

**EXCITACIONES NO LINEALES EN SISTEMAS
MAGNETICOS UNIDIMENSIONALES**

Tesis

entregada a la

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Doctor en Ciencias con Mención en Física

por

Julio Pozo Pérez



Profesor Patrocinante: Dr. Rodrigo Ferrer Parragué

**Facultad de Ciencias
Universidad de Chile**

**INFORME DE APROBACION
TESIS DE DOCTORADO**

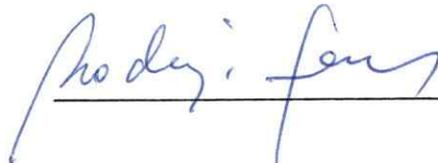
Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato:

Julio Pozo Pérez

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de Tesis para el grado de Doctor en Ciencias con Mención en Física.

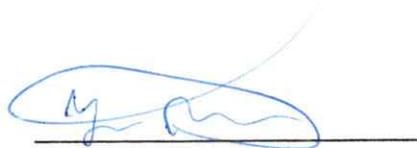
Director de Tesis:

Dr. Rodrigo Ferrer



Comisión Informante de Tesis:

Prof. Jaime Roessler



Dr. Patricio Pérez



Dr. David Gottlieb



Santiago, septiembre de 1990.

A mi esposa Rosa María.

A mis hijas Carolina y Alejandra.



AGRADECIMIENTOS

Mis especiales agradecimientos al Dr. Rodrigo Ferrer Parragué, por su valiosa orientación y apoyo permanente durante el desarrollo de este trabajo de tesis, también por ser el gestor del convenio de perfeccionamiento con la Universidad de Tarapacá, el cual hizo posible mi incorporación al programa de Doctorado en Física de la Universidad de Chile.

Agradezco a todos los Profesores del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile.

A todos mis colegas y amigos del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Tarapacá.

Y a mi familia por su comprensión y apoyo.

INDICE

	pág.
INTRODUCCION	01
CAPITULO 1: SISTEMA FERROMAGNETICO UNIAxIAL	
1.1 Antecedentes y Modelo	07
1.2 Transformaciones de Holstein-Primakoff	08
1.3 Estados Coherentes	11
1.4 Soluciones Con Máximo Momentum Angular Total	19
CAPITULO 2: SISTEMA FERROMAGNETICO PLANAR	
2.1 Modelo y Teoría	27
2.2 Representación de Shwinger y Ecuaciones de Movimiento	30
2.3 Solución	33
2.4 Resultados	38
CAPITULO 3: SISTEMA FERROMAGNETICO PLANAR COMPRESIBLE	
3.1 Modelo	45
3.2 Ecuaciones de Movimiento	48
3.3 Método de Solución	52
3.4 Resultados	56
CAPITULO 4: ENERGIA	
4.1 Introducción	66
4.2 Energía Cadena Magnética no Compresible	67
4.3 Energía Cadena Magnética Compresible	71
CONCLUSIONES	81
APENDICE	88
REFERENCIAS	85

RESUMEN

En este trabajo se investiga la existencia de excitaciones no lineales en sistemas magnéticos unidimensionales. En primer lugar se utiliza la representación de Holstein-Primakoff para tratar el caso de una cadena ferromagnética de Heisenberg con anisotropía uniaxial, en un campo magnético externo, y se discute la influencia del parámetro de anisotropía en el comportamiento de la velocidad máxima del solitón, determinándose también la dependencia de la energía del solitón en términos de la velocidad.

Luego, para tratar el caso de un sistema ferromagnético planar — cuyo prototipo es la sal magnética $Cs Ni F_3$ —, se hace uso de la representación de bosones acoplados de Schwinger para los operadores de espín, junto con el método de los estados coherentes del oscilador armónico simple; se determinan las ecuaciones para la dinámica de la cadena magnética y se investigan las propiedades de las desviaciones del espín fuera del plano, para soluciones de forma permanente.

Finalmente, se utiliza el formalismo anterior, para investigar la existencia de modos magnéticos y elásticos acoplados en una cadena de Heisenberg compresible con anisotropía planar, con un campo magnético externo aplicado en forma paralela al plano. Las formas de los solitones que se encuentran son fuertemente dependiente de los valores de los parámetros del sistema. En la determinación de la energía del sistema, se calculan las energías: magnética, de interacción y elástica.

INTRODUCCION

El período de la física comprendido, aproximadamente, entre el descubrimiento de las ecuaciones de Maxwell (1865) y el establecimiento de la teoría formal del electromagnetismo, puede ser llamado: la "era" de la física lineal. En ella, la mayor parte de los métodos utilizados por la física teórica, involucraban ecuaciones lineales, debido al hecho que muchos de los aspectos fundamentales de los fenómenos físicos podían ser analizados suponiendo ciertas características en la dinámica de los grados de libertad—pequeñas amplitudes o desplazamientos en torno a un punto de equilibrio, etc—, o mediante la exclusión de algunas variables que se suponían participando escasamente en los procesos—roce despreciable, etc.

Una de las ecuaciones lineales más importante en Física, es sin duda la ecuación diferencial de onda $\psi_{tt} - \psi_{xx} = 0$, para la cual se cumple el principio de superposición, y la solución general (para el medio lineal) se expresa como:

$$\psi(0) = \alpha\psi_1(0) + \beta\psi_2(0) \rightarrow \psi(t) = \alpha\psi_1(t) + \beta\psi_2(t)$$

De igual forma, un medio no lineal puede estar caracterizado por:

$$\psi(0) \rightarrow \psi(t) \neq \alpha\psi_1(t) + \beta\psi_2(t)$$

Un ejemplo muy simple e importante lo constituye el modelo del oscilador armónico simple sin "roce", descrito por el Hamiltoniano $\mathcal{H} = p^2/2 - \omega_0^2 \cos x$, donde x es la desviación con respecto a un punto de equilibrio y ω_0 es una frecuencia característica. La ecuación de evolución proveniente de este Hamiltoniano es $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$, claramente no lineal. Si consideramos que la variable dinámica x no excursiona muy lejos de las posiciones de equilibrio, ie. $x \ll 1$, entonces podemos efectuar la aproximación $\sin x \simeq x$ luego linearizar la ecuación y re-

solver $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; el diagrama de fase \dot{x} versus x correspondiente son elipses concéntricas. Si no aproximamos, las soluciones son mucho más complejas y ricas en información; el diagrama de fase tiene ahora una estructura con cualidades inexistentes en el caso lineal: puntos elípticos, separatrices, puntos hiperbólicos, etc, incluyendo la existencia de soluciones tipo solitón para la velocidad, $v \equiv \dot{x}$, sobre las separatrices.

Cuando se consideran ondas en medios no lineales (ie. en medios donde la contribución no lineal no puede ser despreciada al analizar las propiedades de la onda en cuestión) aparecen varios aspectos nuevos en relación al problema convencional de ondas en medios lineales; entre ellos destacamos la aparición de "solitones". Estos corresponden a pulsos de forma permanente, que cuando interactúan con obstáculos de diversa índole, se deforman fuertemente para luego reaparecer imperturbados.

Las primeras ideas relacionadas con lo que realmente se entiende por una onda solitaria fueron dadas a conocer en el año 1834 por John Scott Russell, sin embargo, su significado sólo fue considerado cuando se lo relacionó con un importante estado estable de algunos sistemas no lineales lo que se llevo a efecto a mediados de 1960.

El descubrimiento de algunos sistemas no lineales, que poseen estados especiales llamados **solitones**, fueron dados a conocer inicialmente mediante estudios numéricos realizados por Kruskal y Zabusky en el año 1960, quienes le dan este nombre debido al hecho de que dos o más ondas solitarias puedan chocar y no cambien su forma. A partir de entonces, los aspectos no lineales han sido de gran interés en matemáticas aplicadas, ingeniería y en particular en física, donde los

estudios que se han realizados han dado origen a lo que actualmente se conoce con el nombre de **Física No lineal**, dentro de cuyo contexto se encuentra inmerso el presente trabajo de tesis.

La contribución de los solitones a las propiedades dinámicas ha sido estudiada experimentalmente en compuestos magnéticos tales como el ferromageto planar $CsNiF_3$. Para ello se han utilizado diferentes técnicas: resonancia magnética nuclear^[1], efecto Mössbauer^[2] y en especial scattering inelástico de neutrones^[3,4,5].

La dinámica de espín es un fenómeno esencialmente magnético unidimensional donde sólo se observa el orden de corto alcance.

Existe actualmente una gran cantidad de sistemas magnéticos reales cuyas características revelan una naturaleza cuasi-unidimensional, esto los hace muy atractivos desde el punto de vista teórico debido a que se dispone de muchos modelos físicos unidimensionales, algunos con soluciones exactas, que pueden ser confirmados por mediciones experimentales. Si bien estos sistemas no poseen transiciones de fase, su estudio es importante ya que manifiestan características propias provenientes de excitaciones de su estado fundamental. En particular, admiten excitaciones no lineales estables que corresponden a un orden magnético bien determinado (solitones, paredes de dominio).

Especialmente interesantes son los modelos relativos a sistemas magnéticos unidimensionales con anisotropía planar los cuales sirven para interpretar las propiedades termodinámicas de algunas sales magnéticas del tipo $(CsNiF_3)$ con fuertes anisotropías en la dirección de un eje; para ciertas temperaturas estos sistemas tienen susceptibilidades magnéticas que son grandes y homogéneas cuando el campo magnético externo es aplicado en un plano llamado de fácil magneti-

zación, y despreciables para campos perpendiculares a éste.

El estudio teórico de estos sistemas contempla considerar lo siguiente:

- i).- Un Hamiltoniano modelo
- ii).- Técnicas para resolverlo

Generalmente, se utilizan dos métodos diferentes, uno de ellos consiste en tratar desde un principio a los operadores momentum angular de espín como variables clásicas; alternativamente se puede trabajar con los espines manteniendo su estado cuántico y sólo en una etapa posterior introducir un formalismo clásico. El último procedimiento es usado muy frecuentemente; para implementarlo se usan representaciones bosónicas de los operadores de espín y las soluciones se expresan en términos de estados coherentes de estas variables bosónicas. En el desarrollo de este trabajo de tesis, usamos dos de éstas representaciones, la representación de Holstein-Primakoff^[7] y la representación de Schwinger. La primera es conveniente para tratar el caso de un sistema ferromagnético uniaxial, en el cual se estudia la presencia de excitaciones no lineales en una cadena ferromagnética de Heisenberg con anisotropía uniaxial. Esto se realiza en el capítulo 1; allí se incluye un campo magnético externo y se discute la influencia del parámetro de anisotropía en el comportamiento de la velocidad máxima del solitón^[8], determinándose también la dependencia de la energía del solitón en términos de la velocidad. A su vez, la representación de Schwinger^[9] de bosones acoplados se utiliza para tratar el caso de un sistema ferromagnético planar cosa que se mostrará en el capítulo 2.

La utilización de representaciones bosónicas para los operadores de espín son

un método muy adecuado para estudiar la presencia de ondas solitarias en sistemas magnéticos unidimensionales, ya que ellas permiten la inclusión de correcciones cuánticas en forma sistemática. Previo al estudio de los efectos cuánticos, se puede establecer una estricta correspondencia entre las soluciones clásicas — soluciones obtenidas al tratar a los espines como vectores clásicos — y las soluciones obtenidas por medio de las representaciones bosónicas (tal correspondencia fue establecida por Balaskrishnan y bishop^[10] para la representación de estados coherentes del espín).

En estos sistemas es posible estudiar excitaciones magnéticas elementales (magnones, solitones, pared de dominio) utilizando algunos modelos teóricos tradicionales. Al modelar estos sistemas con el Hamiltoniano de Heisenberg con anisotropía planar, se puede investigar fácilmente el límite clásico de anisotropía extrema ($D = \infty$) ya que las ecuaciones de Hamilton de las variables de espín corresponden a una ecuación diferencial no lineal bien conocida llamada ecuación de sine-Gordon (apéndice, secciones 5.1 y 5.5). Ahora bien, cuando la anisotropía no es extrema y se permite que los espines tengan excursiones fuera del plano de fácil magnetización, el problema se complica bastante, pues las ecuaciones involucradas no ofrecen soluciones simples.

En el capítulo 2 se utiliza la representación de bosones acoplados de Schwinger de los operadores de espín en conjunto con el método de los estados coherentes del oscilador armónico simple, para determinar las ecuaciones para la dinámica de la cadena magnética y se investigan las propiedades de las desviaciones del espín fuera del plano, para el caso de un sistema ferromagnético planar casi unidimensional^[11].

En el capítulo 3 se utiliza el formalismo anterior para analizar la influencia de otros aspectos fundamentales como son la presencia de modos acústicos debido al hecho de considerar una cadena magnética compresible^[12]. En este caso se investiga la existencia de modos magnéticos y elásticos acoplados en una cadena de Heisenberg compresible con anisotropía planar, en presencia de un campo magnético externo aplicado en forma paralela al plano. Las formas de los solitones que se muestran son fuertemente dependiente de los valores de los parámetros del sistema.

La energía del sistema se determina en el capítulo 4, donde inicialmente se analiza y discute la aproximación al primer orden en las excusiones del espín fuera del plano, respecto a los valores que puede tomar la energía en el caso de una cadena de Heisenberg con anisotropía planar. Posteriormente se incluye el efecto de compresibilidad, calculándose, además de la energía magnética, las contribuciones elástica y acoplamiento espín-red.

Por último, el capítulo 4 entrega las conclusiones generales obtenidas en esta tesis (mientras que el análisis más técnico de los resultados específicos se consigna capítulo a capítulo).

Finalmente se discuten las posibles prolongaciones naturales del presente trabajo, para las cuales el formalismo acá utilizado presenta notables ventajas comparativas.

Hemos procurado que el contenido de esta tesis sea autosuficiente para un lector con una mediana formación en Física del Sólido; con tal objeto hemos incluido un apéndice (capítulo 5) donde se tratan algunos tópicos especiales.

Capítulo 1

SISTEMA

FERROMAGNETICO

UNIAXIAL

1.1 Antecedentes y Modelo

Actualmente existe gran interés por estudiar las excitaciones elementales no lineales en los sistemas magnéticos llamados unidimensionales, cuyo prototipo es la sal magnética ($Cs Ni F_3$). Mediciones experimentales^[1] muestran que los iones Ni^{2+} forman cadenas lineales de intercadenas e intracadenas $Ni - Ni$ con distancias iguales a: 6.23 y 2.61 Å respectivamente, dado que las interacciones a lo largo de la cadena son dominantes, este sistema puede ser considerado como un sistema ferromagnético unidimensional, en el que se investigan tanto las propiedades dinámicas como las termodinámicas y los aspectos solitónicos^[13-17].

Es de particular relevancia, el estudio del problema de la existencia de modos solitónicos como excitaciones magnéticas no lineales, en cadenas ferromagnéticas de Heisenberg con anisotropía uniaxial^[18], como asimismo el rol que cumple en estos sistemas la inclusión de una interacción bicuadrática en las soluciones de onda solitaria, la cual ha sido estudiada^[19] utilizando el método de los estados coherentes.

En este capítulo se presenta el estudio del caso de una cadena ferromagnética anisotrópica uniaxial de Heisenberg en presencia de un campo magnético externo H_0 aplicado en la dirección del eje z y descrita por el siguiente Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}J \sum_{i,\delta} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+\delta} - D \sum_i (S_i^z)^2 - h \sum_i S_i^z \quad (1.1)$$

donde el primer término es el Hamiltoniano de Heisenberg isotrópico, el segundo da la energía de anisotropía uniaxial ($D > 0$) y el tercero corresponde a la energía de Zeeman, $h \equiv g\mu_B H_0$, (g es el factor de Landé, μ_B es el magnetón de Bohr); $J > 0$, es el acoplamiento de intercambio entre primeros vecinos; \vec{S}_i es operador de espín en el sitio i ; δ representa la distancia entre primeros vecinos.

1.2 Transformaciones de Holstein–Primakoff

Puesto que estamos interesados en estudiar excitaciones elementales de este sistema, descrito por el Hamiltoniano (1.1), se considera como estado fundamental un alineamiento ferromagnético en el cual todos espines están dirigidos en la dirección del campo magnético externo a lo largo del eje z . Como las desviaciones del espín son con respecto a este eje, usaremos las transformaciones de

Holstein-Primakoff (HP):

$$\begin{aligned}
 S_i^+ &= \sqrt{2S}(1 - a_i^\dagger a_i/2S)^{1/2} a_i \\
 S_i^- &= \sqrt{2S} a_i^\dagger (1 - a_i^\dagger a_i/2S)^{1/2} \\
 S_i^z &= S - a_i^\dagger a_i
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

donde $\hbar = 1$; a_i^\dagger y a_i son operadores bosónicos que crean y destruyen desviaciones del espín en el sitio i , respectivamente. La transformación (1.2) admite aproximaciones; por ejemplo si el número de desviaciones es pequeño se escribe:

$$\begin{aligned}
 S_i^+ &\simeq \sqrt{2S} a_i \\
 S_i^- &\simeq \sqrt{2S} a_i^\dagger \\
 S_i^z &= S - a_i^\dagger a_i
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Nuestro interés es ir un paso adelante y tomar el tercer orden

$$\begin{aligned}
 S_i^+ &\simeq \sqrt{2S}(1 - a_i^\dagger a_i/4S)a_i \\
 S_i^- &\simeq \sqrt{2S}a_i^\dagger(1 - a_i^\dagger a_i/4S) \\
 S_i^z &= S - a_i^\dagger a_i
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

El Hamiltoniano (1.1) se puede expresar primero en términos de los operadores S_i^+ , S_i^- y S_i^z , para luego escribirlo en función de los operadores bosónicos a_i^\dagger y a_i .

De la definición:

$$\begin{aligned}
S_i^x &= \frac{1}{2}(S_i^+ + S_i^-) \\
S_i^y &= \frac{1}{2i}(S_i^+ - S_i^-)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

se tiene:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}J \sum_{i,\delta} \left\{ \frac{1}{2}(S_i^+ S_{i+\delta}^- + S_i^- S_{i+\delta}^+) + S_i^z S_{i+\delta}^z \right\} - D \sum_i (S_i^z)^2 - h \sum_i S_i^z \tag{1.6}$$

con lo cual, utilizando la ecuación (1.4) el Hamiltoniano \mathcal{H} escrito al cuarto orden en términos de estos operadores toma la forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & -\frac{1}{2}JS \sum_{i,\delta} \{ a_i a_{i+\delta}^\dagger + a_i^\dagger a_{i+\delta} - a_{i+\delta}^\dagger a_{i+\delta} - a_i^\dagger a_i \\
& - \frac{1}{4S} (a_i a_{i+\delta}^\dagger a_{i+\delta}^\dagger a_{i+\delta} + a_i^\dagger a_i a_i a_{i+\delta}^\dagger + a_i^\dagger a_{i+\delta}^\dagger a_{i+\delta}^\dagger a_{i+\delta} \\
& + a_i^\dagger a_i^\dagger a_i a_{i+\delta} - 4S a_i^\dagger a_i a_{i+\delta}^\dagger a_{i+\delta}) \} \\
& - D \sum_i (S^2 - 2S a_i^\dagger a_i + a_i^\dagger a_i a_i^\dagger a_i) - h \sum_i (S - a_i^\dagger a_i)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Formalmente podemos calcular los promedios de los operadores correspondientes a las componentes del espín \vec{S} escribiendo:

$$\begin{aligned}
\langle S_i^x \rangle &= \langle \frac{1}{2}(S_i^+ + S_i^-) \rangle = \frac{\sqrt{2S}}{4} \langle a_i + a_i^\dagger - \frac{1}{4S} (a_i^\dagger a_i a_i + a_i^\dagger a_i^\dagger a_i) \rangle \\
\langle S_i^y \rangle &= \langle \frac{1}{2i}(S_i^+ - S_i^-) \rangle = \frac{\sqrt{2S}}{4} \langle a_i - a_i^\dagger - \frac{1}{4S} (a_i^\dagger a_i a_i - a_i^\dagger a_i^\dagger a_i) \rangle \\
\langle S_i^z \rangle &= S - \langle a_i^\dagger a_i \rangle
\end{aligned} \tag{1.8}$$

y en general para toda función de los operadores $\langle \mathcal{O}(S^x, S^y, S^z) \rangle = \langle \tilde{\mathcal{O}}(a^\dagger, a) \rangle$ (por ejemplo para \mathcal{H}).

El espacio que utilizaremos para calcular estos promedios es el llamado **espacio de estados coherentes** introducido por Schrödinger en 1926, con el fin de analizar comportamientos clásicos de sistemas cuánticos, para los cuales daremos una descripción más adelante.

En el cuadro de Heisenberg, la dinámica de la cadena está determinada por la evolución de los operadores a , satisfaciendo la ecuación:

$$i\dot{a}_j(t) = [a_j(t), \mathcal{H}] \quad (1.9)$$

donde el punto representa $\partial/\partial t$ y $\hbar = 1$.

Sustituyendo \mathcal{H} dado por (1.7) en la ecuación anterior, y utilizando las reglas de conmutación para operadores bosónicos $[a_i, a_j] = \delta_{ij}$ tenemos:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_j = & [(J + 2D)S + h]a_j - D(a_j + 2a_j^\dagger a_j a_j) \\ & + \frac{1}{2}JS \sum_{\delta} (a_j - 2a_{j+\delta}) - J \sum_{\delta} a_{j+\delta}^\dagger a_{j+\delta} a_j \\ & - \frac{1}{8}J \sum_{\delta} (4a_j^\dagger a_j a_{j+\delta} + 2a_{j+\delta}^\dagger a_{j+\delta} a_{j+\delta} + 2a_{j+\delta}^\dagger a_j a_j). \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.3 Estados Coherentes

Los estados coherentes fueron construidos primeramente por Schrödinger (1926) [20] y Glauber (1963) [21] para el caso de un oscilador armónico simple, cuyo Hamiltoniano está dado por:

$$\mathcal{H}_{oscil} = p^2/2m + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (1.11)$$

Definiendo los operadores de destrucción (a) y de creación (a^\dagger)

$$a = (p - im\omega x)/\sqrt{2m\omega\hbar} \quad ; \quad a^\dagger = (p + im\omega x)/\sqrt{2m\omega\hbar} \quad (1.12)$$

los cuales satisfacen la relación de conmutación $[a, a^\dagger] = 1$

El Hamiltoniano de este sistema puede ser escrito en términos de estos operadores como:

$$\mathcal{H}_{oscil} = (a^\dagger a + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (1.13)$$

El conjunto completo de los autoestados $\{|n\rangle\}$ de este Hamiltoniano permite determinar los autovalores de energía

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (1.14)$$

donde n es un número entero positivo con las siguientes propiedades:

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle \quad ; \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad ; \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (1.15)$$

Aprovechando la completitud de los estados $\{|n\rangle\}$ cualquier estado $|\alpha\rangle$ puede ser escrito en la forma:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle \quad (1.16)$$

Ahora, si se cumple:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.17)$$

con $(\alpha \in \mathbb{C})$, el estado se llama Coherente. Determinaremos ahora la forma de los coeficientes $\langle n|\alpha\rangle$ para que se satisfaga la ecuación anterior. Tenemos

$$a|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\alpha\rangle a|n\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\alpha\rangle |n\rangle \quad (1.18)$$

o sea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\alpha \rangle \sqrt{n}|n-1\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\alpha \rangle |n\rangle \quad (1.19)$$

si consideramos: $n-1 = n'$, entonces:

$$\sum_{n'=0}^{\infty} \langle n'+1|\alpha \rangle \sqrt{n'+1}|n'\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\alpha \rangle |n\rangle \quad (1.20)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\langle n+1|\alpha \rangle \sqrt{n+1} - \alpha \langle n|\alpha \rangle) |n\rangle = 0 \quad (1.21)$$

obteniéndose la ecuación de recurrencia:

$$\langle n+1|\alpha \rangle \sqrt{n+1} = \alpha \langle n|\alpha \rangle \quad (1.22)$$

a partir de la cual, dado $\langle 0|n\rangle$ podemos obtener todos los otros coeficientes, como ejemplo tomemos:

$$\begin{aligned} \langle 1|\alpha \rangle \sqrt{1} &= \alpha \langle 0|\alpha \rangle \\ \langle 2|\alpha \rangle \sqrt{2} &= \alpha \langle 1|\alpha \rangle = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1}} \langle 0|\alpha \rangle \\ &\vdots = \vdots \\ \langle n|\alpha \rangle \sqrt{n} &= \frac{\alpha^n}{\sqrt{1}\sqrt{2}\cdots\sqrt{n-1}} \langle 0|\alpha \rangle \end{aligned} \quad (1.23)$$

por lo tanto:

$$\langle n|\alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha \rangle \quad (1.24)$$

luego:

$$|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.25)$$

Si exigimos normalización:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha \rangle &= |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n} \alpha^n}{\sqrt{m! n!}} \langle m | n \rangle \\ &= |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 \exp(|\alpha|^2) = 1 \end{aligned} \quad (1.26)$$

luego

$$\langle 0 | \alpha \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \quad (1.27)$$

de esta forma los estados $|\alpha\rangle$ están dados por

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.28)$$

o también

$$|\alpha\rangle = \exp(-\alpha^* a + \alpha a^\dagger) |0\rangle = \hat{D} |0\rangle \quad (1.29)$$

donde \hat{D} es el operador desplazamiento y los operadores a y a^\dagger son los operadores de destrucción y creación definidos anteriormente.

