

# Métodos Hamiltonianos y Lagrangianos No Canónicos

Tesis  
Entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias con mención en Física

Facultad de Ciencias

por

**Andrés Simón Gomberoff Selowsky**

Enero, 1996



Director de Tesis: **Dr. Sergio A. Hojman Guñerman**

# Informe de Aprobación Tesis de Doctorado

Se informa al Comité del Programa de Doctorado en Ciencias con mención en Física que la Tesis presentada por el candidato

**Andrés Gomberoff Selowsky**

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para la obtención del grado de Doctor en Ciencias con mención en Física.

**Director de Tesis**

Dr. Sergio. A. Hojman

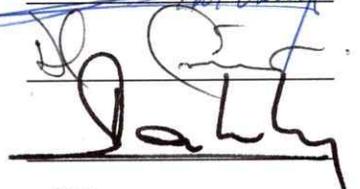


**Comisión Informante de Tesis**

Dr. Sergio del Campo



Dr. David Gottlieb (Presidente)



Dr. Romualdo Tabensky



Dr. Enrique Tirapegui



## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Sergio Hojman, que con paciencia y generosidad me ha ayudado y alentado en la elaboración de esta tesis y en el descubrir una hermosa área de la física.

Agradezco profundamente a Máximo Bañados, Luis Gomberoff Jaikles, David Gottlieb, Miguel Kiwi, Herbert Massmann, Cristián Martínez, Víctor "aux" Muñoz, Michael P. Ryan Jr., Lawrence C. Shepley, Claudio Teitelboim y Jorge Zanelli, que a través de discusiones, consejos y enseñanzas han sido importantes en la elaboración de esta tesis y en toda mi formación.

A mis padres y hermanas por su incondicional y eterna ayuda.

A Karina, que soportó hidalgamente los vaivenes anímicos de un tesista neurótico.

A la Dra. Edy Herrera, cuyo constante apoyo ha sido fundamental para que esta tesis haya llegado a su fin.

Mi permanencia en el plan de doctorado no hubiera sido posible sin la ayuda de CONICYT, cuya *Beca Para Estudiantes de Doctorado* financió los primeros años de mi doctorado. El financiamiento del período de tesista se lo debo a la FUNDACIÓN ANDES, a través de una *Beca Doctoral tipo B*.

Este trabajo ha sido financiado en parte por los proyectos FONDECYT 294-0013 y 193-0883.

## RESUMEN

En esta tesis se estudia el problema inverso del cálculo de variaciones. Se construyen formulaciones hamiltonianas y lagrangianas (en general, no canónicas) de ecuaciones de movimiento de primer orden,  $\dot{x}^a = f^a$  a partir del conocimiento de álgebras de Lie de campos vectoriales del espacio de fase que incluyan al campo  $f^a$ . Se construyen formulaciones hamiltonianas de diversas ecuaciones de campos y de modelos cosmológicos Bianchi III.

La importancia de las formulaciones no canónicas de ecuaciones de movimiento es discutida. Se desarrollan técnicas de integración de estas ecuaciones. Se obtiene una generalización del teorema de Liouville sobre integración de sistemas hamiltonianos.

Se estudia la relación entre sistemas hamiltonianos y mecánica estadística. Se muestra como la mecánica estadística puede ser escrita, bajo ciertas condiciones, sin requerir estructuras lagrangianas o hamiltonianas. La condición requerida para construirla en ausencia de estructuras canónicas es obtenida. Se presentan algunos ejemplos.

## ABSTRACT

In this thesis we study the inverse problem of the calculus of variations. We construct Hamiltonian and Lagrangian formulations of first order motion equations,  $\dot{x}^a = f^a$ , starting with the knowledge of a Lie algebra between some vectorial fields and  $f^a$ . We construct Hamiltonian formulations for some field equations and for Bianchi III cosmological models.

The importance of non-canonical formulations of motion equations is discussed. Methods for integrating them are developed. A generalization of Liouville's theorem about integration of Hamiltonian systems is obtained.

The relationship between Hamiltonian systems and Statistical Mechanics is studied. It is showed that Statistical Mechanics may be written, in some instances, without recourse to either Hamiltonian or Lagrangian structures. The condition required to construct it in the absence of canonical structures is obtained. Examples are presented.

## INTRODUCCIÓN

Las formulaciones lagrangianas y hamiltonianas de la Mecánica Clásica <sup>1, 2, 3</sup> han sido fundamentales en el desarrollo de diversas áreas de la física. Tanto la Mecánica Estadística como la Mecánica Cuántica se desarrollaron dentro de este lenguaje. También han sido importantes en la creación de diversas técnicas de integración de ecuaciones diferenciales, como el Teorema de Noether y la teoría de Hamilton-Jacobi, para mencionar algunas de <sup>las</sup> más populares. La formulación hamiltoniana de la mecánica permite además la utilización de poderosas técnicas matemáticas, como la teoría de Grupos, para el análisis de los problemas <sup>4</sup>.

Más recientemente, gran interés han tomado ciertas formulaciones hamiltonianas no canónicas, especialmente en física de plasmas y fluidos <sup>5, 6, 7, 8</sup>. Éstas serán de utilidad para encontrar y clasificar simetrías y cantidades conservadas, además de permitirnos definir, en algunos casos, la "integrabilidad" del sistema, es decir, la posibilidad de integrarlo completamente por cuadraturas. Los sistemas hamiltonianos integrables se definen usualmente a través de las hipótesis del teorema de Liouville <sup>3</sup>, que esencialmente exigen el conocimiento de la mitad de las cantidades conservadas del sistema, y que éstas tengan entre sí corchetes de Poisson nulos. En el capítulo 1 estudiaremos una generalización a este teorema, basada en coordenadas no canónicas.

El uso de variables no canónicas puede entonces ser, en muchos casos, de gran utilidad. En ocasiones, por ejemplo, ocurre que en éstas el problema se simplifica. Otras veces, las variables no canónicas resultan ser las variables "naturales" del sistema, por lo que la búsqueda de coordenadas canónicas puede no ser la dirección más conveniente. Las formulaciones no canónicas han sido vastamente utilizadas, como mencionamos anteriormente, en teorías de fluidos, plasmas, y diversas clases de ecuaciones de campos no lineales.

En mecánica cuántica también se han utilizado formulaciones no canónicas. Teorías como la "Cuantización Geométrica" <sup>9</sup> han intentado generalizar la mecánica

cuántica a cierto tipo de coordenadas no canónicas. Feynman intentó hacer mecánica cuántica partiendo de las ecuaciones de movimiento<sup>10, 11</sup>. Más recientemente Corichi y Ryan<sup>12</sup> han intentado otras generalizaciones. Cuantización de “minisuperespacios” en coordenadas no canónicas ha sido discutida por Hojman y Ryan<sup>13, 14</sup>.

En mecánica estadística, el uso de variables no canónicas ha sido discutida en la referencia [15]. Este trabajo será discutido en el capítulo 4. Veremos que incluso, en ciertos casos, podemos hacer mecánica estadística a partir de las ecuaciones de movimiento, sin hacer uso de ninguna clase de estructura adicional.

Las formulaciones hamiltonianas se obtienen usualmente partiendo de un lagrangiano y aplicando una transformación de Legendre. En estos casos obtenemos las llamadas *teorías hamiltonianas canónicas*. En ocasiones sin embargo, no disponemos de un lagrangiano que dé origen a las ecuaciones de movimiento, por lo que debemos construirlo a partir de éstas. Éste es un antiguo problema, que aún no tiene una solución general, y se conoce como el “problema inverso del cálculo de variaciones”. A veces es posible obtener directamente una formulación hamiltoniana (en general no canónica) de las ecuaciones, sin pasar por teoría lagrangiana alguna<sup>5, 6, 8, 13, 16, 17</sup>. Una técnica general para construir formulaciones hamiltonianas a partir de las ecuaciones de movimiento fue desarrollada por Hojman<sup>18, 19</sup>. Este método será discutido en el capítulo 5, en el que veremos ejemplos en mecánica clásica y teoría de campos<sup>20</sup> y algunas generalizaciones. En el capítulo 6 discutiremos la construcción de formulaciones hamiltonianas para un minisuperespacio Bianchi III, el cual no posee un lagrangiano que podamos utilizar para derivar una formulación hamiltoniana canónica.

# Índice

<b>1</b>	<b>Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden</b>	<b>1</b>
1.1	Teoría Lagrangiana . . . . .	2
1.2	Teoría Hamiltoniana . . . . .	3
1.2.1	Formulaciones Canónicas . . . . .	3
1.2.2	Paréntesis de Poisson . . . . .	4
1.3	Sistemas Regulares . . . . .	5
1.4	Sistemas Integrables . . . . .	7
1.5	Ejemplos . . . . .	10
1.5.1	Teorías hamiltonianas canónicas . . . . .	10
1.5.2	Lagrangianos de Segundo Orden . . . . .	11
1.5.3	Trompo de Euler . . . . .	12
<b>2</b>	<b>La Derivada de Lie y Sus Aplicaciones</b>	<b>14</b>
2.1	Definición de Derivada de Lie . . . . .	14
2.2	Propiedades de la Derivada de Lie . . . . .	17
2.3	Cantidades conservadas . . . . .	18
2.4	Simetrías . . . . .	18
2.4.1	Definición General . . . . .	18
2.4.2	Simetrías de Noether . . . . .	19
2.5	1-Formas Lagrangianas . . . . .	21
2.6	Formas Simplécticas y Matrices de Poisson . . . . .	22
2.7	Simetrías Fuertes . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Objetos Compatibles con la Dinámica</b>	<b>25</b>
3.1	Teorema de Liouville . . . . .	26
3.2	Densidades Tensoriales . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Mecánica Estadística en ausencia de Estructuras Canónicas</b>	<b>30</b>
4.1	Ecuación de Liouville . . . . .	31
4.2	Trompo de Euler . . . . .	33

4.3	Termodinámica de Sistemas No Hamiltonianos Cuya Energía Cinética se Conserva . . . . .	35
4.4	Ejemplos . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Construcción de Formulaciones Hamiltonianas</b>	<b>39</b>
5.1	Construcción de Estructuras de Poisson . . . . .	40
5.2	Formulaciones Hamiltonianas . . . . .	44
5.3	Grupos de Simetrías . . . . .	46
5.4	Grupo de campos vectoriales que satisfacen $[\eta_i, f] = \lambda_i f$ . . . . .	49
5.5	Grupos Abelianos . . . . .	51
5.6	Problemas Bidimensionales . . . . .	53
5.7	Aplicaciones a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	56
5.8	Aplicaciones en teoría de campos . . . . .	61
5.8.1	Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo . . . . .	61
5.8.2	Ecuación de Korteweg-De Vries . . . . .	63
5.8.3	Ecuación de transmisión del Calor . . . . .	64
5.8.4	Ecuación de Burgers . . . . .	65
5.8.5	Ecuación de Harry-Dym . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Formulaciones Hamiltonianas de Modelos Cosmológicos de Bianchi</b>	<b>68</b>
6.1	Espacio-Tiempo Espacialmente Homogéneo . . . . .	69
6.2	Cosmologías de Bianchi clase B . . . . .	70
6.3	Cosmologías Bianchi III . . . . .	71
6.3.1	Formulación Hamiltoniana de Rango 2 . . . . .	74
6.3.2	Formulación Hamiltoniana de Rango 4 . . . . .	75
6.4	Más en torno a Bianchi III . . . . .	77
	<b>Conclusiones</b>	<b>82</b>
	<b>Apéndice A</b>	<b>84</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>

# Capítulo 1

## Sistemas de Ecuaciones

## Diferenciales Ordinarias de

## Primer Orden

Nuestro estudio estará centrado en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en que las velocidades pueden despejarse, es decir, aquéllos de la forma,

$$\frac{dx^a}{dt} = f^a(x^b, t) \quad , \quad (1.1)$$

donde los índices  $a, b = 1, \dots, D$ .

Las coordenadas  $x^a$  definen el llamado *espacio de fase*. El campo vectorial  $f^a$  se denomina el *flujo*. Cuando el flujo  $f^a$  no depende de  $t$  las ecuaciones se dicen *autónomas*.

En algunos casos particulares también nos ocuparemos de ecuaciones en que las velocidades no pueden ser despejadas. Aquí no será posible definir unívocamente el flujo.

Es importante recordar que un sistema de  $D$  ecuaciones de orden superior, digamos  $N$ , en que las más altas derivadas,  $\frac{\partial^N x^a}{\partial t^N}$ , pueden ser despejadas, puede llevarse a la forma (1.1). Para esto basta definir el resto de las derivadas como nuevas variables,

$$\frac{\partial^k x^a}{\partial t^k} = x_k^a \quad .$$

Aquí  $a = 1 \dots D$   $k = 1 \dots N - 1$ . De este modo obtenemos un sistema de  $D \times N$  ecuaciones de primer orden de la forma (1.1).

Nos ocuparemos también, en algunos casos, de ecuaciones diferenciales parciales (teoría de campos).

## 1.1 Teoría Lagrangiana

El lagrangiano más general que da origen a ecuaciones de primer orden es de la forma 21, 22:

$$L(x, \dot{x}) = l_a(x, t)\dot{x}^a + l_0(x, t) \quad (1.2)$$

En efecto, cualquier término de segundo grado o mayor en  $\dot{x}$  nos llevaría a ecuaciones de segundo orden.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano (1.2) son,

$$\left( \frac{\partial l_a}{\partial x^b} - \frac{\partial l_b}{\partial x^a} \right) \dot{x}^b - \frac{\partial l_0}{\partial x^a} + \frac{\partial l_a}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

o bien, definiendo la *forma simpléctica*,  $\sigma_{ab}$ ,

$$\sigma_{ab} = \frac{\partial l_a}{\partial x^b} - \frac{\partial l_b}{\partial x^a} \quad (1.4)$$

Así, la ecuación (1.3) toma la forma,

$$\sigma_{ab}\dot{x}^b = \frac{\partial l_0}{\partial x^a} - \frac{\partial l_a}{\partial t} \quad (1.5)$$

La forma simpléctica  $\sigma_{ab}$  satisface las siguientes propiedades:

i)  $\sigma_{ab} = -\sigma_{ba}$  (Antisimetría)

ii)  $\sigma_{ab,c} + \sigma_{bc,a} + \sigma_{ca,b} \equiv 0$  (Identidad de Bianchi)

La primera de éstas es evidente, la segunda se puede verificar en forma directa, o bien utilizando el lenguaje de formas diferenciales, el cual usaremos a menudo en adelante.

En este,  $\sigma_{ab}$  es la representación coordenada (en coordenadas  $\{x^a\}$ ) de la 2-forma  $\sigma$ ,

$$\sigma = \sigma_{ab} dx^a \wedge dx^b \quad (1.6)$$

Del mismo modo

$$l = l_a dx^a \quad ,$$

donde  $l$  se denomina el *potencial simpléctico*, o la *1-forma lagrangiana*.

Es claro que,

$$\sigma = dl \quad , \quad (1.7)$$

de donde se obtiene

$$d\sigma = 0 \quad . \quad (1.8)$$

Esta última ecuación es la Identidad de Bianchi antes mencionada.

## 1.2 Teoría Hamiltoniana

Llamaremos formulación hamiltoniana<sup>6</sup> de las ecuaciones (1.1) al par  $\{J^{ab}(x, t), H(x, t)\}$ , de modo que,

$$\dot{x}^a = f^a(x, t) = J^{ab} \frac{\partial H}{\partial x^b} \quad , \quad (1.9)$$

Aquí  $H(x, t)$  es una función diferenciable del espacio de fase y el tiempo.  $J^{ab}$  es un tensor 2 veces contravariante, también función del espacio de fase y del tiempo tal que:

$$i) \quad J^{ab} = -J^{ba} \quad (\text{Antisimetría})$$

$$ii) \quad J^{ab}{}_{,d} J^{dc} + J^{bc}{}_{,d} J^{da} + J^{ca}{}_{,d} J^{db} = 0 \quad (\text{Identidad de Jacobi})$$

$J^{ab}$  recibe el nombre de *matriz de Poisson*.  $H$  se denomina el *hamiltoniano*.

### 1.2.1 Formulaciones Canónicas

Las formulaciones hamiltonianas más conocidas son las *canónicas*. Éstas se caracterizan por su matriz simpléctica<sup>1</sup>,

$$J_{\text{can}}^{ab} = \left( \begin{array}{c|c} 0_{n \times n} & 1_{n \times n} \\ \hline -1_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{array} \right) \quad , \quad (1.10)$$

en que  $1_{n \times n}$  y  $0_{n \times n}$  son la matriz identidad y la matriz nula de  $n \times n$  respectivamente.

En este caso,  $D = 2n$  es siempre par. Las primeras  $n$  coordenadas  $x^a$  se dicen *canónicamente conjugadas* a las segundas  $n$  y usualmente se denotan,

$$x^a \equiv (q^i, p_j) \quad , \quad \text{donde } i, j = 1, \dots, n \quad .$$

Una transformación arbitraria de coordenadas del espacio de fase no dejará, en general, invariante la forma de  $J_{\text{can}}^{ab}$ , y por lo tanto el ser canónica no es una condición invariante de coordenadas de una formulación hamiltoniana. Sin embargo, existe un subconjunto de transformaciones de coordenadas que dejan invariante  $J_{\text{can}}^{ab}$ . Éstas reciben el nombre de *Transformaciones Canónicas*.

### 1.2.2 Paréntesis de Poisson

Dadas dos funciones  $A(x)$  y  $B(x)$  del espacio de fase, se define el *Paréntesis de Poisson* de ambas cantidades,

$$\{A, B\} = J^{ab} A_{,a} B_{,b} \quad . \quad (1.11)$$

Este paréntesis hereda las propiedades fundamentales de  $J^{ab}$ , las cuales ahora se escriben,

$$\text{i) } \{A, B\} = -\{B, A\} \quad , \quad (\text{Antisimetría})$$

$$\text{ii) } \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0, \quad (\text{Identidad de Jacobi})$$

para funciones  $A, B, C$  cualesquiera del espacio de fase. Note que,

$$\{x^a, x^b\} = J^{ab} \quad . \quad (1.12)$$

Además las ecuaciones de movimiento pueden ahora escribirse en términos de los paréntesis de Poisson,

$$\dot{x}^a = \{x^a, H\} \quad . \quad (1.13)$$

Del mismo modo, cualquier cantidad  $A$ , función de las variables  $x^a$  y del tiempo, tendrá una evolución temporal dada por

$$\dot{A} = \{A, H\} + A_{,t} \quad . \quad (1.14)$$

### 1.3 Sistemas Regulares

Llamaremos *sistema lagrangiano regular* a aquél cuya forma simpléctica satisface

$$\det \sigma_{ab} \neq 0 \quad .$$

Del mismo modo, un *sistema hamiltoniano regular* es aquél en que

$$\det J^{ab} \neq 0 \quad .$$

Un sistema no regular se dice *singular*.

Consideremos un sistema lagrangiano regular tal que

$$\frac{\partial l_a}{\partial t} = 0 \quad .$$

En este caso podemos escribir las ecuaciones lagrangianas (1.5) como sigue,

$$\dot{x}^a = (\sigma^{-1})^{ab} l_{0,b} \quad . \quad (1.15)$$

Notemos que la matriz  $(\sigma^{-1})^{ab}$  es antisimétrica dada la antisimetría de  $\sigma_{ab}$ . Además,  $(\sigma^{-1})^{ab}$  satisface la identidad de Jacobi, en efecto,

$$(\sigma^{-1})^{af} \sigma_{fe} = \delta_e^a \quad .$$

Diferenciando respecto de  $x^d$  y multiplicando por  $(\sigma^{-1})^{cd}(\sigma^{-1})^{be}$  obtenemos

$$(\sigma^{-1})_{,d}^{ab}(\sigma^{-1})^{dc} + (\sigma^{-1})^{cd}(\sigma^{-1})^{be}(\sigma^{-1})^{af} \sigma_{fe,d} = 0 \quad . \quad (1.16)$$

Intercambiando cíclicamente los índices  $(a, b, c)$  y sumando las tres ecuaciones así obtenidas,

$$\begin{aligned} & (\sigma^{-1})_{,d}^{ab}(\sigma^{-1})^{dc} + (\sigma^{-1})_{,d}^{bc}(\sigma^{-1})^{da} + (\sigma^{-1})_{,d}^{ca}(\sigma^{-1})^{db} + \\ & + (\sigma^{-1})^{cd}(\sigma^{-1})^{be}(\sigma^{-1})^{cf}(\sigma_{fe,d} + \sigma_{ed,f} + \sigma_{df,e}) = 0 \quad , \quad (1.17) \end{aligned}$$

pero el término entre paréntesis es cero como consecuencia de la identidad de Bianchi. Así, obtenemos el resultado requerido.

Definamos ahora,

$$J^{ab} = -(\sigma^{-1})^{ab} , \quad (1.18)$$

$$H = -l_0 . \quad (1.19)$$

Entonces es claro que las ecuaciones (1.15) definen una formulación hamiltoniana para nuestras ecuaciones. Los signos negativos son sólo convención.

Localmente, es decir, en una vecindad de cualquier punto dado del espacio de fase, existe una relación más fuerte. En este caso podemos afirmar que existe una identificación uno a uno entre aquellas teorías hamiltonianas y lagrangianas regulares tales que su matriz (forma) simpléctica no depende explícitamente del tiempo.

En efecto, considere una teoría lagrangiana regular tal que

$$\frac{\partial \sigma_{ab}}{\partial t} = 0 . \quad (1.20)$$

Usando la definición (1.18), que nos asegura la Identidad de Jacobi para  $J^{ab}$ , las ecuaciones lagrangianas se pueden escribir

$$f^a(x, t) = J^{ab}(-l_{0,b} + l_{b,t}) . \quad (1.21)$$

Pero la condición (1.20) implica que

$$(-l_{0,b} + l_{b,t})_{,a} - (-l_{0,a} + l_{a,t})_{,b} = \sigma_{ab,t} = 0 , \quad (1.22)$$

y luego, localmente existe  $H(x)$  tal que

$$-l_{0,a} + l_{a,t} = H_{,a} .$$

De este modo (1.21) es una formulación hamiltoniana de nuestras ecuaciones.

