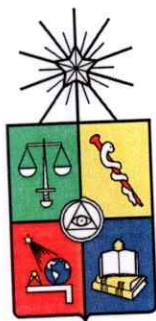


UCH-FC
DOC-F
N 322
C. 1



Fluctuaciones Electromagnéticas en Plasmas Tipo Viento Solar

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Física
Facultad de Ciencias

por

Roberto Elías Navarro Maldonado

Octubre, 2014

Directores de Tesis: **Dr. Juan Alejandro Valdivia**
Dr. Víctor Muñoz Gálvez

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato


Roberto Elías Navarro Maldonado

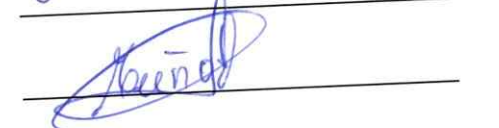
ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 29 de Octubre de 2014.

Directores de Tesis

Dr. Juan Alejandro Valdivia

Dr. Víctor Muñoz



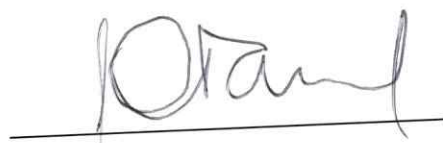


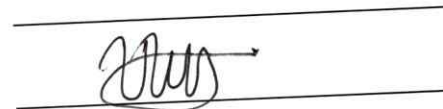
Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Jaime Araneda

Dr. Adolfo Figueroa-Viñas

Dr. Mario Riquelme







BIOGRAFÍA



Soy el menor de dos hermanos que pasaron su infancia en un campo al sur de Chile. Incluso antes del 15 de abril de 1988, mi nacimiento, vivíamos en el sector rural de Misquihué, en la comuna de Maullín, región de los Lagos. Con mi hermano Daniel pasamos gran parte de nuestra enseñanza básica ahí; obvio, si nuestros padres, Lucio Navarro y Adriana Maldonado enseñaban y dirigían la escuela local.

En sexto básico decidí adoptar un perro, al cual llamé Lana. Un tiempo después, nos cambiamos definitivamente a Pupalguín, un sector también rural de la misma comuna. Por entonces, decidí —aunque mis padres ya lo habían discutido— irme a estudiar lejos. Logré entrar al Liceo de Hombres de Puerto Montt, “súper lejos”, donde cursé entre séptimo y cuarto medio. En ese período viví en pensión y regresaba a mi casa por los fines de semana.

A los dieciséis años conocí a quienes considero parte de mis mejores amistades: la Nani, Ángela, Gonzalo, y a Carolina, la mejor de todas. También, decidí estudiar Licenciatura en Física en la Universidad de Chile, donde conocí otro grupo de grandes amistades: el Guzmán, Alejo, las Macas, Mery, Gaby. Gonzalo me acogió en su casa mientras me acostumbraba a la gran ciudad. Y aún no me acostumbro. Casi al final de mi carrera, mi hermano y Maritza me regalan una sobrina, Gabriela.

Al terminar mi Licenciatura, me aventuré en seguir un doctorado en Física. Gracias a eso llegué a NASA. Al regreso, un tío me recordó que mi sueño de niño era llegar ahí algún día. Wow. Finalmente, a mediados de 2014 parece que estoy terminando mi querida y odiada tesis. Y ahora me espera un pasaje a Concepción. ¿Después? La vida verá...

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a todos quienes tuvieron algo que ver con que esta tesis llegara a buen término.

Quiero agradecer de corazón a mi tutor Dr. Valdivia por confiar en mis facultades, por dejarme ser y por apoyarme desde mis inicios en el doctorado; y a mi co-tutor Dr. Víctor Muñoz, quien influyó con sus lecciones y experiencias, con consejos y rabetas, para formarme como científico y persona, por confiar en mí y soportarme especialmente al término de mi tesis.

A mis padres Lucio y Adriana, con todo mi cariño y mi amor para las personas que hicieron todo en la vida para que pudiera avanzar en mis sueños, por motivarme y apoyarme aun cuando se encontraban lejos; a ustedes por siempre mi corazón y mi agradecimiento. A mi hermano Daniel y a Maritza, por apoyarme y creer siempre en mí. A mi sobrina Gabriela, sólo por ser como eres, esta tesis es para ti. A Carolina, por tu paciencia y comprensión, especialmente tu paciencia, ya que preferiste sacrificar tu tiempo para que yo pudiera cumplir con el mío. Por creer siempre en mí. Gracias por estar siempre a mi lado.

Quiero agradecer especialmente al Dr. Adolfo Figueroa-Viñas por recibirme durante mi pasantía en NASA, y al Dr. Jaime Araneda, a ambos por enseñarme tantas cosas esenciales para el desarrollo de esta tesis.

A mi amiga de "casi" toda la vida, Daniela Castro, por no olvidarse jamás de mi existencia y haber estado en cada momento, en las buenas y en las malas. A mis amigos en la Universidad, María José, Varinia, Macarena Domínguez y Macarena Muñoz, por apoyarme tantas veces en mis momentos de debilidad; a Diego Guzmán, a quien considero casi mi hermano. Quiero agradecer también a mis compañeros de oficina: Felipe, Rodrigo, Rafael, Natalia, Valentina, Francisco, Pablo, Max. Y a la

secretaria de Física, Vicky, quien me tuvo que soportar tantas veces.

No puedo dejar de agradecer a mis profesoras del Liceo de Hombres de Puerto Montt, Lucía Herrera y Sonia Paredes por enseñarme ese amor por las ciencias y lo abstracto, a quienes debo gran parte de lo que he logrado hasta ahora.

Finalmente, a mis perros amados, el Lana (te envió un ladrido en vida), el Lucky y el enano del Nico, por alegrarme la vida y correr detrás de mí apenas me veían. Y Alfombra, mi gata rescatada que también me persigue a donde voy.

Mi permanencia en el plan de doctorado fue posible gracias a una Beca de Doctorado CONICYT número 21100691, y mi estadía en NASA gracias a una beca de pasantía de Becas Chile número 75130083.

Índice

Resumen	IX
Abstract	x
1. Introducción	1
1.1. Un poco de historia: El Sol y el viento solar	1
1.2. El viento solar	6
1.3. Motivación, alcance y resumen de esta investigación	10
2. Propagación de ondas electromagnéticas en plasmas magnetizados	16
2.1. Relación de dispersión	19
2.1.1. Condiciones de equilibrio	20
2.1.2. Perturbación lineal	21
2.2. Fluctuaciones electromagnéticas	26
2.3. Plasmas tipo viento solar	32
2.3.1. Función de distribución de velocidades	32
2.3.2. Susceptibilidad	35
3. Fluctuaciones electromagnéticas en plasmas de protones y electrones	39

3.1. Propagación paralela	40
3.1.1. Solución numérica	42
3.1.2. Modos electromagnéticos transversales	45
3.1.3. Fluctuaciones electromagnéticas transversales	54
3.1.4. Modos electromagnéticos longitudinales	60
3.1.5. Fluctuaciones de densidad	63
3.2. Propagación oblicua	64
4. Análisis de estabilidad para plasmas con anisotropía térmica	67
4.1. Tasas de crecimiento de ondas electromagnéticas	68
4.2. Umbrales de inestabilidad	73
4.3. Energía de las fluctuaciones magnéticas	75
5. Fluctuaciones electromagnéticas en plasmas supratérmicos	78
5.1. Relación de dispersión	79
6. Fluctuaciones electromagnéticas en plasmas con haces de partículas	85
6.1. Haces de partículas alfa	86
6.2. Haces de protones	93
7. Resumen y conclusiones	94
A. Funciones de Bessel	100
A.1. Definición	100
A.2. Relaciones de recurrencia	102
A.3. Reglas de adición de producto de funciones de Bessel	103
A.4. Integrales que involucran funciones de Bessel	104

B. Función de dispersión de plasmas modificada	106
B.1. Relación de recurrencia	107
B.2. Ecuación diferencial para Z_κ	108
B.3. Expresión analítica para Z_κ	109
B.4. Expresiones asintóticas	111
C. Casos especiales de propagación de ondas	112
C.1. Propagación paralela: $k_\perp = 0$	113
C.2. Propagación perpendicular: $k_\parallel = 0$	115
C.3. Plasmas bi-Maxwellianos: $ \kappa \gg 1$	116
C.4. Plasmas fríos: $T \rightarrow 0$	116
D. Lista de notaciones	118

Resumen

Observaciones remotas e *in situ* en el viento solar muestran que las distribuciones de velocidad de partículas suelen presentar características de sistemas fuera del equilibrio termodinámico, lo cual representa una fuente de energía libre para la excitación de inestabilidades cinéticas y fluctuaciones en plasmas. Existe evidencia de que estas inestabilidades están activas en el viento solar, ya que parecen acotar la anisotropía térmica de las partículas que lo componen, en particular, de electrones, protones y partículas alfa. Las fluctuaciones electromagnéticas no sólo emergen debido a la presencia de inestabilidades, sino que también podrían estar relacionadas con fluctuaciones espontáneas debido al movimiento térmico aleatorio de las partículas en el plasma. En esta investigación, derivamos expresiones generales para las fluctuaciones espontáneas en plasmas de múltiples especies de partículas, usando como base el teorema de fluctuación-disipación, pero en función de distribuciones de velocidad arbitrarias para cada especie de partícula. En particular, hemos aplicado esta teoría a plasmas magnetizados tipo viento solar. Los resultados indican un comportamiento cualitativamente similar a observaciones reportadas para el viento solar a 1 AU.

Abstract

Remote sensing and *in situ* observations in the solar wind show that the particle velocity distributions usually present characteristics of systems out of thermal equilibrium. This represents a source of free energy for the excitation of kinetic instabilities and fluctuations in plasmas. There exists evidence that these instabilities are active in the solar wind since they seem to limit the temperature anisotropy of the solar wind particles, particularly electrons, protons, and alpha particles. The electromagnetic fluctuations emerge not only due to the presence of instabilities, but they may also be related to spontaneous fluctuations due to the thermal random motion of the plasma particles. In this study, we have derived general formulas for the spontaneous fluctuations in multi-species plasmas, through the use of the fluctuation-dissipation theorem. This formalism is written in terms of arbitrary distribution functions for each species. In particular, we have applied this theory to magnetized solar wind-like plasmas. Our results show a behavior which is qualitatively similar to the reported observations in the solar wind at 1 AU.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Un poco de historia: El Sol y el viento solar

El Sol es una de las más de 400 mil millones de estrellas que orbitan alrededor del centro de la Vía Láctea y la única estrella que sustenta de vida al planeta Tierra. Cada estrella en el Universo posee diferentes tamaños y colores; en particular, el Sol es una estrella enana amarilla cuya masa y diámetro son de unos 330 mil y 109 veces el de la Tierra, respectivamente, lo cual corresponde a más del 99 % de la masa total del Sistema Solar. La distancia que nos separa del Sol es de unos 1.5×10^{11} m, equivalente a 8 minutos-luz o a *una unidad astronómica* (1 AU).

La presión y temperatura en el *núcleo* del Sol son tan grandes (2.477×10^{11} bar y 1.5×10^7 K, respectivamente), que ocurren reacciones de fusión donde cuatro núcleos de hidrógeno se unen para formar un núcleo de helio, mientras que un 0.7% de la masa es convertida en radiación. Como resultado, millones de toneladas de helio son generados cada segundo, proceso que ha ocurrido por más de 4500 millones de años. Debido a estas extremas condiciones, los electrones se separan de sus átomos formando un gas ionizado o *plasma* que es expulsado en dirección a la superficie solar y hacia afuera de ella.

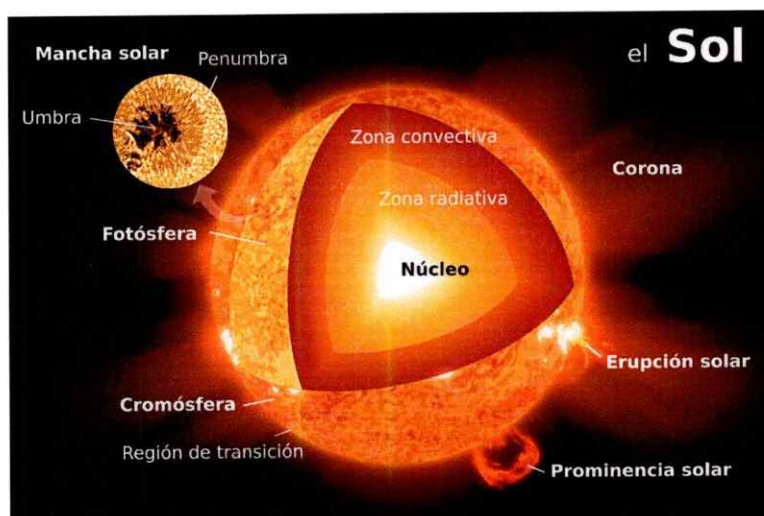


Figura 1.1: Estructura del Sol. El núcleo está rodeado de una *zona radiativa*, donde se transfiere energía mediante radiación; y una *zona convectiva*, la cual rota con un período de 25 días cerca del ecuador y 37 días cerca de los polos.

La atmósfera solar consiste en tres capas: la *fotosfera*, la cual emite gran parte de la luz visible y que tiene unos 500 km de ancho, 10^{23} m^{-3} de densidad y 6000 K de temperatura; la *cromosfera*, una capa semitransparente de 10^{17} m^{-3} de densidad; y la *corona solar*, con una densidad de 10^7 m^{-3} y temperatura del orden de 10^6 K , extendiéndose incluso más allá de la órbita terrestre. La corona puede ser observada a simple vista durante un eclipse solar. En la figura 1.1 mostramos un diagrama de las capas interiores y exteriores del Sol.

La cercanía del Sol respecto a la Tierra y su tamaño nos brindan una oportunidad única para estudiar sus propiedades y aprender sobre estrellas similares a él, pero que se encuentran muy lejos para ser observadas de forma directa. Los primeros registros de observaciones del Sol datan del año 800 A. C., donde astrónomos chinos descubrieron, a simple vista cuando el Sol se acercaba al horizonte o a nubes delgadas, que el Sol presentaba manchas oscuras. En 1607 D. C., Johannes Kepler proyecta una

imagen del Sol a través de un pequeño agujero en el techo de su casa (una cámara oscura) y observó un punto negro que él interpreta como el planeta Mercurio. Sin embargo, esa mancha en el Sol perduró por varios días, tiempo que es mucho más largo que el que le tomaría a Mercurio cruzar el disco solar.

Galileo Galilei y Thomas Harriot serían los primeros en observar con detalle, gracias a la invención del telescopio en 1609, estas *manchas solares*. Ahora se sabe que corresponden a grandes regiones de un intenso campo magnético (0.3 T) y temperatura de unos 4000 K llamadas *umbra*, las cuales están rodeadas de una región filamentosa llamada *penumbra* (ver figura 1.1). Algunas manchas solares pueden durar por semanas, lo que permite seguir su movimiento y determinar cómo rota el Sol en torno a su eje. De hecho, es conocido que el Sol no rota como un cuerpo sólido, ya que sus capas externas se mueven más lento cerca de los polos (con un período de unos 37 días) que cerca del ecuador (unos 26 días de período).

En 1843, tras varios años de observaciones, Samuel Heinrich descubrió que el número de manchas solares varía cíclicamente por períodos de, aproximadamente, once años. Generalmente, las manchas solares desaparecen casi por completo durante períodos de calma, donde la densidad, temperatura y campos magnéticos disminuyen, definiendo *agujeros coronales* especialmente cerca de los polos. Por otro lado, el máximo número de manchas solares suele ocurrir en períodos de gran actividad solar, donde aumentan las llamaradas y prominencias solares, la polaridad del campo magnético alrededor de los polos se invierte y pequeños agujeros coronales aparecen por toda la superficie solar. En la figura 1.2 mostramos imágenes del Sol durante un mínimo y máximo solar obtenidos por el satélite SOHO (*Solar and Heliospheric Observatory*).

Las llamaradas solares son explosivas liberaciones de energía, las cuales pueden

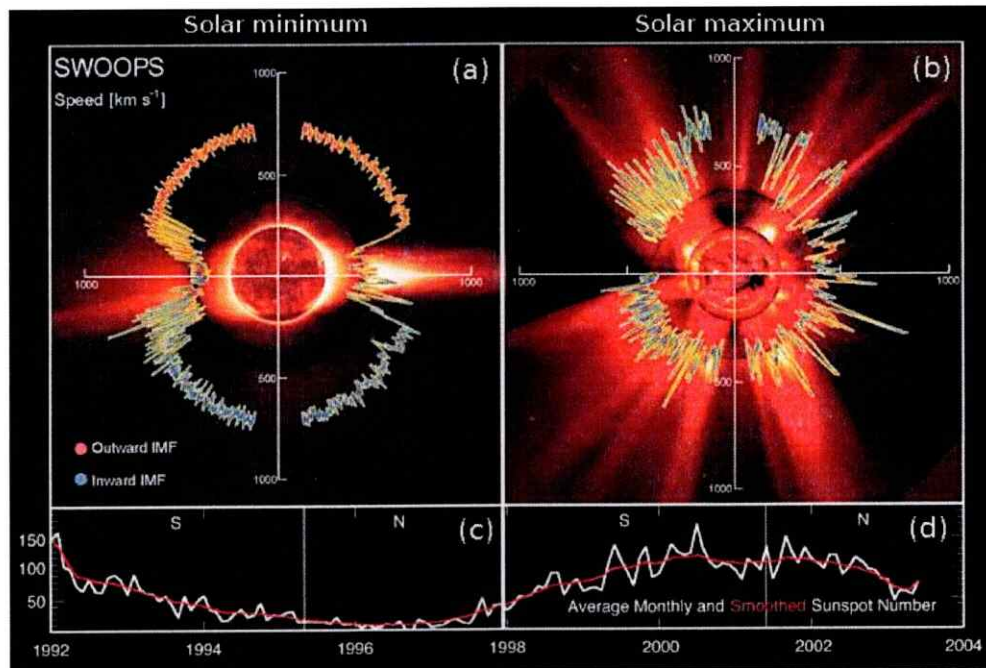


Figura 1.2: Imágenes del Sol cerca del mínimo [panel (a), 17 de agosto de 1996] y máximo solar [panel (b), 7 de diciembre de 2000] obtenidos de SOHO. Se han superpuesto gráficos de la velocidad del viento solar (en km/s) en función de la latitud según mediciones del instrumento SWOOPS (*Solar Wind Observations Over the Poles of the Sun*) del satélite Ulysses. El color de las líneas indica la dirección del campo magnético (rojo: hacia afuera del Sol; azul: hacia el Sol). (c) y (d) Número de manchas solares entre 1992 y 2004 [1].

ser observadas mediante filtros ópticos estrechos centrados en la frecuencia de emisión del espectro del hidrógeno (656.3 nm). Las llamaradas solares fueron vistas por primera vez, de forma independiente, por Richard Carrington [2] y Richard Hodgson [3] en 1859, quienes notaron una gran llamarada de luz blanca alrededor de un grupo de manchas solares. Al mismo tiempo, el magnetómetro del observatorio de Kew, Londres, registró una gran perturbación en el campo magnético de la Tierra. Luego de diecisiete horas, la más poderosa tormenta geomagnética jamás registrada golpeó a la Tierra, causando que telégrafos en toda Europa y América del Norte

fallaran, y que auroras se vieran incluso más al sur del Caribe. Carrington sospechó, correctamente, que los cambios geomagnéticos y la aparición de auroras podrían estar relacionadas con algún evento especial ocurrido en el Sol. A esta tormenta solar se le conoce como *evento Carrington*, ocurrido durante el décimo máximo solar desde 1755. Desde entonces, se han registrado varias otras tormentas con efectos negativos en las telecomunicaciones, sistemas de navegación y satélites, entre otros.

Un tiempo después del evento Carrington, y cinco años antes del descubrimiento de los electrones por parte del premio Nobel de Física, Joseph Thomson [4], George Fitzgerald sugirió que la Tierra está siendo intermitentemente, no siempre, bombardeada por partículas cargadas provenientes del Sol con velocidades suficientemente grandes para llegar en un par de días a nuestro planeta [5]. Más adelante, en vista de que las auroras y la actividad geomagnética ocurrían con mucha frecuencia, el físico noruego Kristian Birkeland sugiere que el Sol emite un flujo continuo de partículas cargadas que llena todo el espacio interplanetario. Sin embargo, esta idea sería opacada por Lord Kelvin en 1892, dando argumentos en contra de la conexión entre las manchas solares y las tormentas geomagnéticas.

Las ideas de Birkeland resurgieron una vez más cuando el astrofísico británico Arthur Eddington, en 1910, sugirió de forma implícita que la forma de la cola del cometa Morehouse podría ser el producto de fuentes provenientes del Sol: independiente de la localización de los cometas, sus colas siempre apuntan en dirección opuesta al Sol, como se ilustra en la figura 1.3. Según el físico alemán Ludwig Biermann [6, 7], esto sugiere que debe existir un flujo constante de partículas en todas las direcciones provenientes del Sol, de unas 10^9 partículas por centímetro cuadrado cada segundo, con una velocidad de unos 450 km/s, el cual empujaría la cola de los cometas, y que estaría presentes incluso en ausencia de manchas solares.



Figura 1.3: La cola azulada de los cometas apunta *siempre* en dirección opuesta al Sol.

1.2. El viento solar

A mediados de la década de 1950 el matemático británico Sydney Chapman estudiaba las propiedades cinéticas del hidrógeno ionizado con el cual construyó un modelo de la atmósfera del Sol. Ya en ese entonces se sabía que la corona solar era muy caliente, por lo que debería ser un muy buen conductor de calor. Chapman encontró que incluso una corona solar estática debería extenderse hacia grandes distancias en el espacio interplanetario, más allá de la órbita terrestre, manteniendo su temperatura y densidad. En la misma época, Hannes Alfvén [8–10] postula que este flujo de partículas es magnetizado, y cubriría el campo magnético alrededor de las cometas, formando una larga cola en dirección opuesta al Sol.

En 1958, Eugene Parker se dio cuenta de que Biermann, Chapman y Alfvén discutían sobre el mismo fenómeno, que él llamó *viento solar* [11]. Parker mostró que la atmósfera coronal externa escapa con velocidades supersónicas hacia el espacio interestelar, debido a que la atracción gravitacional del Sol y la presión interestelar no serían suficientes para confinar el plasma a tan altas temperaturas. Además, según

Parker el debilitamiento de la gravedad al alejarse del Sol tiene el mismo efecto que un motor de cohete expulsando gases hacia el espacio.

La oposición hacia la hipótesis de Parker respecto al viento solar era fuerte. El documento que presentó a la revista *Astrophysical Journal* en 1958 fue rechazada por dos revisores, aunque finalmente fue aceptado por el editor Subrahmanyan Chandrasekhar [11].

En enero de 1959, los satélites soviéticos Luna-1, 2 y 3 detectan un flujo de iones positivos en su camino, siendo la primera observación directa del viento solar. Sin embargo, no era prueba concluyente puesto que la dirección y velocidad de las partículas eran desconocidas. Tres años más tarde y en su viaje hacia Venus, el satélite estadounidense Mariner 2 detectó partículas cargadas altamente energéticas provenientes del Sol y llamaradas solares, confirmando el estudio de Parker y ensalzando el hecho de que el viento solar es un fenómeno físico real. Incluso ahora, las ideas de Parker sirven de referencia para una gran parte de los estudios sobre física del viento solar.

Ahora sabemos que el viento solar es un flujo de plasma que viaja a velocidades supersónicas, entre 300 y 800 km/s, desde la corona solar hasta varias unidades astronómicas más allá de la órbita terrestre. Se compone de un número aproximadamente igual de electrones e iones, donde en estos últimos predominan los protones (95%), un 4% de iones de helio y un 1% de otras partículas más pesadas [12]. Junto al viento solar, existe un débil *campo magnético interplanetario* (IMF, por sus siglas en inglés).

La temperatura, densidad, velocidad y campo magnético del viento solar varían según el ciclo solar, latitud heliográfica y rotación del Sol. También varía en respuesta a choques, ondas electromagnéticas y turbulencias que perturban el flujo interplane-

tario. Cerca de la órbita de la Tierra, la velocidad, densidad e intensidad del campo magnético en el viento solar son de unos 470 km/s, 9 cm^{-3} y 6.6 nT, respectivamente.

Durante un mínimo solar, en el viento solar predominan flujos rápidos de entre 500 y 800 km/s (*viento solar rápido*), con composiciones muy similares a las de la fotosfera y que parecen emanar de los agujeros coronales [1]. También existe un flujo más lento de unos 300 km/s, el *viento solar lento*, cuya composición es similar al de la corona solar y que está asociado a corrientes en el cinturón ecuatorial del Sol. El viento solar lento es dos veces más denso y más variable en intensidad que el viento solar rápido. El viento lento también tiene una estructura más compleja. Un gráfico de la velocidad del viento solar como función de la latitud se puede observar en la figura 1.2(a).

Cerca de la eclíptica, los vientos solares rápido y lento forman corrientes en forma de espirales, debido a la rotación de Sol, que se alejan de la estrella. Eventualmente, el viento solar rápido se adelanta al viento lento, formando regiones de alta densidad y campos magnéticos conocidos como *Regiones de interacción co-rotacionales* (CIR, por sus siglas en inglés). Cuando estas regiones se encuentran con la Tierra, desencadenan tormentas geomagnéticas que aparecen periódicamente en ciclos de 27 días, correspondiente al período de rotación del Sol.

En la fase ascendente del ciclo solar, cerca del máximo solar, la velocidad promedio del viento solar disminuye a medida que los agujeros coronales se comprimen, al punto de desaparecer en muchos casos. La densidad del viento solar aumenta debido a explosivas erupciones de plasma o *eyecciones de masa coronal* (CME, por sus siglas en inglés) que ocurren cerca de las manchas solares y que podrían llegar a dañar satélites e incluso dañar sistemas eléctricos en la Tierra por inducción de intensas corrientes.

El viento solar viaja más allá de Saturno y Urano hasta colisionar con gases interestelares, donde el viento solar se vuelve tenue, frío y débil. En esta región, llamada *choque de terminación*, el viento solar es desacelerado por la presión interestelar hasta velocidades subsónicas, definiendo una región llamada *heliopausa*. Justo después de la heliopausa, las temperaturas son de alrededor de 8000 K. Esta región contiene hidrógeno ionizado y neutro, pero muy tenue, con densidades menores que una décima parte del viento solar cerca de la Tierra.

Un gran número de satélites ha sido lanzado para observar el viento solar. Los satélites Pioneer y Voyager fueron lanzados hacia los confines de la heliósfera en los años 70. En los años 2004 y 2007, las sondas Voyager 1 y 2 detectarían flujos intensos de campo magnético a 94 AU y 83.4 AU, respectivamente [49–52], indicando que estas sondas podrían haber cruzado el frente de choque (*termination shock* en inglés) donde el viento solar supersónico es desacelerado a velocidades subsónicas debido a la presión interestelar.

La sonda Voyager 1, la cual se encontraba a 124 AU en abril de 2013, detectó ondas de Langmuir con frecuencias cercanas a 2.6 kHz, correspondientes a una densidad de electrones de unos 0.08 cm^{-3} , valor muy cercano al esperado para el medio interestelar [53], sugiriendo que esta sonda podría estar cerca de la heliopausa, es decir, la región fronteriza entre el viento solar y el medio interestelar.

Aun cuando la era espacial ha permitido grandes avances en el estudio de la composición y dinámica del viento solar, su comprensión está lejos de ser satisfactoria. Los procesos que calientan la corona a millones de kelvin, en relación a la fría fotosfera de sólo 6000 K, y aquellos procesos que aceleran el viento solar, aún representan los mayores misterios sin resolver en física espacial. El modelo de Chapman o el de Parker no son suficientes para explicar las velocidades observadas para el viento solar

y, además, procesos no térmicos podrían jugar un rol importante en la aceleración de partículas.

1.3. Motivación, alcance y resumen de esta investigación

Observaciones *in situ* del viento solar muestran que las distribuciones de protones usualmente cuentan con una componente principal, densa, relativamente Maxwelliana con temperaturas diferentes T_{\perp} and T_{\parallel} respecto a un campo magnético de fondo local B_0 [31,32]. A veces puede existir un haz secundario, isotrópico, de protones con deriva relativa a la componente principal que varía entre 0 y 1.5 veces la velocidad de Alfvén local v_A , como se muestra en la figura 1.4 [33–36]. Propiedades similares se encuentran para distribuciones de $^4\text{He}^{+2}$ [37]. Además, en muchas situaciones, las distribuciones de electrones e iones presentan colas supratérmicas que pueden ser bien modeladas por distribuciones tipo ley de potencias [38–45].

Estas distribuciones representan a sistemas que no están en equilibrio termodinámico, lo cual corresponde a una fuente de excitación de inestabilidades y fluctuaciones electromagnéticas. Existe evidencia de que estas inestabilidades se encuentran presentes en el viento solar ya que ellas parecen acotar la anisotropía térmica, caracterizada por la razón T_{\perp}/T_{\parallel} , de protones [13,31,32], electrones [116] y partículas alfa [117].

En la figura 1.5(a) mostramos la distribución de mediciones de la anisotropía térmica y parámetro beta de los protones en el viento solar a 1 AU entre noviembre de 1994 y noviembre de 2004. El parámetro beta se define como la razón entre la presión de las partículas y la presión magnética, $\beta_{\parallel} = 8\pi n k_B T_{\parallel} / B_0^2$, donde n_p es la densidad de partículas, k_B la constante de Boltzmann y B_0 la magnitud del campo

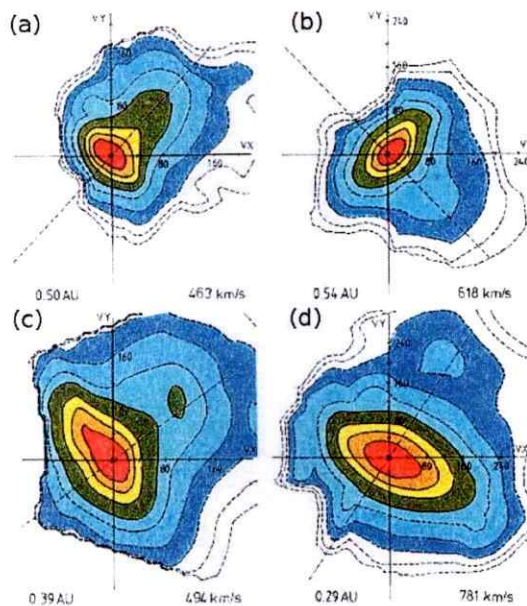


Figura 1.4: Contornos bidimensionales de funciones de distribución de velocidades medidas *in situ* en el viento solar rápido a (a) 0.50 AU, (b) 0.54 AU, (c) 0.39 AU y (d) 0.29 AU [37, 46]. Las líneas rectas indican la dirección del campo magnético promedio.

magnético de fondo.

En la figura 1.5(a) se muestran, también, líneas punteadas que representan a los umbrales de inestabilidad presentes en plasmas: inestabilidad protón-ciclotrón para $T_{\perp}/T_{\parallel} > 1$ e inestabilidad protón-*firehose* para $T_{\perp}/T_{\parallel} < 1$. Como mencionamos antes, la distribución de anisotropías está claramente regulada o acotada por estas inestabilidades.

También, en el viento solar se miden fluctuaciones electromagnéticas que están presentes incluso en ausencia de inestabilidades. En la figura 1.5(b) se muestra la amplitud promedio de las fluctuaciones magnéticas, $|\delta B|/B_0$, como función de la anisotropía térmica y β_{\parallel} , según reporta Bale *et al.* [13]. Las fluctuaciones magnéticas aumentan con β_{\parallel} y, especialmente, cerca de los umbrales de inestabilidad.

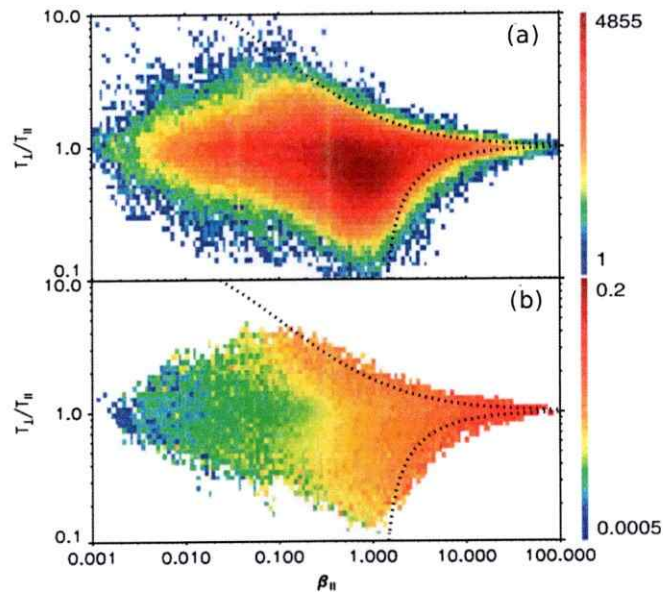


Figura 1.5: (a) La distribución de mediciones de la anisotropía térmica de los protones con respecto al parámetro beta $\beta_{\parallel} = 8\pi nk_B T_{\parallel} / B_0^2$ es acotada por inestabilidades cinéticas. Las líneas punteadas indican los umbrales de inestabilidad en plasmas cinéticos. (b) La amplitud de las fluctuaciones magnéticas $|\delta B|/|B|$ aumenta cerca de los umbrales de inestabilidad [13].

Lejos de estos umbrales, para $\beta_{\parallel} \ll 1$, también se observan fluctuaciones, por lo que éstas no sólo son excitadas por la presencia de inestabilidades (fluctuaciones inducidas), sino que también podría existir algún otro proceso físico. Por ejemplo, el movimiento térmico de las partículas en movimiento genera continuamente fluctuaciones electromagnéticas espontáneas (*ruido térmico*). Esta emisión continua de fluctuaciones es balanceada al ser reabsorbida por el medio, proceso que resulta en un nivel de fluctuaciones magnéticas finita y medible en plasmas.

Aunque no se puede asegurar, en general, que exista equilibrio termodinámico local en plasmas, en muchos casos las fluctuaciones espontáneas podrían ser descritas por la respuesta lineal a perturbaciones desde un estado estacionario, por medio del teorema de fluctuación-disipación [14, 15].

La teoría de fluctuaciones ha sido cuidadosa y rigurosamente discutida por Callen y Welton [14], y luego aplicada a medios dieléctricos como los plasmas, por primera vez, por Silin [16]. Una descripción detallada de fluctuaciones en plasmas es atribuible a Ichimaru [17] y Sitenko [15]. Desde entonces, el estudio de las propiedades espectrales de fluctuaciones electromagnéticas ha proporcionado información sustancial sobre los estados del plasma tanto en investigación en laboratorios [18,19] como en plasmas espaciales [20–24], probando que este método es uno de los más eficientes para diagnosticar plasmas.

Recientemente, Araneda *et al.* [25] y Viñas *et al.* [26] analizaron las fluctuaciones magnéticas espontáneas asociadas a ondas de Alfvén y *whistler*, respectivamente, en plasmas isotrópicos Maxwellianos, mostrando que los modos altamente amortiguados de la relación de dispersión lineal podrían jugar un papel importante en la emisión y absorción de fluctuaciones en plasmas, ya que pareciera que estos modos restringen la aparición de las fluctuaciones espontáneas.

En la misma línea, hemos extendido estas ideas a plasmas con anisotropía térmica respecto a un campo magnético de fondo local [27], mostrando que las fluctuaciones espontáneas en plasmas estacionarios podrían estar relacionadas con las fluctuaciones medidas en el viento solar [13]. Es más, hemos demostrado que la descripción analítica es compatible con resultados de simulaciones híbridas de protones y electrones.

Se pueden sugerir otras fuentes de fluctuaciones. Por ejemplo, en la literatura ha sido comúnmente aceptado que el aumento del nivel de fluctuaciones puede aparecer en plasmas cuasi-estables debido al crecimiento de inestabilidades en el plasma [28, 29], pero esta idea no es capaz de explicar las fluctuaciones observadas lejos de fuentes de inestabilidad, es decir, por debajo de los márgenes de inestabilidad. Por otro lado, las fluctuaciones también podrían deberse a turbulencias MHD desplazadas desde el

Sol, modelo que puede ser relevante si los tiempos de expansión de la turbulencia son mucho menores que los tiempos característicos de las fluctuaciones.

En esta investigación, consideraremos sólo la contribución de las fluctuaciones espontáneas, pues sabemos que éstas son inherentes a cualquier sistema estadístico, en especial a plasmas estacionarios [27, 30], y sin necesidad de imponer condiciones de plasmas inestables o turbulencias preexistentes.

Según el teorema de fluctuación-disipación, las fluctuaciones espontáneas están completamente determinadas por las propiedades macroscópicas del plasma y por la función de distribución de velocidades de las especies componentes del plasma.

En esta investigación derivaremos, en el capítulo 2, expresiones para la propagación de fluctuaciones electromagnéticas en plasmas. Este método extiende formalismos descritos en la literatura [15, 47] a plasmas magnetizados descritos por distribuciones de velocidad generalizadas, las cuales deben asegurar estabilidad en el plasma. Esta descripción resulta útil para plasmas que suelen estar fuera del equilibrio termodinámico. En el capítulo 3 aplicaremos este modelo a plasmas de protones y electrones isotrópicos, cuyas funciones de distribución puedan ser modeladas por una Maxwelliana. Consideraremos los distintos modos electromagnéticos que se propagan en el plasma y su relación con el espectro de las fluctuaciones electromagnéticas. Además, analizaremos la dependencia del nivel de fluctuaciones magnéticas como función de la temperatura. En el capítulo 4 introduciremos la noción de energía libre y analizaremos los límites de inestabilidad y fluctuaciones electromagnéticas como función de la anisotropía térmica de las especies componentes del plasma. En el capítulo 5 analizamos la propagación de ondas y fluctuaciones electromagnéticas en plasmas supratérmicos, modelados por funciones de distribución de velocidades tipo ley de potencias. En el capítulo 6 analizaremos los efectos de introducir especies de protones

y partículas pesadas con velocidades de deriva respecto a la componente principal. Finalmente, en la sección 7 se resumen y discuten los resultados principales de esta investigación.

Capítulo 2

Propagación de ondas electromagnéticas en plasmas magnetizados

Cuando las sondas Voyager 1 y 2 fueron lanzadas en 1977, su objetivo era explorar los planetas Júpiter y Saturno. Durante su viaje, la Voyager 1 detectó muchos tipos de ondas electromagnéticas, entre ellas ondas de *whistler* similares a las generadas por relámpagos, sugiriendo la existencia de relámpagos en Júpiter [48]. Otros tipos de ondas han sido detectadas, dando información valiosa sobre la física de la magnetósfera de Júpiter y la composición de sus lunas y anillos.

