \int_{\Omega} u'^2 f_{\sigma}(|x - x'|) dx',$$

haremos un análisis asintótico en torno al punto crítico en que se produce. Concretamente, estudiaremos lo que ocurre cuando solo un modo de Fourier se deviene inestable, para ello consideraremos un dominio finito, $\Omega = [-L/2, L/2]$, pero muy grande en comparación con el rango de influencia, de modo que sea válida la aproximación

$$\sigma \ll L \implies \hat{f}_{\sigma}(k) \cong \int_{-L/2}^{L/2} \cos(z) f_{\sigma}(z) dz,$$

que es exacta para el modelo de influencia tipo salto. Luego, tomando condiciones de borde periódicas, podemos expandir u en modos de Fourier:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos(k_n x) \quad \text{con} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

y convertir el modelo de Nagumo no-local en un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\partial_t a_N = -(k_N + \alpha) a_N + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Xi_{mn}^N a_m a_n - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_{lmn}^N a_l a_m a_n,$$

donde

$$\begin{aligned} \Xi_{mn}^N &= \frac{(1 + \alpha)}{2} \{ \delta_{m+n, N} + \delta_{|m-n|, N} \}, \\ \Lambda_{lmn}^N &= \frac{1}{4} \{ \hat{f}_{\sigma}(k_{m+n}) [\delta_{l+m+n, N} + \delta_{|m+n-l|, N}] \\ &\quad + \hat{f}_{\sigma}(k_{m-n}) [\delta_{|l+m-n|, N} + \delta_{|m-n-l|, N}] \}, \end{aligned} \quad (.0.11)$$

para efectuar el análisis asintótico debemos trasladar el sistema al punto en que se produce la inestabilidad, i.e. al estado $u = 1$, de modo que tomamos

$$a_N = \delta_{0, N} + b_N,$$

y obtenemos

$$\partial_t b_N = -\lambda_N b_N + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{mn}^N b_m b_n - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_{lmn}^N b_l b_m b_n,$$

donde

$$\lambda_N = -k_N^2 + (\alpha + 1) - 2\hat{f}_\sigma(k_N),$$

$$\Gamma_{mn}^N = \Xi_{mn}^N - \Phi_{mn}^N,$$

con

$$\Phi_{mn}^N = \Lambda_{0mn}^N + \Lambda_{m0n}^N + \Lambda_{n0m}^N.$$

Luego, para el calculo de la forma normal entorno a la inestabilidad, concentrémonos primero en el punto critico

$$\lambda_N = \lambda_N^{(0)} \quad tq. \quad (\exists M, \lambda_M^{(0)} = 0) \wedge (\forall N \neq M, \lambda_N^{(0)} < 0)$$

y formalicemos, esta ecuación, en un espacio vectorial, dotado de producto interno y generado por la base $\{\hat{e}_N\}_{N=0}^\infty$, osea

$$\underline{b} = \sum_{N=0}^{\infty} b_N \hat{e}_N \quad y \quad \hat{e}_N \cdot \hat{e}_{N'} = \delta_{N,N'},$$

con lo cual, el modelo se puede escribir de la forma

$$\partial_t \underline{b} = \mathcal{A} \underline{b} + \underline{P}_2(\underline{b}) - \underline{P}_3(\underline{b}),$$

donde

$$\hat{e}_{N'} \cdot \mathcal{A} \hat{e}_N = \lambda_N^{(0)} \delta_{N,N'},$$

que corresponde al operador homologico de esta bifurcación (de Pitchfork, en el espacio de Fourier). El cual es hermitico ante el producto interno definido, diagonal en la base $\{\hat{e}_N\}_{N=0}^\infty$, y su kernel está compuesto únicamente por \hat{e}_M . Mientras que \underline{P}_2 y \underline{P}_3 son funciones polinomiales de orden cuadrático y cubico respectivamente, y tienen la forma

$$\underline{P}_2(\underline{b}) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{mn}^N b_m b_n \hat{e}_N,$$

$$\underline{P}_3(\underline{b}) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_{lmn}^N b_l b_m b_n \hat{e}_N.$$

Luego, en orden de realizar la eliminación adiabática de los modos rápidamente decaentes, según los métodos canónicos de la teoría de bifurcaciones, podemos considerar el cambio de variables asintótico

$$\underline{b} = A \hat{e}_M + \underline{U}^{[2]}(A) + \underline{U}^{[3]}(A) + \dots$$

$$\partial_t A = f^{[1]}(A) + f^{[2]}(A) + f^{[3]}(A) + \dots$$

donde los superíndice $[n]$ significa n -ésimo orden polinomial en A (notemos que hemos reducido un sistema de infinitas variables a una sola). El primer orden polinomial en A es trivial por el ansatz y da

$$f^{[1]} = 0$$

y, por lo tanto, para el segundo orden tenemos

$$\partial_t \underline{b} = f^{[2]} \hat{e}_M = \underline{A} \underline{U}^{[2]} + \underline{P}_2(A \hat{e}_M)$$

que implica la ecuación homologica

$$\underline{A} \underline{U}^{[2]} = f^{[2]} \hat{e}_M - \underline{P}_2(A \hat{e}_M)$$

que tiene la condición de solubilidad

$$f^{[2]} = \underline{P}_2(A \hat{e}_M) \cdot \hat{e}_M = 0$$

de modo que no hay términos cuadráticos en la ecuación de evolución de A . Tomando para $\underline{U}^{[2]}$ la solución particular

$$\underline{U}^{[2]} = - \left\{ \frac{\Gamma_{MM}^0}{\lambda_0} \hat{e}_0 + \frac{\Gamma_{MM}^{2M}}{\lambda_{2M}} \hat{e}_{2M} \right\} A^2,$$

y procediendo de manera análoga, obtenemos al tercer orden la ecuación homologica

$$\underline{A} \underline{U}^{[3]} = f^{[3]} \hat{e}_M - \left[\underline{P}_2(A \hat{e}_M + \underline{U}^{[2]}) \right]^{[3]} + \underline{P}_3(A \hat{e}_M),$$

que tiene la condición de solubilidad

$$f^{[3]} = \left\{ \left[\underline{P}_2(A \hat{e}_M + \underline{U}^{[2]}) \right]^{[3]} - \underline{P}_3(A \hat{e}_M) \right\} \cdot \hat{e}_M.$$

Detengamos aquí la expansión asintótica en el punto crítico y desarrollemos el unfolding en torno a este. Para ello tomemos la corrección

$$\lambda_N = \lambda_N^{(0)} + \lambda_N^{(1)} \implies \lambda_M^{(1)} = \lambda_M,$$

y el cambio de variables:

$$\begin{aligned} \underline{b} &= \left(A \hat{e}_M + \underline{U}^{[2,0]}(A) + \underline{U}^{[3,0]}(A) + \dots \right) + \left(\underline{U}^{[1,1]}(A) + \dots \right) + \dots \\ \partial_t A &= \left(f^{[1,0]}(A) + f^{[2,0]}(A) + f^{[3,0]}(A) + \dots \right) + \left(f^{[1,1]}(A) + f^{[2,1]}(A) + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

donde el superíndice $[m, n]$ significa m -ésimo orden polinomial en c y n -ésimo orden polinomial en $\lambda_M^{(1)}$. Es evidente que el orden lineal da

$$f^{[1,1]} = \lambda_M A$$

de modo que, truncando la expansión hasta estos ordenes, obtenemos la forma normal

$$\partial_t A = \lambda_M A - \beta A^3$$

donde β viene de la condición de solubilidad para $\underline{U}^{[3]}$, i.e.

$$\beta = \left\{ \frac{(1 - k_c^2)^2}{\alpha - 1} + \frac{(\widehat{f}_\sigma(2k_c) - k_c^2)^2}{2(-4k_c^2 + (\alpha + 1) - 2\widehat{f}_\sigma(2k_c))} + \frac{1}{4}(\widehat{f}_\sigma(2k_c) + 2) \right\},$$

donde hemos aproximado $k_M \cong k_c(\sigma = S(\alpha), \alpha)$, pues $\sigma \ll L$, e.g. $\beta = \beta(\alpha)$.

APÉNDICE C: Dinámica de un defecto en presencia de ruido débil

Consideremos la ecuación de reacción-difusión genérica (para un campo escalar)

$$\partial_t u = G(u) + \partial_{xx} u + \sqrt{\varepsilon} \sigma(x) \zeta(x, t),$$

en presencia de un ruido $\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = \delta(x' - x) \delta(t' - t)$, gaussiano, mientras que $\sigma(x)$ es una función acotada.

Supongamos que este sistema tiene como solución un frente estacionario, i.e. existen dos órbitas heteróclinas $G(u_F(\pm x)) + \partial_{xx} u_F(\pm x) = 0$, que conectan asintóticamente u_1 (en $x = \pm\infty$), con u_2 (en $x = \mp\infty$). Luego, en presencia de ruido, el modo de goldstone asociado al frente u_F adquirirá dinámica. En efecto, tomando el ansatz usual

$$u = u_F(x - X(t)) + \delta u(x, X),$$

y procediendo de la misma manera que en los casos deterministas, obtenemos la condición de solubilidad

$$\frac{dX(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} a(x, X(t)) \zeta(x, t) dx,$$

con

$$a(x, X) = - \frac{\sqrt{\varepsilon} \sigma(x) \partial_x u_F(x - X)}{\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u_F)^2 dx}.$$

Notemos que, si $\sigma(x)$ es acotada, entonces $a(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$.

Luego, esta ecuación diferencial para la posición del frente corresponde a una suma infinita de ruidos gaussianos, lo cual es equivalente a un solo ruido gaussiano, e.g. el frente se comportara como una partícula browniana. Todo esto si, el ruido ζ es interpretado en el sentido de Ito, primero que nada demostraremos que, cualquiera sea la interpretación que queramos darle, sera equivalente a la prescripción de Ito a nivel de la ecuación de movimiento de $X(t)$.

Para ello consideremos la discretización del espacio $x \rightarrow x_j \equiv (\Delta x) j$, con j entero, de modo que $x_j - x_{j-1} = \Delta x$. Y definamos $a_j(X) \equiv a(x_j, X)$ y $\zeta_j(t) \equiv \sqrt{\Delta x} \zeta(x_j, t)$, luego $\langle \zeta_j(t) \zeta_j(t') \rangle = \delta_{jj} \delta(t - t')$. Entonces la ecuación de movimiento queda

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{\Delta x} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(X) \zeta_j(t).$$

Si discretizamos ahora el tiempo $t \rightarrow t_k \equiv (\Delta t) k$, con k entero, de modo que $t_k - t_{k-1} = \Delta t$. Y, definiendo $X_k \equiv X(t_k)$ y $\Delta X_k \equiv X_k - X_{k-1}$, la ecuación diferencial pasa a una ecuación de diferencias finitas

$$\Delta X_k = \sqrt{\Delta x} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(X_k + \alpha \Delta X_k) dw_{jk},$$

donde $0 \leq \alpha < 1$ da la interpretación que queremos darle al ruido (por ejemplo, la interpretación de Ito corresponde a $\alpha = 0$, mientras que la de Stratonovich a $\alpha =$

1/2). Mientras que $\Delta w_{jk} = w_{jk} - w_{jk-1}$ con $w_{jk} = w_j(t_k)$, donde $\{w_j(t)/j \text{ entero}\}$ son procesos de Wiener independientes, definidos por $dw_j = \zeta_j dt$, e.g. $\Delta w_{jk} \Delta w_{jk} = (\Delta t) \delta_{jj}$. Luego tenemos

$$\begin{aligned} \Delta X_k &\cong \sqrt{\Delta x} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [a_j(X_k) + \alpha \Delta X_k a'_j(X_k)] \Delta w_{jk} \\ &\cong \sqrt{\Delta x} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(X_k) \Delta w_{jk} + \alpha \Delta x \Delta t \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(X_k) a'_j(X_k), \end{aligned}$$

donde hemos procedido de manera recursiva, preservando solo los ordenes dominantes en Δt , la prima significa una derivada respecto al argumento. Notemos que

$$\alpha \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(X_k) a'_j(X_k) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow dx} \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial a^2}{\partial x} dx = 0,$$

de manera que, independientemente de cual sea la interpretación original del ruido ζ , es equivalente a la prescripción de Ito en este caso.

Entonces, volviendo a la ecuación diferencial ($\Delta x \rightarrow dx$ y $\Delta t \rightarrow dt$, infinitesimales), y ocupando el hecho que la suma de ruidos gaussianos equivale a un ruido gaussiano, tenemos que

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{\eta} \xi(t) \quad \text{con} \quad \langle \xi(t) \xi(t) \rangle = \delta(t-t),$$

donde

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} a^2(x, X) dx.$$

Notemos que, para un $\sigma(x)$ arbitrario, $\eta = \eta(X)$, de modo que corresponde a un ruido multiplicativo. No obstante, para los dos casos particulares estudiados en esta tesis, en los que empleamos esta técnica, el ruido queda aditivo, como lo mostraremos a continuación.

