

UCH-FC

DOC-F

L431

MODULACION PERIODICA  
EN SISTEMAS NO LINEALES

Tesis

entregada a la

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Doctor en Ciencias con Mención en Física

por

Edmundo Lazo Núñez

Profesor Patrocinante: Dr. Miguel Kiwi Tichauer

Facultad de Ciencias  
Universidad de Chile

INFORME DE APROBACION  
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato:

Edmundo Lazo Núñez

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de Tesis para el grado de Doctor en Ciencias con Mención en Física.

Director de Tesis:

Dr. Miguel Kiwi T.

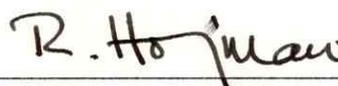


Comisión Informante de Tesis:

Dr. Patricio Cordero S.



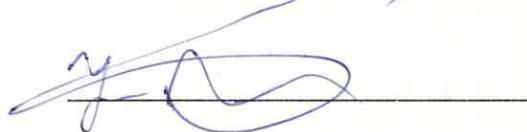
Dr. Roberto Hojman G.



Dr. Miguel Orszag P.



Dr. Jaime Roessler B.



Santiago, Enero de 1994

## AGRADECIMIENTOS

Mis especiales agradecimientos al Dr. Miguel Kiwi Tichauer, por su permanente apoyo demostrado durante el desarrollo de este trabajo de tesis. Debo destacar además su tenacidad y paciencia para lograr que yo llevara a cabo esta empresa.

Agradezco también el apoyo brindado por el Prof. Jaime Roessler Bonzi, quien además fue uno de los gestores del convenio de perfeccionamiento con la Universidad de Tarapacá, el cual hizo posible mi incorporación al programa de Doctorado en Física de la Universidad de Chile.

Agradezco a todos los Profesores del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile.

A todos mis colegas y amigos del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Tarapacá.

Y a mi familia por su permanente comprensión y apoyo.

*A mi esposa María Ester.*

*A mis hijos.*

*A mis padres.*

*A mis hermanos.*

# Indice de Contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción General</b>	<b>1</b>
	Mapas disipativos unidimensionales . . . . .	3
	Mapa de Poincaré . . . . .	4
	Caos determinista . . . . .	5
	Mapas del intervalo . . . . .	6
	Universalidad . . . . .	11
	Factores de Escala . . . . .	11
	Evidencia Experimental . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Efectos de una Modulación Periódica sobre el Mapa Logístico</b>	<b>15</b>
2.1	Introducción . . . . .	15
2.2	Modulación periódica sobre el parámetro de control . . . . .	18
2.2.1	$A_t$ dentro de un ciclo de período $2^n$ . . . . .	20
	Exponente de Lyapunov . . . . .	20
	Dinámica de la oscilación . . . . .	24
	Espectro de Potencia . . . . .	33
	El atractor bidimensional . . . . .	35
	Resonancias en las ventanas periódicas de la región caótica . .	36
2.2.2	$A_t$ cruza por ciclos de distinta periodicidad . . . . .	42
	Modulación de baja frecuencia . . . . .	42
	Caos temprano . . . . .	45

Trabadura de fases en el caso de varias periodicidades subya-	
centes . . . . .	47
2.2.3 $A_t$ cruza por zonas caóticas del mapa logístico . . . . .	49
Comportamiento adiabático . . . . .	49
Fuera de la región adiabática . . . . .	50
2.3 Modulación periódica aditiva . . . . .	53
Modulación resonante . . . . .	54
2.4 Resumen y conclusiones . . . . .	60
<b>3 Asimetría en el Máximo del Mapa Logístico</b>	<b>63</b>
3.1 Antecedentes y el modelo . . . . .	63
3.2 Resultados . . . . .	66
3.2.1 Asimetría en la amplitud (caso I) . . . . .	66
3.2.2 Asimetría en el exponente (caso II) . . . . .	66
3.2.3 Discontinuidad finita (caso III) . . . . .	69
Evolución del atractor . . . . .	69
Exponente de Lyapunov . . . . .	74
3.3 Resumen y Conclusiones . . . . .	76
<b>Apéndice</b>	<b>77</b>
<b>Referencias</b>	<b>80</b>

# Indice de Figuras

2.1	$\lambda$ versus $\omega$ dentro del ciclo de período 2 . . . . .	21
2.2	$\lambda$ versus $\omega$ dentro del ciclo de período $2^4$ . . . . .	21
2.3	Modulación crítica $D_c$ versus $A_0$ para el biciclo . . . . .	22
2.4	$\lambda$ versus $\omega$ para el ciclo de período 8 . . . . .	23
2.5	Atractor para $A_0 = 3.2$ , $D = 0.36$ para $\omega = 0.003785$ . . . . .	25
2.6	Atractor para $A_0 = 3.2$ , $D = 0.36$ para $\omega = 0.4585$ . . . . .	25
2.7	Atractor para $A_0 = 3.2$ , $D = 0.36$ para $\omega = 0.45919$ . . . . .	26
2.8	Atractor para $A_0 = 3.2$ , $D = 0.36$ para $\omega = 0.49976$ . . . . .	26
2.9	Puntos fijos de la aplicación $\{\eta_\nu(\Phi_0)\}$ . . . . .	28
2.10	Régimen resonante en el plano $(\omega, D)$ . . . . .	30
2.11	Espectro de potencia para $A_0 = 3.2$ , $D = 0.36$ y $\omega = 0.45919$ . . . . .	33
2.12	$\lambda$ versus $\omega$ para la ventana de período tres . . . . .	36
2.13	Atractor en la ventana de período 3 . . . . .	38
2.14	Espectro de potencia usando estroboscopio de período 3 . . . . .	38
2.15	Función de autocorrelación para múltiplos de período 3 . . . . .	40
2.16	Atractor en el plano $\Phi_t$ versus $X_t$ . . . . .	44
2.17	Atractor en el plano $A_t$ versus $X_t$ . . . . .	44
2.18	$\Phi_t$ versus $X_t$ fuera de la región adiabática . . . . .	45
2.19	$\lambda$ versus $\omega$ , para $A_0 = 3.4$ , $D = .3264$ . . . . .	46
2.20	Atractor $A_0 = 3.4$ , $D = .3264$ , y $\omega = 0.4955213$ . . . . .	48
2.21	Atractor $A_0 = 3.4$ , $D = 0.3264$ , y $\omega = 0.496$ . . . . .	48

2.22	Atractor para $A_0 = 3.5699\dots$ , $D = 0.428$ , y $\omega = 0.0000159\dots$ . . . . .	50
2.23	Atractor para $A_0 = 3.5699\dots$ , $D = 0.428$ , $\omega = 0.1999307\dots$ . . . . .	51
2.24	Atractor para $A_0 = 3.5699\dots$ , $D = 0.428$ , $\omega = 0.499635\dots$ . . . . .	51
2.25	Frontera régimen entrabado–desentrabado . . . . .	58
2.26	Detalle de frontera izquierda en régimen entrabado . . . . .	58
3.1	$A^*$ y $A^M$ , en el plano $(A_1, A_2)$ . . . . .	67
3.2	$\{\delta_k\}$ , para $k \gg 1$ . . . . .	67
3.3	Mapa con asimetría en el exponente . . . . .	68
3.4	Evolución del atractor . . . . .	68
3.5	Mapa discontinuo . . . . .	70
3.6	Evolución del atractor . . . . .	70
3.7	$f^6(X)$ versus $X$ . . . . .	73
3.8	Diagrama de fases . . . . .	73
3.9	$\lambda$ versus $A$ para caso III . . . . .	75
3.10	Detalle del gráfico $\lambda$ versus $A$ . . . . .	75

## RESUMEN

Este trabajo se enmarca dentro de la llamada Física no Lineal, y se refiere al estudio del comportamiento de mapas unidimensionales cuando son sometidos a ciertos cambios respecto de la definición usual de los mapas del intervalo.

En el capítulo I se hace una introducción general respecto del marco conceptual en el cual se desenvuelve la Física no Lineal y se describe el comportamiento de los mapas del intervalo (mapas disipativos unidimensionales), los que serán el objeto del estudio de la presente tesis.

En el capítulo II, se estudia el comportamiento de los atractores del mapa logístico, cuando se introduce una modulación externa de carácter periódica y continua, en dos modalidades diferentes: *i*) modulación sobre el parámetro de bifurcaciones del mapa, y *ii*) modulación aditiva sobre el mapa. En ambos casos ocurren notables cambios con respecto al comportamiento del mapa no modulado, obteniéndose por ejemplo, caos temprano, entrabamiento de frecuencias entre la frecuencia interna del mapa logístico y la frecuencia de la modulación externa, exponentes de Lyapunov negativos asociados a comportamientos dinámicos aparentemente impredecibles, etc.

En el capítulo III, se analizan los profundos cambios que ocurren en los atractores del mapa logístico, cuando se introduce una discontinuidad finita en el único máximo del mapa. Aquí cabe destacar la aparición de una nueva ruta al caos, muy diferente de la ruta al caos vía bifurcaciones del período.

# Capítulo 1

## Introducción General

Por *sistema dinámico* se entiende a todo proceso en evolución temporal, en el cual el futuro depende del pasado de una manera determinista. Esta evolución puede ser descrita por un conjunto finito de ecuaciones, el cual puede tomar diversas formas: ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones en derivadas parciales, aplicaciones o mapas sobre la recta o el plano, etc.

El origen de la teoría de los *sistemas dinámicos* se confunde con la mecánica clásica, y en su elaboración y desarrollo participó una gran variedad de científicos a lo largo de la historia[1,2,3,4]. Pero, sin lugar a dudas, los trabajos de H. Poincaré a fines del siglo pasado, le dieron una base sólida a esta teoría.

Las ecuaciones más simples de la física son de índole lineal; ellas son típicamente válidas para estímulos o perturbaciones pequeños. Para perturbaciones mayores surgen las contribuciones “no lineales”, caracterizadas porque *el estado del sistema modifica las leyes dinámicas de evolución*. Dicho de otro modo, los procesos lineales se caracterizan porque, dadas dos posibles “respuestas” del sistema  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  ante “estímulos”  $S_1$  y  $S_2$  (por ejemplo,  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  ondas en cierto medio) entonces la superposición  $\alpha \Phi_1 + \beta \Phi_2$  es la respuesta física del sistema al estímulo  $\alpha S_1 + \beta S_2$ . En el caso “no lineal” aparece algún tipo de interacción entre las respuestas  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ , teniéndose una respuesta más compleja, de modo que  $\Phi \neq \alpha \Phi_1 + \beta \Phi_2$ . Este

tipo de interacción da lugar, por ejemplo, a la vasta gama de fenómenos de la óptica no lineal.

En este siglo, uno de los hitos importantes en el desarrollo de la teoría no lineal, ocurre en 1963 cuando Lorentz[5], un científico del M.I.T., propone un modelo para la física atmosférica, basado en las ecuaciones de Navier-Stokes. La solución de las ecuaciones diferenciales se obtuvo por medio de un computador análogo, y ella (la solución) contiene los ingredientes básicos que darían origen a los conceptos más usuales de la física no lineal actual, tales como: bifurcaciones, caos, atractores extraños, etc. Posteriormente, en 1971, Ruelle y Takens[6], estudiando el problema de la turbulencia, avalaron la existencia de comportamientos irregulares en sistemas descritos por ecuaciones deterministas. Se inicia así el estudio de lo que hoy en día se llama *caos determinista*, concepto que denota el movimiento irregular o caótico que es generado por sistemas no lineales, cuyas leyes dinámicas determinan de manera única la evolución temporal del estado de un sistema, a partir del conocimiento de las condiciones iniciales.

Los trabajos anteriores motivaron una febril actividad por tratar de entender el comportamiento, un tanto "extraño", de las soluciones de las ecuaciones no lineales, desarrollándose un ataque paralelo en varios frentes: en la física teórica y experimental, en la matemática pura y aplicada, y en la ciencia de la computación. Es así como en 1976 R. May[7] publica un importante trabajo sobre la rica y variada dinámica que se obtiene a partir de una ecuación no lineal de tipo unidimensional, la cual describe el número de habitantes de una población de insectos en función del tiempo. Esta ecuación se denomina "ecuación logística" y a pesar de su simplicidad, ella muestra las características típicas de fenómenos no lineales más complejos, como la existencia de caos y el escenario previo a su aparición.

A partir de los trabajos de M. Feigenbaum[8,9] en 1978 y 1979, se comprende la existencia de características universales en los fenómenos caóticos, más allá de la naturaleza específica de los mismos. Estas características han sido confirmadas

experimentalmente a través de: Péndulo forzado[10]; Fluidos cerca del nacimiento de la turbulencia[11,12]; Juntura de Josephson[13], etc.

### Mapas disipativos unidimensionales

Al modelar sistemas físicos usualmente trabajamos con ecuaciones diferenciales ( $\vec{F} = m\vec{a}$  por ejemplo). Una de las tareas fundamentales consiste en describir el estado futuro del sistema, es decir en  $t > 0$ , a partir de condiciones iniciales dadas en el tiempo  $t = 0$ . Otra forma de describir el comportamiento de un sistema físico es a través de mapas discretos tal como

$$X_{n+1} = f(X_n), \quad (1.1)$$

donde  $f(X)$  es una función dada de  $X$ . En este caso, el sistema en el “tiempo discretizado”  $n$  está caracterizado por el número  $X_n$ , el cual queda determinado por el mapa discreto, a partir de condiciones iniciales dadas  $X_0$ . El índice discreto  $n$  no tiene necesariamente connotación temporal, también puede representar, por ejemplo, el sitio de una red cuasi-unidimensional[14]. Naturalmente es posible utilizar mapas discretos de mayor dimensionalidad para modelar un determinado sistema físico, como mapas bidimensionales por ejemplo

$$X_{n+1} = f(X_n, Y_n), \quad Y_{n+1} = g(X_n, Y_n) \quad (1.2)$$

La disipación en los sistemas dinámicos juega el rol de estabilizador global con respecto a las inestabilidades orbitales locales, y causa que el volumen que representa los estados iniciales en el espacio de fases se contraiga en el proceso de evolución. Esta contracción hace que el volumen del espacio de fases se aproxime a un objeto unidimensional en alguna de sus secciones, lo que implica que sistemas de mayor dimensionalidad comparten las mismas propiedades universales de los mapas unidimensionales.

En este trabajo estudiaremos mapas disipativos unidimensionales dada su sencillez respecto de sistemas de mayor dimensionalidad, y dado que ellos poseen una gran

riqueza matemática intrínseca. Además, existe una gran variedad de sistemas físicos de mayor dimensionalidad que experimentalmente desarrollan bifurcaciones y transiciones hacia el caos similares a la de estos sistemas unidimensionales[5,11,15,16].

### Mapa de Poincaré

Existe una manera de pasar desde un sistema dinámico de dimensionalidad  $D$  a un sistema de dimensión  $(D-1)$ , debida a Poincaré. Ella consiste básicamente en intersectar, mediante un hiperplano  $P$  adecuado, la trayectoria del sistema dinámico en el espacio de fases, generando de esta manera el llamado "mapa de Poincaré". Cada vez que la trayectoria atraviesa el hiperplano en el mismo sentido, la intersección define un punto, digamos  $q_0$ . La próxima vez que lo intersecta define el punto  $q_1$ , y así sucesivamente, formando una secuencia de puntos  $q_0, q_1, q_2, \dots$ . De este modo, a partir de una condición inicial dada sobre el sistema se obtiene la sección o mapa de Poincaré. Dado que el punto  $q_0$  determina completamente al punto  $q_1$ , y que  $q_1$  determina a  $q_2$ , y así sucesivamente, podemos definir el mapa  $T$  tal que  $q_{t+1} = T(q_t)$ . Es interesante remarcar que el mapa de Poincaré conduce a reemplazar la descripción en tiempo continuo de un sistema dinámico de mayor dimensionalidad, por una aplicación a intervalos de tiempo discreto. Sin embargo, las propiedades topológicas del sistema dinámico que le dio origen permanecen inalteradas. Así, si el sistema es disipativo habrá contracción de volúmenes en el espacio de fases, y del mismo modo la aplicación  $T$  contraerá áreas sobre el plano  $P$ . Si por sencillez consideramos un sistema dinámico de dimensión tres, el mapa  $T$  resulta ser bidimensional, entonces a partir del mapa  $T$  podemos definir el mapa unidimensional  $f$ , tomando en consideración sólo las abscisas  $X_t$  de los puntos  $q_t$ , de modo que  $X_{t+1} = f(X_t)$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Lo anterior es válido siempre y cuando para la aplicación  $f(X_t)$  se cumpla que para todo punto  $X_j$  sobre el eje real exista un único punto  $\{X_j, Y_j\}$  en el plano  $P$ .

## Caos determinista

Existen muchos sistemas físicos para los cuales se verifica que, pequeños cambios en las condiciones iniciales provocan también pequeños cambios en la respuesta de los sistemas. Sin embargo, existe una gran variedad de sistemas para los cuales ocurre exactamente lo contrario; es decir, pequeños cambios en las condiciones iniciales provocan dramáticos cambios en la evolución del sistema, obteniéndose, de hecho, respuestas que podríamos clasificar como caóticas, o completamente irregulares en el tiempo. Esta *sensible dependencia de las condiciones iniciales* que determina un comportamiento caótico en el tiempo no es en modo alguno excepcional, sino que por el contrario, *es una propiedad típica de muchos sistemas*. Estos comportamientos han sido encontrados en los más variados campos de la ciencia, tales como: en el nacimiento de la turbulencia de fluidos y gases[11,12], en reacciones químicas[16,18], celdas cardíacas estimuladas periódicamente[17], en láseres[19], en circuitos electrónicos[24], etc.

El comportamiento caótico o irregular en el tiempo, del cual estamos hablando, es lo que se denomina *Caos Determinista*, ya que poseemos un ecuación diferencial o un mapa discreto que *determina perfectamente* el comportamiento del sistema en el tiempo, si conociéramos su estado inicial con *infinita* precisión. Pero, basta una ligera alteración de tales condiciones (por debajo de cualquier posibilidad de discernir experimental o numéricamente) para obtener una dinámica completamente distinta en el largo plazo.

El comportamiento caótico de un sistema se puede medir a través del llamado exponente de Lyapunov ( $\lambda$ ), de modo que si  $\lambda > 0$  existe una sensible dependencia de las condiciones iniciales, lo que lleva a un estado cada vez más sensible a las condiciones iniciales, a medida que transcurre el tiempo. Si  $\lambda < 0$ , el sistema describe órbitas periódicas, y si  $\lambda = 0$  el sistema pasa de una periodicidad a otra, o bien muestra una conducta cuasi-periódica. En el caso de sistemas de dimensionalidad mayor que 1, basta que uno solo de los exponente de Lyapunov sea mayor que cero

para que el sistema presente un comportamiento caótico.

La definición rigurosa del exponente de Lyapunov  $\lambda$  es ésta: consideremos dos puntos iniciales (o semillas)  $X_0$ , y  $(X_0 + \delta)$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , muy próximos entre sí en el conjunto de puntos iniciales que van a dar a un mismo tipo de dinámica (técnicamente al mismo atractor; ver luego). Inicialmente, la distancia entre las dos semillas es  $\Delta X_0 = (X_0 + \delta - X_0)$ . La distancia que hay entre los dos puntos después que el sistema dinámico evolucionó, es decir, que la función  $f(X)$  actuó  $N$  veces es:  $\Delta X_N = (f^{(N)}(X_0 + \delta) - f^{(N)}(X_0))$ , donde  $f^{(N)}(X_0) = f(f \dots f(X_0))$ ,  $N$  veces. El exponente de Lyapunov  $\lambda$  mide la separación exponencial entre los puntos iniciales a través de la siguiente forma:

$$\Delta X_N = \Delta X_0 e^{N\lambda} \quad (1.3)$$

a partir de esta expresión y considerando el límite en que  $\Delta X_0 \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$  se obtiene la expresión para el exponente de Lyapunov  $\lambda$ :

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \ln \left( \left| \frac{\partial X_{t+1}}{\partial X_t} \right| \right). \quad (1.4)$$

Si la distancia entre los puntos, originalmente muy juntos en el conjunto de partida (cuena de atracción; ver luego) crece al pasar el tiempo, dichos puntos estarán muy separados en el atractor, pudiéndose hablar de una *sensible dependencia de las condiciones iniciales* o de *caos*. En este caso el exponente de Lyapunov  $\lambda$  será positivo.

### Mapas del intervalo

Los mapas disipativos unidimensionales o mapas de un intervalo, digamos  $[a, b]$ , son aquellos asociados con una función no lineal  $f$ , la cual posee las siguientes propiedades[1,2,3,4]:

- i)  $f(X)$  lleva puntos del intervalo  $[a, b]$  al intervalo  $[a, b]$ ; esto es  $f[a, b] \subseteq [a, b]$
- ii)  $f(X)$  posee un único máximo en el intervalo de definición,

- iii)  $f(X)$  es continuamente diferenciable una vez,
- iv)  $f(X)$  es función monótona creciente a la izquierda del máximo y monótona decreciente a la derecha del máximo,
- v) la derivada Schwarziana[1,2,4],  $D_{sch}f(X)$  es negativa en todo el intervalo de definición, salvo en el máximo, donde tiende a menos infinito. Aún más, si  $D_{sch} < 0$ , esto implica que las derivadas Schwarzianas de todas las funciones iteradas de  $f(X)$  son también negativas.

Uno de los mapas del intervalo mejor estudiados es el mapa logístico, y dada la importancia que tendrá dicho mapa en el presente trabajo es que adelantaremos algunos detalles sobre el mismo.

Las formas clásicas que asume la ecuación logística  $X_{t+1} = f(A, X_t)$  son:

$$a) X_{t+1} = A X_t (1 - X_t), \quad X \in [0, 1], \quad A \in [0, 4], \quad (1.5)$$

$$b) Y_{t+1} = 1 - B Y_t^2, \quad Y \in [-1, 1], \quad B \in [0, 2], \quad (1.6)$$

pudiéndose pasar de una forma a otra a través de la transformación

$$Y_t = \left(\frac{2}{2-A}\right)[1 - 2X_t], \quad B = \frac{1}{4}A(A-2) \quad (1.7)$$

donde  $A$  ( $B$ ) es el llamado parámetro ajustable o parámetro de bifurcaciones, el cual traduce las ligaduras ejercidas por el medio externo sobre del sistema, y  $t = 0, 1, 2, \dots$ . La ecuación logística se denomina también mapa de Feigenbaum[8, 9], en honor del físico norteamericano, quien junto con los franceses Couillet y Tresser[20], descubrieron los factores de escala asociados con  $X$  y con el parámetro ajustable  $A$ .

Otra manera de escribir un mapa del intervalo es la siguiente:

$$X_{t+1} = f^{(t)}(A, X_0), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

donde  $f^{(t)}$  denota la  $t$ -ésima iteración (no la derivada). En esta forma podemos ver que se genera la secuencia  $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ . Después de un cierto número de puntos que forman el transiente, la secuencia evoluciona hacia dos tipos posibles de estados finales: *secuencia periódica* de puntos, o *secuencia aperiódica*. Una secuencia es periódica de período  $p$  y se denomina *órbita* de período  $p$  o un  $p$ -ciclo del mapa  $f$ , si para todo  $i$  mayor que cierto  $N$ , se cumple que  $X_{i+p} = X_i$  y  $X_{i+j} \neq X_i \forall j < p$ . Aquí  $N$  representa el número de iteraciones transientes. Por definición, todos los puntos de un  $p$ -ciclo de  $f$  deben ser puntos fijos de la  $p$ -ésima iteración de  $f$ . Se denominan puntos fijos  $X_i^*$ , a las soluciones de la ecuación

$$X_i^* = f^{(p)}(A, X_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (1.9)$$

Para analizar si el punto fijo es estable ante la presencia de pequeñas perturbaciones, estudiemos los cambios que se producen al cambiar  $X_i^*$  por  $X_i^* + \varepsilon$ , donde  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; después de  $n$  iteraciones podemos escribir

$$X^* + \varepsilon_{n+1} = f^{(p)}(X_i^* + \varepsilon_n) \cong f^{(p)}(X_i^*) + \varepsilon_n \frac{df^{(p)}(X_i^*)}{dX}$$

al considerar sólo algunos términos de la expansión en serie por ser  $\varepsilon_n$  pequeño. Dado que  $X^* = f^{(p)}(X_i^*)$ , la expresión anterior queda

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \frac{df^{(p)}(X_i^*)}{dX},$$

en términos de la perturbación inicial,  $\varepsilon_0$ , obtenemos:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_0 \left( \frac{df^{(p)}(X_i^*)}{dX} \right)^n, \quad \varepsilon_0 \rightarrow 0.$$

en consecuencia,  $\varepsilon_{n+1} \rightarrow 0$  y los puntos fijos serán estables si  $\left| \frac{df^{(p)}(A, X)}{dX} \right|_{X=X_i^*} < 1$ , y entonces el  $p$ -ciclo es estable.