Es fácil mostrar que estos estados forman un conjunto completo, y podemos escribir:

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 \quad (1.30)$$

La propiedad anterior es la que permite expandir vectores de estado del oscilador armónico y elementos de matriz en términos de estados coherentes.

Sin embargo, estos estados no son ortogonales, de hecho a partir de la ecuación (1.27), la superposición de dos estados $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ está dada por:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \exp(\alpha\beta^* - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2) \quad (1.31)$$

Por otro lado, se pueden definir estados coherentes análogos para el espín, sin embargo, para nuestra aproximación semiclásica es suficiente tomar los arriba descritos, los cuales suponen una cantidad infinita de proyecciones del espín sobre el eje z .

Para resolver la ecuación (1.10) en el espacio coherente, recurriremos a las siguientes aproximaciones:

a) El sistema es continuo, es decir la distancia entre los espines de la cadena es muy pequeña

b) El espín es clásico, es decir admite un número infinito de proyecciones sobre el eje z .

El límite continuo lo tomamos como:

$$\begin{aligned} a_i(t) &\longrightarrow a(x, t) \\ a_{i+\varepsilon}(t) &\longrightarrow a(x + \delta, t) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Por ejemplo para valores de δ muy pequeños se puede escribir:

$$a(x \pm \delta, t) = a \pm \frac{\partial a}{\partial x} \delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \delta^2 \quad (1.33)$$

Teniendo presente lo anterior, después de utilizar estados coherentes y de realizar las sumas correspondientes, la ecuación (1.10) se puede escribir dentro de la aproximación de límite continuo (apéndice, sección 5.2) en la forma:

$$\begin{aligned} i \dot{\alpha} &= A_1 \alpha - JS \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - 2D\alpha |\alpha|^2 - J\alpha \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right|^2 \\ &- \frac{1}{2} J \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 \alpha^*}{\partial x^2} + \alpha^* \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

donde $A_1 = (2S - 1)D + h$, aquí se puede ver que relación anterior es del tipo ecuación de Schrödinger no lineal, y es idéntica a la ecuación de evolución que

aparece en la referencia [19] cuando el parámetro de interacción de intercambio bicuadrático es nulo. Por otro lado es fácil ver que si en esta ecuación diferencial no lineal se utilizan las transformaciones de (HP) al segundo orden en los operadores bosónicos, ecuación (1.3), obtenemos ondas de espín para describir la dinámica de la cadena.

En la obtención de esta última relación, se ha usado la representación de estados coherentes descritos anteriormente, donde los estados $|\alpha\rangle \equiv |\alpha(x,t)\rangle$ son autovectores del operador no hermítico a , de modo que: $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha(x,t)\rangle$, y $\alpha \equiv \alpha(x,t)$ son los correspondientes autovalores complejos en la aproximación de límite continuo.

Este límite continuo se justifica si las excitaciones del sistema que se buscan involucran muchos puntos de la red.

Por otro lado, los promedios de los operadores de la ecuación (1.8) sobre estos estados toman la forma:

$$\begin{aligned} \langle S^x \rangle &= \frac{\sqrt{2S}}{2}(\alpha + \alpha^*)(1 + \frac{1}{4S}|\alpha|^2) \\ \langle S^y \rangle &= \frac{\sqrt{2S}}{2i}(\alpha - \alpha^*)(1 - \frac{1}{4S}|\alpha|^2) \\ \langle S^z \rangle &= S - |\alpha|^2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

y la densidad Hamiltoniana dentro del límite continuo se expresa como:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \mathcal{H} | \alpha \rangle &= A_1 |\alpha|^2 - D |\alpha|^4 + JS \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right|^2 \\ &+ \frac{1}{4} J \left(\alpha^2 \left(\frac{\partial \alpha^*}{\partial x} \right)^2 + (\alpha^*)^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

La energía total viene dada por:

$$E = \int \langle \alpha | \mathcal{H} | \alpha \rangle dx \quad (1.37)$$

Escribiendo el número complejo $\alpha(x, t)$ en la forma:

$$\alpha(x, t) = \phi(\xi)\exp(i\theta(\xi)) \quad (1.38)$$

donde ϕ y θ son reales y donde se ha tomado $\xi = x - vt$, ya que queremos soluciones de forma permanente; v es la velocidad de la excitación magnética no lineal. Sustituyendo (1.38) en (1.34) y comparando partes reales e imaginarias se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas para ϕ y θ :

$$-v\phi_\xi + 2JS\phi_\xi\theta_\xi + JS\phi\theta_{\xi\xi} - 2J\phi^2\phi_\xi\theta_\xi - \frac{1}{2}J\phi^3\theta_{\xi\xi} = 0 \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} (v\theta_\xi - A_1)\phi + JS\phi_{\xi\xi} - JS\phi\theta_\xi^2 + \frac{1}{2}J\phi\phi_\xi^2 + J\phi^3\theta_\xi^2 \\ + \frac{1}{2}J\phi^2\phi_{\xi\xi} + A_2\phi^3 = 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

donde $\phi_\xi, \phi_{\xi\xi}, \theta_\xi, y \theta_{\xi\xi}$ representan derivadas de ϕ y θ respectivamente; $A_2 = 2D$; y las condiciones de borde estarán dadas por: $\phi(\pm\infty) = 0$, $\phi_\xi(\pm\infty) = 0$.

Una primera integral se obtiene de multiplicar (1.39) por ϕ , resultando así:

$$\theta_\xi = \frac{V}{2} \left(1 - \frac{\phi^2}{2S}\right)^{-1} \quad (1.41)$$

con $V = v/JS$, sustituyendo luego (1.41) en (1.40) y multiplicando ϕ_ξ se encuentra:

$$\phi_\xi^2 = \rho_2\eta^2\phi^2\left(1 - \frac{\phi^2}{2S\eta^2}\right) \quad (1.42)$$

donde

$$\eta = \sqrt{\rho_1/\rho_2} \left(1 - \frac{V^2}{4\rho_1}\right)^{1/2} \quad (1.43)$$

con

$$\rho_1 = A_1/JS \quad y \quad \rho_2 = \rho_1 + A_2/J \quad (1.44)$$

Finalmente, integrando la ecuación (1.42) se obtiene que la solución tipo solitón está dada por:

$$\phi(\xi) = \sqrt{2S} \eta \operatorname{sech}(\sqrt{\rho_2} \eta \xi). \quad (1.45)$$

Sustituyendo la solución (1.4) en (1.41) se tiene:

$$\theta(\xi) = \frac{V}{2} \xi + \tan^{-1} \left([\eta^2 / (1 - \eta^2)]^{1/2} \tanh(\sqrt{\rho_2} \eta \xi) \right). \quad (1.46)$$

Para obtener la dinámica del espín, se calculan los valores de los promedios de sus componentes; a partir de la ecuación (1.35) se tiene:

$$\begin{aligned} \langle S^x(\xi) \rangle &= \sqrt{2S} \left(1 - \frac{\phi^2(\xi)}{4S} \right) \cdot \phi(\xi) \cos \theta(\xi) \\ \langle S^y(\xi) \rangle &= \sqrt{2S} \left(1 - \frac{\phi^2(\xi)}{4S} \right) \cdot \phi(\xi) \sin \theta(\xi) \\ \langle S^z(\xi) \rangle &= S - \phi^2(\xi). \end{aligned} \quad (1.47)$$

En la figura 1.1 se muestra la forma que toma la configuración anterior, para un valor fijo del parámetro de anisotropía D , el campo magnético externo h y la velocidad del solitón v .

La energía de esta onda solitaria se puede determinar a partir de las ecuaciones (1.36) y (1.37) integrando la densidad Hamiltoniana desde $-\infty$ a $+\infty$. Obteniéndose:

$$E = 4A_1 S \eta / \sqrt{\rho_2} + 4JS^2 \sqrt{\rho_2} \eta^3 \quad (1.48)$$

Es interesante notar que si $D = 0$ (caso isotrópico) las ecuaciones (1.45), (1.46) y (1.48) son idénticas con (13), (14) y (15) que aparecen en referencia^[22].

1.4 Soluciones Con Máximo Momentum

Angular Total

De ahora en adelante se tomará $S = 1$. Con el propósito de analizar el efecto de la anisotropía y el campo magnético sobre la dinámica de solitón descrito por (1.45) y (1.46), se fija un valor para el momentum angular total; es decir se toma:

$$\mathcal{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \langle S^z \rangle) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{\phi}|^2 d\xi = 1 \quad (1.49)$$

y esto se cumple cuando $\eta = \sqrt{\rho_2}/4$; de aquí se obtiene la siguiente relación para la velocidad de propagación en términos de los otros parámetros del sistema:

$$v = 2J \left(\rho_1 - \frac{\rho_2^2}{16} \right)^{1/2} \quad (1.50)$$

Con esto el pulso toma la forma:

$$\phi(\xi) = \sqrt{\rho_2/8} \operatorname{sech}(\rho_2/4s \xi). \quad (1.51)$$

y su ancho es:

$$\Delta\xi = (\langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2)^{1/2} = \sqrt{4/3} \pi / \rho_2 \quad (1.52)$$

Como de (1.44) se tiene $\rho_2 = (3D + h)/J$, es claro de (1.51) y (1.52) que cuando D o h aumentan la amplitud del pulso aumenta y el ancho disminuye, tal como se muestra en la (figura 1.2).

Por otro lado, la expresión (1.50) es válida cuando:

$$16\rho_1 \geq \rho_2^2 \quad (1.53)$$

Esto permite encontrar la relación que existe entre el campo magnético y la anisotropía, cuya forma está dada por:

$$8J [1 - \sqrt{1 - D/2J}] \leq 3D + h \leq 8J [1 + \sqrt{1 - D/2J}] \quad (1.54)$$

A partir de (1.44) y (1.50) se obtiene $\rho_2 = 8 [1 \pm \sqrt{1 - (D/2J + v^2/16J^2)}]$ con lo cual se encuentra que para $\rho_2 = 8 [1 - \sqrt{1 - D/2J}]$, $D > 2J$, la velocidad es cero, luego crece hasta un valor máximo cuando $\rho_2 = 8$, y posteriormente decrece a cero para $\rho_2 = 8 [1 + \sqrt{1 - D/2J}]$, luego para una misma variación de $\rho_2 = (3D + h)/J$, la velocidad aumenta desde cero hasta un valor máximo y luego disminuye a cero nuevamente (figura 1.3), de esta forma es posible escribir la velocidad máxima como:

$$v_c = 4J \left(1 - \frac{D}{2J}\right)^{1/2} \quad (1.55)$$

De esta manera se obtiene que la velocidad máxima depende del campo magnético externo a través del parámetro de anisotropía, este máximo el cual se ha denotado por v_c , disminuye al aumentar D . Una situación similar fue observada en el comportamiento de la velocidad de un sistema ferromagnético planar $Cs Ni F_3$, mediante la utilización de métodos de simulación computacional^[23]. Es interesante destacar que este hecho no se observa, si solamente se considera el caso de solitones en una cadena ferromagnética isotrópica de Heisenberg como la estudiada en referencia^[22].

Por otro lado, sustituyendo η y el valor de ρ_2 que se obtiene de (1.50) en la ecuación (1.48), es posible encontrar una expresión para la energía en términos

de la velocidad del solitón, el campo magnético externo y la anisotropía uniaxial dada por:

$$E = \frac{D+h}{J} + 4J \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{D}{2J} + \frac{v^2}{16J^2} \right)} \right]^2 \quad (1.56)$$

donde el signo menos de la raíz, corresponde a los valores que toma la energía cuando la velocidad aumenta desde cero hasta la velocidad máxima, y el signo más cuando la velocidad disminuye desde el valor anterior hasta cero.

Las figuras 1.4 y 1.5 muestran la forma que toma la energía del solitón en función de la velocidad, la cual es similar a la encontrada en referencia^[23] en donde se utiliza un método de simulación computacional, sin embargo, dentro de este contexto es posible explicar el paso de una rama de energía a otra, como debida al comportamiento que se encuentra para la velocidad v del solitón. Cuando v aumenta desde cero hasta la velocidad máxima v_c se obtiene la rama inferior de energía, y si v disminuye desde $v = v_c$ hasta $v = 0$ se obtiene la rama superior.

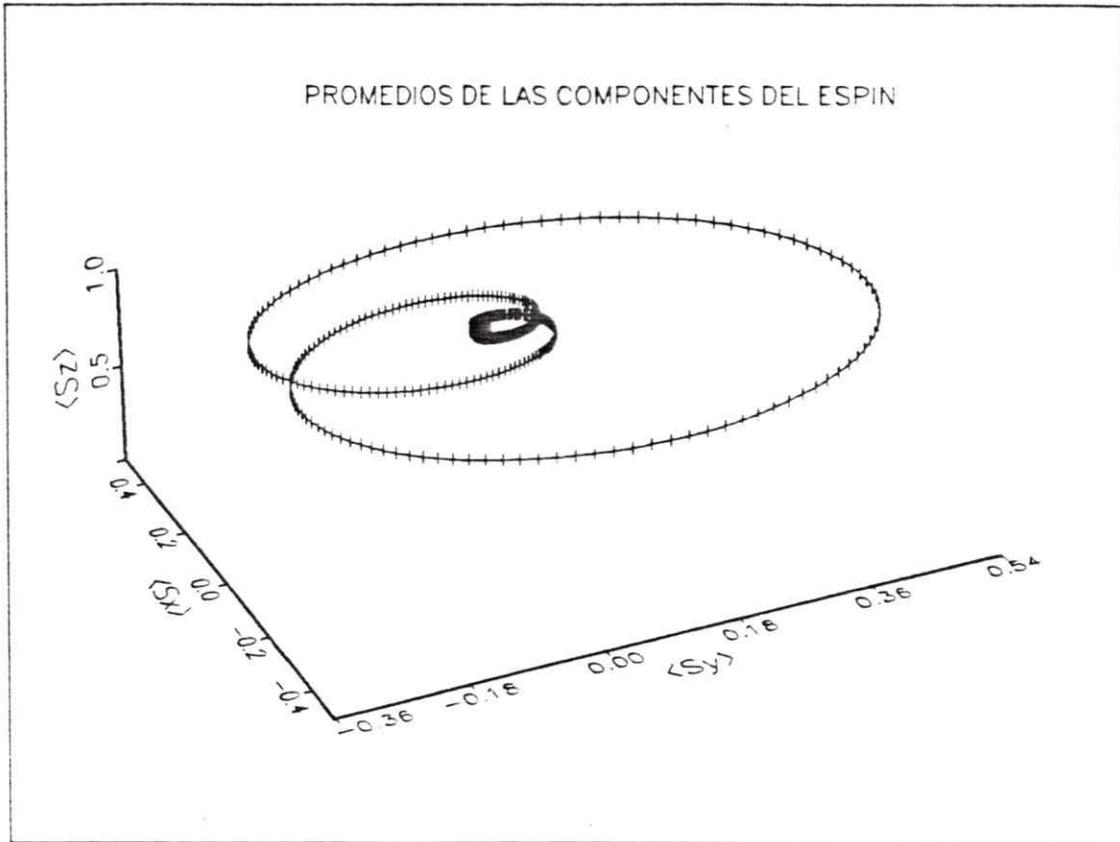


Figura 1.1: Promedios de las componentes del espín. Los valores de los parámetros son: $D=0.2$, $h=0.1$, $v=1$; con $S = J = 1$.

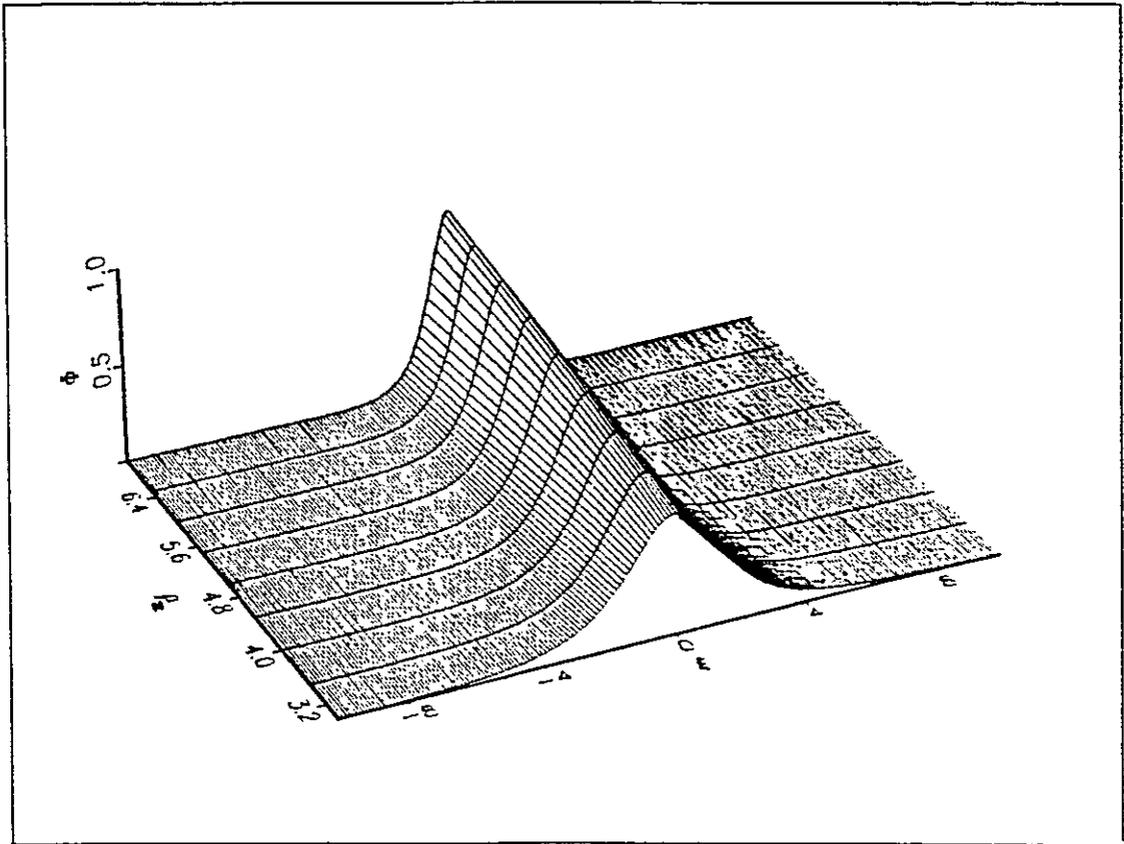


Figura 1.2: Forma del pulso solitario $\phi(\xi)$ en función de ξ para distintos valores de $\rho_2 = (3D + h)/J$, con $S = J = 1$.

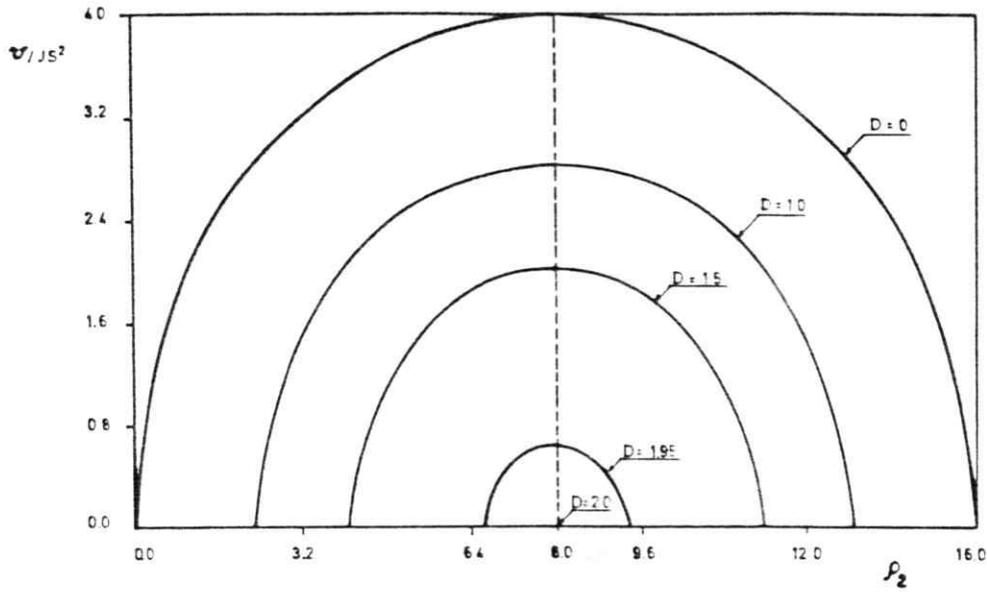


Figura 1.3: Comportamiento que tiene la velocidad del solitón en función de ρ_2 para distintos valores de la anisotropía, la velocidad máxima crecen desde el valor $v_c = 0$ hasta $v_c = 4$ cuando la anisotropía toma valores comprendidos entre $D = 2$ y $D = 0$ respectivamente (las curvas intermedias corresponden a los valores: $D = \{1.95, 1.5, 1.0\}$)

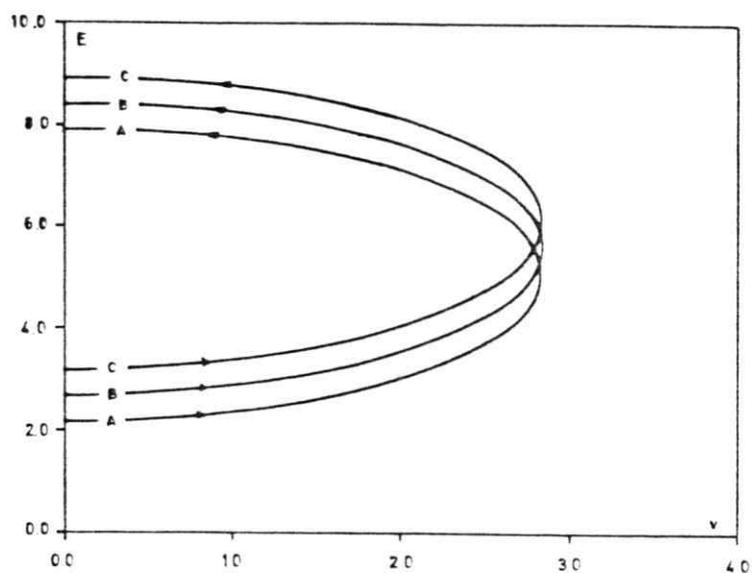


Figura 1.4: Dependencia de la energía del solitón en función de la velocidad, con $D = 1$ para distintos valores del campo magnético h , curvas: (A: $h = 0$); (B: $h = 0.5$) y (C: $h = 1.0$). Cada rama inferior corresponde a los valores que toma la energía, cuando la velocidad aumenta de cero hasta la velocidad máxima v_c , y las superiores corresponden a la energía, cuando la velocidad disminuye desde la velocidad máxima hasta cero

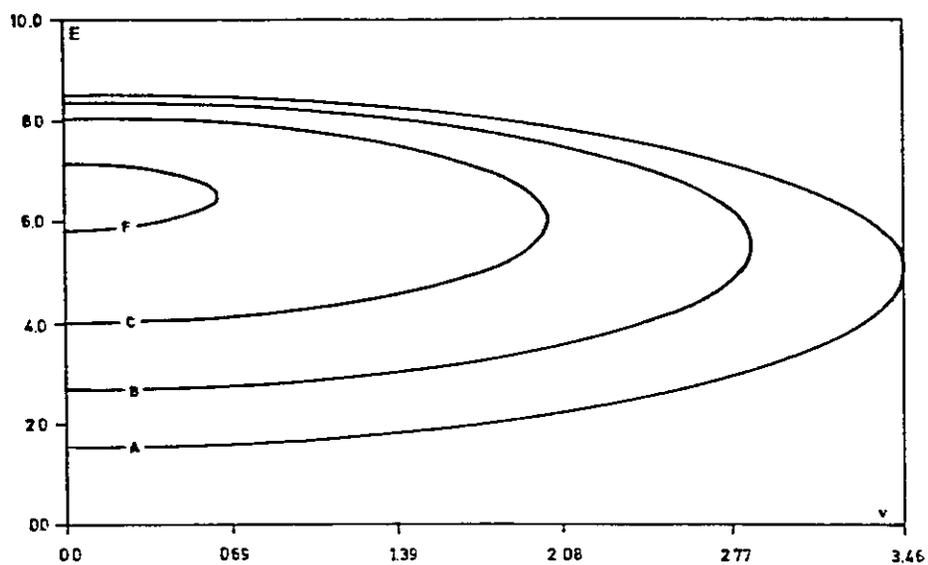


Figura 1.5: Energía del solitón en función de la velocidad, con $h = 0.5$ para distintos valores del parámetro de anisotropía D , curvas: (A: $D = 0.5$); (B: $D = 1.0$); (C: $D = 1.5$) y (F: $D = 1.95$).

Capítulo 2

SISTEMA

FERROMAGNETICO PLANAR

2.1 Modelo y Teoría

Recientemente se han realizado una gran variedad de estudios con el propósito de describir el fenómeno de la presencia de solitones en cadenas magnéticas unidimensionales, utilizando como prototipo el ferromagneto cuasi-unidimensional $CsNiF_3$.

Mikeska^[24] fue el primero en argumentar que bajo ciertas condiciones, la cadena de espines clásica de Heisenberg con anisotropía planar en un campo magnético externo transversal (aplicado en el plano de fácil magnetización), puede ser descrita mediante el modelo de sine-Gordon. Un máximo central es previsto para el factor de estructura dinámico de este sistema el cual fue observado experimentalmente por Kjems y Steiner^[1]. Sin embargo, mientras algunos

resultados experimentales respaldan en forma cualitativa a este modelo, otros aspectos tanto desde un punto de vista teórico como experimental, cuestionan la aplicabilidad de una aproximación de esta naturaleza.

