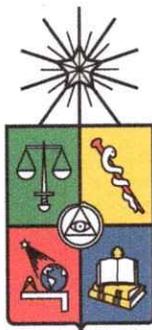


UCH-FC  
DOCF  
D671  
C. 1



# Evolución temporal de la complejidad en plasmas magnetizados

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias con mención en Física  
Facultad de Ciencias

por

**Macarena Paulina Domínguez Valverde**

Enero, 2015

Director de Tesis: **Dr. Víctor Hugo Muñoz Gálvez**

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN  
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por la candidata

**Macarena Paulina Domínguez Valverde**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 22 de Diciembre de 2014.

**Director de Tesis**

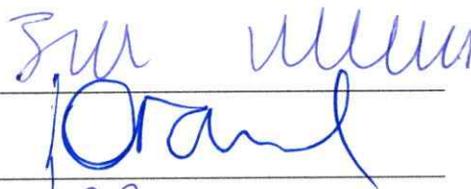
Dr. Víctor Muñoz Gálvez



---

**Comisión de Evaluación de la Tesis**

Dr. Juan Alejandro Valdivia



---

Dr. Jaime Araneda



---

Dr. Mario Riquelme

## BIOGRAFÍA



El 13 de abril de 1987, a diferencia de muchos de ustedes, nací junto a una hermana igualita a mí, Constanza. Siendo el primer indicio de la compañía que tendría gracias a la enorme familia a la que pertenezco. En ese entonces, además de mis padres Francis y Andrés, en mi familia existían: Cecilia, Daniela, Ángeles y Gaspar, mis hermanos. Pronto aprendí que la familia no son sólo quienes comparten un lazo sanguíneo, sino todos quienes se convierten en hermana, primo, tío, tía, abuelo, sin tener ninguna obligación. Ahora somos siete hermanos, he tenido seis abuelos, dos mamás, un papá, varios tíos, primos y siete sobrinos maravillosos.

Estudí en el Colegio Universitario el Salvador. Creo que en primero medio ya tenía claro que estudiaría física. La razón era simple, la física era linda, y seguro había miles de cosas igual o más hermosas que debía conocer. Entonces, sin pensar mucho, el año 2006 ingresé a estudiar Licenciatura en Física en la Universidad de Chile. Ahí rápidamente descubrí que la física era mucho más que disfrutar del romanticismo del área. Aprendí que había que trabajar mucho, que la genialidad no era lo más importante, que la constancia era fundamental, y en mi caso, que si hacía de esto una carrera solitaria, fácilmente podía caer en más amarguras que momentos dulces. Hice grandes amigos, conocí personas increíbles, y mi familia siguió creciendo.

Esta primera exploración en física no era suficiente. Para mí era claro que debía seguir aquí. El año 2010 ingresé al Doctorado. Estos años han tenido altos y bajos, pero sin duda ha sido un proceso de gran crecimiento. La magia que envuelve la investigación, hace que a veces crea que más que intentar ser un aporte, estoy sólo disfrutando el cariño que siento por esto. Espero que esta tesis refleje aquello.

## AGRADECIMIENTOS

Esta tesis no podría haber llegado a este punto, sin la ayuda y el apoyo de muchas personas que hicieron este camino mucho más fácil.

Quiero agradecer profundamente a mi familia. A mis padres, que con su ejemplo, me enseñaron que en la vida hay que hacer lo que a uno lo hace feliz sin importar los obstáculos que se presenten. A mi mamá, por su amor y su apoyo incondicional. A mi papá, por sus palabras sabias y abrazos apretados. Gracias a ambos por regalarme las mejores hermanas y un gran hermano. A ellos, gracias por querer como sólo los hermanos son capaces. Especialmente, quiero agradecer a Cecilia, que con su perseverancia y fuerza, me enseñó que los imposibles existen en la medida que una pierda la confianza en sí misma. Gracias por ser mi profesora, por ser mi compañera en viajes y aventuras, por sentirte tan cerca aunque existan miles de kilómetros de distancia. A Daniela, por todas las onces en su casa, en la que escuchó pacientemente todos los pormenores de este proceso, y que con su ternura, hizo que el día siguiente fuese mejor. A Constanza, por ser mi eterna compañera y amiga. Gracias por tu incondicionalidad. Por apoyarme en cada momento, por escucharme, por creer en mí siempre, por querer de esa manera que sólo tú haces. Sin duda, tú haces mi vida más fácil.

Quiero agradecer especialmente a Daniel. Gracias amor por tu ternura y preocupación. Por tu humor y tu compañía. Por decir las palabras necesarias en los momentos oportunos. Sin duda junto a ti, este último año ha tenido otro sabor.

También quiero agradecer a mi mami Amalia, a Katty, a Raúl, a Olaya, a mi tío Mario, a Rodrigo, a Alejandro y a Patricio, que gratuitamente hicieron crecer mi familia. Gracias por ser parte de grandes pasos de mi vida. A mi abuelita, por ser una de mis hinchas número uno y mostrarme que la perseverancia es fundamental.

A mis sobrinos y sobrinas, Valentina, Antonia, Camilo, Borja, Cristóbal, Catalina y Emilio, que con sus risas, bromas, ternura y juegos, hacen que la vida tenga otro color. A mi tío Eduardo, gracias por tus largas conversaciones en los horarios más insólitos. Sin duda, tu compañía ha sido fundamental.

De manera especial, quiero agradecer a mi tío Alfredo por su cariño y su preocupación. Gracias a tu energía pude superar momentos difíciles, y mejor aun, pude sentirme abrazada sin tocarte. Estés donde estés, te mando un beso y una copia de este trabajo, que seguro te gustaría saber en qué terminó. A mi tía Gladys y a mi primo Felipe, que siempre han estado conmigo y me han entregado esa sonrisa llena de amor.

A mi tutor, Víctor Muñoz, muchísimas gracias por creer en mi trabajo y confiar en mí. Por apoyarme en cada nueva idea y nuevo rumbo que tomaba este proyecto. Por sus sabios consejos durante todos estos años. Creo que ha sido un gran formador y guía, definitivamente ha sido un privilegio poder trabajar con usted. También quiero agradecer al profesor Juan Alejandro Valdivia por ser parte de mi formación y al profesor Rodrigo Ferrer por sus sabios consejos en momentos claves. A la comisión de esta tesis, por querer ser parte de ella. Gracias por sus sugerencias y comentarios.

Un especial agradecimiento al profesor Dr. Vincenzo Carbone y al grupo de Plasmas Astrofísicos de la Universidad de Calabria. Gracias por su hospitalidad y por sus enseñanzas durante mi pasantía. Definitivamente éstas fueron claves para el desarrollo de esta tesis.

Además, quiero agradecer a todos mis amigos y amigas que me han apoyado de alguna u otra manera durante este proceso. Un abrazo especial para mis amigos del colegio y de la vida, Pata, Chica, Carlos, Camilo, Meme, Bernardita y Pola. A los amigos que hice en la licenciatura, Carola G., Carola C., Sebastián, Diego, Pi-

ter, Amaranta, Gabriela y Lucco. A mis amigos y compañeros de oficina durante todos estos años, Pablo Moya, Denisse Pastén, Max Ramírez, Alejandro Varas, Variña Bernales, Macarena Muñoz, Roberto Navarro, Felipe Valencia, Rafael González, Francisco Castillo, Valentina Ortiz, Natalia Gallo, José Mella, Rodrigo López y María José Tapia, muchísimas gracias por compartir tantos momentos inolvidables, por su humor, por regalarme parte de su tiempo, y soportar mi genio en los momentos difíciles. Definitivamente ustedes hicieron que el tiempo pasara más rápido. También quisiera agradecer a Vicky y a Normita. Gracias a ambas por sus conversaciones y apoyo.

Para finalizar agradezco a todas las fuentes de financiamiento que han permitido mi permanencia en el programa de doctorado. A CONICYT por la Beca Nacional de Doctorado No. 21100406, la beca de estadías cortas en el extranjero No. 81120541, y al sistema de BecasChile por la beca de pasantía doctoral No. 75130047.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Medio ambiente Sol-Tierra</b>	<b>9</b>
2.1. Tiempo y clima espacial . . . . .	11
2.2. El Sol . . . . .	12
2.3. Viento solar y magnetósfera terrestre . . . . .	16
<b>3. Fractalidad</b>	<b>23</b>
3.1. Dimensión fractal . . . . .	24
3.2. Dimensión de <i>box-counting</i> para una serie de tiempo . . . . .	28
<b>4. Evolución temporal de la fractalidad: Análisis <i>Dst</i></b>	<b>35</b>
4.1. Análisis de estados calmos y estados tormenta . . . . .	36
4.2. Análisis de ventana de ancho variable en torno a una tormenta . . . . .	39
4.3. Ventana móvil a lo largo de una tormenta . . . . .	44
4.4. Análisis del ciclo solar 23 . . . . .	50
4.5. Resumen . . . . .	51
<b>5. Evolución temporal de la fractalidad: Magnetogramas</b>	<b>54</b>
5.1. Análisis de años de alta actividad solar . . . . .	55

	VII
5.2. Análisis del ciclo solar 23 . . . . .	61
5.3. Resumen . . . . .	64
<b>6. Modelo de capas (<i>Shell Model</i>) para turbulencia MHD</b>	<b>66</b>
6.1. Turbulencia MHD y <i>Shell models</i> . . . . .	67
6.2. GOY Shell Model . . . . .	74
<b>7. Características fractales de la actividad geomagnética a través de un modelo de capas MHD</b>	<b>78</b>
7.1. Energía magnética disipada y dimensión de <i>box-counting</i> . . . . .	80
7.2. Análisis de estados calmos y de tormenta . . . . .	83
7.3. Análisis de ventana de ancho variable en torno a una tormenta . . . . .	91
7.4. Análisis de ventanas móviles a lo largo de una tormenta . . . . .	93
7.5. Análisis de ventanas móviles a lo largo de toda la simulación . . . . .	97
7.5.1. Caso I: $\nu = \eta$ ( $P_m = 1$ ) . . . . .	98
7.5.2. Caso II: $\nu \neq \eta$ ( $P_m \neq 1$ ) . . . . .	100
7.6. Resumen . . . . .	101
<b>8. Evolución temporal de la fractalidad: viento solar y <i>shell model</i></b>	<b>105</b>
8.1. Análisis de datos del viento solar . . . . .	106
8.1.1. Análisis de años de alta actividad . . . . .	107
8.1.2. Análisis del ciclo solar 23 . . . . .	111
8.2. <i>Shell Model</i> y viento solar . . . . .	113
8.3. Resumen . . . . .	117
<b>9. Conclusiones</b>	<b>119</b>

	VIII
A. Prueba de significancia estadística: <i>Student's t-test</i>	129
B. Análisis tormentas pequeñas	132
B.1. Ventana de ancho variable en torno a una tormenta pequeña . . . . .	133
B.2. Ventanas móviles a lo largo de una tormenta pequeña . . . . .	134
C. Análisis de datos del viento solar	137

## RESUMEN

Estudios recientes muestran que plasmas magnetizados como la fotosfera solar, el viento solar y la magnetósfera terrestre, exhiben características fractales y multifractales. Tales sistemas presentan una compleja dinámica por sí mismos y por la compleja interacción entre ellos. Por otro lado, ha habido grandes avances en la comprensión teórica y modelización computacional de dichos sistemas. Sin embargo, la compleja conexión entre ellos y la no linealidad presente, hacen que siga siendo analítica y computacionalmente prohibitivo analizar regiones espaciales extendidas a partir de las ecuaciones fundamentales de física de plasmas. Las características fractales ofrecen una atractiva alternativa al estudio de estos sistemas, no a partir de sus interacciones microscópicas detalladas, sino a partir de sus propiedades estadísticas.

En esta tesis, realizando un análisis estadístico de las propiedades fractales presentes, se caracteriza la ocurrencia de eventos como tormentas geomagnéticas y llamaradas solares mediante una dimensión fractal. Esto se realiza por medio del análisis de datos en la magnetósfera terrestre (índice *Dst*) y la fotosfera solar (magnetogramas fotosféricos), y a través de un modelo teórico/computacional que describe las principales características estadísticas del sistema en estudio (*MHD Shell Model*).

Se muestra que la dimensión fractal disminuye durante llamaradas solares y tormentas geomagnéticas, resultado que es robusto para distintos períodos de actividad solar y en distintas escalas de tiempo. Además, se ha encontrado un rango de parámetros del modelo, en el cual se reproducen cualitativamente los resultados encontrados a partir del análisis de datos, mostrando que el *shell model* es capaz de describir características fractales de la actividad geomagnética. Los resultados muestran que la dimensión fractal es un parámetro interesante de analizar, sugiriendo que podría ser de relevancia para la caracterización o incluso la predicción de dichos eventos.

## ABSTRACT

Recent studies show that magnetized plasmas, such as the solar photosphere, solar wind, and Earth's magnetosphere, exhibit fractal and multifractal features. Such systems present a complex dynamics by themselves and because of the complex interaction between them. On the other hand, there have been important advances in the theoretical understanding and computational modeling of such systems. However, the complex connection between them and the nonlinearity present, make analytically and computationally prohibitive to analyze extended spatial regions with the fundamental equations of plasma physics. The fractal features provide an interesting option to study these systems, not from the microscopic interactions point of view, but by analyzing their statistical properties.

In this thesis, by performing a statistical analysis of the fractal properties, the occurrence of events such as geomagnetic storms and solar flares is characterized by means of a fractal dimension. This is done by analyzing magnetosphere data (*Dst* index) and solar photosphere data (photospheric magnetograms) and through a theoretical/computational model that describes the main statistical features of the system in study (MHD Shell Model).

We show that the fractal dimension decreases during solar flares and geomagnetic storms, result that is robust for different periods of solar activity and for different time scales. Also, we have found a range of parameters of the model, in which the results obtained with the data analysis are qualitatively reproduced, showing that the shell model can describe fractal features of the geomagnetic activity. The results show that the fractal dimension is an interesting parameter to analyze, suggesting that the model could be relevant to the characterization or even the prediction of such events.

# Capítulo 1

## Introducción

La Física de Plasmas ofrece grandes desafíos en su estudio debido al carácter fuertemente no lineal de las interacciones presentes. Un ejemplo de ello es el sistema Sol-Tierra, en que fenómenos tales como ausencia de equilibrio termodinámico, turbulencia, reconexión, etc., dan origen a una dinámica muy rica, pero también difícil de comprender en su totalidad. Muchos avances se han realizado en los campos de Física Solar y Espacial, pero es creciente la necesidad de entender este sistema de un modo global.

La riqueza en cuanto a fenómenos físicos que permite el estudio de la física de plasmas, hace de éste un campo de gran interés. No deja de ser sorprendente que más del 99% de la materia visible del universo se encuentra en estado de plasma, incluyendo sistemas tales como el viento solar, la ionósfera, la magnetósfera terrestre y la corona solar, así como muchos otros sistemas de interés experimental, astrofísico y aplicado [1].