Para el mapa logístico en la forma  $X_{t+1} = A X_t (1 - X_t)$ , los puntos fijos son soluciones de la ecuación

$$X^* = A X^* (1 - X^*) \quad (1.10)$$

existiendo dos puntos fijos:  $X^* = 0$  y  $X^* = (1 - 1/A)$ . Ya que la derivada viene dada por  $f'(X) = A(1 - 2X)$ , podemos concluir que  $X^* = 0$  es estable si  $A < 1$ , y que  $X^* = (1 - 1/A)$  es estable si  $1 < A < 3$ . Así, para valores del parámetro ajustable tales que  $0 < A < 1$ , y para cualquier valor inicial de  $X$  entre 0 y 1, la secuencia de iteraciones  $\{X_t\}$  converge hacia el único punto  $X^* = 0$ , definiendo de esta forma un *atractor* (conjunto de puntos al cual converge el sistema dinámico cuando  $t \rightarrow \infty$ ). Del mismo modo encontramos que para  $1 < A < 3$ , e independientemente del valor inicial, encontramos que la secuencia de iteraciones  $\{X_t\}$  converge hacia el punto fijo estable  $X^* = (1 - 1/A)$ , el cual resulta ser también un atractor del mapa para este rango de valores del parámetro ajustable.

Para valores de  $A > 3$  no existen más puntos fijos estables del mapa logístico en la forma dada por (1.10). Debemos buscar entonces puntos fijos estables para mayores iteraciones del mapa, por ejemplo para el mapa iterado dos veces ( $p = 2$  en (1.9))

$$X^* = f(f(A, X^*)) = f^2(A, X^*).$$

En este caso existen dos soluciones inestables y dos soluciones estables, hasta que, para un cierto valor de  $A$ , las soluciones estables se vuelven también inestables. Nuevas soluciones estables deben ser buscadas, pero correspondientes a mayores iteraciones del mapa logístico (en este caso  $p = 4$  en (1.9)). El proceso de buscar nuevas regiones de valores del parámetro  $A$  donde haya soluciones estables se debe repetir indefinidamente, utilizando cada vez mayor número de iteraciones del mapa ( $p = 8, 16, 32, \dots$  en (1.9)). La pérdida de estabilidad de los puntos fijos al variar el parámetro ajustable  $A$  y el consecuente nacimiento de nuevas soluciones estables, es el mecanismo básico mediante el cual se explica el proceso de bifurcación de las soluciones.

En el mapa logístico se presentan dos rutas diferentes al caos[1,2,3,4]: a) ruta al caos vía duplicación del período; y b) ruta al caos vía bifurcación tangencial[21].

### a) Ruta al caos vía duplicación del período

Ya vimos que los puntos fijos estables dependen del valor del parámetro ajustable  $A$ . También vimos en el mapa logístico que se pasa de una solución estable ( $A < 3$ ) a dos soluciones estables ( $A > 3$ ), produciéndose una bifurcación o una duplicación del período al variar el parámetro de control.

En general, para los mapas unidimensionales en estudio, para un valor dado del parámetro  $A$  el atractor del sistema dinámico presenta  $2^{k-1}$  soluciones estables. Luego al seguir aumentando  $A$  se llega a un valor crítico,  $A = A_k$ , en que el ciclo  $2^{k-1}$  se torna inestable, y el sistema evoluciona hacia una nueva órbita estable de período  $2^k$ .

Esta situación se repite sistemáticamente al aumentar el parámetro  $A$ , de modo que los  $A_k$  se acumulan, para  $k \rightarrow \infty$ , en un valor tal,  $A^*$  ( $A^* = 3.5699\dots$  para el mapa logístico en la forma de relación (1.5)), que para  $A > A^*$  el sistema presenta una sensible dependencia de las condiciones iniciales, entrando en caos. Esta ruta se denomina también ruta al caos vía bifurcaciones de Feigenbaum. Más allá del punto de acumulación de las bifurcaciones existe una variedad de zonas caóticas ( $\lambda > 0$ ) que coexisten con una multiplicidad de ventanas periódicas ( $\lambda < 0$ ).

### b) Ruta intermitente al caos, o ruta al caos vía bifurcación tangencial

Consideremos una ventana periódica dentro de la región caótica, por ejemplo, la ventana de período 3, la cual nace en  $A_c = (1 + \sqrt{8})$ , exhibiendo tres soluciones estables para este valor del parámetro, las que se duplican sistemáticamente al aumentar  $A$ , llegando al caos vía bifurcaciones de Feigenbaum. Si consideramos valores de  $A$  ligeramente menores que  $A_c$  los tres puntos fijos con que se inicia la ventana pierden su estabilidad, ya que las curvas  $Y = f(f(f(X)))$  y  $Y = X$  dejan de cortarse, separándose tangencialmente, existiendo una "estrecha garganta" entre ellas. De este modo, al pasar el tiempo, los valores de  $X$  se acumulan en la vecindad de los puntos del ciclo de período tres. Sin embargo, dada su inestabilidad, no convergen hacia ellos, sino que después de un tiempo de permanencia en la citada vecindad

dichos puntos evolucionan hacia otros sitios, en busca de la solución estable. Esta situación se repite de manera intermitente en el transcurso del tiempo. Se observa que cualquier pequeña variación en las condiciones iniciales provoca la generación de secuencias muy diferentes. Esta sensible dependencia de las condiciones iniciales define un comportamiento caótico intermitente ( $\lambda > 0$ ).

## Universalidad

Se ha logrado demostrar que muchos sistemas muestran, como función de un parámetro externo, transiciones similares del orden al caos. Esto significa que se espera el mismo comportamiento no lineal de todo un conjunto de sistemas en estudio, cuyas ecuaciones de definición poseen las propiedades de un mapa del intervalo, si además existe la misma forma funcional en torno al único máximo de las distintas aplicaciones (universalidad métrica)[8,20,22]. Así, podemos ver que en la ruta al caos vía duplicación del período, la cascada de bifurcaciones converge hacia el punto de acumulación  $A^*$  a través de una progresión geométrica en la forma  $A_k = A^* - \text{cte } \delta^{-k}$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , donde  $\delta$  es el llamado *factor de escala* en la dirección  $A$ , el cual resulta ser una constante universal. Es decir, se obtiene el mismo valor  $\delta = 4.6692 \dots$  independientemente de la función  $f$  considerada, siempre que el único máximo sea del mismo orden (cuadrático en este caso). Además existe una variedad de factores de escala asociados con  $X$ , de los cuales el factor  $\alpha$  es uno de los principales.

La existencia de un conjunto de factores de escala en el punto de acumulación de las bifurcaciones, caracteriza el llamado *comportamiento fractal* de los atractores, los cuales presentan un comportamiento autosimilar o autorreplicado, es decir, se comportan de manera análoga o similar a cualquier escala de observación.

## Factores de Escala

Para toda órbita de periodo  $k$ , existe un valor  $\tilde{A}_k$  del parámetro de control para el cual la órbita incluye el *punto crítico* (valor máximo) del mapa. Para este valor de

$A$ , el ciclo es llamado *superestable*, nombre que deriva del hecho que el exponente de Lyapunov va a  $-\infty$ , es decir,  $\lambda(\tilde{A}_k) = -\infty$ . Siguiendo la secuencia de iteraciones en el ciclo superestable, es posible obtener una *palabra* formada por letras  $R$  y  $L$ , de acuerdo a si las iteraciones en la órbita van a dar a la derecha (R) o a la izquierda (L) del máximo. Esta "palabra" es llamada la *Secuencia Universal* o la *U-secuencia*[23] del ciclo. En el caso de la primera cascada de Feigenbaum, correspondiente a la ecuación logística, la secuencia universal toma la forma:  $- < R < RLR < RLRRLR < \dots$ , lo que corresponde a la siguiente secuencia de bifurcaciones:  $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$ . En general, para conocer completa la secuencia universal correspondiente al ciclo superestable  $A_n$ , basta conocer la secuencia  $A_{n-1}$ , pues se cumple que

$$A_n = A_{n-1} H A_{n-1}$$

donde  $H = R$  si el número de letras  $R$  en la secuencia  $A_{n-1}$  es par, y donde  $H = L$  si el número de letras  $R$  en la secuencia  $A_{n-1}$  es impar.

Por medio de los  $\tilde{A}_k$  es posible definir los factores de escala  $\delta_k$  y  $\alpha_k$ :

$$\delta_k = \frac{\tilde{A}_{k+1} - \tilde{A}_k}{\tilde{A}_{k+2} - \tilde{A}_{k+1}} \quad (1.11)$$

$$\alpha_k = \frac{d_k}{d_{k+1}}, \quad (1.12)$$

donde  $d_k = f_{\tilde{A}_k}^{2^{k-1}}(1/2) - (1/2)$ . En el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  los factores de escala convergen a valores universales, los cuales dependen sólo del tipo de máximo del mapa en estudio.

Los valores de los factores de escala para la primera cascada de Feigenbaum son  $\delta = 4.6692\dots$  y  $\alpha = 2.5029\dots$ . En cada ventana es posible calcular también dichos factores de escala, así por ejemplo en la ventana de período 3 los factores de escala son  $\delta = 55.26\dots$  y  $\alpha = 9.277\dots$ ; y para la ventana de período 4 se tiene  $\delta = 981.6\dots$  y  $\alpha = 38.82\dots$

## Evidencia Experimental

Actualmente existe una abundante evidencia experimental sobre el comportamiento no lineal de diversos sistemas dinámicos, tanto en el terreno de la física como de otras ciencias tales como la matemática, la biología, la química, la medicina, etc.[25,26,27]

Históricamente, las primeras confirmaciones experimentales en el contexto de la ruta al caos vía bifurcaciones de Feigenbaum, así como respecto a la universalidad de los factores de escala, fueron llevadas a cabo por Libchaber[11,12] en 1982 sobre el experimento de Rayleigh-Benard, utilizando helio y mercurio. En el mismo año, Testa, Pérez y Jeffries[24], estudiaron el comportamiento del circuito en serie LRC, controlado por un oscilador externo, y conteniendo un diodo como componente no lineal. El circuito queda descrito por la ecuación  $L\ddot{q} + R\dot{q} + V_c = V_0 \text{sen}(2\pi f t)$ , donde  $V_c$  es el voltaje a través del diodo. Se usó  $V_0$  como parámetro de bifurcaciones para una frecuencia  $f$  fija, y se usó el voltaje medido a través del diodo  $V_c$  como la respuesta del sistema. En este trabajo se reporta la primera medición experimental de un diagrama de bifurcaciones prácticamente completo, incluyendo las cascadas de bifurcaciones, las bandas caóticas y las ventanas periódicas. Dicho diagrama presenta en el plano  $(V_0, V_c)$  una estructura muy similar a la obtenida para la ecuación logística en el plano  $(A, X)$ . A su vez, los factores de escala obtenidos experimentalmente se corresponden muy bien con las predicciones teóricas.

Es en el contexto de los mapas del intervalo, mapas disipativos unidimensionales, que se plantea el trabajo descrito en esta tesis.

El capítulo 1 corresponde a esta introducción general sobre sistemas dinámicos unidimensionales en la cual se ha desarrollado un esquema general (con cierta intención pedagógica) con algunos de los principales aspectos involucrados en la teoría de sistemas dinámicos unidimensionales.

En el Capítulo 2 se aplica una modulación periódica y continua sobre el mapa logístico. La modulación periódica se introduce de dos formas diferentes: a) modulación sobre el parámetro de bifurcaciones; y b) modulación aditiva sobre el mapa.

Estas modulaciones producen notables efectos en la dinámica del mapa logístico, tales como la aparición de caos temprano y el fenómeno de entrabamiento (locking) entre la frecuencia interna del mapa logístico y la frecuencia de la modulación externa. Otro interesante fenómeno ocurre en la ventana de período tres, donde es posible encontrar procesos dinámicos aparentemente impredecibles asociados a exponentes de Lyapunov negativos.

Finalmente, en el Capítulo 3 se estudian los profundos cambios que se producen en la ruta al caos vía duplicación del período de la ecuación logística cuando se introduce una discontinuidad finita en el máximo del mapa. Se obtiene una variedad de cascadas inversas, separadas por algunas cascadas directas. En este capítulo se estudia además el comportamiento del mapa logístico ante la presencia de una asimetría en el máximo.

## Capítulo 2

### Efectos de una Modulación

### Periódica sobre el Mapa Logístico

#### 2.1 Introducción

Como se mencionó más arriba, los mapas del intervalo [1,2,3,4,8,9] han sido profusamente estudiados en la última década, dada su sencillez, y el hecho que poseen una variedad de comportamientos interesantes, tales como bifurcación por duplicación del período y rutas al caos. Uno de los mapas del intervalo más simples y más estudiados[8,9,28] es el mapa logístico,  $X_{t+1} = AX_t(1 - X_t)$ , donde el parámetro de bifurcación  $A$  es constante en cada iteración del mapa. Sin embargo, si se incluye algún tipo de dependencia temporal en el citado parámetro de bifurcaciones,  $A = A_t$ , una gran variedad de fenómenos pueden ser descritos cualitativamente. Se ha estudiado el caso en que  $A_t$  asume valores de una secuencia de valores periódicos o al azar [29,30,31]. Una dependencia lineal en el tiempo fue introducida por Kapral y Mandel [32]. Por otra parte, Crutchfield et al.[33], incorporaron ruido blanco en el parámetro  $A$  y en los puntos de la órbita  $X_t$  del mapa logístico, introduciendo de esta forma también una dependencia temporal.

En este capítulo consideramos fundamentalmente dos formas de modulación

periódica y continua sobre el mapa logístico: a) dependencia temporal del parámetro de control, y b) modulación en forma aditiva.

La introducción de una modulación periódica produce modificaciones cualitativas en la dinámica del mapa logístico, tales como: caos temprano, retardo o desaparición de bifurcaciones, ordenamiento del caos, etc.; aun cuando la modulación sea relativamente pequeña. Así, existen regiones del espacio de parámetros del problema, en las cuales se produce el fenómeno de entrabamiento de fase entre la frecuencia de la modulación periódica externa y la frecuencia interna determinada por el parámetro de control de la ecuación logística.

En el contexto de entrabamiento de fases, varios fenómenos naturales ilustran el comportamiento no lineal resonante. Algunos siglos atrás, Huygens observó entrabamiento de fase entre dos relojes puestos uno a espaldas del otro. También en la Mecánica Celeste existen varios ejemplos interesantes, tal como la relación conmensurable entre el período de rotación y el período sinódico de Venus. El entrabamiento de fase también ha sido observado en el estudio de arritmias cardíacas, en reacciones químicas, y en una variedad de fenómenos físicos. Para tratar de obtener una comprensión global de este fenómeno se ha estudiado intensamente, durante la última década, la resonancia de osciladores no lineales[28]. Una de las maneras en que se ha atacado este problema es a través de los mapas del círculo[27,28], y otra a través de osciladores no lineales perturbados por fuerzas periódicas percusivas[34]. En ambos casos se concluyó que la frecuencia  $\omega_0$  del sistema dinámico se entraba con la frecuencia de la perturbación externa  $\omega$ , cuando ésta se encuentra en alguna de las "lenguas de Arnold" del espacio de parámetros[27,28,34]. En cada una de estas "lenguas" la razón entre las frecuencias es un número racional, existiendo "lenguas" para cualquier valor racional de  $\omega_0/\omega$ .

Los osciladores no lineales acoplados constituyen otro ejemplo donde el fenómeno de resonancia y de entrabamiento de frecuencias puede estar presente. En este contexto podemos mencionar el estudio de Hogg y Huberman[35] de dos mapas

logísticos acoplados a través de la diferencia de sus amplitudes. Cuando dos osciladores se acoplan, puede producirse un entramamiento de fase entre ambos, o bien observarse un comportamiento cuasiperiódico, caracterizado por una gran región del espacio de parámetros en la cual el exponente de Lyapunov se anula, separando ciclos de periodicidad definida.

En un contexto diferente, un mapa logístico con un parámetro de bifurcaciones tiempo dependiente,  $A_t$ , fue estudiado por Rössler *et al.*[29,30]. Sin embargo, se prestó atención al caso en que  $A_t$  asume sólo dos valores diferentes. Se observaron efectos notables al aplicar una perturbación cíclica de baja frecuencia sobre una órbita de período dos, que generándose comportamientos caóticos para valores muy pequeños del parámetro de bifurcaciones; tal fenómeno se denomina *caos temprano*.

Adicionalmente, el efecto de una modulación parcialmente al azar sobre un mapa logístico ha sido discutido en la literatura[29,30,33,36,14]. A pesar de que en tales casos la interpretación en términos de resonancias particulares es menos obvia, la aparición de caos temprano[29,30,37,38] sugiere un efecto algo similar al observado para la perturbación periódica antes mencionada.

Recientemente se han publicado trabajos experimentales, muy relacionados con los resultados formales recién descritos. La oxidación catalítica del  $CO$  en una superficie  $Pt(1,1,0)$  muestra una frecuencia natural de oscilación[25,26]. Pero, una pequeña modulación periódica de la presión parcial de  $O_2$  modifica la reacción química, entabando su período de oscilación a la perturbación externa. La oscilación termoacústica de una columna de gas inducida por el gradiente de temperatura, y perturbada por una fuerza externa[39], es otro ejemplo de efectos de resonancias en dinámica no lineal, donde cuasiperiodicidad, entramamiento de frecuencia y aparición de caos se hacen presentes.

## 2.2 Modulación periódica sobre el parámetro de control

Estudiaremos los efectos que se producen en los atractores del mapa logístico cuando se introduce una modulación periódica en el parámetro de bifurcaciones  $A$ . El mapa que se obtiene resulta ser tiempo dependiente, es decir, no-autónomo, y queda definido a través de la siguiente forma

$$X_{t+1} = f_t(X_t), \quad \text{donde} \quad f_t(X) = A_t X (1 - X). \quad (2.1)$$

La modulación periódica será introducida a través de las siguientes definiciones

$$A_t = A(\Phi_t) = A_o + \frac{D}{2} U(\Phi), \quad (2.2)$$

donde

$$\Phi_{t+1} = \Phi_t + \omega, \quad y \quad A(\Phi) = A(\Phi + 1), \quad (2.3)$$

además imponemos que  $U(\Phi) = -U(\Phi + \frac{1}{2}) = U(\Phi + 1)$ . La función  $U(\Phi)$  oscila periódica y simétricamente entre  $-1$  y  $+1$ . De esta forma,  $A_o$  corresponde al valor medio de  $A_t$ ,  $D$  es la amplitud de la modulación y  $\omega$  es su frecuencia. Es precisamente este último parámetro el que consideraremos de fundamental importancia en todo nuestro estudio.

Como una manera de asegurar la independendencia de nuestros resultados del modelo particular de modulación periódica empleada,  $U(\Phi)$ , hemos estudiado las siguientes dos alternativas:

$$U(\Phi) = \begin{cases} 4|\Phi| - 1, & -\frac{1}{2} \leq \Phi \leq \frac{1}{2} \quad (\text{modulación triangular}) \\ \cos(2\pi\Phi) & \quad (\text{modulación armónica}) \end{cases} \quad (2.4)$$

A pesar de las formas diferentes de ambas modulaciones, los resultados son cualitativamente equivalentes (presentando algunas diferencias importantes). Por ello,

nuestros cálculos computacionales acá presentados estarán limitados al caso de la modulación triangular.

Las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) que definen nuestro sistema dinámico tienen una doble interpretación:

- i) como un mapa unidimensional  $X_t$  dependiente del tiempo (mapa no-autónomo),
- ii) como un mapa bidimensional  $(X_t, \Phi_t) \rightarrow (X_{t+1}, \Phi_{t+1})$ .

En el Apéndice se demuestra que uno de los exponentes de Lyapunov del mapa bidimensional es cero y que el otro coincide con el exponente de Lyapunov del mapa unidimensional  $\lambda(\omega)$ . Dicho exponente de Lyapunov viene dado por

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left( \left| \frac{\partial X_N}{\partial X_0} \right| \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \ln \left( \left| \frac{\partial X_{t+1}}{\partial X_t} \right| \right). \quad (2.5)$$

Ya que  $U(\Phi) = U(-\Phi)$ , el signo de la frecuencia  $\omega$  resulta ser irrelevante para la dinámica del sistema. En consecuencia, el exponente de Lyapunov satisface la condición  $\lambda(\omega) = \lambda(-\omega) = \lambda(1 \pm \omega)$  y es suficiente calcularlo para valores de la frecuencia en el intervalo:  $0 \leq \omega \leq 0.5$ . Además trabajaremos con distintos valores de  $A$  y  $D$ , donde  $A$  determina el "comportamiento no perturbado" de  $X_t$ , y  $D$  es la magnitud de la perturbación.

Algunos casos típicos que serán estudiados en este capítulo son:

- i)  $A_t$  se mueve en el interior de un período fijo del mapa logístico estático (por ejemplo,  $3 < A_0 - D/2 < A_0 + D/2 < 3.4495 \dots$ , para período 2,
- ii)  $A_t$  recorre zonas de distinta periodicidad, cruzando por los puntos de bifurcación,
- iii)  $A_t$  recorre zonas periódicas y caóticas.

El valor de la fase inicial en la Ec. (2.2), que denotaremos  $\Phi_0$ , es irrelevante, mientras la frecuencia  $\omega$  no sea un número racional simple. Este último requisito asegura la ergodicidad de la variable  $\Phi_t$ . El caso especial en que  $\omega = \frac{1}{P}$ , donde  $P$  es la periodicidad intrínseca del mapa logístico asociado con el parámetro de bifurcaciones  $A_0$ , será tratado separadamente. Obviamente, en este último caso la fase inicial  $\Phi_0$  resulta ser relevante, ya que la variable asociada a la fase llega a ser

cíclica, es decir,  $\Phi_{t+P} = \Phi_t$ .

## 2.2.1 $A_t$ dentro de un ciclo de período $2^n$

### Exponente de Lyapunov

Comenzaremos analizando un ciclo  $2^n$ , dentro de la primera cascada de bifurcaciones de Feigenbaum (*i.e.*  $3 < A_t < 3.5699\dots$ ). En la Fig. 2.1 se muestra el exponente de Lyapunov  $\lambda(\omega)$  *versus* la frecuencia de la modulación  $\omega$ , para  $A_0 = 3.2$ ,  $D = 0.36$ . De esta forma  $A_t$  está siempre dentro del ciclo de período dos (*i.e.*  $3 < A_t < 1 + \sqrt{6}$ ). Se observa un comportamiento no caótico, determinado por el ciclo de período 2 del caso no modulado, ya que  $\lambda(\omega) \leq 0$ , a través de todo el rango de valores de  $\omega$ . La característica más notable de este gráfico es el pico muy estrecho centrado alrededor de  $\omega = \omega_M \sim 0.4591\dots$  con  $\lambda(\omega_M) = \lambda(1-\omega_M) = 0$  como valor máximo.

Al ir bajando la amplitud de la modulación,  $D$ , los picos de  $\lambda(\omega)$  en  $\omega_M$  y  $1 - \omega_M$ , convergen el uno hacia el otro, alcanzando el punto medio,  $\omega_M = \frac{1}{2}$ , para cierta modulación crítica  $D_c$ . Este hecho sugiere interpretar el pico como un efecto de resonancia, pues  $\omega_0 = \frac{1}{2}$  corresponde a la frecuencia natural del mapa logístico (u oscilador logístico) no perturbado dado que estamos considerando el caso  $A_0 = 3.2$  (período 2). Cuando  $D < D_c$ , desaparece el par de picos en torno a la frecuencia no perturbada  $\omega = \frac{1}{2}$ .