Del mismo modo, dada una teoría hamiltoniana regular cuya matriz simpléctica no depende explícitamente del tiempo, definimos  $\sigma = -J^{-1}$ .

Dada la identidad de Jacobi tendremos

$$d\sigma = 0 ,$$

por lo que localmente existirá  $l_a$  tal que

$$\sigma = dl \quad .$$

Finalmente definimos  $l_0$  a través de la ecuación

$$-l_{0,a} = H_{,a} - l_{a,t} \quad , \quad (1.23)$$

cuyas condiciones de integrabilidad (locales) están garantizadas gracias a que  $J^{ab}$  no depende explícitamente del tiempo. De este modo hemos construido un lagrangiano local que da cuenta de nuestras ecuaciones hamiltonianas.

## 1.4 Sistemas Integrables

Es sabido que dado un sistema hamiltoniano regular de dimensión  $2n$ , éste siempre se podrá integrar por cuadraturas si existen  $n$  cantidades conservadas  $C^i$  en *involución*, esto es,

$$\{C^i, C^j\} = 0 \quad \text{para todo } i, j = 1 \dots n \quad . \quad (1.24)$$

Este resultado se conoce como el *Teorema de Liouville*<sup>3</sup>, y nos da un método para encontrar las  $n$  cantidades conservadas restantes. La existencia de una formulación hamiltoniana canónica, más  $n$  cantidades conservadas en involución, son usualmente las exigencias que definen un sistema como *integrable*.

En esta sección generalizaremos este resultado para sistemas lagrangianos regulares. Note que el teorema de Liouville usual sólo puede aplicarse cuando se cuenta con una formulación hamiltoniana canónica. Esta nueva aproximación al problema nos permite trabajar directamente con las variables no canónicas, lo que en general nos simplificará mucho el problema, pues el encontrar las coordenadas canónicas utilizando el resultado de Darboux, es en general un problema altamente complejo. Por otra parte, si la 2-forma simpléctica depende explícitamente del tiempo, el sistema deja de ser hamiltoniano, y el teorema de Liouville usual no puede aplicarse. En esta nueva aproximación podremos tratar este tipo de problemas.

Consideremos entonces un sistema cuyo lagrangiano regular sea de la forma (1.2). Supongamos que conocemos  $n$  constantes de movimiento independientes  $C^i(x^a, t)$ . Podemos entonces despejar  $n$  de las  $2n$  coordenadas en función de  $C^i$ , el tiempo y las coordenadas restantes. De esta forma hacemos el cambio de variables

$$x^a \longrightarrow (C^i, y^j) \quad a = 1 \dots 2n, \quad i, j = 1 \dots n \quad . \quad (1.25)$$

En estas coordenadas el lagrangiano se escribe de la forma

$$L = A_i(C, y, t)\dot{C}^i + B_i(C, y, t)\dot{y}^i + K(C, y, t) \quad . \quad (1.26)$$

La condición (1.24) no puede aplicarse en caso de no haber una formulación hamiltoniana asociada. Por esta razón la escribimos en su forma lagrangiana,

$$\frac{\partial B_i}{\partial y^j} - \frac{\partial B_j}{\partial y^i} = 0 \quad \text{para todo } i, j \quad . \quad (1.27)$$

Es fácil verificar que, efectivamente, la condición (1.27) y la condición (1.24) son equivalentes cuando la 2-forma simpléctica asociada al lagrangiano inicial no depende explícitamente del tiempo. En ese caso disponemos de una formulación hamiltoniana de las ecuaciones cuya matriz de Poisson  $J^{ab} = (\sigma^{-1})^{ab}$  define el corchete de (1.24) de modo que (1.24) implica (1.27) y viceversa.

Las ecuaciones lagrangianas (1.5) toman en estas coordenadas la forma,

$$\begin{pmatrix} R_{ij} & M_{ij} \\ -M_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}^i \\ \dot{y}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial C^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \\ \frac{\partial K}{\partial y^i} - \frac{\partial B_i}{\partial t} \end{pmatrix} \quad , \quad (1.28)$$

en que,

$$R_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial C^j} - \frac{\partial A_j}{\partial C^i} \quad , \quad (1.29)$$

$$M_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial y^j} - \frac{\partial B_j}{\partial C^i} \quad . \quad (1.30)$$

Como hemos asumido que el sistema es regular, la matriz  $M_{ij}$  debe tener determinante distinto de cero. Por otro lado sabemos que las ecuaciones (1.28) deben implicar

$$\dot{C}^i = 0 \quad .$$

De estas observaciones se depende de (1.28) que

$$\frac{\partial K}{\partial y^i} - \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0 \quad . \quad (1.31)$$

Las ecuaciones (1.31) y (1.27) implican que localmente existe una función  $F(C^i, y^j, t)$  tal que

$$B_i = \frac{\partial F}{\partial y^i} \quad , \quad (1.32)$$

$$K = \frac{\partial F}{\partial t} \quad . \quad (1.33)$$

Esta función se obtiene integrando,

$$F(C, y, t) = \int_{y_0, t_0}^{y, t} B_\alpha dy^\alpha \quad , \quad (1.34)$$

por cualquier camino, con  $\alpha = 0, \dots, n$ ,  $y^0 = t$  y  $B_0 = K$ .

Podemos ahora restar a nuestro lagrangiano la derivada total respecto del tiempo de  $F$ . Esto, como bien sabemos, no afectará a las ecuaciones de movimiento ni a la 2-forma simpléctica, así,

$$\begin{aligned} L' &= L - \dot{F} = L - \frac{\partial F}{\partial C^i} \dot{C}^i - \frac{\partial F}{\partial y^i} \dot{y}^i - \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= L - \frac{\partial F}{\partial C^i} \dot{C}^i - B_i \dot{y}^i - K \\ &= \left( A_i - \frac{\partial F}{\partial C^i} \right) \dot{C}^i \quad . \end{aligned} \quad (1.35)$$

Esto nos muestra que las  $n$  cantidades

$$P_i = A_i - \frac{\partial F}{\partial C^i} \quad , \quad (1.36)$$

son conservadas independientes entre sí e independientes de las  $C_i$ . En efecto, considere el cambio de variables

$$(C^i, y^i) \longrightarrow (C^i, P_i) \quad , \quad (1.37)$$

que está bien definido ya que su jacobiano,

$$\det \left( \begin{array}{c|c} 1_{n \times n} & 0 \\ \hline \frac{\partial A_i}{\partial C^j} - \frac{\partial^2 F}{\partial C^i \partial C^j} & \frac{\partial A_i}{\partial y^j} - \frac{\partial^2 F}{\partial C^i \partial C^j} \end{array} \right) = \det \left( \begin{array}{c|c} 1_{n \times n} & 0 \\ \hline \frac{\partial A_i}{\partial C^j} - \frac{\partial^2 F}{\partial C^i \partial C^j} & M_{ij} \end{array} \right) \quad , \quad (1.38)$$

es no nulo, pues  $\det M_{ij} \neq 0$ . Escribiendo el lagrangiano (1.35) en estas variables,

$$L' = P_i \dot{C}^i \quad , \quad (1.39)$$

resulta evidente que

$$\dot{P}_i = 0 \quad \text{para todo } i \quad . \quad (1.40)$$

De este modo, hemos sido capaces de integrar completamente el sistema, pues conocemos  $2n$  cantidades conservadas funcionalmente independientes. Más adelante veremos algunos ejemplos en los que utilizaremos este método de integración. Finalmente hacemos notar que este método proporciona una extensión natural de una de las más conocidas definiciones de *sistemas integrables*.

## 1.5 Ejemplos

### 1.5.1 Teorías hamiltonianas canónicas

Las ecuaciones hamiltonianas son de primer orden, y para el caso canónico usual regular, provienen de un principio variacional dado por el lagrangiano

$$L(q, p, \dot{q}, \dot{p}) = p_i \dot{q}^i - H(q, p) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad . \quad (1.41)$$

En nuestra notación,

$$l_a = \begin{pmatrix} p_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad l_0 = -H(q, p) \quad . \quad (1.42)$$

De (1.4) se tiene que

$$\sigma_{ab} = \left( \begin{array}{c|c} 0_{n \times n} & 1_{n \times n} \\ \hline -1_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{array} \right) \quad . \quad (1.43)$$

El  $J^{ab}$  asociado a  $\sigma_{ab}$  (de la forma descrita en la sección 1.3) es justamente la matriz simpléctica canónica (1.10). Las ecuaciones hamiltonianas asociadas corresponden a las ecuaciones de Hamilton usuales.

### 1.5.2 Lagrangianos de Segundo Orden

Consideremos un lagrangiano de segundo orden que no dependa explícitamente del tiempo, es decir, uno de la forma

$$L \equiv L(q^i, \dot{q}^j) \quad i, j = 1, \dots, n \quad ,$$

en que la dependencia en  $\dot{q}$  no sea lineal, y por lo tanto las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad , \quad (1.44)$$

sean de segundo orden.

A partir de éste, construyamos la función

$$L'(q, u) = L(q, \dot{q} = u) \quad , \quad (1.45)$$

la que depende del doble de variables que  $L$  pero no depende de ninguna velocidad.

Definamos ahora un segundo lagrangiano,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, u, \dot{u}) = L'(q, u) + (\dot{q}^i - u^i) \frac{\partial L'(q, u)}{\partial u^i} \quad . \quad (1.46)$$

Note que este nuevo lagrangiano también depende del doble de variables que  $L$ . Además, las velocidades  $\dot{q}$  aparecen linealmente, y por lo tanto las ecuaciones de movimiento resultantes serán de primer orden. En efecto, estas ecuaciones son:

$$\frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial u^j} \dot{u}^j + \frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial q^j} \dot{q}^j - \frac{\partial L'}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L'}{\partial q^i \partial u^j} (\dot{q}^j - u^j) = 0 \quad , \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial u^j} (\dot{q}^j - u^j) = 0 \quad . \quad (1.48)$$

Si el lagrangiano  $L(q, \dot{q})$  es regular en el sentido que

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \neq 0 \quad , \quad (1.49)$$

entonces es claro que las ecuaciones (1.47) y (1.48) son equivalentes a la ecuación (1.44). En efecto, cualquier solución  $q(t)$  de (1.44) será, junto a  $u^i = \dot{q}^i$  solución de las ecuaciones (1.47) y (1.48), y viceversa, cualquier solución  $q^i(t)$  de las ecuaciones

(1.47) y (1.48) es también solución de (1.44).

De esta forma hemos visto que si se satisface (1.49), podemos construir un lagrangiano de primer orden que da origen a ecuaciones equivalentes a las de segundo orden originales. Esta equivalencia será válida incluso cuando (1.49) no es satisfecha. Para una demostración vea el apéndice A. La condición (1.49), sin embargo, asegura además que el sistema lagrangiano de primer orden (1.46) es regular en el sentido descrito en la sección 1.3. En efecto, consideremos las coordenadas  $x^a = (q^i, u^i)$ . En éstas, la forma simpléctica asociada al lagrangiano (1.46) es

$$\sigma_{ab} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial q^j} - \frac{\partial^2 L'}{\partial u^j \partial q^i} & \frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial u^j} \\ \hline -\frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial u^j} & 0 \end{array} \right), \quad (1.50)$$

la cual tendrá determinante no nulo si y sólo se satisface (1.49). Esto nos muestra la relación que existe entre la definición usual de sistemas regulares lagrangianos y la descrita en la sección 1.3.

Como ya discutimos en la sección 1.3, si un sistema lagrangiano resulta regular, tendrá una formulación hamiltoniana  $\{J^{ab}, H\}$  asociada. Es fácil convencerse de que en este caso

$$J^{ab}(u, q) = -(\sigma^{-1})^{ab}, \quad (1.51)$$

$$H(q, u) = u^j \frac{\partial L'}{\partial u^j} - L'. \quad (1.52)$$

### 1.5.3 Trompo de Euler

Las ecuaciones de Euler para un trompo son:

$$\dot{L}_1 = L_2 L_3 \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right), \quad (1.53)$$

$$\dot{L}_2 = L_3 L_1 \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right), \quad (1.54)$$

$$\dot{L}_3 = L_1 L_2 \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right), \quad (1.55)$$

en donde  $L_i$  e  $I_j$  son los momenta angulares y los momentos de inercia respecto de los ejes normales respectivamente.

Este sistema posee una formulación hamiltoniana no canónica <sup>23</sup> dada por

$$H(L_1, L_2, L_3) = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \quad , \quad (1.56)$$

y la matriz

$$J^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -L_3 & L_2 \\ L_3 & 0 & -L_1 \\ -L_2 & L_1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (1.57)$$

Es fácil convencerse de que este par  $\{H, J^{ij}\}$  es una formulación hamiltoniana de las ecuaciones de Euler. La identidad de Jacobi se puede demostrar directamente, y da origen al paréntesis de Poisson

$$[L_i, L_j] = -\epsilon_{ijk} L_k \quad . \quad (1.58)$$

Note que esta formulación es altamente no canónica. Por una parte, el espacio de fase es de dimensión tres (¡ dimensión impar !), luego la matriz de Poisson tiene determinante cero y el sistema es singular. Además  $J^{ab}$  depende explícitamente de las coordenadas del espacio de fase. A pesar de esto, el hamiltoniano  $H$  es la energía usual del sistema.

## Capítulo 2

# La Derivada de Lie y Sus Aplicaciones

### 2.1 Definición de Derivada de Lie

Considere una variedad  $\mathcal{M}$  con coordenadas  $(x^1, \dots, x^D)$  y un campo vectorial  $f^a(x)$  sobre ésta.

Este campo define un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas sobre  $\mathcal{M}$ ,

$$\dot{x}^a = f^a(x) \quad . \quad (2.1)$$

Ahora podemos tomar un objeto geométrico cualquiera en  $\mathcal{M}$ , digamos  $\mathcal{O}(x)$ , que no dependa explícitamente del tiempo, y estudiar su evolución a través del flujo  $f^a$ . Su *derivada de Lie* se definirá como su derivada total respecto del tiempo  $t$  que define la ecuación (2.1). Como toda derivación, se requerirá que satisfaga linealidad y la regla de Leibnitz. Para más detalles ver referencia [24].

**Escalares** El caso más simple es el de un escalar  $C(x)$ . Su evolución queda determinada por su derivada temporal,

$$\frac{dC}{dt} = C_{,a}\dot{x}^a = C_{,a}f^a \quad . \quad (2.2)$$

Definimos entonces la *Derivada de Lie* de un escalar  $C$  a lo largo de  $f^a$  como

$$\mathcal{L}_f C = C_{,a} f^a \quad . \quad (2.3)$$

**1-formas** Tomemos ahora la 1-forma  $dx^a$  y dejémosla evolucionar a través del flujo  $f^a$ . Su derivada temporal se puede calcular fácilmente a partir de la figura 2.1,

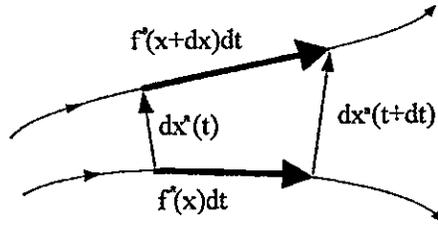


Figura 2.1. Evolución temporal de la 1-forma  $dx^a$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(dx^a) &= \frac{dx^a(t+dt) - dx^a(t)}{dt} \\ &= \frac{-f^a(x)dt + dx^a + f^a(x+dx)dt - dx^a}{dt} \\ &= f^a_{,b} dx^b \quad . \end{aligned} \quad (2.4)$$

De este modo, definimos la derivada de Lie de la 1-forma  $dx^a$  como sigue,

$$\mathcal{L}_f dx^a = f^a_{,b} dx^b \quad . \quad (2.5)$$

Una 1-forma general se escribe

$$\omega = \omega_a dx^a \quad .$$

Para calcular su derivada de Lie usamos la regla de Leibnitz, notando que  $\omega_a$  es un escalar,

$$\mathcal{L}_f \omega = (\mathcal{L}_f \omega_a) dx^a + \omega_a \mathcal{L}_f dx^a$$

$$= (\omega_{a,b} f^b + \omega_b f^a_{,b}) dx^a \quad . \quad (2.6)$$

**Tensores covariantes** Del mismo modo, es fácil notar que cualquier tensor de la forma

$$T = T_{ab\dots c} dx^a \otimes dx^b \otimes \dots \otimes dx^c \quad ,$$

tiene derivada de Lie

$$\mathcal{L}_f T = (T_{ab\dots c,d} f^d + T_{db\dots c} f^d_{,a} + T_{ad\dots c} f^d_{,b} + \dots + T_{ab\dots d} f^d_{,c}) dx^a \otimes \dots \otimes dx^c. \quad (2.7)$$

Es usual denotar un tensor a través de sus componentes. Nosotros utilizaremos a menudo esta notación, en donde,

$$\mathcal{L}_f T_{ab\dots c} = T_{ab\dots c,d} f^d + T_{db\dots c} f^d_{,a} + T_{ad\dots c} f^d_{,b} + \dots + T_{ab\dots d} f^d_{,c} \quad . \quad (2.8)$$

**Vectores** Consideremos un vector  $v$ ,

$$v = v^a \frac{\partial}{\partial x^a} \quad .$$

Si lo contraemos con una 1-forma  $\omega$  tendremos un escalar, y luego, usando la regla de Leibnitz,

$$\mathcal{L}_f(v^a \omega_a) = (\mathcal{L}_f v^a) \omega_a + v^a \mathcal{L}_f \omega_a = (v_a \omega^a)_{,b} f^b \quad , \quad (2.9)$$

para cualquier 1-forma  $\omega$ .

De aquí se obtiene que

$$\mathcal{L}_f v^a = v^a_{,b} f^b - v^b f^a_{,b} \quad . \quad (2.10)$$

**Tensores Generales** Es fácil verificar ahora que un tensor general  $T_{c\dots d}^{a\dots b}$  tiene derivada de Lie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f T_{c\dots d}^{a\dots b} &= T_{c\dots d,e}^{a\dots b} f^e + T_{c\dots d}^{e\dots b} f^a_{,e} + \dots + T_{c\dots d}^{a\dots e} f^b_{,e} + \dots + \\ &- T_{e\dots d}^{a\dots b} f^e_{,c} - \dots - T_{c\dots e}^{a\dots b} f^e_{,d} \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

## 2.2 Propiedades de la Derivada de Lie

Tomemos dos vectores  $u$  y  $v$ ,

$$u = u^a \frac{\partial}{\partial x^a} \quad v = v^a \frac{\partial}{\partial x^a} .$$

El conmutador de estos vectores es un tercer vector,

$$\left[ u^a \frac{\partial}{\partial x^a}, v^b \frac{\partial}{\partial x^b} \right] = (v^c_{,b} u^b - u^c_{,b} v^b) \frac{\partial}{\partial x^c} .$$

Vemos entonces que

$$\mathcal{L}_u v = [u, v] . \quad (2.12)$$

Este conmutador entre dos vectores se llama también paréntesis de Lie, y en muchas ocasiones lo usaremos en su versión coordinada,

$$([u^a, v^b])^c = v^c_{,d} u^d - u^c_{,d} v^d . \quad (2.13)$$

El paréntesis de Lie es obviamente antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi debido a que es un conmutador. Algunas propiedades fáciles de verificar son:

$$[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] = \mathcal{L}_{[u, v]} , \quad (2.14)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t}, \mathcal{L}_u \right] = \mathcal{L}_{u, t} . \quad (2.15)$$

Otra propiedad importante de la derivada de Lie se escribe más claramente en el lenguaje de formas diferenciales. Dada una forma diferencial  $\omega$ ,

$$\mathcal{L}_f \omega = (di_f + i_f d) \omega , \quad (2.16)$$

donde  $d$  es la derivada exterior, e  $i_f$  es el operador que contrae al primer índice de  $\omega$  con  $f^a$ . Para una demostración vea referencia [24], página 207. Note que de (2.16) se desprende inmediatamente que

$$[d, \mathcal{L}_f] = 0 , \quad \text{para todo } f^a . \quad (2.17)$$

## 2.3 Cantidades conservadas

Dadas las ecuaciones diferenciales (1.1), existen cantidades que se mantienen invariantes a medida que el sistema evoluciona, esto es,

$$\dot{C} = C_{,t} + C_{,a}f^a = 0 \quad . \quad (2.18)$$

Éstas reciben el nombre de *cantidades conservadas*. Note que esto se puede reescribir

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right) C = 0 \quad , \quad (2.19)$$

usando (2.3). Aquí hemos asumido que la cantidad conservada es un escalar, pero en efecto, también es posible tener un vector cuyas componentes sean cantidades conservadas. En esos casos simplemente definimos escalares cuyos valores en el sistema coordinado en uso sean iguales a las componentes del vector.

El ejemplo más sencillo de una cantidad conservada es un hamiltoniano que no dependa explícitamente del tiempo, pues en ese caso

$$\dot{H} = \{H, H\} = 0 \quad .$$

Note que dada una cantidad conservada  $C(x, t)$ , entonces

$$C' = \frac{\partial C}{\partial t}$$

también lo será si  $f^a$  no depende explícitamente del tiempo. En efecto, usando (2.18),

$$\dot{C}' = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial C}{\partial t} \right) = -C_{,a}f^a_{,t} \quad . \quad (2.20)$$

## 2.4 Simetrías

### 2.4.1 Definición General

Una simetría es, en general, una transformación

$$x^a \longrightarrow \bar{x}^a \quad ,$$

tal que si  $x^a(t)$  es una solución de (1.1), entonces  $\bar{x}^a(t)$  también lo es.