Luego de sobrevolar Júpiter, a mediados de los 80, las Voyager fueron aceleradas por el campo gravitatorio de este planeta hasta alcanzar la velocidad suficiente para escapar del campo gravitacional del planeta. La Voyager 1 comenzaría, entonces, un viaje sin retorno hacia el espacio interestelar. La Voyager 2 haría lo mismo unos años más tarde, luego de visitar Urano y Neptuno. Aunque la energía proporcionada por sus generadores de radioisótopos ha decaído en el tiempo, aún se reciben datos por parte de los instrumentos de medición de ondas y campo magnético.

En los años 2004 y 2007, las sondas Voyager 1 y 2 detectarían flujos intensos de

campo magnético a 94 AU y 83.4 AU, respectivamente [49–52], indicando que estas sondas podrían haber cruzado el frente de choque (*termination shock* en inglés) donde el viento solar supersónico es desacelerado a velocidades subsónicas debido a la presión interestelar.

La sonda Voyager 1, la cual se encontraba a 124 AU en abril de 2013, detectó ondas de Langmuir con frecuencias cercanas a 2.6 kHz, correspondientes a una densidad de electrones de unos 0.08 cm^{-3} , valor muy cercano al esperado para el medio interestelar [53], sugiriendo que esta sonda podría estar cerca de la heliopausa, es decir, la región fronteriza entre el viento solar y el medio interestelar.

El viaje de las Voyager son prueba de que el análisis de ondas electromagnéticas puede entregar información valiosa acerca de los sistemas en el Universo, tanto de su composición como de los procesos físicos que ocurren en ella.

Cuando una partícula cargada se mueve a través del plasma se produce emisión de ondas electromagnéticas. Este movimiento puede generar separaciones microscópicas de carga y corriente y, por lo tanto, fluctuaciones en los campos electromagnéticos, convirtiendo la energía térmica de las partículas en energía de modos colectivos. A su vez, la emisión de estas ondas electromagnéticas es balanceada en un proceso de disipación de energía, en donde las partículas resonantes del plasma son calentadas hasta alcanzar un estado cercano al equilibrio termodinámico [54, 55].

Según el teorema de fluctuación-disipación, el balance entre emisión y absorción de las fluctuaciones, caracterizado por correlaciones de fluctuaciones que ocurren en diferentes instantes de un sistema en equilibrio termodinámico, puede ser analizado como la respuesta lineal ante perturbaciones externas a través de una función de respuesta que depende de las propiedades macroscópicas del plasma, en particular de su temperatura [14, 15, 17].

En este capítulo discutiremos la teoría cinética para la existencia de fluctuaciones electromagnéticas en plasmas de múltiples especies. Para ello, en la sección 2.1 analizaremos la respuesta lineal de plasmas magnetizados de múltiples especies ante perturbaciones pequeñas, con lo cual derivaremos la función de respuesta o tensor dieléctrico del plasma. Aunque el análisis incluye efectos relativistas, al final del capítulo discutiremos el límite no relativista, que corresponde al caso de plasmas tipo viento solar.

Las propiedades del tensor dieléctrico definen la relación de dispersión de los modos normales del plasma [56–60]. Estos modos pueden ser observables sólo si sus amplitudes exceden el nivel de las fluctuaciones térmicas presentes en el plasma. En la sección 2.2 derivaremos expresiones generales para el espectro de las fluctuaciones electromagnéticas en plasmas, generalizando estudios encontrados en la literatura [15, 47, 61, 62] a plasmas descritos por funciones de distribución de velocidades que no son, necesariamente, Maxwellianas.

El análisis de fluctuaciones electromagnéticas presentado en este capítulo es válido para plasmas fuera del equilibrio termodinámico, pero que no presentan grandes inestabilidades. Esta descripción resultará útil para estudiar sistemas estacionarios con anisotropías térmicas y haces de partículas. La derivación presentada en la sección 2.2 es el principal objetivo de este capítulo, cuyo desarrollo y aplicación hemos publicado en las referencias [27] y [63].

Finalmente, en la sección 2.3, presentaremos la forma de la función de distribución de velocidades de partículas en plasmas tipo viento solar que se encuentran en estado estacionario; y la forma del tensor dieléctrico para este tipo de sistemas.

2.1. Relación de dispersión

Consideremos un plasma compuesto de múltiples especies inmerso en un campo magnético de fondo \mathbf{B}_0 . Los campos electromagnéticos evolucionan de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.4)$$

donde ρ y \mathbf{j} son la densidad de carga y de corriente, respectivamente, dadas por

$$\rho = \sum_{\nu} q_{\nu} n_{\nu} \int d^3p f_{\nu}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{\nu} q_{\nu} n_{\nu} \int d^3p \mathbf{v} f_{\nu}, \quad (2.6)$$

donde q_{ν} y n_{ν} son la carga y densidad de partículas de la especie ν , y $f_{\nu} = f_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ es la función de distribución de cada especie, la cual satisface la ecuación de Boltzmann no colisional o ecuación de Vlasov,

$$\frac{\partial f_{\nu}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\nu} + q_{\nu} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (2.7)$$

El sistema de ecuaciones (2.1)–(2.7) es conocido como *ecuaciones de Vlasov-Maxwell*. Este sistema es invariante ante inversión temporal ($t \rightarrow -t$, $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ y $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$), por lo que la dinámica del sistema es un *proceso reversible*. Esto es posible porque no existe un término debido a las colisiones entre partículas en el lado derecho de la ecuación (2.7). Por otro lado, como los campos electromagnéticos dependen de f_{ν} , entonces la ecuación (2.7) es no lineal respecto a f_{ν} .

El sistema de ecuaciones (2.1)–(2.4) es consistente con la conservación de cargas,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.8)$$

por lo que la dinámica de ρ está definida por la dinámica de la densidad de corriente, \mathbf{j} . Así, el sistema quedará completamente determinado por las ecuaciones (2.3), (2.4), (2.6) y (2.7).

2.1.1. Condiciones de equilibrio

Las funciones de respuesta del medio se pueden estudiar por medio de perturbaciones lineales a partir del equilibrio, por lo que es necesario definir las condiciones de equilibrio del sistema.

Supongamos que el plasma es uniforme y estacionario, de modo que las funciones de distribución $f_\nu = F_\nu(\mathbf{p})$ no dependen del tiempo ni del espacio. Además, supongamos que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ son constantes. Entonces, según la ecuación para las fuentes (2.5) y (2.6), el sistema debe ser neutro y libre de corrientes,

$$\sum_\nu q_\nu n_\nu \int d^3p F_\nu = 0, \quad (2.9)$$

$$\sum_\nu q_\nu n_\nu \int d^3p \mathbf{v} F_\nu = \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

mientras que por la ecuación de Vlasov (2.7), se tiene que

$$\frac{q_\nu}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial F_\nu}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (2.11)$$

Orientando el sistema de coordenadas de tal forma que $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$, entonces podemos parametrizar el momentum \mathbf{p} como

$$p_x = p_\perp \cos \phi, \quad p_y = p_\perp \sin \phi, \quad p_z = p_\parallel, \quad (2.12)$$

donde p_{\perp} y p_{\parallel} son el momentum perpendicular y paralelo respecto a \mathbf{B}_0 , y $\mathbf{p} = \gamma_L m_{\nu} \mathbf{v}$, con $\gamma_L = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ el factor de Lorentz. Entonces, la ecuación (2.11) se reduce a

$$\Omega_{\nu} \frac{\partial F_{\nu}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.13)$$

donde hemos definido $\Omega_{\nu} = q_{\nu} B_0 / m_{\nu} c$ como la girofrecuencia o frecuencia ciclotrónica de la especie ν . Es decir, las funciones de distribución para cada especie en el equilibrio son *girotrópicas* $F_{\nu}(\mathbf{p}) = F_{\nu}(p_{\perp}, p_{\parallel})$, dependiendo sólo de p_{\perp} y p_{\parallel} .

2.1.2. Perturbación lineal

Consideremos pequeñas perturbaciones δX desde el equilibrio en $t = 0$ para el campo electromagnético y las funciones de distribución, de modo que

$$\mathbf{E} = \delta \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}, \quad f_{\nu} = F_{\nu} + \delta f_{\nu}. \quad (2.14)$$

Escribiendo las ecuaciones (2.3), (2.4), (2.6) y (2.7) a primer orden en las perturbaciones δX y usando las condiciones de equilibrio (2.10)–(2.12), se obtiene

$$\nabla \times \delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \delta \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \delta \mathbf{j}, \quad (2.16)$$

$$\delta \mathbf{j} = \sum_{\nu} q_{\nu} n_{\nu} \int d^3 p \mathbf{v} \delta f_{\nu}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \delta f_{\nu}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta f_{\nu} - \frac{\Omega_{\nu}}{\gamma_L} \frac{\partial \delta f_{\nu}}{\partial \phi} = -q_{\nu} \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial F_{\nu}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (2.18)$$

El término $\delta \mathbf{j}$ en (2.16) y (2.17) indica que podría existir separación de cargas debido a las perturbaciones en los campos.

Para resolver el sistema de ecuaciones (2.15)–(2.18), aplicaremos una transformada integral de la forma

$$\delta \check{X}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\infty} dt \int d^3 r \delta X(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.19)$$

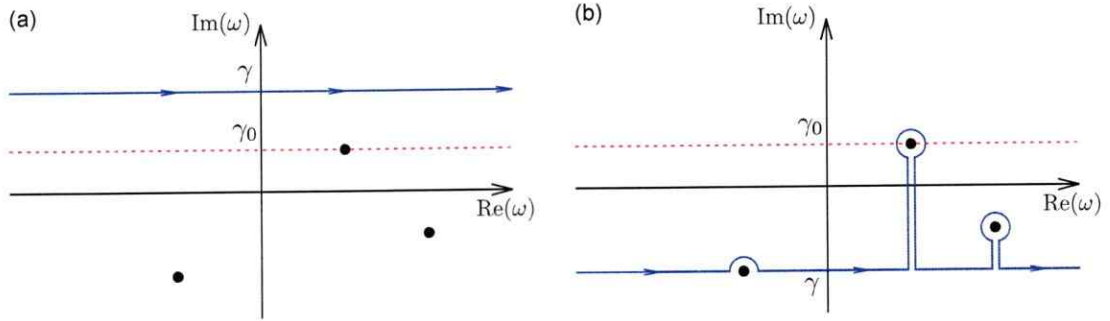


Figura 2.1: (a) En azul, camino de integración para la transformada inversa de Fourier-Laplace, ecuación (2.20), para $\gamma > \gamma_0$. Los puntos negros representan singularidades de $\delta\check{X}(\mathbf{k}, \omega)$ en el plano ω complejo, y la línea punteada representa a la singularidad con mayor parte imaginaria de la frecuencia, γ_0 . (b) Continuación analítica para $\gamma \leq \gamma_0$ mediante deformación del camino de integración.

la cual corresponde a una transformada de Fourier en el espacio y a una de Laplace en el tiempo. Notemos que si $\delta X(\mathbf{r}, t)$ crece exponencialmente en el tiempo como $e^{\gamma_0 t}$, con γ_0 un número real, entonces la integral definida en (2.19) convergerá sólo si $\text{Im}(\omega) > \gamma_0$.

La transformada inversa de Fourier-Laplace es

$$\delta X(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int d^3k \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} d\omega \delta\check{X}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \gamma > \gamma_0, \quad (2.20)$$

donde γ es un número real, arbitrario y mayor que γ_0 . Esto quiere decir que el camino de integración para evaluar (2.20) debe pasar por encima de γ_0 en el plano ω complejo, como es ilustrado en la figura 2.1(a).

Podemos construir una solución de $\delta\check{X}(\mathbf{k}, \omega)$ para $\gamma \leq \gamma_0$ mediante *continuación analítica* [64–66]. De este modo, $\delta\check{X}(\mathbf{k}, \omega)$ quedará definida en todo el plano ω complejo salvo en puntos singulares, incluido γ_0 , donde esta función tiene polos. Luego, si $\gamma \leq \gamma_0$, el camino de integración debe deformarse de modo que mantenga todas las singularidades por debajo de él, como se muestra en la figura 2.1(b).

Notemos que si $\delta X(\mathbf{r}, t)$ es una cantidad real, entonces a partir de (2.19) se obtiene

la condición

$$\delta\check{X}^*(-\mathbf{k}, -\omega^*) = \delta\check{X}(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.21)$$

Usando (2.19), entonces las ecuaciones (2.15)–(2.18) pueden ser escritas como

$$i\mathbf{ck} \times \delta\check{\mathbf{E}} = i\omega \delta\check{\mathbf{B}} + \delta\mathbf{B}(0), \quad (2.22)$$

$$i\mathbf{ck} \times \delta\check{\mathbf{B}} = -i\omega \delta\check{\mathbf{E}} + 4\pi\delta\check{\mathbf{j}} - \delta\mathbf{E}(0), \quad (2.23)$$

$$\delta\check{\mathbf{j}} = \sum_{\nu} q_{\nu} n_{\nu} \int d^3p \mathbf{v} \delta\check{f}_{\nu}, \quad (2.24)$$

$$i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\delta\check{f}_{\nu} + \frac{\Omega_{\nu}}{\gamma_L} \frac{\partial \delta\check{f}_{\nu}}{\partial \phi} = q_{\nu} \left(\delta\check{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta\check{\mathbf{B}} \right) \cdot \frac{\partial F_{\nu}}{\partial \mathbf{p}} - \delta f_{\nu}(0), \quad (2.25)$$

donde las cantidades de la forma $\delta X(0)$ representan condiciones iniciales en $t = 0^+$.

Combinando las ecuaciones (2.22) y (2.23), se obtiene

$$\lambda_{ij} \delta\check{E}_j = \frac{4\pi}{i\omega} \delta\check{j}_i - \frac{1}{i\omega} \delta E_i(0) - \frac{ic}{\omega^2} [\mathbf{k} \times \delta\mathbf{B}(0)]_i, \quad (2.26)$$

donde hemos usado la notación de Einstein para los subíndices repetidos, y donde λ_{ij} son las componentes del tensor de dispersión en el vacío

$$\lambda_{ij} = \delta_{ij} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right). \quad (2.27)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos elegir $\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{x} + k_{\parallel} \hat{z}$. Notemos que (2.25) es una ecuación diferencial de primer grado no homogénea para f_{ν} en función de ϕ , cuya solución es

$$\delta\check{f}_{\nu}(\phi) = \tilde{f}_{\nu}(0) + \frac{\gamma_L q_{\nu}}{\Omega_{\nu}} \int_{\pm\infty}^{\phi} d\phi' G(\phi, \phi') \left(\delta\check{\mathbf{E}} + \frac{1}{\omega} \mathbf{v} \times (\mathbf{k} \times \delta\check{\mathbf{E}}) \right) \cdot \frac{\partial F_{\nu}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (2.28)$$

donde hemos despejado $\delta\check{\mathbf{B}}$ a partir de (2.22), y $G(\phi, \phi')$ es la función de Green asociada a la ecuación (2.25), dada por

$$G(\phi, \phi') = \exp \left[-i\gamma_L \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\Omega_{\nu}} (\phi - \phi') + \frac{i\gamma_L k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\nu}} (\sin \phi - \sin \phi') \right], \quad (2.29)$$

donde hemos usado la parametrización (2.12) para las velocidades. El signo en el límite inferior de (2.28), correspondiente al signo de Ω_ν , se elige de modo que la integral converja [56].

También hemos definido

$$\tilde{f}_\nu(0) = -\frac{\gamma_L}{\Omega_\nu} \int_{\pm\infty}^{\phi} d\phi' G(\phi, \phi') \left[\delta f_\nu(0) + \frac{q_\nu}{i\omega c} [\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(0)] \cdot \frac{\partial F_\nu}{\partial \mathbf{p}} \right]. \quad (2.30)$$

Notemos que $\gamma_L = \sqrt{1 + (p_\perp^2 + p_\parallel^2)/m_\nu^2 c^2}$ no depende de ϕ , por lo que podemos escribir $G(\phi, \phi')$ en términos de las funciones de Bessel, mediante la identidad (ver apéndice A)

$$e^{iz \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\phi}, \quad (2.31)$$

por lo que la ecuación (2.28) se puede integrar explícitamente como función de ϕ , resultando

$$\delta \tilde{f}_\nu = \tilde{f}_\nu(0) + q_\nu \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m e^{i(m-n)\phi}}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\Omega_\nu/\gamma_L} \mathcal{M}_n, \quad (2.32)$$

donde $J_n \rightarrow J_n(z_\nu)$ en (2.32), con $z_\nu = \gamma_L k_\perp v_\perp / \Omega_\nu$, y

$$\mathcal{M}_n = \left[\frac{in\Omega_\nu}{\gamma_L k_\perp v_\perp} \delta \tilde{E}_x J_n - \delta \tilde{E}_y J_n' \right] \mathcal{Q}_\nu + \left[\frac{in\Omega_\nu}{\gamma_L k_\parallel v_\parallel} \left(\frac{\partial F_\nu}{\partial p_\perp} - \mathcal{Q}_\nu \right) + i \frac{\partial F_\nu}{\partial p_\parallel} \right] \delta \tilde{E}_z J_n, \quad (2.33)$$

$$\mathcal{Q}_\nu = \left(1 - \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} \right) \frac{\partial F_\nu}{\partial p_\perp} + \frac{k_\parallel v_\perp}{\omega} \frac{\partial F_\nu}{\partial p_\parallel}. \quad (2.34)$$

Reemplazando $\delta \tilde{f}_\nu$ de (2.32) en (2.24), se puede integrar nuevamente respecto a ϕ , lo cual nos da una relación lineal entre la corriente $\delta \tilde{j}$ y el campo eléctrico $\delta \tilde{\mathbf{E}}$,

$$\delta \tilde{j}_i = \delta j_i(0) - i\omega \sum_{\nu} \chi_{ij}^{(\nu)} \delta \tilde{E}_j, \quad (2.35)$$

donde el segundo término corresponde a la corriente inducida en el plasma debido al campo electromagnético, y donde $\delta j_i(0)$ son las componentes de

$$\delta \mathbf{j}(0) = \sum_{\nu} q_{\nu} n_{\nu} \int d^3 p \mathbf{v} \tilde{f}_{\nu}(0). \quad (2.36)$$

El término $\chi_{ij}^{(\nu)} = \chi_{ij}^{(\nu)}(\mathbf{k}, \omega)$ en (2.35) corresponde a las componentes del tensor de susceptibilidad de la especie ν , dado por [15, 56-59, 67]

$$\chi_{ij}^{(\nu)} = -\frac{\omega_{p\nu}^2}{2\omega} \int \frac{d^2 p}{\gamma_L} \left[\frac{p_{\parallel}}{k_{\parallel} v_{\perp}} \left(\frac{\partial F_{\nu}}{\partial p_{\perp}} - \mathcal{Q}_{\nu} \right) \delta_{i3} \delta_{j3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{Q}_{\nu} p_{\perp} \Pi_{ij}^{(n)}}{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n\Omega_{\nu}/\gamma_L} \right], \quad (2.37)$$

donde $d^2 p = p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel}$, $\omega_{p\nu} = (4\pi q_{\nu}^2 n_{\nu}/m_{\nu})^{1/2}$ es la frecuencia de plasma de la especie ν y $\Pi_{ij}^{(n)}$ es una matriz hermítica de la forma

$$\Pi_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{n^2}{z_{\nu}^2} J_n^2 & i \frac{n}{z_{\nu}} J_n J'_n & \frac{n}{z_{\nu}} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n^2 \\ -i \frac{n}{z_{\nu}} J_n J'_n & (J'_n)^2 & -i \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n J'_n \\ \frac{n}{z_{\nu}} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n^2 & i \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n J'_n & \frac{p_{\parallel}^2}{p_{\perp}^2} J_n^2 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Finalmente, reemplazando la expresión para la corriente (2.35) en (2.26), encontramos

$$\Lambda_{ij} \delta \tilde{E}_j = \frac{4\pi}{i\omega} \tilde{j}_i, \quad (2.39)$$

donde $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ son las componentes del tensor de dispersión del plasma, y $\tilde{j}_i = \tilde{j}_i(\mathbf{k}, \omega)$ son las componentes de un vector que contiene información de las condiciones iniciales, ambos definidos como

$$\Lambda_{ij} = \lambda_{ij} + 4\pi \sum_{\nu} \chi_{ij}^{(\nu)}, \quad (2.40)$$

$$\tilde{\mathbf{j}} = \delta \mathbf{j}(0) - \frac{1}{4\pi} \delta \mathbf{E}(0) + \frac{c}{4\pi\omega} \mathbf{k} \times \delta \mathbf{B}(0). \quad (2.41)$$

En principio, $\tilde{\mathbf{j}}$ es una corriente fluctuante debido a una fuente externa, o una perturbación espontánea en el plasma debido al movimiento de las partículas, representando una fuente de excitación de ondas en el medio.

Si multiplicamos la ecuación (2.39) por k_i y sumamos sobre el índice i , obtenemos el equivalente a la ley de Gauss (2.1)

$$k_i \varepsilon_{ij} \delta \check{E}_j = 4\pi \tilde{\rho}, \quad (2.42)$$

donde $\tilde{\rho} = \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{j}}/i\omega$ es la densidad de carga fluctuante, que es consistente con la ecuación de conservación de cargas (2.8), y ε_{ij} es el tensor dieléctrico

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi \sum_{\nu} \chi_{ij}^{(\nu)}. \quad (2.43)$$

Una solución formal para $\delta \check{E}$ requiere invertir el tensor Λ_{ij} en la ecuación (2.39). Sin embargo, existen singularidades para las cuales no podemos hacer esta inversión y, por lo tanto, la ecuación (2.39) presenta soluciones no triviales para $\delta \check{E}$. Esto se cumple cuando

$$\det [\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)] = 0, \quad (2.44)$$

condición que es llamada *relación de dispersión* para el plasma, la cual determina las frecuencias $\omega = \omega(\mathbf{k})$ de los modos normales (o autovalores) del sistema.

2.2. Fluctuaciones electromagnéticas

Consideremos el promedio estadístico de una cantidad $X(t)$, el cual viene dado por

$$\langle X(t) \rangle = \frac{\sum_{\nu} \text{Tr}(f_{\nu} X(t))}{\sum_{\alpha} \text{Tr}(f_{\alpha})}, \quad (2.45)$$

donde el símbolo $\text{Tr}(A)$ representa la traza de A la cual, en el límite clásico, es proporcional a una integral sobre el espacio de fase del sistema,

$$\text{Tr}(A) \propto \int d^N r d^N p A. \quad (2.46)$$

En la ecuación (2.45) se ha incluido la contribución de todas las especies ν del sistema mediante sus funciones de distribución f_ν (ver sección 2.1). El teorema de Jeans [54] asegura que las soluciones de la ecuación de Vlasov (2.7) pueden ser escritas como función de las constantes de movimiento del sistema \mathcal{H} , es decir $f_\nu = f_\nu(\mathcal{H})$. En particular, \mathcal{H} puede ser el Hamiltoniano del sistema.

Supongamos que el sistema es uniforme y estacionario, tal que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ y $F_\nu = f_\nu(\mathcal{H}_0)$ para $t < 0$. Luego, en $t = 0$ agregamos una perturbación pequeña $\delta h_\ell(0)$ asociada a cada dirección $\ell = \{x, y, z\}$, de modo que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \sum_{\ell} \delta h_\ell(0), \quad (2.47)$$

Si suponemos que no hay correlaciones entre las distintas especies, entonces podemos escribir f_ν a primer orden en las perturbaciones como

$$f_\nu = F_\nu + \sum_{\ell} \delta h_\ell(0) \frac{\partial F_\nu}{\partial \mathcal{H}_\ell}. \quad (2.48)$$

Reemplazando (2.48) en (2.45) y manteniendo términos a primer orden en $\delta h_\ell(0)$, obtenemos

$$\langle X(t) \rangle = \sum_{\nu} \left[\langle X(t) \rangle_{\nu} + \sum_{\ell} \langle \delta h_\ell(0) X(t) \rangle_{\nu}^{(\ell)} - \langle X(t) \rangle_{\nu} \sum_{\ell, \alpha} \langle \delta h_\ell(0) \rangle_{\alpha}^{(\ell)} \right], \quad (2.49)$$

donde hemos definido

$$\langle X \rangle_{\nu} = \frac{\text{Tr}(F_{\nu} X)}{\sum_{\alpha} \text{Tr}(F_{\alpha})}, \quad (2.50)$$

$$\langle \langle X \rangle \rangle_{\nu}^{(\ell)} = \frac{\text{Tr} \left(\frac{\partial F_{\nu}}{\partial \mathcal{H}_{\ell}} X \right)}{\sum_{\alpha} \text{Tr}(F_{\alpha})}. \quad (2.51)$$

Los términos de la forma $\langle X \rangle_\nu$ representan promedios respecto a la especie ν en el equilibrio, mientras que $\langle\langle X \rangle\rangle_\nu^{(\ell)}$ requiere derivar la función de distribución F_ν respecto a la parte del Hamiltoniano asociada a la dirección ℓ , \mathcal{H}_ℓ . Más adelante veremos que para algunas distribuciones F_ν , podemos escribir $\langle\langle X \rangle\rangle_\nu^{(\ell)}$ en términos de $\langle X \rangle_\nu$.

Debido a las ecuaciones de Vlasov-Maxwell (2.1)–(2.7), las fluctuaciones en plasmas quedan completamente determinadas por las fluctuaciones de campo eléctrico, por lo que consideraremos $X(t)$ como una de las componentes de $\delta\mathbf{E}(t)$ (ver sección 2.1.2). Para tiempos $t < 0$ no existen perturbaciones, por lo que el promedio de $\delta\mathbf{E}$ tiene que ser nulo, $\sum_\nu \langle \delta\mathbf{E} \rangle_\nu = \mathbf{0}$. Luego,

$$\langle \delta E_j(t) \rangle = \sum_{\nu, \ell} \langle\langle \delta h_\ell(0) \delta E_j(t) \rangle\rangle_\nu^{(\ell)}. \quad (2.52)$$

El lado izquierdo de esta expresión corresponde al promedio del campo eléctrico para tiempos $t > 0$, mientras que el lado derecho tiene información del estado de equilibrio del sistema a través de la función de distribución F_ν . Es decir, podemos obtener información acerca de la respuesta del sistema ante una perturbación externa a través de las fluctuaciones, o correlaciones, en ausencia de perturbaciones.

Por otro lado, notemos que las fluctuaciones espontáneas en $t = 0$, representadas por el vector $\tilde{\mathbf{j}}$ [ver (2.41)], suministran energía a las ondas electromagnéticas por efecto Joule inverso [68]. Es decir, la energía térmica o mecánica del plasma que se convierte en energía electromagnética por unidad de tiempo y volumen es proporcional a $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) \cdot \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Luego, tenemos que

$$\frac{\partial \delta h_\ell}{\partial t} = - \int_V d^3r \tilde{j}_\ell(\mathbf{r}, t) \delta E_\ell(\mathbf{r}, t). \quad (2.53)$$

Las componentes de $\langle \delta\mathbf{E}(t) \rangle$ pueden encontrarse como solución de las ecuaciones de Maxwell, las cuales fueron escritas en un sistema transformado al espacio de

Fourier-Laplace en la ecuación (2.39). Como las fluctuaciones no son modos normales de un sistema estadístico, significa que podemos invertir (2.39) directamente,

$$\delta \check{E}_j(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{i\omega} \Lambda_{ji}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) \check{j}_i(\mathbf{k}, \omega), \quad (2.54)$$

o bien, si usamos el teorema de convolución,

$$\langle \delta E_i(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' \int_0^t dt' \psi_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \check{j}_j(\mathbf{r}', t'), \quad (2.55)$$

donde $\psi_{ij}(\mathbf{r}, t)$ es la transformada inversa de Fourier-Laplace de $(4\pi/i\omega)\Lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega)$.

Notemos que la respuesta lineal del medio, representada por la función $\psi_{ij}(\mathbf{r}, t)$, es independiente de las perturbaciones o condiciones iniciales. Por lo tanto, podemos elegir libremente las condiciones iniciales de modo que $\check{j}(\mathbf{r}, t)$ no dependa explícitamente del tiempo. Luego, transformando las ecuaciones (2.52), (2.53) y (2.55) al espacio de Fourier-Laplace [ver (2.19)], se obtiene

$$\langle \delta \check{E}_i(\mathbf{k}, \omega) \rangle = \sum_{\nu, \ell} \langle \langle \delta \check{h}_\ell(\mathbf{k}, \omega) \delta \check{E}_i^*(\mathbf{k}, \omega) \rangle \rangle_{\nu}^{(\ell)}, \quad (2.56)$$

$$\delta \check{h}_\ell(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\check{j}_\ell}{2i\omega} \delta \check{E}_\ell(\mathbf{k}, \omega), \quad (2.57)$$

$$\langle \delta \check{E}_i(\mathbf{k}, \omega) \rangle = \sum_{\ell} \frac{4\pi \check{j}_\ell}{\omega^2} \Lambda_{i\ell}^{-1}(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.58)$$

Notemos que \check{j} es una constante en las ecuaciones (2.56)–(2.58), mientras que, por claridad, hemos sumado explícitamente sobre el índice ℓ . Combinando estas tres ecuaciones, obtenemos

$$\sum_{\ell} \check{j}_\ell \left[\sum_{\nu} \langle \langle \delta \check{E}_\ell \delta \check{E}_i^* \rangle \rangle_{\nu}^{(\ell)} + \frac{8\pi}{i\omega} \Lambda_{i\ell}^{-1} \right] = 0. \quad (2.59)$$

Como hemos dicho antes, \check{j} es completamente arbitrario, dado que representa a las fluctuaciones espontáneas o perturbaciones externas del sistema. Entonces el

término entre paréntesis en (2.59) se debe anular para cada ℓ , es decir

$$\sum_{\nu} \langle\langle \delta \check{E}_{\ell} \delta \check{E}_{\ell}^* \rangle\rangle_{\nu}^{(\ell)} = -\frac{8\pi}{i\omega} \Lambda_{\ell\ell}^{-1}. \quad (2.60)$$

Conjugando esta expresión, encontramos una condición similar para $\langle\langle \delta \check{E}_{\ell} \delta \check{E}_{\ell}^* \rangle\rangle_{\nu}^{(i)}$ como función de $\Lambda_{\ell i}^{-1*}$, con lo que se obtiene

$$\sum_{\nu} \left[i\omega \langle\langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle\rangle_{\nu}^{(i)} + i\omega^* \langle\langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle\rangle_{\nu}^{(j)} \right] = 8\pi \left[\Lambda_{ij}^{-1*} - \Lambda_{ji}^{-1} \right]. \quad (2.61)$$

Como veremos más adelante, esta expresión es útil sólo para los casos en que la distribución de velocidades de todas las especies ν sean isotrópicas e iguales, $F_{\nu} = F(p)$, lo cual suele no ser cierto en plasmas como el viento solar.

Notemos que se puede escribir $\Lambda_{ji}^{-1} = \lambda_{jn}^{-1} \lambda_{n\ell} \Lambda_{\ell i}^{-1}$. Usando (2.40) para despejar $\lambda_{n\ell}$ como función de $\Lambda_{n\ell}$ y $\chi_{n\ell}^{(\nu)}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \Lambda_{ji}^{-1} &= \lambda_{jn}^{-1} \left[\Lambda_{n\ell} - 4\pi \sum_{\nu} \chi_{n\ell}^{(\nu)} \right] \Lambda_{\ell i}^{-1} \\ &= \lambda_{ji}^{-1} - 4\pi \sum_{\nu} \lambda_{jn}^{-1} \chi_{n\ell}^{(\nu)} \Lambda_{\ell i}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

De la misma forma, para Λ_{ij}^{-1*} se puede encontrar que

$$\Lambda_{ij}^{-1*} = \lambda_{ij}^{-1} - 4\pi \sum_{\nu} \Lambda_{i\ell}^{-1*} \chi_{\ell n}^{(\nu)*} \lambda_{nj}^{-1*}. \quad (2.63)$$

Finalmente, reemplazando (2.62) y (2.63) en (2.61), y usando que $\lambda_{ij}^{-1} = \lambda_{ji}^{-1}$ es un tensor simétrico [ver (2.27)], se obtiene

$$i\omega \langle\langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle\rangle_{\nu}^{(i)} + i\omega^* \langle\langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle\rangle_{\nu}^{(j)} = 32\pi^2 \left[\Lambda_{i\ell}^{-1*} \chi_{\ell n}^{(\nu)*} \lambda_{nj}^{-1*} - \lambda_{jn}^{-1} \chi_{n\ell}^{(\nu)} \Lambda_{\ell i}^{-1} \right]. \quad (2.64)$$

Con esta ecuación, hemos escrito las correlaciones por especie explícitamente como función de sus propias susceptibilidades. Si conocemos F_{ν} , entonces se puede obtener $\langle\langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle\rangle_{\nu}^{(\ell)}$ como función de $\langle\delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^*\rangle_{\nu}$, fácilmente y, por lo tanto, las

fluctuaciones de campo eléctrico en el medio están dadas por el *tensor de correlaciones*

$$\langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle = \sum_{\nu} \langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle_{\nu} . \quad (2.65)$$

Los términos a la derecha de (2.64) pueden ser evaluados para valores de ω y \mathbf{k} tales que $\det(\Lambda_{ij}) \neq 0$. Recordemos que $\det(\Lambda_{ij}) = 0$ corresponde a la relación de dispersión, introducida en la ecuación (2.44), que determina los valores $\omega = \omega(\mathbf{k})$ para los modos normales del sistema. El espectro de fluctuaciones presenta crecimientos abruptos cerca de estos modos debido a que Λ_{ij}^{-1} es singular para esas ondas.

Las fluctuaciones de campo magnético, de densidad de corriente y de carga pueden ser evaluados usando las ecuaciones de Faraday (2.3), de Ampère (2.4) y de Gauss (2.1), respectivamente, de donde

$$\langle \delta \check{B}_i \delta \check{B}_j^* \rangle = \frac{c^2 k_\ell k_n}{|\omega|^2} \epsilon_{ilm} \langle \delta \check{E}_m \delta \check{E}_s^* \rangle \epsilon_{snj} , \quad (2.66)$$

$$\langle \delta \check{j}_i \delta \check{j}_j^* \rangle = \frac{|\omega|^2}{(4\pi)^2} \lambda_{il} \langle \delta \check{E}_\ell \delta \check{E}_m^* \rangle \lambda_{mj} , \quad (2.67)$$

$$\langle |\delta \check{\rho}|^2 \rangle = \frac{k_i \langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle k_j}{(4\pi)^2} . \quad (2.68)$$

Notemos que las expresiones (2.67) y (2.68) son consistentes con la ley de conservación de cargas (2.8), cuya transformada de Fourier-Laplace se puede escribir como

$$|\omega|^2 \langle |\delta \check{\rho}|^2 \rangle = k_i \langle \delta \check{j}_i \delta \check{j}_j^* \rangle k_j . \quad (2.69)$$

Las ecuaciones (2.64) y (2.65) son expresiones generales que dependen de la forma de la función de distribución F_{ν} . En particular, son válidas para funciones tipo ley de potencias, relativistas, con anisotropía térmica o con velocidades de deriva entre especies. Sin embargo, debemos notar que la forma de la distribución y el valor de los parámetros macroscópicos deben ser tales que el plasma sea estacionario por un

período de tiempo suficiente, de modo que las perturbaciones no crezcan demasiado y las correlaciones en (2.52) existan en ese lapso de tiempo.

Finalmente, notemos que si el plasma se encuentra en equilibrio termodinámico, es decir, todas las especies se encuentran a la misma temperatura T , no existen anisotropías térmicas y el sistema puede ser descrito por funciones de distribución Maxwellianas. Entonces las ecuaciones (2.61), (2.64) y (2.65) se reducen a

$$\langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle = \frac{8\pi k_B T}{i(\omega^* + \omega)} [\Lambda_{ji}^{-1} - \Lambda_{ij}^{-1*}] . \quad (2.70)$$

La ecuación (2.70), que es un caso particular de (2.65), se puede encontrar en el célebre libro de Sitenko [15], quien estudia a fondo las fluctuaciones electromagnéticas en plasmas Maxwellianos.

2.3. Plasmas tipo viento solar

2.3.1. Función de distribución de velocidades

El viento solar está conformado mayoritariamente por electrones y protones, una proporción cercana al 5% de partículas alfa (He^{+2}) y un 1% de otras componentes más pesadas. Todas estas especies presentan velocidades mucho menores que la velocidad de la luz, por lo que se justifica trabajar en el límite no relativista $\gamma_L \simeq 1$.

Las distribuciones de partículas de iones y electrones en el viento solar son usualmente girotrópicas, es decir, transversalmente simétricas respecto al campo magnético de fondo \mathbf{B}_0 ; o débilmente no girotrópicas durante tiempos muy cortos comparados con un giroperíodo $2\pi/\Omega_\nu$, lo que es consistente con las condiciones (2.11) y (2.13).

Por otro lado, el viento solar, como un plasma magnetizado, presenta procesos en que la energía cinética promedio de cada especie aumenta o disminuye en la dirección paralela o perpendicular respecto al campo magnético de fondo \mathbf{B}_0 . Esto corresponde

a una anisotropía en la energía de cada especie ν que puede ser cuantificada como la razón

$$\mathcal{R}_\nu = \frac{\langle v_\perp^2 \rangle_\nu}{\langle v_\parallel^2 \rangle_\nu}. \quad (2.71)$$

Para los casos en que $\mathcal{R}_\nu \neq 1$, se interpreta que cada especie ν presenta temperaturas distintas en la dirección perpendicular ($T_{\perp\nu}$) y paralela ($T_{\parallel\nu}$) respecto al campo magnético de fondo.

En el límite no relativista, el integrando de la ecuación (2.37) tiene polos para las partículas cuyas velocidades cumplen

$$k_\parallel v_\parallel - \omega + n\Omega_\nu = 0. \quad (2.72)$$

Estas partículas contribuyen a la parte imaginaria de $\chi_{ij}^{(\nu)}$ y, por lo tanto, al amortiguamiento o excitación de las ondas que cumplen la relación de dispersión (2.44). El caso particular $n = 0$ corresponde a la condición de resonancia de Landau [69] en presencia de un campo magnético de fondo, es decir, son las partículas que se mueven en la dirección del campo magnético con velocidad $v_\parallel = \omega/k_\parallel$. Similarmente, el caso $n \neq 0$ corresponde a una resonancia ciclotrónica [59]. En cualquiera de estos casos, la forma en que la distribución $F_\nu(v_\perp, v_\parallel)$ depende de v_\parallel , determina la cantidad de partículas que resuenan con una onda de frecuencia $\omega(\mathbf{k})$ propagándose en el plasma. Notemos que no existen partículas resonantes si $k_\parallel = 0$ (propagación perpendicular), puesto que las partículas no se pueden mover libremente a lo largo del campo magnético de fondo.