Otro ejemplo ilustrativo corresponde al ciclo de período  $2^4$  mostrado en la Fig. 2.2, donde  $A_0 = 3.5652$ ,  $D = 0.001$ . Aquí podemos ver claramente las anomalías sugeridas en la Fig. 2.1, las que consisten en profundos mínimos rodeados de picos alrededor de la frecuencia del caso no perturbado,  $\omega = \frac{1}{16}$ , y sus múltiplos de resonancias correspondientes a este ciclo:  $\omega = \pm \frac{3}{16}, \pm \frac{5}{16}, \pm \frac{7}{16}$ , donde los exponentes de Lyapunov se anulan en los máximos. Este comportamiento resulta enigmático

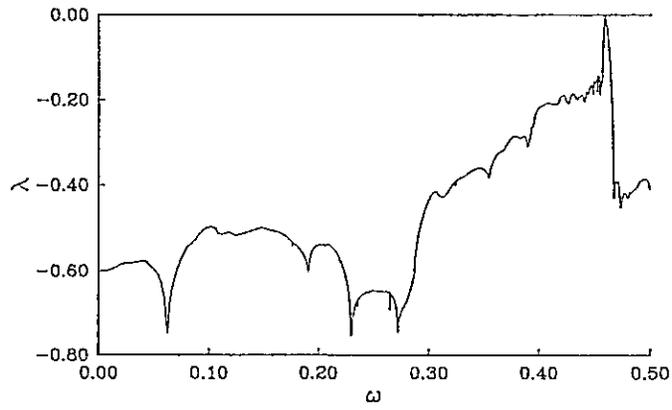


Figura 2.1:  $\lambda$  versus  $\omega$  dentro del ciclo de período 2,  $A_0 = 3.2$ ,  $D = 0.36$

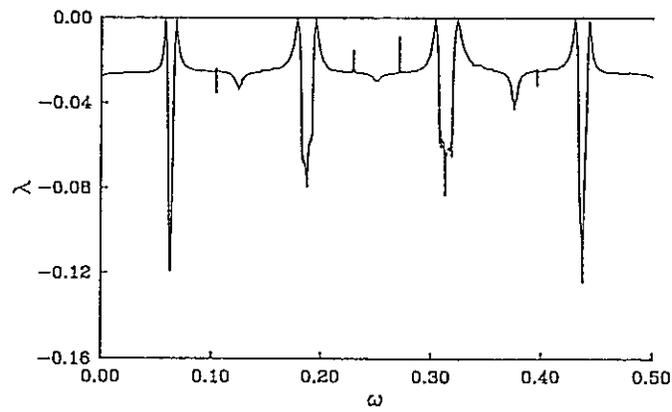


Figura 2.2:  $\lambda$  versus  $\omega$  dentro del ciclo de período  $2^4$ ,  $A_0 = 3.5652$ ,  $D = 0.001$

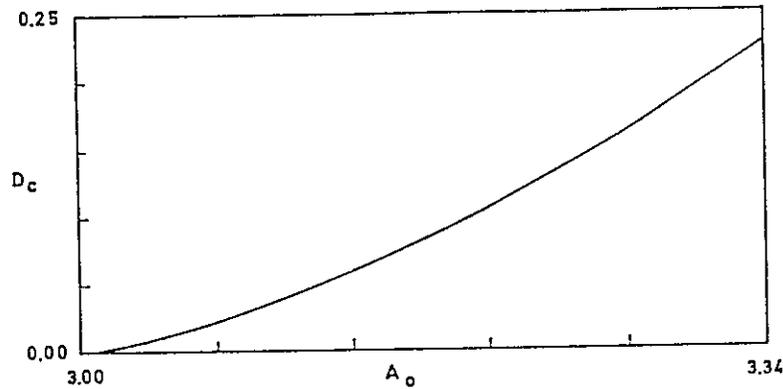


Figura 2.3: Modulación crítica  $D_c$  versus  $A_0$  para el biciclo

en principio, toda vez que la presencia de una “bifurcación” asociada a un pico de valor máximo cero no es fácil de entender en el contexto de nuestro modelo.

Otros ejemplos de  $A_t$  en el rango de ciclos de período  $2^n$  muestran las mismas irregularidades del exponente de Lyapunov cuando  $\omega$  está cerca de la frecuencia de resonancia. Si  $D > D_c(A_0)$  existen los picos en el exponente de Lyapunov, cuando  $D \rightarrow D_c$  la posición de los dos picos que encierran una frecuencia de resonancia convergen uno hacia el otro. Para  $D < D_c$  los picos desaparecen.

Para  $A_0$  al comienzo de un ciclo dado se necesita una pequeña modulación para inducir comportamientos anómalos alrededor de las frecuencias de resonancias, pero se necesitan valores más altos de la modulación cuando  $A_0$  aumenta. Esta proposición puede ser verificada a través del examen de la Fig. 2.3, donde se muestra un gráfico de  $D_c(A_0)$  para el caso del ciclo de período dos, donde  $3 \leq A_t \leq 1 + \sqrt{6}$ .

En términos generales, cuando consideramos un ciclo periódico dentro de la primera cascada de Feigenbaum,  $P = 2^n$ , y  $A_t$  se mantiene a la izquierda del punto superestable ( $A_s$ ) del P-ciclo, entonces, las curvas  $\lambda$  versus  $\omega$  no están excesivamente estructuradas, siendo los picos de resonancia los más notorios. Los máximos

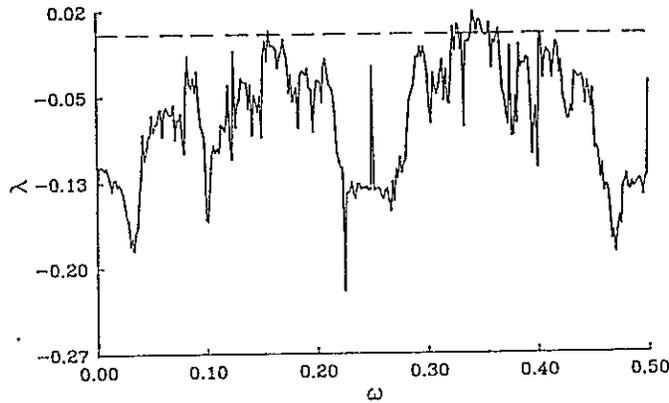


Figura 2.4:  $\lambda$  versus  $\omega$  para el ciclo de período 8:  $A_0 = 3.559524$ ,  $D = 0.0085$  Se observa *caos temprano*

del exponente de Lyapunov alcanzan el valor marginal  $\lambda(\omega) = 0$ .

Por el contrario, cuando  $A_t$  logra llegar hasta el lado derecho del punto superestable la forma global de  $\lambda(\omega)$  es más intrincada. En este caso, y para el ciclo de período dos, la condición de resonancia no se logra alcanzar, ya que el valor de la modulación crítica  $D_c$  aumenta con  $A_0$  (ver Fig. 2.3). Para otros ciclos periódicos y  $A_s < A_t$ , el régimen de resonancia lleva a picos y depresiones menos prominentes alrededor de las frecuencias de resonancia y el exponente de Lyapunov puede llegar a ser positivo en el máximo. Este último caso corresponde al fenómeno denominado *caos temprano*[29,30,37,38].

Tal comportamiento se ilustra en la Fig. 2.4 donde mostramos el exponente de Lyapunov cuando  $A_t$  se encuentra completamente dentro del ciclo de período 8 y a la derecha del punto superestable  $A_s^{(8)} = 3.5546408\dots$ . Allí se eligió  $A_0 = 3.559524$ , y  $D = 0.0085$ , de modo que  $3.555274 < A_t < 3.563774$ . A pesar del hecho que  $A_t$  nunca alcanza el punto de acumulación de las bifurcaciones del mapa logístico,  $A^* = 3.5699\dots$ , el comportamiento caótico es evidente para un cierto número de

valores de la frecuencia  $\omega$  ( $\omega \sim 0.35$ ), donde el exponente de Lyapunov muestra picos de gran magnitud, los cuales alcanzan valores positivos.

### Dinámica de la oscilación

Para lograr una mejor comprensión del significado exacto de los picos en el exponente de Lyapunov alrededor de las frecuencias de modulación resonantes, analizamos el atractor del mapa bidimensional  $(X_t, \Phi_t) \rightarrow (X_{t+1}, \Phi_{t+1})$ .

En general, si  $A_t$  está siempre en el dominio de un  $P$ -ciclo del mapa logístico estático y la modulación  $D$  no es demasiado grande, el atractor  $\{X_t, \Phi_t\}$  contiene  $P$  curvas, digamos  $\{\xi_\nu(\Phi), \nu = 1, 2, \dots, P\}$ . Cada curva está relacionada con uno de los  $P$  puntos fijos del caso estático. Un punto  $X_t$  va a parar a cada curva  $\xi_\nu(\Phi)$  con una periodicidad  $P$ . Esto es, usando un estroboscopio de período  $P$  y una fase temporal conveniente,  $t_0$ , el punto  $X_t$  puede ser asignado a una curva dada  $\xi_\nu(\Phi)$ ; en este caso  $t = t_0 + mP$  y  $m$  es un entero. El no cumplimiento de este comportamiento general indica un importante cambio cualitativo en la dinámica del oscilador logístico perturbado.

En las figuras 2.5–2.8 mostramos el atractor  $\{X_t, \Phi_t\}$  para  $A_0 = 3.2$ ,  $D = 0.36$ , esto es, para los parámetros de la Fig. 2.1 asociados a un ciclo de período 2. Hemos hecho un barrido de valores de  $\omega$  poniendo especial énfasis en la vecindad de la frecuencia propia del oscilador logístico,  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ . Para ilustrar una situación representativa, previa a algún posible “efecto resonante”, mostramos en la Fig. 2.5 un atractor para un valor muy bajo de la frecuencia,  $\omega = 0.003785\dots$ . Allí las curvas  $\xi_\nu(\Phi)$  siguen muy de cerca los dos puntos fijos instantáneos del mapa logístico para un valor dado del parámetro de bifurcaciones,  $A = A(\Phi)$ . El resultado obtenido se corresponde bien con lo esperado en este límite adiabático, en el cual el sistema dinámico sigue muy de cerca las soluciones del mapa logístico subyacente.

En la Fig. 2.6 hemos escogido  $\omega = 0.4585\dots$ , frecuencia ligeramente a la iz-

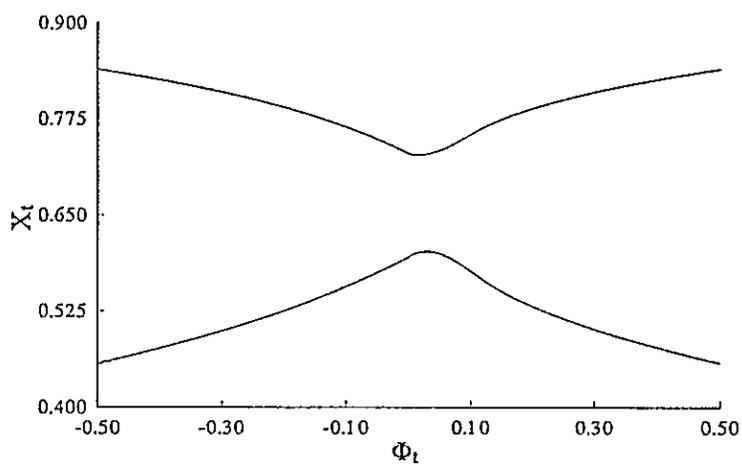


Figura 2.5: Atrator para  $A_0 = 3.2$ ,  $D = 0.36$  para  $\omega = 0.003785 \dots$

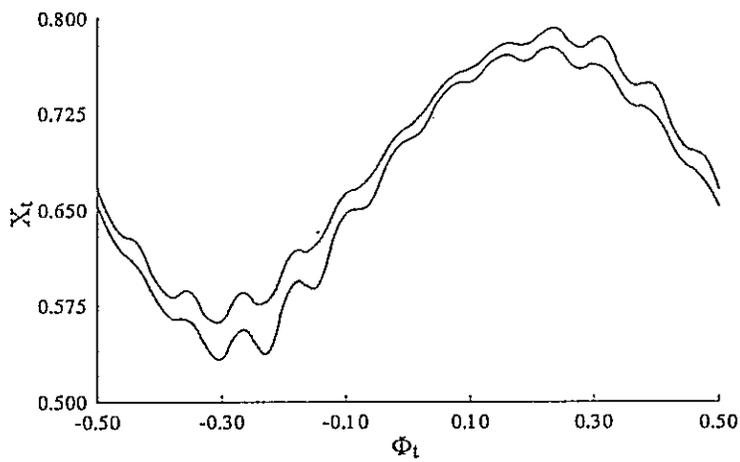


Figura 2.6: Atrator para  $A_0 = 3.2$ ,  $D = 0.36$  para  $\omega = 0.4585 \dots$

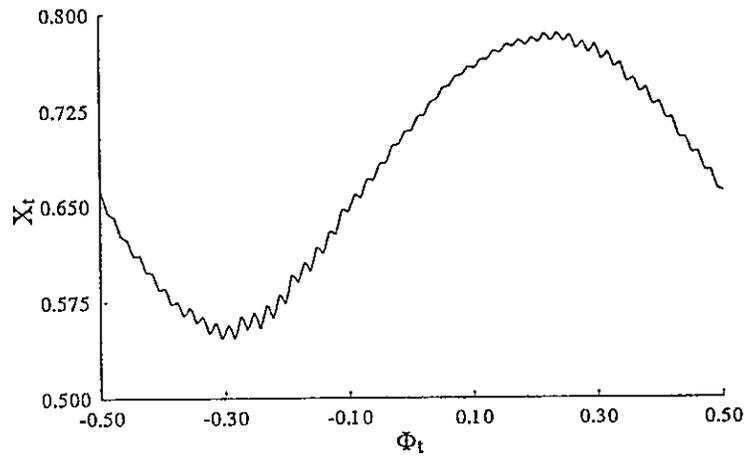


Figura 2.7: Atrator para  $A_0 = 3.2$ ,  $D = 0.36$  para  $\omega = 0.45919\dots$

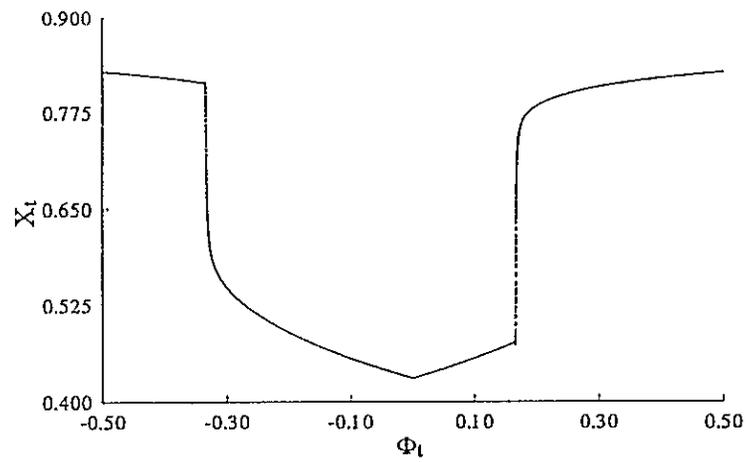


Figura 2.8: Atrator para  $A_0 = 3.2$ ,  $D = 0.36$  para  $\omega = 0.49976\dots$

quierda del pico más pronunciado de la Fig. 2.1. En este caso las curvas  $\xi_\nu(\Phi)$  han cambiado notablemente produciéndose un gran acercamiento entre ellas, al mismo tiempo que muestran oscilaciones de longitud de onda corta. En la Fig. 2.7, donde  $\omega = 0.45919\dots$ , nos encontramos ligeramente a la derecha del pico más alto de la Fig. 2.1 (dentro de la depresión alrededor de la frecuencia resonante  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ ). En este caso el atractor ha sufrido un notable cambio cualitativo, ya que las dos curvas  $\xi_\nu(\Phi)$  se han fundido una con la otra. El proceso de fusión ocurre cuando  $\omega$  cruza justo por el pico más alto de la Fig. 2.1. En la Fig. 2.8 hemos escogido una frecuencia muchísimo más cercana a la frecuencia de resonancia  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ , esto es:  $\omega = 0.49973\dots$ . La fusión de bandas está también presente en este caso, pero ahora es evidente que la curva fusionada está formada de dos secciones. En cada sección la curva es casi horizontal y la conexión entre ellas se realiza a través de una trayectoria casi vertical; el punto  $X_t$  salta entre estas secciones en una forma casi discontinua, como puede verse en la figura. Al aumentar ligeramente la frecuencia, de modo que  $\omega$  cruce el valor 0.5, el atractor sufre un cambio discontinuo, lo que corresponde a una reflexión especular respecto a  $\Phi = 0$ .

Para comprender este sorprendente comportamiento del atractor para  $\omega \sim 0.5$  hemos estudiado el límite de la resonancia exacta que, en este caso de período 2 y  $A_0 = 3.26$ , corresponde a  $\omega = \frac{1}{2}$ . Aquí  $A_t$  oscila temporalmente entre dos valores, digamos  $R = A(\Phi_0) = A_{2t}$  y  $S = A(\Phi_0 + \frac{1}{2}) = A_{2t+1}$ , y como se indicó previamente, la fase inicial  $\Phi_0$  constituye un parámetro relevante.

Consideremos la aplicación compuesta[29,30]

$$F(\Phi_0, X) = f_{2t+1}[f_{2t}(X)] = f_S[f_R(X)], \quad (2.6)$$

donde se cumple que  $X_{2t+2} = F(\Phi_0, X_{2t})$ . Esto es,  $F(\Phi_0, X)$  reproduce el efecto de un estroboscopio de período dos. Hemos analizado los puntos fijos de esta aplicación; y para modulación baja,  $D \simeq 0$ , es claro que  $F(\Phi_0, X)$  posee dos puntos fijos,  $\eta_1(\Phi_0)$  y  $\eta_2(\Phi_0)$ ,  $\forall \Phi_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ; esto se debe al biciclo del mapa logístico subyacente. En la Fig. 2.9 mostramos  $\eta_\nu(\Phi_0)$  para los parámetros que estamos empleando  $A_0 = 3.2$ ,

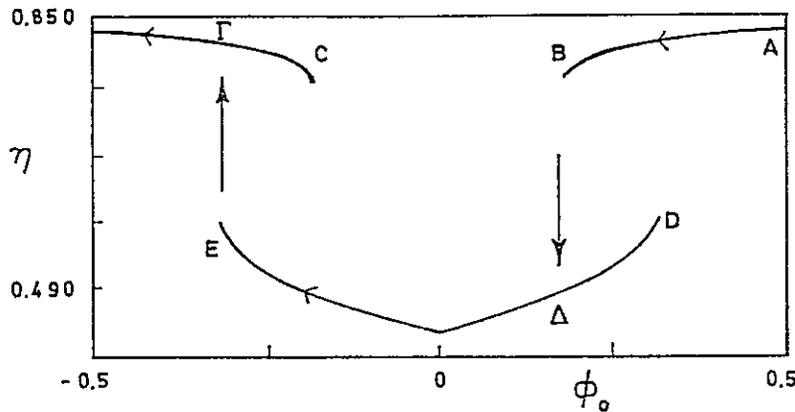


Figura 2.9: Puntos fijos de la aplicación 2.6,  $\{\eta_\nu(\Phi_0)\}$  para  $A_0 = 3.2, D = 0.36$  y  $\omega = 1/2$ . La rama superior (inferior) corresponde a  $\nu = 1$  ( $2$ )

$D = 0.36$ . Los detalles más relevantes en esa figura son las brechas en ambas ramas; en la rama superior la brecha se extiende desde  $C$  hasta  $B$ , mientras que en la inferior la brecha corresponde a la región  $D \rightarrow 0.5 = -0.5 \rightarrow E$ . Si  $\Phi_0$  cae en la región donde existe una brecha,  $F(\Phi_0, X)$  tiene un solo punto fijo; en cualquier otro caso existen dos puntos fijos.

Volviendo al problema dinámico, consideremos una frecuencia cercana a la frecuencia de resonancia,  $\omega = \frac{1}{2} + \epsilon$ , con  $\epsilon \ll 1$ . Al pasar el tiempo, la fase de la imagen estroboscópica  $X_{2t}$  aumenta lentamente,  $\Phi = 2t\epsilon$ . Esto es,  $X_{2t}$  permanece cerca del punto fijo  $\eta_\nu(\Phi)$  de la aplicación (2.6) antes que la fase  $\Phi$  haya cambiado de manera significativa. Para ser específicos, consideremos el caso de la Fig. 2.8 donde  $\epsilon < 0$  y consecuentemente  $X_{2t}$  se mueve lentamente de derecha a izquierda en la Fig. 2.9, viajando desde el punto  $A$  hacia el punto  $B$  en la banda  $\eta_1(\Phi)$ . Pero cuando  $X_{2t}$  alcanza el punto  $B$ , esta banda de atracción desaparece y la imagen estroboscópica se mueve erráticamente en una zona inestable antes de alcanzar la otra banda de atracción  $\eta_2(\Phi)$ , en el punto  $\Delta$ . Después de esto,  $X_{2t}$  se mueve a

través de la banda  $\eta_2(\Phi)$ , viajando desde el punto  $\Delta$  al punto  $E$ , donde esta banda de atracción también finaliza. Posteriormente la órbita de  $X_{2t}$  se vuelve nuevamente inestable hasta que regresa a la banda  $\eta_1(\Phi)$  en el punto  $\Gamma$ . Finalmente  $X_{2t}$  recorre la trayectoria  $\Gamma \rightarrow A \rightarrow B$  cerrando el ciclo (recordemos que los puntos  $\Phi = 0.5$  y  $\Phi = -0.5$  coinciden). Pero el ciclo  $A \rightarrow B \rightarrow \Delta \rightarrow E \rightarrow \Gamma \rightarrow A$  en la Fig. 2.9 corresponde precisamente al atractor mostrado en la Fig. 2.8. De este modo podemos comprender la relación no-trivial entre la Fig. 2.8, la cual contiene una única banda de atracción, y la Fig. 2.9 donde existen dos bandas, aunque cada una de ellas posee una brecha.

Debemos enfatizar que  $X_{2t}$  nunca alcanza las posiciones  $C$  o  $D$ , debido al hecho que la trayectoria es recorrida de derecha a izquierda. En el caso opuesto,  $\omega - \frac{1}{2} = \epsilon \geq 0$ , el punto  $X_{2t}$  viaja sobre su órbita de izquierda a derecha, lo que le permite alcanzar las posiciones  $C$  y  $D$ , sin embargo, ahora la trayectoria no llega a los puntos  $E$  o  $B$ . Lo último implica un cambio abrupto en la forma del atractor cuando  $\omega$  cruza el valor resonante  $\omega = 0.5$ , como se observó numéricamente con anterioridad.

Siempre que la banda adiabática  $\eta_\nu(\Phi)$  pueda ser usada como referencia para racionalizar la órbita de  $X_{2t}$ , la última explicación permanece cualitativamente válida. Bajo estas condiciones *una única banda dinámica*  $\xi(\Phi)$  forma el atractor, a pesar del hecho que *el valor de  $A_0$  corresponde al ciclo de período dos* del mapa logístico.

Al crecer la separación entre frecuencia externa y frecuencia resonante  $|\omega - \frac{1}{2}| = |\epsilon|$ , la fase  $\Phi_{2t} = 2t\epsilon$  también varía rápidamente, lo que implica que el punto  $X_{2t}$  no tiene tiempo suficiente para converger con precisión al punto fijo  $\eta(\Phi_{2t})$  del mapa estático  $F(\Phi_{2t}, X)$ . De este modo, las bandas "estática" ( $\eta_\nu(\Phi)$ ) y "dinámica" ( $\xi(\Phi)$ ), se separan una de la otra en la medida que  $|\epsilon|$  aumenta. Sin embargo, la primera explicación del "régimen de banda fundida" continua siendo cualitativamente válida, siempre que el punto  $X_{2t}$  *no pueda saltar la brecha* que separa ambas bandas cayendo de este modo en la zona inestable.

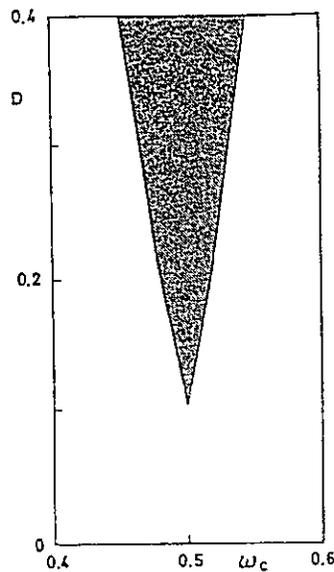


Figura 2.10: Régimen resonante (región encima de la curva) en el plano  $(\omega, D)$  para  $A_0 = 3.2$ . La frontera de la región sombreada corresponde a la frecuencia crítica  $\omega_c(D)$ .

Para ser específicos, consideremos un punto  $X_{2t}$  que se mueve sobre una versión deformada de la banda  $\eta_1(\Phi)$  de la Fig. 2.9 (deformación debida a los efectos dinámicos). Cuando la separación de la frecuencia de resonancia  $|\epsilon|$  aumenta sobre un valor crítico, sea  $\epsilon_c(A_0, D)$  dicho valor, el punto  $X_{2t}$  viaja en las cercanías de  $\eta_1$  con una “rapidez” lo suficientemente grande como para “saltar” la brecha entre  $B$  y  $C$  sin caer en la banda inferior  $\eta_2(\Phi)$ . De este modo  $X_{2t}$  permanece siempre en la banda superior. Por otro lado, la otra imagen estroboscópica  $X_{2t+1}$  siempre permanece en la banda inferior, recobrando de este modo el primer esquema de un atractor formado por dos bandas  $\{\xi_\nu(\Phi), \nu = 1, 2\}$  para  $\{(X_t, \Phi_t)\}$  asociado al ciclo de período dos del mapa logístico. En la Fig. 2.10 se muestra un gráfico de la frecuencia crítica,  $\omega_c(A_0, D) = 0.5 \pm \epsilon_c$  versus  $D$  para  $A_0 = 3.2$ . La región que se encuentra sobre la curva corresponde al régimen de banda fundida.