Nosotros sólo nos interesaremos en simetrías infinitesimales, esto es, aquéllas definidas por un campo vectorial  $\eta^a(x, t)$ , de modo que,

$$\bar{x}^a = x^a + \epsilon \eta^a(x, t) \quad , \quad (2.21)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro "pequeño". Diremos que  $\eta^a$  es una *simetría* si cuando  $x^a(t)$  es solución de las ecuaciones, entonces  $\bar{x}^a$  lo es a primer orden en  $\epsilon$ , es decir,

$$\dot{\bar{x}}^a + \epsilon \dot{\eta}^a = f^a(x^b + \epsilon \eta^b) \quad \text{hasta primer orden en } \epsilon \quad . \quad (2.22)$$

Desarrollando en serie de Taylor el lado derecho, y eliminando términos de  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ,

$$\eta^a_{,t} + \eta^a_{,b} f^b - \eta^b f^a_{,b} = 0 \quad . \quad (2.23)$$

Note que nuevamente esta expresión se escribe en términos de una derivada de Lie como sigue:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right) \eta^a = 0 \quad . \quad (2.24)$$

Un resultado importante es que si  $\eta$  y  $\xi$  son simetrías, entonces  $[\eta, \xi]$  también lo es. Esto es fácil de verificar usando (2.14) y (2.15),

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right) [\eta, \xi] &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\eta \xi - \mathcal{L}_{[\eta, \xi]} f \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\eta \xi - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi f + \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta f \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\eta \xi - \mathcal{L}_\eta \frac{\partial}{\partial t} \xi + \mathcal{L}_\xi \frac{\partial}{\partial t} \eta \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \mathcal{L}_\eta \right] \xi + \mathcal{L}_\xi \frac{\partial}{\partial t} \eta = \mathcal{L}_{\eta, t} \xi + \mathcal{L}_\xi \eta_{, t} = 0 \quad . \end{aligned}$$

## 2.4.2 Simetrías de Noether

Un tipo particular de simetrías son las llamadas *simetrías de Noether*<sup>25</sup> o *noetherianas*. Éstas se definen como aquellas transformaciones del tipo (2.21) tales

que la variación que producen en el lagrangiano corresponde a una derivada temporal total, esto es,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x^a} \eta^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \dot{\eta}^a = \dot{\Omega} \quad , \quad (2.25)$$

para cierto  $\Omega(x, t)$  función del tiempo y las coordenadas del espacio de fase.

Para lagrangianos de primer orden de la forma general (1.2), esta ecuación toma la forma

$$(l_{c,a} \dot{x}^c + l_{0,a}) \eta^a + l_a (\eta_{,c}^a \dot{x}^c + \eta_{,t}^a) = \Omega_{,c} \dot{x}^c + \Omega_{,t} \quad , \quad (2.26)$$

que es equivalente al par

$$\Omega_{,c} = l_{c,a} \eta^a + l_a \eta_{,c}^a = \mathcal{L}_\eta l_c \quad , \quad (2.27)$$

$$\Omega_{,t} = l_{0,a} \eta^a + l_a \eta_{,t}^a \quad . \quad (2.28)$$

Veamos en primer término que, efectivamente, toda simetría noetheriana es una simetría de acuerdo a nuestra definición general (2.24). De (2.27) y (2.28) se tiene que,

$$(l_{0,c} \eta^c + l_c \eta_{,t}^c)_{,a} = (l_{a,c} \eta^c + l_c \eta_{,a}^c)_{,t} \quad , \quad (2.29)$$

o bien,

$$(l_{0,c} \eta^c - l_{c,t} \eta^c)_{,a} = (l_{a,c} \eta^c - l_{c,a} \eta^c)_{,t} = (\sigma_{ac} \eta^c)_{,t} \quad . \quad (2.30)$$

Esta ecuación se puede reescribir,

$$\begin{aligned} (\sigma_{ac} \eta^c)_{,t} &= (l_{0,c} - l_{c,t}) \eta_{,a}^c + (l_{0,a} - l_{a,t})_{,c} \eta^c + (l_{a,ct} - l_{c,at}) \eta^c \\ &= \mathcal{L}_\eta (l_{0,a} - l_{a,t}) + \sigma_{ac,t} \eta^c \quad . \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que,

$$\mathcal{L}_\eta (l_{0,a} - l_{a,t}) = \sigma_{ac} \eta_{,t}^c \quad . \quad (2.31)$$

Como por hipótesis el sistema es regular, podemos multiplicar ambos lados de esta ecuación por  $(\sigma^{-1})^{ba}$ . Notando además que  $\mathcal{L}_\eta \sigma = 0$  dada la ecuación (2.27) y la propiedad (2.17) de la derivada de Lie, obtenemos

$$\mathcal{L}_\eta [(\sigma^{-1})^{ba} (l_{0,a} - l_{a,t})] = \eta_{,t}^c \quad . \quad (2.32)$$

Finalmente, en virtud de (1.5) y el hecho que  $\mathcal{L}_\eta f = -\mathcal{L}_f \eta$ , esta ecuación resulta ser precisamente la definición de simetría (2.24).

El hecho de que para simetrías noetherianas

$$\mathcal{L}_\eta \sigma = 0 \quad , \quad (2.33)$$

trae consecuencias importantes. Note que esta ecuación puede reescribirse utilizando (2.16),

$$(d\sigma)\eta + d(\sigma\eta) = 0 \quad . \quad (2.34)$$

La identidad de Bianchi implica que el primer término de esta expresión se cancela. Lo que queda implica que existe cierto campo escalar  $K$  tal que

$$dK = \sigma\eta \quad . \quad (2.35)$$

Como es sabido, las simetrías noetherianas están asociadas a cantidades conservadas. En este caso, dicha cantidad será,

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \eta^a - \Omega \\ &= l_a \eta^a - \Omega \quad . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Si el sistema lagrangiano en cuestión tiene además una teoría hamiltoniana asociada (i.e. si  $\sigma_{ab,t} = 0$ ), entonces su matriz simpléctica  $J^{ab} = -(\sigma^{-1})^{ab}$  definirá un paréntesis de Poisson tal que,

$$\begin{aligned} [x^a, C] &= J^{ab} C_{,b} = J^{ab} (l_{c,b} \eta^c + l_c \eta_{,b}^c + \Omega_{,b}) \\ &= J^{ab} (l_{c,b} \eta^c + l_c \eta_{,b}^c - l_{b,c} \eta^c - l_c \eta_{,b}^c) \\ J^{ab} \sigma_{cb} \eta^c &= \eta^a \quad . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Se dice entonces que  $C$  es el *generador* de la simetría  $\eta^a$ .

## 2.5 1-Formas Lagrangianas

El problema de encontrar un lagrangiano de la forma (1.2) para un sistema de ecuaciones dado (1.1) fue resuelto por Hojman y Urrutia<sup>22</sup>.

Tomemos un lagrangiano de la forma

$$L = l_a(x, t)(\dot{x}^a - f^a) \quad . \quad (2.38)$$

Considerar este tipo de lagrangianos es absolutamente general, pues, sumando una derivada total, cualquier lagrangiano podrá llevarse a la forma (2.38).

Las ecuaciones de Euler-Lagrange de este lagrangiano son

$$(l_{a,b} - l_{b,a})\dot{x}^b + l_{b,a}f^b + l_b f_{,a}^b + l_{a,t} = 0 \quad .$$

Esto se puede escribir también

$$(l_{a,b} - l_{b,a})(\dot{x}^b - f^b) + l_{a,t} + l_{a,b}f^b + l_b f_{,a}^b \quad ,$$

o bien

$$\sigma_{ab}(\dot{x}^b - f^b) + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right) l_a = 0 \quad . \quad (2.39)$$

De este modo vemos que el problema se reduce a encontrar una solución de la ecuación

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right) l_a = 0 \quad , \quad (2.40)$$

con la condición de que  $\sigma_{ab} = (l_{a,b} - l_{b,a})$  sea invertible.

## 2.6 Formas Simplécticas y Matrices de Poisson

Considere un sistema lagrangiano regular que da origen a la 2-forma simpléctica  $\sigma_{ab}$  y a las ecuaciones (1.1). Calculemos la derivada de Lie de  $\sigma_{ab}$  a lo largo de  $f^a$  (que está bien definida gracias a que el sistema es regular):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f \sigma_{ab} &= \sigma_{ab,c} f^c + \sigma_{ac} f_{,b}^c + \sigma_{cb} f_{,a}^c \\ &= \sigma_{ab,c} f^c - \sigma_{ac,b} f^c - \sigma_{cb,a} f^c + (\sigma_{ac} f^c)_{,b} + (\sigma_{cb} f^c)_{,a} \\ &= (\sigma_{ab,c} + \sigma_{ca,b} + \sigma_{bc,a}) f^c + (\sigma_{ac} f^c)_{,b} - (\sigma_{bc} f^c)_{,a} \quad . \end{aligned}$$

Pero el primer paréntesis es cero gracias a la identidad de Bianchi. Usando las ecuaciones lagrangianas (1.5), los dos últimos términos resultan ser justamente  $-\sigma_{ab,t}$ . De esta forma hemos demostrado que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f\right) \sigma_{ab} = 0 \quad . \quad (2.41)$$

La matriz de Poisson  $J^{ab}$  satisface una ecuación un poco distinta. En efecto, dadas ecuaciones hamiltonianas, se tendrá que

$$\mathcal{L}_f J^{ab} = 0 \quad . \quad (2.42)$$

Esto es consecuencia directa de la identidad de Jacobi, y a diferencia del caso lagrangiano aquí no requerimos que el sistema sea regular.

## 2.7 Simetrías Fuertes

Consideremos una matriz  $\Lambda_b^a$  que satisfaga la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f\right) \Lambda_b^a = 0 \quad . \quad (2.43)$$

Tal matriz recibirá el nombre de *simetría fuerte*<sup>26</sup>. Esta denominación tiene como origen el hecho que si  $\eta^a$  es una simetría entonces la cantidad

$$\eta^{a'} = \Lambda_b^a \eta^b \quad , \quad (2.44)$$

también lo es. Esto es evidente de (2.40), (2.43) y la regla de Leibnitz.

Note que si definimos la matriz  $F$

$$F_b^a = f_{a,b} \quad , \quad (2.45)$$

entonces la ecuación (2.43) se puede reescribir

$$\dot{\Lambda} + [\Lambda, F] = 0 \quad , \quad (2.46)$$

ecuación muy sugerente por su semejanza con la ecuación de evolución de los operadores de Heisenberg con hamiltoniano  $F$  y con la ecuación que define los llamados *pares de Lax*.

Veamos un ejemplo. Consideremos un sistema de ecuaciones de la forma (1.1), y supongamos que ésta posee una formulación lagrangiana (obviamente regular en este caso) con cierta forma simpléctica  $\sigma_{ab}^1$  asociada. Supongamos además que las ecuaciones poseen una formulación hamiltoniana con una matriz de Poisson asociada,  $J_2^{ab}$ , independiente del tiempo. Entonces, la matriz definida por

$$\Lambda_b^a = J_2^{ac} \sigma_{cb}^1 \quad (2.47)$$

es claramente una simetría fuerte. Note que si las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana en cuestión están asociadas como se describe en la sección 1.3, entonces  $\Lambda$  es la identidad. Para que esto sea útil, debemos, por lo tanto, conseguir dos teorías "independientes". De allí los subíndices 1 y 2 utilizados.

Finalmente note que si  $l_a$  es una 1-forma lagrangiana compatible con la dinámica generada por  $f$ ,

$$l'_a = l_b \Lambda_a^b \quad , \quad (2.48)$$

será una nueva 1-forma lagrangiana compatible con la dinámica. Así, podemos generar una familia de formulaciones lagrangianas para las ecuaciones  $\dot{x} = f$ .

## Capítulo 3

# Objetos Compatibles con la Dinámica

De acuerdo a la definición de derivada de Lie dada en la sección 2.1, ésta representa la derivada respecto del tiempo que define la ecuación diferencial (2.1). En aquella sección no consideramos objetos con dependencia explícita del tiempo. Sin embargo la extensión a este tipo de cantidades es trivial. No es difícil convencerse de que dado un objeto geométrico  $\mathcal{O}(x, t)$ , la condición necesaria y suficiente para que se preserve en el tiempo es

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right) \mathcal{O}(x, t) = 0 \quad . \quad (3.1)$$

Si esto se satisface diremos que este objeto es *compatible con la dinámica* generada por el flujo  $f^a$ .

Ejemplos de este tipo de objetos ya tenemos muchos, a saber, las cantidades conservadas de la ecuación cuyo flujo es  $f^a$ , sus simetrías y sus simetrías fuertes. Cuando tenemos una teoría lagrangiana regular, la forma simpléctica debe ser compatible con la dinámica. Si el lagrangiano es construido de modo que sea proporcional a las ecuaciones de movimiento entonces su 1-forma lagrangiana también debe ser compatible con la dinámica. También debe ser compatible con la dinámica cualquier matriz de Poisson,  $J^{ab}$ , que no depende explícitamente del tiempo y que esté asociada a una formulación hamiltoniana de las ecuaciones.

Utilizando ahora las propiedades básicas de los operadores de derivación, podemos construir nuevos objetos compatibles con la dinámica a partir de algunos conocidos. Así por ejemplo, si  $l_a$  es una 1-forma lagrangiana compatible con la dinámica y  $\eta^a$  una simetría, entonces

$$C = l_a \eta^a$$

será una cantidad conservada. Note que esto es muy similar al teorema de Noether, salvo que aquí la simetría es totalmente general (de las ecuaciones) y no necesita ser noetheriana (del lagrangiano).

Si  $\Lambda_a^a$  es una simetría fuerte,

$$C = \text{Tr } \Lambda = \Lambda_a^a$$

también será una cantidad conservada. Del mismo modo,

$$C' = \text{Tr } (\Lambda)^m$$

es otra cantidad conservada para cualquier entero  $m$ <sup>26</sup>. Esto debido a que  $\Lambda^m$  es también una simetría fuerte.

Así también, si  $C$  es una cantidad conservada, y  $J^{ab}$  una matriz de Poisson independiente del tiempo, podemos construir una simetría,

$$\eta^a = J^{ab} C_{,a} = \{x^a, C\} \quad .$$

Al igual que en la sección 2.4.2, decimos que  $C$  es el generador de la simetría  $\eta$ .

### 3.1 Teorema de Liouville

Consideremos una forma diferencial

$$\omega = \omega_{ab\dots c} dx^a \wedge dx^b \cdots \wedge dx^c \quad ,$$

definida sobre todo el espacio de fase. Supongamos que  $\omega$  sea compatible con la dinámica generada por cierto flujo  $f^a$ , esto es,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_f \right) \omega = 0 \quad . \quad (3.2)$$

Entonces es claro que la integral

$$\int_R \omega \quad (3.3)$$

será una cantidad conservada de las ecuaciones diferenciales (2.1) cuando  $R$  es una región del espacio de fase que evoluciona a través del flujo.

La ecuación (3.3) es la expresión más general de lo que se conoce como el *teorema de Liouville*. Estas expresiones integrales que se conservan durante la evolución del sistema suelen denominarse *invariantes integrales*.

Veamos un ejemplo. Consideremos un sistema lagrangiano regular que genera un flujo  $f^a$ . Su 2-forma simpléctica será compatible con la dinámica, y por lo tanto,

$$I = \int_R \sigma_{ab} dx^a \wedge dx^b \quad (3.4)$$

será una integral invariante del sistema. De (1.7) esta integral puede reescribirse,

$$I = \oint_{\partial A} l_a dx^a \quad , \quad (3.5)$$

en que  $\partial A$  es el borde de la región bidimensional  $A$ . En particular, para el caso canónico (ver sección 1.5.1), se tendrá

$$I = \oint_{\partial A} p_i dq^i \quad . \quad (3.6)$$

Note que esta última es exactamente la forma de las variables de acción<sup>1</sup>.

Si  $l_a$  es una 1-forma lagrangiana compatible con la dinámica, entonces la integral (3.5) no necesita ser cerrada, y será un invariante integral para cualquier camino.

Otras formas compatibles con la dinámica se obtienen al multiplicar exteriormente  $\sigma_{ab}$  por si misma. Para sistemas de dimensión par  $D = 2N$ , es interesante el caso

$$\omega = \underbrace{\sigma \wedge \sigma \wedge \cdots \wedge \sigma}_{N \text{ veces}} \quad . \quad (3.7)$$

Aquí  $\omega$  se puede escribir

$$\omega = \epsilon^{a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_{D-1} a_D} \sigma_{a_1 a_2} \cdots \sigma_{a_{D-1} a_D} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^D = \Delta dV \quad , \quad (3.8)$$

en que  $\Delta$  es proporcional al pfaffiano de  $\sigma_{ab}$  y  $dV$  el elemento de volumen del espacio de fase. En este caso además, dada la antisimetría de  $\sigma_{ab}$ ,

$$\Delta = \sqrt{\det \sigma} \quad . \quad (3.9)$$

Note que en el caso canónico  $\det \sigma = 1$ , de donde obtenemos la forma más conocida del teorema de Liouville, que afirma que

$$\int dV \quad (3.10)$$

es un invariante integral del espacio de fase de sistemas canónicos. En adelante nos referiremos a este último resultado como el *teorema de Liouville*.

### 3.2 Densidades Tensoriales

La derivada de Lie de una densidad tensorial  $W_{c\dots d}^{a\dots b}$  de peso  $p$ , a lo largo de cierto campo vectorial  $f$ , viene dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f W_{c\dots d}^{a\dots b} &= W_{c\dots d,e}^{a\dots b} f^e + W_{c\dots d}^{e\dots b} f_{,e}^a + \dots + W_{c\dots d}^{a\dots e} f_{,e}^b + \dots + \\ &- W_{e\dots d}^{a\dots b} f_{,c}^e - \dots - W_{c\dots e}^{a\dots b} f_{,d}^e + p W_{c\dots d}^{a\dots b} f_{,a}^a \quad . \end{aligned} \quad (3.11)$$

El producto de una densidad tensorial de peso  $p$  con otra de peso  $p'$  es una densidad tensorial de peso  $p + p'$ . Una densidad tensorial de peso 0 es un tensor ordinario.

El "tensor" de Levi-Civita  $\epsilon^{a_1 a_2 \dots a_D}$  es una densidad tensorial de peso 1 sobre una variedad de dimensión  $D$ . La versión covariante del mismo,  $\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D}$ , es una densidad tensorial de peso  $-1$ . Es fácil verificar que la derivada de Lie del tensor de Levi-Civita a lo largo de cualquier campo vectorial es igual a cero, por lo que siempre será un objeto compatible con la dinámica.

De este modo si  $\Delta$  es una densidad escalar de peso 1 compatible con la dinámica, definida sobre un espacio de fase de dimensión  $D$ , la  $D$ -forma

$$\omega = \Delta \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_D} \quad (3.12)$$

será también compatible con la dinámica, y por lo tanto,

$$\int \omega = \int \Delta dV \quad (3.13)$$

es un invariante integral.

Note que (3.12) tiene la misma forma que (3.8) (salvo factor numérico). Además, del hecho que la forma simpléctica  $\sigma_{ab}$  es compatible con la dinámica se desprende que  $\sqrt{\det \sigma}$  es una densidad escalar de peso 1 compatible con la dinámica, por lo tanto la expresión (3.12) no es otra cosa que una generalización de (3.8) en que  $\Delta$  es una densidad escalar de peso 1 compatible con la dinámica cualquiera.

Utilizando el tensor de Levi-Civita podemos construir otros invariantes integrales. Por ejemplo,

$$\int_R \Delta \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} f^{a_1} dx^{a_2} \wedge \dots \wedge dx^{a_D} \quad , \quad (3.14)$$

en que de nuevo  $\Delta$  es una densidad escalar de peso 1 compatible con la dinámica y la integral está evaluada sobre una región  $R$  de dimensión  $D - 1$ .

## Capítulo 4

# Mecánica Estadística en ausencia de Estructuras Canónicas

Como es bien sabido, la mecánica estadística requiere, en su formulación, de una estructura canónica. Es decir, las ecuaciones de la teoría microscópica en cuestión deben provenir de un sistema hamiltoniano cuya matriz de Poisson tenga la forma canónica (1.10). Esta necesidad se pone de manifiesto en los cimientos de la teoría, pues:

- La ecuación de Liouville para la densidad de estados  $\rho$  en el espacio de fase requiere que la teoría sea canónica.
- Es necesario contar con un hamiltoniano para el cálculo de la función partición.

El poseer una formulación hamiltoniana no canónica de nuestro sistema arruina el primer punto. El no poseer, del todo, una formulación hamiltoniana de nuestro sistema deja ambos puntos sin validez.

En este capítulo estudiaremos la posibilidad de superar estos obstáculos y hacer mecánica estadística para algunos casos tanto de sistemas con formulaciones hamiltonianas no canónicas, como de sistemas a los que no les conocemos formulación hamiltoniana alguna.

## 4.1 Ecuación de Liouville

El punto de partida de la mayoría de los textos de mecánica estadística es la densidad de estados<sup>27</sup>  $\rho$ . Ésta es una función del espacio de fase (de todos los grados de libertad del sistema), y

$$\rho(x, t) dx^1 dx^2 \dots dx^D = \rho(x, t) dV \quad (4.1)$$

es el número de microsistemas del ensamble representados por los puntos del elemento de volumen  $dV$  en torno a  $x$  en el instante  $t$ .

Ya que las ecuaciones en el espacio de fase son de primer orden, las trayectorias de los distintos puntos no pueden cruzarse. Además, si exigimos que no hayan "fuentes" ni "sumideros" de puntos representativos, la función  $\rho$  debe ser tal que

$$\int_R \rho dV \quad (4.2)$$

sea un invariante integral de nuestro sistema. Esto, como vimos en la sección 3.2, es equivalente a exigir que  $\rho$  sea una densidad escalar de peso 1 compatible con la dinámica, i.e.,

$$(\partial_t + \mathcal{L}_f)\rho = 0 \quad , \quad (4.3)$$

en que  $f$  es, como siempre, el campo vectorial sobre el espacio de fase que define las ecuaciones de movimiento.

