

UCH-PC
DOC - F
P 291
C. 1

Estudio de Complejidad en la Actividad Sísmica del Centro de Chile

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Física
Facultad de Ciencias

por

Denisse Elizabeth del Carmen Pastén Guzmán

Marzo, 2011



Director de Tesis: **Dr. Víctor Muñoz Gálvez**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por la candidata

Denisse Elizabeth del Carmen Pastén Guzmán

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 21 de Enero de 2011.

Director de Tesis

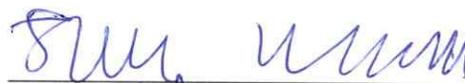
Dr. Víctor Muñoz



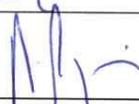


Comisión de Evaluación de la Tesis

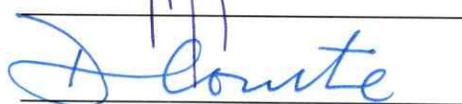
Dr. Alejandro Valdivia (Presidente)



Dr. Rafael Benguria



Dra. Diana Comte





DEDICADA A MI AMADO ADRIÁN...

BIOGRAFÍA



Nací el 21 de agosto de 1981. Mis padres son Luis Pastén y Elizabeth Guzmán. Tengo tres hermanas, Andrea (que es sicóloga), Cristina (quien estudia pedagogía en química) y Mariana (quien acaba de salir del colegio). Inicié mi escolaridad en el colegio El Carmen (número 270), desde 1° a 4° básico. En 1992 nos cambiamos a la comuna de Puente Alto, estuve 5° y 6° básico en el colegio Lincoyan. En el año 1994 me cambié al colegio Nuestra Señora del Huerto, lugar donde continué mis estudios hasta 4° medio. Fue en 7° básico que decidí lo que quería hacer con mi vida: quería ser científica. Al ver un eclipse solar total, decidí ser astrónoma. Desde 1° medio tuve física, y fue gracias a mi profesor, Leonardo Caballero, que me apasioné por la física. Entré a la Universidad de Chile, a estudiar Licentura en Física en el año 2000. Fue un camino complejo, no estuvo exento de desilusiones y en más de una ocasión pensé que esto no era para mí... sin embargo no me podía imaginar haciendo otra cosa. En el año 2005 terminé la Licenciatura y al año siguiente inicié mis estudios de doctorado. Comencé en el área de física experimental de plasmas. Luego de un tiempo empecé a trabajar en estudios estadísticos de sismos, tema que terminó siendo mi trabajo de tesis, debido a una serie de imprevistos que se presentaron en el trabajo experimental. En febrero del año 2009 contraí matrimonio con Adrián Rivera, con quien soy muy feliz. En enero del año 2011 rendí el examen privado y en marzo del mismo año di el examen público para obtener el grado de Doctora en Física.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quisiera agradecer a todas aquellas personas que han participado directa o indirectamente en la preparación de esta tesis. A mi esposo, ya que ha sido él quien me ha acompañado en todos los momentos en los que creí no podría continuar en este camino. A mis padres, por ser ellos quienes me han regalado la mirada de simpatía y afecto que un ser humano necesita para crecer y desarrollarse y por lanzarme al mundo, dejando de lado sus propios temores. A mis hermanas, ya que ellas siempre han estado presentes en mi formación académica y científica, colaborando con sus historias al descanso cuando era necesario. A todos mis compañeros de oficina, desde el inicio del doctorado, por su paciencia y compañía, por haber deseado compartir conmigo este complejo camino del doctorado. A mi director de tesis, Víctor Muñoz, quien me ha guiado con mucho tino y caridad. A mis profesores, de manera especial al profesor Juan Alejandro Valdivia, por la confianza que han tenido en mí. A Marcelo Zambra por haberme acompañado en el inicio del doctorado. Y a todos aquellos que de alguna manera, han tenido relación con la finalización de esta tesis.

Agradezco al Servicio Sismológico Nacional (SSN) por su colaboración entregándonos los datos que utilizaré en esta tesis. Mi permanencia en el plan de doctorado fue posible gracias a una Beca de Doctorado CONICYT.





Índice

1. Introducción	1
1.0.1. Capas de la Tierra	2
1.0.2. Teoría de la tectónica de placas	4
1.0.3. Escalas de medidas sísmicas	6
1.1. Estudios de complejidad en sismos	7
2. Datos sísmicos en Chile	8
2.1. Sismos	8
2.2. Escalas de intensidad	10
2.3. Datos sísmicos de la zona central de Chile	13
3. Ley de Gutenberg-Richter	16
3.1. Ley de Gutenberg-Richter en Chile	17
3.2. Sistemas complejos asociados a leyes de potencia	19
4. Características fractales de la sismicidad	20
4.1. Un poco de historia	20
4.2. Dimensión fractal	21
4.3. Monofractales	22
4.4. ¿Es la distribución espacial sísmica un objeto fractal?	26



4.5. Multifractales	31
4.5.1. Espectro de Dimensiones Fractales de Rényi	32
4.5.2. Espectro de Dimensiones Fractales de Mandelbrot	40
4.6. Espectro multifractal para datos sísmicos	45
4.7. Utilización de un generador para la completación del espectro multifractal	59
4.8. Estudio sobre sismos superficiales	66
4.8.1. Estudio monofractal	67
4.8.2. Estudio multifractal	69
4.9. Algunos comentarios adicionales	74
5. Redes	76
5.1. ¿Qué es una red?	76
5.2. Tipos de redes	78
5.2.1. Red direccionada	78
5.2.2. Red no direccionada	79
5.3. Modelos de redes	80
5.3.1. Erdős-Rényi	80
5.3.2. Watts-Strogatz	81
5.3.3. Barabási-Albert	82
5.4. Caracterización	84
5.4.1. Distribución de conectividad	84
5.4.2. Matriz de adyacencia	84
5.4.3. Longitud del camino medio	84
5.4.4. Coeficiente de clustering	85



VI

5.5. Redes de sismos	88
5.5.1. Red sísmica de Chile	89
5.5.2. Caracterización	90
6. Modelo BK	101
6.1. Descripción del modelo	101
6.2. Resultados	104
7. Conclusiones	108

RESUMEN

En esta tesis se realiza un estudio de sistemas complejos sobre un conjunto de datos sísmicos registrados en la zona central de Chile. Se han caracterizado estos datos con el fin de lograr un acercamiento a la comprensión de su comportamiento y dinámica.

Es de esta manera que se mostró que estos datos se rigen por la Ley de Gutenberg-Richter, y que la medida de la dimensión de su distribución espacial es un número no entero, mostrando la monofractalidad de la distribución espacial de los focos sísmicos y de sus proyecciones en el plano. Se estimó también el espectro de dimensiones fractales de Rényi y Mandelbrot utilizando dos metodologías diferentes. Se realizó un estudio de redes complejas sobre los mismos, concluyendo que son redes libres de escala y de mundo pequeño y que es posible independizar los resultados del tamaño de la celda considerada o del número de datos. Por otro lado, se realizó un estudio en base al modelo de Burridge y Knopoff, comparando estos resultados teóricos con los obtenidos de los datos experimentales, obteniendo una gran concordancia entre ambos resultados.

ABSTRACT

In this thesis a set of seismic data is studied with tools from complex systems. The data set was obtained in the central zone of Chile. The purpose of this analysis is to understand the behavior and dynamics of the planet seismicity and find universal features of seismicity when comparing results with Chilean data and results with data from other seismic zones.

We showed that the data set follows the Gutenberg-Richter law, and that the measure of its spatial dimension is a non integer number, *ie*, this spatial distribution

is a fractal. We estimate the Rényi and Mandelbrot fractal spectrum dimension using two different methods. We did a complex networks study, and we concluded that this data set is a free scale and small world network. Furthermore, via the appropriate scalings, we show that the results are independent of the size of the cell or the size of the data set. On the other hand, we studied the Burrige-Knopoff model and we compared the results of this model with the results obtained from the observed data.

Capítulo 1

Introducción

Desde que el ser humano ha sentido curiosidad por conocer lo que sucede a su alrededor, los fenómenos naturales han sido objeto de su mayor interés; es así, como desde hace siglos, diversos estudios se han dedicado a conocer cómo es el movimiento de la Tierra, de los astros en el cielo, el mecanismo de producción de las erupciones volcánicas, así como la dinámica del planeta en general.

Preguntas fundamentales para el ser humano han surgido de tan sólo observar el cielo, el mar o la tierra. Estas observaciones han llevado al hombre a conocer el movimiento de los planetas, a imitar el nado o vuelo de los animales, a descubrir cuál es la composición fundamental de la materia, entre otros grandes avances.

En particular la inquietud ante fenómenos percibidos como catastróficos, como los eclipses, erupciones volcánicas o sismos de diversas magnitudes, ha ocupado un espacio de relevancia en el estudio de las ciencias. Siempre se ha intentado encontrar una razón del porqué de estos fenómenos naturales. En la antigüedad se creía que se producían debido a la ira de los dioses contra algún pueblo por su mal actuar y que se podían calmar con algún sacrificio, inclusive humano; o la devastación era aceptada simplemente como un castigo merecido por algo hecho. Con el tiempo, estas respuestas no fueron suficientes, y dieron paso a un estudio científico y más

riguroso de los mismos. En esta tesis nos ocuparemos, en particular, de uno de dichos fenómenos, la actividad sísmica, de gran importancia práctica en nuestro país, pero cuyo estudio, por su complejidad, ha registrado avances significativos sólo en los últimos 100 años.

Estos avances nos han permitido conocer de mejor modo la estructura de nuestro planeta, primer paso para entender la sismicidad. A continuación, revisaremos brevemente algunos de los hechos básicos sobre este tema, antes de presentar los resultados de nuestra investigación propiamente tal.

1.0.1. Capas de la Tierra

Gracias a diversos avances en física espacial es que se ha logrado tener mayor información sobre la composición y estructura de ésta. En la actualidad, son dos los modelos en los cuales se puede resumir el conocimiento actual sobre la estructura interna de nuestro planeta: *modelo geoestático* y *modelo geodinámico*.

Modelo geoestático

En este modelo se considera que la Tierra está dividida en tres grandes secciones: *corteza, manto y núcleo*.

1. Corteza: se denomina de esta manera a la zona más superficial de la Tierra, en la cual se encuentran los continentes y los océanos. Tiene un espesor que varía entre los 12 y los 80 km de profundidad.
2. Manto: ésta es la zona que se encuentra entre la corteza y el núcleo. La separación entre la corteza y el manto se conoce como la *discontinuidad de Mohorovicic*. El manto, a su vez, se divide en dos secciones, manto superior y manto

inferior, que están separadas por la *discontinuidad de Repetti*. Tiene una profundidad de 2900 km.

3. Núcleo: es la capa más profunda de la Tierra. Tiene un espesor de 3475 km aproximadamente. La separación entre el manto y el núcleo se *denomina discontinuidad de Gutenberg*. El núcleo se divide, a su vez, en núcleo inferior y núcleo exterior. El núcleo exterior es una zona líquida y viscosa, en la cual se genera el campo magnético de la Tierra, mientras que el núcleo interior es sólido.

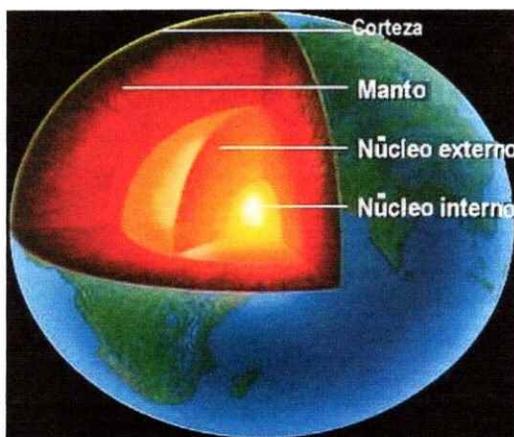


Fig. 1. Ilustración del modelo geostático de capas de la Tierra.

Modelo geodinámico

Este modelo propone una división de la Tierra en cinco capas: *litósfera*, *astenósfera*, *mesósfera*, *capa D* y *endósfera*.

1. Litósfera: ésta es la capa superior del modelo. Es elástica y posee un espesor de 250 km.

2. Astenósfera: es una zona menos sólida, que se comporta como un fluido. En esta zona las ondas sísmicas ven atenuadas su velocidad.
3. Mesósfera: está formada por rocas calientes y sólidas, sin embargo presenta un grado de plasticidad.
4. Capa D: es una zona de separación o transición entre la mesósfera y la endonósfera. Desde esta zona pueden subir rocas calientes hacia la litósfera generando la formación de un volcán.
5. Endósfera: corresponde a la zona más interna en este modelo. Se constituye de dos secciones: una capa externa muy fluida en la que están presentes una serie de corrientes producidas por el movimiento de este fluido, y una capa interna, sólida y a muy alta temperatura.

1.0.2. Teoría de la tectónica de placas

Éste es el último y más aceptado modelo que explica la formación de los continentes, la generación de volcanes y cordones montañosos, además del origen de los sismos. La hipótesis de que la corteza es una capa en constante movimiento y no una superficie rígida fue aceptada alrededor del año 1960. Esta teoría fue la mayor conclusión de la tesis de doctorado de Dietz [1,2], quien, analizando datos sísmicos y de actividad volcánica, evidenció esta movilidad de la corteza terrestre, postulando la existencia de diversas placas, tanto bajo los océanos como bajo los continentes, y que éstas, mediante un movimiento paulatino, eran capaces de generar zonas llamadas de *subducción*, en las que una capa más densa al chocar con otra de menor densidad, se desplaza por debajo de esta última (éste es el caso de todos los límites continentales, donde la placa oceánica se desplaza por debajo de la placa continental).

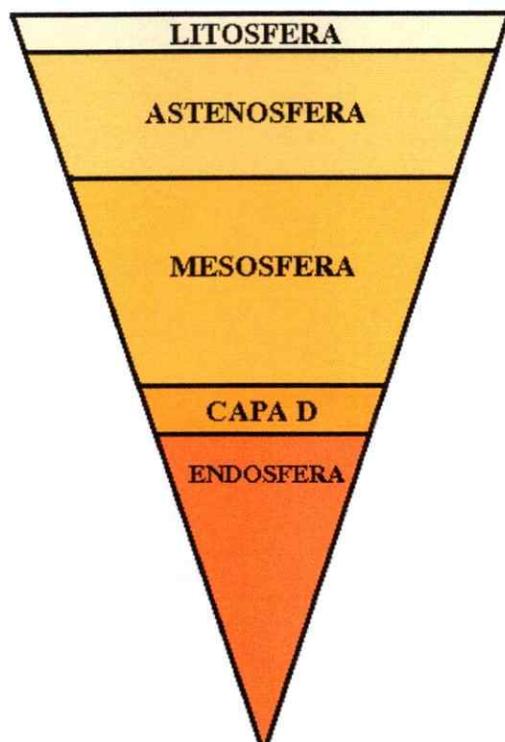


Fig. 2. Ilustración del modelo geodinámico de capas de la Tierra.

La historia de cómo se llegó a esta conclusión comienza a principios del siglo XX, Antonio Snider-Pellegrini [3] propuso la hipótesis de que los continentes habían estado unidos en el inicio de la formación de la corteza terrestre, pero no fue sino hasta el año 1912, que el meteorólogo Alfred Wegner [4-6] propuso la teoría de la “Deriva Continental”, utilizando, como uno de sus argumentos, la constatación de que los límites de América del Sur y de África coinciden casi perfectamente. Lamentablemente esta teoría no explicaba cuál era el mecanismo que generaba el movimiento de estas placas y fue desechada.

Años más tarde, luego de la segunda guerra mundial, se iniciaron una serie de estudios sobre el magnetismo termorremanente de las rocas [7], estudios que dejaron

en evidencia que la orientación magnética de las rocas había cambiado a lo largo de los años, lo cual fortaleció la hipótesis del movimiento de los continentes [8-11].

En la actualidad, se acepta que la corteza está constituida por 15 placas tectónicas: del Pacífico, Sudamericana, Norteamericana, Africana, Australiana, de Nazca, de Cocos, Juan de Fuca, Filipina, Euroasiática, Antártica, Arábica, Índica, del Caribe y la Escocesa.

Fallas

Existen tres tipos de límites entre las placas tectónicas: *divergentes* (separación de las placas, en estos límites es posible que emerja magma); *convergentes* (choque de placas formando una subducción) y *transformantes* (una placa se desliza respecto de la otra). Estos movimientos dan origen a las denominadas *fallas*. Una falla es el lugar geográfico en el cual se forma una discontinuidad debido a la fractura de la roca producto de la superación de las fuerzas tectónicas sobre la resistencia de las rocas. En este lugar se liberará la energía acumulada producto del choque de dos placas tectónicas.

1.0.3. Escalas de medidas sísmicas

A lo largo de los años se ha hecho necesaria la elaboración de una escala de medición sobre el "tamaño" de un evento sísmico. En la actualidad, se consideran tres maneras de medir la intensidad de un sismo: la *escala de Mercalli*, la *magnitud local de Richter* y la *escala de momento*.

La denominada *escala de Mercalli* es la más antigua de las escalas existentes, debido a que sólo mide el nivel de destrucción y la percepción que las personas han tenido de un sismo, es decir, es una escala cualitativa que ha sido de gran utilidad al documentar sismos de gran antigüedad, los que no han sido medidos mediante

sismógrafos y de los cuales sólo se tiene un registro escrito histórico.

Las escalas de Richter y de momento se basan en medidas cuantitativas de la energía liberada en un sismo. Se definirán, explícitamente en el Cap. 2.

1.1. Estudios de complejidad en sismos

Uno de los avances interesantes en investigaciones sobre sismicidad ha sido su estudio desde la perspectiva de los sistemas complejos. Diversos trabajos se han dedicado a estudiar la sismicidad desde la perspectiva de un sistema con criticalidad auto-organizada, introduciendo modelos tipo pila de arena, estudio de caos, y, más recientemente, estudios basados en entropías no extensivas y redes complejas [12-25].

En esta tesis, aplicaremos algunas de estas técnicas a datos sísmicos registrados en la zona central de Chile. Este estudio es de gran relevancia, ya que muchas de las investigaciones anteriores han sido realizadas para otras zonas sísmicas del planeta, y por tanto es importante establecer qué tipo de conclusiones universales se pueden extraer al comparar diversas zonas sísmicas. Para ello, en primer lugar, estudiaremos en el Cap. 2 los datos a utilizar, luego, en el Cap. 3 se estudiará la ley de Gutenberg-Richter y algunas de sus implicancias. En el Cap. 4 se analizarán los fractales, su dimensión y el espectro de dimensiones, con el fin de aplicarlo a los datos sísmicos. En el Cap. 5 se revisarán algunos conceptos relacionados con redes complejas y se determinará si los datos sísmicos presentan estas características. En el Cap. 6 estudiaremos el modelo elaborado por Burridge y Knopoff para modelar sismos y verificaremos en éste algunas de las propiedades vistas en el Cap. 5. Finalmente, en el Cap. 7 revisaremos los resultados más importantes obtenidos en esta tesis.

Capítulo 2

Datos sísmicos en Chile

La historia en nuestro país habla de riqueza en cuanto a actividad sísmica. Es debido a esto que Chile es un excelente laboratorio sísmico para muchos científicos. Con la finalidad de estudiar el comportamiento de esta gran actividad, es que el Servicio Sismológico Nacional (SSN), de la Universidad de Chile, se ha encargado de la instalación y mantenimiento de una serie de aparatos de medición sísmica, los cuales son capaces de medir sismos de baja magnitud (imperceptibles para el ser humano) y obtener así un completo registro de la actividad sísmica de esta zona del planeta.

Debido a la importancia que la zona central de Chile tiene, producto de la gran población y de actividades económicas que se llevan a cabo en ésta, es que éste es el sector en el que se ha dispuesto la mayor cantidad de sismógrafos, por lo tanto este es el territorio del que se tiene el mejor registro.

2.1. Sismos

La Tierra es un planeta lleno de vida.

La Tierra es un cuerpo dinámico, no sólo por los movimientos de cuerpo sólido conocidos y estudiados, sino también por los movimientos en su interior, en las di-

versas capas que la conforman. Esta "vida" que tiene dentro se manifiesta de las más diversas formas, siendo una de ellas la que nosotros denominamos *sismos*.

La corteza terrestre está en permanente movimiento. Las placas tectónicas se acomodan entre sí, dando origen a una serie de trastornos superficiales. Cabe hacer notar que en este momento estamos siendo testigos presenciales de la gran riqueza en la actividad de la Tierra, ya que se han producido una gran cantidad de sismos en diversas regiones del planeta y ha comenzado una inusual actividad volcánica sobre el mismo.

Como se mencionó en el capítulo anterior, la teoría de Placas Tectónicas ha explicado la formación de cadenas montañosas, volcanes y la producción de eventos sísmicos de una manera muy natural. Debido a la dirección del movimiento de estas placas, ellas pueden chocar o alejarse unas de otras (movimiento convergente o divergente). Es esta diversidad en su movimiento la que genera los eventos sísmicos. Por ejemplo, al chocar dos placas, se produce una liberación de energía producto del choque, y se puede dar origen a volcanes y montañas; al alejarse, se abre una grieta, se produce liberación de energía y este movimiento podría permitir que el magma salga a la superficie.

Cuando un evento sísmico se produce, éste conlleva una gran liberación de energía en el punto de ruptura, la cual se manifiesta en la propagación de ondas sísmicas que pueden ser de tres tipos fundamentalmente: las ondas *P*, las ondas *S* y las ondas gravitacionales (de *Rayleigh* o superficiales).

Las ondas *P* son ondas que se propagan rápidamente por la superficie de la Tierra, por lo que se las denomina ondas *primarias*, son ondas longitudinales y de mayor amplitud que las ondas *S*. Las ondas *S*, denominadas *secundarias*, son más lentas y de menor amplitud que las ondas *P* y son transversales. Gracias a este retraso de las

ondas S respecto de las ondas P es posible medir la distancia entre la estación en la que se ubica el sismógrafo y el foco sísmico. Por su parte, las ondas de *Rayleigh* son de corto alcance y de mayor amplitud que las ondas P y S, decaen rápidamente en el tiempo y el espacio, y son las ondas más destructivas, ya que su movimiento es circular y transversal.

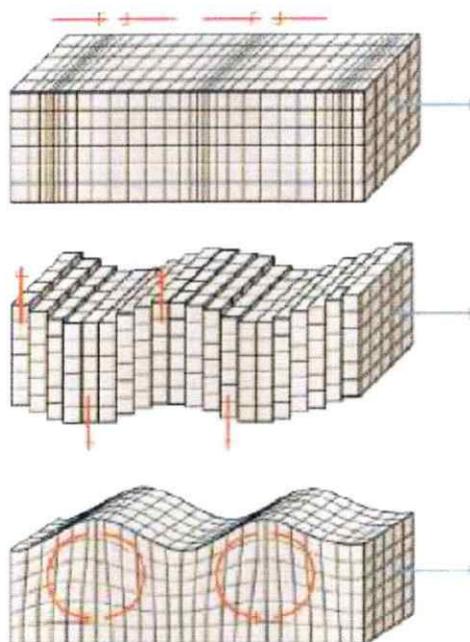


Fig. 3. Ilustración del movimiento de las ondas sísmicas. De arriba hacia abajo: ondas S, ondas P y ondas de Rayleigh. La línea roja indica el movimiento de las partículas, mientras que la línea azul muestra el movimiento de las ondas.

2.2. Escalas de intensidad

Tres son las principales características de un sismo: magnitud, duración temporal y posición espacial.

A principios del siglo pasado hubo grandes estudios sobre la actividad sísmica de algunos sectores del planeta; en algunos de éstos se buscaba dar una medida, de cuantificar de alguna manera, este tan complejo y destructivo fenómeno, ya sea a través de registrar la energía liberada, el alcance de la onda o la posición de la fuente sísmica, para así realizar investigaciones sobre medidas objetivas y no de percepciones, como lo es la conocida escala de Mercalli, sobre los sismos.

Una de las principales investigaciones en esta dirección fue realizada por Charles Richter [26], quien desarrolló una metodología con el fin de cuantificar la energía liberada por un evento de este tipo. De este trabajo se desprende que la magnitud de un sismo es una medida *indirecta* de la cantidad de energía liberada y se estima a partir de la amplitud de las ondas medidas en un sismógrafo. Ésta es una medida física, *objetiva*. Existen, fundamentalmente, dos modos de medir para cuantificar esta energía.

1. Magnitud local de Richter, M_L

El primer sismólogo en introducir una medida de la energía liberada en un sismo fue Charles Richter, quien se basó en la escala que utilizan los astrónomos para medir la intensidad de la luminosidad de una estrella, con el fin de estimar la distancia entre ésta y la Tierra. A partir de esta medida, él desarrolló la que hoy conocemos como *escala de Richter*. Para ello, se estima la magnitud M_L de un sismo como

$$M_L = \log(A) - \log(A_0) \cdot \delta, \quad (2.1)$$

donde δ es la distancia desde el epicentro al aparato de medición, A es la amplitud de las ondas S a no más de 600 kilómetros del epicentro y A_0 es una

constante.

