K-TEORIA Y FORMAS CUADRATICAS SOBRE CUERPOS DE CARACTERISTICA 2

Tesis entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

ROBERTO ARTURO ARAVIRE FLORES

Diciembre, 1989

Patrocinante: Profesor Ricardo Baeza R.

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

INFORME DE APROBACION

TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el Candidato

Roberto Arturo Aravire Flores

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas.

Patrocinante de Tesis

Dr. Ricardo Baeza R. Ricardo Baeza

Comisión Informante de Tesis

Dr. Enzo R. Gentile

Dr. José Pantoja M.

Dr. Gonzalo Riera L.

Dr. Jorge Soto A.

A mi esposa, Edith.

Deseo agradecer al Profesor Ricardo Baeza por haber destacado en uno de sus cursos, entre otros problemas, la ausencia de una k-teoría algebraica de cuerpos de característica 2. Esto, junto a conversaciones posteriores, motivó mi interés por este tema y me decidió a trabajar en él como problema de la presente tesis.

No puedo dejar de agradecerle también su apoyo, sugerencias, valiosas ideas y su confianza en que se obtendrían resultados interesantes en este trabajo.

Roberto Aravire F.

Resumen

En esta tesis introducimos una k-teoría algebraica de cuerpos de característica 2 que se relaciona en forma natural con la teoría de formas cuadráticas.

Sea F un cuerpo de característica 2, definimos los grupos: $h_1(F) = F/\wp(F)$, $h_{n+1}(F) = k_1(F) \otimes \cdots \otimes k_1(F) \otimes h_1(F)/R_n$, donde R_n es el subgrupo generado por los elementos $\ell(a_1) \otimes \cdots \otimes \ell(a_n) \otimes t(b)$ tales que existe un $1 \leq i \leq n-1$ con $a_i + a_{i+1} = 1$ o $a_i \equiv b + \wp(c)\ Mod\ F^{*^2}$ para algún $c \in F$ y $k_1(F)$ la versión aditiva de F^*/F^{*^2} . De manera $h_{n+1}(F)$ es el análogo del grupo $k_n(F)$ de la k-teoría de Milnor.

Construimos la aplicación $s_n : h_{n+1}(F) \to I^n Wq(F)/I^{n+1}Wq(F)$, $\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)t(b) \mapsto \overline{\ll a_1, \ldots, a_n; b\,]]}$. El resultado principal de este trabajo es: s_n es isomorfismo para todo n . En consecuencia los grupos $I^n Wq(F)/I^{n+1}Wq(F)$ son interpretados, mediante generadores y relaciones, por los grupos h_{n+1} . Este resultado es análogo a una conjetura planteada por Milnor.

Un importante resultado intermedio es: $ker(H_2^{n+1}(F) \to H_2^{n+1}(F(\Phi))) = \overline{F\frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n}}$ donde $H_2^{n+1}(F)$ es el conúcleo del homomorfismo de Milne $\wp : \Omega_F^n \to \Omega^n F/d\Omega_F^{n-1}$ y $F(\Phi)$ es el cuerpo de funciones correspondiente a la n-forma bilineal de Pfister $\Phi = \ll a_1, \ldots, a_n \gg$.

Abstract

In this thesis we introduce an algebraic k-theory of fields of characteristic two which is naturally related to the theory of quadratic forms.

Let F be a field of characteristic two, we define the groups : $h_1(F) = F/\wp(F)$, $h_{n+1}(F) = k_1(F) \otimes \cdots \otimes k_1(F) \otimes h_1(F)/R_n$, where R_n is the subgroup generated by the elements $\ell(a_1) \otimes \cdots \otimes \ell(a_n) \otimes t(b)$ such that there is an $1 \leq i \leq n-1$ with either $a_i + a_{i+1} = 1$ or $a_i \equiv b + \wp(c)\ Mod\ F^{*^2}$ for some $c \in F$. Thus $h_{n+1}(F)$ is the analog of Milnor's k-group $k_n(F)$.

We construct the mapping $s_n : h_{n+1}(F) \to I^n Wq(F)/I^{n+1}Wq(F)$, $\ell(a_1) \cdots \ell(a_n) t(b) \mapsto \overline{\ll a_1, \ldots, a_n; b \,]]}$. In this work we prove that for all n, s_n is an isomorphism . So the groups $I^n Wq(F)/I^{n+1}Wq(F)$ are described, by generators and relations through the groups h_{n+1} . This result is an analog of a conjecture due to Milnor.

An important intermediate result is: $ker(H_2^{n+1}(F) \to H_2^{n+1}(F(\Phi))) = \overline{F\frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n}}$ where $H_2^{n+1}(F)$ is the cokernel of the Milne's homomorphism $\wp : \Omega_F^n \to \Omega^n F/d\Omega_F^{n-1}$ and $F(\Phi)$ is the function field corresponding to the n-Pfister bilinear form $\Phi = \ll a_1, \ldots, a_n \gg$.

INDICE

INTRODUCCION

Esta tesis ha sido motivada por los trabajos de J. Milnor en 1970 [Mi_1] y K. Kato en 1983 [Ka], relativos a la K-teoría algebraica de cuerpos y sus relaciones con las formas cuadráticas. Nuestro propósito es desarrollar una K-teoría modificada de cuerpos de característica 2 que explique las relaciones que satisfacen las formas cuadráticas de Pfister en el grupo de Witt.

Es sabido que, para cuerpos de característica distinta de 2, los conceptos de forma bilineal simétrica y forma cuadrática son completamente equivalentes, luego es relevante establecer la diferencia en el caso de cuerpos de característica 2. En adelante sólo consideraremos cuerpos de característica 2.

Sea $W(F)$ el anillo de las clases de formas bilineales simétricas no singulares. Todo elemento de $W(F)$ está representado por la forma

$$< a_1, \ldots, a_n >:=\perp_{i=1,\ldots,n}< a_i >$$

donde $\perp_{i=1,\ldots,n}< a_i >$ corresponde a la expresión $a_1X_1^2 + \cdots a_nX_n^2$. Denotando por $I(F)$ al ideal maximal de las formas bilineales de dimensión par, se obtiene una cadena de ideales:

$$W(F) \supset I(F) \supset \cdots \supset I^n(F) \supset \cdots$$

Se verifica que $I^n(F)$ es generado aditivamente por las formas del tipo $< 1, a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, a_n >$, que se denotan por $\ll a_1, \ldots, a_n \gg$ y se denominan n-formas bilineales de Pfister.

Por otra parte sea $W_q(F)$ el grupo de las clases de formas cuadráticas no singulares. Se verifica que todo elemento de ese grupo es de la forma

$$\perp_{i=1,\dots,n} < a_i > [1, b_i]$$

donde $a_i \in F^*, b_i \in F$ y $< a_i > [1, b_i]$ corresponde a la forma cuadrática $a_i(X_i^2 + X_iY_i + b_iY_i^2)$. Se sabe que $W_q(F)$ es un $W(F)$ -módulo y por ello se tienen los submódulos $I^nW_q(F) := I^n(F)W_q(F)$ que forman la cadena:

$$W_q(F) \supset IW_q(F) \supset \cdots \supset I^nW_q(F) \supset \cdots.$$

Cada submódulo $I^nW_q(F)$ es generado aditivamente por las $(n+1)$-formas cuadráticas de Pfister $\ll a_1, \dots, a_n \gg [1, b]$.

En 1970 Milnor introdujo la K-teoría algebraica de cuerpos de característica distinta de 2 definiendo los grupos $K_n(F)$ de la siguiente manera:

- $K_0(F) = Z$
- $K_1(F)$ es la versión aditiva de F^* , via un isomorfismo denotado por ℓ .
- $K_n(F) = K_1 \otimes \cdots \otimes K_1(F)/J$ donde J es el subgrupo del producto tensorial generado por los elementos $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ tales que $a_i + a_{i+1} = 1$ para algún $i = 1, \dots, n-1$.

Para relacionar estos grupos con las formas cuadráticas, se define en [Mi$_1$] $k_n(F) := K_n(F)/2K_n(F)$, y se denota por $\ell(a_1) \cdots \ell(a_n)$ la imagen de $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ en k_n . Se tienen las relaciones básicas:

- $\ell(ab) = \ell(a) + \ell(b)$.
- $\ell(a)\ell(1-a) = 0$

Además se define la aplicación

$$s_n : k_n(F) \longrightarrow I^n(F)/I^{n+1}(F)$$

$$s_n(\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)) = \overline{\ll -a_1, \ldots, -a_n \gg},$$

se demuestra que s_n es un epimorfismo para todo n y que s_1 y s_2 son isomorfismos. En [Mi$_1$] se conjetura que s_n es isomorfismo para todo n. Esta conjetura está aún vigente y su importancia radica en el hecho que permitiría describir explícitamente $I^n(F)/I^{n+1}(F)$ mediante generadores y relaciones.

Por otra parte cabe destacar que el símbolo cuaterniónico

$$\Phi \quad : F^*/F^{*^2} \times F^*/F^{*^2} \longrightarrow Br(F)_2$$

definido por $\qquad \Phi(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{(a,b)_F},$

donde $(a,b)_F$ es el álgebra de cuaterniones determinada por $a, b \in F^*$, satisface las relaciones:

- $\Phi(a_1a_2, b) = \Phi(a_1, b)\Phi(a_2, b)$
- $\Phi(a, b_1b_2) = \Phi(a, b_1)\Phi(a, b_2)$
- $\Phi(a, b) = 0$ si y sólo si $\ll -a, -b \gg$ es isótropo. En particular se tiene que $\Phi(a, 1-a) = 0$.

Luego la K-teoría de Milnor plantea generalizar las relaciones básicas que se cumplen entre las álgebras de cuaterniones.

Para cuerpos de característica 2, la K-teoría de Milnor se relaciona naturalmente con las formas bilineales y en 1983 K. Kato logró demostrar que efectivamente

$$s_n : k_n(F) \longrightarrow I^n(F)/I^{n+1}(F)$$

es isomorfismo para todo n (ver [Ka]).

Tal como lo mencionamos más arriba, desarrollaremos una K-teoría para cuerpos de característica 2 que se relacione naturalmente con las formas cuadráticas . Evidentemente esta K-teoría deberá tener en consideración las siguientes relaciones básicas del símbolo cuaterniónico:

$$\Phi : F^*/F^{*^2} \times F/\wp F \longrightarrow Br(F)_2$$

dado por $\Phi(\overline{a},\overline{b}) = \overline{(a,b]_F}$, donde $(a,b]_F$ es el álgebra de cuaterniones determinada por $a \in F^*, b \in F$ (ver el capítulo II, sección 2).

- $\Phi(a_1a_2,b) = \Phi(a_1,b)\Phi(a_2,b)$
- $\Phi(a,b_1+b_2) = \Phi(a,b_1)\Phi(a,b_2)$
- $\Phi(a,b) = 0$ si y sólo si $\ll a,b\,]]$ es isótropo; es decir $a \equiv b + \wp c$ Mód F^{*^2} si $b \neq 0$.

En la sección 2 del Capítulo II introducimos los grupos

$$h_{n+1}(F) := k_1(F) \otimes \cdots \otimes k_1(F) \otimes h_1(F)/\mathcal{R}_n$$

donde $\mathcal{R}_n$ es el subgrupo generado por los elementos $\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)t(b)$ tales que existe un $1 \leq i \leq n-1$ con $a_i + a_{i+1} = 1$ o $a_i \equiv b + \wp c$ Mód F^{*^2} para algún $c \in F$. Estos grupos están definidos por generadores y relaciones que corresponden, en el caso $h_2(F)$, a las dadas por las álgebras de cuaterniones. En esta sección estudiamos las propiedades básicas de esta k-teoría y concluimos con un resultado análogo al obtenido por Milnor en [Mi$_1$] para $2 \neq 0$, es decir

Existe una única aplicación

$$s_n : h_{n+1}(F) \longrightarrow I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$$

definida por $s_n(\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)t(b)) = \overline{\ll a_1,\ldots,a_n;b\,]]}$ **;** s_n **es epimorfismo para todo** n **y además** s_1 **y** s_2 **son isomorfismos.**

La natural extensión de la conjetura de Milnor en este caso es que estos homomorfismos s_n son isomorfismos para todo $n \geq 1$. La demostración de este hecho es uno de los resultados principales de este trabajo y se realizara en el capítulo IV; ver Teorema 5.

En la sección 3 del Capítulo II se desarrolla la teoría de Cadena de p-equivalencias, análoga a la desarrollada por Elman y Lam en 1976 para cuerpos de característica distinta de 2 en [E-L]. El resultado principal de esta sección es que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- $\ll a_1, \ldots, a_n; A \,]] \cong \ll b_1, \ldots, b_n; B \,]]$.
- $\ll a_1, \ldots, a_n; A \,]] \equiv \ll b_1, \ldots, b_n; B \,]]$ (Mod $I^{n+1}W_q(F)$).
- $\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)t(A) = \ell(b_1)\cdots\ell(b_n)t(B)$ en $h_{n+1}(F)$.

es decir, los símbolos $\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)t(b)$ son un conjunto completo de invariantes para las $(n+1)$ -formas cuadráticas de Pfister.

En el Capítulo III se incluye el estudio del módulo diferencial Ω_F^n que podemos describir como el n -producto exterior de Ω_F^1 , donde Ω_F^1 es el F-espacio vectorial de las 1-formas diferenciales absolutas $\Omega^1_{F^\bullet/F^{\bullet 2}}$.

Sea $d: F \to \Omega_F^1$ el operador diferencial. Entonces se tiene que $\Omega_F^1 = FdF$. Si $\mathcal{B} = \{b_i \mid i \in I\}$, con I conjunto ordenado, es una 2-base de F sobre F^2 , es decir, el conjunto de todos los productos finitos de elementos de $\mathcal{B}$ es una F^2 -base de F , entonces $\{db_i \mid i \in I\}$ es una F -base de Ω_F^1 y por lo tanto se tiene que $\{db_{i_1} \wedge \cdots \wedge db_{i_n} \mid i_1 < \cdots < i_n\}$ es una F -base de Ω_F^n . Además se tiene la extensión natural $d: \Omega_F^n \longrightarrow \Omega_F^{n+1}$ dada por $d(xdy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n) = dx \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$.

Para cualquier $n \geq 1$ definimos

$$\Sigma_{n,F} = \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to I \mid \sigma(1) < \cdots < \sigma(n)\}.$$

Consideremos en $\Sigma_{n,F}$ el orden lexicográfico. Si $\gamma \in \Sigma_{n,F}$ usaremos la siguiente notación

$$b^{\gamma} := b_{\gamma(1)} \cdots b_{\gamma(n)} \qquad db_{\gamma} := db_{\gamma(1)} \wedge \cdots \wedge db_{\gamma(n)} \qquad \ell(b)^{\gamma} := \ell(b_{\gamma(1)}) \cdots \ell(b_{\gamma(n)}).$$

Luego todo elemento a de F tiene una expresión única de la forma

$$a = \sum_{n \geq 1} \sum_{\gamma \in \Omega_F^n} a_{\gamma}^2 b^{\gamma},$$

y por lo tanto podemos definir la i-derivada de a, para $i \in I$, por

$$D_i(a) := \frac{1}{b_i} \sum_{i \in Im(\gamma)} a_{\gamma}^2 b^{\gamma}$$

Se obtiene $da = \sum_{i \in I} D_i(a) db_i$.

En [Mil] y [Ka] se define para todo $n \geq 1$ el homomorfismo

$$\wp : \Omega_F^n \longrightarrow \Omega_F^n / d\Omega_F^{n-1}$$

$$\wp(x \frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_n}{y_n}) = \overline{\wp(x) \frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_n}{y_n}}.$$

y se introducen los siguientes grupos asociados al homomorfismo $\wp$

$$\nu_F(n) := ker(\wp) \qquad \text{y} \qquad H_2^{n+1}(F) := Coker(\wp).$$

Luego la sucesión :

$$0 \to \nu_F(n) \to \Omega_F^n \xrightarrow{\wp} \Omega_F^n / d\Omega_F^{n-1} \to H_2^{n+1}(F) \to 0$$

es exacta.

En [Ka] se demuestra que existe un homomorfismo natural

$$dlog : k_n(F) \longrightarrow \nu_F(n)$$

$$dlog(\ell(a_1) \cdots \ell(a_n)) = \frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n}$$

y uno de los resultados principales en el trabajo de Kato es que *dlog* es isomorfismo para todo n .

Similarmente en el Capítulo IV demostramos que existe un único homomorfismo

$$dlog : h_{n+1}(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F)$$

definido por

$$dlog(\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)t(b)) = \overline{b\frac{da_1}{a_1}\wedge\cdots\wedge\frac{da_n}{a_n}}$$

y que *dlog* es isomorfismo para todo n .

Para la demostración del Teorema 5, análogo de la conjetura de Milnor, se efectua el estudio de $H_2^{n+1}(F(\phi))$ donde $F(\phi)$ es el cuerpo de funciones correspondiente a la forma bilineal de Pfister $\phi = \ll a_1,\ldots,a_n \gg$, es decir

$$F(\phi) = \text{ Quot}(F[X]/(\phi(X)))$$

donde $X = (X_0,\ldots.X_{2^n-1})$ y $\phi(X) = X_0^2 + a_1X_1^2 + \cdots + a_1\cdots a_nX_{2^n-1}^2$. Es claro que $F(\phi)$ tiene grado de transcendencia $2^n - 1$ sobre F .

El resultado principal de la sección 2 del Capítulo III es :

$$Ker(H_2^{n+1}(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F(\phi))) = \overline{F\frac{da_1}{a_1}\wedge\cdots\wedge\frac{da_n}{a_n}}$$

obtenido fundamentalmente mediante un análisis detallado de las relaciones diferenciales en el espacio vectorial $\Omega^n_{F(X)}$.

Finalmente en el Capítulo IV , se demuestra el resultado principal de este trabajo; esto es, el análogo en característica 2, de la conjetura de Milnor:

$$s_n : h_{n+1}(F) \longrightarrow I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$$

es un isomorfismo y por lo tanto

$$I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F) \cong H_2^{n+1}(F) \cong h_{n+1}(F)$$

Se incluye un Apéndice con una relación entre la k-teoría introducida en este trabajo y los grupos de cohomología galoisiana de la k-teoría de Milnor. Este resultado responde a una pregunta planteada por Sah [Sa] y Arason [Ar] en cuanto a la interpretación cohomológica de los cuocientes $I^n(F)/I^{n+1}(F)$ y $I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$. Este último resultado ha sido también obtenido por Kato en [Ka].

CAPITULO 1

FORMAS CUADRATICAS SOBRE CUERPOS DE CARACTERISTICA 2

1.1 Introducción.

El propósito de este capítulo es presentar los elementos fundamentales de la teoría de formas cuadráticas y formas bilineales simétricas sobre cuerpos de característica 2. Aunque el artículo "Symmetric Bilinear Forms and Quadratic Forms" de Ch. Sah [Sa] es una fuente adecuada para informarse sobre estos temas, hemos preferido efectuar una recopilación de las definiciones y propiedades fundamentales de las formas cuadráticas y formas bilineales simétricas con el objeto de hacer que este trabajo sea auto contenido e introducir la notación que usaremos en los Capítulos siguientes.

1.2 Formas cuadráticas y formas bilineales simétricas.

Una forma bilineal simétrica (V, b) sobre un cuerpo F es un espacio vectorial V sobre F de dimensión finita provisto de una aplicación bilineal simétrica $b : V \times V \longrightarrow F$. Una forma bilineal simétrica (V, b) se llama no singular si para todo x el homomorfismo $b(x, \cdot) : V \to Hom_F(V, F)$, inducido por b, es biyectivo.

Si (V_1, b_1) y (V_2, b_2) son formas bilineales simétricas sobre F, la suma directa $(V_1, b_1) \oplus (V_2, b_2)$ se define como el espacio suma directa $V_1 \oplus V_2$ con la aplicación bilineal simétrica

$$b_1 \oplus b_2 : (V_1 \oplus V_2) \longrightarrow F$$

$$(b_1 \oplus b_2)(x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2) = b_1(x_1, y_1) + b_2(x_2, y_2) \qquad x_i, y_i \in V_i.$$

El producto tensorial $(V_1, b_1) \otimes (V_2, b_2)$ se define como el espacio producto $V_1 \otimes V_2$ con la aplicación bilineal simétrica

$$(b_1 \otimes b_2) : (V_1 \otimes V_2) \times (V_1 \otimes V_2) \longrightarrow F$$

$$(b_1 \otimes b_2)(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = b_1(x_1, y_1) \cdot b_2(x_2, y_2) \qquad x_i, y_i \in V_i.$$

Se demuestra que si b_1 y b_2 son no singulares, entonces $b_1 \oplus b_2$ y $b_1 \otimes b_2$ también son no singulares.