El amplio rango de temperaturas, densidades y masas de partículas que pueden presentar los plasmas, así como también el hecho de que las partículas están sometidas

das a campos electromagnéticos autoconsistentes con la propia distribución de cargas y corrientes, hacen de éste un sistema altamente no lineal y por ende un problema complejo de estudiar.

Existen varias maneras de estudiar las interacciones a pequeña y gran escala en estos sistemas. Una de las técnicas convencionales es estudiar la relación onda-partícula mediante las ecuaciones fundamentales que rigen el sistema. A través de esta técnica, se han generado importantes avances en la comprensión teórica y modelización computacional de plasmas de laboratorio, espaciales y solares. Sin embargo, sigue siendo computacionalmente prohibitivo utilizar las ecuaciones fundamentales de la física de plasmas para describir regiones espaciales extendidas que contienen flujos magnéticos que evolucionan de modo altamente no trivial.

Por otro lado, el análisis estadístico de propiedades físicas relevantes a grandes escalas ha permitido extraer información útil respecto a la dinámica del sistema. De hecho, uno de los avances importantes en la descripción de estos sistemas, es la observación de que fenómenos tales como turbulencia, tormentas solares y magnéticas, descargas, etc., no son realmente estructuras desordenadas, sino que pueden ser entendidos y descritos en términos de modelos matemáticos sencillos.

Estudios recientes muestran que muchos de los sistemas mencionados anteriormente presentan características de sistemas complejos. Se entiende como sistemas complejos a sistemas compuestos por muchos subsistemas interactuando entre sí y tales que su interacción microscópica da origen a propiedades macroscópicas emergentes no triviales y muchas veces inesperadas. Tales sistemas no pueden, en general,

ser descritos estadísticamente de manera sencilla.

En el marco del estudio de la complejidad en estos sistemas, cabe destacar el análisis de características tales como fractalidad, distribuciones de velocidad tipo leyes de potencia, difusión anómala, etc. [2-5], que han proporcionado nuevos conocimientos que revelan posibles universalidades en temas como actividad geomagnética, turbulencia en plasmas de laboratorio, física del viento solar, etc. [6-10]. En particular, estos estudios han mostrado que sistemas tales como la magnetósfera terrestre [3,4,11-13], el viento solar [14], la fotosfera solar y la corona solar [15,16], se encuentran en un estado crítico auto-organizado, y exhiben características fractales y multifractales.

La mayoría de los estudios en esta dirección se han centrado en el análisis de algunas de dichas características por separado, por ejemplo, criticalidad auto-organizada y multifractalidad en la magnetocola [2], propiedades fractales en regiones activas del Sol [17], multifractalidad en el viento solar [5] o no extensividad en la magnetósfera terrestre [18]. Sin embargo, debido al acoplamiento entre la actividad solar, interplanetaria, y magnetosférica de la Tierra, es interesante estudiar y entender las posibles correlaciones entre las características complejas observadas en cada sistema. Dicho estudio podría dar información valiosa en cuanto al acoplamiento en la dinámica de ellos y una eventual mejora en el pronóstico del clima o tiempo espacial [19-21].

El estudio de la fractalidad a partir del cálculo de la dimensión fractal en diversas áreas ha permitido comprender los fenómenos presentes en dichas áreas desde una perspectiva transversal, ampliando su entendimiento y aportando nuevos co-

nocimientos. En sismicidad, por ejemplo, mediante el cálculo de la dimensión de *box-counting*, se ha estudiado la relación entre las dimensiones fractales de las distribuciones espaciales de réplicas y de fallas activas preexistentes [22,23]. En música se ha logrado caracterizar piezas musicales mediante una dimensión fractal [24–26]. En biología se ha explorado la naturaleza fractal de proteínas plegadas [27], y en física de plasmas [2,28–37] es creciente el estudio de dimensiones fractales y su conexión con propiedades físicas.

La dimensión fractal se puede calcular tanto en datos correspondientes a series temporales, como a datos de patrones espaciales. En el estudio de plasmas astrofísicos, la dimensión fractal de series de tiempo tales como registros de número de manchas solares o el índice de electrojet auroral (AE), o de datos espaciales tales como magnetogramas solares, resulta ser una caracterización interesante de la complejidad del sistema, resultando ser un valor generalmente no entero y más pequeño que la dimensión euclidiana [38–41]. Varios trabajos han analizado la relación entre las dimensiones fractales y multifractales con cantidades físicas, y su importancia para pronosticar eventos en la superficie del Sol (llamaradas solares), el viento solar, y la magnetósfera terrestre [16,38,41–47]. Por ejemplo, en el contexto de la actividad solar, en la Ref. [16] se estudia la posible correlación entre las dimensiones fractales de estructuras fotosféricas activas y las discontinuidades magnéticas formadas en la corona solar, y en la Ref. [43] se investiga la posibilidad de que la dimensión fractal de una región específica de la fotosfera solar se relacione con la aparición de llamaradas solares. Análisis similares se han desarrollado mediante estudios multifractales [45]. También se ha estudiado el comportamiento multifractal del viento solar respecto a la variación de la actividad solar [47], mientras que a nivel de la magnetósfera terres-

tre, en la Ref. [42] se estudia la dimensión fractal de la superficie de actividad auroral para distintas fases de perturbaciones geomagnéticas. Estos trabajos nos entregan indicios de que es interesante investigar la relación entre las dimensiones fractales de estos sistemas físicos y la presencia de actividad magnética.

El objetivo principal de esta tesis es caracterizar la ocurrencia de eventos como tormentas geomagnéticas y llamaradas solares por medio de una dimensión fractal, como una forma de medir la complejidad presente en el sistema y determinar algún criterio de predicción de dichos eventos. Esto se realiza mediante un análisis sistemático de datos, y a través de un modelo teórico que describa las principales características estadísticas del sistema en estudio. Interesa en particular estudiar la evolución temporal de la complejidad, y la posible interacción entre la complejidad de los distintos subsistemas en estudio: la fotosfera solar, el viento solar y la magnetósfera terrestre.

Con el fin de introducir los conceptos básicos relacionados con la dinámica presente en el medio ambiente Sol-Tierra y el clima espacial, en el capítulo 2 se presenta una breve descripción de la estructura y los fenómenos presentes en el Sol, viento solar y magnetósfera terrestre, con el fin de comprender los procesos que originan la actividad solar y magnetosférica.

El trabajo está dividido en dos partes. Primero (capítulos 3 a 5), el análisis de la evolución temporal de la fractalidad en la magnetósfera terrestre y la fotosfera solar es presentado mediante el análisis de la evolución temporal de la dimensión fractal de las fluctuaciones magnéticas en la magnetósfera terrestre (índice *Dst*), y

la distribución espacial del campo magnético en la fotosfera solar (magnetogramas fotosféricos). Luego (capítulos 6 a 8), mediante un *shell model* se estudia la posibilidad de reproducir los resultados observados con la serie *Dst*. Para esto, el modelo es trabajado de dos maneras. Por un lado, el *shell model* es forzado de la manera tradicional, mediante un forzamiento estocástico obtenido de la ecuación de Langevin, y por otro, en un intento de introducir la dinámica solar, éste es forzado a través de series de tiempo tomadas de mediciones de la velocidad y el campo magnético solar.

Para introducir la definición de dimensión fractal utilizada en esta tesis, en el capítulo 3 se presentan los principales conceptos que se deben comprender cuando se estudia la fractalidad de un sistema. En este caso, debido a la simplicidad y su intuitivo significado, se calcula la dimensión de *box-counting* [48]. Si bien la dimensión de *box-counting* sólo puede proporcionar información parcial acerca de la complejidad de los sistemas, en particular cuando se trata de sistemas que exhiben multifractalidad como es este caso, esta medida es capaz de describir algunas de las características de la complejidad solar y geomagnética como mostraremos en esta tesis, y, además, también ha sido utilizada con éxito en otros estudios del sistema Sol-Tierra [40, 41, 43, 49–52]. Por lo tanto, la dimensión de *box-counting* nos da un enfoque rápido para estudiar sistemáticamente las propiedades de la complejidad de la actividad solar y geomagnética, resultando ser un primer paso para detectar posibles correlaciones entre ellos.

El análisis en la magnetósfera presentado en el capítulo 4, ha sido realizado con datos del índice *Dst* [53], y a nivel solar a través del análisis de magnetogramas diarios de la fotosfera solar [54] (capítulo 5). Es importante destacar que el cálculo de la

dimensión fractal para el índice *Dst* está basado en un diagrama de dispersión [55], a diferencia de estudios anteriores, en los que han utilizado otros métodos [40,42,56,57]. El análisis de magnetogramas también difiere de análisis anteriores, en el sentido que, normalmente, se han centrado en relacionar la dimensión fractal de la configuración del campo magnético local en una zona de la superficie del Sol a la emisión de la llamarada en la misma zona. Aquí se realiza el análisis en toda la superficie solar para tener una cuantificación global de la complejidad en la actividad magnética del Sol.

Concretamente, en esta primera parte de la tesis, se estudian eventos durante cinco años de alta actividad geomagnética, a saber, 1960, 1989, 2000, 2001 y 2003. También se analiza el ciclo solar 23 completo, con el fin de entender en qué medida las conclusiones extraídas para eventos particulares son robustos y pueden ser extrapoladas a años con niveles arbitrarios de actividad solar.

En la segunda parte de la tesis (capítulos 6 a 8), se estudia la posibilidad de reproducir los resultados observados con la serie de tiempo *Dst*, con un modelo simulacional de turbulencia.

Existen diversos modelos que se han utilizado para comprender y reproducir al menos cualitativamente la fenomenología de los sistemas estudiados [58–60]. En esta tesis se utiliza un *shell model* [61,62] explicado en el capítulo 6, el cual consiste en un conjunto simple de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen la turbulencia presente en el sistema [63,64]. Este modelo ha reproducido el comportamiento de ley de potencia de la distribución de tiempos de calma entre eventos disipativos en la fotosfera solar [61,63], por lo que resulta interesante estudiar si éste es capaz también

de caracterizar la fractalidad a nivel magnetosférico.

En particular, en el capítulo 7 se estudian la evolución de la dimensión fractal de la energía magnética disipada obtenida a partir de un MHD *shell model*, por un parte, y por otra, el régimen de parámetros (para la viscosidad cinemática y la difusividad magnética) en el cual el modelo computacional reproduce las características fractales de las observaciones.

Luego, en el capítulo 8, el *shell model* es forzado a través de las series de tiempo tomadas de mediciones de la velocidad y del campo magnético en el viento solar [65], como un intento de introducir en el modelo numérico la influencia de la dinámica solar, estudiando dicha influencia a lo largo de un ciclo solar completo.

Finalmente, en el capítulo 9 se resumen los principales resultados. A partir de la discusión de ellos, se elaboran las conclusiones de este trabajo y se mencionan las posibles proyecciones de esta tesis.

## Capítulo 2

# Medio ambiente Sol-Tierra

Se denomina medio ambiente Sol-Tierra a la región de la atmósfera terrestre, ionósfera y magnetósfera, que es influenciada por las condiciones físicas en el interior solar, atmósfera solar y viento solar [66]. Una ilustración del medio ambiente Sol-Tierra se presenta en la figura 2.1.

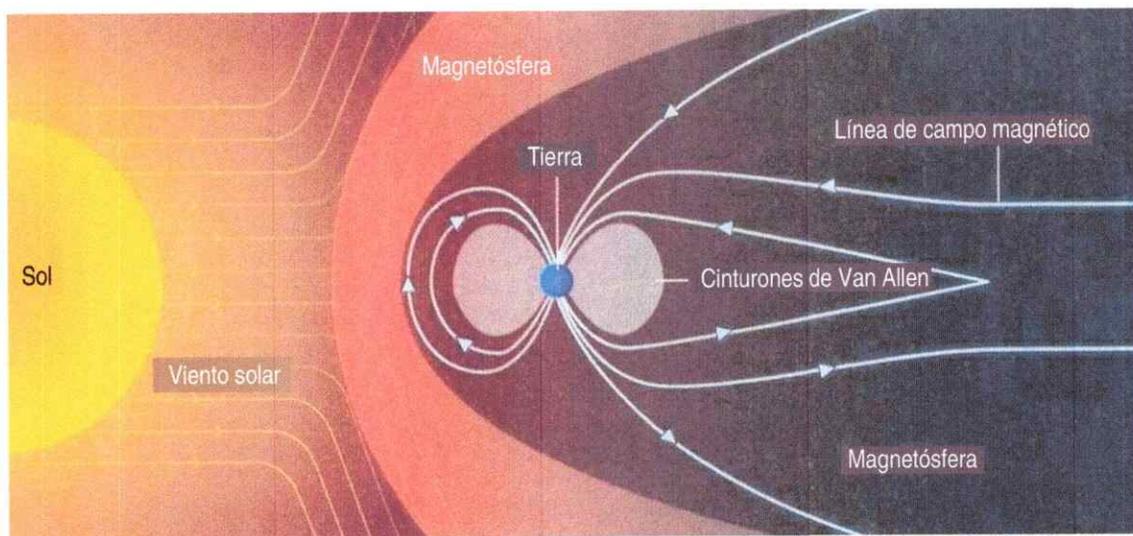


Figura 2.1: Medio ambiente Sol-Tierra: El Sol, viento solar y magnetósfera terrestre.

El estudio de la actividad solar y magnetosférica ha estado directamente influenciado por los avances tecnológicos. Galileo Galilei, el año 1609, fue uno de los primeros

en observar manchas solares a través de un telescopio. En los siguientes dos siglos, se avanza rápidamente en el entendimiento de la dinámica solar y la naturaleza del campo magnético solar.

Sin embargo, la influencia de la actividad solar en la Tierra no había sido estudiada de manera sistemática antes del siglo XVII. Registros de referencias acerca de auroras observadas en la Tierra se pueden encontrar desde hace muchos siglos. Por ejemplo, muchos pasajes del Antiguo Testamento o de la literatura griega parecen estar inspirados en señales aurorales. Por ejemplo, Jenófanes en el siglo VI A.C, menciona el "movimiento de acumulaciones de nubes ardientes". Durante mucho tiempo se atribuyeron las auroras a acción divina. Fue recién en el siglo XVII que se formulan los primeros modelos científicos del origen de las "luces en el norte", término común para las auroras en ese momento. Estas teorías hacían alusión a fenómenos ópticos tales como reflexión de cristales, iluminación por parte del Sol de aire ascendente de la Tierra o de los hielos en los polos [66].

Fue Edmund Halley, a los 60 años, que luego de observar directamente una aurora sugiere que el fenómeno auroral tenía relación con el campo magnético de la Tierra. En 1731, el astrónomo francés de Mairan ridiculiza la idea popular de que la aurora es una reflexión del hielo polar, y también critica la teoría de Halley. Él sugiere que la aurora está conectada con la atmósfera solar y sospecha que existe una conexión entre las manchas solares y las auroras. A partir de esto, el estudio del geomagnetismo y las auroras empiezan a estar firmemente conectados [67].