Como era de esperar, cuando la frecuencia está en la vecindad de la separación crítica de la frecuencia de resonancia,  $\epsilon_c$ , la órbita llega a ser ligeramente errática, ya

que  $X_t$  permanece largo tiempo en una zona inestable, bastante lejos de los atractores de referencia  $\eta_\nu(\Phi)$ . Estas inestabilidades implican un pequeño exponente de Lyapunov, como es efectivamente el caso del pico de  $\lambda(\omega)$  en la vecindad de  $|\omega - 0.5| = \epsilon_c$ , donde el valor crítico está definido por  $\lambda(\epsilon_c) = 0$ . Estas inestabilidades son también evidentes en la extraña forma de los atractores mostrados en las Fig. 2.6 y en la Fig. 2.7, los cuales corresponden a valores de separación de la frecuencia de resonancia, ligeramente mayores y menores que  $\epsilon_c$ , respectivamente.

Naturalmente, la magnitud de  $\epsilon_c$  disminuye cuando la brecha de  $\eta_\nu(\Phi)$  disminuye, y desaparece para  $D = D_c$ , esto es,  $\omega_c(A_0, D_c) = \frac{1}{2}$ . De este modo, para  $D < D_c$  el mapa  $f_S[f_R(X)]$  de la relación (2.6) tiene dos puntos fijos para todo valor de  $\Phi_0$ . Las condiciones para la existencia de uno o dos puntos fijos de la aplicación (2.6) fueron discutidos en la Ref. [30]. Estas condiciones permiten obtener  $D_c(A_0)$ .

Ahora mostraremos que el caso de una única banda de atracción  $\xi(\Phi)$ , la cual aparece cuando  $|\omega - 0.5| < \epsilon_c$ , puede ser interpretada como un fenómeno de entrabamiento (locking) entre la amplitud del oscilador  $X_t$  y la modulación externa. Consideremos como ejemplo el caso previo de un ciclo de período dos subyacente ( $D = 0$ ). Si se aplica una pequeña modulación, entonces el punto  $X_t$  oscila entre dos posiciones bien definidas dando origen al atractor de dos bandas  $\{\xi_\nu(\Phi)\}$  de la Fig. 2.5. La alternancia entre estas dos bandas está gobernada por la frecuencia "interna"  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ ; esto es, cuando  $X_{2t}$  cae en  $\xi_1$ , entonces,  $X_{2t+1}$  cae en  $\xi_2$ . Este hecho puede ser descrito por una fase "interna"

$$\Phi_{in} = \omega_0 t = \frac{1}{2} t, \quad (2.7)$$

donde  $\Phi_{in} \equiv \Phi_{in} - 1$ , y

$$\Phi_{in} = \begin{cases} 0 & \text{si } X_t \in \xi_1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } X_t \in \xi_2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Este esquema permanece cualitativamente válido aun para valores grandes de la modulación.

Podemos asociar con  $\xi_1$  y  $\xi_2$  las dos posiciones extremas de nuestro oscilador logístico, alternándose entre estos extremos con período 2 ( $\omega_0 = \frac{1}{2}$ ). Sin embargo, si la modulación es suficientemente grande y la separación entre las frecuencias “externa”  $\omega$ , e interna  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ , es menor que  $\epsilon_c$ , el esquema anterior deja de ser válido. En este caso las dos amplitudes extremas de nuestro oscilador corresponden a las bandas  $\eta_1$  y  $\eta_2$  (los puntos fijos de la aplicación (2.6)). Por ejemplo, en el caso de la Fig. 2.9,  $X_{2t}$  se encuentra en la banda  $\eta_2$  cuando  $\Phi_t$  se encuentra dentro del intervalo entre  $E$  y  $\Delta$ , y en la banda  $\eta_1$  en otro caso, *independientemente de la paridad temporal*. Esto es,  $X_{2t}$  puede estar en cualquiera de las bandas  $\eta_1$  or  $\eta_2$ , y lo mismo vale para  $X_{2t+1}$ . Consecuentemente, en el régimen entrabado, el atractor es invariante bajo la aplicación estroboscópica de período dos, en contraste con el régimen desentrabado donde una de las bandas  $\xi_\nu$  desaparece.

De esta forma, la posición de  $X_t$  dentro de una banda dada *está gobernada por la fase*  $\Phi_t = \omega t$ , y por lo tanto, la alternancia de bandas de nuestro oscilador logístico está gobernada por la frecuencia *externa*  $\omega$ , en contraste con el caso previo no-resonante donde la alternación de bandas estaba gobernada por la frecuencia *interna*  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ . Lo anterior implica que la fase interna del mapa logístico se entraba a la fase de la modulación externa al entrar a la región de resonancia.

Por lo anteriormente visto, la región encima de la curva de la Fig. 2.10 corresponde al régimen entrabado. En la literatura esta región es llamada una lengua de Arnold[27,28,34]. Una característica especial en nuestro caso consiste en que la “lengua” sólo existe a partir de un valor crítico de la modulación,  $D > D_c$ . Esto contrasta con los mapas del círculo[27,28] y el oscilador forzado no-lineal de Ref.[34] donde basta una perturbación periódica infinitesimal para llevar al sistema a un régimen entrabado. En este sentido, la gran “lengua” encontrada por nosotros está más estrechamente relacionada con las brechas que aparecen en el estudio de la ecuación de Mathieu con término amortiguador[2].

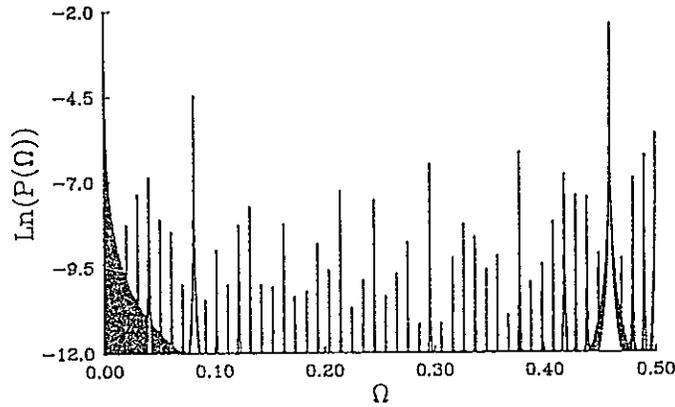


Figura 2.11: Espectro de potencia correspondiente a la Fig. 2.7, para  $A_0 = 3.2$ ,  $D = 0.36$  y  $\omega = 0.45919\dots$ . Notese el pico pronunciado justo en la frecuencia de modulación  $\Omega = 0.45919 = \omega$ .

### Espectro de Potencia

Una manera eficiente de analizar cuales son las frecuencias más relevantes involucradas en la dinámica del sistema y que se usa mucho en el ámbito experimental para diferenciar atractores caóticos de atractores periódicos, es el llamado *espectro de potencia*  $P(\Omega)$ , el cual, básicamente, no es más que la transformada de Fourier discreta de la serie de puntos  $\{X_t\}$  del atractor y se define de la siguiente forma:

$$P(\Omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N e^{2\pi i t \Omega} X_t \right|^2 \quad (2.9)$$

En la Fig. 2.11 mostramos el espectro de potencia correspondiente al atractor de la Fig. 2.7, con  $A_0 = 3.2$ ,  $D = 0.36$  y  $\omega = 0.45919\dots$ . Esta figura confirma la presencia de un entramamiento de fase, ya que exhibe un pico muy pronunciado justo en la frecuencia de modulación  $\Omega = \omega = 0.45919\dots$

El espectro de potencia contiene a su vez una gran variedad de picos de cierta

relevancia, comportamiento que es típico de sistemas no lineales, ya que éste responde no sólo con la frecuencia de estímulo, sino que además suma las frecuencias externas varias veces como veremos a continuación.

En el caso de entramamiento los  $X_t$  se agrupan en una sola banda  $\xi(\Phi_t)$ ,

$$X_t = \xi(\Phi_t) = \xi(\Phi_0 + \omega t), \quad (2.10)$$

dado que  $\xi(\Phi) = \xi(\Phi + 1)$ , se cumple que

$$\xi(\Phi_t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \xi_{\nu} e^{2\pi i \nu (\Phi_0 + \omega t)} \quad (2.11)$$

y al absorber la fase  $\Phi_0$  en  $\xi_{\nu}$ , obtenemos

$$\xi(\Phi_t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \xi_{\nu} e^{2\pi i \nu \omega t}. \quad (2.12)$$

A partir de un conjunto de puntos del atractor  $\{X_t\}_{t=0}^{N-1}$ , y escogiendo  $\Omega_{\lambda} = \frac{\lambda}{N}$ , con  $\lambda = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , definimos

$$p(\Omega_{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} X_t e^{-2\pi i \Omega_{\lambda} t} \quad (2.13)$$

en virtud de la relación (2.10) y (2.12) obtenemos

$$p(\Omega_{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{t=0}^{N-1} \xi_{\nu} e^{2\pi i (\nu \omega - \Omega_{\lambda}) t}. \quad (2.14)$$

Consideremos la sumatoria sobre  $t$

$$\sum_{t=0}^{N-1} e^{2\pi i \alpha t} = \left( \frac{1 - e^{2\pi i N \alpha}}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \right) = e^{\pi i \alpha (N-1)} \frac{\text{sen}(\pi N \alpha)}{\text{sen}(\pi \alpha)} = f(\alpha), \quad (2.15)$$

la función  $f(\alpha)$  es periódica en  $\alpha$ :  $f(\alpha + 1) = f(\alpha)$  y presenta un pico en torno a  $\alpha = 0$

$$f(\alpha)|_{N \rightarrow \infty} \cong \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\alpha - l)|_{(\alpha - l) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_N(\alpha - l) \quad (2.16)$$

acá  $\delta_N(\alpha)$  representa una "delta ancha" en torno a  $\alpha = 0$ , de ancho  $\sim O(\frac{1}{N})$ ; La relación (2.14) queda

$$p(\Omega_{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_N(\nu \omega - \Omega_{\lambda} - l) \xi_{\nu} \quad (2.17)$$

Dado que el producto de deltas con distintos centros es nulo, y dado que

$$\frac{1}{N} [\delta_N(\alpha)]^2 |_{\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} = \frac{1}{N} \frac{[\text{sen}(\pi N \alpha)]^2}{[\text{sen}(\pi \alpha)]^2} |_{\alpha \cong 0} \cong \frac{[\text{sen}(\pi N \alpha)]^2}{[N \pi^2 \alpha^2]} |_{N \rightarrow \infty} = \delta_N(\alpha), \quad (2.18)$$

el espectro de potencia se puede escribir

$$P(\Omega_\lambda) = |p(\Omega_\lambda)|^2 \cong \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta_N(\nu \omega - l - \Omega_\lambda) |\xi_\nu|^2 \quad (2.19)$$

en consecuencia sólo aparecen contribuciones de  $\Omega = \nu \omega - l$ , es decir,  $\Omega = \nu \omega \pmod{1}$ .

### El atractor bidimensional

El estudio del atractor  $\{X_t, \Phi_t\}$  para la modulación resonante de ciclos del tipo  $2^n$ , con  $n \geq 2$ , se puede llevar a cabo por una metodología similar a la utilizada para el caso del ciclo de período dos. Si la modulación se escoge con la limitación que  $A_t$  permanezca siempre dentro del rango de estabilidad del ciclo  $2^n$ , entonces las bandas del atractor  $\{\xi_\nu, \nu = 1, 2, \dots, 2^n\}$  se funden de a pares cuando  $\omega$  se encuentra en cierta vecindad de la frecuencia propia del oscilador logístico,  $\omega_0 = 1/2^n$ , o de algún múltiplo impar de ella,  $\omega \simeq 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$ . Lo anterior bajo la premisa que la modulación  $D$  sea mayor que cierto valor crítico  $D_c(\omega)$ . El proceso de fusión resonante de bandas se lleva a cabo de modo de "revertir" el proceso de bifurcaciones del mapa no perturbado; más concretamente, se funden entre sí aquellas bandas procedentes de la misma rama donde la bifurcación  $2^{n-1} \rightarrow 2^n$  tiene lugar. Se puede constatar que después de la fusión el período del sistema es  $2^{n-1}$ ; para ello basta usar un estroboscopio de período  $2^n$ , obteniéndose el mismo atractor  $\{X_t, \Phi_t\}$  que el que se obtiene mediante un estroboscopio de período  $2^{n-1}$ . Para inducir nuevas fusiones de bandas se requieren mayores amplitudes de modulación, pero esto último haría salir a  $A_t$  fuera del rango de estabilidad del ciclo de período  $2^n$  en consideración.

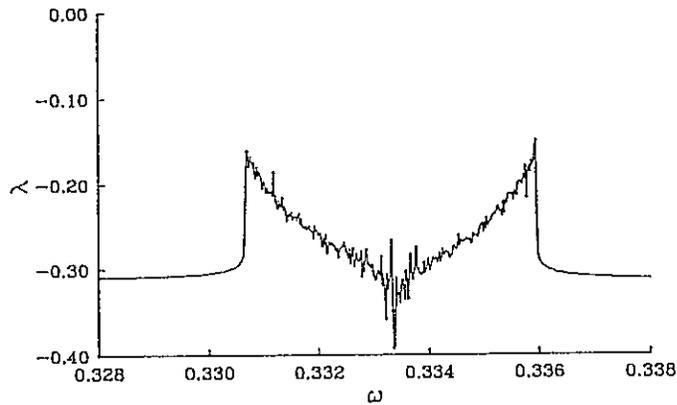


Figura 2.12:  $\lambda$  versus  $\omega$  para la ventana de período tres, para  $A_0 = 3.8345$ ,  $D = 0.012$

### Resonancias en las ventanas periódicas de la región caótica

Cuando  $A_t$  recorre una ventana periódica dentro de la región caótica, la modulación tiene un efecto similar a aquellos observados en la primera cascada de bifurcación, a pesar de que, en general, los picos del exponente de Lyapunov asociados a las frecuencias de resonancia no alcanzan el valor crítico  $\lambda = 0$ . Como un ejemplo, en la Fig. 2.12 mostramos un gráfico del exponente de Lyapunov *versus* la frecuencia, correspondiente a la ventana de período tres del mapa logístico para  $A_0 = 3.8345$ ,  $D = 0.012$ . El fenómeno de resonancia alrededor de  $\omega = \frac{1}{3}$  es bastante evidente.

En la Fig. 2.13 mostramos el atractor  $\{X_t, \Phi_t\}$ , con  $\omega = 0.3308437\dots$ , para los mismos parámetros de la Fig. 2.12, es decir,  $A_0 = 3.8345$ ,  $D = 0.012$ . Se usó un estroboscopio de período 3 (i.e. sólo se retienen los valores de  $X_{3t}$ ). El período 3 subyacente se evidencia a través de la presencia de las tres líneas casi horizontales. Sin embargo, ya que se está usando un estroboscopio de período 3, sólo una de las tres líneas debería ser visible si no existieran “transiciones resonantes” interbandas,

tal como ocurre cuando  $\omega$  se encuentra fuera del intervalo de frecuencias delimitado por los picos de resonancia de la Fig. 2.12. De este modo, una vez más se muestra que el efecto de la modulación resonante consiste en generar transiciones de banda que destruyen la secuencia natural de alternancia del sistema débilmente perturbado: banda inferior  $\rightarrow$  del medio  $\rightarrow$  superior  $\rightarrow$  inferior  $\dots$ . Esta secuencia coincide con el orden en que se recorre el 3-ciclo en el caso del mapa no perturbado en la ventana de período 3.

El espectro de potencia correspondiente a esta situación, pero sin estroboscopio (ver Fig. 2.14), exhibe un pico bastante ancho centrado alrededor de la frecuencia de modulación  $\omega = 0.3308437\dots$ , pero al mismo tiempo es posible observar una multitud de picos de menor tamaño en posiciones dadas por  $j\omega \pmod{1}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , este último fenómeno ya fue explicado en relación a la Fig. 2.11.

Consideremos una desviación relativamente grande de la frecuencia de resonancia, como la asociada con la Fig. 2.13, pero tomemos una amplitud  $D$  suficientemente grande, de modo de permanecer dentro de la región de resonancia; bajo estas premisas,  $X_{3t}$  tiene una probabilidad finita de cruzar la discontinuidad de la banda  $\xi_1(\Phi)$  y alcanzar la otra sección de dicha banda, explicando de este modo la presencia de una pequeña brecha en cada banda. A la izquierda de cada brecha aparece una amplia región "manchada" (recordemos que  $\omega < \frac{1}{3}$ , y que  $X_{3t}$  se mueve de derecha a izquierda). Esta región "manchada" corresponde a la trayectoria inestable de  $X_{3t}$ , dando lugar a una distribución de puntos prácticamente al azar. En contraste, para valores menores de  $\varepsilon = |\frac{1}{3} - \omega|$ , el punto  $X_{3t}$  siempre cambia de banda cuando alcanza la brecha.

En la ventana de período tres se observa un efecto muy peculiar cuando seguimos al punto  $X_{3t}$  al recorrer una determinada banda, digamos  $\xi_1$ . Cuando la discontinuidad se alcanza, la órbita se desestabiliza viajando por las zonas repulsivas del mapa logístico hasta que se alcanza nuevamente una banda estable. Pero, en el caso que estamos analizando, *es imposible predecir* en qué nueva banda estabilizará su órbita

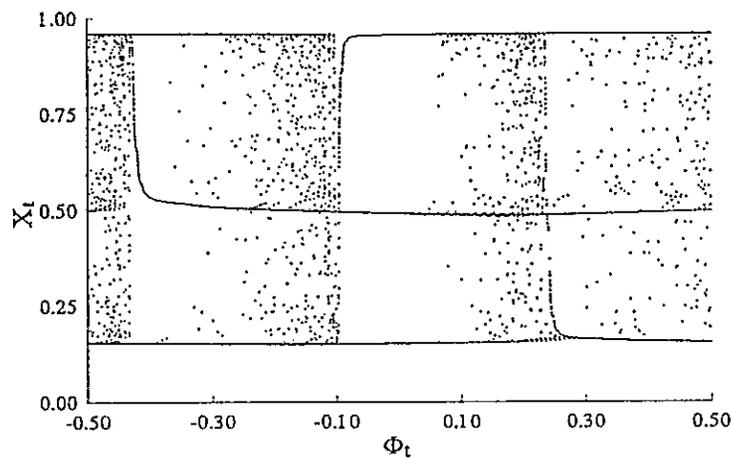


Figura 2.13: Atractor  $\{X_t, \Phi_t\}$  en la ventana de período 3, para  $A_0 = 3.8345$ ,  $D = 0.012$ ,  $\omega = 0.3308437\dots$ . Se usó un estroboscopio de período 3.

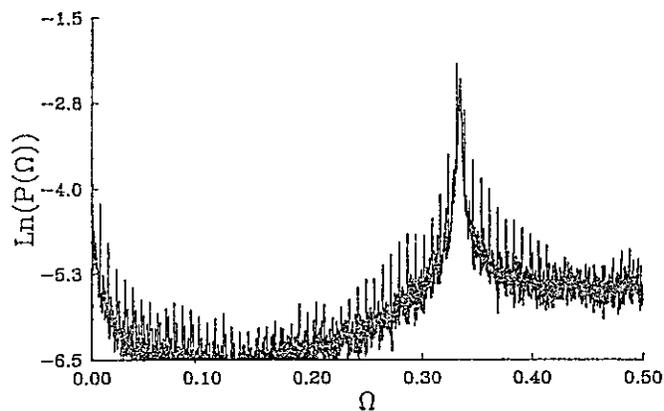


Figura 2.14: Espectro de potencia correspondiente al atractor de la Fig. 2.13, pero sin considerar el uso de estroboscopio. Nótese el pico relativamente ancho en torno a la frecuencia de la modulación.

$X_{3t}$ , ya que las condiciones iniciales no son conocidas con infinita precisión. De hecho, si partimos con dos réplicas  $\{X_0, \Phi_0\}$  y  $\{X_0, \Phi_0 + \delta\Phi_0\}$ , cuando el tiempo pasa, ellas se dirigirán a distintas ramas. Sin embargo, si partimos con el par  $\{X_0, \Phi_0\}$  y  $\{X_0 + \delta X_0, \Phi_0\}$ , ellas convergerán entre sí, si  $\delta X_0$  es suficientemente pequeño. Lo último está de acuerdo con la definición de  $\lambda(\omega)$ . En todo caso, no debemos olvidar que estamos estudiando un mapa bidimensional y que debemos tener en mente que el segundo exponente de Lyapunov, asociado a la variable  $\Phi_t$  es marginal ( $\lambda = 0$ ); esta observación resuelve la “aparente paradoja”.

En este caso hemos obtenido una nueva y destacable situación: la introducción de una pequeña modulación resonante lleva a una posición “aparentemente” impredecible del oscilador debido a inestabilidades orbitales de corta duración, donde la imagen estroboscópica  $X_{3t}$  puede saltar de una banda a la otra. Estos pequeños lapsos, donde  $X_{3t}$  viaja por regiones inestables del mapa logístico, no son capaces de dar origen a un exponente de Lyapunov positivo como puede verse en la Fig. 2.12, donde  $\lambda(\omega) < -0.1$ . En consecuencia, *tenemos un exponente de Lyapunov negativo asociado con un proceso dinámico aparentemente impredecible.*

Hemos estudiado también la función de autocorrelación para una serie temporal correspondiente a un estroboscopio de período tres. Para  $\omega$  fuera de la región resonante obtenemos una línea recta paralela al eje de los tiempos, indicando la presencia de la única banda señalada previamente. Para  $A_0 = 3.8345$ ,  $D = 0.012$  y  $\omega = 0.3308437\dots$ , dentro de la región resonante, obtuvimos una curva que claramente revela el comportamiento dinámico asociado a la impredecibilidad. Al analizar series temporales para estos mismos parámetros, pero considerando diferentes estroboscopios de períodos múltiplos de 3, obtuvimos una serie de curvas que se parecen cada vez más a la función de autocorrelación del mapa logístico para el caso de caos completamente desarrollado correspondiente a  $A_0 = 4.0$  (ver Fig. 2.15). De este modo, hemos determinado la ausencia de correlación entre los puntos de la órbita de período tres con modulación de frecuencia. Para todo  $\omega$  entre los

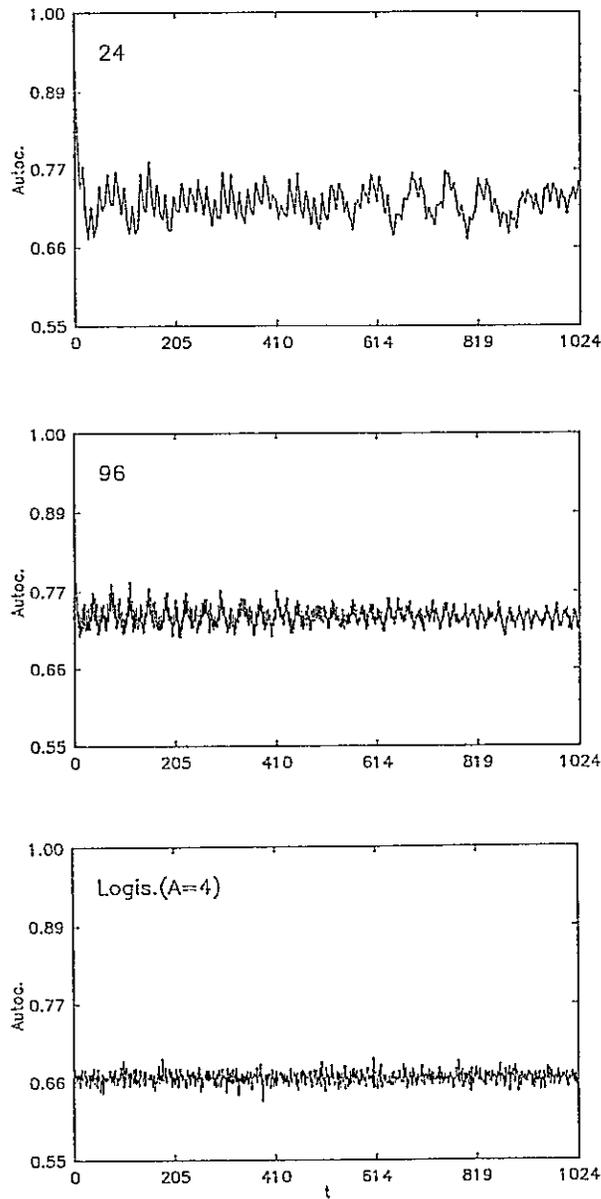


Figura 2.15: Función de autocorrelación para estroboscopios múltiples de período 3, para  $A_0 = 3.8345$ ,  $D = 0.012$  y  $\omega = 0.3308437\dots$ . Los números sobre las curvas indican el estroboscopio usado en cada caso. La curva inferior corresponde al mapa logístico cuando  $A_0 = 4$  (caos completamente desarrollado).

picos de resonancia de la Fig. 2.12, la función de autocorrelación muestra el mismo tipo de comportamiento.