Por otra parte, una forma cuadrática (V, q) sobre un cuerpo F es un espacio vectorial V sobre F de dimensión finita, provisto de una función $q : V \to F$ tal que:

1. $q(ax) = a^2 q(x) \qquad a \in F, x \in V$.

2. la aplicación $b_q : V \times V \longrightarrow F$ definida por

$$b_q(x, y) := q(x + y) - q(x) - q(y),$$

   es bilineal.

Se dice que (V, q) es no singular si la forma bilineal inducida b_q es no singular.

La suma directa $(V_1, q_1) \oplus (V_2, q_2)$ se define como el espacio suma directa $V_1 \oplus V_2$ provisto de la función

$$q_1 \oplus q_2 : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow F$$

$$(q_1 \oplus q_2)(x_1 \oplus x_2) = q_1(x_1) + q_2(x_2).$$

Si (V, b) es una forma bilineal simétrica y (V', q) es una forma cuadrática, ambas sobre F , el producto tensorial $(V, b) \otimes (V', q)$ se define como el espacio producto $V \otimes V'$ con la función

$$b \otimes q : V \otimes V' \longrightarrow F$$

$$(b \otimes q)(x \otimes y) = b(x,x) \cdot q(y), x \in V, y \in V'.$$

Se demuestra que $b \otimes q$ es una forma cuadrática sobre F y que la forma bilineal asociada a $b \otimes q$ es el producto tensorial de (V, b) con la forma bilineal asociada a q , es decir:

$$b_{b \otimes q} = b \otimes b_q$$

Si la característica del cuerpo es distinta de 2, las formas bilineales simétricas y las formas cuadráticas son esencialmente lo mismo, pero en el caso de cuerpos de característica 2 , las teorías correspondientes a ambos objetos son completamente diferentes.

En general consideraremos cuerpos con característica 2, salvo indicación expresa de lo contrario. Usaremos la letra b para denotar formas bilineales y q para formas cuadráticas.

Sea (V, b) una forma bilineal simétrica. Un vector no nulo x tal que $b(x,x)$ se llama isótropo. La forma (V, b) se dice anisótropa si no contiene vectores isótropos.

Dadas dos formas bilineales simétricas (V_1, b_1) y (V_2, b_2) , se dice que

$$\sigma : (V_1, b_1) \longrightarrow (V_2, b_2)$$

es una isometría si:

1. σ es un isomorfismo F -lineal entre los espacios vectoriales.

2. $b_1(x,y) = b_2(\sigma(x), \sigma(y))$ para todo $(x,y) \in V_1 \times V_2$.

Si entre b_1 y b_2 existe una isometría se dice que las formas son isométricas y se denotarán por $b_1 \cong b_2$.

Por otra parte, sea (V, q) una forma cuadrática, un vector x no nulo tal que $q(x) = 0$ se llama vector isótropo. Si la forma cuadrática no tiene vectores isótropos se dice que es una forma cuadrática anisótropa.

Dadas dos formas cuadráticas (V_1, q_1) y (V_2, q_2) , se dice que

$$\sigma : (V_1, q_1) \longrightarrow (V_2, q_2)$$

es una isometría si:

1. σ es un isomorfismo F -lineal entre los espacios vectoriales.

2. $q_1(x) = q_2(\sigma(x))$ para todo $x \in V_1$.

Si entre q_1 y q_2 existe una isometría se dice que las formas son isométricas y se denotarán por $q_1 \cong q_2$.

Se define el siguiente subconjunto de F asociado a la forma cuadrática (V, q) :

$$D_F(q) := \{q(x) \mid x \in V, x \neq 0\}$$

1.3 Bases.

Sea (V, b) una forma bilineal simétrica no singular de dimensión n sobre F . Una base $\{x_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ de V se llama ortogonal si $b(x_i, x_j) = 0$ para $i \neq j$.

Una forma bilineal (V, b) no necesariamente tiene una base ortogonal pero es posible efectuar el siguiente proceso de descomposición: Si existe un vector x_1 tal que $b(x_1, x_1) = a_1 \neq 0$ entonces se verifica que $(V, b) \cong < x_1 > \perp (V', b')$ donde $< x_1 >$ es el F -espacio vectorial de dimensión 1 generado por x_1 y V' es el subespacio ortogonal a $< x_1 >$ con b' la forma b restringida a V' . Si existe un vector $x_2 \in V'$ no nulo tal que $b(x_2, x_2) = a_2 \neq 0$ entonces $(V', b') \cong < x_2 > \perp (V'', b'')$ donde $< x_2 >$ es el F -espacio vectorial de dimensión 1 generado por x_2 y V'' es el subespacio de V' ortogonal a $< x_1 >$ con b'' la forma b' restringida a V'' . De este modo, iterando el proceso, podemos descomponer (V, b) como:

$$(V, b) = < x_1 > \perp < x_2 > \perp \ldots \perp < x_s > \perp U,$$

donde U es un subespacio tal que para todo vector $z \in U$ se cumple $b(z,z) = 0$.

Una forma bilineal simétrica de dimensión 2 con base $\{e,f\}$ tal que $b(e,e) = b(f,f) = 0$ y $b(e,f) = 1$ se llama Plano Hiperbólico y se denota por H . En general, una forma bilineal simétrica (V,b) se dice hiperbólica si es suma directa de planos hiperbólicos, es decir

$$b \cong H \perp \ldots \perp H = s \times H,$$

con s entero positivo.

Se demuestra que si b' es una forma bilineal simétrica entonces $b \otimes H$ es una forma hiperbólica.

Se cumple que (V,b) es hiperbólico si y sólo si $b(x,x) = 0$ para todo $x \in V$. De esta manera la descomposición enunciada al comienzo de esta sección se expresa como

$$(V,b) =< x_1 > \perp < x_2 > \perp \ldots \perp < x_s > \perp\, t \times H,$$

con s,t enteros no negativos y $n = s + 2t$.

Por otra parte diremos que (V,b) es un espacio metabólico si contiene un subespacio U tal que $U = U^{\perp}$. Evidentemente todo espacio hiperbólico es metabólico pero lo contrario no es verdadero. Por ejemplo el espacio vectorial V con base e,f tales que $b(e,e) = b(f,f) = 1$ y $b(e,f) = 0$ contiene al subespacio $< e+f >$ y se tiene que $< e+f > = < e+f >^{\perp}$; luego (V,b) es un espacio metabólico y claramente no es hiperbólico.

Se demuestra que la suma directa de espacios metabólicos es metabólica y que el producto tensorial de una forma bilineal por una forma metabólica tambien es metabólica.

En base a lo anterior se define la siguiente relación entre formas bilineales simétricas.

Dos formas bilineales b_1 y b_2 son equivalentes , y se denotan como $b_1 \sim b_2$,si existen formas metabólicas b_3 y b_4 tales que

$$b_1 \oplus b_3 \cong b_2 \oplus b_4.$$

Evidentemente esta relación es de equivalencia. Más aún: si $b_1 \sim b_1'$ y $b_2 \sim b_2'$ entonces $b_1 \oplus b_2 \sim b_1' \oplus b_2'$ y $b_1 \otimes b_2 \sim b_1' \otimes b_2'$.

Esto nos permite obtener el siguiente resultado:

Teorema: Las clases de equivalencia de formas bilineales simétricas forman un anillo conmutativo con unidad, al considerar la suma directa como operación adición y el producto tensorial como multiplicación.

Este anillo se denomina anillo de Witt y se denota por $W(F)$.

Por otra parte, sea (V, q) una forma cuadrática no singular de dimensión n sobre F. Dado que

$$b_q(x, x) = q(x + x) - q(x) - q(x) = 2q(x) = 0,$$

se tiene que b_q es una forma alternante, simétrica, no singular. Luego la dimensión de (V, q) es par. No es posible construir bases ortogonales que permitan diagonalizar las formas cuadráticas, pero existen las llamadas Bases Simplécticas, que son del tipo $\{e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m\}$ con $n = 2m$ tales que:

- $b_q(e_i, f_i) = 1$, para $i = 1, \ldots, m$.
- $b_q(e_i, e_j) = b_q(f_i, f_j) = b_q(e_i, f_j) = 0$ para $i \neq j$.
- $q(e_i) = a_i$, $q(f_i) = b_i$.

De este modo tenemos

$$(V, q) = (< e_1, f_1 > \perp \ldots \perp < e_n, f_n >, q)$$

donde $< e_i, f_i >$ es el subespacio de dimensión 2 generado por esos 2 elementos. La forma cuadrática restringida a este subespacio se denotará por

$$[a_i, b_i]$$

y se cumple que para todo $r, s \in F$

$$q(re_i + sf_i) = q(re_i) + q(sf_i) + b_q(re_i, sf_i)$$

$$= r^2 a_i + rs + s^2 b_i.$$

Una forma cuadrática (V, q), de dimensión 2 tal que $q \cong [0,0]$ también se llama plano hiperbólico y se denota por H. En general una forma q, se dice hiperbólica si es suma ortogonal de planos hiperbólicos, es decir

$$q \cong H \perp \ldots \perp H = s \times H \qquad s \text{ entero positivo.}$$

Se demuestra que si una forma cuadrática contiene un vector isótropo entonces contiene un plano hiperbólico. Se obtiene el siguiente resultado:

Teorema. Si (V, q) es una forma cuadrática no singular, entonces tiene una descomposición única, salvo isometría, de la siguiente manera:

$$(V, q) \cong (V_a, q_a) \perp s \times H$$

con $s \geq 0$ y (V_a, q_a) forma cuadrática anisótropa. s se denomina índice de Witt y (V_a, q_a) parte anisótropa o núcleo de q.

En consecuencia se define la siguiente relación entre formas cuadráticas:

Dos formas cuadráticas (V, q) y (V', q') son equivalentes, y se denotan por $q \sim q'$, si existen formas cuadráticas hiperbólicas H_1 y H_2 tales que

$$q \oplus H_1 \cong q' \oplus H_2.$$

Evidentemente $\sim$ es una relación de equivalencia entre formas cuadráticas. Además se cumple que: Si $q_1 \sim q_1'$ y $q_2 \sim q_2'$ entonces $q_1 \oplus q_2 \sim q_1' \oplus q_2'$.

Luego se tiene el siguiente:

Teorema. Las clase de equivalencia de formas cuadráticas forman un grupo abeliano con la operación suma directa de formas cuadráticas.

Este grupo se denomina grupo de Witt y se denota por $W_q(F)$.

Además se demuestra que si b es una forma bilineal simétrica metabólica y q es forma cuadrática entonces $b \otimes q$ es una forma cuadrática hiperbólica . Por otra parte, si b es una forma bilineal simétrica y q es una forma cuadrática hiperbólica se cumple que $b \otimes q$ es una forma hiperbólica. Por lo tanto $W_q(F)$ es un $W(F)$-módulo.

En adelante denotaremos la clase de b en $W(F)$ por b y la clase de q en $W_q(F)$ por q .

En los cuerpos de característica 2 la aplicación

$$\wp : F \longrightarrow F$$

$$\wp(a) = a^2 - a$$

es un homomorfismo de grupos aditivos, llamado Homomorfismo de Artin-Schreier y se tiene que:

$$0 \longrightarrow Z/2Z \longrightarrow F \xrightarrow{\wp} F \longrightarrow F/\wp F \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. El subgrupo $\wp F$ tiene gran importancia en el estudio de las formas cuadráticas como podemos apreciar en las propiedades siguientes y en el desarrollo de los Capítulos posteriores.

Propiedades básicas en $W(F)$ y W_q .

1. Si $c \in \wp F$ entonces $[1, a] = [1, a + c]$ para todo $a \in F$.

2. Sean $q_1 = [a, b]$ y $q_2 = [c, d]$ formas cuadráticas no singulares. Se cumple que $q_1 = q_2$ si y sólo si $ab \equiv cd (\text{ mód } \wp F)$ y $D_F(q_1) \bigcap D_F(q_2) \neq \emptyset$.

3. $< a, bc^2 >=< a, b >$ para todo $a, b, c \in F^*$.

4. $< a, b >=< a >< 1, ab >$ para todo $a, b \in F^*$.

5. Si $a+b \neq 0$ entonces $<a,b>=<a+b><1,ab(a+b)>$.

6. $[a,b]=<a>[1,ab]=<b>[1,ab]$ para todo $a,b \in F^*$.

7. $[1,a+b]=[1,a]+[1,b]$ para todo $a,b \in F$.

1.4 Formas de Pfister.

En $W(F)$ la forma $<1,b>$ se denomina 1-forma de Pfister.En general el producto $<1,a_1><1,a_2>\cdots<1,a_m>$ se llama m-forma de Pfister y se denota por $\ll a_1,\ldots,a_m \gg$.

Por otra parte el conjunto

$$I(F) := \{b \in W(F) \mid dim(b) \text{ es par}\}$$

es un ideal del anillo $W(F)$, más aún, es un ideal maximal y se verifica que $W(F)/I(F) \cong Z/2Z$. $I(F)$ se llama Ideal Fundamental de F .

A partir de $I(F)$ se puede construir la siguiente cadena de ideales:

$$W(F) \supset I(F) \supset \cdots \supset I^n(F) \supset \cdots$$

donde $I^n(F) = I^{n-1}(F)I(F)$. El estudio de estos ideales y de los cuocientes $I^n(F)/I^{n+1}(F)$ constituye un tema de fundamental interés en la Teoría de Formas Bilineales.

Se demuestra que el ideal $I(F)$ está generado aditivamente por las 1-formas de Pfister y por lo tanto $I^n(F)$ está generado por las n-formas de Pfister.

En $W_q(F)$ se define

$$Arf : W_q(F) \longrightarrow F/\wp F$$

$$Arf(\sum_{i=1}^{m}[a_i,b_i]) := \sum_{i=1}^{m} a_ib_i(mod \wp F)$$

y se demuestra que es epimorfismo. $Arf(q)$ se denomina invariante de Arf de q .

A partir del ideal $I(F)$ de $W(F)$ se construye en $W_q(F)$ el submódulo

$$IW_q(F) := \{\sum_{i=1}^{m} < 1, a_i > [1, b_i] \mid a_i \in F^*, b_i \in F\}.$$

De manera similar se definen los submódulos $I^n W_q(F) := I^n(F)W_q(F)$ para n=1,2.....

Las formas cuadráticas del tipo $< 1, a_1 > \cdots < 1, a_n > [1, b]$; se llaman n-formas cuadráticas de Pfister y se denotan por $\ll a_1, \ldots, a_n; b \,]]$.

Claramente se tiene que $I^n W_q(F)$ está aditivamente generado por las n-formas cuadráticas de Pfister en $W_q(F)$. Además se tiene que la cadena de submódulos

$$W_q(F) \supset IW_q(F) \supset \cdots \supset I^n W_q(F) \supset \cdots$$

y los cuocientes $I^n W_q(F)/I^{n+1} W_q(F)$ proporcionan importante información acerca de la estructura de $W_q(F)$.

Evidentemente se tiene que $Ker(Arf) = IW_q$ por lo tanto $W_q(F)/IW_q(F) \cong F/\wp F$.

En particular si F es perfecto se tiene que $I(F) = 0$ luego $IW_q(F) = 0$ y por lo tanto $Wq(F) \cong F/\wp F$.

Una propiedad importante de las 1-formas de Pfister es el Lema 2.1 en [A-B]:

Lema : Si $a, b, a + b \in F^*$ entonces en $IW_q(F)$ se cumple

$$\ll a + b; c \,]] = \ll a, \frac{ac}{a+b} \,]] + \ll b, \frac{bc}{a+b} \,]].$$

Dada una forma cuadrática q , respectivamente una forma bilineal b , un elemento $a \in F^*$ se llama norma de similitud de q ,respectivamente de b , si $< a > q \cong q$, respectivamente $< a > b \cong b$.

Claramente $N_F(q) = \{a \in F^* \mid a \text{ es norma de similitud de } q\}$ es un subgrupo multiplicativo de F^* . Además si $1 \in D_F(q)$ entonces $N_F(q) \subseteq D_F(q)$.

Se demuestra que para todo $a \in F^*$

$$D_F(< 1, a >)^* = N_F(< 1, a >)$$

y que

$$D_F([1,a])^* = N_F([1,a])$$

Una forma cuadrática q, respectivamente bilineal, se llama multiplicativa sobre F si $D_F(q) = N_F(q)$.

Según lo anterior $< 1, a >$ y $[1, a]$ son formas multiplicativas.

Además se tienen los siguientes resultados:

- Si q es forma cuadrática anisótropa, respectivamente forma bilineal anisótropa, multiplicativa y $a \in F^*$ entonces $< 1, a > q$ es multiplicativa.
- Por lo anterior, si $a_1, \ldots, a_n \in F^*, c \in F$ entonces $\ll a_1, \ldots, a_n \gg$ es forma bilineal multiplicativa y $\ll a_1, \ldots, a_n; c \,||$ es forma cuadrática multiplicativa.
- Por otra parte sean q forma cuadrática, respectivamente forma bilineal, multiplicativa anisótropa, $a \in F^*$ y $q' =< 1, a > q$. Si q' es isótropa entonces es hiperbólica. Por lo tanto si q es una n-forma cuadrática, respectivamente una n-forma bilineal, de Pfister isótropa entonces es hiperbólica.

Referimos al lector interesado en más detalles sobre las formas de Pfister a la siguiente literatura: [E-L], [Ba], [Sa], [Mi$_3$].

CAPITULO 2

K-TEORIA ALGEBRAICA DE CUERPOS

2.1 K-teoría de Milnor.

En 1970, J. Milnor [Mi_1] introdujo una K-teoría algebraica de cuerpos relacionándola con la Teoría de Formas Bilineales Simétricas con el objeto de encontrar grupos donde se puedan definir invariantes que clasifiquen las formas bilineales. Los invariantes conocidos para una forma $\phi =< a_1, \ldots, a_n >$ son:

- La dimensión de ϕ : $dim(\phi) = n(\mod 2Z)$.
- El discriminante de ϕ $d(\phi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 \ldots a_n(\mod F^{*2})$.
- El invariante de Witt de ϕ , para cuerpos de característica $\neq 2$:

$$w(\phi) = (\bigotimes_{i<j}(a_i, a_j))(-1, a_1 \cdots a_n)^{\alpha}(-1, -1)^{\beta} \in Br(F)_2$$

donde $\alpha = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ y $\beta = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}$.

Luego $dim(\phi) \in Z/2Z$, $d(\phi) \in F^*/F^{*2}$ y $w(\phi) \in Br(F)_2$.

La construción de los grupos $K_n(F)$ desarrollada por Milnor es:

$$\begin{aligned} K_0(F) &= Z \\ K_1(F) & \quad \text{es la versión aditiva de } F^* \\ K_n(F) &= \overbrace{K_1(F) \otimes \cdots \otimes K_1(F)}^{n} / J \qquad \text{para } n \geq 2 \end{aligned}$$

donde J es el subgrupo del producto tensorial generado por los elementos de la forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ tal que $x_i + x_j = 1$ para algún $i \neq j$. Denotaremos por $\ell(a_1) \cdots \ell(a_n)$ la imagen de $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ en $K_n(F)$.

Luego tenemos las siguientes relaciones básicas:

- Para $a, b \in F^*$ $\ell(ab) = \ell(a) + \ell(b)$.

- Para $a \neq 1$ $\ell(a)\ell(1-a) = 0$.

Sea $K_*(F) := K_0(F) \oplus K_1(F) \oplus \cdots \oplus K_n(F) \oplus \cdots$. Si consideramos la operación natural $K_n(F) \times K_m(F) \longrightarrow K_{n+m}(F)$, entonces $K_*(F)$ tiene la estructura de anillo graduado.

Para relacionar estos grupos con las formas cuadráticas , J.Milnor introduce los cuocientes $K_n(F)/2K_n(F)$ los que denota por $k_n(F)$.

Propiedades:

1. Si $\alpha \in K_n(F)$ y $\beta \in K_m(F)$ entonces $\alpha\beta = (-1)^{nm}\beta\alpha$.
   Naturalmente que si $\alpha \in k_n(F)$ y $\beta \in k_m(F)$ entonces $\alpha\beta = \beta\alpha$.

2. $\ell(a)\ell(a) = \ell(-1)\ell(a)$ en $K_2(F)$ para $a \in F^*$.
   Nótese que si $CarF = 2$ entonces $\ell(-1) = \ell(1) = 0$. Luego $\ell(a)\ell(a) = 0$.

3. Si $a_1, \ldots, a_n \in F^*$ con $a_1 + \cdots + a_n = 0$ o 1, entonces $\ell(a_1) \cdots \ell(a_n) = 0$ en $K_n(F)$.

