

UCH-FC  
DOC-F  
TETS  
c.1

# Sistemas Complejos

## Tráfico Vehicular en Ciudades

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias con mención en Física  
Facultad de Ciencias

por

**Benjamín Andrés Toledo Cabrera**

Julio, 2004

Director de Tesis : Dr. J. Alejandro Valdivia Hepp  
Codirector de Tesis : Dr. Claudio Tenreiro Leiva

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN  
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

**Benjamín Andrés Toledo Cabrera**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 27 de Julio de 2004.

Director de Tesis

Dr. J. Alejandro Valdivia



Codirector de Tesis

Dr. Claudio Tenreiro



Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Hugo Arellano



Dr. Miguel Kiwi



Dr. José Rogan



## AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a todos quienes tuvieron algo que ver con que esta tesis llegara a buen término. En especial quiero agradecer la guía y encomio que me dieron mis tutores J. Alejandro Valdivia y Claudio Tenreiro durante toda la investigación y desarrollo que implicó este trabajo con lo que sentaron las bases de mi carrera científica. Por supuesto, no puedo dejar de mencionar y agradecer al profesor José Rogan por todos sus excelentes consejos y observaciones, así como a los profesores Miguel Kiwi y Hugo Arellano cuyos comentarios ayudaron de manera decisiva a mejorar esta tesis.

También quisiera agradecer a mis padres por su constante apoyo y estímulo durante mis estudios.

Finalmente hago notar que mi permanencia en el plan de doctorado fue posible gracias a una Beca de Doctorado CONICYT.

# Índice

1. Generalidades sobre tráfico	3
1.1. Variables y flujo ininterrumpido	3
1.1.1. Tasas de flujo	3
1.1.2. Velocidades	4
1.1.3. Ocupación	5
1.1.4. Concentración	6
1.2. Modelos de flujo vehicular	7
1.2.1. Modelos velocidad-flujo	7
1.2.2. Modelos velocidad-densidad	8
1.2.3. Modelos flujo-concentración	9
1.2.4. Modelos tridimensionales	11
1.3. Factores humanos	11
1.4. Modelos de seguimiento de vehículo	13
1.5. Modelos de flujo continuo	15
1.6. Simulaciones	17
1.6.1. Clasificación de modelos por simulación	19
1.6.2. Autómatas celulares	23
1.6.3. Simulaciones y sistemas complejos	25

	IV
<b>2. Complejidad</b>	<b>28</b>
2.1. Complejidad de Kolmogorov . . . . .	32
2.2. Caos . . . . .	33
2.3. Mapas . . . . .	35
2.4. Bifurcaciones . . . . .	36
2.4.1. Bifurcaciones globales . . . . .	38
2.4.2. Transiciones discontinuas . . . . .	39
2.5. El atractor . . . . .	43
2.6. La cuenca de atracción . . . . .	46
2.7. Exponente de Lyapunov . . . . .	48
<b>3. Un modelo de tráfico vehicular</b>	<b>50</b>
3.1. El modelo microscópico . . . . .	51
3.2. Comportamiento asintótico . . . . .	61
3.3. Comportamiento transiente . . . . .	65
3.4. Comportamiento caótico . . . . .	70
3.5. Análisis adicional . . . . .	76
<b>4. Conclusiones y proyecciones</b>	<b>80</b>
<b>A.</b>	<b>82</b>

## RESUMEN

En esta tesis nos proponemos estudiar el tráfico vehicular desde el punto de vista de los sistemas complejos, buscando principalmente su aplicación al tráfico en ciudades. El modelo desarrollado, a pesar de contener dos agentes muy simples de un sistema de tráfico, como lo son un único vehículo y una secuencia de semáforos, reveló la aparición de caos en la dinámica para un intervalo de los parámetros que definen el sistema, aún dentro de condiciones ideales. Esto implica que el caos es un ingrediente esencial de todo sistema de tráfico. Al ser este el caso de una componente, es esperable que el caso de muchos vehículos interactuando entre sí y con los agentes de control, pertenezca a la clase de los sistemas complejos, abriendo la posibilidad de explorar fenómenos emergentes y de auto-organización. En el desarrollo de este trabajo se presenta evidencia en este sentido.

## ABSTRACT

In this thesis we propose to study a traffic network as a complex system, emphasizing the importance of this concept in city traffic. The proposed model, in spite of consisting of two very simple agents of a traffic network, namely, a single car and a sequence of traffic lights, shows chaotic behavior for a range of the parameters that define the system, even under ideal conditions. This means that this chaotic behavior is an essential part of any traffic network. Because this is the case at this microscopic level, it seems foreseeable that the whole system, that is, many vehicles interacting between them and with the control devices, belong to the class of the complex systems. In this context the possibility of study of emergence and self-organization is open. Through the development of this work we give evidence in this regard.

## Introducción

Es fácil imaginar lo complicada que serían nuestras actividades diarias sin la compleja infraestructura asociada al transporte terrestre que toda ciudad posee. Por esta razón es importante entender la dinámica de este sistema en tanto detalle como sea posible y eventualmente introducir esquemas de control que mejoren su desempeño. Como es lógico, la envergadura del problema dependerá esencialmente del tamaño de la ciudad considerada. Sin embargo, esto no significa que una ciudad pequeña o una simple carretera represente una situación simple, de hecho como se demuestra en uno de los resultados principales de esta tesis [1], con un solo vehículo moviéndose a través de una secuencia de semáforos se obtiene un comportamiento caótico para un intervalo de parámetros que podrían corresponder a situaciones asociadas al tráfico en ciudades. Es necesario considerar además que aunque el número de vehículos sea reducido en alguna región, esto generalmente coincide con un número también reducido de vías disponibles, de modo que resulta en una situación equivalente en cuanto a densidad de móviles.

Debido a la relevancia del problema, se han desarrollado diversos modelos de tráfico que intentan describir matemáticamente las interacciones entre los móviles y la infraestructura. Esta última incluye, además de las vías, dispositivos de control, señalética, etc. En consecuencia, estos modelos son la base del diseño y operación de calles y carreteras. El estudio científico del flujo vehicular tiene sus inicios en la década del treinta, con la aplicación de la teoría de probabilidades a la descripción del tráfico en caminos [2]. Por aquel entonces también se estudiaron modelos que relacionaban volumen y densidad del flujo vehicular [3] además de la eficiencia de las estrategias de control en las intersecciones [4]. Después de la segunda guerra mundial, el aumento en el uso del automóvil incremento el interés por investigar en esta área.

Por ello, durante la década del cincuenta se desarrollaron una variedad de enfoques teóricos, tales como el "seguimiento de automóvil", el modelo ondulatorio (del tipo hidrodinámico) y los modelos de tiempo de espera (queuing time). Algunos autores destacados de este período son Reuschel [5-7], Wardrop [8], Pipes [9], Lighthill y Whitham [10], Newell [11], Webster [12], Edie y Foote [13], Chandler [14] y Herman [15].

El interés en esta área, así como el desarrollo de la misma, siguió aumentado hasta que en el año 1959 se llegó al punto de poder realizar simposios internacionales. Desde entonces el progreso en cuanto al entendimiento de los flujos vehiculares ha sido enorme así como la diversidad de modelos empleados. A pesar de ello, el estudio de los fundamentos de la teoría de tráfico sigue siendo tan importante como en aquellos días, ya que constituye la base para las técnicas y procedimientos a ser aplicados en el diseño, operación y desarrollo de todo sistema de transporte avanzado.

Actualmente se utilizan varios modelos dependiendo de la aplicación específica que se busque. Por ejemplo, para el estudio del flujo en carreteras se prefieren los modelos del tipo hidrodinámico, en cambio para el estudio del tráfico en ciudades son preferibles los modelos basados en autómatas celulares, aunque esto no significa que no se hayan ensayado estos modelos en las más variadas situaciones de tráfico. De estos modelos y técnicas se tratara en el primer capítulo. El segundo capítulo aborda el tema de la complejidad y de su subconjunto: la dinámica caótica. Esta última posee una definición matemática rigurosa, lo que es menos cierto del tema más amplio de la complejidad. Finalmente el tercer capítulo, abarca el desarrollo y análisis del modelo microscópico discreto, de evento discreto<sup>1</sup> que es el motivo principal de este trabajo y veremos cómo éste sugiere que el caos es parte esencial

---

<sup>1</sup>Estos conceptos se definen en la sección dedicada a las simulaciones del primer capítulo.

de todo sistema de tráfico.

# Capítulo 1

## Generalidades sobre tráfico

### 1.1. Variables y flujo ininterrumpido

En general los flujos vehiculares no son uniformes sino que varían tanto en el tiempo como en el espacio, por ello al hacer mediciones sobre el sistema, en general estamos midiendo una variable aleatoria. Entonces un enfoque que ha resultado fructífero en la caracterización del flujo de tráfico es utilizar parámetros asociados a distribuciones estadísticas.

#### 1.1.1. Tasas de flujo

Las tasas de flujo son muestreadas directamente en los puntos de medición, y por definición requieren mediciones en lapsos definidos tiempo. Estas no pueden ser derivadas a partir de un instante dado sobre un tramo fijo de la carretera. La tasa de flujo se define como el número de vehículos contados en un intervalo de tiempo, y son expresadas normalmente en términos de vehículos/hora, aunque los intervalos reales de medición sean mucho menores. Los estudios sobre esta variable han hecho surgir preocupación sobre la sustentabilidad de los resultados obtenidos al estudiar tasas de flujo altas sobre intervalos de tiempo cortos (de 30 s a 1 min). Basándose en esta evidencia empírica, se ha sugerido [16] realizar mediciones sobre intervalos

de unos 15 min, aunque se cuenta con mediciones en que los intervalos considerados bordean el minuto. Los efectos de estos intervalos de medición fueron estudiados por Rothrock y Keefer [17].

### 1.1.2. Velocidades

La medición de la velocidad de un vehículo requiere de observaciones tanto en el tiempo como en el espacio. En muchos modelos interesa la velocidad instantánea, para lo cual los dispositivos más adecuados son del tipo radar y microondas, aunque estos también se basan en intervalos de tiempo y distancia, no importa cuan pequeños estos sean.

En la literatura usualmente se hace distinción en la manera que se calcula la velocidad promedio de un conjunto de vehículos. Estas diferencias surgen de los métodos empleados. Por ejemplo, supongamos que un móvil viaja entre los puntos A y B una distancia de 20 km a una velocidad promedio de 80 km/h y regresa a una velocidad promedio de 40 km/h. La velocidad promedio no es 60 km/h, esta es la velocidad que calcularía alguien observando al vehículo en ambas direcciones y luego promediando las velocidades. Sin embargo, el viaje toma 15 min en un sentido y 30 min de vuelta, totalizando 45 min en recorrer 40 km, lo que resulta en una velocidad promedio de 53.3 km/h. La primera manera de calcular la velocidad se denomina velocidad media en el tiempo. El segundo término usado en la literatura es velocidad media en el espacio, pero desafortunadamente carece de una definición única, y las que existen no son todas equivalentes entre sí. A pesar de esto, existen dos principales. Una de ellas es la dada por Lighthill y Whitham [10],

$$\bar{u}_e = \frac{D}{\frac{1}{N} \sum_i t_i}, \quad (1.1)$$

donde  $t_i$  es el tiempo que le toma al vehículo  $i$ -ésimo cruzar la distancia  $D$ ,  $t_i = D/u_i$ .

Una definición relacionada a (1.1) es la dada por el Institute of Transportation Engineers, definida como la distancia total recorrida dividida por el tiempo total empleado, en esta definición también se incluyen en el conjunto los vehículos que no han recorrido todo el camino.

La segunda definición principal para la velocidad promedio en el espacio toma las velocidades promedio de todos los vehículos en una sección de la carretera en un instante de tiempo dado. Sin importar la definición que se use para la velocidad promedio espacial, todos los autores están de acuerdo en que los cálculos teóricos que implican velocidades promedio serán correctos en la medida que se usen promedios en el espacio y no en el tiempo. La diferencia entre las definiciones para promedios temporales y espaciales se hace patente en condiciones de frenar y continuar, como en calles con semáforos y carreteras congestionadas, no existiendo diferencia significativa para el flujo libre en tanto nos estemos refiriendo a un punto en el espacio.

### 1.1.3. Ocupación

La ocupación es la fracción de tiempo que el vehículo está sobre el detector. Para un intervalo de tiempo específico,  $T$ , es la suma del tiempo que los vehículos cubren el detector, dividida por  $T$ . Para cada vehículo, el tiempo que cubre el detector se determina por su velocidad  $u_i$  y su longitud  $L_i$ , más la longitud del propio detector,  $d$ . Es decir, el detector es activado por el vehículo en el momento que el parachoques delantero cruza el inicio de la zona de detección hasta que el parachoques trasero determina el fin de la medición. Si los vehículos son de longitudes iguales, la ocupación es proporcional a la densidad.

#### 1.1.4. Concentración

En el pasado el término concentración, ha sido usado como sinónimo de densidad [18]. Sin embargo, su significado se ha ido ampliando para abarcar tanto la densidad como la ocupación. En el primer caso se refiere a la concentración sobre el espacio, en el segundo, la concentración en el tiempo de un mismo flujo vehicular. La concentración espacial (densidad) puede ser evaluada a partir de la ocupación solo en el caso del flujo libre. En el caso congestionado no parece haber una manera de estimar la densidad y solo se puede recurrir a mediciones [19]. Históricamente, la densidad ha tenido un rol predominante, sin embargo, existen razones para darle una mayor importancia a la ocupación (concentración temporal). La primera es que se espera mejor correspondencia entre los modelos y las mediciones en carreteras. La segunda razón es que la densidad, definida como el número de vehículos por unidad de longitud de carretera, no incluye los tamaños de los vehículos ni la composición vehicular. La ocupación por otro lado, resulta directamente afectada por estos dos factores, y por tanto es una variable más sensible al momento de caracterizar un flujo vehicular. Es necesario agregar que también existen buenas razones para insistir en la densidad, siendo la más importante lo sencillo que resulta el uso de esta variable en el desarrollo de modelos de tráfico, a diferencia de las complicaciones introducidas por la ocupación. De hecho, se ha establecido una analogía a lo que ocurrió con el concepto de aceleración en mecánica newtoniana. La aceleración fue imposible de medir en los días de Newton y aún las mediciones indirectas se hacían dificultosas [20]. A pesar de ello, Newton construyó una teoría de la mecánica para la cual la aceleración es una variable esencial. Algo similar se da con la densidad de un flujo vehicular y por lo tanto este es un debate no resuelto.

## 1.2. Modelos de flujo vehicular

Algunos de los esfuerzos por entender el flujo vehicular comienzan con modelos matemáticos, otros son principalmente empíricos con poca o ninguna intención de generalizar. Sin embargo ambos son importantes para la comprensión de las interrelaciones que se dan.

### 1.2.1. Modelos velocidad-flujo

La relación que existe entre el flujo y la velocidad ha sido ampliamente estudiada. Una gran cantidad de trabajo empírico que relaciona el flujo con la velocidad aparece en un artículo de Hall, Hurdle y Banks [21]. Otros trabajos empíricos relativos a este tema fueron llevados a cabo por Banks [22, 23], Hall y Hall [24], Chin y May [25], Wemple, Morris y May [26], Agyemang-Duah y Hall [27] y Ringert y Urbanik [28]. Todos estos estudios apoyan la idea de que las velocidades permanecen aproximadamente constantes aun a muy altas tasas de flujo. Otro aspecto que abordaron se resume en la siguiente pregunta: ¿se reduce la tasa de flujo en un embotellamiento a la vez que aumentan los tiempos de espera corriente arriba? Banks [29, 30] reporta aproximadamente un descenso del 3% respecto del flujo libre, sobre la base de un estudio de nueve días en un lugar en la ciudad de California. Agyemang-Duah y Hall [27] reportan un descenso del 5%, sobre la base de 52 días de datos en un lugar de la ciudad de Ontario. Este descenso en el flujo usualmente no es observable, debido a que en muchos lugares las altas tasas de flujo no duran suficiente en la etapa previa al establecimiento de la congestión como para permitir que se den los valores estables del flujo que mostrarían el descenso. Probablemente el primer trabajo teórico en este tema se deba a Greenshields [3], en donde el obtiene una curva parabólica para la relación velocidad-flujo basándose en una relación lineal entre velocidad y densidad

(una aproximación) junto con la ecuación que define al flujo como el producto entre velocidad y densidad:

$$q = k_j \left( u - \frac{u^2}{u_f} \right), \quad (1.2)$$

donde  $u$  es la velocidad del flujo,  $u_f$  es la velocidad del flujo libre y  $k_j$  es la densidad durante el embotellamiento. Esta expresión fue aceptada por décadas, hasta que en 1994 el Highway Capacity Manual (HCM), aporó datos experimentales que convencieron de una realidad distinta, es decir, en la obtención de (1.2) las hipótesis empleadas así como el análisis de los datos no fue adecuado. Los actuales resultados indican un comportamiento más complicado. Actualmente se sigue trabajando en estos modelos.

### 1.2.2. Modelos velocidad-densidad

Ahora comentaremos brevemente los modelos matemáticos que relacionan velocidad y densidad en la forma

$$u = u_f \left( 1 - \frac{k}{k_j} \right). \quad (1.3)$$

Esta expresión data de 1935. El aspecto más interesante de este modelo en particular, es que su base empírica consiste en media docena de puntos asociados a un conjunto de móviles en un estado cercano al flujo libre y una única observación en el estado congestionado. La relación lineal surge de conectar los datos asociados al conjunto de móviles con el único otro punto independiente (esto porque a simple vista parecen seguir una tendencia lineal). Más importante aún, se ha hallado evidencia en contra de este modelo especialmente en el trabajo de Drake [31]. Y resulta muy sorprendente que haya sido usado por tanto tiempo teniendo en cuenta lo poco robusto de su base.

Un segundo modelo fue propuesto por Greenberg [32], estableciendo una relación

logarítmica

$$u = c \ln \left( \frac{k}{k_j} \right). \quad (1.4)$$

Sin embargo, los datos experimentales sobre los que se sustenta no fueron correctamente interpretados (el cálculo de la densidad incluyó vehículos que no viajaban juntos) [20]. Tanto este modelo como otros cuatro, fueron analizados minuciosamente por Drake [31] y concluyó que *todos* los resultados estaban basados en la intuición solamente ya que las pruebas estadísticas resultaban insuficientes. El análisis de Drake también concluyó que el modelo que mejor representaba los datos es el debido a Edie [33], que es esencialmente un modelo exponencial discontinuo, combinado los modelos de Greenberg y Underwood [34]. Posteriormente Duncan [35, 36] notó que en el procedimiento de tres pasos: (1) calcular la densidad a partir de la velocidad y el flujo, (2) ajustar la función densidad-velocidad a los datos y (3) transformar la función velocidad-densidad a la función velocidad-flujo, no se ajusta los datos originales de una manera satisfactoria. De hecho, demostró que cambios menores en la curva velocidad densidad, inducen cambios grandes en la curva velocidad flujo.

### 1.2.3. Modelos flujo-concentración

En la revisión de Gerlough y Huber [18], se hace notar la gran importancia de los modelos flujo-concentración, por su aplicación a sistemas de control. Al principio algunos investigadores consideraron la situación de flujo para concentraciones bajas mientras que otros consideraron situaciones relativas al flujo para concentraciones altas. Ambas aproximaciones fueron sintetizadas en un modelo unificado, es decir, un modelo de flujo-concentración, el cual se ya hallaba en un trabajo de Lighthill y Whitham [10]. Para destacar la importancia de este tipo de modelos, Haight [37, 38] llamo a la curva flujo-concentración "the basic diagram of traffic". En la Fig. 1.1 se

muestra la forma típica de esta relación para algunos modelos.

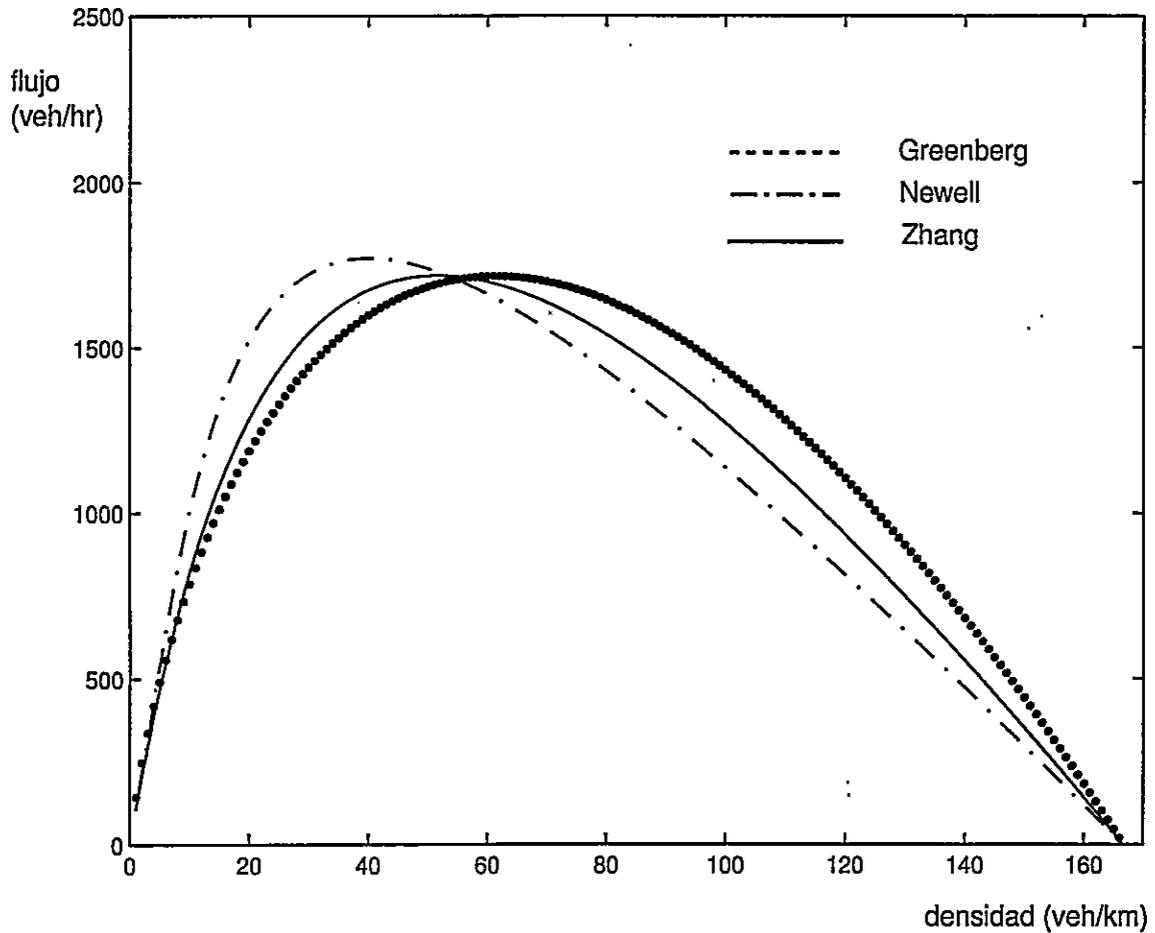


Figura 1.1: Comparación entre diagramas fundamentales para algunos modelos [39]

Edie parece haber sido el primero en notar que los datos empíricos relativos a las curvas flujo-concentración frecuentemente tienen discontinuidades en la vecindad de lo debería ser el flujo máximo y en sugerir que podrían necesitarse curvas discontinuas para establecer la relación entre flujo y concentración. Posteriores desarrollos han mostrado que formulación precisa de este modelo no es sencilla [40-43].

### 1.2.4. Modelos tridimensionales

Debido a que las observaciones experimentales rara vez concuerdan con la ecuación  $q = uk$ , especialmente durante los estados congestionados, se entendió que trabajando solo con dos variables no se tendría el modelo capaz de explicar lo observado. Al estar trabajando con tres observables, se entendió que estos son independientes. En este contexto la teoría de catástrofes ha resultado útil, ya que en ella se admiten cambios discontinuos en alguna variable que es justamente lo que los datos experimentales estaban indicando, por ejemplo, en el cambio típico de la velocidad en las fases congestionada y libre [44-46]. A pesar de que esta modelación es el resultado de un mejor entendimiento del tráfico, no resulta del todo claro que este tipo de enfoques sea finalmente exitoso, esencialmente debido a la falta de trabajos experimentales minuciosos.

## 1.3. Factores humanos

Los estudios de la incidencia de los factores humanos en la descripción de sistemas de tráfico ha estado centrado principalmente en los tiempos de respuesta neuromuscular y cognitivo. Esto incluye el tiempo percepción-reacción, respuesta a los sistemas de control, manejo de peligros en la vía y el desempeño al conducir de los distintos segmentos de la población. En el ámbito del manejo, Lunenfeld y Alexander [47], han delineado tres niveles que son: control, guía y navegación. El primer nivel tiene que ver con la habilidad del sujeto para interactuar con el vehículo; el segundo nivel incluye la interacción con el entorno físico, otros vehículos, señalética, etc.; mientras que el tercer y más alto nivel hace referencia al conductor como quien planea la ruta a seguir y determina los ajustes que sean necesarios para llegar a destino.