Hoy entendemos que el Sol influye de manera directa en la actividad geomagnética a través de la expulsión permanente de plasma proveniente de él que forma el viento solar, el cual está constantemente impactando la magnetósfera terrestre.

En este capítulo se presenta una breve descripción del tiempo y clima espacial.

Luego, se explica brevemente la estructura y los fenómenos presentes en el Sol, viento solar y magnetósfera terrestre, con el fin de introducir los conceptos y los procesos que originan la actividad solar y magnetosférica, y regulan el clima y tiempo espacial. Además, se explican brevemente algunos de los índices de actividad solar y magnetosférica que se utilizan en el desarrollo de esta tesis.

## 2.1. Tiempo y clima espacial

Actualmente se sabe que el Sol y la Tierra no sólo están relacionados a través de la influencia de la radiación solar sobre el clima o el tiempo en la Tierra, sino también a través del impacto del viento solar en el llamado "clima espacial" de la Tierra.

El tiempo espacial (o clima espacial) es el estudio de las variaciones a corto plazo (o a largo plazo), de las condiciones del plasma en el entorno de la Tierra y otros planetas [66].

El estudio del medio ambiente solar-terrestre implica tanto la evolución de corto plazo como también la de largo plazo de las actividades solar y geomagnética, que tiene aplicaciones para la predicción del tiempo y el clima espacial. Por esta razón, el tiempo y el clima espacial están ligados a las condiciones en el Sol y en el viento solar, la magnetósfera, ionósfera y atmósfera, por lo que se requiere la comprensión del complejo acoplamiento entre estos sistemas. En este contexto, los campos magnéticos del viento solar y la Tierra juegan un papel crucial en el clima o tiempo espacial mediante la modulación de la precipitación de partículas solares en la atmósfera de la Tierra.

El acoplamiento de la dinámica del viento solar y la dinámica magnetosférica da lugar a cambios de corto plazo en la actividad geomagnética que se pueden manifestar

en forma de tormentas y subtormentas geomagnéticas, con duraciones típicas de días u horas, respectivamente. Estos fenómenos pueden afectar satélites, navegaciones, telecomunicaciones, líneas eléctricas de transmisión, y la seguridad de los astronautas y pasajeros de líneas aéreas.

Por otra parte, el clima espacial se relaciona con las tendencias a largo plazo de la variabilidad solar, con escalas de tiempo del orden de decenas y cientos de años o más. Un ejemplo de un cambio del clima espacial es el conocido como Mínimo de Maunder (duró setenta años, entre 1645 y 1715). Durante este periodo la actividad magnética solar se redujo en gran medida (hecho que se puede verificar, por ejemplo, con el bajo número de manchas solares registrado), induciendo una pequeña era de hielo sobre nuestro planeta.

## 2.2. El Sol

El Sol es una estrella tipo G2V [68] de 4.5 millones de años y con 330 mil veces la masa de la Tierra. Está compuesto en un 90 % de hidrógeno y un 10 % de helio. Se encuentra a una distancia aproximada de  $1.5 \times 10^{11}$  m (equivalente a una unidad astronómica, UA), por lo que la luz tarda aproximadamente 8 minutos en llegar a la Tierra [67]. Las partes principales de la estructura interna y atmósfera solar se presentan en la figura 2.2.

El interior del Sol está compuesto por un núcleo rotante rodeado por una zona radiativa y una zona de convección. La zona de convección gira con un período de 26 días cerca del ecuador y 37 días en la cercanía de los polos [66].

La atmósfera solar es estructurada y dinámica. Está compuesta por tres capas: fotosfera, cromósfera y corona. La fotosfera es la capa más baja, limitando con la zona de convección. Tiene una profundidad de aproximadamente 500 km y la mayor

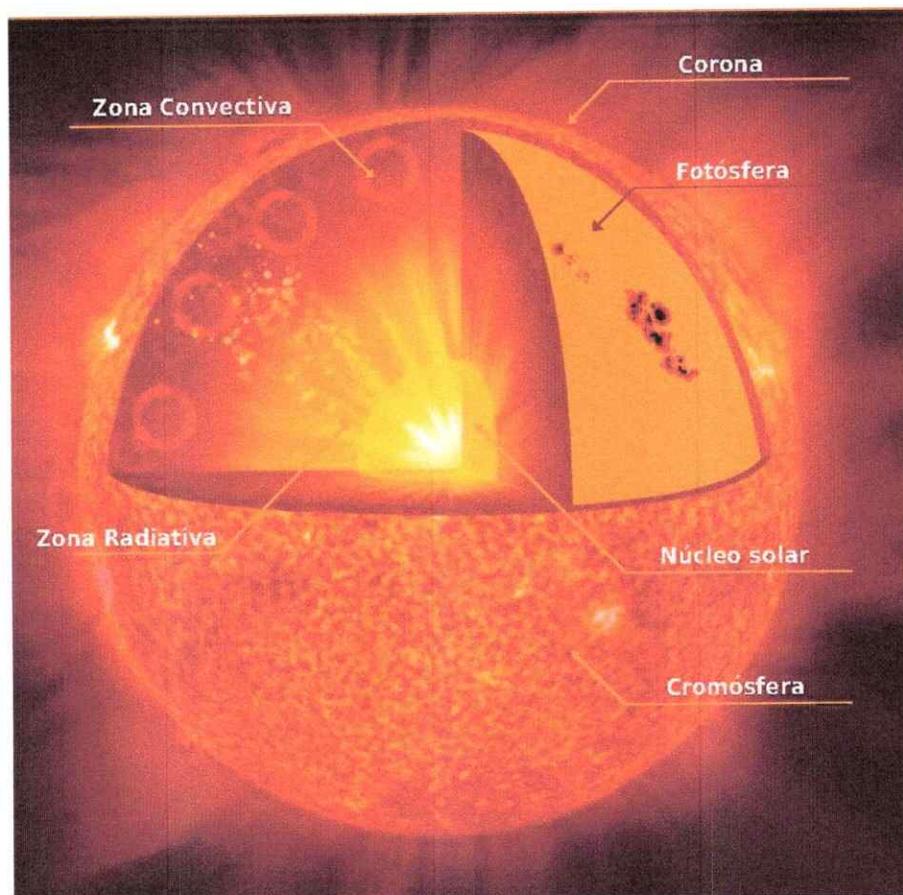


Figura 2.2: Principales partes de la estructura interna y atmósfera solar. Figura editada de la Ref. [69].

parte de la luz del Sol se emite desde aquí. Por encima de la fotosfera se encuentra la cromósfera, y sobre ésta, la corona. La temperatura mínima de la fotosfera es de 4200 K y crece gradualmente, alcanzando  $2 \times 10^6$  K en la corona.

Una imagen de luz blanca del Sol hace visible la rica dinámica de la fotosfera solar. Ocasionalmente se pueden observar manchas oscuras denominadas *manchas solares* (ver figura 2.3 izquierda), que están rodeadas por un área más brillante conocida como *región activa*. El campo magnético de la fotosfera varía de 1 gauss o menos, a 3000–4000 gauss en las zonas activas. Las regiones activas pueden a

veces brillar abruptamente, dando origen a *llamaradas solares*. Además, delgadas estructuras llamadas filamentos o prominencias se pueden observar en las regiones activas [66].

Las manchas solares tienen un diámetro aproximado de  $20 \times 10^6$  m y consisten en una zona central oscura (umbra) rodeada de una zona de penumbra y filamentos radiales oscuros. El campo magnético es casi vertical en la umbra y más horizontal en la penumbra. Algunas manchas solares son unipolares, otras bipolares y otras más complejas aún. Generalmente las manchas aparecen en pares, teniendo cada una de ellas la polaridad opuesta a la otra y pueden durar más de 100 días. El número de manchas solares varía en el tiempo, siendo una manifestación más del ciclo solar (gran número de manchas solares indican una alta actividad solar). Fue Rudolf Wolf quien, luego de años de observaciones, el año 1848 determina que el ciclo de manchas solares es de aproximadamente 11 años [66, 70].

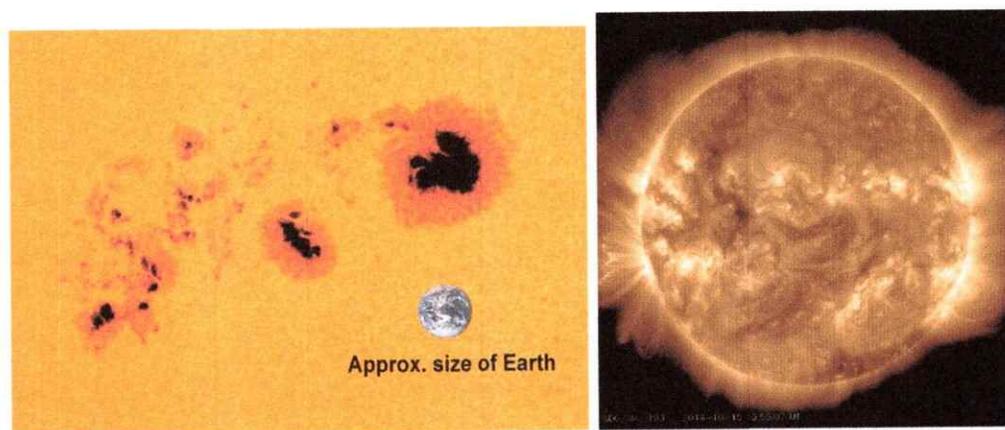


Figura 2.3: Izquierda: Manchas solares [71]. Derecha: Corona solar [72].

Imágenes de rayos X del Sol, muestran *loops* coronales y puntos brillantes donde los campos magnéticos del plasma están moviéndose e interactuando. En la figura 2.3 (derecha) se muestra una imagen de la corona solar. La corona solar exhibe

una estructura bastante compleja. Existen regiones de líneas de campo magnético cerradas y abiertas. Las regiones oscuras son conocidas como agujeros coronales, donde el campo magnético está abierto. En estas regiones, el viento solar fluye a altas velocidades hacia el exterior. Enormes burbujas conocidas como eyecciones de masa coronal (*coronal mass ejections*, CMEs), que han alcanzado velocidades de hasta 2000 km/s, son observadas antes de una erupción prominente [66].

La actividad solar es controlada por el campo magnético generado por la acción combinada de la convección y la rotación de un dínamo no lineal al interior de él. Se entiende como actividad solar al conjunto de fenómenos como manchas solares, eyecciones de masa coronal, fluctuaciones del viento solar, dinámicas turbulentas, etc., que dependen fuertemente de la compleja dinámica magnética solar [70, 73].

En las últimas décadas, gracias a las misiones espaciales enviadas para observar al Sol, ha crecido el conocimiento respecto a la configuración magnética de la superficie solar. Diversos tipos de magnetogramas están disponibles para observar y estudiar la compleja dinámica magnética de la fotosfera solar. En esta tesis, se estudiarán magnetogramas diarios obtenidos del *Solar Oscillations Investigations (SOI) project* [74]. Éstos corresponden a una representación del campo magnético solar en el disco solar completo realizando promedios de varias observaciones recogidas en el curso de una rotación solar completa (27 días).

Existen también varios índices de actividad solar, entre ellos destacan el número de manchas solares, el índice coronal, irradiancia solar total, emisión ultravioleta solar e índice de llamaradas solares [75].

Como se expondrá en los siguientes capítulos, el análisis realizado en esta tesis se basará en el número de manchas solares (ya explicado), el índice de llamaradas solares y el índice coronal.

El índice de llamaradas solares corresponde a la actividad de llamaradas diaria sobre un período de 24 horas. En este caso, la actividad de llamaradas diarias es cuantificada a través de un valor más o menos proporcional a la energía total emitida por la llamarada (se utilizan como parámetros, la duración de la llamarada y la intensidad de ésta) [76, 77].

El índice coronal representa la potencia media diaria (irradiación) emitida por la corona verde en 1 sr hacia la Tierra [78].

### **2.3. Viento solar y magnetósfera terrestre**

A partir de la constante expulsión de plasma proveniente del Sol, se forma el viento solar. El viento solar resulta de la expansión de la atmósfera solar, dando origen a un flujo supersónico de plasma ionizado y campo magnético que se desplaza hacia el medio interplanetario. Este torrente es consecuencia del gradiente de presión entre la corona solar y el espacio interplanetario que impulsa el plasma solar radialmente hacia afuera, escapando de la influencia de la gravedad solar [66]. El viento solar está compuesto esencialmente de protones y electrones, teniendo una pequeña porción de helio e iones pesados.

El comportamiento del viento solar está fuertemente influenciado por la actividad solar. La rotación solar hace que las líneas del campo magnético del viento solar formen una espiral. Por lo tanto, al aumentar la distancia radial desde el Sol, el campo magnético radial se convierte gradualmente en un campo toroidal. Debido a la rotación solar con un período de 27 días, el patrón magnético interplanetario muestra un comportamiento recurrente de 27 días. Además de esta variación recurrente en las propiedades del viento solar, hay perturbaciones interplanetarias esporádicas causadas por eventos solares como las ondas de choque, las eyecciones de masa coronal y

las erupciones.

Se observan dos tipos de viento solar. El viento solar rápido originado a partir de agujeros coronales donde el campo magnético está abierto, que alcanza una velocidad entre 400 km/s y 800 km/s. Y el viento solar lento, con una velocidad entre 250 km/s y 400 km/s [66].

Cuando el viento solar incide sobre el campo dipolar de la Tierra, es deflelado alrededor de ella, formando una región llamada magnetósfera. La magnetósfera está compuesta principalmente por un plasma de electrones y protones que vienen del viento solar y la ionósfera. Entonces, la configuración del campo magnético de la Tierra es modificada producto de la presión que ejerce el viento solar: en el lado diurno el campo magnético es comprimido, mientras que en la zona nocturna el campo magnético es extendido formando la magnetocola. Esta deformación de la configuración magnética terrestre se aprecia en la figura 2.1.

Al moverse el viento solar a una velocidad supersónica, y encontrarse con el campo magnético terrestre, forma una onda de choque delante de la magnetósfera. Entonces, el viento solar es desacelerado y una fracción de la energía cinética es convertida en energía térmica. La región de flujo de plasma subsónico detrás de la onda de choque se denomina envoltura magnética o *magnetosheath*. El límite entre la envoltura magnética y la magnetósfera, se denomina magnetopausa.

La mayor parte del plasma de la magnetocola está concentrada en la lámina de plasma (*plasma sheet*) alrededor del plano medio de la cola. La magnetósfera interior, por su parte, contiene dos poblaciones de plasma confinado: uno de baja energía o frío, relativamente denso, que forma la plasmósfera, y otro relativamente energético y muy diluido que forma los cinturones de radiación de Van Allen.