Sea $\phi = < a_1, \ldots, a_n >$. Milnor define la clase total característica de ϕ como

$$w(\phi) = (1 + \ell(a_1)) \cdots (1 + \ell(a_n)) \in k_*(F).$$

Reordenando sus componentes homogéneas se tiene

$$w(\phi) = 1 + w_1(\phi) + \cdots + w_n(\phi)$$

donde $w_i(\phi) \in k_i(F)$. $w_i(\phi)$ se denomina la i-ésima clase característica de ϕ .Por ejemplo

$$w_1(\phi) = \ell(a_1) + \cdots + \ell(a_n) = \ell(a_1)\cdots\ell(a_n) = \ell(\det(\phi))$$

$$w_2(\phi) = \ell(a_1)\ell(a_2) + \cdots + \ell(a_{n-1})\ell(a_n).$$

Se demuestra que $w_i(\phi)$ no depende de la diagonalización particular de ϕ . Luego los $w_i(\phi)$ son invariantes de ϕ .

Para relacionar los elementos de los k-grupos con las formas de Pfister se construyen los homomorfismos naturales

$$s_n : k_n(F) \longrightarrow I^n W_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$$

definidos por

$$s_n(\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)) = \overline{\ll -a_1, \ldots, -a_n \gg}$$

y se demuestra el siguiente

TEOREMA (Milnor). s_n existe y es epimorfismo para todo n . Además s_1 y s_2 son isomorfismos.

Por lo anterior Milnor conjetura que s_n es isomorfismo para todo n .

La construcción anterior y sus resultados se extienden a cuerpos de característica 2. La asociación con formas bilineales simétricas también la efectuó Milnor en [Mi $_2$].

En 1982, K. Kato demostró (ver [Ka]) que para cuerpos de característica 2,

$$k_n(F) \cong I^n(F)/I^{n+1}(F).$$

Resulta evidente que la K-teoría de Milnor , para el caso de cuerpos de característica 2, no interpreta el comportamiento de las formas cuadráticas pues en su definición no se contemplan las relaciones básicas de las álgebras de cuaterniones.

En la sección siguiente proponemos una K-teoría que interpreta los cuocientes $I^n W_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$ en forma adecuada.

2.2 K-teoría de cuerpos de característica 2.

La K-teoría que proponemos surge cuando se considera el símbolo cuaterniónico

$$\Phi : F^*/F^{*2} \times F/\wp F \longrightarrow Br(F)_2$$

donde $Br(F)_2$ es el subgrupo de 2-torsión del grupo de Brauer $Br(F)$, definido por

$$\Phi(a,b) = (a,b]_F$$

y donde $(a,b]_F := F \bigoplus Fe \bigoplus Ff \bigoplus Fef$ con las relaciones

$$\begin{aligned} e^2 &= a \\ f^2 + f &= b \\ ef + fe &= e \end{aligned}$$

es la F -álgebra de cuaterniones asociada a $a \in F^*$, $b \in F$.

Se demuestra que el símbolo Φ satisface las siguientes relaciones básicas:

$$\Phi(a_1 a_2, b) = \Phi(a_1, b)\Phi(a_2, b)$$

$$\Phi(a, b_1 + b_2) = \Phi(a, b_1)\Phi(a, b_2)$$

$$\begin{aligned} \Phi(a,b) = 0 \iff & \ll a, b \,|] \cong 2H \\ \iff & a = x^2 + xy + by^2, x, y \in F \\ \iff & \overline{a} = \overline{\wp c + b} \in F^*/F^{*2} \quad (b \neq 0). \end{aligned}$$

Usando la notación $k_1(F) \cong F^*/F^{*2}$, $h_1(F) = F/\wp F$ y denotando por $t(b)$ la imagen de $b \in F$ en $h_1(F)$, construimos:

$$h_2(F) = k_1(F) \otimes h_1(F)/J$$

donde J es el subgrupo generado por elementos $\ell(a) \otimes t(b)$ tales que $\overline{a} = \overline{\wp c + b}$ en F^*/F^{*2} para cierto $c \in F$.

Evidentemente tenemos ahora un homomorfismo natural:

$$\alpha_F : h_2(F) \longrightarrow Br(F)_2$$

$$\alpha(\ell(a)t(b)) = \overline{(a,b]_F}.$$

Usando resultados de Sah [Sa] y Albert [A] se obtiene el análogo al Teorema de Merkurjev:

Teorema 1 α_F *es un isomorfismo.*

Explicaremos más adelante este resultado.

La generalización del proceso anterior nos permite construir

$$h_{n+1}(F) := \overbrace{k_1(F) \otimes \cdots \otimes k_1(F)}^{n} \otimes h_1(F)/\mathcal{R}_n$$

donde $\mathcal{R}_n$ es el subgrupo del producto tensorial generado por los elementos $\ell(a_1) \otimes \cdots \otimes \ell(a_n) \otimes t(b)$ tales que existe $1 \leq i \leq n-1$ con $a_i + a_{i+1} = 1$ o $\overline{a_i} = \overline{\wp c + b Mod F^{*2}}$ para algún $c \in F$. De esta manera $h_n(F)$ es el análogo del k-grupo de Milnor $k_n(F)$, con la ventaja que se toman en cuenta las relaciones básicas de las álgebras de cuaterniones.

Se denotará por $\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)t(b)$ la imagen de $\ell(a_1) \otimes \cdots \otimes \ell(a_n) \otimes t(b)$ en $h_{n+1}(F)$.

La suma directa $h_*(F) = h_1(F) \oplus h_2(F) \oplus \cdots$ es un grupo y de manera natural es también un $k_*(F)$ -módulo con la operación

$$k_r(F) \times h_{s+1}(F) \longrightarrow h_{r+s+1}(F)$$

$$(\ell(a_1)\cdots\ell(a_r), \ell(b_1)\cdots\ell(b_s)t(b)) \mapsto \ell(a_1)\cdots\ell(a_r)\ell(b_1)\cdots\ell(b_s)t(b)$$

Estudiemos las propiedades básicas de $h_{n+1}(F)$.

Lema 2 *Para* $a_1, a_2, a_1 + a_2 \in F^*, b \in F$ *se cumple en* $h_2(F)$

$$\ell(a_1 + a_2)t(b) = \ell(a_1)t(\frac{a_1 b}{a_1 + a_2}) + \ell(a_2)t(\frac{a_2 b}{a_1 + a_2}).$$

Demostración: Por la definición de $h_2(F)$, se tiene que $\ell(x)t(x) = 0$ para todo $x \in F^*$. Además $\ell(1/x) = \ell(1) + \ell(x)$, y como $\ell(1) = 0$ entonces $\ell(1/x) = \ell(x)$ para todo $x \in F^*$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\ell(a_1)t(\frac{a_1 b}{a_1 + a_2}) \quad &+ \quad \ell(a_2)t(\frac{a_2 b}{a_1 + a_2}) \\
&= \ell(\frac{a_1 b}{a_1 + a_2})t(\frac{a_1 b}{a_1 + a_2}) + \ell(\frac{a_2 b}{a_1 + a_2})t(\frac{a_2 b}{a_1 + a_2}) \\
&\quad +\ell(\frac{b}{a_1 + a_2})t(\frac{a_1 b}{a_1 + a_2}) + \ell(\frac{b}{a_1 + a_2})t(\frac{a_2 b}{a_1 + a_2}) \\
&= \ell(\frac{b}{a_1 + a_2})t(\frac{a_1 b}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 b}{a_1 + a_2}) = \\
&= \ell(\frac{b}{a_1 + a_2})t(b) = \ell(b)t(b) + \ell(a_1 + a_2)t(b) = \\
&= \ell(a_1 + a_2)t(b).
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia se obtiene:

Lema 3 *Sean* $a_1, \ldots, a_n \in F^*, b \in F$.

Si $a_1 + \cdots + a_n \equiv b$ *(Mod* $\wp F$*)* *entonces*

$$\ell(a_1) \cdots \ell(a_n)t(b) = 0 \text{ en } h_{n+1}(F)$$

Demostración:

Si $n = 2$ la conclusión es evidente por la definición de $h_{n+1}(F)$.

Consideremos $n \geq 3$. Sea $a_1 + \cdots + a_n + b = \wp c$. Podemos suponer que $a_1 + \cdots + a_n \neq 0$, de otra manera $t(b) = 0$. Por Lema 2 se obtiene:

$$0 = \ell(a_1 + \cdots + a_n)t(b) = \sum_{i=1}^{n} \ell(a_i)t(\frac{a_i b}{a_1 + \cdots + a_n})$$

Multiplicando por $\ell(a_1) \cdots \widehat{\ell(a_i)} \cdots \ell(a_n)$, excluyendo el i-factor, $i = 1, \ldots, n$ y usando la propiedad $\ell(a)\ell(a) = 0$, obtenemos:

$$\ell(a_1) \cdots \ell(a_i) \cdots \ell(a_n)t(\frac{a_i b}{a_1 + \cdots + a_n}) = 0 \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

Sumando todas estas igualdades se tiene:

$$\ell(a_1) \cdots \ell(a_n)t(b) = 0$$

□

La relación entre $h_n(F)$ y las formas cuadráticas está dada por la siguiente

Proposición 4 *Para todo n existe un único homomorfismo*

$$s_n : h_{n+1}(F) \longrightarrow I^n W_q(F)/I^{n+1} W_q(F)$$

definido por $$s_n(\ell(a_1) \cdots \ell(a_n)t(b)) = \overline{\ll a_1, \ldots, a_n; b \,]]}.$$

Demostración: Consideremos la aplicación

$$F^*/F^{*2} \times \cdots \times F^*/F^{*2} \times F/\wp F \longrightarrow I^n W_q(F)/I^{n+1} W_q(F)$$

$$(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, \overline{b}) \longmapsto \overline{\ll a_1, \ldots, a_n; b \,]]}$$

Dado que $\ll ab, c\,]] = \ll a, c\,]] + \ll b, c\,]]$ Mód $I^2 W_q(F)$, se verifica claramente que esta aplicación es multilineal. Luego obtenemos un homomorfismo

$$k_1(F) \otimes \cdots \otimes k_1(F) \otimes h_1(F) \longrightarrow I^n W_q(F)/I^{n+1} W_q(F)$$

Además este homomorfismo transforma al subgrupo $\mathcal{R}_n$ en cero porque $\ll a, 1-a \gg = 0$ en $I^2(F)$ y además $\ll b+\wp c; b \,]] = \ll b+\wp c; b+\wp c \,]] = 0$ para todo $a, b, c \in F$.

De esta manera obtenemos el homomorfismo

$$s_n : h_{n+1}(F) \longrightarrow I^n W_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$$

con las propiedades deseadas. Evidentemente s_n es epimorfismo.

□

Corolario 5 *Si* $\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)t(b) = \ell(a'_1)\cdots\ell(a'_n)t(b')$ *en* $h_n(F)$ *entonces* $\ll a_1, \ldots, a_n; b \,]] \cong \ll a'_1, \ldots, a'_n; b' \,]]$

Demostración: A partir de la proposición 4 se deduce que

$$\ll a_1, \ldots, a_n; b \,]] \equiv \ll a'_1, \ldots, a'_n; b' \,]] \text{ Mód } I^{n+1}W_q(F)$$

Usando entonces la versión en característica 2 del Haupsatz de Arason-Pfister, demostrada por Baeza en [Ba 1], se deduce que

$$\ll a_1, \ldots, a_n; b \,]] \cong \ll a'_1, \ldots, a'_n; b' \,]]$$

□

El recíproco de este Corolario también es válido. Para su demostración se usará el concepto de cadena de p-equivalencias de formas cuadráticas, que desarrollaremos en la siguiente sección.

2.3 Cadena de p-equivalencias.

En esta sección extendemos a formas cuadráticas sobre cuerpos de característica 2, la noción y propiedades de la p-equivalencia de formas de Pfister, introducida por Elman y Lam en [E-L].

Definición:

Sea F un cuerpo de característica 2 y sean $\ll a_1, \ldots, a_n; A \,]]$ y $\ll b_1, \ldots, b_n; B \,]]$ dos formas cuadráticas de Pfister sobre F . Diremos que ellas son **p-equivalentes** si:

1. Existen dos índices i, j tales que $\ll a_i, a_j \gg \cong \ll b_i, b_j \gg$, con $a_k = b_k$ para $k \neq i, j$ y $A = B$ ó
2. Existe un índice i tal que $\ll a_i; A \,]] \cong \ll b_i; B \,]]$ y $a_k = b_k$ para todo $k \neq i$.

En general, diremos que dos n-formas cuadráticas de Pfister q y r son **p-equivalentes en cadena** si existe una sucesión $q_0, q_1, \ldots, q_m$ de n-formas cuadráticas de Pfister tales que $q_0 = q$, $q_m = r$ y cada q_i es p-equivalente a q_{i+1} , para $0 \leq i \leq m - 1$.

Evidentemente la p-equivalencia en cadena es una relación de equivalencia entre todas las n-formas cuadráticas de Pfister. Denotaremos esta relación por $\approx$. Si $n \leq 1$ se tiene que $\approx$ es sinónimo de $\cong$. A partir de estas definiciones y los resultados sobre formas cuaterniónicas tenemos:

Proposición 6 *Si* $\ll a_1, \ldots, a_n; A \,]] \approx \ll b_1, \ldots, b_n; B \,]]$ *entonces* $\ell(a_1) \cdots \ell(a_n) t(A) = \ell(b_1) \cdots \ell(b_n) t(B)$ *en* $h_{n+1}(F)$.

Evidentemente $q \approx r$ implica que $q \cong r$. Nuestro propósito es demostrar que la relación $\approx$ entre n-formas cuadráticas de Pfister es equivalente a la relación de isomorfía entre tales formas.

Dada una forma cuadrática q , definimos q' de la siguiente manera:

$$q = \ll a_1, \ldots, a_n; A \,]] = [1, A] \perp q'.$$

Lema 7 *Sea* $q = \ll a_1, \ldots, a_n; A \,]]$. *Si* $b \in D_F(q')$ *entonces existen* $c_1, \ldots, c_{n-1}$ *tales que* $q \approx \ll c_1, \ldots, c_{n-1}, b; A \,]]$.

Demostración: Por inducción sobre n.

Si $n = 1$ entonces $b = a_1 x$ con $x \in D_F([1, A])^*$ y se tiene que $q = \ll a_1; A \,|] \cong \ll bx; A \,|] \cong \ll b; A \,|]$.

Supongamos que el resultado es válido para $(n-1)$-formas de Pfister.

Sea $\tau = \ll a_1, \ldots, a_{n-1} \gg$. Entonces $q = < 1, a_n > \tau[1, A] = \tau[1, A] \perp < a_n > \tau[1, A]$. Por lo tanto $q' = \tau'[1, A] \perp < a_n > \tau[1, A]$.

Dado que $b \in D_F(q')$, podemos escribir $b = x + a_n y$ con $x \in D_F(\tau'[1, A]) \cup \{0\}$ e $y \in D_F(\tau[1, A]) \cup \{0\}$.

Además y es de la forma $y = y_0 + t$ con $t \in D_F([1, A]), y_0 \in D_F(\tau'[1, A]) \cup \{0\}$. Usando la propiedad de transversalidad (ver [Ba]) podemos suponer que $y_0 \neq 0, y \neq 0, x \neq 0$.

Afirmamos que $q \approx \ll a_1, \ldots, a_{n-1}, y a_n; A \,|]$ ya que por hipótesis de inducción y dado que $y_0 \in D_F(\tau'[1, A])$, existen $d_2, \ldots, d_{n-1}$ tales que $\tau[1, A] \approx \ll y_0, d_2, \ldots, d_{n-1}; A \,|]$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} q &\approx \ll y_0, d_2, \ldots, d_{n-1}, a_n; A \,|] \\ &\approx \ll y_0, d_2, \ldots, d_{n-1}, (y_0 + t) a_n; A \,|] \\ &\approx \ll a_1, \ldots, a_{n-1}, y a_n; A \,|]. \end{aligned}$$

Dado que $x \in D_F(\tau'[1, A])$ y por hipótesis de inducción, se cumple que $\tau[1, A] \approx \ll x, c_2, \ldots, c_{n-1}; A \,|]$ para ciertos $c_2, \ldots, c_{n-1}$. En consecuencia se obtiene

$$\begin{aligned} q &\approx \ll x, c_2, \ldots, c_{n-1}, y a_n; A \,|] \\ &\approx \ll x + y a_n, c_2, \ldots, c_{n-1}, x y a_n; A \,|] \\ &\approx \ll b, c_2, \ldots, c_{n-1}, x y a_n; A \,|]. \qquad \square \end{aligned}$$

Corolario 8 *Si* $q = \ll a_1, \ldots, a_n; A \,|]$ *y* $a \in D_F(q)$ *entonces para todo* $b \neq 0$ *se tiene* $\ll a_1, \ldots, a_n, b; A \,|] \approx \ll a_1, \ldots, a_n, ab; A \,|]$ *.En particular* $\ll a_1, \ldots, a_n, a; A \,|]$ *es hiperbólica.*

Demostración: Dado que $a \in D_F(q)$ entonces $a = a_0 + t$ con $t \in D_F([1, A])$ y $a_0 \in D_F(q') \cup \{0\}$.

Podemos suponer, por transversalidad, que $a_0 \neq 0$. Por el Lema 7 existen $a'_2, \dots, a'_n$ tales que:

$$\begin{array}{rrcl} & q & \approx & \ll a_0, a'_2, \dots, a'_n; A \,|] \\ \text{luego} & \ll a_1, \dots, a_n, b; A \,|] & \approx & \ll a_0, a'_2, \dots, a'_n, b; A \,|] \\ & & \approx & \ll a_0, a'_2, \dots, a'_n, b(a_0 + t); A \,|] \\ & & \approx & \ll a_0, a'_2, \dots, a'_n, ba; A \,|] \end{array}$$

En particular para $b = 1$, se obtiene

$$\ll a_1, \dots, a_n, a; A \,|] \approx \ll a_1, \dots, a_n, 1; A \,|] \cong 2^{n+1} H$$

□

Lema 9 *Si*

$$\begin{array}{ll} q = \ll a_1, \dots, a_t; A \,|] & (t \geq 0) , \\ \sigma = \ll b_1, \dots, b_s \gg & (s \geq 1) \end{array}$$

y $c_1 \in D_F(\sigma' q)$ *entonces existen* $c_2, \dots, c_s$ *tales que*

$$\sigma q \approx \ll c_1, \dots, c_s \gg q$$

Demostración: Por inducción sobre s.

Si $s = 1$ entonces $c_1 = b_1 x$ con $x \in D_F(q)$. Luego por Corolario 8

$$\begin{array}{rcl} \ll b_1, a_1, \dots, a_r; A \,|] & \approx & \ll b_1 x, a_1, \dots, a_r; A \,|] \\ & \approx & \ll c_1, a_1, \dots, a_r; A \,|]. \end{array}$$

Supongamos que el resultado es válido para $\ll b_1, \dots, b_{s-1} \gg \ll a_1, \dots, a_r; A \,|]$. Sea $\tau = \ll b_1, \dots, b_{s-1} \gg$, entonces $\sigma = \tau \perp < b_s > \tau$ y $\sigma' = \tau' \perp < b_s > \tau$. Por lo tanto $\sigma' q = \tau' q \perp < b_s > \tau q$.

Dado que $c_1 \in D_F(\sigma' q)$, existen $y \in D_F(\tau' q) \cup \{0\}$ y $x \in D_F(\tau q)$ tales que $c_1 = y + b_s x$. Nuevamente podemos suponer, por transversalidad, que $x \neq 0$ $y \neq 0$, y luego por Corolario 8 se obtiene

$$\ll b_1, \ldots, b_s \gg \ll a_1, \ldots, a_r; A \,\| \approx \ll b_1, \ldots, b_s x \gg \ll a_1, \ldots, a_r; A \,\|.$$

Por hipótesis de inducción existen $c_2, \ldots, c_{s-1}$ tales que

$$\ll b_1, \ldots, b_{s-1} \gg \ll a_1, \ldots, a_r; A \,\| \approx \ll y, c_1, \ldots, c_{s-1} \gg q.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \ll b_1, \ldots, b_s \gg q &\approx \ll b_1, \ldots, b_s x \gg q \\ &\approx \ll b_s x \gg \ll b_1, \ldots, b_{s-1} \gg q \\ &\approx \ll b_s x, y, c_2, \ldots, c_{s-1} \gg q \\ &\approx \ll y + b_s x, b_s x y, c_2, \ldots, c_{s-1} \gg q \\ &\approx \ll c_1, c_2, \ldots, c_{s-1}, b_s x y \gg q. \end{aligned}$$

□

Finalmente demostraremos

Teorema 10 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $\ll a_1, \ldots, a_n; A \,\| \cong \ll b_1, \ldots, b_n; B \,\|$

b) $\ll a_1, \ldots, a_n; A \,\| \approx \ll b_1, \ldots, b_n; B \,\|$.