En cuanto al tiempo de respuesta se han postulado diferentes tiempos de reacción dependiendo del entorno particular. Por ejemplo, conducir en una zona rural presenta menos distracciones y tensiones que una zona urbana [48]. En estos estudios se ha determinado por ejemplo que el tiempo de respuesta es mas largo para eventos sorpresivos que para aquellos esperados, obteniéndose una razón entre tiempo de respuesta para evento no esperado a esperado entre 1.35 y 1.80 veces. Sin embargo, algunos de los sujetos enfrentados a situaciones sorpresivas en la carretera nunca respondieron a ellas, de modo que este es un tema que requiere de mas investigación. A este tiempo percepción-reacción le sigue el tiempo de movimiento, es decir, el tiempo que le toma al sujeto accionar los controles del móvil, por ejemplo el freno. Los primeros estudios del tiempo de movimiento fueron realizados por Fitts [49] y se focalizó en el movimiento de la mano o el brazo, siendo Drury [50] el primero en aplicar estos estudios al movimiento del pie y la pierna. Un resultado interesante de estos estudios es que la relación entre los tiempos de percepción-reacción y movimiento es débil o inexistente, por lo que la duración de estos es bastante independiente.

Otros estudios en este ámbito han investigado los tiempos y distancias de respuesta a los dispositivos de control de tráfico. Este es un punto importante ya que la tarea de conducción es esencialmente visual. Los principales temas de interés tiene que ver con las distancias para las cuales: (1) los dispositivos de control de tráfico pueden ser detectados en el campo visual, (2) estos objetos pueden ser reconocidos como sistemas control (señalética en general) y (3) son legibles o identificables al punto de poder reaccionar según indica dicho dispositivo. Algunos estudios interesantes que involucran semáforos fueron realizados por Chang et al. [51], Wortman y Matthias [52].

Además, se ha estudiado la respuesta a la dinámica de otros vehículos: vehículos

que van delante [53, 54] y vehículos al lado [55]. La respuesta a obstáculos y peligros en la vía ha sido estudiada por Picha [56] entre otros [57]. Como puede notarse este es en si un problema bastante complejo ya que esta indisolublemente ligado al comportamiento humano, un sistema *muy* difícil de modelar.

#### 1.4. Modelos de seguimiento de vehículo

Cumming [58] ha categorizado las varias subtareas implicadas en la tarea de conducción y ha situado al conductor en la categoría de procesador de información. Una de estas subtareas es el seguimiento del vehículo que va en frente en la misma pista de la carretera. Esta subtarea es de interés ya que es simple en comparación con otras, y a podido ser modelada matemáticamente en forma exitosa, sin perder de vista que es una actividad común en la conducción del vehículo, y por ello contribuye a la comprensión de la dinámica del flujo vehicular.

Un aspecto interesante en el seguimiento vehicular es el espaciado promedio,  $S$ , que mantiene un vehículo al seguir a otro a una velocidad dada  $V$ . El interés en esta relación velocidad-distancia esta en el hecho de que casi todas las estimaciones de capacidad para una única pista en carretera se basaron en un principio en la ecuación:

$$C = 1000V/S, \quad (1.5)$$

donde  $C$  es la capacidad de una única pista (vehículos/hora),  $V$  es la velocidad (km/hr) y  $S$  la distancia promedio entre los parachoques traseros de ambos vehículos (m) Posteriores investigaciones [59], arrojaron un modelo para esta relación dado por:

$$S = \alpha + \beta V + \gamma V^2, \quad (1.6)$$

donde los valores numéricos de los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  pueden tomar una variedad

de valores. La interpretación física de éstos es la siguiente:  $\alpha$  es la longitud efectiva del vehículo;  $\beta$  es el tiempo de reacción;  $\gamma$  el recíproco del doble de la máxima desaceleración promedio del vehículo que sigue. El término  $\gamma V^2$  provee suficiente holgura como para que el vehículo que va adelante frene súbitamente y aun así no haya una colisión. Un valor típico para  $\gamma$  obtenido empíricamente es  $\gamma \approx 0.075 \text{ s}^2/\text{m}$ . Una interpretación menos conservadora para el término no lineal es

$$\gamma = 0.5(a_s^{-1} - a_d^{-1}) \quad (1.7)$$

donde  $a_s$  y  $a_d$  son las desaceleraciones máximas promedio para ambos vehículos. Estos términos permiten diferencias en las capacidades de frenado de ambos vehículos sean estas reales o no [60].

Para  $\gamma = 0$ , se pueden obtener muchas de las reglas de "buen manejo" propuestas por organizaciones de seguridad. En general, la Ec. (1.6) para la relación velocidad-distancia, es un intento por tomar en cuenta varios factores entre los que están: la longitud de los vehículos, el elemento de factor humano asociado a la percepción (toma de decisiones y tiempos de ejecución) y la física neta de las capacidades de frenado de los propios vehículos. Se ha demostrado que estos modelos implican estimaciones teóricas para la velocidad en flujo máximo:  $v = \sqrt{\alpha/\gamma}$ , para un flujo máximo de  $(\beta + 2\sqrt{\alpha\gamma})^{-1}$ , además de la velocidad para la cual variaciones pequeñas en el flujo de tráfico se propagan por el mismo incidiendo en localizaciones espaciales anteriores, velocidad que coincide con la velocidad para flujo máximo [61].

El modelo que se acaba de describir es aplicable cuando cada vehículo en el flujo de tráfico mantiene aproximadamente la misma velocidad y se mantienen a aproximadamente la misma distancia (esto corresponde a un estado estacionario).

A través de los trabajos de Reuschel [62] y Pipes [63], se introdujeron los ele-

mentos dinámicos de una línea de vehículos. En esos trabajos, la atención se centro en el comportamiento dinámico de un flujo de vehículos mientras estos aceleran o desaceleran y cada par de vehículos se intentan seguir el uno al otro en la línea. Estas investigaciones fueron extendidas por los trabajos de Kometani y Sasaki [64], y en una serie de publicaciones de Herman y sus asociados en General Motors Research Laboratories desde 1958.

Estas investigaciones fueron esencialmente aproximaciones microscópicas, en que se intento describir de un modo tan detallado como fuera posible, las situaciones en que un vehículo sigue a otro. Con tal descripción se puede aproximar el comportamiento macroscópico del flujo vehicular en una pista. De ahí que los modelos de seguimiento sean un verdadero puente entre el comportamiento de un par de vehículos en que uno sigue al otro, y el caso macroscópico de una línea de vehículos y su correspondientes propiedades de estabilidad y flujo.

## 1.5. Modelos de flujo continuo

Al mirar una carretera desde un aeroplano, se puede visualizar el tráfico vehicular como un flujo continuo. Debido a esto es natural asociar al tráfico con un fluido y tratarlo como tal. Entonces es descrito en términos de flujo, concentración y velocidad. En esta analogía, el tráfico vehicular se trata como un fluido compresible unidimensional. Esto conduce a dos supuestos básico: a) el flujo vehicular se conserva y b) existe una relación uno a uno entre velocidad y densidad o entre flujo y densidad (ecuación de estado). El primer supuesto se expresa por medio de la ecuación de continuidad. Esto significa que en cualquier sistema de tráfico, el flujo de entrada es igual al de salida más una posible cantidad de reserva. En general este supuesto goza de bastante aceptación. Sin embargo, el segundo supuesto, ha hecho surgir bastantes

objecciones, en parte porque no siempre es entendido (su significado y alcance) y en parte debido a algunas mediciones contradictorias. Específicamente, si la velocidad  $u$ , es función de la densidad, resulta que el conductor ajusta su velocidad de acuerdo a la densidad  $k$  (en la medida que la densidad incrementa, la velocidad disminuye). Aunque esto resulte intuitivamente correcto, puede conducir a velocidades o densidades negativas. Además, se ha observado que para el mismo valor de densidad, pueden coexistir varios valores para la velocidad. Evidentemente este supuesto debe ser restringido. La solución está en decir que la velocidad depende de la densidad pero sólo en equilibrio. Ya que las condiciones de equilibrio rara vez pueden ser observadas en la práctica, es difícil obtener una relación velocidad-densidad que resulta satisfactoria y usualmente se estima teóricamente. Esta dificultad en particular a hecho que muchos investigadores dejen de lado los modelos continuos o traten de sobre simplificarlos. Sin embargo, estos modelos han demostrado ser útiles en simulaciones y estudios de control.

Esta clase de modelos de flujo son construídos esencialmente a partir de la ecuación de continuidad, la ecuación de estado (las relaciones velocidad densidad o flujo-densidad) y la ecuación básica del flujo vehicular (el flujo es igual a la velocidad multiplicada por la densidad). Con esto podemos obtener velocidad, flujo y densidad en cualquier momento y punto sobre la carretera. Conociendo estas variables de flujo básicas podemos conocer el estado del sistema de tráfico y obtener mediciones del impacto de detenciones en el camino, camino total recorrido, tiempo total de viaje, y otros que permitan evaluar las capacidades del sistema.

La solución para esta clase de modelos conduce a la aparición de ondas de choque, que son discontinuidades del flujo o la densidad, e implican físicamente que los vehículos cambian de velocidad abruptamente sin tiempo de acelerar o frenar. Este

comportamiento irreal puede ser eliminado considerando modelos continuos de mas alto orden, de modo que las derivadas se suavicen. Esta clase de modelos agregan una ecuación de momentum que toma en cuenta la aceleración e inercia características de la masa asociada al tráfico. De este modo las ondas de choque son suavizadas y la condición de equilibrio puede ser removida (en este caso la velocidad se obtiene de la ecuación de momentum).

Debido a esto los modelos de alto orden son preferibles, sin embargo, su uso esta acotado por la dificultad en obtener, calibrar e implementar una ecuación de momentum rigurosa y práctica. Por otro lado, la literatura existente sugiere que el modelo continuo simple se comporta mejor que el de alto orden si se implementa apropiadamente. Intuitivamente, esto es cierto cuando la velocidad, el flujo y la densidad son promediados sobre intervalos de tiempo mas largos (unos 5 min) en vez de usar intervalos cortos (unos 30 s).

## 1.6. Simulaciones<sup>1</sup>

El modelamiento a través de simulaciones computacionales es una herramienta efectiva para analizar una amplia variedad de problemas dinámicos que no son manejables por medios analíticos. Estos problemas están usualmente asociados a procesos complejos que no pueden ser expresados de manera clara en términos analíticos. Usualmente una característica de estos es que incluyen la interacción de varios agentes (en este caso no solo vehículos). A menudo, el comportamiento de cada agente y la interacción de un numero limitado de ellos es susceptible de ser expresado y manejado analíticamente. Sin embargo, en su forma mas general ésto resulta imposible. La función de la simulación es reproducir tan fielmente como sea posible los aspectos

---

<sup>1</sup>Esta sección está basada en gran medida en las referencias [65-68]

tos esenciales del comportamiento del sistema de interés, y en lo posible entregar una descripción detallada y cuantitativa del comportamiento del sistema. Entonces, podríamos decir que una simulación lógica y/o matemática de un sistema real, se realiza a través programas computacionales con una orientación experimental. En este caso usualmente se plantea un escenario (configuraciones de las carreteras, demanda de tráfico) descrito por un conjunto de parámetros. Los resultados de estas simulaciones usualmente se presentan en dos formatos: estadístico y gráfico. Los resultados numéricos derivados de la simulación entregan información detallada de que es más probable que ocurra, en tanto que las representaciones gráficas de las funciones del sistema pueden ayudar a tener un mejor entendimiento de por que el sistema se comporta según se observa, de manera que se podrían establecer relaciones causa efecto. Las simulaciones pueden satisfacer una amplia gama de requerimientos:

- Evaluación de tratamientos alternativos: Las simulaciones pueden ayudar a controlar el entorno experimental y el rango de condiciones a ser exploradas. Históricamente, las simulaciones fueron utilizadas para explorar la eficiencia de la señalética en el control de tráfico, y desde entonces se han ido ampliando para abarcar aun mas aspectos del sistema.
- Probar nuevos diseños: Debido a los altos costos de la infraestructura de transporte, las simulaciones pueden ser usadas para elegir el mejor diseño y como invertir recursos.
- Análisis de seguridad: Ya se han usado simulaciones para recrear situaciones de emergencia y accidentes, de hecho, se les considera una herramienta indispensable en estos análisis.

La mención de algunas aplicaciones da una idea de la utilidad de las simulaciones, pero en ningún caso agota las posibilidades.

### 1.6.1. Clasificación de modelos por simulación

Casi todos los modelos de tráfico por simulación describen un sistema dinámico, donde el tiempo es siempre la variable independiente. En este contexto los modelos continuos describen la forma en que los componentes de un sistema cambian su estado continuamente en el tiempo en respuesta a estímulos también continuos en el tiempo. Por otra parte, los modelos discretos, intentan ser mas realistas, bajo el supuesto que los estados del sistema en algún punto pueden cambiar abruptamente en el tiempo. Esencialmente hay dos tipos de estos últimos: de tiempo discreto y de evento discreto. El primero, divide el tiempo en una sucesión conocida para un intervalo dado. Para cada uno de estos subintervalos, el modelo calcula las actividades que cambian los estados de los elementos del sistema que se hayan seleccionado. Esta aproximación es análoga a representar un problema de condiciones iniciales para una ecuación diferencial en la forma de una expresión de diferencias finitas con variable independiente  $\Delta t$ .

Algunos sistemas son caracterizados por entidades que permanecen "a la espera" la mayor parte del tiempo. Por ejemplo, el estado de un semáforo (verde), permanece constante por varios segundos hasta que su estado cambia abruptamente a un estado distinto (rojo o amarillo). Este cambio abrupto en el estado se denomina *evento*. Debido a que es posible describir con gran precisión la operación de una señal por medio de llevar un registro de sus cambios de estado en una sucesión (medida o calculada) eventos temporales. Este hecho puede ser usado para agilizar los cálculos en este tipo de simulaciones. Para sistemas de tamaño limitado o que estudian enti-

dades que no cambian frecuentemente, las simulaciones de evento discreto son mas apropiadas que las de tiempo discreto, y son mucho mas económicas en términos de tiempo de ejecución. Sin embargo, en aquellos sistemas donde gran parte de las entidades cambia continuamente su estado (el entorno de tráfico) y donde los objetivos del modelo requiere una descripción muy detallada, una simulación de tiempo discreto es probablemente la mejor elección.

Los modelos por simulación pueden ser clasificados también por el nivel de detalle con que representa el sistema de estudio, en: a) microscópico (alta fidelidad), b) mesoscópico (fidelidad media) y c) macroscópico (baja fidelidad).

Un modelo *microscópico* describe tanto la entidades del sistema como sus interacciones a un alto grado de detalle. Por ejemplo, una maniobra de cambio de pista en este nivel podría utilizar una ley de seguimiento de vehículo para el móvil considerado respecto del vehículo que lo antecede y entonces aplicar la misma ley pero con respecto al posible vehículo que le anteceda en la pista a la cual se cambia y respecto del posible móvil que lo siga en dicha pista, a la vez que toma en cuenta otras decisiones detalladas del proceso de conducción. También se puede incluir un cálculo del tiempo de esta maniobra.

Un modelo *mesoscópico* generalmente representa la mayoría de las entidades a un nivel alto de detalle pero describe las interacciones y otras actividades con menor detalle que un modelo microscópico. Por ejemplo, la maniobra de cambio de pista podría ser representada por vehículos individuales como un evento instantáneo con una decisión basada en las densidades relativas de cada pista, mas bien que en los detalles de las interacciones entre vehículos.

Un modelo *macroscópico* describe las entidades, sus interacciones y actividades a un bajo nivel de detalle. Por ejemplo, un flujo de tráfico puede ser representado por

un agregado de diagramas estadísticos o por valores escalares de las tasas de flujo, densidad y velocidad. Las maniobras de cambio de pista posiblemente no puedan ser representadas en manera alguna; el modelo de tráfico debe asegurar que el flujo está propiamente localizado en pistas bien definidas.

Los modelos microscópicos de alta fidelidad, y el software resultante son más costosos de desarrollar, ejecutar y mantener que sus contrapartes de baja fidelidad. Aunque estos modelos detallados poseen la *potencialidad* de ser más precisos, no siempre pueden ser explotados completamente debido a la complejidad de su lógica y al gran número de parámetros que necesitan para ser calibrados.

Los modelos de baja fidelidad son más sencillos y menos costosos de desarrollar, ejecutar y mantener. Sin embargo conllevan el riesgo de no representar el mundo real con la suficiente precisión, produciendo resultados de menor validez o del todo inapropiados. Este tipo de modelos es aplicable si: (1) Los resultados buscados no son sensibles a los detalles microscópicos, (2) la escala de aplicación hace que los recursos computacionales sean insuficientes para un modelo microscópico, (3) el tiempo disponible para generar el modelo es limitado.

Para cada nivel de detalle, existe un amplio margen en cuanto al desarrollo del modelo. En esta instancia se debe identificar la sensibilidad del desempeño del modelo en relación a las características subyacentes del proceso real que se quiere simular. Por ejemplo, podría ser necesario un análisis detallado de las interacciones durante un cambio de pista, implicando la utilización de un modelo micro o mesoscópico. Por otro lado, si el modelo se diseña para carreteras caracterizadas por pocas confluencias y ningún entrecruzado, describir las interacciones de cambio de pista serían de importancia marginal y un modelo macroscópico sería una buena elección.

Aun otra clasificación tiene en cuenta los procesos representados por los mode-

los: (1) determinista, (2) estocástico. Los modelos *deterministas* no tienen variables aleatorias; todas las interacciones entre las entidades del sistema están definidas en términos de relaciones exactas (matemáticas, estadísticas o lógicas). Los modelos *estocásticos* abarcan procesos que incluyen funciones de probabilidad. Por ejemplo, un modelo de seguimiento de vehículo puede ser formulado tanto en términos determinísticos como estocásticos. en el primer caso se define el tiempo de reacción de conductor como una constante; mientras que en el segundo, se usa una variable aleatoria.

El modelamiento del tráfico por simulación ha tomado muchas formas dependiendo de las situaciones específicas que se han considerado durante su desarrollo. En la tabla 1.6.1 [20] se indican solo algunos modelos de amplio uso. Algunos tiene un solo objetivo bien definido: NETSIM, NETFLO 1 y 2: calles de superficie; FRESIM, FREFLO: autopistas; ROADSIM: caminos rurales de doble pista; CORSIM, integra dos modelos: FRESIM y NETSIM; los modelos INTEGRATION, DYNASMART y TRANSIMS son componentes de sistemas mas grandes que incluyen modelos de demanda y estrategias de control; mientras que CARSIM es una simulación autónoma que modela el seguimiento de vehículo. De esta consideración se puede ver que los modelos de tráfico por simulación toman variadas formas, cada una de las cuales satisface un área específica de aplicación.

Nombre	Tiempo Discreto	Evento Discreto	Micro	Meso	Macro	Determ.	Estoc.
NETSIM	x		x				x
NETFLO 1		x		x			x
NETFLO 2	x				x	x	
FREFLO	x				x	x	
ROADSIM	x		x				x
FRESIM	x		x				x
CORSIM	x		x				x
INTEGRATION	x		x				x
DYNASMART	x			x		x	
CARSIM	x		x				x
TRANSIMS	x			x			x

### 1.6.2. Autómatas celulares

Un autómata celular (AC) es una colección de celdas (células) en una grilla de alguna forma específica que evoluciona a través de un número discreto de eventos temporales de acuerdo a un conjunto de reglas basadas en los estados de las celdas vecinas. Las reglas son aplicadas en forma iterativa para tantos pasos temporales como sea necesario. Von Neumann fue una de las primeras personas en considerar este tipo de modelos. Los AC adoptan muchas de formas y variedades. Una de sus propiedades mas fundamentales es el tipo de grilla sobre la cual se calcula. La grilla mas simple es una linea unidimensional. En dos dimensiones, se pueden considerar grillas formadas por celdas cuadradas, triangulares y hexagonales. También pueden realizarse construcciones sobre grillas cartesianas en un número arbitrario de dimensiones [69]. En la Fig. 1.2 se muestra una figura típica generada por un AC, en base a un conjunto de reglas simples.

Como vemos, los automatas celulares son una aproximación general al mode-

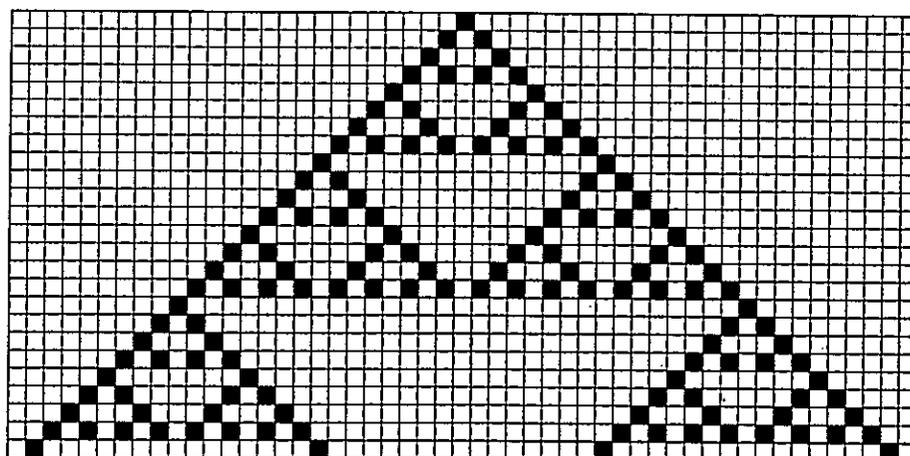


Figura 1.2: Una típica estructura generada por un AC [70]

lamiento de sistemas distribuidos espacialmente. Expanden la noción de un mapa iterativo de una sola variable, las variables actualizadas están distribuidas en un entramado en el espacio. En estos modelos se supone que la influencia entre las variables queda determinada por interacciones locales y dicha influencia es homogénea, es decir, no existen variables predominantes ni reglas dependientes de la dirección en el espacio. Tanto el espacio como el tiempo están discretizados y usualmente las variables son simplificadas de modo que cada sitio incluye sólo unos pocos estados. No pocos automatas celulares han sido diseñados para modelar propiedades clave tanto de sistemas físicos como biológicos.

Los modelos de autómatas celulares para el flujo vehicular [71], permiten un sinnúmero de aplicaciones. Desde su introducción es posible simular complejas redes de tráfico en forma realista usando modelos microscópicos y mucho más rápido que en tiempo real [72, 73], además de los muchos estudios teóricos y prácticos que han contribuido a un mejor entendimiento empírico de los fenómenos de tráfico [74-80]. También desde un punto de vista teórico, este tipo de modelos, que pertenecen a la

clase de *driven lattice gases* (DLG) [81], han resultado ser de particular interés. Estas DLG nos permiten estudiar fenómenos genéricos fuera del equilibrio, por ejemplo, transiciones de fase inducidas por la frontera [82]. Los modelos basados en AC han mostrado ser una descripción realista del tráfico vehicular, en particular en situaciones de alta densidad [72, 73]

Es notable que el primer modelo AC de Nagel y Schreckenberg [71], produzca relaciones flujo-densidad muy realistas (diagrama fundamental). Además, se ha observado la formación espontánea de embotellamientos. Por lo tanto el modelo debido a Nagel y Schreckenberg es minimal en el sentido de que cualquier simplificación adicional conduce a un comportamiento irreal. En los últimos años se han propuesto modelos AC mas sofisticados capaces de reproducir fenómenos aún menos obvios, como estados metaestables del tráfico en carreteras [83]. Desafortunadamente, la comparación de los resultados por simulación con los datos experimentales a un nivel microscópico no es tan satisfactorio. Hasta ahora, los modelos existentes fallan al momento de reproducir la estructura microscópica observada en mediciones de tráfico real [84]. En particular para el tráfico en carreteras, una representación correcta de los detalles microscópicos es necesaria ya que estos determinan en gran medida la estabilidad de un estado de tráfico dado y por lo tanto el comportamiento colectivo del sistema.

### 1.6.3. Simulaciones y sistemas complejos

El tráfico vehicular puede ser visualizado como un sistema complejo [85, 86]. El desarrollo de modelos macroscópicos es una de las aproximaciones primarias para modelar sistemas complejos. Estos modelos siguen una aproximación desde lo macro a lo micro, focalizandose en el comportamiento de los observables del sistema. En

ellos se define y emula el comportamiento de dichos observables en términos de parámetros abstractos y sus distribuciones de probabilidad. En el caso del tráfico, los modelos macroscópicos son derivados usualmente a partir de la dinámica de fluidos y envuelven parámetros agregados como volumen y velocidades promedio en las arterias de un sistema de tráfico.