Ecuación de Ginzburg-Landau real: Este caso es muy simple, puesto que $\sigma(x) = 1$, de modo que

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u_F)^2 dx} = \frac{3\varepsilon}{\sqrt{8}}.$$

Ecuación de Swift-Hohemberg quintica: Este caso es un poco más sofisticado, puesto que el análisis no se hace directamente de la ecuación

$$\partial_t u = \varepsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2) u + \partial_{yy} u + \sqrt{\eta} \zeta(x, y, t),$$

sino de la ecuación de amplitud

$$\begin{aligned} \partial_T A &= \mu A + |A|^2 A - |A|^4 A + \nabla^2 A + \frac{A^3}{3} \left(1 - \frac{3}{2} |A|^2\right) e^{i\kappa X} - \frac{A^5}{10} e^{2i\kappa X} \\ &+ \sqrt{\eta} e^{-i\kappa X/2} \tilde{\zeta}(X, Y, T), \end{aligned}$$

donde $\langle \tilde{\zeta}(X, Y, T) \tilde{\zeta}(X', Y', T) \rangle = \delta(X' - X) \delta(Y' - Y) \delta(T' - T)$, es un ruido gaussiano. Si ignoramos la dimensión Y , $\tilde{\eta} = 5\sqrt{10}\tilde{\eta}/9q\nu^2$ (caso unidimensional), mientras que, si la tomamos en cuenta $\tilde{\eta} = 5\tilde{\eta}/27q\nu$ (caso bidimensional). Notemos que, si la solución de base (el frente) no depende de Y , la incorporación de esta dimensión no altera en nada el resultado general que obtuvimos.

Luego, en este caso $\sigma(x) = \cos(\kappa X/2)$, de modo que

$$\eta = \frac{\tilde{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x \rho_F(x - P))^2 \cos^2(\kappa X/2) dx}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x \rho_F)^2 dx \right)^2} \cong \frac{32\tilde{\eta}}{3\sqrt{3}},$$

donde hemos despreciado las correcciones provenientes del término rápidamente oscilante. De manera que, en el caso unidimensional $\eta = 160\sqrt{10}\tilde{\eta}/27\sqrt{3}q\nu^2$, mientras que, en el caso bidimensional $\eta = 160\tilde{\eta}/81\sqrt{3}q\nu$, como se muestra en el texto.

Parte VI
PUBLICACIONES

Patterns and localized structures in population dynamics

M. G. Clerc,¹ D. Escaff,² and V. M. Kenkre³

¹*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile*

²*Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Casilla 653, Santiago, Chile*

³*Consortium of the Americas for Interdisciplinary Science and Department of Physics and Astronomy, University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico 87131, USA*

(Received 6 May 2005; published 28 November 2005)

Patterns, fronts, and localized structures of a prototypical model for population dynamics interaction are studied. The physical content of the model is the coexistence of a simple random walk for the motion of the individuals with a nonlinearity in the competitive struggle for resources which simultaneously stresses the Allee effect and interaction at a distance. Mathematically, the model is variational and exhibits coexistence between different stable extended states. Solutions are obtained, the phase diagram is constructed, and the emergence of localized structures is investigated.

DOI: 10.1103/PhysRevE.72.056217

PACS number(s): 47.54.+r, 82.40.Ck, 87.18.Hf

Population dynamics of a variety of species in nature have been successfully addressed with the help of reaction-diffusion equations [1]. The interactions among the individuals and with the environment are described by the reaction term (nonlinearity) while the transport is typically modeled by the diffusive term. Interactions with the environment are normally assumed to occur in the *immediate outskirts* of the individual, with a resulting spatially local representation. Clearly, this may not be realistic in some systems. There may be an interaction-induced modification of the environment around the individual and the elemental reaction term may therefore be more appropriately spatially nonlocal. Pattern formation resulting in such a situation which calls for the use of an integral kernel instead of a local derivative has been analyzed recently [2–4]. While that analysis will form the point of departure for our investigations in this paper, earlier [1,5,6] and later [7,8] reports of that kind of analysis are also available in the literature on the propagation of infectious diseases, firing of cells, and vegetation evolution, respectively.

Whereas the analysis of patterns given in Refs. [2–4] was based on the use of a logistic reaction-diffusion term, our present investigations assume a Nagumo term which provides an additional zero in the nonlinearity relative to the logistic case. The physical content behind such a term is the *Allee effect* [9]. Unlike in the logistic case, the zero- u solution is stable here. If u is small initially, it is attracted to the vanishing value; if large, it is attracted to the nonzero value. The physical origin of the Allee effect is the possible increase of survival fitness as a function of population size for low values of the latter. Existence of other members of the species may induce individuals to live longer whereas low densities may, through loneliness, lead to extinction. There is evidence for such an effect in nature [10]. We use the spatially nonlocal generalization of the Nagumo model here because our interest is to go beyond the simple patterns encountered in Refs. [2–4] and to analyze *localized structures* as well. Such structures have been observed in various fields: as domains in magnetic materials, chiral bubbles in liquid

crystals, current filaments in gas discharge experiments, spots in chemical reactions, pulses, kinks, and localized two-dimensional states in fluid surface waves, oscillons in granular media, isolated states in thermal convection, solitary waves in nonlinear optics, and cavity solitons in lasers (see the review [11] and references therein). Localized structures are macroscopic particlelike objects, which are spatial connections between two extended steady states [12]. The most studied localized structures are *localized patterns*. These solutions are spatial connections between a homogeneous and a spatially oscillatory state [11].

In this paper we study particle-type solutions of a prototypical model for population dynamics with a nontrivial integral kernel, which we will call the variational nonlocal Nagumo model, and see that it exhibits coexistence between different stable extended states. We characterize the solutions, exhibit its phase diagram, and investigate the emergence of the localized structures.

Following the procedure in [2–4] but replacing the logistic nonlinearity by its Nagumo counterpart in a specific way leads us to

$$\partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u + u(u - \alpha)(1 - u) + u^3 - u(x,t) \int_{\Omega} u(x',t)^2 f_{\sigma}(x,x') d^2 x', \quad (1)$$

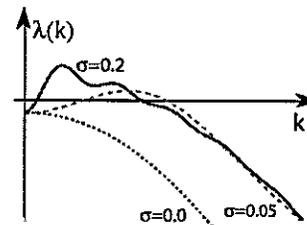


FIG. 1. (Color online) Spectrum $\lambda(k)$ of the fully populated state $u(x,t)=1$, as function of the wave number k , for several values of the range of the step influence function: $\sigma=0.00, 0.05$, and 0.20 .

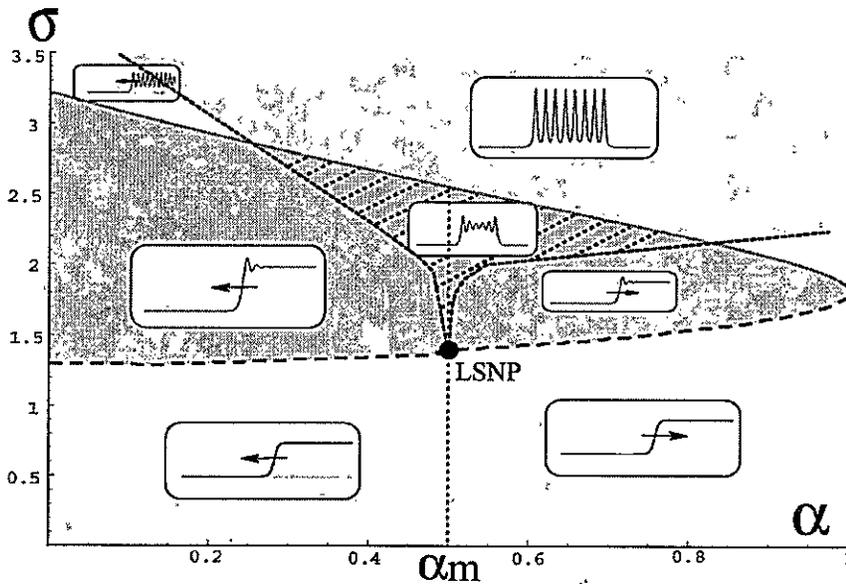


FIG. 2. (Color online) Phase diagram of our variational nonlocal Nagumo model Eq. (1) for the step influence function. The insets show representative particle-type solutions in the respective regions of parameter space. α_m represents the Maxwell point.

where $u(x, t)$ is the local density, where we have normalized all quantities in an obvious manner, and where α is a parameter that we call the *adversity*. The adversity characterizes the equilibrium point, and can always be chosen to satisfy $0 \leq \alpha \leq 1$ without loss of generality. When it is small, non-zero equilibrium population is favored. As in our previous analysis [2] we call the positive function or distribution $f_\sigma(x, x')$ the influence function. It is characterized by a range σ , and is normalized in the domain Ω under study. There are several ways of setting up the nonlinear spatially nonlocal term. The one we use here, as well as the case used earlier by Goldstein *et al.* [6], wherein the Fitzhugh-Nagumo evolution is treated in the limit of fast inhibitor with *linear* nonlocal term, leads to an explicitly variational problem. If, instead, one considers quadratic nonlocal terms, the system becomes non-variational and is then at once richer and more complicated to analyze [17]. We note that the nonlocal Fisher model studied in Refs. [2–4] is also nonvariational.

For simplicity, we consider the environment to be homogeneous and isotropic. Then $f_\sigma(x, x') = f_\sigma(x - x')$, with $f_\sigma(z)$ even, and $\int_\Omega f_\sigma(x, x') dx' = 1$. In the extreme local limit $\sigma \rightarrow 0$, one has $f_\sigma(x, x') = \delta(x - x')$, and Eq. (1) reduces to the (local) Nagumo model. The dynamics is described by the parameters $\{\alpha, \sigma\}$ and Eq. (1) can be written as

$$\partial_t u = - \frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u}$$

where the Lyapunov functional $\mathcal{F}[u]$ has the form

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{\alpha}{2} u^2 - \frac{(\alpha+1)}{3} u^3 \right) dx + \frac{1}{4} \int_\Omega \int_\Omega u^2 u'^2 f_\sigma(x, x') dx dx'.$$

Hence, the dynamics of our model (1) is of the relaxation type and the stationary states are local minima of $\mathcal{F}[u]$.

Our model (1) has three homogeneous equilibrium states: $u(x, t) = 0, 1$, and α . For small σ , the steady states $\{0, 1\}$ and $\{\alpha\}$ constitute stable and unstable fixed points, respectively. The steady states $u(x, t) = 0$ and $u(x, t) = 1$, which respectively represent the complete absence and full presence of the organism, will be termed the *unpopulated state* and *fully populated state*, respectively. The adversity α determines the global stability of the attractors and the size of their respective basin of attraction. Evaluating the Lyapunov functional in the equilibria states, one obtains $\mathcal{F}[u=0] = 0$ and $\mathcal{F}[u=1] = (\alpha - 1/2) \int_\Omega dx / 6$. One can directly identify that the Maxwell point is $\alpha = \alpha_m = 1/2$ ($\mathcal{F}[u=0] = \mathcal{F}[u=1]$). Thus, for small (large) adversity, $\alpha < \alpha_m$ ($\alpha > \alpha_m$), the global minimum is the fully populated (unpopulated) state.

We now consider the spatial coupling and the following perturbation for the unpopulated state $u = u_0 e^{\lambda t + i k x}$, where u_0 is a small number ($u_0 \ll 1$). We obtain the relation for the eigenvalue $\lambda(k) = -k^2 - \alpha$. The eigenvalues λ are negative and decrease as functions of wave number k , and so the unpopulated state is always stable. Consequently, the nonlocal term is nonlinear and does not affect the unpopulated state. To study the stability of the fully populated state, we use an ansatz similar to the previous one, $u(x, t) = 1 + u_0 e^{\lambda t + i k x}$, and obtain

$$\lambda(k) = -k^2 + (\alpha + 1) - 2\hat{f}_\sigma(k),$$

where \hat{f}_σ is the Fourier transform of the influence function (compare, e.g., [4])

$$\hat{f}_\sigma(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(z) f_\sigma(z) dz.$$

Let us now consider the simple influence functions $f_\sigma(z) = \theta(\sigma+z)\theta(\sigma-z)/2\sigma$ and $f_\sigma(z) = e^{-|z|/\sigma}/2\sigma$, and $\Omega = (-\infty, +\infty)$. In these cases $\hat{f}_\sigma(k) = \sin(k\sigma)/k\sigma$ and

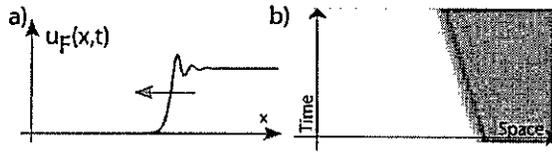


FIG. 3. (Color online) Front solution that links the fully populated state to the unpopulated state for the model in (1), for the step influence function: (a) typical front solution; (b) spatiotemporal evolution of Eq. (1), with time running upward. The intensity of the gray scale is proportional to u .

$\hat{f}_\sigma(k) = 1/[1+(k\sigma)^2]$, respectively. When σ increases, the fully populated state becomes unstable [1]: there are some positive eigenvalues. In Fig. 1 is shown a typical spectrum of the fully populated state [$\lambda(k)$].