Explícitamente, la ecuación (4.3) se puede escribir como sigue,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho_{,a} f^a + \rho f^a_{,a} = 0 \quad . \quad (4.4)$$

Llamaremos a esta última, *ecuación de continuidad*.

Si el sistema en cuestión es hamiltoniano, y está escrito en coordenadas canónicas,

$$f^a = J_0^{ab} H_{,b} \quad , \quad (4.5)$$

entonces la matriz de Poisson  $J_0^{ab}$  es constante, y

$$f^a_{,a} = 0 \quad . \quad (4.6)$$

Note que en este caso la ecuación (4.4) toma la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{,a} f^a = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Esto significa que  $\rho$  es una cantidad conservada. En este contexto la ecuación (4.7) es conocida como la *Ecuación de Liouville*.

Por supuesto, en un sistema canónico la ecuación de Liouville implica el teorema de Liouville, pues podemos elegir como densidad de estados una cantidad conservada tal como  $\rho = 1$ , que insertada en (4.2) nos da el resultado requerido.

La condición (4.6) puede ser satisfecha en casos no canónicos, y el teorema de Liouville será también satisfecho.

Note que  $f^a_{,a} = 0$  no es una condición invariante de coordenadas, y por lo tanto una transformación de coordenadas la alterará en general. La descripción del sistema en estas nuevas coordenadas debe ser, sin embargo, aún válida. Es conveniente por lo tanto introducir una medida  $\Delta$  que satisfaga la ecuación (4.4). De este modo podemos interpretar la cantidad  $dV = \Delta(x)d^D x$  como el elemento de volumen del espacio de fase. Éste será claramente conservado.

Veamos un ejemplo. Tomemos las ecuaciones de movimiento de la partícula libre de masa  $m$  en una dimensión en coordenadas canónicas:

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p \quad , \quad (4.8)$$

$$\dot{p} = 0 \quad . \quad (4.9)$$

Si definimos las variables  $A$  y  $B$  como sigue,

$$A = x^2 + p^2 \quad , \quad (4.10)$$

$$B = p \quad , \quad (4.11)$$

las ecuaciones (4.8) y (4.9) toman la forma:

$$\dot{A} = \frac{2}{m} B \sqrt{A - B^2} \quad , \quad (4.12)$$

$$\dot{B} = 0 \quad . \quad (4.13)$$

Para estas nuevas ecuaciones,  $f^a_{,a} = \frac{1}{m} B (A - B^2)^{-1/2} \neq 0$ . Sin embargo podemos definir la medida

$$\Delta = \frac{1}{2\sqrt{A - B^2}} \quad , \quad (4.14)$$

que claramente satisface la ecuación (4.4).

Vemos que en general, no podemos pedir a la densidad de estados,  $\rho$ , satisfacer simultáneamente la ecuación de Liouville (4.7) y la ecuación de continuidad. Requeriremos entonces que la densidad de estados satisfaga (4.7) solamente.

El número de estados en un volumen  $V$  vendrá dado por,

$$N = \int \rho \Delta dx^1 \dots dx^D \quad . \quad (4.15)$$

Éste es también un invariante integral, pues el producto  $\Delta\rho$  es una densidad escalar de peso 1 compatible con la dinámica, y satisface (4.4).

En este momento estamos en condiciones de hacer mecánica estadística. El promedio termodinámico de una función  $F(x)$  del espacio de fase,

$$\langle F \rangle = \frac{1}{N} \int \rho F \Delta dx^1 \dots dx^D \quad . \quad (4.16)$$

Esto será cierto para cualquier conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, sin importar si éstas poseen una formulación hamiltoniana. Sólo requerimos que  $\Delta$  satisfaga la ecuación de continuidad (4.4) y  $\rho$  sea una cantidad conservada (satisfaga (4.7)).

En las secciones siguientes presentaremos el ejemplo de un sistema hamiltoniano no canónico y algunos ejemplos en que se discute la mecánica estadística de sistemas en que sólo se conocen las ecuaciones de movimiento.

## 4.2 Trompo de Euler

Como ya vimos en la sección 1.5.3, existe una representación hamiltoniana para las ecuaciones de Euler del trompo.

A pesar de ser ésta una teoría hamiltoniana extremadamente no estándar ( $J^{ab}$  depende explícitamente de las variables del espacio de fase, el cual es tridimensional y por lo tanto  $\det J^{ab} = 0$  por ser ésta una matriz antisimétrica) tenemos  $f_{,a}^a = 0$ .

Este hecho nos permite tratar este caso de la manera usual en mecánica estadística.

Consideremos ahora un cristal unidimensional formado por  $N$  trompos esféricos que interactúan a primeros vecinos y con un campo magnético externo constante  $\vec{B}$ . Supongamos un hamiltoniano de la forma

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2I} (L_{i x}^2 + L_{i y}^2 + L_{i z}^2) + \sum_{i=1}^N \mu \vec{B} \cdot \vec{L}_i + \sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_x L_{i x} L_{i+1 x} + \alpha_y L_{i y} L_{i+1 y} + \alpha_z L_{i z} L_{i+1 z}) \quad , \quad (4.17)$$

donde  $I$  es el momento de inercia y  $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$  son constantes de acoplamiento.

Note que esto puede también escribirse

$$H = A_{ab} L^a L^b + \mu B_a L^a \quad . \quad (4.18)$$

Aquí  $L^a = (L_{ix}, L_{iy}, L_{iz})$  y  $B_a = (B_x \cdots B_x, B_y \cdots B_y, B_z \cdots B_z)$ .

La matriz  $A_{ab}$  es de la forma

$$A_{ab} = \begin{pmatrix} A_x & & & \\ & A_y & & \\ & & & \\ & & & A_z \end{pmatrix} \quad , \quad (4.19)$$

en que  $A_x$  es una matriz de  $N \times N$  dada por,

$$A_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/I & \alpha_x & & & \\ \alpha_x & 1/I & \alpha_x & & \\ & \alpha_x & 1/I & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha_x \\ & & & \alpha_x & 1/I \end{pmatrix} \quad , \quad (4.20)$$

y definiciones análogas para  $A_y$  y  $A_z$ .

Note que las ecuaciones de movimiento que se obtienen del hamiltoniano (4.17) también satisfacen  $f_{,a}^a = 0$ , por lo que podemos elegir  $\Delta = 1$  al igual que en las teorías canónicas usuales.

La función partición en el ensamble canónico es entonces

$$Z = \gamma \int d^{3N} L e^{-\beta H} \quad , \quad (4.21)$$

donde  $\beta = 1/kT$  y  $\gamma$  son constantes.

Esta integral puede calcularse fácilmente:

$$Z = \gamma \exp \left[ \frac{1}{4} \beta \mu^2 (A^{-1})^{ab} B_a B_b \right] \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det A}} \quad (4.22)$$

Y luego la energía del sistema estará dada por

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} Z = \frac{3}{2} NkT - \frac{1}{4} \mu^2 (A^{-1})^{ab} B_a B_b \quad (4.23)$$

La magnetización en el eje  $x$  es

$$M_x = -\frac{\partial U}{\partial B_x} = \chi_x B_x \quad (4.24)$$

en que

$$\chi_x = \frac{1}{2} \mu^2 \sum_{ij} A_{ij} \quad (4.25)$$

es la susceptibilidad magnética. Las mismas expresiones son válidas para  $M_y$  y  $M_z$ .

### 4.3 Termodinámica de Sistemas No Hamiltonianos Cuya Energía Cinética se Conserva

Consideremos un sistema de  $N$  partículas no interactuantes de masa  $m$  tal que la energía cinética de éstas,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N (\dot{\vec{x}})^2 \quad (4.26)$$

se conserve.

En este caso no asumiremos ninguna estructura canónica dada. Sólo supondremos conocida una fuerza externa  $\vec{F}$  que actúa sobre cada partícula.

Si trabajamos en el ensamble microcanónico debemos considerar la densidad de estados

$$\rho = \begin{cases} \text{Const.} & \text{si } E < \varepsilon(x) < E + \delta \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.27)$$

Aquí  $\delta \ll E$ , y la función partición está dada por

$$\Sigma(E, V) = \int_{\epsilon < E} \Delta dx^1 \dots dx^{3N} du^1 \dots du^{3N} , \quad (4.28)$$

donde  $u^i = \dot{x}^i$ , y el par  $(x^i, u^j)$  define el espacio de fase.

Por simplicidad asumamos que  $\Delta$  es función de las coordenadas solamente.

En este caso,

$$\Sigma(E, V) = C_{3N} \left( \frac{2E}{m} \right)^{3N/2} \int \Delta d^{3N}x , \quad (4.29)$$

donde  $C_{3N} R^{3N}$  es el volumen de una  $3N$ -esfera de radio  $R$ .

Ya que las partículas no interactúan, la única fuerza a la que pueden estar sujetas es de la forma

$$\ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i) , \quad (4.30)$$

o bien, en primer orden,

$$\dot{\vec{x}}_i = \vec{u}_i , \quad (4.31)$$

$$\dot{\vec{u}}_i = \vec{F}(\vec{x}_i, \vec{u}_i) . \quad (4.32)$$

Es fácil verificar que si  $\tilde{\Delta}(\vec{x}_i)$  satisface (4.4) para estas ecuaciones, entonces

$$\Delta(x^1 \dots x^{3N}) = \tilde{\Delta}(\vec{x}_1) \dots \tilde{\Delta}(\vec{x}_N) \quad (4.33)$$

satisface lo mismo para el sistema completo de ecuaciones. De este modo la integral en (1.4) es un producto de integrales de la forma

$$V_{\text{INV}} = \int \tilde{\Delta}(x) d^3x , \quad (4.34)$$

en que el dominio de integración es el espacio físico real. En adelante nos referiremos a esta integral como el *volumen invariante*. Ahora podemos escribir (4.29) en términos del volumen invariante,

$$\Sigma(E, V) = C_{3N} \left( \frac{2E}{m} \right)^{3N/2} V_{\text{INV}}^N . \quad (4.35)$$

La entropía del sistema viene dada por

$$S(E, V) = k \ln (\Sigma(E, V)) , \quad (4.36)$$

en que  $k$  es la constante de Boltzmann.

Despejando  $E$  en términos de  $S$  y  $V$ ,

$$E(S, V) = \frac{m}{2} (C_{3N}^N V_{\text{INV}})^{-2/3} \exp\left(\frac{2S}{3Nk}\right) . \quad (4.37)$$

La temperatura  $T$  es la derivada de  $E(S, V)$  respecto de  $S$ . En este caso obtenemos el mismo resultado que para los gases ideales,

$$E = \frac{3}{2} NkT . \quad (4.38)$$

La presión  $P$  esta dada por

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{1}{V_{\text{INV}}} \frac{dV_{\text{INV}}}{dV} NkT . \quad (4.39)$$

Es importante notar que la ecuación (4.4) tiene, en general, infinitas soluciones. En otras palabras,  $\Delta$  está lejos de ser una cantidad unívocamente definida. Una manera de manejar este problema es introducir un parámetro, digamos  $\alpha$ , tal que cuando  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  el problema se reduce a uno hamiltoniano escrito en coordenadas canónicas. Deberemos requerir por lo tanto que en este límite  $\Delta \rightarrow 1$ .

## 4.4 Ejemplos

Consideremos en primer término un sistema de  $N$  partículas no interactuantes de masa  $m$  que se mueven en un campo externo dado por

$$\vec{F} = \frac{m}{2} (\dot{\vec{x}} \times \vec{k}) \times \dot{\vec{x}} . \quad (4.40)$$

En primer orden, las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_\alpha &= \vec{u}_\alpha , \\ \dot{\vec{u}}_\alpha &= \frac{1}{2} (\vec{u}_\alpha \times \vec{k}) \times \vec{u}_\alpha , \end{aligned}$$

donde  $\alpha = 1, \dots, N$ .

En este sistema la energía cinética (4.26) es claramente conservada, pues la aceleración de cada partícula es perpendicular a su velocidad.

Si  $N = 1$  es fácil darse cuenta de que el sistema no puede, en el sistema coordenado  $(x_\alpha, u_\alpha)$ , tener una formulación hamiltoniana canónica. En efecto,

$$f_{,a}^\alpha = -\vec{u} \cdot \vec{k} \neq 0 \quad . \quad (4.41)$$

Sin embargo, la cantidad

$$\Delta(\vec{x}) = e^{\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (4.42)$$

es solución de (4.4), por lo tanto si el sistema es confinado a una caja de lado  $L$  el volumen invariante será

$$V_{\text{INV}} = \frac{8}{k_x k_y k_z} \sinh\left(\frac{k_x L}{2}\right) \sinh\left(\frac{k_y L}{2}\right) \sinh\left(\frac{k_z L}{2}\right) \quad , \quad (4.43)$$

y usando (4.39) obtenemos

$$P = \frac{NkT}{6V^{2/3}} \sum_{i=1}^3 \left[ k_i \coth\left(\frac{k_i V^{1/3}}{2}\right) \right] \quad . \quad (4.44)$$

Note que en el límite  $k \rightarrow 0$  la medida  $\Delta(\vec{x}) \rightarrow 1$  y (4.44) tiende a la ecuación de estado de los gases ideales.

Veamos ahora un segundo ejemplo. Un sistema de  $N$  partículas moviéndose de acuerdo a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{u} \quad , \\ \dot{\vec{u}} &= \frac{\lambda}{\vec{x}^2} (\vec{u} \times \vec{x}) \times \vec{u} \quad , \end{aligned}$$

donde  $\lambda$  es una constante real.

Nuevamente estas ecuaciones conservan energía cinética y carecen de formulación hamiltoniana en estas coordenadas, pero una solución de (4.4) es

$$\Delta(\vec{x}) = (\vec{x})^{2\lambda} \quad . \quad (4.45)$$

El volumen invariante es

$$V_{\text{INV}} = 4\pi \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2\lambda+3}{3}} \quad , \quad (4.46)$$

en que  $V$  es el volumen físico. Usando (4.39) obtenemos la ecuación de estado

$$PV = \left(\frac{2\lambda+3}{3}\right) NkT \quad . \quad (4.47)$$

Nuevamente, para  $\lambda \rightarrow 0$  recuperamos la ecuación para gases ideales y  $\Delta = 1$ .

## Capítulo 5

# Construcción de Formulaciones Hamiltonianas

Hasta ahora habíamos utilizado formulaciones hamiltonianas de distintos sistemas sin preguntarnos de dónde provenían. Sin embargo, dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, el problema de encontrar una formulación hamiltoniana de éstas no tiene una solución general.

Existen distintas técnicas que nos permiten construir tales formulaciones. Evidentemente, la más conocida y usada es la canónica, que nos proporciona la formulación hamiltoniana de cualquier sistema lagrangiano regular. El método de Dirac nos enseña cómo proceder en el caso de sistemas lagrangianos singulares. El problema aparece cuando no disponemos de una teoría lagrangiana de nuestras ecuaciones. En ese caso, podemos, por inspección, intentar adivinar el hamiltoniano y la matriz de Poisson. Esto puede darnos buenos resultados en muchos casos, pero es claro que la mayoría de las veces no tendremos éxito.

Una manera sistemática de construir formulaciones hamiltonianas dadas las ecuaciones de movimiento es la dada por Hojman<sup>18</sup>. En lo que sigue discutiremos este método y algunas generalizaciones.

## 5.1 Construcción de Estructuras de Poisson

Sea  $\mathcal{M}$  cierta variedad diferenciable (espacio de fase) de dimensión  $D$  y coordenadas  $\{x^a\}_{a=1}^D$ .

Sean  $\{\eta_i^a\}_{i=1}^N$ ,  $N \leq D$ , un conjunto de  $N$  campos vectoriales linealmente independientes en cada punto de  $\mathcal{M}$  que forman un álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ ,

$$[\eta_i, \eta_j] = C_{ij}^k \eta_k \quad , \quad \text{con } C_{ij}^k \text{ constantes reales.} \quad (5.1)$$

Considere

$$J^{ab} = M^{ij} \eta_i^a \eta_j^b \quad , \quad (5.2)$$

en que  $M^{ij}$  es una matriz antisimétrica cuyas componentes son constantes reales. Si queremos que  $J^{ab}$  sea una estructura de Poisson de la variedad hace falta que ella satisfaga la identidad de Jacobi. La condición necesaria y suficiente para esto es,

$$M^{li} C_{lm}^j M^{km} = M^{li} C_{lm}^j M^{km} + M^{lj} C_{lm}^k M^{im} + M^{lk} C_{lm}^i M^{jm} = 0 \quad . \quad (5.3)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} J_d^{[ab} J^{c]d} &= M^{ij} \left( \eta_i^a \eta_j^b \right)_{,d} M^{kl} \eta_k^c \eta_l^d \\ &= M^{ij} M^{kl} \left( \eta_{i,d}^a \eta_j^b \eta_k^c \eta_l^d + \eta_i^a \eta_{j,d}^b \eta_k^c \eta_l^d \right) \\ &= M^{ij} M^{kl} \left( \eta_{i,d}^a \eta_j^b \eta_k^c \eta_l^d - \eta_k^c \eta_{l,d}^a \eta_j^b \eta_i^d \right) \\ &= M^{ij} M^{kl} [\eta_l, \eta_i]^{[a} \eta_j^b \eta_k^c] = M^{ij} M^{kl} C_{li}^m \eta_m^a \eta_j^b \eta_k^c \quad . \end{aligned}$$

Es claro que la condición para que esto se anule es justamente la ecuación (5.3).

Inmediatamente observamos que si el álgebra  $\mathcal{G}$  es abeliana entonces cualquiera sea  $M^{ij}$ ,  $J^{ab}$  satisfará la identidad de Jacobi.

Supongamos ahora que disponemos de un número par  $N$  de campos vectoriales y que  $M^{ij}$  es invertible. Definamos  $M_{ij}$  como su inversa,

$$M^{ik} M_{kj} = \delta_j^i \quad . \quad (5.4)$$

Multiplicando la expresión (5.3) por  $M_{ir} M_{js} M_{kt}$  obtenemos

$$M_{[i} C_{jk]}^l = 0 \quad . \quad (5.5)$$

Esta ecuación es equivalente a (5.3) cuando  $M^{ij}$  es invertible, pero tiene la ventaja de ser lineal en  $M_{ij}$ . Por esta razón, la suma de dos soluciones de (5.5) es una nueva solución.

Nuestro propósito será, por lo tanto, encontrar soluciones invertibles,  $M_{ij}$ , de (5.5). Para concretarlo disponemos de algunas herramientas generales. En primer término, recordemos que las constantes de estructura  $C_{jk}^i$  no son arbitrarias, pues deben satisfacer la identidad de Jacobi,

$$C_{[i}^m C_{jk]}^l = 0 \quad . \quad (5.6)$$

Esto nos muestra inmediatamente que

$$M_{ij}^{(1)} = r_m C_{ij}^m \quad , \quad (5.7)$$

satisfará (5.5) para cualquier vector  $r_m$  de constantes reales.

En segundo lugar, considere la ecuación,

$$u_l C_{ij}^l = 0 \quad \text{para todo } i, j \quad . \quad (5.8)$$

En general pueden existir varias soluciones linealmente independientes para ésta. Por otra parte, la ecuación,

$$u_{[i} C_{jk]}^m = 0 \quad , \quad (5.9)$$

también puede tener varias soluciones distintas.

Sean ahora  $u_i^\alpha$ , con  $\alpha = 1, \dots, R$ , base del espacio  $R$ -dimensional construido al unir los espacios de soluciones de soluciones de (5.8) y (5.9). Entonces es claro que la siguiente matriz satisface (5.5),

$$M_{ij}^{(2)} = m_{\alpha\beta} u_i^\alpha u_j^\beta \quad , \quad (5.10)$$

donde  $m_{\alpha\beta}$  es una matriz antisimétrica arbitraria de constantes reales.

Es importante hacer notar que no siempre existirán soluciones invertibles para  $M_{ij}$ . Para ilustrar todo esto veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1:** Supongamos un álgebra de Lie bidimensional  $\{\eta_1^a(x^b), \eta_2^a(x^b)\}$  de campos vectoriales insertos en cierta variedad  $D$ -dimensional  $\mathcal{M}$ . Para nuestros actuales propósitos el caso más general es

$$[\eta_1, \eta_2] = \eta_2 \quad ,$$

pues el caso abeliano es trivial y cualquier otra ley de conmutación puede ser llevada a ésta a través de transformaciones lineales de los campos.