Se aprecia que M_L es una escala logarítmica, la conocida *Escala de Richter* [27], que entrega un valor objetivo de la energía liberada en un sismo. Lamentablemente esta medida de la magnitud no es capaz de dar una gran precisión para sismos mayores a 7 grados, por lo que ha sido refinada, dando origen a la llamada *magnitud de momento sísmico*.

2. Magnitud de momento, M_W

Esta magnitud es un refinamiento de la magnitud de Richter y sólo entrega mayor precisión para distinguir la cantidad energía liberada en los sismos de gran magnitud [28]. Gracias a esta escala es posible medir sismos de muy baja intensidad, sin obtener un valor negativo de la misma, así como facilita una medición más precisa de los sismos de gran intensidad. Está definida por la expresión,

$$M_W = \frac{2}{3} (\log_{10} M_0 - 9.1), \quad (2.2)$$

donde M_0 es el momento sísmico (energía) que se define,

$$M_0 = \mu \times A \times u, \quad (2.3)$$

donde μ es el módulo de deformación, A es el área de la ruptura donde se produce el sismo y u es el desplazamiento promedio de A .

2.3. Datos sísmicos de la zona central de Chile

Idealmente, para tener medidas precisas para un sismo dado es conveniente utilizar más de un sismógrafo. Esto, por ejemplo, permite obtener la posición del evento en el espacio de tres dimensiones y determinar la magnitud del mismo promediando sobre varias mediciones. En Chile no se cuenta con una red de sismógrafos suficiente para cubrir estas necesidades en todo el territorio nacional, salvo en la zona central de Chile. Estos sismógrafos son administrados por el Servicio Sismológico Nacional (SSN), organismo que, para la realización de este trabajo, nos facilitó los datos correspondientes justamente a la zona central de Chile, entre los años 2000 y 2007, que son, por las razones mencionadas, los mejores datos disponibles.

Los datos corresponden a un total de 17004 focos sísmicos, con sus respectivas magnitudes y ubicación espacial y temporal. Los datos recolectados se encuentran ubicados entre los 29.01° y 35.50° de latitud Sur, y entre los 69.51° y 73.95° de longitud Oeste, con una profundidad máxima de 293.3 km y fueron medidos entre el día 2 de octubre del año 2000 y el día 29 de marzo del año 2007.

El 90 % de los datos son sismos con profundidad menor a 116.30 km y el 69.9 % de ellos son sismos superficiales, es decir, con una profundidad menor a 70 km.

Para cada sismo registrado, disponemos de su posición en longitud y latitud, además de su profundidad. Para nuestro análisis, sin embargo, es preferible convertir esta información a coordenadas cartesianas. Para ello, procedemos de la siguiente manera: sean θ_0 y $\theta_{\text{máx}}$ los valores mínimo y máximo de latitud, a su vez, ϕ_0 y $\phi_{\text{máx}}$ serán los valores mínimo y máximo de los ángulos medidos para la longitud. Llamaremos θ_{prom} al valor promedio de los ángulos latitudinales. El hipocentro del i -ésimo evento será definido espacialmente por su posición (θ_i, ϕ_i, z_i) , donde θ_i , ϕ_i y

z_i serán los valores de la latitud, longitud y profundidad, respectivamente. Entonces, la distancia en la dirección Norte-Sur respecto al punto con coordenadas (θ_0, ϕ_0) es

$$d_i^{NS} = R \cdot (\theta_i - \theta_0),$$

donde R es el radio de la Tierra (aproximadamente 6370 km). Análogamente distancia medida de Este a Oeste será

$$d_i^{EO} = R \cdot (\phi_i - \phi_0) \cdot \cos(\theta_{\text{prom}}).$$

La profundidad es simplemente $d_i^z = z_i$.

El punto inicial es $(\theta_0, \phi_0, z_0 \equiv 0)$.

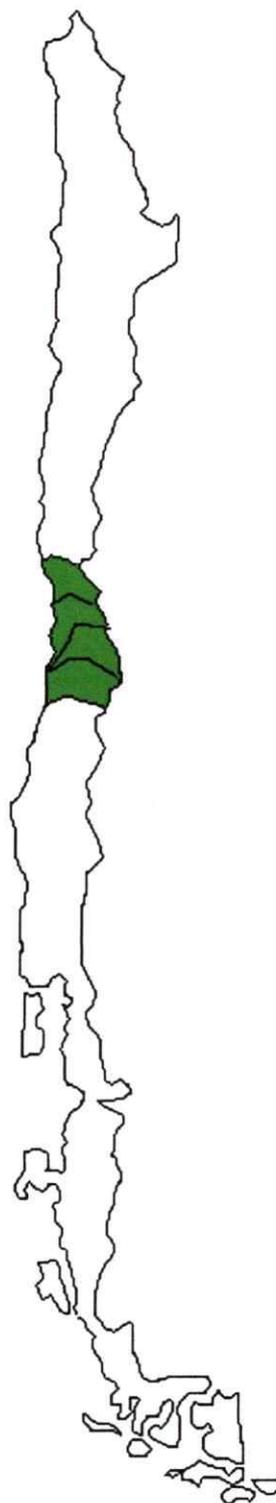


Fig. 4. Mapa de Chile en el que se indica la zona bajo estudio. Las regiones en verde son las que contienen el conjunto de datos sísmicos utilizados en esta tesis.

Capítulo 3

Ley de Gutenberg-Richter

Hasta el día de hoy, los principales estudios y avances sobre sismicidad se han basado en los estudios realizados por Gutenberg y Richter entre los años 1934 y 1960. Entre ellos, destacaremos aquellos que han sido considerados de manera directa en esta tesis.

La primera relación entre energía y magnitud, definición que surge en el contexto de cuantificar de alguna manera el poder devastador de un sismo, fue desarrollada por Richter en 1934 [26] basándose en una serie de medidas empíricas de sismos en todo el planeta:

$$\log(E) = 11.3 + 1.8 M,$$

definición que fue corregida y modificada por Gutenberg y Richter en 1954 [29] en un extenso trabajo de análisis de datos, llegando a la expresión que se utilizó hasta hace unos años para medir la intensidad de un sismo,

$$\log(E) = 11 + 1.6 M, \tag{3.1}$$

donde E es la energía de los sismos en ergios (energía cinética media de las ondas esféricas elásticas) y M es la denominada magnitud de un sismo.

Considerando esta expresión es que el mismo Richter entregó una definición sobre la magnitud, definición que lleva su nombre, Ec. (2.1) del Cap. 2.

Finalmente, en el año 1954, producto de una serie de trabajos estadísticos sobre datos sísmicos, Gutenberg y Richter enunciaron, a partir de las definiciones anteriores, la siguiente ley empírica [29]:

$$\log(N) = a + b (8 - M), \quad (3.2)$$

donde N es la frecuencia anual de sismos (número de sismos de magnitud M) y M es la magnitud. Los parámetros a y b son determinados a través del método de mínimos cuadrados y son característicos de cada zona.

Esta ecuación fue el resultado de un exhaustivo estudio sobre series de datos medidos en todas las zonas de mayor actividad sísmica del planeta. Además fue corroborada para sismos de diferentes profundidades, llegando a la conclusión de que todos ellos cumplían esta ley desde una magnitud 4 hacia arriba [29].

La ecuación fue luego corregida y precisada por ellos mismos, debido al alto umbral de magnitud de sismos que la cumplían, siendo enunciada de la siguiente manera:

$$\log(N) = a + b M_L. \quad (3.3)$$

3.1. Ley de Gutenberg-Richter en Chile

La ley de Gutenberg-Richter es una de las propiedades estadísticas básicas de eventos sísmicos, y por lo tanto, nuestra primera tarea fue verificar que los datos de que disponemos satisfacen efectivamente dicha ley [30]. Con el fin de realizar esta labor, es que se ha aplicado la Ec. (3.3) obteniendo los siguientes gráficos:

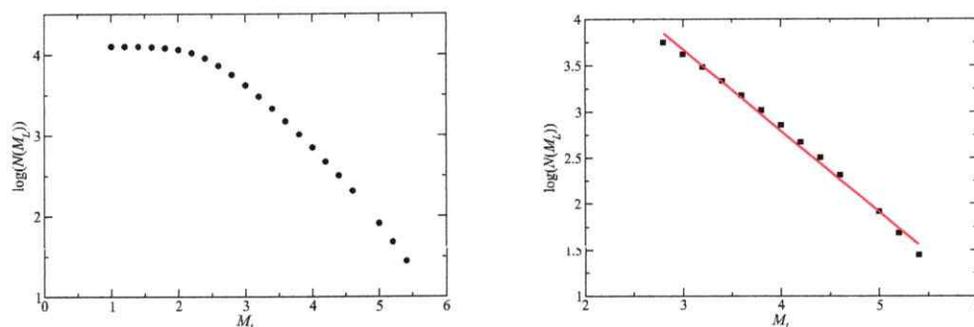


Fig. 5. Logaritmo del número de eventos sísmicos con magnitud M_L versus M_L , para los datos sísmicos de Chile. Distribución de todos los eventos sísmicos (izquierda). En la figura de la derecha se presenta el ajuste de la parte lineal del gráfico de la izquierda. La línea roja indica el ajuste realizado por una regresión lineal sobre los datos.

Como se observa en la Fig. 5, se realizó el ajuste a la parte lineal del gráfico de $\log(N(M_L))$ versus la magnitud M_L de los sismos, utilizando una regresión a través de mínimos cuadrados. De la Fig. 5 se desprende que, en efecto, los datos que utilizaremos se distribuyen en magnitud de acuerdo a una ley de potencia, satisfaciendo la ley de Gutenberg-Richter (3.3). El valor de los parámetros a y b es:

$$a = 6.39 \pm 0.09,$$

$$b = 0.90 \pm 0.02.$$

Es interesante notar que el valor del parámetro b es consistente con el que se obtiene para sismos superficiales en otras zonas del planeta [29,31], mientras que, como se observó en el Cap. 2, los datos con los que trabajamos corresponden, precisamente, a sismos de poca profundidad.

3.2. Sistemas complejos asociados a leyes de potencia

El hecho de que los sismos se distribuyan de acuerdo a una ley de potencia es muy significativo. Existen muchos sistemas en la naturaleza que presentan leyes de potencia bajo diversas consideraciones. Ejemplos de este hecho hay muchos: estudios sobre descargas eléctricas [32] o pilas de arena [33–35] por una parte; además de diversos estudios del modelo de Olami-Feder-Christiansen [36,37] en sismos mediante autómatas celulares, o la distribución temporal de sismos de gran intensidad (ley de Omori) [38]. De esta manera, notamos cómo el resultado de Gutenberg y Richter abre un camino para generar relaciones entre diversos estudios de sistemas complejos con el terreno de la sismología [39], objetivo que persigue esta tesis. Es en esta dirección que se han encontrado relaciones entre modelos de pilas de arena con redes libres de escala [40] o con redes de mundo pequeño [41], ambas redes que serán estudiadas sobre los datos sísmicos en consideración, en el Cap. 5. Estas leyes de escalamiento pueden encontrarse en diferentes conjuntos de focos sísmicos y bajo diferentes estudios, ya sea acerca la frecuencia de los eventos sísmicos, como su relación con la magnitud de los mismos [42]. Fundamentalmente, podemos concluir que los sistemas complejos están extremadamente relacionados con los eventos sísmicos y aún hay mucho que estos estudios pueden revelar o ayudar a dilucidar en el ámbito de la sismología.

Capítulo 4

Características fractales de la sismicidad

Se denomina *fractal* a un sistema que posee autosimilaridad, es decir, que es invariante ante cambios de escala. Fue Benoît Mandelbrot quien, además de acuñar el término fractal, mostró la relevancia de estos objetos, en principio puramente geométricos, en la naturaleza. El borde costero en zonas como Inglaterra, el sur de Chile y Finlandia, un brócoli, las ramas de un árbol, una hoja de helecho, etc., son ejemplos de objetos que pueden ser considerados con características fractales. En este capítulo estudiaremos cómo los sismos (específicamente su distribución espacial) también presentan características de este tipo.

4.1. Un poco de historia

El inicio del estudio de los objetos fractales se remonta al año 1918, cuando a los 25 años y luego de haber participado en la Primera Guerra Mundial (experiencia que le costó su nariz), Gastón Julia, matemático francés nacido en Argelia, publicó su artículo "*Report of Iteration of the Rational Functions*", trabajo de 199 páginas que fue publicado en la revista francesa *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*

[43] en el que describía la iteración de una función compleja que daba origen a un conjunto cuya frontera es imposible de dibujar a mano, porque posee longitud infinita. Debido a este trabajo Julià obtuvo el premio de la Academia Francesa de Ciencias.

Este interesante y novedoso trabajo quedó en el olvido durante muchos años, hasta que en 1967, Benoît Mandelbrot publica en *Science* el artículo “¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?” [44], artículo en el que comienzan sus discusiones sobre los objetos fractales.

Mandelbrot, además, pudo mostrar la belleza de los fractales, creando los primeros fractales generados por computadoras, que en la época de Julià evidentemente no existían. De este modo, estos interesantes objetos matemáticos se volvieron atractivos para el público en general. En lo sucesivo, los fractales se han vuelto relevantes para la discusión de diversos sistemas físicos, entre los que podemos mencionar las pilas de arena [33, 34, 40, 45, 46], las descargas eléctricas [32], además de los autómatas celulares [36, 37, 47, 48].

4.2. Dimensión fractal

Una de las características de los objetos fractales es que se les puede asociar una dimensión no entera, existiendo varias definiciones de la misma (dimensión Euclidiana, dimensión de similaridad, de Hausdorff, de box-counting, de correlación, de información, de Lyapunov, por nombrar algunas). Cualquiera sea la definición, sin embargo, siempre se cumple que la dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica (D_T), pero menor que su dimensión Euclidiana (D_E) [49]. Para efectos de esta tesis, sólo nos concentraremos en las dimensiones de box-counting y de correlación.

Es importante tener en cuenta que, en rigor, sólo un fractal matemático puede ser realmente autosimilar en toda escala. Si es un fractal generado por computador, su autosimilaridad estará acotada simplemente por la precisión numérica que se esté empleando. Por su parte, objetos reales podrán ser sólo aproximadamente autosimilares, razón por la cual la dimensión fractal asociada a ellos será, necesariamente, una aproximación.

A continuación presentaremos un método conveniente para determinar la dimensión fractal de un objeto real.

4.3. Monofractales

De la sección anterior podemos notar que existen una serie de definiciones de dimensión, la más común y conocida es la *dimensión Euclidiana*. Otra dimensión muy utilizada en matemáticas es la *dimensión topológica*. La dimensión Euclidiana sólo atañe al número de coordenadas que se requieren para especificar un objeto, es decir, es equivalente al número de coordenadas utilizadas para describir en qué espacio está ubicado el objeto. Para hablar de la dimensión topológica, primero hay que tener alguna noción de lo que es la topología. La topología es una rama de la matemática que estudia las propiedades geométricas de un objeto matemático o un espacio que no se ve alterado por transformaciones continuas, biyectivas y de inversa continua. La dimensión topológica se deriva de la capacidad de cubrir un objeto utilizando discos o esferas de radio pequeño; esta dimensión se caracteriza por no cambiar bajo la transformación del objeto, es decir, es posible hacer una serie de transformaciones a un objeto sin realizar cortes en él y, aunque su forma cambie, el objeto seguirá siendo topológicamente igual (por ejemplo, son topológicamente equivalentes una taza y una rosquilla).

Para señalar una manera intuitiva de derivar la dimensión Euclidiana (esta definición será de utilidad al momento de definir las dimensiones que se utilizarán en esta tesis) de un objeto, utilizaremos una variable a la que denominaremos ε , la que es tan pequeña como sea necesario. De esta manera veremos que es posible medir el tamaño de cualquier objeto que esté contenido en un espacio de no más de tres dimensiones espaciales con esta variable, ya que el tamaño del objeto será siempre proporcional a ε . Supongamos que el largo del lado de una celda está normalizado a 1 y que dividimos la línea de la Fig. 6 en N pequeños segmentos autosimilares, es decir, segmentos que se replican a sí mismos.



Fig. 6. Ejemplificación del cálculo de la dimensión Euclidiana. Los objetos son discretizados por celdas de lado ε .

Si se tiene una línea en el espacio, su tamaño (largo) será proporcional a la variable ε , siendo la constante de proporcionalidad N y su dimensión 1, que está representado por el exponente de la variable ε . Extendiendo esta idea intuitiva de medición a un objeto plano, vemos que sólo es necesario discretizar el plano en el que se encuentra el objeto con cuadrados de lado ε para obtener su área (ahora la dimensión es 2). Es posible hacer lo mismo para el espacio en tres dimensiones: el volumen de este objeto será proporcional a la variable ε al cubo, es decir, se tiene un objeto de dimensión 3.

En resumen:

$$\begin{aligned}
 L &= N\varepsilon = 1, \\
 A &= N\varepsilon^2 = 1, \\
 V &= N\varepsilon^3 = 1.
 \end{aligned}$$

De esta sencilla idea, obtenida de la dimensión Euclideana, es posible extender esta medida y definir la *dimensión de similitud*:

$$D_S = \frac{\log(N)}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (4.1)$$

Esta dimensión es muy útil para aquellos fractales que son exactos, es decir, en cuyos escalamientos se ven copias exactas del objeto original.

Para objetos fractales que no son exactos, es decir, objetos reales tales como un borde costero o la hoja de un helecho, es de mayor utilidad determinar la dimensión a través del método de *box-counting*. Esta metodología consiste en medir el tamaño ocupado por dicho objeto. Por ejemplo, una línea de largo L (Fig. 6) puede ser cubierta con $N = 1/\delta$ trazos de longitud δ , si $\delta \ll L$. En realidad, no es necesario que sean trazos, podrían ser cuadrados o cubos. En todos los casos, se requerirán $N = 1/\delta$ objetos para cubrir la línea. Para un objeto plano de área A , se requerirán $N = A/\delta^2$ cuadrados de lado δ . Para un objeto tridimensional de volumen V serán $N = V/\delta^3$ cubos de arista δ . Esto nos sugiere la siguiente definición de la dimensión de *box-counting*, D_0 :

$$N = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{D_0}$$

$$\log(N) = -D_0 \log(\delta)$$

$$D_0 = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(\delta)},$$

donde D_0 es la dimensión de *capacidad* o de *box-counting*, N es el número de celdas (cajas) que contienen al objeto y ε es el tamaño del lado de la celda. Para este análisis se ha considerado que el hipervolumen de estos objetos es 1.

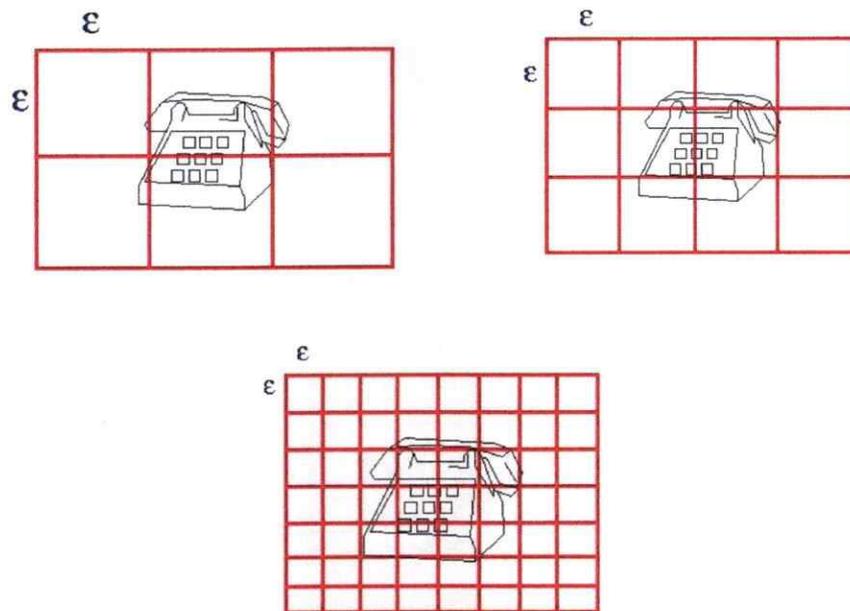


Fig. 7. Ilustración de la definición de la dimensión de box-counting.

La expresión general para un objeto cuyo hipervolumen no es igual a la unidad es:

$$D_0 = \frac{\log(N) - \log(V)}{\log(1/\varepsilon)}, \quad (4.2)$$

$$\log(N) = D_0 \log(1/\varepsilon) + \log(V). \quad (4.3)$$

Así, la dimensión de capacidad se obtiene al hacer tender ε a 0 y al calcular la pendiente del gráfico $\log(N)$ versus $\log(1/\varepsilon)$, es decir,

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (4.4)$$

En la práctica no es posible hacer este límite, por lo que se escoge un rango en el que $\log(N)$ versus $\log(\varepsilon)$ sea lineal cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Las dimensiones de similaridad y box-counting *no* son iguales, ya que en la primera es necesario que los segmentos sean *auto similares*, es decir, es necesario que los segmentos sean exactamente iguales en todas las escalas, condición que no es necesaria para los cubos de la dimensión de *box-counting*.

4.4. ¿Es la distribución espacial sísmica un objeto fractal?

La ley de potencias obtenida del estudio de Gutenberg y Richter, ya revisada en el Cap. 3 sobre el ordenamiento de los sismos de diferentes magnitudes nos llevó a preguntarnos si este comportamiento podría sugerir alguna relación entre distribuciones espaciales y fractales. Al estudiar sistemas auto-organizados, tales como pilas de arena [33, 45], autómatas celulares [36, 47], además de muchos sistemas de la naturaleza, como descargas eléctricas (rayos) [32], distribución espacial de las ramas y hojas de un árbol [51], se asoma la inquietud acerca de las distribuciones espaciales

de los focos sísmicos. Entonces, los sismos ¿se distribuyen espacialmente formando un fractal?; ¿sucede esto experimentalmente?; es decir, ¿podemos verificar que los datos sísmicos bajo estudio podrían presentar una geometría fractal? En esta dirección es que comenzaremos el análisis presente. En primer lugar determinaremos la dimensión denominada de capacidad o box-counting, D_0 de las distribuciones espaciales de los datos sísmicos, estudio que se realizará sobre los datos de hipocentros y epicentros. Esta caracterización se realizará mediante el método de box-counting, explicado en la sección 4.3.

De los trabajos estudiados sobre sistemas fractales, hemos aprendido que una conveniente manera de calcular la dimensión fractal de objetos naturales (no generados por computador) [50,52] es la de *box-counting*.

Para calcularla se ha procedido de la siguiente manera: se tiene un conjunto de datos sísmicos de hipocentros y epicentros. En el caso de los epicentros, se divide el plano latitud-longitud en celdas de lado ε y área ε^2 , en cierto rango de valores y se cuenta el número de celdas que contienen datos de epicentros en ellas. Luego, se hace variar ε en un cierto rango, y se realiza un gráfico log-log entre el número de celdas con datos sísmicos y el tamaño de la celda. Dada la Ec. (4.4), se espera que, a medida que ε disminuye, se encuentre una región en que el gráfico exhiba un comportamiento lineal. En esta región se calcula, con un ajuste de mínimos cuadrados, la pendiente de la recta. Dicha pendiente corresponde a la dimensión de box-counting definida en (4.4).

La dimensión de box-counting es un parámetro adimensional, pero en este análisis se utilizará un largo dimensional para el lado de las celdas, por lo tanto, éste largo será adimensionalizado, dividiéndolo por la raíz cuadrada del área de la celda de mayor tamaño, según corresponda.

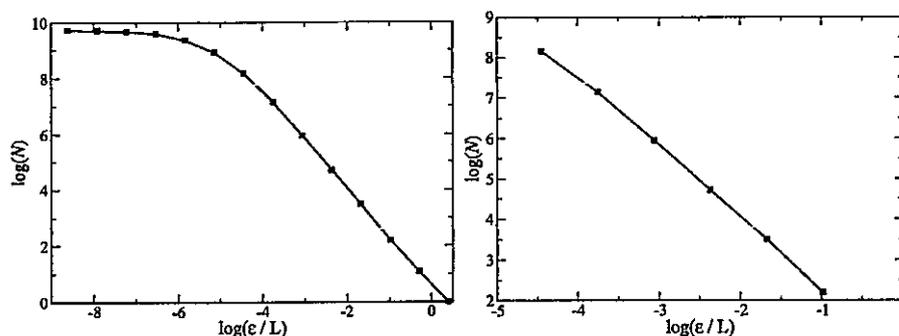


Fig. 8. Gráfico de la zona lineal del logaritmo del número de celdas que contienen epicentros versus el logaritmo del tamaño del lado ε para los datos de epicentros. El rango lineal va entre $\varepsilon = 6.4$ y $\varepsilon = 409.6$. En este caso la dimensión de box-counting D_0 (pendiente de este gráfico), obtenida a partir de un ajuste de mínimos cuadrados, fue 1.73 ± 0.02 .