Demostración: Claramente b) implica a) por la Proposición 4.

Supongamos que la afirmación a) es verdadera.

Denotemos por $q = \ll a_1, \ldots, a_n; A \,\|$; $r = \ll b_1, \ldots, b_n; B \,\|$ y $\xi = \ll b_1, \ldots, b_n \gg$.

Demostremos por inducción la siguiente afirmación:

(A_s) Existen $c_{s+1}, \ldots, c_n \in F^*$ tales que :

$$q \approx \ll c_{s+1}, \ldots, c_n \gg \ll b_1, \ldots, b_s; A \,\| \qquad 0 \leq s \leq n.$$

Si $s=0$ entonces la afirmación es evidente.

Supongamos que (A_s) es verdadera, con $s \leq n$ y demostremos (A_{s+1}).

Sean $t = \ll b_1, \dots, b_s; A \,||$, $\rho = \ll b_{s+1}, \dots, b_n \gg$ y $\eta = \ll c_{s+1}, \dots, c_n \gg$. Entonces $\rho t \cong \eta t$ por lo tanto $\rho' t \perp t \cong \eta' t \perp t$. Por el Teorema de Cancelación se tiene $\rho' t \cong \eta' t$. Por lo tanto $b_{s+1} \in D_F(\rho' t) = D_F(\eta' t)$. Utilizando el Lema 9 tenemos:

$$\ll c_{s+1}, \dots, c_n \gg t \approx \ll b_{s+1}, c'_{s+2}, \dots, c'_n \gg t$$

luego

$$q \approx \ll c'_{s+2}, \dots, c'_n \gg \ll b_1, \dots, b_{r+1}; A \,||$$

y hemos demostrado (A_{s+1}).

Considerando (A_n) se obtiene $q \approx \ll b_1, \dots, b_n; A \,|| \approx \xi[1, A]$. Por lo tanto $\xi[1, A] \cong \xi[1, B]$.

En consecuencia $\xi[1, A+B] = 0$.

Usaremos el resultado de la Nota 2.9, pag 97 en [Ba] donde se demuestra que si $\xi[1, a] = 0$ entonces existe $c' \in D_F(\xi')$ tal que $a = \wp h + c'$. Esto nos permite concluir que $A + B = \wp h + c'$ para cierto $c' \in D_F(\xi')$, lo que implica que $[1, A] \cong [1, B + c']$ y que $\xi[1, A] \approx \xi[1, B + c']$. Dado que $c' \in D_F(\xi')$, por el Lema 7, existen $c_2, \dots, c_n$ tales que

$$\ll c', c_2, \dots, c_n; B + c' \,|| \approx \xi[1, B + c'].$$

Por lo tanto, como $\ll c', c_2, \dots, c_n; B \,|| \approx \ll c', c_2, \dots, c_n; B + c' \,||$, se tiene

$$\ll c', c_2, \dots, c_n; B \,|| \approx \xi[1, B + c'] \approx \xi[1, A].$$

Finalmente, sea $\lambda = \ll c', c_2, \dots, c_n \gg$. Entonces $\lambda[1, B] \cong \xi[1, B]$. Por la propiedad (A_n), obtenemos que $\lambda[1, B] \approx \xi[1, B]$, en consecuencia

$$q \approx \xi[1, A] \approx \lambda[1, B] \approx \xi[1, B] = r.$$

□

Resumiendo los resultados anteriores se obtiene finalmente el siguiente

Teorema 11 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) $\ll a_1, \ldots, a_n; A \,|] \approx \ll b_1, \ldots, b_n; B \,|]$

b) $\ll a_1, \ldots, a_n; A \,|] \cong \ll b_1, \ldots, b_n; B \,|]$

c) $\ll a_1, \ldots, a_n; A \,|] \equiv \ll b_1, \ldots, b_n; B \,|]$ *en* $I^n W_q(F)$

d) $\ell(a_1) \cdots \ell(a_n) t(A) = \ell(b_1) \cdots \ell(b_n) t(B)$ *en* $h_{n+1}(F)$.

□

Luego $\ell(a_1) \cdots \ell(a_n) t(A) \in h_{n+1}(F)$ es el invariante completo para la clase de isometría de la forma cuadrática de Pfister

$$\ll a_1, \ldots, a_n; A \,|].$$

CAPITULO 3

MODULOS DIFERENCIALES Y CUERPOS DE FUNCIONES

3.1 Derivaciones, 2-bases y formas diferenciales.

Aunque los conceptos y sus propiedades estudiados en esta sección son válidos para cuerpos de característica arbitraria $p > 0$, supondremos sin embargo que la característica de los cuerpos es 2. El caso general se puede consultar en [Ca].

3.1.1 Derivaciones.

Sea F un cuerpo de característica 2. Se llama derivación de F a toda aplicación ∂ de F en si mismo tal que:

$$\partial(x+y) = \partial(x) + \partial(y)$$

$$\partial(xy) = \partial(x)y + x\partial(y)$$

para todo $x, y \in F$.

Se verifica fácilmente que para todo $x \in F$

1.– $\partial(x^m) = mx^{m-1}\partial(x)$ para todo m entero positivo.
2.– $\partial(1) = 0$
3.– $\partial(\frac{1}{x}) = x^{-2}\partial(x)$
4.– $\partial(x^2) = 0$

El conjunto de los elementos de F que se anulan por una derivación ∂ , es un subcuerpo de F , que contiene a F^2 y que denotaremos por $F(\partial)$. Obviamente $F^2 \subset F(\partial)$ para toda derivación ∂.

Sea ∂ una derivación de F y k un subcuerpo de F que contiene a F^2. Si ∂ se anula para todo elemento de k se dice que ∂ es una k-derivación.

Denotemos por $\mathcal{G}(F/k)$ al conjunto de las k-derivaciones de F. Considerando para $\partial \in \mathcal{G}(F/k)$ y $c \in F$ la derivación $c\partial$, definida por $(c\partial)(x) = c\partial(x)$, se demuestra que $\mathcal{G}(F/k)$ es un F-espacio vectorial.

Supongamos que $[\, F \,:\, k\,]$ es finito. El hecho que $F^2 \subset k \subset F$, implica que $[F : k] = 2^d$. Por lo tanto podemos construir una base de F sobre k de la siguiente manera:

- para $b_1 \in F \backslash k$ se tiene que $\{1, b_1\}$ es k-base de $k_1 := k(b_1)$.
- similarmente, si $k_1 \neq F$, podemos encontrar b_2 en $F \backslash k_1$ tal que $\{1, b_2\}$ es k_1-base de $k_2 := k_1(b_2)$.
- de esta manera podemos encontrar una sucesión $k_i, i = 1, \ldots, d$ de subcuerpos de F tales que k_{i+1} es extensión cuadrática puramente inseparable de k_i , con $k = k_0$ y $F = k_d$.

El conjunto $\beta = \{b_1, \ldots, b_d\}$ así construido se denomina 2-base de F sobre k. En consecuencia todo elemento $a \in F$ se escribe en forma única como

$$a = \sum_{\mu \in S_d} a_\mu b_1^{\mu(1)} \cdots b_d^{\mu(d)}$$

con $S_d = \{\mu \mid \mu : \{1, \ldots, d\} \longrightarrow \{0, 1\}\}$, $a_\mu \in k$.

Además se demuestra que el F-espacio vectorial $\mathcal{G}(F/k)$ tiene dimensión d sobre F y posee una F-base $\{\partial_i \mid i = 1, \ldots, d\}$ asociada a la 2-base β tal que

$$\partial_i(b_j) = \delta_{i,j} \qquad \text{delta de Kronecker}\ , 1 \leq i, j \leq d$$

De esta manera todo $\partial \in \mathcal{G}(F/k)$ se representa en forma única como

$$\partial = \sum_{i=1}^{d} a_i \partial_i \qquad \text{con } \partial(b_j) = a_j$$

3.1.2 Diferenciales.

Sean F un cuerpo de característica 2, $\{b_i\}_{i=1,\dots,d}$ una 2-base de F sobre F^2 y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(F/F^2)$ el espacio vectorial de las F^2-derivaciones de F. Estamos suponiendo sin restricción que $[F : F^2] < \infty$.

Se denota por $\Omega^r_{F/F^2} = \Omega^r_F$ al F-espacio vectorial de las formas F-multilineales alternadas de r variables sobre $\mathcal{G}$. Dado que $\mathcal{G}$ tiene dimensión finita sobre F, se puede identificar Ω^r_F con la r-potencia exterior de Ω^1_F.

Denotaremos por Ω_F a la suma directa de los Ω^r_F, $r = 0, 1, \dots$, es decir, al álgebra exterior de Ω^1_F. Los elementos de Ω_F se denominarán diferenciales.

Para x en F, se denota por dx el diferencial que lleva $\partial \mapsto \partial(x)$. La aplicación $x \mapsto dx$ de F en Ω^1_F es F^2-lineal y se tiene

$$d(xy) = xd(y) + yd(x) \qquad \text{para } x, y \in F.$$

A partir de la 2-base $\{b_i\}_{i\in I}$ de F se demuestra que $\{db_i\}_{i\in I}$ es una F-base de Ω^1_F. Además existe en Ω_F un único operador F-lineal d que satisface:

$$d(w \wedge w') = dw \wedge w' + w \wedge dw' \qquad \text{para } w, w' \in \Omega_F$$

$$d(dw) = 0 \qquad \text{para } w \in \Omega_F,$$

y que prolonga la aplicación $x \mapsto dx$ de Ω^0_F en Ω^1_F a una aplicación de Ω^r_F en Ω^{r+1}_F.

Notación:

1. Para $n \geq 1$ sea

$$\Sigma_n := \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to I \mid \sigma(1) < \cdots, < \sigma(n)\}$$

donde $I = \{1, \ldots, d\}$ y $d = dim_{F^2}(F)$.

Consideraremos Σ_n como conjunto ordenado mediante el ordenamiento lexicográfico.

Si $\gamma \in \Sigma_n$ denotaremos por db_γ al producto $db_{\gamma(1)} \wedge \cdots \wedge db_{\gamma(n)}$.

2. Sea $S_I = \{(\mu(1), \ldots, \mu(d)) \mid \mu(i) = 0 \text{ ó } 1\}$. Denotaremos al producto $b_1^{\mu(1)} \cdots b_d^{\mu(d)}$ por b^μ para todo $\mu \in S_I$. De acuerdo a esta notación todo elemento $a \in F$ se escribe en forma única como:

$$a = \sum_{\mu \in S_I} a_\mu^2 b^\mu$$

3. Denotando la derivada ∂_i como D_i se verifica fácilmente que

$$D_i(a) = \frac{1}{b_i} \sum_{\mu \in S_I, \mu(i)=1} a_\mu^2 b^\mu$$

4. Como consecuencia de la notación anterior tenemos que:

$$d(a) = \sum_{i \in I} D_i(a) db_i \in \Omega_F^1$$

El núcleo de d es una subálgebra de la F-álgebra Ω_F , que se denota por Z , y la imagen B de d es un ideal de Z .

Un resultado importante en este contexto es

Proposición. (P.Cartier) :

Sea $\{b_i\}$ una 2-base de F sobre F^2 . La subálgebra Z de la F -álgebra Ω_F es la suma directa del ideal B y la F^2 -álgebra generada por los elementos $f_i = \frac{db_i}{b_i}$.
(Ver [Ca], pág 197-198.).

Esta Proposición permite definir el operador C de Cartier

$$C : Z \longrightarrow \Omega_F$$

definido de la siguiente manera: sea $z = z_0 + z_1 \in Z$ con $z_0 \in B$ y $z_1 = \sum_\mu a_\mu^2 \frac{db_\mu}{b_\mu}$, entonces

$$C(z) = C(z_0 + z_1) = \sum_\mu a_\mu \frac{db_\mu}{b_\mu}.$$

Este operador constituye una herramienta muy importante en manejo de ecuaciones con diferenciales,

C tiene las siguientes propiedades:

1. Si $z \in d\Omega_F$ entonces
$$C(z) = 0.$$

2. Si $dz_1 = dz_2 = 0$ entonces
$$C(z_1 + z_2) = C(z_1) + C(z_2).$$

3. Si $z \in Z$
$$C(a^2 z) = aC(z).$$

4. Para todo $a, b \in F$
$$C(a^2 \frac{db}{b}) = a\frac{db}{b}.$$

3.1.3 El operador $\wp$.

En [Mil] se define el homomorfismo

$$\wp : \Omega_F^n \longrightarrow \Omega_F^n / d\Omega_F^{n-1}$$

$$\wp(x\frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_n}{y_n}) = \overline{\wp x\frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_n}{y_n}}$$

y se demuestra que esta definición es independiente de los generadores de Ω_F^n .

Se denotan por $\nu_F(n)$ y $H_2^{n+1}(F)$ al núcleo y conúcleo de $\wp$, es decir:

$$\nu_F(n) = \{z \in \Omega_F^n \mid \wp(z) \in d\Omega_F^{n-1}\}$$

y

$$H_2^{n+1}(F) = \Omega_F^n/(d\Omega_F^{n-1} + \wp\Omega_F^n).$$

K. Kato demostró en [Ka] que

$$dlog : k_n(F) \longrightarrow \nu_F(n)$$

$$\ell(x_1)\cdots\ell(x_n) \mapsto \frac{dx_1}{x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dx_n}{x_n},$$

es un isomorfismo de grupos.

Mediante este isomorfismo se demuestra el siguiente :

Teorema:

Sea F un cuerpo de característica 2 y $S = F^2$, entonces se cumple que

1. Existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow W(F) \longrightarrow F\otimes_S F \xrightarrow{g} (F\otimes_S F)/A \longrightarrow W_q(F) \longrightarrow 0$$

   donde A es el subgrupo de $F\otimes_S F$ generado por los elementos de la forma $x\otimes y + y\otimes x$ y g es el homomorfismo $x\otimes y \mapsto x^2y\otimes y + x\otimes y$.

2. Para todo $n \geq 1$ los tres grupos $k_n(F)$, $I^n(F)/I^{n+1}(F)$ y $\nu_F(n)$ son isomorfos. Además

$$I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F) \cong H_2^{n+1}(F)$$

□

Para demostrar que $h_{n+1}(F) \cong I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$, bastaría demostrar que $H_2^{n+1}(F) \cong h_{n+1}(F)$ sin embargo no usaremos la parte (2) del Teorema de Kato y efectuaremos una demostración independiente, en cierto sentido más explícita, del isomorfismo de los grupos $I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$, $H_2^{n+1}(F)$ y $h_{n+1}(F)$. Volveremos a este problema en el Capítulo IV.

3.2 Módulos diferenciales sobre cuerpos de funciones de cuádricas.

El propósito de esta sección es construir el cuerpo de funciones $F(\phi)$ de una n-forma bilineal de Pfister sobre un cuerpo F y determinar resultados acerca de los homomorfismos canónicos de Ω_F^n y $H_2^{n+1}(F)$ en $\Omega_{F(\phi)}^n$ y $H_{F(\phi)}^{n+1}$ respectivamente. El resultado principal de esta sección es

$$Ker(H_F^{n+1} \to H_{F(\phi)}^{n+1}) = \overline{F\frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n}}$$

donde $\phi = \ll b_1, \ldots, b_n \gg$.

Creemos que este resultado puede tener aplicaciones en el estudio de las formas cuadráticas sobre cuerpos de característica 2. Por de pronto, en el Capítulo IV se hace uso de este Teorema.

3.2.1 Bases de extensiones transcendentes.

En primer lugar demostraremos un Lema de gran utilidad en las demostraciones de las secciones siguientes, válido para un cuerpo F con cualquier característica .

Lema 1 *Sea F cuerpo y $L = F(X)$ el cuerpo de funciones racionales sobre F . Entonces se cumple que*

$$\mathcal{B} = \{1\} \cup \{X^i\}_{i\geq 1} \cup \{\tfrac{X^j}{p^r} \mid \begin{array}{l} p \in F[X], \text{ irreducible mónico} \\ r = 1,2,3,\ldots \\ j = 0,1,\ldots,deg(p)-1\} \end{array}$$

es una F -base de L .

Demostración:

Todo z en L , se puede expresar como $z = \frac{f}{g}$ con f,g en $F[X]$ y $g \neq 0$ mónico. A su vez g se puede factorizar en forma única como $p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ con p_i polinomio mónico irreducible. Mediante el algoritmo de la división, z se puede representar como

$$z = e + \frac{t}{\prod p_i^{n_i}} \qquad\qquad \text{con } e, t \in F[X] \text{ y } deg(t) < deg(\prod p_i^{n_i}).$$

Por el procedimiento de descomposición en fracciones parciales y por división, se demuestra que existen $f_{i,j}$ en $F[X]$ con $deg(f_{i,j}) < deg(p_i)$ tales que

$$z = e + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{f_{i,j}}{p_i^j}.$$

Luego claramente $\mathcal{B}$ es un conjunto de generadores de L .

Verifiquemos la independencia lineal de $\mathcal{B}$. Supongamos que se tiene una combinación lineal no trivial de elementos de $\mathcal{B}$ igual a 0 . Agrupando en sumandos con denominadores del tipo p_i^j , se tiene:

$$\sum_{t=0}^{m} a_t X^t + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{f_{i,j}}{p_i^j} = 0,$$

con $deg(f_{i,j}) < deg(p_i)$, y $f_{i,n_i} \neq 0$.

Multiplicando por $\prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i}$, se tiene

$$(\sum_{t=0}^{m} a_t X^t) \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i} = -\sum_{i=1}^{r} g_i q_i, \text{ en F[X]},$$

donde

$$g_i = \sum_{j=1,\ldots,n_i} f_{i,j} p_i^{n_i - j}$$

y

$$q_i = \prod_{l \neq i} p_l^{n_l}.$$

Dado que q_i es divisible por $p_l^{n_l}$ para todo $l \neq i$, se tiene que $p_l^{n_l}$ divide a $g_l q_l$. Luego, como $p_l^{n_l}$ y q_l son primos entre si, se tiene que $p_l^{n_l}$ divide a g_l . Por otra parte deg(g_l) $<$ deg($p_l^{n_l}$) por lo que se concluye que $g_l = 0$ para $l = 1, \ldots, r$.

En consecuencia, $\sum_{t=0}^{m} a_t X^t = 0$; es decir $a_t = 0$ para todo t.

Por último, que $g_l = 0$ significa que

$$\sum_{j=1,\dots,n_l} f_{l,j} p_l^{n_l - j} = 0,$$

con $\deg(f_{i,j}) < \deg(p_l)$. Con esto se tiene que f_{l,n_l} es divisible por p_l lo cual implica que $f_{l,n_l} = 0$. Esto contradice el supuesto inicial, luego $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

□

Observación I:

1. Sea $L = F(X_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$, con Δ conjunto finito de índices. Usando una ordenación de Δ podemos definir $L_\lambda := F(X_\delta)_{\delta \in \Delta, \delta \leq \lambda}$ y $L_{<\delta} := F(X_\delta)_{\delta \in \Delta, \delta < \lambda}$.
   Esto permite encontrar una filtración de L en subcuerpos cada uno de los cuales es extensión transcendente de grado 1 del anterior. Si γ es el elemento maximal de Δ entonces $L_\gamma = L$ y si τ es el elemento minimal de Δ se tiene que $L_{<\tau} = F$.

2. De acuerdo al Lema 1, cada L_λ tiene una $L_{<\lambda}$ -base , que denominaremos $\mathcal{B}_\lambda$.
   Por lo tanto podemos considerar como base de L sobre F

   $$\mathcal{B} = \prod_{\lambda \in \Delta} \mathcal{B}_\lambda = \{\prod_{\lambda \in \Delta} w_\lambda \mid w_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda\}$$

   A estas bases, $\mathcal{B}_\lambda$, $\mathcal{B}$ las llamaremos bases canónicas. Como $1 \in \mathcal{B}_\lambda$ para cada λ , entonces $1 \in \mathcal{B}$ y por lo tanto $L = F \cdot 1 \oplus L'$ donde L' , que llamaremos conjunto de elementos puros de L , está generado sobre F por

   $$\{\prod_{\lambda \in \Delta} w_\lambda \mid w_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda, \text{ y } w_\lambda \neq 1 \text{ para algún } \lambda\}$$

3. Es un hecho conocido para cuerpos de característica 2, que si $\{b_1, \dots, b_m\}$ es 2-base de F sobre F^2 , entonces $\{b_1, \dots, b_m, X\}$ es 2-base de $F(X)$ sobre $F(X)^2$.