Finalmente, en muchos sistemas físicos desde sistemas de laboratorios hasta astrofísicos, las distribuciones de velocidad de partículas no son Maxwellianas, ya que choques, campos turbulentos y otros procesos pueden llevar al sistema hacia un estado fuera del equilibrio termodinámico. En particular, mediciones *in situ* del viento

solar muestran que la distribución de velocidad de protones [41-45, 70] y electrones [38, 39, 71, 72] puede ser muy bien representada por distribuciones tipo ley de potencias, usualmente llamadas *distribuciones kappa*.

Aunque no es usualmente aplicado para analizar datos del viento solar, en esta tesis supondremos que la distribución de velocidades puede ser representada por la multiplicación de una Maxwelliana en dirección de v_{\perp} y una distribución kappa en la dirección de v_{\parallel} , es decir,

$$F_{\nu}(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{A_{\kappa\nu}}{\pi^{3/2} u_{\parallel\nu} u_{\perp\nu}^2} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{u_{\perp\nu}^2}\right) \left[1 + \frac{(v_{\parallel} - U_{\nu})^2}{\kappa_{\nu} u_{\parallel\nu}^2}\right]^{-\kappa_{\nu}}, \quad (2.73)$$

expresión que nos permitirá simplificar las integrales respecto a v_{\perp} en la ecuación (2.37).

En (2.73), $u_{\sigma\nu} = (2k_B T_{\sigma\nu}/m_{\nu})^{1/2}$ es la velocidad térmica en la dirección $\sigma = \{\perp, \parallel\}$ respecto a \mathbf{B}_0 ; U_{ν} es la velocidad de deriva de la especie ν a lo largo de \mathbf{B}_0 ; y A_{κ} es una constante de normalización tal que $\int d^3v F_{\nu} = 1$, dada por

$$A_{\kappa} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \kappa)}{\sqrt{-\kappa} \Gamma(1 - \kappa)} & \kappa < -1 \\ \frac{\Gamma(\kappa)}{\sqrt{\kappa} \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} & \kappa > 3/2 \end{cases}. \quad (2.74)$$

En la figura 2.2 mostramos $F_{\nu}(0, v_{\parallel})$ como función de $(v_{\parallel} - U_{\parallel})/u_{\parallel\nu}$ para distintos valores de κ_{ν} . Notemos que el límite $\kappa_{\nu} \rightarrow \infty$ corresponde a una bi-Maxwelliana

$$\lim_{\kappa_{\nu} \rightarrow \infty} F_{\nu}(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{1}{\pi^{3/2} u_{\parallel\nu} u_{\perp\nu}^2} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{u_{\perp\nu}^2} - \frac{(v_{\parallel} - U_{\nu})^2}{u_{\parallel\nu}^2}\right). \quad (2.75)$$

Que los plasmas sean neutros y libres de corrientes, correspondientes a las ecuaciones (2.9) y (2.10), impone restricciones en los dos primeros momentos de F_{ν} , dadas

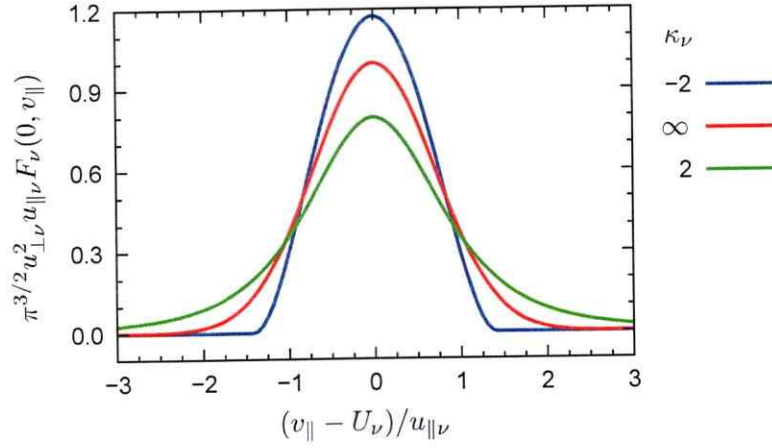


Figura 2.2: Función de distribución $F_\nu(0, v_\parallel)$, ecuación (2.73), para $\kappa_\nu = \{-2, \infty, 2\}$.

por

$$\sum_\nu q_\nu n_\nu = 0, \quad (2.76)$$

$$\sum_\nu q_\nu n_\nu U_\nu = 0. \quad (2.77)$$

Los segundos momentos de la distribución F_ν , es decir, los promedios $\frac{1}{2}m_\nu \langle v_\perp^2 \rangle_\nu$ y $\frac{1}{2}m_\nu \langle v_\parallel^2 \rangle_\nu$, representan temperaturas efectivas $T_{\perp\nu}^{(\kappa_\nu)}$ y $T_{\parallel\nu}^{(\kappa_\nu)}$, respectivamente, definidas como

$$T_{\perp\nu}^{(\kappa_\nu)} = T_{\perp\nu}, \quad T_{\parallel\nu}^{(\kappa_\nu)} = \frac{2\kappa_\nu}{2\kappa_\nu - 3} T_{\parallel\nu}. \quad (2.78)$$

2.3.2. Susceptibilidad

Usando la función de distribución (2.73), la susceptibilidad de la especie ν , definida en (2.37), puede ser escrita como

$$\chi_{ij}^{(\nu)} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_{p\nu}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{n^2}{\varrho_\nu^2} S_1^{(n)} K_1^{(n)} & \frac{in}{\varrho_\nu} S_2^{(n)} K_1^{(n)} & \frac{n}{\varrho_\nu \sqrt{R_\nu}} S_1^{(n)} K_2^{(n)} \\ -\frac{in}{\varrho_\nu} S_2^{(n)} K_1^{(n)} & S_3 K_1^{(n)} & -\frac{i}{\sqrt{R_\nu}} S_2^{(n)} K_2^{(n)} \\ \frac{n}{\varrho_\nu \sqrt{R_\nu}} S_1^{(n)} K_2^{(n)} & \frac{i}{\sqrt{R_\nu}} S_2^{(n)} K_2^{(n)} & S_1^{(n)} K_3^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

donde

$$S_1^{(n)} = \Xi_n(\varrho_\nu), \quad (2.80)$$

$$S_2^{(n)} = \frac{1}{2} \Xi_n'(\varrho_\nu), \quad (2.81)$$

$$S_3^{(n)} = \frac{n^2}{\varrho_\nu^2} \Xi_n(\varrho_\nu) - \frac{\varrho_\nu}{2} \Xi_n'(\varrho_\nu), \quad (2.82)$$

$$K_1^{(n)} = \frac{\kappa_\nu - \frac{1}{2}}{\kappa_\nu} R_\nu [1 + \zeta_\nu^{(n)} Z_{\kappa_\nu+1}(\zeta_\nu^{(n)})] + (\xi_\nu^{(0)} - \xi_\nu^{(n)}) Z_{\kappa_\nu}(\xi_\nu^{(n)}) - 1, \quad (2.83)$$

$$K_2^{(n)} = \xi_\nu^{(0)} + \left(\xi_\nu^{(n)} + \frac{U_\nu}{u_{\parallel\nu}} \right) K_1^{(n)}, \quad (2.84)$$

$$K_3^{(n)} = \frac{1}{R_\nu} \left[\left(\xi_\nu^{(0)} + \frac{U_\nu}{u_{\parallel\nu}} \right) \frac{U_\nu}{u_{\parallel\nu}} + \left(\xi_\nu^{(n)} + \frac{U_\nu}{u_{\parallel\nu}} \right) K_2^{(n)} \right]. \quad (2.85)$$

En las ecuaciones (2.80)–(2.85) hemos usado la anisotropía térmica, definida por

$$R_\nu = \frac{u_{\perp\nu}^2}{u_{\parallel\nu}^2} = \frac{T_{\perp\nu}}{T_{\parallel\nu}},$$

los factores

$$\varrho_\nu = \frac{k_\perp u_{\perp\nu}}{\Omega_\nu}, \quad (2.86)$$

$$\xi_\nu^{(n)} = \frac{\omega - k_\parallel U_\nu - n\Omega_\nu}{k_\parallel u_{\parallel\nu}}, \quad (2.87)$$

$$\zeta_\nu^{(n)} = \xi_\nu^{(n)} \sqrt{\frac{\kappa_\nu + 1}{\kappa_\nu}}, \quad (2.88)$$

y las funciones $\Xi_n(\varrho)$ y $Z_\kappa(\xi)$, dadas por

$$\Xi_n(\varrho) = \int_0^\infty dx x e^{-x^2} [J_n(\varrho x)]^2, \quad (2.89)$$

$$Z_\kappa(\xi) = \frac{A_\kappa}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x - \xi} \left[1 + \frac{x^2}{\kappa} \right]^{-\kappa}. \quad (2.90)$$

La función Z_κ es conocida como la *función de dispersión de plasmas modificada* [73]. Las funciones Ξ_n y Z_κ se pueden escribir explícitamente en términos de las

funciones de Bessel modificadas de primer tipo I_n y la función hipergeométrica ${}_2F_1$, respectivamente (ver apéndices A y B).

Notemos que Z_κ y, por lo tanto, las funciones en (2.83)–(2.85), son en general funciones complejas, por lo que $\chi_{ij}^{(\nu)}$ definida en (2.79) no es un tensor hermítico. Esto quiere decir que las frecuencias $\omega = \omega(\mathbf{k})$ también son números complejos.

Por otro lado, notemos que si la condición de resonancia (2.72) se cumple, entonces el factor $\xi_\nu^{(n)}$, definido en (2.87), se puede escribir de forma equivalente como

$$\xi_\nu^{(n)} = \frac{\omega - k_{\parallel} U_\nu - n\Omega_\nu}{k_{\parallel} u_{\parallel\nu}} = \frac{v_{\parallel} - U_\nu}{u_{\parallel\nu}}. \quad (2.91)$$

Llamaremos a $\xi_\nu^{(n)}$ el *factor de resonancia*. Si $|\xi_\nu^{(n)}| \gg 1$, entonces las partículas que resuenan con una onda de frecuencia ω y número de onda k_{\parallel} deben tener velocidades muy altas comparadas con la velocidad térmica, $|v_{\parallel} - U_\nu| \gg u_{\parallel\nu}$. Esto corresponde a una porción muy pequeña de la función de distribución, por lo que se dice que la especie ν *no es resonante* con la onda. Por otro lado, el caso $|\xi_\nu^{(n)}| \lesssim 1$ equivale a velocidades $|v_{\parallel} - U_\nu|$ menores o comparables con $u_{\parallel\nu}$, esto es, una gran porción de partículas en la especie ν *es resonante* con la onda.

Finalmente, para evaluar $\chi_{ij}^{(\nu)}$ en (2.79), es necesario conocer los valores de los parámetros macroscópicos (temperatura, masa y densidad de cada especie) y el campo magnético de fondo. La temperatura paralela respecto a \mathbf{B}_0 será cuantificada en función del *parámetro beta* de la especie ν , $\beta_{\parallel\nu} = 8\pi n_\nu k_B T_{\parallel\nu} / B_0^2$, el cual corresponde a la razón entre la presión (paralela respecto a \mathbf{B}_0) de las partículas y la presión magnética. La anisotropía térmica es cuantificada mediante $R_\nu = T_{\perp\nu} / T_{\parallel\nu}$. La densidad, masa y carga de las partículas será normalizada respecto a la densidad, masa y carga de los protones, respectivamente. Cuando corresponda, la deriva de las especies será escrita en términos de la velocidad de Alfvén, $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi n_p m_p}$.

Además, podemos escribir la razón $\Omega_\nu/\omega_{p\nu}$ como función de los parámetros antes mencionados,

$$\frac{\Omega_\nu}{\omega_{p\nu}} = \frac{v_A}{c} \sqrt{\frac{m_p n_p}{m_\nu n_\nu}}. \quad (2.92)$$

La velocidad de Alfvén fluctúa típicamente entre 10 km/s y 200 km/s, con un promedio de unos 40 km/s, en el viento solar a 1 AU [74]. En esta tesis, a menos que se diga lo contrario, usaremos $v_A/c = 10^{-4}$, donde c es la velocidad de la luz, y la razón de masa real entre el protón y el electrón, $m_p/m_e = 1836$.

Capítulo 3

Fluctuaciones electromagnéticas en plasmas de protones y electrones

En este capítulo examinaremos las propiedades de propagación de ondas y fluctuaciones electromagnéticas en plasmas, según el formalismo descrito en el capítulo 2. Para introducir algunos conceptos, consideraremos el caso más simple, en el cual las ondas se propagan a lo largo de un campo magnético de fondo \mathbf{B}_0 en plasmas isotrópicos de protones y electrones, cuya distribución de velocidades puede ser representada por una Maxwelliana. Al final del capítulo, discutiremos las propiedades de ondas propagándose en direcciones arbitrarias respecto a \mathbf{B}_0 .

Si bien las propiedades de ondas de Alfvén [75–80], *whistler* [81] y Langmuir [82, 83] han sido estudiadas con gran detalle en la literatura, también existe un grupo de soluciones de la relación de dispersión que representan ondas altamente amortiguadas, pero que son usualmente ignoradas porque se cree que no son físicamente realizables y que no afectan a las propiedades dispersivas del plasma. En este capítulo prestaremos especial atención a las propiedades de estos modos y a su relación con el espectro de fluctuaciones electromagnéticas.

Parte de este capítulo ha sido publicado en las referencias [26, 27].

3.1. Propagación paralela

Consideremos un plasma compuesto por dos especies, protones ($\nu = p$) y electrones ($\nu = e$), cuyas distribuciones de velocidad son descritas por (2.73). Para cumplir con las condiciones de neutralidad (2.76) y corriente nula (2.77), debemos imponer que $n_p = n_e$ y $U_p = U_e$. En el sistema de referencia de los protones, tenemos que $U_p = U_e = 0$. Para otros sistemas de referencia, debemos considerar un corrimiento Doppler en las frecuencias, $\omega' = \omega - k_{\parallel}U_{\nu}$.

Consideremos ondas electromagnéticas propagándose a lo largo del campo magnético de fondo, lo cual corresponde al límite $k_{\perp} = 0$. Como se detalla en el apéndice C.1, tanto el tensor de susceptibilidad de cada especie como el tensor de dispersión adoptan una estructura que es fácil de diagonalizar cuando $k_{\perp} = 0$, y la relación de dispersión toma la forma

$$\Lambda_+ \Lambda_- \Lambda_{zz} = 0, \quad (3.1)$$

donde

$$\Lambda_{\pm} = 1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + 4\pi \sum_{\nu} \chi_{\pm}^{(\nu)}, \quad (3.2)$$

$$\Lambda_{zz} = 1 + 4\pi \sum_{\nu} \chi_{zz}^{(\nu)}. \quad (3.3)$$

Las susceptibilidades $\chi_{\pm}^{(\nu)}$ y $\chi_{zz}^{(\nu)}$ están dadas por

$$\chi_{\pm}^{(\nu)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{p\nu}^2}{\omega^2} K_1^{(\mp)}, \quad (3.4)$$

$$\chi_{zz}^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa_{\nu} - \frac{1}{2}}{\kappa_{\nu}} \left(\frac{\omega_{p\nu}}{k_{\parallel} u_{\parallel\nu}} \right)^2 [1 + \zeta_{\nu}^{(0)} Z_{\kappa_{\nu}+1}(\zeta_{\nu}^{(0)})], \quad (3.5)$$

donde $K_1^{(\pm)}$ está definido en la ecuación (2.83).

El caso $\Lambda_{\pm} = 0$ corresponde a ondas transversales de polarización circular izquierda o negativa (-) y derecha o positiva (+), y $\Lambda_{zz} = 0$ a ondas longitudinales.

Notemos que la componente longitudinal del tensor dieléctrico coincide con la del tensor de dispersión, $\epsilon_{zz} = \Lambda_{zz}$ [ver ecuación (2.43)].

Definiendo las variables polarizadas $E_{\pm} = (E_x \pm iE_y)/\sqrt{2}$ y reemplazando (3.2)–(3.5) en las expresiones para las fluctuaciones eléctricas (2.64)–(2.65), encontramos que

$$\langle |\delta \check{E}_{\pm}|^2 \rangle = \frac{32\pi^2\omega}{\omega^2 - c^2k_{\parallel}^2} \sum_{\nu} k_B T_{\perp\nu} \operatorname{Im} \left(\frac{\chi_{\pm}^{(\nu)}}{\Lambda_{\pm}} \right), \quad (3.6)$$

$$\langle |\delta \check{E}_z|^2 \rangle = \frac{32\pi^2}{\omega} \sum_{\nu} k_B T_{\parallel\nu} \operatorname{Im} \left(\frac{\chi_{zz}^{(\nu)}}{\Lambda_{zz}} \right). \quad (3.7)$$

De la misma forma, a partir de las ecuaciones (2.66) y (2.68) se demuestra que

$$\langle |\delta \check{B}_z|^2 \rangle = 0, \quad (3.8)$$

$$\langle |\delta \check{B}_{\pm}|^2 \rangle = \frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} \langle |\delta \check{E}_{\pm}|^2 \rangle, \quad (3.9)$$

$$\langle |\delta \check{\rho}|^2 \rangle = \frac{k_{\parallel}^2}{(4\pi)^2} \langle |\delta \check{E}_z|^2 \rangle. \quad (3.10)$$

Las fluctuaciones magnéticas transversales pueden ser escritas como

$$\langle |\delta \check{B}_T|^2 \rangle = \langle |\delta \check{B}_x|^2 \rangle + \langle |\delta \check{B}_y|^2 \rangle = \langle |\delta \check{B}_+|^2 \rangle + \langle |\delta \check{B}_-|^2 \rangle. \quad (3.11)$$

Así, para propagación paralela respecto a \mathbf{B}_0 , las fluctuaciones magnéticas y de densidad de carga son debidas a perturbaciones transversales y longitudinales, respectivamente, respecto a la dirección de propagación de las ondas.

En lo sucesivo, consideraremos $R_{\nu} = 1$ y $\kappa_{\nu} \rightarrow \infty$ para protones y electrones, es decir, consideraremos distribuciones de velocidad Maxwellianas isotrópicas. Aunque se puede tomar formalmente el límite $\kappa_{\nu} \rightarrow \infty$ en las ecuaciones (3.2) y (3.3), evaluaremos la función $Z_{\infty}(\xi) = Z(\xi)$ con un código numérico distinto al de las funciones $Z_{\kappa}(\xi)$ (ver detalles en el apéndice B).

3.1.1. Solución numérica

La relación de dispersión $\Lambda(\mathbf{k}, \omega) = \det(\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)) = 0$, y en particular los casos $\Lambda_{\pm}(k, \omega) = 0$ y $\Lambda_{zz}(k, \omega) = 0$, generalmente corresponden a ecuaciones trascendentales para $\omega = \omega(\mathbf{k})$ que no tienen solución analítica exacta, por lo que debemos recurrir a métodos numéricos para resolverlas. Para ello, notemos primero que encontrar las soluciones de $\Lambda(\mathbf{k}, \omega) = 0$ es equivalente a resolver, simultáneamente, las ecuaciones

$$\operatorname{Re}[\Lambda(\mathbf{k}, \omega)] = 0, \quad \operatorname{Im}[\Lambda(\mathbf{k}, \omega)] = 0. \quad (3.12)$$

Por ejemplo, en la figura 3.1 mostramos las curvas de nivel de las partes real e imaginaria de $\Lambda_{+}(k_0, \omega)\Lambda_{-}(k_0, \omega) = 0$ y $\Lambda_{zz}(k_0, \omega) = 0$ como función de $\operatorname{Re}(\omega)$ e $\operatorname{Im}(\omega)$ para un valor de $\mathbf{k}_0 = k_0\hat{z}$ fijo. Ambas figuras son simétricas respecto al eje vertical $\operatorname{Re}(\omega) = 0$. De acuerdo a lo dicho anteriormente, la intersección de una curva roja y una negra es una solución de $\Lambda(\mathbf{k}_0, \omega) = 0$.

Los cruces marcados con las letras O^{-} y X^{+} corresponden a ondas de frecuencia puramente real [$\operatorname{Im}(\omega) = 0$], es decir, son ondas cuya amplitud no crece ni decae en el tiempo, por lo que corresponden a ondas *estables* o *marginales*. El resto de los cruces corresponde a frecuencias tales que $\operatorname{Im}(\omega) < 0$, por lo que representan ondas que son *amortiguadas* en el tiempo. Para los casos en que $\operatorname{Im}(\omega) > 0$, diremos que la onda es excitada o bien el plasma es *inestable* a estas ondas.

En el caso Maxwelliano, mostrado en la figura 3.1, existe un conjunto infinito de soluciones de las relaciones de dispersión $\Lambda_{\pm} = 0$ y $\Lambda_{zz} = 0$, representando modos mucho más amortiguados que los mostrados en la figura 3.1. Más adelante discutiremos el caso $\kappa_{\nu} \neq \infty$ y otras características de los modos marcados (letras A^{-} , W^{+} , L y S) en la figura 3.1.

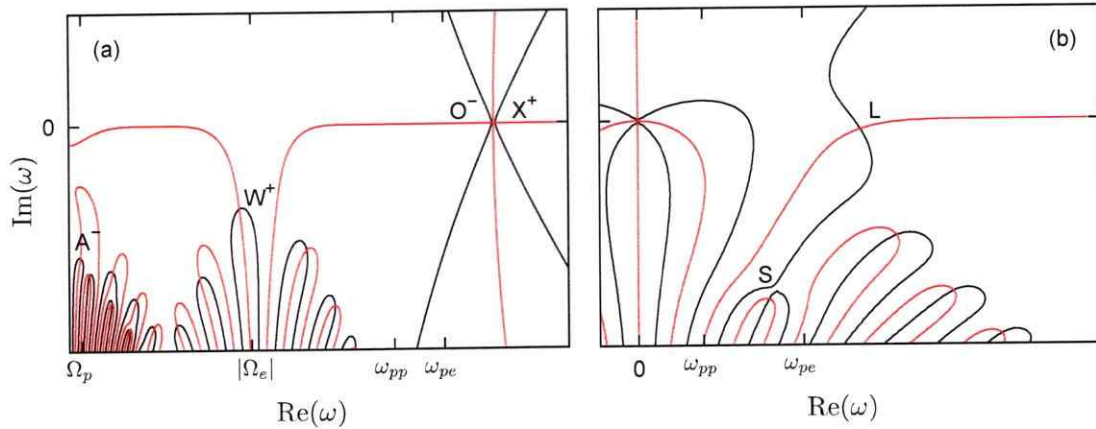


Figura 3.1: Diagrama de las curvas de nivel para la parte real (negro) e imaginaria (rojo) de (a) ondas transversales $\Lambda_- \Lambda_+ = 0$ y (b) ondas longitudinales $\Lambda_{zz} = 0$ para un valor de $\mathbf{k} = k_0 \hat{z}$ fijo en plasmas de protones y electrones Maxwellianos. Las soluciones de la relación de dispersión corresponden a los puntos donde ambas curvas se cruzan. Los cruces marcados son modos de polarización circular negativa (A^- y O^-), positiva (W^+ y X^+) y modos electrostáticos (L y S), los cuales son, también, modos de oscilación en plasmas tipo fluidos. Los cruces no marcados serán rotulados como modos secundarios en la sección 3.1.2.

Para encontrar una solución numérica $\omega = \omega(\mathbf{k}_0)$ de la relación de dispersión, usamos el *método de Muller* [84–86], el cual es un algoritmo para encontrar los ceros de una función no lineal, compleja, mediante una interpolación cuadrática.

Supongamos que queremos encontrar los ceros de una función $f(x) = 0$. Para ello, escogemos tres *semillas* x_{i-2} , x_{i-1} y x_i , y aproximamos la función por medio de una parábola $g(x) = a(x - x_i) + b(x - x_i)^2 + c$, cuyos ceros son conocidos

$$x_{i+1} = x_i + \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad (3.13)$$

donde debemos escoger uno de los signos en el denominador requiriendo que $|x_{i+1} - x_i|$ sea mínimo. El valor de x_{i+1} corresponde a una aproximación a la solución de $f(x) = 0$, y el método se puede repetir iterativamente hasta que converja, como se ilustra en la figura 3.2.

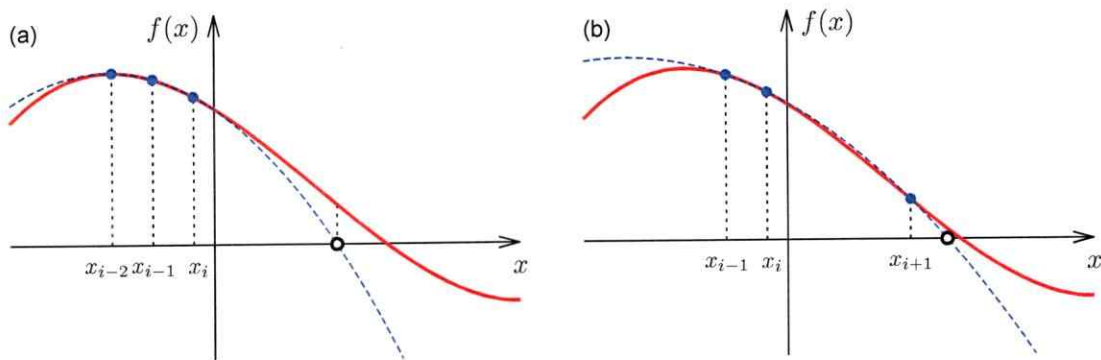


Figura 3.2: Representación gráfica del método de Muller para encontrar una solución de $f(x) = 0$. (a) Se eligen tres semillas: x_{i-2} , x_{i-1} y x_i . Luego, la función $f(x)$ es interpolada en los tres puntos anteriores mediante una parábola. Los ceros de la función $f(x)$ son aproximados por los ceros de la parábola (punto blanco). (b) Se elige la semilla x_{i+1} como el cero de la parábola que está más cerca del cero de $f(x)$ y se repite el método explicado en (a) hasta que converja.

Debemos mencionar que el método de Muller converge más rápido que el *método de la secante*, pero es un poco más lento que el *método de Newton-Raphson* [86]. Sin embargo, el método de Muller no requiere conocer la derivada de la función a analizar, sino que realiza una evaluación directa de esta función en las tres semillas x_{i-2} , x_{i-1} y x_i . Por lo tanto, se recomienda el uso de este método para encontrar las raíces de funciones que son usualmente complicadas de derivar analíticamente, que es lo que sucede con la relación de dispersión en muchos casos.

Siguiendo esta idea, para resolver la relación de dispersión $\Lambda(\mathbf{k}_0, \omega) = 0$ con \mathbf{k}_0 fijo, elegimos tres semillas cerca de uno de los cruces en la figura 3.1 y usamos el método de Muller para encontrar una solución $\omega = \omega(\mathbf{k}_0)$. Podemos repetir este proceso para otros valores de \mathbf{k} y para otros cruces, y así encontrar todas las soluciones de la relación de dispersión para todo valor de \mathbf{k} .

3.1.2. Modos electromagnéticos transversales

En la figura 3.3 mostramos las soluciones de la relación de dispersión, $\Lambda_+ \Lambda_- = 0$, de ondas transversales propagándose a lo largo de \mathbf{B}_0 en plasmas de electrones y protones isotrópicos ($R_p = 1$) y Maxwellianos ($\kappa_\nu \rightarrow \infty$), con $\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e} = 0.3$. En la figura, mostramos la frecuencia normalizada $\text{Re}(\omega/\Omega_p)$ [paneles (a) y (b)] y la tasa de crecimiento/amortiguamiento $\text{Im}(\omega/\Omega_p)$ [paneles (c) y (d)] como función de la magnitud del vector de onda normalizado ($ck/\omega_{pp} = v_A k/\Omega_p$).

En las figuras 3.1(a) y 3.3(a) identificamos los modos de *Alfvén-ciclotrón* (A^-) y *ordinario* (O^-), los cuales son soluciones de $\Lambda_- = 0$, es decir, son modos de polarización negativa (izquierda). En el mismo panel, identificamos los modos *whistler-ciclotrón* (W^+) y *extraordinario* (X^+) como las soluciones de $\Lambda_+ = 0$, correspondientes a ondas de polarización circular positiva. Estos modos se pueden encontrar como los modos de oscilación en plasmas modelados como fluidos fríos, por lo que de aquí en adelante nos referiremos a ellos como *ramas o modos principales*.

En la figura 3.3(b) mostramos un grupo de modos que convergen a $\omega = \Omega_p$ para $ck/\omega_{pp} \rightarrow 0$, marcados como H^- , que son soluciones de $\Lambda_- = 0$, por lo que corresponden a ondas de polarización circular negativa. Aquellos modos que convergen a $\omega = |\Omega_e|$ (grupo H^+) son modos de polarización circular positiva, los que son soluciones de $\Lambda_+ = 0$. Notemos que existe un conjunto infinito de modos similares a los mostrados en la figura 3.3(b), donde mostramos sólo los cuatro modos menos amortiguados de cada grupo, H^\pm . Estos modos no se encuentran como solución de la relación de dispersión en plasmas tipo fluido, puesto que son consecuencia de los efectos cinéticos en plasmas. Por lo tanto, nos referiremos a estos modos como *modos secundarios o modos de orden superior*.

En las figuras 3.3(c) y (d) mostramos la tasa de amortiguamiento/crecimiento de

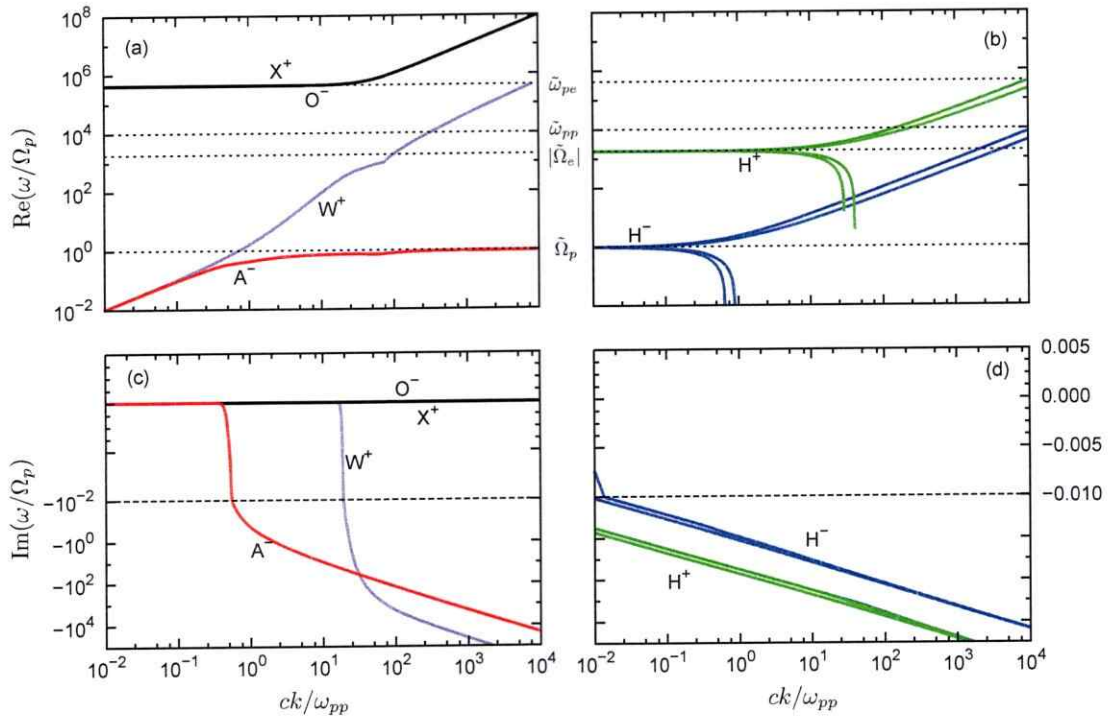


Figura 3.3: Relación de dispersión $\Lambda_{\pm} = 0$, ecuación (3.2), para ondas transversales propagándose a lo largo de \mathbf{B}_0 ($\mathbf{k} = k_{\parallel}\hat{z}$), en un plasma de protones y electrones isotrópicos ($R_p = R_e = 1$), isotérmicos ($\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e} = 0.3$) y Maxwellianos ($\kappa_p = \kappa_e \rightarrow \infty$). (a) Frecuencia $\text{Re}(\omega/\Omega_p)$ como función de ck/Ω_p para los modos ordinario (O^-), extraordinario (X^+), Alfvén-ciclotrón (A^-) y *whistler*-ciclotrón (W^+). (b) Parte real de ω/Ω_p en función de ck/Ω_p para los modos secundarios. (c) y (d) tasa de crecimiento/amortiguación, $\text{Im}(\omega/\Omega_p)$, como función de ck/Ω_p de los modos antes mencionados. Los modos ordinario y extraordinario tienen frecuencias puramente reales [$\text{Im}(\omega) = 0$]. Las líneas punteadas indican el valor de las frecuencias de ciclotrón (Ω_p y Ω_e) y de plasma (ω_{pp} y ω_{pe}). La escala del eje vertical en los paneles (c) y (d) es logarítmica entre -10^4 y -0.01 , y lineal entre -0.01 y 0.005 .

los modos primarios y secundarios, respectivamente. Notemos que los modos ordinario y extraordinario están muy cerca uno del otro en el panel (a), y sus frecuencias son puramente reales [$\text{Im}(\omega) = 0$], como se ve en el panel (c) de la misma figura. Los modos Alfvén-ciclotrón y *whistler*-ciclotrón son estables para $ck/\omega_{pp} < 1$ y $ck/\omega_{pp} < 25$, respectivamente, y son altamente amortiguados para grandes valores de k . Los modos secundarios H^\pm son altamente amortiguados para todo valor del número de onda.

Para valores pequeños del número de onda, el modo Alfvén-ciclotrón cumple con la relación de dispersión $\omega = v_A k$, siendo v_A la velocidad de Alfvén; mientras que para $k \gg 1$ y para $\beta_p \lesssim 1$, la frecuencia de estos modos tiende a Ω_p [ver curva A^- en la figura 3.3(a)]. Estas dos características le dan su nombre. Estas ondas podrían ser responsables de las altas temperaturas de la corona solar —en relación a la temperatura de la superficie del Sol (fotosfera)— y de las altas velocidades de las partículas en el viento solar [87–93].

El modo *whistler*-ciclotrón aparece frecuentemente en la magnetósfera terrestre, siendo excitado usualmente por relámpagos. Estas ondas generalmente se propagan a lo largo de las líneas de campo magnético entre el hemisferio sur y norte de la Tierra. También han sido detectadas por la sonda Voyager 1 cerca de Júpiter [48], sugiriendo la existencia de relámpagos en ese planeta. Estas ondas podrían ser responsables de la aceleración de electrones en el cinturón de radiación de la Tierra [94, 95].

Las ondas *whistler*-ciclotrón son percibidas como un silbido (*whistle* en inglés) que se mantiene por varios segundos, con frecuencias entre 1 kHz y 30 kHz. Para longitudes de onda pequeñas y para $\beta_e < 1$, la frecuencia de estos modos se acerca a la girofrecuencia de los electrones ($\omega \sim \Omega_e$), aunque esta característica suele no aplicarse si $\beta_e \gtrsim 1$, como se aprecia en la curva W^+ de la figura 3.3(a).

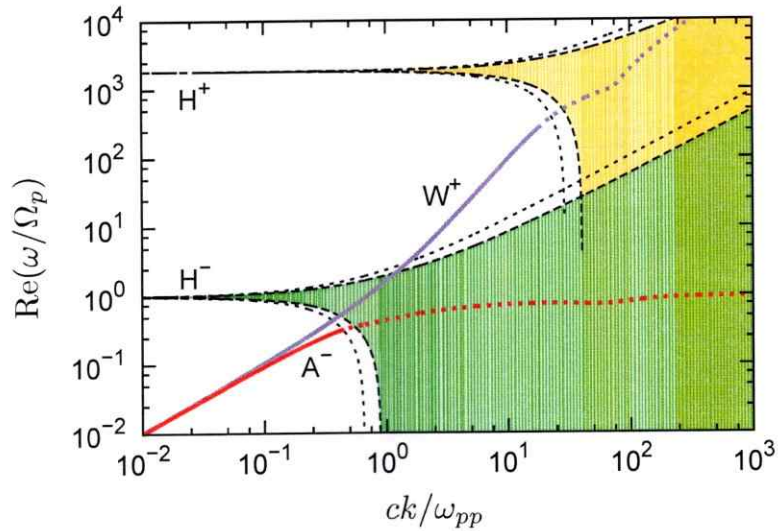


Figura 3.4: Soluciones de la relación de dispersión $\Lambda_{\pm} = 0$ mostradas en la figura 3.3 para frecuencias $\omega < |\Omega_e|$. Las líneas sólidas corresponden a los modos principales: Alfvén-ciclotrón (A^-) y *whistler*-ciclotrón (W^+); Las líneas segmentadas son los modos secundarios H^{\pm} de menor amortiguación. Las líneas punteadas corresponden a las frecuencias donde los modos principales son amortiguados con $\text{Im}(\omega/\Omega_p) < -10^{-3}$, que coinciden con la región de frecuencias delimitada por los modos H^{\pm} (región coloreada).

En la figura 3.4 mostramos las ramas principales de frecuencias bajas $\omega < |\Omega_e|$ y los modos secundarios de la figura 3.3. Los modos de Alfvén-ciclotrón y *whistler*-ciclotrón son estables para bajas frecuencias y números de onda pequeños, pero están altamente amortiguados cerca de las frecuencias de resonancia $\omega = \Omega_p$ y $\omega = |\Omega_e|$, como ya hemos visto en la figura 3.3(c).

Notemos que los modos principales son amortiguados, de hecho, para frecuencias delimitadas por los modos secundarios H^{\pm} de menor amortiguación (región coloreada en la figura 3.4). Dentro de la región coloreada en la figura 3.4, *no existen* modos secundarios, en cambio, fuera de ella los modos secundarios llenan completamente el espacio de frecuencias. Notemos, también, que los modos principales son amortiguados en la región definida por los modos secundarios de la misma polarización

circular (W^+ dentro de la región definida por H^+ , y A^- dentro de la definida por H^-), indicando que los modos de polarización circular distinta no están correlacionados. A estas regiones les llamaremos *región de amortiguación*.

En la figura 3.5 mostramos las soluciones de $\Lambda_{\pm} = 0$, manteniendo los valores de $\kappa_{\nu} \rightarrow \infty$ y $R_{\nu} = 1$, con $\nu = p, e$, pero variando el valor de $\beta_{\parallel\nu} = \beta_{\parallel e}$ entre 0.01 y 10.