En el caso de los hipocentros, se toma el espacio formado por latitud-longitud y profundidad que contiene a los focos sísmicos. Nuevamente, se discretiza este espacio, ahora en cubos de lado ε y volumen ε^3 . Se cuentan los cubos que contienen focos sísmicos en su interior y se realiza un gráfico log-log del número de cubos que contienen datos sísmicos versus ε , se considera la zona lineal de este gráfico (para $\varepsilon \rightarrow 0$) y se estima la pendiente de esta región a través de un ajuste de mínimos cuadrados. Esta pendiente corresponde a la dimensión de box-counting descrita en la ecuación (4.4).

Como en el caso anterior, la dimensión de box-counting es un parámetro adimensional, entonces se adimensionalizó el tamaño ε del lado del cubo normalizándolo con la raíz cúbica del volumen del cubo de mayor tamaño.

los resultados de este procedimiento se encuentran en las Figs. 10 y 9, para epicentros e hipocentros, respectivamente.

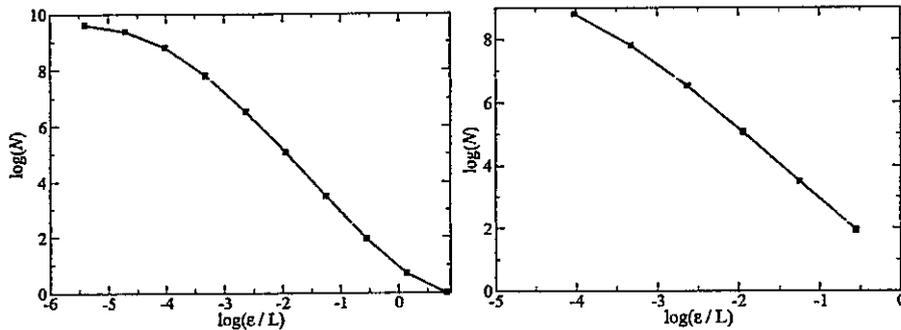


Fig. 9. Gráfico log-log del número de celdas que contienen datos sísmicos versus el tamaño ε del lado de la celda para los datos de hipocentros. El rango lineal varía entre $\varepsilon = 8$ y $\varepsilon = 512$. La dimensión de box-counting para hipocentros D_0 , obtenida a partir de un ajuste de mínimos cuadrados, fue 2.02 ± 0.05 .

$$D_0^{(ep)} = 1.73 \pm 0.02,$$

$$D_0^{(hip)} = 2.02 \pm 0.05,$$

valores para epicentros e hipocentros, respectivamente [30].

Es interesante notar que estos valores son similares a las dimensiones fractales calculadas para otras zonas sísmicas del planeta [24, 53–58], y corresponden a los valores observados para terrenos rocosos, el cual corresponde al tipo de suelo de la zona estudiada [55].

La Tabla 4.1 presenta una comparación de los valores de D_0 y el parámetro b de la ley de Gutenberg-Richter para los datos de la zona central de Chile estudiados en esta tesis y datos de otras zonas sísmicas del planeta.

País	D_0	b	Referencia
Chile	2.02	1.01	Resultados de esta tesis
Colombia	1.61	0.57	Caneva <i>et al.</i> [59]
Chile (estudio sobre Nazca)	2.1 – 2.2	1.2	Cernadas <i>et al.</i> [20]
India	1.65 – 1.85		Bhattacharya <i>et al.</i> [60]
Japón	1.9 – 2.9	0.6 – 1.5	Nanjo <i>et al.</i> [61]

Tabla 4.1: Tabla con la comparación entre los valores de la dimensión fractal de box-counting, Ec. (4.5), y el parámetro b de la Ley de Gutenberg-Richter, Ec. (3.3), para Chile y otras zonas del planeta.

Cabe hacer notar que la estructura fractal de los datos es mucho más evidente para los epicentros que para los hipocentros, debido a que el valor de la dimensión D_0 de los epicentros es menor que 2 (dimensión que contiene a estos datos), mientras que la dimensión D_0 de los hipocentros es casi 2, mucho menor que 3 (que es la dimensión que contiene a los datos de hipocentros), pero es casi un número entero.

También es interesante notar que los valores típicos de b están en el rango $0.8 < b < 1.2$, valores que dependen de la zona tectónica en la cual se encuentran los datos [55, 62] y que nuestros resultados están dentro de ese rango. A su vez, el valor de b puede ser relacionado al valor de D_0 [63] de la siguiente manera;

$$b = \frac{D_0}{2}, \quad (4.5)$$

condición que también es satisfecha por nuestros datos [53]:

$$b = \frac{D_0}{2} \sim 1.01 \pm 0.02. \quad (4.6)$$

4.5. Multifractales

Un sistema fractal puede tener una estructura mucho más compleja que la que puede ser descrita por una dimensión de box-counting o de similaridad. En efecto, notemos que dichas dimensiones se definen en base a cubrimientos del espacio, y se calculan a partir del número de celdas que permiten cubrir al fractal. Sin embargo, no hay información sobre cuántos puntos del fractal hay en cada celda. Si una celda tiene un punto del fractal, o 100, se cuenta de todos modos sólo como uno para efectos del cálculo de D_0 .

Se requiere, entonces, una definición de dimensión que contenga información no sólo sobre el cubrimiento, sino sobre las inhomogeneidades en dicho cubrimiento. Al hacerlo, se observa que, en general, un sistema fractal puede exhibir distintas dimensiones fractales, dependiendo de cómo se realiza el cubrimiento, como si un fractal fuera, en realidad, la superposición de muchos fractales. Esto ha conducido al concepto de multifractal [51].

Un multifractal no estará entonces caracterizado por una única dimensión fractal, sino por un espectro de dimensiones fractales, que permiten capturar información sobre inhomogeneidades en el fractal [64, 65].

Existen dos maneras formales de caracterizar este tipo de objetos utilizando un espectro de dimensiones fractales. Primero trataremos el espectro conocido como *Rényi Fractal Spectrum Dimension (RFSD)*, el cual proviene del estudio de las entropías de Rényi, las que conducen a un espectro de índices de diversidad [66]. Halsey [52] introdujo un cambio de variables para dar una nueva interpretación de la dimensión generalizada de Rényi, el *espectro de singularidades* de un fractal, en el cual se definen variables que indican el escalamiento local del i -ésimo elemento del objeto

bajo estudio [50]. Éste ha sido llamado en los últimos años *Mandelbrot Fractal Spectrum Dimension (MFDS)*, que se relaciona con el espectro de Rényi al hacer una transformación de Legendre de éste [49, 67].

Del mismo modo que para la dimensión fractal, el cálculo del espectro multifractal se puede realizar mediante distintos tipos de cubrimiento [67]. En este trabajo hemos utilizado dos estrategias en particular: el particionamiento integral y el particionamiento basado en la integral de correlación [64, 65, 67, 68].

4.5.1. Espectro de Dimensiones Fractales de Rényi

Existen diferentes maneras de cubrir el espacio ocupado por el objeto fractal, lo que da origen a diferentes definiciones de la dimensión. Así como es posible utilizar el mínimo número de cajas que cubran el objeto fractal (método de box-counting definido anteriormente), también existe una definición proveniente del mínimo número de circunferencias de diámetro r , centradas en un punto X del objeto, partición que da origen a la denominada *pointwise dimension* [50].

Esta definición utiliza una medida local del objeto fractal, de este modo, definimos una medida de los puntos del fractal de la siguiente manera:

$$B_X(r) = \mu[\mathcal{B}_X(r)], \quad (4.7)$$

donde \mathcal{B} representa a una esfera de radio r centrada en X , mientras que B_X es la medida de la densidad de puntos contenidos en la esfera \mathcal{B}_X de radio r (μ corresponde a la densidad de puntos dentro de la esfera). A partir de estas densidades se define la dimensión de la siguiente manera:

$$D_P(X) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(B_X(r))}{\log(r)}, \quad (4.8)$$

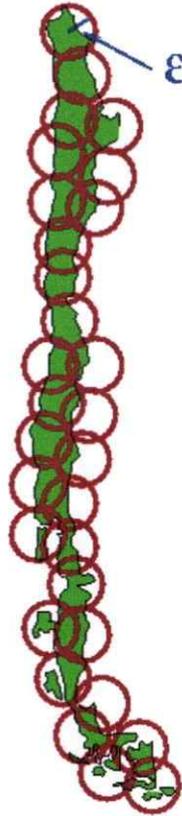


Fig. 10. Ilustración de la metodología de pointwise. El espacio se cubre con esferas centradas en un punto, con un radio ε variable.

Esta dimensión es sólo local, es decir, para una región del objeto en consideración pero es posible obtener una dimensión global definiendo un promedio sobre todo el objeto:

$$D_P = \int D_P(\mathbf{X}) d\mu(\mathbf{X}). \quad (4.9)$$

Cabe hacer notar que la dimensión de box-counting no es más que la evaluación en $q = 0$ de la dimensión generalizada de Rényi, dimensión que será estudiada con más detalle para los sísmos la sección 4.4.

La definición de la dimensión de *Haussdorf*, definición en la que se basan las dimensiones ya estudiadas, es muy parecida a la de box-counting (en realidad, ésta última se deriva de la dimensión de Haussdorf). En ambas es necesario cubrir el fractal con algún elemento, siendo la diferencia que en box-counting se cuentan las cajas que cubren el fractal, mientras que la dimensión de *Haussdorf* es sólo una descripción de la geometría del objeto, pero brinda el fundamento necesario para las otras definiciones.

Se define la dimensión de Haussdorf de la siguiente manera. Supongamos que tenemos un objeto \mathcal{A} fractal, será cubierto de esferas con diámetro menor a r

$$\mathcal{C}(r, \mathcal{A}) = \{B_1, B_2, \dots, B_K\},$$

entonces se define la medida de Haussdorf de este conjunto como

$$\Gamma(\mathcal{A}, D, r) = \inf(\mathcal{C}(r, \mathcal{A})) \sum_i \delta_i^D, \quad (4.10)$$

donde \inf indica el mínimo radio $\delta_i < r$ que cubre al objeto completamente y D es la dimensión del objeto.

Esta medida decrece monótonamente con D , por lo tanto, hay un único punto de transición para la definición de dimensión de Haussdorf:

$$\Gamma(\mathcal{A}, D) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup \Gamma(\mathcal{A}, D, r) = \begin{cases} \infty & D < D_H, \\ 0 & D > D_H \end{cases} \quad (4.11)$$

En este caso la dimensión de Haussdorf está definida por

$$D_H = \inf\{D : \Gamma(\mathcal{A}, D) = 0\}.$$

De esta definición vemos cómo un objeto tal como una costa tendrá dimensión de Hausdorff infinita. La Ec. (4.10) entrega una medida gruesa sobre la dimensión y exhibe el escalamiento $\Gamma(\mathcal{A}, D, r) \sim r^{D-D_H}$. Si consideramos $D = 1$, es posible notar que la medida crece con la tasa $L(r) \sim r^{1-D_H}$ y, de esta manera, alcanzar un valor de la dimensión D_H . Teniendo un valor de esta dimensión, vamos a definir la medida de un subconjunto de \mathcal{A} como $\Gamma(\mathcal{B}, D_H) = \limsup_{r \rightarrow 0} \inf \mathcal{C}(r, \mathcal{B}) \sum_i \delta_i^1$; esta expresión sugiere $\Gamma(\mathcal{B}, D_H) \sim \delta(\mathcal{B})^{D_H}$. Definición que permite avanzar hacia la dimensión de box-counting, ya definida [50].

Presentaremos dos métodos para calcular el espectro de dimensiones fractales de Rényi.

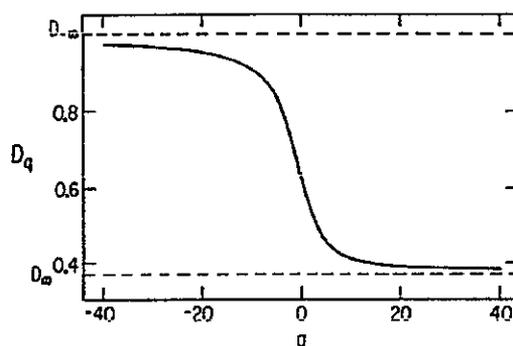


Fig. 11. Ejemplo de un espectro de dimensiones fractales de Rényi característico [52].

1. Particionamiento Integral

Ésta es la extensión del método de *box-counting* para un multifractal. El espacio en el que se encuentra el objeto fractal es particionado de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}_{\mu(\varepsilon)} = \left\{ \mu_i(\varepsilon) = \frac{\mu(V_i)}{\mu(\mathbb{R}^d)} \mid \forall V_i \in \nu(\varepsilon) \right\}, \quad (4.12)$$

donde $\mu(V_i)$ es la medida de la i -ésima caja y p_i es la respectiva medida normalizada. Esta medida que puede ser aproximada por:

$$\mu_i(\varepsilon) = \frac{N_i(\varepsilon)}{N}, \quad (4.13)$$

donde $N_i(\varepsilon)$ es el número de puntos contenidos en la celda V_i de la grilla $\nu(\varepsilon)$ y N es el número total de puntos que contiene el fractal.

Una elegante manera de obtener este espectro es recurriendo a la entropía generalizada de Rényi de orden q para una partición discreta [66]:

$$H_q = \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_i \mu_i^q \right), \quad (4.14)$$

la que es una generalización de la entropía de Shannon, de hecho, H_0 da origen a D_0 , H_S :

$$\lim_{q \rightarrow 1} H_q = H_S = - \sum_i \mu_i \log(\mu_i). \quad (4.15)$$

Se define entonces la función $D_q : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que,

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-H_q(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)}, \quad (4.16)$$

que es el Espectro de Dimensiones Fractales de Rényi (RFSD). Es interesante notar que, en este sentido, D_q representa la escala de mayor tamaño, a medida que q aumenta da mayor importancia a las celdas que poseen μ_i mayor. Notar que si el fractal es uniforme, la medida p_i será la misma para todas las celdas y D_q se reduce a sólo una dimensión igual a la dimensión de capacidad. Sin embargo, si el fractal no posee esta uniformidad, D_q depende de q , y por tanto, se convierte en un cuantificador de la no uniformidad del objeto fractal en cuestión. Nuevamente en la práctica no es posible computacionalmente llegar hasta $\varepsilon = 0$, por lo tanto, se utiliza una región de escalamiento en el gráfico $H_q(\varepsilon)$ versus $\log(\varepsilon)$, para valores de ε cercanos a 0.

Es importante hacer notar que para $q > 1$ se amplifican las regiones con menos singularidades y mayor densidad de puntos (μ_i grande), mientras que para $q < 1$, se amplifican las zonas con más singularidades y menos densidad de puntos (μ_i pequeño) [69].

2. Particionamiento utilizando la Integral de Correlación

Un segundo método de particionamiento del espacio consiste en utilizar esferas de radio ε que se pueden traslapar entre sí (a diferencia del método anterior, en que las celdas no se pueden traslapar). Esto es análogo a la diferencia entre el cálculo de las dimensiones de box-counting y pointwise. Grassberger y Procaccia derivaron un promedio para el conjunto de puntos, a la que llamaron *integral de correlación* [65]:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} * \# \text{ de pares } (i, j) \text{ cuya distancia } |\vec{x}_i - \vec{x}_j| \text{ es menor a } \varepsilon,$$

en otras palabras:

$$C(r) = \langle B_{\mathbf{X}}(r) \rangle, \quad (4.17)$$

donde $B_{\mathbf{X}}(r)$ es la esfera de radio r centrada en \mathbf{X} que contiene puntos del fractal (sec. 4.3). Esta función se relaciona con la función correlación estándar de la siguiente manera [50, 69, 70]:

$$c(\vec{r}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1; i \neq j}^N \delta^F(\vec{x}_i - \vec{x}_j - \vec{r}), \quad (4.18)$$

$$C(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon d^F r c(\vec{r}), \quad (4.19)$$

luego:

$$C(\varepsilon) \sim \varepsilon^\nu. \quad (4.20)$$

En base a esta medida de la densidad de puntos del fractal, se define la dimensión de correlación:

$$\nu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(C(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)}.$$

Luego de haber revisado estas definiciones, la partición para este caso será:

$$\tilde{\mathcal{P}}(\varepsilon) = \left\{ \tilde{\mu}_i(\varepsilon) = \frac{\mu(\tilde{V}_i)}{\mu(\mathbb{R}^d)} \mid \forall \tilde{V}_i = B_{x_i}(\varepsilon) \in \tilde{\nu}(\varepsilon) \right\}, \quad (4.21)$$

donde \tilde{p}_i es estimado a partir de \tilde{N}_i , que es el número de puntos x_j , tal que $|x_j - x_i| < \varepsilon$ y $|j - i| > W = 1$. De esta manera se obtiene la densidad de puntos para la celda i :

$$\tilde{\mu}_i(\varepsilon) = \frac{\tilde{N}_i(\varepsilon)}{N - W}. \quad (4.22)$$

El número de puntos \tilde{N}_i se expresa de la siguiente manera:

$$\tilde{N}_i(\varepsilon) = \sum_{|j-i| \geq W} \Theta(\varepsilon - \|x_j - x_i\|), \quad (4.23)$$

donde Θ es la función de Heaviside. $\tilde{\mu}_i$ se puede relacionar con la entropía de Rényi de la siguiente manera [68]:

$$H_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \log \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}_i^{(q-1)}(\varepsilon) \right), \quad (4.24)$$

lo que implica

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-H_q(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)}, \quad (4.25)$$

que es, nuevamente, el espectro multifractal de Rényi, ya definido en la Ec. (4.16). Una vez más, se utiliza una región de escalamiento en el gráfico $H_q(\varepsilon)$ versus $\log(\varepsilon)$. En la sec. 4.6 se implementará el cálculo del espectro de dimensiones fractales utilizando las dos estrategias estudiadas en esta sección, Ecs. (4.12) y (4.21).

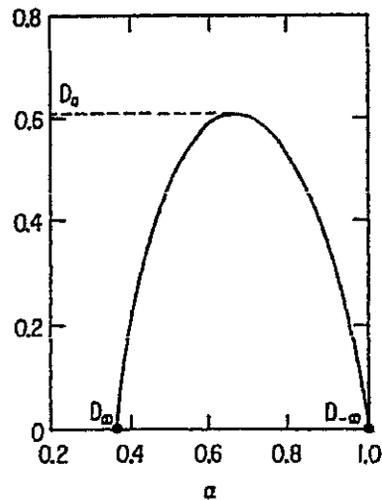


Fig. 12. Ejemplo espectro de Mandelbrot característico [52].

4.5.2. Espectro de Dimensiones Fractales de Mandelbrot

Para estimar el espectro de índices de Mandelbrot existen dos caminos: utilizar el ya conocido espectro de Rényi, Ec. (4.16), sobre el cual se realiza una transformación de Legendre, o, desde la definición de la entropía para el sistema, derivar directamente su forma, saltándonos la explícita expresión de D_q [67, 69, 70].

1. Transformación de Legendre sobre D_q

Para esto, primero definimos una nueva variable,

$$\tau = (q - 1)D_q, \quad (4.26)$$

y hacemos una transformación de Legendre desde el conjunto de variables

(q, τ) al nuevo conjunto variables (α, f) :

$$\alpha = \frac{\partial \tau}{\partial q}, \quad (4.27)$$

$$f = \alpha q - \tau, \quad (4.28)$$

de modo que,

$$q = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad (4.29)$$

$$\tau = \alpha q - f. \quad (4.30)$$

De éstas se obtiene:

$$\alpha = -\frac{\partial}{\partial q}(1-q)D_q, \quad (4.31)$$

$$f(\alpha) = q\alpha + (1-q)D_q. \quad (4.32)$$

Conocido el espectro de Rényi D_q , las Ecs. (4.31) y (4.32) permiten conocer la función $f(\alpha)$, que es un modo equivalente de representar la estructura multifractal del conjunto de puntos estudiado.

2. En base a la entropía

Así como el espectro de Rényi D_q se puede escribir en términos de la entropía [Ecs. (4.16)], se sigue que α y $f(\alpha)$ se pueden calcular a partir de una partición escogida directamente, sin necesidad de calcular primero D_q , y luego hacerle una transformación de Legendre. Para ello, basta con introducir la Ec. (4.16) en las Ecs. (4.31) y (4.32). Sin embargo, el cálculo de H_q en (4.16) depende de

la partición utilizada [Ecs. (4.14) y (4.24)] y eso llevará a expresiones diferentes para $f(\alpha)$ y α .

Para esto, volvamos a la idea original de Chhabra y Jensen [70], quienes fueron los primeros en derivar una expresión del espectro $f(\alpha)$ a partir de la entropía, utilizando la discretización espacial de la partición integral, visto en la sec. 5.2.1.

Rescapitulando, la entropía de Shannon se define por,

$$S = - \sum_i P_i \log(P_i).$$

La dimensión de Hausdorff de un objeto \mathcal{M} puede relacionarse con esta definición de entropía a través de [71]:

$$D_H(\mathcal{M}) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(N)} \sum_i^N P_i \log(P_i).$$

Definamos una medida $\mu(q, l)$ del siguiente modo:

$$\mu_i(q, \varepsilon) = \frac{(P_i(\varepsilon))^q}{\sum_i (P_j(\varepsilon))^q},$$

donde $P_i(\varepsilon)$ es la probabilidad de cada una de las celdas de lado ε (número de puntos dentro de la celda dividido por el número total de puntos), con $N \sim \varepsilon^{-1}$, por ejemplo, para una dimensión. Ahora, utilizando las ecuaciones anteriores reescribimos la dimensión de Hausdorff y definimos, a partir de esta dimensión la función $f(q)$:

$$\begin{aligned} f(q) &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(N)} \sum_{i=1}^N \mu_i(q, \varepsilon) \log(\mu_i(q, \varepsilon)), \\ f(q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, \varepsilon) \log(\mu_i(q, \varepsilon))}{\log(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Tanto $D_H(\mathcal{M})$ como $f(q)$ son medidas de la dimensión generalizada. También podemos calcular el valor promedio de la inhomogeneidad definida por $\alpha_i = \log(P_i)/\log(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\alpha(q) &= -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i(q, \varepsilon)}{\log(P_i(\varepsilon))}, \\ \alpha(q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, \varepsilon) \log(P_i(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

En base a las Ecs. (4.33) y (4.34) se reobtendrán los resultados de $f(\alpha)$ y α , ya que estas definiciones cambiarán al utilizar el particionamiento integral o la integral de correlación.

a) En el caso del particionamiento integral, Ec. (4.12), la Ec. (4.31) se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\partial}{\partial q}(1-q)D_q \\ &= -\frac{\partial}{\partial q}(1-q) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{S_q(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial q} \left[(1-q) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-q} \frac{\log(\sum_i p_i^q)}{\log(\varepsilon)} \right) \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial q} \left(\log(\sum_i p_i^q) \right) \\ \alpha &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \sum_i \frac{p_i^q}{Z_q(\varepsilon)} \log(p_i(\varepsilon)),\end{aligned}\quad (4.35)$$

donde

$$Z_q(\varepsilon) = \sum_i p_i^q(\varepsilon) \quad (4.36)$$

es la función partición del sistema.

Por su parte, reemplazando (4.16) en (4.32),

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= q\alpha + (1-q) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{S_q(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)} \right) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \left[\sum_i \frac{p_i^q}{Z_q(\varepsilon)} q \log(p_i(\varepsilon)) + (1-q) \left(-\frac{1}{1-q} \right) \log \left(\sum_i p_i^q \right) \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \left[\sum_i \frac{p_i^q}{Z_q(\varepsilon)} q \log(p_i) - \log(Z_q) \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \left[\sum_i \frac{p_i^q}{Z_q(\varepsilon)} \log^q(p_i) - \log(Z_q) \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \left[\sum_i \frac{p_i^q}{Z_q} (\log^q p_i - \log(Z_q)) \right] \\
 f(\alpha) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \left[\sum_i \frac{p_i^q}{Z_q} \log \left(\frac{p_i^q}{Z_q} \right) \right]. \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

b) Al utilizar el particionamiento integral, Ec. (4.21) a (4.24), se debe reemplazar la Ec. (4.24) en la ecuación (4.31),

$$\begin{aligned}
 \alpha(q) &= \frac{\partial}{\partial q} (1-q) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \left[-\frac{1}{1-q} \log \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i^{(q-1)}(\varepsilon) \right) \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial q} \log \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i^{(q-1)}(\varepsilon) \right) \\
 \alpha(q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{p}_i^{(q-1)}}{\tilde{Z}_q(\varepsilon)} \log(\tilde{p}_i(\varepsilon)) \right), \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{Z}_q(\varepsilon) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i^{(q-1)}(\varepsilon). \tag{4.39}$$

Reemplazando, a su vez, (4.24) en (4.32), se obtiene

$$\begin{aligned}
f(q) &= a\alpha(q) + (1-q) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \frac{1}{1-q} \log \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i^{(q-1)}(\varepsilon) \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \frac{q}{N} \sum_i \frac{\tilde{p}_i^{(q-1)}(\varepsilon)}{\tilde{Z}_q(\varepsilon)} \log(\tilde{p}_i(\varepsilon)) \log(\tilde{Z}_q) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{p}_i^{(q-1)}(\varepsilon)}{\tilde{Z}_q(\varepsilon)} [\log(\tilde{p}_i^q(\varepsilon)) - \log(\tilde{Z}_q)] \right) \\
f(q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log(\varepsilon)} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{p}_i^{(q-1)}(\varepsilon)}{\tilde{Z}_q(\varepsilon)} \log \left(\frac{\tilde{p}_i^q(\varepsilon)}{\tilde{Z}_q(\varepsilon)} \right) \right). \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Notemos que tanto Z_q como \tilde{Z}_q tienen las siguientes propiedades,

1. Si $q = 0$, entonces Z_q (\tilde{Z}_q) es la medida del soporte independiente de las probabilidades p_i .
2. Si $q = 1$, entonces $Z_q = 1$ ($\tilde{Z}_q = 1$), debido a la normalización de la suma.
3. Si q es positivo y es grande, entonces Z_q (\tilde{Z}_q) va a privilegiar las zonas con una probabilidad p_i mayor.
4. Si q es negativo y su valor absoluto es grande, entonces Z_q (\tilde{Z}_q) va a privilegiar a aquellas zonas de menor probabilidad p_i .