Las variaciones en el campo magnético de la Tierra son generadas por diferentes

fuentes. En la superficie de la Tierra, tales variaciones se producen en parte por las corrientes en el interior de la Tierra, es decir, las corrientes que fluyen en la región de transición entre el núcleo líquido de la litósfera y el manto de la Tierra mediante un proceso conocido como dínamo de la Tierra. La dinámica de la ionósfera y la magnetósfera está dominada, en cambio, por varias corrientes [67].

En la magnetósfera, la distorsión del campo magnético dipolar de la Tierra por el viento solar está acompañada por corrientes eléctricas. La compresión del campo magnético del lado diurno está asociada con la corriente de la magnetopausa en la superficie de ésta. La corriente de anillo que fluye alrededor de la Tierra en dirección hacia el oeste a distancias de varios radios de la Tierra (5 a 8 radios terrestres) está constituida principalmente por protones de 20–200 keV.

En la ionósfera, límite inferior de la magnetósfera, varios sistemas de corrientes fluyen a altitudes de alrededor de 100 a 150 km, entre ellas, el electrojet ecuatorial cerca del ecuador magnético, las corrientes Sq en el lado diurno de la ionósfera en latitudes medias, y los electrojets aurorales en el óvalo auroral. Además de estas corrientes perpendiculares al campo magnético, corrientes alineadas con el campo fluyen paralelamente a las líneas del campo magnético de la Tierra, y conectan las corrientes magnetosféricas con las corrientes polares ionosféricas. La mayoría de las corrientes alineadas con el campo magnético se deben a los electrones.

Todas las corrientes por encima de la ionósfera son controladas por la presión dinámica del viento solar (que depende de la velocidad y la densidad del viento solar) y la componente amanecer-atardecer del campo eléctrico interplanetario (que depende de la magnitud de la componente sur del campo magnético interplanetario). Las variaciones en cualquiera de estos parámetros son responsables de las variaciones correspondientes en el sistema de corrientes magnetosférica-ionosférica. Estos

cambios son el origen de la variación del campo magnético de la Tierra, conocido como actividad geomagnética. Índices geomagnéticos como *Dst*, *Kp*, *aa*, *ap*, *AL*, *AU*, *AE* y *PC* se han desarrollado para monitorear la actividad geomagnética a escala global [66].

Un fenómeno de la actividad geomagnética es la subtormenta magnética. Las subtormentas están ligadas a la aparición de auroras locales y tienen una duración de horas. La secuencia de tiempo propuesta de los acontecimientos en una subtormenta es la siguiente: Durante la fase de crecimiento de una subtormenta los procesos de reconexión en la magnetopausa diurna proporcionan energía libre que se almacena en la cola magnética, que evoluciona hacia un estado inestable. Durante la fase de crecimiento, la lámina de plasma se reduce en su anchura y se adelgaza. El inicio de la expansión de la subtormenta se asocia con la formación de una línea neutral en la lámina de plasma cerca de la Tierra. A medida que la subtormenta progresa, la lámina de plasma se expande y la línea neutra se desplaza hacia la cola magnética distante con el fin de recuperar su posición de equilibrio. Una indicación de subtormentas es la aparición de auroras. Perturbaciones aurorales típicas producen perturbaciones de los electrojets aurorales con amplitudes en el rango de 200 a 2000 nT y con una duración de 1 a 3 horas [66].

Cuando el acoplamiento del viento solar con la magnetósfera se hace fuerte y se extiende durante tiempos largos, conduce a una tormenta geomagnética en todo el mundo. El desarrollo de una tormenta geomagnética puede ser identificado por el desarrollo de una corriente de anillo que fluye en la magnetósfera interior.

Una gran tormenta magnética se inicia generalmente con un aumento en el campo geomagnético en la superficie de la Tierra, denominado "comienzo repentino" y denotado por *ssc* (*storm sudden commencement*). A raíz del *ssc*, el campo magnético

se mantiene por encima de la media por algunas horas, lo que constituye la "fase inicial de la tormenta". Luego, comienza una gran disminución del campo; ésta es la llamada "fase principal de la tormenta". La magnitud de la disminución del campo indica la intensidad de la perturbación. Finalmente, se produce la "fase de recuperación" donde el campo magnético vuelve a su valor medio (aumenta el valor del campo magnético hasta recuperar el valor anterior a la fase inicial). La recuperación del campo magnético puede durar varias horas [79].

Diversos estudios han mostrado que en las latitudes medias y ecuatoriales el decrecimiento del campo magnético durante una tormenta magnética puede ser aproximadamente representado por un campo magnético uniforme paralelo al eje del dipolo geomagnético, y dirigido hacia el sur. La magnitud de esta perturbación axial simétrica del campo magnético varía en el transcurso de una tormenta. Esta perturbación del campo magnético es monitoreada por el índice *Dst*.

Si el índice de monitoreo *Dst* del campo magnético es obtenido continuamente como una función del tiempo, esta variación claramente indicaría la ocurrencia de tormentas geomagnéticas y su severidad. Por otra parte, incluso en ausencia de tormentas, este índice continuaría monitoreando las perturbaciones más pequeñas en magnitud o variaciones que comiencen gradualmente sin un comienzo bien definido. Por lo tanto, el índice *Dst* así derivado proporciona una medida cuantitativa de variaciones geomagnéticas.

El índice *Dst* es obtenido del World Data for Geomagnetism, Kioto [53], a través de 4 estaciones, Hermanus, Kakioka, Honolulu, y San Juan (figura 2.4), que fueron elegidas por estar suficientemente distantes de electrojets aurorales y ecuatoriales.

Si se denomina  $\Delta H$  a la variación del campo magnético terrestre, y  $\delta q$  a las variaciones del campo magnético medidas en cada estación durante días calmos,

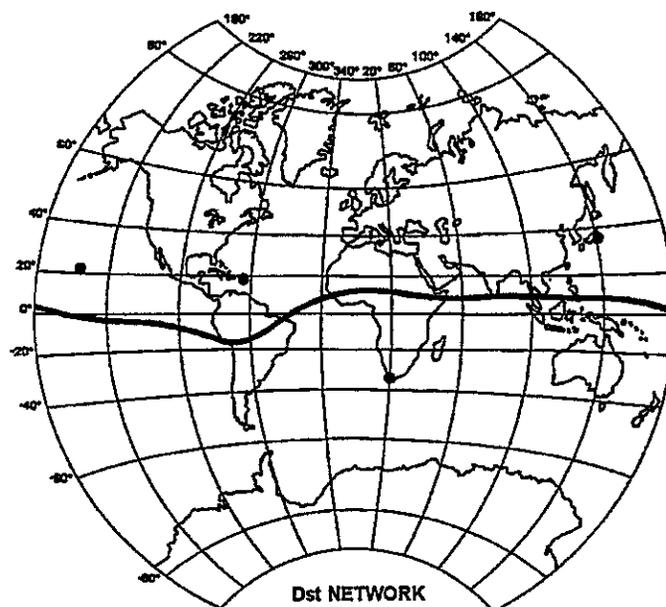


Figura 2.4: Red de 4 observatorios que conforman el World Data for Geomagnetism, Kioto [79].

entonces el índice  $Dst$  está definido por

$$Dst = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{D(T)}{\cos \phi}, \quad (2.1)$$

donde  $D(T) = \Delta H - \delta q$ ,  $N$  es el número total de estaciones, y  $\phi$  es la latitud de la estación. Luego, el factor  $\cos \phi$  permite normalizar los valores de las perturbaciones magnéticas al valor que tendrían en el ecuador. De esta manera, el índice  $Dst$  contiene la información de las variaciones del campo magnético en el ecuador.  $\delta q$  es definido de tal forma que  $Dst = 0$  en un período calmo [66].

Obtener la variación del campo magnético  $\Delta H$  para la ecuación (2.1) no es trivial. El método consiste en calcular la diferencia entre el campo magnético observado,  $H_{\text{obs}}$ , y el campo magnético de fondo  $H_0$ :

$$\Delta H = H_{\text{obs}} - H_0. \quad (2.2)$$

El campo magnético de fondo es determinado tomando en cuenta las variaciones propias del campo magnético de la Tierra, esto significa, intentando obviar las variaciones producidas por acción principal del Sol. Para esto, se realiza un ajuste entre los promedios de los valores del campo magnético correspondiente a períodos de calma registrados en el año actual y los cuatro años anteriores. Estos períodos de calma no corresponden estrictamente a los días más “tranquilos” (menor variación del campo magnético) del conjunto de datos analizado. En realidad, la forma de elegir los datos que serán utilizados en el ajuste, corresponde a utilizar el dato del “día más calmo de entre cinco” en un mes, esto es, se eligen cinco días de manera aleatoria y luego, se extrae sólo el día más calmo de entre ellos. Esto da origen a una serie de tiempo del campo magnético “calmo”. Esta serie es discreta. Para tener una serie continua en el tiempo, la serie discreta es ajustada por una curva analítica (en particular, se escoge un polinomio de grado 2), donde los coeficientes del ajuste se obtienen mediante el método de mínimos cuadrados. Así, el campo queda definido como

$$H_0 = A + Br + Cr^2 ,$$

donde  $r$  es el tiempo en años que se mide a partir de un instante de referencia.

Generalmente se acepta que las tormentas geomagnéticas corresponden a períodos de tiempo con un valor mínimo  $Dst$  menor que  $-50$  nT. Con esto, se registran alrededor de 20 a 50 tormentas anualmente, dependiendo de la actividad solar [66].

## Capítulo 3

# Fractalidad

Se denomina *fractal* a un sistema que no cubre de manera uniforme el espacio y que posee autosimilaridad, es decir, que es invariante ante cambios de escala. Se dice que un objeto es autosimilar si dicho objeto es igual a una parte de sí mismo, y esto se puede verificar a distintas escalas. Fue el matemático Benoît Mandelbrot, quien el año 1975 propuso el nombre “fractal” para objetos matemáticos con esta propiedad de autosimilaridad, derivado del latín “fractus”, que significa quebrado o fracturado. Un fractal es, en principio, un objeto puramente matemático, que puede ser generado, por ejemplo, por algoritmos matemáticos específicos, como es el caso de los conjuntos de Julia y Mandelbrot [80, 81]. Sin embargo, muchos sistemas naturales presentan características aproximadamente fractales, tales como las líneas costeras, los copos de nieve, el sistema circulatorio, vegetales (brócoli, ramas de árboles), entre otros, lo cual ha motivado un gran interés práctico por el estudio de los fractales. Entre la gran variedad de áreas involucradas, cabe destacar: sismicidad [22, 23], música [24–26], biología [27] y física de plasmas [2, 28–37].

### 3.1. Dimensión fractal

A los objetos fractales se les puede asociar una dimensión no entera. Dicha característica es denominada “dimensión fractal”, existiendo varias definiciones de la misma. Independiente de la definición utilizada, la dimensión fractal es siempre mayor que su dimensión topológica, y menor que su dimensión Euclidiana [48]. Para aclarar estos conceptos revisaremos brevemente lo que entendemos por cada una de estas “dimensiones”.

La dimensión Euclidiana es el número de coordenadas necesarias para describir el objeto. De esta manera, una línea recta en el espacio sólo requiere una coordenada para ser descrita (dimensión Euclidiana igual a 1), un objeto plano tiene dimensión Euclidiana igual a 2, mientras que un objeto en el espacio tridimensional tendrá dimensión 3. La dimensión topológica, en cambio, se deriva de la capacidad de cubrir un objeto utilizando elementos (discos, esferas, cubos, etc.) pequeños, de tal manera de minimizar el número de intersecciones entre los elementos; esta dimensión se caracteriza por no cambiar bajo una transformación del objeto que no introduzca cortes en él; así, aunque su forma cambie, el objeto seguirá siendo topológicamente igual [48].

En la figura 3.1 se muestran tres líneas cubiertas por discos pequeños. En el caso de la línea de la izquierda, el segmento es cubierto por discos de tal manera que existen muchas intersecciones entre ellos. Al centro, en cambio, la línea es cubierta por discos que sólo se intersectan de a pares, de tal forma de minimizar el número de intersecciones entre los discos. Luego, se necesitan grupos de al menos dos discos [ver discos en azul en la figura 3.1 (centro)] para cubrir el segmento. Si el segmento anterior es curvado, entonces también podrá ser cubierto por discos de la misma

forma que en el caso central [ver figura 3.1 (derecha)]. De hecho, si existen pliegues muy pronunciados en la línea (procurando que no se corte o se intersecten dos puntos distantes de la línea), lo único que se necesitará para cubrir el objeto con este criterio, será disminuir el radio del disco. Entonces, tanto el segmento, como la línea curva mostrada en la figura 3.1, son topológicamente equivalentes.

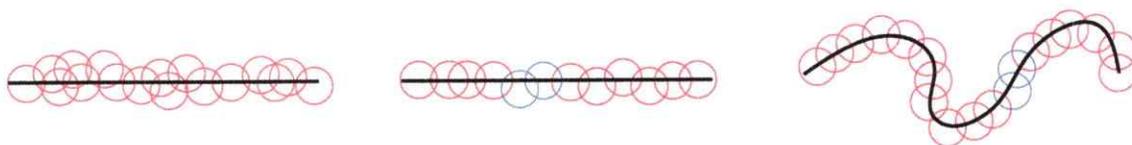


Figura 3.1: Formas topológicamente equivalentes. A la izquierda, un segmento es cubierto por discos pequeños. Al centro, un segmento es cubierto por discos que sólo se intersectan de a pares. A la derecha, la línea curva es cubierta por discos que sólo se intersectan de a pares.

Con esto en mente, en general, el cubrimiento de un objeto por elementos (discos o esferas) de radio pequeño requiere la intersección entre un mínimo de  $D_T + 1$  grupos de elementos, siendo  $D_T$  la dimensión topológica [48]. Por ejemplo, un punto en un plano (dimensión Euclidiana 0), requiere de sólo un disco para cubrirse. De esta manera, su dimensión topológica será 0. Para cubrir un segmento en un plano, se requiere la intersección de un mínimo de dos discos para cubrir el objeto, por lo que la dimensión topológica será 1. De la misma manera, al cubrir un objeto en una superficie en dos dimensiones con esferas pequeñas, el mínimo número de esferas que se requieren son tres, luego su dimensión topológica es 2. Hasta este momento, las dimensiones topológicas y Euclidianas coinciden. Sin embargo, una línea recta o curva sobre un plano (dimensión Euclidiana 1 y 2, respectivamente), o bien una línea curva en el espacio (dimensión Euclidiana 3), tienen dimensión topológica igual a 1 siempre, puesto que como se observa en la figura 3.1, siempre se podrán cubrir con una serie de dos discos o esferas consecutivas de radio suficientemente pequeño como

para que sólo exista una intersección entre un par de discos o esferas consecutivos. De esta manera, la dimensión topológica siempre será menor o igual a la dimensión Euclidiana.