Notemos que una solución invertible de (5.5) es

$$M_{ij} = C_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (5.11)$$

y por lo tanto una matriz de Poisson para la variedad  $M$  es,

$$J^{ab} = M^{ij} \eta_i^a \eta_j^b = \eta_2^a \eta_1^b - \eta_1^a \eta_2^b \quad . \quad (5.12)$$

**Ejemplo 2:** Considere ahora un conjunto 4-dimensional de campos vectoriales  $\{\eta_i^a(x^b)\}_{i=1}^4$  de modo que

$$[\eta_1, \eta_2] = \eta_1 \quad , \quad (5.13)$$

y todos los demás campos conmutan. En este caso (5.5) también se puede resolver fácilmente. En primer lugar,

$$M_{ij}^{(1)} = C_{ij}^1 \quad (5.14)$$

es una solución. Otra se obtiene al notar que (5.8) tiene como solución cualquier vector  $u_i$  tal que  $u_1 = 0$ . Esto nos proporciona 3 vectores linealmente independientes para construir

$$M_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & -A & 0 & C \\ 0 & -B & -C & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (5.15)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son reales arbitrarios. La suma de  $M^{(1)}$  y  $M^{(2)}$  es, en general, una matriz invertible. Un caso particular es

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

cuya inversa nos permite construir la matriz de Poisson,

$$J^{ab} = M^{ij} \eta_i^a \eta_j^b = \eta_1^a \eta_2^b - \eta_2^a \eta_1^b + \eta_3^a \eta_4^b - \eta_4^a \eta_3^b. \quad (5.17)$$

**Ejemplo 3:** Otro ejemplo 4-dimensional interesante es aquél en que los campos conmutan, salvo

$$[\eta_3, \eta_4] = \eta_1. \quad (5.18)$$

En este caso la matriz  $M^{(2)}$  en (5.15) será nuevamente solución de (5.5), sin embargo ninguno de los métodos antes expuestos será de utilidad para encontrar otra matriz tal que, sumada a  $M^{(2)}$ , nos otorgue una  $M_{ij}$  invertible. Debemos utilizar por lo tanto la ecuación (5.5) directamente,

$$0 = M_{l[i} C_{jk]}^l = M_{1[i} C_{jk]}^1. \quad (5.19)$$

Pero esta ecuación se satisface idénticamente salvo cuando  $(i, j, k) = (i, 3, 4)$ . En este caso (5.19) toma la forma

$$M_{1i} = \begin{cases} 0 & i \neq 3, 4 \\ \text{Arbitrario} & i = 3, 4 \end{cases}. \quad (5.20)$$

De este modo la matriz  $M_{ij}$  más general que podemos construir es

$$M_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D & E \\ 0 & 0 & A & B \\ -D & -A & 0 & C \\ -E & -B & -C & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

que, evidentemente, es no singular en general. En particular, haciendo  $A = E = C = 0$ , y  $D = B = 1$  obtenemos una matriz cuya inversa da origen a la estructura de Poisson,

$$J^{ab} = M^{ij} \eta_i^a \eta_j^b = \eta_3^a \eta_1^b - \eta_1^a \eta_3^b + \eta_4^a \eta_2^b - \eta_2^a \eta_4^b \quad . \quad (5.22)$$

**Ejemplo 4:** Por último veamos un ejemplo en el que no existe una matriz  $M_{ij}$  invertible que satisfaga (5.5). Considere el álgebra 4-dimensional que consiste en  $SU(2)$  más un cuarto generador que conmuta con todos los otros, esto es,

$$[\eta_i, \eta_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} \eta_k \quad , \quad (5.23)$$

$$[\eta_0, \eta_i] = 0 \quad . \quad (5.24)$$

Aquí los índices  $i, j, k$ , toman los valores 1, 2 y 3 solamente. La ecuación (5.5) en este caso es

$$0 = M_{[a} C_{bc]}^l \quad , \quad (5.25)$$

en que los índices  $a, b, c$ , toman valores 0, 1, 2, 3. Si elegimos  $(a, b, c) = (i, j, 0)$  entonces obtenemos

$$0 = M_{i0} C_{ij}^l = \sum_l M_{i0} \epsilon_{lij} \quad . \quad (5.26)$$

Es fácil convencerse de que esta última ecuación implica  $M_{0i} = 0$ . Ya que  $M_{00} = 0$  por antisimetría, vemos que la columna y la fila 0-ésima de  $M_{ab}$  son nulas y por lo tanto su determinante es igual a cero. Esto significa que con 4 campos vectoriales cuyas relaciones de conmutación vengan dadas por (5.23) y (5.24) no podremos construir matrices de Poisson de rango 4 utilizando nuestro método. Podremos, sin embargo, tomar el álgebra generada, por ejemplo, por  $\{\eta_0, \eta_2\}$ , y construir una matriz de Poisson de rango 2, utilizando la técnica del ejemplo 1.

## 5.2 Formulaciones Hamiltonianas

En la sección anterior vimos algunas técnicas que nos permitían, conociendo un álgebra de Lie de campos vectoriales sobre el espacio de fase, construir, bajo ciertas condiciones, estructuras de Poisson sobre éste. Para tener una formulación

hamiltoniana de cierto sistema de ecuaciones de las coordenadas del espacio de fase, todavía requerimos el elemento más importante: un hamiltoniano.

Supongamos que  $f^a(x)$  es el campo vectorial que define nuestras ecuaciones de movimiento en la forma usual,

$$\dot{x}^a = f^a \quad . \quad (5.27)$$

Nuestro propósito es encontrar  $J^{ab}$  y  $H$  de modo que

$$f^a = J^{ab} H_{,b} \quad . \quad (5.28)$$

Note que para que esto sea posible es necesario que  $f^a$  esté en el rango de  $J^{ab}$ , y por lo tanto, de construir la matriz de Poisson como en la sección anterior, deben existir cantidades  $F^i$  tales que

$$f^a = F^i \eta_i \quad . \quad (5.29)$$

De (5.2), (5.29), y el hecho de que los  $\eta_i$  son linealmente independientes, la ecuación (5.28) es equivalente a

$$F^i = M^{ij} \eta_j^a H_{,a} \quad . \quad (5.30)$$

En caso de que  $M^{ij}$  sea invertible, el hamiltoniano requerido será cualquier cantidad  $H$  tal que

$$\mathcal{L}_{\eta_i} H = M_{ij} F^j \quad . \quad (5.31)$$

De este modo, el problema de encontrar una formulación hamiltoniana de cierto sistema de ecuaciones diferenciales autónomas se reduce al de encontrar un álgebra de Lie de campos vectoriales  $\{\eta_i\}$  tal que  $f$  sea linealmente dependiente a ellos y que satisfagan las ecuaciones (5.5), (5.29), (5.31) para alguna matriz  $M_{ij}$  invertible y algún  $H$ . Estas ecuaciones no tienen una solución general, sin embargo en los ejemplos que siguen veremos que la formulación recién presentada puede ser muy útil en nuestra búsqueda de formulaciones hamiltonianas para nuestro problema.

### 5.3 Grupos de Simetrías

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales autónomas (5.27), y supongamos conocemos un grupo de simetrías cuya álgebra viene dada por

$$[\eta_i, \eta_j] = C_{ij}^k \eta_k \quad , \quad i, j, k = 1, 2, \dots, N \quad , \quad (5.32)$$

en que  $N + 1 \leq D$ . El que sean simetrías significa que, además,

$$[\eta_i, f] = 0 \quad \forall i \quad , \quad (5.33)$$

y por lo tanto disponemos de un álgebra  $N + 1$ -dimensional,  $\mathcal{G} = \{\eta_i\}_{i=0}^N$ , en que  $\eta_0 = f$ .

En este caso entonces  $F^j = \delta_0^j$ , y por lo tanto nuestro hamiltoniano debe ser tal que

$$\mathcal{L}_{\eta_i} H = M_{i0} \quad . \quad (5.34)$$

Consideremos ahora la primera derivación del álgebra  $\mathcal{G}^{(1)}$ ,

$$\mathcal{G}^{(1)} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \quad . \quad (5.35)$$

y construyamos una nueva base de  $\mathcal{G}$ , digamos  $\{\xi_i\}$ , en que los últimos  $r$  campos vectoriales son una base de  $\mathcal{G}^{(1)}$  y los denotaremos con índices latinos mayúsculos  $\xi_A$ , y los  $N + 1 - r$  primeros, completarán la base y se rotularán con índices griegos  $\xi_\alpha$ . Evidentemente,  $f$  será uno de los campos con índice griego, y luego podemos definir  $\xi_0 = f$ .

Claramente, las constantes de estructura en esta nueva base son tales que,

$$C_{ij}^\alpha = C_{ij}^0 = C_{0j}^i = 0 \quad . \quad (5.36)$$

Las ecuaciones (5.5) toman ahora la forma

$$M_{A[i} C_{jk]}^A = 0 \quad . \quad (5.37)$$

Vemos por lo tanto, que los  $M_{\alpha\beta}$  se pueden elegir en forma completamente arbitraria. Por otra parte, si uno de los índices  $\{i, j, k\}$  en (5.37) es 0 obtenemos

$$M_{A0}C_{jk}^A = 0 \quad . \quad (5.38)$$

Es fácil convencerse de que esto sólo será posible para todo  $j, k$  si

$$M_{A0} = 0 \quad . \quad (5.39)$$

Note que esto significa que el grupo de simetrías debe ser tal que  $\text{Dim } \mathcal{G}^{(1)} < N$ , pues en caso contrario de (5.39) tendríamos que la primera columna de  $M_{ij}$  se anula y su determinante será cero.

De este modo, de (5.34), debemos encontrar un hamiltoniano tal que,

$$\mathcal{L}_f H = \mathcal{L}_{\xi_A} H = 0 \quad , \quad (5.40)$$

y

$$\mathcal{L}_{\xi_\alpha} H = M_{\alpha 0} \quad . \quad (5.41)$$

Ya que los  $M_{\alpha 0}$  son arbitrarios (con la condición de que  $M_{ij}$  sea regular), esta última ecuación sólo nos exige que la derivada de Lie de  $H$  a lo largo de los campos  $\xi_\alpha$  con  $\alpha \neq 0$  sean números, no todos iguales a cero, y que para  $\alpha = 0$  esta derivada se anule. Esto último significa que  $H$  debe ser una cantidad conservada.

Un caso especial ocurre cuando la dimensión del espacio de fase es igual a la dimensión  $(N + 1)$  de  $\mathcal{G}$ . De encontrar así una formulación hamiltoniana de nuestro sistema, ésta será regular. Este caso tiene otras ventajas, las que mostraremos a continuación. Note que los campos vectoriales  $\xi_i$  constituyen una base del espacio tangente en cada punto de  $\mathcal{M}$ . Es por esto que podemos construir la base dual a ésta, digamos  $\{\omega^i\}$ , de tal modo que

$$\omega_a^i \xi_j^a = \delta_j^i \quad , \quad \omega_b^i \xi_i^a = \delta_b^a \quad . \quad (5.42)$$

Por otra parte se sabe que

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k \quad , \quad (5.43)$$

y luego, ya que  $C_{ij}^\alpha = 0$ , se tiene que  $d\omega^\alpha = 0$ , y por lo tanto existen escalares  $H^\alpha$  tales que

$$dH^\alpha = \omega^\alpha \quad . \quad (5.44)$$

Los  $H^\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ) son cantidades conservadas del sistema, pues no dependen explícitamente del tiempo, y

$$\mathcal{L}_f H^\alpha = dH^\alpha(\xi_0) = \delta_0^\alpha \quad . \quad (5.45)$$

La cantidad  $H^0$  define otra cantidad conservada,

$$Q = H^0 - t \quad .$$

La ecuación (5.45) es un caso particular de la expresión más general

$$\mathcal{L}_{\xi_i} H^\alpha = \delta_i^\alpha \quad , \quad (5.46)$$

la cual nos muestra que para  $\alpha \neq 0$ , cada  $H^\alpha$  es un candidato a hamiltoniano de nuestro sistema, pues satisface automáticamente (5.40). Por otra parte, para cualquier  $M_{\alpha 0}$  que tengamos, la combinación lineal

$$H = M_{\beta 0} H^\beta \quad ,$$

satisfará (5.41).

Si el grupo  $\{\eta_i\}$  es abeliano, tendemos todas las cantidades conservadas del sistema, por lo que estará solucionado. Además la matriz  $M_{ij}$  se podrá elegir arbitrariamente, por lo que las  $N$  cantidades  $H^\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ) darán origen a  $N$  formulaciones hamiltonianas, cuyos hamiltonianos  $H^\alpha$  serán funcionalmente independientes.

Finalmente note que en principio, al encontrar una formulación hamiltoniana regular, estaremos en condiciones de encontrar una formulación lagrangiana de nuestras ecuaciones. En efecto, ya que los campos vectoriales que hemos considerado no dependen explícitamente del tiempo, la matriz de Poisson,  $J^{ab}$ , será a su vez independiente explícitamente del tiempo. Podemos entonces definir la 2-forma simpléctica de nuestro sistema,

$$\sigma = -M_{ij} \omega^i \wedge \omega^j \quad . \quad (5.47)$$

A pesar de que sabemos que debe existir un potencial lagrangiano que dé origen a  $\sigma$ , éste será fácil de encontrar sólo en algunos casos. En particular, si  $M_{ij}$  es de la forma de  $M^{(1)}$  en (5.7),

$$l = 2r_i \omega^i \quad , \quad (5.48)$$

hecho que se verifica de la ecuación (5.43).

## 5.4 Grupo de campos vectoriales que satisfacen

$$[\eta_i, f] = \lambda_i f$$

En ocasiones se pueden encontrar campos vectoriales  $\eta$  tales que

$$[\eta, f] = \lambda f \quad . \quad (5.49)$$

Esto implica que el campo vectorial explícitamente dependiente del tiempo,

$$\eta - t\lambda f \quad , \quad (5.50)$$

es una simetría del sistema, como puede verificarse directamente de (2.24). Esta simetría es equivalente a la transformación de las coordenadas del espacio de fase dada por  $\eta$  más la dilatación del tiempo  $t \rightarrow \lambda t$ .

Supongamos que tenemos un grupo de campos vectoriales tales que,  $\{\eta_i\}_{i=0}^N$ , en que  $f = \eta_0$ , y

$$[\eta_i, f] = \lambda_i f \quad , \quad (5.51)$$

en que no todos los  $\lambda_i$  son iguales a cero. Tomemos nuevamente la base  $\{\xi_i\}_{i=0}^N$  definida en la sección anterior. Note que ahora  $f$  pertenece a  $\mathcal{G}^{(1)}$ . Por esta razón definiremos  $\eta_N = f$ .

La identidad de Jacobi implica que

$$\lambda_A = 0 \quad ,$$

y por lo tanto sólo los  $\lambda_\alpha$  pueden ser no nulos. En efecto,

$$0 = C_{m[i}^l C_{jk]}^m = C_{B[i}^A C_{jk]}^B \quad . \quad (5.52)$$

De este modo, si  $A = k = N$ , esta ecuación toma la forma

$$C_{B[i]C_{jN}^B}^N = 0 \quad . \quad (5.53)$$

Es fácil convencerse de que las relaciones (5.51) implican que de esta ecuación sólo sobrevive el término

$$C_{B[N]C_{ij}^B}^N = 0 \quad , \quad (5.54)$$

de donde se desprende, con el mismo razonamiento que lleva de (5.38) a (5.39), que

$$C_{BN}^N = \lambda_B = 0 \quad . \quad (5.55)$$

Con esto observamos que es posible elegir una nueva base para nuestra álgebra. En ésta conservaremos los vectores base del subálgebra  $\mathcal{G}^{(1)}$ . Los vectores restantes serán elegidos de modo que  $\lambda_0 = 1$  y el resto sea igual a cero. Note que esto será siempre posible, pues basta tomar uno de los vectores  $\eta_\mu$  tal que  $\lambda_\mu \neq 0$  y definir  $\xi'_0 = \xi_\mu / \lambda_\mu$ . El resto de los vectores se define por

$$\xi'_\beta = \xi_\beta - \lambda_\beta \xi'_0 \quad ;$$

en donde  $\beta \neq \mu$ . En adelante prescindiremos del primado y nos referiremos a la nueva base como  $\{\xi_i\}$ .

Concentremos ahora nuestra atención en la matriz  $M_{ij}$ . De (5.5),

$$M_{l[i]C_{jk}^l} = M_{A[i]C_{jk}^A} = 0 \quad . \quad (5.56)$$

Si uno de los índices  $\{i, j, k\}$  es igual a  $N$ , obtenemos

$$M_{Ni}C_{jN}^N + M_{Nj}C_{Ni}^N + M_{AN}C_{ij}^A = 0 \quad . \quad (5.57)$$

Esto nos muestra que, a diferencia del caso de la sección anterior, ahora  $M_{Ni}$  no tiene ninguna entrada arbitraria, y por lo tanto, al buscar un hamiltoniano deberemos tener en cuenta simultáneamente (5.57) y (5.31), que en este caso nos dice que

$$\mathcal{L}_{\eta_i} H = M_{iN} \quad . \quad (5.58)$$

Sustituyendo esto en (5.57) obtenemos que,

$$\mathcal{L}_{[\xi_i, \xi_j] + \lambda_i \xi_j - \lambda_j \xi_i} H = 0 \quad . \quad (5.59)$$

En resumen, el poseer un grupo con las características descritas en esta sección nos obliga a encontrar un hamiltoniano que satisfaga (5.59), además de encontrar la matriz  $M_{ij}$  invertible, la que será arbitraria en el bloque  $M_{\alpha\beta}$ .

## 5.5 Grupos Abelianos

Los casos en que se dispone de un álgebra  $N + 1$ -dimensional  $\mathcal{G}$  generada por  $f$  y un subálgebra abeliana  $\{\eta_i\}_{i=1}^N$  que tiene relaciones de conmutación de la forma (5.51), fue estudiada por Hojman en [18].

Definamos una nueva base  $\{\xi_i\}_{i=0}^N$  como en la sección anterior, de modo que

$$\begin{aligned} C^N_{N0} = -C^N_{0N} &= \lambda \quad , \\ C^i_{jk} &= 0 \quad , \text{ otro caso,} \end{aligned}$$

en que  $\lambda = 1$  a menos que el álgebra  $\mathcal{G}$  sea abeliana.

De este modo, de los resultados de la sección anterior, se tiene que para  $\lambda = 1$  debemos encontrar una cantidad  $H$  tal que

$$\mathcal{L}_{\xi_i} H = M_{iN} = \delta_i^0 \quad , \quad (5.60)$$

y

$$M_{ij} = \left( \begin{array}{c|cc|c} 0 & & v_m & 1 \\ \hline & & & 0 \\ -v_n & & M_{nm} & \vdots \\ \hline & & & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \quad , \quad (5.61)$$

en que  $n, m = 1, \dots, N - 1$ . La ecuación (5.5) se satisface con  $v_n$  y  $M_{nm}$  completamente arbitrarios. Sólo debemos estar seguros de que  $\det M_{nm} \neq 0$ . La inversa de

$M_{ij}$  será,

$$M^{ij} = \left( \begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & M^{nm} & & -u^m \\ 0 & & & & \\ \hline 1 & & u^n & & 0 \end{array} \right) , \quad (5.62)$$

en que  $M^{mn} = (M_{mn})^{-1}$ , y  $u^n = M^{nm}v_m$ .

De este modo, si tenemos una cantidad conservada que satisfaga (5.60), una formulación hamiltoniana de las ecuaciones vendrá dada por  $\{H, J^{ab}\}$ , en que

$$J^{ab} = f^a \xi_0^b - f^b \xi_0^a + \sum_{i,j=1}^N m^{ij} \xi_i^a \xi_j^b , \quad (5.63)$$

donde los coeficientes  $m^{ij} = -m^{ji}$  son, salvo por su antisimetría, arbitrarios.

Cuando  $\mathcal{G}$  es abeliana,  $\lambda = 0$  y la matriz  $M_{ij}$  es completamente arbitraria. En este caso  $\xi_0$  (que ahora lo caracterizamos sólo por (5.60)), puede ser cualquier vector del álgebra con excepción de  $f$ , y la formulación hamiltoniana de las ecuaciones tendrá la misma forma que en el caso anterior. En este caso, sin embargo, tendremos la ventaja de que si encontramos un hamiltoniano que, en lugar de satisfacer (5.60), satisface

$$\mathcal{L}_{\xi_i} = K \delta_i^0 , \quad (5.64)$$

con  $K$  una función de las coordenadas del espacio de fase. En efecto, basta definir la nueva base:

$$\begin{aligned} \xi'_0 &= \frac{1}{K} \xi_0 , \\ \xi'_i &= \xi_i \quad i \neq 0 . \end{aligned}$$

Esta nueva álgebra es abeliana, pues si  $i \neq 0$ ,

$$[\xi'_i, \xi'_0] = \mathcal{L}_{\xi_i} \frac{1}{K} \xi_0 = -\xi_0 \frac{1}{K^2} \mathcal{L}_{\xi_i} K = -\xi_0 \frac{1}{K^2} \mathcal{L}_{\xi_i} \mathcal{L}_{\xi_0} H . \quad (5.65)$$

Pero esto es cero, pues ya que el álgebra original es abeliana, podemos conmutar, de (2.14), las derivadas de Lie.

## 5.6 Problemas Bidimensionales

Consideremos un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales generadas por el flujo,

$$f^a = \begin{pmatrix} f^x(x, y) \\ f^y(x, y) \end{pmatrix} . \quad (5.66)$$

Supongamos que conocemos otro campo vectorial independiente del tiempo, digamos  $\eta^a$ , linealmente independiente a  $f^a$  en cada punto del espacio de fase, tal que forma un álgebra de Lie con éste, Así,

$$[f, \eta] = \lambda f + \mu \eta , \quad (5.67)$$

en que  $\lambda$  y  $\mu$  son reales. En particular, cuando  $\lambda$  y  $\mu$  son nulos,  $\eta$  es una simetría. Éste es el caso más simple y es el que discutiremos en primer término.

**Caso I :**  $\lambda = \mu = 0$  . Construyamos la base dual a  $\{f, \eta\}$ , y llamémosla  $\{\omega^f, \omega^\eta\}$ . De este modo,

$$\begin{aligned} \omega_a^f f^a &= 1 , & \omega_a^f \eta^a &= 0 , \\ \omega_a^\eta f^a &= 0 , & \omega_a^\eta \eta^a &= 1 . \end{aligned}$$

Es obvio por lo tanto que

$$d\omega^f = d\omega^\eta = 0 ,$$

y luego, localmente,

$$\begin{aligned} \omega^f &= dK^f , \\ \omega^\eta &= dK^\eta , \end{aligned}$$

en que  $K^f(x)$  y  $K^\eta(x)$  son escalares en el espacio de fase. Notemos además que,

$$\begin{aligned} \dot{K}^f &= dK^f(f) = 1 \\ \dot{K}^\eta &= dK^\eta(f) = 0 . \end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos las dos cantidades conservadas independientes del sistema,  $(K^f - t)$  y  $K^\eta$ . La solución general del problema se obtiene despejando  $x$  e  $y$  respecto de  $K^f$ ,  $K^\eta$  y  $t$ .

Para construir una teoría hamiltoniana de este sistema tome la 2-forma simpléctica

$$\sigma = \omega^n \wedge \omega^f .$$

Esta 2-forma es claramente cerrada y regular, y más aún,

$$\sigma(f) = \omega^n = dK^n . \quad (5.68)$$

Y ya que  $K^n$  es una cantidad conservada se puede tomar como el hamiltoniano del sistema.