The phase diagram of Eq. (1) for the step function is displayed in Fig. 2. Below the solid line, the fully populated state is stable. We have computed the solid line numerically for the step influence function but have been able to calculate it analytically for the exponential influence function. For the latter, the explicit expression is

$$\sigma_c = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{1 - \alpha}}}{1 + \alpha}.$$

On this line, the homogeneous state suffers a spatial instability; above the line, the system exhibits pattern formation. The vertical dashed line represents the Maxwell manifold ($\alpha_m = 1/2$). Below the solid line and $\alpha < 1/2$, the fully populated state is more stable; hence if we spatially connect the fully populated state with the unpopulated state, the species invades the space at a given velocity, and we have a *front solution* [1]. In Fig. 3, we show a typical such front solution and the spatiotemporal diagram observed for (1), which illustrates the front propagation with constant speed. When α increases, $\alpha > 1/2$, the population commences to disappear at a given velocity, that is, the speed of the front is reversed. At variance with the (local) Nagumo model, the front solution between the spatial homogeneous states can exhibit *spatially damped* oscillations as a consequence of the spatial nonlocality (cf. Fig. 3). Such spatially damped oscillations have been obtained from *temporal* nonlocality in the transport, i.e., from memory functions [18]. Here, the spatially damped oscillations are a consequence of the fact that for the moving reference system [$\partial_t u(x-ct) = -c\partial_x u(x-ct)$] the fully populated state is a hyperbolic fixed point and its respective

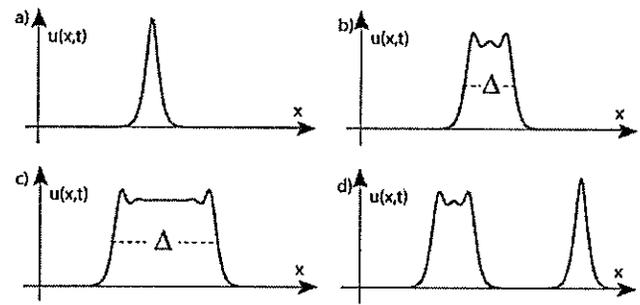


FIG. 4. (Color online) Horn solutions observed in our model (1) for the step influence function, $\alpha = 0.51$, $\sigma = 4\%$ of total system size, system size 250 points. (a) one-bump solution, (b) three-bump solution, (c) typical horn solution, and (d) coexistence of horn solutions. Δ is the size of the horn solution.

eigenvalues have nonvanishing imaginary part. Below the horizontal dashed curve, these eigenvalues are pure real, thus the front solutions are monotonic. This dashed curve has been obtained numerically. These fronts are similar to those observed in the (local) Nagumo model ($\sigma \rightarrow 0$), hence we call this region the *Nagumo zone*. For $\alpha = 1/2$ and below the solid line, the front solutions that link the equilibrium states to one another are static, *wall or kink solution*.

The front solutions are particle-type solutions [12], and the interaction between them are responsible for localization (see the review [11] and references therein). In the Nagumo zone, the interaction is attractive. Thus, there are no stable localized structures there. When the wall solutions have spatially damped oscillations (cf. Fig. 3), it is well known that the nature of the kink and antikink interactions alternates between attractive and repulsive [16]. By introducing Δ the distance between the fronts (cf. Fig. 4), we see that the time dependence of Δ satisfies the law [11]

$$\dot{\Delta} = f(\Delta) \equiv \gamma \cos(\kappa\Delta) e^{-\beta\Delta} + \eta, \quad (2)$$

where κ is the wave number and β the exponent which describe the spatially damped oscillations of the front solution [cf. Fig. 3(a)]. With the help of a specific solvability condition, in a manner similar to that explained in Ref. [11], one now obtains

$$\eta = \frac{\alpha - \alpha_m}{6 \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x u_F(x)^2},$$

$$\gamma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x u_F(x) h(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx' u_F(x')^2 f_\sigma(x, x') + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx u_F(x) h(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial_x u_F(x')^2}{2} f_\sigma(x, x') - 3 \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x u_F(x) h(x) \times \left(u_F(x) + \frac{2}{3} \right) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \partial_x u_F(x') f_\sigma(x, x') \right] / \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x u_F(x)^2,$$

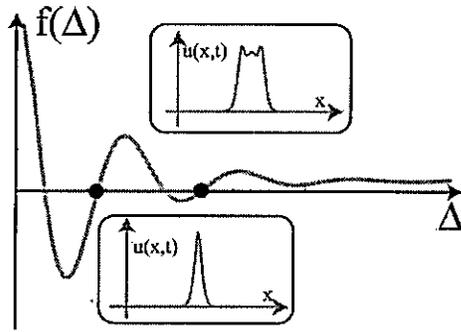


FIG. 5. (Color online) Oscillatory interaction force $f(\Delta)$. The inset figures are the stable localized patterns observed close to the Maxwell point. The extent of these localized patterns is marked by circles.

where $u_F(x)$ is the front solution with damped oscillations of model (1), $h(x)$ being the function $\cos(\kappa x)e^{-\beta x}$. In Fig. 3(a), we show the characteristic front solution under analysis.

From this kink and antikink interaction Eq. (2), one deduces that the system exhibits different localized states and the size of these solutions Δ^* satisfy $\cos(\kappa\Delta^*)\exp(-\beta\Delta^*) = -\eta/\gamma$. In Fig. 5 are illustrated the kink interaction and the steady state of Eq. (2). We term these steady states *horn solutions*. In Fig. 4 we show such horn solutions observed in Eq. (1). Their lengths are approximately multiples of the shortest localized state length, which is related to the characteristic length κ of the spatially damped oscillations.

We have determined, both numerically and analytically, the point in the parameter space where the horn solutions appear for the two kinds of influence function we have analyzed: step and exponential, respectively. For the exponential influence function this point is $\alpha=1/2$ and $\sigma=\sqrt{2}/3$. We term this point the *localized structures nascent point* (LSNP) and denote it in Fig. 2 by LSNP. In the parameter space, the horn solutions appear and disappear around the LSNP by saddle-node bifurcations. The smallest horn solution is stable inside the dashed zone (cf. Fig. 2). This zone has been determined numerically for both the step and exponential influence functions. The other horn solutions have a similar region of stability inside the dashed zone and all these regions have vertices in the LSNP.

Above the solid line in Fig. 2, the fully populated state suffers a spatial instability and gives rise to the appearance of

patterns. A typical such pattern is shown in Fig. 6(a). In this parameter region the system has coexistence between a spatially homogeneous state and a spatially periodic one, a *periodic population state*. One can understand the appearance of these patterns as being a self-organization response of the population to the large range of the competition interactions function and the surrounding adversity.

As result of spontaneous breaking of spatial symmetry, a front solution between the unpopulated state and periodic population one, it is motionless in a range of parameters called the pinning range [13]. This phenomenon is well known as the locking phenomenon [13]. One can consider the interaction of two fronts and obtain a similar expression to (2) amended with a periodic term [14]. One then sees that the front interaction alternates between being attractive and repulsive. Hence, one can find an infinite number of localized structures, which we will call *localized patterns* [14]. In Figs. 6(c) and 6(d) are shown such localized patterns observed from Eq. (1). They are above the solid line and inside the dotted curve.

Recently, static localized patterns have been studied from the point of view of their geometrical existence [15]. The localized patterns appear and disappear close to the pinning range. The different localized patterns appear and disappear by saddle-node bifurcation and they have a geometrical sequence of bifurcations around the pinning range [14,15].

Numerically, we have computed the zone where the shortest localized pattern, i.e., the localized state with fewer bumps, is stable. This zone corresponds to the inside of the dotted line and above the solid line in Fig. 2. Above the solid line (small α) and outside the dotted line, the periodical equilibrium state always invades the unpopulated one with a well defined velocity.

In summary, we have studied the fronts and localized structures of a prototypical model for population dynamics with a nontrivial influence function for the spatially nonlocal competition interactions and found the system to exhibit a coexistence between different stable extended states. We have characterized the different particle-type solutions and presented their phase diagram. We have also determined and characterized the point in the phase space where the localized structures appear, the *localized structure nascent point*. Our theory should be of interest for a wide variety of phenomena, not only in biological systems, in which context the

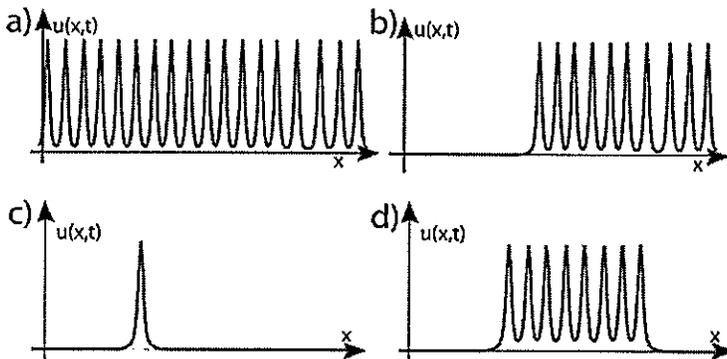


FIG. 6. (Color online) Pattern, front solution, and localized patterns observed from our model (1) for $\alpha=0.618$, $\sigma=4\%$ of total system size, system size 250 points. (a) Periodic solution, (b) front solution that links the unpopulated state and the periodic fully populated state, (c) first-bump localized pattern, and (d) eighth-bump solutions.

applications are obvious, but also in sociological systems in which the formation of localized structures that emerge naturally from the model we use might correspond to localized clusters of communities with similar opinions or ideological approach. Work on such applications is under way.

The simulation software DIMX developed by P. Couillet and collaborators at the laboratory INLN in France has been

used for all the numerical simulations. M.G.C. acknowledges the support of FONDECYT Project No. 1051117 and FONDAP Grant No. 11980002. D.E. acknowledges the support of MECESUP UCH0008 and FONDAP Grant No. 11980002. V.M.K. acknowledges NSF support under Grant No. INT-0336343, DARPA support under Grant No. DARPA-N00014-03-1-0900, and NIH/NSF support under Grant No. EF-0326757.

-
- [1] J. D. Murray, *Mathematical Biology* (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
 - [2] M. A. Fuentes, M. N. Kuperman, and V. M. Kenkre, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 158104 (2003).
 - [3] V. M. Kenkre, in *Modern Challenges in Statistical Mechanics: Patterns, Noise, and the Interplay of Nonlinearity and Complexity*, edited by V. M. Kenkre and K. Lindenberg, AIP Conf. Proc. No. 658 (AIP, Melville, 2003).
 - [4] M. A. Fuentes, M. N. Kuperman, and V. M. Kenkre, *J. Phys. Chem. B* **108**, 10505 (2004).
 - [5] D. G. Kendall, *Mathematics and Computer Science in Biology and Medicine* (Medical Research Council, London, 1965).
 - [6] R. E. Goldstein, D. J. Muraki, and D. M. Petrich, *Phys. Rev. E* **53**, 3933 (1996).
 - [7] E. Hernandez-Garcia and C. Lopez, *Phys. Rev. E* **70**, 016216 (2004); C. Lopez and E. Hernandez-Garcia, *Physica D* **199**, 223 (2004).
 - [8] E. Gilad, J. von Hardenberg, A. Provenzale, M. Shachak, and E. Meron, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 098105 (2004).
 - [9] W. C. Allee, *The Social Life of Animals* (Beacon Press, Boston, 1938).
 - [10] F. Courchamp, T. Clutton-Brock, and B. Grenfell, *Trends Ecol. Evol.* **14**, 405 (1999); P.A. Stephens and W. J. Sunderland, *ibid.* **14**, 401 (1999); C. W. Fowler and J. D. Baker, *Rep. Int. Whal. Comm.* **41**, 545 (1999).
 - [11] P. Couillet, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **12**, 245 (2002).
 - [12] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
 - [13] Y. Pomeau, *Physica D* **23**, 3 (1986).
 - [14] M. G. Clerc and C. Falcon, *Physica A* **356**, 48 (2005).
 - [15] P. Couillet, C. Riera, and C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3069 (2002).
 - [16] P. Couillet, C. Elphick, and D. Repaux, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 431 (1987).
 - [17] M. G. Clerc, D. Escaff; and V. M. Kenkre (unpublished).
 - [18] K. K. Manne, A. J. Hurd, and V. M. Kenkre, *Phys. Rev. E* **61**, 4177 (2000).



Solitary waves in van der Waals-like transition in fluidized granular matter

M.G. Clerc*, D. Escaff

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile,
Casilla 487-3 and 653, Santiago, Chile*

Available online 19 May 2006

Abstract

Solitary wave solutions exhibited at the onset of the phase transition in fluidized granular matter are perused. In the quasi-sonic limit the system is modeled by two Korteweg de Vries equations. We study the solitary wave interactions in order to understand the rich dynamics exhibited by the fluidized granular system at the onset of the gas–liquid phase transition.

© 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Granular matter; Soliton; Phase transition

Granular matter, when fluidized by continuous energy injection exhibits a variety of phenomena that resemble those of molecular fluid-like waves propagation, pattern formation, and phase transition, to mention a few. The main difference with molecular fluids is that, at collisions, grains dissipate kinetic energy into the internal degrees of freedom of the grains. Hence, energy must be supplied continuously to sustain a fluidized regime. Experimentally, energy is usually injected through vibrating walls or by the gravitational field. Recently, it has been shown that a fluidized granular system in two spatial dimensions with a vibrating wall and without gravity exhibits a phase separation [1–4], analogous to the spinodal decomposition of the gas–liquid transition in the van der Waals (VdW) model [5]. Molecular dynamics simulations of a granular system at the onset of phase transition reveal a rich dynamical behavior characterized by appearance, coalescence, and disappearance of bubbles (or clusters). The mechanism for this phase separation is triggered by a negative compressibility [1,2].