Los objetos fractales, sin embargo, no llenan de modo uniforme el espacio, y esto hace que el concepto de dimensión topológica sea insuficiente para describirlos, ya que distintas estrategias de cubrimiento pueden entregar distintos resultados, dando origen a distintas definiciones de su dimensión (dimensión de similaridad, de Hausdorff, de *box-counting*, de correlación, de información, de Lyapunov, entre otras). Por ejemplo, un método muy usado es calcular la dimensión de *box-counting* [48], la cual se basa en cubrimientos del espacio mediante celdas de lado  $\epsilon$ , y se calcula a partir del conteo de celdas que cubren al objeto fractal. Otra técnica utilizada en dos dimensiones, es el cubrimiento del espacio utilizando el mínimo número de circunferencias de radio  $\epsilon$ , centradas en cada punto del objeto fractal, dando origen a la denominada *pointwise dimension* [82]. El estudio de esta tesis se concentra en la dimensión de *box-counting*.

Con el fin de introducir el concepto de dimensión de *box-counting*, aquí se presenta de una manera intuitiva la derivación de la dimensión de similaridad [48]. En la figura 3.2 se ha dividido la línea de la izquierda en  $N$  segmentos pequeños de magnitud  $\epsilon$ . Es posible notar que el largo de la línea,  $L$ , será proporcional a la variable  $\epsilon$ , siendo la constante de proporcionalidad  $N$ , es decir:  $L = N\epsilon$ . En el caso de un plano homogéneo, se requieren  $N$  cuadrados de lado  $\epsilon$  para conocer el área  $A$ , es decir,  $A = N\epsilon^2$ . Luego, si consideramos un cuerpo homogéneo en tres dimensiones, el volumen de éste se podrá escribir como  $V = N\epsilon^3$ . A partir de esto, se puede notar que los exponentes de  $\epsilon$  pueden corresponder, en cada caso, a la "dimensión" del objeto.

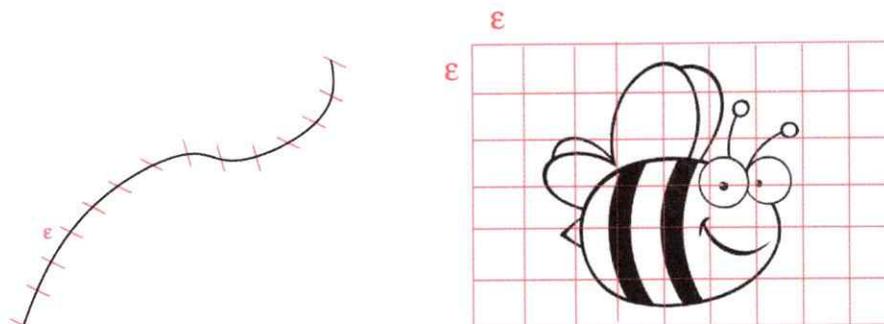


Figura 3.2: Ilustración del cálculo de la dimensión de similaridad y de *box-counting*. Ambos objetos son discretizados por celdas de lado  $\epsilon$ .

Entonces, siguiendo la idea de que el tamaño de un objeto es proporcional a una potencia de la variable  $\epsilon$ , con constante de proporcionalidad igual a  $N$ , se define

$$D_S = \frac{\log(N)}{\log(1/\epsilon)}, \quad (3.1)$$

siendo  $D_S$  la dimensión de similaridad.

Cuando el fractal es autosimilar, es decir, es tal que a distintas escalas se reproduce exactamente el mismo patrón en todas direcciones, entonces, celdas de lado  $\epsilon$ , para distintos valores de  $\epsilon$ , contienen copias exactas del objeto original. En ese caso, la dimensión de similaridad definida en (3.1) es muy útil para caracterizarlo. Esto debido a que el valor de la dimensión será independiente del valor de  $\epsilon$ . Sin embargo, cuando el objeto estudiado no es homogéneo, o corresponde a un objeto real tal como el borde costero, un brócoli o la hoja de un helecho, es decir, cuyas “réplicas” no cubren de manera uniforme el espacio, la dimensión de similaridad dependerá de  $\epsilon$ , siendo más apropiado calcular la dimensión fractal mediante el método de *box-counting*.

El método de *box-counting* consiste en dividir el objeto fractal en celdas de lado  $\epsilon$  [ver figura 3.2 (derecha)]. A continuación, se cuenta el número de celdas  $N(\epsilon)$  que

contienen algún punto del objeto. Es importante notar que, en el caso de objetos que llenan uniformemente el espacio,  $N(\epsilon)$  tiene una relación polinomial con  $\epsilon$  (como se explicó en el caso de la dimensión de similaridad). Sin embargo, en general, al considerar varios valores, cada vez menores, de  $\epsilon$ , existe en realidad sólo un rango de  $\epsilon$  donde  $\log(N(\epsilon))$  escala linealmente con  $\log(\epsilon)$ . Si la pendiente de la región lineal está dada por  $-D$ , entonces en esta región se tiene:

$$N(\epsilon) \propto \epsilon^{-D},$$

$$D = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(\epsilon)}, \quad (3.2)$$

donde  $D$  representa la dimensión de *box-counting*, que corresponde entonces a una generalización de la dimensión de similaridad. El error asociado a la regresión lineal realizada para calcular  $D$ , se puede usar como una estimación del error de la dimensión de *box-counting*.

La dimensión de similaridad y de *box-counting* no son siempre iguales, ya que en la primera, para obtener un valor independiente de  $\epsilon$ , es necesario que los segmentos del objeto sean autosimilares, es decir, es necesario que los segmentos sean exactamente iguales en todas las escalas, condición que no es necesaria para calcular una única dimensión de *box-counting*. Entonces, al tener un objeto fractal real (no construido matemáticamente), dichas dimensiones no serán iguales.

### 3.2. Dimensión de *box-counting* para una serie de tiempo

En el desarrollo de esta tesis, mediante el cálculo de la dimensión fractal, se pretende caracterizar la ocurrencia de eventos como tormentas geomagnéticas y lla-

maradas solares. Esto se realiza, en parte, mediante un análisis sistemático de datos correspondientes a series de tiempo del índice *Dst* que sirve para monitorear la actividad geomagnética como se explicó en el capítulo 2. Con esto en mente, se hace necesario comprender la fractalidad en una serie de tiempo.

Al igual que un objeto geométrico, una serie de tiempo puede tener una dimensión fractal que la caracterice. La siguiente pregunta es entonces, ¿cómo calcular la dimensión fractal de una serie de tiempo?, y ¿cuál es el significado de la dimensión fractal en este caso?

Comprender los conceptos de autosimilaridad, invariancia de escala y dimensión fractal de un objeto real como es presentado en la sección 3.1 no es complejo si se consideran objetos como un copo de nieve, un árbol o el borde costero. Esto debido a que la autosimilaridad aproximada presente en ellos es observable a simple vista. Sin embargo, entender el significado de las características fractales de una serie de tiempo como los latidos del corazón, la actividad sísmica, la actividad solar, entre otras, no es tan sencillo de interpretar.

Si bien las series de tiempo se representan, en general, en una superficie en dos dimensiones (al igual que un objeto fractal), una serie de tiempo implica en realidad dos variables físicas, a saber, el tiempo y una función  $f(t)$  del tiempo. Esta situación es diferente a las curvas geométricas embebidas en un plano, donde ambos ejes corresponden a la misma magnitud física. Para saber si una curva en un plano es autosimilar se puede hacer la siguiente prueba: tomar un subconjunto del objeto y reescalar al mismo tamaño del objeto original, utilizando el mismo factor de ampliación para el ancho y la altura; y luego comparar las propiedades estadísticas del objeto reescalado con el objeto original. En el caso de una serie de tiempo, para comparar adecuadamente un subconjunto de datos de una serie de tiempo con el

conjunto de datos original, se requieren dos factores de amplificación distintos (a lo largo de los ejes horizontal y vertical), ya que estos dos ejes representan diferentes variables físicas. A partir de esto, se dice que una serie es autosimilar si existen dos constantes de escalamiento (eje horizontal y vertical), con las cuales la estadística de la serie de tiempo reescalada se asemeja a la estadística de la serie completa [83].

La autosimilaridad de una serie de tiempo tiene relación con la “memoria” de la serie de tiempo estudiada. Un parámetro de medida de la autosimilaridad presente en la serie corresponde al exponente de Hurst [84]. El exponente de Hurst describe la posibilidad de que dos sucesos consecutivos ocurran, lo que quiere decir que a mayor valor de este parámetro es mayor la probabilidad de ocurrencia.

Una dimensión fractal no entera en una serie de tiempo, puede contener información referente a la manera de cubrir el espacio de la serie estudiada (de la misma forma que en el caso de un objeto geométrico). Existen muchos caminos para calcular la dimensión fractal de una serie de tiempo. Por ejemplo, se puede analizar la serie de tiempo en el plano  $(t, f(t))$ . En este caso, se puede calcular el exponente de Hurst de la serie, que está relacionado con la dimensión fractal de la serie [84], o bien se puede cubrir la curva con cuadros de igual tamaño, segmentos de igual tamaño, o esferas y luego, siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.1, se puede contar el número de unidades necesarias para cubrir la trama o contar el número de puntos dentro de cada unidad. Esto conduce a otras definiciones posibles de dimensión, tales como *box-counting*, de división, o correlación, etc. [48, 82]. Este procedimiento también se puede realizar al trabajar la serie de tiempo de otra manera. En efecto, se puede construir, a partir de la serie de tiempo, un objeto fractal que dependa sólo de la variable del eje vertical (eliminando el tiempo). Hay muchas formas de construir el conjunto de puntos que forman el objeto. Una de las maneras es mediante un *time*

*lag embedding* [85], que corresponde a un conjunto de puntos dados por  $(x_n, x_{n-j})$  en dos dimensiones, o  $(x_n, x_{n-i}, x_{n-j})$  en tres dimensiones, donde  $i$  y  $j$  corresponden a la separación entre los datos, de tal forma que  $f(t_i) = x_i$ .

En este trabajo, la dimensión fractal de una serie de tiempo es calculada a partir de un método similar al de *box-counting* presentado en la sección anterior. Con el fin de explicar el procedimiento para calcular la dimensión fractal en este caso, consideremos una serie de tiempo como la mostrada en la figura 3.3.

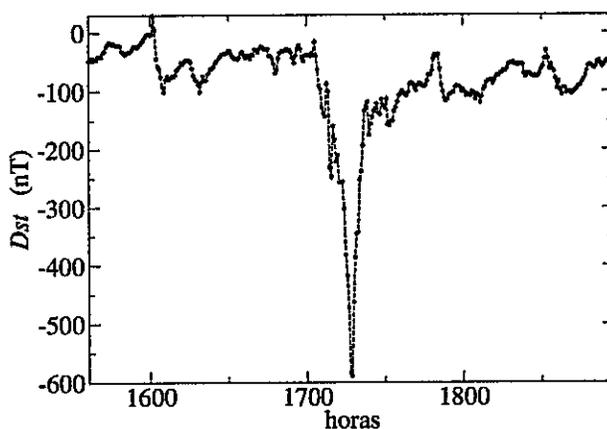


Figura 3.3: Serie de tiempo *Dst* correspondiente al período de tiempo entre el 6 y el 20 de marzo de 1989.

A partir de una serie de tiempo como la mostrada en la figura 3.3, se construye un *scatter diagram* (diagrama de dispersión o mapa de fase) para la serie de tiempo, de la siguiente manera: Si  $x^i$  corresponde al dato  $i$ -ésimo de la serie y  $N$  es el número total de datos, el *scatter diagram* es el gráfico de  $x^{i+1}$  versus  $x^i$ , con  $1 < i < N - 1$ . La figura 3.4 (izquierda) muestra el *scatter diagram* generado a partir de la serie de tiempo *Dst* de la figura 3.3.

Mediante este procedimiento, a partir de la serie de tiempo, hemos construido

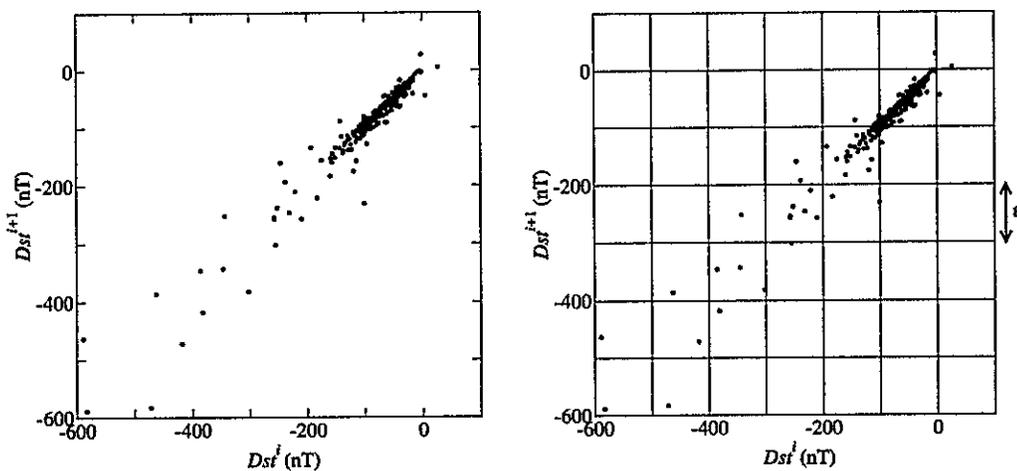


Figura 3.4: Izquierda: *Scatter diagram* para la serie de tiempo  $Dst$  correspondiente al período de tiempo entre el 6 y el 20 de marzo de 1989 (figura 3.3). Derecha: *Scatter diagram* dividido en celdas de lado  $\epsilon$ .

un objeto geométrico en dos dimensiones, al que se le puede calcular la dimensión fractal con el método descrito en la sección 3.1. En efecto, si se divide el *scatter diagram* en celdas de lado  $\epsilon$  como se muestra en la figura 3.4 (derecha), y se repite el procedimiento descrito en la sección 3.1, podemos definir su dimensión fractal de la misma forma que la ecuación (3.2). A este método para calcular la dimensión fractal lo denominamos “dimensión de *box-counting* para un *scatter diagram*” [86].

Notemos, sin embargo, que la decisión de graficar un dato versus el anterior para construir el *scatter diagram* es arbitraria. Del mismo modo, podríamos haber decidido graficar  $x^{i+j}$  versus  $x^i$ , con  $j$  cualquier entero mayor o igual que uno. Por ejemplo, en la figura 3.5, se observa un *scatter diagram* construido con  $j = 3$  y  $j = 5$ .