**Caso II :**  $\lambda \neq 0$  ,  $\mu = 0$  . En este caso,

$$d\omega^f = \lambda \omega^f \wedge \omega^n ,$$

$$d\omega^n = 0 .$$

Por lo tanto, al igual que antes, tenemos que, localmente,

$$\omega^n = dK^n$$

para cierto escalar  $K^n(x)$  en el espacio de fase. Además,

$$\dot{K}^n = dK^n(f) = 0 , \quad (5.69)$$

y luego tenemos sólo una cantidad conservada. Sin embargo, de todos modos tenemos teorías hamiltoniana y lagrangiana para este sistema. En efecto, considere la 2-forma simpléctica

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} d\omega^f = \omega^f \wedge \omega^n .$$

Esta 2-forma es obviamente cerrada y regular, y, de nuevo,

$$\sigma(f) = \omega^n = dK^n . \quad (5.70)$$

Pero  $K^n$  es una cantidad conservada y luego podemos usarla como el hamiltoniano nuevamente.

En este momento disponemos de una formulación hamiltoniana del sistema y de una cantidad conservada, por lo que el problema se puede resolver utilizando el método de Liouville.

**Caso III :**  $\lambda \neq 0$  ,  $\mu \neq 0$  . Este caso es equivalente a uno en que  $\lambda = 0$ , pues basta definir,

$$\chi^a = \lambda f^a + \mu \eta^a .$$

Éste será linealmente independiente a  $f$ . Además,

$$[f, \chi] = \mu \chi . \quad (5.71)$$

De esta forma, basta considerar el caso  $\lambda = 0$ ,  $\mu \neq 0$ .

Ahora la base dual  $\{\omega^f, \omega^x\}$  es tal que,

$$\begin{aligned} d\omega^f &= 0 , \\ d\omega^x &= \mu \omega^f \wedge \omega^x . \end{aligned}$$

Por lo tanto, localmente,

$$\omega^f = dK^f ,$$

para cierto escalar  $K^f$  en el espacio de fase. Además,

$$\frac{d}{dt}(K^\eta - t) = dK^\eta(f) - 1 = 0 . \quad (5.72)$$

luego tenemos una cantidad conservada explícitamente dependiente del tiempo, por lo que no podrá ser usada como hamiltoniano. Sin embargo, de todos modos podemos construir una teoría lagrangiana del sistema. En efecto, considere la 1-forma

$$l = e^{\mu t} \omega^\eta . \quad (5.73)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} (\partial_t + \mathcal{L}_f)l &= \mu l + e^{\mu t} \mathcal{L}_f \omega^\eta \\ &= \mu l + e^{\mu t} d\omega^\eta(f) = \mu l + e^{\mu t} \mu \omega^\eta \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$l(f) = l_a f^a = 0 ,$$

y por lo tanto, utilizando lo visto en la sección 2.5, el lagrangiano,

$$L = l_a \dot{x}^a \quad , \quad (5.74)$$

reproducirá nuestras ecuaciones de movimiento. Éstas pueden ser resueltas ahora usando el método de Liouville.

## 5.7 Aplicaciones a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias

El método recién desarrollado para sistemas bidimensionales puede ser útil para encontrar formulaciones lagrangianas y hamiltonianas de algunas ecuaciones diferenciales de segundo orden que presenten simetrías. Esto nos dará además un método para resolverlas.

Veamos un ejemplo. Considere la siguiente ecuación diferencial no lineal de segundo orden,

$$x\ddot{x} - 3\dot{x}^2 + 3x\dot{x} - x^2 = 0 \quad . \quad (5.75)$$

Ésta se puede escribir en primer orden haciendo  $y = \dot{x}$ . De este modo la ecuación (5.75) es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \quad , \\ \dot{y} &= \frac{3y^2}{x} + x - 3y \quad . \end{aligned}$$

Decimos entonces que tenemos un espacio de fase con coordenadas  $(x, y)$  y un flujo  $f$ ,

$$f^a = \begin{pmatrix} y \\ \frac{3y^2}{x} + x - 3y \end{pmatrix} \quad . \quad (5.76)$$

Dado que la ecuación (5.75) es invariante bajo dilataciones de la variable  $x$ , es fácil comprobar que,

$$\eta^a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad . \quad (5.77)$$

es una simetría de las ecuaciones, es decir satisface (2.24), y luego

$$[f, \eta] = 0 \quad .$$

La base dual asociada a  $\{f, \eta\}$  es

$$\omega^f = \left( \frac{-y}{2y^2 + x^2 - 3xy}, \frac{x}{2y^2 + x^2 - 3xy} \right) \quad , \quad (5.78)$$

$$\omega^\eta = \left( \frac{3y^2/x + x - 3y}{2y^2 + x^2 - 3xy}, \frac{-y}{2y^2 + x^2 - 3xy} \right) \quad . \quad (5.79)$$

Integrando estas 1-formas, obtenemos  $K^f$  y  $K^\eta$ ,

$$K^f = \ln \left( \frac{x - y}{2y - x} \right) \quad ,$$

$$K^\eta = -\frac{1}{4} \ln(2y^2 + x^2 - 3xy) - \frac{3}{4} \ln \left( \frac{2x - 2y}{2y - x} \right) + \frac{3}{2} \ln x \quad .$$

Finalmente, despejamos  $x$  e  $y$  en términos de las constantes  $(K^f - t)$  y  $K^\eta$  y obtenemos

$$x^2 = c_1 \left( \frac{\exp(2t)}{c_2 + 2 \exp(t)} \right) \quad , \quad (5.80)$$

en que  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias (funciones de las anteriores). Una teoría hamiltoniana de este sistema se construye fácilmente. Utilizando los resultados de la sección anterior vemos que basta tomar como hamiltoniano  $H = K^\eta$ , y la matriz de Poisson:

$$J^{ab} = f^a \eta^b - f^b \eta^a \quad . \quad (5.81)$$

Veamos otro ejemplo. Considere la ecuación

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{x} + kx^3 = 0 \quad , \quad (5.82)$$

en que  $k$  es una constante real. En primer orden, ésta puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \quad , \\ \dot{y} &= -kx^3 - \frac{y^2}{x} \quad . \end{aligned}$$

Notese que una simetría de esta ecuación es,

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \alpha x \quad , \\ y &\longrightarrow \alpha^2 y \quad , \\ t &\longrightarrow \frac{1}{\alpha} t \quad . \end{aligned}$$

Esto significa que infinitesimalmente la simetría viene dada por el vector

$$\eta + tf \quad ,$$

donde,

$$f = \begin{pmatrix} y \\ -kx^3 - y^2/x \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} \quad . \quad (5.83)$$

De este modo,

$$[f, \eta] = -f \quad , \quad (5.84)$$

y podemos utilizar las técnicas del caso II en la sección 5.6. La base dual asociada a  $\{f, \eta\}$  es

$$\omega^f = \left( \frac{2y}{kx^4 + 3y^2}, -\frac{x}{kx^4 + 3y^2} \right) \quad , \quad (5.85)$$

$$\omega^\eta = \left( \frac{kx^3 + y^2/x}{kx^4 + 3y^2}, \frac{y}{kx^4 + 3y^2} \right) \quad . \quad (5.86)$$

Sabemos que  $d\omega^\eta = 0$ , y por lo tanto debe existir un escalar  $H$  tal que  $\omega^\eta = dH$ . Y en efecto, integrando obtenemos

$$H = \frac{1}{6} \ln(kx^6 + 3x^2y^2) \quad . \quad (5.87)$$

De acuerdo a lo expuesto antes, ésta es una cantidad conservada, y sirve como hamiltoniano de las ecuaciones si usamos la matriz de Poisson

$$J^{ab} = f^a \eta^b - \eta^a f^b = \begin{pmatrix} 0 & (3y^2 + kx^4) \\ -(3y^2 + kx^4) & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (5.88)$$

En este caso también es fácil encontrar una teoría lagrangiana de las ecuaciones, puesto que

$$\sigma = -J^{-1} = -\omega^f \wedge \omega^n = -d\omega^f \quad . \quad (5.89)$$

De este modo,  $\omega^f$  es una 1-forma lagrangiana para nuestro problema, y el lagrangiano completo viene dado por

$$L = -\omega_a^f \dot{x}^a - H = -\frac{2y\dot{x} - x\dot{y}}{kx^4 + 3y^2} - \frac{1}{6} \ln(kx^6 + 3x^2y^2) \quad . \quad (5.90)$$

Tenemos entonces una formulación lagrangiana y una hamiltoniana de nuestro sistema. El hecho de conocer una cantidad conservada (el hamiltoniano) nos permite utilizar el método de la sección 1.4 para encontrar la otra y resolver, con esto, completamente el problema.

Escribamos entonces el lagrangiano (5.90) en términos de  $x$  y la cantidad conservada  $c = kx^6 + 3x^2y^2$ ,

$$L = \frac{x(x\dot{c} - 6c\dot{x})}{2c\sqrt{3c - 3kx^6}} - \frac{1}{6} \ln c \quad . \quad (5.91)$$

Usando la notación de la sección 1.4, debemos encontrar una función  $F(c, x, t)$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\sqrt{3} \frac{x}{\sqrt{c - kx^6}} \quad . \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= -\frac{1}{6} \ln c \quad . \end{aligned}$$

De este modo,

$$F = -\sqrt{3} \int^x \frac{y \, dy}{\sqrt{c - ky^6}} - \frac{1}{6} t \ln c \quad . \quad (5.92)$$

Así, de (1.36) obtenemos la otra constante de movimiento,

$$k = \frac{t}{6c} - \frac{1}{2\sqrt{3}c} \int^x \frac{y \, dy}{\sqrt{c - ky^6}} \quad . \quad (5.93)$$

La integral que aparece no tiene solución analítica, por lo que la dejamos así expresada. Note que luego de la integración debemos expresar  $c$  en términos de  $x$  e  $y$  para obtener la constante de movimiento en sus variables naturales. La solución general de la ecuación (5.82) se obtiene al despejar las variables  $(x, y) = (x, \dot{x})$  en términos

de las dos constantes de integración  $c$  y  $k$ .

Finalmente consideremos la ecuación

$$x^2 \ddot{x} - (2x + 1)\dot{x}^2 + (2 + x)x\dot{x} + x^2 = 0 \quad . \quad (5.94)$$

Ésta puede ser reescrita en primer orden como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \quad , \\ \dot{y} &= y + 2\frac{y^2}{x} + \frac{1}{x^2}(x + y)^2 \quad . \end{aligned}$$

Este sistema tiene la particularidad de poseer un vector  $\eta$ ,

$$\eta = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 + 2xy \end{pmatrix} \quad , \quad (5.95)$$

tal que

$$[f, \eta] = -\eta \quad . \quad (5.96)$$

La base dual a  $\{f, \eta\}$  viene dada por

$$\omega^f = \frac{1}{(x + y)^2} (-x(x + 2y), x^2) \quad , \quad (5.97)$$

$$\omega^\eta = \frac{-1}{(x + y)^2} \left( y + \frac{2y^2}{x} - \frac{(x + y)^2}{x^2}, -y \right) \quad . \quad (5.98)$$

En este caso sabemos que  $d\omega^f = 0$ , y luego que existe  $Q$  tal que  $dQ = \omega^f$ , y en efecto, integrando obtenemos

$$Q = -\frac{x^2}{x + y} \quad . \quad (5.99)$$

Por lo tanto, de (5.72), sabemos que la cantidad

$$K = t + \frac{x^2}{x + y} \quad (5.100)$$

es una constante de movimiento. Esta constante depende explícitamente del tiempo, luego no podrá ser un hamiltoniano. Sin embargo, de (5.74) podemos construir el lagrangiano,

$$L = e^{-t} \omega_a^\eta \dot{x}^a \quad . \quad (5.101)$$

Con ayuda de éste podemos resolver el problema, al menos formalmente. En efecto, despejando  $y$  de (5.100) escribimos el lagrangiano en términos de  $x$  y  $k$ ,

$$L = e^{-t} \left( \frac{\dot{x}}{x^2} - \left[ \frac{1}{t-c} + \frac{1}{x} \right] [\dot{c} - 1] \right) . \quad (5.102)$$

A partir de este nuevo lagrangiano podemos usar con facilidad los métodos de la sección 1.4 para obtener la segunda cantidad conservada,

$$P = e^{-t} \left[ e^{\frac{x^2}{x+y}} \text{Ei} \left( \frac{x^2}{x+y} \right) - \frac{1}{x} \right] , \quad (5.103)$$

en donde  $\text{Ei}(x)$  es la integral exponencial.

## 5.8 Aplicaciones en teoría de campos

La extensión a teoría de campos de los resultados anteriores es directa. Aquí veremos algunos ejemplos de teorías de campos en una dimensión espacial,  $x$ , y otra temporal  $t$ . El tratamiento del tiempo es el mismo que en el caso discreto<sup>20</sup>. La coordenada espacial  $x$  se considera como un índice continuo, por lo que debemos reemplazar las derivadas parciales del caso discreto por derivadas funcionales respecto del campo.

### 5.8.1 Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

Considere la ecuación de Schrödinger con un potencial  $V(x, t)$  dependiente del tiempo,

$$\psi_t = i(\psi_{xx} + V(x, t)\psi) \equiv f , \quad (5.104)$$

y su compleja conjugada,

$$\psi^*_t = -i(\psi^*_{xx} + V(x, t)\psi^*) \equiv f^* . \quad (5.105)$$

Note que hemos usado un espacio unidimensional. Esto ha sido sólo para simplificar los cálculos y es fácilmente generalizable a dimensiones mayores.

Es fácil convencerse que la multiplicación de las variables  $\psi$  and  $\psi^*$  por dos constantes diferentes,  $(1 + \lambda)$  y  $(1 + \mu\lambda)$ , respectivamente, constituye una simetría de las ecuaciones (5.104) y (5.105).

La versión infinitesimal de estas transformaciones es:

$$\eta = \epsilon \psi , \quad (5.106)$$

y

$$\eta^* = \mu \epsilon \psi^* . \quad (5.107)$$

La cantidad

$$H = \int \psi^*(x)\psi(x)dx \quad (5.108)$$

es una cantidad conservada como es bien sabido (conservación de la probabilidad). Su deformación  $K$  a lo largo de la simetría definida en (5.106) y (5.107) puede ser escrita en términos de derivadas funcionales como sigue,

$$K \equiv \int \frac{\delta H}{\delta \psi(x)} \eta(x) dx + \int \frac{\delta H}{\delta \psi^*(x)} \eta^*(x) dx , \quad (5.109)$$

y luego,

$$K = (1 + \mu) \epsilon H \neq 0 , \quad (5.110)$$

para cualquier  $\mu$  tal que  $1 + \mu \neq 0$ . La matriz de Poisson se define por

$$[ \psi(x) , \psi(y) ] = \frac{1}{K} ( f(x) \eta(y) - \eta(x) f(y) ) , \quad (5.111)$$

$$[ \psi(x) , \psi^*(y) ] = \frac{1}{K} ( f(x) \eta^*(y) - \eta(x) f^*(y) ) , \quad (5.112)$$

y

$$[ \psi^*(x) , \psi^*(y) ] = \frac{1}{K} ( f^*(x) \eta^*(y) - \eta^*(x) f^*(y) ) . \quad (5.113)$$

Hemos construido una familia de estructuras simplécticas definida por un parámetro  $\mu$  para un hamiltoniano dado  $H$ . Note que a pesar del carácter tiempo dependiente del potencial  $V(x, t)$ , el hamiltoniano es conservado, a diferencia del hamiltoniano usual, el cual es tiempo dependiente y por lo tanto no es una cantidad conservada.

Por otra parte, nuestras estructuras simplécticas son tiempo dependientes. Ésta es una propiedad poco usual en las matrices de Poisson, y significa que incluso en el caso regula no podremos derivar esta estructura hamiltoniana de un lagrangiano.

### 5.8.2 Ecuación de Korteweg-De Vries

Considere la ecuación

$$u_t = -u u_x - u_{xxx} \equiv f . \quad (5.114)$$

No es difícil ver que<sup>18</sup>

$$\eta = \epsilon ( -2u - x u_x + 3t ( u u_x + u_{xxx} ) ) \quad (5.115)$$

es una simetría de (5.114). En efecto, basta probar que  $\eta$  satisface la ecuación de simetría (2.24).

Para construir una formulación hamiltoniana de (5.114) necesitamos además una cantidad conservada que no sea trivialmente deformada por  $\eta$ . Es posible utilizar como energía la cantidad conservada<sup>18</sup>

$$H_1 = \int u^2 dx , \quad (5.116)$$

para completar la estructura hamiltoniana. Note que la deformación de  $H_1$  a lo largo de  $\eta$ ,  $K_1$  es no nula,

$$K_1 \equiv \int \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} \eta(x) dx = -3 \epsilon H_1 . \quad (5.117)$$

La estructura simpléctica  $J_1(x, y)$  está dada por

$$J_1(x, y) = \frac{1}{K_1} ( f(x) \eta(y) - f(y) \eta(x) ) . \quad (5.118)$$

Considere ahora  $H_2$ ,

$$H_2 = \int ( -\frac{u_x^2}{2} + u^3 ) dx , \quad (5.119)$$

que también es una cantidad conservada. Su deformación,  $K_2$ , a lo largo de  $\eta$  es

$$K_2 \equiv \int \frac{\delta H_2}{\delta u(x)} \eta(x) dx = -5 \epsilon H_2 . \quad (5.120)$$

La Matriz de Poisson  $J_2(x, y)$  será entonces

$$J_2(x, y) = \frac{1}{K_2} ( f(x) \eta(y) - f(y) \eta(x) ) . \quad (5.121)$$

Hemos construido por lo tanto dos estructuras hamiltonianas distintas para la ecuación de Korteweg De-Vries. Ésta se basó en una simetría,  $\eta$ , y dos cantidades conservadas  $H_1$  y  $H_2$  como hamiltonianos de cada una de las formulaciones. Las estructuras simplécticas,  $J_1$  y  $J_2$  fueron construidas como el producto antisimétrico del vector evolución,  $f$  y el vector de simetría,  $\eta$ , normalizados usando las deformaciones  $K_1$  y  $K_2$  de  $H_1$  y  $H_2$ , respectivamente. Note que otra manera de proceder es que en lugar de normalizar los productos antisimetrizados, utilizamos los hamiltonianos  $-(1/3)\log H_1$  y  $-(1/5)\log H_2$ . En este caso la matriz simpléctica para ambas estructuras hamiltonianas es exactamente la misma.

### 5.8.3 Ecuación de transmisión del Calor

Consideremos la ecuación del calor,

$$u_t = u_{xx} . \quad (5.122)$$

Es directo comprobar que

$$\eta(x) = \alpha \quad \alpha \text{ constante real} , \quad (5.123)$$

es una transformación de simetría para ésta.

Si asumimos condiciones de borde periódicas en  $x \in [-a/2, a/2]$ , entonces la cantidad

$$H = \int_{-a/2}^{a/2} u dx , \quad (5.124)$$

es conservada.

La deformación de  $H$  a lo largo de  $\eta$  está dada por

$$\mathcal{L}_\eta H = \int dx \frac{\delta H}{\delta u(x)} \eta(x) = \alpha \int dx = \alpha a , \quad (5.125)$$

en que todas las integrales se toman sobre el intervalo  $[-a/2, a/2]$ .

De esta forma podemos construir la siguiente matriz de Poisson:

$$J(x, y) = \frac{u_{xx}(x) - u_{yy}(y)}{a} . \quad (5.126)$$

Ésta, en conjunto con el hamiltoniano (5.124), provee una estructura hamiltoniana para la ecuación del calor (5.122).

Es importante hacer notar que en general se dice que la ecuación del calor no puede ser escrita en forma hamiltoniana. Citando a Salmon <sup>7</sup>: "By anyone's definition, (0.1) is non-Hamiltonian". En su artículo, (0.1) es la ecuación del calor (ecuación (5.122)) sujeta a condiciones de borde periódicas.

#### 5.8.4 Ecuación de Burgers

Considere la ecuación de Burgers,

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x \equiv f \quad , \quad (5.127)$$

donde  $x$  pertenece al intervalo  $[-a/2, a/2]$ . Es fácil verificar que

$$H_1 = \int_{-a/2}^{a/2} dx u(x) \quad , \quad (5.128)$$

$$H_2 = \int_{-a/2}^{a/2} dx \exp \left[ \int_{-a/2}^x u(y) dy \right] \quad , \quad (5.129)$$

son cantidades conservadas de la ecuación (5.127) si asumimos que el campo se anula en los bordes  $\pm a/2$ .

Una transformación de simetría para la ecuación (5.127) es la siguiente:

$$\eta(x) = u(x) \exp \left[ - \int_{-a/2}^x u \right] \quad . \quad (5.130)$$

Para comprobarlo debemos demostrar que

$$\mathcal{L}_f \eta = \int_{-a/2}^{a/2} dy \left( \frac{\delta f(x)}{\delta u(y)} \eta(y) - \frac{\delta \eta(x)}{\delta u(y)} f(y) \right) = 0 \quad .$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} dy \frac{\delta f(x)}{\delta u(y)} \eta(y) &= \int_{-a/2}^{a/2} dy \frac{\delta \eta(x)}{\delta u(y)} f(y) \\ &= \exp \left( \int_{-a/2}^x u(y) dy \right) (u_{xx} + uu_x - u^3) \quad . \end{aligned}$$

La deformación de  $H_1$  a lo largo de  $\eta$  es distinta de cero,

$$\begin{aligned} K_1 = \mathcal{L}_\eta H_1 &= \int dx \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} \eta(x) \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} dx u(x) \exp\left(\int_{-a/2}^x dw u(w)\right) \\ &= 1 - \exp(-H_1) . \end{aligned}$$

De igual modo, la deformación de  $H_2$  a lo largo de  $\eta$  es no nula,

$$\begin{aligned} K_2 = \mathcal{L}_\eta H_2 &= \int dx \frac{\delta H_2}{\delta u(x)} \eta(x) \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} dz \exp\left(\int_{-a/2}^z u(z)\right) \left[ \int_z^{a/2} dx \exp\left(\int_{-a/2}^x dw u(w)\right) \right] \\ &= H_2 - a . \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos construir formulaciones hamiltonianas para la ecuación de Burgers utilizando tanto  $H_1$  como  $H_2$  como hamiltoniano de la teoría. Las estructuras de Poisson apropiadas en cada caso son:

$$J_1(x, y) = \frac{f(x)\eta(y) - f(y)\eta(x)}{K_1} , \quad (5.131)$$

y

$$J_2(x, y) = \frac{f(x)\eta(y) - f(y)\eta(x)}{K_2} , \quad (5.132)$$

respectivamente.