A continuous or macroscopic description of granular flows is still an open question. There are several models with different approximation schemes that produce different hydrodynamic models. Nevertheless, using simple generic arguments, independent of the specific macroscopic model, in Refs. [1,2] it is shown that a fluidized granular system that exhibits phase separation can be described, close to the critical point, in good detail by *the VdW normal form*. This model shows that the appearance, coalescence, interaction, and disappearance of bubbles is mediated by nonlinear waves.

*Corresponding author.

E-mail address: marcel@galileo.dfi.uchile.cl (M.G. Clerc).

Our aim will be to identify and characterize the solitary waves of the VdW model, and to study their interactions in order to understand the rich dynamics that the fluidized granular system exhibits at the onset of the phase transition. In the quasi-sonic limit the system can be well described by two Korteweg de Vries equations.

The VdW normal form is [1,2]

$$\partial_{tt}u = \partial_{xx}(\varepsilon u + u^3 - \partial_{xx}u + v\partial_t u), \quad (1)$$

where u is the field that describes the correction to the critical average vertical density, x the coordinate that describes the horizontal direction of the granular system, ε the bifurcation parameter which is proportional to the compressibility coefficient, and v the effective viscosity. The two first terms in the right-hand side give account of the pressure around the critical average vertical density. The term with high spatial derivative depicts the interface tension [2].

Solitary wave solutions: The inviscid VdW model has the form $\partial_{tt}u = \partial_{xx}(\varepsilon u + u^3 - \partial_{xx}u)$. In the moving framework, $z = x - ct$, the previous model reduces to a Newton type equation

$$\frac{d^2u}{dz^2} = (\varepsilon - c^2)u + u^3 - \lambda,$$

where λ is an integration constant related to the total mass, compatible with periodical or zero flux boundary conditions. The equilibrium fixed points (u_0) of this system satisfy $\lambda = (\varepsilon - c^2)u_0 + u_0^3$. It is easy to show that, when $|\lambda| < 2(c^2 - \varepsilon)/3\sqrt{3}$ and $\varepsilon < c^2$, this cubic equation has three real solutions, otherwise it just has one solution. In the first case, two of them are hyperbolic fixed points, while the other is a center fixed point. Then, Newton type equations in general, have a homoclinic loop, which corresponds to a traveling solitary wave of the inviscid VdW model. To have a solitary wave solution, we must impose

$$u_0^2 + \varepsilon < c^2 < v_s^2 \equiv 3u_0^2 + \varepsilon. \quad (2)$$

Hence, the wave speed is bounded. v_s is the sound speed about the homogeneous state u_0 , therefore the *solitary waves are subsonic*. Due to the symmetry of $\lambda \rightarrow -\lambda$ and $u \rightarrow -u$, we will suppose without loss of generality $\lambda > 0$. In that case, the homoclinic orbit lies below the negative state $u_0 < 0$ (the lowest fixed point). And we have *bright solitary wave solutions*

$$u = u_0 + \frac{2(3u_0^2 + \varepsilon - c^2)}{\sqrt{2(c^2 - u_0^2 - \varepsilon)} \operatorname{Cosh} \left[\sqrt{(3u_0^2 + \varepsilon - c^2)}((x - x_0) - ct) \right] - 2u_0}. \quad (3)$$

In the opposite case, $\lambda < 0$, we have *dark solitary wave solutions*, which hold up the upper fixed point. In the limiting case, $\lambda = 0$, there are two heteroclinic connections. Hence, we have kink or anti-kink solutions. Fig. 1 illustrates the solitary wave solution.

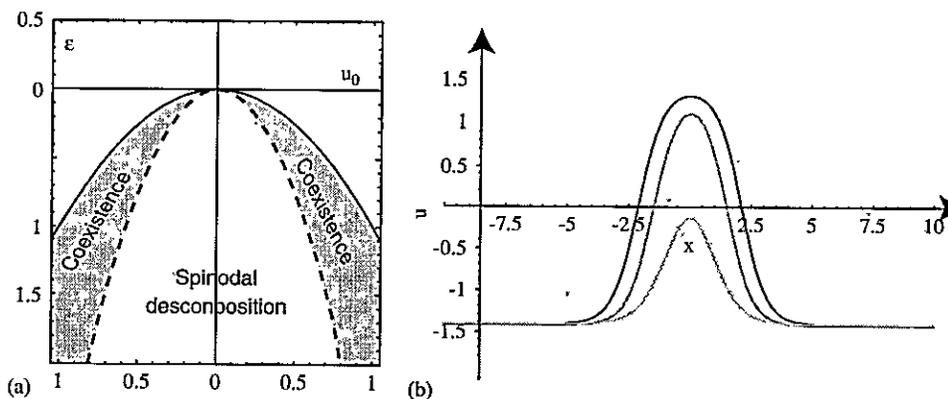


Fig. 1. Bifurcation diagram of VdW model and solitary waves: (a) bifurcation diagram, (b) three different solitary waves supported by the same homogeneous state.

The amplitude of the solitary wave decreases with the speed and has the analytical expression $2(3u_0^2 + \varepsilon - c^2)/(-2u_0 + \sqrt{2(c^2 - u_0^2 - \varepsilon)})$. When the speed gets near to the sound speed, the solitary wave tends to the homogeneous state $u = u_0$. On the other hand, when the wave speed decreases until $u_0^2 + \varepsilon$, the solitary wave tends to the symmetric homogeneous state $u = -u_0$. The previous analysis is valid only in the parameter region where there is no phase separation ($\varepsilon > -u_0^2$, cf. Fig. 1). In the coexistence region, $-3u_0^2 < \varepsilon < -u_0^2$ (see Fig. 1), the lower limit of speed exists no more. In this case, when the speed tends to zero the solitary wave tends to an unstable bubble. This solution is the nucleation barrier between the homogeneous-state and the phase separation one. In the spinodal decomposition region, $\varepsilon < -3u_0^2$ (see Fig. 1), there is no solitary wave solution. However, in a state composed of one or more bubbles, there are regions in space where they are almost homogeneous. Then, we locally have a stable homogeneous state, which can support solitaire waves (cf. Fig. 2). These waves are well approximated by (3).

Quasi-sonic solitons: If we consider the solitary wave speed near the sound speed, $c = v_s - w$ ($w/v_s \ll 1$), and $u_0 \sim \mathcal{O}(1)$, then we can approximate (3) by

$$u - u_0 \simeq -\frac{v_s w}{u_0} \text{Sech}^2 \left[\sqrt{\frac{v_s w}{2}} \{x - (v_s - w)t - x_0\} \right]. \tag{4}$$

It is a typical soliton solution of Beussinesq or Korteweg de Vries equation, with the standard relation between its width (σ) and its amplitude (A): $\sigma \propto 1/\sqrt{A}$ where u_0 is fixed.

Considering the change of variables; $T = v_s^2 t$, $X = v_s x$ and $u = u_0 + (v_s^2/3|u_0|)v$; and defining $\beta = v_s^2/9u_0^2$, we can rewrite the inviscid VdW model as

$$\partial_{TT}v = \partial_{XX}(v - v^2 + \beta v^3 - \partial_{XX}v).$$

Taking as inspiration the KdV relation between the width and the amplitude, we can introduce the scaling $\xi = \chi(X - T)$, $\theta = \chi(X + T)$, $\tau = \chi^3 T$, $v = \sum_{n=1}^{\infty} \chi^{2n} v_n$, where $\chi \sim \mathcal{O}(\sqrt{w})$. The first order in χ gives us the wave equation

$$\partial_{\theta\xi}v_1 = 0 \implies v_1 = f(\xi) + g(\theta),$$

that has the D'Alembert solution shown above. At second order we have

$$4\partial_{\theta\xi}v_2 = \partial_{\xi}[-2\partial_{\tau} + 2f\partial_{\xi} + \partial_{\xi\xi\xi}]f + \partial_{\theta}[2\partial_{\tau} + 2g\partial_{\theta} + \partial_{\theta\theta\theta}]g + 2(\partial_{\theta} + \partial_{\xi})^2fg,$$

which is a linear inhomogeneous equation for v_2 . In order to have a bounded solution for v_2 , we impose (solvability conditions)

$$-2\partial_{\tau}f + 2f\partial_{\xi}f + \partial_{\xi\xi\xi}f = 0,$$

$$2\partial_{\tau}g + 2g\partial_{\theta}g + \partial_{\theta\theta\theta}g = 0.$$

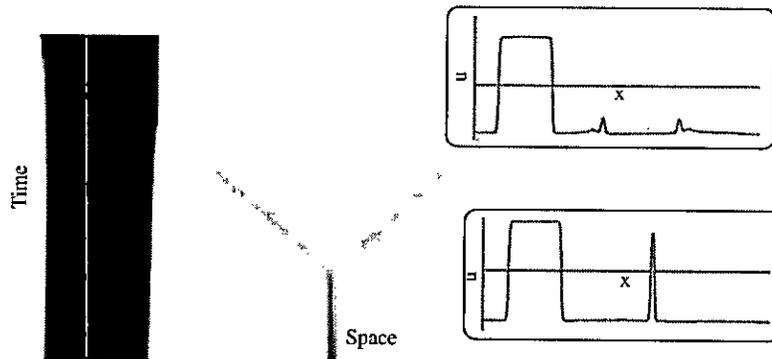


Fig. 2. Spatio temporal evolution of the VdW model at the onset of the phase transition, with time running up. The gray scale is proportional to the field u , with darker regions representing denser regions in the system. The inset figures illustrate two different snapshots before and after solitary wave emission.

Hence, we have two uncoupled KdV equations, which are associated to right and left moving frameworks with sound speed, respectively. The difference in sign guarantees that their solutions move against the sound velocity, that is, they are subsonic. The solitons (4) are exact solutions of these KdV equations. The advantage of having these KdV approximations consists in having a well-known integrable system [6]. For instance, when two solitons, at the same moving framework, collide, they just undergo a change in their phases. Then, they are genuine solitons, in the sense that they preserve their structure after a collision.

Left–right soliton interaction: Up to first order in χ , the left-waves do not interact with right-waves. To study the interaction between these waves, we must solve the next order. After imposing the solvability condition, we have

$$v_2 = \frac{1}{2} \left[(\partial_{\theta} g) \left(\int d\xi f \right) + 2fg + (\partial_{\xi} f) \left(\int d\theta g \right) \right].$$

Note that we have the freedom of an arbitrary integration constant. We can solve this ambiguity as in perturbation Quantum Mechanics theory, that is, imposing that the higher order corrections are orthogonal to the first one (i.e., do not contain any D'Alembert solution). Therefore, if we choose g and f as soliton profile (cf. Eq. (4)), then, as a consequence of the second-order correction v_2 , we can infer that at soliton collision, the field u is higher and thinner than the superposition of both solitons. After the collision the solitons lose their reflection symmetry with respect to the maximum.

When the viscosity ν is taken into consideration the solitary waves become unstable and they exhibit diffusive behavior. However, for small viscosity the decay time is small enough for the solitary waves to mediate the interaction between the bubble at the onset of phase transition. The experimental and numerical (molecular dynamics simulations) study of the solitary waves close to the phase transition is in progress.

The simulation software *DimX* developed in the laboratory INLN in France has been used for all the numerical simulations. M.G.C. acknowledges the support of FONDECYT projects 1051117. M.G.C and D.E. thank the support of FONDAP Grant 11980002, and ring program ATC15 of Programa Bicentenario.

References

- [1] M. Argentina, M.G. Clerc, R. Soto, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 044301.
- [2] C. Cartes, M.G. Clerc, R. Soto, Phys. Rev. E 70 (2004) 031302.
- [3] E. Livne, B. Meerson, P.V. Sasorov, Phys. Rev. E 65 (2002) 021302.
- [4] J.J. Brey, M.J. Ruiz-Montero, F. Moreno, R. Garcia-Rojo, Phys. Rev. E 65 (2002) 061302.
- [5] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Statistical Physics, Pergamon Press, New York, 1969.
- [6] J.C. Eilbeck, R.K. Dodd, J.D. Gibbon, H.C. Morris, Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, London, 1982.

Depinning dynamics of interface connecting stripe pattern and uniform state

Marcel G. Clerc, Daniel Escaff and René Rojas
*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas,
 Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile.*

Interfaces in two-dimensional systems exhibit unexpected complex dynamics behaviors, the dynamics of an border connecting a stripe pattern and uniform state are perused. Numerical simulations, of a prototype isotropic model, show zig-zag instability and complex coarsening process. These interfaces do not exhibit the locking phenomenon, depinning effect. Close to spatial bifurcation, the amplitude equation allows us to characterize the coarsening dynamics and the universal behavior exhibits by the model. Numerical fitting of average length size shows that initially satisfies a power law $t^{-0.21}$ and afterwards progress to $\text{Log}^{-1}(t)$ law. Numerical simulations of anisotropic model exhibits pinning effect, this behavior is understood in framework of amplitude equation.