Las simulaciones basadas en modelos macroscópicos tienen la ventaja de tener tiempos de ejecución cortos. Pero solo son útiles cuando basta con una predicción más bien gruesa. La mayoría de los aspectos asociados a los sistemas complejos son altamente no lineales. Tales sistemas son frecuentemente muy sensibles a las condiciones iniciales, lo que implica que pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales pueden tener un impacto enorme sobre el comportamiento global del sistema. Sin embargo, en el proceso de elaboración de tales modelos macroscópicos, esta sensibilidad se pierde y solo se puede reproducir el comportamiento del tráfico en condiciones ideales.

Una aproximación alternativa que potencialmente producirá resultados de mejor calidad, es un modelamiento microscópico. Esta es una aproximación que comienza por describir la dinámica asociada a los componentes individuales para luego hacerlos interactuar en números crecientes. Entonces, el sistema complejo es visualizado como un gran conjunto de pequeños componentes interactuando. El punto principal es identificar los componentes del sistema, descubriendo sus comportamientos locales y las interacciones entre los mismos. Como se ha descrito en muchos artículos y en una variedad de campos [87, 88], un comportamiento realista y muy complejo se puede obtener a partir de comportamientos locales simples. En el caso del tráfico, los esfuerzos de la investigación se han centrado en el comportamiento del conductor, en la forma en que un vehículo sigue a otro y en el modelamiento del cambio de pista.

En 1994, en el Turner-Fairbank Highway Research Center en McLean, Virginia, se inició un estudio para evaluar la aproximación de comportamiento emergente a la simulación del tráfico. Se logró modelar una situación simple para la convergencia de pistas, mostrando que este concepto aplicado al tráfico puede describir lo observado de una manera satisfactoria. La lógica planteada fue simple. Se asoció a los vehículos en la pista las variaciones características en aceleración y frenado. Un estudio posterior en la Universidad de Arizona tuvo que ver con el desarrollo de un algoritmo y de un código prototipo para modelar tanto vehículos como peatones usando el concepto de comportamiento emergente enfatizando la interacción debido a la geometría en la intersección vehículo-peatón. El modelo sería usado para determinar la capacidad de los cruces peatonales, asistir en la planeación de los tiempos de las señales, determinar el ancho de los cruces peatonales óptimos así como sus largos respectivos y ayudar en el diseño de la geometría de las intersecciones. Este prototipo de simulación fue diseñado para evaluar la eficiencia operacional y las características de seguridad del sistema.

Las dificultades en las simulaciones microscópicas radican en el desempeño computacional y en el costo del desarrollo del software. Las simulaciones microscópicas siguen la dinámica a un alto grado de detalle, emulando el comportamiento de cada entidad individual del sistema y por lo tanto, son computacionalmente muy intensivos. Ejecutar una simulación microscópica de la red de tráfico de una area metropolitana implica la emulación del comportamiento de una cantidad considerable de vehículos (millones en algunos casos), semáforos y otros elementos, lo que puede requerir de mucho tiempo. Sin embargo, ésta es una dificultad que resulta menos importante en la medida que se hacen disponibles computadores de creciente capacidad.

## Capítulo 2

# Complejidad y caos<sup>1</sup>

Actualmente la noción de lo que se entiende por un sistema complejo no parece haber sido delineada completamente [94]. Sin embargo, en la medida que aumenta el número de estudios en esta área se ha ido ganado un mejor entendimiento de las propiedades que lo definen [95,96]. A pesar de ello sigue siendo un concepto algo difuso que difiere de un investigador a otro. Tal vez entre los sistemas que mejor representan el espíritu tras el concepto de sistema complejo, están los sistemas biológicos y sociales, y en especial los que involucran a personas: nuestros cuerpos, nuestra sociedad, etc [97-99]. Debido a la falta de una definición precisa, tendremos que conformarnos con enumerar las propiedades de lo que mas comúnmente se entiende por sistema complejo. Estas propiedades se hayan tanto en sistemas biológicos como no-biológicos

*1 Los sistemas complejos contienen muchos constituyentes interactuando no-linealmente*

La no linealidad es una condición necesaria para obtener un comportamiento caótico, y muchos de los sistemas no lineales cuyo espacio de fase tiene dimensión dos o mas

---

<sup>1</sup>Esta sección está basada en gran medida en las referencias [89-93]

son caóticos en al menos alguna parte de su espacio de fase. Sin embargo, esto no significa que todos los sistemas que muestran caos sean complejos. Por un lado la caoticidad se puede dar con muy pocos constituyentes; la complejidad no. De modo que aunque estos dos conceptos están relacionados, son distintos.

### *2 Los constituyentes de un sistema complejo son interdependientes*

Esta propiedad se puede explicar claramente con un ejemplo: primero supongamos que tenemos un sistema no complejo formado por muchos constituyentes, pensemos en un gas ideal dentro de un contenedor. Quitemos ahora un 10% del gas, y todo lo que ocurre es que cambia la presión, o el volumen o la temperatura, o todos ellos. Pero en general, el gas se ve y se comporta como en su estado inicial. Hagamos ahora el mismo experimento con un sistema complejo. Tomemos un cuerpo humano quitémosle un 10% (sin especificar cual), y resulta claro que la diferencia es muchísimo mas notoria.

### *3 Los sistemas complejos poseen estructuras que se extienden en varias escalas*

Consideremos nuevamente el cuerpo humano:

- Escala 1: cabeza, tronco, extremidades, ...
- Escala 2: huesos, músculos, estomago, nervios, ...
- Escala 3: células, núcleos celulares, mitocondrias, citoplasma, ...
- Escala 4: proteínas, cromosomas, ADN, ...

En cada escala encontramos estructura, estas interactúan se auto-organiza, etc. Esta es una propiedad esencial y radicalmente nueva de todo sistema complejo.

*4 Un sistema complejo es capaz de exhibir un comportamiento emergente.*

El comportamiento emergente se observa cuando cambiamos el foco de nuestra atención desde una escala a otra mas gruesa por sobre la primera. Por ejemplo, cierto comportamiento observado en alguna escala se dice emergente cuando no puede ser entendido al estudiar separadamente y uno por uno, cada constituyente de dicha escala, cada uno de los cuales puede ser en si mismo un sistema complejo conteniendo escalas mas finas. De este modo el comportamiento emergente es un nuevo fenómeno particular de la escala considerada, y resulta de una interacción global entre los constituyentes asociados a dicha escala. Un ejemplo trivial: el cuerpo humano es capaz de caminar. Esta es una propiedad emergente asociada a una escala superior, de hecho, la escala mas gruesa en que puede ser considerado el cuerpo humano como entidad. Se trata de un comportamiento emergente porque no resulta obvio del estudio de los componentes asociados a una escala inferior, por ejemplo, un riñon, que la entidad a la que este órgano pertenece, sea capaz de desplazarse caminando. Si estudiáramos por separado la cabeza, el tronco o una pierna, jamás entenderíamos este comportamiento específico, ya que se trata de un fenómeno coordinado y cooperativo entre los componentes principales asociados a esta escala.

La combinación entre estructura y comportamiento emergente conduce a auto-organización, que es lo que ocurre cuando un comportamiento emergente tiene el efecto de cambiar la estructura de cierta escala o crear una estructura nueva. La

auto-organización corresponde a un comportamiento colectivo no caótico que surge (emerge) en forma espontánea de la interacción de los componentes asociados a una misma escala ya sea que estos hayan estado presentes o se formen en el proceso.

Volvamos ahora a la relación existente entre complejidad y caos. Como sabemos estos dos conceptos son distintos. Cuando miramos un fractal producido por un mapa no lineal, puede parecerse muy "complejo", pero aquí el término no significa lo mismo que cuando hablamos de un "sistema complejo". El fractal es caótico, pero no es complejo. Como sabemos complejidad y caos tienen en común el ser fenómenos no lineales. Ya que prácticamente todo sistema no lineal puede ser caótico parte del tiempo, esto significa que la complejidad implica la presencia de caos. Pero lo inverso no es cierto.

Quizás la diferencia más significativa entre ambos sea la siguiente: Un sistema complejo siempre tiene varias escalas. Mientras el caos puede observarse en la escala  $n$ -ésima, la escala más gruesa por sobre esta (la escala  $n - 1$ -ésima) puede resultar auto-organizada, lo que de algún modo es opuesto al caos. De aquí resulta la siguiente propiedad de los sistemas complejos:

5 *La complejidad envuelve la coexistencia de comportamientos caóticos y no caóticos*

Se ha sugerido que la complejidad ocurre "en el borde del caos", pero nadie ha sido capaz de demostrarlo claramente. Posiblemente este concepto signifique algo como lo siguiente: imaginemos que las ecuaciones de movimiento contienen algún

parámetro de "control" que puede ser variado, dependiendo del entorno (por ejemplo: temperatura, concentración o intensidad de alguna variable externa como la luz solar). Sabemos además que no todos los sistemas no lineales son completamente caóticos: manifiestan caos solo para ciertos intervalos de los parámetros de control. De aquí resulta entonces el borde del caos, es decir, el valor preciso del parámetro de control para el cual la naturaleza de la dinámica cambia. Es parecido a un punto crítico en una transición de fase. Es el punto para el cual las correlaciones de largo alcance llegan a ser importantes. Bajo estas condiciones es cuando es más probable obtener auto organización.

#### *6 La complejidad envuelve una interacción entre cooperación y competencia*

Una vez más esta es una interacción entre escalas distintas. La situación usual es que una competición en la escala  $n$ -ésima sea promovida por una cooperación en una escala más fina (la escala  $(n + 1)$ ). Las colonias de insectos como las hormigas, abejas, o termitas, representan una fuerte evidencia de esta propiedad.

## **2.1. Complejidad de Kolmogorov**

La teoría de la complejidad de Kolmogorov está basada en el descubrimiento de la máquina universal de Turing [100]. Después de proponer a la máquina de Turing como una realización del concepto de máquina calculadora, Turing encontró que existe una máquina de Turing capaz de simular cualquiera otra de dichas máquinas. En este contexto, Kolmogorov define la medida de la complejidad de un sistema como la extensión del programa más corto para una máquina universal de Turing capaz de reproducir los datos observados. Se ha demostrado que, a pesar de que existen

muchas máquinas universales de Turing (y por lo tanto un programa "mas corto" para cada una de ellas), las correspondientes complejidades difieren en a lo más una constante aditiva.

La principal fortaleza de la teoría de la complejidad de Kolmogorov es su universalidad y pretende construir métodos universales de aprendizaje basados en métodos de codificación universal. Esta aproximación fue inicialmente propuesta por Solomonoff [101, 102] (su motivación fue la inferencia inductiva y la inteligencia artificial) y expuesta en términos matemáticos rigurosos por Kolmogorov. Típicamente estos métodos universales serán computables sólo en un sentido débil. Por lo tanto en las aplicaciones la teoría sólo puede ser realizada en forma aproximada y lo mismo es cierto de sus conceptos asociados (deficiencia de aleatoriedad, información algorítmica, etc.).

## 2.2. Caos

De acuerdo a una definición, "la teoría del caos es el estudio cualitativo del comportamiento aperiódico inestable en sistemas dinámicos no-lineales determinísticos". A partir de esta definición podemos derivar varias conclusiones sobre las características del caos. Primero, que sea un fenómeno observado en sistemas dinámicos implica un cambio en el tiempo. Segundo, que el comportamiento del sistema sea aperiódico e inestables significa que no se repite en el tiempo. Tercero, aunque el comportamiento caótico es complicado, puede tener una causa simple (una perturbación pequeña y única puede lanzar al sistema desde un comportamiento periódico a uno caótico). Cuarto, ya que el sistema es no lineal, es sensible a las condiciones iniciales. Quinto, ya que el sistema es determinístico, el comportamiento caótico no es aleatorio aun cuando su aperiodicidad e impredecibilidad a largo plazo puedan hacerlo parecer

como tal. Por otro lado, debido a su inestabilidad, aperiodicidad, y sensibilidad a las condiciones iniciales, el comportamiento de los sistemas caóticos no es predecible a largo plazo a pesar de ser determinista. Un último aspecto del caos, que no se desprende de la anterior definición, tiene que ver con los procesos iterativos que implican realimentación, en que una resultante del sistema es ingresada como condición inicial para calcular el siguiente estado.

En general los sistemas pueden mostrar comportamientos caóticos y no caóticos dependiendo de los parámetros de control usados. Un ejemplo clásico es la ecuación logística, propuesta en 1845 para modelar la población de una especie de insectos en el tiempo, y es la siguiente

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n). \quad (2.1)$$

En esta ecuación,  $x$  representa la población,  $r$  (parámetro de control) es la tasa de crecimiento de la población,  $n$  es un período de tiempo inicial, y  $n + 1$  el período de tiempo subsiguiente. El factor  $(1 - x)$  establece un límite al crecimiento de la población, que puede ser relacionado a escases de alimento, enfermedades o control de la natalidad. Cuando el parámetro de control  $r < 3$ , la ecuación (2.1) converge a un punto de equilibrio, independientemente de la población inicial. Para  $3 < r < 3.57$ , el sistema (es decir, la población) converge a órbitas estables de período  $2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Eventualmente, cuando la variable de control cae entre 3.57 y 4.0 el sistema deviene en caos, donde la población varía en una forma complicada. Para valores más altos de  $r$ , el sistema diverge hacia  $-\infty$ , aunque existe un transiente caótico.

Pero el caos no solo aplica a la evolución temporal de un sistema sino también a su desenvolvimiento espacial. Así por ejemplo, una trayectoria caótica puede ser un fractal (atractores extraños). Hay muchas posibles definiciones para la palabra frac-

tal. Una muy general pero poco rigurosa es ésta: un fractal es una figura geométrica que no se hace mas simple al analizarla en escalas cada vez mas pequeñas. Lo que implica que esta formado por variedades geométricas no diferenciables.

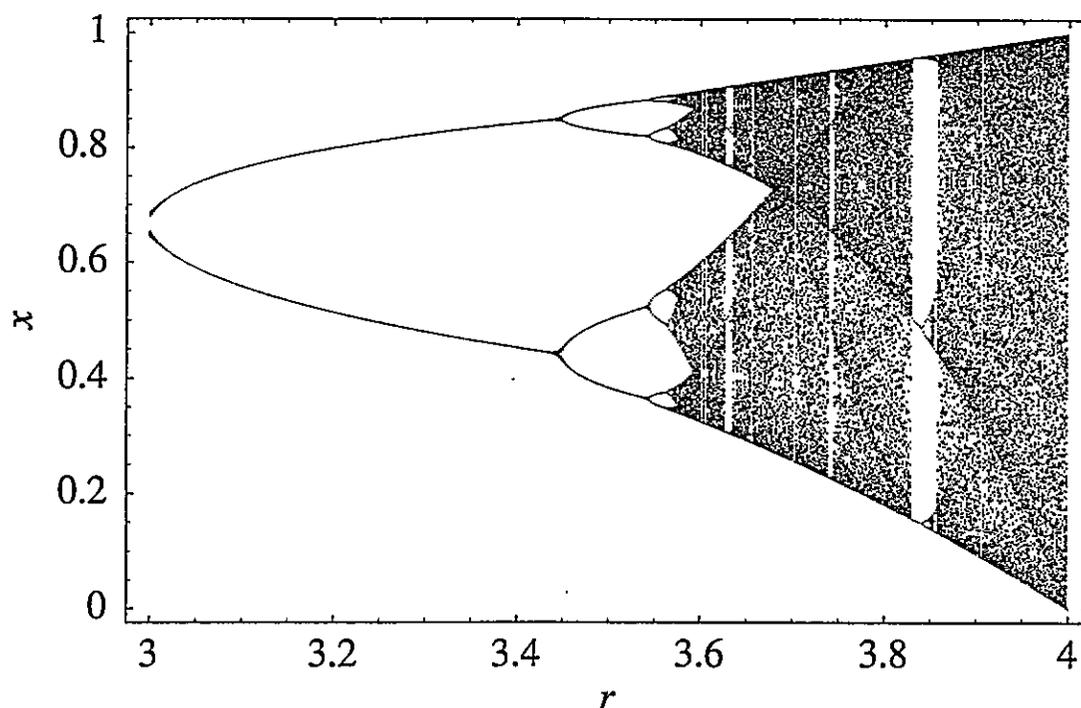


Figura 2.1: Diagrama de bifurcación del mapa logístico.

### 2.3. Mapas

Un mapa es una regla que asocia un único objeto a cada punto de un conjunto dado. Así, un mapa  $f : A \rightarrow B$  desde  $A$  a  $B$  es una función  $f$  tal que para cada  $a \in A$ , hay un único objeto  $f(a) \in B$ . Ya que esta definición coincide con la del termino *función*, reservaremos el uso de la palabra *mapa* a las aplicaciones sobre conjuntos discretos.

## 2.4. Bifurcaciones

En sistemas dinámicos, una bifurcación corresponde a una duplicación de período, una triplicación, una cuadruplicación, etc., que acompaña la aparición del caos. Las bifurcaciones representan la aparición súbita de soluciones cualitativamente diferentes para un sistema no lineal en la medida que alguno de sus parámetros es variado. En la Fig.2.2 se pueden ver algunas bifurcaciones (que ocurren en la posición de las líneas verticales) del mapa logístico que aparecen en la media que aumenta el parámetro  $r$ . Las bifurcaciones pueden ser genéricas y no genéricas, las primeras definen una propiedad geométrica local que no puede ser alterada por perturbaciones pequeñas del tipo  $M(\vec{x}, \vec{r}) + \epsilon g(\vec{x}, \vec{r})$ . Para mapas en una dimensión existen tres bifurcaciones genéricas: duplicación de período, tangente y duplicación inversa de período. Las

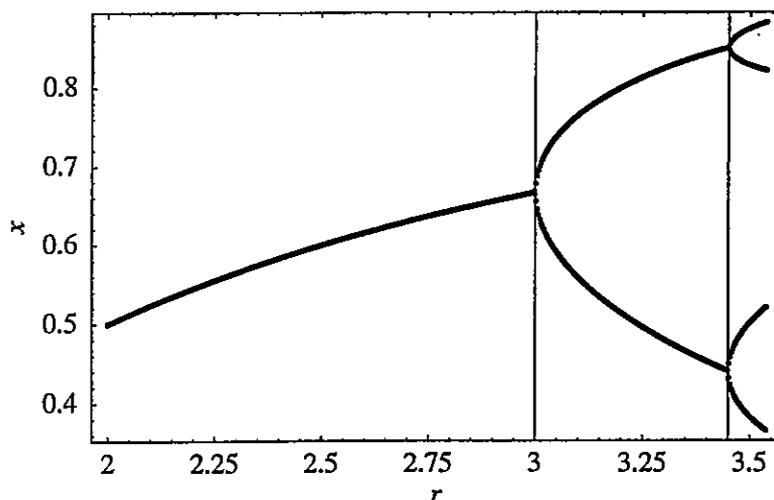


Figura 2.2: Las líneas verticales marcan bifurcaciones en el mapa logístico para  $r \approx 3.0$  y  $3.45$ .

bifurcación de duplicación de período se produce por la aparición de un atractor de período 2. La duplicación de período continúa en la medida que se van cruzando varios umbrales, conduciendo a períodos 4, 8, etc. En cada caso, al atravesar alguno

de estos umbrales, aparecen nuevos puntos fijos atractivos, mientras que los antiguos puntos fijos se hacen inestables. Si  $M(x, r)$  representa el mapa logístico, la Fig. 2.3 muestra el mapa compuesto  $M^2(x, r)$  para  $r = 3.3$ , los puntos negros indican los puntos fijos estables y el punto blanco el anterior punto fijo estable que se ha vuelto inestable, esta es la bifurcación de duplicación de período. En la bifurcación de duplicación inversa del período, se da el mismo proceso pero en sentido contrario.

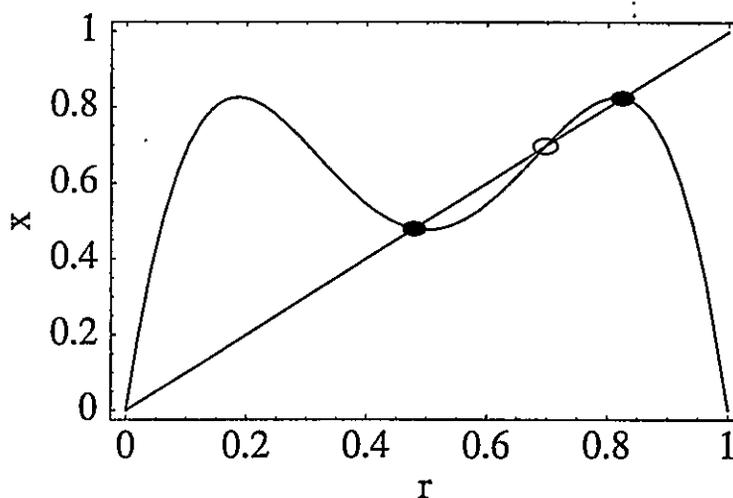


Figura 2.3: Mapa logístico compuesto dos veces para  $r = 3.3$ . Los puntos negros indican puntos fijos estables, mientras que el punto blanco indica punto fijo inestable.

En una bifurcación tangente, un par de órbitas periódicas aparecen de la nada, una de ellas es inestable y la otra estable (por eso también se le conoce como punto silla). El mecanismo básico de esta bifurcación se ilustra en la Fig. 2.4, donde se ve que la tangencia del mapa a la identidad produce el efecto ya descrito y el nombre del proceso. Esta bifurcación es fundamental en el estudio de sistemas no lineales ya que representa uno de los procesos más básicos en la aparición de órbitas periódicas.

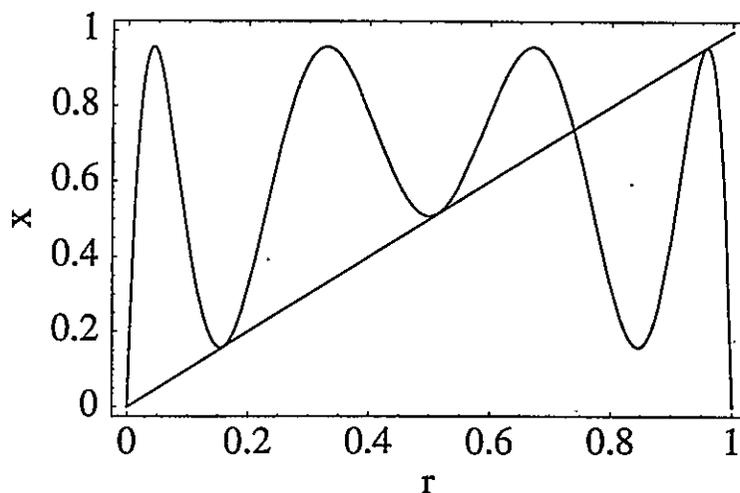


Figura 2.4: Mapa logístico compuesto tres veces para  $r = 3.828$ . Los puntos tangentes son puntos fijos estables.

### 2.4.1. Bifurcaciones globales

Existen otras bifurcaciones menos obvias a las que ahora volveremos nuestra atención. Primero, tenemos la *bifurcación tangente cíclica* en que la bifurcación tangente ocurre en la variable radial y aparece un radio estable. Eso es lo que ocurre para el siguiente ejemplo

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \mu r_n + r_n^3 - r^5, \\ \theta_{n+1} &= \omega + br_n^2, \end{aligned}$$

donde el término  $r^5$  hace que el origen sea estable.

Luego tenemos la *bifurcación periódica cíclica infinita* en la que un ciclo pierde estabilidad y aparece un punto fijo a un cierto ángulo. Por ejemplo

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \mu r_n (1 - r_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \mu - \sin(\theta), \end{aligned}$$

en donde aparece un ángulo estable cuando  $\mu = 1$ .

También existe la posibilidad de que un ciclo límite se mueva cada vez mas cerca de un punto silla y se convierta en una órbita homoclínica (en el punto de bifurca-

ción). Al continuar avanzando, el ciclo desaparece. Esto se conoce como *bifurcación homoclínica*. La clave está en la variedad inestable asociada al punto silla, que es capaz de hacer inestable el ciclo. Esto es similar a una *crisis de frontera*, como se comenta más adelante.

## 2.4.2. Transiciones discontinuas

Como hemos visto, una bifurcación de duplicación de período es en esencia una bifurcación continua, mientras que una bifurcación tangente es una transición discontinua. De la misma manera, el mapa logístico salta abruptamente hacia el final de una ventana de orden, siendo esto otra transición discontinua del atractor.