3.2.2 Construcción del cuerpo de funciones $F(\phi)$.

Sean F un cuerpo de característica 2 y $\phi = \ll b_1, \ldots, b_n \gg$ una n-forma bilineal anisótropa de Pfister. Construyamos

$$L = F(X_\mu)_{\mu \in S_n^*},$$

donde

$$S_n^* = \{(\mu(1), \ldots, \mu(n)) \mid \mu(i) = 1 \text{ ó } 0 \text{ y algún } \mu(i) \neq 0\}.$$

Se tiene que L es extensión transcendente de F de grado $2^n - 1$.

La forma ϕ se puede descomponer como $\phi = < 1 > \perp \phi'$ (ϕ' se denomina parte pura de ϕ). Asociamos a ϕ' el polinomio

$$T = \sum_{\mu \in S_n^*} b^\mu X_\mu^2,$$

que es claramente irreducible y por lo tanto podemos construir

$$K = L(\sqrt{T}) := L(y) \qquad \text{con } y^2 = T$$

extensión cuadrática puramente inseparable de L .

$K := F(\phi)$ se denomina **cuerpo de funciones de la n-forma bilineal** ϕ .

Observación II:

1. Una base de $F(\phi)$ sobre L es $\{1, y\}$. Luego $\mathcal{B}\{1, y\}$ es base de $F(\phi)$ sobre F .

2. Dado que $\{b_1, \ldots, b_n\}$ es 2-linealmente independiente en F , podemos extenderlo a una 2-base de F , $\{b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_N\}$.
   Por la Observación I-3, se tiene que $\{b_1, \ldots, b_N\} \cup \{X_\mu\}_{\mu \in S_n^*}$ es 2-base de L sobre L^2 . Como T es L^2-2-combinación lineal de $\{b_1, \ldots, b_n\}$, el conjunto $\{b_2, \ldots, b_N\} \cup \{X_\mu\}_{\mu \in S_n^*} \cup \{T\}$ constituye otra base para L.

3. Dado que K es una extensión cuadrática puramente inseparable de L , se verifica que $\{b_2, \ldots, b_N\} \cup \{X_\mu\}_{\mu \in S_n^*} \cup \{y\}$ es 2-base de $F(\phi)$ sobre $F(\phi)^2$.

4. También se considerará la siguiente cadena de subcuerpos:

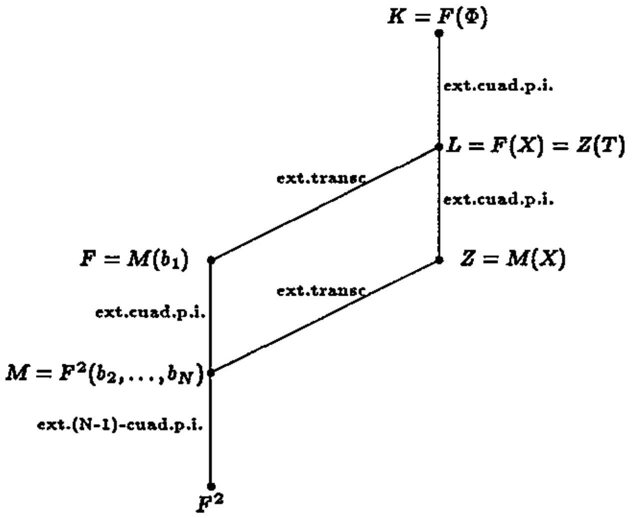
   $M := F^2(b_2, \ldots, b_N)$ extensión $(N-1)$ -cuadrática puramente inseparable de F^2 . Evidentemente $M(b_1) = F$.

   Sobre M se construye la extensión transcendente

$$Z = M(X_\mu)_{\mu \in S_n^*}$$

   de grado $2^n - 1$ sobre M. Dado que $T \notin Z$ porque $b_1 \notin Z$ (pero $T^2 \in Z$), $Z(T)$ es extensión cuadrática puramente inseparable de Z y resulta evidente que $Z(T) = L$.

Tenemos entonces el siguiente diagrama de subcuerpos.



Considerando en S_n^* el ordenamiento lexicográfico se obtiene la cadena de subcuerpos entre M y Z enunciada en la Observación I-1. Asociando al cuerpo Z_μ la base canónica $\mathcal{B}_\mu$ sobre $Z_{<\mu}$, obtenemos una base $\mathcal{B}$ de $F(\phi)$ sobre M

$$\mathcal{B} = (\prod_{\mu \in S_n^*} \mathcal{B}_\mu)\{1, T\}\{1, y\}$$

3.2.3 Módulos diferenciales y homomorfismos canónicos.

Para el cuerpo F de característica 2 con 2-base $\{b_1, \ldots, b_N\}$, Ω^1_F es el F-espacio vectorial con base $\{\frac{db_1}{b_1}, \ldots, \frac{db_N}{b_N}\}$ y en general Ω^n_F es el F-espacio vectorial con base

$$\{\frac{db_{\gamma(1)}}{b_{\gamma(1)}} \wedge \cdots \wedge \frac{db_{\gamma(n)}}{b_{\gamma(n)}} \mid \gamma \in \Sigma_{n,F}\}$$

donde

$$\Sigma_{n,F} = \{(\gamma(1), \ldots, \gamma(n)) \mid \gamma(i) \text{ es un índice de la 2-base }, \gamma(i) < \gamma(j) \text{ para } i < j\}$$

Consideremos L como en 3.1.1. En el conjunto de índices $\{1, \ldots, N\} \cup S^*_n$ de la 2-base de L , definamos una ordenación mediante la ordenación natural de $\{1, \ldots, N\}$, la ordenación lexicográfica de S^*_n y la convención que $i < \mu$ para todo $1 \leq i \leq N$ y todo $\mu \in S^*_n$. De esta manera Ω^n_L es el L-espacio vectorial generado por

$$\{\frac{de_{\gamma(1)}}{e_{\gamma(1)}} \wedge \cdots \wedge \frac{de_{\gamma(n)}}{e_{\gamma(n)}} \mid \gamma \in \Sigma_{n,L}\}$$

con $e_{\gamma(i)}$ en la 2-base canónica de L .

Observación III:

- Consideremos la base de L : $\{b_2, \ldots, b_N\} \cup \{X_\mu\}_{\mu \in S^*_n}\} \cup \{T\}$ y el conjunto de índices $\{2, \ldots, N\} \cup S^*_n \cup \{\text{índice de } T\}$ de esta base y convengamos que en este conjunto el índice de T es maximal. Se obtiene otra L-base para Ω^n_L .
  Para el cuerpo $F(\phi)$ el conjunto de índices de la 2-base es $\{2, \ldots, N\} \cup S^*_n \cup \{\text{índice de y}\}$. Considerando y como el índice de y , maximal, se tiene

  $$\Sigma_{n,F(\phi)} = \{(\gamma(1), \ldots, \gamma(n)) \mid \gamma(i) \in \{2, \ldots, N\} \cup S^*_n \cup \{y\}, \gamma(i) < \gamma(j) \text{ para } i < j\}$$

  y $\Omega^n_{F(\phi)}$ es el $F(\phi)$-espacio vectorial generado por

  $$\{\frac{de_{\gamma(1)}}{e_{\gamma(1)}} \wedge \cdots \wedge \frac{de_{\gamma(n)}}{e_{\gamma(n)}} \mid \gamma \in \Sigma_{n,F(\phi)}\}$$

con $e_{\gamma(i)}$ en la 2-base de $F(\phi)$. Nótese que dado que $T \in F(\phi)^2$ entonces $dT = 0$.

Los homomorfismos canónicos $F \to L$ y $F \to F(\phi)$ inducen homomorfismos entre los módulos diferenciales

$$\Omega_F^n \longrightarrow \Omega_L^n, \qquad \Omega_F^n \longrightarrow \Omega_{F(\phi)}^n$$

y también entre los grupos

$$H_2^{n+1}(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(L), \qquad H_2^{n+1}(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F(\phi)).$$

Observación IV:

1. Notemos que el conjunto $\{db_2, \ldots, db_N\} \cup \{dX_\mu\}_{\mu \in S_n^*}\} \cup \{dT\}$ genera una L - base de Ω_L^n y $\{db_2, \ldots, db_N\} \cup \{dX_\mu\}_{\mu \in S_n^*} \cup \{dy\}$ una $F(\phi)$ -base de $\Omega_{F(\phi)}^n$. Sean $\Omega_{L,0}^n$, $\Omega_{L,0}^{n-1}$ los subespacios generados por $\{db_2, \ldots, db_N\} \cup \{dX_\mu\}_{\mu \in S_n^*}$. Entonces resulta evidente que

$$\Omega_L^n = \Omega_{L,0}^n \oplus \Omega_{L,0}^{n-1} \wedge \frac{dT}{T}.$$

Por lo tanto, si $w \in \Omega_L^n$, entonces $w = w_0 + w_1 \wedge \frac{dT}{T}$ con $w_0 \in \Omega_{L,0}^n, w_1 \in \Omega_{L,0}^{n-1}$ y se tiene que la imagen de w en $\Omega_{F(\phi)}^n$ es w_0 .

2. Usando 2-bases, podemos definir operadores en el espacio de diferenciales de la siguiente manera:

Para

$$u = \sum_{\gamma \in \Sigma_{n,F}} c_\gamma \frac{de_\gamma}{e_\gamma} \qquad \text{con } c_{\gamma \in F}$$

se define

$$u^{[2]} = \sum_{\gamma \in \Sigma_{n,F}} c_\gamma^2 \frac{de_\gamma}{e_\gamma}$$

respectivamente

$$\wp(u) = u^{[2]} - u.$$

Esta definición es dependiente de la base elegida, de manera que se hará referencia explícita de la base al usar esta notación. Naturalmente $\wp$ induce el homomorfismo

$$\wp \,:\, \Omega_F^n \to \Omega_F^n / d\Omega_F^{n-1}$$

el cual no depende de la base escogida.

3. Dado que $L = F \oplus L'$, entonces podemos representar Ω_L^n de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Omega_L^n &= \bigoplus_{\gamma \in \Sigma_{n,L}} L \frac{de_\gamma}{e_\gamma} \\ &= \bigoplus_{\gamma \in \Sigma_{n,L}} (F \oplus L') \frac{de_\gamma}{e_\gamma} \end{aligned}$$

Por otra parte $\Sigma_{n,L}$ se puede escribir como la unión disjunta

$$\Sigma_{n,F} \bigcup \{\gamma \in \Sigma_{n,L} \mid \gamma \in S_n^* \text{ para algún } i\}$$

denominando $\Sigma'_{n,L}$ al segundo conjunto, se tiene que

$$\begin{aligned} \Omega_L^n &= \bigoplus_{\gamma \in \Sigma_{n,L}} (F \oplus L') \frac{de_\gamma}{e_\gamma} \\ &= (\bigoplus_{\gamma \in \Sigma_{n,F}} F \frac{de_\gamma}{e_\gamma}) \oplus (\bigoplus_{\gamma \in \Sigma_{n,F}} L' \frac{de_\gamma}{e_\gamma}) \oplus (\bigoplus_{\gamma \in \Sigma'_{n,L}} F \frac{de_\gamma}{e_\gamma}) \oplus (\bigoplus_{\gamma \in \Sigma'_{n,L}} L' \frac{de_\gamma}{e_\gamma}) \\ &= \overline{\Omega_F^n} \oplus ((\bigoplus_{\gamma \in \Sigma_{n,F}} L' \frac{de_\gamma}{e_\gamma}) \oplus (\bigoplus_{\gamma \in \Sigma'_{n,L}} L \frac{de_\gamma}{e_\gamma})) \end{aligned}$$

donde $\overline{\Omega_F^n}$ es la imagen homomorfa de Ω_F^n en Ω_L^n. Denotaremos por $(\Omega_L^n)'$ los dos últimos sumandos y le llamaremos, F-subespacio de las formas puras. Tenemos entonces

$$\Omega_L^n = \overline{\Omega_F^n} \oplus (\Omega_L^n)'$$

Lema 2

$$\wp((\Omega_L^n)') \subseteq (\Omega_L^n)' \qquad y$$

$$d((\Omega_L^n)') \subseteq (\Omega_L^n)'$$

Demostración: Ambas afirmaciones se demuestran usando la misma argumentación. Demostraremos sólo la primera de ellas.

Sea $z \in (\Omega_L^n)'$. Se tiene que $z = z_0 + z_1$ con $z_0 \in \oplus_{\gamma \in \Sigma_{n,F}} L' \frac{de_\gamma}{e_\gamma}$ y $z_1 \in \oplus_{\gamma \in \Sigma'_{n,L}} L \frac{de_\gamma}{e_\gamma}$.

Dado que $\wp(z) = \wp(z_0) + \wp(z_1)$ podemos examinar separadamente cada caso .

a) Sea $z_0 = \Sigma_{\gamma \in \Sigma_{n,F}} l_\gamma \frac{de_\gamma}{e_\gamma}$, con $l_\gamma \in L'$. Basta demostrar que $\wp(l_\gamma) \in L'$, para todo γ . Por otra parte, cada l_γ se puede expresar como combinación de la Base del Lema 1, es decir

$$l_\gamma = \sum_{w_\lambda \in B, w_\lambda \neq 1} a_{\gamma,\lambda} w_\lambda \quad \text{con } a_{\gamma,\lambda} \in F.$$

Analicemos $\wp(a_{\gamma,\lambda} w_\lambda)$.

De acuerdo a la filtración introducida en la Observación I-1 , existe un subcuerpo L_μ tal que $w_\lambda \in L_\mu$ y $w_\lambda \notin L_{<\mu}$. Por lo tanto w_λ se escribe como uw con $u \in L_{<\mu}$ y w un elemento de la base $\mathcal{B}_\mu$. Llamemos X a X_μ y c a $a_{\gamma,\lambda} u \in L_{<\mu}$. Tenemos dos subcasos

a.1) Si w es de la forma X^i con $i > 0$, entonces $\wp(cX^i) = c^2 X^{2i} + cX^i \notin L_{<\mu}$. Claramente se tiene que $\wp(cX^i) \in L'$.

a.2) Si w es de la forma X^i/p^j con p polinomio irreducible mónico en $L_{<\mu}[X]$ y $j < deg(p)$, entonces

$$\wp(c\frac{X^i}{p^j}) = \frac{X^{2i}}{p^{2j}} + \frac{x^i}{p^j} = \frac{x^{2i} + X^i p^j}{p^{2j}}.$$

Evidentemente el numerador tiene grado menor que el denominador. Al descomponerla en términos de la base $\mathcal{B}_\mu$ se verifica que se escribe como suma de terminos de la forma $f_{i,k} X^i / p^k$, con $i < deg(p)$. Luego $\wp(cw) \notin L_{<\mu}$.

En consecuencia $\wp(z_0) \in \oplus_{\gamma \in \Sigma_{n,F}} L' \frac{de_\gamma}{e_\gamma}$.

b) Sea $z_1 \in \oplus_{\gamma \in \Sigma'_{n,L}} L \frac{de_\gamma}{e_\gamma}$. Se tiene que

$$z_1 = \sum_{\gamma \in \Sigma'_{n,L}} l_\gamma \frac{de_\gamma}{e_\gamma}$$

con $l_\gamma \in L$. Entonces

$$\wp(z_1) = \sum_{\delta \in \Sigma'_{n,L}} \wp(l_\gamma) \frac{de_\delta}{e_\delta} \in \bigoplus_\gamma L \frac{de_\gamma}{e_\gamma}.$$

Y obtenemos que $\wp(z) \in (\Omega_L^n)'$.

□

El resto de la sección lo dedicaremos al cálculo de los núcleos de los homomorfismos canónicos.

Lema 3

$$Ker(\Omega_L^n \to \Omega_{F(\phi)}^n) = \Omega_L^{n-1} \wedge \frac{dT}{T}$$

Demostración: Por la Observación IV-1 se tiene que

$$\Omega_L^n = \Omega_{L,0}^n \oplus \Omega_{L,0}^{n-1} \wedge \frac{dT}{T}.$$

Además $(\Omega_{L,0}^n \to \Omega_{F(\phi)}^n)$ es inyectiva pues la L-base de $\Omega_{L,0}^n$ es parte de la base de $\Omega_{F(\phi)}^n$.

Consideremos $w \in Ker(\Omega_L^n \to \Omega_{F(\phi)}^n)$ se tiene que $w = w_0 + w_1$ con $w_0 \in \Omega_{L,0}^n$ y $w_1 \in \Omega_{L,0}^{n-1}$. Se obtiene que $w \otimes F(\phi) = w_0 \otimes F(\phi) = 0$, dado que $dT/T = 0$ en $\Omega_{F(\phi)}^1$.

Por la inyectividad de $(\Omega_L^n \to \Omega_{F(\phi)}^n)$ concluimos que $w_0 = 0$ en Ω_L^n .

En consecuencia

$$Ker(\Omega_L^n \to \Omega_{F(\phi)}^n) = \Omega_{L,0}^{n-1} \wedge \frac{dT}{T} = \Omega_L^{n-1} \wedge \frac{dT}{T}$$

□

Lema 4

$$Ker(\Omega_F^n \to \Omega_L^n) = \{0\}$$

Demostración: Una base de Ω_F^n es

$$\{\frac{db_\gamma}{b_\gamma} \mid \gamma \in \Sigma_{n,F}\}$$

que a su vez es parte de una base de Ω_L^n . Esto permite concluir que el homomorfismo canónico $\Omega_F^n \to \Omega_L^n$ es también inyectivo.

□

Lema 5

$$Ker(H_2^{n+1}(F) \to H_2^{n+1}(L)) = \overline{\{0\}}$$

Demostración: Sea $\overline{w} \in H_2^{n+1}(F)$ tal que $\overline{w} = \overline{0}$ en $H_2^{n+1}(L)$. Entonces se tiene que $w \in \Omega_F^n$ satisface $w = \wp u + dv$ en Ω_L^n , con $u \in \Omega_L^n$ y $v \in \Omega_L^{n-1}$. Por la descomposición enunciada en la Observación IV-3 se tiene que

$$w = \wp(u_0 + u_1) + d(v_0 + v_1)$$

donde $u_0 \in \overline{\Omega_F^n}$, $u_1 \in (\Omega_L^n)'$, $v_0 \in \overline{\Omega_F^{n-1}}$ y $v_1 \in (\Omega_L^{n-1})'$.

Por Lema 2, sabemos que $\wp(u_0) \in \overline{\Omega_F^n}$, $d(v_0) \in \overline{\Omega_F^n}$, $\wp(u_1) \in (\Omega_L^n)'$ y $d(v_1) \in (\Omega_L^n)'$. Luego

$$w = \wp(u_0) + d(v_0) \qquad \text{en } \overline{\Omega_F^n}$$

$$0 = \wp(u_1) + d(v_1) \qquad \text{en } (\Omega_L^n)'$$

Pero por Lema 4 $\overline{\Omega_F^n} \cong \Omega_F^n$ y se obtiene entonces que

$$w = \wp(u_0) + d(v_0) \qquad \text{en } \Omega_F^n$$

por lo tanto $\overline{w} = \overline{0}$ en $H_2^{n+1}(F)$.

□

Lema 6

$$Ker(\Omega_F^n \to \Omega_{F(\phi)}^n) = F\frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n}$$

Demostración: Llamemos α al elemento de $\Sigma_{n,F}$ tal que $\alpha(i) = i$.

El conjunto de índices $\Sigma_{n,F}$ se descompone definiendo los conjuntos disjuntos

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \{\gamma \in \Sigma_{n,F} \mid \gamma(1) = 1, \gamma \neq \alpha\} \\
\Sigma_2 &= \{\gamma \in \Sigma_{n,F} \mid \gamma(1) \neq 1, Im(\gamma) \cap \{2, \ldots, n\} \neq \emptyset\} \\
\Sigma_3 &= \{\gamma \in \Sigma_{n,F} \mid Im(\gamma) \cap \{1, \ldots, n\} = \emptyset\},
\end{aligned}$$

Entonces $\Sigma_{n,F} = \{\alpha\} \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

Sea w un elemento del núcleo, es decir, $w \in \Omega_F^n$ con $w_{F(\phi)} = 0$ en $\Omega_{F(\phi)}^n$. Entonces

$$w = f_\alpha \frac{db_\alpha}{b_\alpha} + \sum_{\beta \in \Sigma_1} f_\beta \frac{db_\gamma}{b_\gamma} + \sum_{\gamma \in \Sigma_2} f_\gamma \frac{db_\gamma}{b_\gamma} + \sum_{\delta \in \Sigma_3} f_\delta \frac{db_\delta}{b_\delta},$$

con $f_\gamma, f_\beta, f_\delta \in F$.