Por otra parte, cabe hacer notar que la dimensión generalizada D_q considera sólo la parte geométrica del fractal, mientras que α es el exponente de probabilidad de cada celda [67, 70, 72].

4.6. Espectro multifractal para datos sísmicos

Para los fines de esta tesis, se ha estimado el espectro multifractal de Rényi (RFSD) de los epicentros e hipocentros de los datos sísmicos de Chile, utilizan-

do las dos metodologías de separación espacial descritas en la sec. 4.5. Para cada una de ellas se ha estimado, a su vez, el espectro multifractal de Mandelbrot (MFDS) aplicando la formulación directa a partir del ya conocido espectro de Rényi, Ec. (4.16) y realizando la transformación de Legendre, Ecs. (4.31) y (4.32), y utilizando directamente la definición de la entropía, Ecs. (4.33) y (4.34).

Los resultados se presentan a continuación.

1. Epicentros

Los primeros datos en estudio serán las proyecciones en el plano latitud-longitud ($x-y$) de los focos sísmicos (Cap. 2). El primer análisis realizado sobre estos datos se realizará utilizando la discretización espacial denominada *Integral de Correlación*, Ec. (4.21). Luego de éste, se utilizará la discretización denominada *Particionamiento Integral*, Ec. (4.12). Ambas discretizaciones espaciales serán utilizadas para estimar el espectro de dimensiones fractales de Rényi, en primer lugar.

a) Integral de Correlación.

Se ha discretizado el espacio en el cual están contenidos los datos sísmicos en dos dimensiones utilizando discos de radio ε , se calcula la densidad de puntos por celda i mediante las Ecs. (4.22) y (4.23). En principio, la Ec. (4.25) dice que hay que tomar el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, pero en realidad lo que haremos es, dado un valor de q , disminuir ε hasta encontrar una región en que H_q dependa linealmente de $\log(\varepsilon)$, y calcular D_q en base a la pendiente de la recta correspondiente mediante un ajuste de mínimos cuadrados. Luego se repite el procedimiento para otros valores de q , y de este modo se estima el espectro multifractal de Rényi, $D_q(q)$. El resultado

se encuentra en la Fig. 14.

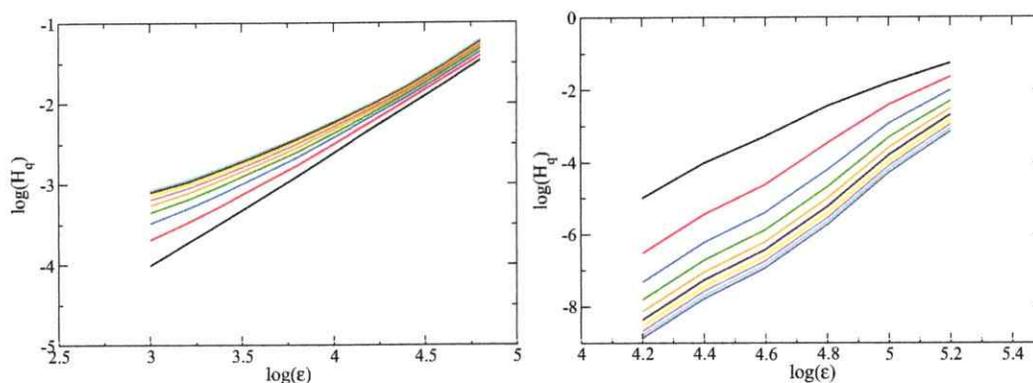


Fig. 13. Rango lineal de ε para la zona de $q > 0$ (izquierda) y $q < 0$ (derecha).

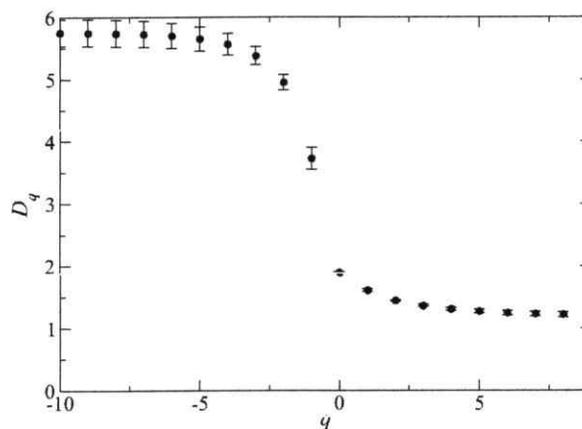


Fig. 14. Espectro de dimensiones fractales de Rényi, para los datos de epicentros utilizando el método de discretización espacial de la Integral de Correlación.

En la figura anterior vemos que el espectro de dimensiones fractales corresponde, efectivamente a una función suave y continua dada por la Ec. (4.25), lo cual sugiere que este método de discretización espacial es adecuado para el estudio que estamos realizando.

b) Particionamiento Integral.

En este caso, el espacio que contiene a los datos sísmicos es discretizado utilizando celdas de lado ε , tamaño que se hace tender a cero, Ec. (4.16). Al igual que en el caso anterior, se grafica el logaritmo de la densidad de puntos por celda $p_i(\varepsilon)$, Ec. (4.13), versus el logaritmo de ε , y se elige el rango en que la dependencia es lineal cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. De esta manera, se realiza el cálculo de la dimensión D_q , utilizando un ajuste de mínimos cuadrados. Este método es el análogo al de box-counting utilizado en la sec. 4.4 para estimar la dimensión de capacidad D_0 , radicando la diferencia en que en el caso actual, es necesario considerar la densidad de puntos por celda y no el número de celdas que contienen al fractal. El resultado se presenta en la Fig. 16.

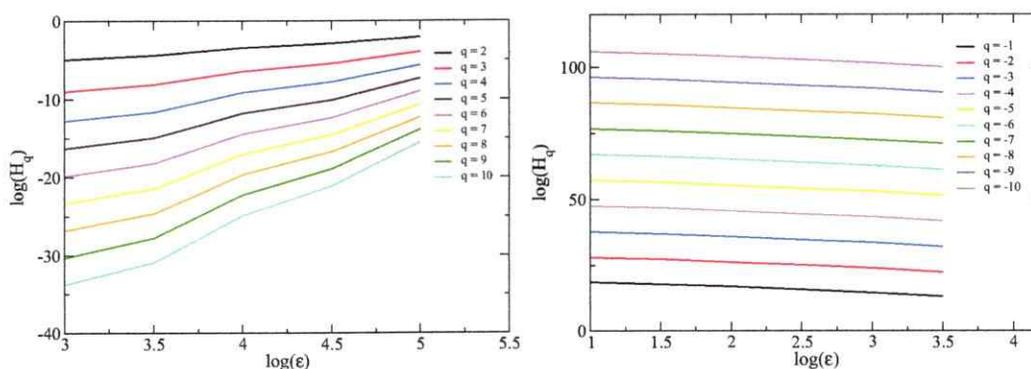


Fig. 15. Rango lineal de ε para la zona de $q > 0$ (izquierda) y $q < 0$ (derecha).

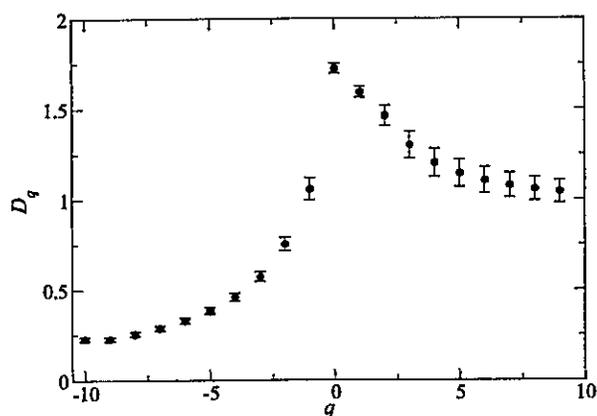


Fig. 16. Espectro de dimensiones fractales de Rényi, para los datos de epicentros. Estimación utilizando la Partición Integral.

De la Fig. 16 es claro que el resultado no es continuo, existiendo una discontinuidad en $q = 0$ y un decaimiento a $D_q \rightarrow 0$ cuando $q < 0$, por lo tanto, no es una buena aproximación al espectro descrito por la Ec. (4.16). Este resultado sugiere que, aunque este método es útil y muy utilizado en el cálculo de D_0 , no necesariamente es una buena técnica para el cálculo de los valores negativos de q del espectro multifractal.

2. Hipocentros

Se analizarán los datos de los focos sísmicos, que poseen tres coordenadas: latitud, longitud y profundidad. Nuevamente iniciaremos este estudio utilizando la discretización de la *Integral de Correlación*, para luego usar el método de la *Partición Integral*.

a) Integral de Correlación.

De modo análogo a lo hecho para los epicentros, se discretiza el espacio que contiene los datos de los focos sísmicos en cubos de radio ε , Ec. (4.21), luego de esto se calcula la densidad de puntos contenidos en cada uno de estos cubos, Ecs. (4.22) y (4.23). Se grafica el logaritmo de las densidades $\tilde{p}_i(\varepsilon)$ versus el logaritmo de ε y se estima la dimensión D_q a partir de un ajuste de mínimos cuadrados del rango lineal en ε del gráfico, Ec. (4.25).

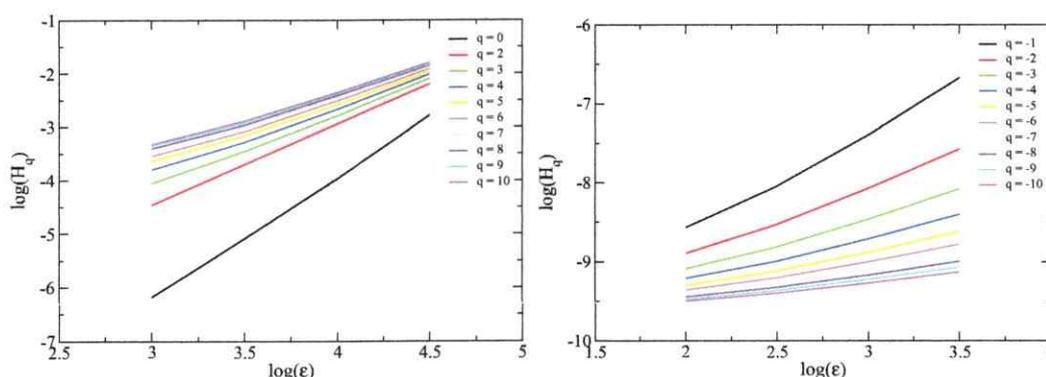


Fig. 17. Rango lineal de ε para la zona de $q > 0$ (izquierda) y $q < 0$ (derecha).

En la Fig. 18 se presenta el espectro de dimensiones fractales de Rényi para los datos de hipocentros. Sólo se muestra la zona en la que $q > 0$, debido a que con este procedimiento los valores de D_q para $q < 0$ arrojaron la misma tendencia que los valores de q negativos de la Fig. 16.

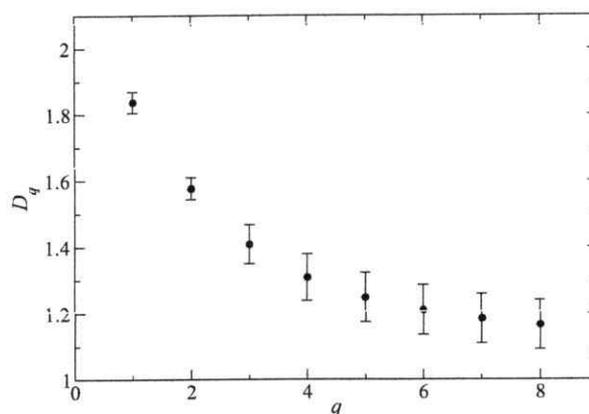


Fig. 18. Espectro de dimensiones fractales de Rényi para los datos de hipocentros. El espacio ha sido discretizado utilizando la Integral de Correlación.

b) Particionamiento integral.

Al igual que en el caso de los epicentros, se discretizará el espacio, esta vez se utilizarán cubos de lado ε . Nuevamente se calculará la densidad de puntos por cubo, $p_i(\varepsilon)$, Ec. (4.13) y se realizará un gráfico log-log de la densidad de puntos versus el tamaño el lado del cubo. En la Ec. (4.16) el valor del lado debe tender a cero, es por esto, que se elige el rango lineal del gráfico y se estima, a través de mínimos cuadrados, el valor de la pendiente. El resultado se presenta en la Fig. 20.

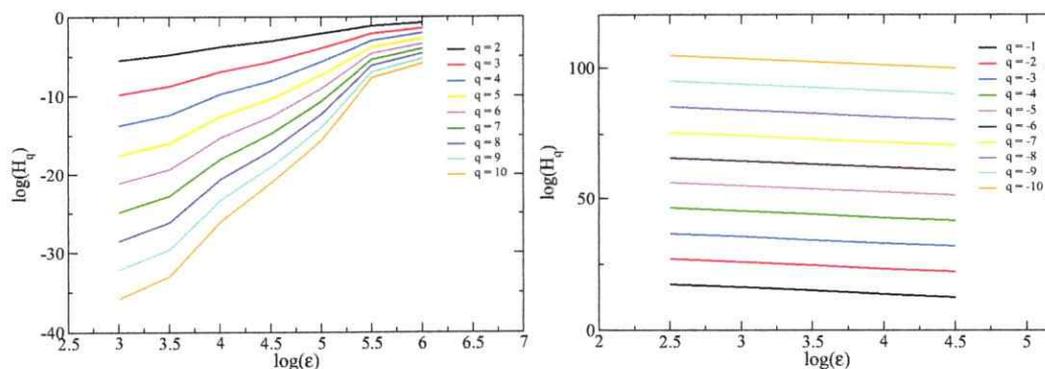


Fig. 19. Rango lineal de ε para la zona de $q > 0$ (izquierda) y $q < 0$ (derecha).

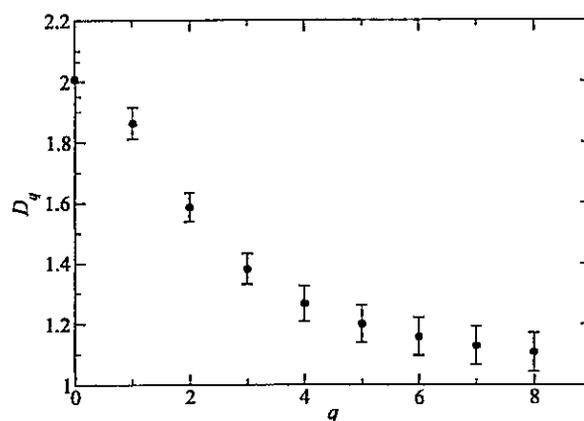


Fig. 20. Espectro de dimensiones fractales de Rényi para los datos de hipocentros. El espacio es discretizado mediante cubos de lado ε , método de la Partición Integral.

Vemos en la Fig. 20 el buen ajuste de este método para los valores positivos de q , ya que la función es continua y suave, tal como los indica la Ec. (4.16). Sin embargo, al estimar con este método el valor de D_q para $q < 0$ se obtuvieron resultados similares a los de la Fig. 16.

Por completitud se ha estimado el espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot. Éste fue construido utilizando las Ecs. (4.31), (4.32) y fue comparado con la estimación construida a partir de la entropía, utilizando las Ecs. (4.35), (4.37), para el cubrimiento de la partición integral y con las Ecs. (4.38) y (4.40), para el cubrimiento de la integral de correlación.

1. Epicentros

Se estimará el espectro de Mandelbrot para los datos de epicentros mediante las dos metodologías estudiadas en la sec. 4.5.

a) Transformación de Legendre.

Se utilizarán los resultados del espectro de dimensiones de Rényi de las dos discretizaciones espaciales estudiadas para construir, mediante las ecs. (4.31) y (4.32) el espectro de dimensiones de Mandelbrot.

1) Integral de Correlación.

En este caso, se toman los datos de la Fig. 14 para construir a partir de ellos el espectro $f(\alpha)$ versus α , utilizando las Ecs. (4.31) y (4.32), Fig. 21.

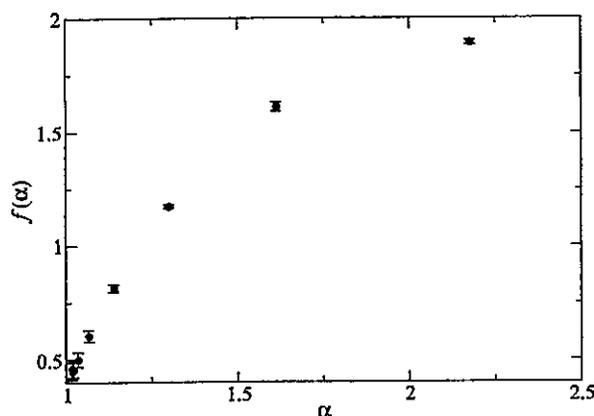


Fig. 21. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot para los datos de epicentros. Se ha utilizado el resultado del espectro de Rényi con la discretización de la integral de correlación.

El gráfico parece estar cortado, sin embargo esto no es así, esta asimetría es producto de los valores de D_q cuando $q < 0$, resultado que sugiere que los datos del espectro de Rényi no son los correctos.

2) Particionamiento de Histograma.

En este caso, se utilizará el espectro de Rényi construido con el método de la partición integral, Fig. 16, y se le aplicarán las Ecs. (4.31) y (4.32) con el fin de construir de esta manera el espectro de dimensiones de Mandelbrot, Fig. ??.

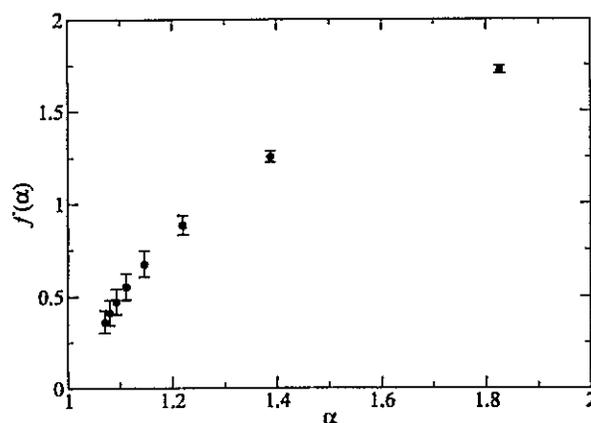


Fig. 22. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot para los datos de los epicentros. El espacio ha sido discretizado mediante celdas de lado ε .

Un espectro característico de Mandelbrot tiene la forma de una campana que se cierra abruptamente, sin embargo, la forma obtenida en la Fig. 22 no es así, sólo la parte que corresponde al uso de los valores positivos de q da una forma similar a la característica de este espectro. Este resultado sugiere que los valores negativos de q en el espectro de Rényi no son correctos, como ya se había comentado en la Fig. 16.

b) Utilizando la entropía.

1) Integral de Correlación.

Nuevamente se utilizará la metodología de la integral de correlación, es decir, discretización del espacio mediante celdas de radio ε , Ec. (4.21). En este caso, se ha reemplazado la Ec. (4.24), que es la entropía, en las ecs. (4.31) y (4.32), que son las definiciones de los parámetros del espectro de Mandelbrot, obteniendo las Ecs. (4.40).

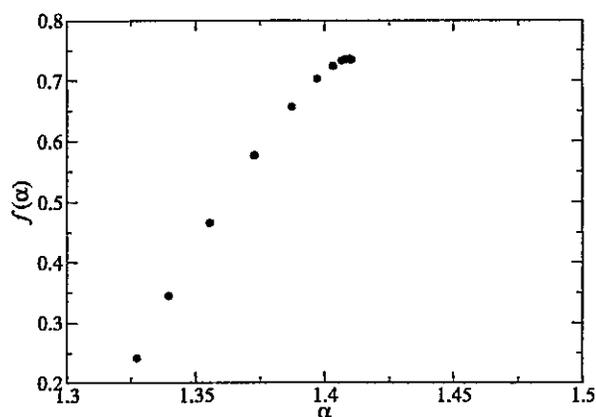


Fig. 23. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot para epicentros, utilizando las Ecs. (4.40).

Una vez más es, el espectro no es construido para un rango de valores de α , existe gran dificultad para construir el espectro para la zona asociada a los valores negativos de q .

2) Partición Integral.

Se construirá el espectro de dimensiones de Mandelbrot a partir de la entropía encontrada en la discretización integral, es decir, el cubrimiento del fractal mediante celdas de lado ε , Ec. (4.14). Se utilizarán las Ecs. (4.35).

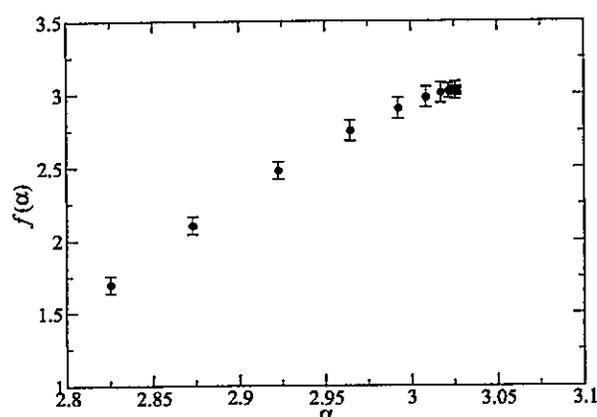


Fig. 24. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot para epicentros. Cubrimiento espacial mediante partición integral, Ecs. (4.35).

Nuevamente sólo ha sido posible construir el espectro de Mandelbrot para la zona correspondiente a $q > 0$, región donde el espectro $f(\alpha)$ tiene la forma esperada.

2. Hipocentros

Se comenzará el estudio del espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot aplicado a los datos de los focos sísmicos o hipocentros.

a) Transformación de Legendre.

En primer lugar, se utilizarán las Ecs. (4.31) y (4.32) en los espectros de Rényi obtenidos en el análisis anterior de estos datos, Figs. 18 y 20, para las dos metodologías de discretización espacial.

1) Integral de Correlación

Se han utilizado los datos de la Fig. (18), es decir, el espectro de dimensiones de Rényi obtenido particionando el espacio mediante cubos de radio ε . A estos datos se les han aplicado las ecuaciones que describen a α y $f(\alpha)$, Ecs. (4.31) y (4.32).

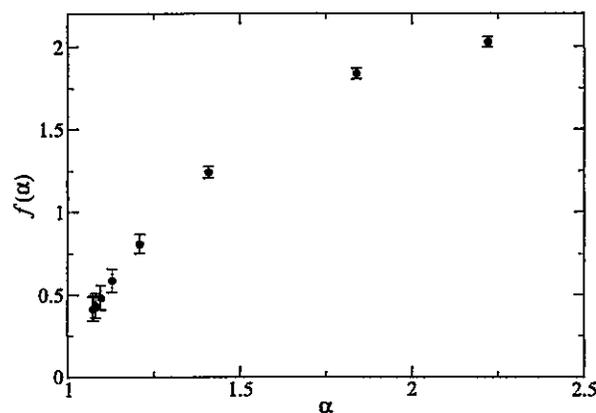


Fig. 25. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot para los hipocentros. En este caso se han utilizado los datos del espectro de Rényi generados mediante la discretización de cubos de radio ε .

El gráfico de la Fig. 25 sólo tiene la forma adecuada para la mitad de la región graficada, correspondiente a $q > 0$. Una vez más queda de manifiesto la dificultad de completar los espectros de datos experimentales.

2) Partición de Histograma

A su vez, los valores de la Fig. 20, es decir, el espectro de Rényi obtenido a partir de la discretización mediante cubos de lado ε , han sido utilizados con el fin de estimar el espectro de dimensiones de Mandelbrot para los hipocentros. Estos datos han sido utilizados en las ecs. (4.31) y (4.32).

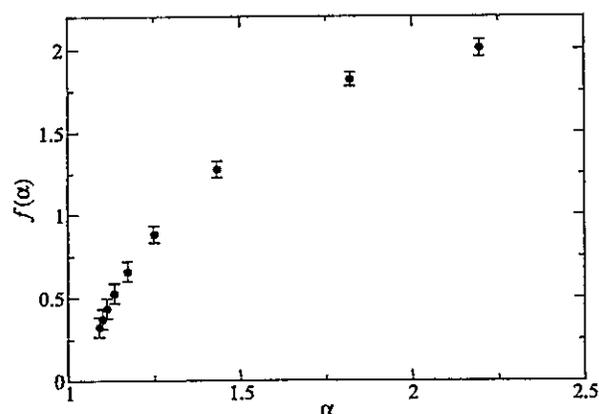


Fig. 26. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot para los datos de los focos sísmicos. El espacio ha sido particionado mediante la Ec. (4.12).