### Transición intermitente al caos

Veamos la Fig. 2.6 en donde tenemos una ampliación de la ventana de orden de período 3. Observe que para el mapa logístico, cuando aparece la ventana de orden, la transición es claramente discontinua y el atractor cambia su tamaño abruptamente (no en forma uniformemente continua) en  $r_{3c}$ . Como podemos ver de la figura, antes de la bifurcación tangente hay un comportamiento intermitente, en el cual la trayectoria pasa un tiempo considerable cerca del punto fijo que aparecerá (también podríamos encontrarlo calculando la medida natural invariante). Este comportamiento se conoce como transición intermitente al atractor caótico o *inversa* como en el caso del mapa logístico (ventana de orden de período 3). Podemos definir  $P_T$  como el tiempo promedio entre los acercamientos al punto fijo, es claro que  $P_T$  diverge en la bifurcación. Ahora vamos a estimar la forma en que escala  $P_T$ .

En la Fig. 2.5 vemos lo que ocurre cerca de  $r_{3c}$ , la trayectoria pasa un tiempo considerable moviéndose por este "túnel". Ahora podemos hacer una expansión en torno a la región de interés y tomar un mapa de forma equivalente cerca del punto

fijo  $y_n = x - x_p$  y  $\epsilon = r - r_{3c}$ ,

$$y_{n+1} = \epsilon + y_n + y_n^2,$$

Ya que estamos muy cerca de la transición podemos suponer que en el túnel tenemos

$$\frac{dx}{dn} \sim x_{n+1} - x_n = x^2 + \epsilon \quad T \sim \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \epsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \epsilon} \sim \epsilon^{-1/2},$$

por lo tanto  $P_T \sim (r - r_T)^{-1/2}$ .

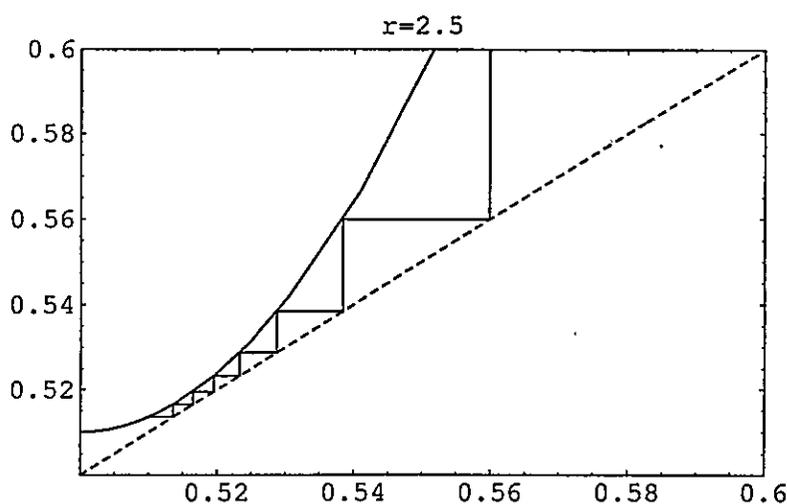


Figura 2.5: El mapa logístico iterado 3 veces, cerca de la ventana de orden de período 3 y cerca de la formación de la órbita de período 3.

Pomeau y Manneville [103] distinguen, además de la bifurcación tangente, tres tipos genéricos de transiciones intermitentes

- Bifurcación tangente al caos, con  $P_T \sim (r - r_T)^{-1/2}$ , que se comentó arriba
- Bifurcación de Hopf al caos, con  $P_T \sim (r - r_T)^{-1}$ , en donde aparece una órbita cuasiperiódica (similar a la bifurcación tangente).
- Duplicación de período inverso, con  $P_T \sim (r - r_T)^{-1}$  en donde una órbita periódica pero inestable en el atractor, se hace estable por una bifurcación de duplicación de período inversa.

todos los escalamientos temporales se obtienen de manera análoga.

### Crisis interior y exterior

El cambio abrupto de la dinámica que se produce cuando termina una ventana de orden, es una transición discontinua, que se conoce como *crisis* del atractor.

Una *crisis interior* es aquella en que el atractor colisiona con una órbita inestable dentro de la cuenca de atracción asociada a ese atractor. Por lo tanto, cada vez será mas frecuente que la trayectoria pase tiempo lejos del atractor inicial (antes de la transición) acercándose a la variedad inestable. Pero debido a que esta trayectoria esta en la cuenca de atracción, eventualmente regresará al lugar del atractor original. Pero ahora, después de la crisis, el atractor a crecido en tamaño y muestra una *intermitencia inducida por la crisis* como se ve en la Fig. 2.6 o Fig. 2.1.

Es posible derivar un escalamiento para el tiempo  $\tau$ , entre los acercamientos repentinos de la trayectoria al punto fijo que se formará. Esta tiene una distribución que parece aleatoria

$$P(\tau) \sim e^{\tau/\langle\tau\rangle},$$

donde el tiempo promedio entre acercamientos repentinos puede ser calculada en una manera similar a como se hizo previamente [104]. Se ha determinado que

$$\langle T \rangle \sim (r - r_c)^{-\gamma}, \text{ donde } \gamma = \frac{1}{2} + \frac{\ln|\alpha_1|}{\ln|\alpha_2|},$$

además  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los autovalores asociados a la expansión y contracción del mapa en el entorno de interés. En el caso de mapas unidimensionales  $\alpha_2 = 0$  y solo tenemos expansión. Entonces  $\gamma = 1/2$ .

Existen otros tipos de crisis. En particular, existen las *crisis de frontera* para las cuales el atractor colisiona con una variedad inestable sobre la frontera de su

cuenca de atracción. Esta transición destruye el atractor dejando solo un *transiente caótico*. El número de puntos asociados a este decae como  $P \sim \exp(-\tau / \langle \tau \rangle)$ . Un ejemplo de esto lo tenemos en el mapa logístico cuando  $r > 4$  en cuyo caso el único atractor es  $-\infty$ . Ahora con  $\epsilon = (r - 4)$  podemos estimar que el conjunto de puntos para los que  $M > 1$ , es proporcional a  $\epsilon$  y por ello esta región tiene probabilidad  $\epsilon^{1/2}$ , entonces  $\langle \tau \rangle \sim (r - 4)^{-1/2}$ . Recordemos que  $1 / \langle \tau \rangle$  es la probabilidad para cada iteración de caer en un área proporcional a  $\epsilon$ . De hecho, esta densidad de probabilidad proporcional a  $\epsilon^{1/2}$  puede ser hallada numéricamente, o puede ser derivada del hecho de que para  $r = 4$  la densidad invariante es suave y de que la región que se mapea a  $|x - 1/2| \epsilon$  es del orden de  $\epsilon^{1/2}$  lo que conduce al resultado de arriba.

En mas dimensiones podemos distinguir entre *crisis homoclínicas tangenciales* y *crisis heteroclínicas tangenciales* dependiendo de si la colisión de la variedad inestable asociada a la órbita periódica  $A$  en la frontera es consigo misma o con la variedad periódica inestable asociada a la órbita periódica  $B$  en el atractor. De hecho, el atractor sería la clausura de la variedad inestable asociada a  $A$  o  $B$  en el caso que corresponda. También existen relaciones de escalamiento para estos sistemas [104].

Hasta ahora no se mencionado otro asunto relevante, la crisis de frontera en que una variedad inestable o una órbita periódica colisiona con un *conjunto caótico no atractivo*.

Además, hay otras crisis de interés. Por ejemplo, hay crisis de confluencia de atractores en las cuales dos atractores colisionan generando un único atractor que muestra intermitencia.

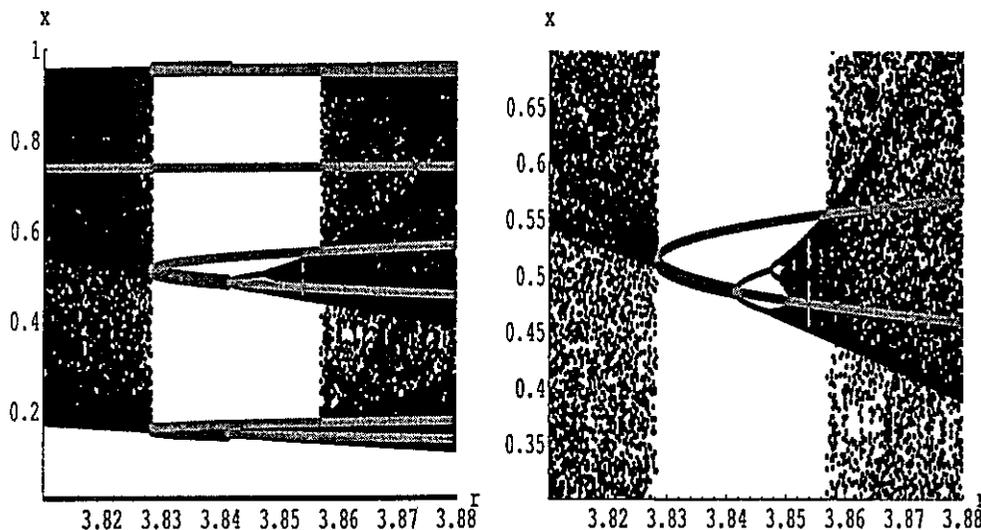


Figura 2.6: (a) La ventana de orden de período 3, con las órbitas que aparecieron después de la bifurcación tangente. (b) una ampliación.

## 2.5. El atractor

Un atractor es un subconjunto del espacio hacia el cual todas las trayectorias vecinas convergen. En general para el caso de los mapas estos subconjuntos son: (1) puntos fijos y (2) atractores extraños (en el caso de las ecuaciones diferenciales existen también los llamados *ciclos límite*).

El atractor es un subconjunto del espacio cerrado minimal invariante, hacia el cual se mapea un subconjunto abierto del espacio, formado por las condiciones iniciales. Que el atractor tenga la propiedad de ser minimal y cerrado significa que no existe un subconjunto mas pequeño con sus mismas características y que incluye su frontera (sea  $A$  el atractor, si  $x_0 \in A$   $x_n \in A \quad \forall n > 0$ ), es invariante porque está formado por puntos fijos.

En general, para determinar el atractor, se comienza con un conjunto de condiciones iniciales y se observa su convergencia a los puntos fijos después de un determinado número de aplicaciones del mapa.

Si un determinado conjunto de puntos no converge a alguno de los puntos fijos conocidos, podríamos suponer que estamos en presencia de un *atractor extraño*. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto, porque también podría tratarse de un conjunto *no-atractivo* y solo debemos aplicar un mayor número de veces el mapa para que finalmente converja a algún atractor. De tratarse efectivamente de un atractor extraño, el número de puntos asociados a él no se anulará al aumentar las aplicaciones del mapa. Diferentes atractores tienen diferentes cuencas de atracción (el subconjunto del espacio formado por las condiciones iniciales).

Los atractores extraños, son atractores para los cuales hay sensibilidad a las condiciones iniciales. A veces, se les denomina *atractores fractales* o *atractores caóticos*.

En la Fig. 2.7 el atractor se obtiene a partir de la condición inicial  $x_0 = 0.01$ , pero en principio podrían haber más atractores que el descrito en este diagrama de bifurcación, ya que sólo usamos una condición inicial, otras condiciones iniciales podrían converger a otros atractores. En este caso existen dos atractores conocidos, uno en  $-\infty$  y el otro en  $[0, 1]$ , ambos para  $r > 0$ .

Numéricamente, en el caso de múltiples atractores, será necesario tomar un ensamble de condiciones iniciales y construir un diagrama de bifurcación para cada uno. Si los atractores se hallan razonablemente bien separados, entonces los diagramas de bifurcación pueden ser superpuestos. Sin embargo, si los atractores están entrelazados de alguna manera, será difícil determinar que porción de cada diagrama de bifurcación corresponde a cada atractor.

Para el caso mostrado en la Fig. 2.7, casi todas (en el sentido de Lebesgue) las condiciones iniciales convergen al atractor mostrado. El concepto de Lebesgue es importante y necesario, ya que es obvio que si comenzamos con una condición inicial en una orbital periódica inestable, la trayectoria no evolucionará hacia el atractor.

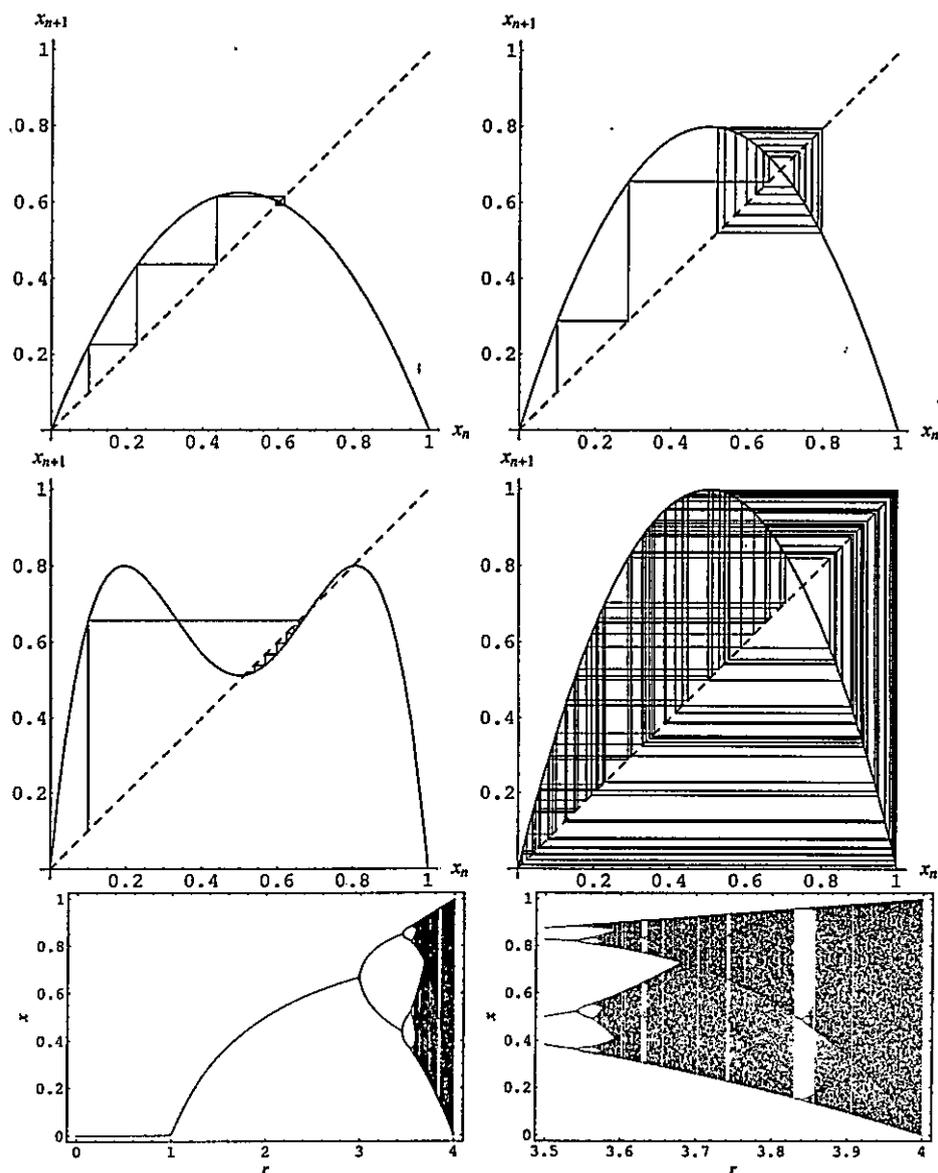


Figura 2.7: (a) Mapa logístico para  $r = 2.5$ , la línea en zig-zag representa la trayectoria para la condición inicial  $x_0 = 0.1$ . (b) Lo mismo pero para  $r = 3.2$ , que corresponde a una trayectoria de período 2. (c) La trayectoria del mapa compuesto dos veces para  $r = 3.2$ . (d) Mapa logístico para  $r = 3.99$ , caso caótico. (e) Diagrama de bifurcación. (f) Una ampliación del mismo diagrama.

Pero este conjunto es numerable y por tanto tiene medida de Lebesgue nula, y no afecta las afirmaciones anteriores.

## 2.6. La cuenca de atracción

La clausura (véase el comentario sobre la medida de Lebesgue más abajo) del conjunto de las condiciones iniciales que converge a un atractor dado se define como su *cuenca de atracción*. En el caso del mapa logístico, tenemos un atractor trivial en  $-\infty$  cuya cuenca de atracción es  $[\infty, 0] \cup [1, +\infty]$ . El otro atractor está en  $[0, 1]$  con cuenca de atracción  $[0, 1]$ .

Numéricamente comenzamos con un ensamble de condiciones iniciales y seguimos su evolución. En principio algunas de las condiciones iniciales convergerán a un conjunto dado de puntos fijos (esto corresponde a las trayectorias que pasan sobre si misma después de algún período). Si después de cierto número de iteraciones, la trayectoria no converge a un punto fijo, podemos tomarlo primeramente como parte de un atractor extraño. Recordemos que el conjunto de todas las condiciones iniciales que no converge a un punto fijo llegan a conformar un atractor extraño. Por una parte, puede haber mas de uno y por otra, se debe tener cuidado de que no se trate de un conjunto caótico no atractivo observando que el número de puntos asociados a él, no tienda a anularse conforme se aplican más iteraciones.

Es posible asignar un "peso" o densidad (en el sentido de Lebesgue), a los puntos en el espacio de fase. Supongamos que asignamos cierta densidad inicial  $\rho_0(x)$  a cada punto en el espacio de fase, de modo que

$$\int \rho_n(x) dx = 1,$$

y entonces evolucionamos la densidad por medio de

$$\rho_{n+1}(x) = \int \rho_N(y) \delta(x - M[y]) dy = \sum_i \rho_n(y^{(i)}) |M'(y^{(i)})|, \quad (2.2)$$

donde  $M(y^{(i)}) = x$ . Una densidad invariante es una que satisface  $\rho_{n+1}(x) =$

$\rho_n(x) = \rho(x)$ . En la practica,  $\rho(x)$  es usualmente una función muy discontinua y muy difícil de definir. Por ello lo usual es definir la medida  $\mu$ . La medida de un conjunto  $C$  se define por  $\mu(C) = \int_C \rho(x) dx$  y el promedio de una función respecto de esta medida por

$$\int f(x) \rho(x) dx = \int f(x) d\mu(x).$$

La medida  $\mu$  es mas suave que la densidad  $\rho$  y por lo tanto, mas manejable. Es posible estimar la relevancia de cada atractor en el espacio de fase por medio de la medida de su cuenca de atracción (comenzando con  $\rho_0(x) = 1$  en el espacio de fase).

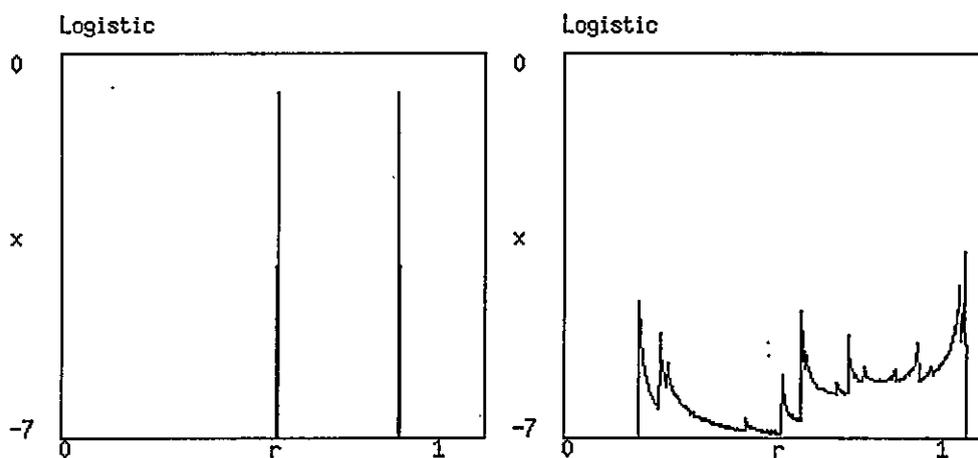


Figura 2.8: La densidad natural  $\rho(x, x_0)$  para  $r=3.5$  y  $r=3.8$ .

Nótese que hemos estado considerando el asunto desde el punto de vista del espacio, ahora lo veremos desde el punto de vista del tiempo. Comencemos con una condición inicial en  $x_0 = 0.1$  en la cuenca de atracción de algún atractor y calculemos la fracción de tiempo que la trayectoria pasa en un intervalo  $I$ , que especificaremos por  $\mu(I, x_0)$ . En la Fig. 2.8 se muestra la densidad natural  $\rho(x, x_0)$  que es generada por la fracción del tiempo que la trayectoria pasa en torno a  $x$ . Si  $\mu(I, x_0)$  es la misma para casi todos los puntos  $x_0$  en la cuenca de atracción, entonces le asignamos la

medida natural  $\mu(I)$ . En el caso de mapas suaves (diferenciables) unidimensionales, lo usual es que exista una medida natural, pero para sistemas de dimensionalidad mayor, esto no se tiene claro. Esto implica que la medida es ergódica ya que satisface (solamente en la cuenca de atracción)

$$\langle f \rangle_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(M^n[x_0]) = \int_B f(x) \rho(x) dx = \langle f \rangle_x,$$

para cualquier función  $f(x)$  y casi cualquier punto  $x_0 \in B$ .

## 2.7. Exponente de Lyapunov

Es un concepto útil para determinar si un sistema es caótico, pues mide una de las características que definen al caos: sensibilidad con respecto a condiciones iniciales. Consideremos  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , veamos cual es el exponente de Lyapunov para  $M$ . Tomemos dos puntos que distan  $\epsilon_n$  (esta cantidad puede depender del tiempo), es decir  $x_n$  y  $x_n + \epsilon_n$ , todos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= M(x_n), \\ x_{n+1} + \epsilon_{n+1} &= M(x_n + \epsilon_n), \\ &\approx M(x_n) + DM(x_n)\epsilon_n, \end{aligned}$$

de donde  $\epsilon_{n+1} = DM(x_n)\epsilon_n$ , con esto podemos definir un exponente dependiente del tiempo para  $x_0$  y  $\epsilon_0$  dados

$$\lambda_n(x_0, \epsilon_0) \equiv \frac{1}{n} \ln \left( \frac{|\epsilon_n|}{|\epsilon_0|} \right), \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{n} \ln |DM^n(x_0)|, \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2n} \ln (H_n(x_0)); \quad (2.5)$$

donde la matriz  $H_n(x_0)$  es dada por

$$H_n(x_0) = [DM^n(x_0)]^\dagger DM^n(x_0) \quad (2.6)$$

$$= DM(x_0)^\dagger \dots DM(x_{n-1})^\dagger DM(x_{n-1}) \dots DM(x_0). \quad (2.7)$$

Ahora es útil recurrir al *teorema ergódico multiplicativo de Oseledec* [105], que establece la existencia de los autovalores de la matriz ortogonal  $H_n$ , de modo que para  $n \gg 1$ , la matriz resultante tiene autovalores  $e^{\lambda_i n}$  con autovectores asociados  $\xi_i^{(n)}$ . Por lo tanto, los autovalores y autovectores de  $H_n$ , determinan en forma única los exponentes de Lyapunov  $\lambda_i^{(n)}(x_0)$ . Si existe el límite para  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene el exponente buscado

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}(x_0), \quad (2.8)$$

si además existe una *medida natural invariante*, estos exponentes son independientes de las condiciones iniciales. En muchos casos  $DM$  es fácil de calcular (mapa logístico), si se trata de mapas discontinuos, generalmente una aproximación numérica da resultados satisfactorios.

## Capítulo 3

# Un modelo de tráfico vehicular

El intrincado comportamiento mostrado por los patrones de tráfico es un interesante campo de la física que ha estado atrayendo la atención casi desde la aparición de los automóviles, debido a sus propiedades estadísticas [106, 107] y dinámicas [108, 109]. Existen varias referencias sobre embotellamientos, flujos caóticos de tráfico, itinerarios de buses, flujos peatonales, etc. [110–116].

En particular, el desarrollo de un comportamiento no trivial en los flujos de tráfico determina, en cierta forma, la eficiencia de la infraestructura de transporte de una ciudad, región o país. En este contexto, los flujos de tráfico, con y sin toma de pasajeros, han sido estudiados extensamente en la literatura [117, 118], i.e., modelamiento por autómatas celulares, teorías de campo medio que analizan la evolución microscópica, modelos hidrodinámicos que aproximan el comportamiento colectivo, etc. [119, 120].

En este modelo, estudiaremos el comportamiento de los automóviles que pasan por una secuencia de semáforos. Aquellos que han quedado atrapados en un embotellamiento de tránsito debido a los semáforos, deberían entender la relevancia de estudiar la dinámica de los patrones de tráfico bajo esas condiciones, y que la posibilidad de controlar esos patrones puede ofrecer una solución a ese problema tan común.

En este capítulo, nos concentraremos en el comportamiento de un único automóvil que pasa por una secuencia de semáforos, y veremos que para ciertas condiciones surge un comportamiento impredecible. El entendimiento de esta situación puede ayudarnos, como componente esencial, a aproximarnos al problema más complejo de automóviles interactuando entre sí y con los semáforos de una ciudad.