PACS numbers: 05.45.-a, 64.75.+g

Non equilibrium processes often lead in nature to pattern formation developed from a homogeneous state through the spontaneous breaking of symmetries present in the system [1]. In the course of recent decades, much effort has been devoted to the study of pattern formation (see review [2] and the references therein) arising in systems such as chemical or catalytic reaction systems, gas discharge systems, CO₂ lasers, liquid crystals, hydrodynamic or electroconvective instabilities and granular matter (see review [3]), for mention a few. A unified description for the dynamics of spatial periodic structures developed at the onset of bifurcation is achieved by means of amplitude equations for the critical modes. Such a description is valid in the case of weak nonlinearities and for a slow spatial and temporal modulation of the base pattern [2]. As an example, the Newell-Whitehead equation [4] describes the dynamics of a stripe pattern formed in two-dimensional system. Another ubiquitous phenomenon in nature is the interface dynamics or *front propagation*. The concept of front propagation, emerged in the field of population dynamics [5, 6], has gained growing interest in biology [7], chemistry [8, 9], physics [2, 10, 11] and mathematics [12]. These interfaces connect two extended states, such as: uniforms, patterns, oscillatory, standing waves, spatio-temporal chaotic and so forth. the main feature of front connections is they are propagative, that is, the system under study displays a moving interface.

In one-dimensional system, the most study front is that links two uniform states [7]. In the case that one of these states is unstable and the other is stable, Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov front [5, 6], the stable state invades the unstable one. The speed of propagation is not unique and it is determined by the asymptotic shape of front [7]. This type of front has played a fundamental role to understand population dynamics. For an interface connecting two uniform stable states, *normal form* [13], the most favorable state (energetically) invades the other one and the speed of the front is unique. This speed is zero, that is the front is motionless, at the Maxwell point [14]. The above picture changes, when one considers an interface connecting a pattern state and

a uniform one or two patterns. As consequence of spatial broken of symmetry, the interface is motionless in a range of parameter, pinning range [14]. This behavior is called locking phenomenon or pinning effect. This phenomenon and pinning range result from the interaction of the large-scale variation of the interface with the small scale underlying in the pattern. Analytically, this mechanism is figured out by means of amended amplitude equation [15, 16]. In bidimensional dynamical systems, meantime, few experimental and theoretical studies have been performed on front connecting pattern and uniform state [19, 20, 21, 22].

The aim of this letter is to study the dynamical behaviors of a front connecting a stripe pattern with a uniform state. Numerical simulation of the isotropic Swift-Hohenberg equation shows that flat interface are transversely unstable and do not exhibit pinning effect, *depinning*. This unstable behavior is characterized by exhibits an initial wave number and subsequently is replaced by zigzag dynamics, which presents a complex coarsening. In order to explain this behavior, close to spatial bifurcation, we make use of the Newell-Whitehead-Segel equation, which describes properly the dynamics observed in the prototype model. Numerically the amplitude equation allow us describe the coarsening dynamics exhibits by the system. The average length size initially satisfies a power law $t^{-0.21}$ and later on satisfies a $\ln^{-1}(t)$ law. Numerical simulations of prototype anisotropic model

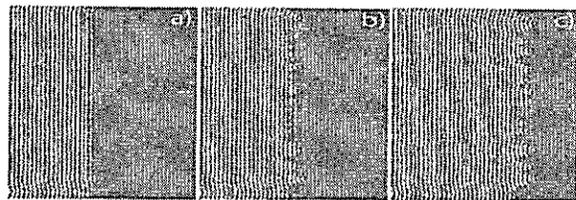


FIG. 1: Depinning effect: Numerical simulation of model (1), demonstrating that the flat interface is unstable. The parameters have been chosen $\epsilon = -0.16$, $\nu = 1.0$, and $q = 0.9$. The time increases in the frames from left to right.

exhibits pinning effect, this behavior is understood in framework of amplitude equation.

A simple model that exhibits coexistence between uniform state and stripe pattern is (subcritical Swift-Hohenberg equation [2])

$$\partial_t u = \varepsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\nabla^2 + q^2) u, \quad (1)$$

where $u(x, t)$ is an order parameter, $\varepsilon - q^4$ is the bifurcation parameter, q is the wave number of stripe pattern, ν the control parameter of the type of bifurcation (supercritical or subcritical), and ∇^2 is the laplacian operator. The model (1) describes the confluence of a stationary and an spatial subcritical bifurcation with reflection symmetry ($u \rightarrow -u$), when the parameters scale as $u \sim \varepsilon^{1/4}$, $\nu \sim \varepsilon^{1/2}$, $q \sim \varepsilon^{1/4}$, $\partial_t \sim \varepsilon$ and $\nabla \sim \varepsilon^{1/4}$ ($\varepsilon \ll 1$). This bifurcation is a codimension-three-point, that is, physically one needs to fix three parameters to observe the above dynamics. The above model is often employed in the description of patterns observed in Rayleigh-Benard convection [2]. For small and negative ε and $9\nu^2/40 \equiv \varepsilon_{sn} < \varepsilon < 0$, the system exhibits coexistence between a uniform state $u(x, y, t) = 0$ and a stripe pattern $u(x, y, t) = \sqrt{\nu} \left(\sqrt{2(1 + \sqrt{1 + 40\varepsilon/9\nu})} \cos(\vec{q} \cdot \vec{r}) \right) + o(\nu^{5/2})$, where \vec{q} is an arbitrary vector with modulus q . For $\varepsilon = \varepsilon_{sn}$ the model has a saddle-node bifurcation that give rises to stable and unstable pattern and for $\varepsilon = 0$ the uniform state becomes unstable. When one considers the above model in one spatial dimension, it is well-know that in coexistence region ($\varepsilon_{sn} < \varepsilon < 0$) the model exhibits a front connecting a spatial period solution and uniform state. For ε close to 0 (ε_{sn}), the pattern (uniform) state invades the uniform (pattern) state, i.e. the system displays front propagation. The front is motionless at the interval $\varepsilon_- < \varepsilon < \varepsilon_+$, pinning range [14]. Note that, the more favorable energetically state does not invade the less favorable state.

In two spatial dimension the above scenarios changes drastically. If one considers similar parameter setup ($\varepsilon_{sn} < \varepsilon_- < \varepsilon < \varepsilon_+ < 0$), the model (1) does not exhibits locking phenomenon of the interface (depinning effect), that is, the flat interface connecting the stripe pattern and uniform state is not motionless and it shows a transversal instability. The mechanics of depinning effect is illustrated in Fig.1. Initially, the interface develops an instability characterized by a well-defined wavelength (cf. Fig. 1a). Later on, the sinusoidal interface becomes an angled line composed of pieces of interface turned with well define angles, *zig-facet* or *zag-facet* (see fig. 1b and 1c). Two adjacent facets, whose orientations are opposite, are connected by a region of strong curvature of the line that we term *corner*. The dynamics shows by the interface consists then in reassembling domains of even orientation, the angle facets staying unchanged, *coarsening dynamics*. This process occurs thanks to annihilations of corners and without characteristic length scale. Actually, the averaged domain size increases regularly in time (cf.

Fig. 1). A similar instability have been observed in an interface connecting two uniform states in the ising wall of nematic liquid crystal [18]. It is important to note that coarsening process exhibit by this system is characterized by a power law \sqrt{t} for the average length scale. Instead, the dynamic depicted in Fig.1 has a complex coarsening process as we see later. In one-dimensional system, the dynamics, which tends to separate the facets, is the one-dimensional counterpart of the spinodal decomposition dynamics observed in conservative binary mixtures and a prototype model that gives account of this dynamics is Cahn-Hilliard equation [17].

The depinning exhibits by model (1) is triggered by the isotropy features of stripe orientation, that is the orientation of the stripe is arbitrary and it is determined by the initial condition, and whose influence is emphasized in the wall. Indeed, at the interface the system tries to developed stripe without preferential direction. It is worth to remark that the zigzag exhibits by the interface influences the stripe phase close to interface and then this spreads inside of pattern, this progression play a fundamental role in the coarsening process. Recently, it has been reported a depinning effect between stripe and uniform state in super-critical Swift-Hohenberg model [20]. In this system the flat interface presents a zigzag instability followed by nucleation of convex-concave declination pairs and finally the system displays labyrinth pattern. Hence, the nonlinear response in this model do not saturate the instability and give rises to coarsening process.

To explain the dynamic exhibits by the interface of model (1) in an unified framework, close to spatial bifurcation ($\varepsilon \ll 1$, $\nu \sim \varepsilon^{1/2}$), we can introduce the ansatz

$$u = \sqrt{\frac{2\nu}{10}} \varepsilon^{1/4} \left\{ A \left(X = \frac{x}{l_0}, Y = \frac{y}{l_0}, \tau = \frac{9\nu^2 |\varepsilon|}{10} t \right) e^{iqx} + w_1(x, y, \tau) + c.c \right\}, \quad (2)$$

where $l_0 = 2\sqrt{10}q/3\sqrt{|\varepsilon|}$, and $A(X, Y, \tau)$ is the envelope of pattern that describes the front solution (when the envelope is uniform and not null the initial model (1) has stripe pattern), $w_1(x, y, \tau)$ is a small correction function of order ε , and $\{X, Y, \tau\}$ are slow variables. In this ansatz (2), we consider q is order one or larger that the other parameters. Introducing the above ansatz in equation (1) and linearizing in w_1 , we find the following solvability

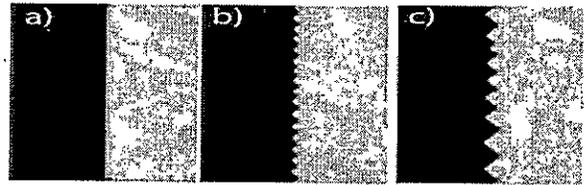


FIG. 2: Zig-Zag instability: Numerical simulation of model (3) with $\varepsilon = \varepsilon_M = -3/16$ and $q = 0.7$, demonstrating that the flat interface is unstable. The time increases in the frames from left to right.

condition (Newell-Whitehead-Segel equation)

$$\partial_\tau A = \epsilon A + |A|^2 A - |A|^4 A + (\partial_x - i \frac{2}{q^2} \partial_{yy})^2 A \quad (3)$$

where $\epsilon \equiv 10\epsilon/9\nu^2$. It is straightforward to show that the system has a front solution connecting two homogeneous states, 0 and $(1 + \sqrt{1 + 4\epsilon})/2$, when $\epsilon < 0$. This model has a solution that gives account of the connection between stripe pattern and uniform state. This front propagates from the stable state (lowest free energy) to the metastable one, and it is static at $\epsilon_M = -3/16$, i.e. in the *Maxwell point*, and it has the form (*flat interface*)

$$A(X - P, Y, \tau)_\pm = \sqrt{\frac{3/4}{1 + e^{\pm\sqrt{3/4}(X-P)}}} e^{i\theta}, \quad (4)$$

where P is the position of flat interface, and θ is an arbitrary phase.

In order to study depinning effect, numerically we consider as initial condition the above front solution with small perturbation (spatial white noise) in the model (3) and the system displays a similar dynamics to subcritical Swift-Hohenberg model (cf. Fig. 2). More precisely, the system primarily develops an interface instability with well-defined wavelength (cf. Fig. 2b). Afterward, the sinusoidal interface becomes zig-zag interface (see fig. 2c) and the dynamics exhibited by the interface consists in reassembling domains, and so the average length-size of domains increase recurrently in time. This process occurs thanks to annihilations of corners and without characteristic length scale. It is worth to note that although the numerical simulation have been done at Maxwell point, the interface propagates from state that represents the stripe to uniform one. A standard method to figure out the dynamics exhibited by the system is to derive an equation for interface. This method consists in use like an ansatz the front solution (4) more a correction, where the continuous parameter P is promoted to a field ($P(Y, \tau)$) [17, 18]. Using this method, we have obtained a generalized Cahn-Hilliard equation, which shows that the

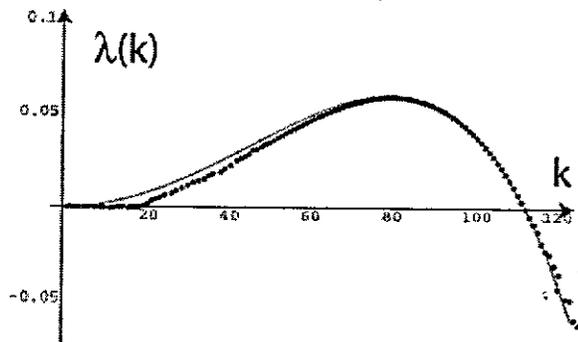


FIG. 3: Dispersion curve characterizing the instability of the flat interface model (3). The continue line is the dispersion curve of Cahn-Hilliard model $\lambda(k) = XX(YYk^2 - k^4)$.