Sin embargo, la presencia de un proceso dinámico aparentemente impredecible asociado con un exponente de Lyapunov negativo resulta un tanto extraño, por ello, se estudió el comportamiento del atractor considerando un "ciclo de Poincaré", a través del siguiente procedimiento: consideremos una frecuencia  $\omega$  "cuasi-irracional", aunque en realidad es racional de muy alto orden en una secuencia de Farey,  $\omega = \frac{P}{Q}$ , con  $P, Q \in \mathbf{N}$ , con  $Q =$  primo del orden de  $10^6$ . Se itera  $(N_0 + 2Q)$  veces, donde  $N_0 \sim 6 \times 10^5$  corresponde al transiente. Después se guarda el punto  $(X_t, \Phi_t)$  y se lo compara con el punto  $(X_{t+Q}, \Phi_{t+Q})$ , con  $\Phi_{t+Q} = \Phi_t$ , y con  $t > (N_0 + Q)$ . Esta comparación se realiza, por ejemplo, para unos  $T = 15000$  puntos y se evalúa la siguiente suma  $S$

$$S = \sqrt{\sum_{t=1}^T |X_{t+Q} - X_t|^2} \quad (2.20)$$

Cuando hay entrabamiento dentro de la ventana de período 3, esta suma  $S$  es inferior a  $10^{-16}$ , es decir, a pesar de la apariencia de caos (puntos al azar) el sistema vuelve exactamente sobre los mismos puntos después de un ciclo de Poincaré y en consecuencia no hay caos.

En general, cuando hay entrabamiento y las distintas bandas se funden en una sola, entonces el valor de  $X_t$  debe depender *exclusivamente* de  $\Phi_t$  (y no, por ejemplo, de la paridad de "t", o de si  $t = 3l, 3l + 1, 3l + 2$ , como ocurre con ciclos de período 2 y 3 respectivamente). Así, después de un transiente apropiado debe cumplirse que

$$X_t = X_{t+Q}. \quad (2.21)$$

en el caso  $\omega = P/Q \rightarrow$  irracional.

## 2.2.2 $A_t$ cruza por ciclos de distinta periodicidad

### Modulación de baja frecuencia

Dependiendo de la posición del centro de gravedad  $A_0$  del intervalo de variación de  $A_t$  y de la amplitud  $D$ , podemos estudiar una variedad de situaciones en las cuales se cumple que  $A_t$  cruce por puntos de bifurcación y que al mismo tiempo nunca se salga de la primera cascada de Feigenbaum.

Para tratar de entender los efectos de una modulación de baja frecuencia estudiaremos el caso particular  $A_0 = 3.4$ ,  $D = 0.3264$ , donde  $A_t$  varía en el rango  $[3.2368, 3.5632]$ , es decir, se mueve entre 2 soluciones por la izquierda y 8 soluciones por la derecha de la primera cascada de la ecuación logística estática.

Para frecuencias muy bajas, digamos  $\omega < 0.001$ , el atractor  $\{X_t, \Phi_t\}$  sigue muy de cerca los puntos fijos de la ecuación logística estática con parámetro de bifurcación dado por  $A(\Phi_t)$  (ver Fig. 2.16). Se produce, sin embargo, un notable atraso en la aparición de las bifurcaciones respecto al caso estático[32]; también se puede observar el fenómeno de histéresis, el cual se pone de manifiesto en el hecho que al cruzar  $A_t$  un punto de bifurcación estático, el proceso de separación de las bandas "dinámicas" (lease  $\xi_\nu(\Phi_t) \rightarrow \xi_{2\nu}(\Phi_t), \xi_{2\nu+1}(\Phi_t)$ ) se retrasa notablemente si cruzamos en la dirección de  $A_t$  creciente; a la inversa, para  $A_t$  decreciente, el proceso de fusión (lease  $\xi_{2\nu}, \xi_{2\nu+1} \rightarrow \xi_\nu$ ) ocurre casi inmediatamente después que  $A_t$  cruzó el punto de bifurcación. De este modo, para  $A_t$  creciente, el sistema guarda cierta "memoria" de su estado anterior. Esto se puede ver más claramente en la Fig. 2.17, en la cual se ha graficado el valor instantáneo de  $A_t$  versus  $X_t$ , mostrándose sólo la parte inferior de la curva, la cual comienza en el lado izquierdo con el valor  $A_t = 3.449\dots$ , valor que corresponde al punto en que nace la cuadrifurcación de la logística estática. La línea interna corresponde al caso en que  $A_t$  viaja hacia la derecha, es decir, en la dirección en que aumenta el período del ciclo, y las dos líneas externas corresponden a valores de  $A_t$  decrecientes. Puede verse que la bifurcación

se realiza mucho después de  $A_t = 3.449\dots$  y que  $X_t$  no regresa al mismo valor que tenía cuando iba en dirección hacia la derecha. Allí también puede verse el atraso en el nacimiento de las otras furcaciones, así como la histéresis correspondiente.

Precisando un poco más la situación podemos decir que cuando  $A_t$  cruza una bifurcación en la dirección en que aumenta el período del ciclo (de izquierda a derecha), entonces  $X_t$  persiste un cierto intervalo en la vieja rama del atractor, la cual se ha tornado inestable después del cruce. Posteriormente el atractor dinámico  $\xi_t(\Phi)$  se abre bruscamente, estabilizándose rápidamente en torno al atractor del problema estático ya bifurcado (ver Fig. 2.16). En cambio, al cruzar en la dirección en que se cierra la bifurcación el fenómeno de retardo es poco relevante, pues las bandas bifurcadas no existen al lado izquierdo del punto de bifurcación, ni siquiera en carácter de inestables. En este caso, el retardo se debe al desfase del proceso dinámico respecto del caso estático.

Al ir aumentando  $\omega$ , el atractor del mapa estático asociado al valor instantáneo de  $A_t$  deja de ser un buen punto de referencia. Así, el esquema de bifurcaciones comienza a perderse, empezando por las de período mayor, pues en ellas la separación interbandas es menor (por ejemplo, la rama asociada al ciclo de período 8 de la solución estática se pone borrosa). Al aumentar  $\omega$  aún más, la rama asociada al período 4 también desaparece, siendo reemplazada por rápidas oscilaciones. Esto debido a que el punto  $X_t$  cruza suficientemente rápido tal zona como para no alcanzar a converger al atractor estático estable. En cambio  $X_t$  viaja básicamente sobre las bandas (ya inestables) asociadas al período 2; el carácter inestable de tales bandas da lugar a las oscilaciones del problema dinámico.

Lo anterior puede verse en la Fig. 2.18 donde se muestra al atractor fuera de la región adiabática, para la frecuencia  $\omega = 0.00474471\dots$ , donde existen sólo dos ramas para todo el rango de la fase  $\Phi_t$ . El punto  $X_t$ , oscila con período 2 entre estas dos ramas, relacionadas con el ciclo de período dos, que es el período dominante del caso estático para los parámetros en consideración. De este modo, el biciclo

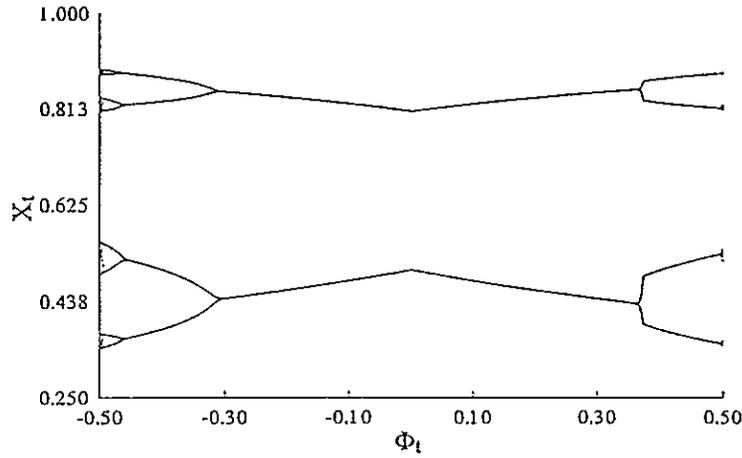


Figura 2.16: Atractor en el plano  $\Phi_t$  versus  $X_t$ , para  $A = 3.4$ ,  $D = 0.3264$ , en el caso adiabático para  $\omega = 0.00014\dots$ . A pesar del pequeño valor de  $\omega$ , el atractor ya muestra una asimetría debido a efectos dinámicos.

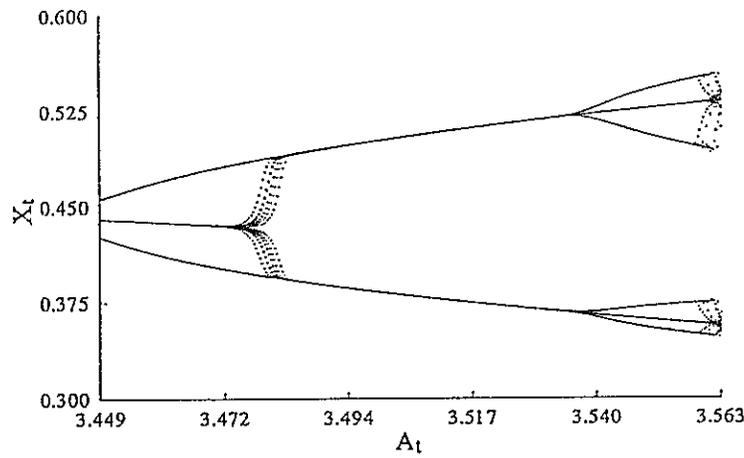


Figura 2.17: Atractor en el plano  $A_t$  versus  $X_t$  para  $\omega = 0.00014\dots$ , para los mismos valores de  $A$  y  $D$  de la figura superior

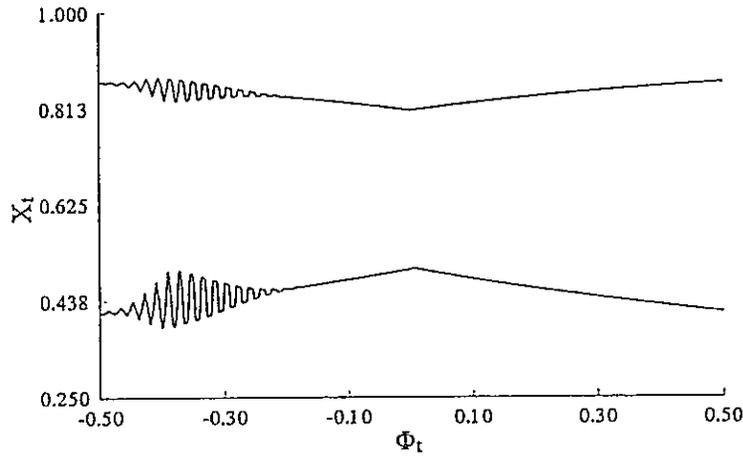


Figura 2.18: Atractor en el plano  $\Phi_t$  versus  $X_t$ , para  $A = 3.4$ ,  $D = 0.3264$ , fuera de la región adiabática, para  $\omega = 0.00474471\dots$

dominante ha cubierto las regiones donde nominalmente deberían existir los ciclos de período 4 y 8.

### Caos temprano

Nuestro estudio del exponente de Lyapunov en función de los parámetros del modelo  $(\omega, A, D)$  nos dice que no existe caos si  $\text{Max}(A_t) = A + D/2 < A_s^4$ , donde  $A_s^4 = 3.498684\dots$  es el punto superestable de la cuadrifurcación, esto es, si  $A_t < A_s^4 \forall t$ . Así podemos citar por ejemplo, que una de las primeras regiones donde es posible encontrar atractores caóticos es cuando  $A_t$  varía dentro del intervalo  $[3.0, 3.5075]$ , es decir, se mueve entre un ciclo de período 2 por la izquierda y 4 por la derecha. Cuando  $A_t$  recorre zonas más amplias, incluyendo más periodicidades, siempre es posible hallar pequeños rangos de  $\omega$  en los cuales existe movimiento caótico. La situación descrita es muy similar a la encontrada en la subsección 2.2.1 donde se describe la aparición de caos temprano[29,30,37,38] dentro de un ciclo de periodicidad determinada.

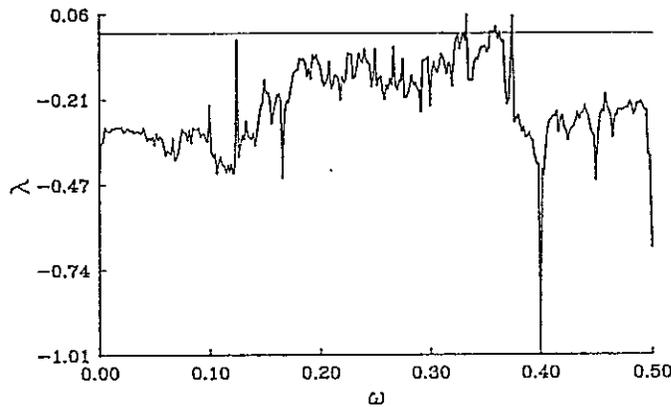


Figura 2.19: Exponente de Lyapunov *versus*  $\omega$ , para  $A_0 = 3.4$ ,  $D = 0.3264$

En la Fig. 2.19 se muestra el exponente de Lyapunov en función de la frecuencia para un caso en que  $A_t$  varía entre ciclos de período 2 y 8. Allí puede verse que existe comportamiento caótico ( $\lambda > 0$ ) para frecuencias  $\omega \sim 0.357$ , a pesar del hecho que  $A_t$  no llega a tocar nunca el punto de acumulación de la bifurcaciones  $A_0^* = 3.5699\dots$ . En consecuencia, nuevamente nos encontramos con el fenómeno de *caos temprano*. En este caso debemos notar que los atractores están formados por dos bandas caóticas que semejan dos cintas difusas aparentemente entrelazadas, asociadas al ciclo subyacente de período dos del mapa logístico estático. Sin embargo, en el presente caso, cuando aplicamos un estroboscopio de período dos sobre el atractor, una de las bandas caóticas desaparece. En otros casos, como por ejemplo,  $A_0 = 3.26$ ,  $D = 0.6$ , donde  $A_t$  varía entre 1 y 8 soluciones, al considerar frecuencias para las cuales la dinámica es caótica, y observar el atractor mediante un estroboscopio de período 2, se obtiene el mismo resultado que cuando se prescinde del estroboscopio. Lo anterior implica que el punto  $X_t$  sufre corrimientos fuera de fase dentro del ciclo de período dos subyacente; o dicho de otro modo, el punto  $X_{2t}$  realiza transiciones entre las bandas caóticas.

## Trabadura de fases en el caso de varias periodicidades subyacentes

Recordemos algunos resultados; supongamos que  $A_t$  cruza por ciclos de distinta periodicidad, pero no alcanza a llegar al punto de acumulación  $A_\infty$ , es decir,

$3 = A_2 \leq A_t < A_\infty = 3.5699\dots$ , entonces al considerar amplitudes  $D$  y frecuencias  $\omega$  suficientemente altas, las distintas bifurcaciones van desapareciendo y sólo subsisten dos bandas, alternándose  $X_t$  entre ellas en forma periódica. No obstante, aun estas dos bandas pueden fundirse si  $\omega$  se acerca suficientemente a  $\frac{1}{2}$ , teniéndose un régimen de una banda para  $\omega_c < \omega < 1 - \omega_c$ , fenómeno reminiscente del entramamiento de frecuencias discutido en la sección 2.2.1. Evidentemente la frecuencia crítica depende de  $A$  y  $D$ , no existiendo  $\omega_c$  sino que a partir de cierta modulación crítica  $D_c$ , tal que  $\omega_c(D_c, A) = 1/2$ , y  $\omega_c$  decrece si  $D$  crece. Así podemos ver que para  $A_0 = 3.4$ ,  $D = 0.3264$ , ( $A_t$  varía entre 2 y 8 soluciones) se tiene que  $\omega_c = 0.49552191\dots$ . A su vez, cuando  $A_0 = 3.26$ ,  $D = 0.6$  ( $A_t$  varía entre 1 y 8 soluciones),  $\omega_c = 0.43688\dots$ .

En las vecindades de la transición al régimen de una banda, un cálculo amplificado del exponente de Lyapunov,  $\lambda(\omega)$ , muestra el típico pico seguido de una caída brusca (fosa), que caracteriza los regímenes de entramamiento entre el oscilador logístico y la perturbación externa. De este modo, el análisis sobre el efecto de "entramamiento de fases" de la sección 2.2.1 no es privativo del caso en que  $A_t$  recorre el interior de un ciclo dado, pudiendo igualmente producirse en el presente caso en que  $A_t$  recorre varios períodos, y también (como veremos luego) cuando  $A_t$  cruza regiones caóticas.

En la Fig. 2.20 se muestra el atractor, para la frecuencia  $\omega = 0.4955213\dots$ , justo antes de entrar en el régimen de banda fundida, y en la Fig. 2.21 se muestra el atractor para la frecuencia  $\omega = 0.496\dots$ , cuando ya está en la región de banda fundida.

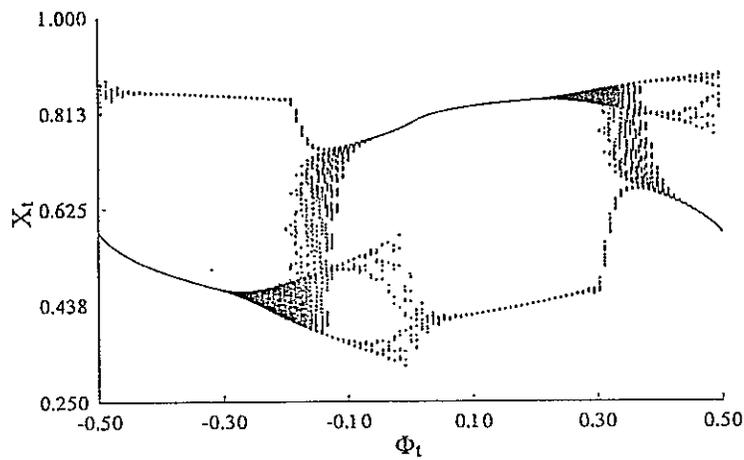


Figura 2.20: Atractor  $A_0 = 3.4$ ,  $D = .3264$ , y  $\omega = 0.4955213\dots$ , justo antes de entrar en el régimen de banda fundida.  $A_t$  varía entre 2 y 8 soluciones.

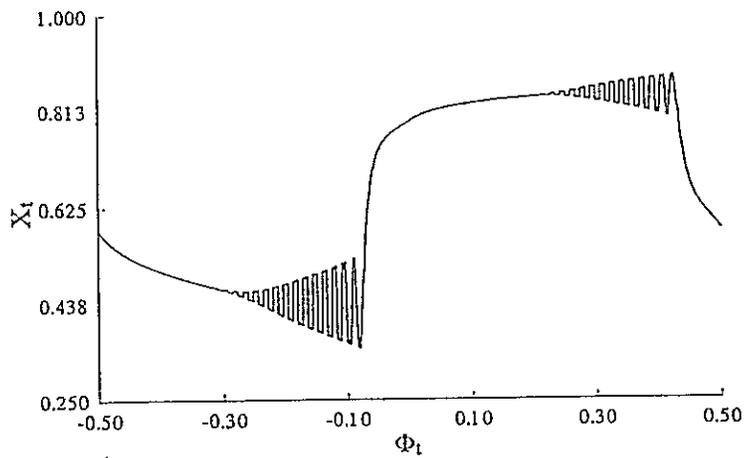


Figura 2.21: Atractor  $A_0 = 3.4$ ,  $D = 0.3264$ , y  $\omega = 0.496\dots$ , dentro de la región de banda fundida.

### 2.2.3 $A_t$ cruza por zonas caóticas del mapa logístico

Por fijar ideas, particularicemos al caso en que el centro de gravedad de  $A_t$  se encuentra en  $A_0 = A_0^* = 3.5699\dots$  y que  $D = 0.428$ , de modo que  $A_t$  pertenece al intervalo  $[3.3559, 3.7839]$ , recorriendo en consecuencia toda la cascada de Feigenbaum a la izquierda y cruzando por zonas caóticas y ventanas periódicas a la derecha del punto de acumulación de las bifurcaciones. De este modo,  $A_t$  cruza por una variedad de comportamientos del mapa logístico estático; ello determina una rica gama de atractores del sistema dinámico bidimensional, los cuales presentan, en general, un aspecto fundamentalmente caótico caracterizados por exponentes de Lyapunov ( $\lambda$ ) positivos con algunas estrechas regiones correspondientes a dinámicas ordenadas ( $\lambda < 0$ ).

#### Comportamiento adiabático

La Fig. 2.22 muestra el comportamiento del atractor en la región adiabática de  $\omega$  ( $\omega = 0.0000159\dots$ ), allí puede verse como el mapa bidimensional reproduce globalmente el comportamiento del mapa logístico, distinguiéndose claramente la primera parte de la cascada de Feigenbaum, así como algunas de las ventanas periódicas entre zonas caóticas. Sin embargo, el comportamiento global del sistema es caótico, de acuerdo al valor del exponente de Lyapunov,  $\lambda = +0.0507$ .

El análisis del comportamiento del atractor en función de la frecuencia, para el caso adiabático, nos muestra que  $\omega$  juega un papel equivalente a la amplitud del ruido externo ( $\sigma$ ) en la ecuación logística[33], ya que el ruido externo produce una acción sobre las órbitas del sistema dinámico que es equivalente a un cambio adecuado en el parámetro de bifurcaciones. Así, se pudo observar los mismos efectos descritos por Crutchfield *et al* [33]: reducción de las bifurcaciones de la primera cascada de Feigenbaum y desaparición de las ventanas periódicas en función del aumento de  $\omega$ . Por vía de ejemplo, podemos decir que para  $\omega = 0.00023\dots$  aún subsiste la cuadrifurcación de la primera cascada y dos ventanas en la región caótica; en

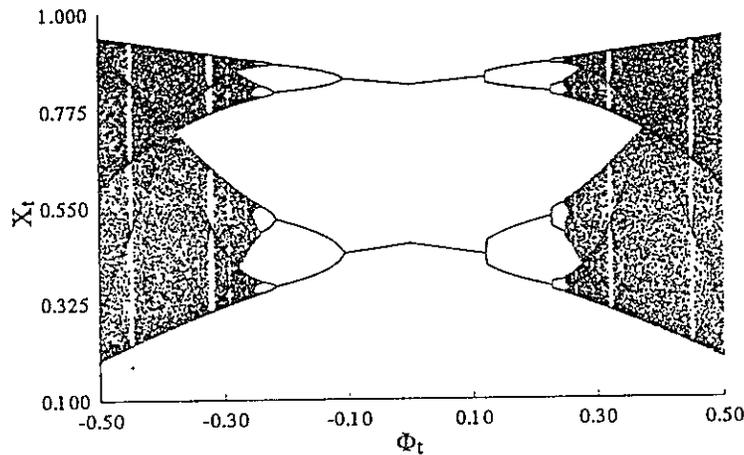


Figura 2.22: Atractor en la zona caótica,  $A_0 = 3.5699\dots$ ,  $D = 0.428$ , para  $\omega = 0.0000159\dots$ .  $A_t$  recorre toda la cascada de Feigenbaum a la izquierda, y zonas caóticas y ventanas periódicas a la derecha de  $A_0 = 3.5699\dots$ .

cambio, para  $\omega = 0.00143\dots$ , sólo sobrevive la bifurcación de la primera cascada, y ya han desaparecido todas las ventanas periódicas del mapa logístico estático.

En este caso también puede verse el fenómeno de histéresis en los puntos de bifurcación de período. En la región de comportamiento adiabático, y para  $\omega > 0$ , el punto  $X_t$  se desplaza de izquierda a derecha en la figura. Notando que  $A_t$  toma iguales valores para  $\phi$  y  $(-\phi)$ , el atractor debería tener simetría de reflexión especular respecto al punto  $\phi = 0$  en el límite extremo adiabático. Como no es éste el caso de la Fig. 2.22, se concluye que estamos ante la presencia del fenómeno de histéresis. Específicamente, en el lado derecho de la Fig. 2.22 se puede observar el atraso con que el sistema dinámico llega a la bifurcación, y como en la parte izquierda se cierra adiabáticamente al salir de ella. Este efecto de histéresis es notable, pues se produce con frecuencias tan bajas como  $\omega \sim O(10^{-5})$ .