El modelo de sine-Gordon, asume una anisotropía infinita, restringiendo a los espines a yacer sobre el plano de fácil magnetización. Sin embargo, para anisotropías finitas, están presentes las componentes del espín fuera del plano, las cuales bajan la energía del solitón y pueden dar origen a una inestabilidad topológica del sistema.

Durante este último tiempo, la investigación teórica y experimental en cadenas ferromagnéticas con anisotropías finitas, revelan la existencia de las desviaciones de las componentes del espín fuera del plano, destacando la importancia que éstas tienen en términos de los campos críticos y estabilidad de los solitones del sistema. Asimismo plantean que la descripción de estas desviaciones del espín fuera del plano es una pregunta abierta en la cual se debe seguir investigando^[25].

El comportamiento magnético de un sistema ferromagnético planar puede ser descrito en forma adecuada mediante un Hamiltoniano de Heisenberg planar, a partir del cual se pueden obtener en forma directa excitaciones no lineales (solitones, pared de dominio) dentro de un régimen de bajas temperaturas, por ejemplo, es posible realizar una aproximación clásica para las variables de espín en el caso de anisotropía extrema, es decir $(D/J)^{1/2} \gg k_B T$ y además en el límite continuo reproducir el Hamiltoniano para la ecuación de sine-Gordon cuyas propiedades estáticas y dinámicas son bien conocidas^[26]. Sin embargo existen diversas opiniones con respecto a la importancia de las excursiones de los espines fuera del plano para interpretar resultados experimentales^[27,28]. Además,

también es posible esperar contribuciones cuánticas para el comportamiento estadístico de estos sistemas debido al hecho que los espines son variables cuánticas asociadas con una red regular unidimensional discreta^[28,30].

Fuera de muchos trabajos dedicados a investigar la cadena ferromagnética planar clásica de la cadena de espín, se puede mencionar la aproximación de Fogedby y colaboradores^[31] donde son considerados en detalle los modos de inclinación del espín fuera del plano. Un análisis de la naturaleza del espectro de solitones debido a lo discreto de la cadena magnética revela la influencia sustancial de esta característica^[33,34].

En este capítulo se estudia la naturaleza de las desviaciones del espín fuera del plano en un modelo cuasi clásico (continuo), descrito por un Hamiltoniano de Heisenberg escrito el límite continuo.

El Hamiltoniano para la cadena magnética está dado por:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{n,\delta=\pm a}^N \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+\delta} + D \sum_{n=1}^N (S_n^z)^2 - h \sum_{n=1}^N S_n^x \quad (2.1)$$

donde \vec{S}_n es el operador de espín en el sitio n ; $J > 0$ es la interacción de intercambio entre primeros vecinos más próximos; $D > 0$ representa la intensidad de la anisotropía local sobre el n -ésimo sitio de un ion magnético, la que obliga a los espines a permanecer sobre un plano perpendicular al eje considerado para la cadena (eje z); $h \equiv g\mu_B H_0$; H_0 es la intensidad del campo magnético externo aplicado en la dirección del eje x el cual produce un quiebre en la simetría rotacional de las componentes del espín en el plano ($x-y$). Aquí $\delta = \pm a$ representa el valor de la constante de la red (distancia entre espines), la cual más adelante se considerará igual a uno.

En las condiciones anteriores, la ecuación (2.1) representa el Hamiltoniano de una cadena ferromagnética planar cuasi unidimensional propuesto para la sustancia $Cs Ni F_3$ en presencia de un campo magnético externo aplicado en el plano de fácil magnetización. Este sistema es de gran interés ya que excitaciones tipo solitón, fueron las primeras que permitieron mostrar el rol importante que estas juegan en su comportamiento a bajas temperaturas Mikeska^[24], Kjen y Steiner^[1].

En el límite de longitudes de onda larga y campo débil el Hamiltoniano (2.1) puede ser escrito en forma continua (apéndice, sección 5.2) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{J}{2} \int dz \left\{ \frac{1}{2} [S^\dagger(z)S''(z) + S^-(z)S^{\dagger''}(z)] + S^z(z)S^{z''}(z) \right\} \\ & + D \int dz [S^z(z)]^2 - h \int dz S^x(z) - \frac{1}{2} N J S^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2 Representación de Schwinger y Ecuaciones de Movimiento

Para estudiar las excitaciones magnéticas elementales de este sistema descrito por el Hamiltoniano (2.2), se considera como estado fundamental un alineamiento ferromagnético en el cual todos los espines están dirigidos en la dirección del eje x . Para campos magnéticos pequeños y fuertes anisotropías las excitaciones de baja energía corresponden a desviaciones desde el estado fundamental situadas cerca del plano $(x - y)$.

Como las desviaciones del espín desde el eje x pueden ser arbitrariamente grandes las transformaciones de Holstein-Primakoff^[25] utilizadas en el capítulo

1, no son las más adecuadas, a menos que se consideren transformaciones locales. Debido a las características geométricas de las excitaciones elementales de los espines, se puede hacer uso de la representación de bosones acoplados de Schwinger[35] (apéndice, sección 5.4) para los operadores de momentum angular:

$$\begin{aligned} S^+(z) &= a^\dagger(z)b(z) \\ S^-(z) &= b^\dagger(z)a(z) \\ S^z(z) &= \frac{1}{2}[a^\dagger(z)a(z) - b^\dagger(z)b(z)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde $a^\dagger(z), a(z), b^\dagger(z), b(z)$ son los operadores usuales del oscilador armónico simple actuando sobre cada punto de la cadena. Se puede ver además que el Hamiltoniano (2.2) es invariante bajo la transformación $a(z) \longleftrightarrow b(z)$. La dinámica de estos operadores bosónicos está dada por las siguientes ecuaciones de movimiento de Heisenberg:

$$i\dot{a}(z,t) = [a(z,t), \mathcal{H}] \quad ; \quad i\dot{b}(z,t) = [b(z,t), \mathcal{H}] \quad (2.4)$$

donde $\hbar = 1$ y el punto representa $\partial/\partial t$.

Utilizando las ecuaciones (2.4) en conjunto con el Hamiltoniano (2.2), y siguiendo un procedimiento similar al usado en el capítulo 1, sólo que ahora trabajamos con; $[a(z'), a^\dagger(z)] = \delta(z - z')$, y con las propiedades de la delta de Dirac: $\int f(z)\delta^n(z - z')dz = (-1)^n f^n(z')$, donde n representa el orden de la derivada respecto a la variable. Se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= J\left(-\frac{3}{8}a'' - \frac{1}{4}a^\dagger a'' a - a'b^\dagger b - \frac{1}{4}b''^\dagger b a - \frac{1}{2}b^\dagger b a''\right) \\ &+ J\left(\frac{1}{2}ab^\dagger b' + \frac{1}{4}ab^\dagger b'' - \frac{1}{4}a''^\dagger a^2 - \frac{1}{2}a^\dagger a' a\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$+ \frac{1}{2}D(a^\dagger a - b^\dagger b + \frac{1}{2})a - \frac{1}{2}hb$$

$$\begin{aligned} i\dot{b} = & J(-\frac{3}{8}b'' - \frac{1}{4}b^\dagger b''b - b'a^\dagger a - \frac{1}{4}a''^\dagger ab - \frac{1}{2}a^\dagger ab'') \\ & + J(\frac{1}{2}ba^\dagger a' + \frac{1}{4}ba^\dagger a'' - \frac{1}{4}b''^\dagger b^2 - \frac{1}{2}b^\dagger b'b) \\ & + \frac{1}{2}D(b^\dagger b - a^\dagger a + \frac{1}{2})b - \frac{1}{2}ha \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde por simplicidad no se escribe explícitamente la dependencia de los operadores respecto de las variables z y t ; y las "primas" representan $\partial/\partial z$. En el límite clásico de las variables de espín, los operadores bosónicos acoplados de Schwinger permiten definir los estados coherentes:

$$|\alpha\beta\rangle = |\{\alpha(z), \beta(z)\}\rangle \quad (2.7)$$

donde:

$$|\alpha(z)\rangle = \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(z)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.8)$$

$$|\beta(z)\rangle = \exp(-|\beta|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(z)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.9)$$

con $|n\rangle$ representando autoestados del oscilador armónico simple. Las relaciones (2.8) y (2.9) son conocidas como estados coherentes normalizados a partir de los cuales se puede obtener el comportamiento cuasi clásico del oscilador armónico simple desplazado. Se puede ahora calcular el promedio de cualquier operador $O(a^\dagger, a, b^\dagger, b)$ que represente a una variable física en el estado $|\alpha\beta\rangle$ determinando los elementos de matriz como $\langle\alpha\beta|O(a^\dagger(z), a(z), b^\dagger(z), b(z))|\alpha\beta\rangle$. Estos promedios corresponden a propiedades dinámicas de variables "cuasi clásicas".

Entonces se puede aplicar lo anterior a las ecuaciones diferenciales no lineales para operadores bosónicos (2.6) y (2.7), obteniéndose de esta forma el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales complejas no lineales:

$$\begin{aligned}
i \dot{\alpha} &= J\left(-\frac{3}{8}\alpha'' - \frac{1}{4}|\alpha|^2\alpha'' - \alpha'\beta'^*\beta - \frac{1}{4}\alpha\beta''^*\beta - \frac{1}{2}|\beta|^2\alpha''\right) \\
&+ J\left(\frac{1}{2}\alpha|\beta'|^2 + \frac{1}{4}\alpha\beta^*\beta'' - \frac{1}{4}\alpha''^*\alpha^2 - \frac{1}{2}|\alpha'|^2\alpha\right) \\
&+ \frac{1}{2}D(|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{1}{2})\alpha - \frac{1}{2}h\beta
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
i \dot{\beta} &= J\left(-\frac{3}{8}\beta'' - \frac{1}{4}|\beta|^2\beta'' - \beta'\alpha'^*\alpha - \frac{1}{4}\beta\alpha''^*\alpha - \frac{1}{2}|\alpha|^2\beta''\right) \\
&+ J\left(\frac{1}{2}\beta|\alpha'|^2 + \frac{1}{4}\beta\alpha^*\alpha'' - \frac{1}{4}\beta''^*\beta^2 - \frac{1}{2}|\beta'|^2\beta\right) \\
&+ \frac{1}{2}D(|\beta|^2 - |\alpha|^2 + \frac{1}{2})\beta - \frac{1}{2}h\alpha
\end{aligned} \tag{2.11}$$

donde $\alpha = \alpha(z, t)$ y $\beta = \beta(z, t)$

2.3 Solución

Las condiciones cinemáticas asociadas a la representación de Schwinger, en este caso están dadas por:

$$\begin{aligned}
|\alpha(z, t)|^2 - |\beta(z, t)|^2 &= 2\rho(z, t) \\
|\alpha(z, t)|^2 + |\beta(z, t)|^2 &= 2S
\end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $\rho(z, t)$ da cuenta de las desviaciones del espín fuera del plano y la segunda ecuación representa una aproximación cuasi clásica producto de utilizar la representación de estados coherentes para los operadores de espín; a partir estas dos

ecuaciones se obtiene:

$$\alpha(z, t) = \sqrt{S(1 + \rho(z, t)/S)} \exp(i\theta_\alpha(z, t)) \quad (2.13)$$

$$\beta(z, t) = \sqrt{S(1 - \rho(z, t)/S)} \exp(i\theta_\beta(z, t)) \quad (2.14)$$

donde $\theta_\alpha(z, t)$ y $\theta_\beta(z, t)$ son variables angulares reales .

Dado que sólo estamos interesados en tomar en cuenta pequeñas desviaciones desde el estado fundamental, se puede linearizar con respecto a estos estados y escribir:

$$\begin{aligned} \alpha(z, t) &= \sqrt{S}(1 + \rho(z, t)/2S) \exp[i\theta_\alpha(z, t)] \\ \beta(z, t) &= \sqrt{S}(1 - \rho(z, t)/2S) \exp[i\theta_\beta(z, t)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Utilizando las ecuaciones de la (2.10) a la (2.15) y después de comparar partes reales e imaginarias se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales para los ángulos $\theta_\alpha = \theta_\alpha(z, t)$, $\theta_\beta = \theta_\beta(z, t)$ y $\rho = \rho(z, t)$.

$$\begin{aligned} (1 + \frac{\rho}{2S})\dot{\theta}_\alpha &= (\frac{3}{16S} + \frac{1}{2})J\rho'' - (\frac{3}{8} + \frac{S}{2})J\theta_\alpha'^2 \\ &- (\frac{3}{16S} - \frac{1}{4})J\rho\theta_\alpha'^2 - \frac{1}{4}D - D(\frac{1}{8S} + 1)\rho \\ &+ \frac{1}{2}h \cos(\theta_\beta - \theta_\alpha) - \frac{1}{4S}h\rho \cos(\theta_\beta - \theta_\alpha) \\ &+ \frac{1}{4}J\rho\theta_\beta'^2 + JS\theta_\alpha'\theta_\beta' - \frac{1}{2}\rho\theta_\alpha'\theta_\beta' - \frac{1}{2}JS\theta_\beta'^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -J(\frac{3}{4} + S)(\frac{\rho}{2} + S)\theta_\alpha'' + JS(S - \frac{1}{2}\rho)\theta_\beta'' \\ &- \frac{3}{4}J\rho'\theta_\alpha' - h \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha) + \frac{1}{2}h\rho \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$(1 - \frac{\rho}{2S})\dot{\theta}_\beta = -(\frac{3}{16S} + \frac{1}{2})J\rho'' - (\frac{3}{8} + \frac{S}{2})J\theta_\beta'^2$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{3}{16S} - \frac{1}{4}\right)J\rho\theta_\beta'^2 - \frac{1}{4}D + D\left(\frac{1}{8S} + 1\right)\rho \\
& + \frac{1}{2}h\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha) + \frac{1}{4S}h\rho\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha) \\
& - \frac{1}{4}J\rho\theta_\alpha'^2 + JS\theta_\alpha'\theta_\beta' + \frac{1}{2}\rho\theta_\alpha'\theta_\beta' - \frac{1}{2}JS\theta_\alpha'^2 \quad (2.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} = & + J\left(\frac{3}{4} + S\right)\left(\frac{\rho}{2} + S\right)\theta_\beta'' - JS\left(S + \frac{1}{2}\rho\right)\theta_\alpha'' \\
& - \frac{3}{4}J\rho'\theta_\beta' - h\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha) - \frac{1}{2}h\rho\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha) \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Antes de resolver este sistema de ecuaciones diferenciales para obtener $\rho = \rho(z, t)$, $\theta_\alpha(z, t)$ y $\theta_\beta(z, t)$ notamos que los promedios de las variables de espín están dadas por:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \beta | S^z(z, t) | \alpha \beta \rangle & = \rho(z, t) \\
\langle \alpha \beta | S^x(z, t) | \alpha \beta \rangle & = \Re(\alpha^* \beta) = \cos(\theta_\beta - \theta_\alpha) \\
\langle \alpha \beta | S^y(z, t) | \alpha \beta \rangle & = \Im(\alpha^* \beta) = \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha)
\end{aligned} \quad (2.20)$$

y entonces es posible aprovechar esta dependencia respecto a los ángulos para escribir algunas ecuaciones ad-hoc que sean de interés.

Otra condición que permite simplificar el problema, es considerar el caso de **soluciones de forma permanente** para las cuales se define $\xi(z, t) = z - vt$ donde v es la velocidad.

Sumando las ecuaciones (2.19) y (2.17) se obtiene para el primer orden en ρ , θ_α y θ_β , la siguiente ecuación diferencial:

$$\phi''(\xi) = \frac{h}{(3/8 + S)J} \sin \phi(\xi) \quad (2.21)$$

Donde se ha definido $\phi(\xi) = \theta_\beta(\xi) - \theta_\alpha(\xi)$ y se ha utilizado el hecho de

que para el orden cero $\theta'_\beta(\xi) + \theta'_\alpha(\xi) = 8v/3J$; las "primas" representan ahora derivadas con respecto a la variable ξ .

La ecuación (2.21) corresponde a la ecuación diferencial estática de sine - Gordon^[26] (apéndice, sección 5.1) con soluciones pared de dominio dadas por:

$$\phi(\xi) = \arccos(1 - 2 \operatorname{sech}^2(m\xi)) \quad (2.22)$$

donde $m = [h/((3/8 + S)J)]^{1/2}$.

Restando y sumando las ecuaciones (2.18) y (2.16) se construye (respectivamente) el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{8} + S \right) J \rho''(\xi) - \frac{3}{16} J \rho(\xi) (\theta_\beta'^2(\xi) + \theta_\alpha'^2(\xi)) \\ & + \frac{3}{8} J S (\theta_\beta'(\xi) - \theta_\alpha'(\xi)) (\theta_\beta'(\xi) + \theta_\alpha'(\xi)) - \frac{1}{2} \rho(\xi) (\dot{\theta}_\beta(\xi) + \dot{\theta}_\alpha(\xi)) \\ & + \frac{1}{2} J S \rho(\xi) (\theta_\beta'(\xi) - \theta_\alpha'(\xi))^2 + S (\dot{\theta}_\beta(\xi) - \dot{\theta}_\alpha(\xi)) \\ & - \left[2 \left(\frac{1}{8} + S \right) D + \frac{1}{2} h \cos(\theta_\beta(\xi) - \theta_\alpha(\xi)) \right] \rho(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & - [\dot{\theta}_\beta(\xi) + \dot{\theta}_\alpha(\xi)] - \frac{1}{2S} [\dot{\theta}_\beta(\xi) - \dot{\theta}_\alpha(\xi)] \rho(\xi) - \left(\frac{3}{8} + S \right) J (\theta_\beta'(\xi) - \theta_\alpha'(\xi))^2 \\ & + \frac{3}{16S} J \rho(\xi) (\theta_\beta'(\xi) - \theta_\alpha'(\xi)) (\theta_\beta'(\xi) + \theta_\alpha'(\xi)) \\ & - \frac{3}{4} J \theta_\alpha'(\xi) \theta_\beta'(\xi) - \frac{1}{2} D + h \cos(\theta_\beta(\xi) - \theta_\alpha(\xi)) = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Utilizando la expansión a primer orden en

$[\theta'_\beta(\xi) + \theta'_\alpha(\xi)] = 8v/3J + [\theta'_\beta(\xi) + \theta'_\alpha(\xi)]_1$, y la definición para

$\theta_\beta(\xi) - \theta_\alpha(\xi) = \phi(\xi)$ se encuentra:

$$\begin{aligned}\theta'_\beta{}^2(\xi) + \theta'_\alpha{}^2(\xi) &= \frac{1}{2}\left(\frac{8v}{3J}\right)^2 + \frac{8v}{3} [\theta'_\alpha(\xi) + \theta'_\beta(\xi)]_1 \\ &+ \frac{1}{2} [\theta'_\alpha(\xi) + \theta'_\beta(\xi)]_1^2 + \frac{1}{2} \phi'^2(\xi)\end{aligned}\quad (2.25)$$

y

$$\theta'_\alpha(\xi) \theta'_\beta(\xi) = \frac{1}{2} [\theta'_\beta{}^2(\xi) + \theta'_\alpha{}^2(\xi) - \phi'^2(\xi)] \quad (2.26)$$

Al sustituir estos términos en las ecuaciones (2.23) y (2.24) se encuentra:

$$J\left(\frac{3}{8S} + 1\right) \rho''(\xi) + \frac{3}{8} J [\theta'_\beta(\xi) + \theta'_\alpha(\xi)]_1 \phi'(z, t) + F(\xi) \rho(\xi) = 0 \quad (2.27)$$

y

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{16S} + 1\right) J \phi'^2(\xi) + \frac{3}{16} J [\theta'_\beta(\xi) + \theta'_\alpha(\xi)]_1^2 \\ - \frac{4}{3J} v^2 + \frac{1}{2} D - h \cos \phi(\xi) = 0\end{aligned}\quad (2.28)$$

donde se ha definido:

$$F(\xi) = \frac{J}{2} \left(1 - \frac{3}{16S}\right) \phi'^2(\xi) + \frac{2v^2}{3JS} - 2D \left(1 + \frac{1}{8S}\right) - \frac{h}{2S} \cos \phi(\xi) \quad (2.29)$$

A partir de las ecuaciones (2.25) y (2.26) se puede ahora eliminar el término en $[\theta'_\beta(\xi) + \theta'_\alpha(\xi)]_1$ para finalmente obtener:

$$\rho''(\xi) + G(\xi) \rho(\xi) = Q(\xi) \quad (2.30)$$

con:

$$G(\xi) = \frac{1}{C_0}[F(\xi) - H(\xi)] \quad (2.31)$$

$$H(\xi) = \frac{\sqrt{3J}v\phi'^2(\xi)}{8SL(\xi)} \quad (2.32)$$

$$L(\xi) = \left(h \cos \phi(\xi) - \frac{1}{2}D - \left(\frac{3}{16} + S \right) J \phi'^2(\xi) + \frac{4v^2}{3J} \right)^{1/2} \quad (2.33)$$

$$Q(\xi) = -\frac{\sqrt{3J}}{2C_0} \phi'(\xi) L(\xi) \quad (2.34)$$

donde: $C_0 = (3/8S + 1)J$

2.4 Resultados

La componente del espín fuera del plano está determinada por la ecuación diferencial lineal no homogénea (2.30). Una ecuación similar a la anterior fue obtenida por Magyari y Thomas^[36] en el límite para velocidades bajas. Para obtener $\rho(\xi)$ se realiza una integración numérica utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

En la figura 2.1. se muestra $\rho(\xi)$ para $v = 10$ y para tres valores del campo h , en la cual se observa la presencia de un "modo de inclinación"^[31] cuya amplitud máxima aumenta con el campo cerca de la pared de dominio. A medida que la velocidad disminuye a $v = 5$ la inclinación es más pronunciada y para campos pequeños se puede apreciar la presencia de modos oscilatorios como se muestra en la figura 2.2. Estos puntos de inestabilidad del solitón, dan cuenta de la divergencia de las fluctuaciones de las componentes del espín fuera del plano^[37]. Esta situación se bosqueja en la figura 2.3. donde al bajar la velocidad a $v =$

1: el solitón estable correspondiente a una pared de dominio distorsionada por magnones y modos de inclinación, pierde estabilidad y se hace ingobernable a la velocidad v_s , donde las inclinaciones de las componentes del espín divergen. Si se incrementa la velocidad desde v_s , se logra obtener un solitón estable hasta una velocidad límite v_l donde éste decae en movimientos oscilatorios de altas frecuencias como se puede apreciar en la figura 2.4. El efecto de la anisotropía se muestra en en la figura 2.5 para $v = 17$ y $h = 0.3h_c$ con $h_c = 2D/3$, de la cual se desprende que la anisotropía contribuye a estabilizar al solitón.

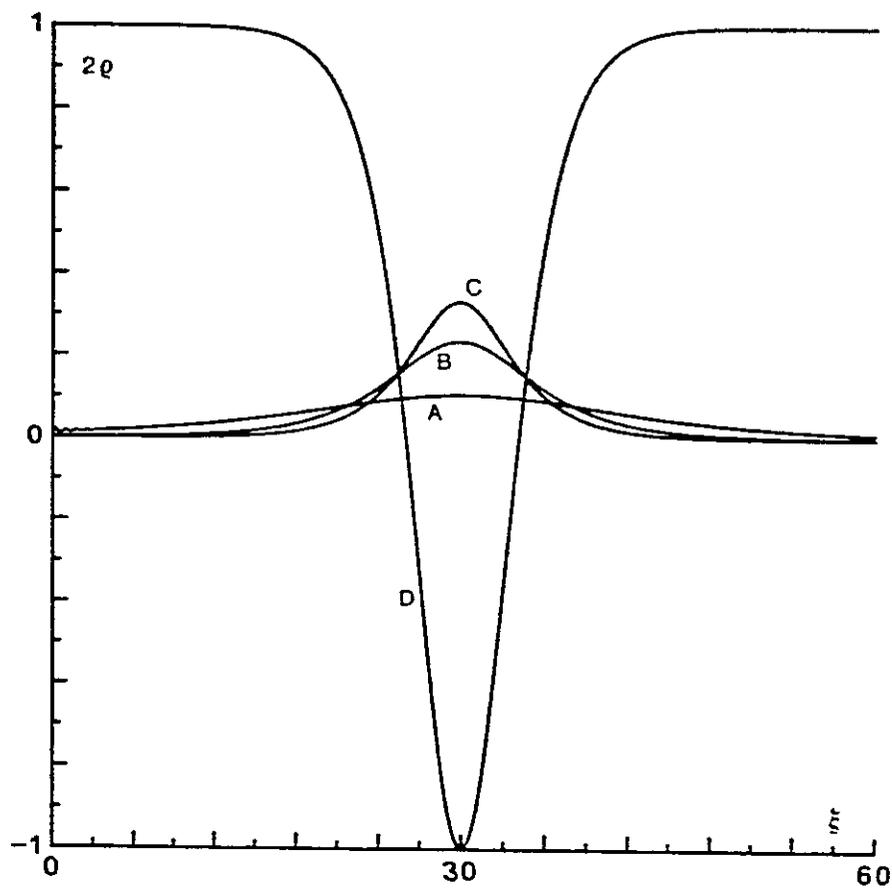


Figura 2.1: $2\rho(\xi)$ en función ξ para $v = 10$. $d = 0.2$ y para $h = 0.1h_c$: curva A; $h = 0.5h_c$: curva B; $h = 1.0h_c$: curva C: donde $h_c = 2d/3$. La curva D representa la configuración pared de dominio $\cos \phi(\xi)$ para $h = 0.5h_c$.