El gráfico obtenido sólo muestra una zona del espectro, debido a que con los métodos utilizados no fue posible generar la zona para $q < 0$.

b) Construcción del espectro de dimensiones de Mandelbrot derivado directamente desde la definición de la entropía para cada discretización espacial.

1) Integral de Correlación

Una vez más, se ha utilizado la partición mediante esferas de radio ε , Ec. (4.21). A partir de esta discretización se definió una entropía, y finalmente, se utilizaron la Ec. (4.40).

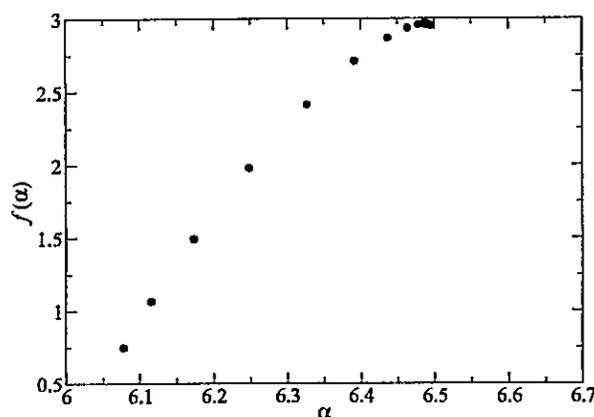


Fig. 27. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot para hipocentros. La partición espacial construida para este caso fue mediante esferas de radio ε .

2) Partición de Histograma

Los resultados para este caso no produjeron ningún gráfico coherente, es decir, se obtuvo un gráfico con sólo un triángulo en una de sus esquinas.

4.7. Utilización de un generador para la completación del espectro multifractal

Como se observó en la sec. 4.6, existe una gran dificultad para calcular, a partir de los datos experimentales, los espectros multifractales de Rényi y Mandelbrot para $q < 0$, tanto para el particionamiento integral como el de la integral de correlación. Para salvar esta dificultad, se ha procedido de la siguiente manera: se construye un fractal matemático utilizando que dependa de ciertos parámetros ajustables que se adaptan para reproducir correctamente el espectro multifractal derivado de los datos para $q > 0$. Luego, obtenemos el espectro multifractal para $q < 0$ a partir del fractal matemático ajustado. Para el presente estudio se utilizará un set de Cantor [52, 73]

esa suma de probabilidades no sea igual a la unidad, de hecho, es menor a 1. Es éste el método que se utilizará en esta sección, debido a que ha sido utilizada con éxito en el ajuste de otros datos experimentales [74].

Decimos, además, que el conjunto es simétrico si los dos segmentos tienen el mismo largo, y que es asimétrico si su largo es diferente.

$$\Gamma(q, \tau, l_2^n) = \sum_m \binom{n}{m} p_1^{mq} p_2^{(n-m)q} (l_1^m l_2^{(n-m)})^{-\tau}. \quad (4.42)$$

Finalmente, la ecuación que generará el fractal deseado es [74]:

$$p^q l_1^{(1-q)D_q} + (1-p)^q l_2^{(1-q)D_q} = 1. \quad (4.43)$$

Existen una serie de combinaciones de los parámetros ajustables. Al referirnos a la conservación, apuntamos a si la suma de las probabilidades de cada sección de la línea suman uno o si suman un número menor a uno.

En el caso de los datos sísmicos aquí estudiados, se utilizó el caso asimétrico y conservativo, debido a que fue sólo éste tipo de fractal el que ajustó adecuadamente la zona de $q > 0$ del espectro multifractal de Rényi para los datos sísmicos. Para realizar este análisis se han escogido los mejores gráficos del espectro de dimensiones de Rényi de la sec. 4.5, es decir, para epicentros se utilizó el gráfico que completó el espectro de Rényi para $q < 0$ de manera suave y continua, mientras que para hipocentros, ambos resultados Fig. 18 y Fig. 20 dieron esencialmente el mismo resultado.

Los resultados de la aplicación de este método a los datos experimentales de epicentros e hipocentros se presenta a continuación.

1. Resultados para epicentros.

Para los datos de los epicentros se ha elegido la Fig. 14, de la sec. 4.5, debido a que este gráfico es continuo y fue el único en el que se obtuvo un espectro para los valores de $q < 0$ para el espectro de Rényi.

Los resultados del ajuste y de su continuación para $q < 0$ se presentan en la Fig. 29.

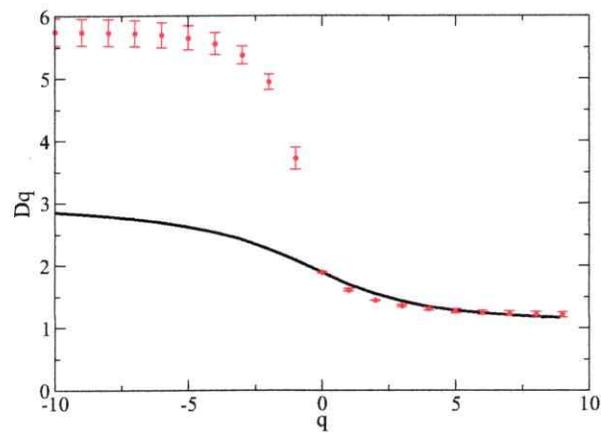


Fig. 29. Espectro de dimensiones fractales de Rényi, en dos dimensiones. Comparación resultados utilizando set de Cantor (línea sólida) y el resultado de los datos experimentales [partición integral de correlación, Fig. 14].

En la Fig. 29 es evidente el buen ajuste del método de Cantor (línea sólida) en relación al resultado obtenido directamente de los datos experimentales (puntos rojos), buen ajuste que queda evidenciado porque la zona para $q > 0$ obtenida con Cantor, está dentro del error de los resultados para D_q obtenidos de los datos. La zona para $q < 0$ es diferente a la obtenida del cálculo directo, lo cual probablemente explica el mal resultado en la Fig. 21 para $q < 0$.

Los valores de los parámetros utilizados para ajustar la zona de $q > 0$ en el espectro de Rényi fueron:

p	l_1	l_2
0.680	0.691	0.696

Tabla 4.2: Tabla con los valores que ajustaron la Fig. 14.

Como se vio en las secs. 4.4 y 4.5, es posible construir el espectro de dimensiones de Mandelbrot a partir del espectro de dimensiones de Rényi mediante una transformación de Legendre, Ecs. (4.31) y (4.32). Esto se hará ahora, a partir del ajuste fractal mostrado en la Fig. 29. El resultado se presenta en la Fig. 30.

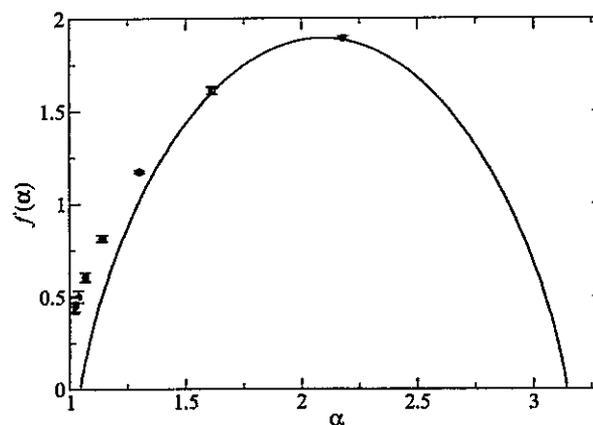


Fig. 30. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot para epicentros. Resultados utilizando el método de Cantor asimétrico y conservativo (línea sólida) y resultado de los datos experimentales (puntos rojos).

Como es posible apreciar en la Fig. 30, el espectro de dimensiones de Mandelbrot sí tiene la forma apropiada.

2. Resultados para hipocentros.

Se realizará el mismo tipo de ajuste mostrado para los epicentros sobre los datos de los hipocentros. En este caso, se utilizarán los datos de la Fig. 18, la zona para $q > 0$ será ajustada mediante la c. (4.43) y de esta manera se completará el espectro de Rényi para los hipocentros.

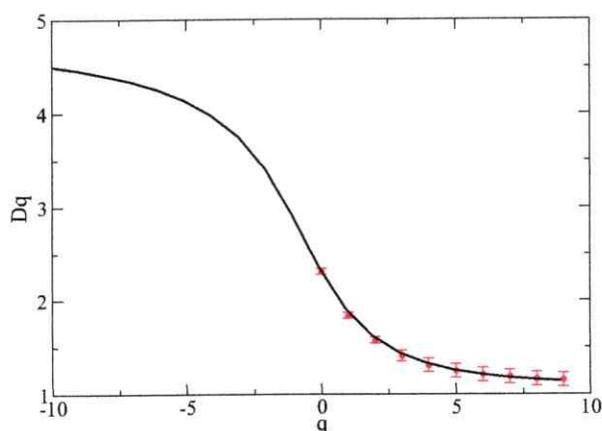


Fig. 31. Espectro de dimensiones fractales de Rényi, para los datos de hipocentros. Comparación resultados utilizando set de Cantor (línea sólida) y el resultado de los datos experimentales [espectro obtenido con el método de la integral de correlación, Ec. (4.21)].

De la Fig. 31 es claro el buen ajuste obtenido para la región $q < 0$ en el caso de los hipocentros. De esta manera se ha obtenido el espectro de Rényi para estos datos experimentales para cualquier valor de q , utilizando el método de Cantor.

A continuación se presentan los valores de los parámetros que ajustaron la curva de la Fig. 31:

p	l_1	l_2
0.675	0.6781	0.797

Tabla 4.3: Tabla con los valores que ajustaron la Fig. 14.

Con el fin de obtener el espectro de dimensiones de Mandelbrot, se utilizarán, al igual que en el caso de los epicentros, las cs. (4.31) y (4.32), las que serán aplicadas al ajuste obtenido con el set de Cantor.

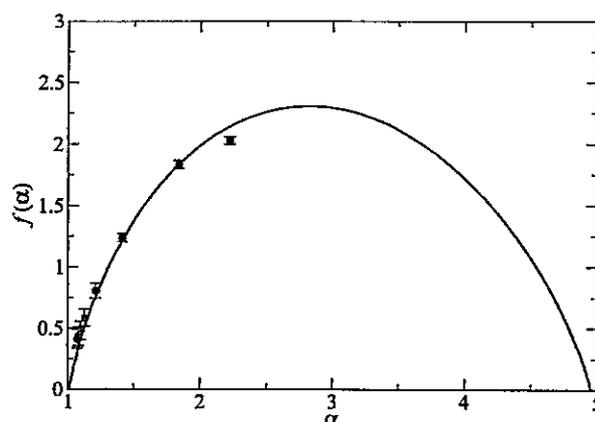


Fig. 32. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot para los datos de los hipocentros. Resultados utilizando el método de Cantor asimétrico y no conservativo.

Como se aprecia en la Fig. 32, notamos que el espectro obtenido mediante la completación del espectro de Rényi usando el fractal generado con Cantor, también corresponde a un espectro característico de Mandelbrot, de modo que también la estrategia ha resultado exitosa en este caso.

4.8. Estudio sobre sismos superficiales

El estudio anterior ha sido realizado sobre el catálogo completo, sin embargo, los sismos que generan mayor devastación son los denominados **sismos intraplacas**, los que poseen una profundidad no mayor a los 20 km. En esta sección, se repetirá el análisis mono y multi fractal sobre los sismos del catálogo cuya profundidad no supere los 20 km. En este caso, se ha utilizado la misma discretización espacial mencionada en el Cap. 2, esta vez, el catálogo contiene 5388 sismos con una profundidad de menos de 20 km.

4.8.1. Estudio monofractal

Hipocentros

Utilizando el método de box-counting se ha estimado la dimensión D_0 de los focos sísmicos, es decir, el espacio formado por latitud, longitud y profundidad.

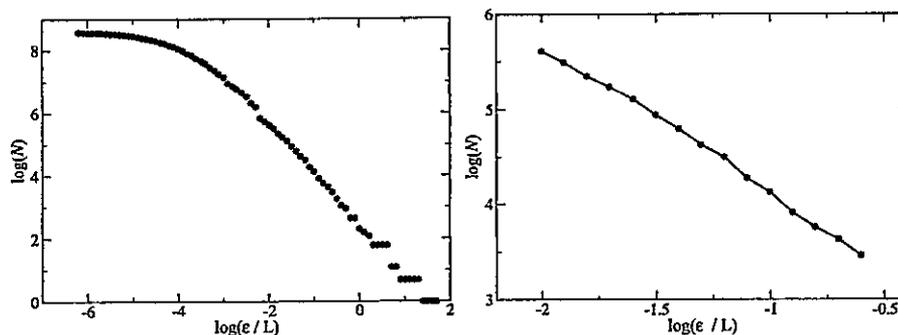


Fig. 33. Gráfico de la zona lineal del logaritmo del número de celdas que contienen epicentros versus el logaritmo del tamaño del lado ϵ para los datos de hipocentros. El rango lineal va entre $\epsilon = 4.2$ y $\epsilon = 5.7$. En este caso la dimensión de box-counting D_0 (pendiente de este gráfico), obtenida a partir de un ajuste de mínimos cuadrados, fue 1.58 ± 0.02 .

Epicentros

Se utilizó el método de box-counting para estimar la dimensión D_0 de los epicentros.

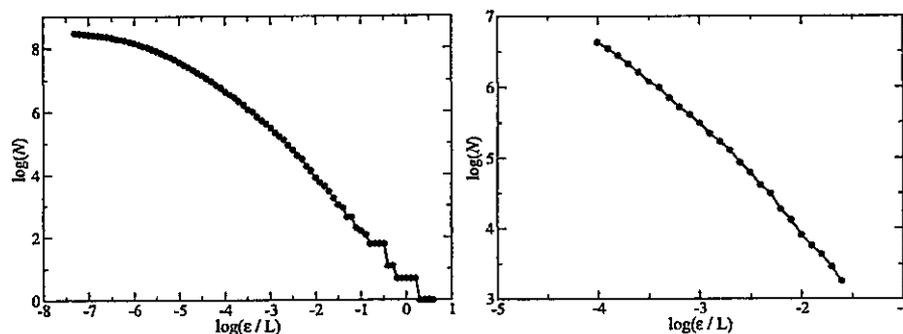


Fig. 34. Gráfico de la zona lineal del logaritmo del número de celdas que contienen epicentros versus el logaritmo del tamaño del lado ε para los datos de hipocentros. El rango lineal va entre $\varepsilon = 3.3$ y $\varepsilon = 5.8$. En este caso la dimensión de box-counting D_0 (pendiente de este gráfico), obtenida a partir de un ajuste de mínimos cuadrados, fue 1.42 ± 0.02 .

Finalmente se tiene:

$$D_0^{(ep)} = 1.42 \pm 0.02,$$

$$D_0^{(hip)} = 1.58 \pm 0.05,$$

valores para epicentros e hipocentros, respectivamente. Es claro el efecto que resulta de condiderar sólo sismos de baja profundidad en el cálculo de la dimensión de box-counting, para ambos casos (hipocentros y epicentros) el valor de D_0 disminuyó de manera considerable, siendo más notoria esta característica fractal.

4.8.2. Estudio multifractal

A su vez, se ha realizado el espectro multifractal para sismos de profundidad menor a 20 km, utilizando la metodología de discretización espacial de la Integral de Correlación, para el espectro de dimensiones fractales de Rényi, y la transformación de Legendre para construir el espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot.

1. Epicentros

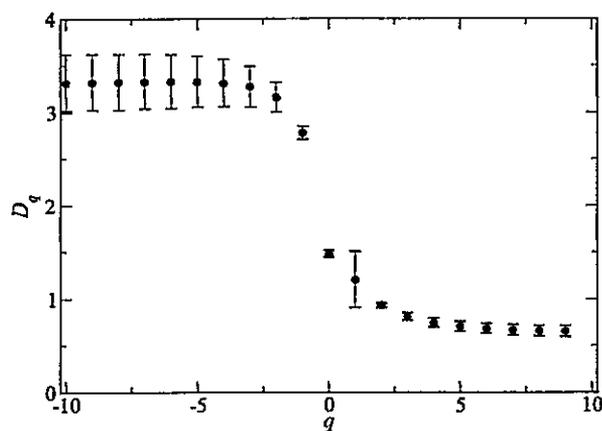


Fig. 35. Espectro de dimensiones fractales de Rényi obtenido mediante la discretización espacial de la integral de correlación. Datos de epicentros.

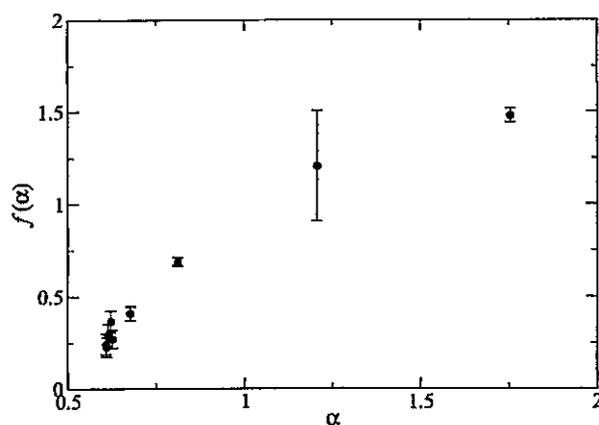


Fig. 36. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot obtenido mediante una transformación de Legendre del espectro de Rényi, para epicentros.

2. Hipocentros

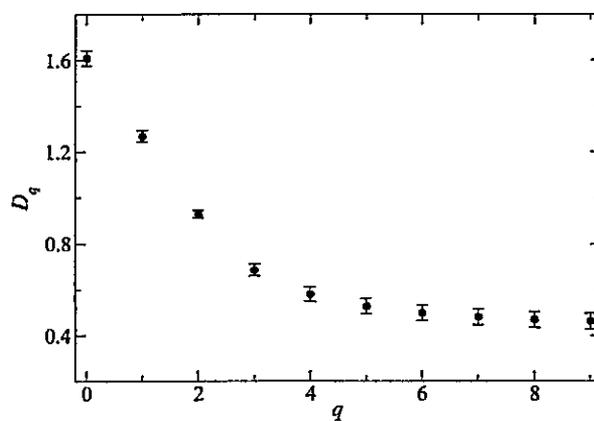


Fig. 37. Espectro de dimensiones fractales de Rényi obtenido mediante la discretización espacial de la integral de correlación. Datos de hipocentros.

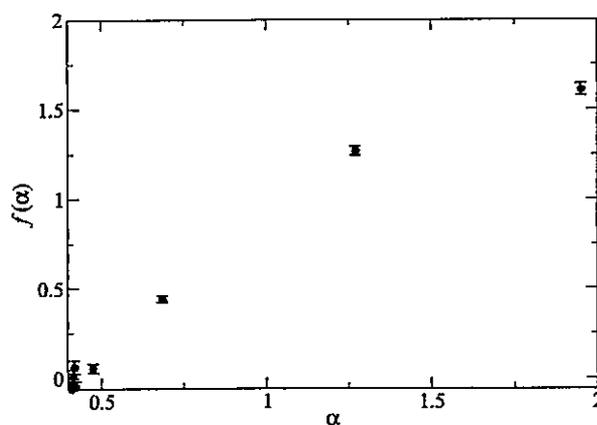


Fig. 38. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot obtenido mediante una transformación de Legendre del espectro de Rényi, para hipocentros.

Al igual que en el análisis del catálogo completo el espectro de Rényi con $q < 0$ para los hipocentros no fue construido, debido a diversas complicaciones metodológicas, es por esta razón que se utilizó un conjunto de Cantor asimétrico y conservativo para construir el espectro completo.

1. Epicentros

Se presenta la tabla que contiene los valores de los parámetros que ajustaron la zona de $q > 0$ para construir el espectro de Rényi, en dos dimensiones.

p	l_1	l_2
0.75	0.0.605	0.65

Tabla 4.4: Tabla con los valores que ajustan la Fig. 39.

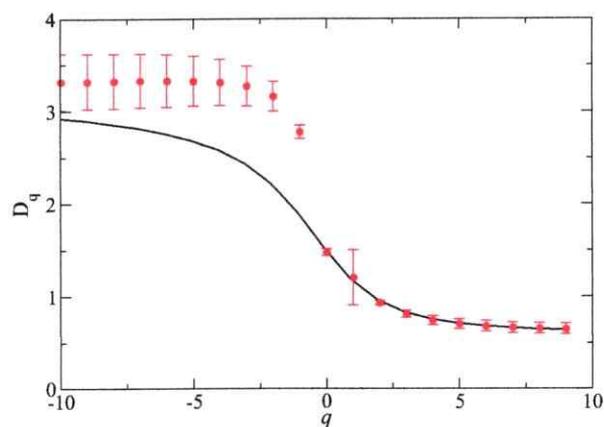


Fig. 39. Espectro de dimensiones fractales de Rényi, en dos dimensiones. Comparación resultados utilizando un conjunto de Cantor (línea sólida) y el resultado de los datos experimentales (círculos rojos).

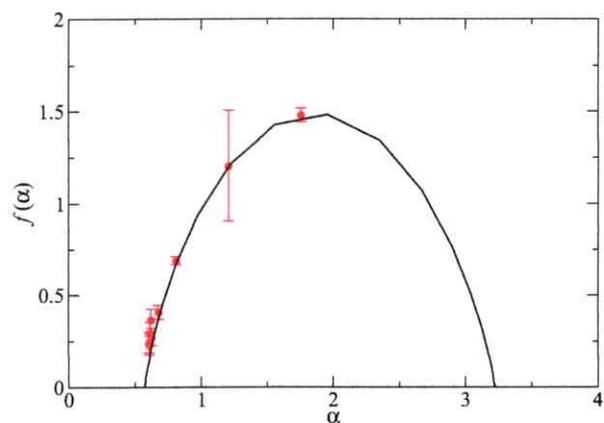


Fig. 40. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot obtenido mediante una transformación de Legendre del espectro de Rényi para hipocentros. La línea sólida es el resultado con el conjunto de Cantor, mientras que los círculos rojos son el resultado de los datos.

2. Hipocentros

A continuación la tabla con los valores de los parámetros utilizados para ajustar

la zona de $q > 0$ y construir $q < 0$.

p	l_1	l_2
0.788	0.569	0.725

Tabla 4.5: Tabla con los valores que ajustan la Fig. 41.

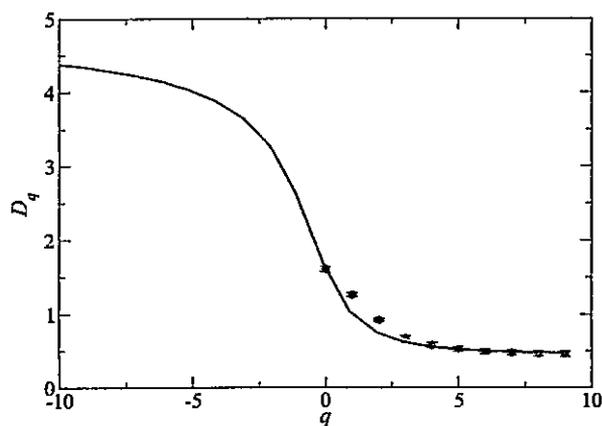


Fig. 41. Espectro de dimensiones fractales de Rényi, en tres dimensiones. Comparación resultados utilizando un conjunto de Cantor (línea sólida) y el resultado de los datos experimentales (círculos rojos).

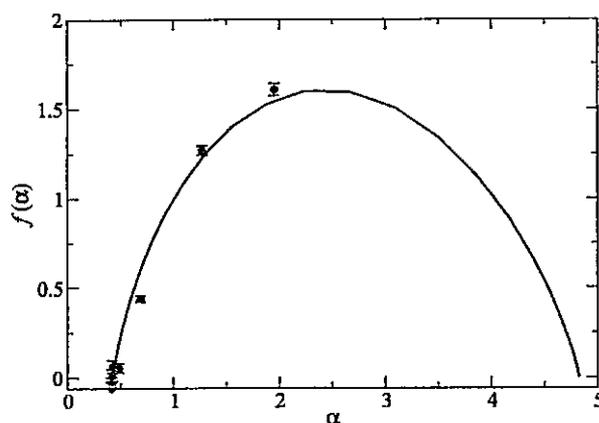


Fig. 42. Espectro de dimensiones fractales de Mandelbrot obtenido mediante una transformación de Legendre del espectro de Rényi para hipocentros. La línea sólida es el resultado con el conjunto de Cantor, mientras que los círculos rojos son el resultado de los datos.

4.9. Algunos comentarios adicionales

El espectro fractal de Rényi, así como el de Mandelbrot, tienen una forma característica, ambas producto de las Ecs. (4.16), (4.31) y (4.32). En estas ecuaciones se define la suavidad y continuidad de ambas funciones, por lo tanto, en base a estas ecuaciones es que podemos determinar cuál es el mejor resultado de los análisis ya realizados.