Teniendo en cuenta lo que se comentó en los capítulos previos sobre las características de los sistemas complejos, es una hipótesis razonable el adscribir a los sistemas de tráfico a la clase de los sistemas complejos. Como se comentó, tales sistemas poseen características interesantes y no triviales tales como la aparición de caos, fenómenos emergentes y autoorganización. Además, sabemos que una característica básica en este contexto es la sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que implica la necesidad de conocer con tanto detalle como resulte razonable el comportamiento de los componentes más simples del sistema complejo de interés, ya que en esto puede estar la diferencia entre un embotellamiento y flujo óptimo. De ahí que decidamos comenzar estudiando el comportamiento de un *único* vehículo al pasar por una secuencia de semáforos de manera análoga, pero idealizada, a como ocurre en las calles de las ciudades. Veremos que la interacción entre dos de los agentes más básicos de un sistema de tráfico, como lo son un vehículo y una secuencia de semáforos, ya revela un comportamiento no trivial.

### 3.1. El modelo microscópico

El objetivo de esta aproximación es seguir los detalles de un vehículo moviéndose a través de una secuencia de semáforos en una dimensión. La separación entre el  $n$ -ésimo y el  $(n+1)$ -ésimo semáforo es  $L_n$ . La  $n$ -ésima luz es verde si  $\sin(\omega_n t + \phi_n) > 0$  y roja en caso contrario, donde  $\omega_n$  es la frecuencia del semáforo, y  $\phi_n$  es un des-

fase temporal. Es digno de mención que estos dos parámetros serán importantes si tratamos de controlar el flujo vehicular.

Un automóvil en esta secuencia de semáforos puede tener (a) una aceleración  $a_+$  hasta que su velocidad alcanza la velocidad de cruceo  $v_{\text{máx}}$ , (b) una velocidad constante  $v_{\text{máx}}$  con aceleración nula, o (c) una aceleración negativa  $-a_-$  hasta que se detiene, entonces

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} a_+ \theta(v_{\text{máx}} - v), & \text{acelera,} \\ -a_- \theta(v), & \text{frena,} \end{cases}$$

donde  $\theta(x)$  es la función de Heaviside. Este cuadro simple se hace menos trivial al introducir las decisiones inducidas por el semáforo.

En la medida que el móvil se aproxima al semáforo  $n$ -ésimo con velocidad  $v$ , el conductor debe tomar una decisión, frenar o continuar, a la distancia  $v^2/2a_-$  del semáforo (el último punto de frenado posible debido a la capacidad del vehículo) dependiendo del signo de  $\sin(\omega_n t + \phi_n)$ . Note que si  $(v_{\text{máx}}^2/2a_+) + (v_{\text{máx}}^2/2a_-) < L_n$ , entonces  $v = v_{\text{máx}}$  y el móvil alcanza la velocidad de cruceo antes de llegar al punto de decisión. También en general tiene sentido que  $(2\pi/\omega_n) > (v_{\text{máx}}/a_-), (v_{\text{máx}}/a_+)$  de modo que el semáforo no cambie de luz demasiado rápido, en caso contrario será imposible seguir la señalización debido a la capacidad de frenado limitada. Por supuesto, al frenar dos cosas pueden ocurrir, el móvil puede frenar completamente y esperar hasta que la luz cambie otra vez, o puede empezar a acelerar al cambiar la luz antes de detenerse completamente (un tercer evento, que puede darse aún con una elección razonable para la frecuencia del semáforo, debido al desfase, es que el móvil simplemente siga avanzando sin respetar la señalización, es decir, pasa con luz roja, porque se le pide algo imposible dentro sus características, no logra detenerse en la posición del semáforo). Aquí empezamos a observar la naturaleza discontinua

del modelo.

El automóvil entra en la secuencia de semáforos con velocidad  $v_0$ , en el tiempo  $t_0$ . El conjunto de reglas descritas arriba determina un mapa bidimensional  $M(t_n, v_n)$  que evoluciona el estado  $(t_n, v_n)$  en el  $n$ -ésimo semáforo al estado  $(t_{n+1}, v_{n+1})$  en el  $(n+1)$ -ésimo semáforo. La dinámica entre semáforos está descrita en el apéndice.

Es conveniente construir un mapa exacto de los cruces sucesivos en los semáforos, esto es, una reconstrucción de las ecuaciones mostradas en el apéndice para el evento específico de pasar por un semáforo, las expresiones adimensionales del lado derecho se definen un poco más abajo. Sea  $L$  la distancia entre semáforos consecutivos. Después de cruzar el semáforo  $n$ -ésimo, el móvil alcanza la velocidad máxima  $v_{\text{máx}}$  en

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{v_{\text{máx}}^2 - v_n^2}{2a_+} & \rightarrow & \quad y_c = \frac{1}{2A_+}(1 - u_n^2), \\ t_c &= t_n + \frac{v_{\text{máx}} - v_n}{a_+} & \rightarrow & \quad \tau_c = \tau_n + \frac{1}{A_+}(1 - u_n), \\ v_c &= v_{\text{máx}} & \rightarrow & \quad u_c = 1, \end{aligned}$$

y continúa moviéndose a velocidad constante hasta el punto de decisión

$$\begin{aligned} x_d &= L_n - \frac{v_{\text{máx}}^2}{2a_-} & \rightarrow & \quad y_d = 1 - \frac{1}{2A_-}, \\ t_d &= t_c + \frac{x_d - x_c}{v_{\text{máx}}} & \rightarrow & \quad \tau_d = \tau_c + (y_d - y_c), \\ v_d &= v_{\text{máx}} & \rightarrow & \quad u_d = 1. \end{aligned}$$

en este punto tenemos dos elecciones dependiendo del signo de  $\sin(\omega_n t_d + \phi_n)$ .

Si  $\sin(\omega_n t_d + \phi_n) = \sin(\Omega \tau_d + \phi_n) > 0$ , el móvil alcanza el  $(n+1)$ -ésimo semáforo en el estado

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= L_n & \rightarrow & \quad y_{n+1} = 1, \\ t_{n+1} &= t_d + \frac{L_n - x_d}{v_{\text{máx}}} & \rightarrow & \quad \tau_{n+1} = \tau_d + 1 - y_d, \\ v_{n+1} &= v_{\text{máx}} & \rightarrow & \quad u_{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Si  $\text{sen}(\omega_n t_d + \phi_n) = \text{sen}(\Omega \tau_d + \phi_n) < 0$ , el móvil debe empezar a detenerse con  $a_-$ , y le tomará un tiempo extra  $\Delta t = v_{\text{máx}}/a_-$ , o  $\Delta \tau = 1/A_-$  alcanzar  $(n+1)$ -ésimo y detenerse. Este tiempo debe ser comparado con el tiempo que le tome al semáforo cambiar de luz a verde  $t_g$  (el subíndice  $g$  se refiere a *green*), punto en el cual el móvil puede acelerar otra vez. Definiendo la fase  $\xi_d = \omega_n t_d + \phi_n = \Omega \tau_d + \phi_n$ , podemos calcular

$$\xi_g = \omega_n t_g + \phi_n = 2\pi \left( \text{Int} \left[ \frac{\xi_d}{2\pi} \right] + 1 \right),$$

donde  $\text{Int}[x]$  es la parte entera de  $x$ . Por lo tanto, si  $t_d + \Delta t < t_g$ , o  $\tau_d + \Delta \tau < \tau_g$ , el móvil cruzará el  $(n+1)$ -ésimo semáforo con

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= L_n \rightarrow y_{n+1} = 1, \\ t_{n+1} &= t_g \rightarrow \tau_{n+1} = \tau_g, \\ v_{n+1} &= 0 \rightarrow u_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

En caso contrario,  $t_d + \Delta t > t_g$ , o  $\tau_d + \Delta \tau > \tau_g$ , el móvil comienza a acelerar en el estado

$$\begin{aligned} x_g &= x_d + v_d(t_g - t_d) - a_-(t_g - t_d)^2/2 \\ &\rightarrow y_g = y_d + u_d(\tau_g - \tau_d) - A_-(\tau_g - \tau_d)^2/2, \\ t_g &= t_g \rightarrow \tau_g = \tau_g, \\ v_g &= v_d - a_-(t_g - t_d) \rightarrow u_g = u_d - A_-(\tau_g - \tau_d), \end{aligned}$$

y otra vez tenemos dos casos antes de que llegue a la distancia  $L$ . Necesitamos determinar si el móvil alcanza  $v_{\text{máx}}$  antes que cambie la luz. Para ello calculamos

la distancia a la cual el móvil alcanza  $v_{\text{máx}}$ , esto es  $x_m = x_g + (v_{\text{máx}}^2 - v_g^2)/2a_+$ , o  $y_m = y_g + (1 - u_g^2)/2A_+$ . Entonces, si  $x_m > L$ , el móvil alcanza el semáforo con

$$x_{n+1} = L_n \rightarrow y_{n+1} = 1,$$

$$t_{n+1} = t_g + \frac{v_{n+1} - v_g}{a_+} \rightarrow \tau_{n+1} = \tau_g + \frac{1}{A_+}(u_{n+1} - u_g),$$

$$v_{n+1} = \sqrt{v_g^2 + 2a_+(L_n - x_g)} \quad \rightarrow \quad u_{n+1} = \sqrt{u_g^2 + 2A_+(1 - y_g)},$$

de otro modo, alcanza  $v_{\text{máx}}$  en

$$x_m = x_m \quad \rightarrow \quad y_m = y_m,$$

$$t_m = t_g + \frac{v_{\text{máx}} - v_g}{a_+} \quad \rightarrow \quad \tau_m = \tau_g + \frac{1}{A_+}(1 - u_g),$$

$$v_m = v_{\text{máx}} \quad \rightarrow \quad u_f = 1,$$

y el semáforo en

$$x_{n+1} = L_n \quad \rightarrow \quad y_{n+1} = 1,$$

$$t_{n+1} = t_m + \frac{L_n - x_m}{v_{\text{máx}}} \quad \rightarrow \quad \tau_{n+1} = \tau_m + (1 - y_m),$$

$$v_{n+1} = v_{\text{máx}} \quad \rightarrow \quad u_{n+1} = 1.$$

En la Fig. 3.1 se muestra el tipo de trayectorias que se dan entre dos semáforos, aquí se ve la cinemática típica asociada a este modelo.

Es interesante mencionar que este modelo simplificado todavía podría ser relevante en el caso de muchos automóviles yendo a través de una secuencia de semáforos,

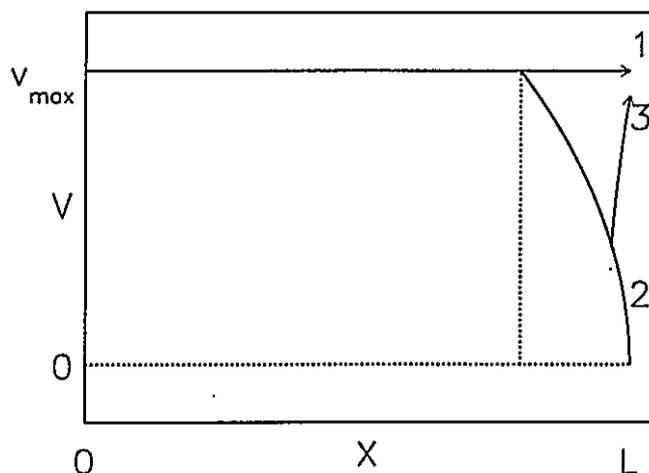


Figura 3.1: Las situaciones posibles en el punto de decisión, esto es, (1) continuar, (2) frenar hasta para en  $x = L$  antes de que la luz cambie a verde otra vez, y (3) frenar y reacelerar cuando la luz cambia a verde antes de detenerse completamente.

pero descrito por parámetros efectivos dependientes de la densidad efectiva de los móviles interactuantes. Por ejemplo, tal vez haya observado mientras conduce por la ciudad que la aceleración efectiva promedio parece depender del número de automóviles esperando en el semáforo. Del mismo modo, la velocidad crucero promedio también parece depender de la densidad de móviles yendo a través de una secuencia de semáforos.

En la Fig. 3.2 se muestran algunos resultados calculados con las ecuaciones que se encuentran en el apéndice. La forma en que el móvil cruza el semáforo depende de la frecuencia del semáforo, de su fase, del largo de la calle, del tiempo de espera en un determinado semáforo, etc. Todas estas posibilidades son introducidas por la decisión inducida por el semáforo. Con la introducción de más vehículos la cantidad de decisiones y por tanto la complejidad de la cinemática aumentará considerablemente debido a la interacción.

Ahora estudiaremos con más detalle el modelo recién propuesto. En esencia su-

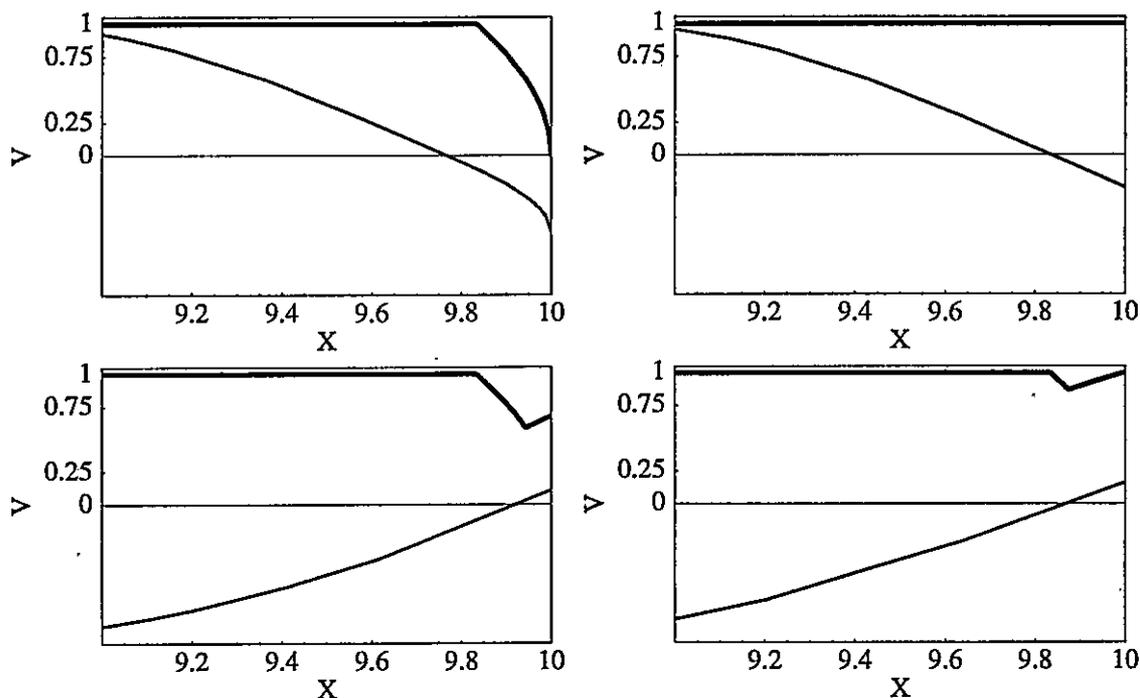


Figura 3.2: Estas son algunas situaciones que se pueden dar dependiendo de, entre otras cosas, la frecuencia: (a)  $\omega = 1.53$ , el móvil es frenado completamente. (b) Con  $\omega = 1.52$ , el móvil no altera su trayectoria porque la señal del semáforo llega cuando ya no puede responder. (c) Para  $\omega = 1.2$ , el móvil cruza con una velocidad menor que  $v_{\text{máx}}$  después de frenar. (d) Si  $\omega = 1.211$ , después de frenar, logra alcanzar nuevamente  $v_{\text{máx}}$  al cruzar el semáforo. La línea gruesa representa la velocidad del móvil, la línea más delgada corresponde a la señal del semáforo.

pondremos una ciudad con cuadras regulares. Esperamos que al iterar este mapa aparezca información interesante sobre el comportamiento del flujo vehicular en una ciudad, aun en este modelo simple. El menor tiempo de viaje ocurre cuando la velocidad del móvil sincroniza con la frecuencia del semáforo, es decir,  $\sin(n\omega_n L_n / v_{\text{máx}} + \phi_n) > 0$  para todo  $n$ . Esto se puede conseguir para una  $v_{\text{máx}}$  específica, pero no puede ser garantizado para un intervalo de velocidades de cruce.

La velocidad máxima es un parámetro muy relevante en situaciones que se dan en ciudades reales ya que diferentes conductores preferirán diferentes valores de  $v_{\text{máx}}$ ,

y por tanto las estrategias de control de tráfico que se implementen a través de  $\omega_n$  y  $\phi_n$ , serán muy sensibles a esta distribución de velocidades. En la Fig. 3.3 se muestra como ocurre una bifurcación en la velocidad al cruzar los semáforos cuando variamos  $v_{\text{máx}}$ . Además, si suponemos que los parámetros que definen el tráfico son, a primer orden, funciones de la densidad o del número de automóviles, entonces cualquier estrategia de control debe tomar esto en consideración, especialmente durante los embotellamientos.

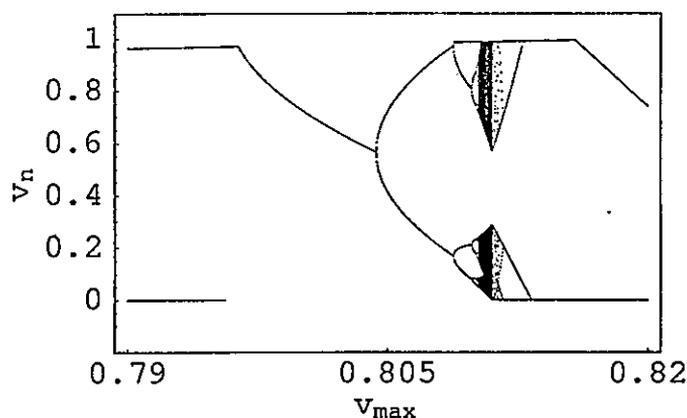


Figura 3.3: Este diagrama de bifurcación ilustra el tipo de comportamiento que se da al variar la velocidad máxima.

Por ahora, nos concentraremos en estudiar la dinámica para un valor dado de  $v_{\text{máx}}$ . Note que podríamos considerar valores diferentes para  $L_n = L + \Delta L_n$  y  $\omega_n = \omega + \Delta \omega_n$  como desfases temporales inducidos descritos por  $\Delta \phi_n = \omega \Delta L_n / v_{\text{máx}}$  y  $\Delta \phi_n = \Delta \omega_n L / v_{\text{máx}}$  respectivamente. Esta es la razón por la que nos podemos concentrar en la situación  $L_n = L$  y  $\omega_n = \omega$ , sin pérdida de generalidad. En este caso es conveniente definir el tiempo de cruce como  $T_c = L / v_{\text{máx}}$  y normalizar  $u = v / v_{\text{máx}}$ ,  $\tau = 2\pi t / T_c$ , y  $y = x / L$ . Las ecuaciones de evolución se reducen a (todas las ecua-

ciones normalizadas que conforman el mapa están escritas más arriba)

$$\frac{du}{d\tau} = \begin{cases} A_+ \theta(1-u), & \text{acelera,} \\ -A_- \theta(u), & \text{frena.} \end{cases}$$

con  $A_+ = a_+ L / v_{\text{máx}}^2$ ,  $A_- = a_- L / v_{\text{máx}}^2$ , y  $\Omega = \omega T_c / 2\pi$ .

La decisión de detenerse o continuar se toma antes del semáforo a la distancia

$$\Delta y = \frac{1}{2A_-},$$

dependiendo del signo de  $\sin(\Omega\tau + \phi_n)$ . Las restricciones sobre la frecuencia se reducen a  $(2\pi/\Omega) > (1/A_+), (1/A_-)$ . Ahora nos proponemos estudiar el flujo de tráfico como función de  $A_+$ ,  $A_-$ , y  $\Omega$ . Y definimos la razón de aceleración por  $a = A_+/A_-$ . Inicialmente tomaremos la fase  $\phi_n = 0$ .

En la medida que el móvil, con una razón de aceleración razonable de  $a = 1/3$  y  $A_+ = 10$  (lo que corresponde a  $T_c = L/v_{\text{máx}} > T_+ = v_{\text{máx}}/a_+$ ), itera a través de la secuencia de semáforos, podemos observar que aparece un comportamiento complejo para ciertos intervalos de  $\Omega$ . El caso para  $\Omega = 0.955$  se muestra en Fig. 3.4a y Fig. 3.4b para la velocidad  $u_n$  en el  $n$ -ésimo semáforo y para el tiempo viajado  $\Delta\tau_n = (\tau_{n+1} - \tau_n)$  entre el  $n$ -ésimo y el  $(n+1)$ -ésimo semáforo respectivamente. Claramente se observa una órbita de período dos en la cual el automóvil es frenado semáforo por medio, afectando el flujo de tráfico efectivo.

Aunque para este caso todas las condiciones iniciales en el plano  $u$ - $\tau$  alcanzan esta órbita de período dos asintóticamente, un intervalo de condiciones iniciales alcanza esta órbita en un solo paso debido a la naturaleza discontinua del mapa.

También se pueden dar otras situaciones menos simples como las que se muestran en las Figs. 3.5, donde se ve el desarrollo de órbitas de período 7 y 8, asintóticamente estables, de hecho deben existir órbitas estables de todos los períodos [121].

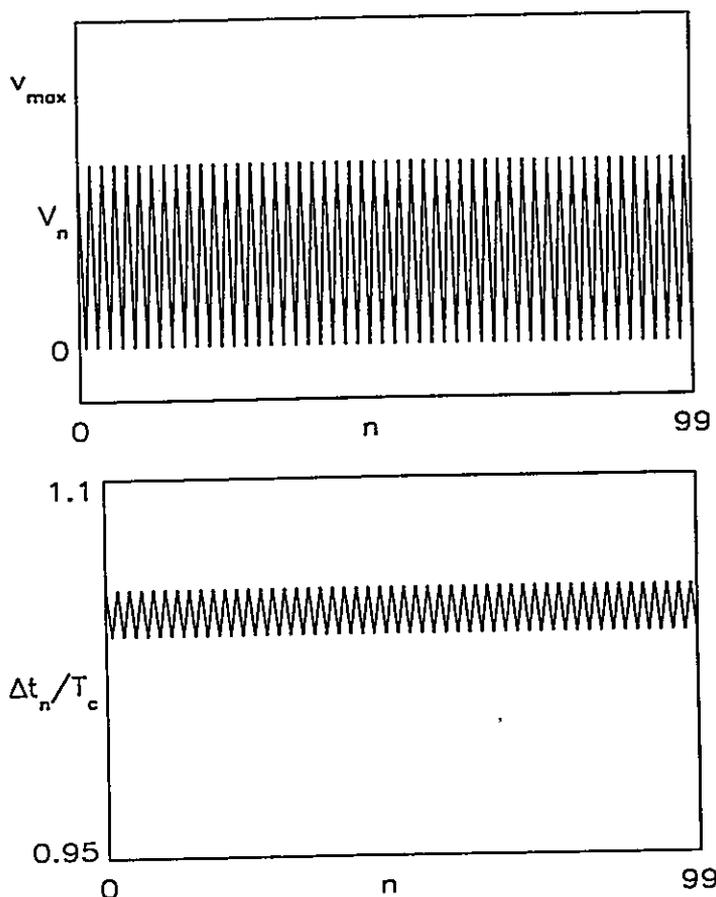


Figura 3.4: El mapa iterado para (a) la velocidad  $u_n$  en el  $n$ -ésimo semáforo y (b) el tiempo de viaje normalizado  $\Delta t_n/T_c = (t_{n+1} - t_n)/T_c$  entre dos semáforos, para  $\Omega = 0.955$ ,  $a = 1/3$  y  $A_+ = 10$ .

Ahora tomamos una situación similar pero para  $\Omega = 0.97$  y observamos la situación más compleja de las Fig. 3.6a y Fig. 3.6b para  $u_n$  y  $\Delta\tau_n$  respectivamente. Nótese que en este caso, aun cuando existe una situación no trivial en la velocidad de tráfico, el tiempo de viaje promedio se reduce en comparación con la situación representada en la Fig. 3.4b. Esto significa que este tipo de comportamiento, lejos de ser algo que debieramos evitar, podría resultar en una manera de optimizar alguna variable de interés.