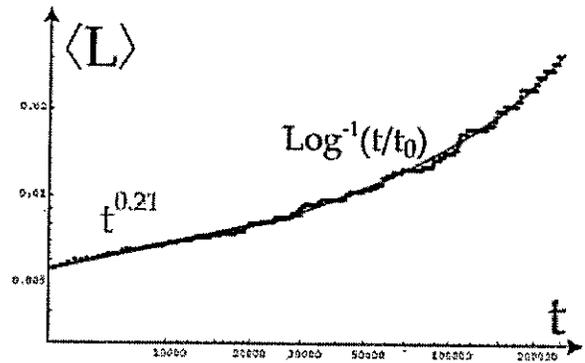


FIG. 4: Average length size $\langle L \rangle$ of model (3), with $\epsilon = -3/16$ and $q = 0.7$, as function of time.

flat interface is marginal (linearly) and nonlinear stable. Hence, this method does not give account of depinning effect. Note that this method is valid for slow spatial variations, that is, small wave number. To comprehend this discrepancy, numerically we have compute the growth rate of each mode with wave number k of flat interface, spectrum (cf. Fig. 3). This spectrum shows that to small wave number the interface is marginal and linearly unstable to finite bandwidth. Therefore, an interface equation inferred from gradient expansion can not give account of this instable behavior. Note that the spectrum shows in Fig. 3 is similar to those exhibit by Cahn-Hilliard equation at phase separation regime (see the continues curve in Fig. 3), then one expects the possibility to observe a zigzag instability and coarsening process if the nonlinear response is appropriate.

Numerically, we compute the average length size $\langle L \rangle$ between two successive extremes points of the interface of model (3). In Fig. 4, it is show the typical time evolution of $\langle L \rangle$. We can recognize two zone, one in which $\langle L \rangle$ increases as power law $t^{0.21}$ (short time) and other in which the growth rate increase systematically (long time). In this zone the evolution of $\langle L \rangle$ is well-fitting by $\text{Log}^{-1}(t/t_0)$, where $t < t_0$. It is worth to remark that the prototype model of zigzag instability and coarsening dynamics for interface like Cahn-Hilliard and generalization of it shown much more inefficient laws (power or logarithmic) than those exhibit by interface of model (3). The origin of this efficient evolution is related to the interaction between interface and pattern phase, because interface generates a strong influence of pattern phase close to it, subsequently phase diffuse inside the pattern and finally phase affects the interface.

The origin of depinning in model (3) is the anisotropic spatial coupled. One way to make symmetric this spatial coupled is consider an anisotropic system that exhibits stripe pattern instability ([2]). To fix idea ideas we consider the following model

$$\partial_t u = \epsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2)^2 u + D \partial_{yy} u, \quad (5)$$

the bifurcation diagram exhibit by the above model is

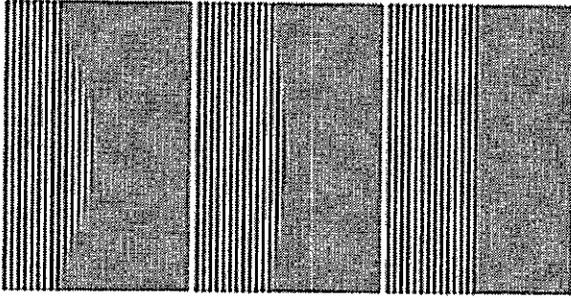


FIG. 5: Pinning effect: Numerical simulation of model (5) with $\epsilon = -0.165$, $\nu = 1.0$, $D = 1.0$ and $q = 0.7$, demonstrating the flat interface is stable. The time increases in the frames from left to right.

similar to those exhibits by (1), the main difference is the spatial instability only occurs in x -direction. In Fig. 5 is shown the diffusive evolution of a front connecting stripe

pattern and uniform state. This system has locking phenomenon and pinning range. By means of the amended amplitude equation it is straight forward to show that the interface satisfy a forced over damped Sine-Gordon equation [23]. In this context it is trivial to figure out the locking phenomenon and pinning range exhibits by anisotropic model (5).

In summary, systems that have coexistence between stable stripe pattern and uniform state can exhibit interface connecting these states. If the system is isotropic (anisotropic) this interface shows depinning (pinning) effects, that is, the flat interface is unstable (stable). Experimental verification in liquid crystal set up are in progress.

The simulation software *DimX* developed by P. Coulet and collaborators at the laboratory INLN in France has been used for all the numerical simulations. The Authors acknowledge the support program ACT 15 of Programa Bicentenario.

- [1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-organization in Non Equilibrium systems* (J.Wiley & sons, New York, 1977).
- [2] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 850 (1993).
- [3] I. S. Aranson and L. S. Tsimring, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 641-692 (2006)
- [4] A.C. Newell and J.A. Whitehead, *J. Fluid. Mech.* **38**, 279 (1969).
- [5] R.A. Fisher, *Ann. Eugenics*, **7**, 335 (1937).
- [6] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and Piskunov, *Bull. Univ. Moskou Ser. Int. Se.* **7(6)**, 1 (1937).
- [7] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
- [8] P. Kife, *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing System*, edited by S. Levin, *Lecture Notes in Biomathematics*, vol. 28 (Springer-Verlag, New-York, 1979).
- [9] Daniel Walgraef, *Spatio-temporal pattern formation* (Springer-Verlag, New York, 1997).
- [10] G. Dee and J.S. Langer, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 383 (1983).
- [11] P. Manneville, *Dissipative structures and weak turbulence*, (Academic Press, San Diego 1990).
- [12] D.G. Aronson and H.F. Weinberger, *Adv. Math.* **30** 33 (1978).
- [13] M.G. Clerc, T. Nagaya, A. Petrossian, C. Riera, and S. Residori, *Eur. Phys. J. D* **28**, 435 (2004); *Physica D* **199**, 149-165 (2004);
- [14] Y. Pomeau, *Physica D* **23**, 3 (1986).
- [15] M.G. Clerc, C. Falcon, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 148302 (2005).
- [16] D. Bensimon, B.I. Shraiman, and V. Croquette, *Phys. Rev. A* **38**, 5461 (1988).
- [17] H. Calisto, M.G. Clerc, R. Rojas, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3805 (2000); M. Argentina, M.G. Clerc, R. Rojas, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. E* **71**, 046210 (2005).
- [18] C. Chevillard, M. Clerc, P. Coulet, J. M. Gilli, *Eur. Phys. J. E* **1**, 179 (2000); *Europhys. Lett.* **58**, 686-692 (2002).
- [19] B. A. Malomed, A. A. Nepomnyashchy, and M. I. Tribelsky, *Phys. Rev. A* **42**, 7244-7263 (1990).
- [20] A. Hagberg, A. Yochelis, H. Yizhaq, C. Elphick, L. Pismen, E. Meron, *Physica D* **217**, 186 (2006).
- [21] E. Bodenschatz, J.R. de Brünyn, G. Ahlers, and D.S. Cannell, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 30783081 (1991).
- [22] C. Durniak, M. Taki, M. Thidi, P. L. Ramazza, U. Bortolozzo, and G. Kozyreff *Phys. Rev. E* **72**, 026607 (2005)
- [23] M.G. Clerc, D. Escaff, C. Falcon, R. Rojas and E. Tirapegui, to submitted to *J. Eur. Phys. D*

Noise induced rolls propagation

M.G. Clerc¹, C. Falcon², D. Escaff³ and E. Tirapegui¹

¹ *Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile.*

² *Laboratoire de Physique Statistique, École Normale Supérieure 24, rue Lhomond F - 75231 Paris Cedex 05, France.*

³ *Départamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Casilla 659, Santiago, Chile.*

Abstract

Interfaces in two-dimensional systems exhibit unexpected complex dynamical behaviors. We present a robust effect of noise in two dimensional extended systems: the motion of a static front connecting a stripe pattern with uniform state due to fluctuations. Numerical simulations of a prototype model show that noise induces rolls propagation. To give a unified description of this robust effect we place ourselves at the onset of the spatial bifurcation and we derive an stochastic normal form, which exhibits the same dynamics. Close to the Maxwell point, an interface equation is obtained, the over damping forced-Sine-Gordon model, which allows us to explain origin of this stochastic phenomenon.

1 INTRODUCTION

The description of macroscopic matter, that is, matter composed by a large number of microscopic constituents, is usually done using a small number of coarse-grained or macroscopic variables. When spatial inhomogeneities are considered these variables are spatio-temporal fields whose evolution is determined by deterministic partial differential equations (PDE). This reduction is possible due to a separation of time and space scales, which allows a description in terms of the slowly varying macroscopic variables, which are in fact fluctuating variables due to the elimination of a large number of fast variables whose effect can be modeled including suitable stochastic terms, *noise*, in the PDE. The influence of noise in nonlinear systems has been the subject of intense experimental and theoretical investigations in the last decades [1–13]. Far from being merely a perturbation to the idealized deterministic evolution or an undesirable source of randomness and disorganization, noise can induce specific and even counterintuitive dynamical behavior. The most well-known examples in zero dimensional systems are noise induced transitions [1, 2] and stochastic resonance (see the review [3] and references therein). More recently, examples in spatially extended system were found, such as, noise induced phase transitions [4–7], noise-induced patterns [8–10], stochastic spatio-temporal intermittency [11], noise-induced travelling waves [12] and noise induced front propagation in one space dimension [13]. Here, we present a new robust effect of noise in two dimensional extended systems: *the motion of a static front connecting a stripe pattern with a uniform state due to additive*

noise. A first preliminary discussion of this effect in one space dimension was done [13–15] and the aim of this article is to study and characterize the universal mechanism which is at the origin of the front motion in the presence of noise.

The concept of front propagation emerged in the field of populations dynamics [16], and the interest in this type of problems has been growing steadily in Chemistry, Physics and Mathematics. In Physics, front propagation plays a central role in a large variety of situations, ranging from reaction diffusion models, to general pattern forming systems (see the review [17] and references therein). A front solution is a solution which links spatially two extended states. One of the most studied front solutions in one-extended systems is the front connecting a stable uniform state with an unstable one: *the FKPP-front* [18], the stable state invades the unstable one. The speed of propagation of this type of front is not unique and it is fixed by the initial conditions [19]. Another well-known type of front, the *normal front*, connects two stable uniform states [20]. The speed of this kind of front is unique and for a variational system it is proportional to the difference of free energy between the two uniform states. In Fig. 1 the dashed curve represents the typical behavior of the speed of a normal front as a function of an arbitrary parameter. Note that the speed of a front is zero only at the Maxwell point where both states have the same energy. This picture is modified when one considers a front connecting a spatially periodic state with a uniform one, which we call P-front in one dimensional extended systems. In this case the speed is zero not only in one point but in a whole interval of variation of the relevant parameter, *the pinning range* [21], and additive noise will induce front motion [13–15]. In Fig. 1 the continuous line represents the typical speed of these fronts and the interval $[\eta_a, \eta_b]$ represents the pinning range. The effect of additive noise on the speed of a normal front is just a random fluctuation of its speed. On the other hand the influence of multiplicative noise in a front, which will not occupy us in this paper, has been extensively studied in the literature, particularly concerning the issue of velocity selection [22].

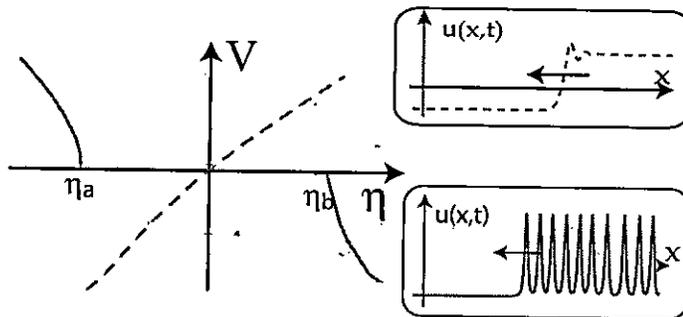


Fig. 1. Speed of the front as function of one parameter. The dashed curve depicts the typical behavior of the speed of a normal front as function of arbitrary parameter and the continue curve represents the speed of a front that link a spatial periodic state and uniform one. For the sake of simplicity the origin represents the Maxwell point. The pinning range is depicted by the interval between η_a and η_b . The inset figures represent a normal (upper) and P-front(lower), respectively.

In two spatial dimensions (2d), the systems exhibit a rich variety of extended states like uniform states, patterns (rolls, hexagons, squares and so forth), waves, chaos, oscillatory, spatio-temporal chaos and so on. Hence, the variety of interfaces or front solutions is vast. However, few experimental and theoretical studies in two-extended dimensions have been carried out on fronts connecting patterns and uniform states [23–26]. Recently, numerical simulations of

a prototype model, the isotropic Swift-Hohenberg equation, has shown that a flat interface connecting a stripe pattern with a uniform state is transversely unstable and do not exhibit the locking phenomena or pinning effect (depinning effect [24, 27]). This unstable behavior is characterized by the appearance of an initial wave number which is subsequently replaced by zigzag dynamics, which presents a complex coarsening. By means of amplitude equation, we show here that an isotropic and anisotropic system exhibits depinning and pinning effect for an interface connecting a rolls pattern and a uniform state, respectively [27].

The aim of this manuscript is then to study the effect of noise in a static front connecting a stripe patterns with a uniform state in an anisotropic system. From a prototype model, we show that noise induces rolls propagation. To give a universal description of this phenomenon at the onset of a spatial bifurcation, we derive an stochastic normal form [28-34], which exhibits the same dynamical behaviors. Close to the Maxwell point, we deduce an equation for the interface, the over damped forced Sine-Gordon model, which allows us to explain the origin of this stochastic phenomenon. Numerical simulations of the interface equation are in good agreement with the stochastic normal form and prototype model.