Para los datos en dos dimensiones, epicentros, el mejor resultado para el espectro de Rényi es el construido mediante la Integral de Correlación, por la suavidad y porque el espectro fue construido tanto para $q > 0$ como para $q < 0$, a su vez, el mejor resultado para el espectro fractal de Mandelbrot es el obtenido aplicando la transformación de Legendre al anterior espectro fractal de Rényi.

En el caso de los hipocentros, es necesario notar el mayor grado de dificultad

que se presentó para el cálculo de los espectros, dificultad que podría deberse a la profundidad de los datos. Para salvar esta dificultad se consideró que el 98 % de las profundidades no son mayores a 150 km, entonces, se consideraron sólo esos datos y con ellos se realizó este análisis. Sin embargo, incluso haciendo esta consideración, los resultados no fueron los esperados. No obstante, ambos espectros fractales, tanto el de Rényi como el de Mandelbrot, tienen la forma esperada.

Considerando el porcentaje de sismos poco profundos, cabe destacar el buen resultado para los epicentros, considerándolo realmente un resultado representativo del conjunto de datos sísmicos bajo estudio.

Es importante destacar que nuestro trabajo, hasta donde sabemos, es el primero en el que se obtiene un espectro de dimensiones para valores positivos y negativos de q [20, 24, 53, 54, 56–60, 75, 76].

Capítulo 5

Redes

Uno de los desarrollos más interesantes en el estudio de la actividad sísmica en el último tiempo, es su análisis en términos de redes complejas [12]. Diversos estudios se han realizado en esta dirección, lo que ha abierto interesantes perspectivas en el estudio tanto de las propiedades estadísticas de la actividad sísmica como de su eventual predicción [12, 14, 15, 77–80]. En esta tesis aplicamos este tipo de análisis a los datos sísmicos para Chile de que disponemos, lo cual constituye, hasta donde sabemos, el primer trabajo de esta naturaleza para sismicidad en Chile.

5.1. ¿Qué es una red?

El estudio de *grafos* en matemáticas, es un área de trabajo con larga tradición, remontándose al problema de los siete puentes de Königsberg, resuelto por Leonard Euler en 1736 [81]. De manera creciente, sin embargo, su estudio se ha propagado en el ámbito de la física, al observarse que diversos sistemas naturales o de gran interés público, tales como internet o la WWW, tienen una estructura que se puede estudiar como un grafo. Esto ha dado origen a aplicaciones que han resultado simples de explicar y atractivas para el público en general; un ejemplo de esto es la divulgación entre la población de la conocida regla de “seis grados de separación”, en la cual se

establece que dos ciudadanos cualesquiera de un país están ligados a través de no más de seis personas conocidas entre ellos [82].

Pero sus aplicaciones no han sido sólo académicas. Por ejemplo, nuestra creciente dependencia tecnológica, que tuvo una explosión en el siglo XX, ha obligado a cuestionarse cuán robustas son estas redes antes fallas o ataques. Por ejemplo, ¿se corre el riesgo de apagones eléctricos en grandes zonas, si algunas estaciones eléctricas sufren un desperfecto?; ¿hay estaciones en las que una falla es más nociva que en otras?; o en el caso de internet, ¿podría esta red quedar inutilizable si algunos computadores críticos son atacados? Este tipo de preguntas, y muchas otras de interés práctico, pueden ser estudiadas en el contexto de teorías de redes [82].

Podemos definir un grafo o red, como un conjunto de vértices conectados entre sí mediante enlaces o vínculos (Fig. 43). Por ejemplo, cuando la Marvel realizó un estudio sobre cuál es el superhéroe con más amigos, definió como los enlaces a la participación de los superhéroes en capítulos de cómics de otros superhéroes y cada paladín de la justicia correspondía a un vértice. Finalmente, el héroe con más amigos resultó ser el Hombre Araña. Otro interesante ejemplo son las redes sociales, muy utilizadas en estudios sociológicos, como una red de contactos de género, de transporte, hobbies o expansión de enfermedades [83, 84].

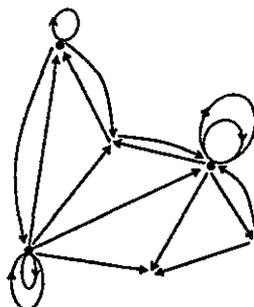


Fig. 44. Ejemplo de una red direccional. Los enlaces indican conexión entre nodos en una dirección específica, y no a la inversa.

5.2.2. Red no direccional

Una red *no direccional* es aquella red en la que se eliminan toda clase de curvas cerradas sobre el mismo nodo y en la que no es relevante la información acerca del nodo de salida y el de llegada, sólo teniendo importancia si dos nodos están o no relacionados entre sí, sin importar la dirección de la conexión. En la Fig. 45 se muestra un ejemplo construido a partir de la misma red de la Fig. 44. Un buen ejemplo de este tipo de red es el ya mencionado juego de los seis grados de separación. Existen muchos otros ejemplos de redes de este tipo en estudios sociales. Un ilustrativo ejemplo son los contactos de Facebook, donde no importa si el individuo *A* es amigo de *B* o viceversa, sólo es de interés saber quiénes forman el grupo de amistades.

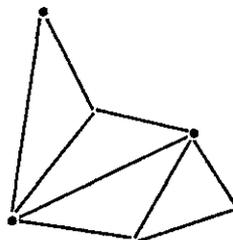


Fig. 45. Ejemplo de red no direccional. Los enlaces indican que dos nodos están conectados, sin importar si hay un flujo de información de un nodo a otro, a la inversa o en ambas direcciones a la vez.

5.3. Modelos de redes

Antes de iniciar el análisis sobre los focos sísmicos, estudiaremos algunas maneras de construir redes y qué características presentan, con el fin de comparar con los resultados que se obtendrán del estudio de los datos sísmicos.

5.3.1. Erdős-Rényi

Éste es el modelo más sencillo de redes, fue desarrollado al mismo tiempo por Rapoport por un lado, y otro por Erdős y Rényi [85]. Ésta es una red en equilibrio, es decir, es una red con un número fijo de vértices y éstos son conectados entre sí al azar, no hay preferencia al unir dos vértices, y se construye de la siguiente manera: se tiene un gran número de vínculos a distribuir entre un número fijo N de nodos de manera aleatoria, es decir, en esta red no existen nodos privilegiados; un nuevo vínculo puede ser adjuntado a un vértice sin importar si ese vértice está previamente conectado a otro o no. La conexión de estos vínculos puede ser vista como una "lluvia" homogénea sobre los nodos [82].

La principal característica de este modelo es que se ve definido por el número de vértices N y la probabilidad p de que exista un vínculo entre un vértice y otro. En este sentido, si llamamos *conectividad*, k , al número de vínculos que un vértice posee, entonces, el promedio de la conectividad para la red completa es

$$\langle k \rangle = p(N - 1). \quad (5.1)$$

Para una red construida al azar, como la construida por Erdős y Rényi, la probabilidad de que un vértice tenga un grado de conectividad k es:

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}, \quad (5.2)$$

que cuando N es grande tiende a una distribución de Poisson:

$$P(k) \cong \frac{\langle k \rangle^k \exp(-\langle k \rangle)}{k!}. \quad (5.3)$$

5.3.2. Watts-Strogatz

El modelo de Watts-Strogatz [86], denominado de *mundo pequeño*, es uno de los más comunes en sistemas de redes reales. Se caracteriza, fundamentalmente, porque cada vértice se conecta con otros vértices mediante un pequeño número de nodos intermedios.

Este concepto nació en 1967 cuando Stanley Milgram realizó un conocido experimento en Estados Unidos. Él eligió a cientos de individuos al azar en Omaha y les envió una carta con la siguiente instrucción: le pidió a cada uno de ellos que enviara una carta a algún conocido que él o ella pensara que era cercano a una persona X en Boston. La quinta parte de las cartas enviadas desde Omaha exitosamente llegaron a la persona X en Boston, luego de pasar por una cadena de seis individuos,

experimento que dio origen a la famosa regla de “seis grados de separación” [82].

Otra interesante propiedad que presentan las redes reales (redes no construidas matemáticamente) es la presencia de relaciones triangulares entre vértices, es decir, si una persona A es amiga de una persona B y otra C , existe una alta probabilidad de que las dos personas B y C sean amigas entre sí.

Fueron Watts y Strogatz quienes desarrollaron el más famoso modelo acerca de redes de *mundo pequeño*. Este modelo se sitúa entre la red de orden finito y las redes al azar.

Watts y Strogatz construyeron esta red de la siguiente manera: en principio se tiene un red de N vértices conectados a k vecinos en cada dirección, donde $N \gg k \gg \ln(N) \gg 1$. Se renueva la conectividad de cada vértice (debido a que se agregan vértices) al azar con probabilidad p , entonces, si $p = 0$ lo que tenemos es una red ordenada, con un gran número de auto conexiones y una gran distancia entre vértices [82]. Si $p \rightarrow 1$, entonces se obtiene una red al azar, sin auto conexiones, pero la distancia entre vértices es pequeña. También mostraron que en el régimen intermedio es posible tener auto conexiones y distancias cortas entre vértices.

5.3.3. Barabási-Albert

Luego del trabajo de Watts y Strogatz, Barabási y Albert mostraron que la distribución de conectividad en muchos sistemas de redes reales era caracterizada por una distribución no uniforme [87]. Esta distribución no sólo se puede encontrar en redes reales, sino también la red de Barabási y Albert puede ser generada comenzando con un número pequeño de vértices n_0 . En cada paso se agrega un nuevo vértice, de manera que la red comience a *crecer* al ir agregando vértices. En cada paso se agregan también n vínculos al último vértice creado, vínculos que se establecen

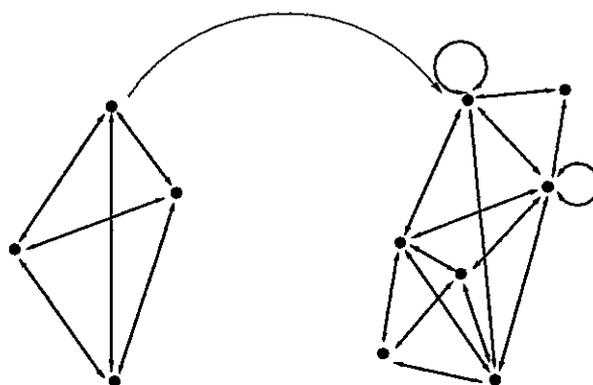


Fig. 46. Ilustración construcción red de Watts y Strogatz. En este caso, en el primer paso se tienen N vértices con conectividad k . En el segundo paso, se han agregado vértices y la conectividad de cada vértice ha cambiado.

entre el nuevo nodo y los vértices existentes. La manera de asignar los vínculos entre el nuevo vértice y los preexistentes es siguiendo la regla de *adición lineal*, en la que los vértices con mayor número de vínculos tienen una probabilidad mayor de obtener uno nuevo. Este procedimiento continúa hasta alcanzar el número de vértices deseado [88]. El resultado es una red donde hay vértices con una gran conectividad. En particular ellos mostraron que la relación entre la probabilidad de que un vértice tenga conectividad k y la conectividad misma presenta un comportamiento de ley de potencia,

$$P(k) \sim \frac{1}{k^{-\gamma}}, \quad (5.4)$$

lo que implica que estas redes no tienen una escala natural de conectividad. Por esta razón estas redes fueron llamadas *libres de escala*.

Una importante característica de este tipo de redes es que ellas presentan *vértices centrales*, es decir, sólo unos pocos vértices tienen un gran número de vínculos.

5.4. Caracterización

Para caracterizar una red se utilizan diversas cantidades. Aquí mencionamos algunas relevantes para nuestro análisis sobre sismicidad.

5.4.1. Distribución de conectividad

Se definirá la distribución de conectividad de un vértice o nodo como la probabilidad de tener un nodo con una conectividad definida, por ejemplo, las Ecs. (5.3) y (5.4) son las distribuciones de conectividad para una red aleatoria y para una red libre de escala, respectivamente.

5.4.2. Matriz de adyacencia

Esta matriz contiene la información sobre las conexiones entre vértices. Es una matriz de $N \times N$, donde N es el número total de vértices y se construye sólo para redes no direccionadas. En ella se indica si dos vértices están conectados entre sí con un 1 y si no están conectados con un 0. Por ejemplo, si el vértice i está conectado al vértice j , el elemento a_{ij} de la matriz será 1. Como se trata de una red no direccionada, esta matriz es siempre simétrica, $a_{ij} = a_{ji}$, y los elementos de la diagonal son cero $a_{ii} = 0$, ya que no están permitidas las auto conexiones [82].

5.4.3. Longitud del camino medio

En una red no necesariamente dos vértices estarán conectados entre sí (no serán contiguos). Sin embargo, dos vértices no contiguos pueden estar unidos a través de una secuencia de pasos entre ellos, es decir, para ir del nodo i al j , puede ser necesario pasar a través de vértices intermedios k_1, k_2, \dots, k_{m-1} . La secuencia de menor tamaño es denominada *camino* entre estos dos vértices y se calcula sólo para

redes no direccionadas. La cantidad de enlaces que se deben recorrer para llegar de un nodo a otro dado se llama *longitud del camino*. Por otra parte, es claro que al tomar un par de vértices diferentes, i' y j' , la longitud del camino no será necesariamente igual. Por lo tanto, para una red completa se puede calcular la *longitud de camino medio*, al promediar sobre todos los pares de nodos de la red:

$$L = \frac{\log(N)}{\log(\langle k \rangle)}. \quad (5.5)$$

5.4.4. Coeficiente de clustering

El *coeficiente de clustering* caracteriza la densidad de conexiones que involucran a un vértice [82], en una red no direccionada. Una importante característica de las redes de mundo pequeño es que presentan una estructura de árbol en las zonas cercanas a los vértices, y esto se puede revelar a través del coeficiente de clustering.

Existen dos definiciones útiles y muy frecuentes en la literatura para el coeficiente de clustering. Una de ellas fue proporcionada por Barrat y Weigt [88]:

$$C = \frac{3N_{\Delta}}{N_3}, \quad (5.6)$$

donde N_{Δ} es el número de triángulos en la red y N_3 es el número de tripletes conectados. Se define como *triángulo* a un conjunto de tres vértices conectados con vínculos en cada par de ellos. Se define como *triplete conectado* a un conjunto de tres vértices donde cada uno de estos vértices está conectado con los otros dos, es decir, al menos dos de estos vértices deben ser adyacentes (el factor 3 de la Ec. 5.6 es necesario, ya que cada triángulo podría ser considerado como tres tripletes conectados entre sí), esto es,

$$N_{\Delta} = \frac{1}{3} \sum_{(i,j,k)} a_{ij} a_{ik} a_{jk},$$

$$N_3 = \sum_{(i,j,k)} a_{ij} a_{jk},$$

y aquí la suma es sobre todos los tripletes (i, j, k) de los distintos vértices i, j, k .

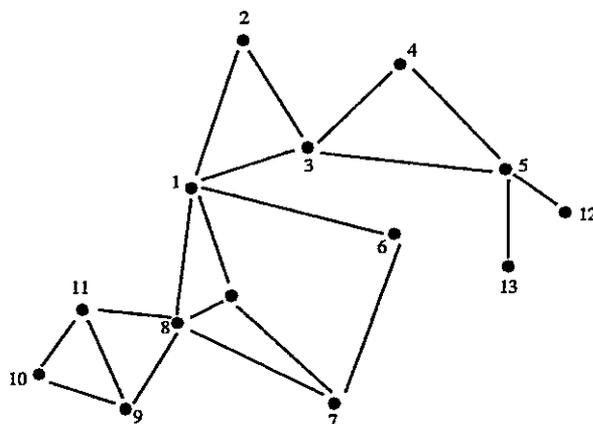


Fig. 47. En esta figura se ilustra la formación de tripletes conectados y de triángulos entre nodos. Por ejemplo, un triplete está formado por el nodo 5, 12 y 13. Un triángulo está formado por los nodos 9, 10 y 11. Así, se han formado una serie de tripletes y relaciones triangulares entre nodos, estas agrupaciones dan origen a pequeños clusters dentro de la red, como la agrupación formada por los nodos 8, 9, 10, 11. Estas agrupaciones es lo que mide el coeficiente de clustering.

La otra definición es dada por Watts y Strogatz [86],

$$c_i = \frac{N_{\Delta}(i)}{N_3(i)}, \quad (5.7)$$

donde N_{Δ} es el número de triángulos que involucran al vértice i y $N_3(i)$ es el número

de tripletes conectados teniendo al vértice i como vértice central. Este coeficiente es definido para un solo nodo y al promediar sobre los coeficientes de todos los nodos se obtiene el coeficiente de clustering de la red.

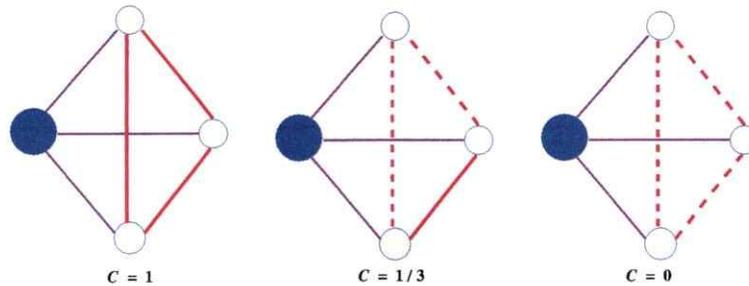


Fig. 48. En esta figura se ilustra la formación de tripletes conectados y de triángulos entre nodos.

Si k_i es el número de vecinos del vértice i (conectividad), entonces

$$N_3(i) = k_i(k_i - 1). \quad (5.8)$$

La cantidad $N_{\Delta}(i)$ cuenta el número de vínculos entre vecinos del vértice i , entonces, el coeficiente de clustering de cada vértice i es,

$$c_i = \frac{2l_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (5.9)$$

donde l_i es el número de conexiones entre vecinos del vértice i . De esta manera se define el coeficiente de clustering como,

$$C = \frac{1}{N} \sum_i c_i. \quad (5.10)$$

La principal diferencia entre las definiciones (5.6) y (5.10) es que en la primera se da el mismo peso a cada *triángulo*, mientras que en la segunda se da el mismo peso

a cada *vértice*, sin embargo el resultado final es el mismo.

Una definición alternativa a la dada por Watts y Strogatz se obtiene utilizando la matriz de adyacencia. En efecto se puede escribir,

$$c_i = \frac{2(A^3)_{ii}}{k_i(k_i - 1)}, \quad (5.11)$$

y luego usar (5.10).

Se puede demostrar que, para una red aleatoria, el coeficiente de clustering es:

$$C_{\text{random}} = \frac{\langle k \rangle}{N} \ll 1. \quad (5.12)$$

En las redes de mundo pequeño el valor de C_{random} es siempre menor que C y C varía entre 0 y 1, será 0 cuando los vértices estén completamente desconectados entre sí y será 1 cuando todos los vértices estén conectados entre sí. Para una red de mundo pequeño, esto se puede explicar de la siguiente manera, los individuos tenderán a tener “grupos de amigos”, es decir, tenderán a tener muchos amigos en común, lo que se verá reflejado en un alto número de clustering, mientras que en una red aleatoria, no se producirán este tipo de vinculaciones.

Por otro lado, una red de mundo pequeño, estará caracterizada por un C alto y una longitud de camino medio pequeña [82].

5.5. Redes de sismos

Recientemente, se ha abierto un interesante camino en el estudio de la sismicidad, al considerar éste como un problema de redes complejas [12, 17, 19, 21, 24, 45, 55, 77, 78, 89]. A continuación, realizaremos un análisis similar, a partir de los datos con que contamos para la zona central de Chile.

5.5.1. Red sísmica de Chile

La red sísmica de Chile fue construida a partir de una discretización de la zona en la que están distribuidos espacialmente los hipocentros. Para ello, se divide el espacio en celdas de aristas l_x , l_y , l_z . Algunas de estas celdas contienen hipocentros y otras no. Definimos un nodo de la red como una celda que contiene hipocentros en su interior. Los enlaces se determinan a partir de la secuencia temporal: el evento 1 está conectado con el evento 2 si el evento 2 sucedió inmediatamente después que el evento 1. En este caso, se establece un enlace desde la celda que contiene al evento 1 a la celda que contiene al evento 2. Si dos eventos sucesivos están contenidos en la misma celda, entonces el enlace va desde dicha celda hacia sí misma (auto conexión). Notar que, de este modo, se obtiene una red direccionada a partir de los datos sísmicos (Fig. 49). Para generar la red no direccionada asociada, se eliminan tanto los enlaces múltiples entre nodos, como las auto conexiones, y se elimina la direccionalidad de los enlaces, de modo que si el nodo i está conectado con el nodo j , entonces el nodo j también lo está con el nodo i (Fig. 50).

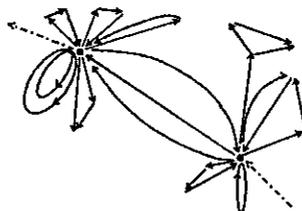


Fig. 49. Ilustración construcción red direccionada de los datos sísmicos de Chile. Nótese la direccionalidad y la presencia de auto conexiones.

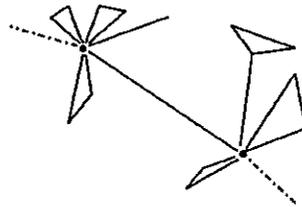


Fig. 50. Ilustración de la red no direccionada de los datos sísmicos de Chile. Nótese la formación de triángulos.

5.5.2. Caracterización

En la red sísmica de Chile se estudiaron algunos parámetros que caracterizan la topología de la red.

■ Distribución de conectividad

Se ha estudiado la dependencia de la probabilidad de la conectividad de cada nodo para diferentes tamaños del lado de la celda y se ha encontrado que satisface la relación (5.4):

$$P(k) = \frac{1}{k^\gamma}, \quad (5.13)$$

como se aprecia en la Fig. 51.

Los gráficos de la Fig. 51 son para celdas de área $l_x l_y l_z$, $l_x = l_y = l_z = \Delta$. Se escogieron dos valores de $\Delta = 10$ km y $\Delta = 20$ km.

La distribución sigue una ley de potencia, $\gamma = 1.7$ y $\gamma = 1.21$, respectivamente. La línea sólida en la Fig. 51 representa una recta en el gráfico logarítmico, con pendiente igual a $-\gamma$. De lo anterior se sigue que la red de los datos sísmicos

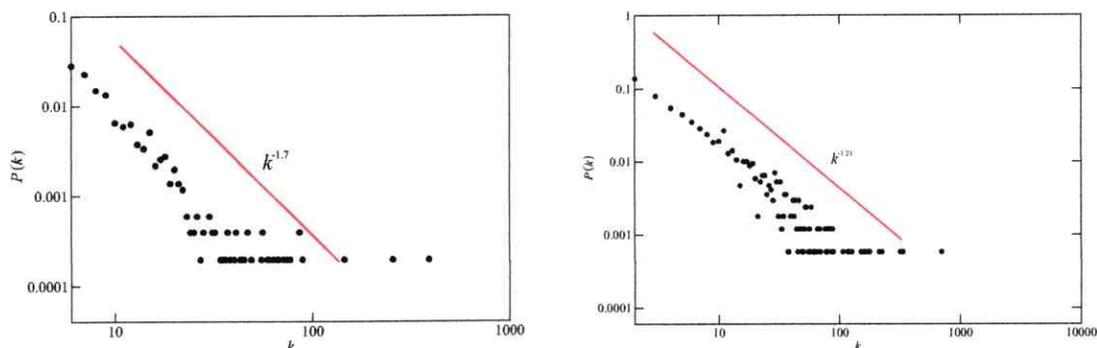


Fig. 51. Distribución de probabilidad de la conectividad para la red de datos sísmicos, para un tamaño de celda $\Delta = 10$ km (izquierda) y $\Delta = 20$ km (derecha).

es una red libre de escala [90], resultado que es consistente con resultados obtenidos anteriormente para otras zonas del planeta [12]. El valor de γ para la zona central de Chile se encuentra entre los valores de γ calculados para California y Japón (-1.2 y 2.0 , respectivamente) [12].

■ Camino libre medio y coeficiente de clustering

De igual manera se ha querido corroborar si la red sísmica chilena cumple con las propiedades de red de mundo pequeño. Esto se hizo para tres tamaños de la celda, $\Delta = 5, 10, 20$ km. La Tabla 5.1 contiene el tamaño del lado de la celda Δ , el número de nodos N , el coeficiente de clustering C , el coeficiente de clustering de una red aleatoria, C_{random} , y la longitud de camino medio L .

De la tabla anterior, se sigue que la red de datos sísmicos es una red que presenta características de mundo pequeño, debido a que el valor de C es mucho mayor que el valor de C_{random} y la longitud de camino medio es pequeña en comparación al tamaño de la red. Este resultado también ha sido encontrado

Δ	N	C	C_{random}	L
5 km	10490	0.00972778	0.00301054	8.05089
10 km	5067	0.03919	0.00122612	4.67015
20 km	1685	0.180761	0.00952936	2.6762

Tabla 5.1: Tabulación de los valores del número de datos, el coeficiente de clustering, el coeficiente de clustering para una red aleatoria y la longitud de camino medio para diferentes valores del tamaño de la celda, para la red de datos sísmicos de Chile.

en California y Japón [12, 90].