Los modos principales para $\beta_{\parallel\nu} = 0.01$ y 0.1 son muy similares entre sí en la figura 3.5(a). De hecho, se sabe que estos modos, para plasmas con $\beta_{\parallel\nu} < 1$, pueden ser aproximados por las soluciones de la relación de dispersión de plasmas tipo fluido [76,96]. Sin embargo, debido a los efectos cinéticos cuando $\beta_{\parallel\nu} \neq 0$, estos modos presentan una gran amortiguación para longitudes de onda pequeña (o bien, números de onda grande), lo cual no puede ser descrito por la aproximación fría.

Para valores de $\beta_{\parallel\nu} > 1$, los modos normales presentan grandes diferencias respecto de las soluciones de la aproximación fría [ver figura 3.5(a)]. En particular, para $\beta_{\parallel\nu} = 10$, la rama correspondiente al modo Alfvén-ciclotrón (A^-) pierde varias de sus propiedades: por ejemplo, para $ck/\omega_{pp} \ll 1$ ya no cumple con la relación de dispersión $\omega = v_A k$, y su frecuencia no converge a Ω_p para $ck/\omega_{pp} \gg 1$.

Notemos que, por la definición del parámetro beta, $\beta_{\parallel\nu} < 1$ significa que la presión de las partículas es menor que la presión magnética, por lo que la dinámica de las ondas y partículas se debe principalmente a la presencia del campo magnético de fondo, lo cual podría explicar por qué la aproximación fría funciona para estos casos. Por otro lado, $\beta_{\parallel\nu} > 1$ indica que la presión de las partículas predomina por sobre la magnética, indicando que la presencia del campo magnético de fondo es menos relevante, lo cual podría explicar por qué el modo A^- no se propaga con velocidad v_A para $ck/\omega_{pp} < 1$.

Por otro lado, la región delimitada por los modos secundarios, discutida en la

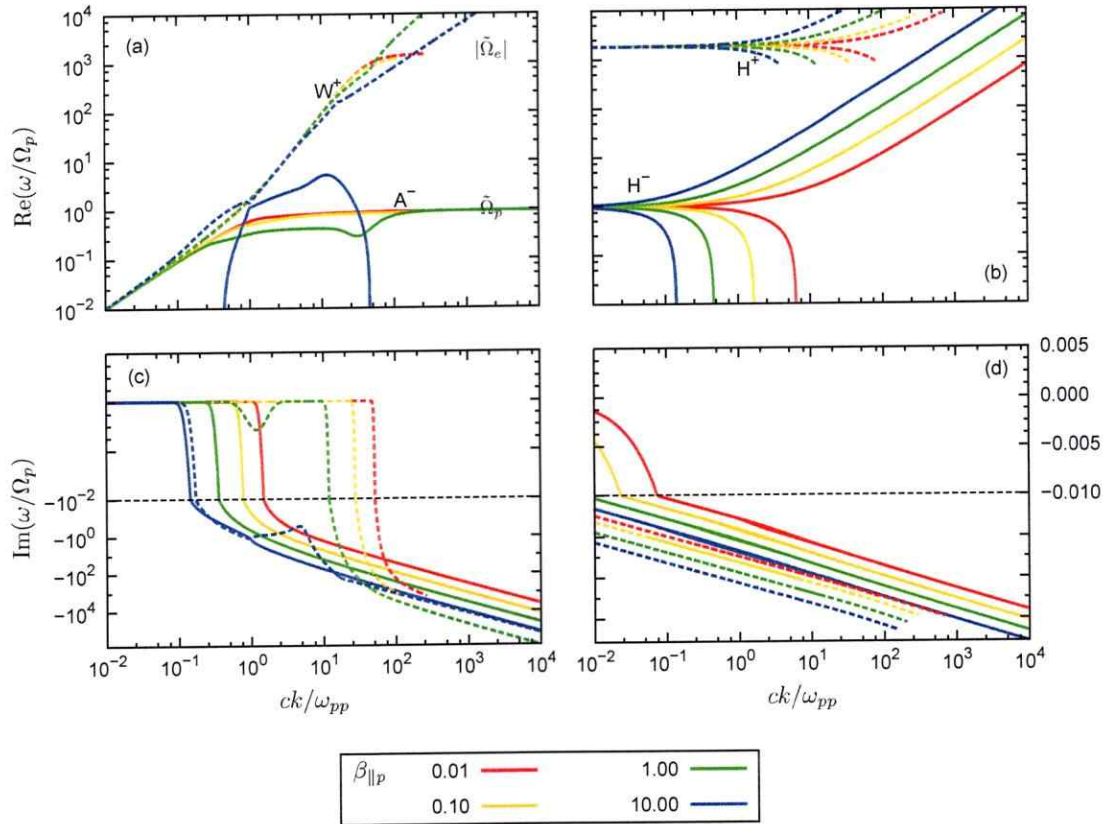


Figura 3.5: Soluciones de la relación de dispersión $\Lambda_{\pm} = 0$ en plasmas de protones ($\nu = p$) y electrones ($\nu = e$) isotérmicos, isotrópicos ($R_{\nu} = 1$), y Maxwellianos ($\kappa_{\nu} \rightarrow \infty$), para valores de $\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e}$ entre 0.01 y 10. Los paneles (a) y (c) muestran los modos de Alfvén-ciclotrón (A^{-} , líneas sólidas) y *whistler*-ciclotrón (W^{+} , líneas punteadas) para frecuencias $\omega < |\Omega_e|$. Los paneles (b) y (d) muestran los modos secundarios H^{-} (líneas sólidas) y H^{+} (líneas punteadas) de menor amortiguación para cada valor de $\beta_{\parallel \nu}$. La escala del eje vertical en los paneles (c) y (d) es logarítmica entre -10^4 y -0.01 , y lineal entre -0.01 y 0.005 .

figura 3.4, cubre números de onda más pequeños a medida que $\beta_{\parallel \nu}$ crece, como se aprecia en la figura 3.5(b), lo cual es consistente con que la amortiguación de los modos principales sea mayor a longitudes de onda más grande cuando $\beta_{\parallel \nu}$ crece, como se observa al comparar con la figura 3.5(c). De la misma forma, los modos secundarios son más amortiguados para mayores valores de $\beta_{\parallel \nu}$ [ver figura 3.5(d)].

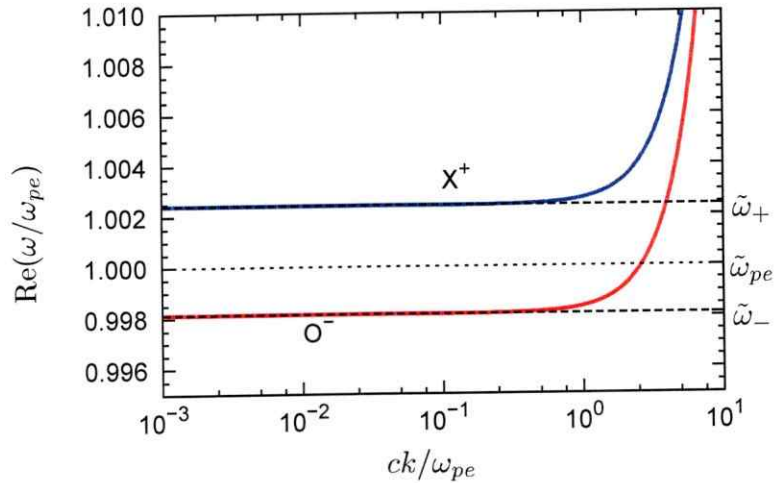


Figura 3.6: Soluciones de la relación de dispersión $\Lambda_{\pm} = 0$ mostradas en la figura 3.3 para frecuencias altas ($\omega \gg |\Omega_e|$), correspondientes a los modos ordinario (O^-) y extraordinario (X^+). La frecuencia está normalizada respecto a ω_{pe} y su escala es lineal. Las líneas segmentadas corresponden a la frecuencia de corte de estos dos modos, calculadas para plasmas tipo fluido.

En la figura 3.6 mostramos los modos ordinario y extraordinario de la figura 3.3. Esta vez, debido a sus altas frecuencias, mostramos la frecuencia normalizada respecto a ω_{pe} en escala lineal. Por el mismo motivo, su relación de dispersión puede ser aproximada por la de ondas propagándose en plasmas fríos, como se puede ver en el apéndice C.4. Sin embargo, en la figura 3.6 mostramos las soluciones de la relación de dispersión para plasmas con efectos cinéticos, ecuación (3.2). Para frecuencias mucho más altas, $\omega \gg \omega_{pe}$, estos modos se comportan como ondas propagándose a la velocidad de la luz en el vacío, por lo que estos modos no muestran cambios importantes cuando la temperatura (o bien $\beta_{\parallel\nu}$) cambia [97].

En la figura 3.6 identificamos una frecuencia de corte ω_- y ω_+ para los modos ordinario y extraordinario, respectivamente, bajo el cual éstos no se propagan. Usando teoría fría para plasmas de protones y electrones, podemos determinar estas

frecuencias como [98]

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\Omega_e + \Omega_p)^2 + 4(\omega_{pp}^2 + \omega_{pe}^2)} \pm (\Omega_e - \Omega_p) \right], \quad (3.14)$$

mostrando que estos modos pueden ser descritos, con una muy buena aproximación, usando teoría de plasmas tipo fluido.

Por último, en la figura 3.7 mostramos la velocidad de fase ($v_{\phi} = \omega/k$) y de grupo ($v_g = \partial\omega/\partial k$) de los modos normales para los parámetros de la figura 3.3. Como referencia, las líneas segmentadas indican las velocidades de Alfvén (v_A), térmicas de electrones ($u_{||e}$) y protones ($u_{||p}$), y la velocidad de la luz (c).

Los modos ordinario (O^-) y extraordinario (X^+) presentan velocidades de fase que son mayores que la velocidad de la luz, $v_{\phi} > c$, las cuales se aproximan asintóticamente a c para grandes valores de k [ver figura 3.7(a)]. Según esto, clásicamente no existen partículas que resuenen con estas ondas, por lo que se espera que estos modos no contribuyan a la generación de inestabilidades debido a resonancias. Por otro lado, su velocidad de grupo es menor que la velocidad de la luz [ver panel (c)], y tienen velocidad $v_g = 0$ cuando $k = 0$.

Por otro lado, los modos de Alfvén (A^-) y *whistler*-ciclotrón (W^+) muestran velocidades de grupo y fase que tienden a la velocidad de Alfvén para valores pequeños de k , como se muestra en los paneles (a) y (c), lo cual es consistente con la relación de dispersión $\omega = v_A k$ para estas ondas con $k \ll 1$. Para el caso mostrado en el panel (a), se tiene que la velocidad de fase de ambos modos es menor que la velocidad térmica de los electrones ($u_{||e}$), indicando que una gran fracción de la distribución de electrones podría resonar con estas dos ondas para toda frecuencia o número de onda. En cambio, el modo de *whistler*-ciclotrón muestra velocidades de fase que son mayores que la velocidad térmica de los protones, por lo que hay una

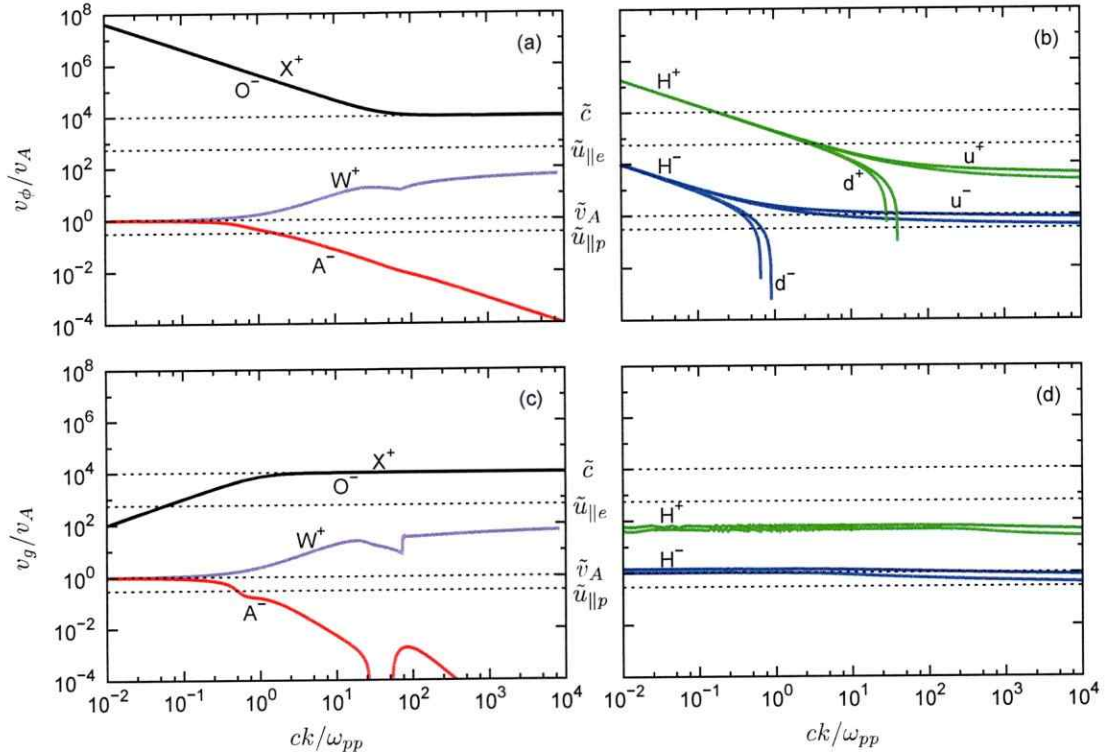


Figura 3.7: (a) Velocidad de fase ($v_\phi = \omega/k$), normalizada respecto a v_A y como función de ck/ω_{pp} , de los modos principales en un plasma de protones y electrones isotrópicos ($R_p = R_e = 1$), isotérmicos ($\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e} = 0.3$) y Maxwellianos ($\kappa_p = \kappa_e \rightarrow \infty$). (b) v_ϕ/v_A para los modos secundarios. (c) Velocidad de grupo ($v_g = \partial\omega/\partial k$), normalizada respecto a v_A , de los modos principales. (d) v_g/v_A para los modos secundarios.

porción pequeña de la distribución de protones que puede resonar con las ondas de *whistler*.

En la figura 3.7(b) vemos que hay un grupo de modos secundarios, rotulados como u^+ y u^- , cuya velocidad de fase es siempre mayor que $u_{\parallel p}$ para todo valor de ck/ω_{pp} . Por otro lado, la velocidad de fase de los modos d^+ y d^- cambia de signo cerca de $ck/\omega_{pp} = 1$ y $ck/\omega_{pp} = 60$, respectivamente, indicando que estas ondas cambian su dirección de propagación. En cambio, la velocidad de grupo de todos estos modos, H^\pm , se mantiene aproximadamente constante, según se observa en el

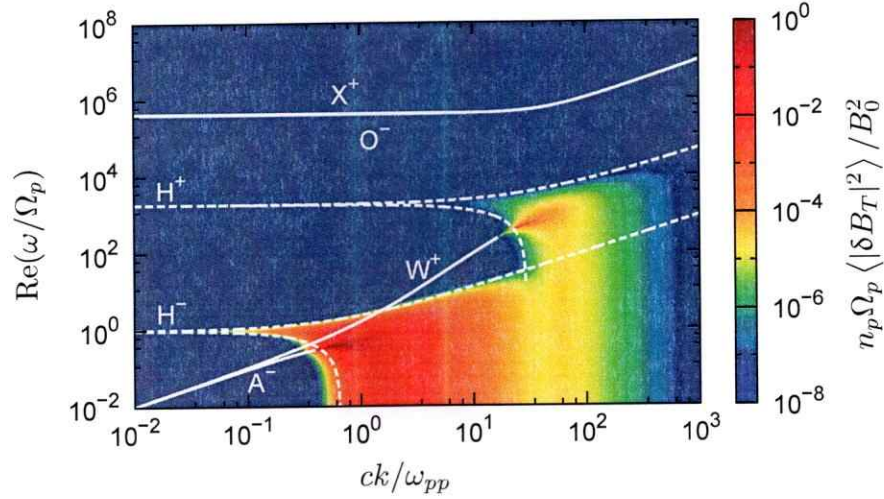


Figura 3.8: Espectro de las fluctuaciones magnéticas, ecuación (3.11), para ondas transversales propagándose a lo largo de \mathbf{B}_0 ($\mathbf{k} = k_{\parallel}\hat{z}$), en un plasma de protones y electrones isotrópicos ($R_p = R_e = 1$), isotérmicos ($\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e} = 0.3$) y Maxwellianos ($\kappa_p = \kappa_e \rightarrow \infty$). Las líneas segmentadas corresponden a los modos secundarios menos amortiguados que son solución de la relación de dispersión $\Lambda_{\pm} = 0$ (ver figura 3.3). Las líneas continuas corresponden a los modos principales cuyas frecuencias cumplen $\text{Im}(\omega/\Omega_p) > -10^{-4}$. La escala de los ejes y el código de colores es logarítmica.

panel (d). En general, el resto de los modos secundarios, que son más amortiguados que los considerados acá, presentan velocidades de grupo que también son constantes, pero son mayores que las mostradas en el panel (d).

3.1.3. Fluctuaciones electromagnéticas transversales

En la figura 3.8 mostramos la intensidad de las fluctuaciones magnéticas transversales, ecuación (3.11), para los mismos parámetros de la figura 3.3. Para efectos numéricos, evaluamos la cantidad adimensional $n_p \Omega_p \langle |B_T|^2 \rangle / B_0^2$. Las curvas blancas (sólidas y segmentadas) corresponden a los modos de la relación de dispersión $\Lambda_{\pm} = 0$ mostrados en la figura 3.3.

Como se puede observar en la figura 3.8, el espectro de las fluctuaciones magnéti-

cas es acotado por los modos secundarios menos amortiguados (curvas H^\pm). Esta zona ha sido identificada como una región de amortiguación en la figura 3.4. Las fluctuaciones decrecen alrededor de dos órdenes de magnitud fuera de esta región.

Los modos secundarios H^\pm son usualmente ignorados en el análisis de dispersión de ondas debido a que su tasa de amortiguación es mucho más grande que un giro-período, como se muestra en la figura 3.3(d), por lo que podrían no ser observables en un experimento si las escalas temporales son mayores. Debido a esto, usualmente se argumenta que estos modos no son importantes en procesos físicos. Sin embargo, como veremos más adelante, estos modos secundarios H^\pm podrían convertirse en modos principales si se consideran haces de iones o electrones [99–101]. También se ha propuesto que estos modos podrían ofrecer un mecanismo para el calentamiento de electrones en tokamaks [97], y para el desarrollo de inestabilidades paramétricas en plasmas de electrones y positrones [102–104]. Además, el hecho de que los modos secundarios acoten el espectro de las fluctuaciones (ver figura 3.8) y las frecuencias donde los modos principales son amortiguados (ver figura 3.4), sugiere que estos modos podrían desempeñar un papel importante en la emisión y absorción de fluctuaciones en plasmas, tanto a frecuencias en la escala de Ω_p [25,27] como en la escala de Ω_e [26].

Según las ecuaciones (3.6)–(3.9), las fluctuaciones magnéticas divergen cuando $\Lambda_\pm = 0$, que corresponde a la relación de dispersión de los modos normales del sistema, por lo que se espera que los efectos colectivos del plasma se vuelven importantes y que las fluctuaciones aumenten. De hecho, en la figura 3.4 vemos que las fluctuaciones magnéticas son intensas cerca de las frecuencias donde los modos principales A^- y W^+ son amortiguados. Notemos que no se observan fluctuaciones cerca de los modos ordinario (O^-) y extraordinario (X^+), puesto que existen muy pocas partículas

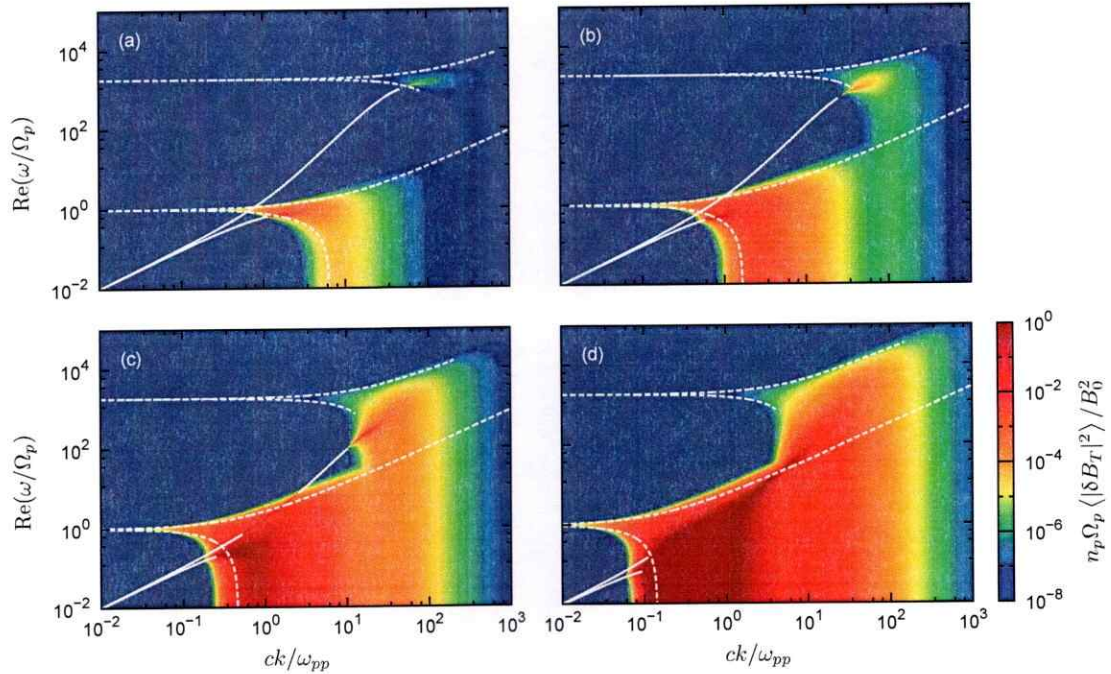


Figura 3.9: Espectro de las fluctuaciones magnéticas, ecuación (3.11), para los parámetros de la figura 3.8, pero para: (a) $\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e} = 0.01$, (b) 0.10, (c) 1.00 y (d) 10.00. Las líneas segmentadas son los modos secundarios. Las líneas sólidas corresponden a los modos principales cuando $\text{Im}(\omega/\Omega_p) > -10^{-4}$.

resonantes con estas ondas, como discutimos en la figura 3.7.

Ahora estudiaremos el efecto de la temperatura sobre las fluctuaciones. En la figura 3.9 mostramos las fluctuaciones magnéticas transversales, $\langle |B_T|^2 \rangle$, para los mismos parámetros de la figura 3.8, pero para valores de $\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e}$ entre 0.01 y 10. El espectro de las fluctuaciones ocupa longitudes de onda mayores (menores valores de k) y mayores valores de las frecuencias a medida que $\beta_{\parallel \nu}$ crece. Independiente del valor de $\beta_{\parallel p}$ o $\beta_{\parallel e}$, los modos secundarios restringen el espectro de las fluctuaciones electromagnéticas. Notemos, además, que la intensidad de las fluctuaciones magnéticas también aumenta a medida que $\beta_{\parallel \nu}$ crece.

Al igual que en la figura 3.8, las fluctuaciones magnéticas aumentan fuertemente

para frecuencias cercanas a las de los modos de Alfvén y *whistler*-ciclotrón, para todos los casos mostrados en la figura 3.9. Notemos que, a medida que $\beta_{\parallel\nu}$ crece, la amortiguación del modo *whistler*-ciclotrón ocurre para números de onda k mucho más chicos, y las fluctuaciones para esas frecuencias se vuelven mucho más intensas también para k pequeño.

Procedemos a cuantificar la dependencia de las fluctuaciones magnéticas respecto a $\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e}$, por medio de la integral de $\langle |B_T|^2 \rangle$ respecto a k , dada por

$$b_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \langle |\delta\check{B}_T(k, \omega)|^2 \rangle, \quad (3.15)$$

la cual evaluaremos usando un método adaptativo de Gauss-Kronrod de 21 puntos [105]. Notemos que b_T tiene unidades de energía \times tiempo/distancia.

En la figura 3.10 graficamos la cantidad adimensional $n_p v_A b_T / B_0^2$ como función de ω / Ω_p para los parámetros de la figura 3.9. Como era de esperarse, según la discusión anterior, b_T aumenta a medida que $\beta_{\parallel\nu}$ crece. Para $\beta_{\parallel\nu} = 0.01$, vemos que b_T presenta picos cerca de las frecuencias Ω_p y Ω_e . De hecho, estos picos corresponden al aumento de las fluctuaciones cerca de los modos normales [ver figura 3.9(a)]. A medida que $\beta_{\parallel\nu}$ aumenta, los picos en la gráfica de b_T se trasladan a frecuencias cada vez más bajas, lo cual es consistente con el hecho de que el espectro de las fluctuaciones ocupa una región más amplia del espacio de frecuencias cuando la temperatura crece.

De la misma forma, consideremos la densidad de energía promedio de las fluctuaciones magnéticas, dada por

$$W_T = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \langle |\delta\check{B}_T(k, \omega)|^2 \rangle. \quad (3.16)$$

Notemos que la expresión para W_T es equivalente a calcular la integral de b_T , definida en (3.15), respecto a ω . Las unidades de W_T son de energía/distancia. Al igual que con b_T , evaluaremos W_T usando el método de Gauss-Kronrod.

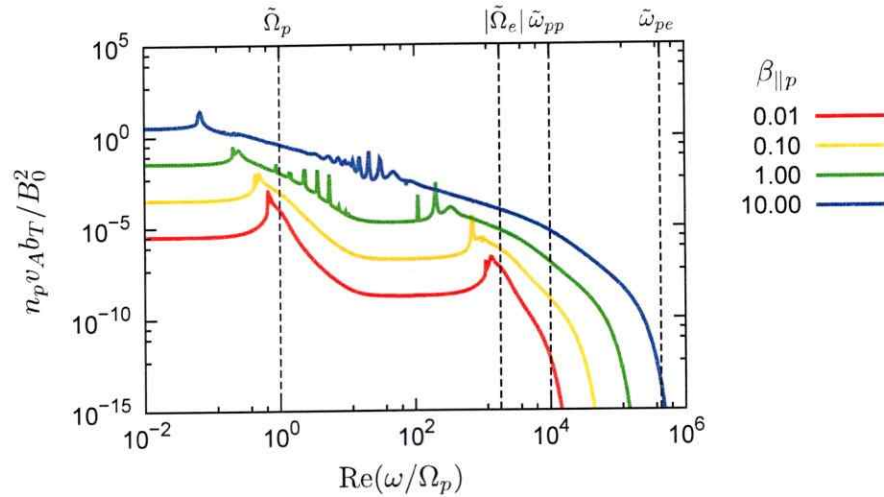


Figura 3.10: Integral de $\langle |B_-|^2 \rangle$ respecto a k , ecuación (3.15), para plasmas de protones y electrones isotrópicos ($R_\nu = 1$), isotérmicos ($\beta_{\parallel e} = \beta_{\parallel p}$) y Maxwellianos ($\kappa_\nu \rightarrow \infty$), para distintos valores de $\beta_{\parallel p}$ entre 0.01 y 10. Las líneas segmentadas indican las frecuencias de ciclotrón y de plasmas para protones y electrones.

En la figura 3.11 mostramos la cantidad adimensional $n_p v_A W_T / \Omega_p B_0^2$ como función de $\beta_{\parallel p}$, para plasmas Maxwellianos e isotrópicos. De acuerdo a valores típicos de las temperaturas observadas en el viento solar lento y rápido a 1 AU [106], analizamos W_T para distintos valores de $\beta_{\parallel e}$ entre 1 y 5 veces $\beta_{\parallel p}$. La energía de las fluctuaciones magnéticas crece monótonicamente respecto a $\beta_{\parallel p}$, lo cual es consistente con los resultados de la figura 3.10.

La energía de las fluctuaciones para $\beta_{\parallel p} > 0.1$ es mayor a medida que la temperatura de los electrones aumenta. En efecto, la diferencia de W_T entre $\beta_{\parallel e} / \beta_{\parallel p} = 1$ y 5 para $\beta_{\parallel p} = 100$ es del orden de 10^3 . Esto indica que las fluctuaciones electromagnéticas en el plasma son influenciadas, en mayor parte, por el movimiento térmico de los electrones, el cual es mucho mayor que el de los protones debido a su gran diferencia de masas.

Como referencia, hemos superpuesto la curva $n_p v_A W_T / \Omega_p B_0^2 = \beta_{\parallel p}$. La energía

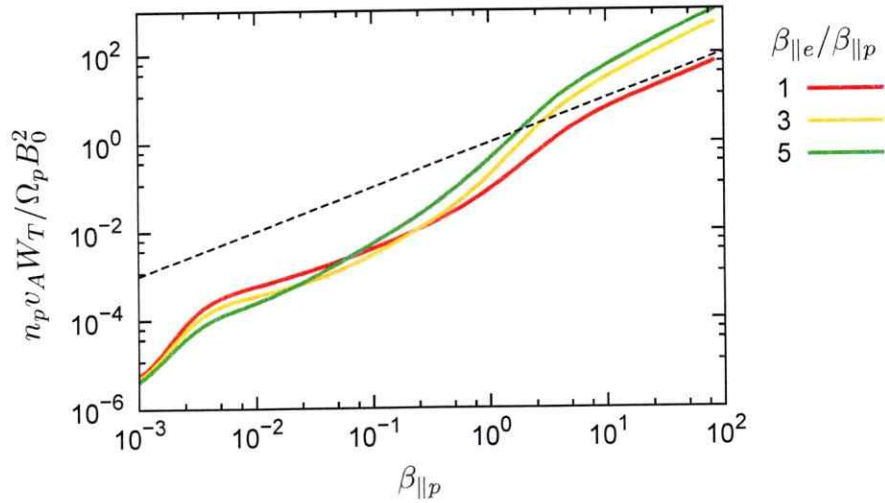


Figura 3.11: Gráfico de $n_p v_A W_T / \Omega_p B_0^2$, ecuación (3.16), como función de $\beta_{\parallel p}$ para $R_p = R_e = 1$, $\kappa_e = \kappa_p \rightarrow \infty$ y distintos valores de $\beta_{\parallel e} / \beta_{\parallel p}$ entre 1 y 5. La línea discontinua corresponde a $n_p v_A W_T / \Omega_p B_0^2 = \beta_{\parallel p}$.

de las fluctuaciones crece de forma exponencial a medida que $\beta_{\parallel p}$ aumenta. También se observa que las fluctuaciones disminuyen rápidamente cuando $\beta_{\parallel p}$ baja. Para el caso $\beta_{\parallel e} / \beta_{\parallel p} = 1$ y para altas temperaturas $\beta_{\parallel p} > 10$, W_T crece de forma lineal con la temperatura, indicando que el movimiento térmico de las partículas es dominante por sobre la dinámica de los campos electromagnéticos.

Notemos que el eje vertical en la figura 3.10 alcanza valores del orden de 10^3 , lo cual podría parecer contradictorio, puesto que las fluctuaciones magnéticas debieran ser pequeñas en comparación con B_0 . Sin embargo, como $n_p v_A / \Omega_p B_0^2 = c / 4\pi e B_0 v_A$ y $c / v_A = 10^4$, entonces la energía de las fluctuaciones magnéticas en la figura 3.10 cumple $W_T / e B_0 < 0.1$ (recordemos que ambos, W_T y $e B_0$, tienen unidades de energía/distancia). Para temperaturas bajas, por ejemplo $\beta_{\parallel p} = 10^{-3}$, esta energía es del orden de $W_T / e B_0 \sim 10^{-9}$.

Lo discutido hasta ahora sugiere que, si el plasma se encuentra fuera del equilibrio a bajas temperaturas, entonces los procesos que lo lleven a un estado estacionario

ocurrirán en ausencia de dispersión (*scattering*) por fluctuaciones electromagnéticas. Por otro lado, para valores grandes de $\beta_{\parallel p}$, la dispersión no coherente producida por las fluctuaciones espontáneas no es despreciable, por lo que puede competir con la energía de los modos normales [27]. Si la amplitud de los modos normales no excede el nivel de las fluctuaciones espontáneas, entonces estas ondas no serán observables.

Cabe destacar que los resultados de las figuras 3.10 y 3.11 son consistentes con simulaciones híbridas unidimensionales [28, 29, 107, 108], donde se demuestra que las fluctuaciones magnéticas escalan como $\beta_{\parallel p}^\alpha$, con $0.5 < \alpha < 1$ para $0.1 < \beta_{\parallel p} < 1$. Esta tendencia también ha sido observada en experimentos del *Large Experiment on Instabilities and Anisotropies* (LEIA) para plasmas con grandes valores de $\beta_{\parallel p}$ [109].

3.1.4. Modos electromagnéticos longitudinales

En esta sección nos concentraremos en estudiar la propagación de ondas longitudinales, las cuales corresponden a oscilaciones electrostáticas propagándose a lo largo del campo magnético de fondo. Por las ecuaciones de Maxwell, se demuestra que las fluctuaciones magnéticas longitudinales son nulas ($\langle |\delta \vec{B}_z|^2 \rangle = 0$), mientras que la ecuación (3.10) demuestra que las fluctuaciones en densidad pueden ser descritas como perturbaciones en la dirección de \mathbf{k} .

En la figura 3.12 se muestran las soluciones de la relación de dispersión para ondas longitudinales $\Lambda_{zz} = 0$, propagándose en plasmas de protones ($\nu = p$) y electrones ($\nu = e$) isotrópicos ($R_\nu = 1$), isotérmicos ($\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e} = 0.3$) y Maxwellianos ($\kappa_\nu \rightarrow \infty$). Al igual que en la figura 3.3, mostramos los modos principales en el panel los paneles (a) y (c), y los modos secundarios en los paneles (b) y (d).

En la figura 3.12(a) identificamos los modos de *Langmuir* (L) y *protón-acústico* (S). Estos modos son también soluciones de la relación de dispersión en plasmas

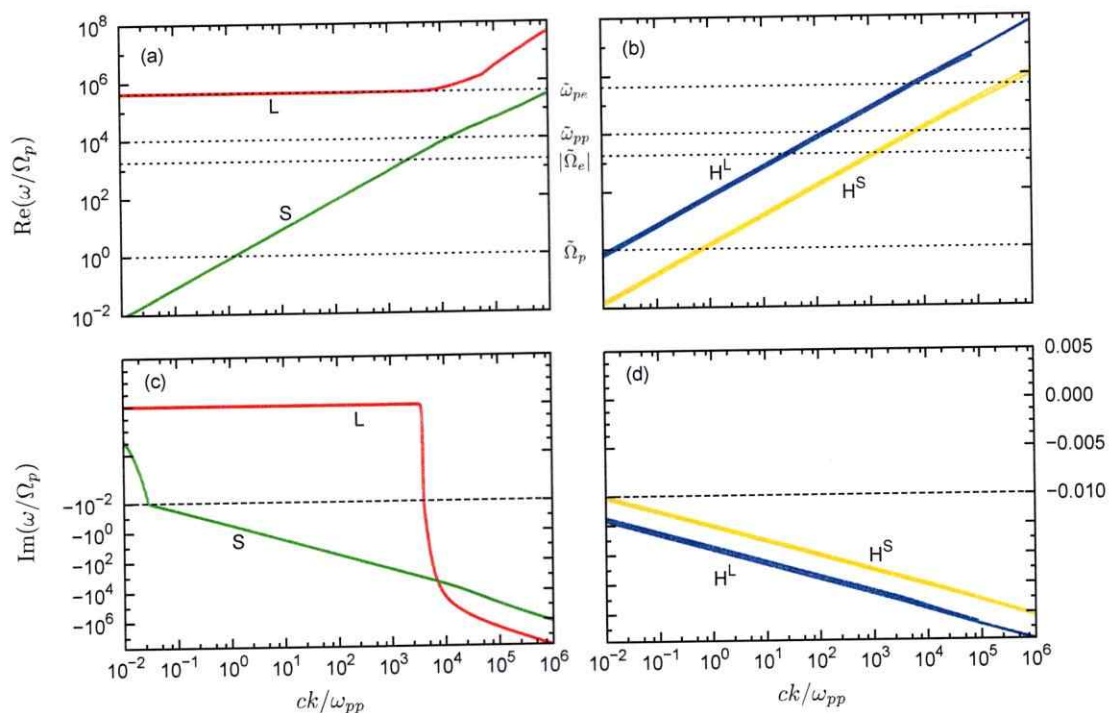


Figura 3.12: Relación de dispersión $\Lambda_{zz} = 0$, ecuación (3.3), para ondas longitudinales propagándose a lo largo de \mathbf{B}_0 en plasmas de protones y electrones isotrópicos ($R_p = R_e = 1$), isotérmicos ($\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e} = 0.3$) y Maxwellianos ($\kappa_p = \kappa_e \rightarrow \infty$). (a) Parte real de la frecuencia normalizada, $\text{Re}(\omega/\Omega_p)$, como función del número de onda normalizado, ck/ω_{pp} , para los modos protón-acústico (S) y de Langmuir (L). (b) Parte real de las frecuencias para los modos secundarios (H^L y H^S). (c) y (d) tasa de crecimiento/amortiguación, $\text{Im}(\omega/\Omega_p)$, para los modos antes mencionados.

tipo fluidos, razón por la que los catalogamos como “principales”, al igual que como lo hicimos para los modos transversales (sección 3.1.2). Sin embargo, estos modos son altamente amortiguados si consideramos efectos cinéticos, como se observa en la figura 3.12(c).

Para valores pequeños del número de onda, el modo protón-acústico (S) cumple con la relación de dispersión $\omega = c_s k$, donde

$$c_s = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{\nu} u_{\parallel \nu}^2}$$

es la velocidad del sonido en el plasma. Es decir, estas ondas tienen las mismas propiedades que las ondas de sonido. Por otro lado, para grandes valores de k y en plasmas semifríos, la frecuencia de estas ondas tiende a ω_{pp} . Estas dos características les dan el nombre "protón-acústico". Sin embargo, notemos que para plasmas calientes, este modo suele no cumplir con la condición $\omega \rightarrow \omega_{pp}$ para $ck/\Omega_p \gg 1$, como se puede observar en la figura 3.12(a).

El modo de Langmuir (L) corresponde a oscilaciones de alta frecuencia, de forma similar a los modos ordinario y extraordinario discutidos en la sección 3.1.2, y su relación de dispersión puede ser aproximada por $\omega^2 = \sum_{\nu} \omega_{p\nu}^2 + c_s^2 k^2$.