### 5.8.5 Ecuación de Harry–Dym

La ecuación

$$u_t = \left(u^{-1/2}\right)_{xxx} \equiv f , \quad (5.133)$$

donde  $x \in [-a/2, a/2]$ , se conoce como la ecuación de Harry–Dym. Si asumimos condiciones de borde periódicas, las cantidades  $H_1$  y  $H_2$  dadas por

$$H_1 = \int u dx , \quad (5.134)$$

$$H_2 = \int u^{1/2} dx , \quad (5.135)$$

son cantidades conservadas. Aquí todas las integrales son evaluadas entre  $-a/2$  y  $a/2$ . Note que  $a$  puede ser infinito.

Definamos el campo vectorial

$$\xi(x) = Au - Bxu_x \quad , \quad (5.136)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes reales. Calculemos su derivada de Lie a lo largo de  $f$ ,

$$\mathcal{L}_f \xi = 3 \left( \frac{1}{2}A + B \right) (u^{-1/2})_{xxx} = 3 \left( \frac{1}{2}A + B \right) f \quad . \quad (5.137)$$

Por lo tanto

$$\eta = -3t \left( \frac{1}{2}A + B \right) f + \xi \quad (5.138)$$

es una transformación de simetría y puede ser usada con el fin de construir una formulación hamiltoniana de la ecuación (5.133) siempre que deforme no trivialmente a algún hamiltoniano.

Este es exactamente el caso de  $H_1$  y  $H_2$ . En efecto,

$$K_1 \equiv \mathcal{L}_\eta H_1 = (A + B)H_1 \quad , \quad (5.139)$$

$$K_2 \equiv \mathcal{L}_\eta H_2 = \left( \frac{A}{2} + B \right) H_2 \quad , \quad (5.140)$$

de donde obtenemos una familia de estructuras de Poisson asociadas a  $H_1$  y otra asociada a  $H_2$  dadas por

$$J_1(x, y) = \frac{(u^{-1/2})_{xxx} (Au(y) - Byu_y) - (u^{-1/2})_{yyy} (Au(x) - Bxu_x)}{K_1} \quad , \quad (5.141)$$

y

$$J_2(x, y) = \frac{(u^{-1/2})_{xxx} (Au(y) - Byu_y) - (u^{-1/2})_{yyy} (Au(x) - Bxu_x)}{K_2} \quad , \quad (5.142)$$

respectivamente. Por supuesto, debemos tener cuidado en elegir  $A$  y  $B$  de modo que  $K_1 \neq 0$  y  $K_2 \neq 0$ .

## Capítulo 6

# Formulaciones Hamiltonianas de Modelos Cosmológicos de Bianchi

Es bien sabido<sup>28</sup> que las ecuaciones de Einstein poseen una estructura variacional, dada por el lagrangiano de Hilbert-Einstein,

$$\mathcal{L}_{\text{H-E}} = \int d^4x \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} R \quad , \quad (6.1)$$

en que  $g_{\mu\nu}$  es la métrica y  $R$  el escalar de curvatura. A partir de éste se pueden encontrar formulaciones hamiltonianas de la relatividad general.

En ocasiones será interesante introducir simetrías al problema para simplificarlo. En particular, en cosmología cuántica, es usual el utilizar los llamados *minisuperespacios*, en que las métricas a utilizar se les ha impuesto suficiente simetría como para que dependan de un solo parámetro, digamos el tiempo. Esto cambia el carácter de “teoría de campos” de las ecuaciones, transformándola en una teoría con un número finito de grados de libertad.

El imponer la simetría sobre las ecuaciones de Einstein, obtenemos entonces ecuaciones de “Mecánica Clásica” usual. Su solución general será una solución particular de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, nada asegura que el imponer la simetría en el lagrangiano (6.1) su variación nos entregue las mismas ecuaciones. La solución de estas nuevas ecuaciones no será necesariamente solución de las ecuaciones de Einstein. De este modo, vemos como las ecuaciones que se obtienen al

imponer una simetría sobre las ecuaciones de Einstein son un nuevo sistema, del cual no necesariamente poseemos una estructura lagrangiana (ver figura 6.1).

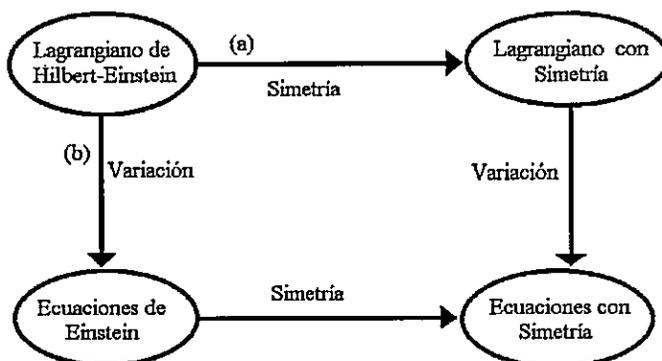


Figura 6.1. La figura muestra como los dos caminos para llegar desde el lagrangiano  $\mathcal{L}$  a las ecuaciones, imponiendo simetría, no es equivalente. El camino (b) es el consistente con las ecuaciones de Einstein.

Así vemos cómo, en algunos casos, el encontrar una formulación lagrangiana y/o hamiltoniana de las ecuaciones de Einstein con cierta simetría ya impuesta, puede ser un problema altamente no trivial. En estos casos no estaremos en condiciones, por ejemplo, de cuantizar el sistema, a menos que busquemos algún método alternativo para encontrar una formulación hamiltoniana de las ecuaciones.

## 6.1 Espacio-Tiempo Espacialmente Homogéneo

Se denomina una *isometría* a una transformación que deja la métrica  $g$  de cierta variedad invariante. Una isometría infinitesimal se describe a través de un vector  $\xi$ , llamado *vector de Killing*, que satisface

$$\mathcal{L}_\xi g = 0 \quad . \quad (6.2)$$

Supongamos un espacio-tiempo de 4 dimensiones, que posee 3 vectores de Killing  $\{\xi_i\}_{i=1}^3$  tipo espacio que forman el álgebra

$$[\xi_i, \xi_j] = D_{ij}^k \xi_k \quad . \quad (6.3)$$

Si estos campos vectoriales son linealmente independientes en cada punto del espacio-tiempo, diremos que el grupo es *simplemente transitivo*. Un espacio-tiempo con las características recién descritas recibe el nombre de *espacialmente homogéneo*.

Asociado al grupo de campos vectoriales  $\{\xi_i\}$  está un segundo grupo  $\{\chi_i\}$ , definido por el requerimiento:

$$[\chi_i, \xi_j] = 0, \quad \forall i, j. \quad (6.4)$$

Se puede demostrar que este grupo de campos vectoriales existe, y sus constantes de estructura son  $C^i_{jk} = -D^i_{jk}$ . Un tratamiento detallado de todo esto se encuentra en el libro de Ryan y Shepley<sup>29</sup>.

Lo importante en todo esto, es que la base dual de  $\{\chi_i\}$ , digamos  $\{\Omega^i\}$  será tal que

$$\mathcal{L}_{\xi_i} \Omega^j = 0, \quad \forall i, j, \quad (6.5)$$

y por lo tanto la métrica se puede escribir de la forma

$$g = g_{00} dt^2 + g_{ij} \Omega^i \Omega^j, \quad (6.6)$$

en que los coeficientes métricos  $g_{00}$  y  $g_{ij}$  dependen sólo de la coordenada  $t$ .

Los grupos de Lie tridimensionales fueron clasificados por Bianchi en 1897<sup>30</sup>. Cada uno de los nueve tipos representan las posibles cosmologías espacialmente homogéneas (al menos localmente, pues aquí no hemos tomado en cuenta consideraciones topológicas).

## 6.2 Cosmologías de Bianchi clase B

Los distintos grupos de Lie tridimensionales, clasificados por Bianchi, están a su vez agrupados en dos grandes clases: Clase A y Clase B. Esta clasificación se debe a Ellis y MacCallum<sup>31</sup>, quienes llaman clase A a todos aquellos grupos de Lie tridimensionales tales que sus constantes de estructura satisfacen

$$C^i_{ij} = 0, \quad \forall j. \quad (6.7)$$

De lo contrario, el grupo pertenecerá a la clase B.

Supongamos que imponemos a la métrica ser espacialmente homogénea. Es sabido<sup>32</sup>, que si el grupo de Bianchi en cuestión es clase A, las ecuaciones de Einstein resultantes son idénticas a las que se obtienen al variar el lagrangiano (6.1) con la simetría ya impuesta. Es decir, el diagrama de la figura 6.1 es conmutativo en este caso. Sin embargo para los grupos Bianchi clase B esto deja de ser cierto en general, y por lo tanto perdemos la estructura lagrangiana de las ecuaciones. Son estos últimos, por lo tanto, los casos de interés en nuestro estudio.

### 6.3 Cosmologías Bianchi III

Consideremos en primer término una métrica espacialmente homogénea, invariante bajo el grupo Bianchi III. Las constantes de estructura pueden ser elegidas como sigue<sup>29</sup>:

$$C^1_{13} = -C^1_{31} = 1 \quad , \quad (6.8)$$

$$C^i_{jk} = 0 \quad , \quad \text{otro caso.} \quad (6.9)$$

Definamos

$$g_{00} = -N^2 \quad , \quad (6.10)$$

y

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e^{\beta-\Omega+\sqrt{3}W} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\beta-\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta-\Omega-\sqrt{3}W} \end{pmatrix} \quad , \quad (6.11)$$

en que  $N$ ,  $\beta$ ,  $\Omega$  y  $W$  son funciones del tiempo solamente.

Las ecuaciones de Einstein en el vacío para esta métrica son, una vez que hemos despejando las aceleraciones,

$$\ddot{\beta} = \frac{2}{3}e^{-\beta+\Omega+\sqrt{3}W}N^2 + \frac{\dot{\beta}\dot{N}}{N} + \frac{3}{2}\dot{\beta}\dot{\Omega} \quad , \quad (6.12)$$

$$\ddot{\Omega} = -\frac{1}{3}e^{-\beta+\Omega+\sqrt{3}W}N^2 + \frac{3}{4}\dot{\beta}^2 + \frac{\dot{N}\dot{\Omega}}{N} + \frac{3}{4}\dot{\Omega}^2 + \frac{3}{4}\dot{W}^2 \quad , \quad (6.13)$$

$$\ddot{W} = \frac{\dot{W}}{2N}(2\dot{N} + 3N\dot{\Omega}) \quad , \quad (6.14)$$

junto con las constricciones:

$$\dot{W} = 0 \quad , \quad (6.15)$$

$$-4e^{-\beta+\Omega+\sqrt{3}W} N^2 - 3\dot{\beta}^2 + 3\dot{\Omega}^2 - 3\dot{W}^2 = 0 \quad . \quad (6.16)$$

Estas cinco ecuaciones difieren de las cuatro que se obtienen a partir del lagrangiano de Hilbert-Einstein. En efecto, insertando nuestra métrica en (6.1) obtenemos:

$$L = -2e^{-\beta+\Omega/2+\sqrt{3}W} N + \frac{3}{2N} e^{-3/2\Omega} (\dot{W}^2 + \dot{\beta}^2 - \dot{\Omega}^2) \quad . \quad (6.17)$$

Aquí hemos integrado sobre las variables espaciales y normalizado a 1. Además, hemos sumado una derivada total para eliminar del lagrangiano las segundas derivadas.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange de este lagrangiano son, despejando nuevamente las segundas derivadas,

$$\ddot{\beta} = \frac{2}{3} e^{-\beta+\Omega+\sqrt{3}W} N^2 + \frac{\dot{\beta}\dot{N}}{N} + \frac{3}{2} \dot{\beta}\dot{\Omega} \quad , \quad (6.18)$$

$$\ddot{\Omega} = -\frac{1}{3} e^{-\beta+\Omega+\sqrt{3}W} N^2 + \frac{3}{4} \dot{\beta}^2 + \frac{\dot{N}\dot{\Omega}}{N} + \frac{3}{4} \dot{\Omega}^2 + \frac{3}{4} \dot{W}^2 \quad , \quad (6.19)$$

$$\ddot{W} = -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\beta+\Omega+\sqrt{3}W} N^2 + \frac{\dot{N}\dot{W}}{N} + \frac{3}{2} \dot{\Omega}\dot{W} \quad , \quad (6.20)$$

además de la restricción (6.16), que se obtiene al variar respecto de  $N$ .

Se observa que las ecuaciones de Einstein difieren de las obtenidas a través del lagrangiano (6.17). En efecto, la ecuación (6.14) difiere de (6.20). Por otra parte, la restricción (6.15) no aparece en la formulación lagrangiana. Note, sin embargo, que si exigimos desde un principio, que  $W = 0$ , entonces las ecuaciones de Einstein son idénticas a las lagrangianas.

Vemos entonces, que al insertar la métrica Bianchi III en (6.1) no obtenemos una formulación lagrangiana de las ecuaciones de Einstein (6.12)-(6.16). Por lo tanto, no estamos en condiciones de utilizar los métodos canónicos para obtener una formulación hamiltoniana de las ecuaciones. Intentaremos encontrar entonces, una formulación hamiltoniana de las ecuaciones utilizando los métodos desarrollados en el capítulo anterior.

En primer término, debemos pasar nuestras 3 ecuaciones dinámicas (6.12)–(6.14), a primer orden. Con el objetivo de acercarnos lo más posible a la formulación hamiltoniana usual, definiremos

$$P_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = 3e^{-3\Omega/2} \frac{\dot{\beta}}{N} , \quad (6.21)$$

$$P_\Omega = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}} = -3e^{-3\Omega/2} \frac{\dot{\Omega}}{N} , \quad (6.22)$$

$$P_W = \frac{\partial L}{\partial \dot{W}} = 3e^{-3\Omega/2} \frac{\dot{W}}{N} . \quad (6.23)$$

Las ecuaciones de Einstein, en estas variables toman la forma

$$\dot{\beta} = \frac{N}{3} e^{3\Omega/2} P_\beta , \quad (6.24)$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{N}{3} e^{3\Omega/2} P_\Omega , \quad (6.25)$$

$$\dot{W} = \frac{N}{3} e^{3\Omega/2} P_W , \quad (6.26)$$

$$\dot{P}_\beta = 2Ne^{-\beta-\Omega/2+\sqrt{3}W} , \quad (6.27)$$

$$\dot{P}_\Omega = Ne^{-\beta-\Omega/2+\sqrt{3}W} - \frac{N}{4} e^{3\Omega/2} (P_\beta^2 + P_W^2 - P_\Omega^2) , \quad (6.28)$$

$$\dot{P}_W = 0 , \quad (6.29)$$

más las constricciones

$$P_W = 0 , \quad (6.30)$$

$$-12e^{-\beta+\Omega+\sqrt{3}W} - e^{3\Omega} (P_\beta^2 + P_W^2 - P_\Omega^2) = 0 . \quad (6.31)$$

La segunda restricción resulta ser proporcional al hamiltoniano canónico de la teoría lagrangiana (6.17). Es fácil ver que ambas constricciones son compatibles con la dinámica.

En las variables  $(\beta, \Omega, W, P_\beta, P_\Omega, P_W)$  nuestras ecuaciones dinámicas quedan

definidas por el campo vectorial

$$f = \begin{pmatrix} \frac{N}{3}e^{3\Omega/2}P_\beta \\ -\frac{N}{3}e^{3\Omega/2}P_\Omega \\ \frac{N}{3}e^{3\Omega/2}P_W \\ 2Ne^{-\beta-\Omega/2+\sqrt{3}W} \\ Ne^{-\beta-\Omega/2+\sqrt{3}W} - \frac{N}{4}e^{3\Omega/2}(P_\beta^2 + P_W^2 - P_\Omega^2) \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (6.32)$$

### 6.3.1 Formulación Hamiltoniana de Rango 2

Las ecuaciones (6.24)–(6.28) tienen las siguientes simetrías:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ P_\beta \\ P_\Omega \\ P_W \end{pmatrix} , \quad (6.33)$$

las cuales se han encontrado por inspección, investigando el efecto de las dilataciones y traslaciones de las coordenadas del espacio de fase. De este modo también encontramos el campo vectorial

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (6.34)$$

el cual satisface

$$[f, \eta_3] = f . \quad (6.35)$$

Por otra parte, tenemos la cantidad conservada

$$H_1 = P_W . \quad (6.36)$$

Ésta, tiene derivada de Lie nula a lo largo de  $\eta_1$  y  $\eta_3$ , pero,

$$\mathcal{L}_{\eta_2} H_1 = H_1 \quad . \quad (6.37)$$

De este modo, una formulación hamiltoniana de las ecuaciones (6.24)–(6.28) está dada por el hamiltoniano  $H_1$  y la matriz de Poisson

$$J_1^{ab} = \frac{1}{P_W} (f^a \eta_2^b - \eta_2^a f^b) \quad . \quad (6.38)$$

Si definimos

$$H_2 = \log P_W \quad , \quad (6.39)$$

entonces,

$$\mathcal{L}_{\eta_2} H_2 = 1 \quad , \quad (6.40)$$

y nuevamente  $H_2$  tiene derivada de Lie nula a lo largo de  $\eta_1$  y  $\eta_3$ . De este modo  $H_2$  y,

$$J_2^{ab} = f^a \eta_2^b - \eta_2^a f^b \quad , \quad (6.41)$$

conforman una segunda formulación hamiltoniana de nuestro sistema.

### 6.3.2 Formulación Hamiltoniana de Rango 4

Las dos formulaciones hamiltonianas recién discutidas, tienen una matriz de Poisson de rango 2 solamente. Sin embargo, dado que tenemos un álgebra de campo vectoriales de dimensión cuatro,  $\{\eta_i, f\}$ , podemos aspirar a una formulación hamiltoniana cuya matriz de Poisson sea de rango 4. En primer término, Nótese que los campos  $\eta_i$  conmutan entre si, y la única relación de conmutación no trivial es la dada por (6.35). Estamos entonces en un caso como el discutido en la sección 5.5. Nuestra tarea consiste por lo tanto en encontrar una cantidad conservada,  $H_3$ , tal que

$$\mathcal{L}_{\eta_1} H_3 = \mathcal{L}_{\eta_2} H_3 = 0 \quad , \quad (6.42)$$

$$\mathcal{L}_{\eta_3} H_3 = 1 \quad . \quad (6.43)$$

La única cantidad conservada evidente del problema,  $P_W$ , no servirá en este caso. Nótese sin embargo, que el hamiltoniano canónico proveniente de la teoría lagrangiana (6.17),

$$h = 2N e^{-\beta+\Omega/2+\sqrt{3}W} + \frac{N}{6} e^{3/2\Omega} (P_\beta^2 + P_W^2 - P_\Omega^2) \quad , \quad (6.44)$$

sin ser una cantidad conservada de las ecuaciones dinámicas (6.24)–(6.28), lo es sobre la superficie de constricciones, en efecto,

$$\dot{h} = \frac{h}{N} \dot{N} + \frac{2N^2}{\sqrt{3}} e^{-\beta+\Omega+\sqrt{3}W} P_w \quad . \quad (6.45)$$

Esto nos muestra que la restricción (6.31), equivalente a  $h = 0$ , era, tal como lo habíamos adelantado, compatible con la dinámica..

Considere ahora otra cantidad conservada sobre la superficie de constricciones,

$$H_3 = \log \left( \frac{h}{P_W} \right) \quad . \quad (6.46)$$

Se puede verificar que  $\dot{H}_3$  es proporcional a  $P_W$ , y satisface justamente (6.42) y (6.43). Por lo tanto, definiendo

$$J_3^{ab} = f^a \eta_3^b - \eta_3^a f^b + \eta_1^a \eta_2^b - \eta_2^a \eta_1^b \quad , \quad (6.47)$$

obtenemos la formulación hamiltoniana  $\{H_3, J_3^{ab}\}$ . Ésta da origen a un sistema de ecuaciones que es idéntico a (6.24)–(6.28) al hacer  $P_W \rightarrow 0$ . El hamiltoniano  $H_3$  tiene la desventaja de no estar definido justamente sobre la superficie de constricciones.

Nótese además que en esta formulación las constricciones  $h = 0$  y  $P_W = 0$  son de primera clase, esto es.

$$[h, P_W] = 0 \quad . \quad (6.48)$$

Considere ahora otra cantidad conservada sobre la superficie de constricciones,

$$k = -e^{\frac{1}{2}(\beta-\Omega-\sqrt{3}W)} + e^{\frac{3}{2}(\beta+\Omega-\sqrt{3}W)} \left( \frac{P_\beta + P_\Omega}{6} \right)^2 \quad . \quad (6.49)$$

Aquí también se tiene que  $\dot{k}$  es proporcional a  $P_W$ . Sea ahora,

$$H_4 = \log k \quad , \quad (6.50)$$

Este cumple con (6.42), pero no con (6.43). Esta última derivada de Lie nos da un  $-1$  en lugar de un  $1$ . Esto se arregla fácilmente redefiniendo  $\eta_3$  con signo negativo, o bien haciendo

$$J_4 = -J_3 \quad . \quad (6.51)$$

Tenemos entonces una nueva formulación hamiltoniana  $\{J_4^{ab}, H_4\}$ , cuyas ecuaciones son las requeridas en la superficie  $P_W = 0$ . Ya que la estructura de Poisson en esta formulación difiere de la anterior sólo en un signo, las constricciones  $h = 0$  y  $P_W = 0$  son nuevamente de primera clase. Esta formulación tiene la ventaja de que el hamiltoniano  $H_4$  está bien definido sobre la superficie de constricciones.