Como $dT = 0$ en $\Omega_{F(\phi)}^n$, se tiene

$$k_1 \frac{db_1}{b_1} + k_2 \frac{db_2}{b_2} + \cdots + k_n \frac{db_n}{b_n} = 0$$

donde

$$k_i = \sum_{\mu \in S_n^*, i \in Im(\mu)} b^\mu X_\mu^2$$

que es un polinomio irreducible en $F[X_\mu]_{\mu \in S_n^*}$. Luego

$$\frac{db_1}{b_1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{k_i}{k_1} \frac{db_i}{b_i}.$$

Reemplazando en la sumatoria correspondiente a Σ_1, se obtiene

$$\begin{aligned}
w_{F(\phi)} &= \sum_{\beta \in \Sigma 1} f_\beta (\sum_{i=2}^{n} \frac{k_i}{k_1} \frac{db_i}{b_i}) \wedge \frac{db_{\beta(2)}}{b_{\beta(2)}} \wedge \cdots \wedge \frac{db_{\beta(n)}}{b_{\beta(n)}} \\
&\quad + \sum_{\gamma \in \Sigma_2} f_\gamma \frac{db_\gamma}{b_\gamma} + \sum_{\delta \in \Sigma_3} f_\delta \frac{db_\delta}{b_\delta} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

en $\Omega^n_{F(\phi)}$.

Nótese que el sumando correspondiente a α no aparece pues

$$\frac{db_2}{b_2}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}\wedge(\sum_{i=2}^{n}\frac{k_i}{k_1}db_i)=0.$$

Reordenando la expresión anterior se tiene

$$\sum_{\gamma\in\Sigma_2}(f_\gamma+\sum_{\beta\in\Sigma_1}f_\beta\frac{k_j}{k_1})\frac{db_\gamma}{b_\gamma}+\sum_{\delta\in\Sigma_3}f_\delta\frac{db_\delta}{b_\delta}=0,$$

donde el índice j y β en la primera sumatoria son tales que $Im(\beta)\cup\{j\}\setminus\{1\}=Im(\gamma)$.

Se concluye que $f_\delta=0$ para todo $\delta\in\Sigma_3$ y en $F[X]$

$$k_1f_\gamma=\sum_{\beta\in\Sigma_1}f_\beta k_j,$$

para cada $\gamma\in\Sigma_2$, con j y β descritos anteriormente.

Comparando los coeficientes de X_j^2 para $j\in Im(\gamma)\cap\{2,\ldots,n\}$ se tiene que el coeficiente en el lado izquierdo es 0 y en el del lado derecho es b_jf_β . Luego cada $f_\beta=0$ y por lo tanto $f_\gamma=0$. En consecuencia

$$w=f_\alpha\frac{db_\alpha}{b_\alpha}\in F\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_n}{b_n}.$$

□

Para determinar el último núcleo necesitamos el siguiente resultado

Lema 7 *La ecuación diferencial en* $\Omega^n_{F(\phi)}$

$$Tz^{[2]}=\wp v+d(t) \tag{3.1}$$

con $z,v\in\Omega^n_L$, $t\in\Omega^{n-1}_L$ *tiene solución única* $z=0$ *y* $v\in\nu_L(n)$.

Demostración: Usaremos el diagrama de cuerpos descrito en la Observación II-4. La ecuación diferencial del enunciado debe ser considerada en $\overline{\Omega^n_L}$, imagen homomorfa de Ω^n_L en $\Omega^n_{F(\phi)}$.

En S_n^* denotaremos por τ al elemento maximal según la ordenación lexicográfica, de modo que $Z = Z_\tau = Z_{<\tau}(X_\tau)$. En lo sucesivo denotaremos por X a X_τ y usaremos el hecho que Z es extensión transcendente de grado 1 sobre $Z_{<\tau}$.

Según lo anterior y en base al Lema 3 tenemos que

$$\overline{\Omega_L^n} = \sum_{\gamma\in\Sigma_{n,L}, e_\gamma(i)\neq T} L\frac{de_\gamma}{e_\gamma} = \sum_{\gamma\in\Sigma_{n,L}, e_\gamma(i)\neq T} (Z \oplus Z\cdot T)\frac{de_\gamma}{e_\gamma}.$$

Dado que Z tiene una base canónica $\mathcal{B}$ sobre $Z_{<\tau}$, se tiene la siguiente descomposición

$$\overline{\Omega_L^n} = \sum_{\gamma\in\Sigma_{n,L}, e_\gamma(i)\neq T} ((\bigoplus_{w\in\mathcal{B}} Z_{<\tau}w) \oplus (\bigoplus_{w\in\mathcal{B}} Z_{<\tau}w)\cdot T)\frac{de_\gamma}{e_\gamma}$$

$$= \bigoplus_{w\in\mathcal{B}}(\sum_{\gamma\in\Sigma_{n,L}, e_\gamma(i)\neq T} (Z_{<\tau} \oplus Z_{<\tau}\cdot T)w\frac{de_\gamma}{e_\gamma}).$$

De esta manera un elemento de $\overline{\Omega_L^n}$ tiene descomposición única en w -componentes para $w \in \mathcal{B}$.

Al examinar $\mathcal{B}$ se ve que está compuesto por elementos que son del tipo X^i , $i \geq 0$ y por fracciones x^i/p^r donde p es polinomio mónico irreducible, $r = 1, 2, \ldots$, $i = 0, 1, \ldots, (deg(p) - 1)$. Llamemos $\mathcal{B}_E$ a los elementos básicos del tipo polinomial y $\mathcal{B}_p$ al conjunto de los elementos básicos con denominador p^r para algún $r \geq 1$. Se tiene entonces

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_E \cup (\cup_{p \text{ irred}} \mathcal{B}_p).$$

Denotando

$$(\overline{\Omega_L^n})_p = \bigoplus_{w\in\mathcal{B}_p}(\sum_{\gamma\in\Sigma_{n,L}, e_\gamma(i)\neq T} (Z_{<\tau} \oplus Z_{<\tau}\cdot T)w\frac{de_\gamma}{e_\gamma})$$

y lo correspondiente para $(\overline{\Omega_L^n})_E$, se verifica que

$$\overline{\Omega_L^n} = (\overline{\Omega_L^n})_E \oplus (\oplus_p(\overline{\Omega_L^n})_p)$$

Llamemos $(z)_p$ y $(z)_E$ las proyecciones de z en cada sumando de la igualdad anterior respectivamente. Basta entonces demostrar que $(z)_p = 0$ para todo p irreducible mónico y que $(z)_E = 0$.

Al considerar la ecuación (3.1) descompuesta en base a p-componentes tenemos

$$(Tz^{[2]})_p = (\wp v)_p + (d(t))_p$$

y

$$(Tz^{[2]})_E = (\wp v)_E + (d(t))_E$$

Sea $t \in \overline{\Omega_L^{n-1}}$. Entonces se tiene la descomposición

$$t = (t)_E + \sum_p (t)_p,$$

luego

$$d(t) = d((t)_E) + \sum_p d((t)_p) \qquad \text{en } \overline{\Omega_L^n}.$$

Analicemos cada sumando de esta ecuación.

- Todo sumando de $(t)_E$ tiene la forma

  $$(a+bT)X^i \frac{de_\gamma}{e_\gamma} \qquad \text{con } \gamma \in \Sigma_{n-1,L}, e_{\gamma(i)} \neq T; a,b \in Z_{<r}$$

  luego el diferencial correspondiente es

  $$X^i da \wedge \frac{de_\gamma}{e_\gamma} + ad(X^i) \wedge \frac{de_\gamma}{e_\gamma} + T(X^i db \wedge \frac{de_\gamma}{e_\gamma} + bd(X^i) \wedge \frac{de_\gamma}{e_\gamma}).$$

  y resulta evidente que esta expresión está en $(\overline{\Omega_L^n})_E$.

- Similarmente, todo sumando de $(t)_p$ tiene la forma

  $$(a+bT)\frac{X^j}{p^r}\frac{de_\gamma}{e_\gamma} \qquad \text{con } \gamma \in \Sigma_{n-1,L}, e_{\gamma(i)} \neq T; a,b \in Z_{<r}, 0 \leq j < deg(p)-1, r \geq 0.$$

  Diferenciando esta expresión, se obtiene

  $$\frac{a+bT}{p^r} d(X^j)\frac{de_\gamma}{e_\gamma} + \frac{(a+bT)X^j}{p^{2r}} d(p^r)\frac{de_\gamma}{e_\gamma} + \frac{X^j}{p^r} d(a+bT)\frac{de_\gamma}{e_\gamma}.$$

  Al desarrollar cada sumando, los coeficientes de cada forma diferencial son de la forma q/p^s con $0 < s \leq 2r$ y $deg(q) < deg(q^s)$.

  Por lo tanto $d((t)p) \in (\overline{\Omega_L^n})_p$ para todo p.

Esto permite obtener que $(dt)_E = d((t)_E)$ y $(dt)_p = d((t)_p)$ para todo p.

Nótese que los coeficientes de $(Tz^{[2]})_p$ respecto a $\frac{de_\gamma}{e_\gamma}$ con $\gamma \in \Sigma_{n,L}$ y $\gamma(i) \neq T$ para todo i , provienen de la expresión

$$T(\frac{f_{1,\gamma}^2 + T^2 f_{2,\gamma}^2}{p^{2r}})$$

con $deg(f_{i,\gamma}) < deg(p^r)$. Además se tiene que $deg(T^2 f_{2,\gamma}^2 + f_{1,\gamma}^2) \leq deg(p^{2r}) + 2$.

Sea $(a_\gamma X + b_\gamma)^2$ el cuociente de esta división. Entonces

$$(Tz^{[2]})_p = \sum_\gamma T[\frac{f_{1,\gamma}^2 + T^2 f_{2,\gamma}^2}{p^{2r_\gamma}} + (a_\gamma X + b_\gamma)^2]\frac{de_\gamma}{e_\gamma}$$

con $a_\gamma, b_\gamma \in Z_{<T}$. De la misma manera

$$(v^{[2]})_p = \sum_\gamma (\frac{g_{1,\gamma}^2 + T^2 g_{2,\gamma}^2}{p^{2s_\gamma}} + (c_\gamma X + d_\gamma)^2)\frac{de_\gamma}{e_\gamma}$$

Sea $h_p(z) = \text{Máx}_{\gamma,i=1,2}\{r_{i,\gamma} \mid (z)_p = \sum_\gamma \frac{f_{1,\gamma}}{p^{r_{1,\gamma}}} + T\frac{f_{2,\gamma}}{p^{r_{2,\gamma}}}; p \text{ no divide a } f_{1,\gamma}, p \text{ no divide a } f_{2,\gamma}\}$ y $h_p(v)$ el análogo para v . Denotemos por $k = \text{Máx}\{h_p(z), h_p(v)\}$.

Tomemos $(z)_p$ y $(v)_p$ con denominador común p^k . Por la elección de k debe existir algún γ tal que p no divide por lo menos alguno de los siguientes elementos: $f_{1,\gamma}$, $f_{2,\gamma}$, $g_{1,\gamma}$, $g_{2,\gamma}$.

Por otra parte se tiene que

$$(d(t))_p = (Tz^{[2]})_p + (v^{[2]})_p + (v)_p.$$

De esta relación resulta que $h((d(t))_p) \leq k$. Por lo tanto

$$T\frac{1}{p^{2k}}\sum_\gamma (f_{1,\gamma}^2 + T^2 f_{2,\gamma})\frac{de_\gamma}{e_\gamma} + T\sum_\gamma (a_\gamma X + b_\gamma)^2 \frac{de_\gamma}{e_\gamma} =$$

$$= \frac{1}{p^{2k}}\sum (g_{1,\gamma}^2 + T^2 g_{2,\gamma}^2)\frac{de_\gamma}{e_\gamma} + \frac{1}{p^{2k}}\sum (g_{1,\gamma} + T g_{2,\gamma})\frac{de_\gamma}{e_\gamma} +$$

$$+ \sum_\gamma (c_\gamma X + d_\gamma)^2 \frac{de_\gamma}{e_\gamma} + (d(t))_p.$$

Al multiplicar por p^k , se obtiene que la expresión

$$\frac{1}{p^k}(\sum_{\gamma}(T(f_{1,\gamma}+Tf_{2,\gamma})^2)+(g_{1,\gamma}+Tg_{2,\gamma})^2)\frac{de_\gamma}{e_\gamma}$$

es una forma diferencial entera, es decir, con coeficientes polinomiales. Por lo tanto

$$p^k \mid T(f_{1,\gamma}+Tf_{2,\gamma})^2+(g_{1,\gamma}+Tg_{2,\gamma})^2 \qquad \text{para todo } \gamma\in\Sigma_{n,L},$$

lo que equivale a $p^k \mid (f_{1,\gamma}+Tf_{2,\gamma})^2$ y $p^k \mid (g_{1,\gamma}+Tg_{2,\gamma})^2$ en $Z_{<\tau}[X]$.

Analicemos el primer caso de divisibilidad.

Sea A el polinomio tal que $p^kA=(f_{1,\gamma}+Tf_{2,\gamma})^2$.

Derivando respecto a $e_i\in\{b_2,\ldots,b_N\}\cup\{X_\mu\}$ se tiene que $D_i(p^kA)=0$ para todo e_i .

Si k es par entonces $p^kD_i(A)=0$. Luego $D_i(A)=0$ para todo i .

Si k es impar, es decir, $k=2m+1$, $p^{2m+1}D_i(A)+A(2m+1)p^{2m}D_i(p)=0$ .Por lo tanto $pD_i(A)=AD_i(p)$. Esto implica que $p\mid A$ dado que $deg(D_i(p))<deg(p)$. Se tiene entonces que $A=pA'$ y que $D_i(A')=0$ para todo i .

En cada caso A (o A') debe ser un cuadrado en $Z_{<\tau}[X]$, luego $A=B^2$ (o $A'=B^2$). Se obtiene así

$$p^{2m}B^2=f_{1,\gamma}^2+T^2f_{2,\gamma}^2$$

o en el segundo caso

$$p^{2m+2}B^2=f_{1,\gamma}^2+T^2f_{2,\gamma}^2.$$

Por lo tanto $p^mB=f_{1,\gamma}+Tf_{2,\gamma}$ o $p^{m+1}B=f_{1,\gamma}+Tf_{2,\gamma}$. Pero dado que $T\notin Z_{<\tau}[X]$ se deduce que $f_{2,\gamma}=0$ y que $p^m\mid f_{1,\gamma}$.

Por idéntico razonamiento se concluye para el caso $p^k\mid(g_{1,\gamma}+Tg_{2,\gamma})^2$ en $Z_{<\tau}[X]$, que $g_{2,\gamma}=0$ y $p^m\mid g_{1,\gamma}$.

Por la elección minimal de k esto implica que $m=0$ o $m+1=0$ respectivamente; por lo tanto $k=0$, es decir no existe denominador p^k en el desarrollo de z .

Esto implica

$$(z)_p = (v)_p = 0 \qquad \text{para todo } p \text{ irreducible.}$$

Examinemos ahora la parte entera de z .

A partir de la ecuación inicial se tiene

$$\begin{aligned} T\sum_\gamma (f_{1,\gamma} + Tf_{2,\gamma})^2 \frac{de_\gamma}{e_\gamma} &= \sum_\gamma (g_{1,\gamma} + Tg_{2,\gamma})^2 \frac{de_\gamma}{e_\gamma} \\ &+ \sum_\gamma (g_{1,\gamma} + Tg_{2,\gamma}) \frac{de_\gamma}{e_\gamma} + (d(t))_E \end{aligned}$$

Resulta fácil verificar que $d(\sum_\gamma g_{1,\gamma}\frac{de_\gamma}{e_\gamma}) = 0$ y que $d(\sum_\gamma g_{2,\gamma}\frac{de_\gamma}{e_\gamma}) = 0$.

Aplicando el Operador de Cartier a la expresión anterior se obtiene

$$y\sum_\gamma (f_{1,\gamma} + Tf_{2,\gamma})\frac{de_\gamma}{e_\gamma} = \sum_\gamma (g_{1,\gamma} + Tg_{2,\gamma})\frac{de_\gamma}{e_\gamma} + C(\sum_\gamma (g_{1,\gamma} + Tg_{2,\gamma})\frac{de_\gamma}{e_\gamma}). \tag{3.2}$$

Además

$$\begin{aligned} C(\sum_\gamma g_{1,\gamma}\frac{de_\gamma}{e_\gamma}) &= \sum_\gamma (h_{1,\gamma} + Th_{2,\gamma})\frac{de_\gamma}{e_\gamma} \\ C(\sum_\gamma Tg_{2,\gamma}\frac{de_\gamma}{e_\gamma}) &= \sum_\gamma y(k_{1,\gamma} + Tk_{2,\gamma})\frac{de_\gamma}{e_\gamma}, \end{aligned}$$

con $h_{i,\gamma}, k_{i,\gamma} \in Z_{<r}[X]$ y

$$\begin{aligned} deg(h_{1,\gamma}) &\leq \frac{1}{2}deg(g_{1,\gamma}) \\ deg(h_{2,\gamma}) &\leq \frac{1}{2}deg(g_{1,\gamma}) - 2 \\ deg(k_{1,\gamma}) &\leq \frac{1}{2}deg(g_{2,\gamma}) \\ deg(k_{2,\gamma}) &\leq \frac{1}{2}deg(g_{2,\gamma}) - 2 \end{aligned}$$

Comparando coeficientes en la ecuación 3.2 se obtiene que $g_{i,\gamma} = h_{i,\gamma}$ y $f_{i,\gamma} = k_{i,\gamma}$ para $i = 1, 2$. Pero por las condiciones respecto a los grados se concluye que

$$k_{1,\gamma} = k_{2,\gamma} = f_{1,\gamma} = f_{2,\gamma} = 0,$$

es decir $(z)_E = 0$ y $(v)_E = \sum_\gamma g_{1,\gamma}\frac{de_\gamma}{e_\gamma}$ con $deg(g_{1,\gamma}) = 0$.

Por lo tanto $z = 0$ y por iteración del análisis para la cadena de subcuerpos indicada al comienzo de la demostración, se tiene que $v = \sum_\gamma g_\gamma \frac{de_\gamma}{e_\gamma}$ con $g_\gamma \in M \subset F$.

Además, dado que $\wp(v) = d(t)$ se concluye que $v \in \nu_L(n)$.

□

Finalmente tenemos el siguiente:

Teorema 8

$$Ker(H_2^{n+1}(F) \to H_2^{n+1}(F(\phi))) = \overline{F\frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n}}$$

Demostración:

Sea $\overline{w} \in Ker(H_2^{n+1}(F) \to H_2^{n+1}(F(\phi)))$. Entonces w satisface en $\Omega^n_{F(\phi)}$

$$w = \wp(u) + d(v) \qquad \text{con } u \in \Omega^n_{F(\phi)}, \quad v \in \Omega^{n-1}_{F(\phi)}$$

Dado que

$$\Omega^n_{F(\phi)} = \overline{\Omega^n_L} \oplus y\overline{\Omega^n_L} \oplus \overline{\Omega^{n-1}_L} \wedge \frac{dy}{y} \oplus y\overline{\Omega^{n-1}_L} \wedge \frac{dy}{y}$$

podemos descomponer u y v como:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + yu_2 + u_3 \wedge \frac{dy}{y} + yu_4 \wedge \frac{dy}{y} \\ v &= v_1 + yv_2 + v_3 \wedge \frac{dy}{y} + yv_4 \wedge \frac{dy}{y}, \end{aligned}$$

con $u_i, v_i \in \overline{\Omega_L}$. Reemplazando estas expresiones en las fórmulas anteriores se obtienen las siguientes ecuaciones en $\overline{\Omega^n_L}$.

$$\begin{aligned} w &= \wp(u_1) + d(v_1) + y^2 u_2^{[2]} \\ 0 &= u_2 + d(v_2) \\ 0 &= \wp(u_3) + d(v_3) + y^2 u_4^{[2]} \\ 0 &= u_4 + d(v_4) + v_2. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 7 a la penúltima ecuación se obtiene $u_4 = 0$. Reemplazando este valor de u_4 en la última ecuación se obtiene que $v_2 = d(v_4)$ y en consecuencia

$$u_2 = d(d(v_4)) = 0.$$

Por lo tanto

$$w = \wp(u_1) + d(v_1) \qquad \text{en } \overline{\Omega^n_{F(\phi)}}.$$

Por otra parte Ω^n_F es F-generado por $\{\frac{db_\gamma}{b_\gamma}\}$ con $\gamma \in \Sigma_{n,F}$ y dado que

$$Ker(\Omega^n_F \to \Omega^n_{F(\phi)}) = F\frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n},$$

se obtiene que la imagen $\overline{\Omega^n_F}$, de Ω^n_F en $\Omega^n_{F(\phi)}$ tiene dimensión $dim_F(\overline{\Omega^n_F}) = dim_F(\Omega^n_F) - 1$. Además $\{\frac{db_\gamma}{b_\gamma}\}_{\gamma\in\Sigma'}$ con $\Sigma' = \Sigma_{n,F} \setminus \{\alpha\}$, es F-linealmente independiente. Podemos entonces escribir $\overline{\Omega^n_L} = \overline{\Omega^n_F} \oplus (\overline{\Omega^n_L})'$ donde $\overline{\Omega^n_L}$ tiene F-base

$$\{w\frac{de_\gamma}{e_\gamma}\}_{\gamma\in\Sigma_{n,L}, w\in\mathcal{B}}$$

$$\mathcal{B} = \prod_{\mu\in S_n^*} \mathcal{B}_\mu$$

con $\mathcal{B}_\mu$ la base canónica de L_μ sobre $L_{<\mu}$.