### Fuera de la región adiabática

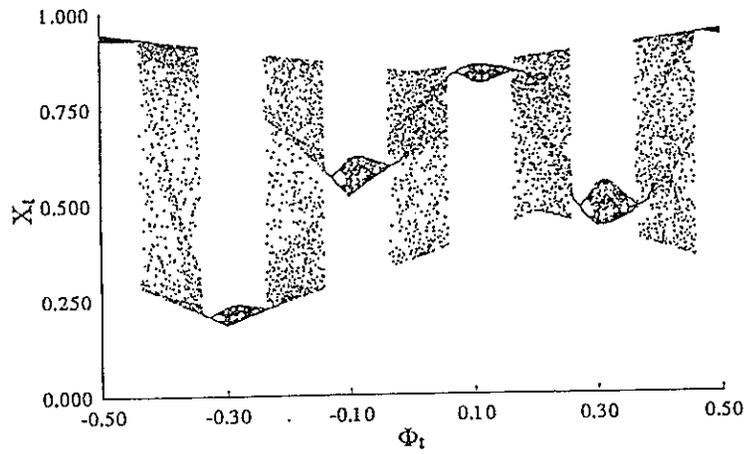


Figura 2.23: Atractor para  $A_0 = 3.5699\dots$ ,  $D = 0.428$ ,  $\omega = 0.1999307\dots$   
 ( $\lambda = 0.06737$ )

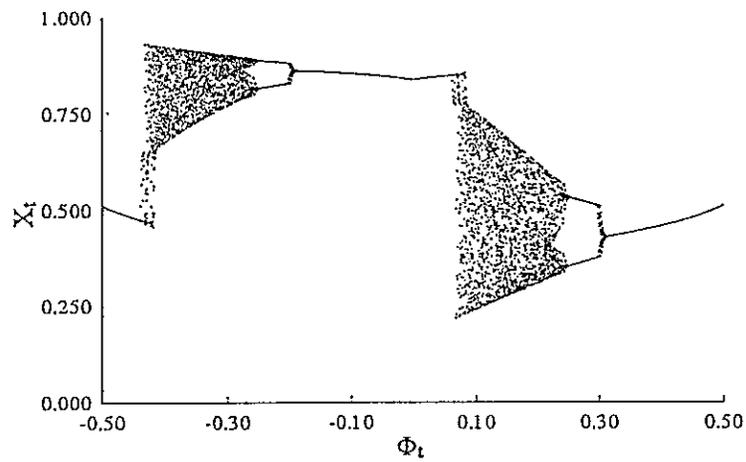


Figura 2.24: Atractor para  $A_0 = 3.5699\dots$ ,  $D = 0.428$ ,  $\omega = 0.499635\dots$   
 ( $\lambda = -0.1751$ )

Fuera de la región adiabática nos encontramos en general con atractores caóticos. Un ejemplo de atractor caótico ( $\lambda > 0$ ) que aparece en este caso es el que se muestra en la Fig. 2.23, para  $\omega = 0.1999307\dots$ , con exponente de Lyapunov  $\lambda = 0.06737$ . Allí se tiene  $\omega = \frac{1}{5} - \varepsilon$ , con  $\varepsilon \simeq 0$ , ello da lugar al fenómeno de “entramamiento”, destruyéndose la región (no caótica) de período 2. De hecho, es claro que el atractor consta de 5 segmentos, siendo uno la réplica del otro. En términos generales podemos decir que el punto  $X_t$  posee período 5, mientras  $\phi_t$  corresponde a la banda univaluada, pero en cada franja caótica el punto se mueve de manera “aleatoria”, ordenándose al pasar a la banda univaluada.

Existe un intervalo de valores de frecuencia :  $0.4979\dots \leq \omega \leq 0.5$  en el cual el exponente de Lyapunov se vuelve negativo, a pesar de que  $A_t$  está gran parte del tiempo viajando por regiones caóticas, demostrando la existencia de una conducta global ordenada. Un atractor característico de esta situación se muestra en la Fig. 2.24, para  $\omega = 0.499635\dots$ , con  $\lambda = -0.1751$ . Aquí se notan amplias regiones del atractor con apariencias caóticas. Sin embargo, para la frecuencia en consideración, el paso por estas regiones inestables no logra desestabilizar la órbita del mapa bidimensional, obteniéndose una clara situación no caótica. Más concretamente, las regiones aparentemente inestables del atractor (Fig. 2.24) siguen de hecho un comportamiento *completamente predecible*. Para verificar lo anterior, hemos comparado la posición de los puntos  $X_t$  y  $X_{t+T}$ , donde  $T$  es el *período de Poincaré* de la fase  $\Phi_t$ , el cual se construye a partir de una aproximación de la frecuencia  $\omega$  por un cuasi-irracional:  $\omega = L/T$ ;  $L, T$  primos y  $T \rightarrow \infty$ , en la práctica  $T \sim 10^6$ . Se concluyó que la distancia entre los puntos  $X_t$  y  $X_{t+T}$  es  $|X_t - X_{t+T}| < 10^{-16}$ ,  $\forall t$ . Este resultado asegura que, a pesar de la apariencia caótica, el atractor es reproducible *punto a punto* para  $\omega$ ,  $A_0$ , y  $D$  fijos. Por tanto, en rigor no existen regiones inestables, y el proceso dinámico es *causal en el sentido fuerte* de la palabra. En vista del análisis recién descrito, podemos concluir que los puntos del atractor son una función unívoca de la fase  $X_t = \xi(\Phi_t)$  (aunque  $\xi(\Phi_t)$  es una función práctica-

mente discontinua). Lo último permite afirmar sin ambigüedad que en el atractor de la Fig. 2.24 está presente un fenómeno de entramamiento con la fase de la perturbación externa, reduciéndose toda la variedad de P-ciclos y bandas caóticas a una sola banda  $\xi(\Phi)$ . Este fenómeno de eliminación del caos mediante una perturbación resonante con la frecuencia más importante del proceso, ha recibido gran atención en la literatura[40,41,42,43], denominándosele “caos domado”.

Dado que las frecuencias en las cuales se producen los atractores no caóticos, son muy cercanas a  $\omega = \frac{1}{2}$ , este resultado recuerda las secuencias binarias ( $A_{2l} = A$ ,  $A_{2l+1} = B$ ) de Ref. [29,30], para las cuales existen amplias zonas de estabilidad, aun si  $A$  o  $B$  se encuentran en regiones caóticas del mapa logístico.

## 2.3 Modulación periódica aditiva

En esta sección estudiamos el efecto que se produce en el comportamiento dinámico de los atractores del mapa logístico, cuando se introduce una modulación aditiva en la forma

$$X_{t+1} = f_t(X_t) = A_0 X_t(1 - X_t) + \frac{D}{2} U(\Phi) \quad (2.22)$$

como antes  $\Phi_{t+1} = \Phi_t + \omega$ , y utilizaremos la misma modulación triangular definida en (2.4)

$$U(\Phi) = 4|\Phi| - 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \Phi \leq \frac{1}{2} \quad (2.23)$$

El carácter periódico de esta modulación establece una importante diferencia con el trabajo de Crutchfield *et al.*[33], quienes introdujeron ruido aditivo de tipo “blanco” y “Gaussiano”. En esta referencia se hace un completo análisis de los efectos producidos en los atractores del mapa logístico cuando se introduce un ruido aleatorio tanto en el parámetro de bifurcaciones como en forma aditiva sobre el

mapa. Se concluye que los efectos de actuar sobre el mapa en forma aditiva o sobre el parámetro de bifurcaciones es prácticamente equivalente, en tanto se trate de ruido blanco. Se obtiene como conclusión general que la introducción de ruido aleatorio provoca un cambio en la estructura de bifurcaciones y caos, pues cuando aumenta la amplitud del ruido, desaparecen soluciones periódicas y también algunas ventanas periódicas en la región caótica.

La modulación aditiva introducida en esta sección simula una fuerza externa periódica que perturba a un sistema mecánico no lineal. Esta modulación aditiva produce efectos más dramáticos que la modulación sobre el parámetro de control, estudiado en la sección 2.2.

En todo caso, usaremos las mismas bases conceptuales para uno y otro análisis. Así por ejemplo, analizaremos el mapa bidimensional:  $(X_t, \Phi_t) \rightarrow (X_{t+1}, \Phi_{t+1})$ . El atractor  $\{X_t, \Phi_t\}$  se reduce a  $P$  líneas rectas si la modulación es  $D = 0$ , donde  $P$  es la periodicidad del mapa logístico no perturbado. Al igual que en el caso de la sección 2.2, al conectar la perturbación aditiva,  $D \neq 0$ , las líneas rectas se deforman, transformándose en  $P$  bandas, denotadas como antes por  $\{\xi_\nu(\Phi), \nu = 1, 2, \dots, P\}$ , y todos los puntos del atractor van a dar a estas bandas.

Si bien el presente modelo repite básicamente toda la fenomenología aplicada en la sección 2.2 (caos temprano, histéresis, etc.), nos concentraremos en el fenómeno de *modulación resonante*, ya que en él, el presente modelo muestra una riqueza enorme, que no se pone fácilmente de manifiesto en el caso en que se modula el parámetro de control.

### Modulación resonante

Consideremos nuevamente el caso de período 2 para la ecuación logística, es decir,  $3 \leq A_0 \leq 1 + \sqrt{6}$ , y concentrémonos en los efectos de resonancia que se producen cuando la frecuencia de la modulación externa  $\omega$  es similar a la frecuencia natural del oscilador logístico, que en este caso de período 2 corresponde a  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ .

Consideremos el caso especial  $\omega = \frac{1}{2} + \varepsilon$ , con  $\varepsilon \ll 1$ . Usando el hecho que  $U(\Phi + \frac{1}{2}) = -U(\Phi)$ , podemos concluir que para este caso límite se cumple que

$$X_{2t} = A_0 X_{2t-1} (1 - X_{2t-1}) - \delta_t \quad (2.24)$$

$$X_{2t+1} = A_0 X_{2t} (1 - X_{2t}) + \delta_t \quad (2.25)$$

donde  $\delta_t = \frac{D}{2} U(2\epsilon t)$ , cambia lentamente en el tiempo. Entonces es natural suponer que

$$[X_{2t}, X_{2t+1}] = [\eta_1(\delta_t), \eta_2(\delta_t)] \quad (2.26)$$

donde

$$\eta_1 = A_0 \eta_2 (1 - \eta_2) - \delta_t \quad (2.27)$$

$$\eta_2 = A_0 \eta_1 (1 - \eta_1) + \delta_t \quad (2.28)$$

naturalmente que las soluciones  $(\eta_1(\delta_t), \eta_2(\delta_t))$  de este problema estático, están muy relacionadas con las bandas  $\{\xi_1(\Phi), \xi_2(\Phi)\}$  del problema dinámico, aunque la relación es más bien sutil, como ya se vio en el caso de modulación del parámetro de control.

Al usar  $f(X) = A_0 X (1 - X)$ , la ecuaciones (2.27) y (2.28) asumen la forma

$$\eta_1 = f[f(\eta_1) + \delta] - \delta \equiv F(\eta_1) \quad (2.29)$$

Las soluciones de la ecuación (2.29) pueden ser estables o inestables en función de  $\delta$ , o equivalentemente, en términos de la fase  $\Phi$  (ya que  $\delta = \frac{D}{2} U(\Phi)$ ). Las soluciones se pueden clasificar en dos tipos bien diferenciados:

- a) Si  $\delta > \delta_{cr}$ , entonces el mapa  $F(\eta)$  tiene un único punto fijo estable.
- b) Si  $\delta < \delta_{cr}$ , entonces  $F(\eta)$  tiene dos puntos fijos estables y uno inestable. Considerando el hecho que  $\delta = \frac{D}{2} U(\Phi)$ , concluimos que:
  - i) Si  $D > D_c = 2\delta_c$ , entonces existe cierto rango de  $\Phi$  para el cual existe una única solución estable, mientras que fuera de ese rango se cumple  $\frac{D}{2} |U(\Phi)| < \delta_c$ , y existen dos soluciones estables, digamos  $\eta_1(\Phi)$  y  $\eta_2(\Phi)$ . De este modo las bandas

$\eta_1(\Phi)$  y  $\eta_2(\Phi)$  aparecen cortadas, de un modo similar a lo indicado en la Fig. 2.9.

ii) Si  $D < D_c = 2\delta_c$ , entonces existen dos soluciones estables  $\eta_1(\Phi)$  y  $\eta_2(\Phi)$ , para todo valor de  $\Phi$ ; en este caso las bandas  $\eta_j(\Phi)$  no presentan brechas.

Volviendo al problema dinámico, en el límite adiabático  $\omega = \frac{1}{2} + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la fase  $\Phi_{2t} = 2\varepsilon t \pmod{1}$  varía lentamente y el sistema sigue la solución estática adiabáticamente, al igual que en el caso de la sección 2.2.

Puesto que, en el caso en que  $D < D_c$ , las dos bandas estables no presentan ninguna brecha, el punto  $X_{2t}$  pertenece a una sola banda, digamos  $X_{2t} = \xi_1(\Phi_{2t})$ , donde  $\xi_1(\Phi) \cong \eta_1(\Phi)$  en el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Lo mismo ocurre para el punto  $X_{2t+1}$ , el cual pertenece a la otra banda  $X_{2t+1} = \xi_2(\Phi_{2t+1})$ . En este caso, el sistema mantiene su frecuencia natural de oscilación:  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ , mientras el punto  $X_t$  oscila entre las dos bandas  $\xi_1(\Phi)$  y  $\xi_2(\Phi)$ , no existiendo, en consecuencia, entrabamiento con la fase de la perturbación externa. Cuando nos apartamos del límite adiabático, haciendo crecer moderadamente  $\varepsilon$ , la forma de las bandas  $\xi_\nu(\Phi)$  difiere de la forma de las bandas "paramétricas"  $\eta_\nu(\Phi)$ , pero no ocurre ningún cambio cualitativo en la medida que nos mantengamos en el caso  $D < D_c$ .

Sin embargo, para el caso  $D > D_c$  ocurre un dramático cambio cualitativo, pues las bandas paramétricas  $\eta_\nu(\Phi)$  (usadas como "referencia" cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) poseen una brecha, como antes se indicó. Vemos así que, a pesar del hecho que estamos considerando el límite adiabático  $\omega \rightarrow \frac{1}{2}$ , el punto  $X_{2t}$  que viene viajando por la banda  $\xi_1(\Phi) \simeq \eta_1(\Phi)$  no puede permanecer en ella cuando alcanza la brecha en la cual  $\eta_1(\Phi)$  desaparece (ver punto  $B$  de la Fig. 2.9, ya que dicha figura describe básicamente el mismo caso en consideración). En ese momento, el punto  $X_{2t}$  cae bruscamente, cruzando una región inestable, hasta alcanzar la banda estable  $\eta_2(\Phi)$  (punto  $\Delta$  de la Fig 2.9). De allí en adelante el punto  $X_{2t}$  estabiliza su trayectoria, pero ahora en la banda inferior, cumpliéndose que  $\xi_1(\Phi) \simeq \eta_2(\Phi)$  para los correspondientes valores de  $\Phi$ . Sin embargo, después de un tiempo, el punto  $X_{2t}$  alcanzará la brecha de la banda  $\eta_2(\Phi)$  (punto  $E$  de Fig. 2.9) y nuevamente  $X_{2t}$  deberá saltar de una banda

estable a la otra (paso de  $E$  a  $\Gamma$ ), cruzando por una región inestable. El ciclo se cierra cuando  $X_{2t}$  alcanza nuevamente la brecha de la banda  $\eta_1(\Phi)$  (punto  $B$ ). La misma argumentación es válida para el punto  $X_{2t+1}$ , y en consecuencia, ambos puntos describen la misma órbita formada por una única banda  $\xi(\Phi)$  compuesta por tramos de las bandas  $\eta_1(\Phi)$   $\eta_2(\Phi)$ , la cual presenta una forma similar a la de la Fig. 2.8.

Debemos hacer notar que el punto  $X_t$  pertenece a la banda  $\eta_1(\Phi)$  o a la banda  $\eta_2(\Phi)$ , de acuerdo al valor asumido por  $\Phi$ , y dado que  $\Phi_t = \omega t + \Phi_0$ , la frecuencia con la cual se produce el cambio de banda, de la  $\eta_1(\Phi)$  a la  $\eta_2(\Phi)$ , corresponde a la frecuencia  $\omega$  de la modulación externa. En el caso  $D < D_c$ , la frecuencia correspondiente es  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ , que es la frecuencia del caso no perturbado.

Al igual que en la sección 2.2, si tenemos  $D > D_c$  y aumentamos el desfase  $|\omega - \frac{1}{2}|$  sobre cierto valor crítico  $\varepsilon_{cr}(D)$ , entonces el punto  $X_{2t}$  logrará "saltar" la brecha de la banda  $\eta_1(\Phi)$ , permaneciendo siempre en ella. Otro tanto vale para el punto  $X_{2t+1}$ . De este modo, para  $A_0$  fijo, podemos separar el plano  $[\omega, D]$  en dos regiones: la región donde existe entrabamiento de fases (asociada a la parte superior de dicho plano, es decir, al caso " $D$  grande"), y la región donde no hay entrabamiento (región inferior del plano). Llamaremos  $D_L(\omega)$  a la curva que separa ambas regiones. Naturalmente

$$D_L(\omega) \geq D_c, \quad \text{con} \quad D_L(\omega = \frac{1}{2}) = D_c \quad (2.30)$$

Hemos analizado esta frontera crítica y hemos llegado a la conclusión que ella presenta un carácter fractal, como puede apreciarse en la Fig. 2.25. Esto significa que la curva es autorreplicada, o dicho de otro modo, la frontera de separación presenta la misma forma ante un cambio de escala de observación.

En principio podemos asociar la región entrabada al racional  $\frac{1}{2}$ , ya que esta es la frecuencia necesaria para obtener entrabamiento, al minimizar el valor de la amplitud de modulación  $D$ , tal que  $D_L(\omega) \geq D_L(\frac{1}{2}) = D_c$ . Sin embargo, podemos concluir que para cada número racional  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , existe un mínimo en la curva  $D_L(\omega)$ ,

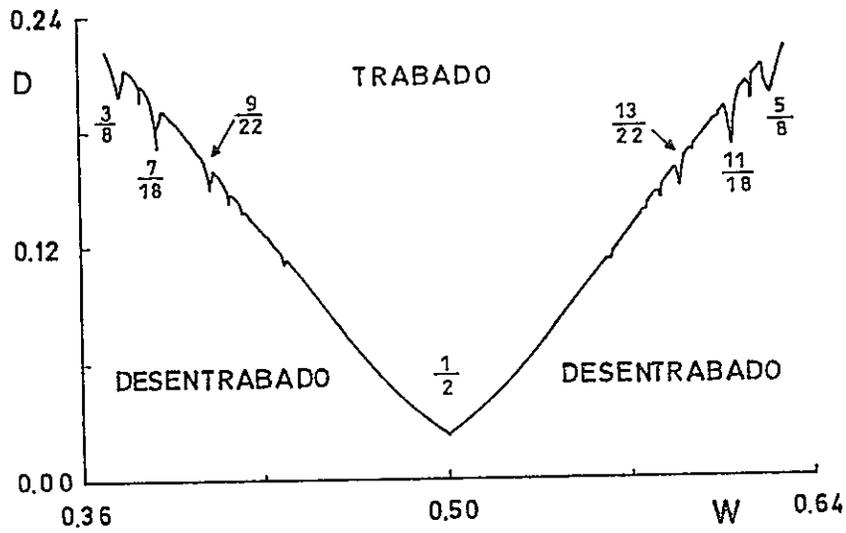


Figura 2.25: Frontera de separación régimen entrabado–desentrabado

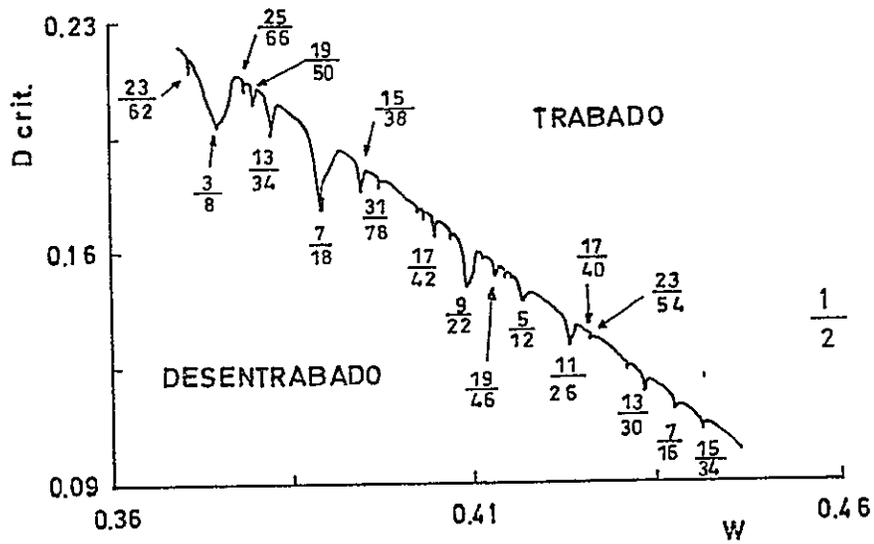


Figura 2.26: Detalle de frontera izquierda de separación régimen entrabado–desentrabado

$D_{\frac{p}{q}}$  de modo que el sistema se entraba más fácilmente para  $\omega \rightarrow \frac{p}{q}$ , sobre todo si  $\frac{p}{q}$  es un racional "simple". El entrabamiento requiere una mayor modulación  $D$  si  $\omega$  se aparta del racional simple  $\frac{p}{q}$ . Estas lenguas son en general muy estrechas, (en especial para valores de  $q$  grandes), y se funden con la gran lengua correspondiente a  $\omega = \frac{1}{2}$ . La relevancia de las distintas lenguas está cualitativamente descrita por el orden en que el respectivo racional aparece en una secuencia de Farey.

En resumen, sólo para  $D > D_{\frac{p}{q}}$  existe entrabamiento para  $\omega$  en alguna vecindad del racional  $\frac{p}{q}$ . Esta vecindad aumenta en tamaño cuando  $D$  crece, mientras que el intervalo de entrabamiento se reduce a cero para  $D = D_{\frac{p}{q}}$ . Para  $D < D_{\frac{p}{q}}$ , el régimen entrabado desaparece. El valor crítico más bajo posible de  $D$  es  $D_c = D_{\frac{1}{2}}$ ; bajo este valor es imposible obtener un régimen entrabado. Nuevamente este comportamiento contrasta con el comportamiento de los mapas del círculo[28] y los osciladores no lineales percusivos perturbados[34], en los cuales una perturbación periódica extremadamente pequeña es suficiente para producir entrabamiento.

Las lenguas de entrabamiento asociadas a los diferentes números racionales se fusionan entre ellas de un modo continuo. Este hecho contrasta con el caso del mapa del círculo, donde la fusión de lenguas de entrabamiento comienza a partir de la modulación crítica  $K = 1$ , asociada al mismo tiempo con el nacimiento del caos.

Hemos logrado encontrar algunas "reglas de selección" para los números racionales asociados con las lenguas de entrabamiento. Sean  $p, q \in \mathbb{N}$ , con  $\{p, q\}$  primos relativos entre sí, y  $\omega = \frac{p}{q} = r \in \mathbb{Q}$  la frecuencia (eventualmente resonante) en estudio, entonces se cumple que:

- a) si  $q$  es un número impar, las lenguas son estrechas y poco profundas, aun para enteros  $q$  relativamente pequeños.
- b) el ancho de las lenguas de entrabamiento ( $\frac{p}{q}$ ) disminuye cuando  $q$  crece (un hecho muy natural, toda vez que la cantidad de números racionales en un intervalo dado es infinito).

c) el ancho de las lenguas de entramamiento  $(\frac{p}{q})$  también disminuye, si la amplitud de la modulación aditiva,  $D$ , disminuye.

d) de acuerdo al punto a), tenemos que

$$\begin{aligned} p &= 2l + 1, & \text{número impar} \\ q &= 2^h (2n + 1) & \text{número par} \end{aligned}$$

donde  $l, n, h \in \mathbb{N}$ . Al comparar valores similares de  $(\frac{p}{q})$ , se cumple que la lengua  $(\frac{p}{q})$  es menos notoria para mayores valores de  $h$  (ver Fig. 2.26). Por ejemplo, la lengua  $(\frac{5}{12})$  es menos notoria que la lengua que se encuentra cerca de ella,  $(\frac{11}{26})$ , (a pesar del hecho que  $\omega = \frac{5}{12} > \omega = \frac{11}{26}$ , y que  $D_{\frac{5}{12}}^{cr} > D_{\frac{11}{26}}^{cr}$ . Como otro ejemplo podemos citar la lengua  $(\frac{17}{40})$ , la cual es muy pequeña en ambas direcciones ( $\omega$  y  $D$ ), pero la lengua vecina  $(\frac{23}{54})$  es mucho mayor que la primera (en ambas direcciones).

e) consideremos una lengua  $(\frac{p}{q})$ ; hemos constatado que ella actúa como punto de acumulación de lenguas de menor importancia, asociadas a los racionales

$$\Gamma_l^\pm = \left( \frac{2lp \pm 1}{2lq \pm 2} \right), \quad (2.31)$$

las que convergen sobre  $(\frac{p}{q})$  por la derecha (+) e izquierda (-) a medida que  $l \rightarrow \infty$ . Este hecho implica un efecto de autoreplicación, pues a su vez cada  $\Gamma_l^\pm = \frac{P_{l\pm}}{Q_{l\pm}}$  es punto de acumulación de lenguas menos conspicuas, y así sucesivamente.