2 STABLE INTERFACE CONNECTING A STRIPE PATTERN WITH A UNIFORM STATE

Isotropic systems which exhibit coexistence between an stripe pattern and a uniform state do not have stable interface connecting these state (stable flat interface) [27]. This statement is understood by means of the Newell-Whitehead-Ségel amplitude equation, where the flat interface suffers a transversal instability. We shall see that an anisotropic system can exhibit stable static or movable front between an stripe pattern and a uniform state. A simple anisotropic model that exhibits coexistence between a uniform state and a stripe pattern is

$$\partial_t u = \varepsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2)^2 u + D \partial_{yy} u, \quad (2.1)$$

where $u(x, t)$ is an order parameter, ε is the bifurcation parameter, q is the wave number of the stripe pattern, ν the control parameter of the type of bifurcation (supercritical or subcritical), and D diffusion parameter. The model (2.1) describes the confluence of an stationary and an spatial subcritical bifurcations with reflection symmetry ($u \rightarrow -u$) for an anisotropic system, when the parameters scale as $u \sim \varepsilon^{1/4}$, $\nu \sim \varepsilon^{1/2}$, $q \sim \varepsilon^{1/4}$, $\partial_t \sim \varepsilon$, $\partial_x \sim \varepsilon^{1/4}$, and $\partial_y \sim \varepsilon^{1/2}$ ($\varepsilon \ll 1$). This bifurcation is a codimension three-point, that is, physically one

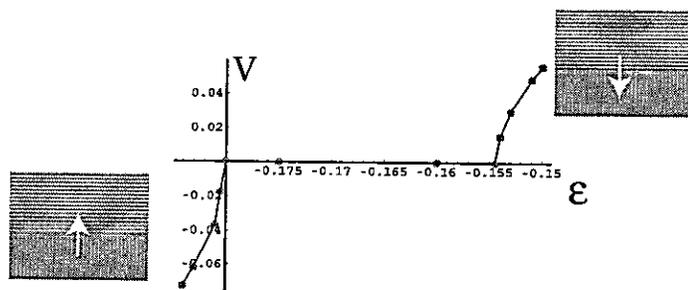


Fig. 2. Speed of the front connecting a stripe pattern with uniform state of model (2.1) as function of bifurcation parameter ε with $q = 0.7$, $\nu = 1.0$, and $D = 1$.

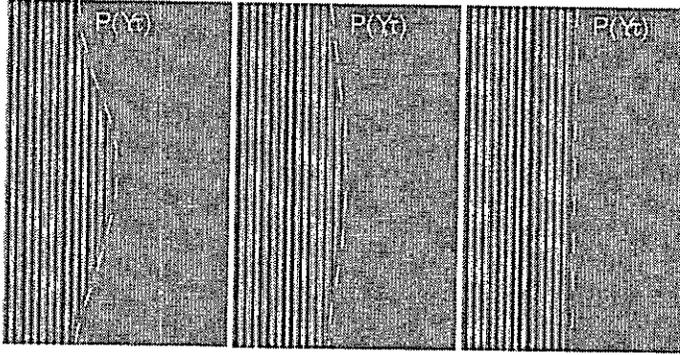


Fig. 3. Pinning effect: Numerical simulation of model (2.1) with $\epsilon = -0.165$, $\nu = 1.0$, $D = 1.0$ and $q = 0.7$, demonstrating that the flat interface is stable. The time increases in the frames from left to right. The dashed curve represents the interface between the different extended states.

needs to fix three parameters to observe the above dynamics. However, in order to observe a front connecting an stripe pattern with a uniform state one only needs to fix one parameter (codimension one: coexistence between different extended states). For small and negative ϵ and $-9\nu^2/40 \equiv \epsilon_{sn} < \epsilon < 0$, the system exhibits coexistence between a uniform state $u(x, y, t) = 0$ and a stripe pattern $u(x, y, t) = \sqrt{\nu} \left(\sqrt{2(1 + \sqrt{1 + 40\epsilon/9\nu})} \cos(qx) \right) + o(\nu^{5/2})$. For $\epsilon = \epsilon_{sn}$ the model has a saddle-node bifurcation that give rises to stable and unstable pattern and for $\epsilon = 0$ the uniform state becomes unstable. When one considers the above model in one spatial dimension ($u(x, y, t) = u(x, t)$), it is well-known that in the coexistence region ($\epsilon_{sn} < \epsilon < 0$) the model exhibits a front connecting a spatially periodic solution and uniform state. For ϵ close to 0 (ϵ_{sn}), the pattern (uniform) state invades the uniform (pattern) state, i.e. the system displays front propagation. The front is motionless at the interval $\epsilon_- < \epsilon < \epsilon_+$, the pinning range [21]. Note that in this region, the state which is energetically more favorable does not invade the less favorable one.

In two spatial dimension the above scenarios continue working due to the anisotropy and the pinning range is renormalized, that is, the locking phenomenon between an stripe pattern and a uniform state persists in 2D. In Fig. 1, we show the pinning range of model (2.1). Inside the pinning range, one expects that the flat interface is transversally stable, that is, a perturbation in the y -direction disappears and the interface converges to the flat state. In Fig. 3, we show the diffusive evolution of this interface.

2.1 Noise induced front propagation

In order to understand the mechanism through which noise modifies the dynamics of the flat interfaces, we consider the model (2.1) with an additive noise

$$\partial_t u = \epsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2) u + D \partial_{yy} u + \sqrt{\eta} \zeta(x, y, t), \quad (2.2)$$

where $\zeta(x, y, t)$ is a gaussian white noise with zero mean value and correlation $\langle \zeta(x, y, t) \zeta(x', y', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(t - t')$, and η represents the intensity of the noise. When additive white noise is taken into account, one may expect random fluctuations of the interface between the two states. However, numerical simulations of above model show that the front propagates

from one state to the other with a stochastic velocity, as it is depicted in Fig. 4. The numerical method used in the simulation is the Runge-Kutta algorithm with time step equal 0.01, and spatial mesh $dx=1/400$ and $dy=1/200$. Depending on the region of parameters, the front can propagate to the periodic spatial state or to the homogeneous one. Hence, noise induces the most favorable state to invade the unfavorable one and the conversion of random fluctuations into direct motion of the interface is responsible of the propagation; noise prefers to create or remove a stripe, because the necessary perturbations to nucleate or destroy a stripe are different.

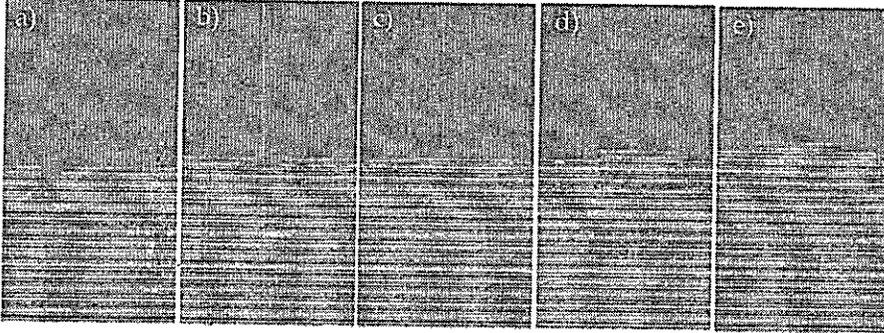


Fig. 4. Noise induces rolls propagation: Numerical simulation of model (2.2) with $\epsilon = -0.165$, $\nu = 1.0$, $D = 1.0$, $q = 0.7$, and $\eta =$. The time increases in the frames from left to right.

3 STOCHASTIC NORMAL FORM

In order to give a unified description of the noise induced interface propagation, we consider the system close to a spatial bifurcation with weak nonlinear response, one has that for small ν and $-9\nu^2/40 < \epsilon < 0$, the system exhibits coexistence between a stable homogenous state $u = 0$ and an stripe pattern. In this parameters region, one finds a front between these two states. A front between a homogeneous and a spatial oscillatory state can be described by the ansatz

$$u = \left\{ A \left(X = \frac{x}{l_1}, Y = \frac{y}{l_2}, \tau = \frac{9\tilde{\nu}^2 |\epsilon| t}{10} \right) e^{iqx} + c.c. + w_1(x, y, \tau) \right\}, \quad (3.1)$$

here $\nu = \tilde{\nu}\sqrt{|\epsilon|}$, $l_1 = 2q\sqrt{10}/3\nu$, $l_2 = \sqrt{10D}/3\nu$ and $A(X, Y, \tau)$ is the envelope of the pattern that describes the front solution (when the envelope is uniform and not null the initial model (2.2) has an stripe pattern), $w_1(x, y, \tau)$ is a small correction, and $\{X, Y, \tau\}$ are slow variables. In this ansatz (3.1), we consider that q is of order one or larger than the other parameters. The ansatz (2.2) is the starting point leading the stochastic normal form as explain in [28-34]. This normal form is the stochastic unfolding of the usual spatial normal form and it reads

$$\partial_\tau B = \sigma B + [B]^2 B - [B]^4 B + \bar{\nabla}^2 B + \frac{\sqrt{\eta}\beta}{|\epsilon|^{3/4}} e^{-iqX/(\alpha\sqrt{|\epsilon|})} \zeta(X, Y, \tau), \quad (3.2)$$

where $\sigma \equiv 10\epsilon/9\nu^2$, $B(X, Y, \tau) \equiv \sqrt{10/3\nu}A(X, Y, \tau)$, $\alpha \equiv 3\tilde{\nu}/2q\sqrt{10}$, $b \equiv 10^{5/2}\sqrt{2q\sqrt{D}/81\sqrt{3\tilde{\nu}^3}}$ and $\bar{\nabla}^2 \equiv \partial_{XX} + \partial_{YY}$.

At this point we comment the role of non resonant terms which one could add to the normal form (3.2). The dominant non-resonant terms, which will induce in the equation of the interface a contribution of the same small exponential order as the noise term is (a_0 and b_0 are $O(1)$ as $|\epsilon| \rightarrow 0$)

$$\left(\frac{a_0}{3}B^3 - \frac{b_0}{2}|B|^2B^3\right)e^{\frac{2i\epsilon X}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}},$$

will give in the equation for the interface an additional term which can be neglected in comparison with the drift terms induced by the noise.

3.1 Noise induces interface propagation

For $-0.25 \leq \epsilon \leq 0$ the deterministic part of model (3.2), exhibits coexistence of two uniform states. Due to the spatial forcing in (3.1) the non null uniform state becomes a stripe pattern. Close to this region one can find a front connecting these states. In fig. 6a, it is illustrated the typical front solution observed in this model inside the pinning range. When we consider the stochastic term in model (3.2) in the pinning range, noise induces propagation of the most favorable state as it is depicted in Fig.6. Due to the universal nature of the normal form [17], for any anisotropic system which exhibits a static interface connecting a stripe pattern and a uniform state, noise will generically induce interface propagation.

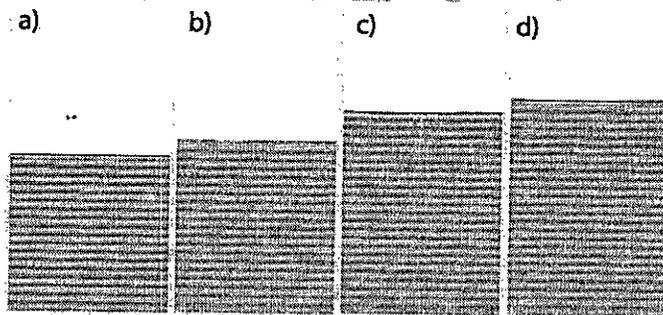


Fig. 5. Noise induces interface propagation: Numerical simulation of model stochastic normal form (3.2) with $\sigma = -0.178$; $q = 8.177$, and $\eta = 0.2$. The time increases in the frames from left to right.