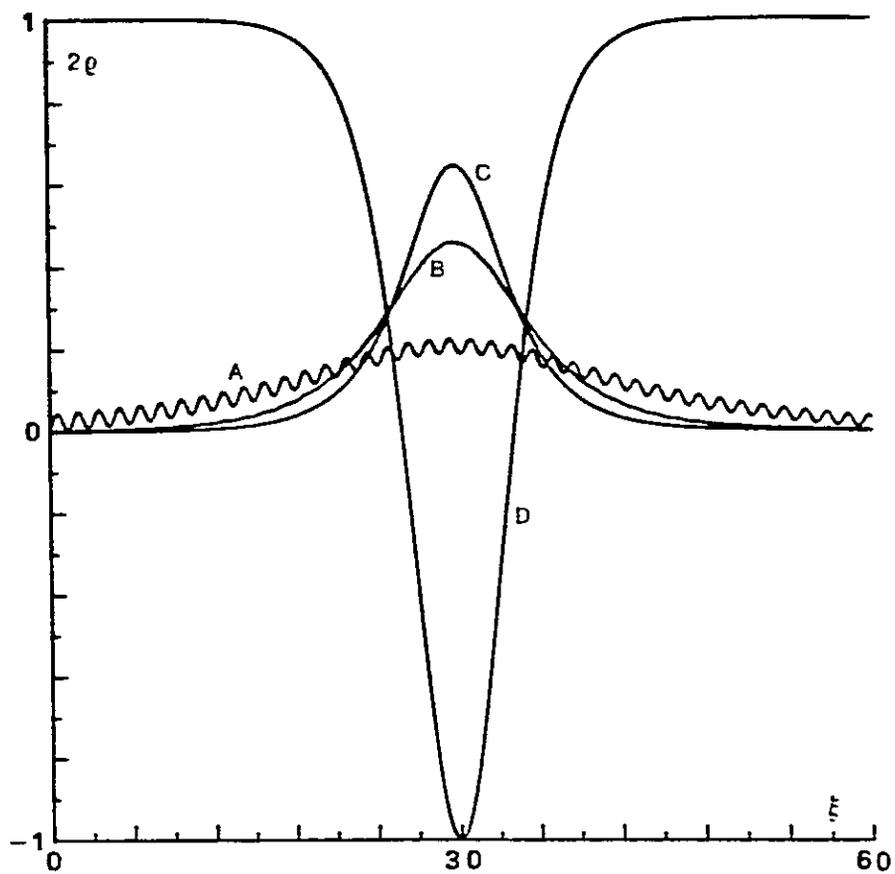


Figura 2.2: $2\rho(\xi)$ versus ξ para $v = 5$, $d = 0.2$ y para $h = 0.1h_c$: curva A; $h = 0.5h_c$: curva B; $h = 1.0h_c$: curva C: donde $h_c = 2d/3$. La curva D representa la configuración pared de dominio $\cos \phi(\xi)$ para $h = 0.5h_c$.

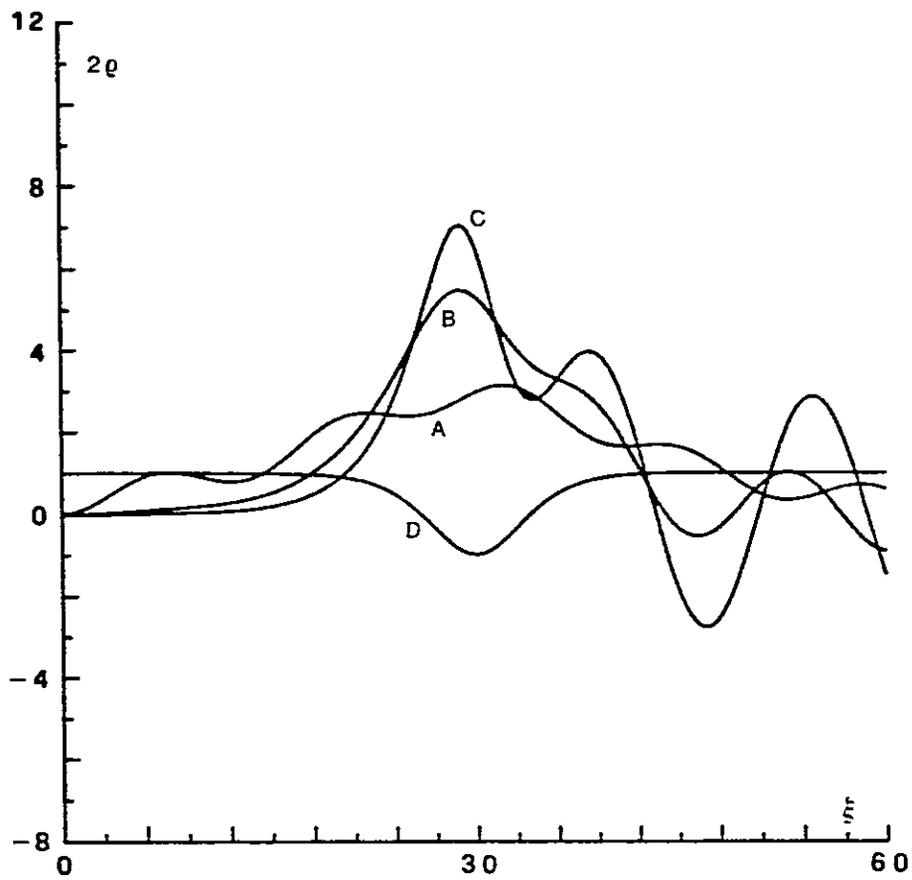


Figura 2.3: $2\rho(\xi)$ versus ξ para $v = 1$, $d = 0.2$ y para $h = 0.1h_c$: curva A; $h = 0.5h_c$: curva B; $h = 1.0h_c$: curva C: donde $h_c = 2d/3$. La curva D representa la configuración pared de dominio $\cos\phi(\xi)$ para $h = 0.5h_c$.

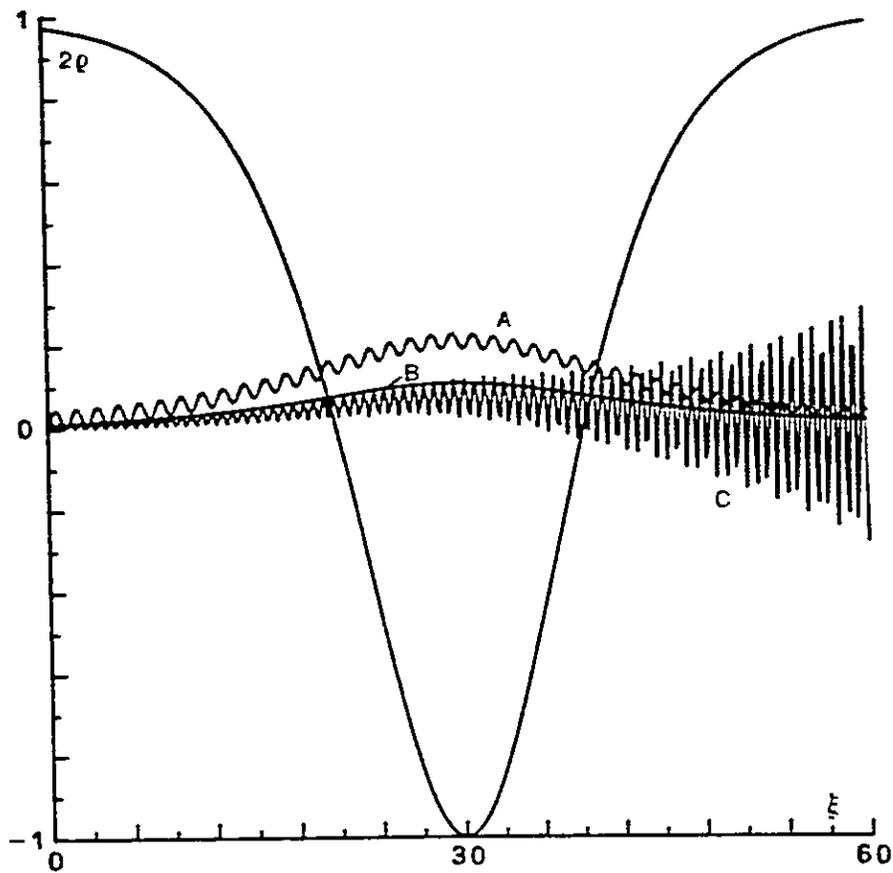


Figura 2.4: $2\rho(\xi)$ en función ξ para $h = 0.1h_c$. donde $h_c = 2d/3$. $d = 0.2$ y para $v = 5$: curva A; $v = 10$: curva B; $v = 17$: curva C: La curva D representa la configuración pared de dominio $\cos\phi(\xi)$ para $h = 0.5h_c$.

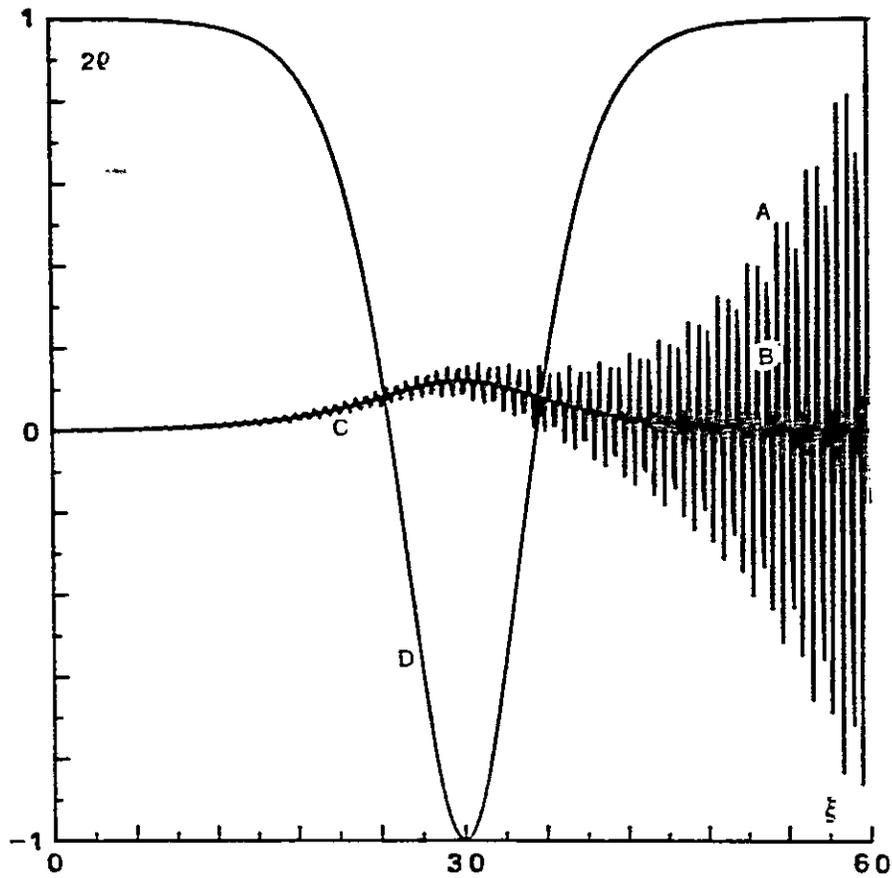


Figura 2.5: $2\rho(\xi)$ en función ξ para $v = 17.02$, $h = 0.3h_c$, donde $h_c = 2d/3$. y para $d = 0.2$ curva A; $d = 0.6$: curva B (dentro de curva A); $d = 2$: curva C (dentro de curvas A y B). Notar que las curvas corresponden a diferentes valores del campo h . La curva D representa la configuración pared de dominio $\cos \phi(\xi)$ para $h = 0.3h_c$ con $d = 0.2$

Capítulo 3

SISTEMA

FERROMAGNETICO PLANAR

COMPRESIBLE

3.1 Modelo

Cadenas magnéticas representadas por algunas sustancias modelos, han sido investigadas en detalles al medir las secciones transversales utilizando técnicas de scattering inelástico de neutrones^[38] y por muchas otras técnicas experimentales. Los resultados muestran la presencia de excitaciones no lineales para los grados de libertad magnéticos los cuales son tan elementales como los modos lineales usuales. Un sistema particular que ha sido estudiado intensamente tanto desde un punto de vista teórico como experimental, es la cadena lineal planar representada por la sal magnética $CsNiF_3$; Para comparar la teoría con el experimento,

se han realizado muchas aproximaciones, en particular las que involucran un mapeo de sine-Gordon^[24], lo que trae como consecuencia una restricción en las comparaciones e induce a considerar modelos teóricos cada vez más complejos, como aquellos que contemplan nuevos y diversos grados de libertad, por ejemplo modelos que toman en cuenta excitaciones magnéticas y elásticas.

Los modelos utilizados están basados principalmente en el Hamiltoniano de Heisenberg de una cadena de iones magnéticos distribuidos a lo largo de un eje, y en los que actúan fuertes anisotropías en esa dirección. De esta forma, excitaciones acopladas pueden existir entonces en diferentes estados fundamentales.

La existencia de modos magnéticos y elásticos acoplados en una cadena de Heisenberg ferromagnética compresible ha sido extensamente demostrada para el caso de un sistema ferromagnético con anisotropía uniaxial^[34,39-41].

En este capítulo es de interés investigar la existencia de este tipo de excitaciones acopladas, en una cadena compresible de Heisenberg con anisotropía planar en presencia de un campo magnético externo aplicado en forma paralela al plano.

Un Hamiltoniano que permite describir adecuadamente a este sistema está dado por:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{mag} + \mathcal{H}_{el} + \mathcal{H}_{int} \quad (3.1)$$

donde \mathcal{H}_{mag} representa los grados de libertad magnéticos y tiene la forma:

$$\mathcal{H}_{mag} = -J \sum_{n,\delta=\pm a}^N \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+\delta} + D \sum_{n=1}^N (S_n^z)^2 - h \sum_{n=1}^N S_n^z \quad (3.2)$$

con \vec{S}_n el espín en el sitio n y $J > 0$; $D > 0$, $h \equiv g\mu_B H$

Los modos elásticos están representados por \mathcal{H}_{el} cuya forma es:

$$\mathcal{H}_{el} = \sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{2m_o} + \frac{k}{2} \sum_{n,\delta=\pm a}^N (q_{n+\delta} - q_n)^2 \quad (3.3)$$

donde p_n son los momentos correspondientes y q_n los desplazamientos longitudinales desde la posición de equilibrio de los iones magnéticos interactuantes en el sitio n (en ausencia de la interacción espín fonón), m es la masa y k es la constante elástica.

El término \mathcal{H}_{int} representa la interacción de intercambio (acoplamiento) entre modos magnéticos y elásticos; el cual para el primer orden^[34] toma la forma:

$$\mathcal{H}_{int} = -\lambda \sum_{n,\delta=\pm a}^N (q_{n+\delta} - q_n) \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+\delta} \quad (3.4)$$

donde $\lambda \equiv \partial J / \partial z$ es el parámetro de "magnetotricción" y a representa el espaciado de la red

Haciendo uso de la representación:

$$p = i\sqrt{m_o\omega_o/2}(c^\dagger - c) \quad ; \quad q = \frac{1}{\sqrt{2m_o\omega_o}}(c^\dagger + c) \quad (3.5)$$

donde $\omega_o = \sqrt{k/m_o}$.

Siguiendo el mismo procedimiento que en^[12], se hace uso de la representación de Schwinger:

$$\begin{aligned} S^+(z) &= a^\dagger(z)b(z) \\ S^-(z) &= b^\dagger(z)a(z) \\ S^z(z) &= \frac{1}{2}[a^\dagger(z)a(z) - b^\dagger(z)b(z)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $a^\dagger(z)$, $a(z)$, $b^\dagger(z)$, $b(z)$ son los operadores bosónicos usuales del oscilador armónico simple actuando sobre cada punto de la cadena.

En la representación de Heisenberg la dinámica de estos operadores está dada por las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$i\dot{a}(z,t) = [a(z,t), \mathcal{H}] \quad ; \quad i\dot{b}(z,t) = [b(z,t), \mathcal{H}] \quad ; \quad i\dot{c}(z,t) = [c(z,t), \mathcal{H}] \quad (3.7)$$

donde $\hbar = 1$ y el punto representa $\partial/\partial t$.

El Hamiltoniano (3.1) escrito en el límite continuo (apéndice, sección 5.2) tiene la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{mag} = & -\frac{J}{2} \int dz \left(\frac{1}{2}(S^\dagger(z)S^{-''}(z) + S^-(z)S^{\dagger''}(z)) + S^z(z)S^{z''}(z) \right) \\ & - D \int dz (S^z(z))^2 - h \int dz S^x(z) - \frac{1}{2}NJS^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\mathcal{H}_{el} = \frac{1}{2m_o} \int dz (p(z))^2 + k \int dz (q'(z))^2 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} = & -2\lambda \int dz q'(z) \left[\frac{1}{2}(S^\dagger(z)S^{-'}(z) + S^-(z)S^{\dagger'}(z)) + S^z(z)S^{z'}(z) \right] \\ & - \lambda S^2 \int dz q''(z) \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2 Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$i\dot{a} = [a, \mathcal{H}] = [a, \mathcal{H}_{mag}] + [a, \mathcal{H}_{el}] + [a, \mathcal{H}_{int}] \quad (3.11)$$

$$i\dot{b} = [b, \mathcal{H}] = [b, \mathcal{H}_{mag}] + [b, \mathcal{H}_{el}] + [b, \mathcal{H}_{int}] \quad (3.12)$$

$$i\dot{c} = [c, \mathcal{H}] = [c, \mathcal{H}_{mag}] + [c, \mathcal{H}_{el}] + [c, \mathcal{H}_{int}] \quad (3.13)$$

Dado que $[a, c] = 0$ y $[b, c] = 0$ se encuentra que:

$$[a, \mathcal{H}_{el}] = 0 \quad ; \quad [b, \mathcal{H}_{el}] = 0 \quad (3.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.5) y (3.6) en los términos del Hamiltoniano (3.8), (3.9) y (3.10) y calculando los conmutadores anteriores, se encuentra el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned} i\dot{a} = & J\left(-\frac{3}{8}a'' - \frac{1}{4}a^\dagger a'' a - a' b^\dagger b - \frac{1}{4}b''^\dagger b a - \frac{1}{2}b^\dagger b a''\right) \\ & + J\left(\frac{1}{2}ab^\dagger b' + \frac{1}{4}ab^\dagger b'' - \frac{1}{4}a''^\dagger a^2 - \frac{1}{2}a^\dagger a' a\right) \\ & + \frac{1}{2}D\left(a^\dagger a - b^\dagger b + \frac{1}{2}\right)a - \frac{1}{2}hb \\ & + \frac{\lambda}{2\sqrt{2m_o\omega_o}}[(c^{\dagger''} + c'')(a^\dagger a a + b^\dagger b b) - 3(c^{\dagger'} + c')a'] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} i\dot{b} = & J\left(-\frac{3}{8}b'' - \frac{1}{4}b^\dagger b'' b - b' a^\dagger a - \frac{1}{4}a''^\dagger a b - \frac{1}{2}a^\dagger a b''\right) \\ & + J\left(\frac{1}{2}b a^\dagger a' + \frac{1}{4}b a^\dagger a'' - \frac{1}{4}b''^\dagger b^2 - \frac{1}{2}b^\dagger b' b\right) \\ & + \frac{1}{2}D\left(b^\dagger b - a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)b - \frac{1}{2}h a \\ & + \frac{\lambda}{2\sqrt{2m_o\omega_o}}[(c^{\dagger''} + c'')(b^\dagger b b + a^\dagger a a) - 3(c^{\dagger'} + c')b'] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} i\dot{c} = & -\frac{\omega_o}{2}(c^\dagger - c) - \frac{k}{m_o\omega_o}(c^{\dagger''} + c'') \\ & + \frac{\lambda}{2\sqrt{2m_o\omega_o}}[a^\dagger b^{\dagger''} b a + b^\dagger a^\dagger a b'' + a^\dagger b^\dagger b a'' + b^\dagger a^{\dagger''} a b \\ & + a^{\dagger'} a^{\dagger'} a a + a^\dagger a^\dagger a' a' + a^\dagger a^{\dagger''} a a + a^\dagger a^\dagger a a'' \\ & + b^{\dagger'} b^{\dagger'} b b + b^\dagger b^\dagger b' b' + b^\dagger b^{\dagger''} b b + b^\dagger b^\dagger b b''] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{\sqrt{2m_o\omega_o}} [a^\dagger b^\dagger b a + a^\dagger b^\dagger b' a' + a^\dagger b^\dagger b a' + b^\dagger a^\dagger a b' \\
& + a^\dagger b^\dagger b' a + a^\dagger b^\dagger b a' + 4(a^\dagger a^\dagger a' a + b^\dagger b^\dagger b' b) \\
& + 3(a^\dagger a' + a^\dagger a'' + b^\dagger b' + b^\dagger b'')]
\end{aligned}$$

Tomando el límite clásico de las variables de espín se definen los estados coherentes los cuales son autoestados de los operadores bosónicos a , b y c . De esta forma, en cada punto de la cadena continua es posible definir un estado coherente de modo que:

$$|\alpha(z) \beta(z) \gamma(z)\rangle = |\alpha(z)\rangle \cdot |\beta(z)\rangle \cdot |\gamma(z)\rangle \quad (3.18)$$

donde:

$$|\alpha(z)\rangle = \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(z)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.19)$$

$$|\beta(z)\rangle = \exp(-|\beta|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(z)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.20)$$

$$|\gamma(z)\rangle = \exp(-|\gamma|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(z)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.21)$$

Como los estados $|\alpha \beta \gamma\rangle$ son autovectores de los operadores a , b y c con autovalores α , β , γ , respectivamente, se pueden escribir las ecuaciones diferenciales acopladas para estos autovalores a través de calcular los promedios de operadores bosónicos involucrados en las ecuaciones (3.15) (3.16) y (3.17) sobre un estado coherente arbitrario y obtener:

$$i \dot{\alpha} = J \left(-\frac{3}{8} \alpha'' - \frac{1}{4} |\alpha|^2 \alpha'' - \alpha' \beta'^* \beta - \frac{1}{4} \alpha \beta''^* \beta - \frac{1}{2} |\beta|^2 \alpha'' \right)$$

$$\begin{aligned}
& + J\left(\frac{1}{2}\alpha|\beta'|^2 + \frac{1}{4}\alpha\beta^*\beta'' - \frac{1}{4}\alpha''\alpha^2 - \frac{1}{2}|\alpha'|^2\alpha\right) \\
& + \frac{1}{2}D(|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{1}{2})\alpha - \frac{1}{2}h\beta \\
& + \frac{\lambda}{2}\langle q'' \rangle (|\alpha|^2 + |\beta|^2)\alpha - \frac{3\lambda}{2}\langle q' \rangle \alpha'
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
i\dot{\beta} & = J\left(-\frac{3}{8}\beta'' - \frac{1}{4}|\beta|^2\beta'' - \beta'\alpha'^*\alpha - \frac{1}{4}\beta\alpha''\alpha - \frac{1}{2}|\alpha|^2\beta''\right) \\
& + J\left(\frac{1}{2}\beta|\alpha'|^2 + \frac{1}{4}\beta\alpha^*\alpha'' - \frac{1}{4}\beta''\alpha^2 - \frac{1}{2}|\beta'|^2\beta\right) \\
& + \frac{1}{2}D(|\beta|^2 - |\alpha|^2 + \frac{1}{2})\beta - \frac{1}{2}h\alpha \\
& + \frac{\lambda}{2}\langle q'' \rangle (|\alpha|^2 + |\beta|^2)\beta - \frac{3\lambda}{2}\langle q' \rangle \beta'
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
i\dot{\gamma} & = -\frac{\omega_o}{2}(\gamma^* - \gamma) - \frac{k}{m_o\omega_o}(\gamma'' + \gamma''') \\
& + \frac{\lambda}{\sqrt{2m_o\omega_o}}[2S\Re(\alpha^*\alpha'' + \beta^*\beta'')] \\
& + \frac{2\lambda}{\sqrt{2m_o\omega_o}}\Re(\alpha^*\beta^*\beta'\alpha' + \alpha^*\beta''\beta\alpha' + \frac{1}{2}(\alpha^*\alpha^*\alpha'\alpha' + \beta^*\beta^*\beta'\beta')) \\
& + \frac{\lambda}{\sqrt{2m_o\omega_o}}[2S(|\alpha'|^2 + |\beta'|^2) + |\alpha|^2|\alpha'|^2 + |\beta|^2|\beta'|^2] \\
& + \frac{3\lambda}{2\sqrt{2m_o\omega_o}}[|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 + \alpha^*\alpha'' + \beta^*\beta'']
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Donde se han utilizado las condiciones cinemáticas asociadas a las transformaciones de Schwinger dadas por la ecuación (2.12) del capítulo 2 en las cuales $\rho(z, t)$ da cuenta de las desviaciones del espín fuera del plano, y además por simplicidad se consideran: $\alpha = \alpha(z, t)$; $\beta = \beta(z, t)$ y $\gamma = \gamma(z, t)$

3.3 Método de solución

Sustituyendo en las expresiones anteriores, las soluciones para α y β al primer orden en ρ dadas por la ecuación (2.15) del capítulo 2, se puede determinar un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas de la siguiente manera: separando partes reales e imaginarias, y luego restando las partes reales de las ecuaciones (3.22) y (3.23) se tiene:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{8} + S \right) J \rho'' - \frac{3}{16} J \rho (\theta_\beta'^2 + \theta_\alpha'^2) + \frac{3}{8} J S (\theta_\beta'^2 - \theta_\alpha'^2) - \frac{1}{2} \rho (\dot{\theta}_\beta + \dot{\theta}_\alpha) \\ & + \frac{1}{2} J S \rho (\theta_\beta' - \theta_\alpha')^2 + S (\dot{\theta}_\beta - \dot{\theta}_\alpha) - \left[2 \left(\frac{1}{8} + S \right) D + \frac{1}{2} h \cos(\theta_\beta - \theta_\alpha) \right] \rho \\ & + \frac{3}{2} \lambda \langle q' \rangle \rho' - \lambda \langle q'' \rangle \rho = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

restando partes imaginarias de las ecuaciones (3.22) y (3.23) se encuentra:

$$\begin{aligned} & - 2\dot{\rho} - \frac{3}{4} J \rho' (\theta_\beta' + \theta_\alpha') + 2S \left[\left(\frac{3}{8} + S \right) (\theta_\beta'' - \theta_\alpha'') - \frac{h}{J} \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha) \right] \\ & - \frac{3}{8} J (\theta_\beta'' + \theta_\alpha'') \rho + \frac{3}{2} \lambda \langle q' \rangle \left[(\theta_\beta' - \theta_\alpha') - \frac{1}{2S} (\theta_\beta' + \theta_\alpha') \rho \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

sumando partes imaginarias de las ecuaciones (3.22) y (3.23) se obtiene:

$$\begin{aligned} & J \rho' (\theta_\beta' - \theta_\alpha') - J (\theta_\beta'' + \theta_\alpha'') + J \rho (\theta_\beta'' - \theta_\alpha'') \\ & - 2\lambda \langle q' \rangle \left[(\theta_\beta' + \theta_\alpha') - \frac{1}{2} (\theta_\beta' - \theta_\alpha') \rho \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

La parte real de la ecuación (3.24) está dada por:

$$\Im m \dot{\gamma} = \frac{2k}{m_o \omega_o} \Re e \gamma'' \quad (3.28)$$

La parte imaginaria de (3.24) tiene la forma:

$$\Re \dot{\gamma} = \omega_0 \Im m \gamma + \frac{3\lambda}{2\sqrt{2m_0\omega_0}} [S(\theta''_\beta + \theta''_\alpha) - (\theta'_\beta - \theta'_\alpha)\rho' - (\theta''_\beta - \theta''_\alpha)\rho] \quad (3.29)$$

donde $\theta_\alpha = \theta_\alpha(z, t)$ y $\theta_\beta = \theta_\beta(z, t)$ son variables angulares reales.