## 2.4 Resumen y conclusiones

Hemos investigado en detalle el efecto de una perturbación periódica resonante, aplicada sobre la ecuación logística usando dos formas posibles:

- a) perturbación aplicada al parámetro de control del mapa; y
- b) perturbación aditiva sobre el mapa

En ambos casos usamos dos tipos diferentes de función periódica continua: función armónica y función triangular. Los resultados obtenidos son independientes de la forma específica de la función periódica, lo cual le da una gran generalidad a nuestros resultados. Sin embargo, esto no es el caso para la curva de entramamiento  $D_L(\omega)$ , obteniéndose curvas frontera con claras diferenciaciones entre uno y otro tipo de función periódica empleada.

El tipo de perturbación que hemos aplicado al parámetro de control constituye una generalización respecto a trabajos recientes[29,30], en los cuales la modulación del parámetro de bifurcaciones fue restringida sólo a dos valores posibles.

Dada la generalidad de nuestro modelo obtuvimos también el fenómeno de *caos temprano* observado previamente[29,30], asociado en nuestro caso a diferentes rangos de variación de la amplitud  $A_t$ . Al mismo tiempo, obtuvimos atractores no caóticos, a pesar de que el parámetro de bifurcaciones permanece gran parte del tiempo en regiones caóticas del mapa logístico, fenómeno también encontrado previamente por Roessler *et al.*[29,30]. Este último efecto fue interpretado como un fenómeno de entramamiento con la perturbación aplicada, la cual provee las bases para un movimiento "controlado" (no caótico).

Otro comportamiento muy interesante, que ha quedado de manifiesto en nuestro trabajo, es el de entramamiento de fase entre la frecuencia de la modulación externa  $\omega$  y la frecuencia interna. Esta última está regida únicamente por el valor que asume el parámetro de control de la ecuación logística, lo que determina su periodicidad  $P$ , y en consecuencia la frecuencia interna  $\omega_0 = \frac{1}{P}$ . En este caso, la lengua de Arnold asociada con la transición del régimen desentramado al régimen entramado, comienza a partir de una modulación mínima, bajo la cual no es posible encontrar entramamiento de frecuencias, a diferencia de las lenguas de Arnold encontradas para los mapas del círculo y para los osciladores no lineales percusivos forzados, en los cuales el fenómeno de entramamiento ocurre para valores infinitesimales de la modulación.

Adicionalmente, encontramos que al introducir una ligera desviación de la frecuencia de resonancia se puede obtener, bajo ciertas condiciones, una situación muy notable: una dinámica aparentemente impredecible asociada con un exponente de Lyapunov *negativo*.

En conclusión, la modulación resonante del parámetro de bifurcaciones de la ecuación logística nos da una visión sobre la dinámica de los sistemas no lineales forzados resonantemente, al mismo tiempo que muestra la aparición de algunos interesantes fenómenos nuevos.

Por otra parte, la introducción de una modulación aditiva sobre el mapa, produce cambios notables en los atractores del sistema dinámico, los cuales son aún más dramáticos que los cambios encontrados en la modulación del parámetro de bifurcaciones. Así podemos destacar el carácter fractal de la frontera de separación entre régimen entrabado y régimen desentrabado, efecto que es menos evidente en el caso de una modulación sobre el parámetro de control. Las lenguas asociadas a diferentes números racionales se fusionan entre ellas de un modo continuo. Este hecho contrasta con el caso del mapa del círculo, en el cual la fusión de lenguas de entrabamiento comienza a partir de una modulación crítica  $K = 1$ , asociada con el nacimiento del régimen caótico. Esto es una indicación de que estamos ante la presencia de un fenómeno muy interesante y novedoso, que requiere mayor profundización.

En resumen, podemos decir que la modulación del mapa logístico mediante una función periódica y continua, produce cambios sustanciales en el comportamiento dinámico del mapa. Al mismo tiempo, los resultados obtenidos indican que una modulación actuando sobre el parámetro de bifurcaciones produce efectos más débiles que la modulación aditiva.

# Capítulo 3

## Asimetría en el Máximo del Mapa Logístico

### 3.1 Antecedentes y el modelo

Desde el trabajo pionero de May[7], los mapas del intervalo (mapas disipativos unidimensionales) han sido objeto de creciente interés, debido a su riqueza matemática intrínseca, y a que existe un gran número de sistemas físicos[44] que experimentalmente desarrollan transiciones hacia el caos, a través de la secuencia de bifurcaciones de Feigenbaum.

Uno de los mapas más estudiados es el siguiente[1,2,3,4,45,46]

$$X_{t+1} = 1 - A|X_t|^z \equiv f(X_t), \quad (z \geq 1). \quad (3.1)$$

Imponemos  $X_t \in [-1, 1]$  y  $A \in [0, 2]$ , con el objeto que el dominio de acción de  $f(X)$  esté siempre en el intervalo  $[-1, 1]$ , independientemente del número de veces que se itere el mapa.

Para  $z = 2$ , este mapa es equivalente al mapa logístico usual  $Y_{t+1} = BY_t(1 - Y_t)$ ,

a través de la transformación

$$X_t = \left(\frac{2}{2-B}\right)[1 - 2Y_t], \quad A = \frac{1}{4}B(B - 2) \quad (3.2)$$

Interesa estudiar el atractor del mapa (3.1), esto es, el conjunto de puntos  $\{X_t | t = M, M + 1, \dots, \infty\}$ , donde  $M$  se elige suficientemente grande (idealmente  $M \rightarrow \infty$ ) como para que el atractor sea independiente de la condición inicial  $X_0$ , eliminando de este modo los efectos transientes.

Cuando  $A$  crece desde 0 hasta  $A^*(z)$ , el atractor del mapa (3.1) exhibe una secuencia de órbitas periódicas, con períodos  $2^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ); el  $k$ -ésimo período aparece para un valor de  $A$  tal que  $A = A_k$ , a través del desdoblamiento del  $(k-1)$ -ésimo período. La secuencia  $\{A_k\}$  se acumula, cuando  $k \rightarrow \infty$ , en  $A^*$ , punto a la derecha del cual el sistema entra en caos. Para  $z = 2$ ,  $A^* = 1.401155\dots$ ; en Ref. [45,46] se estudia el comportamiento general de  $A^*(z)$ .

Para  $A > A^*(z)$ , aparece un número infinito de "ventanas" de  $p$ -ciclos ( $p = 3, 4, \dots$ ), en un orden no trivial, hasta que  $A$  llega a valer  $A^M(z)$  ( $A^M(z) = 2$  para  $z \geq 1$ ), valor más allá del cual no persiste ningún atractor finito, y  $X_t$  evoluciona hacia infinito.

Con cada ventana de período  $p$  podemos asociar [8,20,45,46] el exponente crítico  $\delta(z)$ , para cada  $z$  fijo, considerando la localización de los sucesivos  $p$ -ciclos. Por ejemplo, para la serie de bifurcaciones que se acumulan en  $A^*(z)$ , podemos definir el factor de escala en la dirección del parámetro ajustable  $A$

$$\delta_k \equiv \frac{(A_k - A_{k-1})}{(A_{k+1} - A_k)} \quad (3.3)$$

$$\delta \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k \quad (3.4)$$

Este factor de escala es finito, y en particular, para  $z = 2$ ,  $\delta(2) = 4.669\dots$  (en Ref. [45,46] se describe el comportamiento de  $\delta(z)$ ). Cada valor de  $\delta(z)$  determina una *clase de universalidad* en el sentido que ésta es compartida, para esa ventana particular, por casi todos los mapas unidimensionales que presentan un único má-

ximo del tipo  $|X|^z$  [8,22,20]. Existen además otros exponentes críticos, como  $\alpha(z)$  [8,9,20,46,47], asociados con la dirección de la variable dinámica  $X_t$ .

En este capítulo estudiamos numéricamente la influencia sobre la ruta al caos, de la presencia de una *asimetría* en el máximo del mapa [48,49,50], es decir, diferentes comportamientos a la derecha ( $X \rightarrow 0^+$ ) e izquierda ( $X \rightarrow 0^-$ ) del máximo. Este tipo de asimetría ha sido encontrado en sistemas físicos [51,52,53].

Para realizar el estudio, generalizamos el mapa (3.1), del siguiente modo

$$X_{t+1} = f(X_t) \equiv \begin{cases} 1 - \varepsilon_1 - A_1 |X_t|^{z_1} & \text{si } X_t > 0, \\ 1 - \varepsilon_2 - A_2 |X_t|^{z_2} & \text{si } X_t \leq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

con  $z_1, z_2 \geq 1$ . El conocido mapa continuo se reobtiene para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ,  $A_1 = A_2 \equiv A$ , y  $z_1 = z_2 \equiv z$ .

A partir del mapa (3.5), para  $z_1$  y  $z_2$  fijos, es posible generar una especie de diagrama de fases en el espacio  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, A_1, A_2)$  en el sentido que complejos conjuntos de hipersuperficies de p-ciclos pueden ser definidos allí, los cuales eventualmente se acumulan en hipersuperficies especiales. Una de las hipersuperficies importantes corresponde a la primera entrada en caos (generalización de  $A^*(z)$ ), otra corresponde al desaparecimiento de los atractores finitos (generalización de  $A^M(z)$ ).

Para analizar las principales consecuencias de la asimetría introducida en el mapa (3.5), sobre la evolución de los atractores y el comportamiento del exponente de Lyapunov, procederemos a modificar un solo tipo de parámetro cada vez (los  $\varepsilon$ , los  $A$ , y los  $z$ ). Consideraremos tres casos, a saber:

- caso I:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ,  $A_1 \neq A_2$ ,  $z_1 = z_2 = z$  asimetría en el parámetro de control
- caso II:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ,  $A_1 = A_2 = A$ ,  $z_1 \neq z_2$  asimetría en el exponente
- caso III:  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ,  $A_1 = A_2 = A$ ,  $z_1 = z_2 = z$  discontinuidad finita

Destacamos que en los casos I y II, el mapa  $X_{t+1} = f(X_t)$  es continuo.

## 3.2 Resultados

### 3.2.1 Asimetría en la amplitud (caso I)

La ruta al caos en este caso se realiza a través de la bifurcación del período. Sin embargo, el conjunto de valores  $\{\delta_k\}$ , en el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , presenta un comportamiento oscilatorio entre dos valores fijos, el cual fue encontrado previamente por Arneodo *et al* [54]. En la Fig. 3.1 presentamos las líneas críticas [en el espacio  $(A_1, A_2)$ ] que generalizan  $A^*$  (la primera entrada en caos) y  $A^M$  (valor de  $A$  más arriba del cual el atractor finito desaparece), para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  y  $z_1 = z_2 = 2$ . En la Fig. 3.2 mostramos los valores límites  $\delta_\infty$  entre los cuales oscila  $\{\delta_k\}$ , para  $k$  suficientemente grande; estos valores límites se muestran como función de  $A_2$  a lo largo de la línea crítica  $A_2^*(A_1)$  de la Fig. 3.1. Se puede ver que para  $A = 1.401155\dots$ ,  $A_1^* = A_2^*$ , coincidiendo los dos valores de  $\delta_k$ , reproduciendo el conocido factor de escala  $\delta = 4.6692\dots$

### 3.2.2 Asimetría en el exponente (caso II)

En la Fig. 3.3 se muestra la forma que adquiere el mapa con asimetría en el exponente,  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 4$ , para  $A_1 = A_2 = 2$ , y  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . En la Fig. 3.4 se muestra la evolución del atractor en términos del parámetro  $A$

En este caso, la ruta al caos también se realiza a través de la duplicación del período. El punto de acumulación de la primera cascada de desdoblamiento del período ocurre para  $A^* = 1.6414\dots$ , y  $A^M = 2$ . Un comportamiento enteramente diferente ocurre con el conjunto  $\{\delta_k\}$ , a saber, los valores de  $\delta_k$  no convergen para valores crecientes de  $k$  como es usualmente el caso, sino que se comportan de manera oscilatoria entre dos líneas asintóticas, una de las cuales resulta ser divergente. Este comportamiento ya había sido reportado en el trabajo de Jensen y Ma[55], existiendo además evidencia experimental de este tipo de comportamiento[53]. Más allá del punto de acumulación, en la región caótica, los tamaños relativos de varias ventanas,

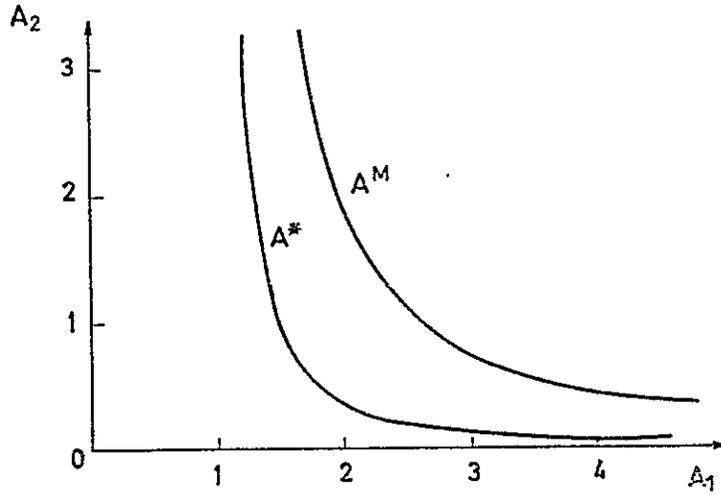


Figura 3.1:  $A^*$  y  $A^M$ , en el plano  $(A_1, A_2)$ , para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  y  $z_1 = z_2 = 2$ .

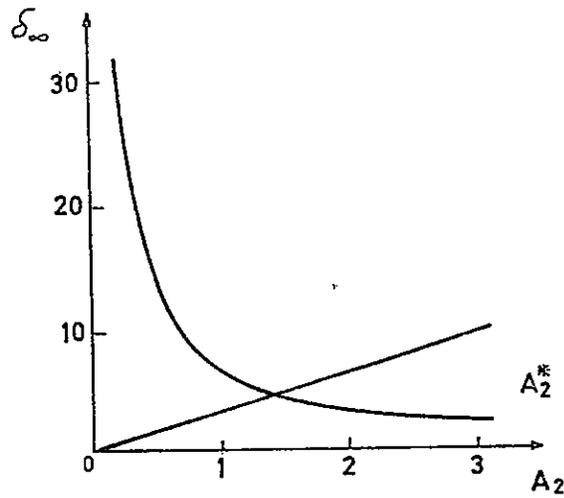


Figura 3.2:  $\{\delta_k\}$ , para  $k \gg 1$  como función de  $A_2$ , calculados sobre la línea  $A_2^*(A_1)$  de la Fig. 3.1.

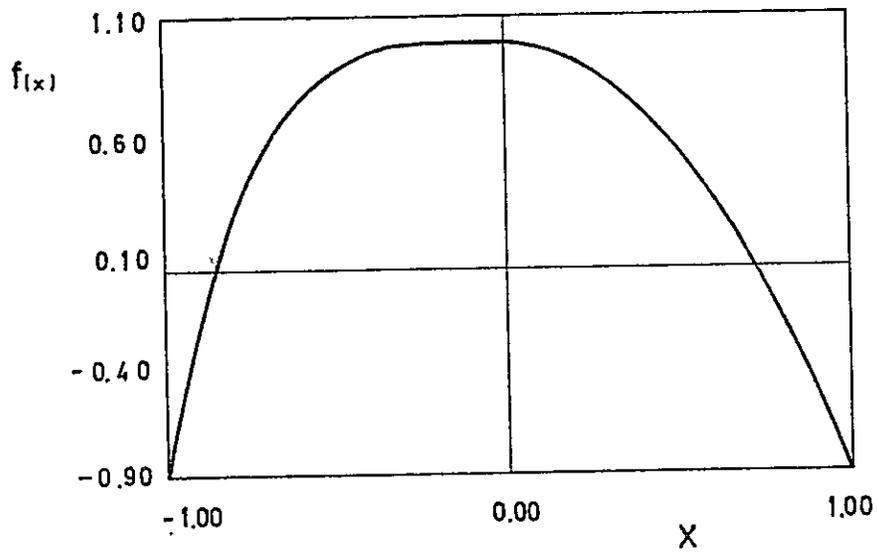


Figura 3.3: Mapa con asimetría en el exponente, para  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  para  $A_1 = A_2 = 2$ , y  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

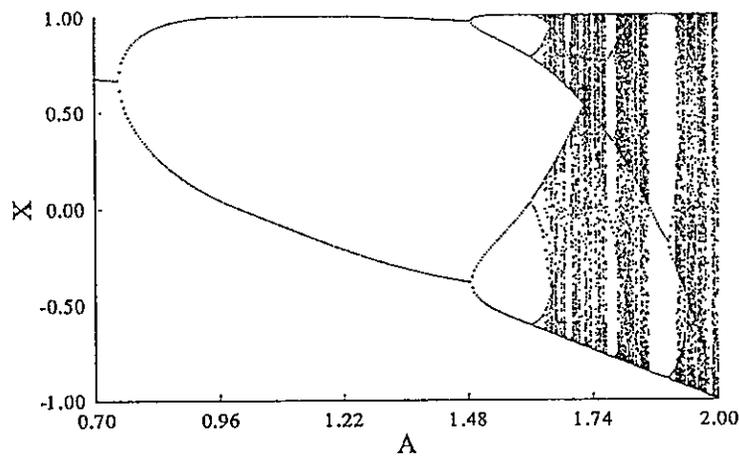


Figura 3.4: Evolución del atractor en términos del parámetro  $A$  para  $(z_1, z_2) = (2, 4)$  con  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  y  $X_0 = 0.5$

son bastante diferentes del tamaño de las ventanas del caso usual  $z_1 = z_2$ . Sin embargo, la secuencia de ventanas de orden mayor es la misma que la del caso simétrico, ya que este mapa satisface las condiciones de un mapa del intervalo[23]

### 3.2.3 Discontinuidad finita (caso III)

#### Evolución del atractor

Este es el caso más interesante y el que presenta la mayor cantidad de diferencias con el mapa logístico usual. De hecho, hemos observado una nueva ruta al caos asociada con este tipo de mapa[48,49,50]. La Fig. 3.5 muestra el mapa discontinuo para una situación típica, para  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$ , con  $A_1 = A_2 = 1.8$  y  $z_1 = z_2 = 2$ .

En la Fig. 3.6, después de una bifurcación usual, vemos la aparición de una secuencia de cascadas inversas en progresión aritmética, inicialmente mezcladas con bifurcaciones directas. Esto es posible verlo sólo a través de un minucioso análisis numérico. Por *cascadas inversas* entendemos el hecho que el parámetro  $A$  debe decrecer para aproximarse al punto de acumulación de dicha cascada (donde el período tiende a  $\infty$ ). Cascadas inversas mezcladas dentro del escenario de Feigenbaum han sido registradas en la literatura[56] para sistemas Hamiltonianos, pero, mientras éstos exhiben unas *pocas* ventanas con bifurcaciones *continuas* cuyo período crece *geométricamente*, nuestro mapa exhibe *muchos* p-ciclos *discontinuos* cuya periodicidad crece *aritméticamente*.

La secuencia de períodos (tamaño de los ciclos) que aparece es la siguiente:  $\dots 16 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 4$ , y se acumulan en  $A = 1$ . Inmediatamente arriba de esta cascada obtenemos una pareja de bifurcaciones del período usuales. Enseguida aparece una nueva cascada inversa de la forma siguiente:  $\dots 25 \rightarrow 21 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 9$ , y luego nuevamente una bifurcación del período en un período 18. Después de lo cual no se observa ninguna nueva bifurcación del período en la forma convencional, apareciendo sólo cascadas inversas.

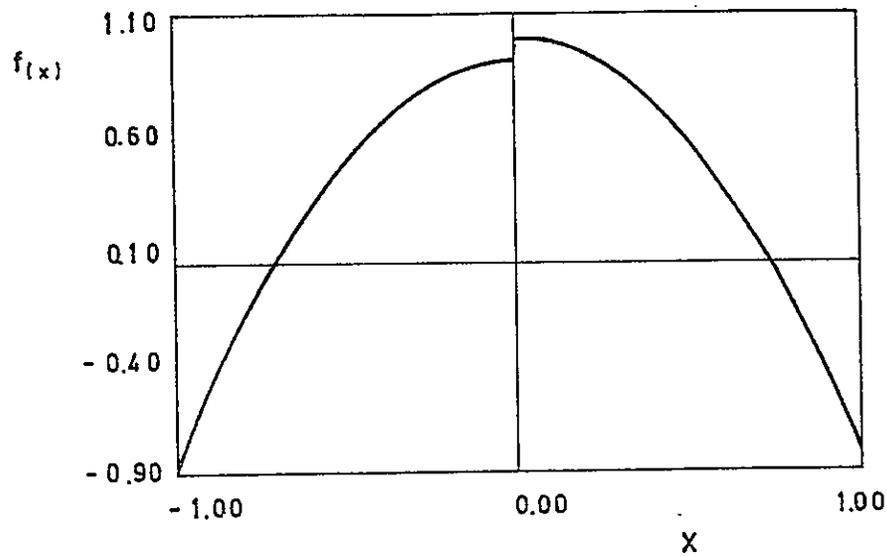


Figura 3.5: Mapa discontinuo, para  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$ , con  $A_1 = A_2 = 1.8$  y  $z_1 = z_2 = 2$

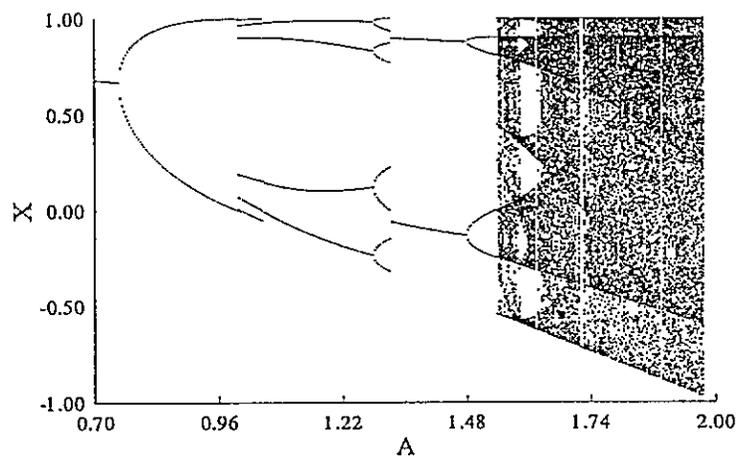


Figura 3.6: Evolución del atractor en términos del parámetro  $A$  para  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$ , con  $z_1 = z_2 = 2$  y  $X_0 = 0.5$

La primera cascada inversa que aparece en esta región es:  $\dots 76 \rightarrow 58 \rightarrow 40 \rightarrow 22$ . Luego le sigue la secuencia:  $\dots 70 \rightarrow 48 \rightarrow 26$ , y luego  $\dots 108 \rightarrow 82 \rightarrow 56 \rightarrow 30$ , etc. Un minucioso análisis de las secuencias encontradas en esta región permite escribir una regla matemática que describe la aparición de las cascadas inversas, cuyos períodos vienen dados por la siguiente expresión:

$$P_{n,l} = 2(2l+1) + n[2(2l-1)], \quad l \geq 5 \quad (3.6)$$

aquí  $n$  varía desde  $-\infty$  a cero para  $l$  fijo, de modo que  $n$  decrece mientras  $A$  crece. Por otra parte,  $l$  crece con  $A$ . Así, la primera cascada inversa en esta región:  $\dots 76 \rightarrow 58 \rightarrow 40 \rightarrow 22$ , corresponde a  $P_{n,5}$ , es decir,  $\dots P_{3,5} \rightarrow P_{2,5} \rightarrow P_{1,5} \rightarrow P_{0,5}$ , la segunda cascada corresponde a  $P_{n,6}$ , la tercera cascada corresponde a  $P_{n,7}$ , etc., con  $n$  decreciente al ir aumentando el parámetro  $A$ .