Es esperable que, al cambiar  $j$ , la dimensión fractal del *scatter diagram* sea diferente. En efecto, supongamos que tenemos una serie de tiempo de datos tomados con una resolución muy alta, de modo que en general,  $x^i \simeq x^{i+1}$ . Entonces deberíamos esperar que un *scatter diagram* como el de la figura 3.4 sea esencialmente una recta

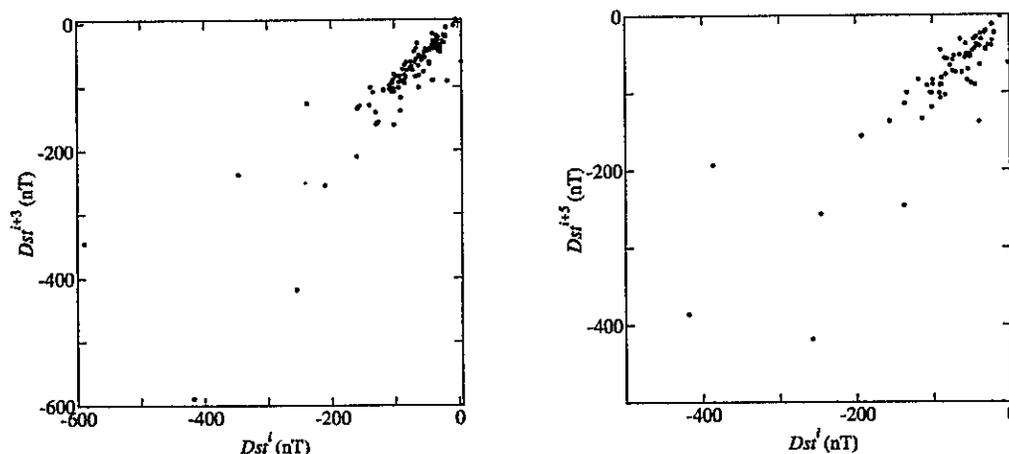


Figura 3.5: *Scatter diagram* para la serie de tiempo  $Dst$  correspondiente al período de tiempo entre el 6 y el 20 de marzo de 1989 (figura 3.3), con  $j = 3$  (izquierda) y  $j = 5$  (derecha).

de pendiente 1. Si tomamos datos separados una distancia  $j$ , entonces dos valores consecutivos no van a ser similares en general, y  $D$  podría tomar otro valor. De hecho, en el caso en que tomamos datos maximalmente separados (el primero y el último de la serie), el *scatter diagram* sólo será un punto y la dimensión será 0.

Definiremos entonces, una generalización de la dimensión de *box-counting* del *scatter diagram*, al construir éste graficando  $x^{i+j}$  versus  $x^i$ , con  $1 < i < N - 1$  y  $j < N - 2$ . De esta manera, la dimensión  $D_j$  está definida por:

$$D_j = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N_j(\epsilon))}{\log(\epsilon)}, \quad (3.3)$$

donde  $N_j$  corresponde al número de celdas de lado  $\epsilon$  que contienen un punto del *scatter diagram* construido con cierto valor de  $j$ . Esta definición es consistente con la ecuación (3.2). Luego, la diferencia entre las ecuaciones (3.2) y (3.3) radica en la manera de construir el *scatter diagram*.

Cabe destacar que el hecho de que las dimensiones obtenidas para distintos valores de  $j$  sean diferentes, puede ser entendido como una manifestación de la multifrac-

talidad presente en el sistema [87–95]. Esto es, el objeto puede ser en realidad, una superposición de diversos fractales, cada uno de ellos con su respectiva dimensión fractal  $D_j$ .

Elegir distintas separaciones  $j$  en (3.3) es útil cuando se analizan series con alta resolución. En el caso de la serie  $Dst$ , los datos son cada una hora, y, como veremos, cada ventana de tiempo que estudiamos no contiene tantos datos para que elegir distintos valores de  $j$  tenga sentido. Pero en esta tesis también se analizarán series de tiempo generadas a partir de una simulación, con alta resolución, por lo que podemos usar la definición de dimensión de  $D_j$ , ecuación (3.3), en este caso.

## Capítulo 4

# Evolución temporal de la fractalidad: Análisis *Dst*

Tal como se mencionó en el capítulo 2, la componente horizontal del campo magnético  $H$  se deprime durante períodos de grandes perturbaciones magnéticas y su recuperación es gradual. Al estudiar el comportamiento de estas variaciones del campo magnético es posible reconocer las fases que definen una tormenta geomagnética y con esto, la presencia de una de ellas.

A partir de la definición y derivación del índice *Dst* presentado en la sección 2.3, se concluye que este índice de actividad contiene la información necesaria para poder estudiar el decrecimiento de la componente horizontal del campo magnético y con ello el comportamiento de las tormentas geomagnéticas.

En este capítulo, mediante el cálculo de la dimensión fractal de *box-counting* del índice *Dst*, se estudia la utilidad que puede tener la dimensión fractal para caracterizar la evolución de la actividad geomagnética, y la posible conexión que puede tener la dimensión calculada con índices de actividad solar.

El cálculo de la dimensión de *box-counting* implica la elección de cierta ventana de datos de la serie de tiempo. En este capítulo se estudian tres maneras diferentes de construir el subconjunto de datos que define la ventana de tiempo a la cual se

le calcula la dimensión de *box-counting*. Primero, se estudian los estados calmos y tormenta (sección 4.1). Luego, se presenta el análisis de ventanas de ancho variable en torno a una tormenta (sección 4.2), y finalmente, se estudian las variaciones de la dimensión fractal a medida que se recorre una tormenta (ventanas móviles, sección 4.3). Los estudios anteriores fueron realizados para tormentas individuales y para años completos de alta actividad solar. Además, se presenta un análisis global de los resultados observados, considerando el ciclo solar 23 completo (sección 4.4).

Los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en la Ref. [86].

#### 4.1. Análisis de estados calmos y estados tormenta

Estudios previos [5, 17, 29–37] han mostrado que la fractalidad presente en sistemas como la magnetósfera terrestre o la superficie solar, varía según la actividad magnetosférica o solar, respectivamente. A partir de este hecho, sería interesante analizar el comportamiento de la dimensión fractal de la serie *Dst* en presencia de un estado calmo o de tormenta.

Utilizando la técnica descrita en la sección 3.2, en esta sección se analiza la dimensión fractal de una serie de tiempo *Dst* que caracteriza un “estado calmo” o un “estado tormenta”. Los años estudiados corresponden a años de alta actividad magnética, en los cuales es posible localizar tormentas grandes y aisladas. En efecto, se analizan los años: 1960, 1989, 2000, 2001 y 2003.

Tal como se explicó en el capítulo 2, un estado tormenta puede ser reconocido por un valor  $Dst < -50$  nT [66], y con ese umbral *Dst*, se registran entre 20 a 50 tormentas anuales. Una tormenta geomagnética tiene tres fases [96, 97]: una inicial (demora entre minutos u horas en completarse, y puede alcanzar un máximo de

decenas de nanoteslas), la fase principal (entre 30 minutos a varias horas y puede alcanzar un máximo negativo de cientos de nanoteslas), y una fase de recuperación (desde decenas de horas a una semana, donde el campo magnético vuelve al valor anterior a la fase inicial). En este trabajo, se analizarán sólo tormentas grandes y aisladas. Para esto se localizaron los valores mínimos del índice *Dst*, tales que  $Dst < -220$  nT. Se consideró este criterio, pues las tormentas grandes, a diferencia de las pequeñas, están relacionadas con eventos tales como llamaradas solares o eyecciones de masa coronal [98].

Basado en los tiempos que tardan las diversas fases de una tormenta magnética, se define un estado tormenta y un estado calmo de la siguiente manera:

- Estado tormenta: corresponde a un subconjunto de los datos o ventana que empieza una semana antes del valor mínimo del evento, y termina una semana después de éste.
- Estado calmo: corresponde al período de tiempo entre dos estados tormenta consecutivos.

Para ilustrar esta definición, en la figura 4.1 se muestran los datos para 1989, donde se pueden detectar cuatro eventos de tormenta, y las ventanas correspondientes.

Para una futura identificación, se ha rotulado cada estado presente en un año con números enteros consecutivos, empezando con el 1. Por ejemplo, en la figura 4.1, el año empieza con un estado calmo, entonces éste es el estado "1"; el siguiente estado corresponde a un estado tormenta, y éste es el estado "2". Por lo tanto, en este caso, al no existir dos estados tormenta contiguos, todos los estados calmos corresponden a números impares consecutivos, mientras que los estados tormenta a números pares.

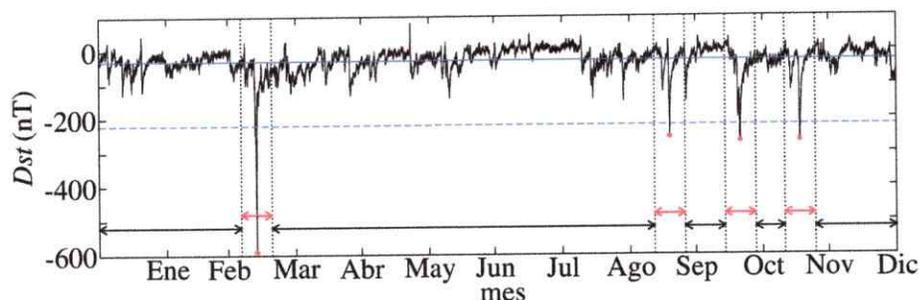


Figura 4.1: Serie de tiempo  $Dst$  para el año 1989, identificando los estados tormenta y calmos como se explica en la Sec. 4.1. La línea sólida corresponde al valor promedio  $Dst$ , y la línea segmentada al valor umbral considerado. Los puntos rojos muestran los valores mínimos  $Dst$  identificados en la Tabla 7.1. Las flechas rojas y negras especifican las ventanas correspondientes a estados tormenta y calmos, respectivamente.

La Tabla 7.1 muestra todos los eventos de tormenta encontrados, su respectivo valor mínimo  $Dst$ , y su rotulación de acuerdo con la definición explicada anteriormente, para los años considerados.

Realizando el procedimiento descrito en la sección 3.2, se calcula la dimensión de *box-counting* para cada estado tormenta y calmo para los cinco años en estudio. Los resultados se muestran en la figura 4.2, donde son usados los mismos rótulos usados en la Tabla 7.1 para identificar los estados. Los círculos rojos indican un estado tormenta.

Se puede notar que en general, un estado tormenta tiene una dimensión fractal menor que la dimensión de los estados calmos vecinos. Sin embargo, no es posible determinar un criterio global de cómo disminuye  $D$  durante un estado tormenta. En efecto, como se muestra la figura 4.3, un gráfico del promedio  $Dst$  para cada estado en función de su respectiva dimensión de *box-counting*, no revela una relación clara entre ambos cuando se estudian todas las tormentas. Este último resultado muestra que la razón por la que la dimensión fractal disminuye, no necesariamente corresponde a la existencia de una disminución en el índice  $Dst$ , puesto que no existe una relación

Fecha	Estado	Mínimo valor $Dst$ (nT)
01 Abr. 1960	2	-327
30 Abr. 1960	4	-325
06 Oct. 1960	6	-287
13 Nov. 1960	8	-339
13 Mar. 1989	2	-589
18 Sep. 1989	4	-255
19 Oct. 1989	6	-268
17 Nov. 1989	8	-266
06 Abr. 2000	2	-288
15 Jul. 2000	4	-301
12 Ago. 2000	6	-235
30 Mar. 2001	2	-387
11 Abr. 2001	3	-271
06 Nov. 2001	5	-292
30 Oct. 2003	2	-383
20 Nov. 2003	4	-422

Tabla 4.1: Valor mínimo  $Dst$  de los eventos ocurridos tales que  $Dst < 220$  nT. Cada valor mínimo ocurre, por definición, en el centro del estado tormenta. Los estados son etiquetados por números enteros consecutivos en cada año (ver figura 4.2, donde el mismo rótulo ha sido utilizado). De esta manera, el primer y segundo estado tormenta en un año son el estado 2 y 4, respectivamente, habiendo estados calmos entre ellos.

directa entre la magnitud de la tormenta y su dimensión. Entonces, la disminución de la dimensión fractal encontrada podría estar relacionada con otras propiedades de la información contenida en un estado tormenta y sus estados calmos vecinos.

## 4.2. Análisis de ventana de ancho variable en torno a una tormenta

Como un segundo camino para estudiar cómo la dimensión fractal está correlacionada con la presencia de una tormenta geomagnética, en esta sección se calcula la dimensión fractal para ventanas con ancho variable en torno a una tormenta.

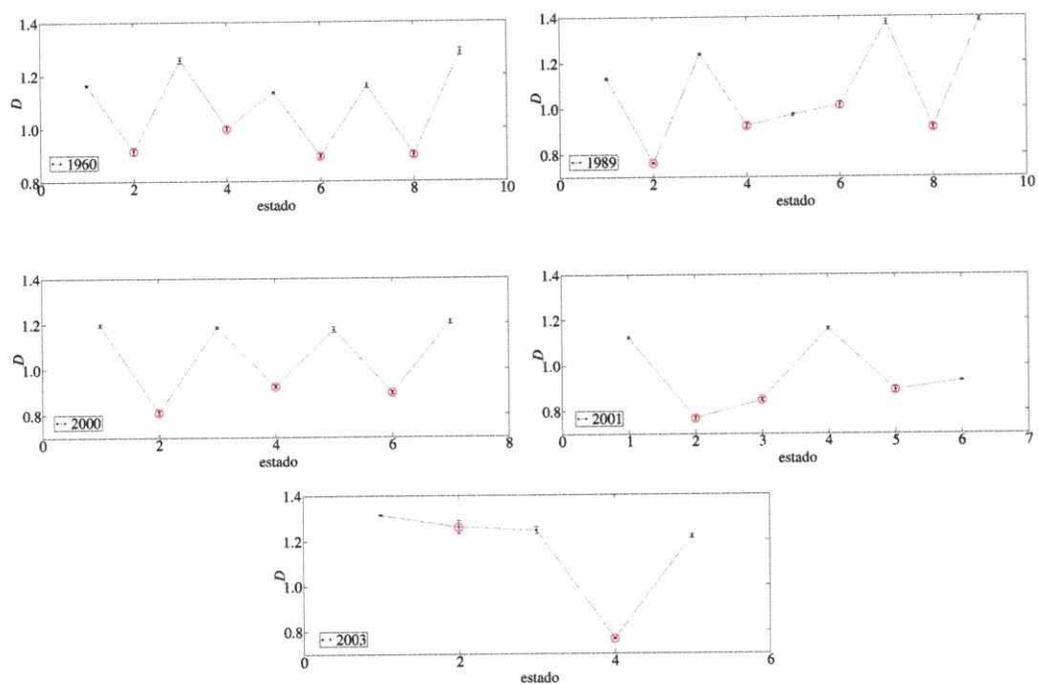


Figura 4.2: Dimensión de *box-counting* para estados calmo y tormenta en cada año en estudio. Las barras de error corresponden al error del ajuste de mínimos cuadrados del ajuste lineal al estimar la dimensión.