▪ Dependencia del tamaño de la celda

Es claro, del análisis anterior, que la red construida a partir de los datos depende del tamaño de la celda escogida. Si el tamaño de la celda es suficientemente grande, la red consistirá de un solo nodo, y todos los enlaces serán auto conexiones de dicho nodo consigo mismo. A la inversa, si el tamaño de la celda es suficientemente pequeño, la red consistirá de 17004 nodos (que es el número de eventos sísmicos registrados con los que contamos). Ya hemos visto (Fig. 51 y la Tabla 5.1), que características como la libertad de escala o de mundo pequeño, esencialmente, no dependen de la elección del tamaño de la celda, al menos para los tamaños de celda escogidos. Sin embargo, es conveniente preguntarse si, al variar el tamaño del lado de la celda de modo sistemático, las conclusiones cambian, o si se cumplen ciertas leyes de escalamiento con el tamaño de la celda. Esto es lo que estudiaremos a continuación.

Para ello, en primer lugar, adimensionalizaremos el tamaño de la celda. Es inmediato notar que hay dos opciones naturales para realizar lo anterior: si L_{lat} , L_{long} y L_{prof} representan el largo, ancho y altura de la caja, entonces podemos definir las siguientes cantidades adimensionales:

$$l_2 = \frac{\Delta}{(L_{\text{lat}}L_{\text{long}})^{1/2}}, \quad (5.14)$$

$$l_3 = \frac{\Delta}{(L_{\text{lat}}L_{\text{long}}L_{\text{prof}})^{1/3}}. \quad (5.15)$$

En principio, l_2 resulta una cantidad razonable de definir si los datos se encuentran contenidos en un plano, y l_3 si se encuentran contenidos en un volumen. Sin embargo como el 90 % de los datos sísmicos utilizados en esta tesis no tienen una profundidad mayor a los 116.30 km, tanto l_2 como l_3 son cantidades razonables de utilizar, y por tanto consideraremos ambas.

Hemos estudiado la dependencia en l_2 y l_3 para dos parámetros característicos de la red bajo consideración: la conectividad k asociada a la red direccionada y el coeficiente de clustering C para la red no direccionada [91].

En la Fig. (52) hemos graficado el coeficiente de clustering versus l_2 y l_3 . Es evidente que el coeficiente de clustering tiende a un valor fijo, distinto de 1, que sería el valor esperado, ya que de la definición de este parámetro (sec. 5.4.3) es claro que para algún valor de Δ todas las relaciones triangulares serán absorbidas por la conectividad (o visto de otra manera, en algún momento todas las relaciones triangulares equivaldrán a tres triplete conectados para un valor crítico del tamaño de la celda). Sin embargo, esto no sucede, y el coeficiente de clustering se aproxima a 0.85 y no a 1.

Con el fin de corroborar la universalidad de estos resultados, se ha realizado el mismo estudio para datos sísmicos de California y Japón.

Los datos de California fueron tomados en un periodo de tiempo entre el 1 de enero del año 1984 y el 31 de diciembre del año 2006, entre 28.00° y 39.42°

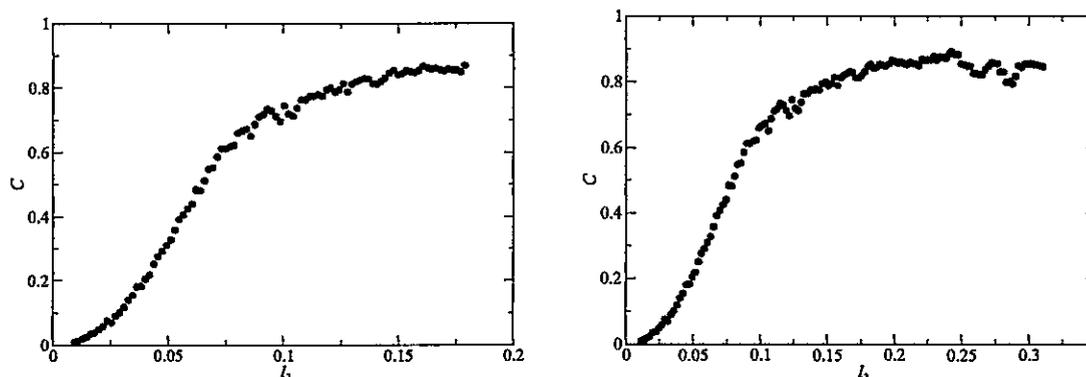


Fig. 52. Coeficiente de clustering datos sísmicos zona central de Chile versus l_2 y l_3 (izquierda y derecha, respectivamente).

Latitud Norte, 112.10° y 123.62° Longitud Oeste, con una profundidad máxima de 175.99 km. Este conjunto de datos contiene un total de 404106 medidas temporales de magnitud y posición espacial, y se encuentran disponibles en <http://www.data.scec.org>.

Los datos de Japón fueron tomados entre el 3 de junio del año 2002 y el 15 de agosto del año 2005 y se encuentran distribuidos espacialmente entre 17.96° y 49.31° Latitud Norte, 120.12° y 156.05° Longitud Este, con una profundidad máxima de 681 km. El número total de medidas es de 681547 datos de magnitud y posición espacial y se encuentran en <http://www.hinet.bosai.go.jp>.

Los resultados se encuentran en la Fig. 53. Se aprecia que, al igual que en el caso de los datos chilenos (Fig. 52), el coeficiente de clustering, una vez adimensionalizada la longitud de la celda, converge a un valor cercano a 0.85, sugiriendo que éste es un resultado universal, independiente de la zona sísmica. El hecho de que exista un valor asintótico al cual C converge al aumentar el tamaño de la celda se puede interpretar de la siguiente manera: si el tamaño de

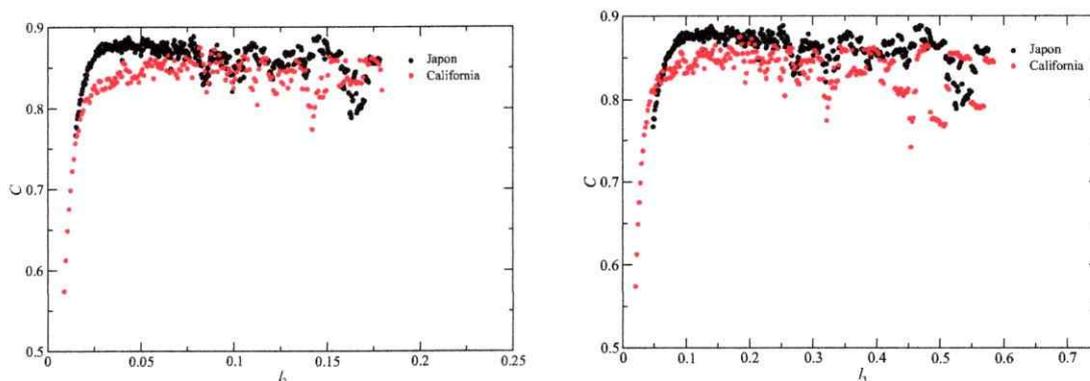


Fig. 53. Coeficiente de clustering datos sísmicos Japón (puntos negros) y California (puntos rojos) versus l_2 y l_3 (izquierda y derecha, respectivamente). Datos de Japón y California.

la celda crece, la red comenzará a aproximarse a una red completa (todos los vértices tienen enlaces), para el cual el máximo valor del coeficiente de cluster es 1, debido a que el número de triángulos y el de tripletes conectados tenderá a ser el mismo. A su vez, los triángulos que se forman entre los vértices comenzarán a ser absorbidos por los vértices de mayor tamaño, lo que provocará que el valor de C no alcance a ser 1. Finalmente, la dependencia del tamaño de la celda desaparecerá debido al balance entre estos dos mecanismos [91]. Cabe hacer notar que la convergencia al valor asintótico del coeficiente de clustering es más lenta para los datos de Chile que para los datos de California y Japón, posiblemente debido a que el conjunto de datos chilenos es de menor tamaño que los datos estudiados de Japón y California.

Un análisis similar, en función del tamaño de la celda, se ha realizado para la distribución de conectividad de la red. Como se vio en la sección 5.5.2, dicha distribución sigue una ley de potencia con un exponente γ [Ec. (5.4)]. En la Fig.

54 se muestra la dependencia de γ con los parámetros adimensionales l_2 y l_3 para datos provenientes de 4 zonas sísmicas: Chile, California y Japón (los mismos datos de la Fig. 53), e Irán (datos disponibles en <http://irsc.ut.ac.ir/>). Se observa que γ tiende rápidamente a un valor $\gamma = 1$, para todos los datos estudiados (Chile, California, Japón e Irán).

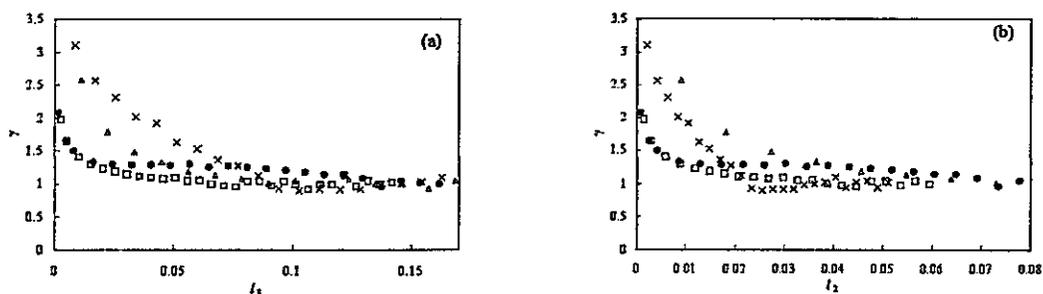


Fig. 54. Dependencia del exponente γ de la distribución de conectividad Ec. (5.13) con el tamaño de la celda l_2 [Fig. 54(a)] y l_3 [Fig. 54(b)] para las redes de sismos con datos de Chile (Δ), Japón (\square), California (\bullet) e Irán (\times).

Una posible interpretación del valor de saturación de γ es que, al aumentar el tamaño de las celdas, surgen nuevos vértices, manteniendo una alta conectividad, pero, a su vez, otros vértices son absorbidos por estos nuevos vértices, perdiéndose algunos vértices principales (los de más alta conectividad). El efecto neto es que el valor de γ disminuye a medida que el tamaño de las celdas crece. Eventualmente, la dependencia de γ del tamaño de la celda desaparece debido al balance entre estos dos efectos [91].

En ambos casos (red direccionada y red no direccionada) es claro que ambos parámetros, C (Figs. 52 y 53) y γ (Fig. 54), se vuelven independientes del tamaño de la celda a medida que la celda crece, a partir de un cierto valor umbral l_2^* ó l_3^* (según corresponda).

■ Escalamiento finito

Como hemos observado, es posible obtener resultados generales a partir de los datos disponibles, independientemente del tamaño de la celda, cuya elección es arbitraria. Sin embargo, hay otro aspecto "arbitrario" en los datos que hemos considerado: el número de datos disponibles. A diferencia del tamaño de la celda, no nos es posible controlar este parámetro, pero también debemos preguntarnos en qué medida nuestros resultados dependen del número de datos. Un indicio de que, al menos, algunas de nuestras conclusiones debieran ser independientes del número de datos, lo encontramos en las Figs. 52 a 54, que muestran que conjuntos de datos tan diversos en tamaño como los de Chile, California, Japón e Irán, exhiben un comportamiento similar en cuanto a su distribución de conectividad y su coeficiente de clustering. A continuación estudiaremos este aspecto de un modo un poco más sistemático. En particular,

se ha realizado un análisis de escalamiento sobre las redes sísmicas de Chile, California y Japón, encontrando en ellos un comportamiento robusto y universal al escalar las celdas y el tamaño de los conjuntos de datos utilizados para el valor del coeficiente de clustering [91].

Para ello, observemos primero que el valor del coeficiente de clustering depende, en general, del tamaño de la celda y del tamaño del conjunto de datos:

$$C = C(l_i, N), \quad i = 2, 3.$$

Supongamos que la dependencia de N puede ser reemplazada por la función de escalamiento

$$f(N) = 1 + \frac{a}{N}, \quad (5.16)$$

donde a es un valor fijo y N es el número de datos a analizar. Entonces, el coeficiente de clustering se puede escribir como una función del coeficiente entre l_i y $f(N)$:

$$C = \tilde{C}(l_i/f(N)), \quad i = 2, 3. \quad (5.17)$$

¿Es posible encontrar un valor de a tal que lo anterior es cierto? La respuesta es sí, como se aprecia en la Fig. 55. En ella se ha graficado el valor del coeficiente de clustering para los datos de Chile, considerando todos los datos disponibles (17004), y luego tomando sólo los últimos 10000 y luego los últimos 5000. Todas las curvas colapsan en una sola, mostrando que, efectivamente, el coeficiente de clustering es una función solamente de $l_i/f(N)$. En el caso de la Fig. 55, el valor de a para el cual se observa el escalamiento es $a = 3000$ [91].

El mismo análisis se ha realizado en las zonas de California y Japón, que tienen muchos más eventos sísmicos. A pesar de ello se ha encontrado también que C

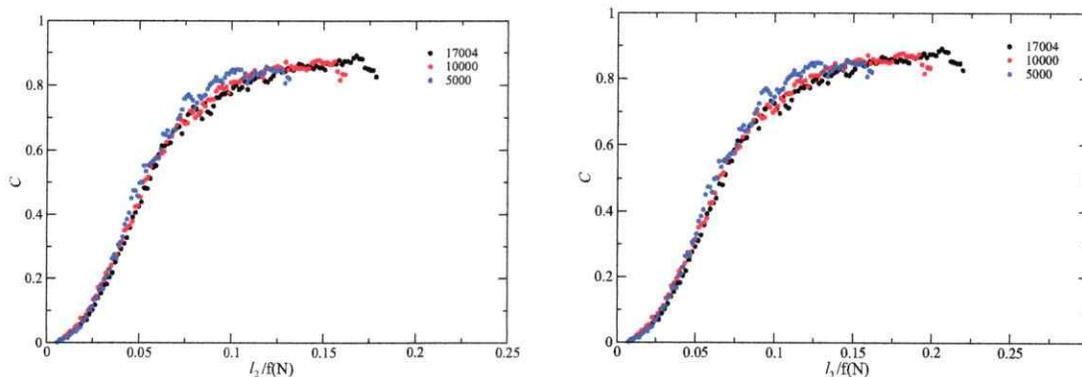


Fig. 55. Los puntos azules corresponden a considerar todos los 17004 datos; los puntos rojos, a considerar los últimos 10000; y los negros, los últimos 5000. El valor de a en la Ec. (5.16) es $a = 3000$.

es una función sólo de $l_i/f(N)$, en este caso con $a = 8000$ (Figs. 56 y 57).

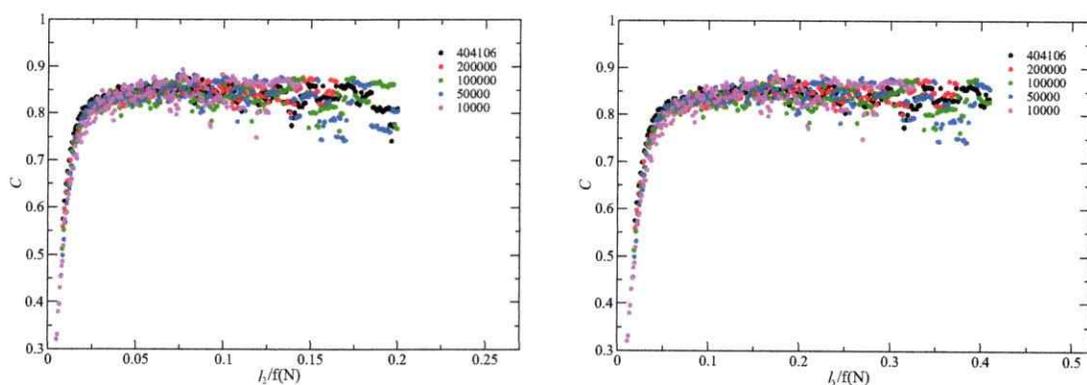


Fig. 56. Los puntos negros corresponden a considerar todos los 404106 datos; los puntos rojos, a considerar los últimos 200000; los puntos verdes a los últimos 100000; los azules a los últimos 50000 y los rosados, los últimos 10000. El valor de a en la Ec. (5.16) es $a = 8000$. Escalamiento del número de datos de California, versus l_2 y l_3 .

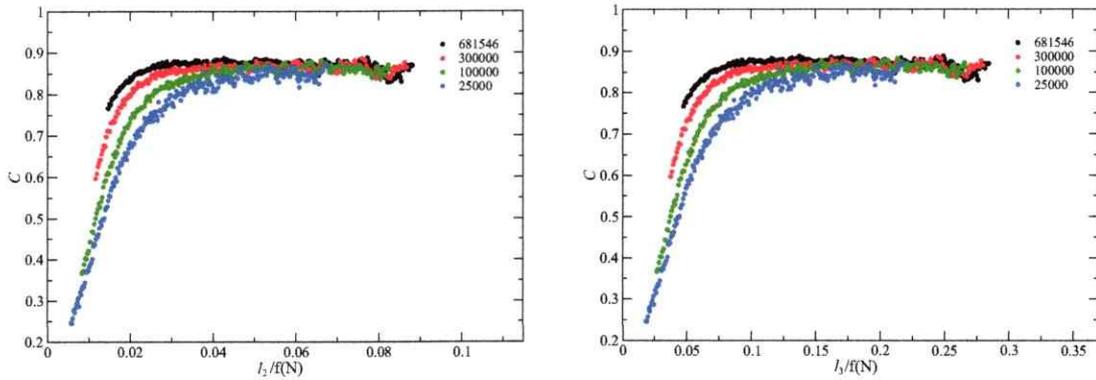


Fig. 57. Los puntos negros corresponden a considerar todos los 681546 datos; los puntos rojos, a considerar los últimos 300000; los puntos verdes a los últimos 100000 y los azules, los últimos 25000. El valor de a en la Ec. (5.16) es $a = 8000$. Escalamiento del número de datos de Japón, versus l_2 y l_3 .

Para los tres conjuntos de datos se observa que:

$$C = \tilde{C}(l_i/f(N)) \approx 0.85, \quad (5.18)$$

cuando el tamaño de la celda l_i es mayor que un cierto valor umbral l_i^* . En los grandes conjuntos de datos (California y Japón) el valor de $l_3^*/f(N)$ es aproximadamente 0.04, mientras que para Chile es mayor, 0.08, aproximadamente.

Interesante es notar que los datos entregados por el Servicio Sismológico Nacional están “artificialmente cortados”, en el sentido que están contenidos en una zona rectangular, no así los datos de Japón y California, que se distribuyen de acuerdo a la forma de cada región en consideración. Esto podría determinar la diferencia entre los valores $l_i^*/f(N)$ para cada caso. Sin embargo, las propiedades de similaridad, estudiadas en la sec. 4, son lo suficientemente robustas como para verificar el mismo escalamiento en las tres zonas estudiadas.

Capítulo 6

Modelo BK

Desde hace años se ha buscado un modelo que sea de utilidad en la descripción de la dinámica sísmica. No ha sido sencillo, ya que los acercamientos a esta actividad han sido siempre esquivos. Sin embargo, en 1967 los sismólogos R. Burridge y L. Knopoff diseñaron un modelo a partir de un experimento en el que se utilizaban bloques de masas iguales, resortes que los conectaban entre ellos y una superficie rugosa sobre la cual éstos debían deslizarse [92]. En base a este sencillo modelo de bloques se han realizado un serie de estudios y variaciones al mismo, logrando interesantes conclusiones y pudiendo reproducir parte de las características conocidas de un conjunto de datos sísmicos, como lo es el cumplimiento de la ley de Gutenberg-Richter ya estudiada en el Cap. 3, así como características de criticalidad auto-organizada. En este capítulo, introduciremos brevemente el modelo, y mostraremos que reproduce algunas de las características observadas en las redes sísmicas de los datos chilenos.

6.1. Descripción del modelo

Uno de los factores de mayor influencia en la aceptación de este modelo es la sencillez de su implementación, tanto experimental como computacionalmente, debido

a que es un arreglo de bloques de masas iguales unidos entre sí mediante resortes de constante k_i , que se deslizan sobre una superficie rugosa.

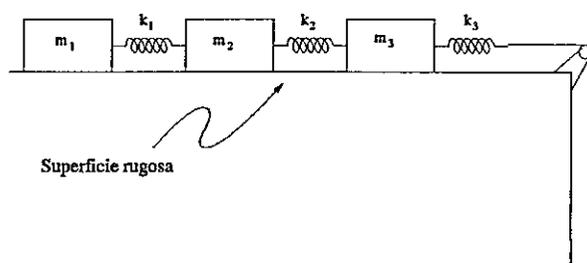


Fig. 58. Cadena de tres bloques de masas diferentes con resortes de constante k_i , sobre una superficie sin roce. Las masas inicial y final están conectadas a la pared mediante un resorte.

Si las únicas fuerzas sobre las masas son las debidas a los resortes, entonces las ecuaciones de movimiento para la masa i son:

$$\ddot{m}_i X_i = k_i(X_{i+1} - X_i - X_{i-1}), \quad (6.1)$$

donde X_i es el desplazamiento del bloque i -ésimo respecto a su posición de equilibrio y k_i es la constante del i -ésimo resorte. La masa inicial ($i = 1$) y la final ($i = N$) se encuentran conectadas a una pared mediante resortes de constante k_1 y k_{N+1} .

En el modelo propuesto por Burridge y Knopoff, se tiene una cadena de bloques unidos mediante resortes de constante k_c . Entre los bloques y la superficie rugosa existe una fuerza F . Para el caso que estudiaremos, el cual es una modificación del modelo BK, consideraremos que esta fuerza depende de la velocidad de los bloques. Cada uno de los bloques está conectado a la superficie rugosa por otros resortes de constante k_p y la superficie se mueve con velocidad v [25, 93].

Se denotará por X_j a la posición del bloque j con respecto a su posición de

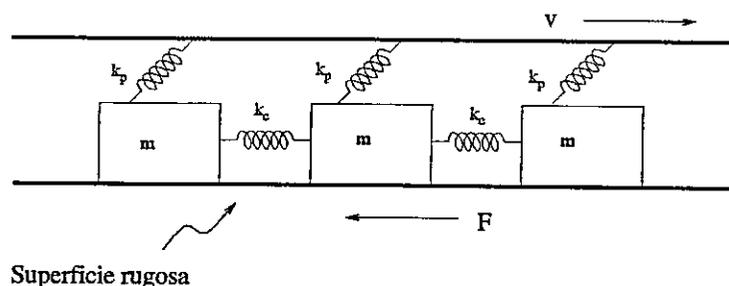


Fig. 59. Ilustración del montaje experimental del modelo BK. Bloques de igual masa conectados entre sí mediante resortes de igual constante (k_c) y conectados a una superficie rugosa que se mueve con velocidad v mediante resortes de constante k_p . Entre los bloques y la superficie rugosa existe una fuerza F . Las masas inicial y final se mueven libremente.

equilibrio. La fuerza de fricción será

$$F(\dot{X}_j/v_c) = F_0\Phi(X_j/v_c), \quad (6.2)$$

donde $\Phi_0 = 1$ y v_c es una velocidad característica del sistema. Introduciendo las variables $\tau \equiv w_p t$, $w_p^2 \equiv k_p/m$, $U_j \equiv k_p X_j/F_0$, para las frecuencias y los desplazamientos, respectivamente, las ecuaciones para el modelo de N bloques alineados son [25]:

$$\ddot{U}_i = k(U_{i+1} - U_i) - k(U_i - U_{i-1}) - U_i + \nu t - \Phi\left(\frac{\dot{U}_i}{\nu^c}\right), \quad (6.3)$$

donde $\nu \equiv v/V_0$, $\nu^c \equiv v_c/V_0$, $V_0 \equiv F_0/\sqrt{k_p m}$ y $k \equiv k_c/k_p$. Los puntos identifican las derivadas con respecto a τ . Las ecuaciones anteriores son efectivas sólo cuando el bloque i se está moviendo respecto a la superficie rugosa. A medida que la superficie rugosa se desplaza, se acumula tensión en el sistema, que eventualmente se libera, soltando el resorte de constante k_p . Cuando eso sucede, los bloques donde se libera la

energía se mueven con respecto a la superficie rugosa. Esta discontinuidad está descrita por el término Φ , que adopta una forma funcional cuando un bloque acelera respecto a la superficie rugosa, y otra cuando se mueve con la misma velocidad que ella:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{1+U/v_c} & \text{si } \dot{U}_i > 0 \\ \frac{-1}{1-U/v_c} & \text{otros casos.} \end{cases} \quad (6.4)$$

En el análogo sísmico, esta condición para la velocidad considera la acumulación de energía previa al rompimiento de la falla, por lo tanto, es una manera sencilla de incorporar la resistencia del terreno a la ruptura. Esta consideración es una novedad en este modelo, ya que no estaba presente en versiones anteriores del mismo [25, 93].