## 6.4 Más en torno a Bianchi III

De lo visto en la sección anterior, se desprende que el eliminar la variable  $W$ , haciendo  $W = 0$  desde un principio, hace que nos quedemos con un sistema lagrangiano en 2 dimensiones :  $\beta$  y  $\Omega$  (más la variable no dinámica  $N$ ). Una formulación de primer orden de este sistema tendrá, por lo tanto, cuatro variables dinámicas. Sin embargo, dada la restricción (6.31), sólo tres de éstas serán independientes. En esta sección veremos como es posible construir, utilizando técnicas no canónicas, una formulación hamiltoniana de dimensión tres para este sistema.

Consideremos ahora la métrica Bianchi III dada por (6.6) con

$$N = 1 \quad , \quad (6.52)$$

y

$$g_{ij} = \text{Diag}(B, e^{-\omega} B^{-2}, B). \quad (6.53)$$

Nótese que éste es sólo un cambio de variable de la métrica anterior con  $W = 0$  y  $N = 1$ , y se ha efectuado por razones de conveniencia en los cálculos que siguen.

Las ecuaciones de Einstein para la métrica en estas variables son:

$$4B + 3\dot{B}^2 + 2B\dot{B}\dot{\Omega} = 0 \quad , \quad (6.54)$$

$$-5\frac{\dot{B}^2}{B} - 3\dot{B}\dot{\Omega} - B\dot{\Omega}^2 + 2\ddot{B} + 2B\ddot{\Omega} = 0 \quad , \quad (6.55)$$

$$4B + \dot{B}^2 - 4B\ddot{B} = 0 \quad , \quad (6.56)$$

donde la primera ecuación, (6.54), es una constricción.

Insertando esta métrica en (6.1) obtenemos el lagrangiano

$$L = e^{-\Omega/2} \left( \frac{3\dot{B}^2}{2B^2} + \frac{\dot{B}\dot{\Omega}}{B} - \frac{2}{B} \right) , \quad (6.57)$$

en que, como antes, hemos normalizado a 1 el valor de las integrales espaciales y hemos sumado una derivada total para eliminar los términos con segundas derivadas. Las ecuaciones de Euler-Lagrange de este lagrangiano son, como esperábamos, exactamente las ecuaciones dinámicas (6.55) y (6.56). La constricción en este caso no puede ser obtenida, ya que eliminamos la variable  $N$ . La formulación hamiltoniana que se obtiene a partir de este lagrangiano está definida sobre un espacio de fase 4-dimensional, y tiene como hamiltoniano canónico

$$H_c = e^{\Omega/2} \left( p_B p_\Omega B - \frac{3}{2} p_\Omega^2 \right) + \frac{2e^{-\Omega/2}}{B} . \quad (6.58)$$

Nótese que en estas variables la constricción (6.54) es proporcional a  $H_c = 0$ .

La pregunta que surge es si será posible eliminar una de las variables utilizando la constricción, y quedarnos con un sistema 3-dimensional cuyo espacio de fase esté dotado de un hamiltoniano y una estructura de Poisson que den origen a las ecuaciones dinámicas. Esto no parece posible de lograr utilizando métodos estándar, debido principalmente a que  $H_c$ , siendo proporcional a la constricción, se anulará idénticamente en las nuevas variables.

Intentemos entonces construir una formulación hamiltoniana del sistema 3-dimensional utilizando nuestras técnicas.

Definamos en primer término las variables

$$p_1 = \dot{B} , \quad (6.59)$$

$$p_2 = \dot{\Omega} . \quad (6.60)$$

La constricción puede ser escrita,

$$2Bp_1p_2 + 4B + 3p_1^2 = 0 . \quad (6.61)$$

Resolviendo para  $p_2$ , las ecuaciones de Einstein toman la forma:

$$\dot{B} = p_1 \quad , \quad (6.62)$$

$$\dot{p}_1 = 1 + \frac{1}{4} \frac{p_1^2}{B} \quad , \quad (6.63)$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{4B + 3p_1^2}{2Bp_1} \quad . \quad (6.64)$$

Es fácil verificar que

$$L = e^{\Omega} B p_1^2 \quad (6.65)$$

es una cantidad conservada del sistema, En términos de esta variable las ecuaciones pueden reescribirse,

$$\dot{B} = p_1 \quad , \quad (6.66)$$

$$\dot{p}_1 = 1 + \frac{1}{4} \frac{p_1^2}{B} \quad ; \quad (6.67)$$

$$\dot{L} = 0 \quad . \quad (6.68)$$

Escribamos estas ecuaciones en las variables del espacio de fase  $x^i = (B, p_1, L)$ ,

$$\dot{x}^i = f^i(x) \quad , \quad (6.69)$$

donde

$$f^i = \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 + \frac{1}{4} \frac{p_1^2}{B} \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (6.70)$$

Notemos que la siguiente transformación:

$$B \longrightarrow \alpha B$$

$$p_1 \longrightarrow \sqrt{\alpha} p_1$$

$$t \longrightarrow \sqrt{\alpha} t \quad .$$

es una simetría de estas ecuaciones. Esto significa que el vector

$$\eta^i = \begin{pmatrix} B \\ p_1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.71)$$

es tal que,

$$[f, \eta] = \frac{1}{2}f \quad . \quad (6.72)$$

Para obtener una teoría hamiltoniana del sistema, necesitamos además una cantidad conservada. Desafortunadamente la que ya tenemos,  $L$ , tiene derivada de Lie nula a lo largo de  $\eta$ , y por lo tanto no puede ser usada como nuestro hamiltoniano. Sin embargo podemos construir una segunda cantidad conservada. Basta que tomemos otra simetría del sistema,

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (6.73)$$

Nótese que ésta conmuta también con  $\eta$ . Si ahora tomamos el dual de la base  $\{f, \eta, \chi\}$ , digamos,  $\{\omega_f, \omega_\eta, \omega_\chi\}$ , entonces de (6.72) tenemos que

$$d\omega_\eta = 0 \quad .$$

esto significa que  $\omega_\eta = dH_1$ , para algún  $H_1$  que podremos obtener integrando. Haciendo esto se obtiene

$$H_1 = \log \left( \frac{(4B - p_1^2)^2}{B} \right) \quad . \quad (6.74)$$

Por supuesto, este  $H_1$  es tal que  $\mathcal{L}_f H_1 = 0$  y  $\mathcal{L}_\eta H_1 = 1$ . Por lo tanto las ecuaciones (6.69) pueden ser escritas en forma hamiltoniana,

$$\dot{x}^i = J_1^{ij} \frac{\partial H_1}{\partial x^j} \quad . \quad (6.75)$$

La estructura de Poisson  $J_1^{ij}$  está dada por

$$J_1^{ij} = f^i \eta^j - f^j \eta^i = \begin{pmatrix} 0 & -(B - \frac{1}{4}p_1^2) & 0 \\ (B - \frac{1}{4}p_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (6.76)$$

Podemos encontrar otras formulaciones hamiltonianas más simples para esta teoría. En efecto, podemos tomar como hamiltoniano,

$$H_2 = \frac{9}{8} \left( \frac{p_1^2}{4\sqrt{B}} - \sqrt{B} \right) \quad . \quad (6.77)$$

Es claro que  $H_2$ , siendo función de  $H_1$  es también una cantidad conservada. Por otra parte, su derivada de Lie a lo largo de  $\eta$  es

$$K = \mathcal{L}_\eta H_2 = \frac{1}{2} H_2 \quad .$$

La estructura de Poisson asociada a este nuevo hamiltoniano será entonces

$$J_2^{ij} = \frac{1}{K} (f^i \eta^j - f^j \eta^i) = \frac{16}{9} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{B} & 0 \\ -\sqrt{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (6.78)$$

Ahora es fácil encontrar una transformación de coordenadas que deje a esta matriz en su forma canónica. En efecto, tomemos

$$Q = B^{3/4} \quad , \quad (6.79)$$

$$P = \frac{3}{4} B^{-1/4} p_1 \quad . \quad (6.80)$$

Esta transformación es tal que los paréntesis de Poisson entre las nuevas variables son:

$$[Q, P] = 1 \quad , \quad [Q, L] = [P, L] = 0 \quad . \quad (6.81)$$

El nuevo hamiltoniano es de la misma forma que el correspondiente a una partícula en una dimensión bajo la acción de un potencial  $V(Q)$ ,

$$H_c(Q, P) = \frac{1}{2} P^2 + V(Q) \quad , \quad (6.82)$$

donde

$$V(Q) = -\frac{9}{8} Q^{2/3} \quad . \quad (6.83)$$

En término de estas variables,  $L$  se escribe:

$$L = \frac{16}{9} e^\Omega P^2 Q^2 \quad : \quad (6.84)$$

La métrica toma la forma:

$$g_{ij} = \text{Diag}(Q^{4/3}, e^{-\Omega} Q^{-8/3}, Q^{4/3}) \quad (6.85)$$

$$= \text{Diag}(Q^{4/3}, \frac{16}{9L} P^2 Q^{-2/3}, Q^{4/3}) \quad . \quad (6.86)$$

Hemos obtenido entonces una formulación hamiltoniana canónica de las tres variables independientes del sistema  $Q$ ,  $P$  y  $L$ . Esto, partiendo de las ecuaciones de movimiento y sin pasar por formulación lagrangiana alguna.

# Conclusiones

Los resultados obtenidos en esta tesis nos muestran que el requerir formulaciones canónicas de sistemas de ecuaciones puede ser una exigencia demasiado restrictiva, y que las formulaciones no canónicas pueden no sólo ser muy útiles, sino que además pueden ser las más naturales.

En el capítulo 1 vimos que el disponer de formulaciones lagrangianas no canónicas de primer orden podía ser de gran utilidad para integrar las ecuaciones. Esto a través de una generalización del teorema de Liouville. Como vimos más tarde en el capítulo 5, podemos encontrarnos con ecuaciones a las que podemos construir una formulación lagrangiana de primer orden no canónica, y, utilizando este teorema, integrarlas completamente.

En los capítulos 3 y 4 se investigó sobre la necesidad de disponer de formulaciones hamiltonianas canónicas para estudiar la mecánica estadística de un sistema dado. Se identificaron los puntos en que esta necesidad se hacía evidente y se propusieron algunos métodos para atacar el problema en ausencia de estructuras canónicas, e incluso en completa ausencia de estructuras hamiltonianas o lagrangianas. La mecánica estadística resultante tiene la desventaja de no estar unívocamente definida. Por el momento esta no univocidad se ha tratado utilizando algunas consideraciones físicas generales. En el futuro se podrían realizar experimentos numéricos con el fin de encontrar criterios más restrictivos sobre las soluciones.

En el capítulo 5 mostramos algunas técnicas que nos permiten construir formulaciones lagrangianas y/o hamiltonianas (en general no canónicas) a partir de las ecuaciones de movimiento. Éstas requieren del conocimiento de algún número de campos vectoriales que formen un álgebra de Lie con el flujo  $f^a$  que definen las

ecuaciones de movimiento. Se estudiaron algunos ejemplos simples, entre los que se cuentan sistemas bidimensionales y ecuaciones de campos. Los primeros nos permitieron integrar algunas ecuaciones diferenciales de segundo orden. Los últimos nos mostraron cómo algunas ecuaciones, como la ecuación de transmisión del calor, de la cual se dice no posee formulación hamiltoniana alguna, puede formularse en el contexto hamiltoniano.

Finalmente, en el capítulo 6, se construyeron varias formulaciones hamiltonianas no canónicas para las ecuaciones de modelos cosmológicos Bianchi III. De éstos no se conocía anteriormente formulación hamiltoniana alguna. La dificultad de construir dicha formulación reside en el hecho de que se trata de un modelo de Bianchi clase B. El próximo paso es investigar las propiedades cuánticas de estos minisuperespacios.

## Apéndice A

En este apéndice mostraremos que incluso si el lagrangiano original no es regular, las ecuaciones de primer orden (1.47) y (1.48) son equivalentes a la ecuación de segundo orden (1.44). Comencemos precisando que entendemos por “equivalentes”. Es claro que cualquier solución  $q^i(t)$  de (1.44) es solución de (1.47) y (1.48) si definimos  $u^i(t) = \dot{q}^i(t)$ . Lo que no es tan evidente es que para toda solución  $(q(t), u(t))$  de las ecuaciones de primer orden  $q(t)$  sea una solución de (1.44) si el sistema lagrangiano es singular. Esto se debe a que al satisfacerse (1.49),  $u^i = \dot{q}^i$  no es la única solución de (1.48), en efecto, si  $v_\alpha^i(q, u)$  son todos los vectores linealmente independientes tales que

$$\frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial u^j} v_\alpha^j = 0 \quad , \quad (6.87)$$

entonces la solución más general para  $\dot{q}^i$  es

$$\dot{q}^i = u^i + \lambda^\alpha v_\alpha^i \quad , \quad (6.88)$$

con  $\lambda^\alpha$  funciones arbitrarias de  $u$ ,  $q$  y el tiempo.

No es inmediato garantizar que dados los  $\lambda^\alpha$ , despejando  $u$  en (6.88) respecto de  $q$  y  $\dot{q}$  y sustituyendo esto en (1.47), obtengamos una ecuación diferencial equivalente a (1.44). Si esto es así diremos que nuestro sistema de segundo orden es “equivalente” al de primer orden.

Para demostrar esta equivalencia consideremos conocida una solución de (1.48),

$$\dot{q}^i = V^i(q, u) \quad . \quad (6.89)$$

Supondremos además que  $\det \partial V^i / \partial u^j$  es no nulo, por lo que localmente al menos,

podemos despejar  $u^i$ ,

$$u^i = U^i(q, \dot{q}) \quad , \quad (6.90)$$

Finalmente supondremos que esta solución particular es tal que reemplazándola en (1.47) da origen a la ecuación (1.44).

Sabemos que al menos existe una solución que satisface estas propiedades, a saber,

$$\dot{q}^i = V^i(q, u) = u^i \quad . \quad (6.91)$$

Demostraremos ahora que dada una solución cualquiera con las propiedades deseadas, si nos movemos infinitesimalmente hacia cualquier otra solución de (1.48), ésta también tendrá dichas propiedades. Tendremos entonces una demostración por inducción.

Consideremos un conjunto de funciones arbitrarias infinitesimalmente pequeñas,  $\mu^\alpha$ , del tiempo,  $q$  y  $\dot{q}$ . Evidentemente dada una solución,  $u^i = U^i(q, \dot{q})$ , de (1.48)

$$u^i = \bar{U}^i(q, \dot{q}) = U^i(q, \dot{q}) + \mu^\alpha(q, \dot{q}, t)v_\alpha^i(q, U(q, \dot{q}), t) \quad , \quad (6.92)$$

será, a primer orden en  $\mu$  una nueva solución, y abarcará todas las posibles soluciones cercanas a  $U$ . Sustituyendo  $u^i = \bar{U}^i$  en (1.47) obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial u^j}(q, U + \mu v) \left( \dot{U}^j + \dot{\mu}^\alpha v_\alpha^j(q, U(q, \dot{q}), t) + \mu^\alpha \frac{d}{dt} v_\alpha^j(q, U(q, \dot{q}), t) \right) + \\ & \quad + \frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial q^j}(q, U + \mu v) \dot{q}^j - \frac{\partial L'}{\partial q^i}(q, U + \mu v) - \\ & \quad - \frac{\partial^2 L'}{\partial q^i \partial u^j}(q, U + \mu v) (\dot{q}^j - U^j - \mu^\alpha v_\alpha^j(q, U(q, \dot{q}), t)) = 0 \quad . \quad (6.93) \end{aligned}$$

Desarrollando hasta primer orden en  $\mu^\alpha$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial u^j}(q, U) \dot{U}^j + \frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial q^j}(q, U) \dot{q}^j - \frac{\partial L'}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial u^j}(q, U) (\dot{q}^j - U^j) \right) + \\ & \quad + \frac{\partial^3 L'}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} \mu^\alpha v_\alpha^k \dot{U}^j + \frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial u^j}(q, U) \dot{\mu}^\alpha v_\alpha^j + \frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial u^j}(q, U) \mu^\alpha \dot{v}_\alpha^j + \\ & \quad + \frac{\partial^3 L'}{\partial u^i \partial q^j \partial u^k}(q, U) \mu^\alpha v_\alpha^k \dot{q}^j - \frac{\partial^2 L'}{\partial q^i \partial u^j}(q, U) \mu^\alpha v_\alpha^j + \\ & \quad + \frac{\partial^2 L'}{\partial q^i \partial u^j}(q, U) \mu^\alpha v_\alpha^j - \frac{\partial^3 L'}{\partial q^i \partial u^j \partial u^k}(q, U) \mu^\alpha v_\alpha^k (\dot{q}^j - U^j) = 0 \quad . \quad (6.94) \end{aligned}$$

El término entre paréntesis igualado a cero es la ecuación que obtendríamos al sustituir  $u^i = U^i$  en la ecuación (1.47), y es por hipótesis equivalente a (1.44). Por lo tanto, el demostrar que el resto de los términos en (6.94) es cero. Y en efecto, usando (6.87), estos términos son iguales a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 L'}{\partial u^i \partial u^j} \mu^\alpha v_\alpha^j \right) - \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{\partial^2 L'}{\partial u^j \partial u^k} (q, U) \mu^\alpha v_\alpha^k (\dot{q}^j - U^j) \right) - \frac{\partial^2 L'}{\partial u^j \partial u^k} (q, U) \mu^\alpha \frac{\partial v_\alpha^k}{\partial q^i} (\dot{q}^j - U^j) = 0 \quad ,$$

en donde el último término se ha anulado como consecuencia de (1.48), ya que por hipótesis,  $u^i = U^i$  es solución de ésta.

# Bibliografía

- [1] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison–Wesley, Reading, 1980).
- [2] L.D. Landau y E.M. Lifschitz, *Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1976).
- [3] E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (Cambridge University, Cambridge, 1937).
- [4] E.C.G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective* (Wiley, New York, 1974).
- [5] P.J. Morrison, “Hamiltonian Description of the Ideal Fluid”, (to appear in the Proceedings of the 1993 Summer Study Program in Geophysical Fluid Dynamics, Woods Hole Oceanographic Institution Report, WHOI 94, (1994)).
- [6] T.G. Shepherd, *Adv. Geophys.* **32**, 287 (1990).
- [7] R. Salmon, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20**, 225 (1988).
- [8] C. Rebbi and G. Soliani, *Solitons and Particles* (World Scientific, Singapore, 1984).
- [9] N.J.M. Woodhouse, *Geometric Quantization*, (Oxford University Press, Oxford, UK, 1992).
- [10] F.J. Dyson, *Am. J. Phys.* **58**, 209 (1990).
- [11] S.A. Hojman and L.C. Shepley, *J. Math Phys.* **32**, 142 (1991).

- [12] A. Corichi y M.P. Ryan Jr. "Quantization of Nonstandard Hamiltonian Systems", Penn-State University Preprint, gr-qc/9508037.
- [13] S.A. Hojman, D. Núñez, and M.P. Ryan, Jr., Phys. Rev. D **45**, 3523 (1992).
- [14] M.P. Ryan Jr. and S. Hojman, "Directions in General Relativity", Proceedings of the 1993 International Symposium, Maryland, Papers in Honor of Charles Misner, Cambridge University Press, edited by B.L. Hu, M.P. Ryan Jr. and C.V. Vishveshwara, **1**, 300 (1993).
- [15] A. Gomberoff y S.A. Hojman, " Looking at Statistical Mechanics in th Absence of Canonical Structures ". Enviado a J. Math. Phys.
- [16] P.J. Morrison and J.M. Greene, Phys. Rev. Lett. **45**, 790 (1980), **48**, 569 (1982).
- [17] R.G. Littlejohn, A.I.P. Conf. Proc. **28**, 47 (1982).
- [18] S.A. Hojman, "The Construction of a Poisson Structure out of a Symmetry and a Conservation Law of a Dynamical System". Por aparecer en J. Phys. A: Math. Gen.; hep-th/9406158.
- [19] S.A. Hojman "Construction of Hamiltonian Structures for Dynamical Systems from Scratch" (to appear in "Proceedings of the Fifth International Symposium on Instabilities and Non-Equilibrium Structures", edited by E. Tirapegui.
- [20] Andrés Gomberoff and Sergio Hojman *Non-standard Construction of Hamiltonian Structures*. Enviado a J. Math. Phys.
- [21] P. Havas, Acta Phys. Austriaca **38**, 145 (1973).
- [22] S. Hojman and L. F. Urrutia, J. Math. Phys. **22**, 1896 (1981).
- [23] V. I. Arnold, Usp. Mat. Nauk. **24**, 225 (1969).
- [24] Y. Choquet-Bruhat and C. DeWitt Morette, *Analysis, Manifolds and Physics* (North-Holland, 1982)

- [25] E. Noether, Nach. Kon. Gess. Wiss. Gottingen Math. Phys. Kl. 235, 1918.
- [26] S. Hojman and H. Harleston, Bol. Soc. Mex. Fís. **6**, 202 (1980); J. Math. Phys. **22** 1414 (1981).
- [27] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Willey & Sons, 1987).
- [28] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1975).
- [29] Michael P. Ryan, Jr. and Lawrence C. Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies*(Princeton University Press, 1975)
- [30] L. Bianchi, Mem. Soc. It. Della. Sc. (Dei XL)(3) **11**, 267 (1897)
- [31] G.F.R. Ellis and M.A.H. MacCallum, Comm. Math. Phys. **12**, 108 (1969)
- [32] M.A.H. MacCallum and A.H. Taub, Comm. Math. Phys. **25**, 173 (1972).