En consecuencia $(\overline{\Omega^n_L})'$ está F -generado por

$$\{w\frac{de_\gamma}{e_\gamma}\} \qquad \text{con } \gamma \notin \Sigma_{n,L} \text{ o } w \neq 1 .$$

En esta descomposición afirmamos que

$$d(\overline{\Omega^{n-1}_F}) \subset \overline{\Omega^n_F}$$

$$\wp(\overline{\Omega^n_F}) \subset \overline{\Omega^n_F}$$

$$d((\overline{\Omega^{n-1}_L})') \subset (\overline{\Omega^n_L})'$$

$$\wp((\overline{\Omega^n_L})' \subset (\overline{\Omega^n_L})'.$$

Demostraremos sólo el último caso, que es el menos obvio.

Se tiene que

$$(\overline{\Omega^n_L})' = \sum_{\gamma\in\Sigma_{n,F}} L'\frac{de_\gamma}{e_\gamma} + \sum_{\delta\in\Sigma'} L\frac{de_\delta}{e_\delta},$$

donde $\Sigma' = \{\delta \in \Sigma_{n,L} \mid \exists i;\ \delta(i) \in S^*_n$.

Estudiaremos el comportamiento de cada F -generador de $(\overline{\Omega^n_L})'$.

- Si $z = f\frac{de_\gamma}{e_\gamma}$ con $\gamma \in \Sigma_{n,L}$, $\gamma(i) \in S^*_n$ para algún i , $f \in L$ entonces

$$z^{[2]} + z = (f^2 + f)\frac{de_\gamma}{e_\gamma}$$

está claramente en $(\overline{\Omega^n_L})'$.

- Si $z = f\frac{de_\gamma}{e_\gamma}$ con $\gamma \in \Sigma_{n,F}$ y $f \in L'$. se tiene que

$$\wp(z) = (f^2 + f)\frac{de_\gamma}{e_\gamma},$$

Aplicando el Lema 2, con n=0, concluimos que $f^2 + f \in L'$. Por lo tanto $\wp(z) \in (\overline{\Omega^n_L})'$.

En forma similar se demuestran las restantes afirmaciones.

En consecuencia, descomponiendo los elementos u_1 y v_1 respecto a la base antes mencionada se tiene

$$w = \wp(u_{1,0} + u_{1,1}) + d(v_{1,0} + v_{1,1})$$

con $u_{1,0}, v_{1,0} \in \overline{\Omega^n_F}$ y $u_{1,1}, v_{1,1} \in (\overline{\Omega^n_L})'$. Por las afirmaciones anteriores se deduce que

$$w = \wp(u_{1,0}) + d(v_{1,0}) \qquad \text{en } \overline{\Omega^n_F}.$$

De este resultado concluimos, usando el Lema 6, que existe un $f \in F$ tal que

$$w = \wp(u_{1,0}) + d(v_{1,0}) + f\frac{d\alpha}{\alpha} \qquad \text{en } \Omega^n_F$$

es decir

$$\overline{w} \in \overline{F\frac{db_\alpha}{b_\alpha}}$$

lo que completa la demostración.

□

CAPITULO 4

ANALOGO DE LA CONJETURA DE MILNOR

4.1 Introducción

El propósito de este capítulo es demostrar el análogo de la conjetura de Milnor para formas cuadráticas en característica 2, (ver capítulo II, sección 1) es decir:

Teorema.:

Para todo n

$$s_n : h_{n+1}(F) \longrightarrow I^n W_q(F)/I^{n+1} W_q(F)$$

es un isomorfismo.

La demostración utilizará los resultados obtenidos en el capítulo III sobre el comportamiento de los grupos Ω_F^n y $H_2^{n+1}(F)$ bajo la extensión de F al cuerpo de funciones $F(\Phi)$.

El plan de demostración de este resultado es:

- Se demostrará que el homomorfismo

$$dlog : h_{n+1}(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F)$$

  es un isomorfismo, el cual es un resultado análogo al de Kato (ver [Ka]), que afirma: dlog : $k_n(F) \longrightarrow \nu_F(n)$ es un isomorfismo.

- Se obtiene así el diagrama de homorfismos:

$$\begin{tikzcd}
 & h_{n+1}(F) \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[dr, "\cong\, dlog"] & \\
I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F) & & H_2^{n+1}(F)
\end{tikzcd}$$

donde s_n es un epimorfismo. Luego basta demostrar que existe un homomorfismo $\alpha : I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F)$ que hace conmutativo este diagrama.

- Usando los resultados del capítulo anterior, demostraremos la existencia del homomorfismo $I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F)$, comprobando que la aplicación definida sobre generadores $\overline{\ll a_1,\ldots,a_n;b\,]]} \mapsto \overline{b\frac{da_1}{a_1}\wedge\cdots\wedge\frac{da_n}{a_n}}$ se extiende a todo $I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$. Obtendremos entonces que s_n es un isomorfismo y en particular también que $I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F)$ es un isomorfismo. Este último resultado fué demostrado por Kato con métodos totalmente distintos de los nuestros. Creemos que la demostración aquí dada es más natural.

4.2 Análogo a la Conjetura de Milnor.

En el Capítulo II se definió la aplicación

$$s_n : h_{n+1}(F) \longrightarrow I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$$

y se demostró que s_n es un epimorfismo.

Definamos ahora los homomorfismos:

$$t_1 : W_q(F) \longrightarrow h_1(F)$$

$$t_2 : IW_q(F) \longrightarrow h_2(F)$$

de la siguiente manera:

$$t_1(\sum_{i=1}^{s} < a_i > [1, b_i]) = \sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} = \sum_{i=1}^{n} t(b_i) \in h_1(F)$$

$$t_2(\sum_{i=1}^{s} < a_i > [1, b_i]) = \sum_{i=1}^{n} \ell(a_i) t(b_i) \in h_2(F).$$

Se verifica que t_1 y t_2 están bien definidos usando el hecho de que dos bases simplécticas de un forma q pueden ser conectadas mediante una cadena de bases simplécticas, de manera que dos bases consecutivas difieren a lo más en dos vectores.

El homomorfismo t_1 corresponde a la invariante de Arf y t_2 a la invariante de Witt.

Claramente Ker $(t_1) = IW_q(F)$ y Ker $(t_2) \supseteq I^2W_q(F)$. Luego tenemos

$$t_1 : W_q(F)/IW_q(F) \longrightarrow h_1(F)$$

$$t_2 : IW_q(F)/I^2W_q(F) \longrightarrow h_2(F).$$

Es evidente que $t_i \circ s_i = id$ para $i = 1, 2$. Luego s_1 y s_2 son isomorfismos. Explicitamente t_2 está relacionada con la invariante de Witt $w : IW_q(F) \longrightarrow Br(F)_2$ mediante el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} IW_q(F)/I^2W_q(F) \arrow[rr, "t_2", "\cong"'] \arrow[dr, "w"'] & & h_2(F) \arrow[dl, "\alpha_F"] \\ & Br(F)_2 & \end{tikzcd}$$

Sah demostró que w es inyectivo y Albert que es epiyectivo. Luego α_F es un isomorfismo. Este resultado formulado en el Capítulo II Teorema 1 es el análogo en característica 2 del Teorema de Merkurjev.

Veamos ahora el caso general.

Al considerar una 2-base

$$\mathcal{B} = \{b_i \mid i \in I\}$$

de F sobre F^2, todo elemento a en F tiene representación única de la forma

$$a = \sum_{\mu \in S_I} a_\mu^2 b^\mu$$

Usando el Lema 2 del Capítulo 2 se tiene que para cualquier $a \in F$

$$\ell(a)t(b) = \sum_{i \in I} \ell(b_i)t(c_i)$$

Esto implica que todo elemento de $h_2(F)$ tiene la forma:

$$\sum_{i \in I} \ell(b_i)t(c_i)$$

Por lo tanto con

$\Sigma_{n,F} = \{(\gamma(1), \ldots, \gamma(n) \mid \gamma(i) \in I, \gamma(1) < \cdots < \gamma(n)\}$ y $c_\gamma \in F$, se obtiene la siguiente

Proposición 1 *Para todo* $n \geq 1$. *Los elementos de* $h_{n+1}(F)$ *tienen la forma:*

$$\sum_{\gamma \in \Sigma_{n,F}} \ell(b_{\gamma(1)}) \cdots \ell(b_{\gamma(n)})t(c_\gamma) \qquad \textit{con } c_\gamma \in F.$$

$\square$

Haremos uso ahora del módulo diferencial Ω_F^n y la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \nu_F(n) \longrightarrow \Omega_F^n \xrightarrow{\wp} \Omega_F^n / d\Omega_F^{n-1} \longrightarrow H_2^{n+1}(F) \longrightarrow 0$$

donde $H_2^{n+1}(F) =$ Coker $(\wp)$ y $\nu_F(n) =$ Ker $(\wp)$.

Tal como ya hemos mencionado, en [Ka] se demostró que existe un homomorfismo natural

$$dlog : k_n(F) \longrightarrow \nu_F(n)$$

con

$$dlog(\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)) = \frac{da_1}{a_1}\wedge\cdots\wedge\frac{da_n}{a_n}.$$

Uno de los resultados principales de ese trabajo es que $dlog$ es un isomorfismo para todo n.

Correspondientemente tenemos:

Proposición 2 *Existe un único homomorfismo*

$$dlog : h_{n+1}(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F)$$

con

$$dlog(\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)t(b)) = \overline{b\frac{da_1}{a_1}\wedge\cdots\wedge\frac{da_n}{a_n}}$$

Demostración: Consideremos la aplicación

$$k_1(F)\times\cdots\times k_1(F)\times h_1(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F)$$

definida por

$$(\ell(a_1),\ldots,\ell(a_n),t(b)) \mapsto \overline{b\frac{da_1}{a_1}\wedge\cdots\wedge\frac{da_n}{a_n}}.$$

Esta aplicación es multilineal pues:

$$\frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

y

$$(u+v)\frac{da}{a} = u\frac{da}{a} + v\frac{da}{a}.$$

Luego induce un homomorfismo ($\otimes = \otimes_{F_2}$)

$$k_1(F)\otimes\cdots\otimes k_1(F)\otimes h_1(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F)$$

definido por

$$\ell(a_1)\otimes\cdots\otimes\ell(a_n)\otimes t(b) \mapsto \overline{b\frac{da_1}{a_1}\wedge\cdots\wedge\frac{da_n}{a_n}}.$$

Además si $a_i + a_{i+1} = 1$ entonces $da_i = da_{i+1}$, luego la imagen correspondiente en $H_2^{n+1}(F)$ es 0 . Si $a_i = b + \wp c$ para algún i tenemos, por definición de $H_2^{n+1}(F)$ que

$$\overline{b\frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n}} = \overline{a_i\frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n}} =$$

$$\overline{a_i\frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n}} = \overline{d(a_i\frac{da_1}{a_1} \wedge \frac{da_{i-1}}{a_{i-1}} \wedge \frac{da_{i+1}}{a_{i+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n})} = 0$$

Por lo tanto obtenemos que el homomorfismo

$$dlog : h_{n+1}(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F)$$

definido por :

$$dlog(\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)t(b)) = \overline{b\frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n}}.$$

Resulta evidentemente ser un epimorfismo.

□

Además se tiene

Teorema 3 *dlog es un isomorfismo para todo n.*

Demostración: Sea $\alpha \in h_{n+1}(F)$ con $dlog(\alpha) = 0$.

De acuerdo a la Proposición 1 de este capítulo

$$\alpha = \sum_{\gamma \in \Sigma_n} \ell(b)_\gamma t(c_\gamma)$$

donde $\ell(b)_\gamma$ denota la expresión $\ell(b_{\gamma(1)})\cdots\ell(b_{\gamma(n)})$.

Luego en $H_2^{n+1}(F)$

$$dlog(\sum_{\gamma \in \Sigma_n} \ell(b)_\gamma t(c_\gamma)) = 0,$$

es decir existen $w \in \Omega_F^{n-1}, \eta \in \Omega_F^n$ tales que:

$$\sum_{\gamma \in \Sigma_n} c_\gamma \frac{db_\gamma}{b_\gamma} = \wp\eta + dw.$$

Supongamos que

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{\gamma\in\Sigma_n} h_\gamma \frac{db_\gamma}{b_\gamma} \qquad \text{con } h_\gamma \in F \text{ y} \\ w &= \sum_{\lambda\in\Sigma_n} g_\lambda db_\lambda, \end{aligned}$$

donde $db_\lambda := db_{\lambda(1)} \wedge \cdots \wedge db_{\lambda(n)}$.

Dado que

$$dg_\lambda = \sum_{i\in I} D_i(g_\lambda)db_i,$$

se obtiene que

$$dw = \sum_{\gamma\in\Sigma_n} \sum_{(\lambda,i)=\gamma} D_i(g_\lambda)db_i \wedge db_\lambda,$$

donde (λ, i) es una extensión de λ a una aplicación en Σ_n , con i en su imagen. Esto tiene sentido sólo cuando $i \notin Im(\lambda)$ y en este caso existe un único elemento γ en Σ_n con imagen $Im(\lambda) \cup \{i\}$.

En consecuencia tenemos que

$$\sum_{\gamma\in\Sigma_n} c_\gamma \frac{db_\gamma}{b_\gamma} = \sum_{\gamma\in\Sigma_n} \wp c_\gamma \frac{db_\gamma}{b_\gamma} + \sum_{\gamma\in\Sigma_n} [\sum_{(\lambda,i)=\gamma} D_i(g_\lambda)]db_\gamma$$

Comparando coeficientes se obtiene

$$c_\gamma = \wp h_\gamma + b^\gamma \sum_{(\lambda,i)=\gamma} D_i(g_\lambda)$$

para todo $\gamma \in \Sigma_n$; con $b^\gamma := b_{\gamma(1)} \cdots b_{\gamma(n)}$. Por lo tanto

$$t(c_\gamma) = t(b^\gamma \sum_{(\lambda,i)=\gamma} D_i(g_\lambda)).$$

Esto implica

$$\alpha = \sum_{\gamma\in\Sigma_n} \ell(b)_\gamma t(b^\gamma \sum_{(\lambda,i)=\gamma} D_i(g_\lambda)).$$

Escribamos ahora

$$g_\lambda = \sum_{\mu\in S_I} c_{\lambda,\mu}^2 b^\mu, \qquad \text{con } c_{\lambda,\mu} \in F.$$

Entonces

$$D_i(g_\lambda) = \frac{1}{b_i}\sum_{i\in\mu} c^2_{\lambda,\mu} b^\mu;$$

reemplazando en la expresión anterior dada para α , obtenemos:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{\gamma\in\Sigma_n} \ell(b)_\gamma t(b^\gamma \sum_{(\lambda,i)=\gamma} (\frac{1}{b_i}\sum_{i\in\mu} c^2_{\lambda,\mu} b^\mu)) \\
&= \sum_{\gamma\in\Sigma_n} \ell(b)_\gamma t(\sum_{(\lambda,i)=\gamma} b^\lambda \sum_{i\in\mu} c^2_{\lambda,\mu} b^\mu) \\
&= \sum_{\gamma\in\Sigma_n} \ell(b)_\gamma \sum_{(\lambda,i)=\gamma}\sum_{i\in\mu} t(b^\lambda b^\mu c^2_{\lambda,\mu})
\end{aligned}$$

Escribamos $\lambda \mid \gamma$ cuando Im $(\lambda) \subset$ Im (γ) , con $\lambda \in \Sigma_{n-1}, \gamma \in \Sigma_n$. Entonces suponiendo que $(\lambda, i) = \gamma$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\alpha &= \textstyle\sum_{\gamma\in\Sigma_n} \sum_{\lambda|\gamma} \sum_{i\in\mu} \ell(b)_\lambda \ell(b_i) t(b^\lambda b^\mu c^2_{\lambda,\mu}) \\
&= \textstyle\sum_{\gamma\in\Sigma_n} \sum_{\lambda|\gamma} \ell(b)_\lambda \ell(b^\mu) t(b^\lambda b^\mu c^2_{\lambda,\mu}),
\end{aligned}$$

pues $\sum_{i\in\mu} \ell(b_i) = \ell(b^\mu)$. Se tiene entonces

$$\alpha = \sum_{\gamma\in\Sigma_n}\sum_{\lambda|\gamma} \ell(b)_\lambda \ell(b^\mu b^\lambda c^2_{\lambda,\mu}) t(b^\lambda b^\mu c^2_{\lambda,\mu}).$$

Por último, cada sumando es 0, porque $\ell(a)t(a) = 0$ para cada a , y obtenemos

$$\alpha = 0.$$

Esto demuestra la inyectividad de *dlog* . Como además *dlog* es epimorfismo, hemos completado la demostración.

□

Proposición 4 *Existe una única aplicación*

$$\alpha : I^n W_q(F)/I^{n+1}W_q(F) \longrightarrow H_2^{n+1}(F)$$

con

$$\alpha(\sum_i \overline{\ll a_{i,1}, \dots, a_{i,n}; b_i]]}) = \sum_i \overline{b_i \frac{da_{i,1}}{a_{i,1}} \wedge \cdots \wedge \frac{da_{i,n}}{a_{i,n}}}$$

Demostración: Sólo debemos demostrar que α está bien definida.

Demostremos por inducción sobre t la siguiente Afirmación:

[$\mathbf{R}_t$] Sea L un cuerpo de característica 2.

Si $q = \sum_{i=1}^{t} \ll a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}; b_i \,]] \in I^{n+1}W_q(L)$ entonces $\sum_{i=1}^{t} \overline{b_i \frac{da_{i,1}}{a_{i,1}} \wedge \cdots \wedge \frac{da_{i,n}}{a_{i,n}}} = 0$ en $H_2^{n+1}(L)$.

Si $t = 1$ entonces $q = \ll a_1, \ldots, a_n; b \,]] \in I^{n+1}W_q(L)$, y por el Teorema 11 del Capítulo II se obtiene $\ell(a_1) \cdots \ell(a_n) t(b) = 0$ en $h_{n+1}(L)$. Usando el isomorfismo del Teorema anterior se concluye que

$$\overline{b\frac{da_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{da_n}{a_n}} = 0 \text{ en } H_2^{n+1}(L).$$

Supongamos que la afirmación R_t es válida. Consideremos la relación

$$\sum_{t=1}^{t+1} \ll a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}; b_i \,]] \in I^{n+1}W_q(L).$$

Entonces

$$\overline{\ll a_{t+1,1}, \ldots, a_{t+1,n}; b_{t+1} \,]]} = \sum_{i \leq t} \overline{\ll a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}; b_i \,]]} \text{ en } I^{n+1}W_q(L).$$

Sea $\Phi = \ll a_{t+1,1}, \ldots, a_{t+1,n} \gg$, una n-forma bilineal de Pfister en $I^n L$. Sobre $L(\Phi) =$ cuerpo de funciones de Φ , se tiene que $\Phi \otimes L(\Phi) = 0$ .Luego

$$\sum_{i \leq t} \overline{\ll a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}; b_i \,]]} = 0 \quad \text{en } \; I^n W_q(L(\Phi))/I^{n+1}W_q(L(\Phi)).$$

En consecuencia se tiene en $I^n W_q(L(\Phi))/I^{n+1}W_q(L(\Phi))$ una relación con a lo más t sumandos , la que por hipótesis de inducción implica

$$\sum_{i \leq t} \overline{b_i \frac{da_{i,1}}{a_{i,1}} \wedge \cdots \wedge \frac{da_{i,n}}{a_{i,n}}} = 0$$

en $H_2^{n+1}(L(\Phi))$. Por el Teorema 8 del capítulo III, se tiene que:

$$\sum_{i\leq t} \overline{b_i \frac{da_{i,1}}{a_{i,1}} \wedge \cdots \wedge \frac{da_{i,n}}{a_{i,n}}} = \overline{c \frac{da_{t+1,1}}{a_{t+1,1}} \wedge \cdots \wedge \frac{da_{t+1,n}}{a_{t+1,n}}}$$

en $H_2^{n+1}(L)$, con cierto $c \in L$. Usando el isomorfismo $h_{n+1}(L) \cong H_2^{n+1}(L)$ tenemos que

$$\sum_{i\leq t} \ell(a_{i,1}) \cdots \ell(a_{i,n}) t(b_i) = \ell(a_{t+1,1}) \cdots \ell(a_{t+1,n}) t(c).$$

Aplicando s_n se obtiene:

$\sum_{i\leq t} \ll a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}; b_i \;]] \equiv \ll a_{t+1,1}, \cdots, a_{t+1,n}; c \;]]$ Mód $(I^{n+1}W_q(L))$, y por la relación original

$\ll a_{t+1,1}, \ldots, a_{t+1,n}; b_{t+1} \;]] = \ll a_{t+1,1}, \cdots, a_{t+1,n}; c \;]]$ en $I^n W_q(L)/I^{n+1}W_q(L)$.