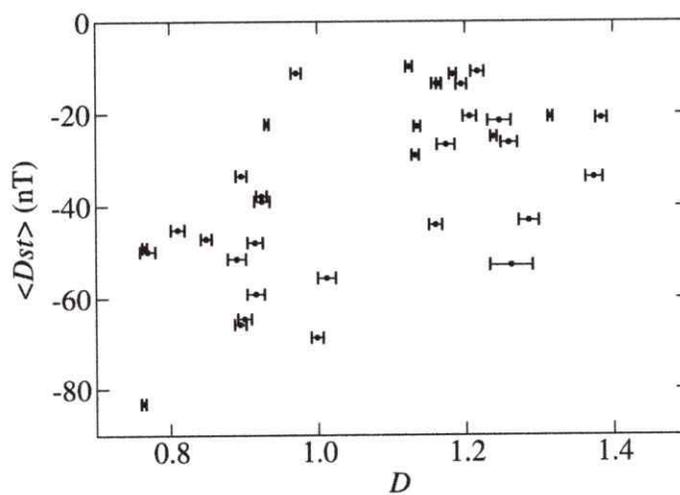


Figura 4.3: Promedio  $Dst$  para cada estado como función de la dimensión de *box-counting* con su respectiva barra de error (calculada como en la figura 4.2).

Si la conexión cualitativa entre la dimensión fractal y la existencia de una tormenta observada en la sección 4.1 es robusta, entonces cambiar el ancho de una ventana alrededor de una tormenta debería incrementar la dimensión fractal, puesto que más datos “calmos” son incluidos en la ventana.

Para esto, se consideraron ventanas que empiezan/terminan  $n$  semanas antes/después del mínimo valor  $Dst$  encontrado. La figura 4.4 ilustra esta definición de ventana, utilizando datos correspondientes a la tormenta del 13 de marzo de 1989.

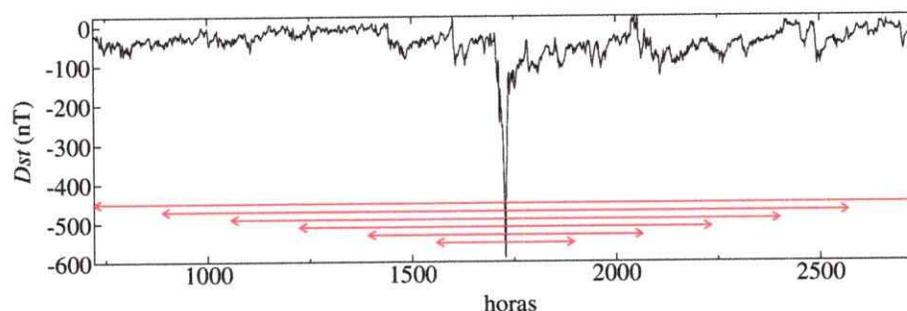


Figura 4.4: Ventana de ancho variable en torno a la tormenta del 13 de marzo de 1989 (valor mínimo corresponde al valor 1729 en las abscisas). La figura muestra el índice  $Dst$  como función del tiempo, medido en horas desde el inicio del año.

La figura 4.5 muestra los resultados para cuatro tormentas: 1 de abril de 1960, 13 de marzo de 1989, 6 de abril de 2000 y 30 de marzo de 2001, con intensidades mínimas de  $-327$  nT,  $-589$  nT,  $-288$  nT y  $-387$  nT, respectivamente. Estas tormentas fueron elegidas porque son aisladas, de modo que la ventana puede ser ampliada (más de seis semanas a cada lado) sin incluir un nuevo estado tormenta. En el caso del año 2001, los dos estados tormenta detectados son muy cercanos (distanciados en aproximadamente dos semanas, vale decir, separadas en una distancia un poco mayor que la ventana más pequeña considerada en este análisis), entonces hemos considerado ese evento como uno solo.

De los resultados encontrados se puede concluir que la dimensión de *box-counting* crece cuando aumenta el ancho de la ventana en torno a la tormenta, lo cual es consistente con lo presentado en la sección 4.1. Por lo tanto, tal como se infería, al incrementar el ancho de la ventana en torno a una tormenta, la importancia del evento decrece, registrándose un incremento en la dimensión fractal. Vale decir, la ventana empieza a ser más similar a un estado calmo.

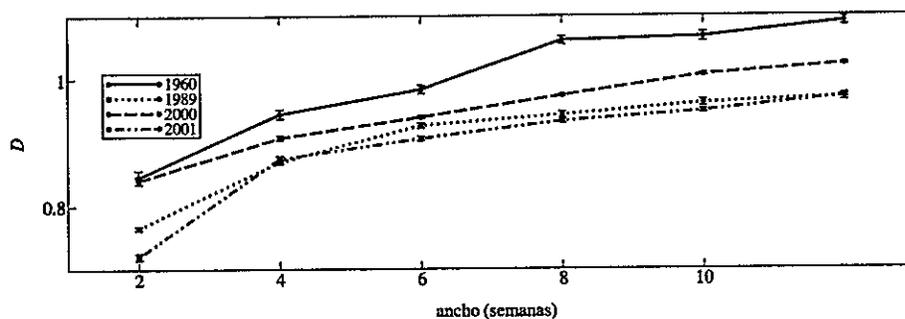


Figura 4.5: Dimensión de *box-counting* para las tormentas analizadas con sus respectivas barras de error, como función del ancho de la ventana.

Con el fin de detectar una posible correlación entre la dimensión fractal y el valor *Dst*, se ha construido la figura 4.6, donde se muestra el valor promedio *Dst* en una ventana, como función de la dimensión  $D$  para las mismas tormentas estudiadas en la figura 4.5. Es interesante notar que todas las curvas tienen una región de dependencia casi lineal entre  $D$  y *Dst*. Esto es consistente con los resultados anteriores. En efecto, al incrementar el ancho de la ventana, aumenta la dimensión  $D$ , ya que cada vez más y más datos de un estado calmo son incluidos. Similarmente, es esperable que cuando se incrementa el ancho de la ventana, podría también incrementarse el promedio del valor *Dst* por la misma razón. Por lo tanto, una relación lineal entre las dos cantidades no debería ser sorprendente.

Sin embargo, la figura 4.6 también muestra que la relación lineal se quiebra, lo

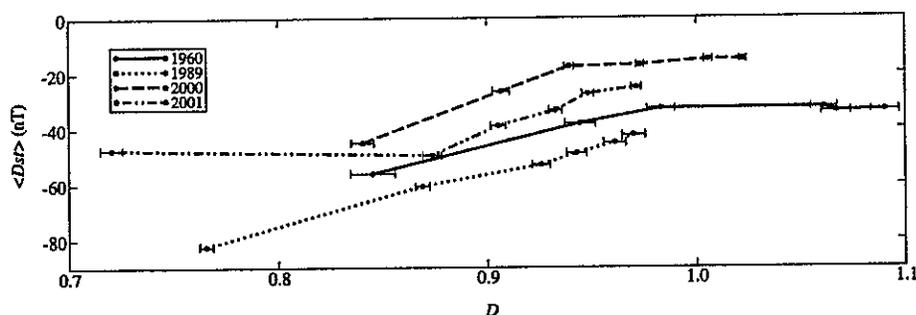


Figura 4.6: Valor promedio de  $Dst$  para cada ventana de ancho variable en torno de una tormenta como función de la dimensión de *box-counting* con sus respectivas barras de error. Las mismas tormentas de la figura 4.5 han sido consideradas.

que se puede explicar por la existencia de tormentas cercanas. Por ejemplo, el evento del año 1989 es muy aislado, luego, en este caso se exhibe una relación casi lineal entre el valor promedio  $Dst$  y la dimensión fractal, para todos los valores de anchos de ventana. En el año 2001, en cambio, la situación es diferente. Tal como se mencionó anteriormente, basta con duplicar el ancho de la ventana de dos a cuatro semanas para incluir otro evento cercano en este caso. Entonces, el promedio del índice  $Dst$  no debería aumentar, ya que la ventana todavía está dominada por el régimen tormenta. Consistente con esto, los dos primeros puntos en la curva correspondiente al año 2001 en la figura 4.6 están casi en una línea horizontal, mientras que los siguientes puntos muestran un comportamiento lineal con pendiente positiva. En el año 1960 también hay un segundo evento cerca, pero a una distancia más grande (ver figura 4.10), por lo que es necesario contar con más ventanas para incluir a ambos eventos; ésta es la razón de la ruptura en el comportamiento lineal que se observa en la parte derecha de la curva de la figura 4.6.

El hecho de que se observe una dependencia lineal en los años 1960, 2000 y 2001, pero en un rango más pequeño de anchos de ventana que en 1989, también es consistente con el hecho de que el valor máximo de  $Dst$  para estas tres tormentas es

más pequeño, de modo que alcanzan el valor medio de  $Dst$  de los estados tranquilos vecinos con un menor número de ventanas.

También se puede observar en la figura 4.6 que, en el rango en el que son lineales, parece haber una pendiente común en los años 2000 y 2001, y otra para 1960 y 1989. Esto podría estar relacionado con variaciones en las propiedades del viento solar, como la velocidad media o tiempo activo, y es consistente con la idea de que la intensidad de la tormenta depende del nivel de actividad del viento solar como sugiere la Ref. [99]. Sin embargo, como el efecto no es observado en todas las tormentas analizadas, no se puede obtener una explicación más cuantitativa con nuestra caracterización de complejidad usando el estudio de la dimensión fractal.

### 4.3. Ventana móvil a lo largo de una tormenta

Los resultados mostrados en las secciones 4.1 y 4.2 muestran que la dimensión fractal decrece durante tormentas geomagnéticas. Con el fin de investigar la evolución de la dimensión fractal calculada a partir del índice  $Dst$ , como una representación de la complejidad de la dinámica de la corriente de anillo, ahora se calcula la dimensión fractal para ventanas de ancho fijo (dos semanas), inicialmente situadas antes de la tormenta a estudiar, y desplazadas en pasos de una semana a través del evento.

Se han analizado las mismas tormentas de los años 1989, 2000, y 2001 que se estudiaron en la sección 4.1. En todos los casos, la ventana está ubicada inicialmente en el primer día del año, y luego se desplaza hasta alcanzar la tercera semana después de la tormenta estudiada (ver Fig. 4.7).

Al igual que en la sección anterior, se calcula la dimensión de *box-counting* para cada ventana de datos usando el mismo método descrito en la Sec. 3.2. La figura 4.8 muestra los resultados obtenidos, y la comparación con su respectivo índice  $Dst$ .

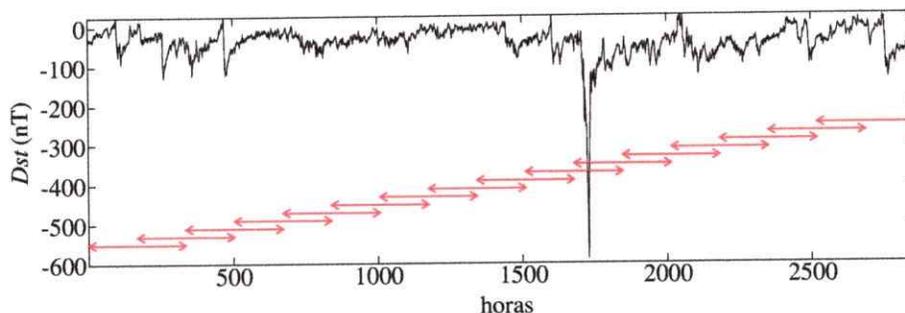


Figura 4.7: Ventana móvil a través de una tormenta (13 de marzo de 1989).

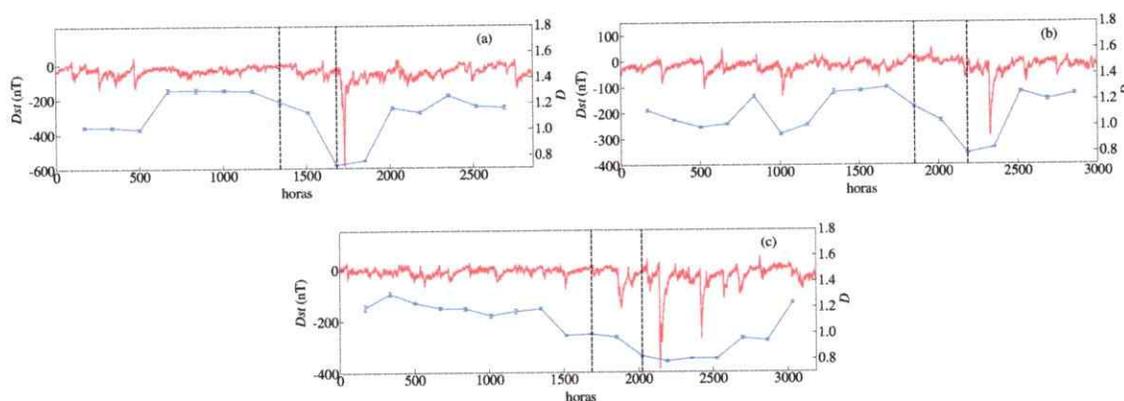


Figura 4.8: Dimension de *box-counting*  $D$  (línea azul) y el índice  $Dst$  (línea roja) para tormentas: (a) 13 de marzo de 1989, (b) 6 de abril de 2000 y (c) 30 de marzo de 2001, para ventanas móviles.

En todos los casos estudiados la dimensión de *box-counting* del índice  $Dst$  decrece cuando una tormenta se aproxima. Sin embargo, es interesante notar que se tiene un cambio notable en la dimensión fractal, incluso cuando la ventana no contiene ningún dato correspondiente a la tormenta que se aproxima. Esto se ilustra en la figura 4.8(a), donde dos líneas verticales han sido dibujadas para indicar la ventana de  $Dst$  usada para calcular la dimensión fractal cerca del valor 1500 de la abscisa. La tormenta no está incluida en la ventana, sin embargo la dimensión ya ha empezado a disminuir.

Por supuesto, el mínimo valor de la dimensión fractal ocurre en una ventana que

contiene el valor mínimo del índice  $Dst$ . Con el fin de apreciar este efecto de manera más sistemática, se ha calculado la correlación cruzada entre  $Dst$  y  $D$ . Para esto, primero se han interpolado los datos para  $D$  con el fin de tener la misma resolución de una hora presente en los datos  $Dst$ . Una interpolación lineal simple es suficiente para calcular la correlación lineal en este caso. El cálculo de la correlación cruzada entre  $Dst$  y  $D$  arroja un valor máximo en cero, al menos para las tormentas de los años 1989 y 2001, mientras que también se observa un valor máximo para la tormenta del 2000, aunque no claramente dominante (ver figura 4.9).

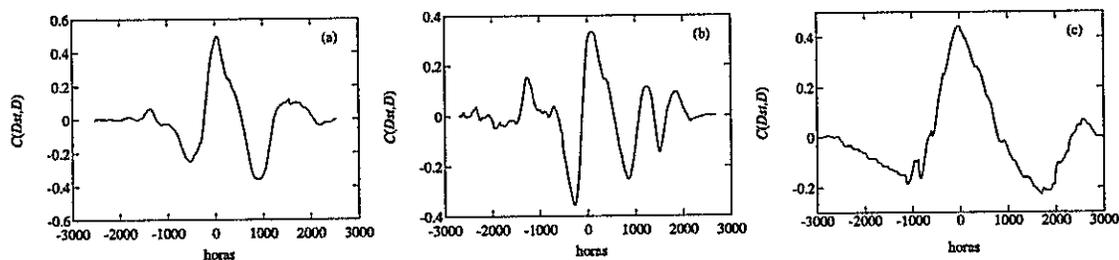


Figura 4.9: Correlación cruzada normalizada entre  $Dst$  y  $D$ . Para las tormentas: (a) 13 de marzo de 1989; (b) 6 de abril de 2000; (c) 30 de marzo de 2001 (ver figura 4.8).