Consideremos primero el límite de sine-Gordon, es decir cuando $\rho = 0$; en este caso las ecuaciones (3.25), (3.26) y (3.27) están dadas por:

$$(\theta'_\beta + \theta'_\alpha)_0 = -\frac{8\dot{\phi}}{3J\phi'} \quad (3.30)$$

$$\phi'' - \frac{8h}{11J} \sin \phi + \frac{6}{11} \lambda \langle q' \rangle \phi' = 0 \quad (3.31)$$

$$\langle q' \rangle = 0, \quad (3.32)$$

Vemos entonces que cuando en la teoría no se consideran las excursiones del espín fuera del plano, no existen modos elásticos excitados. Obteniéndose solamente solitones magnéticos de sine-Gordon.

Para el primer orden en ρ de las ecuaciones (3.27) y (3.30) se tiene:

$$(\theta''_\beta + \theta''_\alpha) = \rho' \phi' + \rho \phi'' + \frac{16\lambda}{3J} \langle q' \rangle \frac{\dot{\phi}}{\phi'} \quad (3.33)$$

Es importante notar que la ecuación anterior para el caso $\lambda = 0$ y que corresponde a una cadena magnética no compresible, es una ecuación diferencial, válida para cualquier orden de ρ tal como se muestra en el (apéndice, sección 5.3).

Sustituyendo en (3.29) y combinando con (3.28) se encuentra:

$$\langle \ddot{q} \rangle = \frac{2k}{m_o} \langle q'' \rangle + \frac{8\lambda^2}{m_o\omega_o} [\langle \dot{q}' \rangle \dot{\phi}\phi' + \langle q' \rangle \ddot{\phi}\phi' - \langle q' \rangle \dot{\phi}\dot{\phi}'] (\phi')^{-2} \quad (3.34)$$

Asumiendo **soluciones de forma permanente** para los grados de libertad magnéticos, es decir, considerando $\phi(z, t) = \phi(z - vt)$, la ecuación anterior toma la forma:

$$\langle \ddot{q}(z, t) \rangle = \frac{2k}{m_o} \langle q''(z, t) \rangle - \frac{8\lambda^2 v}{m_o\omega_o} \langle \dot{q}'(z, t) \rangle \quad (3.35)$$

Por otro lado, siguiendo el mismo procedimiento que en el capítulo 2; utilizando las expresiones (2.24) y (2.25), luego sustituyendo en (3.25) y (3.26) se obtiene:

$$J \left(\frac{3}{8S} + 1 \right) \rho''(\xi) + \frac{3}{8} J [\theta'_\beta(\xi) + \theta'_\alpha(\xi)]_1 \phi'(z, t) + F(\xi) \rho(\xi) - \lambda \langle q''(\xi + (v - v_e)t) \rangle \rho + \frac{3\lambda}{2} \langle q'(\xi + (v - v_e)t) \rangle \rho' = 0 \quad (3.36)$$

y

$$\left(\frac{3}{16S} + 1 \right) J \phi'^2(\xi) + \frac{3}{16} J [\theta'_\beta(\xi) + \theta'_\alpha(\xi)]_1^2 - \frac{4}{3J} v^2 + \frac{1}{2} D - h \cos \phi(\xi) + 2\lambda S \langle q''(\xi + (v - v_e)t) \rangle = 0 \quad (3.37)$$

donde se ha definido: $\xi_e \equiv z - v_e t$ y $F(\xi)$ está dada por la ecuación (2.36) del capítulo 2.

A partir de las ecuaciones anteriores, despejando de una de ellas el término $[\theta'_\beta(\xi) + \theta'_\alpha(\xi)]_1$ y sustituyéndolo en la otra, se obtiene la siguiente ecuación

diferencial para las desviaciones del espín fuera del plano, en presencia de un acoplamiento entre los modos magnéticos y elásticos.

$$\begin{aligned} \rho''(\xi) + \frac{3\lambda}{2C_0S} \langle q'(\xi + (v - v_e)t) \rangle \rho'(\xi) \\ + G_2(\xi)\rho(\xi) + R(\xi) \langle q''(\xi + (v - v_e)t) \rangle = Q_2(\xi) \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde las derivadas son con respecto a ξ y el tiempo se utiliza como un parámetro, también se ha definido:

$$R(\xi) = -\frac{\sqrt{3J}\lambda S \phi'(\xi)}{C_0L(\xi)} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} G_2(\xi) = \frac{1}{C_0} [F(\xi) - H(\xi) + \left\{ \frac{\sqrt{3J}}{8L^3(\xi)} v \phi'^2(\xi) \right. \\ \left. - 1 \right\} \lambda \langle q''(\xi + (v - v_e)t) \rangle] \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$Q_2(\xi) = Q(\xi) + \frac{\sqrt{3J}}{4C_0L^3(\xi)} \lambda^2 S^2 \phi'(\xi) \langle q''(\xi + (v - v_e)t) \rangle^2 \quad (3.41)$$

con $H(\xi)$, $L(\xi)$ y $Q(\xi)$ definidos en el capítulo 2 por las ecuaciones: (2.32), (2.33) y (2.34) respectivamente y $C_0 = (3/8 + S)J$.

Respecto a la ecuación (3.38) cabe destacar, que en ausencia de un acoplamiento espín fonón, es decir cuando $\lambda = 0$, ésta se transforma como es de esperar en la relación (2.26) del capítulo 2, la cual da cuenta de las desviaciones del espín fuera del plano para el caso de una cadena magnética no compresible.

Por otro lado, los resultados numéricos^[12] muestran que los términos proporcionales a $1/L^3(\xi)$ no producen ningún aporte significativo al valor que toma $\rho(\xi)$ por lo cual se pueden despreciar y la ecuación (3.38) se escribe como:

$$\begin{aligned} \rho''(\xi) + \frac{3\lambda}{2C_0S} \langle q'(\xi + (v - v_e)t) \rangle &= \rho'(\xi) \\ + G_1(\xi)\rho(\xi) + R(\xi) \langle q''(\xi + (v - v_e)t) \rangle &= Q(\xi) \end{aligned} \quad (3.42)$$

con:

$$G_1(\xi) = \frac{1}{C_0} [F(\xi) - H(\xi) - \lambda \langle q''(\xi + (v - v_e)t) \rangle] \quad (3.43)$$

Dada la estructura que presenta la ecuación (3.35) es posible proponer cualquier tipo de solución de la forma $\langle q(z, t) \rangle = f(z \mp v_e t)$, de las cuales en este caso sólo se eligen dos: soluciones armónicas, y soluciones tipo pulso solitario como las encontradas en [34] para el caso de una cadena magnética compresible con anisotropía uniaxial.

Una solución armónica para la ecuación (3.35) está dada por:

$$\langle q(z, t) \rangle = q_0 \exp i(k_0 z - \omega t), \quad (3.44)$$

con

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{4\lambda^2 k_0 v}{m_0 \omega_0} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{m_0^2 \omega_0^4}{16\lambda^4 v^2}} \right) = (v - v_e) k_0 \quad v - v_e > 0 \\ \omega &= \frac{4\lambda^2 k_0 v}{m_0 \omega_0} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{m_0^2 \omega_0^4}{16\lambda^4 v^2}} \right) = (v - v_e) k_0 \quad v - v_e < 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.4 Resultados

La ecuación anterior relaciona la velocidad de fase v_e de la onda armónica elástica con la velocidad v del pulso de forma permanente representado por ρ .

El procedimiento a seguir es reemplazar esta solución armónica en la ecuación diferencial (3.42) y realizar la integración numérica con $J=1$ y $S=1$, para determinar la dependencia de la solución numérica $\rho(\xi)$ en función de los distintos parámetros del sistema, obteniéndose que el espín realiza una excursión solitaria fuera del plano por cada rotación de sine-Gordon en 2π alrededor del eje z .

La dependencia de las excursiones del espín fuera del plano (ρ) en función del parámetro de magnetostricción λ , se presenta en la figura 3.1, para $t = 0$. Al tomar la rama $v - v_e > 0$ de la ecuación (3.45) se encuentra que éstas son más pronunciadas cuando velocidad del solitón magnético toma valores pequeños, el efecto que produce la presencia de oscilaciones armónicas, es de disminuir la amplitud de las desviaciones del espín fuera del plano. Sin embargo, existe un límite inferior de la velocidad del solitón magnético bajo la cual las soluciones solitónicas de la ecuación (3.42) no son estables; en la figura 3.2(a) se describe la naturaleza de esta inestabilidad, y se muestra el efecto de estabilización que produce el parámetro de magnetotricción. También existe un límite superior para estas velocidades sobre las cuales no se obtienen soluciones solitónicas ya que las excursiones del espín fuera del plano divergen en oscilaciones de altas frecuencias (hacia atrás y hacia adelante), tal como se puede observar en la figura 3.2(b); este efecto es aumentado por la presencia de las oscilaciones armónicas de la red.

Cosideremos ahora como solución de la ecuación (3.42), la encontrada en [34,42] para el caso de una cadena de Heisenberg compresible con anisotropía uniaxial, cuya forma esta dada por:

$$\langle q(\xi_e) \rangle = q_0 \tanh(k_0 \xi_e) \operatorname{sech}(k_0 \xi_e) \quad (3.46)$$

donde $\xi_e = z + v_e t$ con v_e definida mediante la relación (45).

Teniendo presente el cambio de signo del pulso en (3.42) y realizando una integración numérica, se estudian los efectos de la deformación de la red con respecto al solitón magnético viajero. Los módulos de las velocidades están relacionados mediante la ecuación (3.45) donde se supone que el solitón magnético viaja desde la izquierda y la deformación de la red (pulso elástico) lo hace desde la derecha. Los centros coinciden en $t = 0$. En la figura 3.3 se presenta ρ para distintos tiempos mostrándose el efecto de la colisión de éste con el pulso elástico. El campo magnético h modifica la deformación del solitón magnético debido a la colisión en $t = 0$, como se muestra en la figura 3.4, donde se observa que la presencia del campo magnético h hace que el solitón magnético sea menos perturbado por el pulso elástico. Finalmente se presenta en la figura 3.5 la dependencia de la deformación, en $t = 0$, en función del parámetro magnetostrictivo λ , encontrándose que cuando λ aumenta la deformación es más pronunciada y caótica.

Según los resultados presentados anteriormente, se puede reconocer la existencia de un acoplamiento entre excitaciones no lineales magnéticas y elásticas en una cadena de Heisenberg compresible con anisotropía planar. Sin embargo, estos modos no son posibles de obtener en ausencia de las excursiones del espín fuera del plano. Este análisis considera dos situaciones que pueden ser mejoradas o perfeccionadas: una de ellas es que se trata de una teoría al primer orden en las excursiones del espín fuera del plano y la otra es que se consideran solamente términos armónicos en el Hamiltoniano de la red. Por lo tanto el próximo paso que se debe considerar es incluir términos elásticos no-armónicos y tomar términos de orden superior en ρ . Las oscilaciones caóticas observadas

para grandes acoplamientos entre modos magnéticos y elásticos sugieren la idea de analizar una cadena discreta introduciendo un mapeo e investigar además de eso las propiedades espectrales de las estructuras estocásticas correspondientes. También el caso de una cadena antiferromagnética compresible puede ser tratada con este formalismo, para ver los efectos de la compresibilidad sobre el intercambio de roles entre la anisotropía y el campo externo^[43].

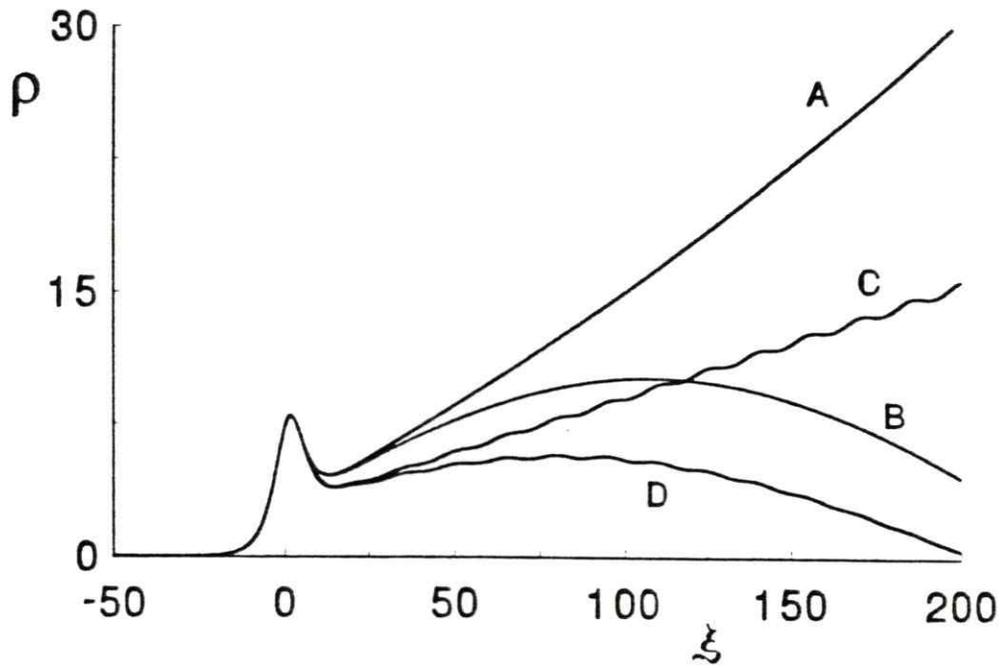


Figura 3.1: Dependencia de las excursiones de espín fuera del plano $\rho(\xi, t = 1)$ en función de ξ , para dos valores de la velocidad y dos valores de λ ; A: $v = 5, \lambda = 0.001$; B: $v = 13, \lambda = 0.001$; C: $v = 5, \lambda = 30$; D: $v = 13, \lambda = 30$. Los parámetros son: $h = 0.1, d \equiv D/J = 0.2, m = k = 20, q_0 = 0.2$, Ancho pulso elástico=15.

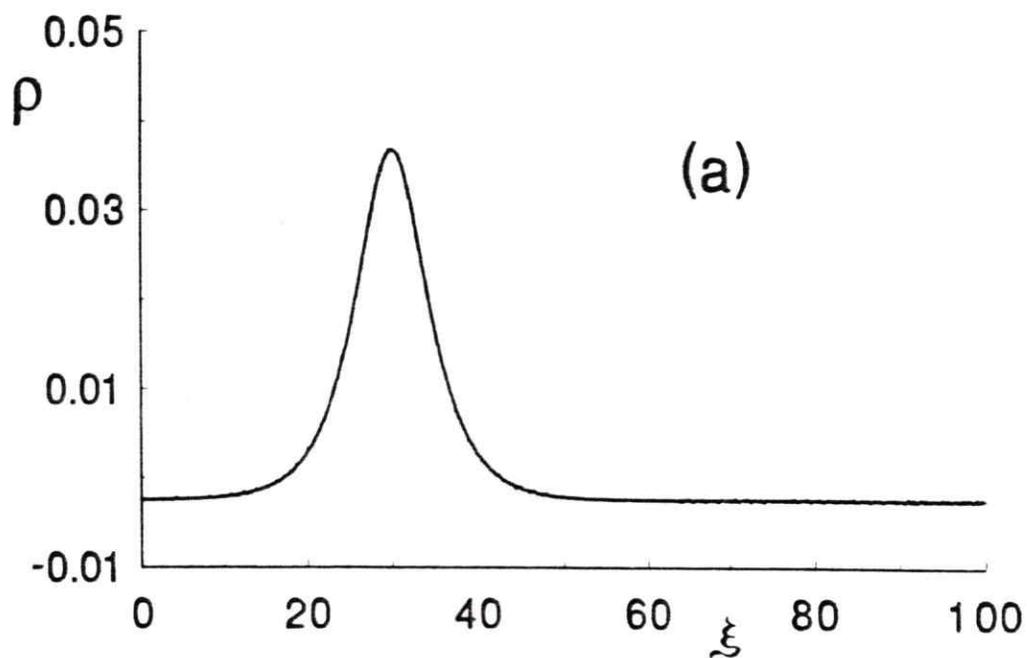


Figura 3.2(a): Dependencia de las excursiones de espín fuera del plano $\rho(\xi, t = 1)$ en función de ξ , para el valor de la velocidad; $v = 30$. Los parámetros son: $\lambda = 30$, $h = 0.1$, $d \equiv D/J = 0.2$, $m = k = 20$, $q_0 = 0.2$, Ancho pulso elástico=15.

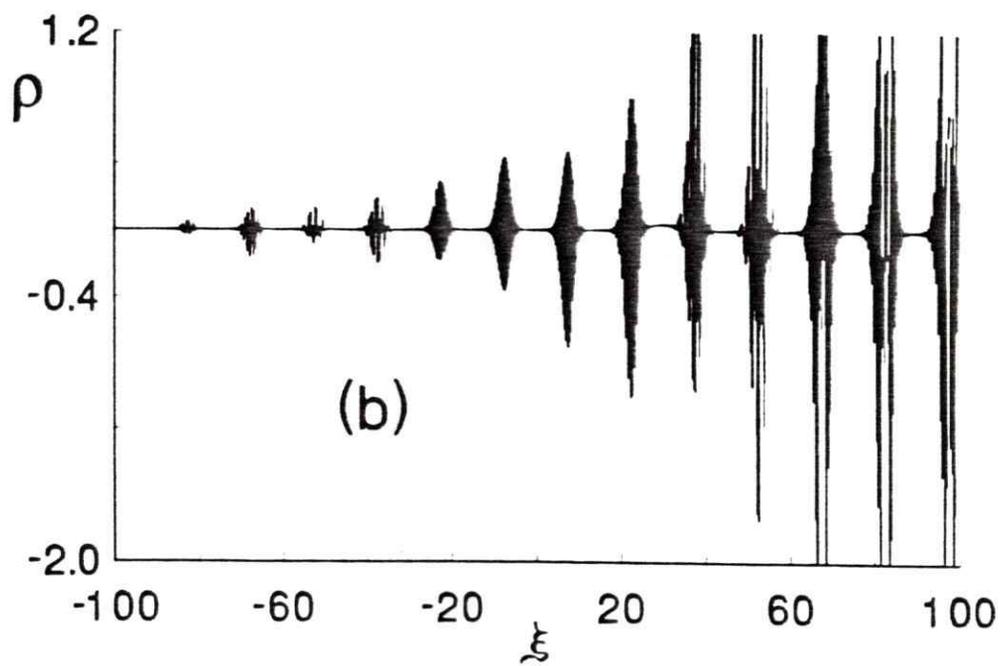


Figura 3.2(b): Dependencia de las excursiones de espín fuera del plano $\rho(\xi, t = 1)$ en función de ξ , para el valor de la velocidad; $v = 60$. Los parámetros son: $\lambda = 30$, $h = 0.1$, $d \equiv D/J=0.2$, $m = k = 20$, $q_0 = 0.2$, Ancho pulso elástico=15.

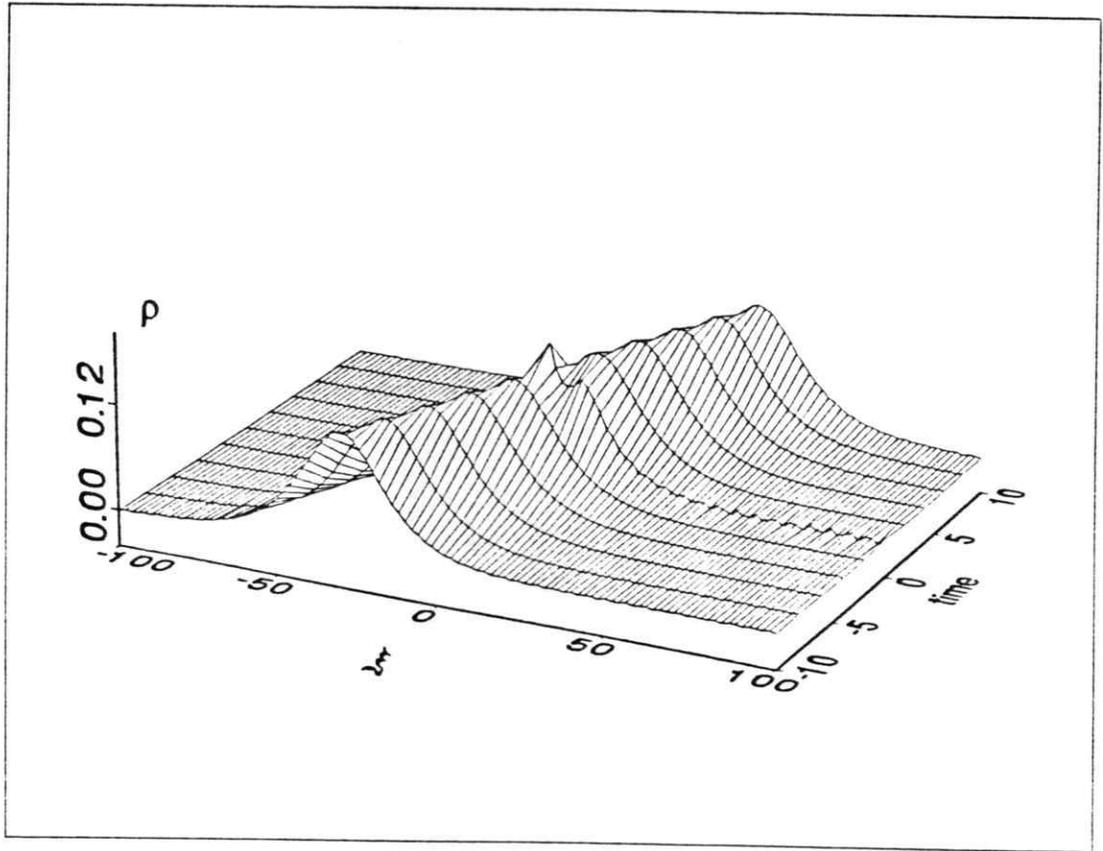


Figura 3.3: Una excursión del espín fuera del plano $\rho(\xi, t)$ en función de ξ y de t , ρ viniendo desde la derecha ecuentra a un pulso elástico viniendo de la izquierda. Los parámetros son: $\lambda = 20$, $h = 0.01$, $d \equiv D/J = 0.2$, $m = k = 20$ and $v = 3$, $q_0 = 0.2$, Ancho pulso elástico=15.