Por la versión en característica 2 del Hauptsatz de Arason Pfister (ver [Ba1]) se deduce que:

$$\ll a_{t+1,1}, \ldots, a_{t+1,n}; b_{t+1} \;]] \cong \ll a_{t+1,1}, \cdots, a_{t+1,n}; c \;]].$$

Por último, usando el Teorema 11 del Capítulo II podemos concluir que en $h_{n+1}(L)$

$$\ell(a_{t+1,1}) \cdots \ell(a_{t+1,n}) t(b_{t+1}) = \ell(a_{t+1,1}) \cdots \ell(a_{t+1,n}) tc$$

y por lo tanto, se tiene que en $H_2^{n+1}(L)$, aplicando dlog

$$\overline{b_{t+1} \frac{da_{t+1,1}}{a_{t+1,1}} \wedge \cdots \wedge \frac{da_{t+1,n}}{a_{t+1,n}}} = \overline{c \frac{da_{t+1,1}}{a_{t+1,1}} \wedge \cdots \wedge \frac{da_{t+1,n}}{a_{t+1,n}}}$$

es decir:

$$\sum_{i=1}^{t+1} \overline{b_i \frac{da_{i,1}}{a_{i,1}} \wedge \cdots \wedge \frac{da_{i,n}}{a_{i,n}}} = 0.$$

Luego vale R_{t+1} . Esto completa la inducción .

Claramente la validez de $\mathbf{R}_t$ para todo $t \geq 1$ implica la buena definición de α .

□

Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo de homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
 & h_{n+1}(F) \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[dr, "\cong\, dlog"] & \\
I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F) \arrow[rr, "\alpha"] & & H_2^{n+1}(F)
\end{tikzcd}$$

Se concluye inmediatamente que s_n es inyectivo, y por lo tanto es un isomorfismo. De este modo obtenemos finalmente

Teorema 5 *s_n es un isomorfismo para todo $n \geq 1$. En consecuencia los grupos $h_{n+1}(F), I^nW_q(F)/I^{n+1}W_q(F)$ y $H_2^{n+1}(F)$ son isomorfos.*

$\square$

Ejemplos:

1. Sea $F = F_{2^s}$, $s \geq 1$; cuerpo finito de 2^s elementos. Se sabe que F es perfecto, es decir, $F = F^2$. Como $\wp : F \to F$ tiene núcleo $\{0,1\}$ y F es finito entonces $\mid F/\wp F \mid = 2$, es decir, $F/\wp F \cong Z/2Z$. Luego

   - $W(F) = \{0, <1>\}$.
   - $I(F) = 0$.
   - $W_q(F) = \{0, [1, \alpha]\}$ con $\alpha \in F \setminus \wp F$.
   - $IW_q(F) = 0$.
   - $h_1(F) = \{0, t(\alpha)\}$.
   - $h_n(F) = 0$ para todo $n \geq 2$.

2. Sea k un cuerpo con 2-base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ y $F = k((X))$ el cuerpo de las series formales en una variable sobre k.

Para toda serie formal no nula

$$f = \sum_{n=m}^{\infty} a_n X^n$$

con $a_m \neq 0$ se define el valor $v(f)$ de f como el entero m. Se obtiene así una valuación discreta de F, con anillo de valuación $k[[X]]$ y cuerpo residual k. En consecuencia F es un cuerpo local. Además es fácil de verificar que $\{b_1, \ldots, b_n, X\}$ es una 2-base de F.

Claramente $h_s(F) = 0$ para $s > n+2$. Nuestro propósito es calcular el grupo $h_{n+2}(F)$.

Se verifica, al usar la 2-base de F, que todo elemento de $h_{n+2}(F)$ se escribe de la forma $\ell(b_1)\cdots\ell(b_n)\ell(X)t(g)$ con $g \in F$. Los elementos con valuación positiva están en $\wp(F)$ porque si $v(g) > 0$ entonces $z = \sum_{i \geq 0} g^{2^i}$ tiene la propiedad $\wp z = g$. Sea entonces sin restricción

$$g = \sum_{i=0}^{m} \frac{a_i}{X^i} \quad \text{con } a_i \in k.$$

Descomponiendo g en términos de la 2-base se tiene

$$g = \sum_{\mu \in S_n} g_\mu^2 b^\mu + X \sum_{\mu \in S_n} h_\mu^2 b^\mu,$$

con g_μ y h_μ en F. Evidentemente $v(g) \leq v(g_\mu^2), v(h_\mu^2) \leq 0$.

La expresión $\ell(b_1)\cdots\ell(b_n)\ell(X)t(g_\mu^2 b^\mu)$ es 0 para todo $\mu \neq (0, \ldots, 0)$ pues para algún i con $\mu(i) \neq 0$ se tiene que

$$\ell(b_1)\cdots\ell(b_i)\cdots\ell(b_n)\ell(X)t(g_\mu^2 b^\mu) = \ell(b_1)\cdots\ell(g_\mu^2 b^\mu)\cdots\ell(b_n)\ell(X)t(g_\mu^2 b^\mu)$$

y esta última expresión es 0 por la definición de $h_{n+2}(F)$.

Igualmente la expresión $\ell(b_1)\cdots\ell(b_n)\ell(X)t(Xh_\mu^2 b^\mu)$ es 0 para todo $\mu \in S_n$.

En consecuencia

$$\begin{aligned}\ell(b_1)\cdots\ell(b_n)\ell(X)t(g) &= \ell(b_1)\cdots\ell(b_n)\ell(X)t(g_0^2)\\ &= \ell(b_1)\cdots\ell(b_n)\ell(X)t(g_0).\end{aligned}$$

Luego, mediante el procedimiento anterior, se logra representar la expresión original por medio de un g_0 tal que $v(g)/2 \leq v(g_0) \leq 0$. Después de un número finito de pasos se obtendrá que $v(g_0) = 0$. Esto permite considerar sin restricción que $g \in k$. Por lo tanto

$$h_{n+2}(F) = \{\ell(b_1)\cdots\ell(b_n)\ell(X)t(a) \mid a \in k\}.$$

Sea

$$j : h_{n+1}(k) \longrightarrow h_{n+2}(F)$$

con

$$j(\ell(b_1)\cdots\ell(b_n)t(a)) = \ell(b_1)\cdots\ell(b_n)\ell(X)t(a).$$

j es claramente un epimorfismo.

Para demostrar la inyectividad estudiemos la expresión

$$\ell(b_1)\cdots\ell(b_n)\ell(X)t(a) = 0 \quad \text{en } h_{n+2}(F).$$

Usando el isomorfismo $h_{n+2}(F) \cong H_2^{n+2}(F)$ del Teorema 5, se obtiene que

$$\overline{a\frac{dX}{X} \wedge \frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n}} = 0 \quad \text{en } H_2^{n+2}(F),$$

es decir

$$a\frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n} \wedge \frac{dX}{X} = \wp(c) + d(e) \quad \text{en } \Omega_F^{n+1},$$

con $c \in \Omega_F^{n+1}$, $e \in \Omega_F^n$. Se verifica que

$$\begin{aligned} d(e) &= (\sum_{\mu \in S_n^*} h_\mu^2 b^\mu + \sum_{\mu \in S_n} f_\mu^2 b^\mu X)\frac{dx}{x} \wedge \frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n} \quad \text{y} \\ \wp(c) &= \wp(g)\frac{dx}{x} \wedge \frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n}, \end{aligned}$$

con $h_\mu, f_\mu, g \in F$.

Comparando coeficientes se obtiene que

$$a = \wp(g) + \sum_{\mu \in S_n^*} h_\mu^2 b^\mu + \sum_{\mu \in S_n} f_\mu^2 b^\mu X \qquad \text{en } F.$$

Al considerar sus residuos en k se tiene que existen en $g', h'_\mu \in k$ tales que

$$a = \wp(g') + \sum_{\mu \in S_n^*} h_\mu'^2 b^\mu.$$

Analizando la expresión $(\sum_{\mu \in S_n^*} h_\mu'^2 b^\mu)\frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n}$ en Ω_F^n se concluye que es un diferencial exacto. Por lo tanto

$$\overline{a\frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_n}{b_n}} = 0 \qquad \text{en } H_2^{n+1}(k).$$

Finalmente, dado que $H_2^{n+1}(k) \cong h_{n+1}(k)$ se cumple que

$$\ell(b_1) \cdots \ell(b_n) t(a) = 0 \qquad \text{en } h_{n+1}(k).$$

En consecuencia j es inyectivo y por lo tanto es un isomorfismo. Esto nos permite concluir que

$$h_{n+2}(F) \cong h_{n+1}(k).$$

- La inyectividad de j también se obtiene directamente usando formas cuadráticas. Pues la relación

$$\ell(b_1) \cdots \ell(b_n) \ell(X) t(a) = 0 \quad \text{en } h_{n+2}(F).$$

implica , por el Teorema 11 del Capítulo II, que $\ll b_1, \ldots, b_n, X; a \,]]$ es hiperbólica y así $< X > \ll b_1, \ldots, b_n; a \,]] \cong \ll b_1, \ldots, b_n; a \,]]$.

Usando el Corolario 3.2 sobre el Teorema de la Norma para formas cuadráticas sobre cuerpos de característica 2 de R.Baeza (ver [Ba$_3$]) se obtiene que $\ll b_1, \ldots, b_n; a \,]]$ es hiperbólica, en consecuencia, por el isomorfismo del Teorema 5, se concluye que

$$\ell(b_1) \cdots \ell(b_n) t(a) = 0 \quad \text{en } h_{n+1}(k).$$

APENDICE A

COHOMOLOGIA GALOISIANA Y K-TEORIA

En este apéndice se establecen relaciones entre los grupos de cohomología de los k-grupos de Milnor y los grupos de k-teoría introducida en este trabajo. Los resultados obtenidos son

$$\begin{aligned} H^1(G, k_n(F_s)) &\cong h_{n+1}(F) \\ H^0(G, k_n(F_s)) &\cong k_n(F) \end{aligned}$$

.

Sea F un cuerpo de característica 2 y F_s su clausura separable. Si $\{b_i\}_{i\in I}$ es 2-base de F sobre F^2 entonces se demuestra que el mismo conjunto es 2-base de F_s sobre F_s^2 (ver [Ba$_2$]). Luego

$$\Omega^n_{F_s} = \bigoplus_{\gamma\in\Sigma_{n,F}} F_s \frac{db_\gamma}{b_\gamma}$$

respecto a la 2-base mencionada.

Además se tienen las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow \nu_F(n) \longrightarrow \Omega^n_F \xrightarrow{\wp} \Omega^n_F / d\Omega^{n-1}_F \longrightarrow H_2^{n+1}(F) \longrightarrow 0 \tag{A.1}$$

$$0 \longrightarrow \nu_{F_s}(n) \longrightarrow \Omega^n_{F_s} \xrightarrow{\wp} \Omega^n_{F_s} / d\Omega^{n-1}_{F_s} \longrightarrow 0 \tag{A.2}$$

esta última sucesión es más corta porque $\wp(F_s) = F_s$.

Sea $G =$ Gal (F_s, F) . La acción de G sobre F_s se prolonga naturalmente a una acción sobre Ω_F^n de la siguiente manera:

$$g(\sum_{\gamma\in\sigma_n} a_\gamma \frac{db_\gamma}{b_\gamma}) = \sum_{\gamma\in\sigma_n} ga_\gamma \frac{db_\gamma}{b_\gamma}$$

con $a_\gamma \in F_s$ y $g \in G$. Además, usando el hecho que la 2-base está en F , resulta fácil demostrar que $g(d(w)) = d(g(w))$ para todo $w \in \Omega_{F_s}$ y $g \in G$. Luego $\Omega_{F_s}^n / d\Omega_{F_s}^{n-1}$, también es un G-módulo y (A.2) es una sucesión exacta de G-módulos.

En consecuencia la sucesión exacta de cohomología asociada a (A.2) es

$$0 \to H^0(\nu_{F_s}(n)) \to H^0(\Omega_{F_s}^n) \to H^0(\Omega_{F_s}^n / d\Omega_{F_s}^{n-1}) \to H^1(\nu_{F_s}(n)) \to H^1(\Omega_{F_s}^n) \to \cdots \tag{A.3}$$

A continuación calculamos algunos de estos grupos:

1. Consideremos $H^0(\Omega_{F_s}^n)$. Dado que $F_s^G = F$ se tiene que

$$H^0(\Omega_{F_s}^n) = (\Omega_{F_s}^n)^G = (\bigoplus_{\gamma\in\Sigma_n} F_s \frac{db_\gamma}{b_\gamma})^G = \bigoplus_{\gamma\in\Sigma_n} F_s^G \frac{db_\gamma}{b_\gamma} = \Omega_F^n.$$

2. Por el Teorema 90 de Hilbert y dado que $\Omega_{F_s}^n$ es un F_s-espacio vectorial, se obtiene

$$H^1(\Omega_{F_s}^n) = 0.$$

3. Demostraremos que $(d\Omega_{F_s}^{n-1})^G = d\Omega_F^{n-1}$.

Se tiene por definición que

$$(d\Omega_{F_s}^{n-1})^G = \{w \in d\Omega_{F_s}^{n-1} \mid gw = w \forall g \in G\} \subset \Omega_F^n \quad (por(1)).$$

Sea $w \in (d\Omega_{F_s}^{n-1})^G$. Dado que $d(w) = 0$ en $\Omega_{F_s}^{n+1}$ y $d(w) \in \Omega_F^{n+1}$, por la inyectividad de $(\Omega_F^n \to \Omega_{F_s}^n)$ resulta que $d(w) = 0$ en Ω_F^{n+1} . De este modo $C(w)$ está definido en Ω_F^n .

Por otra parte, w es una forma exacta en $\Omega^n_{F_s}$, por lo tanto $C(w) = 0$ en $\Omega^n_{F_s}$. Pero siendo $C(w)$ elemento de Ω^n_F , por lo anteriormente demostrado, y por la inyectividad de $(\Omega^n_F \to \Omega^n_{F_s})$ se tiene que

$$d(w) = 0 \text{ y } C(w) = 0 \quad \text{en } \Omega_F.$$

Usando la Proposición de P.Cartier (ver 1.2 Capítulo III) se concluye que w es exacta en Ω^n_F , es decir $w \in d(\Omega^{n-1}_F)$. Esto demuestra la afirmación.

4. Demostraremos que $H^0(\nu_{F_s}(n)) = \nu_F(n)$.

   Sea $w \in H^0(\nu_{F_s}(n)) = (\nu_{F_s}(n))^G \subset \Omega^n_F$ (por (1)). Tomemos una 2-base de F sobre F^2 , la cual es 2-base de F_s sobre F^2_s . Entonces $w = \sum_\gamma c_\gamma \frac{db_\gamma}{b_\gamma}$, y por la elección hecha, $c_\gamma \in F$. Se obtiene $\wp(w) = \sum \wp(c_\gamma)\frac{db_\gamma}{b_\gamma} \in \Omega^n_F$. Pero la hipótesis $w \in \nu_{F_s}(n)$ implica que $\wp(w) \in \Omega^n_F \cap d\Omega^{n-1}_{F_s}$ lo cual por (3) implica que $\wp(w) \in d\Omega^{n-1}_F$. Esto demuestra la afirmación.

5. Para calcular $H^0(\Omega^n_{F_s}/d\Omega^{n-1}_{F_s})$ examinemos la sucesión de G-módulos

$$0 \longrightarrow d\Omega^{n-1}_{F_s} \longrightarrow \Omega^n_{F_s} \longrightarrow \Omega^n_{F_s}/d\Omega^{n-1}_{F_s} \longrightarrow 0. \tag{A.4}$$

Se tiene entonces la sucesión exacta de cohomología asociada a (A.5)

$$\begin{array}{lllll} 0 & \longrightarrow & H^0(d\Omega^{n-1}_{F_s}) \longrightarrow H^0(\Omega^n_{F_s}) \longrightarrow H^0(\Omega^n_{F_s}/d\Omega^{n-1}_{F_s}) \longrightarrow \\ & \longrightarrow & H^1(d\Omega^{n-1}_{F_s}) \longrightarrow H^1(\Omega^n_{F_s}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

En esta sucesión $H^0(d\Omega^{n-1}_{F_s}) = d\Omega^{n-1}_F$ y $H^0(\Omega^n_{F_s}) = \Omega^n_F$. Además

$$H^1(d\Omega^{n-1}_{F_s}) \subset H^1(\Omega^n_{F_s}) = 0$$

Esto permite concluir que

$$0 \longrightarrow d\Omega^{n-1}_F \longrightarrow \Omega^n_F \longrightarrow H^0(\Omega^n_{F_s}/d\Omega^{n-1}_{F_s}) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Luego $H^0(\Omega^n_{F_s}/d\Omega^{n-1}_{F_s}) \cong \Omega^n_F/d\Omega^{n-1}_F$

Finalmente, reemplazando los resultados anteriores en (A.3) se obtiene

$$0 \longrightarrow \nu_F(n) \longrightarrow \Omega_F^n \longrightarrow \Omega_F^n/d\Omega_F^{n-1} \longrightarrow H^1(\nu_{F_s}(n)) \longrightarrow 0.$$

Comparando con la sucesión (A.1), concluimos que

$$H^1(\nu_{F_s}(n)) \cong H_2^{n+1}(F)$$

El resultado $\nu_{F_s}(n) \cong k_n(F_s)$ de K.Kato , el isomorfismo del Teorema 5 del Capítulo IV y la sucesión (A.4) implican

Teorema 1

$$H^1(G, k_n(F_s)) \cong h_{n+1}(F)$$

$$H^0(G, k_n(F_s)) \cong k_n(F).$$

para todo n .

REFERENCIAS

[1] [A] Albert, A.: Struture of Algebras. AMS Coll. Pub. 24, 1961.

[2] [Ar] Arason, J.K.: Wittring und Galoiscohomologie bei charakteristik 2. J. Reigne Angew. Math. 307/308, 247-256 (1979).

[3] [A-B] Aravire, R., Baeza, R.: The behavior of the ν invariant under finite extensions. Rocky Mountain J. of Matematics, Vol.23, No3, 1989.

[4] [Ba] Baeza, R.: Quadratic forms over semi local rings. Lecture Notes in Math. V. 655, Berlin-Heidelberg, New York, Springer Verlag 1978.

[5] [Ba_1] Baeza, R.: Ein Teilformensatz für quadratische Formen in Charakteristik 2. Math.Z.135, 175-184, 1974.

[6] [Ba_2] Baeza, R.: Comparing u-invariant of field of characteristic 2. Boletín de la Sociedad Brasilera de Matemática, Vol. 13, No 1 (1982), 105-114.

[7] [Ba_3] Baeza, R.: The norm theorem for quadratic forms over a field of characteristic 2. J. of Algebra (por aparecer).

[8] [Ca] Cartier, P.: Question de rationalité des diviseurs en géometrie algébrique. Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 177-251.

[9] [E-L] Elman, R., Lam, T.Y.: Pfisterforms and K-theory of fields. J. of Algebra 23, 181-213, 1972.

[10] [Ka] Kato, K.: Symmetric bilinear forms, quadratic forms and Milnor K-theory in characteristic two. Inv. Math. 66, 493-510, 1982.

[11] [Mil] Milne, J.S.: Duality in flat cohomology of a surface. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4eme série 12, 171-202, 1976.

[12] [Mi_1] Milnor, J.: Algebraic K-theory and quadratic forms. Invent. Math. 9, 318-344, 1970.

[13] [Mi_2] Milnor, J.: Symmetric inner products in characteristic 2. In: Prospects in Mathematics, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, pp. 59-75, 1971.

[14] [Mi_3] Milnor, J.; Husemoller, D,: Symmetric Bilinear Forms. Ergebnisse der Math. 73, Springer Verlag (1970).

[15] [Sa] Sah, C. H.: Symmetric bilinear forms and quadratic forms. J. of Algebra 20, 144-160, 1972.

[16] [Sch] Scharlau, W., Quadratic and Hermitian forms. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, Tokio, 1985.

[17] [Se] Serre, J.P.: Corps locaux. Hermann, 1962.