Para estudiar el sistema, consideraremos que las masas están ubicadas en múltiplos enteros de 1. Las ecuaciones de movimiento serán resueltas con el método de Runge Kutta de orden 4, con pasos de tiempo 1.

6.2. Resultados

Utilizando la versión descrita en la sec. 6.1 del modelo BK en una dimensión, se realizó un estudio de redes sobre éste. Se consideró una cadena unidimensional de bloques de masas, disponiendo el primer bloque en la posición $x = 0$. El estudio se realizó para tres cadenas de bloques de masa m (de 100 bloques, 150 bloques y 200 bloques) unidos entre sí por resortes de constante $k = 1$, considerando una velocidad de la superficie rugosa sobre la cual estaban apostados de $v = 0.1$ y una velocidad crítica $v_c = 0.165$. Al evolucionar el sistema, eventualmente se produce una ruptura (una masa de la cadena se libera de la superficie rugosa). En ese momento se registra la posición X_i de la masa que se ha liberado. Se integran las ecuaciones de movimiento, y se ignora un transiente de 300 pasos de tiempo. Luego, se registran

sólo las rupturas en 200 pasos de tiempo luego del transiente (suponemos que es un tiempo suficiente para que los últimos 200 datos no contengan ruido que afecte a los resultados). Finalmente, se tiene un conjunto de 200 posiciones X_i donde se produjeron rupturas. Asociamos a cada ruptura con un foco sísmico. A continuación construimos una red compleja a partir de estos focos sísmicos, de modo análogo a como se hizo para los datos de la zona central de Chile, tal como se describe en la sec. 5.5 y estudiamos la distribución de conectividad y el coeficiente de clustering.

Los resultados obtenidos del estudio de los parámetros de conectividad para una red direccionada y del coeficiente de clustering para una red no direccionada se presentan en las Figs. 60, 61 y 62. En la Fig. 60, se presenta la conectividad en cada nodo para la cadena de 200 masas.

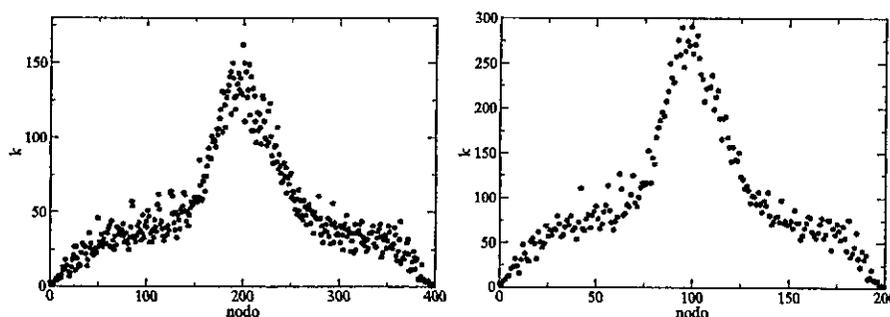


Fig. 60. Conectividad de los nodos de una red generada con el modelo BK. A la izquierda vemos la conectividad al utilizar un tamaño de celda $\Delta = 0.5$ para construir la red, mientras que a la derecha se aprecia la distribución para $\Delta = 1$.

En base a la Fig. 60 se realizó el gráfico log-log de la distribución de conectividad (Fig. 61).

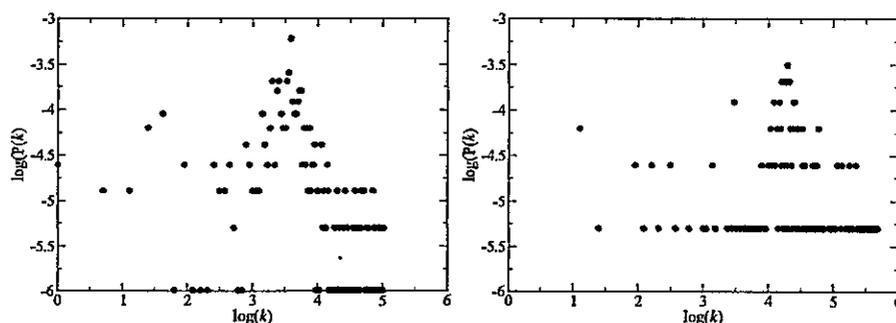


Fig. 61. Distribución de conectividad a partir de los datos de la Fig. 60. A la izquierda la distribución de conectividad para celdas de tamaño $\Delta = 0.5$; a la derecha, para celdas de tamaño $\Delta = 1$.

Como podemos apreciar, es difícil definir a qué tipo de red corresponde la Fig. 61. Los puntos no parecen seguir ninguna tendencia clara.

Sin embargo, la situación es diferente para el coeficiente de clustering. En la Fig. 62 se presenta el coeficiente de clustering utilizando diferentes valores del tamaño del lado de cada celda, normalizado al valor máximo de su posición de ruptura x , $x_{\text{máx}}$, es decir, $l_1 = \Delta/x_{\text{máx}}$. Este cálculo se realizó para dos cadenas de bloques, una de 100 bloques y otra de 200 bloques. En ambos casos el comportamiento del coeficiente de clustering fue el mismo, como se aprecia en la Fig. 62. En particular, es muy interesante notar que, en ambas cadenas, el valor del coeficiente de clustering converge a 0.85, resultado que ya había sido obtenido en el Cap. 5 para la red construida con los datos sísmicos.

En la Tabla 6.1 se muestran los diferentes parámetros de la red de eventos sísmicos (rupturas) construida a partir del modelo BK descrito. En la tabla se muestra el tamaño de la celda (Δ), número de bloques de la cadena (N_{bloques}), número de nodos N , coeficiente de clustering C , coeficiente de clustering para una red aleatoria

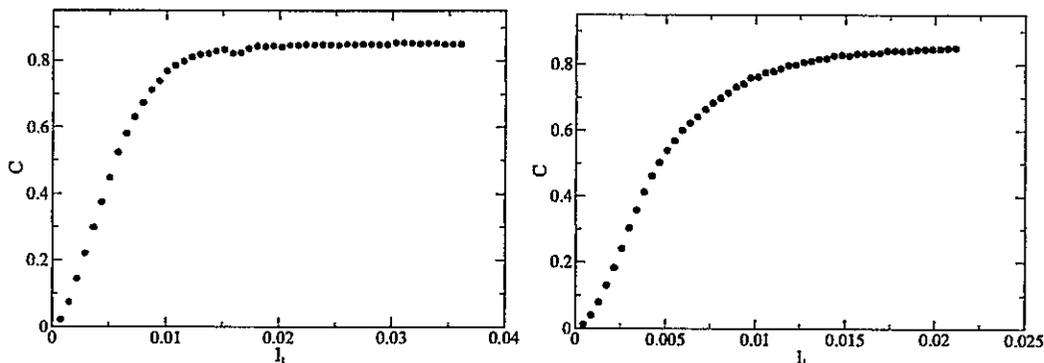


Fig. 62. Colapso del coeficiente de clustering al valor 0.85 para el coeficiente de clustering en los casos en que la cadena de bloques tiene 100 bloques (izquierda) y 200 bloques (derecha).

Δ	N_{bloques}	N	C	C_{random}	L
0.1	100	1925	0.0218486	0.0105947	20.2948
0.5	100	398	0.298214	0.1755393	69.8065
0.1	200	3877	0.0124096	0.00526261	20.4031
0.5	200	793	0.18366	0.103494	82.0706

Tabla 6.1: Número de datos, coeficiente de clustering, el coeficiente de clustering para una red aleatoria y la longitud de camino medio para diferentes valores del tamaño de la celda unidimensional para la cadena de bloques del modelo BK.

(C_{random}) y longitud de camino medio (L).

De la Tabla 6.1 es claro que el comportamiento para la red resultante del modelo BK es también de mundo pequeño, esto debido a que el valor de C_{random} es menor que C y el valor de L da un largo pequeño en relación al largo total de la red, al igual que las redes de datos sísmicos estudiadas.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo estudiamos la sismicidad en la zona central de Chile con una perspectiva de sistemas complejos. En particular, estudiamos la estadística de eventos sísmicos, las propiedades fractales y multifractales de su distribución espacial, la topología de la red de hipocentros y epicentros, y finalmente, un modelo sencillo para sismicidad basado en un sistema de ecuaciones no lineales acopladas. Los resultados obtenidos se pueden resumir de la siguiente manera:

1. **Ley de Gutenberg-Richter:** se ha estudiado la Ley de Gutenberg-Richter para el conjunto de datos bajo consideración, concluyendo que, efectivamente, la distribución de eventos sísmicos presentan un comportamiento de ley de potencia en función de la magnitud de Richter. El valor del parámetro b fue 0.9, consistente con resultados de otras zonas sísmicas [20, 59–61].
2. **Fractalidad:** al realizar un estudio monofractal sobre el conjunto de focos sísmicos, se ha encontrado que tanto para el foco sísmico (hipocentro) como para su proyección en la superficie terrestre (epicentro), la distribución espacial tiene una geometría fractal. Ello se caracterizó mediante la dimensión de box-counting, que resultó, en todos los casos, no entera. Los valores encon-

trados para dicha dimensión (2.02 para hipocentros, 1.71 para epicentros) son consistentes con los obtenidos en otras zonas del planeta [20, 59–61].

3. **Multifractalidad:** se calculó también el espectro multifractal para el conjunto de hipocentros y epicentros, encontrándose que su distribución espacial presenta también características multifractales. Se calcularon los espectros de Rényi y Mandelbrot con diversas estrategias numéricas, encontrándose que los mejores resultados se obtienen calculando el espectro para $q > 0$ con el método de la integral de correlación. Para $q < 0$, las inestabilidades numéricas hacen inviable este procedimiento, pero se consiguió calcular el espectro para $q < 0$ a partir de un modelo multifractal basado en el conjunto de Cantor, asimétrico y no conservativo, ajustado para reproducir el espectro ya calculado para $q > 0$. Cabe hacer notar que, hasta donde sabemos, este es el primer trabajo que obtiene el espectro multifractal de sismos para valores de $q < 0$.
4. **Redes:** continuando con el estudio de complejidad sobre datos sísmicos de la zona central de Chile, se construyó una red compleja a partir de ellos. Esta red fue construida basándonos en la secuencia temporal de los datos sísmicos. De esta manera, se discretizó el espacio en cubos de lado Δ , y cada cubo que contiene al menos un foco sísmico es un *nodo* de la red. Cuando un evento sísmico se produce inmediatamente después del primer evento en consideración, se genera un enlace entre la primera celda y la siguiente; si el evento sísmico siguiente se produce en la misma celda, entonces se genera un auto enlace. Al considerar esta direccionalidad de los enlaces, hemos construido una red *direccionada*. Si, por el contrario, ignoramos esta direccionalidad de los vínculos entre nodos, estamos, entonces, frente a una red *no direccionada*. Las redes así construi-

das fueron caracterizadas mediante el cálculo de sus respectivas distribuciones de conectividad y coeficiente de clustering. Se concluyó que esta red sísmica presenta una distribución de probabilidades de ley de potencia para la conectividad de los vértices, lo cual nos indica que estamos frente a una *red libre de escala*. A su vez, al realizar un análisis sobre la matriz de adyacencia y las conexiones entre vértices de la red no direccionada obtenida, se concluyó que la red sísmica de Chile es una red de *mundo pequeño*, resultados que son consistentes con estudios realizados en otras zonas sísmicas del planeta [12, 30]. Se realizó un estudio sobre la dependencia de los valores de γ y C del tamaño de la celda, encontrándose que, en ambos casos, estos parámetros tienden a valores universales, 1 y 0.85, respectivamente. También se estudió si los resultados anteriores dependen del número de datos utilizados, encontrándose que los valores universales para γ (1) y C (0.85) obtenidos anteriormente siguen siendo independientes del número de datos disponibles [12, 91].

5. **Modelo BK:** con el fin de averiguar si el modelo BK es capaz de reproducir los resultados obtenidos en el Cap. 5, se realizó un estudio de redes complejas para una cadena de bloques unidos mediante resortes moviéndose sobre una superficie rugosa, la cual también posee una velocidad. Se concluyó que la distribución de conectividad no correspondía al resultado obtenido para las redes de sismos, por lo tanto, no hay una red libre de escala. Sin embargo, el estudio del coeficiente de clustering arrojó un interesante resultado, ya esta red generada con la cadena de bloques unidimensional no sólo resultó ser de mundo pequeño, y sino que también el coeficiente de clustering saturaba a un valor universal (0.85), como en el caso de las redes complejas con datos sísmicos discutidos en el punto 4.

Considerando las muchas aproximaciones al problema de la sismicidad del planeta los resultados presentados en esta tesis son interesantes desde diversos puntos de vista. Por una parte, la gran mayoría de los trabajos existentes sobre sismicidad, desde la perspectiva de la complejidad, se han realizado con información del hemisferio norte. Sin embargo, es importante realizar estudios similares en otras zonas, en particular de gran actividad sísmica como nuestro país. No hay ninguna razón a priori para pensar que resultados obtenidos en otras regiones del planeta se preserven, desde el punto de vista cuantitativo, en la sismicidad de nuestro país, donde las características del suelo, de la interacción entre las placas tectónicas, y de las propias placas (tamaño, velocidad, etc.) son diferentes. Por ello, es interesante haber obtenido que ciertas propiedades como la ley de Gutenberg-Richter, las características de una red libre de escala y mundo pequeño, se obtienen también en los datos sísmicos estudiados. Pero aún más interesante es que también cuantitativamente nuestros resultados son consistentes con otras zonas del planeta. Otro aspecto a destacar es que nuestros cálculos fueron comparados con cálculos similares hechos con datos registrados en Japón, California e Irán, y que dichos datos contienen una cantidad mucho mayor de focos sísmicos que los chilenos. Sin embargo, los resultados encontrados resultaron ser, con el escalamiento adecuado, independientes del número de datos. Todos estos aspectos permiten mostrar que, desde la perspectiva de un análisis de complejidad como el realizado, la sismicidad presenta características universales y robustas.

En este sentido, el análisis aquí realizado contribuye en gran medida a la corroboración de la universalidad de los resultados ya encontrados para otras regiones sísmicas de la Tierra.

Desde el punto de vista de una posible predicción de sismos, es particularmente interesante el estudio de redes complejas realizado. En efecto, en el estudio presentado en esta tesis se construye una red estadística, pero también es posible realizar un estudio de una red dinámica, en que a medida que transcurre el tiempo se agregan nodos. Así, desde este punto de vista, el estudio de crecimiento de redes puede entregar resultados útiles para la predicción de los próximos eventos sísmicos, tema que deseamos estudiar en el futuro.

Esperamos continuar con el estudio de redes, expandiéndolo a un estudio en dos dimensiones, del que esperamos hallar interesantes resultados, con los que podamos comparar los resultados obtenidos para los epicnetros sísmicos.

Otro aspecto que deseamos considerar en el futuro es ampliar el estudio abarcando datos más recientes. Recordemos que los datos utilizados sólo incluyen información hasta el año 2007, y sería muy interesante contar con información más reciente, sobre todo considerando la gran actividad que se ha registrado el presente año, luego del terremoto del 27 de febrero de 2010.

Referencias

- [1] R. S. Dietz, *Nature* **190**, 854 (1961).
- [2] H. H. Hess, *Geo. Soc. of Am.* págs. 599–620 (1962).
- [3] A. Snider-Pellegrini, *La création et ses mystères dévoilés*, Vol. I (feted, París, 1859), primera edición.
- [4] A. Wegner, *Petermanns Geographische Mitteilungen* **58**, 185 (1912).
- [5] A. Wegner, *Geologische Rundschau* **3**, 276 (1912).
- [6] A. Wegner, *El origen de los continentes y océanos*, Vol. I (Ediciones Pirámide, Madrid, 1915), primera edición.
- [7] F. D. Vine y D. H. Matthews, *Nature* **199**, 947 (1963).
- [8] L. R. Sykes, *J. Geophys. Res.* **72**, 2131 (1967).
- [9] W. J. Morgan, *J. Geophys. Res.* **73**, 1959 (1968).
- [10] J. R. Heirtzler, G. O. Dickson, E. M. Herron, W. C. I. Pitman y X. L. Pichon, *J. Geophys. Res.* **73**, 2119 (1968).
- [11] B. Isacks, J. Oliver y L. R. Sykes, *J. Geophys. Res.* **73**, 5855 (1968).
- [12] S. Abe y N. Suzuki, *Nonlinear Proc. Geophys.* **13**, 145 (2006).

- [13] S. Abe y N. Suzuki, *J. Geophys. Res.* **108**, 2113 (2003).
- [14] S. Abe y N. Suzuki, *Eur. Phys. J. B* **59**, 93 (2007).
- [15] S. Abe y N. Suzuki, *Phys. A* **388**, 2511 (2009).
- [16] S. Abe y N. Suzuki, *AAPPS Bulletin* **17**, 27 (2007).
- [17] M. Baiesi y M. Paczuski, *Nonlinear Proc. Geophys.* **12**, 1 (2005).
- [18] A.-L. Barabási, R. Albert y H. Jeong, *Phys. A* **281**, 69 (2000).
- [19] M. Bottiglieri y C. Godano, *Phys. Rev. E* **75**, 026101 (2007).
- [20] D. Cernadas, A. Osella y N. Sabbione, *Pure Appl. Geophys.* **152**, 57 (1998).
- [21] J. Davidsen y M. Paczuski, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 048501 (2005).
- [22] S. Hainzl, G. Zoller y J. Kurths, *Nonlinear Proc. Geophys.* **7**, 21 (2000).
- [23] T. P. Peixoto y C. P. C. Prado, *Phys. A* **342**, 171 (2004).
- [24] M. Sahimi, M. C. Robertson y C. G. Sammis, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2186 (1992).
- [25] M. de Sousa Vieira, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 201 (1998).
- [26] C. F. Richter, *Bull. of the Seis. Soc. of Am.* **25**, 1 (1935).
- [27] C. F. Richter, *Elementary Seismology* (W. H. Freeman and Company., London, 1958), san francisco edición.
- [28] T. C. Hanks y H. Kanamori, *J. Geophys. Res.* **84**, 2348 (1979).
- [29] B. Gutenberg y C. F. Richter, *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena*, Vol. I (Princeton University Press, Princeton, 1954), primera edición.

- [30] D. Pastén, V. Muñoz, J. Rogan y J. A. Valdivia, *Fractal and Multifractal Analysis of Spatial Distributions of Earthquakes in the Central Zone of Chile*, in preparation.
- [31] R. Olsson, *Jour. of Geodyn.* **27**, 547 (1999).
- [32] K. Papadopoulos, G. Milikh, A. Gurevich, A. Drobot y R. Shanny, *J. Geophys. Res.* **98**, 17593 (1993).
- [33] P. Bak, C. Tang y K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* **38**, 364 (1988).
- [34] K.-I. Goh, D.-S. Lee, B. Kahng y D. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 148701 (2003).
- [35] R. Karmakar y S. S. Manna **38**, L87 (2005).
- [36] S. T. R. Pinho, C. P. C. Prado y O. Kinouchi, *Phys. A* **257**, 488 (1998).
- [37] T. P. Peixoto y C. P. C. Prado, *Phys. Rev. E* **74**, 016126 (2006).
- [38] M. S. Mega, P. Allegrini, P. Grigolini, V. Latora, L. Palatella, A. Rapisarda y S. Vinciguerra, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 188501 (2003).
- [39] X. Yang, S. Du y J. Ma, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 228501 (2004).
- [40] D. S. Lee, K. I. Goh, B. Kahng y D. Kim, *Phys. A* **338**, 84 (2004).
- [41] J. Lahtinen, J. Kertész y K. Kaskia, *Phys. A* **349**, 535 (2005).
- [42] S. Ide, G. C. Beroza, D. R. Shelly y T. Uchide, *Nature* **447**, 76 (2007).
- [43] G. Julià, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **18**, 47 (1918).
- [44] B. Mandelbrot, *Science* **156**, 636 (1967).

- [45] P. Bak, C. Tang y K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987).
- [46] C. W. Eurich, J. M. Herrmann y U. A. Ernst, *Phys. Rev. E* **66**, 066137 (2002).
- [47] J. X. Carvalho y C. P. Prado, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4006 (2000).
- [48] T. P. Peixoto y C. P. C. Prado, *Phys. Rev. E* **69**, 02510(R) (2004).
- [49] P. S. Addison, *Fractals and Chaos, an Illustrated Course*, Vol. 1 (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1997), segunda edición.
- [50] J. Theiler, *J. Opt. Soc. Am. A* **7**, 1055 (1990).
- [51] H. E. Stanley y P. Meakin, *Nature* **335**, 405 (1988).
- [52] T. C. Halsey, M. Jensen, L. Kadanoff, I. Procaccia y B. I. Shraiman, *Phys. A* **33**, 1141 (1986).
- [53] S. Ceylan, *Journal of Istanbul Kullur University* **3**, 147 (2006).
- [54] A. Caneva, *Rev. Colombiana de Física* **33**, 479 (2001).
- [55] K. Bhattacharya y S. Manna, *Physica A* **384**, 15 (2007).
- [56] P. Mandal y B. Rastogi, *Pure and Appl. Geophys.* **162**, 53 (2005).
- [57] X. Lei y K. Kusunose, *Geophys. J. Int.* **139**, 754 (1999).
- [58] P. Dimitriu, E. M. Scordilis y V. G. Karacostas, *Nat. Haz. and Earth Sys. Scs.* **21**, 277 (2000).
- [59] A. Caneva y V. Smirnov, *Earth Sci. Res. J.* **8**, 3 (2004).

- [60] P. M. Bhattacharya, R. Majumdar y J. R. Kayal, *Current Science* **82**, 1486 (2002).
- [61] K. Nanjo y H. Nagahama, *Pure and Appl. Geophys.* **157**, 575 (2000).
- [62] C. Frohlich y S. D. Davis, *J. Geophys. Res.* **98**, 631 (1993).
- [63] K. Aki, *A probabilistic synthesis of precursory phenomena*, Vol. 1 (AGU, D. W. Simpson and P. G. Richards, Washington D.C., 1981), primera edición.
- [64] P. Grassberger, *Phys. Lett.* **97**, 227 (1983).
- [65] P. Grassberger y I. Procaccia, *Physica* **9**, 189 (1983).
- [66] A. Rényi, en *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability 1960*, editado por B. University, pbers (1961), Vol. 1, pág. 600.
- [67] W. K. M. Potter, *IEEE* (2007).
- [68] K. Pawelzik y H. Schuster, *Phys. Rev. A* **35**, 481 (1987).
- [69] A. B. Chhabra, C. Meneveau, R. V. Jensen y K. Sreenivasan, *Phys. Rev. A* **40**, 5284 (1989).
- [70] A. B. Chhabra y R. V. Jensen, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1327 (1989).
- [71] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, Vol. 1 (Wiley, New York, 1981), primera edición.
- [72] J. Theiler, *Phys. Rev. A* **34**, 2427 (1986).
- [73] C. Meneveau y K. R. Sreenivasan, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1424 (1987).

- [74] A. Szczepaniak y W. M. Macek, *Nonlinear Proc. Geophys.* **15**, 615 (2008).
- [75] P. N. S. Roy y A. Padhi, *Pure and Appl. Geophys.* **164**, 2271 (2007).
- [76] J. B. Rundle, D. L. Turcotte, R. Shcherbakov, W. Klein y C. Sammis, *Revs of Geophys.* **41**, 5.1 (2003).
- [77] S. Abe y N. Suzuki, *Europhys. Lett.* **65**, 581 (2004).
- [78] S. Abe y N. Suzuki, *Phys. A* **337**, 357 (2004).
- [79] S. Abe y N. Suzuki, *Eur. Phys. J. B* **44**, 115 (2005).
- [80] S. Abe y N. Suzuki, *Phys. Rev. E* **74**, 026113 (2006).
- [81] L. Euler, *Comment. Acad. Sci. U. Petrop.* **8**, 128 (1736).
- [82] S. N. Dorogovtsev y J. F. F. Mendes, *Evolution of Networks*, Vol. 1 (Oxford University Press, New York, 2003), primera edición.
- [83] M. Girvan y M. E. J. Newman, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **99**, 7821 (2002).
- [84] L. K. Gallos, C. Song, S. Havlin y H. A. Makse, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **104**, 7746 (2007).
- [85] P. Erdős y A. Rényi **6**, 290 (1960).
- [86] D. J. Watts y S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 409 (1998).
- [87] A.-L. Barabási y R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [88] L. da F. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso y P. R. V. Boas, *Advances in Physics* **56**, 167 (2005).

- [89] M. Baiesi y M. Paczuski, *Phys. Rev. E* **69**, 066106 (2004).
- [90] S. Abe, D. Pastén, V. Muñoz y N. Suzuki, *Universalities of earthquake network characteristics*, accepted in IJMPB conference.
- [91] S. Abe, D. Pastén y N. Suzuki, *Finite data-size scaling of clustering in earthquake network*, accepted in *Physica A*.
- [92] R. Burridge y L. Knopoff, *Bull. of the Seis. Soc. of Am.* **57**, 341 (1967).
- [93] T. Hasumi, M. Kamogawa y Y. Yamazaki, *Geophys. Res. Lett.* **7**, 09265 (2005).