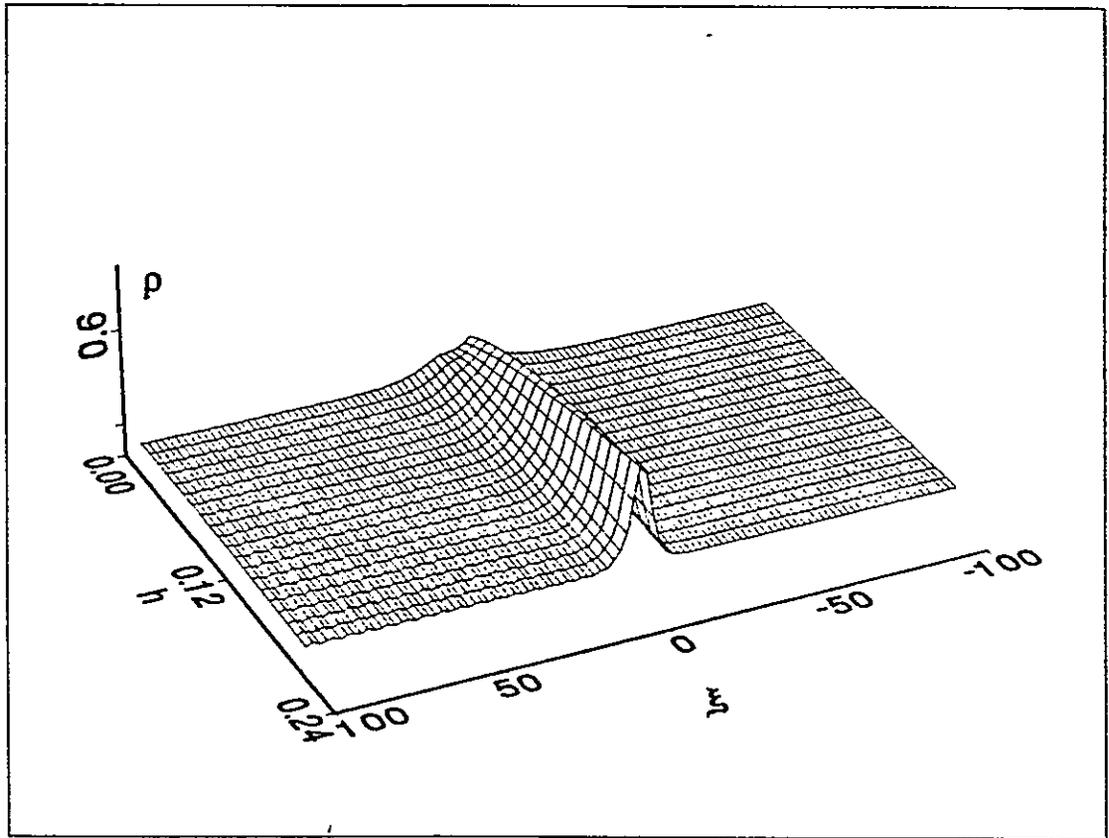


Figura 3.4: $\rho(\xi, t = 0)$ en función de ξ y de h . Efectos que produce el campo magnético externo h (aplicado en el plano) sobre las excursiones del espín fuera del plano $\rho(\xi, t = 0)$. Los parámetros son: $\lambda = 20$, $d \equiv D/J = 0.2$, $m = k = 20$ y $v = 3$, $q_0 = 0.2$, Ancho pulso elástico=15.

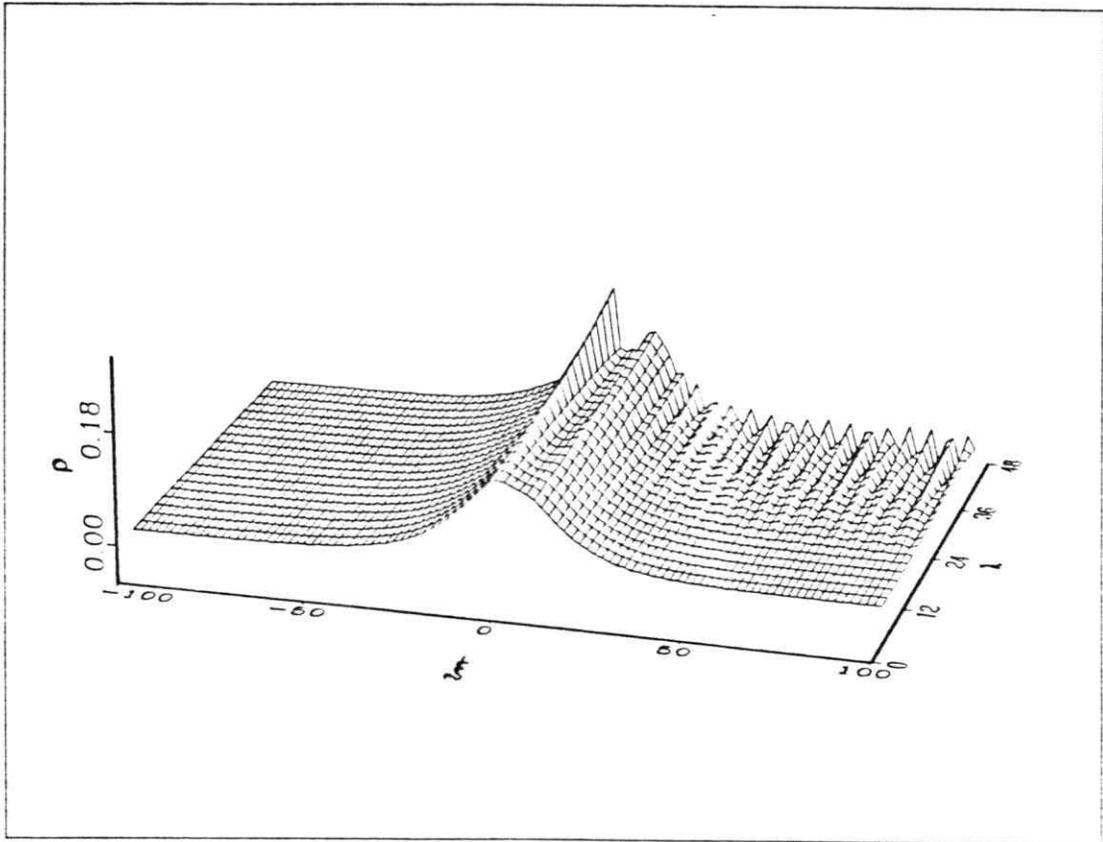


Figura 3.5: $\rho(\xi, t = 0)$ en función de ξ y de λ . Efectos que produce el parámetro de magnetotricción λ sobre las excursiones del espín fuera del plano $\rho(\xi, t = 0)$. Los parámetros son: $h = .01$, $d \equiv D/J = 0.2$, $m = k = 20$ y $v = 3$. $q_0 = 0.2$, Ancho pulso elástico=15.

Capítulo 4

ENERGIA

4.1 Introducción

El formalismo utilizado respecto a la representación de bosones acoplados de Schwinger para los operadores de espín, en conjunto con el método de los estados coherentes para el oscilador armónico simple, permiten realizar los cálculos de la energía del sistema sin mayores dificultades.

Por otro lado, dado que la determinación de la energía involucra los temas de los casos tratados anteriormente (capítulos 2 y 3), y con el propósito de seguir una secuencia natural que permita establecer las comparaciones que sean de interés, el presente capítulo está organizado de la siguiente manera:

En primer lugar se realiza el cálculo de la energía correspondiente al caso de una cadena de Heisenberg con anisotropía planar en presencia de un campo magnético externo aplicado en el plano (como la estudiada en el capítulo 2), a la cual de aquí en adelante se le dará el nombre de **cadena magnética no**

compresible. Posteriormente se considera la presencia de un acoplamiento entre modos magnéticos y elásticos que corresponde al caso de una **cadena magnética compresible** como la estudiada en el capítulo 3 y luego se calcula su energía teniendo presente algunas formas que se proponen para los desplazamientos elásticos longitudinales $\langle q(\xi_e) \rangle$.

4.2 Energía Cadena Magnética no Compresible

La energía para una cadena magnética no compresible (E_{CNC}), se puede determinar a partir de la ecuación:

$$E_{CNC} = \langle \alpha\beta | \mathcal{H} | \alpha\beta \rangle \quad (4.1)$$

donde el Hamiltoniano \mathcal{H} escrito en el límite continuo está dado por la ecuación (2.2) del capítulo 2, cuya forma es:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{J}{2} \int dz \left\{ \frac{1}{2} [S^{\dagger}(z)S^{-''}(z) + S^{-}(z)S^{''}(z)] + S^z(z)S^{z''}(z) \right\} \\ & + D \int dz [S^z(z)]^2 - h \int dz S^x(z) - \frac{1}{2} NJS^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Expresando los operadores $S^+(z)$, $S^-(z)$, $S^z(z)$ en términos de los operadores bosónicos a^{\dagger} , a , b^{\dagger} , b , mediante la utilización de las transformaciones de Schwinger ecuación (2.3), el Hamiltoniano anterior se transforma en:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{8} J \int_{-\infty}^{+\infty} dz [a^{\dagger} b^{\dagger''} b a + b^{\dagger} a^{\dagger''} a b + 3a^{\dagger} a'' + 3b^{\dagger} b'']$$

$$\begin{aligned}
& + a^\dagger b^\dagger b a'' + b^\dagger a^\dagger a b'' + 4a^\dagger b^\dagger b a' + 4b^\dagger a^\dagger a b' \\
& + a^\dagger a'' a a + 2a^\dagger a' a a' + a^\dagger a^\dagger a a'' + b^\dagger b'' b b \\
& + 2b^\dagger b^\dagger b b' + b^\dagger b^\dagger b b'' - 2a^\dagger b^\dagger a b' - 2b^\dagger a^\dagger b a' \\
& + \frac{1}{4} D \int_{-\infty}^{+\infty} dz [a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger a a - 2a^\dagger b^\dagger a b + b^\dagger b + b^\dagger b^\dagger b b] \\
& - \frac{1}{2} h \int_{-\infty}^{+\infty} dz [a^\dagger b + b^\dagger a]. -
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Sustituyendo (4.3) en (4.1) e introduciendo estados coherentes y haciendo actuar los operadores sobre éstos estados, se encuentra que la energía está dada por:

$$\begin{aligned}
E_{CNC} = & - \frac{1}{8} J \int_{-\infty}^{+\infty} dz [3(\alpha^* \alpha'' + \beta^* \beta'') + 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \Re \epsilon(\alpha^* \alpha'' + \beta^* \beta'') \\
& + 8 \Re \epsilon(\alpha^* \beta^{*'} \beta \alpha') + 2(|\alpha|^2 - |\beta|^2)(|\alpha'|^2 - |\beta'|^2)] \\
& + \frac{1}{4} D \int_{-\infty}^{+\infty} dz [|\alpha|^2 + |\beta|^2 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2] - h \int_{-\infty}^{+\infty} dz \Re \epsilon(\alpha^* \beta).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Por otro lado, al utilizar las ecuaciones (2.13) y (2.14) y teniendo presente la sección 5.3 del apéndice se encuentra:

$$\Im m(\alpha^* \alpha'' + \beta^* \beta'') \equiv -S(\theta''_\alpha + \theta''_\beta) + (\theta'_\beta - \theta'_\alpha) \rho' + (\theta''_\beta - \theta''_\alpha) \rho = 0 \tag{4.5}$$

con lo cual, la energía sólo toma valores reales de acuerdo con la ecuación:

$$\begin{aligned}
E_{CNC} = & - \frac{1}{8} J \int_{-\infty}^{+\infty} dz [3 \Re \epsilon(\alpha^* \alpha'' + \beta^* \beta'') + 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \Re \epsilon(\alpha^* \alpha'' + \beta^* \beta'') \\
& + 8 \Re \epsilon(\alpha^* \beta^{*'} \beta \alpha') + 2(|\alpha|^2 - |\beta|^2)(|\alpha'|^2 - |\beta'|^2)] \\
& + \frac{1}{4} D \int_{-\infty}^{+\infty} dz [|\alpha|^2 + |\beta|^2 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2] - h \int_{-\infty}^{+\infty} dz \Re \epsilon(\alpha^* \beta)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Teniendo presente las condiciones cinemáticas asociadas a la representación de Schwinger ecuación (2.12) y las soluciones de α y β al primer orden en ρ dadas

por:

$$\begin{aligned}\alpha(z, t) &= \sqrt{S}(1 + \rho(z, t)/2S) \exp[i\theta_\alpha(z, t)] \\ \beta(z, t) &= \sqrt{S}(1 - \rho(z, t)/2S) \exp[i\theta_\beta(z, t)]\end{aligned}\quad (4.7)$$

se encuentra que la energía magnética para el caso de una cadena magnética no compresible está dada por:

$$\begin{aligned}E_{CNC} &= -NJS^2 + \frac{1}{2}NDS + \frac{3JS}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta'_\beta{}^2 + \theta'_\alpha{}^2) dz + \frac{1}{2}JS^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'^2(\xi) dz \\ &- \frac{3J}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(\xi)\rho(\xi)(\theta'_\beta + \theta'_\alpha) dz - hS \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\phi(\xi)) dz\end{aligned}\quad (4.8)$$

Vemos que para determinar la energía, primero es necesario conocer algunos de los términos anteriores.

Por otro lado, la ecuación obtenida en la sección 5.3 del apéndice:

$$S(\theta''_\alpha + \theta''_\beta) = \rho'(\theta'_\beta - \theta'_\alpha) + \rho(\theta''_\beta - \theta''_\alpha)\quad (4.9)$$

se puede integrar directamente obteniéndose:

$$\theta'_\alpha + \theta'_\beta = \frac{8v}{3J} + \frac{1}{S}\phi'(\xi)\rho(\xi)\quad (4.10)$$

combinando esta última ecuación con la relación $\theta'_\beta - \theta'_\alpha = \phi'(\xi)$, se encuentra:

$$\theta'^2_\beta + \theta'^2_\alpha = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{8v}{3J} \right)^2 + \phi'^2(\xi) + \frac{16v}{3JS} \phi'(\xi)\rho(\xi) \right]\quad (4.11)$$

Luego, teniendo presente lo anterior y utilizando la solución pared de dominio para $\phi(\xi)$ dada por la ecuación (2.22) del capítulo 2, la energía de la cadena no compresible al primer orden en $\rho(\xi)$ está dada por:

$$E_{CNC} = NE_o + 8Nm + \frac{1}{2}NMv^2\quad (4.12)$$

donde: $E_o = -JS^2 + \frac{1}{2}DS - hS$ corresponde a la energía del estado fundamental, $m = [\frac{h}{(3/8+S)J}]^{1/2}$ y $M = 8S/3J$. Tomando $E_o = 0$ se tiene:

$$E_{CNC} = 8N m + \frac{1}{2}N M v^2 \quad (4.13)$$

La ecuación anterior muestra que al trabajar al primer orden en las desviaciones del espín fuera del plano, se obtiene la energía de sine-Gordon correspondiente a una pared de dominio Fogedby^[31], (apéndice, sección 5.1), más un término que tiene la forma de una energía cinética.

Notamos que para el caso estático $v = 0$, se encuentra el mismo resultado obtenido por Mikeska et al. (1989)^[44], en cuyo caso la energía por sitio tiene la siguiente dependencia con ξ .

$$E_{CNC}(\xi) = \frac{4hS}{m} \tanh(m\xi) \quad (4.14)$$

Dado que el término $1/m$ se puede asociar con el ancho del solitón, se encuentra que la energía magnética para la cadena no compresible es inversamente proporcional a este ancho.

4.3 Energía Cadena Magnética Compresible

La energía para este sistema está dada por:

$$E_{CC} = E_{mag} + E_{el} + E_{int} \quad (4.15)$$

donde:

$$E_{mag} = \langle \alpha\beta\gamma | \mathcal{H}_{mag} | \alpha\beta\gamma \rangle \quad (4.16)$$

$$E_{el} = \langle \alpha\beta\gamma | \mathcal{H}_{el} | \alpha\beta\gamma \rangle \quad (4.17)$$

$$E_{int} = \langle \alpha\beta\gamma | \mathcal{H}_{int} | \alpha\beta\gamma \rangle \quad (4.18)$$

Los Hamiltonianos anteriores están dados por las ecuaciones (3.8) (3.9) y (3.10) respectivamente.

4.3.1 Energía Magnética

Notamos que la energía magnética mantiene la misma estructura que la obtenida para el caso de una cadena magnética no compresible, cuya forma está dada por la ecuación (4.8), sólo que en estas condiciones, la presencia del acoplamiento entre modos magnéticos y elásticos, modifican la forma que toman los términos de las ecuaciones (4.11) y (4.12) que son las que permiten determinar la energía, sin embargo, la ecuación (3.33) para soluciones de forma permanente, permite encontrar ecuaciones similares a las anteriores, las cuales son las requeridas para el caso de una cadena magnética compresible.

La ecuación (3.33) para soluciones de forma permanente tiene la forma:

$$S(\theta''_{\beta} + \theta''_{\alpha}) = \rho' \phi' + \rho \phi'' - \frac{16\lambda v}{3J^2} \langle q'(\xi_{\epsilon}) \rangle \quad (4.19)$$

vemos que esta ecuación se integra directamente, lo cual permite obtener:

$$\theta'_\alpha + \theta'_\beta = \frac{8v}{3J} + \frac{1}{S} \phi'(\xi) \rho(\xi) - \frac{16\lambda v}{3J^2} \langle q(\xi_e) \rangle \quad (4.20)$$

y

$$\theta'^2_\beta + \theta'^2_\alpha = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{8v}{3J} \right)^2 + \phi'^2(\xi) + \frac{16v}{3JS} \phi'(\xi) \rho(\xi) - \left(\frac{16v}{3J} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{J} \right) \langle q(\xi_e) \rangle \right] \quad (4.21)$$

En estas dos últimas ecuaciones se aprecia que cuando $\lambda = 0$, se obtienen las relaciones (4.10) y (4.11) respectivamente.

Por otro lado, sustituyendo en la ecuación (4.8), se encuentra que la energía magnética de la cadena compresible está dada por:

$$E_{mag} = E_{CNC} - \frac{16N\lambda S v^2}{3J^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q(\xi_e) \rangle dz \quad (4.22)$$

donde E_{CNC} representa la energía de la cadena magnética no compresible, cuya forma está dada por la ecuación (4.13), $\langle q(\xi_e) \rangle$ representa los desplazamientos longitudinales desde las posiciones de equilibrio y es solución de la ecuación diferencial (3.35).

La relación anterior permite determinar la energía de una cadena magnética de Heisenberg con anisotropía planar con un campo magnético externo aplicado en el plano, en presencia de un acoplamiento entre modos magnéticos y elásticos, cuando se propone para $\langle q(\xi_e) \rangle$ alguna solución de la forma $f(\xi_e)$ con $\xi_e = z \mp v_e t$.

a).- Cuando $\langle q(\xi_e) \rangle$ toma la forma del pulso solitario como el dado en la ecuación (3.46), se encuentra que la energía magnética de la cadena compresible

es igual a la de la cadena no compresible (4.13).

b).- Si se considera para los modos elásticos $\langle q(\xi_e) \rangle$ un pulso solitario que a su vez es solución de una ecuación diferencial no lineal del tipo Korteweg-deVries (KdV) G.L. Lamb^[45], cuya forma está dada por:

$$\langle q(\xi_e) \rangle = -q_0 \operatorname{sech}^2(k_0 \xi_e) \quad (4.23)$$

la energía magnética de la cadena compresible está dada por:

$$E_{mag} = E_{CNC} + \frac{32Nq_0\lambda S v^2}{3k_0 J^2} \quad (4.24)$$

c).- Si se considera un pulso igual al anterior, sólo que ahora se permite que q_0 cambie de signo, se encuentra:

$$E_{mag} = E_{CNC} - \frac{32Nq_0\lambda S v^2}{3k_0 J^2} \quad (4.25)$$

Dado que E_{CNC} también contiene un término proporcional a v^2 , se puede entonces encontrar un valor particular para λ

$$\lambda_c = \frac{k_0}{8q_0} \quad (4.26)$$

con lo cual la energía toma la forma de sine-Gordon independiente de la velocidad

$$E_{mag} = 8N m \quad (4.27)$$

Vemos que esta última expresión es igual al valor que toma la energía de la cadena magnética no compresible cuando en la ecuación (4.13) se considera el caso $v = 0$

4.3.2 Energía Elástica

La energía de los solitones elásticos está dada por:

$$E_{el} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \langle \alpha \beta \gamma | \frac{1}{2m_o} p^2 + kq'^2 | \alpha \beta \gamma \rangle \quad (4.28)$$

Teniendo presente la ecuaciones (3.7) y (3.28), la relación anterior se transforma en:

$$E_{el} = \left(\frac{2k^2}{m_o v_e^2} + k \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \langle q' \rangle^2 + \frac{2k^2}{m_o v_e^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \langle q'' \rangle^2 \quad (4.29)$$

donde la energía del estado fundamental $N\omega_o/2$ ha sido considerada en E_{el} .

Para determinar la energía elástica, en primer lugar se propone como solución de $\langle q(\xi_e) \rangle$ la presentada en la ecuación (3.46) con la cual se obtiene:

$$E_{el} = \left(\frac{14}{15} \right) q_o^2 k_o k \left(1 + \frac{2k}{m_o v_e^2} \right) + \frac{62}{21} q_o^2 k_o^3 \quad (4.30)$$

Por otro lado cuando la solución propuesta es del tipo KdV, ecuación (3.47), se encuentra:

$$E_{el} = \left(\frac{16}{15} \right) q_o^2 k_o k \left(1 + \frac{2k}{m_o v_e^2} \right) + \frac{64}{21} q_o^2 k_o^3 \quad (4.31)$$

Para las situaciones consideradas anteriormente, la energía elástica no depende sustancialmente de la forma del pulso, manteniéndose en ambos casos las mismas dependencias con los parámetros; observándose también que esta energía aumenta con el cuadrado de la amplitud del solitón elástico q_o .

Es importante notar además que si el ancho del pulso es muy grande, entonces k_o^3 es muy pequeño y los términos que lo contienen se pueden despreciar, obteniéndose de esta forma el mismo resultado encontrado en^[42].

Luego cuando el ancho del solitón elástico es grande, las ecuaciones anteriores se transforman respectivamente en:

$$E_{el} = \left(\frac{14}{15}\right) q_o^2 k_o k \left(1 + \frac{2k}{m_o v_e^2}\right) \quad (4.32)$$

$$E_{el} = \left(\frac{16}{15}\right) q_o^2 k_o k \left(1 + \frac{2k}{m_o v_e^2}\right) \quad (4.33)$$

4.3.3 Energía de Interacción

El Hamiltoniano que permite determinar la energía de interacción escrito en el límite continuo, está dado por la ecuación (3.10), cuya forma es:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} = & - 2\lambda \int dz q'(z) \left\{ \frac{1}{2} [S^\dagger(z)S^-(z) + S^-(z)S^\dagger(z)] + S^z(z)S^{z'}(z) \right\} \\ & - \lambda S^2 \int dz q''(z) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Haciendo uso de las transformaciones de Schwinger (2.3), los operadores de espín se pueden expresar en términos de operadores bosónicos a , a^\dagger , b y b^\dagger y utilizando la ecuación (3.5), se expresa $q(z)$ en términos de los operadores c y c^\dagger obteniéndose:

$$\mathcal{H}_{int} = - \frac{\lambda}{2\sqrt{2m_o\omega_o}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz (c^\dagger + c') [a^\dagger b^\dagger b a + b^\dagger a^\dagger a b + a^\dagger b^\dagger b a']$$

$$\begin{aligned}
& + b^\dagger a^\dagger a b' + 3(a^\dagger a' + b^\dagger b') + a^\dagger a^\dagger a a + a^\dagger a^\dagger a a' + b^\dagger b^\dagger b b \\
& + b^\dagger b^\dagger b b'] - \frac{\lambda S^2}{2\sqrt{2m_\sigma\omega_\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz (c^{t''} + c) \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión (4.18) para E_{int} y mediante la utilización de estados coherentes ecuaciones (3.18) a (3.21), (los cuales son autoestados de los operadores bosónicos a , b y c), se encuentra:

$$\begin{aligned}
E_{int} = & - \frac{2\lambda}{\sqrt{2m_\sigma\omega_\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left(\frac{3}{2} + |\alpha|^2 + |\beta|^2 \right) \Re e(\gamma(\alpha^* \alpha' + \beta^* \beta')) \\
& - \frac{2\lambda S^2}{\sqrt{2m_\sigma\omega_\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \Re e(\gamma'') \quad (4.36)
\end{aligned}$$

En estas condiciones, desde la ecuación (3.5) para el operador q se obtiene:

$$\langle q'(\xi_\epsilon) \rangle = \frac{2}{\sqrt{2m_\sigma\omega_\sigma}} \Re e \gamma' \quad ; \quad \langle q''(\xi_\epsilon) \rangle = \frac{2}{\sqrt{2m_\sigma\omega_\sigma}} \Re e \gamma'' \quad (4.37)$$

Teniendo presente lo anterior se puede escribir:

$$\begin{aligned}
E_{int} = & - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left(\frac{3}{2} + |\alpha|^2 + |\beta|^2 \right) \langle q' \rangle \Re e(\alpha^* \alpha' + \beta^* \beta') \\
& - \lambda S^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \langle q''(\xi_\epsilon) \rangle \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Dado que: $\Re e(\alpha^* \alpha' + \beta^* \beta') = 0$, y teniendo presente la ecuación (2.12) del capítulo 2 se obtiene:

$$E_{int} = -\lambda S^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \langle q''(\xi_\epsilon) \rangle \quad (4.39)$$

esta relación se integra directamente obteniéndose que la energía de interacción, al primer orden en las excursions del espín fuera del plano es cero ($E_{int} = 0$)^[42].