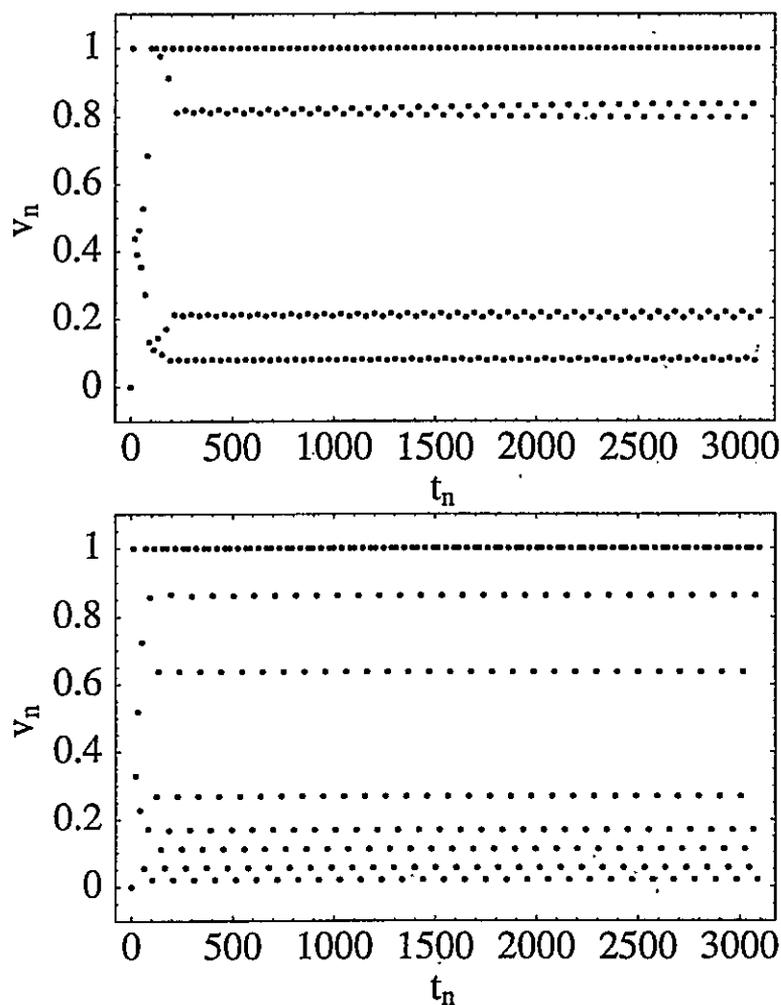


Figura 3.5: El mapa iterado para la velocidad  $u_n$  (a) para  $\Omega = 0.9737$ , que corresponde a un período siete y (b) una órbita de período ocho para  $\Omega = 0.97221$ , en ambos casos  $a = 1/3$  y  $A_+ = 10$ .

### 3.2. Comportamiento asintótico

Como se deduce de las figuras consideradas previamente, los viajes muy largos por una ciudad tienden a un comportamiento estable en muchos casos. El entender este comportamiento también puede ser útil si aproximamos *toda* la historia del móvil por este modelo. Por lo tanto, vemos que es importante entender que ocurre

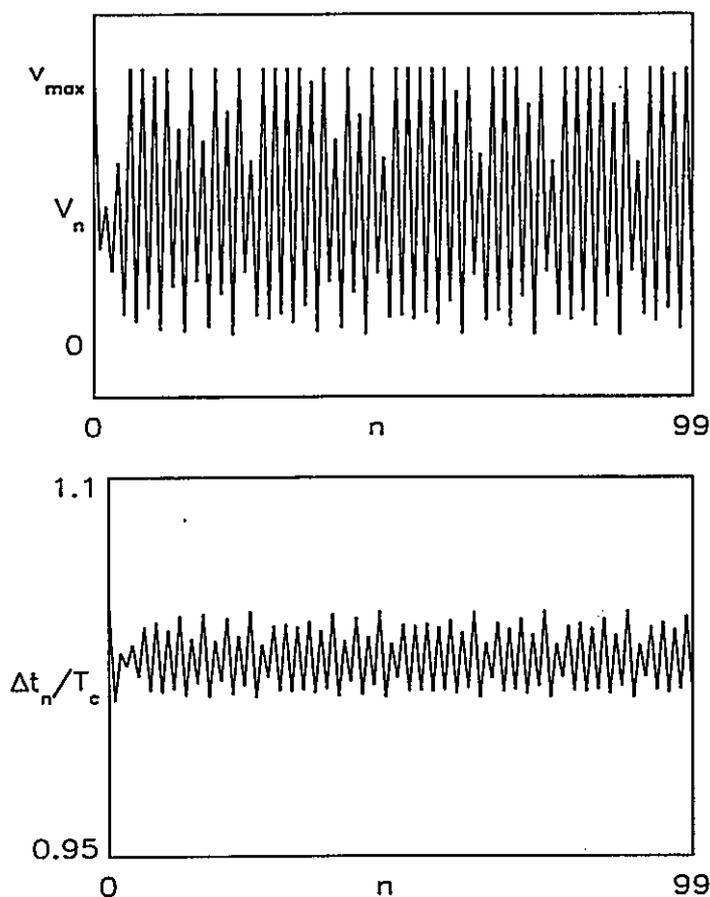


Figura 3.6: El mapa iterado para (a) la velocidad  $u_n$ , y (b) el tiempo de viaje  $\Delta\tau_n$  entre semáforos, para  $\Omega = 0.97$ ,  $a = 1/3$  y  $A_+ = 10$ .

asintóticamente en el tiempo. Una forma de hacerlo es por medio de construir el diagrama de bifurcación, en el que se han removido los transientes. El diagrama de bifurcación (ver capítulo 2) en el que variamos  $\Omega$  se muestra en la Fig. 3.7a y Fig. 3.7b para la velocidad y tiempo viajado entre semáforos. Existe un intervalo particular de frecuencias donde la velocidad iterada del móvil varía de una manera muy complicada. Claramente, el tiempo de viaje promedio en la Fig. 3.4b tiene un valor mas grande que el mostrado en la Fig. 3.6b. De hecho, es digno de notar que el tiempo de viaje promedio en la región caótica coincide con la interpolación entre las

regiones no caóticas a la derecha e izquierda. Pero, debido a que en la región caótica tenemos una dinámica mucho mas rica, podría obtenerse un menor tiempo de viaje por medio de una estrategia de control de caos [i.e, *Fouladi y Valdivia, 1997 [122]*].

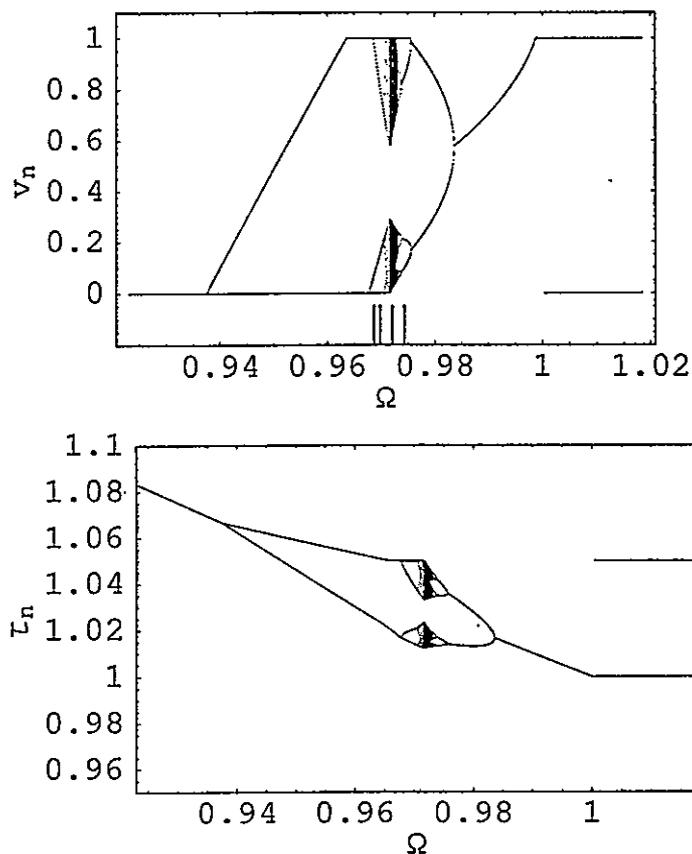


Figura 3.7: El diagrama de bifurcación para (a) la velocidad, y (b) el tiempo de viaje ( $\tau_n$ ) entre semáforos como función de  $\Omega$ . Los otros parámetros se toman como antes  $a = 1/3$  y  $A_+ = 10$ . El transiente ha sido removido. Las cuatro líneas verticales en la parte inferior de (a) marcan los valores de  $\Omega$  usados para construir la Fig. 3.15.

El diagrama de bifurcación de la Fig. 3.7 sugiere una bifurcación de duplicación de período como ruta al caos en la medida que reducimos  $\Omega$ . Al colisionar el atractor caótico con uno de los umbrales de velocidad, se produce una bifurcación de duplicación de período inverso. Si hacemos una ampliación en uno de los intervalos de

frecuencia en los que se observa comportamiento caótico, como se muestra en la Fig. 3.14a, encontramos una intrincada estructura de comportamientos estacionarios y caóticos, tal y como se espera de un régimen caótico después de una bifurcación de duplicación de período inverso (ver capítulo 2).

Otra forma de entender el comportamiento asintótico es observando como convergen al atractor las trayectorias de los móviles según la condición inicial como muestra la Fig. 3.8. En esta figura, el tono de gris indica el número de iteraciones que le toma al móvil alcanzar el estado estacionario. Para construir estas figuras, tomamos una distribución regular de puntos en el plano  $t-v$  y las evolucionamos con el mapa descrito previamente hasta que todos los comportamientos transientes han desaparecido, esto se hizo observando el número de iteraciones para las que se llega suficientemente cerca del valor asintótico. Como puede verse, para cada frecuencia y cada período, la distribución correspondiente de condiciones iniciales cambia mucho, sin embargo, algo que todos los casos presentados tienen en común es que, en general, se necesitan muchas más iteraciones cuando  $\Delta t_n \sim 0 \pmod{2\pi/\omega}$ . Lo que muestra que los móviles que están sólo un poco desincronizados con el semáforo y con una fase  $\phi = 0$ , casi en fase con la luz roja, de modo que en su curso al estado asintótico son atrapados muchas más veces por la luz roja, son los que mas tardan en alcanzar el estado asintótico.

Un punto que no podemos dejar pasar es la semejanza que existe entre nuestro mapa para describir el tráfico y los mapas con umbral como se muestra en la Fig. 3.9. La forma de construir este clase de mapas es muy sencilla. En el caso de la figura, tomamos el mapa logístico y sustituimos parte de la curva que lo representa por un valor constante que uno elige (aquí simplemente le cortamos la cima). Este procedimiento cambia en forma dramática el comportamiento general del mapa.

Lo interesante de este tipo de mapas es que la fuerte restricción impuesta estabiliza rápidamente todo el comportamiento caótico. Al colisionar la trayectoria caótica con algún umbral se transforma en una órbita periódica, cuyo período dependerá esencialmente de lo restrictivo que sea el umbral. Del mismo modo, en nuestro caso, los umbrales de velocidad reducen fuertemente el número de trayectorias caóticas posibles, dando origen a trayectorias estables de bajo período, lo que en los términos de los mapas con umbral, significa que la restricción impuesta es más bien fuerte.

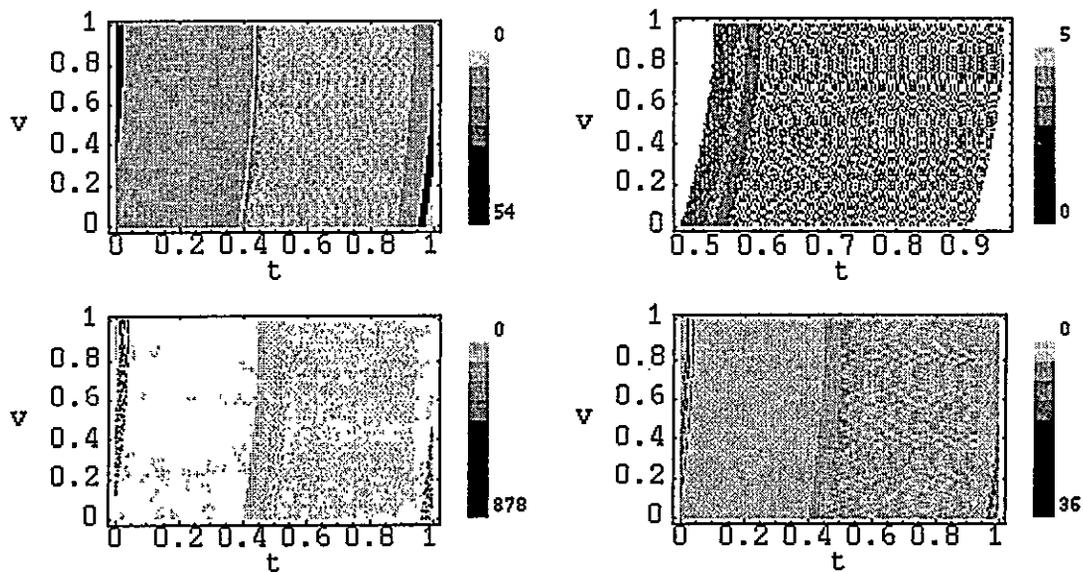


Figura 3.8: Distribución de condiciones iniciales en el plano  $t-v$  según el número de iteraciones requeridas para alcanzar el atractor. (a)  $\Omega = 0.99$ , órbita de período 1. (b)  $\Omega = 0.965$ , período 2. (c)  $\Omega = 0.974$ , período 7. (d)  $\Omega = 0.972$ , período 8. El tiempo ha sido reescalado *en el gráfico* para que esté en unidades de  $2\pi/\omega$ .

### 3.3. Comportamiento transiente

Si bien es cierto el comportamiento asintótico revela algunas de las propiedades fundamentales del sistema, el comportamiento transiente en este caso es especialmen-

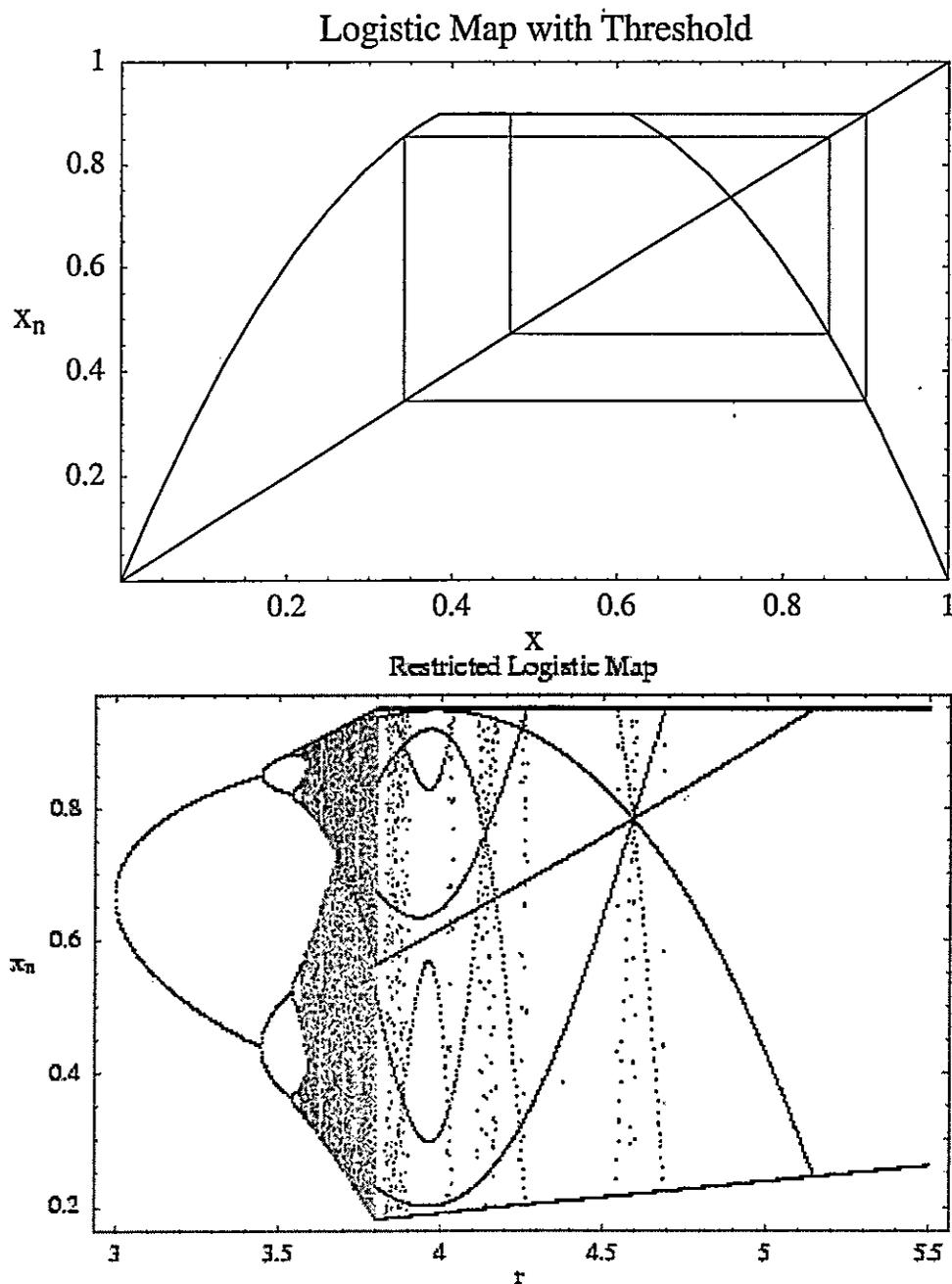


Figura 3.9: Mapa logístico restringido o con umbral, (a) una órbita de período 4 estabilizada por el umbral, (b) el diagrama de bifurcación, todas las órbitas que aparecen después de que el atractor colisiona con el umbral, son estables.

te interesante debido a su significado: los viajes en una ciudad a veces abarcan unas pocas decenas de semáforos, lo que en el presente contexto aplica a los transientes. En la Fig. 3.10 se observan los transientes para dos condiciones iniciales distintas. Esto corresponde a dos automóviles ubicados en un mismo semáforo, uno de ellos parte y el otro espera un momento y lo sigue (no están en la misma pista, no hay interacción). Como se observa la estructura transiente no resulta simple y es bastante sensible a las condiciones iniciales. El estudio específico de este comportamiento será indispensable cuando se introduzcan interacciones entre vehículos, ya que en este caso, y desde un punto de vista microscópico, al sistema se le hará más difícil alcanzar un equilibrio como el caracterizado por órbitas de algún período definido.

El conjunto de Figs. 3.11 corresponde al comportamiento transiente según la condición inicial para la frecuencia  $\Omega = 0.965$ . Como se puede apreciar, el comportamiento en los cuatro primeros semáforos muestra que para la gran mayoría de las condiciones iniciales, el móvil cruzará con velocidad máxima. La secuencia de Figs. 3.11 muestra además cómo se va formando el estado asintótico para  $\Omega = 0.965$  que corresponde a un período 2.

La importancia de este tipo de consideraciones están en el hecho de que mediante ellas podemos encontrar las condiciones para las cuales el móvil pasa con velocidad máxima la mayor parte de las veces. Esto mas allá de la importancia obvia en el ahorro de tiempo, también tiene que ver con el ahorro de combustible. En general, la cantidad de combustible empleado dependerá no sólo de las características particulares del vehículo considerado sino además de los hábitos de manejo del conductor. Sin embargo, en general también es cierto que cuanto menos tiempo se este acelerando tanto para aumentar la velocidad como para disminuirla, tanto menos combustible se empleará, de modo que lo que conviene es estar sincronizado con la frecuencia del

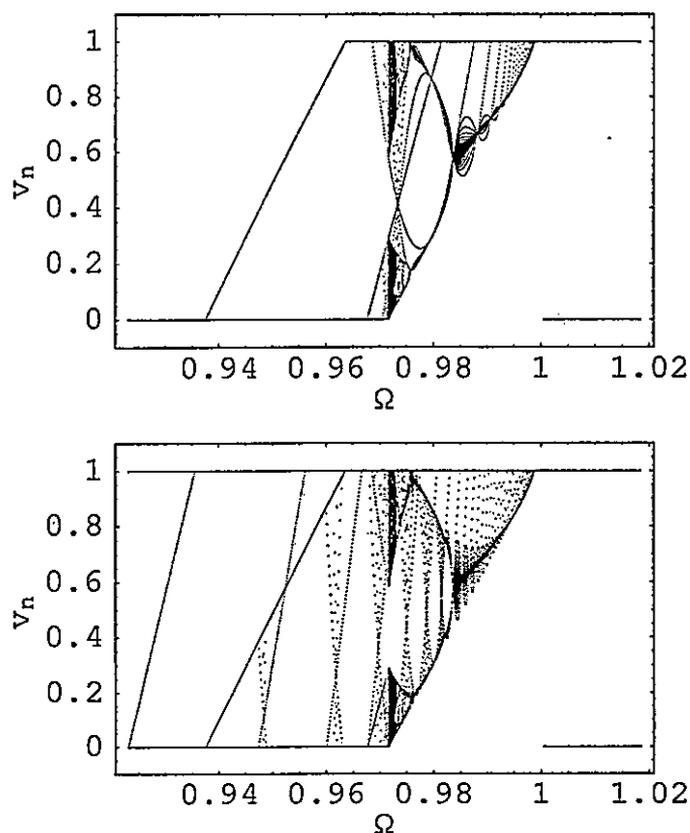


Figura 3.10: El diagrama de bifurcación para la velocidad con diferentes condiciones iniciales (a)  $t_0 = 0, v_0 = 0$  y (b)  $t_0 = 0.153, v_0 = 0$ . Note que solo cambia significativamente la parte transiente

semáforo y en fase con la luz verde, es decir, conseguir  $\Omega \approx 1$ . Pero se puede hacer un poco más, lo que necesitamos es que en el tiempo de recorrido entre dos semáforos haya un número entero de períodos de los mismos y que en un semiperíodo no se recorra una distancia menor que  $x_l$  ni mayor que  $L/2$ , esto nos lleva a las relaciones  $n = L\Omega/v_{\text{máx}}$  donde  $n = 1, 2, 3, \dots$  y  $a_-/v_{\text{máx}} \geq \Omega \geq v_{\text{máx}}/L$ , esto define un conjunto de frecuencias posibles si la condición inicial está en intervalo  $(0, v_{\text{máx}})$ . Estas observaciones podrían ser útiles a la hora de desarrollar una estrategia de conducción cuyo objetivo sea ahorrar combustible, pero tengamos presente que las interacciones

entre muchos vehículos bien pueden cambiar este cuadro en forma drástica.

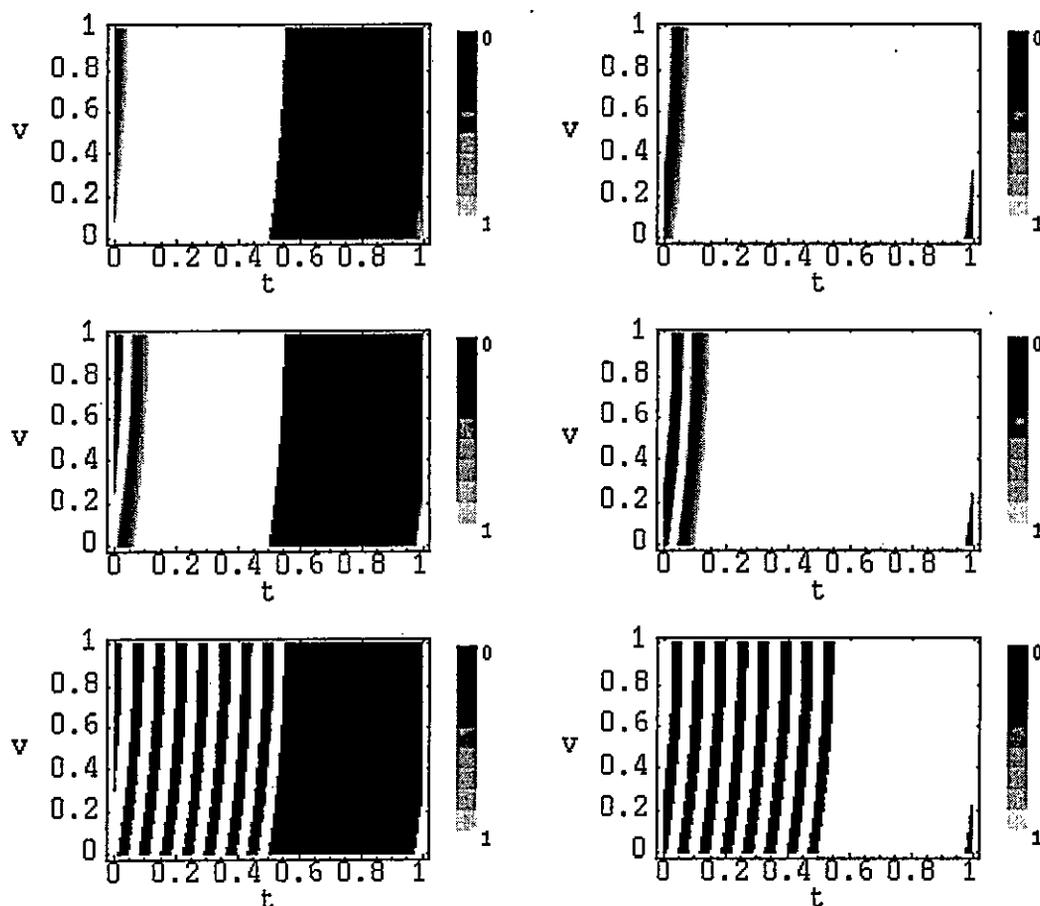


Figura 3.11: Comportamiento transiente para  $\Omega = 0.965$  según la condición inicial. Los colores más claros indican velocidades más altas al cruzar el semáforo. De derecha a izquierda, las figuras (a) a la (d), muestran la distribución de velocidades e intervalos tiempo desde el primer hasta el cuarto semáforo. Las figuras (e) y (f) corresponden a los semáforos 19 y 20 respectivamente. El tiempo ha sido reescalado en el gráfico para que esté en unidades de  $2\pi/\omega$ .