De lo anteriormente descrito se desprende claramente la siguiente regla: dentro de cada cascada inversa *el período crece aritméticamente*, sumando el primer elemento de la cascada previa, es decir, el elemento inmediatamente bajo su punto de acumulación.

Se observa también que entre dos elementos consecutivos de una cascada existe otra cascada inversa, cuyo período crece con la regla enunciada anteriormente. Por ejemplo, entre los elementos 40 y 22 de la primera cascada, podemos encontrar la cascada  $\dots 102 \rightarrow 62 \rightarrow 22$ . Esto corresponde a una situación con  $l$  fijo y  $n$  variable, por lo que la cascada se puede describir en términos de los  $P_{n,l}$  dados en relación (3.6)

$$P_{n,l}^m = P_{n,l} + m P_{(n+1),l}, \quad n, l \text{ fijos} \quad (3.7)$$

de modo que la subcascada inversa recién descrita se reobtiene mediante  $P_{n,l}^m$ , para  $l = 5$  y  $n = 0$ , con  $m$  variando desde  $-\infty \rightarrow 0$ . Entre los elementos 30 y 56 de la tercera cascada aparece la secuencia  $\dots 142 \rightarrow 86 \rightarrow 30$  la que se reobtiene usando  $P_{n,l}^m$ , para  $l = 7$  y  $n = 0$ , con  $m$  variando desde  $-\infty \rightarrow 0$ .

También es posible encontrar cascadas inversas entre dos períodos consecutivos de una subcascada, así por ejemplo podemos citar la primera cascada

... 76 → 58 → 40 → 22

la cual posee entre los períodos 40 y 22 la subcascada

... 102 → 62 → 22

y entre los períodos 102 y 62 de esta subcascada existe otra subcascada inversa

... 266 → 164 → 62,

y así sucesivamente.

Podemos describir la aparición de estas cascadas en función de los períodos descritos en la relación (3.7) del siguiente modo:

$$P_{n,l}^{m,\alpha} = P_{n,l}^m + \alpha P_{n,l}^{(m+1)}, \quad (3.8)$$

con  $\alpha$  variando desde  $-\infty \rightarrow 0$  y las mismas condiciones válidas para la relación (3.7). La cascada ... 266 → 164 → 62 se obtiene para  $l = 5, n = 0$  y  $m = 1$ .

Vemos así que la estructura de cascadas inversas que se obtiene es de una enorme riqueza y variedad.

Los nuevos elementos de un determinado p-ciclo aparecen en la vecindad del atractor que existe justo bajo su punto de acumulación y lo hacen de manera discontinua, como la bifurcación tangencial, sin embargo, *no presentan intermitencia*, ya que las funciones iteradas  $f(f(f(\dots f(x))))$  presentan una multiplicidad de picos, los cuales terminan en puntas de forma rectangular, que cruzan la bisectriz  $X = X'$ , como se puede ver en el ejemplo mostrado en la Fig. 3.7, donde se grafica el comportamiento de la función iterada 6 veces,  $f^6(X)$  versus  $X$ , para  $A = 1.03$ , con  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$  y  $z_1 = z_2 = 2$ .

En la Fig. 3.8 hemos representado la evolución del atractor para un caso típico,  $z_1 = z_2 = 2$ ,  $\varepsilon_2 = 0$  y  $X_0 = 0.5$ , como función del tamaño de la discontinuidad finita y del parámetro  $A$ . A este diagrama de fases se le denomina [49,50] *racimo de plátanos*, dada la forma peculiar que adopta. Inicialmente, fijemos  $\varepsilon_1$  y variemos  $A$ . En ese caso vemos el comportamiento descrito anteriormente: cascadas inversas de atractores, cuyo período crece aritméticamente y se acumula en valores de  $A$ , bajo los cuales, inmediatamente aparecen ciclos cuyos períodos son precisamente las

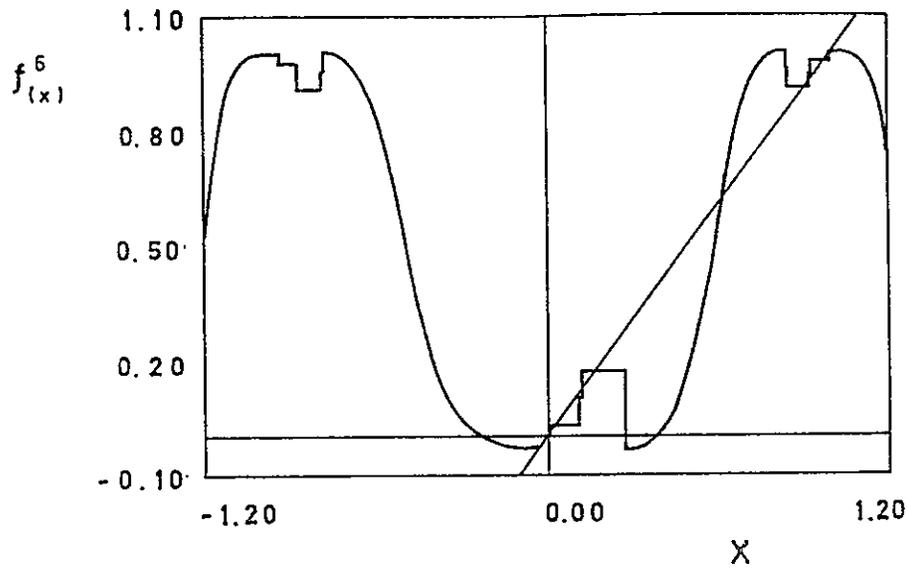


Figura 3.7:  $f^6(X)$  versus  $X$ , para  $A = 1.03$ , con  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$  y  $z_1 = z_2 = 2$

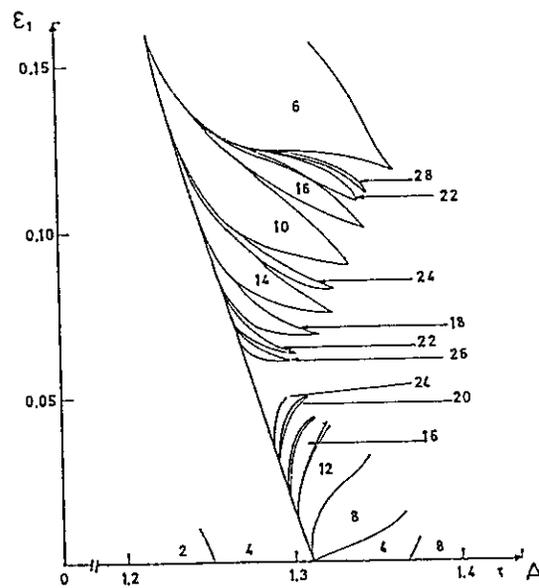


Figura 3.8: Diagrama de fases para  $z_1 = z_2 = 2$ ,  $\varepsilon_2 = 0$  y  $X_0 = 0.5$

constantes del crecimiento aritmético. Más aún, entre dos plátanos, siempre existe otro plátano. La misma clase de comportamiento se observa al fijar  $A$  y variar  $\varepsilon_1$  (o variar  $\varepsilon_2$ , o ambos, con  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ). Los puntos de acumulación de las cascadas se acumulan a su vez (para  $A$  creciente si  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  están fijos) en un *punto que es la entrada al caos*. En otras palabras, tenemos (presumiblemente) un número infinito de *puntos de acumulación en los cuales no hay caos* ( $\lambda < 0$ ); de modo que el caos aparece en el punto de acumulación de los puntos de acumulación.

### Exponente de Lyapunov

En la Fig. 3.9 presentamos la evolución del exponente de Lyapunov en función del parámetro  $A$ , para un caso típico  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$ . La primera entrada en caos para este caso ocurre en  $A^* = 1.5447414 \dots$ . A partir de la Fig. 3.10, que no es más que una amplificación del rectángulo marcado en la Fig. 3.9, podemos observar los siguientes comportamientos:

- i) la estructura es aproximadamente autosimilar,
- ii) los *dedos* correspondientes a períodos altos son muy estrechos. Para una cascada dada, ellos se adelgazan monótonamente y se corren hacia valores negativos de  $\lambda$ , exhibiendo (presumiblemente) *períodos infinitamente grandes sin caos*. El dedo más alto y más ancho de cada cascada, corresponde al menor período de esa cascada. Si consideramos los dedos  $P_{0,l}$  con  $l$  creciente, entonces las cumbres de estos dedos se van aproximando a  $\lambda = 0$ . Para  $l \rightarrow \infty$  se alcanza tal valor del exponente de Lyapunov, y el sistema entra en caos.
- iii) los cambios de período ocurren para valores del exponente de Lyapunov  $\lambda \rightarrow -\infty$ , en notable contraste con los cambios de período en la ruta al caos vía duplicación del período, en la cual ocurren para  $\lambda = 0$ .

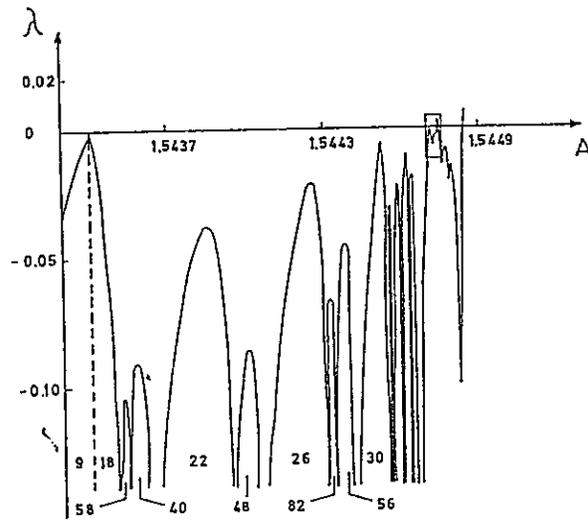


Figura 3.9: Exponente de Lyapunov como función de  $A$ , para  $z_1 = z_2 = 2$ ,  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0.1)$  y  $X_0 = 0.5$ . Los números en los *dedos* indican el período del atractor.

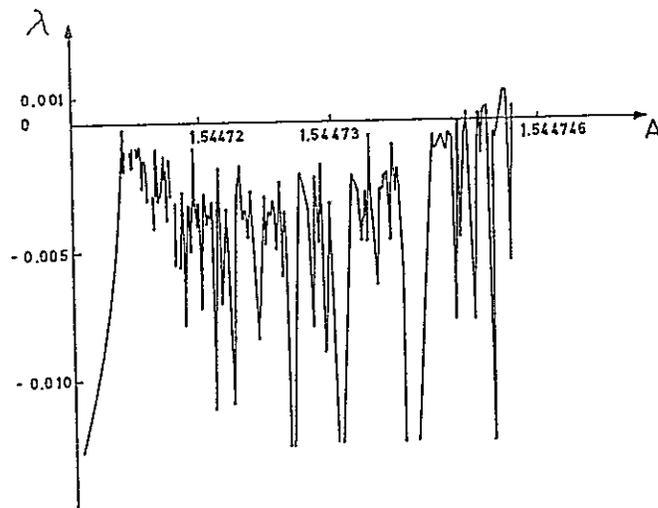


Figura 3.10: Amplificación del rectángulo de la Fig. 3.9.

### 3.3 Resumen y Conclusiones

En este capítulo hemos verificado que el escenario de Feigenbaum para mapas unidimensionales con un único máximo se modifica notablemente si se introduce una asimetría en dicho máximo. La asimetría en la amplitud ( $A_1 \neq A_2$ ) tiene una influencia relativa menor. La asimetría en el exponente ( $z_1 \neq z_2$ ) parece no alterar drásticamente la secuencia de bifurcaciones, pero introduce notables diferencias numéricas cuando se aproxima a la primera entrada en caos: la tendencia geométrica hacia un único valor, asociada con el conjunto  $\delta_k$ , desaparece.

La mayor alteración ocurre para el caso en que el mapa es discontinuo en el máximo ( $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ). El esquema de la secuencia de bifurcaciones de Feigenbaum desaparece rápidamente al aumentar el valor del parámetro  $A$ , y aparece un número, posiblemente infinito, de *cascadas inversas* de cambios de período, algunas veces mezcladas con cascadas directas. Los cambios de período aparecen discontinuamente, tal como en la bifurcación tangencial, pero no exhiben intermitencia, a diferencia de la bifurcación tangencial que sí la exhibe. Dentro de cada cascada los puntos de cambio de período se acumulan en ciertos valores críticos,  $A_l$ , en torno a los cuales existen infinitas periodicidades; sin embargo, los puntos  $A_l$  no presentan una dinámica caótica. El caos se alcanza en el punto  $A_{l \rightarrow \infty} = A_\infty$ . El proceso recién descrito contrasta con la ruta al caos de Feigenbaum seguida por los mapas sin discontinuidad en el máximo.

Finalmente, el tamaño de los períodos crece *aritméticamente* de acuerdo a relación (3.6) cuando se aproxima al punto de acumulación, y no *geométricamente* como en el caso usual.

# Capítulo 4

## Apéndice

### Exponentes de Lyapunov para el mapa bidimensional

Nuestro mapa se puede escribir en la forma:

$$X_{t+1} = A(\Phi_t) X_t (1 - X_t) \quad (4.1)$$

$$\Phi_{t+1} = \Phi_t + \omega$$

o en términos generales

$$X_{t+1} = f(X_t, \Phi_t) \quad (4.2)$$

$$\Phi_{t+1} = g(X_t, \Phi_t), \quad (4.3)$$

consideremos la diferencial en cada dirección del espacio de fases  $\{X_t, \Phi_t\}$

$$dX_{t+1} = \frac{\partial f}{\partial X_t} dX_t + \frac{\partial f}{\partial \Phi_t} d\Phi_t \quad (4.4)$$

$$d\Phi_{t+1} = \frac{\partial g}{\partial X_t} dX_t + \frac{\partial g}{\partial \Phi_t} d\Phi_t \quad (4.5)$$

la cual puede ser escrita en forma matricial

$$dY_{t+1} = M_t dY_t \quad (4.6)$$

donde

$$dY_t = \begin{bmatrix} dX_t \\ d\Phi_t \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

y  $M_t$  es la matriz de transformación

$$M_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_t} & \frac{\partial f}{\partial \Phi_t} \\ \frac{\partial g}{\partial X_t} & \frac{\partial g}{\partial \Phi_t} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

la cual es evaluada en cada iteración del punto  $(X_t, \Phi_t)$  sobre la trayectoria definida por el mapa bidimensional.

En términos del punto  $Y_0$ , la relación (4.6) se puede escribir

$$dY_t = M_{t-1} M_{t-2} \dots M_0 dY_0 \quad (4.9)$$

o en forma compacta

$$dY_t = J_t dY_0 \quad (4.10)$$

donde  $J_t$  representa el producto de las matrices  $M_j$ .

A través de los autovalores  $\mu_1, \mu_2$  de la matriz  $J_t$  podemos expresar la relación entre  $dX_t$  y  $dX_0$  y entre  $d\Phi_t$  y  $d\Phi_0$ , en la forma

$$dX_t = \mu_1 dX_0 \quad (4.11)$$

$$d\Phi_t = \mu_2 d\Phi_0. \quad (4.12)$$

Los exponentes de Lyapunov  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  pueden ser evaluados a través de la siguiente relación, válida para  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\mu_j \sim e^{t\lambda_j}, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

Específicamente

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\mu_j(t)) \quad (4.14)$$

En el caso de nuestro mapa bidimensional, la matriz  $M_t$  asume la forma

$$M_t = \begin{bmatrix} \alpha_t & \beta_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

donde

$$\alpha_t = A(\Phi_t)(1 - 2X_t) \quad (4.16)$$

$$\beta_t = \frac{\partial A(\Phi_t)}{\partial \Phi_t} X_t(1 - X_t) \quad (4.17)$$

y como consecuencia de la forma de esta matriz, la matriz  $J_t$  asume la forma

$$J_t = \begin{bmatrix} \prod_{j=0}^{t-1} \alpha_j & \gamma_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

donde  $\gamma_t$  viene expresada a través de  $\alpha_t$  y  $\beta_t$ , pero cuya forma específica no tiene importancia para el presente mapa, pues los autovalores de esta matriz vienen dados por

$$\mu_1 = \prod_{j=0}^{t-1} \alpha_j \quad (4.19)$$

$$\mu_2 = 1 \quad (4.20)$$

En consecuencia, el exponente de Lyapunov en la dirección de  $\Phi$  vale cero:

$$\lambda_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln(1) = 0 \quad (4.21)$$

y el exponente de Lyapunov en la dirección de  $X$  se expresa

$$\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln\left(\prod_{t=0}^{N-1} \alpha_t\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \ln|\alpha_t| \quad (4.22)$$

donde  $\alpha_t$  corresponde a la derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial X_t} = A(\Phi_t)(1 - 2X_t)$ . La forma final del exponente de Lyapunov se obtiene a partir de la relación (4.22)

$$\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \ln\left|\frac{\partial f(X_{t+1})}{\partial X_t}\right| \quad (4.23)$$

# Referencias

- [1] P. Collet and J. P. Eckmann, *Iterated maps on the Interval as Dynamical Systems*, Progress on Physics, Eds. A. Jaffe, D. Ruelle (Birkhauser, Boston, 1980), Vol. I
- [2] P. Bergé, Y. Pomeau, and Ch. Vidal, *L'Ordre dans le Chaos* (Hermann éditeurs, Paris, 1984)
- [3] H. G. Schuster *Deterministic Chaos: an Introduction*, Weinheim: Physik-Verlag, (1984)
- [4] Hao Bai-Lin, ed., *Directions in Chaos*, Vols. 1 y 2, World Scientific, Singapore, (1988)
- [5] E. N. Lorentz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963)
- [6] D. Ruelle, F. Takens, *Communications in Mathematical Physics*, **20**, 167 (1971)
- [7] R. May, *Nature* **261**, 459 (1976)
- [8] M. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978)
- [9] M. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **21**, 669 (1979)
- [10] D. D'Humières, M. R. Beasley, B. A. Huberman, A. Libchaber, *Phys. Rev A*, **26**, 3483 (1982)

- [11] A. Libchaber, J. Maurer, ed., *Nonlinear Phenomena at Phase Transitions and Instabilities*. NATO Adv. Study Inst., Plenum Press, New York 1982
- [12] A. Libchaber, C. Laroche, S. Fauve, *J. Phys. Lett.* **43**, L211 (1982)
- [13] M. Cirillo, N. F. Pedersen, *Phys. Lett. A*, **90**, 150 (1982)
- [14] J. Rössler, G. Martínez, and M. Kiwi, *Solid State Commun.* **61**, 395 (1987)
- [15] M. Hénon, *Commun. Math. Phys.* **53**, 655 (1976)
- [16] R. H. Simoyi, A. Wolf, H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 245 (1982)
- [17] L. Glass, M. R. Guevara, A. Shrier, *Physica* **7D**, 89 (1983)
- [18] J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, C. Vidal, *Physica* **2D**, 395 (1981)
- [19] F. T. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni, J. Tredicce, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1217 (1982)
- [20] P. Coullet, C. Tresser, *J. Phys. (Paris) Colloq.* **5**, C25 (1978)
- [21] D. J. Scalapino, J. E. Hirsch, B. A. Huberman, *Melting, Localization, and Chaos*, Eds. R. K. Kalia, P. Vashishta. Elsevier Science Publishing Company, Inc.
- [22] S. Grossmann, S. Thomae, *Z. Naturf. A* **32**, 1353 (1977)
- [23] M. Metropolis, M. L. Stein, P. R. Stein, J.
- [24] J. Testa, J. Pérez, C. Jeffries, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 714 (1982)
- [25] M. Eiswirth, P. Möller, and G. Ertl, *Surface Sci.* **208**, 13 (1989)
- [26] M. Eiswirth, P. Möller, K. Wetzl, R. Imbihl, and G. Ertl, *J. Chem. Phys.* **90**, 510 (1989)

- [27] L. Glass, *Chaos* **1**, 13 (1991)
- [28] P. Bak, T. Bohr, and M. Jensen, *Circle maps, Mode-locking and Chaos en: Directions in Chaos*, Vols. **1** y **2**, ed. Hao Bai-Lin (World Scientific, Singapore, 1988). P. Bak, *Physics Today* **39** (12), 38 (1986)
- [29] J. Rössler, M. Kiwi, and M. Markus, *From Chemical to Biological Organization* (Springer-Verlag Series in Synergetics), Vol. **39** (1988), pp. 319-330
- [30] J. Rössler, M. Kiwi, B. Hess, and M. Markus, *Phys. Rev. A* **39**, 5954 (1989)
- [31] J. Chang and J. A. Wright, *Phys. Rev. A* **23**, 1419 (1981)
- [32] R. Kapral and P. Mandel, *Phys. Rev. A* **32**, 1076 (1985)
- [33] J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, and B.A. Huberman, *Phys. Reports* **92**, 45 (1982)
- [34] D. Gonzalez, and O. Piro, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 870 (1983)
- [35] T. Hogg, and B. Huberman, *Phys. Rev. A* **29**, 275 (1984)
- [36] A. Rabinovitch, and R. Thieberger, *Jour. Theor. Biol.* **131**, 509 (1988)
- [37] M. Kiwi, E. Lazo, J. Rössler, *Periodic modulation of a logistic oscillator, Instabilities and Nonequilibrium Structures*, Eds. E. Tirapegui, W. Zeller, Vol **3**, 59 (1991)
- [38] J. Rössler, E. Lazo, M. Kiwi, *Nonlinear Phenomena in Fluids, Solids and Other Complex Systems*, Eds. P. Cordero, B. Nachtergaele, pp. 419 (1991)
- [39] T. Yazaki, S. Sugioka, F. Mizutani, and H. Mamada, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2515 (1990)
- [40] R. Lima, M. Pettini, *Phys. Rev. A*, **41**, 726 (1990)

- [41] M. Pettini, en *Dynamics and Stochastic Processes*, Lectures Notes in Physics, **355**. Eds. R. Lima, L. Streit, R. Vilela Mendes, Springer-Verlag, Berlin, 1990
- [42] Y. Braiman, I. Goldhirsch, Phys. Rev. Lett., **66**, 2545 (1991), y referencias allí incluidas
- [43] L. Fronzoni, M. Giocondo, M. Pettini, Phys. Rev. A, **43**, 6483 (1991), y referencias allí incluidas
- [44] J. Maurer, A. Libchaber, J. Phys. (Paris) Lett. **40**, L419 (1979); A. Libchaber, J. Maurer, J. Phys. (Paris) Colloq. **41**, C3-51 (1980); J. P. Gollub, S. V. Benson, J. Steinman, Ann. N.Y. Acad. Sci. **357**, 22 (1981); J. Giglio, S. Musazzi, U. Perinni, Phys. Rev. Lett. **47**, 243 (1981)
- [45] P. R. Hauser, C. Tsallis, E. M. F. Curado, Phys. Rev. A **30**, 2074 (1984)
- [46] B. Hu, I. I. Satija, Phys. Lett. A **98**, 143 (1983)
- [47] J. P. van der Weele, H. W. Capel, R. Kluiving, Phys. Lett. A, **119**, 15 (1986); Physica A, **145**, 425 (1987)
- [48] M. C. de Sousa Vieira, E. Lazo, C. Tsallis, Phys. Rev. A **35**, 945 (1987)
- [49] M. C. de Sousa Vieira, C. Tsallis, *Disordered Systems in Biological Models*, Eds. L. Peliti, S. A. Solla, World Scientific, 1988
- [50] M. C. de Sousa Vieira, C. Tsallis, *Universalities in Condensed Matter*, Eds. R. Jullien, L. Peliti, R. Rammal, N. Boccara, Springer Proc. Phys., 1988
- [51] A. A. Hnilo, Optics Commun. **53**, 194 (1985)
- [52] A. A. Hnilo, M. C. de Sousa Vieira, J. Opt. Soc. Am. B **5**, 928 (1988)
- [53] M. Octavio, A. da Costa, J. Aponte, Phys. Rev. A **34**, 1512 (1986)
- [54] A. Arneodo, P. Coullet, C. Tresser, Phys. Lett. A **70**, 74 (1979)

[55] R. V. Jensen, L. K. H. Ma, Phys. Rev. A **31**, 3993 (1985). Combinatorial Theory  
A **15**, 25 (1973)

[56] G. Contopoulos, Lett. Nuovo Cimento **37**, 149 (1983)