4.3.4 Energía Total Cadena Compresible

Finalmente sustituyendo en (4.15), los valores encontrados para: E_{mag} , E_{el} , cuando $\langle q(\xi_e) \rangle$ tiene la forma de (3.46) y dado que $E_{int} = 0$ se encuentra que la energía total (por sitio) de la cadena magnética compresible está dada por:

$$E_{CC} = E_{CNC} + q_o^2 k_o \left\{ \frac{14k}{15} \left(1 + \frac{2k}{m_o v_e^2} \right) + \frac{62k_o^2}{21} \right\} \quad (4.40)$$

Por otro lado si $\langle q_{\xi_e} \rangle$ está representado por un pulso del tipo KdV se encuentra:

$$E_{CC} = E_{CNC} + \frac{32q_o \lambda S v^2}{3k_o J^2} + q_o^2 k_o \left\{ \frac{16k}{15} \left(1 + \frac{2k}{m_o v_e^2} \right) + \frac{64k_o^2}{21} \right\} \quad (4.41)$$

Comparando las ecuaciones (4.40) y (4.41) se puede ver que la energía total de la cadena magnética compresible, depende considerablemente de la forma que tome el pulso elástico, obteniéndose energías más altas en función de la velocidad, para el pulso del tipo KdV. Sin embargo, ambos pulsos reproducen el valor de la energía de la cadena no compresible cuando el parámetro de magnetostricción es nulo ($\lambda = 0$).

La figura 4.1 muestra la forma como aumenta la energía total de la cadena magnética compresible E_{CC} ecuación (4.41) en función tanto de la velocidad como del parámetro λ . Por otro lado en la figura 4.2 se presenta la forma como aumenta esta energía con la velocidad y el campo magnético externo h , Estos

resultados son similares a los obtenidos en [23] al utilizar métodos de simulación computacional.

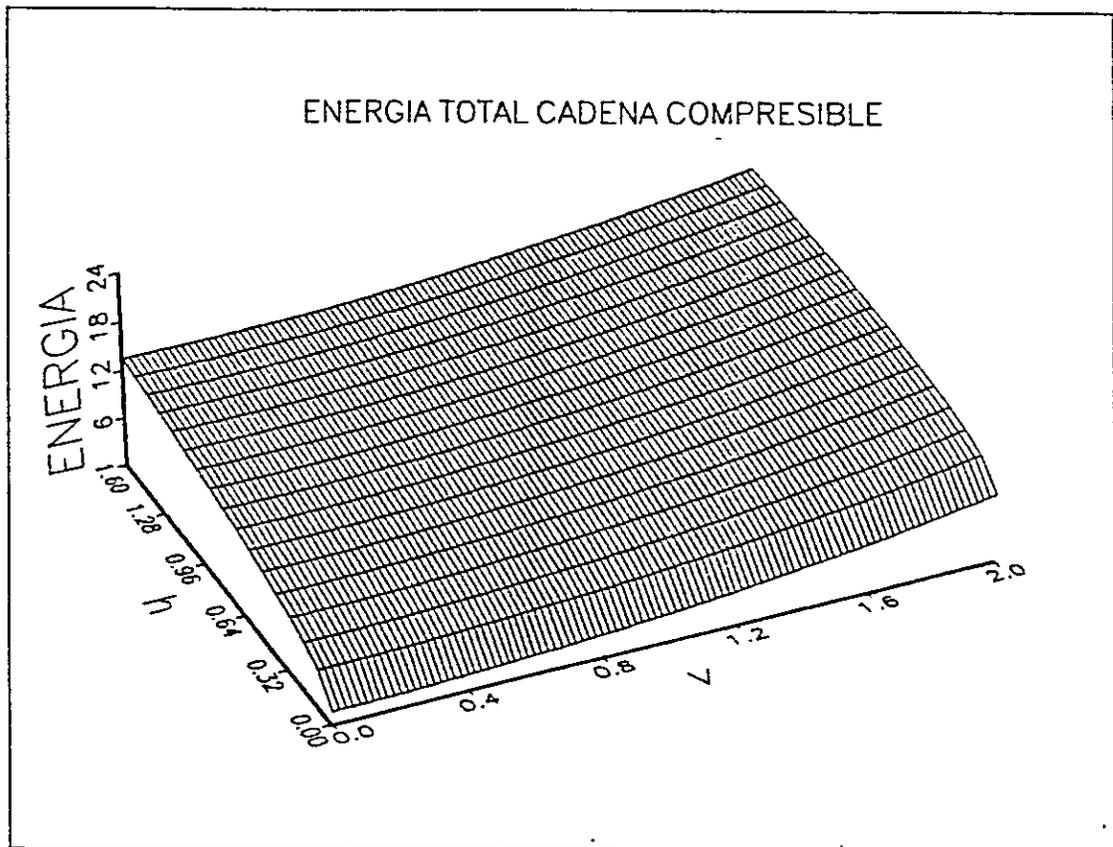


Figura 4.1: Energía total de la cadena magnética compresible E_{CC} ecuación (4.41) en función de la velocidad, para distintos valores del campo magnético externo h . Los valores de los parámetros son: $m = k = 20$, $q_0 = 0.2$, Ancho pulso elástico=10.

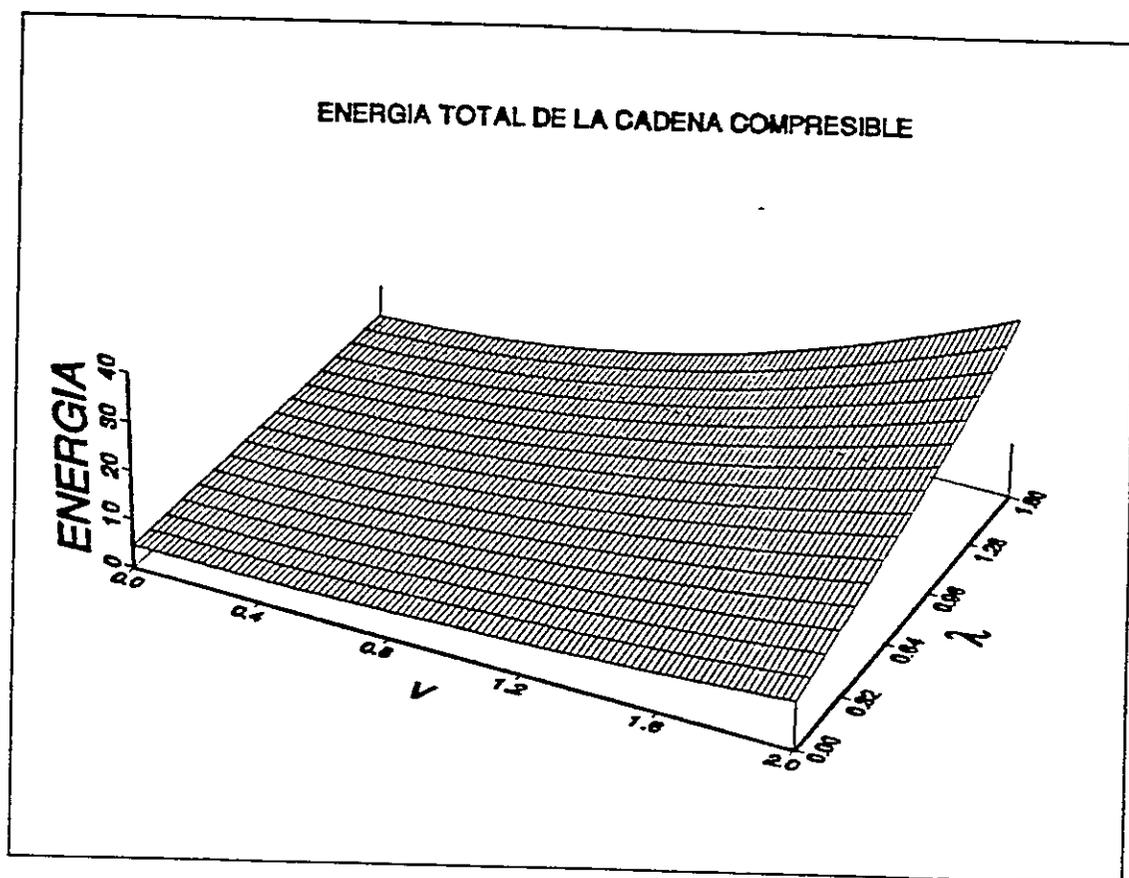


Figura 4.2: Energía total de la cadena magnética compresible E_{CC} ecuación (4.41) en función de la velocidad, para distintos valores del parámetro λ . Los valores de los parámetros son: $m = k = 20$, $q_0 = 0.2$, Ancho pulso elástico=10.

CONCLUSIONES

Conclusiones Finales:

La utilización de las transformaciones de Holstein-Primakoff para expresar a los operadores de espín, en conjunto con el método de los estados coherentes del oscilador armónico lineal, para estudiar el caso de una cadena ferromagnética de Heisenberg con anisotropía uniaxial, en presencia de un campo magnético externo aplicado en la dirección del eje de la cadena, permite determinar la dinámica de los espines.

Por otro lado, cuando se buscan soluciones para las cuales el momentum angular total es máximo, se encuentra que la velocidad máxima que puede tomar el solitón, depende del campo magnético externo a través del parámetro de anisotropía, cuyo resultado está de acuerdo con otros antecedentes obtenidos mediante la utilización de métodos de simulación computacional.

También se obtiene en forma analítica la energía en función de la velocidad del solitón, encontrándose resultados que son similares a los obtenidos cuando se usan métodos de simulación, para describir las propiedades magnéticas, de un sistema ferromagneto planar como la sal magnética $Cs Ni F_3$. Sin embargo, dentro de este contexto es posible explicar el paso de una rama de energía a otra, como debida al comportamiento que se encuentra para la velocidad v del solitón.

El desarrollo del capítulo 2, permite presentar una nueva aproximación para tratar la presencia de excitaciones no lineales en un sistema ferromagneto planar, donde se pone especial interés en investigar el uso de los estados coherentes en la obtención de la dinámica de los espines. Dado que las transformaciones de

Schwinger para los operadores de espín permiten el uso de estados coherentes bien definidos del oscilador armónico lineal, es posible investigar el comportamiento del sistema, cuando se acepta que las componentes del espín puedan realizar excursiones fuera del plano.

Estas excursiones o desviaciones, están representadas por el solitón magnético $\rho(\xi)$, para las cuales se obtiene que al trabajar al primer orden en $\rho(\xi)$, la fase $\phi(\xi)$ para soluciones de forma permanente, obedece a una ecuación estática de sine-Gordon (2.21) con solución de configuración pared de dominio (2.22).

Los resultados obtenidos, muestran que parámetros tales como el campo magnético externo h , la velocidad del solitón v y la anisotropía D , son los que juegan un rol preponderante en el comportamiento que se observa para las excursiones que realiza el espín fuera del plano, de manera tal que cuando h se incrementa, se obtiene que la amplitud máxima de $\rho(\xi)$ (ρ_{max}) aumenta y el ancho del pulso disminuye, cuando la velocidad v empieza a disminuir con valores pequeños del campo, se obtiene inicialmente un solitón estable distorsionados por magnones, para posteriormente empezar a perder estabilidad hasta que diverge ($\rho_{max} \rightarrow \infty$) para un valor crítico de la velocidad v_{min} (velocidad mínima), cuando la velocidad se empieza a incrementar a partir de v_{min} , se logra obtener un solitón estable hasta una velocidad límite v_{max} (velocidad máxima), por sobre la cual, el solitón magnético decae en movimientos oscilatorios de altas frecuencias y amplitudes que van creciendo hacia la derecha de ρ_{max} .

Este formalismo también permite realizar el análisis de la influencia de otros aspectos fundamentales como es el hecho de tomar en cuenta la presencia de un

acoplamiento entre modos magnéticos y elásticos para investigar el caso de una cadena magnética compresible. En este caso, cuando en la teoría no se consideran las excursiones del espín fuera del plano $\rho(\xi) = 0$ (límite de sine-Gordon), los resultados muestran que no existen modos elásticos excitados, y los solitones que se obtienen son solución de la ecuación de sine-Gordon, con lo cual se muestra que es obligatorio la existencia de las excursiones del espín fuera del plano para las excitaciones de los modos elásticos.

La ecuación diferencial que se obtiene para los modos elásticos, ofrece una serie de soluciones del tipo $\langle q_e(\xi) \rangle = f(z \mp v_e t)$, encontrándose que el comportamiento de las desviaciones del espín fuera del plano, no se ve sustancialmente modificada por la forma que tome el pulso elástico.

Las formas de los solitones que se obtienen, son fuertemente dependiente de los parámetros del sistema.

Por otro lado, se encuentra que para valores muy pequeños del parámetro de magnetotricción λ , se reproduce el caso de la cadena no compresible.

Algunas Proyecciones del Tema

Es de interés inmediato, aprovechar el formalismo utilizado para realizar un estudio respecto al tema de correlaciones de los espines, cuyos antecedentes preliminares se entregan a continuación:

Función Correlación Dinámica de Espín.

La contribución de los solitones a las propiedades dinámicas ha sido estudiada experimentalmente utilizando diferentes técnicas: scattering inelástico de

neutrones^[1,2,3], resonancia magnética nuclear^[4], y efecto Mössbauer^[5], cuyos estudios tienen como propósito principal medir la transformada de Fourier de la función de correlación dinámica de espín $S^{\mu\mu}(q, w)$.

La dinámica de espín es un fenómeno esencialmente magnético unidimensional donde sólo existe el orden de corto alcance, los resultados experimentales con scattering de neutrones son fundamentales para el entendimiento de estos sistemas Steiner^[6]. Una de las herramientas experimentales más poderosas en el estudio de sistemas magnéticos unidimensionales es el scattering inelástico de neutrones ya que la sección transversal de los neutrones térmicos es proporcional en el espacio y tiempo con la transformada de Fourier de la función de correlación de pares de espín.

Generalmente, las propiedades dinámicas de un sistema de espines se discuten en términos del factor de estructura dinámico $S^{\mu\mu}(q, w)$, ($\mu = x, y, z$), el cual representa la transformada de Fourier espacial y temporal de la respectiva función de correlación de espines.

La idea es utilizar el mismo procedimiento de Osano^[27], quien, para el caso de una cadena lineal obtiene: $S^{\mu\nu}(q_z, w)$ luego haciendo uso del formalismo utilizado (Representación de Schwinger, Estados Coherentes) realizar los cálculos que sean de interés.

REFERENCIAS

- [1] J.P. Boucher y J.P. Renard, *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 486 (1980).
- [2] L.J. de Long, *J. Appl. Phys.*, **53**, 8018 (1982).
- [3] J.K. Kjems y M. Steiner, *Phys. Rev. Lett.*, **41**, 1137 (1978).
- [4] L.P. Regnault et al, *Physica*, **136B**, 329 (1986).
- [5] M. Steiner y H. Dachs, *Physica*, **137B**, 70 (1986).
- [6] M. Steiner, K. Kakurai y J.K. Kjems, *Z. Phys. B*, **53**, 117 (1983).
- [7] T. Holstein y H. Primakoff, *Phys. Rev.*, **58**, 1098 (1940)
- [8] J. Pozo, *Phys. Stat. Sol. b*, **153**, K163 (1989).
- [9] J. Schwinger: **On Angular Momentum**, U.S. Atomic Energy Comision Ppt. NYO-3071 (1952); reprinted in L. Biedenharn and H. Van Dams (eds): **Quantum Theory of Angular Momentum** (Academic, N.Y. 1965)
- [10] R. Balakrishnan y A.R. Bishop, *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 537 (1985).
- [11] R. Ferrer y J. Pozo, *Physica B*, **153**, 225 (1988).
- [12] R. Ferrer y J. Pozo, Coupled Excitation in The Compressible Easy-Plane Heisenberg Chain. Para ser Publicada (1990).
- [13] J. Tjon y J. Wright, *Phys. Rev. B*, **15**, 3470 (1977).
- [14] T. Schneider, *Phys. Rev. B*, **24**, 5327 (1981).
- [15] H.R. Jauslin y T. Schneider, *Phys. Rev. B*, **26**, 5153 (1982)
- [16] A.R. Bishop y T. Schneider (Ed.), **Soliton and Condensed Matter Physics**, Springer, Berlin (1978)

- [17] J. Bernasconi y T. Schneider (Ed.), **Physics in One Dimension**, Springer, Berlin (1981)
- [18] O.F. de Alcantara et al. *Phys. Lett.*, **94**, 239 (1983)
- [19] R. Ferrer, *Physica B*, **132**, 56 (1985)
- [20] E. Schrödinger, *Naturwiss*, **14** (1926);
 Debajyoti Bhaumik et al., *J. Phys. A*, **8**, 1868 (1975)
- [21] R.J. Glauber, *Phys. Rev.*, **131** (1963);
 J.M. Radcliffe, *J. Phys. A: Gen. Phys.*, **4**, 313 (1971)
- [22] L.G. De Acevedo y Colaboradores *J. Phys. C*, **15**, 7381 (1982)
- [23] G. Wysin, A.R. Bishop y P. Kumar *J. Phys. C*, **15**, L337 (1982)
- [24] H.J. Mikeska, *J. Phys. C*, **11**, L29 (1978).
- [25] H. Seitz y H. Benner, *Z. Phys. B* **66** 485 (1987)
- [26] R.K. Dodd, J.C. Gibbon y H.C. Morris **Solitons and Nonlinear Wave Equation**, Academic Press (1982)
- [27] K. Osano, *J. Phys. C* **17** L511 (1984)
- [28] K. Kakurai et al, *J. Mag. and Magnetic Mat.*, **54**, 835 (1986).
- [29] R. Maki, **Solitons in Low Temperature Physics**,
 Progress in Low temperature Physics, vol. VIII (1982)
- [30] H.J. Mikeska, *Phys. Rev. B*, **56**, 5213 (1982)
- [31] H.C. Fogedby et al, *Physica B*, **132**, 17 (1985).
- [32] P.S. Riseborough et al, *J. Phys. C*, **14**, 1109 (1981).
- [33] C. Etrich et al, *Z. Phys. B* **62** 97 (1985)
- [34] R. Ferrer, *J. Phys. Condensed Matter* **1**, 1481 (1989)
- [35] D.C. Mattis, **The Theory of Magnetism I**, Springer (1981)

- [36] E. Magyari y H. Thomas, *Phys. Rev. B* **29** 6358 (1984)
- [37] H. Mikeska y K. Osano, *Z. Phys. B* **52** 111 (1983)
- [38] J.P. Boucher et al., *Solid State Comm.*, **33**, 171 (1980)
- [39] D.I. Pushkarov and Kh.I. Pushkarov, *Phys. Lett.* **63A** ,339 (1977);
Phys. Stat. Sol. b **81**, 703 (1977).
- [40] Fizez, *J. Phys. C* **15** L641 (1982)
- [41] E. Magyari, *J. Phys. C* **15**, L1159 1982)
- [42] R. Ferrer, *Phys. Rev. B*, **40**, N°16 (1989)
- [43] G. Wysin et al., *J. Phys. C*, **19**, 221 (1986)
- [44] H. Mikeska et al. *Z. Phys. B* **77** 119 (1989)
- [45] G.L. Lamb, **Elements of Soliton Theory**,
John Wiley & Sons, Inc. (1980)

Capítulo 5

APENDICE

5.1 Ecuación de sine-Gordon

La ecuación de sine-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = m^2 \sin \phi \quad (5.1)$$

describe una variedad de fenómenos físicos y ofrece tres tipos de soluciones distintas: infinitas soluciones oscilatorias (en el espacio), finitas soluciones oscilatorias de amplitud fija llamadas "breathers" (modos oscilatorios simétricos) y soluciones de amplitud fija ("kink"), que corresponden a un cambio de 2π en ϕ , que se propagan en forma no distorsionadas y son llamados *solitones*. La gran amplitud "breathers" puede ser pensada como estados ligados de un solitón y antisolitón.

Luego bajo ciertas condiciones, la ecuación de movimiento para un sistema magnético puede tener la forma de la ecuación de sine-Gordon, y en este caso las infinitas soluciones oscilatorias son ondas de espín (magnones) y los solitones

corresponden entonces a paredes de dominios magnéticos.

En tres dimensiones, el solitón o pared de dominio tiene energías mayores que $K_B T$, sin embargo, en una dimensión las energías son comparables con $K_B T$ y el solitón llega a comportarse como una excitación elemental.

Un sistema ferromagnético planar como el $CsNiF_3$ en presencia de un campo magnético externo puede ser descrito por la ecuación de sine-Gordon. Según Mikeska un sistema como el anterior es equivalente a un sistema de sine-Gordon y se puede representar por el siguiente Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{n=1}^N \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1} + D \sum_{n=1}^N (S_n^z)^2 - h \sum_{n=1}^N S_n^x \quad (5.2)$$

Cuando el espín puede ser tratado como un vector clásico es posible escribir:

$$\vec{S}_n = S(\sin \theta_n \cos \phi_n, \sin \theta_n \sin \phi_n, \cos \theta_n) \quad (5.3)$$

En el límite de longitudes de ondas largas ($qa \ll \sqrt{2D/J}$) donde a es el espaciado de la red y para anisotropías extremas ($h \ll 2DS$), $\theta \sim \pi/2$, se puede relacionar la ecuación de movimiento para los grados de libertad del espín: ϕ_n, θ_n , dentro del límite continuo $\phi_n(t) \rightarrow \phi(z, t)$, $\theta_n(t) \rightarrow \theta(z, t)$, con una ecuación de sine-Gordon. En esta formulación $S\theta(z)$ es el momentum conjugado para la posición $\phi(z)$, con corchetes de Poisson $\{\theta(z), \phi(z')\} = aS^{-1}\delta(z - z')$. Luego en estas condiciones, la ecuación de movimiento en la forma de sine-Gordon proviene de la siguiente densidad Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right\} + m^2(1 - \cos \phi) \quad (5.4)$$

donde la energía se mide en unidades de JS^2 y el espaciado de la red se ha considerado igual a la unidad. De esta forma el sistema clásico de sine-Gordon representa un sistema Hamiltoniano completamente integrable con las soluciones mencionadas anteriormente, donde las soluciones tipo solitón están dadas por:

$$\cos \phi(z, t) = 1 - 2 \operatorname{sech}^2 m\gamma(z - ut - z_0) \quad (5.5)$$

con velocidad arbitraria $u < c$ y energía $E_{S-G} = 8m\gamma$ donde $m = (h/JS)^{1/2}$, $c = S(2DJ)^{1/2}$ y $\gamma^{-1} = (1 - u^2/c^2)^{1/2}$.

Finalmente vemos que la ecuación de sine-Gordon se puede obtener a partir de la densidad Hamiltoniana al utilizar las ecuaciones de Hamilton para las variables de espín correspondientes.

5.2 Forma Continua del Hamiltoniano

Cada término del Hamiltoniano que describe a una cadena magnética compresible y que está dado por:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{mag} + \mathcal{H}_{el} + \mathcal{H}_{int} \quad (5.6)$$

donde:

$$\mathcal{H}_{mag} = -J \sum_{n,\delta=\pm a}^N \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+\delta} + D \sum_{n=1}^N (S_n^z)^2 - h \sum_{n=1}^N S_n^x \quad (5.7)$$

$$\mathcal{H}_{el} = \sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{2m} + \frac{k}{2} \sum_{n,\delta=\pm a}^N (q_{n+\delta} - q_n)^2 \quad (5.8)$$

$$\mathcal{H}_{int} = -\lambda \sum_{n,\delta=\pm a}^N (q_{n+\delta} - q_n) \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+\delta} \quad (5.9)$$

puede ser escrito dentro del límite continuo al considerar:

$$\begin{aligned} \vec{S}_n(t) &\longrightarrow \vec{S}(z, t) \\ p_n(t) &\longrightarrow p(z, t) \\ q_n(t) &\longrightarrow q(z, t) \\ \sum_n^N &\longrightarrow \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde a representa el espaciado de la red, por otro, lado es importante tener presente lo siguiente:

$\sum_j^N(C) \longrightarrow \frac{1}{a} \mathcal{L}(C) \longrightarrow N(C)$ donde (C) es una constante y $\mathcal{L} = Na$ representa la longitud de la cadena.

Luego:

$$\begin{aligned} \vec{S}_n(t) \cdot \vec{S}_{n+\delta}(t) &= \frac{1}{2} [S^+(z, t)S^-(z + \delta, t) + S^-(z, t)S^+(z + \delta, t)] \\ &+ S^z(z, t)S^z(z + \delta, t) \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde los operadores de bajada de espín ($S^-(z, t)$) y los de subida ($S^+(z, t)$) están definidos por:

$$S^-(z, t) = S^x(z, t) - i S^y(z, t) \quad y \quad S^+(z, t) = S^x(z, t) + i S^y(z, t) \quad (5.12)$$

Tomando el límite continuo, es decir para valores de δ muy pequeños se puede escribir:

$$S^+(z \pm \delta) = S^+(z) \pm S^{+'}(z) \delta + \frac{1}{2} S^{+''}(z) \delta^2 \quad (5.13)$$

y una ecuación análoga para $S^-(z \pm \delta)$, donde por simplicidad se considera $S^+(z, t) = S^+(z)$.