4 INTERFACE EQUATION

When one considers only the deterministic normal form in (3.2), it is straightforward to show that the system exhibits a front solution between two homogeneous states, 0 and $\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 4\sigma})/2}$, when $\sigma < 0$. This front propagates from the stable state (lowest free energy) to the metastable one, and it is static when the Maxwell point is reached $\sigma_M = -3/16$, and it has the form

$$B(X - P, Y, \tau)_{\pm} = \sqrt{\frac{3/4}{1 + e^{\pm\sqrt{3/4}(X-P)}}} e^{i\theta}, \quad (4.1)$$

where P is the position of flat interface, and θ is an arbitrary phase. The front solution B_+ (B_-) represents the interface that links stripe pattern (uniform state) with uniform state

(stripe pattern). It is important to note that the flat interface solution (4.1) is parameterized by a symmetry group characterized by two quantities the position and phase of the interface (P, θ) . To describe the dynamics exhibited by (2.1,3.2) and the locking phenomena, we must consider the stochastic normal form (3.2), which include the noise term with its implicit rapidly varying spatial oscillations due to the factor exponential factor. We consider the noise term as a perturbation and we promote the position of the interface to a field $P(Y, \tau)$, which will describe the dynamical behaviors of this interface. Close to the Maxwell point ($\sigma_M = -3/16$), we use the ansatz (We shall work with from B_-)

$$B(y, \tau) = [R_0(X - P(Y, \tau), Y) + \tilde{\epsilon}\rho(X, P(Y, \tau))] e^{i\theta + \tilde{\epsilon}\Theta(X, P(Y, \tau))}$$

where $R_0 = |B_-|$, $\tilde{\epsilon}$ is a small parameter of order $\Delta\sigma = (\sigma - \sigma_M)$, and $\{\rho, \Theta\}$ are correction functions which depend of time only through $P(Y, \tau)$. Introducing the above ansatz in equation (3.2) and linearizing in $\{\rho, \Theta\}$ we obtain the following solvability condition for the position of the interface

$$\partial_\tau P = \frac{3a}{\sqrt{8}} \Delta\sigma + \partial_{YY} P + |J| \cos\left(\frac{2qP}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}} + \varphi\right) + \frac{\sqrt{\tilde{\eta}}}{\epsilon^{9/4}} \xi(Y, \tau)$$

where $\xi(Y, \tau)$ is a δ -correlated gaussian white noise with mean value zero and correlation $\langle \xi(Y, \tau) \xi(Y', \tau') \rangle = \delta(\tau - \tau') \delta(Y - Y')$, $\tilde{\eta} = \beta^2 \eta a / 8$, $a = \int dx (\partial_x R_0)^2 = 3/4$. J is a complex number given by $J = -(\alpha^2 \beta^2 \eta / 16 \Delta |\epsilon|^{9/2}) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i \frac{2qx}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}} \partial_x R_0(x) \partial_{xx} R_0(x)$. In the previous formula Δ is the discretization length in the y -axis which appears there due to the δ -correlation in space of $\xi(Y, \tau)$. (if this correlation is $\langle \xi(Y, \tau) \xi(Y', \tau') \rangle = C(Y - Y') \delta(\tau - \tau')$ one would have $C(0)$ instead of $1/\Delta$ in formula for J) and $\tan(\varphi) = \Im(J)/\Re(J)$ (\Re and \Im are the real and imaginary part, respectively). Putting $\tau = \tau'/|J|$, $Y = Y'/\sqrt{|J|}$, $P = \alpha\sqrt{|\epsilon|}/2q (\Lambda + \pi/2 - \varphi)$, and $\xi' = |J|^{3/4} \xi$, one obtains (over-damped forced Sine-Gordon model)

$$\partial_{\tau'} \Lambda = \gamma - \sin(\Lambda) + \partial_{Y'Y'} \Lambda + \sqrt{\mu} \xi'(Y', \tau'), \quad (4.2)$$

with the forcing $\gamma = 6aq\Delta\sigma/8|J|\alpha\sqrt{|\epsilon|}$, and the effective noise intensity $\eta' = 4q^2\tilde{\eta}/\alpha^2|J|^2|\epsilon|^{7/2}$, and correlation $\langle \xi'(Y'_1, \tau'_1) \xi'(Y'_2, \tau'_2) \rangle = \delta(Y'_1 - Y'_2) \delta(\tau'_1 - \tau'_2)$. The field Λ describes the evolution of the interface connecting a stripe pattern with a uniform state. The first term of right hand side, of model (4.2), the constant forcing, is associated to the different of energy between the extended states. The periodic term describes the interaction of the large scale envelope variation with the small scale of the pattern state, that is, it is consequence of the spatial forcing modulating the noise in eq. (3.2). The third term, diffusive type, describes the transversal coupling of the interface. In Fig. 3, we show this typical diffusive character. The last term contains the fluctuations, to which is submitted the interface. It is worth to note that the effective stochastic term in the interface equation is a simple extended white noise. In the derivation of the equation (4.2) for the interface, the periodic term in the drift comes from the multiplicative noise term interpreted in the stratonovich sense and we have used the techniques developed in [35] for its derivation. The calculations is very similar to what we have done in [13, 14]

4.1 Dynamics of deterministic interface equation

The dynamics of deterministic over damped Sine-Gordon model ($\mu = 0$) is characterized by the parameter γ . If this parameter $\gamma < -1$, i.e. the uniform state is most favorable than the

stripe pattern, then the uniform state invades the stripe pattern and the flat interface is stable, that is, a perturbation in the interface spreads when the interface propagates. As result of the periodic term the speed of the interface is not uniform, it is oscillatory.

When $\gamma = \gamma_- \equiv -1$, the system exhibits simultaneously infinite equilibriums points at $\Delta_0 = 0, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$, that is, the system presents a simultaneous saddle-node bifurcation. For $|\gamma| < 1$ the model exhibits infinite equilibria, which satisfies $\sin \Delta_0 = -\gamma$. Hence, the system exhibits equilibriums state for $|\gamma| < 1$, which appear and disappear by saddle-node bifurcation in $\gamma = \gamma_-$ and $\gamma = \gamma_+ \equiv 1$, respectively. This region of parameter represents the pinning range of the interface connecting a stripe pattern with a uniform one. Note that the different equilibria has different energy, for negative (positive) γ the most stable state is negative (positive) infinite, as result of the interaction of the large-scale envelope variation with the small scale underlying in the pattern state there are thresholds that separate consecutive stable position of the flat interfaces. The threshold that separates a more energetically position from a lower one has the form of a bump [41], when the perturbation is smaller than this threshold the system evolves to the initial flat state. In the case that the perturbation is larger than the threshold the interface starts to propagate from the perturbation as two counter-propagative fronts and finally the system arrives to a new flat interface with lower global energy, that is, for negative (positive) γ the position of the interface decreases (increases). When $\gamma = 0$, the system reaches the Maxwell point, i.e. all equilibria are energetically equivalent. For $\gamma > 1$, i.e. the stripe pattern is the most favorable state, then this state invades the uniform one and the flat interface is stable and it propagates to the right size.

4.2 Dynamics stochastic interface equation

The above pictures is modified when the stochastic term of model (4.2) is taken into account. Outside the pinning range the noise in average does not modify the deterministic behavior and in the pinning range the noise induces interface propagation. For negative (positive) γ the interface moves to the left (right). In Fig. 6 this propagation is shown. One can figure out the mechanism of this motion: the flat interface is stable, then the small fluctuations spread in the flat interface, however, a large fluctuation can cross the threshold that separates this equilibrium from the a lower energetically one and the interface propagates to the flat interface with lower energy. Hence, we have easily identify the mechanism trough which noise induces rolls or uniform state propagation.

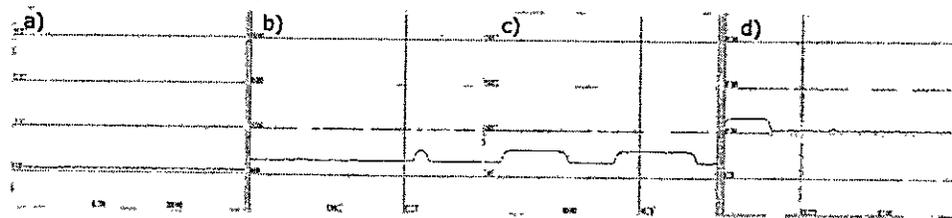


Fig. 6. Numerical simulation of model (4.2) with $\gamma = 0.95$, and $\mu = 1.0$. The time increases in the frames from left to right.. The time increases in the frames from left to right.

5 CONCLUSION

We have presented a new robust effect of noise in two dimensional extended systems: the motion of a static front connecting a stripe patterns with a uniform state due to additive noise. This phenomenon initially can be conjecture from previous results 1D [13, 15], however in isotropic system the effect disappears [24].

Numerical simulations of a prototype model show that noise induces rolls propagation. In order to give a unified description of this effect at the onset of an spatial bifurcation, we derive an stochastic normal form, which exhibits the same phenomenon. Close to the Maxwell point, the equation for the interface is the over damp forced Sine-Gordon model, which allows us to explain origin of this stochastic effect. All these models exhibit qualitative the same dynamical behaviors. The speed of the from can in principle be calculated using similar argument to the ones in [13, 14] and will be published elsewhere.

The simulation software *DimX* developed by P. Coulet and collaborators at INLN, France, has been used for all the numerical simulations. The Authors thanks the support program *anillo* AQT 15 of *Programa Bicentenario*.

References

- [1] N.G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [2] W. Horstenke and R. Lefever, *Noise-induced transition* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [3] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
- [4] J. Gracia-Ojalvo and J.M. Sancho, *Noise in Spatially Extended Systems* (Springer-Verlag, New York, 1999).
- [5] C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo and R. Toral, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3395 (1994).
- [6] C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo, R. Toral and R. Kawai, *Phys. Rev. E* **55**, 4084 (1997).
- [7] J. Garcia-Ojalvo, J.M.R. Parrondo, J.M. Sancho, C. Van den Broeck, *Phys. Rev. E* **54**, 6918 (1996).
- [8] J. Garcia-Ojalvo, A. Hernandez-Machado, and J.M. Sancho, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1542 (1993).
- [9] A. Becker and L. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 955 (1994).
- [10] J. Buceta, M. Ibañes, J.M. Sancho and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **67**, 021113 (2003).
- [11] M. G. Zimmermann, R. Toral, O. Piro, and M. San Miguel *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3612-3615 (2000).
- [12] L.Q. Zhou, X. Jia and Q. Ouyang, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 138301 (2002).
- [13] M.G. Clerc, O. Falcon, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 148302 (2005).
- [14] M.G. Clerc, O. Falcon, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. E* **74**, 011303 (2006)
- [15] I. S. Aranson, B. A. Malomed, L. M. Pismen, and L. S. Tsimring *Phys. Rev. E* **62**, R5-R8 (2000).
- [16] R.A. Fisher, *Ann. Eugenics* **7**, 355 (1937); A. Kolmogorov, L. Petrovsky, and N. Piskunov, *Bull. Univ. Moskou Ser. Int. Se. A* **1**, 1(1937).
- [17] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **850**, 51 (1993).
- [18] P. Collet and J.P. Eckmann, *Instabilities and fronts in extended systems* (Princeton University Press, Princeton 1990).
- [19] W. van Saarloos, *Phys. Rep.* **386**, 29 (2003).
- [20] M.G. Clerc, T. Nagaya, A. Petrossian, C. Riera, and S. Residori, *Eur. Phys. J. D* **28**, 435 (2004); *Physica D* **199**, 149-165 (2004);
- [21] Y. Pomeau, *Physica D* **23**, 3 (1986).
- [22] O.T. Valls, and L.M. Lust, *Phys. Rev. B* **44**, 4326 (1991); J. Armero, J.M. Sancho, J. Casademunt, A.M. Lacasta, L. Ramirez-Piscina, F. Sagues, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3045 (1996); M. A. Santos and J.M. Sancho, *Phys. Rev. E* **59**, 98 (1999) and *Phys. Rev. E* **64**, 016129 (2001); A. Rocco, U. Ebert, and W. van Saarloos, *Phys. Rev. E* **62**, R13 (2000).
- [23] B. A. Malomed, A. A. Nepomnyashchy, and M. I. Tribelsky, *Phys. Rev. A* **42**, 7244 (1990).
- [24] A. Hagberg, A. Yochelis, H. Yizhaq, C. Elphick, L. Pismen, E. Meron, *Physica D* **217**, 186 (2006).
- [25] E. Bodenschatz, J.R. de Bruyn, G. Ahlers, and D.S. Cannell, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 30783081 (1991).
- [26] C. Durniak, M. Taki, M. Tlidi, P. L. Ramazza, U. Bortolozzo, and G. Kozyreff *Phys. Rev. E* **72**, 026607 (2005)

- [27] M.G Clerc and D. Escaff, submitted to Phys. Rev. E.
- [28] C. Elphick, E. Tirapegui, M. Brachet, P. Coulet, G. Iooss, *Physica D* **29**, 95 (1987).
- [29] P. Coulet, C. Elphick, E. Tirapegui, *Phys. letts.* **111**, 277 (1985).
- [30] F. Barras, P.H. Coulet, E. Tirapegui, *J. Stat. Phys.* **45**, 745 (1986).
- [31] C. Elphick, M. Jeanneret, E. Tirapegui, *J. Stat. Phys.* **48**, 925 (1987).
- [32] E. Tirapegui, in *lectures Notes in Mathematics* vol. **1331**, eds. R. Bamón, R. Labarca and Palis Jr. (Springer, 1988).
- [33] O. Descalzi, E. Tirapegui, in *Fundamentals applications of complex system*, eds. G. Zgrablich (Nueva editorial universitaria, UNSL, argentina, 1999).
- [34] C. Elphick, G. Iooss, E. Tirapegui, *Phys. letts.* **A120**, 459 (1987).
- [35] F. Langouche, D. Roekaerts, E. Tirapegui, *Functional integration and semiclassical expansions* (Reidel, Dordrecht, 1982).
- [36] U. Bortolozzo, M.G. Clerc, C. Falcon, S. Residori, and R. Rojas, *Phys. Rev. Letts.* **96**, 214501 (2006).
- [37] D. Bensimon, B.I. Shraiman, and V. Croquette, *Phys. Rev. A* **38**, 5461 (1988).
- [38] M.G. Clerc, and C. Falcon, *Physica A* **356**, 48 (2005).
- [39] M.G. Clerc, A. Petrossian and S. Residori, *Phys. Rev. E*, **71**, 015205(R) (2005).
- [40] J.D. Murray, *Mathematical Biology* (Springer-Verlag, Berlin 1989).
- [41] M. Argentina, P. Coulet, L. Mahadevan, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2803 (1995).
- [42] S. Camazine, J.L. Deneubourg, N.R. Franks, J. Sneyd, G. Theraulaz, and E. Bonabeau, *Self-Organization in Biological Systems* (Princeton University Press, Princeton 2001).