Aún en nuestro simple modelo, el resultado en cuanto al ahorro de combustible puede ser muy poco obvio. De hecho, depende fuertemente de la condición inicial incluso para una órbita estable. Volvamos a considerar el caso  $\Omega = 0.965$  y calculemos el trabajo realizado:  $\Delta T = F\Delta x \propto a\Delta x \approx v_k(v_{k+1} - v_k)$ , aquí el índice  $k$  no corres-

ponde al  $k$ -ésimo semáforo sino a la posición  $k$ -ésima del particionado regular de la distancia entre dos semáforos. El hacerlo de esta forma tiene sentido porque se consume energía al acelerar con  $a_+$  y también al frenar con  $a_-$  pues es usual hacerlo con el motor "enganchado", en cualquier caso estamos buscando una estimación gruesa, entrar en detalles a este nivel no tiene sentido. La relación  $\Delta T \approx v_k(v_{k+1} - v_k)$  es válida si expresamos la velocidad como función de la distancia recorrida, como aparece en el apéndice. Con esta aproximación podemos construir las Figs. 3.12 donde se muestra el trabajo relativo realizado por el móvil dependiendo de la condición inicial. Las Figs. 3.12a-d corresponden a los semáforos primero al cuarto, en las zonas oscuras se encuentran las condiciones iniciales que minimizan el trabajo realizado por el móvil. Note que son más bien amplias e implican comenzar con algo de desfase con respecto a la señal del semáfo. Las últimas dos figuras corresponden a los semáforos décimo y vigésimo, es decir, muestran la tendencia para viajes relativamente largos. De ellas se ve que la tendencia continúa, pero la región elegible como condición inicial para minimizar el consumo de combustible se va haciendo cada vez más estrecha.

### 3.4. Comportamiento caótico

Estimar la relevancia de este comportamiento caótico y su sensibilidad a perturbaciones y ruidos, puede ser de importancia en estrategias de control. En este sentido se puede estimar una amplitud del exponente de Lyapunov [123] para amplitudes finitas. Tomemos una trayectoria en el atractor que comience desde  $(u_0, \tau_0)$  y una trayectoria perturbada inicialmente que comience en  $(u_0, \tau_0 + \delta_0)$ , por ejemplo con  $\delta_0 = 10^{-7}$ . El error es iterado  $n$  veces produciendo  $\delta_n$ . Se debe tener cuidado para incluir solamente la región de escalamiento donde

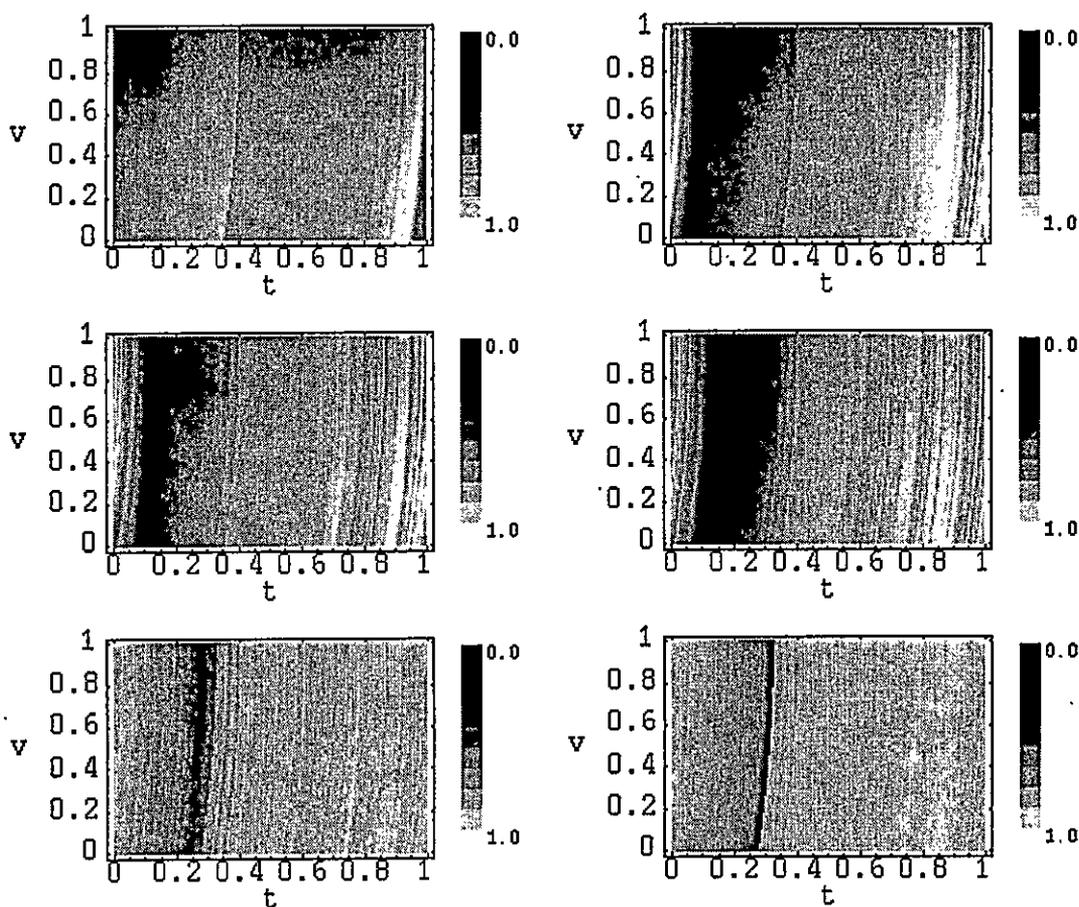


Figura 3.12: Distribución de condiciones iniciales según el trabajo relativo realizado para  $\Omega = 0.965$ . Las figuras a-d corresponden a los semáforos primero al cuarto, mientras que las dos últimas corresponden a los semáforos décimo y vigésimo. Las zonas más claras están asociadas a las condiciones iniciales para las que se realiza más trabajo relativo. El tiempo ha sido normalizado como en los casos anteriores.

$$\delta_n \sim \delta_0 e^{\lambda n}.$$

Dada un condición inicial sobre el atractor se puede estimar un exponente por medio de un procedimiento de ajuste en la región de escalamiento. Es digno de mención que esta forma de calcular el exponente de Lyapunov no es la estándar, fue necesario introducirla debido la fuerte restricción impuesta por los umbrales de velocidad.

Por supuesto, la naturaleza discontinua del mapa complica este cálculo, donde por ejemplo, ambas trayectorias pueden alcanzar el mismo estado en un paso, dando como resultado  $\lambda = -\infty$ . Este tipo de complicaciones junto con la región de escalamiento se muestran en la Fig. 3.13, el cálculo se hace sobre el intervalo en que el error crece exponencialmente, luego sigue la saturación donde ya no es posible extraer información útil para determinar el exponente. A pesar de esto, todavía se puede

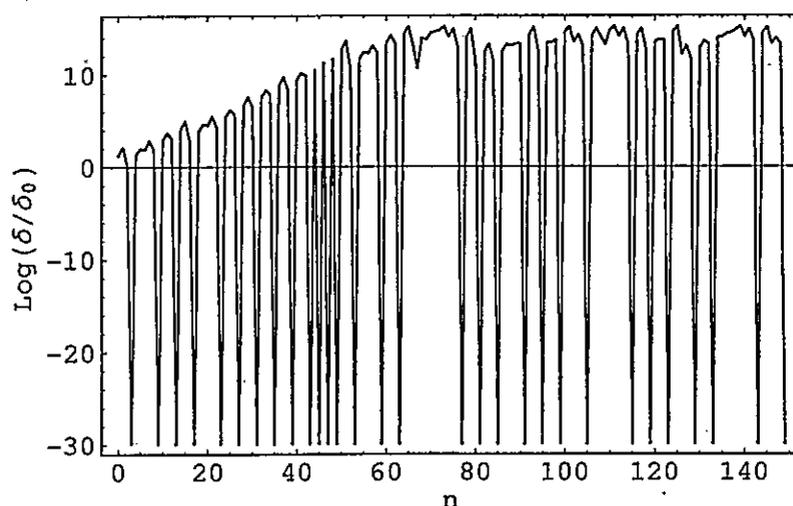


Figura 3.13: Región de escalamiento. Aquí se puede ver como dos condiciones iniciales separadas por  $\epsilon = 10^{-7}$  divergen exponencialmente para  $\Omega = 0.972$ , como función de la iteración. Observe las abruptas caídas en el error, esto es inducido por los umbrales de velocidad.

obtener un exponente de Lyapunov por medio de promediar sobre muchas condiciones iniciales en el atractor, como se muestra en la Fig. 3.14b.

Otra manera de entender la dinámica del sistema es graficando la evolución en el espacio de fase, para un valor dado de  $\Omega$ , como se muestra en la Fig. 3.15 para cuatro valores de  $\Omega$ . Es interesante notar que la dimensión del atractor es cercana a 1 en la situación caótica. Aquí la contracción del volumen viene de la dinámica en si misma, y el hecho de que el intervalo de condiciones iniciales vaya al mismo punto

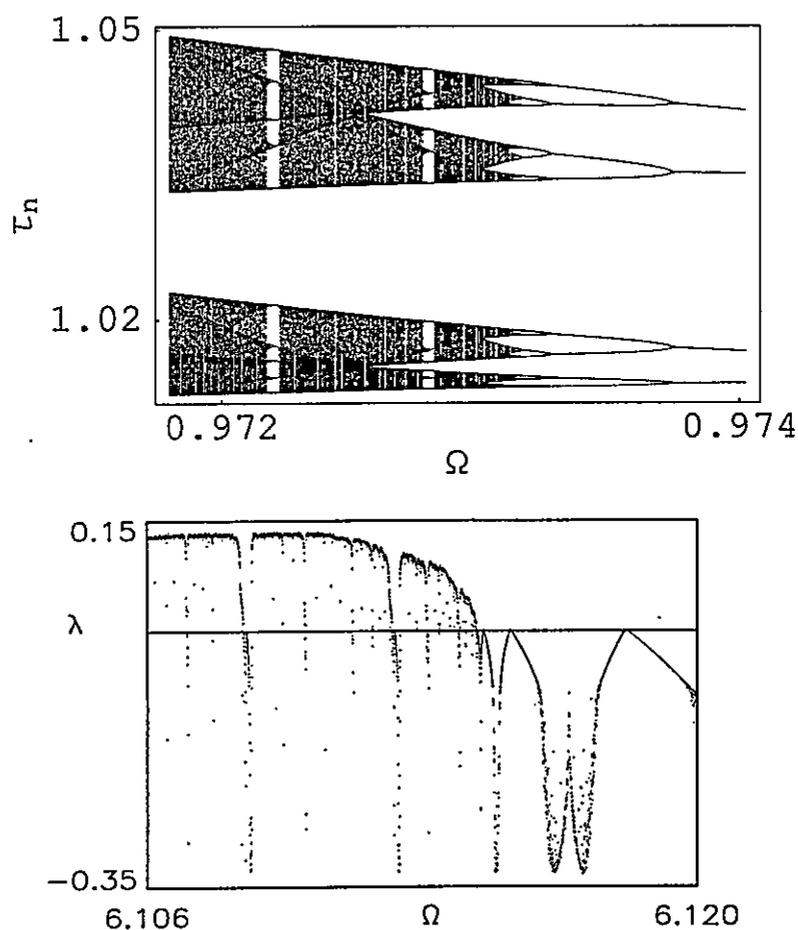


Figura 3.14: El diagrama de bifurcación, (a) ampliación para Fig.4b, y (b) el exponente de Lyapunov asociado (la frecuencia no fue normalizada por  $2\pi$ ).

en una iteración muestra su naturaleza discontinua.

El diagrama de bifurcación puede ser continuado para valores mas grandes de  $\Omega$  en cuyo caso aparecen ventanas de comportamiento caótico similares a la mostrada en la Fig. 3.7. En la Fig. 3.16a vemos la próxima ventana para un intervalo de frecuencia mas grande. Este caso corresponde a cambios crecientemente mas rápidos en la señal del semáforo, y podría no ser tan relevante en situaciones de tráfico reales como la descrita en la Fig. 3.7.

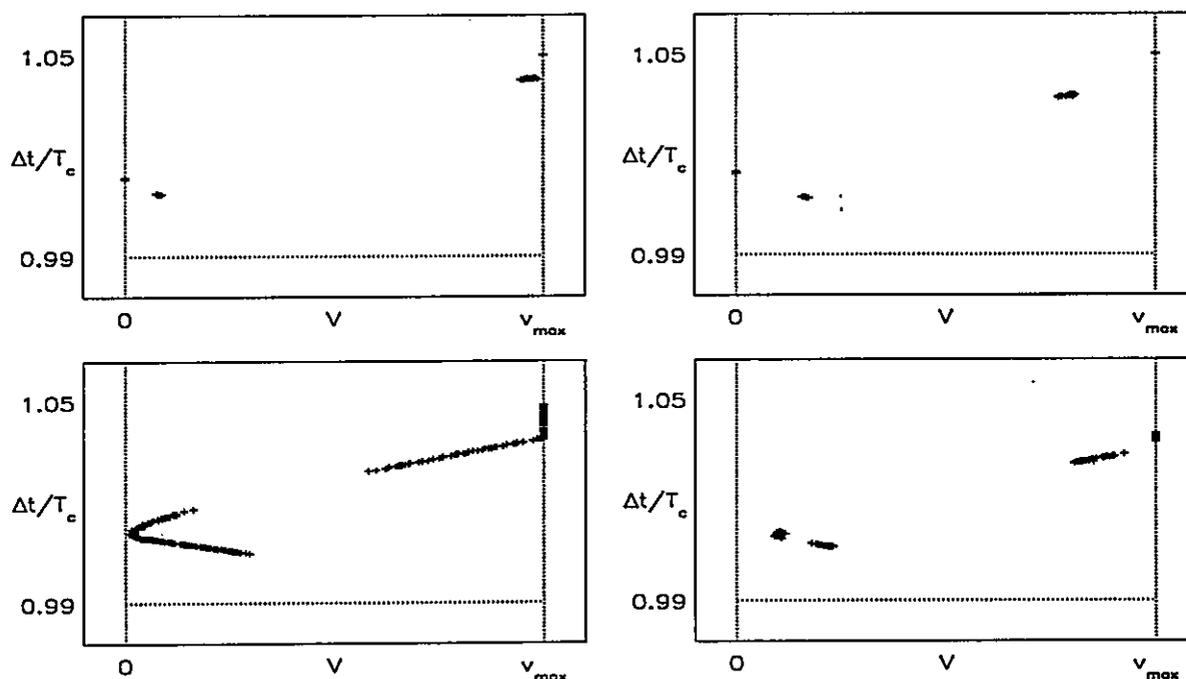


Figura 3.15: La evolución en el espacio de fase, el plano  $u-\tau$ , para las cuatro frecuencias marcadas en la Fig. 3.7a como líneas verticales bajo  $u = 0$ .

Otro parámetro es  $a = a_+/a_-$ . En el límite  $a \rightarrow 0$ , con  $a_- \rightarrow \infty$  y  $a_+$  constante y finito, el conductor toma la decisión exactamente en el semáforo, y se detiene completamente si la luz es roja. Esperamos que en este caso la naturaleza de la dinámica cambie y cualquier separación de las trayectorias en el espacio de fase, *i.e.*  $u-\tau$ , pueda ser entendida en términos de la situación en la cual la velocidad de crucero queda sincronizada con los semáforos. La Fig. 3.16b muestra el diagrama de bifurcación para la velocidad del móvil cuando  $a = 1/30$ . Las curvas que parecen ser líneas verticales corresponden a automóviles no sincronizados con los semáforos. Estas líneas verticales deberían desaparecer en la medida que  $a$  es reducida de modo que obtenemos solo dos situaciones, esto es, el móvil pasa por la entera secuencia de semáforos con velocidad  $v_{\text{máx}}$  o se detiene.

Ahora trataremos el problema de sensibilidad al ruido. Impondremos sobre el

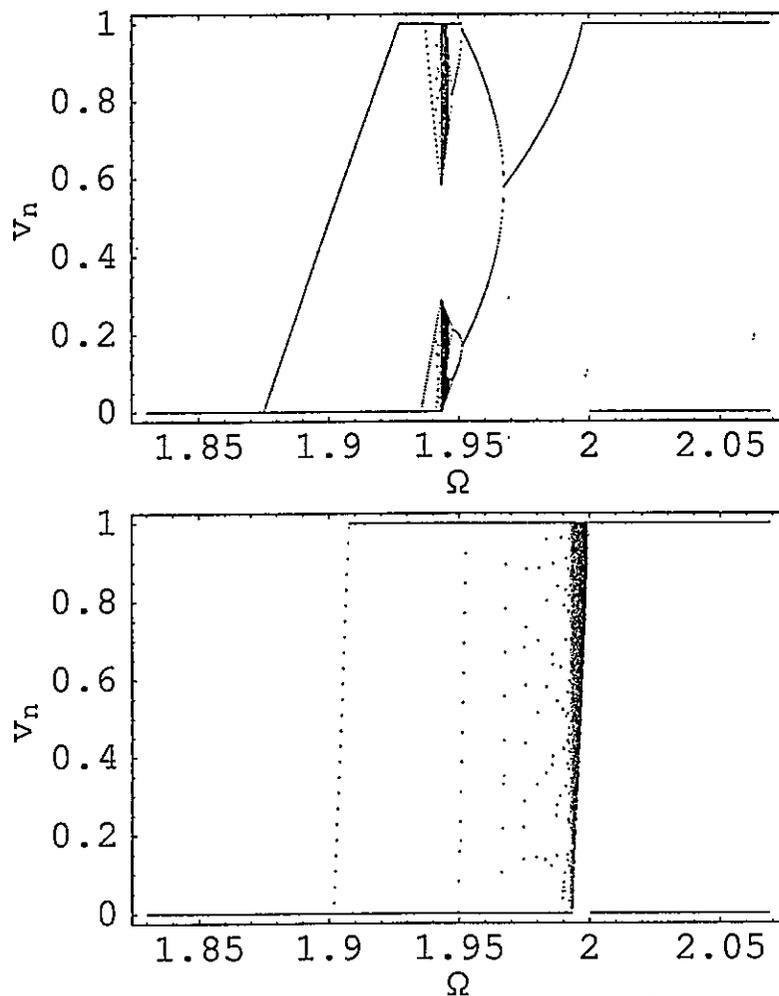


Figura 3.16: (a) Diagrama de bifurcación para la velocidad similar a la Fig. 3.7a, pero en un intervalo de frecuencia diferente. (b) Diagrama de bifurcación para la velocidad con  $a = 1/30$ .

modelo ya descrito una fase aleatoria  $\phi_n$  tomada de una distribución uniforme en  $[0, 0.01]$  y estudiaremos la situación equivalente a la representada en la Fig. 3.7. En la Fig. 3.17, todavía se puede observar la estructura de bifurcación de la Fig. 3.7 para  $v_n$  y  $\Delta\tau_n$ , pero por supuesto, esta estructura se pierde en la medida que la amplitud de la perturbación aumenta. Este tipo de consideraciones son necesarias ya que, por ejemplo, el largo de las calles no es constante en una ciudad real, así como otros

parámetros y su relevancia puede ser simulada por la introducción de ruido.

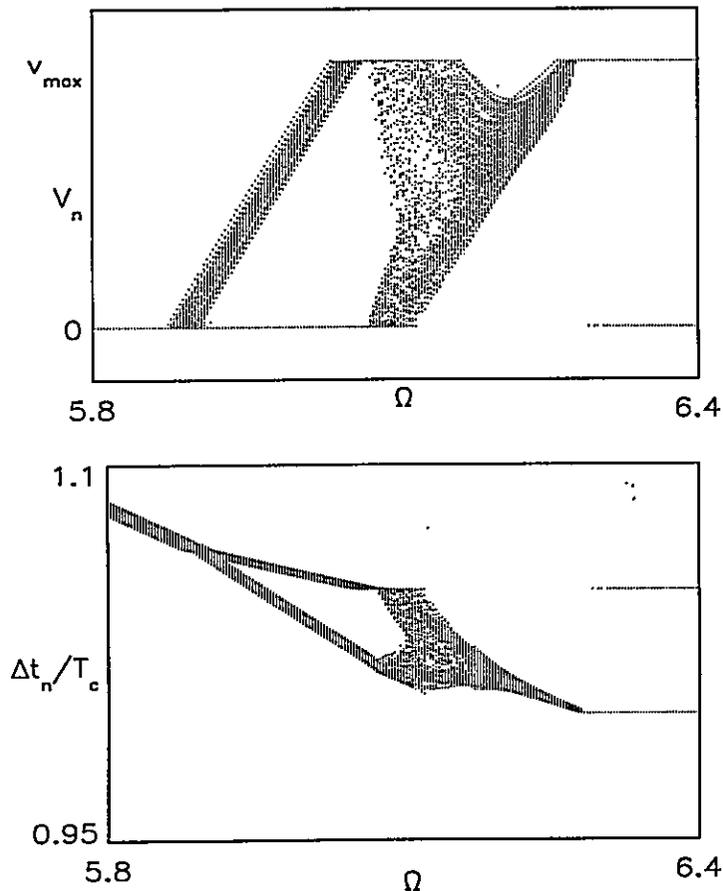


Figura 3.17: (a) Diagrama de bifurcación perturbado por una fase aleatoria  $\phi_n$ , para el caso mostrado en la Fig. 3.7. El ruido se toma de una distribución uniforme aleatoria entre 0 y 0.001 (la frecuencia no está normalizada por  $2\pi$ ).

### 3.5. Análisis adicional

Supongamos que diseñamos un sistema de tráfico, esto es  $\omega_n$  y  $\phi_n$ , de modo que permita un flujo continuo de tráfico para cierta velocidad de cruceo  $v_{m\acute{a}x}$ . Podemos simular la situación en la cual la velocidad de cruceo no es precisamente aquella para la cual la secuencia de semáforos fue diseñada. Esto debería ser similar a la

situación en la que solamente variamos  $\Omega$ , y estudiamos el diagrama de bifurcación como se muestra en la Fig. 3.7a y Fig. 3.7b para la velocidad y el intervalo de tiempo entre dos semáforos.

Un punto importante a clarificar es el tamaño relativo de la región caótica, el que depende de los valores específicos de  $A_+$ ,  $A_-$  y  $L$  ( $v_{\text{máx}}$  puede ser re-escalado). Regiones caóticas mucho mayores que las ilustradas aquí pueden ser obtenidas por medio de ajustar los parámetros de una manera consistente. Por ejemplo, si usamos  $A_+ = 5$ ,  $A_- = 30$  y  $T_c = 10$ , las regiones caóticas son significativamente mayores que las mostradas en el análisis, y podrían aplicar en una situación de tráfico distinta. Aunque los parámetros usados en este trabajo fueron escogidos para ilustrar este novel ingrediente en la dinámica del tráfico sin tener una ciudad específica en mente, otros conjuntos de parámetros pueden representar una amplia gama de condiciones de tráfico (tamaño de las calles, separación entre semáforos, tipos de automóviles, tipos de conductores, etc.) Note que  $\xi_d$  (ver sección 3.1) es otra variable importante a la hora de determinar la complejidad en el comportamiento que define la región caótica.

Además, si quisiéramos extrapolar este modelo a la situación con más de un móvil, entonces  $A_+$ ,  $A_-$  y  $L$  pueden ser obtenidos en un sentido estadístico desde la distribución de parámetros que define el flujo de tráfico, la distancia entre semáforos, los tipos de automóviles, situaciones específicas de las carreteras, actitudes de los conductores, etc. Y en este caso es de esperar que los valores de dichos parámetros sean muy heterogéneos. Entonces podríamos observar, por ejemplo, que un automóvil moviéndose en un embotellamiento, acelera y frena todo el tiempo, contribuyendo de este modo a definir los parámetros efectivos  $A_+$  y  $A_-$ . Esta es una idea que puede ser de relevancia al diseñar el flujo de tráfico durante los embotellamientos.