Finalmente siguiendo el mismo procedimiento anterior con las expresiones que contienen al operador $q(z, t)$, luego sumando sobre δ y teniendo presente que los términos lineales (en δ) no aportan, el Hamiltoniano (1) escrito en el límite continuo toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{mag} = & -\frac{J}{2} \int dz \left(\frac{1}{2} (S^+(z) S^{-''}(z) + S^-(z) S^{+''}(z)) + S^z(z) S^{z''}(z) \right) \\ & - D \int dz (S^z(z))^2 - h \int dz S^x(z) - \frac{1}{2} N J S^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\mathcal{H}_{el} = \frac{1}{2m} \int dz (p(z))^2 + k \int dz (q'(z))^2 \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} = & -2\lambda \int dz q'(z) \left[\frac{1}{2} (S^+(z) S^{-'}(z) + S^-(z) S^{+'}(z)) + S^z(z) S^{z'}(z) \right] \\ & - \lambda S^2 \int dz q''(z) \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.3 Ecuación Diferencial Angular

Las ecuaciones de movimiento para $\alpha(z, t)$ y $\beta(z, t)$ correspondientes a una cadena magnética no compresible, están dadas por las relaciones (2.10) y (2.11) del capítulo 2 y tienen la forma:

$$\begin{aligned}
 i \dot{\alpha} &= J \left(-\frac{3}{8} \alpha'' - \frac{1}{4} |\alpha|^2 \alpha'' - \alpha' \beta'^* \beta - \frac{1}{4} \alpha \beta''^* \beta - \frac{1}{2} |\beta|^2 \alpha'' \right) \\
 &+ J \left(\frac{1}{2} \alpha |\beta'|^2 + \frac{1}{4} \alpha \beta^* \beta'' - \frac{1}{4} \alpha''^* \alpha^2 - \frac{1}{2} |\alpha'|^2 \alpha \right) \\
 &+ \frac{1}{2} D (|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{1}{2}) \alpha - \frac{1}{2} h \beta
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
 i \dot{\beta} &= J \left(-\frac{3}{8} \beta'' - \frac{1}{4} |\beta|^2 \beta'' - \beta' \alpha'^* \alpha - \frac{1}{4} \beta \alpha''^* \alpha - \frac{1}{2} |\alpha|^2 \beta'' \right) \\
 &+ J \left(\frac{1}{2} \beta |\alpha'|^2 + \frac{1}{4} \beta \alpha^* \alpha'' - \frac{1}{4} \beta''^* \beta^2 - \frac{1}{2} |\beta'|^2 \beta \right) \\
 &+ \frac{1}{2} D (|\beta|^2 - |\alpha|^2 + \frac{1}{2}) \beta - \frac{1}{2} h \alpha
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Si en las ecuaciones anteriores en vez de utilizar la expansión al primer orden en $\rho(z, t)$ de $\alpha(z, t)$ y $\beta(z, t)$ (que equivale a tomar en cuenta sólo pequeñas desviaciones del espín fuera del plano de fácil magnetización), se usan sus formas exactas

$$\alpha(z, t) = \sqrt{1 + \rho(z, t)} \exp(i\theta_\alpha(z, t)) \tag{5.19}$$

$$\beta(z, t) = \sqrt{1 - \rho(z, t)} \exp(i\theta_\beta(z, t)) \tag{5.20}$$

En estas condiciones, las partes imaginarias de estas ecuaciones después de reemplazar las derivadas correspondientes, se pueden expresar respectivamente de la

siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (S + \rho)^{-1/2} \dot{\rho} &= -\frac{3}{4}J(S + \rho)^{-1/2} \rho' \theta'_\alpha - 2J(S + \rho)^{-1/2}(\theta'_\beta - \theta'_\alpha)\rho \rho' \\
 &- \frac{3}{4}J(S + \rho)^{1/2}\theta''_\alpha + J(S + \rho)^{1/2}(S - \rho)(\theta''_\beta - \theta''_\alpha) \\
 &- h(S - \rho)^{1/2} \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha)
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
 -(S + \rho)^{-1/2} \dot{\rho} &= \frac{3}{4}J(S - \rho)^{-1/2} \rho' \theta'_\beta + 2J(S - \rho)^{-1/2}(\theta'_\beta - \theta'_\alpha)\rho \rho' \\
 &- \frac{3}{4}J(S - \rho)^{1/2}\theta''_\beta - J(S - \rho)^{1/2}(S + \rho)(\theta''_\beta - \theta''_\alpha) \\
 &+ h(S + \rho)^{1/2} \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha)
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

donde: $\rho = \rho(z, t)$, $\alpha = \alpha(z, t)$ y $\beta = \beta(z, t)$ Finalmente dividiendo la primera de estas ecuaciones por $(S + \rho)^{-1/2}$, la segunda por $(S - \rho)^{-1/2}$ y luego sumandolas se encuentra una ecuación diferencial angular exacta, válida para cualquier orden en ρ que tiene la forma:

$$S(\theta''_\alpha + \theta''_\beta) = \rho'(\theta'_\beta - \theta'_\alpha) + \rho(\theta''_\beta - \theta''_\alpha) \tag{5.23}$$

5.4 Transformaciones de Schwinger

Para el caso del oscilador armónico lineal, los operadores a y a^\dagger definidos anteriormente cumplen: $[a, a^\dagger] = 1$, $\hat{N} = a^\dagger a$; con autovalores $0, 1, 2, 3, \dots$ = número de quantum excitados.

Los autoestados se escriben como:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (5.24)$$

donde $|0\rangle$ es el estado fundamental del oscilador

Consideremos dos osciladores armónicos independientes con operadores: $a; a^\dagger$ y $b; b^\dagger$ respectivamente, cumpliéndose:

$$[a, a^\dagger] = 1 ; [b, b^\dagger] = 1 ; [a, b^\dagger] = [b, a^\dagger] = 0 \quad (5.25)$$

Con autoestados

$$|n_a, n_b\rangle = \frac{(a^\dagger)^{n_a} (b^\dagger)^{n_b}}{\sqrt{n_a!} \sqrt{n_b!}} |0, 0\rangle \quad (5.26)$$

donde:

$$\hat{N}_a |n_a, n_b\rangle = n_a |n_a, n_b\rangle ; \hat{N}_b |n_a, n_b\rangle = n_b |n_a, n_b\rangle \quad (5.27)$$

Con el propósito de establecer una conexión con los operadores de momentum angular, se define:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2}(a^\dagger b + b^\dagger a) \\ J_y &= \frac{1}{2i}(a^\dagger b - b^\dagger a) \\ J_z &= \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b) \end{aligned} \quad (5.28)$$

con esto se encuentra que:

$$[J_x, J_y] = \frac{i}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b) = iJ_z \quad (5.29)$$

También, si utilizamos la notación: $\vec{A}^\dagger = (a^\dagger, b^\dagger)$ y $\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ con $\hat{\sigma}_z$ representando a una de las matrices de Pauli, entonces se puede escribir:

$$J_z = \frac{1}{2} \vec{A}^\dagger \hat{\sigma}_z \vec{A} = \frac{1}{2} (a^\dagger a - b^\dagger b) \quad (5.30)$$

y similarmente para las otras componentes, obteniéndose el siguiente resultado compacto.

$$\vec{J} = \frac{1}{2} \vec{A}^\dagger \cdot \hat{\sigma} \cdot \vec{A} \quad (5.31)$$

Notamos que para el caso $\hat{\sigma} = 1$ se tiene

$$S = \frac{1}{2} \vec{A}^\dagger \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} (a^\dagger a + b^\dagger b) \quad (5.32)$$

ecuación que se conoce con el nombre de condición dinámica de la representación.

En estas condiciones, un cálculo directo conduce a que las componentes del operador momentum angular cumplen con la siguiente relación:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k \quad i, j, k = x, y, z \quad (5.33)$$

Por otro lado, a partir de la ecuación (1.5) se encuentra

$$\begin{aligned} J^+ &= J_x + iJ_y = a^\dagger b \\ J^- &= J_x - iJ_y = b^\dagger a \end{aligned} \quad (5.34)$$

Entonces podemos usar nuestro conocimiento del oscilador armónico, para trabajar con el momentum angular

$$\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \frac{\hat{N}_a + \hat{N}_b}{2} \left(\frac{\hat{N}_a + \hat{N}_b}{2} + 1 \right) \equiv \frac{\hat{N}}{2} \left(\frac{\hat{N}}{2} + 1 \right) \quad (5.35)$$

$\hat{N} = \hat{N}_a + \hat{N}_b$ operador para el número total de quantum

$$\vec{J}^2 |n_a, n_b\rangle = j(j+1) |n_a, n_b\rangle \quad (5.36)$$

con

$$j = \frac{n}{2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (5.37)$$

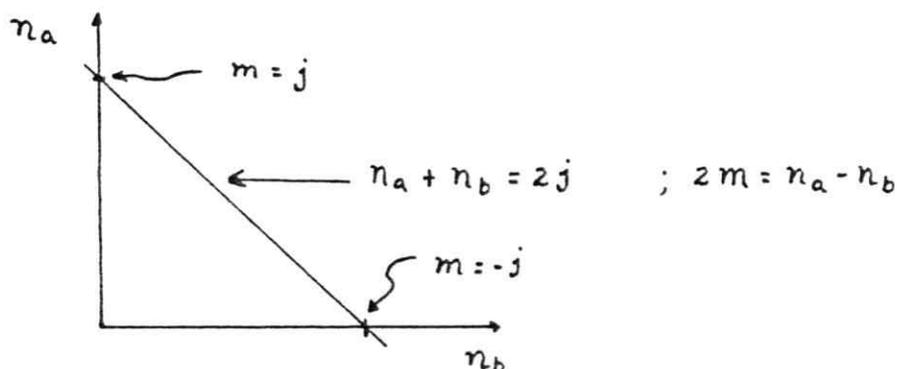
$$J_z |n_a, n_b\rangle = \frac{1}{2}(n_a - n_b) |n_a, n_b\rangle \quad (5.38)$$

$$J^2 |n_a, n_b\rangle = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) |n_a, n_b\rangle \quad (5.39)$$

donde $n = n_a + n_b$ y $|n_a, n_b\rangle$ es autoestado de J^2 y J_z con autovalores j y m dados por:

$$j = \frac{n}{2} = \frac{n_a + n_b}{2} ; \quad m = \frac{n_a - n_b}{2} \quad (5.40)$$

Si fijamos n entonces hay $n_a + n_b + 1 = 2j + 1$ valores posibles de m



entonces

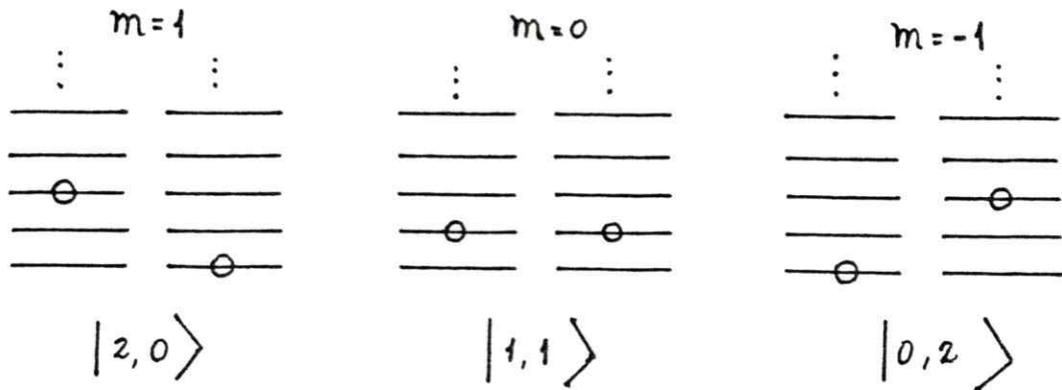
$$-j \leq m \leq j ; \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j \quad (5.41)$$

Interpretación:

n_a número de $+\frac{1}{2}$ unidades de momentum angular (en la dirección z)

n_b número de $-\frac{1}{2}$ unidades de momentum angular (en la dirección z)

Ilustración (espín = 1) con $n_a + n_b = 2 \cdot 1 = 2$



En una nueva notación se tiene:

$$\{|2, 0\rangle \rightarrow |j = 1, m = 1\rangle ; |1, 1\rangle \rightarrow |j = 1, m = 0\rangle$$

$$|0, 2\rangle \rightarrow |j = 1, m = -1\rangle\} \rightarrow |j, m\rangle$$

$$J^+ = J_x + iJ_y = a^\dagger b \quad ; \quad J^- = J_x - iJ_y = b^\dagger a \quad (5.42)$$

J^+ aumenta a m en uno dejando a j fija, J^- disminuye a m en uno dejando a j fija



En la nueva notación

$$|j, m\rangle = \frac{(a^\dagger)^{m+j}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{(b^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0\rangle \quad (5.43)$$

$\{|j, m\rangle\}$ están normalizados a uno

Ilustración de como se trabaja dentro de este contexto

$$\begin{aligned} J^+ |j, m\rangle &= a^\dagger b |j, m\rangle = a^\dagger b \frac{(a^\dagger)^{m+j}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{(b^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0\rangle \\ &= \frac{(a^\dagger)^{m+j+1}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{b(b^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0\rangle \end{aligned} \quad (5.44)$$

pero:

$$[b, (b^\dagger)^{j-m}] = (j-m)(b^\dagger)^{j-m-1} \quad ; b|0\rangle = 0 \quad (5.45)$$

entonces:

$$\begin{aligned} J^+ |j, m\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{(a^\dagger)^{m+j+1}}{\sqrt{(j+m+1)!}} \frac{(b^\dagger)^{j-m-1}}{\sqrt{(j-m-1)!}} |0\rangle \\ &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \end{aligned} \quad (5.46)$$

conserva m pero sube o baja j

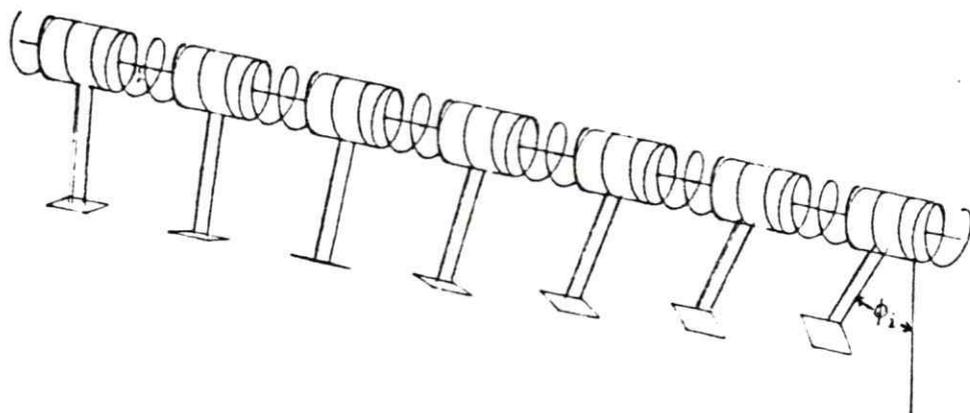
También se puede construir un conjunto de operadores via $a^\dagger, a, b^\dagger, b$: por ejemplo **Operadores Hiperbólicos**

$$K^+ = a^\dagger b^\dagger \quad K^- = ab \quad K^z = \frac{1}{2}(a^\dagger a + b^\dagger b + 1) \quad (5.47)$$

$$[K^z, K^+] = K^+ \quad [K^z, K^-] = -K^- \quad [K^+, K^-] = -2K^z \quad (5.48)$$

$$(J^z)^2 - \frac{1}{4} = K^z(K^z + 1) - K^- K^+ \quad \text{etc.} \quad (5.49)$$

5.5 El Péndulo Mecánico



La figura muestra N péndulos acoplados por torques de resortes que responden en proporción al aumento de rotación que ellos reciben, definamos $\Gamma = \kappa\theta$ torque restaurador con κ constante de torque, $\omega_i = \dot{\phi}_i$, J momento de inercia

Ecuaciones de movimiento de Newton:

$$J\dot{\omega}_i = \Gamma_{i\kappa} + \Gamma_{ig} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (5.50)$$

Γ_{ig} torque debido a la gravedad g y $\Gamma_{i\kappa}$ torque debido a κ , luego

$$\begin{aligned} \Gamma_{ig} &= -mdg \sin \phi_i \\ \Gamma_{i\kappa} &= \kappa(\phi_{i-1} - \phi_i) + \kappa(\phi_{i+1} - \phi_i) = \kappa(\dot{\phi}_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Entonces

$$J\ddot{\phi}_i = \kappa(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) - \kappa_G \sin \phi_i \quad ; \kappa_G = mgd \quad (5.52)$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p, \phi) &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2J} p_i^2 + \kappa_G (1 - \cos \phi_i) + \frac{1}{2} \kappa (\phi_i - \phi_{i-1})^2 \right) \\ \dot{\phi}_i &= \partial \mathcal{H} / \partial p_i \quad ; \quad \dot{p}_i = -\partial \mathcal{H} / \partial \phi_i \end{aligned} \quad (5.53)$$

ecuaciones que permiten obtener la relación anterior.

Las soluciones solitónicas corresponden a los modos normales no lineales de este sistema dinámico discreto.

En forma distinta a un péndulo simple, para el cual el ángulo permanece pequeño, en la cadena anterior éste puede realizar revoluciones completas.

Existen dos configuraciones de equilibrio correspondiente a $\phi = 0 \pmod{2\pi}$ y $\phi = \pi \pmod{2\pi}$. La primera es estable y la segunda es inestable.

Modelo Continuo

$$\begin{aligned}\phi_{i+1} &\longrightarrow \phi(x+h) = \phi(x) + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x}h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}h^2 + \dots \\ \phi_{i-1} &\longrightarrow \phi(x-h) = \phi(x) - \frac{\partial\phi(x)}{\partial x}h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}h^2 + \dots\end{aligned}\quad (5.54)$$

Entonces

$$J\phi_{tt} = K\phi_{xx} - K_G \sin\phi \quad K = h^2\kappa \quad (5.55)$$

Si tomamos: $T \equiv \sqrt{K_g/Jt}$ y $X \equiv \sqrt{K_g/Kx}$ se encuentra:

$$\phi_{TT} - \phi_{XX} + \sin\phi = 0 \quad (5.56)$$

que corresponde a la ecuación de sine-Gordon, con condiciones de borde (alternativas)

i) $\phi(t, 0) = \phi(t, L) = 0 \pmod{2\pi}$, más comun para la banda finita

ii) $\phi_x(t, 0) = \phi_x(t, L) = 0$

Condiciones de borde para la banda infinita

i) $\phi(t, -\infty) = \phi(t, +\infty) = 0 \pmod{2\pi}$

Busquemos soluciones de la forma:

$$\phi^t(x) = 4 \tan^{-1}(f(x) \cdot g(t))$$

$$\begin{aligned}\phi_{tt}^t(x) &= \frac{4g''f(1+f^2g^2) - 8f^3gg'^2}{(1+f^2g^2)^2} \\ \phi_{xx}^t(x) &= \frac{4f''g(1+f^2g^2) - 8g^3ff'^2}{(1+f^2g^2)^2}\end{aligned}\tag{5.57}$$

usando: $\sin(4x) = 8 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin x$ y $\sin(\tan^{-1}u) = u/\sqrt{1+u^2}$;
 $\cos(\tan^{-1}u) = 1/\sqrt{1+u^2}$ se encuentra:

$$\sin \phi^t(x) = \frac{8fg - 4f^2g^2 - 4}{(1+f^2g^2)^2}\tag{5.58}$$

entonces utilizando la ecuación de sine-Gordon se tiene que la función f y g satisfacen:

$$(f''g - fg'')(1+f^2g^2) + 2(g'^2f^3g - f'^2g^3f) = fg(1-f^2g^2)\tag{5.59}$$

busquemos una solución para la cual:

$$\begin{aligned}(f')^2 &= Af^4 + Bf^2 + C \\ (g')^2 &= Dg^4 + Eg^2 + F\end{aligned}\tag{5.60}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned}f'' &= 2Af^3 + Bf \\ g'' &= 2Dg^3 + Eg\end{aligned}\tag{5.61}$$

la sustitución de (5.61) y (5.60) en (5.59) conduce a:

$$2f^2(A+F) - 2g^2(C+D) + (B-(E+1))(1-f^2g^2) = 0\tag{5.62}$$

Soluciones aceptables para f y g se obtienen si tomamos:

$$\begin{aligned}A &= -F = \alpha \\ B &= E+1 = \beta \\ C &= D = \gamma\end{aligned}\tag{5.63}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned}(f')^2 &= \alpha f^4 + \beta f^2 + \gamma \\(g')^2 &= -\gamma g^4 + (\beta - 1)g^2 - \alpha\end{aligned}\tag{5.64}$$

Antes de determinar explícitamente la solución de la ecuación anterior, debemos decidir respecto de las condiciones de borde que deseamos imponer

Tomemos sin pérdida de generalidad:

$$\phi_x(t, 0) = \phi_x(t, L) = 0$$

pero

$$\phi_x(t, x) = 4g f'(x)/(1 + f^2 g^2)$$

entonces las condiciones son:

$$f'(0) = 0 = f'(L)\tag{5.65}$$

Definición: la función elíptica de Jacobi $sn(x, \lambda)$, es la solución de la ecuación:

$$(f')^2 = (\lambda^2 f^4 - (\lambda^2 + 1)f^2 + 1) = (1 - \lambda^2)(1 - \lambda^2 f^2)\tag{5.66}$$

con condiciones de borde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$; $0 < \lambda < 1$ en módulo

Asociaciones con: $sn(x, \lambda)$, $cn(x, \lambda)$ y $dn(x, \lambda)$

$$cn^2(x, \lambda) = 1 - sn^2(x, \lambda)$$

$$dn^2(x, \lambda) = 1 - \lambda^2 sn^2(x, \lambda)$$

Para la función $cn(x, \lambda)$ se puede mostrar fácilmente que satisface la ecuación:

$$(f')^2 = (1 - \lambda^2) + (2\lambda^2 - 1)f^2 - \lambda^2 f^4\tag{5.67}$$

con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$

En vista de las condiciones de borde (5.65), podemos tomar la función elíptica $cn(x, \lambda)$ como una de las relevantes:

Entonces:

$$f = A \operatorname{cn}(\kappa x, \lambda_f) \quad g = \operatorname{cn}(\Omega t, \lambda_g)$$

$$f' = A \kappa \operatorname{cn}' \quad g' = \Omega \operatorname{cn}'$$

$$A^2 \kappa^2 \operatorname{cn}'^2 = \alpha A^4 \operatorname{cn}^4 + \beta A^2 \operatorname{cn}^2 - \gamma$$

$$\operatorname{cn}'^2 = \alpha A^2 \kappa^{-2} \operatorname{cn}^4 + \beta \kappa^{-2} \operatorname{cn}^2 - \gamma A^{-2} \kappa^{-2}$$

$$\operatorname{cn}'^2 = -\lambda_f \operatorname{cn}^4 + (2\lambda_f^2 - 1) \operatorname{cn}^2 + (1 - \lambda_f^2)$$

$$\alpha = -\kappa^2 A^{-2} \lambda_f^2, \quad \beta = \kappa^2 (2\lambda_f^2 - 1), \quad \gamma = -\kappa^2 A^2 (1 - \lambda_f^2)$$

$$\Omega^2 \operatorname{cn}'^2 = -\gamma \operatorname{cn}^4 + (\beta - 1) \operatorname{cn}^2 - \alpha$$

$$\operatorname{cn}'^2 = -\gamma \Omega^{-2} \operatorname{cn}^4 + (\beta - 1) \Omega^{-2} \operatorname{cn}^2 - \alpha \Omega^{-2}$$

$$\operatorname{cn}'^2 = -\lambda_g \operatorname{cn}^4 + (2\lambda_g - 1) \operatorname{cn}^2 + (1 - \lambda_g^2)$$

$$\gamma = \Omega^2 \lambda_g^2; \quad \beta = \Omega^2 (2\lambda_g^2 - 1) + 1; \quad \alpha = -\Omega^2 (1 - \lambda_g^2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} 1 + \Omega^2 (2\lambda_g^2 - 1) &= \kappa^2 (2\lambda_f^2 - 1) \\ \Omega^2 (1 - \lambda_g^2) &= \kappa^2 A^{-2} \lambda_f^2 \\ -A^2 \kappa^2 (1 - \lambda_f^2) &= \Omega^2 \lambda_g^2 \end{aligned} \tag{5.68}$$

la ecuación anterior implica:

$$\begin{aligned} \lambda_f^2 &= \frac{\kappa^2 (A^2 - 1) - 1}{\kappa^2 (A^2 - A^{-2} - 2)} \\ \lambda_g^2 &= \frac{A^2 (\Omega^2 + A^2 \Omega^2 - 1)}{\Omega^2 (A^4 + 2A^2 - 1)} \end{aligned} \tag{5.69}$$

La función $cn(x, \lambda)$ es periódica con período $4\kappa(\lambda)$ donde $\kappa(\lambda)$ está dada por:

$$\kappa(\lambda) = \int_0^1 dy (1 - y^2)^{-1/2} (1 - \lambda^2 y^2)^{-1/2} \tag{5.70}$$

Entonces $cn'(x, \lambda)$ es también periódica y tiene ceros en los puntos $2n\kappa(\lambda)$
 $\forall n \in Z$

Las condiciones de borde para f requieren entonces que el número de onda κ tome solamente los valores:

$$\kappa_n = 2nL^{-1}\kappa(\lambda_f)$$

La solución final tiene la forma:

$$\phi_n = 4\tan^{-1}(A \operatorname{cn}(2n\kappa(\lambda_f)L^{-1}x, \lambda_f) \operatorname{cn}(\Omega_n t, \lambda_g)) \quad (5.71)$$

$$\text{con } \Omega_n^2 = 4\kappa(\lambda_f)L^{-2}n^2 + (1 - A^2)(1 + A^2)^{-1}$$