En las figuras 3.12(b) y (d) mostramos un grupo de modos que convergen a $\omega = 0$ para $ck/\omega_{pp} \rightarrow 0$, marcados como H^L y H^S , que también son solución de $\Lambda_{zz} = 0$ pero que existen sólo en plasmas cinéticos, por lo cual también serán llamados "secundarios". Al igual que para los modos transversales, existe un conjunto infinito de modos altamente amortiguados similares a los mostrados en la figura 3.12(b), donde mostramos sólo los dos modos menos amortiguados de cada grupo, H^L y H^S .

Como en el caso de los modos transversales, los modos longitudinales secundarios también definen una región de amortiguación en el espectro de frecuencias. En la figura 3.13 mostramos las soluciones de la relación de dispersión consideradas en la figura 3.12. Los modos principales L y S son amortiguados para frecuencias delimitadas por los modos secundarios H^L y H^S (región coloreada en la figura 3.13). Por lo tanto, siguiendo la discusión de capítulos anteriores, esperamos que el espectro de las fluctuaciones de densidad esté también acotado por los modos longitudinales secundarios.

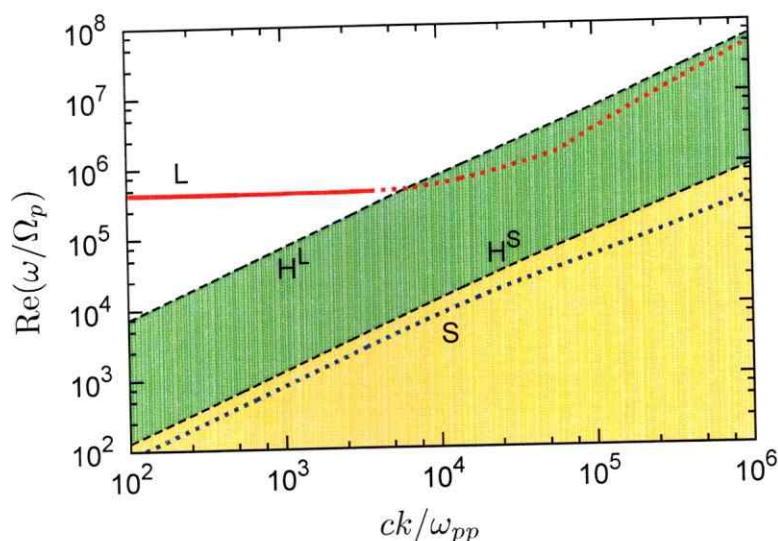


Figura 3.13: Soluciones de la relación de dispersión $\Lambda_{zz} = 0$, mostradas en la figura 3.12. Las líneas sólidas corresponden a los modos principales: Langmuir (L) y protón-acústico (S); las líneas segmentadas son los modos secundarios H^L y H^S de menor amortiguación. Las líneas punteadas corresponden a las frecuencias para las cuales los modos principales son amortiguados con $\text{Im}(\omega/\Omega_p) < -10^{-3}$, que coinciden con la región de frecuencias delimitada por los modos secundarios (región coloreada).

3.1.5. Fluctuaciones de densidad

En la figura 3.14 mostramos la intensidad de las fluctuaciones de densidad de carga, ecuación (3.10), para los mismos parámetros de la figura 3.12. Al igual que para las fluctuaciones magnéticas, los modos secundarios parecen acotar el espectro de frecuencias de las fluctuaciones longitudinales. Notemos que estas fluctuaciones son intensas dentro de la región definida por los modos secundarios H^L y H^S , lo cual es consistente con que el modo protón-acústico (S) sea altamente amortiguado para esas frecuencias. Las fluctuaciones espontáneas se intensifican para frecuencias para las cuales el modo de Langmuir es amortiguado, lo cual es consistente con observaciones del ISEE3 [20] y STEREO [110] en el viento solar y resultados teóricos [21, 30, 111,

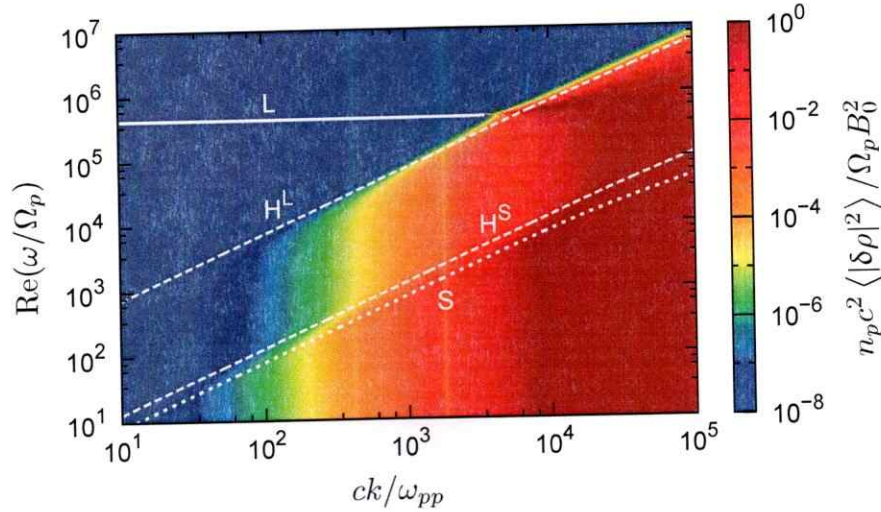


Figura 3.14: Fluctuaciones de densidad de carga, ecuación (3.10), para plasmas de protones y electrones isotrópicos ($R_e = R_p = 1$), isotérmicos ($\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e} = 0.3$) y Maxwellianos ($\kappa_p = \kappa_e \rightarrow \infty$).

112].

3.2. Propagación oblicua

Por lo general, las nueve componentes del tensor de susceptibilidad $\chi_{ij}^{(\nu)}$ (2.37) y el tensor de dispersión Λ_{ij} (2.40) son distintas de cero cuando la dirección de propagación de la onda no es paralela al campo magnético de fondo \mathbf{B}_0 . Esto hace difícil, al menos numéricamente, distinguir las ondas longitudinales de las transversales (respecto a \mathbf{k}), lo cual requiere diagnósticos de polarización, helicidad, entre otros, para su identificación [60, 113].

Por otro lado, el tensor de susceptibilidad en (2.37) está escrito en términos de sumas infinitas, cuya convergencia está asegurada sólo para valores de $\varrho_\nu = k_\perp u_{\perp\nu} / \Omega_\nu$ tales que $|\varrho_\nu| < 2$. De hecho, las funciones $\Xi_n(\varrho)$, definidas en la ecuación (A.22), convergen rápidamente a cero para $n > 1$ y $|\varrho| < 2$, como se puede ver en la figu-

ra A.2(a). Esto indica que es suficiente evaluar los términos con $n = \{-1, 0, 1\}$ en la ecuación (2.37) cuando el ángulo de propagación respecto a \mathbf{B}_0 es pequeño. Sin embargo debemos mencionar que, como discutimos en la sección 2.3, las partículas resonantes [aquellas con velocidades que cumplen (2.72)] contribuyen a la parte imaginaria del tensor de susceptibilidad y, por lo tanto, a la parte imaginaria de las frecuencias, por lo que el argumento anterior, donde nos restringimos a $|n| < 1$, es cierto sólo para la parte real de las frecuencias.

En la figura 3.15 mostramos un diagrama típico de la relación de dispersión más general $\det(\Lambda_{ij}) = 0$ cuando el ángulo de propagación es $\theta = 10^\circ$, donde $\tan \theta = k_\perp/k_\parallel$. Aun con lo dicho anteriormente, reconocemos varios de los modos discutidos en secciones anteriores, aunque no podemos decir, de los gráficos, que siguen siendo transversales, longitudinales o de alguna polarización. Si hubiéramos considerado sumas con n mayores, habríamos encontrado modos secundarios que convergen en los distintos armónicos $\omega = n\Omega_\nu$.

Ya que las partículas en el medio se mueven aleatoriamente, entonces no deberían existir direcciones privilegiadas para la propagación de estas ondas. Es por esto, que es necesario estudiar el caso más general.

Sabemos que las fluctuaciones de densidad son debidas a ondas longitudinales en el plasma. En la figura 3.16 mostramos las fluctuaciones magnéticas $\langle |\delta \vec{B}_x|^2 \rangle$ y las de densidad $\langle |\delta \rho|^2 \rangle$ para los mismos parámetros de la figura 3.15. También en este caso, las fluctuaciones son más intensas cerca de los modos principales. Las fluctuaciones parecen ser acotadas, en este caso, por los distintos modos secundarios del sistema.

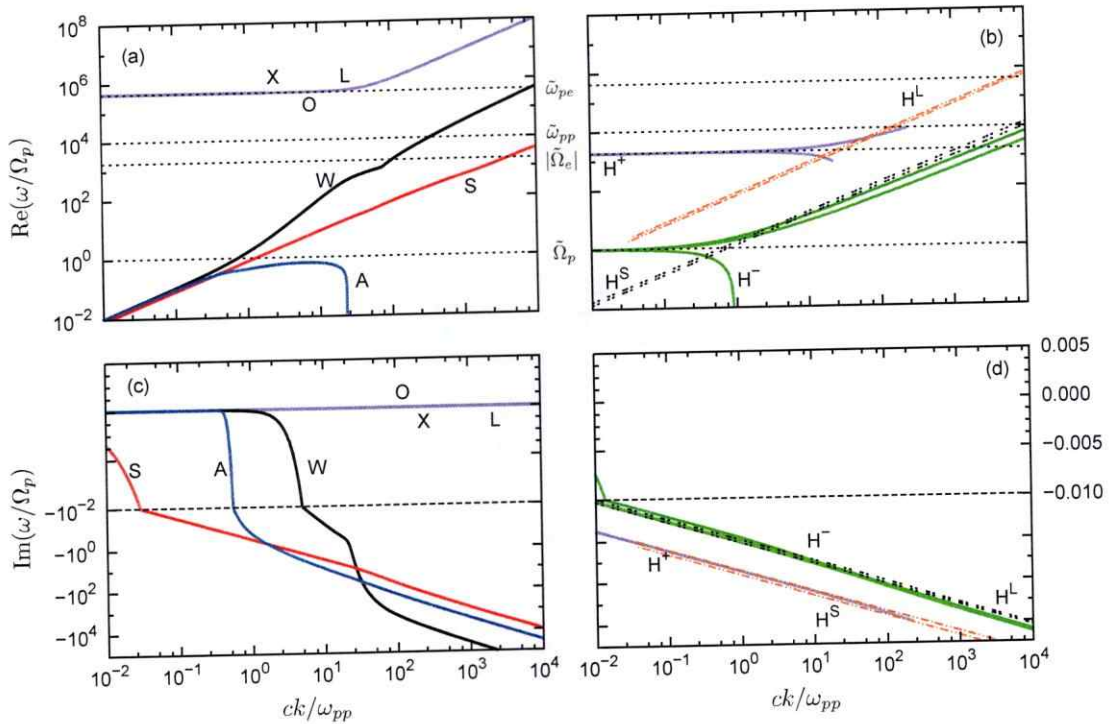


Figura 3.15: Relación de dispersión $\det(\Lambda_{ij}) = 0$, ecuación (2.44), para plasmas de protones y electrones isotrópicos ($R_p = R_e = 1$), isotérmicos ($\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e}$) y Maxwellianos ($\kappa_p = \kappa_e \rightarrow \infty$), para ángulo de propagación $\theta = 10^\circ$. (a) y (c) Parte real e imaginaria de la frecuencia para los modos principales identificados en las secciones 3.1.2 y 3.1.4. (b) y (d) Lo mismo, pero para los modos secundarios.

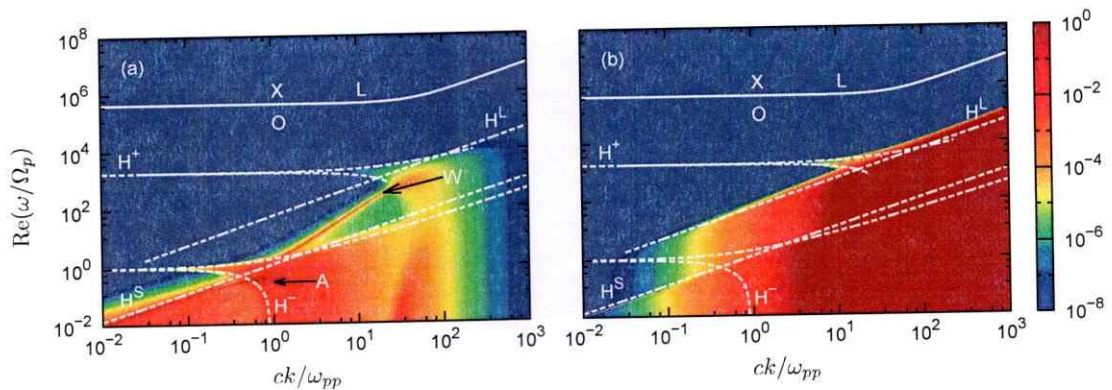


Figura 3.16: Fluctuaciones magnéticas $n_p \Omega_p \langle |\delta \tilde{B}_x|^2 \rangle / B_0^2$ (a) y de densidad $n_p c^2 \langle |\delta \tilde{\rho}|^2 \rangle / \Omega_p B_0^2$ (b), para los mismos parámetros que la figura 3.15.

Capítulo 4

Análisis de estabilidad para plasmas con anisotropía térmica

Se puede demostrar que las soluciones al sistema (3.2) y (3.3) para plasmas isotrópicos, como en los considerados en el capítulo 3, son siempre estables [114] en el sentido que para toda frecuencia se tiene $\text{Im}(\omega) \leq 0$. Sin embargo, los plasmas espaciales suelen presentar distribuciones de velocidades que no son Maxwellianas. Esto puede observarse en términos de una anisotropía térmica ($R_\nu \neq 1$), de especies de iones o electrones con velocidades de deriva $U_\nu \neq 0$, o bien plasmas con una gran porción de partículas con velocidades mayores que la velocidad térmica (cuantificado por $|\kappa_\nu| < \infty$). Estas características representan fuentes de *energía libre*, que pueden hacer que una onda de frecuencia ω se excite, de modo que $\text{Im}(\omega) > 0$, y la amplitud de esta onda crecerá exponencialmente en el tiempo.

La clasificación de las *inestabilidades* en plasmas ante ondas electromagnéticas depende de las propiedades dispersivas del medio y el tipo de energía libre presente en él [60]. La naturaleza de estas inestabilidades puede ser clasificada según la escala: Macroscópicas cuando las longitudes de onda son grandes y las propiedades del sistema pueden ser bien descritas por ecuaciones tipo fluido; y microscópicas cuando las longitudes de onda son cortas y si son debidas a desviaciones de las distribucio-

nes de velocidad respecto al equilibrio termodinámico. En general, las colisiones en el viento solar son despreciables y no son capaces de mantener al sistema en equilibrio termodinámico [13,115], por lo que usualmente existe energía libre para excitar inestabilidades.

Mediciones en el viento solar sugieren que existen límites para la anisotropía térmica tanto de protones [13,31], de electrones [116] como de partículas alfa [117], los cuales parecen ser compatibles con la aparición de inestabilidades según la teoría cinética lineal [31,32,116]. La teoría de fluctuaciones discutida en la sección 2.2 es válida si las inestabilidades en el plasma no son demasiado grandes, de modo que el sistema se pueda considerar estacionario por un tiempo suficientemente grande para que existan correlaciones en ese lapso de tiempo.

En este capítulo, nos centraremos en analizar las inestabilidades provocadas por anisotropías térmicas en plasmas de protones y electrones Maxwellianos y definiremos los umbrales de anisotropía para los cuales el plasma puede ser considerado estacionario. Entonces, analizaremos las fluctuaciones electromagnéticas para anisotropías bajo este umbral de estabilidad. Finalmente, compararemos estos resultados con observaciones del viento solar [13].

4.1. Tasas de crecimiento de ondas electromagnéticas

Notemos que la componente longitudinal del tensor de dispersión, ecuación (3.3), no depende de la anisotropía, por lo menos para propagación paralela. Esto significa que la descripción de los modos en la figura 3.12 no cambia para $R_\nu \neq 1$.

Los modos transversales, según la ecuación (3.2), dependen explícitamente de R_ν . Aunque la estructura de los modos secundarios presentes en la figura 3.3(b) no

cambia, cualitativamente, para valores de $R_\nu \neq 1$, los modos normales se vuelven inestables en la región de amortiguación definida por los modos secundarios H^\pm .

En la figura 4.1 mostramos la parte real e imaginaria de los modos principales, Alfvén (A^-) y *whistler*-ciclotrón (W^+), a frecuencias bajas $\omega \sim \Omega_p$ para plasmas de protones y electrones Maxwellianos ($\kappa_\nu \rightarrow \infty$), isotérmicos ($\beta_{\parallel\nu} = 3$) y electrones isotrópicos ($R_e = 1$), para distintos valores de la anisotropía de los protones R_p . Las curvas son simétricas respecto al eje vertical en $k = 0$.

Como se muestra en la figura 4.1, la rama de Alfvén-ciclotrón adquiere frecuencias con parte imaginaria positiva para valores de $R_p > 1$. Diremos, en este caso, que hay una *inestabilidad proton-ciclotrón*. Similarmente, el modo *whistler*-ciclotrón es inestable cuando $R_p < 1$, situación que corresponde a una *inestabilidad protón-firehose* [32]. El máximo de estas inestabilidades, cuantificado por $\text{Im}(\omega)_{\text{máx}}$, está marcado con círculos blancos en la figura 4.1. En ambos casos, la parte real de la frecuencia, $\text{Re}(\omega)$, y el número de onda k correspondiente al máximo de la inestabilidad, crecen a medida que R_p se aleja de la unidad.

La inestabilidad tipo *protón-firehose* es análoga al movimiento violento de las mangueras (*hose* en inglés) cuando un flujo rápido de agua pasa a través de ellas. Cuando el plasma se mueve a lo largo de tubos de campo magnético, ejerce una fuerza centrífuga en las zonas donde este tubo se encuentra curvado, lo que hará que su curvatura aumente. A su vez, existen dos fuerzas que se oponen a esta fuerza centrífuga: la presión térmica en el plano perpendicular al tubo de flujo magnético, y el estrés magnético del tubo. Si estas dos fuerzas no son suficientes para contrarrestar los efectos de la fuerza centrífuga, entonces el plasma se vuelve inestable.

Notemos que ambos tipos de inestabilidad dependen de la anisotropía de los protones, R_p . Cambios en R_e no afectan a las características de estos modos, debido

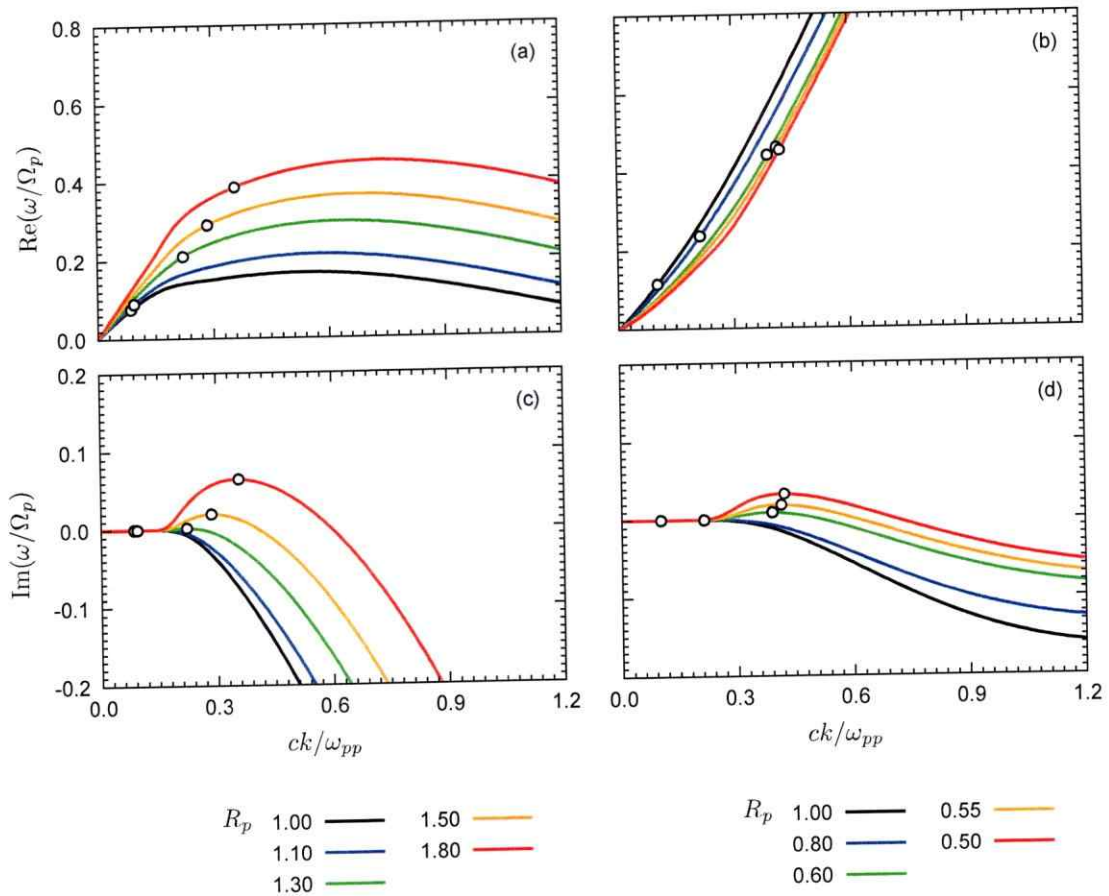


Figura 4.1: Soluciones de la relación de dispersión $\Lambda_{\pm} = 0$ para plasmas de protones ($\nu = p$) y electrones ($\nu = e$) con $\kappa_{\nu} \rightarrow \infty$, $\beta_{\nu} = 3$, $R_e = 1$, y distintos valores de R_p entre 0.5 y 1.8. (a) y (c) Parte real e imaginaria de la frecuencia normalizada, ω/Ω_p , como función del número de onda normalizado, ck/ω_{pp} , para el modo Alfvén-ciclotrón (A^-) y valores de R_p entre 1.0 y 1.8. (b) y (d) Modo *whistler*-ciclotrón (W^+) para valores de R_p entre 0.5 y 1.0. Las figuras son simétricas respecto al eje vertical en $k = 0$. Los círculos blancos indican las frecuencias y números de onda donde ocurre el máximo de la tasa de crecimiento $\text{Im}(\omega)_{\text{máx}}$.

a que es muy poco probable que los electrones resuenen con estas ondas de baja frecuencia. Por otro lado, una gran porción de la distribución de protones resuena con estas ondas, y por eso el comportamiento respecto a R_p . Esto puede ser cuantificado usando la condición de resonancia (2.72) o equivalentemente, mediante el factor de resonancia $|\xi_{\pm}^{(n)}|$ definido en (2.91). Recordemos que $|\xi_{\nu}^{(n)}| \gg 1$ corresponde a una porción muy pequeña de la función de distribución de la especie ν que resuena con una onda de frecuencia ω y número de onda k_{\parallel} (por lo que hablaremos de partículas *no resonantes*), mientras que $|\xi_{\nu}^{(n)}| \lesssim 1$ equivale a una gran porción de partículas resonantes con esa onda.

En la figura 4.2 graficamos $|\xi_p^{(+)}|$ y $|\xi_e^{(+)}|$ para los modos de la figura 4.1. Según el criterio antes mencionado, los electrones no son resonantes con las ondas que presentan inestabilidades, al contrario de los protones que sí lo son. Esto indica que las propiedades dispersivas de las ondas a frecuencias bajas $\omega \sim \Omega_p$ dependen más de los parámetros microscópicos de los protones que de los electrones. Así, cambios en R_e o en β_e no afectan a la discusión anterior. Notemos que el factor de resonancia $|\xi_{\nu}^{(+)}|$ disminuye a medida que k y $\text{Im}(\omega)_{\text{máx}}$ aumentan, lo que sugiere que el plasma es más inestable mientras más partículas resuenen con estas ondas.

Para frecuencias altas $\omega \sim \Omega_e$, el modo *whistler*-ciclotrón presenta propiedades similares a las mostradas para el modo Alfvén-ciclotrón. Las inestabilidades relacionadas con el modo *whistler*-ciclotrón se deben a cambios de $R_e > 1$, en cuyo caso hablaremos de *inestabilidad electrón-ciclotrón*. Los electrones son resonantes ($|\xi_e^+| \lesssim 1$) con las ondas *whistler*-ciclotrón, mientras que los protones son no resonantes ($|\xi_p^+| \gg 1$), así que cambios en R_p no afectan a los modos de altas frecuencias $\omega \sim \Omega_e$. La inestabilidad *electrón-firehose* se debe al modo ordinario, pero como se mencionó en la sección 3.1.2, estas ondas resuenan con electrones a altas velocidades

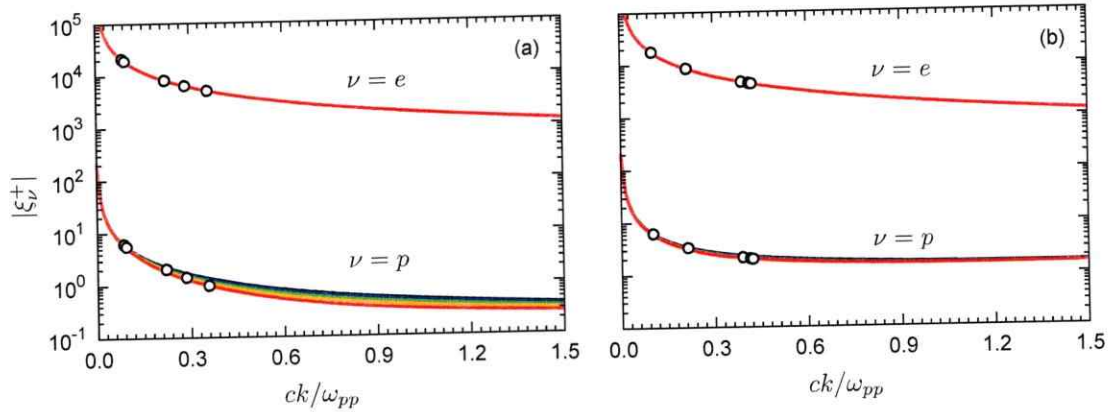


Figura 4.2: Factor de resonancia $|\xi_\nu^{(+)}$ de protones ($\nu = p$) y electrones ($\nu = e$) respecto a los modos inestables mostrados en la figura 4.1. (a) Modo Alfvén-ciclotrón, y (b) modo *whistler*-ciclotrón. Los círculos blancos corresponden a los puntos donde ocurre el máximo de la tasa de crecimiento $\text{Im}(\omega)_{\text{máx}}$.

($|\xi_e^+| \gg 1$), por lo que son necesarias anisotropías extremas $R_e \ll 1$ ($T_{\perp e} \ll T_{\parallel e}$) para excitar estas ondas. Esta última condición se relaja para plasmas fuertemente magnetizados, por ejemplo, en la magnetósfera terrestre, donde $\Omega_e \sim \omega_{pe}$ [118].

El hecho de que los electrones no sean resonantes con ondas de baja frecuencia ($|\xi_e^{(+)| \gg 1$) y los protones no lo sean con ondas de alta frecuencia ($|\xi_p^{(+)| \gg 1$), nos permite usar la aproximación de electrones fríos y protones masivos, respectivamente. Con esto, podemos estimar para qué valores de k podemos encontrar una onda estable $\text{Im}(\omega) = 0$. En efecto, notemos que el factor de resonancia $\xi_\nu^{(n)}$, definido en (2.91), aparece como argumento de la función $Z(\xi_\nu^{(n)})$ [ver ecuación (2.83)], por lo que podemos usar la aproximación para argumentos grandes (ver apéndice B)

$$Z(\xi) \simeq -\frac{1}{\xi}, \quad \xi \gg 1. \quad (4.1)$$

Reemplazando en la ecuación (3.2) para plasmas bi-Maxwellianos $\kappa_\nu \rightarrow \infty$, se tiene que la relación de dispersión para ondas transversales de frecuencia baja $\omega \sim \Omega_p$

(donde $|\xi_e^{(n)}| \gg 1$), se puede escribir como

$$\omega_{pe}^2 \frac{\xi_e^{(0)}}{\xi_e^{(\pm)}} = \omega^2 - c^2 k^2 + \omega_{pp}^2 [R_p - 1 + (\xi_p^{(0)} + (R_p - 1)\xi_p^{(\pm)}) Z(\xi_p^{(\pm)})] . \quad (4.2)$$

Para ondas de frecuencias altas $\omega \sim \Omega_e$, simplemente cambiamos los índices $e \leftrightarrow p$ en la ecuación anterior.

Si exigimos que ω sea puramente real [$\text{Im}(\omega) = 0$], entonces las partes real e imaginaria de la ecuación anterior se pueden separar sin dificultad (ver apéndice B), de donde, respectivamente,

$$\omega_{pe}^2 \frac{\xi_e^{(0)}}{\xi_e^{(\pm)}} = \omega^2 - c^2 k^2 + \omega_{pp}^2 (R_p - 1) , \quad (4.3)$$

$$0 = \xi_p^{(0)} + (R_p - 1)\xi_p^{(\pm)} . \quad (4.4)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se encuentra

$$\frac{\omega_c}{\Omega_p} = \pm \frac{R_p - 1}{R_p} , \quad (4.5)$$

$$\frac{c^2 k_c^2}{\omega_{pp}^2} = \frac{\Omega_p^2}{\omega_{pp}^2} \left(\frac{R_p - 1}{R_p} \right)^2 + (R_p - 1) - \frac{m_p}{m_e} \frac{R_p - 1}{R_p - 1 + \frac{m_p}{m_e} R_p} , \quad (4.6)$$

donde el signo (+) corresponde a helicidad negativa y (-) a helicidad positiva, según nuestra notación. Las ecuaciones (4.5) y (4.6) indican que, siempre que $R_p \neq 1$, existirá una onda de frecuencia $\omega_c \neq 0$ y $k_c \neq 0$ que es estable $\text{Im}(\omega_c) = 0$. Por continuidad de las soluciones, entonces tiene que existir una onda que es inestable, por lo menos, en el intervalo $0 < k < k_c$.

4.2. Umbrales de inestabilidad

Como vimos en la discusión de las ecuaciones (4.5) y (4.6), siempre existirán inestabilidades cuando $R_e \neq 1$ o $R_p \neq 1$. En este caso, el inverso de $\text{Im}(\omega)_{\text{máx}}$ puede ser interpretado como la cantidad de tiempo τ que le toma a la inestabilidad

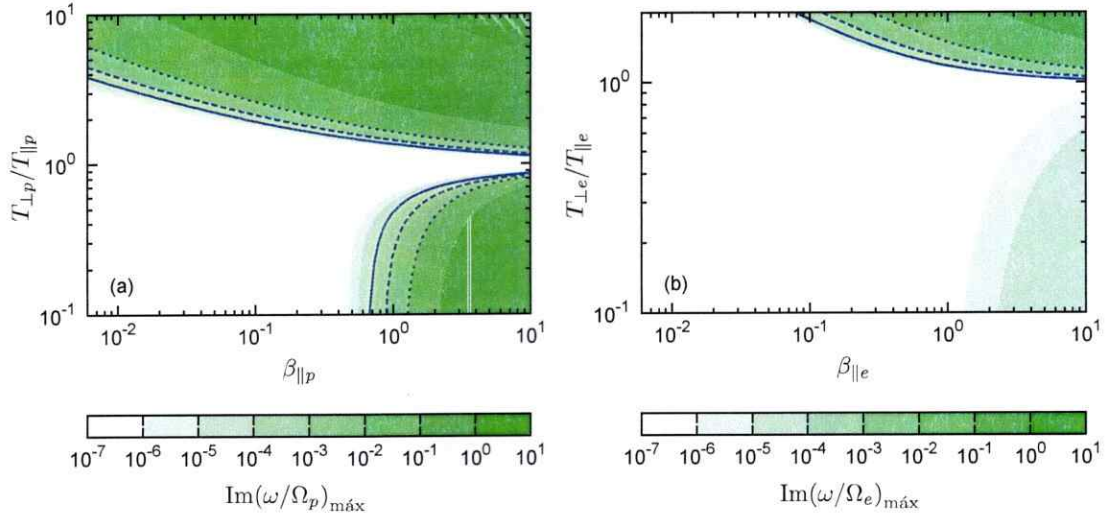


Figura 4.3: Máximo de la tasa de crecimiento, $\text{Im}(\omega/\Omega_\nu)_{\text{máx}}$, como función de $\beta_{\parallel\nu}$ y $R_\nu = T_{\perp\nu}/T_{\parallel\nu}$, para un plasma de protones y electrones isotérmicos ($\beta_{\parallel e} = \beta_{\parallel p}$) y Maxwellianos ($\kappa_e = \kappa_p \rightarrow \infty$). (a) $\nu = p$, con electrones isotrópicos, $R_e = 1$. (b) $\nu = e$, con protones isotrópicos, $R_p = 1$.

desarrollarse en el plasma. Si $\text{Im}(\omega)_{\text{máx}}$ es pequeño comparado con Ω_p , esto representa un tiempo suficientemente largo para que el plasma sea considerado *estacionario* y, por lo tanto, el teorema de fluctuación-disipación puede ser aplicado en estos casos.

En la figura 4.3(a) mostramos la tasa de crecimiento $\text{Im}(\omega/\Omega_p)_{\text{máx}}$ como función de $\beta_{\parallel p}$ y R_p , calculada a partir de curvas similares a las de la figura 4.1 para propagación paralela ($k_\perp = 0$). Por simplicidad, consideramos electrones isotrópicos ($R_e = 1$) y con la misma temperatura que la de los protones ($\beta_{\parallel e} = \beta_{\parallel p}$). Similarmente, en la figura 4.3(b) graficamos $\text{Im}(\omega/\Omega_e)_{\text{máx}}$ como función de $\beta_{\parallel e}$ y R_e , suponiendo protones isotrópicos $R_p = 1$ y con temperatura $T_{\parallel p} = T_{\parallel e}$. El rango de los valores de R_p y β_p en el panel (a) corresponde a valores típicos para los protones en el viento solar [13, 32]. Lo mismo para los electrones en el panel (b) [116].

En la figura 4.3(a) reconocemos dos regiones de anisotropía donde aparecen distintas inestabilidades: $R_p < 1$, donde surgen inestabilidades protón-*firehose*, en que

la rama de *whistler* (que es no resonante) adquiere valores de $\text{Im}(\omega) > 0$; y para $R_p > 1$, donde surgen inestabilidades protón-ciclotrón, asociadas al modo resonante de Alfvén-ciclotrón

Similarmente, en la figura 4.3(b) identificamos como una inestabilidad *electrón-ciclotrón* para valores de $R_e > 1$. Existen indicios, para $R_e < 1$, de una inestabilidad *electrón-firehose* con $\text{Im}(\omega/\Omega_e)_{\text{máx}} < 10^{-4}$ en el rango de temperaturas de la figura.

Para efectos prácticos, utilizaremos como umbral de inestabilidad las tasas de crecimiento $\text{Im}(\omega/\Omega_\nu)_{\text{máx}} = 10^{-4}$, es decir, consideraremos estable a una onda que crece exponencialmente en una escala de tiempo mayor que 10^4 gioperíodos, el cual es marcado con línea continua en ambos paneles de la figura 4.3. Para el viento solar a 1 AU, la condición $\text{Im}(\omega/\Omega_p) = 10^{-4}$ corresponde a tiempos del orden de horas, una escala de tiempo suficientemente larga para que el plasma sea considerado estable.

Cabe destacar que mediciones de la anisotropía de los protones en el viento solar [13, 32] parecen estar restringidas por umbrales de inestabilidad como los discutidos en la figura 4.3(a).

4.3. Energía de las fluctuaciones magnéticas

En la figura 4.4 analizamos la energía de las fluctuaciones magnéticas, dada por (3.16), como función de β_ν y R_ν (con $\nu = p, e$). En la figura 4.4, nos hemos restringido a anisotropías para las cuales el plasma puede ser considerado estable, en el sentido que los modos de la relación de dispersión cumplen $\text{Im}(\omega/\Omega_\nu) < 10^{-4}$ (ver figura 4.3). Tanto protones como electrones producen una cantidad finita de fluctuaciones magnéticas incluso si el plasma es estable, $R_\nu \sim 1$, lo cual ya había sido discutido en la figura 3.11. La energía de las fluctuaciones tiende a aumentar junto con $\beta_{\parallel p}$ o $\beta_{\parallel e}$, consistentemente con los resultados de la figura 3.11. También se

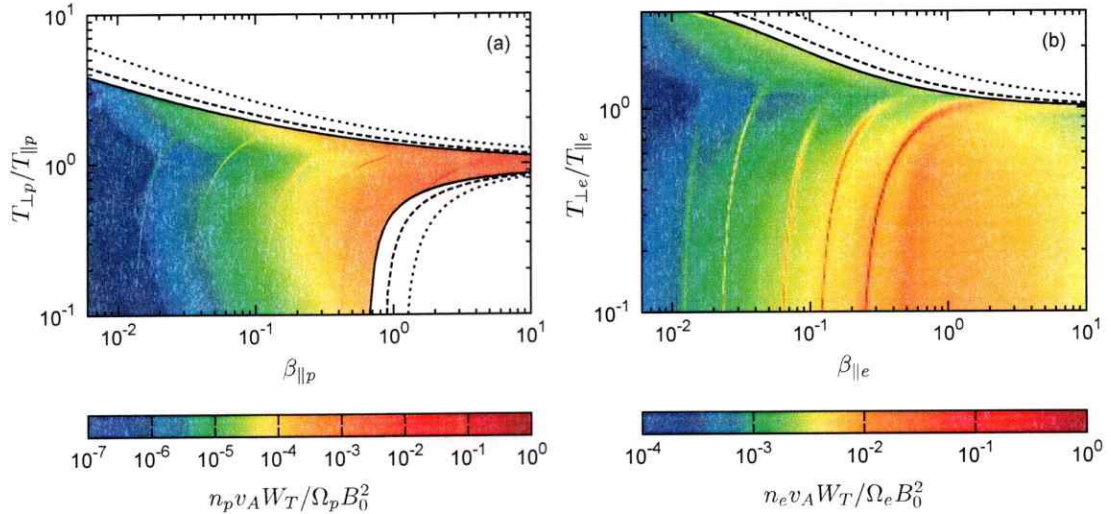


Figura 4.4: Energía de las fluctuaciones magnéticas, W_T definida en (3.16). La escala de colores es logarítmica, correspondiendo a la cantidad adimensional $n_\nu v_A W_T / \Omega_\nu B_0^2$. Las curvas representan los umbrales para los que $\text{Im}(\omega/\Omega_\nu)_{\text{máx}} = 10^{-4}$ (curva sólida), 10^{-3} (curva segmentada) y 10^{-2} (curva punteada). (a) $\nu = p$, con electrones isotrópicos, $R_e = 1$. (b) $\nu = e$, con protones isotrópicos, $R_p = 1$.

observa un incremento en las fluctuaciones magnéticas a medida que la anisotropía se acerca a los límites de inestabilidad en ambos casos de la figura 4.3.