Es digno de recordar que el presente análisis ha enfatizado el efecto de viajes largos a través de la ciudad, mientras que los viajes cortos (unas decenas de semáforos) serán afectados por los transientes en este modelo. Por ello, este análisis apunta a las dificultades que pueden surgir cuando se trata de controlar el flujo de tráfico en las ciudades. Con sólo un automóvil, ya tenemos una situación complicada, y en la medida que agreguemos mas y mas móviles, solo se puede esperar que surjan situaciones mas complejas e interesantes. Es entonces cuando esperamos que la complejidad verdadera del sistema se revele, con la aparición de fenómenos emergentes y auto-organización. Controlar tales sistemas usualmente requerirá una estrategia de control que envuelva un gran número de agentes interactuantes.

Las situaciones realistas no serán tan simples como el modelo aquí presentado, por ejemplo, tendremos calles cuya longitud  $L_n$  variará aleatoriamente (o  $\Omega_n$ , o  $\phi_n$ , etc.), una distribución de  $a_+$  y  $a_-$ , etc. Algunas de estas variaciones pueden ser observadas en una distribución de  $\phi$ . En este sentido es digno de mención que si cambiamos  $\phi_n$  aleatoriamente, el comportamiento caótico puede ser destruido como se esperaría para perturbaciones de amplitud suficientemente grandes. Por otro lado, si escogemos la fase determinística obvia  $\phi_n = -\omega_n L_n / v_{\text{máx}}$  (con todo otro parámetro mantenido constante), entonces el móvil puede pasar por la secuencia de semáforos sin detenerse, y por lo tanto, tendríamos control óptimo. Sin embargo, esto no es realista ya que en la práctica los automóviles tendrán una distribución de  $v_{\text{máx}}$  (una idea de lo que ocurrirá se da en la Fig. 3.3), y lo que funcione para un vehículo, claramente no funcionará para otro. Si forzáramos otras funciones determinísticas, es esperable que surjan aún más situaciones interesantes.

Se da por entendido que el presente modelo es una fuerte simplificación de las situaciones de tráfico reales, pero consideramos que mantiene algunos de los aspectos

esenciales presentes en el tráfico real. Este es tan solo un interesante punto de partida desde el cual podremos construir e interpretar escenarios mas complejos.

## Capítulo 4

# Conclusiones y proyecciones

### Tráfico vehicular

No cabe duda de que un buen sistema de transporte en cualquier ciudad moderna contribuye mucho al buen desenvolvimiento de la misma. En este sentido es importante entender en tanto detalle como resulte razonable el comportamiento de un vehículo al viajar por las calles de una ciudad, problema que resulta distinto de la dinámica que se da en carreteras, debido a que los tramos y períodos son bastante mas heterogéneos al interior de las ciudades. Como se ha visto, con un simple modelo se pueden sacar conclusiones importantes, la mas llamativa en este caso es el hecho de que para parámetros consistentes con vehículos y condiciones de tráfico comunes surge el caos como una componente esencial de este tipo de sistemas. También es importante notar que de los diagramas de bifurcación se desprende la existencia de parámetros para los cuales el móvil siempre cruza el semáforo con velocidad distinta de cero, ahora es necesario estudiar lo que ocurre con un conjunto de vehículos. Por supuesto, también existe el caso en que el móvil siempre es frenado. Estas dos situaciones no son en si mismas ventajosas o desventajosas, todo dependerá de lo que se persiga con la estrategia de control que se implemente, ya que en un cruce, al ir

aumentando la densidad del flujo, necesariamente un grupo de vehículos tendrá que detenerse. Es claro que este es un modelo altamente idealizado, sin embargo parece retener las características básicas del problema real, y de este modo existe la posibilidad de explotar la riqueza de la dinámica durante el régimen caótico. Es claro, por otro lado, que la dinámica del sistema variara al introducir mas vehículos, pero debido a la analogía que se puede establecer entre un semáforo y otro móvil con el cual este interactuando el primero, en cuanto a ser objetos que regulan el flujo en base a una interacción a corta distancia, volvemos a tener un problema semejante al original, por lo que también este nuevo problema debería devenir en caos para algún intervalo de parámetros. El encontrar y comprender los factores implicados en el régimen caótico de un sistema de tráfico podría resultar decisivo al momento de planificar una estrategia de control. Este hecho resulta obvio si tratamos de controlar el caos por medio de perturbaciones pequeñas en el período de ciertos semáforos, para así conducir al sistema a estados que minimicen algún parámetro de interés, como el tiempo de viaje, el consumo de combustible, etc.

Otro aspecto que resultará interesante al seguir explorando este modelo, es la topología de la carretera, ya que es razonable esperar que esto introduzca variables que hagan aun más variada la dinámica de la simulación. Lo aquí presentado constituye un punto de partida razonable para construir un modelo de tráfico vehicular en una ciudad en el que posteriormente se incluyan otros componentes como los peatones. El flujo peatonal no es despreciable, de hecho tiene su propia dinámica, de modo que cualquier solución aceptable debe tener en cuenta la interacción entre tráfico vehicular y peatonal. En ese contexto, toda la riqueza de este sistema complejo comenzará a ser observada a plenitud, es decir, todos sus fenómenos implícitos, de los cuales la auto-organización tal vez sea el más útil.

# Apéndice A

## La cinemática entre dos semáforos

Sea  $L$  la distancia entre el origen  $O$  y el semáforo  $s$ ,  $r$  la distancia entre el origen y el punto de desición  $x_r$  y  $x_c$  el punto para el cual se alcanza la velocidad máxima  $v_{\text{máx}}$ . Primero calculamos  $x_c$ ,

$$x_c = \frac{v_{\text{máx}}^2 - v_0^2}{2a_+}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $v_0$  es la velocidad inicial y  $a_+$  la aceleración del móvil que es constante.

Consideremos ahora el intervalo  $(O, r)$ . Tomando como referencia el punto  $x_c$ , se tiene para la velocidad,

$$v_1(x) = (\sqrt{v_0^2 + 2a_+x} - v_{\text{máx}})\theta(x_c - x) + v_{\text{máx}} \quad (\text{A.2})$$

$$t_1(x) = t_0 + \frac{v_1(x) - v_0}{a_+} + \frac{x - x_c}{v_{\text{máx}}}\theta(x - x_c) \quad (\text{A.3})$$

Calculemos  $x_r$ : el móvil tiene una capacidad de frenado definida por  $a_-$  y debemos determinar el punto de desición de modo que pueda frenar completamente si se da la condición para ello. Si se alcanza la velocidad máxima en algún punto menor que  $L$ ,  $x_{r_a} = L - v_{\text{máx}}/(2a_+)$ , por otro lado, si la aceleración es muy pequeña, tenemos que  $x_{r_b} = (2a_+L - v_0^2)/(4a_+)$ . Con esto definimos  $x_r$  por

$$x_r = \text{Máx}[x_{r_a}, x_{r_b}] \quad (\text{A.4})$$

Ahora podemos evaluar las otras variables asociadas a este punto:  $t_r = t_1(x_r)$  y  $v_r = v_1(x_r)$ . En el intervalo  $(x_r, x_{r1})$  donde  $r1$  representa una segunda desición, debemos tener en cuenta el tiempo para la cual al tener una velocidad  $v_r$  alcanzamos el reposo al hacerse necesario frenar:  $t_l = t_r + \frac{v_r}{a_-}$  y la distancia asociada  $x_l = x_r + v_r(t_l - t_r) - \frac{a_-}{2}(t_l - t_r)^2$ , con lo que resulta

$$v_2(x) = \sqrt{v_r - 2a_-(x - x_r)}\theta(x_l - x), \quad (\text{A.5})$$

$$t_2(x) = \left(t_r + \frac{v_r - v_2(x)}{a_-} - t_l\right)\theta(x_l - x) + t_l. \quad (\text{A.6})$$

Ahora podemos calcular  $x_{r1}$ . Una segunda desición se produce cuando después de tener luz roja para frenar, nuevamente se tiene luz verde. Debemos encontrar los ceros de la función que representa la señal del semáforo, en este caso  $\sin(\omega t)$ , estos son  $\omega t_n = n\pi$ ,  $n \in \mathcal{N}$ , ya que  $x_r$  corresponde a uno de estos ceros, el tiempo asociado al siguiente cero es:  $t_{r1} = \pi(\text{Int}[\omega t_r/\pi] + 1)/\omega$ , donde  $\text{Int}[x]$  es la función parte entera. Si en  $x_r$  se determinó frenar, el tiempo para el cual el móvil alcanza el reposo es  $t_l = t_r + \frac{v_r}{a_-}$ , con esto encontramos que  $x_{r1}$  es,

$$x_{r1} = \left(x_r + v_r(t_{r1} - t_r) - \frac{a_-}{2}(t_{r1} - t_r)^2 - x_l\right)\theta(t_l - t_{r1}) + x_l. \quad (\text{A.7})$$

Luego,  $v_{r1} = v_2(x_{r1})$ , al igual que antes existe un punto crítico para el cual se alcanza la velocidad máxima que ahora será  $x_{c1} = x_{r1} + (v_{\text{máx}}^2 - v_{r1}^2)/2a_+$ . Entonces en el intervalo  $(x_{r1}, L)$ , tenemos

$$v_3(x) = \left(\sqrt{x_{r1}^2 + 2a_+(x - x_{r1})} - v_{\text{máx}}\right)\theta(x_{c1} - x) + v_{\text{máx}} \quad (\text{A.8})$$

$$t_3(x) = t_{r1} + \frac{v_3(x) - v_{r1}}{a_+} + \frac{x - x_{c1}}{v_{\text{máx}}}\theta(x - x_{c1}); \quad (\text{A.9})$$

Antes de terminar con la descripción para el intervalo  $(O, L)$ , es necesario tomar la siguiente precaución: en los ceros la función cambia de signo, de modo que tenemos

que considerar la variación local de la función en esos puntos, para ello definimos la siguiente secuencia de control. Sea  $F = \text{sen}(t_r\omega + \pi/2.0) - \text{sen}(t_r\omega - \pi/2.0)$  y  $SF = \text{sen}(t_r\omega)$ , si  $F > 0$  y  $|SF| < \epsilon$  entonces  $\Delta t = \delta\pi/\omega$  ( $\epsilon$  y  $\delta$  son números positivos pequeños), en caso contrario  $\Delta t = 0$ . Con esto queda definida la cinemática en todo el intervalo,

$$\Delta = \text{sen}((t_r + \Delta t)\omega) \quad (\text{A.10})$$

$$v(x) = \theta(-\theta(\Delta))(v_1(x)(\theta(x_r - x) - 1) + v_2(x)(\theta(x - x_r) - \theta(x - x_{r1})) + v_3(x)\theta(x - x_{r1})) + v_1(x) \quad (\text{A.11})$$

$$t(x) = \theta(-\theta(\Delta))(t_1(x)(\theta(x_r - x) - 1) + t_2(x)(\theta(x - x_r) - \theta(x - x_{r1})) + t_3(x)\theta(x - x_{r1})) + t_1(x). \quad (\text{A.12})$$

# Referencias

- [1] B. A. Toledo, V. Muñoz, J. Rogan, C. Tenreiro y J. A. Valdivia, *Phys. Rev. E* **70**, 016107 (2004).
- [2] W. F. Adams, *J. Inst. Civil Engineers* **4**, 121 (1936).
- [3] B. D. Greenshields, *Highway Reserch Board, Proc.* **14**, 458 (1935).
- [4] B. D. Greenshields, D. Schapiro y E. L. Erickson, *Bureau of Highway Traffic, Tech. Rep. 1* (1947).
- [5] A. Reuschel, *Oesterreichisches Ingenieur-Aarchiv* **4 3/4**, 193 (1950).
- [6] A. Reuschel, *Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines* **95 7/8**, 59 (1950).
- [7] A. Reuschel, *Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines* **95 9/10**, 73 (1950).
- [8] J. G. Wardrop, *Proc. Inst. Civil Engineers, Part II* **1(2)**, 325 (1952).
- [9] L. A. Pipes, *J. Appl. Phys.* **24(3)**, 274 (1953).
- [10] M. J. Lighthill y G. B. Whitham, *Proc. Royal Society* **A229**, 317 (1955).
- [11] G. F. Newell, *Opns. Res.* **3**, 176 (1955).

- [12] F. V. Webster, Road Reserch Technical Paper 39 (1957).
- [13] L. C. Edie y R. S. Foote, Proc. Highway Reserch Board 37, 334 (1958).
- [14] R. E. Chandler, R. Herman y E. W. Montroll, Opns. Res. 6, 165 (1958).
- [15] R. Herman, Opns. Res. 40(2), 199 (1992).
- [16] *Special Report 209: Highway Capacity Manual* (Transportation Research Board, 1985).
- [17] C. A. Rothrock y L. A. Keefer, Highway Research Board Bulletin 156, 1 (1957).
- [18] D. L. Gerlough y M. J. Huber, *Traffic Flow Theory: a Monograph* (Special Report 165, Transportation Research Board, Washington DC: National Research Council, 1975).
- [19] P. Athol, Highway Research Record 72, 58 (1965).
- [20] N. Gartner, C. J. Messer y A. K. Rathi, *Traffic Flow Theory* (Turner-Fairbank, Highway Research Center, 2002).
- [21] F. L. Hall, V. F. Hurdle y J. H. Banks, *Synthesis of Recent Work on the Nature of Speed-Flow and Flow Occupancy (Or Density) Relationships on Freeways* (Transportation Research Record 1365, TRB, Washington DC: National Research Council, 1992).
- [22] J. H. Banks, Transportation Research Record 1225, 53 (1989).
- [23] J. H. Banks, Transportation Research Record 1287, 20 (1990).
- [24] F. L. Hall y L. M. Hall, Transportation Research Record 1287, 108 (1990).

- [25] H. C. Chin y A. D. May, *Examination of the Speed-Flow Relationship at the Caldecott Tunnel* (Transportation Research Record 1320, TRB, NRC, Washington DC, 1991).
- [26] E. A. Wemple, A. M. Morris y A. D. May, Highway Capacity and Level of Service, Proceedings of the International Symposium on Highway Capacity págs. 439-455 (1991).
- [27] K. Agyemang-Duah y F. L. Hall, Proceedings of the International Symposium on Highway Capacity, Rotterdam, Balkema (1991).
- [28] J. Ringert y T. Urbanik, Transportation Research Record 1398, 31 (1993).
- [29] J. H. Banks, Transportation Research Record 1320, 83 (1991).
- [30] J. H. Banks, Transportation Research Record 1320, 234 (1991).
- [31] J. S. Drake, J. L. Schofer y A. D. May, Highway Research Record 154, 53 (1967).
- [32] H. Greenberg, Operations Research 7, 78 (1959).
- [33] L. C. Edie, Operations Research 9, 66 (1961).
- [34] R. Underwood.
- [35] N. C. Duncan, Traffic Engineering and Control págs. 34-35 (1976).
- [36] N. C. Duncan, Traffic Engineering and Control págs. 482-483 (1979).
- [37] F. A. Haight, Operations Research 8, 572 (1960).

- [38] F. A. Haight, *Mathematical Theories of Traffic Flow* (Academic Press, New York, 1963).
- [39] H. M. Zhang y T. Kim, *Understanding and modeling driver behavior* (2002).
- [40] A. Ceder, *Ph.D. dissertation* (University of California, Berkeley, California, 1975).
- [41] A. Ceder, *Transportation Research Record* 567, 16 (1976).
- [42] A. Cedder y A. D. May, *Transportation Research Record* 567, 1 (1976).
- [43] S. M. Easa y A. D. May, *Transportation Research Record* 772, 24 (1980).
- [44] F. Navin, *Transportation Planning Technology* 11, 19 (1986).
- [45] J. A. Acha-Daza y F. L. Hall, *Transportation Research Record* 1398, 119 (1993).
- [46] A. Pushkar, F. L. Hall y J. A. Acha-Daza, *Transportation Research Record* 1457, 149 (1994).
- [47] H. Lunenfeld y G. J. Alexander, *A User's Guide to Positive Guidance* (Federal Highway Administration, Washington, DC., 1990), tercera edición.
- [48] H. W. McGee, *Transportation Research Record* 1208 (1989).
- [49] P. M. Fitts, *Journal of Experimental Psychology* 47, 381 (1954).
- [50] C. G. Drury, *Human Factors* 12, 559 (1975).
- [51] M.-S. Chang, C. J. Messer y A. J. Santiago, *Transportation Research Record* 1027 (1985).

- [52] R. H. Wortman y J. S. Matthias, *Transportation Research Record* 904 (1983).
- [53] W. Schiff, *Perception: An Applied Approach* (Houghton Mifflin, Boston, 1980).
- [54] R. Sekuler y R. Blake, *Perception* (McGraw-Hill, New York, 1990), segunda edición.
- [55] K. R. Boff y J. E. Lincoln, *Engineering Data Compendium* (USAF, H. G. Armstrong Medical Research Laboratory, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1988).
- [56] D. Picha, *Determination of Driver Capability in the Detection and Recognition of an Object* (Unpublished Master's Thesis, Texas A&M University, 1992).
- [57] K. H. E. Kroemer, H. B. Kroemer y K. E. Kroemer-Ebert, *Ergonomics: How to Design for Ease and Efficiency* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994).
- [58] R. W. Cumming, *Journal of the Australian Road Research Board* 1, 4 (1963).
- [59] *Highway Capacity Manual* (Transportation Research Board, 1950).
- [60] A. J. Harris, *Australian Road Research Board, Proceedings* 2 1, 496 (1964).
- [61] R. W. Rothery, R. Silver, R. Herman y C. Torner, *Operations Research* 12, 913 (1968).
- [62] A. Reuschel, *Vehicle Movements in a Platoon with Uniform Acceleration or Deceleration of the Lead Vehicle* (Zeit. D. Oster. Ing. U. Architekt Vereines Ed., 1950).
- [63] L. A. Pipes, *Journal of Applied Physics* 24, 271 (1953).
- [64] E. Kometani y T. Suzaki, *J. Operations Research, Japan* 2, 11 (1958).

- [65] N. H. Gartner y D. L. Hou, *Comparative Evaluation of Alternative Traffic Control Strategies* (Transportation Research Record 1360, Transportation Research Board, 1992).
- [66] K. Engineers, *State Route 242 Widening Project Operations Analysis Report* (Contra Costa Transportation Authority, 1996).
- [67] H. S. Mahmassani y S. Peeta, *Network Performance Under System Optimal and User Equilibrium Dynamic Assignments: Implications for Advanced Traveler Information Systems* (Transportation Research Record 1408, Transportation Research Board, 1993).
- [68] A. K. Rathi y E. Lieberman, *Effectiveness of Traffic Restraint for a Congested Urban Network: A Simulation Study* (Transportation Research Record 1232, 1989).
- [69] E. W. Weisstein, *Cellular Automaton, MathWorld—A Wolfram Web Resource* (2004).
- [70] E. W. Weisstein, *Rule 90, MathWorld—A Wolfram Web Resource* (2004).
- [71] K. Nagel y M. Schreckenberg, *J. Physique* **2**, 2221 (1992).
- [72] J. Esser y M. Schreckenberg, *Int. J. Mod. Phys. C* **8**, 1025 (1997).
- [73] K. Nagel, J. Esser y M. Rickert, *Annual Review of Computational Physics* **7**, 151 (2000).
- [74] D. Chowdhury, L. Santen y A. Schadschneider, *Curr. Sci.* **77**, 411 (1999).
- [75] D. Chowdhury, L. Santen y A. Schadschneider, *Phys. Rep.* **329**, 199 (2000).

- [76] D. Helbing, *Verkehrsdynamik: Neue Physikalische Modellierungskonzepte* pág. 411 (1997).
- [77] D. E. Wolf, M. Schreckenberg y A. Bachem, *Traffic and Granular Flow* (Singapore: World Scientific, 1996).
- [78] M. Schreckenberg y D. E. Wolf, *Traffic and Granular Flow '97* (Springer, Berlin, 1998).
- [79] B. S. Kerner, *Phys. World* 8, 25 (1999).
- [80] B. S. Kerner, *Traffic and Granular Flow '97* (Springer, Berlin, 1998).
- [81] B. Schmittmann y R. K. P. Zia, *Phys. Rep.* 301, 45 (1998).
- [82] J. Krug, *Phys. Rev. Lett.* 67, 1882 (1991).
- [83] R. Barlovic, L. Santen, A. Schadschneider y M. Schreckenberg, *Eur. Phys. J* 5, 793 (1998).
- [84] L. Neubert, L. Santen, A. Schadschneider y M. Schreckenberg, *Phys. Rev. E* 60, 6480 (1999).
- [85] B. Faieta y B. Huberman, *Firefly: A Synchronization Strategy for Urban Traffic Control* (Xerox Palo Alto Research Center).
- [86] K. L. Sanford, *A Complex System Approach to Traffic Simulation* (Carnegie Mellon Un. Pittsburgh, 1994).
- [87] C. W. Reynolds, *Computer Graphics: Proceedings of SIGGRAPH '87* 21, 4 (1987).

- [88] M. Mataric, *Technical Report AI-TR-1495 MIT Artificial Intelligence Lab.* (MIT, 1994).
- [89] M. Baranger, *Chaos, Complexity, and Entropy*, MIT-CTP-3112 .
- [90] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley, 1994).
- [91] L. Reichl, *The Transition to Chaos* (Springer, New York, 1992).
- [92] Y. Bar-Yam, *Dynamics of Complex Systems* (Addison-Wesley, 1997).
- [93] R. Balian, *From Microphysics to Macrophysics* (Springer, Berlin, 1991-2).
- [94] B. Edmonds, *The Evolution of Complexity* (Kluwer, Dordrecht, 1996).
- [95] L. Nadel y D. S. (Eds.), *1993 Lectures in Complex Systems* (Santa Fe Institute, 1996).
- [96] G. Weisbuch, *Complex Systems Dynamics* (Addison Wesley Longman, 1991).
- [97] T. A. Kohler y G. J. Gumerman, *Dynamics of Human and Primate Societies* (Santa Fe Institute, 1999).
- [98] P. W. Anderson, K. Arrow y D. Pines, *The Economy as an Evolving Complex System* (Santa Fe Institute, 1988).
- [99] J. A. Hawkins y M. Gell-Mann, *The Evolution of Human Languages* (1992).
- [100] A. Turing, Proc. London Math. Soc., Series 2, 42, 230 (1936).
- [101] R. Solomonoff, Information and Control, Part I, No. 1, 7, 1 (1964).
- [102] R. Solomonoff, Information and Control, Part II, No. 2, 7, 224 (1964).

- [103] Y. Pomeau y P. Manneville, *Communications in Mathematical Physics* **74**, 189 (1980).
- [104] E. O. C. Grebogi, S.W. McDonald y J. A. Yorke, *Physics Letters* **113**, 495 (1986).
- [105] J.-P. Eckmann y D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985).
- [106] K. Nishinari, M. Treiber y D. Helbing, *Phys. Rev. E* **68**, 067101 (2003).
- [107] D. Huang, *Phys. Rev. E* **68**, 046112 (2003).
- [108] M. Treiber y D. Helbing, *Phys. Rev. E* **68**, 046119 (2003).
- [109] K. Hasebe, A. Nakayama y Y. Sugiyama, *Phys. Rev. E* **68**, 026102 (2003).
- [110] T. Nagatani, *Phys. Rev. E* **404**, 3534 (2000).
- [111] N. Moussa, *Phys. Rev. E* **68**, 036127 (2003).
- [112] B. S. Kerner y S. L. Klenov, *Phys. Rev. E* **68**, 036130 (2003).
- [113] T. Nagatani, *Rep. Prog. Phys.* **65**, 1331 (2002).
- [114] T. Nagatani, *Phys. Rev. E* **68**, 036107 (2003).
- [115] J. Kuhl, D. Evans, Y. Papelis, R. Romano y G. Watson, *IEEE Computer* (1995).
- [116] N. V. Findler y J. Stapp, *Journal of Transportation Engineering* **118**, 99110 (1992).
- [117] T. Nagatani, *Phys. Rev. E* **60**, 1535 (1999).

- [118] A. Benyoussef, H. Chakib y H. Ez-Zahraouy, *Phys. Rev. E* **68**, 026129 (2003).
- [119] D. Huang y W. Huang, *Phys. Rev. E* **67**, 056124 (2003).
- [120] J. B. Rundle, K. F. Tiampo, W. Klein y J. S. Martins, *Proc Natl Acad Sci* **67**, 2514 (2002).
- [121] N. Sarkovskii, *Ukr. Mat. Z.* **16**, 16 (1964).
- [122] A. Fouladi y J. A. Valdivia, *Phys. Rev. E.* **55**, 1315 (1997).
- [123] G. Boffetta, M. Cencini, M. Falcioni y A. Vulpiani, *Physics Reports* **356**, 367 (2002).