Si bien existen inestabilidades para $\beta_e > 1$ y $R_e < 1$, como muestra la figura 4.3(b), estas tienen tasas de crecimiento menores que $\text{Im}(\omega/\Omega_\nu) = 10^{-4}$. Aun así, las fluctuaciones magnéticas en estas escalas de temperaturas parecen ser influenciadas por estas inestabilidades, como se ve en la figura 4.4(b).

Las fluctuaciones magnéticas escalan esencialmente con $T_{\perp\nu} \propto R_\nu \beta_\nu$, como se puede ver de (3.9), y la densidad de energía de las fluctuaciones, W_T , es del orden de 10^{-10} en unidades de eB_0 para valores de $\beta_\nu < 0.01$. En esas regiones, podrían ocurrir procesos de relajación en ausencia de dispersión térmica. Por otro lado, para valores grandes de $\beta_{\parallel p}$, la dispersión no coherente producida por las fluctuaciones espontáneas no es despreciable, por lo que puede competir con la energía de los

modos normales. Si la amplitud de uno de los modos normales no excede el nivel de las fluctuaciones espontáneas, entonces estas ondas no serán observables.

El nivel de fluctuaciones mostrado en la figura 4.4(a) parece ser consistente con reportes recientes sobre fluctuaciones en el viento solar [13]. También es consistente con simulaciones híbridas de protones y electrones [27]. Con esto, sugerimos que gran parte de las mediciones podrían deberse a fluctuaciones espontáneas que ocurren localmente en el plasma [27]. Notemos que el formalismo usado supone que el plasma se encuentra en estado estacionario y que no existen inestabilidades microscópicas en el medio, por lo que estas fluctuaciones aparecen como una propiedad natural de los plasmas y de sistemas estadísticos en general. Por supuesto, puede haber otras fuentes de fluctuaciones en plasmas, como se ha sugerido con simulaciones híbridas [28, 29], modelos cuasilineales [119] y simulaciones de Vlasov [120], sin embargo, todas ellas exigen plasmas inicialmente inestables a ondas electromagnéticas, por lo que no pueden explicar los procesos que ocurren para valores pequeños de β_ν e incluso cerca de $R_\nu = 1$.

Hasta el momento no existen mediciones de la dependencia de las fluctuaciones magnéticas respecto a $\beta_{\parallel e}$ y R_e , como en la figura 4.4(b). Sin embargo, esperamos que un comportamiento similar al de la figura 4.4(b) se pueda encontrar en plasmas espaciales, de laboratorio y en el viento solar, entre otros [118].

Capítulo 5

Fluctuaciones electromagnéticas en plasmas supratérmicos

Muchas distribuciones de partículas estudiadas en física espacial muestran desviaciones respecto a distribuciones Maxwellianas, que pueden ser modeladas por distribuciones tipo ley de potencias. En particular, existe una familia de funciones usualmente conocidas como *funciones kappa*, originalmente propuesta por Olbert [38] y Vasyliunas [39] en 1968, las cuales suelen describir con mucha precisión la parte de la distribución de bajas energías (comparada con la energía cinética promedio) y la parte de altas energías que cae como ley de potencias.

Las funciones kappa surgen naturalmente desde una entropía generalizada propuesta por Constantino Tsallis en 1988 [121], quien ofrece una base teórica para describir sistemas fuera del equilibrio termodinámico como si se trataran de sistemas en equilibrio termodinámico. Por otro lado, Collier [122] sugiere que las funciones kappa también podrían maximizar la entropía de Boltzmann-Gibbs si se elige otra restricción donde la energía no sea necesariamente constante.

En este capítulo, analizaremos la propagación de ondas y fluctuaciones electromagnéticas en plasmas cuyas funciones de distribución están dadas por (2.73), con $\kappa_\nu > 1/2$ finito. Estas funciones indican que hay una mayor porción de partículas,

comparadas con una distribución Maxwelliana, que se mueven con velocidades mayores a la velocidad térmica, $|v_{\parallel}| > u_{\parallel\nu}$. Esto es, una mayor porción de partículas puede resonar con ondas que cumplan la relación (2.72), y por lo tanto, el plasma podría ser inestable a esas ondas.

Parte de este capítulo ha sido publicado en las referencias [26, 118, 123].

5.1. Relación de dispersión

Es ilustrativo mostrar las curvas de nivel para $\Lambda_{\pm} = 0$ y $\Lambda_{zz} = 0$, las cuales se muestran en la figura 5.1. En este caso, consideramos un plasma no Maxwelliano de protones y electrones con $\kappa_{\nu} = 5$. Al igual que en la figura 3.1, identificamos las soluciones correspondientes a las ondas de helicidad positiva: modo Alfvén-ciclotrón (A^{-}), y ordinario (O^{-}); modos de helicidad negativa: *whistler*-ciclotrón (W^{+}) y extraordinario (O^{+}); los modos longitudinales: Langmuir (L) y protón-acústico (S); y el resto de las soluciones que consideramos como los modos secundarios.

A diferencia de los plasmas Maxwellianos, el número de modos secundarios es finito para funciones kappa. De hecho, se puede demostrar [26, 123] que el número de modos secundarios aumenta en $N_{\nu} = [\kappa_{\nu} - 1]$ por cada especie ν , donde el símbolo $N = [\kappa]$ corresponde al número entero más pequeño que cumple $N \geq \kappa$. Cuando $\kappa_{\nu} \rightarrow \infty$, se tiene que N_{ν} es infinito, indicando que la relación de dispersión admite infinitas soluciones para distribuciones Maxwellianas. En el apéndice B mostramos una derivación de N_{ν} usando las propiedades de las funciones Z_{ν} .

En la figura 5.2 mostramos *todas las soluciones* de la relación de dispersión para plasmas de protones y electrones isotrópicos ($R_p = R_e = 1$), isotérmicos ($\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e} = 0.3$) y con índice $\kappa_p = \kappa_e = 5$. La relación de dispersión es simétrica respecto a k , ya que la distribución de velocidades es simétrica respecto a $v_{\parallel} = 0$.

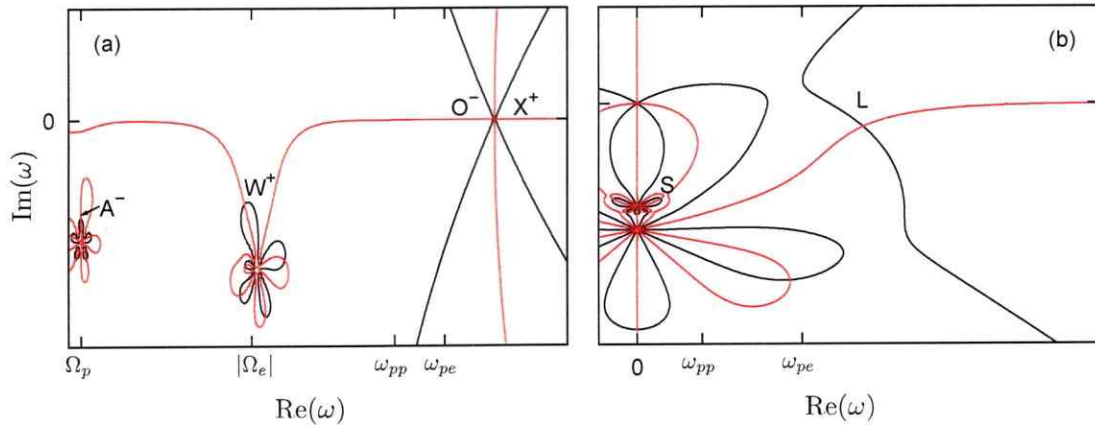


Figura 5.1: Diagrama de las curvas de nivel para la parte real (negro) e imaginaria (rojo) de (a) ondas transversales $\Lambda_{\pm} = 0$ y (b) ondas longitudinales $\Lambda_{zz} = 0$ para un valor de $\mathbf{k} = k_0 \hat{z}$ fijo en plasmas de protones y electrones supratérmicos. Las soluciones de la relación de dispersión corresponden a los puntos donde ambas curvas se cruzan. Los cruces marcados son modos principales de polarización circular negativa (A^- y O^-), positiva (W^+ y X^+) y modos electrostáticos (L y S). Los cruces no marcados son modos secundarios.

Comparando las soluciones de la relación de dispersión mostradas en las figuras 3.3 y 5.2, vemos que la parte real de las frecuencias de los modos principales [panel (a)] no cambia cualitativamente. En particular, los modos ordinario y extraordinario son muy similares en ambos casos, puesto que estos modos dependen débilmente de la temperatura, o bien, de la forma de la distribución de velocidades.

En la figura 5.2(b) mostramos los modos secundarios de polarización circular negativa y positiva (H^- y H^+), que son solución de las relaciones de dispersión $\Lambda_- = 0$ y $\Lambda_+ = 0$, respectivamente. Vemos que uno de los modos secundarios H^- tiene frecuencias $\omega \sim \Omega_p$ para todo valor de k , correspondiente al modo de polarización circular negativa de menor amortiguación. Similarmente, el modo con menor amortiguación del grupo H^+ es el modo con frecuencia $\omega \sim |\Omega_e|$ para todo valor de k . Notemos que esto difiere del caso de plasmas Maxwellianos [figura 3.3(b)], donde no existen modos

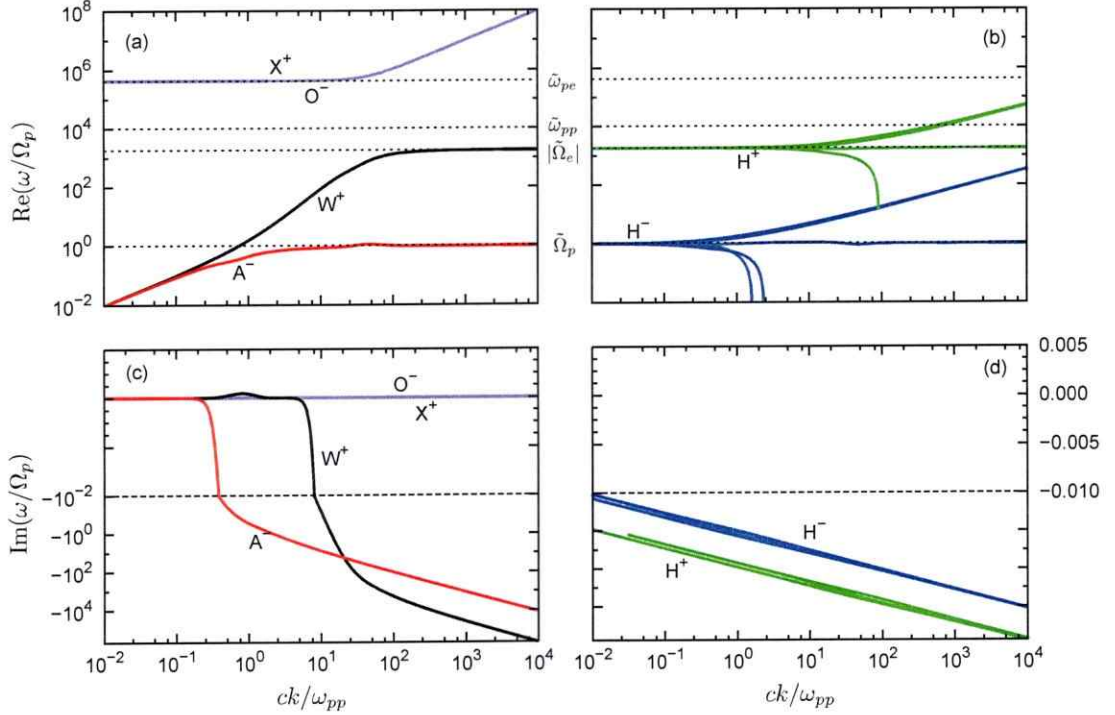


Figura 5.2: Relación de dispersión $\Lambda_{\pm} = 0$, ecuación (3.2), para ondas electromagnéticas propagándose a lo largo de \mathbf{B}_0 en plasmas de protones y electrones isotrópicos ($R_p = R_e = 1$), isotérmicos ($\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e} = 0.3$) y con índice $\kappa_p = \kappa_e = 5$. (a) Modos principales. (b) Modos secundarios. (c) y (d) tasa de crecimiento/amortiguación de los modos en los paneles (a) y (b), respectivamente.

secundarios con frecuencias dentro de la región de amortiguamiento (ver figura 3.4).

Por otro lado, la tasa de amortiguación de los modos principales [figura 5.2(c)] se mueve a menores valores del número de onda, en comparación con 3.3(c). Esto rompe con la intuición ganada para plasmas Maxwellianos, pues esperábamos que los modos principales fueran amortiguados para frecuencias delimitadas por los modos secundarios.

Vemos, además, que el modo *whistler*-ciclotrón presenta una pequeña inestabilidad con $\text{Im}(\omega/\Omega_p)_{\text{máx}} \sim 5 \times 10^{-4}$. De hecho, se esperaba que este modo en particular fuese inestable, puesto que $\kappa_{\nu} < \infty$ representa un exceso de partículas con veloci-

des a lo largo de \mathbf{B}_0 . Si definimos una anisotropía efectiva R_{eff} como la razón entre el ancho de la distribución en la dirección de v_{\perp} y el ancho en la dirección de v_{\parallel} , tendríamos que $R_{\text{eff}} < 1$, que es consistente con una inestabilidad tipo *firehose* (ver capítulo 4).

En la figura 5.3 mostramos la tasa de crecimiento del modo *whistler*-ciclitrón para distintos valores de $\kappa_p = \kappa_e$ y $\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e}$. Notamos que la inestabilidad crece con $\beta_{\parallel p}$ [figura 5.3(c)], y decrece con κ_p [figura 5.3(d)]. Esto se puede entender en términos de la anisotropía efectiva R_{eff} puesto que, en el primer caso, R_{eff} decrece debido al aumento de partículas con velocidades en la dirección de v_{\parallel} , mientras que en el segundo caso, el ancho de la distribución de velocidades decrece cuando κ_p aumenta, por lo que R_{eff} aumenta.

En la figura 5.4 mostramos las fluctuaciones electromagnéticas para $\kappa_p = \kappa_e = 5$, $\beta_p = \beta_e = 0.3$ y $R_p = R_e = 1$. Los parámetros son los mismos que en la figura 5.2. Las fluctuaciones magnéticas se concentran alrededor de los modos principales, al igual que en los casos discutidos en el capítulo 3. Sin embargo, la estructura de estas fluctuaciones no está limitada por la de los modos secundarios. Notemos que en la figura 5.4 no mostramos los modos secundarios más amortiguados, sino los que tienen frecuencias más lejanas respecto a Ω_p y Ω_e . A medida que κ_{ν} aumenta, también lo hace el número de soluciones de la relación de dispersión y las fluctuaciones tienden a ser acotadas cuando $\kappa_{\nu} \gg 1$. En general, esta propiedad para plasmas supratérmicos es válida para diferentes valores de β_{ν} .

Existen dos interpretaciones al hecho de que los modos secundarios no acoten las fluctuaciones. La primera es que la función de distribución con $\kappa_{\nu} < \infty$ es efectivamente más caliente que una Maxwelliana por el exceso de partículas supratérmicas y, por lo tanto, las fluctuaciones pueden crecer para frecuencias fuera de la región

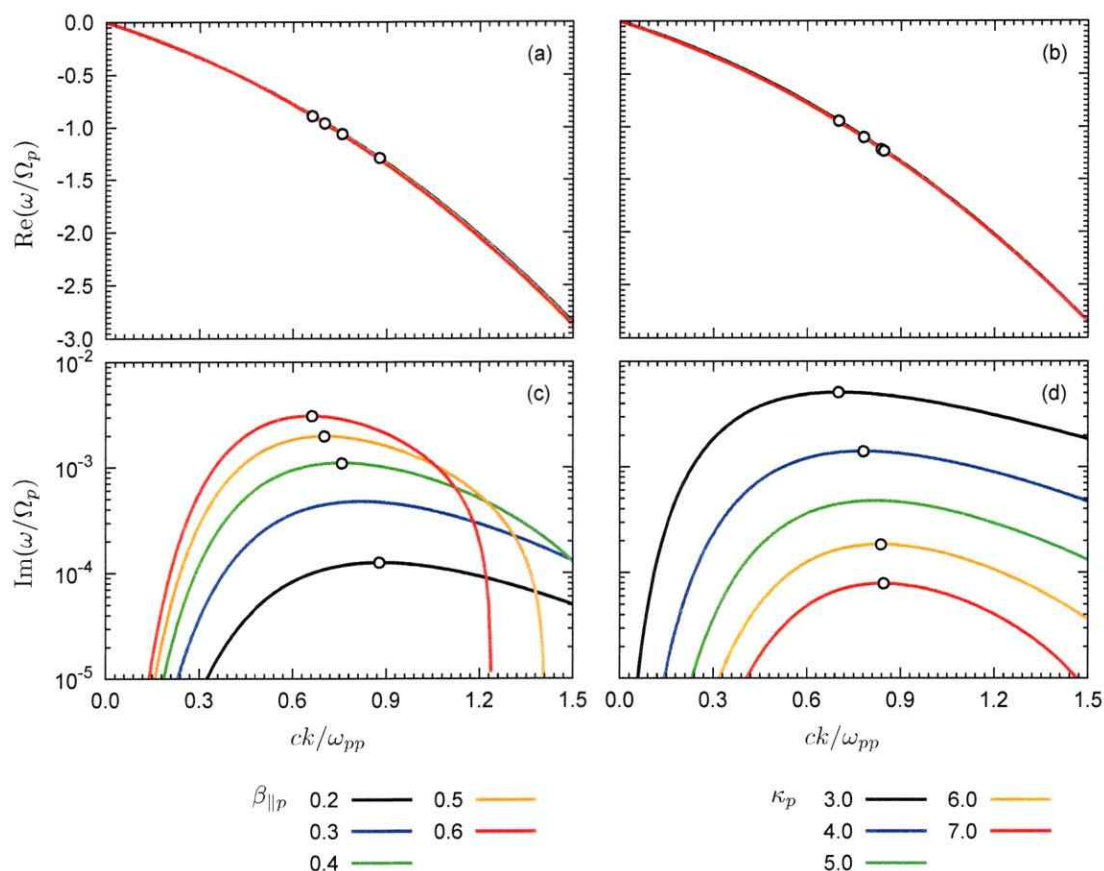


Figura 5.3: (a)–(b) Parte real de la frecuencia, y (c)–(d) tasa de crecimiento para el modo *whistler*-ciclótron como función del número de onda, en un plasma de protones y electrones isotrópico ($R_p = R_e = 1$) e isotérmico ($\beta_{\parallel p} = \beta_{\parallel e}$). (a) y (c) $\kappa_p = \kappa_e = 5$ y distintos valores de $\beta_{\parallel p}$ entre 0.2 y 0.6. (b) y (d) $\beta_{\parallel p} = 0.3$ y distintos valores de $\kappa_p = \kappa_e$ entre 3 y 7.

definida por los modos secundarios [26, 118, 123]. Este caso sugiere un método de diagnóstico para observaciones remotas. De hecho, conociendo el espectro de las fluctuaciones electromagnéticas, se puede obtener información del tensor dieléctrico por inversión del teorema de fluctuación-disipación [15], y por lo tanto, inferir propiedades de las funciones de distribución [26, 124].

La segunda interpretación puede indicar que el promedio estadístico, definido en

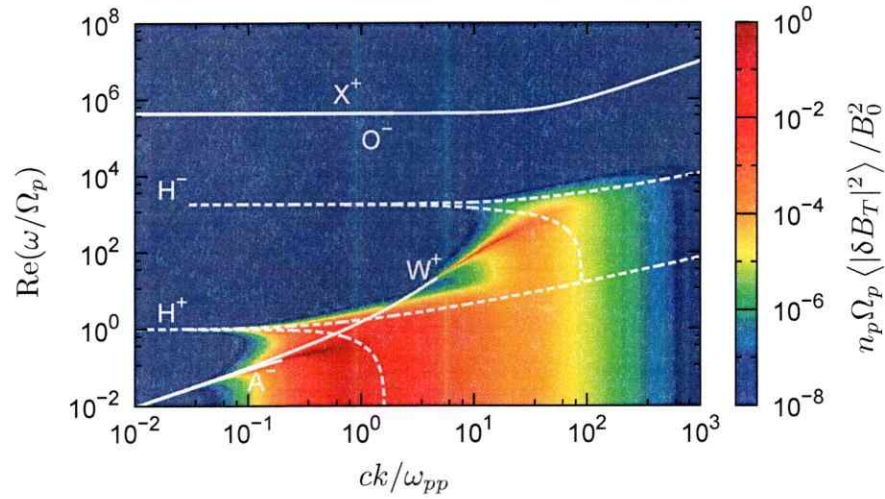


Figura 5.4: Fluctuaciones magnéticas, ecuación (3.9), para los mismos parámetros que la figura 5.2.

la ecuación (2.45), no es el adecuado. De hecho, algunos estudios sugieren que este promedio podría no conservar la forma del primer principio de la termodinámica a distintas escalas, además de que la función de distribución podría no ser invariante ante traslaciones de la energía [125]. Esto sugiere una limitación que debe ser examinada, pero que escapa del tema de esta investigación.

Finalmente, la energía magnética debida a plasmas supratérmicos no cambia, cualitativamente, respecto al caso presentado en la figura 4.4. En cambio, el mayor efecto de estas distribuciones en ese diagrama es la modificación de los límites de inestabilidad descritos en la sección 4.2.

Capítulo 6

Fluctuaciones electromagnéticas en plasmas con haces de partículas

En capítulos anteriores, nos hemos concentrado en las propiedades de las fluctuaciones electromagnéticas en plasmas de protones y electrones. Sin embargo, en el viento solar se observan poblaciones secundarias de haces de protones [33–35, 40], partículas alfa [37, 126, 127] y otras partículas pesadas [12, 128].

Las partículas alfa (${}^4\text{He}^{+2}$) son la especie iónica más abundante en el viento solar, con una proporción entre el 2 y el 6% respecto a la población total de protones, mientras que otras especies (carbono, nitrógeno, oxígeno, entre otros) no superan el 1% en total respecto a la población de protones. Por esta misma razón, la distribución de velocidades de especies más pesadas que las partículas alfa no han sido medidas en el viento solar.

En este capítulo analizaremos las propiedades de las fluctuaciones electromagnéticas propagándose a lo largo de un campo magnético de fondo en plasmas compuestos por protones, electrones y partículas alfa (iones ${}^4\text{He}^{+2}$).

Parte de este capítulo ha sido publicado en la referencia [63].

6.1. Haces de partículas alfa

Consideremos un plasma compuesto por electrones ($\nu = e$), protones ($\nu = p$) y partículas alfa ($\nu = \alpha$) de densidad $n_\alpha/n_p = 0.05$, masa $m_\alpha/m_p = 4$, carga $q_\alpha/e = 2$ y velocidad de deriva U_α respecto al centro de masas de los protones.

La densidad y deriva de los electrones pueden ser elegidos de modo que se cumplan las condiciones de neutralidad (2.76) y corriente nula en el plasma (2.77). En el sistema de referencia de los protones ($U_p = 0$), se tiene que

$$n_e = n_p + \frac{q_\alpha}{e} n_\alpha, \quad U_e = \frac{q_\alpha n_\alpha}{en_p + q_\alpha n_\alpha} U_\alpha. \quad (6.1)$$

En la figura 6.1 mostramos las soluciones de la relación de dispersión para plasmas isotrópicos ($R_\nu = 1$) y Maxwellianos ($\kappa_\nu \rightarrow \infty$). De acuerdo a datos del viento solar, las partículas alfa se mueven con deriva de hasta $U_\alpha/v_A = 0.6$ respecto a los protones cuando hay baja colisionalidad [90]; los electrones y los protones suelen tener la misma temperatura ($T_{\parallel p} = T_{\parallel e}$); y la temperatura de las partículas alfa y otras especies más pesadas suelen escalar con la razón de masas, $T_{\parallel \alpha} = (m_\alpha/m_p)T_{\parallel p}$, cuando el plasma es no colisional [46, 90]. Notemos que el parámetro beta depende de la densidad y temperatura de la especie, por lo tanto $\beta_{\parallel \nu} = (n_\nu/n_p)(T_{\parallel \nu}/T_{\parallel p})\beta_{\parallel p}$. Luego, si $\beta_{\parallel p} = 0.3$, entonces $\beta_{\parallel e} = 0.33$ y $\beta_{\parallel \alpha} = 0.06$.

Comparando las figuras 3.3 y 6.1, notamos que las soluciones de la relación de dispersión no cambian cualitativamente para frecuencias altas $\omega > |\Omega_e|$, es decir, para los modos O^- , X^+ , W^+ y H^+ . Por otro lado, a diferencia del caso en que no hay partículas alfa, en la figura 6.1 existen modos cuya frecuencia converge a la girofrecuencia de las partículas alfa, Ω_α , cuando $k \rightarrow 0$. En particular, en la figura 6.1(a) mostramos dos modos rotulados como a^+ y a^- , los cuales son solución de $\Lambda_+ = 0$ y $\Lambda_- = 0$, respectivamente, y que también son solución de la relación de

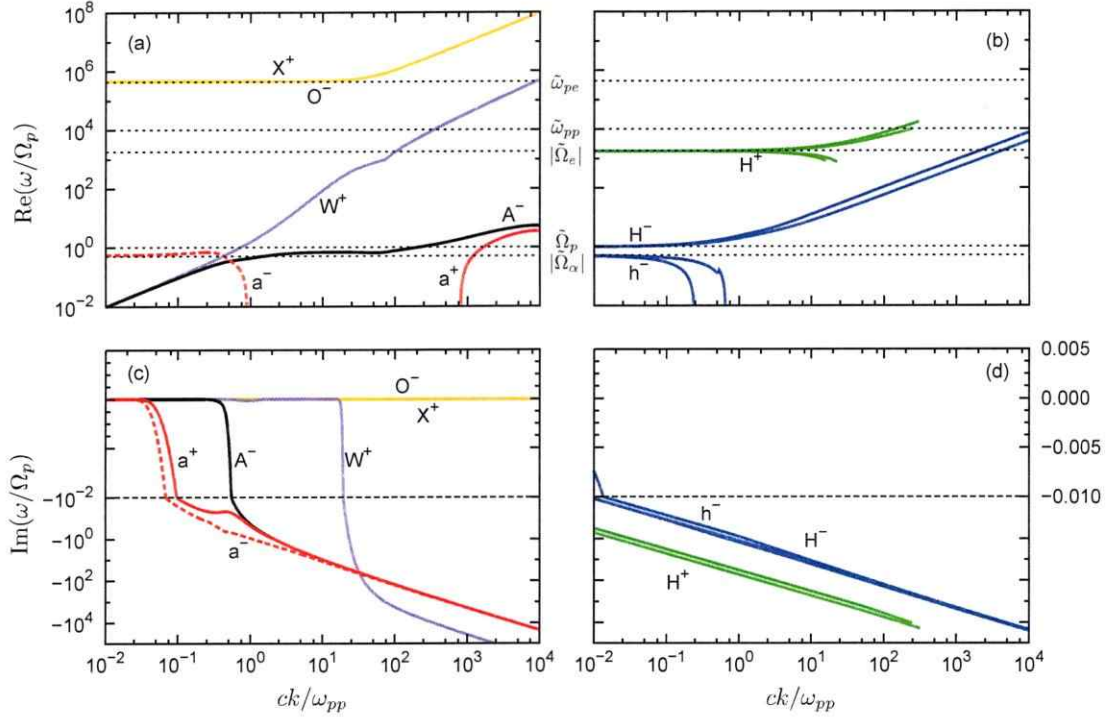


Figura 6.1: Soluciones de la relación de dispersión $\Lambda_+ \Lambda_- = 0$ para ondas transversales propagándose en un plasma de protones ($\nu = p$), electrones ($\nu = e$) y partículas alfa ($\nu = \alpha$) con densidad $n_\alpha/n_p = 0.05$ y deriva $U_\alpha/v_A = 0.6$. El plasma es isotrópico ($R_\nu = 1$), isotérmico ($T_{\parallel\nu}/T_{\parallel p} = 1$) y Maxwelliano ($\kappa_\nu \rightarrow \infty$), con $\beta_{\parallel p} = 0.3$. (a) y (c) Parte real e imaginaria de la frecuencia para los modos principales. (b) y (d) Parte real e imaginaria de la frecuencia para los modos secundarios.

dispersión en plasmas tipo fluido. Como estos modos aparecen por la presencia de las partículas alfa, nos referiremos a ellos como *modos alfa-ciclotrón*.

Para grandes longitudes de onda ($ck/\omega_{pp} \ll 1$), la relación de dispersión puede ser aproximado por la de plasmas tipo fluido. Para un plasma de tres especies, como en el caso considerado en la figura 6.1, se puede encontrar la frecuencia $\tilde{\omega}_c$ de los modos alfa-ciclotrón a^+ y a^- cuando $k \rightarrow 0$ [76, 96]:

$$\frac{\tilde{\omega}_c}{\Omega_p} = \pm \frac{\frac{q_\alpha m_p}{em_\alpha} + \frac{q_\alpha n_\alpha}{en_p}}{1 + \frac{q_\alpha n_\alpha}{en_p}}, \quad (6.2)$$

donde el signo \pm corresponde al signo de la polarización del modo a^\mp . En particular, para el caso de la figura 6.1, $\tilde{\omega}_c \simeq 0.545$.

Notamos, en la figura 6.1(c), que los modos a^+ y a^- tienen la misma amortiguación que el modo de Alfvén-ciclotrón (A^-) para grandes valores del número de onda $ck/\omega_{pp} > 1$, y son estables para valores de $ck/\omega_{pp} < 0.05$. Por otro lado, el modo a^- es más amortiguado que el modo a^+ para valores de ck/ω_{pp} entre 0.01 y 10. Esto se debe a que las soluciones de la relación de dispersión son asimétricas con respecto al eje $k = 0$ cuando existe una especie con deriva $U_v \neq 0$.

En la figura 6.1(b) mostramos los modos secundarios del sistema. Aunque el amortiguamiento de estos modos no cambia cuando existe una tercera especie, como se observa al comparar el panel (d) de las figuras figura 3.3 y 6.1, los modos rotulados como h^- convergen a la frecuencia Ω_α cuando k es pequeño. Notemos también que el modo principal a^- es altamente amortiguado en la región de frecuencias delimitada por los modos h^- y H^- , lo cual es consistente con la discusión del capítulo 3.

Ahora analizaremos, en la figura 6.2, las fluctuaciones magnéticas para los mismos parámetros de la figura 6.1. Por claridad de la figura, no hemos superpuesto los modos normales de oscilación. Además, como hemos discutido anteriormente, no hay fluctuaciones electromagnéticas cerca de los modos ordinario y extraordinario. Vemos que el espectro de las fluctuaciones magnéticas es acotado para frecuencias delimitadas por los modos secundarios H^+ , H^- y h^- , lo cual resulta en que la intensidad de las fluctuaciones magnéticas sea mayor alrededor de la girofrecuencia de cada especie (Ω_α , Ω_p y $|\Omega_e|$). Por otro lado, el nivel de las fluctuaciones magnéticas también aumenta cerca de las frecuencias donde los modos A^- , W^+ y a^- no son amortiguados (ver rotulación en la figura 6.2).

Como vemos en las figuras 6.1 y 6.2, la presencia de partículas alfa no modifica el

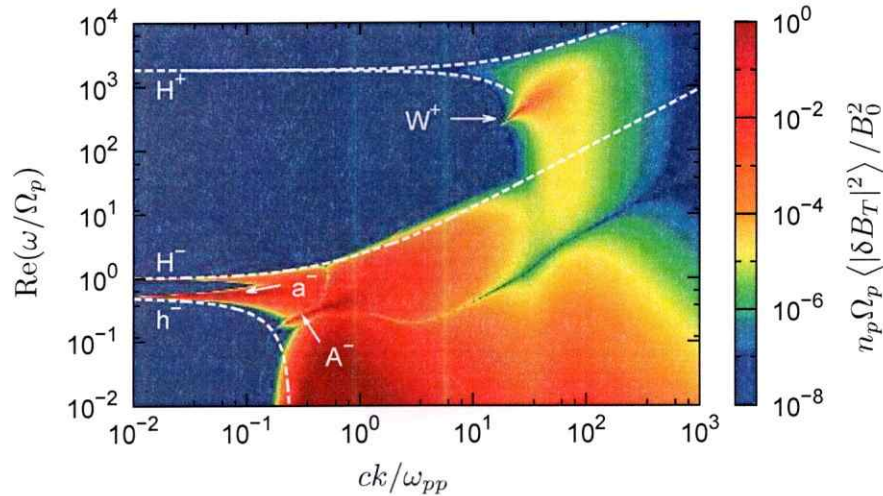


Figura 6.2: Espectro de frecuencias de las fluctuaciones magnéticas transversales $\langle |\delta \hat{B}_T|^2 \rangle$ en un plasma de protones ($\nu = p$), electrones ($\nu = e$) y partículas alfa ($\nu = \alpha$) con densidad $n_\alpha/n_p = 0.05$ y deriva $U_\alpha/v_A = 0.6$. El plasma es isotrópico ($R_\nu = 1$), isotérmico ($T_{\parallel\nu}/T_{\parallel p} = 1$) y Maxwelliano ($\kappa_\nu \rightarrow \infty$), con $\beta_{\parallel p} = 0.3$. El nivel de las fluctuaciones magnéticas aumenta cerca de los modos primarios a^- , A^- , y W^+ .

espectro de los modos normales y de las fluctuaciones a frecuencias altas $\omega > |\Omega_e|$. Por lo tanto, de ahora en adelante, continuaremos con nuestro análisis para frecuencias del orden de $\omega \sim \Omega_p$.

En la figura 6.3 mostramos las soluciones de la relación de dispersión $\Lambda_- = 0$ para un plasma de protones, electrones y partículas alfa isotrópico, isotérmico y Maxwelliano, con $\beta_{\parallel p} = 0.3$ y distintos valores de U_α/v_A entre 0.0 y 0.3. Dada la relación de simetría (2.21), tenemos que $\Lambda_+(k, \omega) = \Lambda_-(-k, -\omega^*)$, por lo que las soluciones de $\Lambda_+ = 0$ se pueden obtener de las soluciones de $\Lambda_- = 0$ usando que $\omega(-k) = -\omega^*(k)$.

En la figura 6.3 identificamos los modos principales y secundarios en la figura 6.1, correspondientes al modo de Alfvén-ciclotrón de polarización derecha (o negativa, A^-) en los cuadrantes I y II; el modo *whistler*-ciclotrón de polarización izquierda

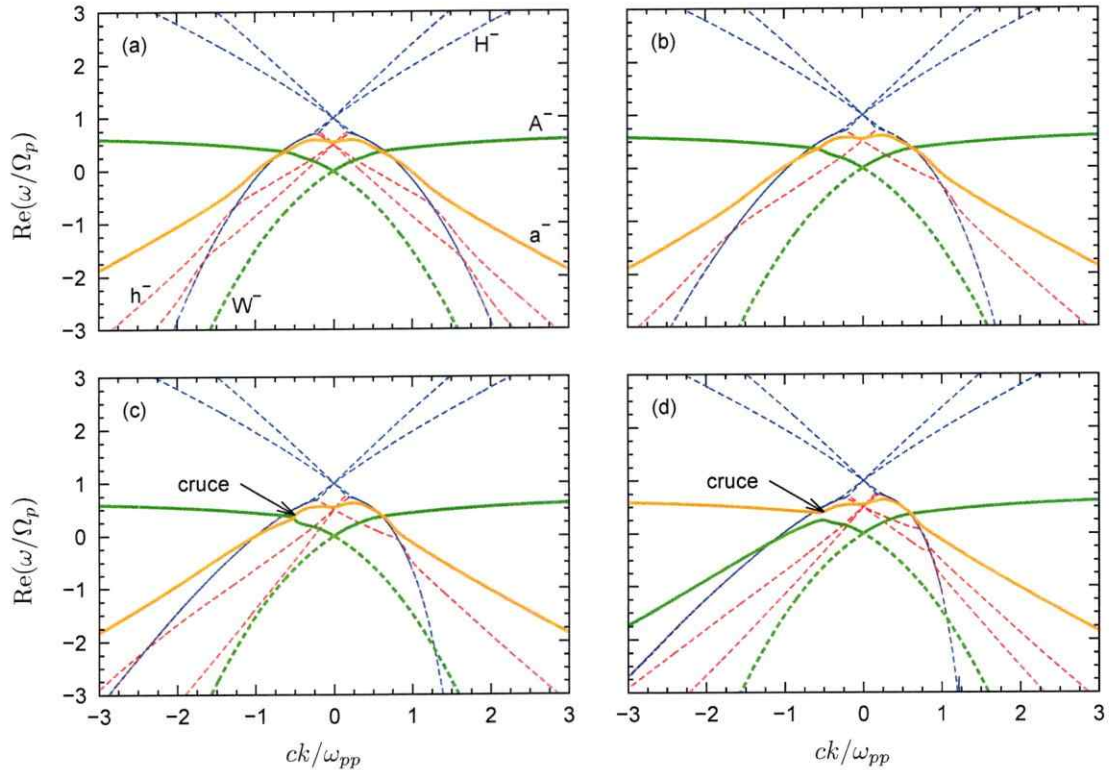


Figura 6.3: Soluciones de la relación de dispersión $\Lambda_- = 0$ para los mismos parámetros de la figura 6.3, pero para (a) $U_\alpha/v_A = 0.0$, (b) 0.1, (c) 0.2 y (d) 0.3. Las soluciones de la relación de dispersión son asimétricas cuando $U_\alpha \neq 0$. Entre $U_\alpha/v_A = 0.2$ y 0.3 ocurre una transición donde los modos a^- y A^- se cruzan y cambian de identidad.

(o positiva, W^-) en los cuadrantes III y IV; el modo alfa-ciclotrón de polarización izquierda (a^-); y los modos secundarios H^- y h^- .

Notemos que en el caso $U_\alpha/v_A = 0$, figura 6.3(a), las soluciones de la relación de dispersión son simétricas: $\omega(-k) = \omega(k)$. Esta simetría se rompe para los casos en que $U_\alpha \neq 0$. Sin embargo, los modos secundarios H^- con frecuencias $\omega > \Omega_p$ y el modo *whistler*-ciclotrón (W^-) no cambian, cualitativamente, a medida que U_α/v_A crece.

La parte imaginaria de la frecuencia para los modos mostrados en la figura 6.3 también cambia para valores de $U_\alpha \neq 0$, como se muestra en la figura 6.4. Notemos

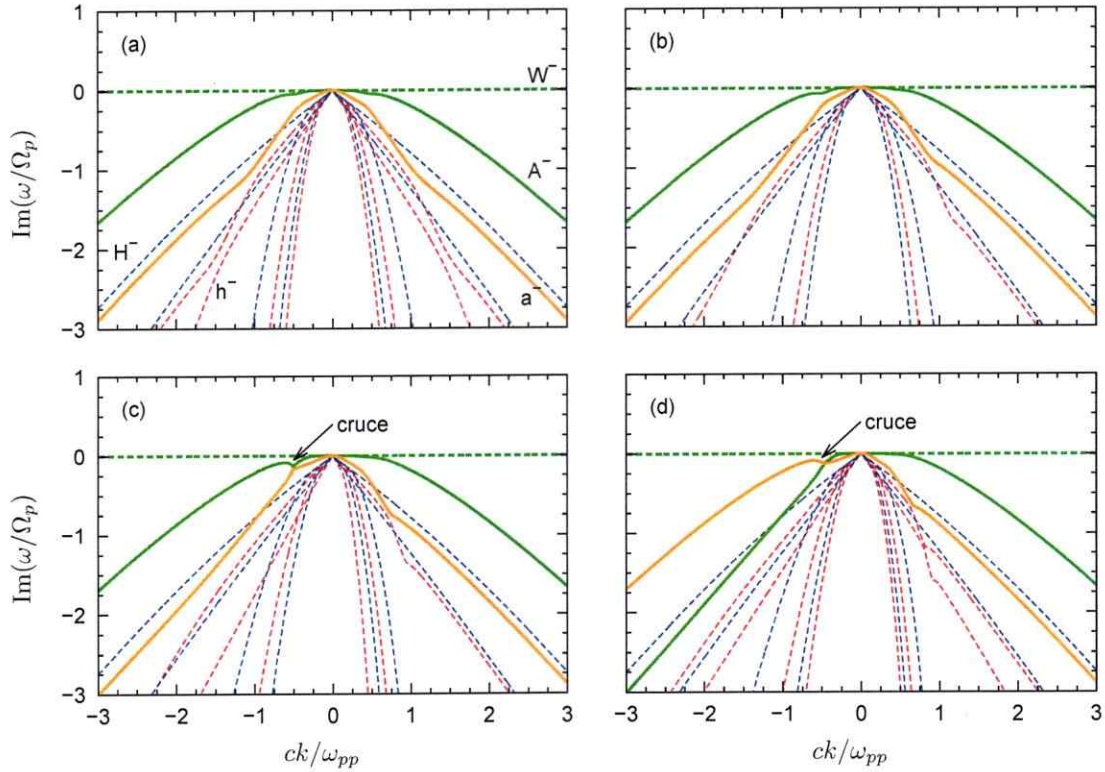


Figura 6.4: Parte imaginaria de las soluciones de la relación de dispersión $\Lambda_- = 0$ mostrados en la figura 6.3.

que existe un valor entre $U_\alpha/v_A = 0.2$ y 0.3 donde los modos Alfvén-ciclotrón (A^-) y alfa-ciclotrón (a^-) se cruzan y cambian de identidad cerca de $ck/\omega_{pp} \sim -0.5$ [ver paneles (c) y (d) de las figuras 6.3 y 6.4].

Finalmente, en la figura 6.5 comparamos la relación de dispersión para plasmas de protones y electrones con la de plasmas que contienen partículas alfa. Los modos secundarios coinciden para ambos casos cuando las densidades relativas son menores que $n_\alpha/n_p < 0.027$ [panel (a)]. Sin embargo, en la misma figura, uno de los modos que corresponde a un modo secundario H^- en plasmas de protones y electrones se convierte en el modo alfa-ciclotrón (a^-) cuando hay partículas alfa.

Entre $n_\alpha/n_p = 0.027$ y 0.068 , uno de los modos secundarios H^- , que converge a

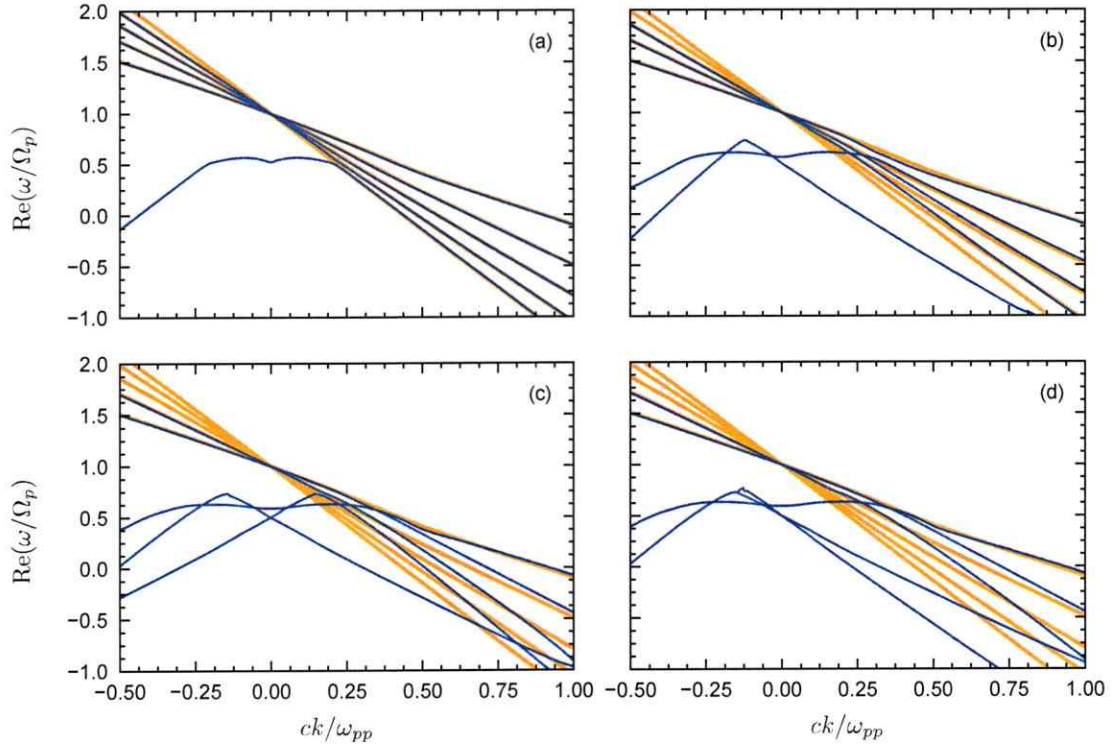


Figura 6.5: Relación de dispersión para ondas transversales en plasmas de protones, electrones y partículas alfa isotrópicos, isotérmicos y Maxwellianos, donde $\beta_{\parallel\nu} = 0.3$ y $U_\alpha/v_A = 0$. En naranja se muestran los modos secundarios H^- para $n_\alpha/n_p = 0$. En azul, se muestran los modos secundarios H^- y el modo alfa-ciclotrón cuando la densidad de partículas alfa es (a) $n_\alpha/n_p = 0.027$, (b) 0.068, (c) 0.104 y (d) 0.113.

Ω_p en $k = 0$, se convierte en un modo secundario h^- . Una transición similar ocurre entre $n_\alpha/n_p = 0.068$ y 0.104 [panel (c)], y entre $n_\alpha/n_p = 0.104$ y 0.113 [panel (d)].

En todos los casos presentados en la figura 6.5, las ramas de la relación de dispersión en plasmas de protones y electrones coinciden con las de plasmas con partículas alfa cuando $ck/\omega_{pp} > 1.7$.

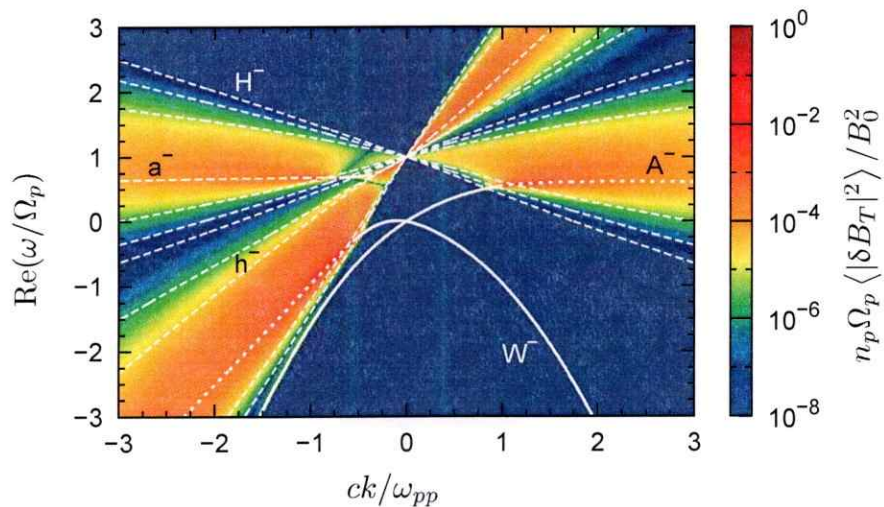


Figura 6.6: Relación de dispersión y fluctuaciones magnéticas transversales en plasmas compuestos por electrones ($\nu = e$) y dos especies de protones: la componente principal ($\nu = p$), y la componente secundaria ($\nu = b$). El plasma es isotérmico, isotrópico y Maxwelliano, con $\beta_{\parallel p} = 0.3$, $n_b/n_p = 0.3$ y $U_b/v_A = 1.5$.

6.2. Haces de protones

Si bien en la sección 6.1 nos concentramos en analizar fluctuaciones magnéticas y propagación de ondas en plasmas con una población de partículas alfa, la discusión no cambia si el haz de partículas corresponde a otra componente. Por ejemplo, en la figura 6.6 mostramos las soluciones de la relación de dispersión $\Lambda_- = 0$ y las fluctuaciones magnéticas transversales $\langle |\delta\check{B}_T|^2 \rangle$ cuando en el plasma existen haces de protones.

Comparando con la figura 6.3, vemos que la única diferencia es que los modos secundarios h^- se trasladan, cruzando el eje $k = 0$ en $\omega = \Omega_p$, lo cual es consistente con la ecuación (6.2) si cambiamos el índice α por b .

Capítulo 7

Resumen y conclusiones

En este trabajo, hemos derivado expresiones analíticas para las fluctuaciones electromagnéticas en plasmas en estado estacionario, por medio del teorema de fluctuación-disipación. La teoría considera plasmas compuestos por múltiples especies y distribuciones de velocidad generalizadas. Esta teoría puede ser aplicada a plasmas magnetizados y cuyas especies presenten temperaturas distintas, anisotropías térmicas, velocidades de deriva o velocidades supratérmicas. Sin embargo, estas características deben asegurar que el plasma pueda ser considerado estacionario para que las correlaciones entre fluctuaciones en tiempos distintos existan.

Para el caso especial en que las ondas se propagan a lo largo del campo magnético de fondo en plasmas Maxwellianos (isotrópicos), las expresiones generales para el espectro de las fluctuaciones electromagnéticas se reducen a expresiones consideradas en la literatura [15,25-27]. Aunque existen trabajos similares sobre fluctuaciones electromagnéticas en plasmas [30, 47, 112, 129-133], estos sólo consideran plasmas no magnetizados o fluctuaciones electrostáticas. En esta tesis y publicaciones previas [25-27, 63], nos hemos concentrado en estudiar la propagación de fluctuaciones electromagnéticas en plasmas inmersos en un campo magnético de fondo.

En el capítulo 3, analizamos la propagación de ondas y fluctuaciones electro-

magnéticas en plasmas magnetizados de protones y electrones isotrópicos y Maxwellianos. Primero consideramos el caso más simple, en que las ondas se propagan a lo largo del campo magnético de fondo, por lo que las fluctuaciones magnéticas quedan completamente caracterizadas por ondas transversales respecto a la dirección de propagación de las ondas, mientras que las fluctuaciones de densidad son caracterizadas por ondas longitudinales.

El nivel de las fluctuaciones magnéticas aumenta para frecuencias cercanas a la de los modos de Alfvén-ciclotrón y *whistler*-ciclotrón, mientras que las fluctuaciones de densidad aumentan cerca del modo de Langmuir. Para estas frecuencias, los modos colectivos son dominantes y el plasma es transparente a la propagación de ondas. Sin embargo, cerca de los modos ordinario y extraordinario no aparecen fluctuaciones magnéticas, puesto que estos modos corresponden a ondas con velocidades de fase muy altas comparadas con las velocidades térmicas, por lo que hay muy pocas partículas que resuenen con ellas.

La teoría cinética lineal predice un número infinito de modos que son altamente amortiguados cuando las distribuciones de velocidad son Maxwellianas. Hemos llamado a estos modos como "secundarios", puesto que no aparecen si el plasma es modelado como un fluido. Estos modos son normalmente ignorados debido a su gran amortiguación, sin embargo ellos parecen acotar el espectro de las fluctuaciones magnéticas y de densidad. Es más, los modos principales son amortiguados para las frecuencias en donde las fluctuaciones son intensas, indicando que los modos secundarios podrían jugar un papel importante en la generación de fluctuaciones espontáneas, amortiguamiento de ondas y en procesos de calentamiento de partículas en plasmas.

Para plasmas isotérmicos, es decir, cuando protones y electrones tienen la misma

temperatura, observamos que la intensidad de las fluctuaciones magnéticas aumenta a medida que la temperatura aumenta. Además, el espectro de estas fluctuaciones ocupa números de onda más pequeños (longitudes de onda más grande). Consistentemente, las longitudes de onda para las cuales los modos principales son amortiguados también aumentan con la temperatura. Independiente del valor de la temperatura, el espectro de las fluctuaciones está siempre acotado por los modos secundarios.

Notamos que, para valores de $\beta_{\parallel p} < 1$, es decir, temperatura pequeña o presión de partículas menor que la presión magnética, las fluctuaciones magnéticas presentan un aumento pronunciado cerca de las frecuencias ciclotrónicas. Para grandes valores de $\beta_{\parallel p}$, tales que la dinámica de las ondas electromagnéticas es dominada por la temperatura del sistema, los modos de Alfvén y *whistler*-ciclotrón ya no se propagan a la velocidad de Alfvén cuando el número de onda es pequeño, y el *peak* de las fluctuaciones se mueve a frecuencias más bajas.

Consistentemente con lo anterior, la energía de las fluctuaciones magnéticas aumenta cuando $\beta_{\parallel p}$ aumenta. De hecho, esta energía escala como $\beta_{\parallel p}^\alpha$, con α un número real, para un rango de valores del parámetro beta, lo cual es consistente con simulaciones híbridas [28, 29, 107, 108] y experimentos de laboratorio [109].

En el capítulo 4 hemos analizado el efecto de incluir anisotropía térmica. En general, la parte real de la frecuencia de los modos principales no cambia, cualitativamente, con la anisotropía. Sin embargo, las distribuciones de velocidad anisotrópicas introducen una fuente de energía libre para la excitación de ondas, por lo que el plasma puede ser inestable.

Para anisotropías $R_p < 1$, vemos que el modo *whistler*-ciclotrón presenta frecuencias tales que $\text{Im}(\omega) > 0$, lo que corresponde a una inestabilidad protón-*firehose*. Para $R_p > 1$, ocurre lo mismo con el modo Alfvén-ciclotrón, lo que identificamos

como una inestabilidad protón-ciclotrón. Observaciones en el viento solar [13,31,32] y experimentos en plasmas de laboratorio [109], sugieren que estas inestabilidades están presentes, puesto que la anisotropía parece estar regulada por ellas. Los límites de esta anisotropía corresponden a umbrales bajo los cuales el plasma puede ser considerado estable.

Numéricamente, establecemos como el umbral de inestabilidad aquellas anisotropías para las que las soluciones de la relación de dispersión cumplen $\text{Im}(\omega/\Omega_p) = 10^{-4}$. Para anisotropías tales que $\text{Im}(\omega/\Omega_p) < 10^{-4}$, entonces el plasma es considerado estable.

La energía de las fluctuaciones magnéticas es estimada en función de la anisotropía para plasmas estables. Encontramos que las fluctuaciones magnéticas aumentan con la anisotropía, especialmente cerca de los límites de estabilidad, y decrecen rápidamente a medida que $\beta_{\parallel p}$ o $\beta_{\parallel e}$ disminuyen. Estos resultados son consistentes con varios años de observaciones en el viento solar [13]. Esto parece indicar que las fluctuaciones observadas en el viento solar podrían ser debidas, en gran parte, a fluctuaciones espontáneas que ocurren localmente en el plasma [27].

Debemos notar que la presencia de inestabilidades puede ser una fuente de fluctuaciones electromagnéticas en plasmas, lo cual ha sido propuesto por medio de simulaciones híbridas [28,29] y cuasilineales [119]. Sin embargo, estos modelos no explican la existencia de fluctuaciones para valores de $\beta_{\parallel p}$ pequeños. Por otro lado, las fluctuaciones también pueden deberse a turbulencias MHD que se propagan desde el Sol, lo cual puede ser relevante si los tiempos de expansión de estas turbulencias son mucho menores que los tiempos característicos de las fluctuaciones.

En el capítulo 5 estudiamos la propagación de ondas y fluctuaciones electromagnéticas cuando las distribuciones de velocidad tienen colas supratérmicas, mo-

deladas como el producto de una Maxwelliana y una función kappa. Analíticamente, todos los resultados para plasmas Maxwellianos pueden ser recobrados en el límite $\kappa \rightarrow \infty$.

El número de modos secundarios es proporcional a κ . En el límite $\kappa \rightarrow \infty$, recobramos el resultado para plasmas Maxwellianos, donde el número de modos secundarios es infinito. Además, se encuentra que estos modos no acotan el espectro de las fluctuaciones magnéticas, puesto que hay un exceso de partículas con velocidades mayores que la velocidad térmica, es decir, las distribuciones kappa representan una distribución que es efectivamente más caliente que una Maxwelliana. Este resultado sugiere un método de diagnóstico para determinar si el plasma es supratérmico, por medio del espectro de las fluctuaciones.

Estas distribuciones introducen un nuevo tipo de energía libre, por lo que el plasma puede ser inestable para valores de $\kappa < \infty$. En efecto, notamos que las inestabilidades son más grandes a medida que κ decrece. Esto implica que los límites de inestabilidad cambian respecto al caso Maxwelliano. Aun así, no se observan cambios cualitativos en la energía magnética.

En el capítulo 6, analizamos plasmas Maxwellianos donde hay especies de partículas con velocidades de deriva. Notamos que las soluciones de la relación de dispersión y el espectro de las fluctuaciones pierden su simetría respecto a cambios del número de onda $k \rightarrow -k$. Aun así, los modos secundarios siguen acotando el espectro de las fluctuaciones.

Para el caso de haces de partículas de helio ionizado, existe un grupo de modos secundarios con frecuencias cercanas a la frecuencia de ciclotrón de estas partículas. Además, observamos que uno de los modos secundarios se convierte en uno principal (en el sentido que también es solución de la relación de dispersión en plasmas tipo

fluido) cuando existen más especies en el plasma. El espectro de las fluctuaciones magnéticas presenta bandas cerca de cada una de las frecuencias de ciclotrón.

Aunque las fluctuaciones electromagnéticas que se propagan a lo largo del campo magnético de fondo \mathbf{B}_0 parecen ser relevantes en la contribución de fluctuaciones electromagnéticas en el viento solar, también es cierto que el movimiento aleatorio de las partículas debería dar origen a fluctuaciones con $k_{\perp} \neq 0$, es decir, que se propagan en direcciones arbitrarias, no privilegiadas, respecto a \mathbf{B}_0 . Analizamos las fluctuaciones espontáneas (capítulo 3) cuando el ángulo de propagación, definido por $\tan \theta = k_{\perp}/k_{\parallel}$, es de $\theta = 30^{\circ}$.

En general, no es fácil separar analíticamente la relación de dispersión para ondas longitudinales y transversales respecto a \mathbf{B}_0 . Aun así, los modos secundarios acotan las fluctuaciones electromagnéticas, los cuales aumentan cerca de las regiones de transparencia (cerca de los modos normales), al igual que el caso de propagación de ondas en la dirección de \mathbf{B}_0 .

Apéndice A

Funciones de Bessel

Las relaciones de dispersión para ondas electromagnéticas propagándose en un ángulo θ respecto a un campo magnético de fondo, como las discutidas en la sección 2.1, pueden ser escritas en términos de sumas infinitas de productos de funciones de Bessel. En este capítulo discutiremos algunas propiedades de las funciones de Bessel de primer tipo de orden n , J_n , y las funciones de Bessel modificadas de primer tipo de orden n , I_n .

A.1. Definición

Las funciones de Bessel corresponden a una solución de la ecuación diferencial de segundo orden [134, 135]

$$z^2 y''(z) + z y'(z) + (z^2 - \alpha^2) y(z) = 0, \quad (\text{A.1})$$

la cual aparece en muchos problemas con simetría cilíndrica, donde $\alpha = n$ es un número entero, o en problemas que involucran coordenadas esféricas, donde $\alpha = n + 1/2$ es un número semientero. En particular, estas funciones surgen al calcular los efectos de ondas planas en el movimiento de partículas cargadas alrededor de un campo magnético de fondo (ver apéndice C).

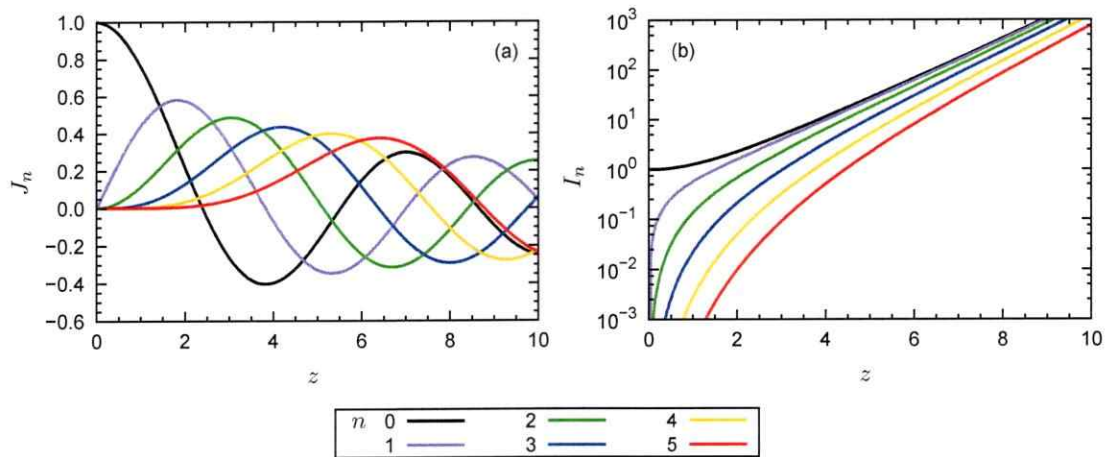


Figura A.1: Gráficos de $J_n(z)$ (a) y de $I_n(z)$ (b) como función de z para $n = \{0, \dots, 5\}$.

La solución que es regular en el origen —y por tanto, la que tiene especial interés en este trabajo— es $y(z) = J_\alpha(z)$, conocida como la función de Bessel de primer tipo de orden α , cuya expansión en serie de potencias es

$$J_\alpha(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\alpha}, \quad \text{Re}(\alpha) \geq 0. \quad (\text{A.2})$$

Mediante el cambio de variables $z \rightarrow iz$ en la (A.1), se obtiene una ecuación diferencial cuyas soluciones son las funciones modificadas de Bessel, definidas como

$$I_\alpha(z) = i^{-\alpha} J_\alpha(iz). \quad (\text{A.3})$$

En la figura A.1 mostramos las funciones $J_n(z)$ e $I_n(z)$ como función de z para distintos valores de n . Vemos que las funciones J_n son oscilatorias, mientras que I_n son funciones exponencialmente crecientes.

Para índice n entero, las funciones de Bessel $J_n(x)$ corresponden a los coeficientes en la expansión en series de Laurent en torno a $s = 0$ de una *función generatriz* [134,

135], dada por

$$\exp \left[\frac{z}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) s^n. \quad (\text{A.4})$$

Usando el cambio de variables $s = e^{i\phi}$, se obtiene una forma alternativa a la ecuación (A.4):

$$e^{iz \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\phi}. \quad (\text{A.5})$$

A.2. Relaciones de recurrencia

Usando (A.2) para $\alpha = n$ un número entero positivo, se encuentra que

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad (\text{A.6})$$

$$I_{-n}(z) = I_n(z). \quad (\text{A.7})$$

Derivando (A.4) respecto a s ó z , y comparando potencias en s , se encuentra respectivamente las relaciones de recurrencia

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z), \quad (\text{A.8})$$

$$2J'_n(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z), \quad (\text{A.9})$$

con las cuales podemos determinar $J_n(z)$ y su derivada para $n > 1$ a partir de $J_0(z)$ y $J_1(z)$. Luego, usando (A.3), se tiene

$$\frac{2n}{z} I_n(z) = I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z), \quad (\text{A.10})$$

$$2I'_n(z) = I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z). \quad (\text{A.11})$$

A.3. Reglas de adición de producto de funciones de Bessel

El producto de la expresión (A.5) con su complejo conjugada, es

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(z) J_m(z) e^{i(n-m)\phi}, \quad (\text{A.12})$$

Integrando (A.12) respecto a ϕ entre 0 y 2π , se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_n(z)]^2 = 1. \quad (\text{A.13})$$

De la misma forma, multiplicando por $\cos \phi$ ó $\cos^2 \phi$ e integrando respecto a ϕ se obtiene, respectivamente,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n [J_n(z)]^2 = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 [J_n(z)]^2 = \frac{z^2}{2}, \quad (\text{A.15})$$

Derivando (A.5) respecto a z y multiplicándola con su complejo conjugada, para luego integrar respecto a ϕ , se encuentra

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [J'_n(z)]^2 = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.16})$$

Derivando las expresiones (A.13)– (A.15) respecto a z , se encuentra

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(z) J_n(z) = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n J'_n(z) J_n(z) = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 J_n(z) J'_n(z) = \frac{z}{2}. \quad (\text{A.19})$$

Se puede demostrar, usando técnicas de integración en el plano complejo, la regla de adición de Lerche–Newberger [136, 137]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n J_{\alpha-\gamma n}(z) J_{\beta+\gamma n}(z)}{n + \mu} = \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} J_{\alpha+\gamma\mu}(z) J_{\beta-\gamma\mu}(z), \quad (\text{A.20})$$

relación que puede ser usada para encontrar una forma alternativa al tensor de susceptibilidad definida en (2.37) y (2.38) [58, 67].

A.4. Integrales que involucran funciones de Bessel

Como se verá en el apéndice C, la relación de dispersión se puede escribir en términos de integrales de la forma

$$\int_0^{\infty} dx x e^{-p^2 x^2} J_n(ax) J_n(bx) = \frac{1}{2p^2} \exp\left[-\frac{a^2 + b^2}{4p^2}\right] I_n\left(\frac{ab}{2p^2}\right), \quad (\text{A.21})$$

las cuales son llamadas *integrales exponenciales de Weber de segundo tipo* [135]. En la figura A.2 graficamos la función

$$\Xi_n(\rho) = \frac{1}{2} e^{-\rho^2/2} I_n\left(\frac{\rho^2}{2}\right), \quad (\text{A.22})$$

y su derivada, $\Xi_n(\rho)$, para distintos valores de n .

Usando (A.21) y (A.22), se puede demostrar que

$$\int_0^{\infty} dx x e^{-x^2} [J_n(\rho x)]^2 = \Xi_n(\rho), \quad (\text{A.23})$$

$$\int_0^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} J_n(\rho x) J'_n(\rho x) = \frac{1}{2} \Xi'_n(\rho), \quad (\text{A.24})$$

$$\int_0^{\infty} dx x^3 e^{-x^2} [J'_n(\rho x)]^2 = \frac{n^2}{\rho^2} \Xi_n(\rho) - \frac{\rho}{2} \Xi'_n(\rho). \quad (\text{A.25})$$

Usando las relaciones de recurrencia (A.7), (A.10) y (A.11), se encuentra las

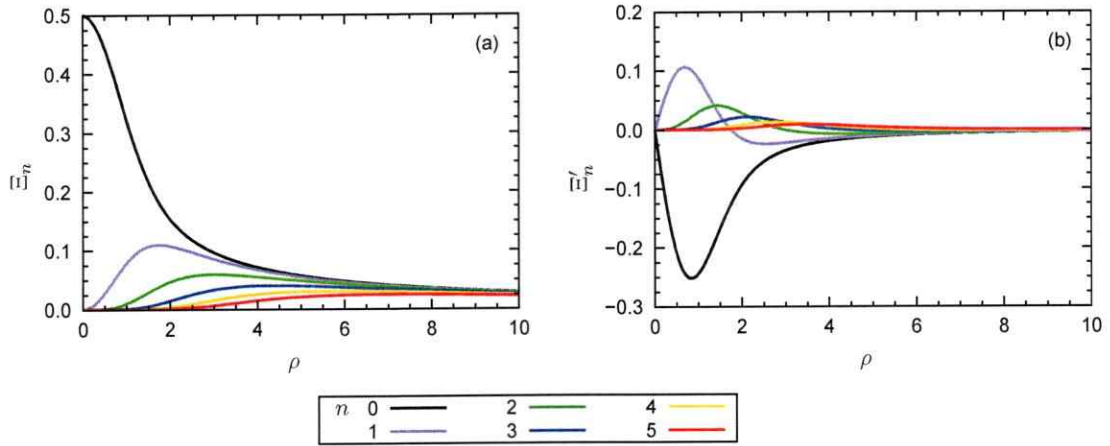


Figura A.2: Gráfico de $\Xi_n(\rho)$ (a) y su derivada (b) como función de ρ para $n = \{0, \dots, 5\}$.

relaciones de recurrencia para la función Ξ_n ,

$$\Xi_{-n}(\rho) = \Xi_n(\rho). \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{4n}{\rho^2} \Xi_n(\rho) = \Xi_{n-1}(\rho) - \Xi_{n+1}(\rho), \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{2}{\rho} \Xi'_n(\rho) = \left(1 - \frac{\rho^2}{2n}\right) \Xi_{n-1}(\rho) + \left(1 + \frac{\rho^2}{2n}\right) \Xi_{n+1}(\rho). \quad (\text{A.28})$$

Apéndice B

Función de dispersión de plasmas modificada

Si las distribuciones de velocidad están dadas por (2.73), entonces las integrales en (2.37) respecto a la velocidad paralela pueden ser escritas en términos de la función

$$Z_{\kappa}(\xi) = \frac{A_{\kappa}}{\sqrt{\pi}} \int_{-x_{\kappa}}^{x_{\kappa}} \frac{dx}{x - \xi} \left[1 + \frac{x^2}{\kappa} \right]^{-\kappa}, \quad \text{Im}(\xi) > 0, \quad (\text{B.1})$$

donde x_{κ} es un límite de integración que asegura que el término entre paréntesis sea positivo en ese intervalo,

$$x_{\kappa} = \begin{cases} \sqrt{-\kappa} & \kappa < 0 \\ \infty & \kappa > 1/2 \end{cases}, \quad (\text{B.2})$$

y A_{κ} es una constante de normalización dada por

$$A_{\kappa} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \kappa)}{\sqrt{-\kappa} \Gamma(1 - \kappa)} & \kappa < 0 \\ \frac{\Gamma(\kappa)}{\sqrt{\kappa} \Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} & \kappa > 1/2 \end{cases}. \quad (\text{B.3})$$

Llamaremos a la función Z_{κ} , definida en (B.1), como *función de dispersión de plasmas modificada*. El nombre de esta función fue propuesto por Summers y Thorne [73], sin embargo, la forma que usamos en esta tesis es ligeramente distinta y se acerca más a la usada por Hellberg y Mace [77].

En el límite $\kappa \rightarrow \pm\infty$, se tiene que $A_{\pm\infty} = 1$ y $Z_{\pm\infty}(\xi) \equiv Z(\xi)$, donde

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-x^2}}{x - \xi}, \quad \text{Im}(\xi) > 0, \quad (\text{B.4})$$

es la *función de dispersión de plasma* estándar definida por Fried y Conte [138], la cual puede ser escrita en términos de la función error

$$Z(\xi) = i\sqrt{\pi}e^{-\xi^2} [1 + \text{erf}(i\xi)]. \quad (\text{B.5})$$

No es difícil ver, a partir de (B.4), que

$$Z_{\kappa}(-\xi^*) = -Z_{\kappa}^*(\xi), \quad (\text{B.6})$$

$$Z_{\kappa}(\xi) + Z_{\kappa}(-\xi) = 2i\sqrt{\pi}A_{\kappa} \left[1 + \frac{x^2}{\kappa}\right]^{-\kappa}. \quad (\text{B.7})$$

Una extensión de (B.1) y (B.4) para $\text{Im}(\xi) \leq 0$ requiere una continuación analítica del integrando para x complejo y un análisis cuidadoso de los contornos de integración según la descripción de Landau [69, 73, 77, 139, 140]. En las siguientes secciones discutiremos una derivación analítica para Z_{κ} con la cual no es necesario elegir un contorno de integración.

B.1. Relación de recurrencia

Derivando (B.1) respecto a ξ , e integrando por partes, obtenemos

$$Z'_{\kappa}(\xi) = -\sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \frac{2A_{\kappa}}{A_{\kappa+1}} [1 + \zeta Z_{\kappa+1}(\zeta)], \quad (\text{B.8})$$

donde $\zeta = \xi\sqrt{1+1/\kappa}$. Se puede comprobar fácilmente que

$$\frac{2A_{\kappa}}{A_{\kappa+1}} = \left(2 - \frac{1}{\kappa}\right) \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa}}, \quad (\text{B.9})$$

por lo que, finalmente, se tiene

$$Z'_{\kappa}(\xi) = \left(\frac{1}{\kappa} - 2\right) \left[1 + \xi\sqrt{1 + \frac{1}{\kappa}} Z_{\kappa+1}\left(\xi\sqrt{1 + \frac{1}{\kappa}}\right)\right], \quad (\text{B.10})$$

Esta última ecuación puede ser usada recursivamente para encontrar derivadas superiores de Z_κ . Notemos que debemos imponer la restricción adicional $\kappa < -1$ para valores de κ negativos. Para los límites $\kappa \rightarrow \frac{1}{2}$, $\kappa \rightarrow -1$ y $\kappa \rightarrow \pm\infty$, se tiene

$$Z'_{1/2}(\xi) = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$Z'_{-1}(\xi) = -3, \quad (\text{B.12})$$

$$Z'(\xi) = -2[1 + \xi Z(\xi)]. \quad (\text{B.13})$$

La ecuación (B.13) corresponde a la relación de Fried y Conte para la función Z [138].

B.2. Ecuación diferencial para Z_κ

La primera y segunda derivadas de (B.1) respecto a ξ , pueden ser escritas como

$$\xi Z'_\kappa(\xi) + Z_\kappa(\xi) = \frac{A_\kappa}{\sqrt{\pi}} \int_{-x_\kappa}^{x_\kappa} dx \frac{x}{(x-\xi)^2} \left[1 + \frac{x^2}{\kappa}\right]^{-\kappa}, \quad (\text{B.14})$$

$$Z''_\kappa(\xi) = 2 \frac{A_\kappa}{\sqrt{\pi}} \int_{-x_\kappa}^{x_\kappa} \frac{dx}{(x-\xi)^3} \left[1 + \frac{x^2}{\kappa}\right]^{-\kappa}. \quad (\text{B.15})$$

Derivando (B.14) respecto a ξ , se tiene

$$\xi^2 Z''_\kappa(\xi) + 2\xi Z'_\kappa(\xi) = \frac{2A_\kappa}{\sqrt{\pi}} \int_{-x_\kappa}^{x_\kappa} dx \frac{x\xi}{(x-\xi)^3} \left[1 + \frac{x^2}{\kappa}\right]^{-\kappa}. \quad (\text{B.16})$$

Sumando (B.16) y dos veces (B.14), obtenemos

$$\xi^2 Z''_\kappa(\xi) + 4\xi Z'_\kappa(\xi) + 2Z_\kappa(\xi) = \frac{2A_\kappa}{\sqrt{\pi}} \int_{-x_\kappa}^{x_\kappa} dx \frac{x^2}{(x-\xi)^3} \left[1 + \frac{x^2}{\kappa}\right]^{-\kappa}. \quad (\text{B.17})$$

Ahora, multiplicamos (B.17) por $1/\kappa$ y sumamos esta expresión a (B.15). En la expresión resultante, se resuelve la siguiente integral mediante integración por partes,

$$\frac{2A_\kappa}{\sqrt{\pi}} \int_{-x_\kappa}^{x_\kappa} \frac{dx}{(x-\xi)^3} \left[1 + \frac{x^2}{\kappa}\right]^{-\kappa+1} = 2 \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right) \left[\xi Z'_\kappa(\xi) + Z_\kappa(\xi)\right]. \quad (\text{B.18})$$

Finalmente, la ecuación diferencial para $Z_\kappa(\xi)$ es

$$\left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa}\right) Z_\kappa''(\xi) + 2 \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \xi Z_\kappa'(\xi) + 2Z_\kappa(\xi) = 0. \quad (\text{B.19})$$

B.3. Expresión analítica para Z_κ

La ecuación (B.19) tiene puntos singulares regulares en $\xi_\pm = \pm\sqrt{-\kappa}$ y $\xi_\infty \rightarrow \infty$. Cuando $\kappa < -1$ ($\kappa > 1/2$), ξ_\pm se encuentra sobre el eje real (imaginario). Para $\kappa \rightarrow \pm\infty$, ξ_\pm se acerca a ξ_∞ .

Podemos encontrar una solución a (B.19) en torno a uno de los puntos regulares ξ_\pm . Notemos que, a partir de (B.1), podemos encontrar un valor exacto para Z_κ y su derivada en $\xi = \xi_+$, de donde

$$Z_\kappa(\xi_+) = \frac{1}{2\sqrt{-\kappa}} \left(\frac{1}{\kappa} - 2\right), \quad (\text{B.20})$$

$$Z_\kappa'(\xi_+) = \frac{1}{2(\kappa + 1)} \left(\frac{1}{\kappa} - 2\right). \quad (\text{B.21})$$

Considere el cambio de variables $t = \frac{1}{2}(1 - \xi/\xi_+)$ y la función $\Phi(t) = Z_\kappa(\xi)/Z_\kappa(\xi_+)$, de modo que $\Phi(0) = 1$. Reemplazando en (B.19)–(B.21) obtenemos, equivalentemente,

$$t(t-1)\Phi''(t) + (\kappa+1)(2t-1)\Phi'(t) + 2\kappa\Phi(t) = 0, \quad (\text{B.22})$$

$$\Phi(0) = 1, \quad (\text{B.23})$$

$$\Phi'(0) = \frac{2\kappa}{\kappa+1}. \quad (\text{B.24})$$

La ecuación (B.22) y las condiciones en $t = 0$, (B.23) y (B.24), puede ser comparada con la ecuación hipergeométrica confluyente, con solución

$$\Phi(t) = {}_2F_1[1, 2\kappa; \kappa+1; t] \quad (\text{B.25})$$

o bien,

$$Z_{\kappa}(\xi) = \frac{\frac{1}{2} - \kappa}{\kappa\sqrt{-\kappa}} {}_2F_1 \left[1, 2\kappa; \kappa + 1; \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{-\kappa}} \right) \right]. \quad (\text{B.26})$$

Usando la definición de las funciones hipergeométricas, vemos que para κ entero se tiene

$$Z_{\kappa}(\xi) = -\frac{1}{\kappa^{1/2}} \frac{(\kappa - 1)!}{(2\kappa - 2)!} \sum_{\ell=0}^{\kappa-1} \frac{(\kappa + \ell - 1)!}{2i(\ell)!} \left(\frac{\xi}{2i\sqrt{\kappa}} + \frac{1}{2} \right)^{-\kappa+\ell}, \quad (\text{B.27})$$

es decir, Z_{κ} se puede escribir como la razón entre un polinomio de grado $\kappa - 1$ y un polinomio de grado κ . Por lo tanto, la función Z_{κ} tiene un polo simple $\xi = -i\sqrt{\kappa}$ de multiplicidad κ y $\kappa - 1$ ceros.

Notemos que las funciones hipergeométricas y, por lo tanto, la función Z_{κ} en la ecuación (B.26), son multivaluadas para valores reales (no enteros) de κ . Para tener una función univaluada de Z_{κ} , elegimos $-\pi < \arg(\xi) \leq \pi$. Esto introduce un corte de rama desde $\xi = \pm i\sqrt{\kappa}$ hasta $\xi = i\infty$ a lo largo del eje $\text{Im}(\xi)$, y restringe el número de ceros de Z_{κ} a $[\kappa - 1]$, donde $n = [\kappa]$ es el número entero más chico que cumple $n \geq \kappa$. Esta propiedad hará que el número de soluciones de la relación de dispersión, ecuación (2.44), sea finito si κ es un número finito.

La evaluación numérica de la función $Z(\xi)$, ecuación (B.5), ha sido hecha con un código C++ que implementa un algoritmo escrito por Poppe y Wijers [141, 142]. De la misma forma, la función $Z_{\kappa}(\xi)$, ecuación (B.26), ha sido evaluada numéricamente mediante un algoritmo en C++ escrito por Michel y Stoitsov [143].

B.4. Expresiones asintóticas

Usando la definición (B.1) y expandiendo $(1 - t/\xi)^{-1}$ en torno a cero, se puede demostrar fácilmente que

$$Z_{\kappa}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\xi^{2\ell+1}} \begin{cases} \frac{(-\kappa)^{\ell} \Gamma(\frac{3}{2} - \kappa)}{\Gamma(\ell - \kappa + \frac{3}{2})}, & \kappa < -1 \\ \frac{\kappa^{\ell} \Gamma(\kappa - \ell - \frac{1}{2})}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})}, & \kappa > 1/2 \end{cases}. \quad (\text{B.28})$$

Notamos que para ambos casos $\kappa < -1$ y $\kappa > 1/2$, los primeros términos en la serie B.28 son

$$Z_{\kappa}(\xi) = -\frac{1}{\xi} - \frac{\kappa}{2\kappa - 3} \frac{1}{\xi^3} - \frac{3\kappa^2}{4\kappa^2 - 16\kappa + 15} \frac{1}{\xi^5} - \dots \quad (\text{B.29})$$

Apéndice C

Casos especiales de propagación de ondas

Las propiedades macroscópicas del plasma están descritas completamente por la forma del tensor de susceptibilidad $\chi_{ij}^{(\nu)} = \chi_{ij}^{(\nu)}[\mathbf{k}, \omega]$ de cada especie ν , introducido en la ecuación (2.37). Para algunos casos límite, la forma de $\chi_{ij}^{(\nu)}$ se reduce considerablemente, por ejemplo para propagación paralela ($\mathbf{k} = k_{\parallel} \hat{z}$) o perpendicular ($\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{x}$) respecto al campo magnético de fondo \mathbf{B}_0 , o para plasmas fríos. En el límite no relativista y cuando la función de distribución se comporta como una Maxwelliana en la dirección perpendicular y como ley de potencias en la dirección paralela respecto a \mathbf{B}_0 [ver ecuación (2.73)], el tensor $\chi_{ij}^{(\nu)}$ se puede escribir como

$$\chi_{ij}^{(\nu)} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_{p\nu}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{n^2}{\varrho_{\nu}^2} S_1^{(n)} K_1^{(n)} & \frac{in}{\varrho_{\nu}} S_2^{(n)} K_1^{(n)} & \frac{n}{\varrho_{\nu} \sqrt{R_{\nu}}} S_1^{(n)} K_2^{(n)} \\ -\frac{in}{\varrho_{\nu}} S_2^{(n)} K_1^{(n)} & S_3 K_1^{(n)} & -\frac{i}{\sqrt{R_{\nu}}} S_2^{(n)} K_2^{(n)} \\ \frac{n}{\varrho_{\nu} \sqrt{R_{\nu}}} S_1^{(n)} K_2^{(n)} & \frac{i}{\sqrt{R_{\nu}}} S_2^{(n)} K_2^{(n)} & S_1^{(n)} K_3^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

donde

$$S_1^{(n)} = \Xi_n(\varrho_\nu), \quad (\text{C.2})$$

$$S_2^{(n)} = \frac{1}{2} \Xi'_n(\varrho_\nu), \quad (\text{C.3})$$

$$S_3^{(n)} = \frac{n^2}{\varrho_\nu^2} \Xi_n(\varrho_\nu) - \frac{\varrho_\nu}{2} \Xi'_n(\varrho_\nu), \quad (\text{C.4})$$

$$K_1^{(n)} = \frac{\kappa_\nu - \frac{1}{2}}{\kappa_\nu} R_\nu [1 + \zeta_\nu^{(n)} Z_{\kappa_\nu+1}(\zeta_\nu^{(n)})] + (\xi_\nu^{(0)} - \xi_\nu^{(n)}) Z_{\kappa_\nu}(\xi_\nu^{(n)}) - 1, \quad (\text{C.5})$$

$$K_2^{(n)} = \xi_\nu^{(0)} + \left(\xi_\nu^{(n)} + \frac{U_\nu}{u_{\parallel\nu}} \right) K_1^{(n)}, \quad (\text{C.6})$$

$$K_3^{(n)} = \frac{1}{R_\nu} \left[\left(\xi_\nu^{(0)} + \frac{U_\nu}{u_{\parallel\nu}} \right) \frac{U_\nu}{u_{\parallel\nu}} + \left(\xi_\nu^{(n)} + \frac{U_\nu}{u_{\parallel\nu}} \right) K_2 \right]. \quad (\text{C.7})$$

donde las funciones especiales Ξ_n y Z_κ están definidas en las ecuaciones (A.22) y (B.26), respectivamente, y donde $R_\nu = u_{\perp\nu}^2/u_{\parallel\nu}^2$; $\varrho_\nu = k_\perp u_{\perp\nu}/\Omega_\nu$; $\xi_\nu^{(n)} = (\omega - k_\parallel U_\nu - n\Omega_\nu)/k_\parallel u_{\parallel\nu}$; y $\zeta_\nu^{(n)} = \xi_\nu^{(n)} \sqrt{1 + 1/\kappa_\nu}$.

C.1. Propagación paralela: $k_\perp = 0$

Para este caso $\varrho_{\perp\nu} = 0$. De acuerdo con (A.2), (A.3) y (A.22),

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Xi_n(\rho) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{2n} \left[\frac{1}{2} - \frac{\rho^2}{4} + O(x^4) \right], \quad (\text{C.8})$$

y las relaciones de recurrencia (A.26)–(A.28), entonces se encuentra fácilmente que

$$\chi_{ij}^{(\nu)} \rightarrow \frac{1}{8\pi} \frac{\omega_{p\nu}^2}{\omega^2} \begin{pmatrix} K_1^{(-1)} + K_1^{(1)} & -i(K_1^{(-1)} - K_1^{(1)}) & 0 \\ i(K_1^{(-1)} - K_1^{(1)}) & K_1^{(-1)} + K_1^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 4K_3^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

donde $K_3^{(0)}$ se reduce a

$$K_3^{(0)} = \frac{\kappa_\nu - \frac{1}{2}}{\kappa_\nu} \left(\frac{\omega}{k_\parallel u_{\parallel\nu}} \right)^2 [1 + \zeta_\nu^{(0)} Z_{\kappa_\nu+1}(\zeta_\nu^{(0)})]. \quad (\text{C.10})$$

El tensor de dispersión en el vacío es diagonal en este límite,

$$\lambda_{ij} \rightarrow \text{diag}(1 - c^2 k^2 / \omega^2, 1 - c^2 k^2 / \omega^2, 1), \quad (\text{C.11})$$

mientras que el tensor de dispersión Λ_{ij} tiene una estructura en bloques similar a (C.9). La relación de dispersión se reduce a

$$\det(\Lambda_{ij}) = \Lambda_+ \Lambda_- \Lambda_{zz} = 0, \quad (\text{C.12})$$

donde $\Lambda_{\pm} = \Lambda_{xx} \pm i\Lambda_{xy}$ corresponde a la parte transversal de ondas circularmente polarizadas derecha (+) e izquierda (-), y Λ_{zz} es la parte longitudinal. Explícitamente, tenemos

$$\Lambda_{\pm} = 1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \sum_{\nu} \frac{\omega_{p\nu}^2}{\omega^2} K_1^{(\mp 1)}, \quad (\text{C.13})$$

$$\Lambda_{zz} = 1 + 2 \sum_{\nu} \frac{\omega_{p\nu}^2}{\omega^2} K_3^{(0)}. \quad (\text{C.14})$$

La forma del tensor de correlaciones del campo eléctrico $\langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle$, definido según (2.64) y (2.65), también adquiere una forma en bloques similar a (C.9), cuyas componentes son

$$\langle |\delta \check{E}_x|^2 \rangle = \langle |\delta \check{E}_y|^2 \rangle = \frac{32\pi^2 \omega}{\omega^2 - c^2 k_{\parallel}^2} \sum_{\nu} k_B T_{\perp\nu} \text{Im} \left[\frac{\Lambda_{xx} \chi_{xx}^{(\nu)} + \Lambda_{xy} \chi_{xy}^{(\nu)}}{\Lambda_+ \Lambda_-} \right], \quad (\text{C.15})$$

$$\langle \delta \check{E}_x \delta \check{E}_y^* \rangle = -\langle \delta \check{E}_y \delta \check{E}_x^* \rangle = -\frac{32\pi^2 i \omega}{\omega^2 - c^2 k_{\parallel}^2} \sum_{\nu} k_B T_{\perp\nu} \text{Re} \left[\frac{\Lambda_{xy} \chi_{xx}^{(\nu)} - \Lambda_{xx} \chi_{xy}^{(\nu)}}{\Lambda_+ \Lambda_-} \right], \quad (\text{C.16})$$

$$\langle |\delta \check{E}_z|^2 \rangle = \frac{32\pi^2}{\omega} \sum_{\nu} \frac{\kappa_{\nu}}{\kappa_{\nu} - \frac{1}{2}} k_B T_{\parallel\nu} \text{Im} \left[\frac{\chi_{zz}^{(\nu)}}{\Lambda_{zz}} \right] \Big|_{\kappa_{\nu} \rightarrow \kappa_{\nu} - 1}. \quad (\text{C.17})$$

Se debe evaluar la expresión (C.17) con cuidado. Debido a la forma de la función de distribución para velocidades v_{\parallel} , es necesario evaluar $\chi_{zz}^{(\nu)}$ y Λ_{zz} en $\kappa_{\nu} - 1$ en vez de κ_{ν} para la especie ν , pero dejando los valores de otras especies fijas.

Si definimos las cantidades polarizadas $\delta\check{E}_{\pm} = (\delta\check{E}_x \pm i\delta\check{E}_y)/2$, entonces obtenemos la representación diagonal

$$\langle |\delta\check{E}_{\pm}|^2 \rangle = \frac{32\pi^2\omega}{\omega^2 - c^2k_{\parallel}^2} \sum_{\nu} k_B T_{\perp\nu} \text{Im} \left[\frac{\chi_{\pm}^{(\nu)}}{\Lambda_{\pm}} \right]. \quad (\text{C.18})$$

Las fluctuaciones de campo magnético longitudinales son nulas en este límite, mientras que

$$\langle |\delta\check{B}_{\pm}|^2 \rangle = \frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} \langle |\delta\check{E}_{\pm}|^2 \rangle, \quad (\text{C.19})$$

$$\langle |\delta\check{\rho}|^2 \rangle = \frac{k_{\parallel}^2}{(4\pi)^2} \langle |\delta\check{E}_z|^2 \rangle. \quad (\text{C.20})$$

C.2. Propagación perpendicular: $k_{\parallel} = 0$

En este caso, el argumento de $Z_{\kappa}(\xi)$ es $\xi \gg 1$, por lo que usaremos al expansión (B.28). Notar que estas expresiones son válidas para $\text{Im}(\xi) > 1$, mientras que para $\text{Im}(\xi) \leq 0$ deberíamos agregar la contribución de las resonancias según el formalismo de Landau. Aun así, esta contribución es pequeña para $\xi \gg 1$, por lo que podemos despreciarla. Si consideramos sólo los dos primeros términos de la serie (B.29),

$$Z_{\kappa}(\xi) \simeq -\frac{1}{\xi} - \frac{\kappa}{2\kappa - 3} \frac{1}{\xi^3}. \quad (\text{C.21})$$

en las expresiones (C.5)–(C.7), y usando el límite $\xi \rightarrow \infty$, obtenemos

$$K_1^{(n)} = -\frac{\omega}{\omega - n\Omega_{\nu}}, \quad (\text{C.22})$$

$$K_2^{(n)} = -\frac{\omega}{\omega - n\Omega_{\nu}} \frac{U_{\nu}}{u_{\parallel\nu}}, \quad (\text{C.23})$$

$$K_3^{(n)} = -\frac{1}{R_{\nu}} \left(\frac{U_{\nu}^2}{u_{\parallel\nu}^2} + \frac{\kappa_{\nu}}{2\kappa_{\nu} - 3} \right) \left(\frac{n\Omega_{\nu}}{\omega - n\Omega_{\nu}} \right) - \frac{1}{2}. \quad (\text{C.24})$$

No se puede obtener una forma simple para el tensor de correlaciones $\langle \delta\check{E}_i \delta\check{E}_j^* \rangle$. Sin embargo, debemos tener cuidado al evaluar (2.64), de la misma forma que

en (C.17), puesto que

$$\langle\langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j \rangle\rangle_\nu^{(\ell)} = \begin{cases} -\frac{1}{k_B T_{\perp\nu}} \langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j \rangle_\nu & \ell \neq z \\ -\frac{\kappa_\nu}{\kappa_\nu - \frac{1}{2} k_B T_{\parallel\nu}} \frac{1}{k_B T_{\parallel\nu}} \langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j \rangle_\nu & \ell = z \end{cases}. \quad (\text{C.25})$$

Si ω es una cantidad puramente real, entonces $\chi_{ij}^{(\nu)}$ y Λ_{ij} también lo serán, por lo que las fluctuaciones electromagnéticas en este caso serán idénticamente nulas.

C.3. Plasmas bi-Maxwellianos: $|\kappa| \gg 1$

En este límite, tenemos que $\zeta_\nu^{(n)} = \xi_\nu^{(n)}$ y $Z_\infty(\xi) = Z(\xi)$ [ver apéndice B]. Luego, podemos simplificar la expresión para $K_1^{(n)}$ de modo que

$$K_1^{(n)} = R_\nu - 1 + [\xi_\nu^{(0)} + (R_\nu - 1)\xi_\nu^{(n)}] Z(\xi_\nu^{(n)}). \quad (\text{C.26})$$

Además, para propagación paralela podemos escribir (C.17) y (C.18) en forma compacta como

$$\langle |\delta \check{E}_\sigma|^2 \rangle = \frac{32\pi^2}{\omega} \sum_\nu \frac{k_B T_{\sigma\nu}}{\lambda_\sigma} \text{Im} \left[\frac{\chi_\sigma^{(\nu)}}{\Lambda_\sigma} \right], \quad \sigma = \{\parallel, \pm\}, \quad (\text{C.27})$$

donde $\lambda_\parallel = 1$ y $\lambda_\pm = 1 - c^2 k_\parallel^2 / \omega^2$.

Para propagación perpendicular, la ecuación (C.25) se reduce a

$$\langle\langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle\rangle_\nu^{(\ell)} = -\frac{1}{k_B T_{\ell\nu}} \langle \delta \check{E}_i \delta \check{E}_j^* \rangle_\nu. \quad (\text{C.28})$$

C.4. Plasmas fríos: $T \rightarrow 0$

Para plasmas fríos, asumimos que $T_{\perp\nu} \rightarrow 0$, $T_{\parallel\nu} \rightarrow 0$ y $T_{\perp\nu}/T_{\parallel\nu} \rightarrow 1$. Este límite es equivalente al de las secciones C.1 y C.2, donde la susceptibilidad toma la forma

de la ecuación (C.9), con

$$K_1^{(\pm)} = -\frac{\omega - k_{\parallel}U_{\nu}}{\omega - k_{\parallel}U_{\nu} \mp \Omega_{\nu}},$$

$$K_3^{(0)} = -\frac{\kappa_{\nu} + 1}{2\kappa_{\nu}} \left(\frac{\omega}{\omega - k_{\parallel}U_{\nu}} \right)^2.$$

Las fluctuaciones electromagnéticas son despreciables en este límite, como se puede ver en las ecuaciones (C.15)–(C.17) para temperatura cero.

Apéndice D

Lista de notaciones

B_0	Campo magnético de fondo
$v_A = B_0 / \sqrt{4\pi n_p m_p}$	Velocidad de Alfvén
$R_\nu = u_{\perp\nu}^2 / u_{\parallel\nu}^2$	Anisotropía térmica (equivale a $T_{\perp\nu} / T_{\parallel\nu}$)
$\beta_{\parallel\nu} = 8\pi n_\nu k_B T_{\parallel\nu} / B_0^2$	Parámetro beta de la especie ν
q_ν	Carga eléctrica de la especie ν
\mathbf{j}	Densidad de corriente
n_ν	Densidad de partículas de la especie ν
ρ	Densidad de carga
$\lambda_{ij} = \delta_{ij} - \frac{c^2 k^2}{s^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right)$	Tensor de dispersión en el vacío, Ec. (2.27)
$\Lambda_{ij} = \lambda_{ij} + 4\pi \sum_\nu \chi_{ij}^{(\nu)}$	Tensor de dispersión para el plasma, Ec. (2.40)
$F_\nu = F_\nu(v_\perp, v_\parallel)$	Función distribución de velocidades, Ec. (2.73)
U_ν	Velocidad de deriva de la especie ν
$\tilde{X}(\mathbf{k}, \omega)$	Transformada de Fourier-Laplace de $X(\mathbf{r}, t)$
$\Omega_\nu = q_\nu B_0 / m_\nu c$	Frecuencia ciclotrónica de la especie ν

κ_ν	Índice para distribuciones no Maxwellianas
m_ν	Masa de la especie ν
$\omega_{p\nu} = \sqrt{4\pi q_\nu^2 n_\nu / m_\nu}$	Frecuencia de plasma de la especie ν
$\chi_{ij}^{(\nu)}$	Tensor de susceptibilidad de la especie ν , Ec. (2.37)
$u_{\sigma\nu} = \sqrt{2k_B T_{\sigma\nu} / m_\nu}$	Rapidez térmica, $\sigma = \{\perp, \parallel\}$
Ξ_n	Función escalada de Bessel modificada, Ec. (A.22)
$\xi_\nu^{(n)} = (\omega - k_\parallel U_\nu - n\Omega_\nu) / k_\parallel u_{\parallel\nu}$	Factor de resonancia, Ec. (2.91)
Z_κ	Función de dispersión de plasmas, Ec. (B.26)

Referencias

- [1] D. J. McComas, H. A. Elliott, N. A. Schwadron, J. T. Gosling, R. M. Skoug y B. E. Goldstein, *Geophys. Res. Lett.* **30**, 1944 (2003).
- [2] R. C. Carrington, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **20**, 13 (1859).
- [3] R. Hodgson, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **20**, 15 (1859).
- [4] J. J. Thomson, *XI. cathode rays* (1897).
- [5] G. F. Fitzgerald, *Sunspots and magnetic storms* (1892).
- [6] L. Biermann, *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège (Ser. 4)* **13**, 291 (1953).
- [7] L. Biermann, B. Brosowski y H. U. Schmidt, *Sol. Phys.* **1**, 254 (1967).
- [8] H. Alfvén, *Nature* **150**, 405 (1942).
- [9] H. Alfvén, en *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*, editado por B. Lehnert (1958), Vol. 6 de *IAU Symposium*, pág. 284.
- [10] H. Alfvén, *Astrophys. J.* **133**, 1049 (1961).
- [11] E. N. Parker, *Astrophys. J.* **128**, 664 (1958).
- [12] S. J. Bame, A. J. Hundhausen, J. R. Asbridge y I. B. Strong, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 393 (1968).

- [13] S. D. Bale, J. C. Kasper, G. G. Howes, E. Quataert, C. Salem y D. Sundkvist, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 211101 (2009).
- [14] H. B. Callen y T. Welton, *Phys. Rev.* **83**, 34 (1951).
- [15] A. G. Sitenko, *Electromagnetic Fluctuations in Plasma* (Academic, New York, 1967).
- [16] V. P. Silin, *Radiofizika (U.S.S.R.)* **2**, 198 (1959).
- [17] S. Ichimaru, *Ann. Phys.* **20**, 78 (1962).
- [18] D. A. Chapman y D. O. Gericke, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 165004 (2011).
- [19] B. Li y R. D. Hazeltine, *Phys. Rev. E* **73**, 065402 (2006).
- [20] N. Meyer-Vernet, P. Couturier, S. Hoang, J. L. Steinberg y R. D. Zwickl, *J. Geophys. Res.* **91**, 3294 (1986).
- [21] E. J. Lund, J. LaBelle y R. A. Treumann, *J. Geophys. Res.* **99**, 23651 (1994).
- [22] N. Meyer-Vernet, S. Hoang, K. Issautier, M. Moncuquet y G. Marcos, *Plasma Thermal Noise: The Long Wavelength Radio Limit* (American Geophysical Union, 2013), págs. 67–74.
- [23] K. Issautier, M. Moncuquet, N. Meyer-Vernet, S. Hoang y R. Manning, *Astrophys. Space Sci.* **277**, 309 (2001).
- [24] M. Moncuquet, A. Lecacheux, N. Meyer-Vernet, B. Cecconi y W. S. Kurth, *Geophys. Res. Lett.* **32**, L20S02 (2005).
- [25] J. A. Araneda, H. Astudillo y E. Marsch, *Space. Sci. Rev.* **172**, 361 (2012).

- [26] A. F. Viñas, P. S. Moya, R. Navarro y J. A. Araneda, *Phys. Plasmas* **21**, 012902 (2014).
- [27] R. E. Navarro, P. S. Moya, V. Muñoz, J. A. Araneda, A. F.-Viñas y J. A. Valdivia, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 245001 (2014).
- [28] S. P. Gary, M. E. McKean, D. Winske, B. J. Anderson, R. E. Denton y S. A. Fuselier, *J. Geophys. Res.* **99**, 5903 (1994).
- [29] S. P. Gary, H. Li, S. O'Rourke y D. Winske, *J. Geophys. Res.* **103**, 14567 (1998).
- [30] E. J. Lund, R. A. Treumann y J. LaBelle, *Phys. Plasmas* **3**, 1234 (1996).
- [31] J. C. Kasper, A. J. Lazarus y S. P. Gary, *Geophys. Res. Lett.* **29**, 1839 (2002).
- [32] P. Hellinger, P. Trávníček, J. C. Kasper y A. J. Lazarus, *Geophys. Res. Lett.* **33**, L09101 (2006).
- [33] E. Marsch, K.-H. Mühlhäuser, R. Schwenn, H. Rosenbauer, W. Pilipp y F. M. Neubauer, *J. Geophys. Res.* **87**, 52 (1982).
- [34] E. Marsch y S. Livi, *J. Geophys. Res.* **92**, 7263 (1987).
- [35] B. E. Goldstein, M. Neugebauer, L. D. Zhang y S. P. Gary, *Geophys. Res. Lett.* **27**, 53 (2000).
- [36] E. Marsch, *Space Sci. Rev.* **172**, 23 (2012).
- [37] E. Marsch, K.-H. Mühlhäuser, H. Rosenbauer, R. Schwenn y F. M. Neubauer, *J. Geophys. Res.* **87**, 35 (1982).

- [38] S. Olbert, en *Physics of the Magnetosphere*, editado por R. D. L. Carovillano y J. F. McClay (1968), Vol. 10 de *Astrophysics and Space Science Library*, pág. 641.
- [39] V. M. Vasyliunas, *J. Geophys. Res.* **73**, 2839 (1968).
- [40] W. C. Feldman, J. R. Asbridge, S. J. Bame y M. D. Montgomery, *J. Geophys. Res.* **78**, 2017 (1973).
- [41] V. Formisano, G. Moreno, F. Palmiotto y P. C. Hedgecock, *J. Geophys. Res.* **78**, 3714 (1973).
- [42] M. Lockwood, B. J. I. Bromage, R. B. Horne, J.-P. St-Maurice, D. M. Willis y S. W. H. Cowley, *Geophys. Res. Lett.* **14**, 111 (1987).
- [43] M. R. Collier, D. C. Hamilton, G. Gloeckler, P. Bochsler y R. B. Sheldon, *Geophys. Res. Lett.* **23**, 1191 (1996).
- [44] K. Chotoo, M. R. Collier, A. B. Galvin, D. C. Hamilton y G. Gloeckler, *J. Geophys. Res.* **103**, 17441 (1998).
- [45] K. Chotoo, N. A. Schwadron, G. M. Mason, T. H. Zurbuchen, G. Gloeckler, A. Posner, L. A. Fisk, A. B. Galvin, D. C. Hamilton y M. R. Collier, *J. Geophys. Res.* **105**, 23107 (2000).
- [46] E. Marsch, *Living Rev. Solar Phys.* **3**, 1 (2006).
- [47] R. Schlickeiser y P. H. Yoon, *Phys. Plasmas* **19**, 022105 (2012).
- [48] D. A. Gurnett, R. R. Shaw, R. R. Anderson, W. S. Kurth y F. L. Scarf, *Geophys. Res. Lett.* **6**, 511 (1979).

- [49] L. F. Burlaga, N. F. Ness, M. H. Acuña, R. P. Lepping, J. E. P. Connerney, E. C. Stone y F. B. McDonald, *Science* **309**, 2027 (2005).
- [50] D. A. Gurnett y W. S. Kurth, *Science* **309**, 2025 (2005).
- [51] L. Burlaga, N. Ness, M. Acuña, R. Lepping, J. Connerney y J. Richardson, *Nature* **454**, 75 (2008).
- [52] D. Gurnett y W. Kurth, *Nature* **454**, 78 (2008).
- [53] D. A. Gurnett, W. S. Kurth, L. F. Burlaga y N. F. Ness, *Science* **341**, 1489 (2013).
- [54] M. G. Kivelson y C. T. Russell, *Introduction to Space Physics* (1995).
- [55] P. H. Diamond, S. I. Itoh y K. Itoh, *Modern Plasma Physics: Volume 1, Physical Kinetics of Turbulent Plasmas* (Cambridge University Press, 2010).
- [56] D. C. Montgomery y D. A. Tidman, *Plasma Kinetic Theory* (McGraw-Hill, New York, 1965). p. 131.
- [57] N. A. Krall y A. W. Trivelpiece, *Principle of Plasma Physics* (San Francisco Press Inc., 1986).
- [58] D. G. Swanson, *Plasma Waves* (Academic, San Diego, 1989).
- [59] T. H. Stix, *Waves in Plasmas* (AIP, New York, 1992).
- [60] S. P. Gary, *Theory of Space Plasma Microinstabilities* (Cambridge University Press, New York, 1993).
- [61] D. Chandler, *Introduction to Modern Statistical Mechanics* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1987).

- [62] L. Novotny y B. Hecht, *Principles of Nano-Optics* (Cambridge, New York, 2006).
- [63] R. E. Navarro, J. Araneda, V. Muñoz, P. S. Moya, A. F.-Viñas y J. A. Valdivia, *Phys. Plasmas* **21**, 092902 (2014).
- [64] F. Flanigan, *Complex Variables: Harmonic and Analytic Functions* (Allyn and Bacon, 1972).
- [65] J. Brown y R. Churchill, *Complex Variables and Applications*, Brown and Churchill (McGraw-Hill Education, 2013).
- [66] P. Bellan, *Fundamentals of Plasma Physics* (Cambridge University Press, 2006).
- [67] H. Qin, C. K. Phillips y R. C. Davidson, *Phys. Plasmas* **14**, 092103 (2007).
- [68] K. Nishikawa y M. Wakatani, *Plasma Physics: Basic Theory with Fusion Applications*, Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics (Springer, 2000).
- [69] L. Landau, *J. Phys. (USSR)* **10**, 25 (1946).
- [70] A. J. Hundhausen, S. J. Bame, J. R. Asbridge y S. J. Sydoriak, *J. Geophys. Res.* **75**, 4643 (1970).
- [71] M. Maksimovic, V. Pierrard y P. Riley, *Geophys. Res. Lett.* **24**, 1151 (1997).
- [72] T. Nieves-Chinchilla y A. F. Viñas, *J. Geophys. Res.* **113**, A02105 (2008).
- [73] D. Summers y R. M. Thorne, *Phys. Fluids B* **3**, 1835 (1991).

- [74] D. J. Mullan y C. W. Smith, *Sol. Phys.* **234**, 325 (2006).
- [75] P. A. Isenberg, *J. Geophys. Res.* **89**, 2133 (1984).
- [76] L. Gomberoff y R. Elgueta, *J. Geophys. Res.* **96**, 9801 (1991).
- [77] M. A. Hellberg y R. L. Mace, *Phys. Plasmas* **9**, 1495 (2002).
- [78] F. Xiao, Q. Zhou, H. He, H. Zheng y S. Wang, *J. Geophys. Res.* **112**, A07219 (2007).
- [79] P. H. Yoon, J. J. Seough, K. K. Khim, H. Kim, H.-J. Kwon, J. Park, S. Parkh y K. S. Park, *Phys. Plasmas* **17**, 082111 (2010).
- [80] P. S. Moya, R. Navarro, V. Muñoz y J. A. Valdivia, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 029001 (2013).
- [81] R. L. Mace y R. D. Sydora, *J. Geophys. Res.* **115**, A07206 (2010).
- [82] R. M. Thorne y D. Summers, *Phys. Fluids B* **3**, 2117 (1991).
- [83] D. Summers y R. Thorne, *J. Geophys. Res.* **97**, 827 (1992).
- [84] D. E. Muller, *Mathematical Tables and Other Aids to Computation* **10**, 208 (1956).
- [85] B.-k. Park y S. Hitotumatu, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **23**, 667 (1987).
- [86] H. M. Antia, *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, nº V. 1 en *Numerical Methods for Scientists and Engineers* (Springer Verlag NY, 2002).
- [87] J. L. Kohl, G. Noci, E. Antonucci, G. Tondello, M. C. E. Huber, S. R. Cranmer, L. Strachan, A. V. Panasyuk, L. D. Gardner, M. Romoli, S. Fineschi,

- D. Dobrzycka, J. C. Raymond, P. Nicolosi, O. H. W. Siegmund, D. Spadaro, C. Benna, A. Ciaravella, S. Giordano, S. R. Habbal, M. Karovska, X. Li, R. Martin, J. G. Michels, A. Modigliani, G. Naletto, R. H. O'Neal, C. Pernechele, G. Poletto, P. L. Smith y R. M. Suleiman, *Astrophys. J. Lett.* **501**, L127 (1998).
- [88] J. V. Hollweg y P. A. Isenberg, *J. Geophys. Res.* **107**, A7 (2002).
- [89] J. A. Klimchuk, *Solar Phys.* **234**, 41 (2006).
- [90] J. C. Kasper, A. J. Lazarus y S. P. Gary, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 261103 (2008).
- [91] J. A. Araneda, Y. Maneva y E. Marsch, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 175001 (2009).
- [92] S. W. McIntosh, B. De Pontieu, M. Carlsson, V. Hansteen, P. Boerner y M. Goossens, *Nature* **475**, 477 (2011).
- [93] J. C. Kasper, B. A. Maruca, M. L. Stevens y A. Zaslavsky, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 091102 (2013).
- [94] R. B. Horne, R. M. Thorne, Y. Y. Shprits, N. P. Meredith, S. A. Glauert, A. J. Smith, S. G. Kanekal, D. N. Baker, M. J. Engebretson, J. L. Posch, M. Spasojevic, U. S. Inan, J. S. Pickett y P. M. E. Decreau, *Nature* **437**, 227 (2005).
- [95] D. Summers, B. Ni y N. P. Meredith, *J. Geophys. Res.* **112**, A04206 (2007).
- [96] L. Gomberoff y P. Vega, *Plasma Phys. Contr. Fusion* **31**, 629 (1989).
- [97] K. Matsuda, *Plasma Phys. Control. Fusion* **28**, 477 (1986).

- [98] W. Baumjohann y R. Treumann, *Basic Space Plasma Physics* (Imperial College Press, 2012).
- [99] R. L. Mace y M. A. Hellberg, *J. Plasma Phys.* **43**, 239 (1990).
- [100] B. D. Fried y R. W. Gould, *Phys. Fluids* **4**, 139 (1961).
- [101] H. F. Astudillo, *J. Geophys. Res.* **101**, 24433 (1996).
- [102] P. K. Shukla y L. Stenflo, *Phys. Plasmas* **7**, 2738 (2000).
- [103] V. Muñoz y L. Gomberoff, *Phys. Plasmas* **9**, 2534 (2002).
- [104] V. Muñoz, *Phys. Plasmas* **11**, 3497 (2004).
- [105] D. P. Laurie, *Math. Comp.* **66**, 1133 (1997).
- [106] J. A. Newbury, C. T. Russell, J. L. Phillips y S. P. Gary, *J. Geophys. Res.* **103**, 9553 (1998).
- [107] S. P. Gary, M. F. Thomsen, L. Yin y D. Winske, *J. Geophys. Res.* **100**, 21961 (1995).
- [108] S. P. Gary, J. Wang, D. Winske y S. A. Fuselier, *J. Geophys. Res.* **102**, 27159 (1997).
- [109] E. E. Scime, P. A. Keiter, M. M. Balkey, R. F. Boivin, J. L. Kline, M. Blackburn y S. P. Gary, *Phys. Plasmas* **7**, 2157 (2000).
- [110] A. Vecchio, F. Valentini, S. Donato, V. Carbone, C. Briand, J. Bougeret y P. Veltri, *J. Geophys. Res.* **119**, 7012 (2014).
- [111] D. D. Sentman, *J. Geophys. Res.* **87**, 1455 (1982).

- [112] P. H. Yoon, *Phys. Plasmas* **14**, 064504 (2007).
- [113] S. P. Gary, *J. Plasma Phys.* **35**, 431 (6 1986).
- [114] A. L. Brinca, *J. Geophys. Res.* **95**, 221 (1990).
- [115] E. Marsch, L. Zhao y C.-Y. Tu, *Ann. Geophys.* **24**, 2057 (2006).
- [116] Š. Štverák, P. Trávníček, M. Maksimovic, E. Marsch, A. N. Fazakerley y E. E. Scime, *J. Geophys. Res.* **113**, A03103 (2008).
- [117] B. A. Maruca, J. C. Kasper y S. P. Gary, *Astrophys. J.* **748**, 137 (2012).
- [118] A. F. Viñas, P. S. Moya, R. E. Navarro, J. A. Valdivia, J. A. Araneda y V. Muñoz (2014). Enviado a *J. Geophys. Res.*
- [119] J. Seough, P. H. Yoon, K.-H. Kim y D.-H. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 071103 (2013).
- [120] S. Servidio, K. T. Osman, F. Valentini, D. Perrone, F. Califano, S. Chapman, W. H. Matthaeus y P. Veltri, *Astrophys. J. Lett.* **781**, L27 (2014).
- [121] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [122] M. R. Collier, *Adv. Space. Res.* **33**, 2108 (2004).
- [123] R. E. Navarro, V. Muñoz, J. A. Araneda, A. F.-Viñas, P. S. Moya y J. A. Valdivia (2014). Enviado a *J. Geophys. Res.*
- [124] A. F. Viñas, R. L. Mace y R. F. Benson, *J. Geophys. Res.* **110**, A06202 (2005).
- [125] C. Tsallis, R. S. Mendes y A. R. Plastino, *Phys. A* **261**, 534 (1998).
- [126] M. Neugebauer, *J. Geophys. Res.* **81**, 78 (1976).

- [127] W. C. Feldman, J. T. Gosling, D. J. McComas y J. L. Phillips, *J. Geophys. Res.* **98**, 5593 (1993).
- [128] K. W. Ogilvie y M. A. Coplan, *Rev. Geophys.* **33**, 615 (1995).
- [129] T. Felten, R. Schlickeiser, P. H. Yoon y M. Lazar, *Phys. Plasmas* **20**, 052113 (2013).
- [130] T. Felten y R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **20**, 082116 (2013).
- [131] T. Felten y R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **20**, 082117 (2013).
- [132] T. Felten y R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **20**, 104502 (2013).
- [133] M. Lazar, P. H. Yoon y R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **19**, 122108 (2012).
- [134] M. Abramowitz y I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Applied Mathematics Series (Dover Publications, 1964).
- [135] G. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 1966).
- [136] B. S. Newberger, *J. Math. Phys.* **23**, 1278 (1982).
- [137] M. Bakker y N. M. Temme, *J. Math. Phys.* **25**, 1266 (1984).
- [138] B. D. Fried y S. D. Conte, *The Plasma Dispersion Function* (Academic, San Diego, California, 1961).
- [139] R. L. Mace y M. A. Hellberg, *Phys. Plasmas* **2**, 2098 (1995).
- [140] R. L. Mace y M. A. Hellberg, *Phys. Plasmas* **16**, 072113 (2009).

- [141] G. P. M. Poppe y C. M. J. Wijers, *ACM Trans. Math. Softw.* **16**, 47 (1990).
- [142] G. P. M. Poppe y C. M. J. Wijers, *ACM Trans. Math. Softw.* **16**, 38 (1990).
- [143] N. Michel y M. Stoitsov, *Comput. Phys. Commun.* **178**, 535 (2008).