Con el fin de estudiar si el efecto encontrado en la figura 4.8 es global y no válido sólo para unas pocas tormentas particulares, se ha repetido el análisis, pero ahora para los mismos cinco años completos estudiados (1960, 1989, 2000, 2001 y 2003).

La figura 4.10 muestra que, como se ha concluido anteriormente, la dimensión de *box-counting* disminuye a medida que una tormenta se aproxima, sugiriendo que la dimensión de *box-counting* de la serie  $Dst$ , o medidas similares de complejidad, podrían ser de relevancia a la hora la predecir tormentas geomagnéticas.

Esto también puede ser observado en la correlación cruzada de  $Dst$  y  $D$ , donde un valor máximo cercano a cero se observa para todos los años estudiados. Como una ilustración, en la figura 4.11 se muestran tres de ellos.

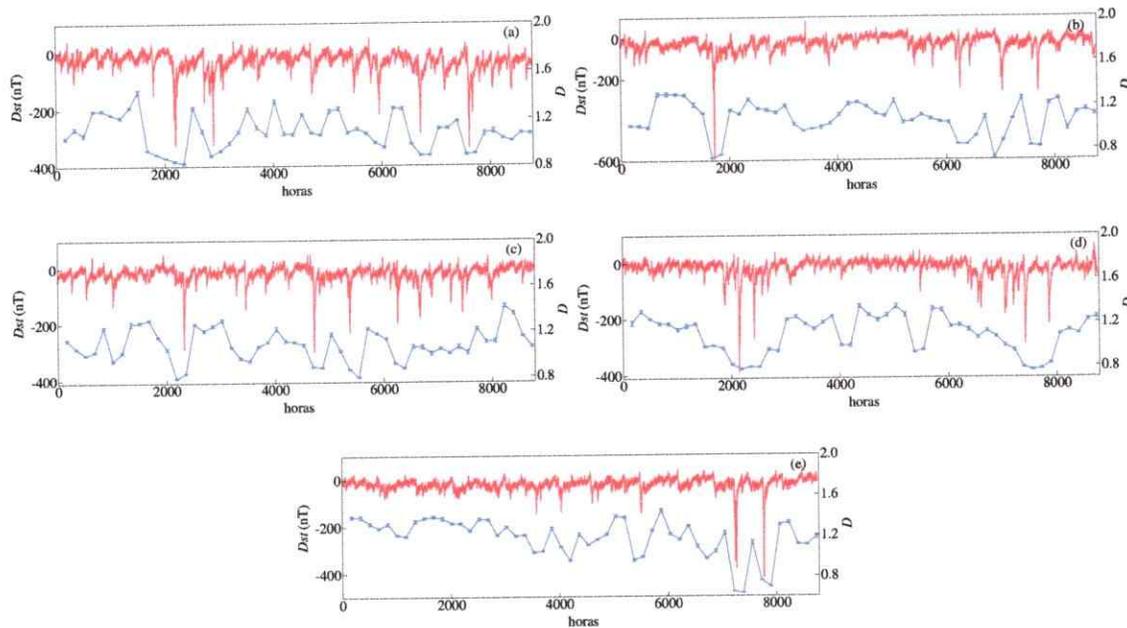


Figura 4.10: Dimensión de *box-counting* para cinco años en una fase solar activa. Las líneas rojas corresponden a la serie de tiempo *Dst*, las líneas azules a la dimensión de *box-counting* para cada ventana en movimiento. (a) 1960; (b) 1989; (c) 2000; (d) 2001; (e) 2003.

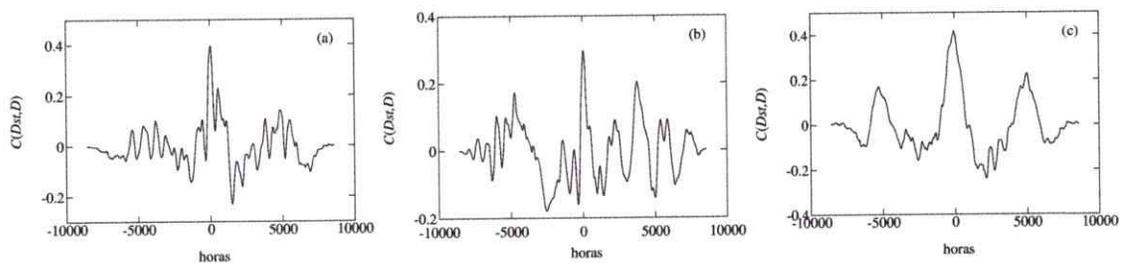


Figura 4.11: Correlación cruzada normalizada entre  $D$  y  $Dst$  para años completos. (a) 1960; (b) 1989; (c) 2001.

La actividad geomagnética está ciertamente ligada a la actividad solar. Tanto con eventos locales, como las CMEs (eyecciones de masa coronal), como también con eventos globales, tales como el ciclo solar. Ambos eventos tienen impacto sobre la magnetósfera terrestre, como se ve por ejemplo en la dinámica de las auroras. Por esto, resulta interesante estudiar si existe una señal de esta conexión en la evolución de

las dimensiones fractales calculadas aquí. Para esto, se analiza la posible correlación entre la complejidad en la serie de tiempo *Dst* con algunos índices que caracterizan la actividad solar, mediante la comparación de la dimensión fractal asociada con la serie *Dst* con el índice de la llamarada solar y el índice coronal [75], que son medidas de energía liberada por el Sol, como se explicó en el capítulo 2.

En esta tesis, se considera el índice promediado de llamarada solar total (suma de los índices del hemisferio norte y sur del Sol), en las mismas ventanas utilizadas para calcular la dimensión fractal  $D$  en la figura 4.10.

Los resultados se muestran en la figura 4.12 (izquierda). Notemos que todas las figuras tienen la misma escala horizontal y vertical. Esto permite mostrar que, incluso cuando las intensidades de las llamaradas solares son diferentes, los períodos de gran índice de llamarada solar están acompañados por una disminución de la dimensión fractal  $D$  de la serie de tiempo *Dst*. Esto es muy claro para el evento del año 1989 [figura 4.12 (a), izquierda], y algo menos evidente, pero todavía claro, para el año 2001 [figura 4.12 (b), izquierda]. Sin embargo, para el evento de 2000 no es evidente.

Tal como se explicó en el capítulo 2, otra cantidad propuesta para caracterizar la actividad magnética solar es el índice coronal [75].

Como se hizo con el análisis del índice de llamarada solar, se realiza un promedio del índice coronal sobre las mismas ventanas que se utilizan para calcular la dimensión fractal  $D$ , y los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.12 (derecha).

De los resultados obtenidos, se puede notar que, aproximadamente 1 ó 2 semanas antes del valor mínimo de  $D$ , que corresponde a la tormenta, hay un máximo en el índice coronal. Sin embargo, esto sólo se ve claramente en relación con las posiciones de los valores máximos y mínimos. Un análisis de las correlaciones más detallado, utilizando datos de índice coronal diario, no muestra una relación clara entre dichas cantidades.

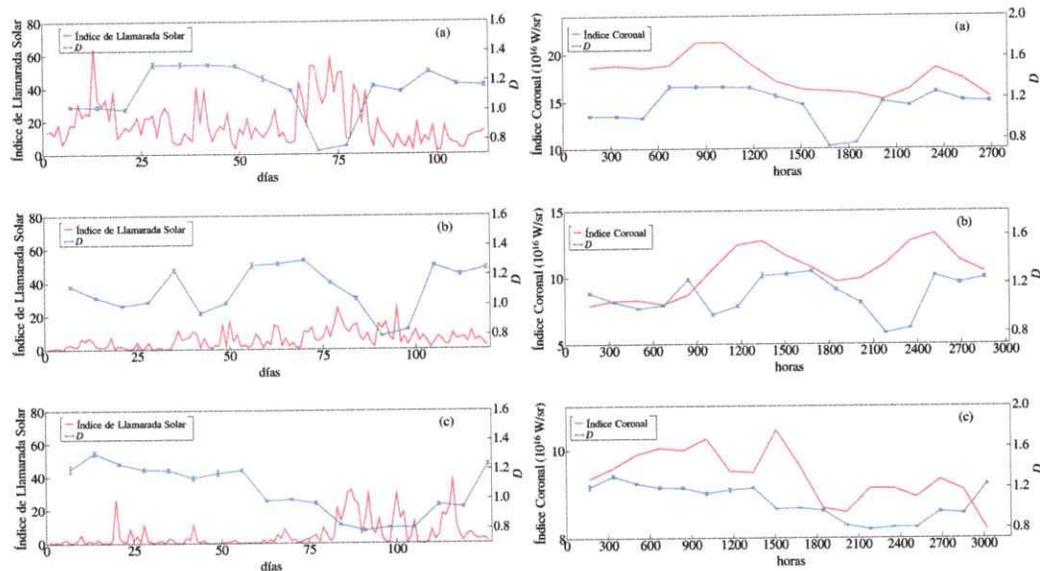


Figura 4.12: Dimensión de *box-counting*  $D$  (con sus barras de error) correspondientes al índice  $Dst$ , con el índice de llamarada solar (izquierda) e índice coronal (derecha) para tres tormentas: (a) 13 de marzo de 1989, (b) 6 de abril de 2000, y (c) 30 de marzo de 2001, con ventanas en movimiento.

Observamos así, que dos estimaciones diferentes de la actividad solar están correlacionadas en alguna medida con  $D$ , lo que sugiere un vínculo entre la actividad solar y las características fractales de la magnetósfera terrestre. Ciertamente, no es esperable encontrar un solo índice que revele esto, puesto que la dinámica geomagnética puede ser en gran parte, pero no exclusivamente determinada, por el comportamiento solar. Existen varios otros trabajos que han propuesto otras correlaciones de pares [100], pero es interesante notar la consistencia global de los resultados, por lo menos cuando una correlación se puede observar. En este sentido, también es importante mencionar el hecho de que a pesar de que la conexión entre el índice de llamarada solar y  $D$  no está clara para el evento del año 2000 [figura 4.12 (b), panel de la izquierda], el retraso de 2 semanas entre el índice coronal y  $D$  sí se observa, para el mismo evento [figura 4.12 (b), panel derecho].

## 4.4. Análisis del ciclo solar 23

En las secciones previas, se ha presentado el estudio de la relación entre tormentas geomagnéticas y fractalidad para algunos años elegidos por su alta actividad magnetosférica, la presencia de tormentas aisladas, y la disponibilidad de los datos.

Con el fin de investigar si las conclusiones obtenidas son universales, vale decir, si dependen de las características específicas de la actividad presente en los años estudiados, en esta sección se estudia la evolución de la dimensión fractal de la serie de tiempo *Dst* para un ciclo solar completo. De esta manera, se incluyen también años de baja actividad. El ciclo analizado corresponde al ciclo solar 23.

Como en la sección 4.1, primero se determinaron todas las tormentas geomagnéticas presentes, definiéndose entonces estados tormenta y calmos de la misma manera descrita en la Sec. 4.1. Luego se calcula la dimensión de *box-counting* de todos los estados encontrados.

Los resultados se presentan en la figura 4.13 (izquierda) y son consistentes con los encontrados en la sección 4.1: un estado tormenta tiene menor dimensión fractal que los estados calmos vecinos.

También se ha realizado el estudio para ventanas móviles, de manera similar al realizado en la sección 4.3, excepto que ahora las ventanas tienen un ancho de 3 meses, y son desplazadas respecto a la anterior en pasos de 1.5 meses. Luego, para un catálogo grande de datos, como un ciclo solar completo, se puede ver si las características fractales observadas en escalas de tiempo cortas, son también observadas en esta escala. Los resultados se muestran en la figura 4.13 (derecha).

Nuevamente, los resultados son consistentes con los mostrados en la sección 4.3: la dimensión de *box-counting* de la serie *Dst* decrece cuando una tormenta geomagnética

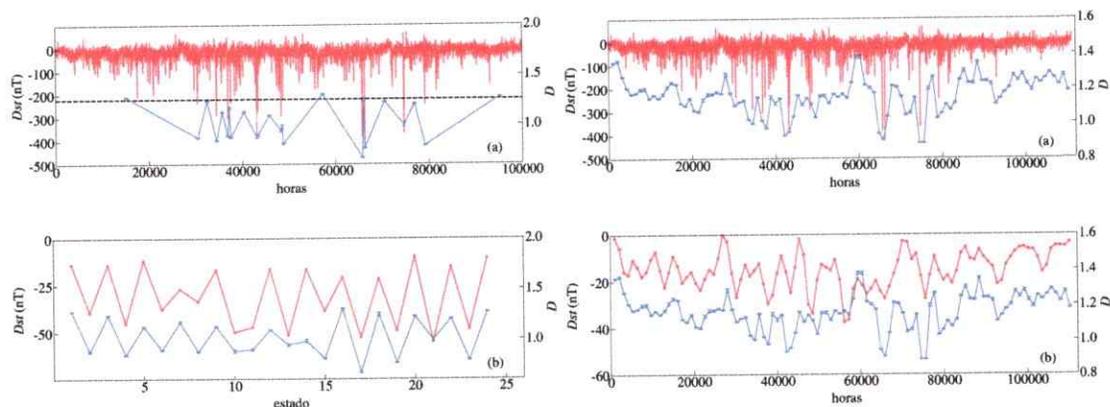


Figura 4.13: Dimensión de *box-counting* para estados tormenta y calmos (izquierda) y para ventanas móviles (derecha). Análisis realizado para el ciclo solar 23 completo. Las líneas azules con sus respectivas barras de error corresponden a la dimensión fractal, y las líneas rojas al índice *Dst*. (a) Usando datos de resolución cada una hora; (b) usando promedios de *Dst* sobre cada ventana.

se aproxima. De hecho, la correlación cruzada entre la serie *Dst* y la dimensión fractal *D* para el ciclo 23 también exhibe un máximo cercano a cero.

## 4.5. Resumen

En este capítulo se ha estudiado la evolución de la complejidad presente en la dinámica magnética de la magnetósfera terrestre. Para ello se ha analizado la dimensión fractal de la serie de tiempo del índice *Dst* en tres tormentas grandes y cinco años de alta actividad magnética.

Se ha encontrado que, en general, la dimensión fractal *D* de la serie *Dst* disminuye durante una tormenta geomagnética. Esta disminución se observó al analizar tres tipos diferentes de ventanas de tiempo, y comienza unos días antes de que el índice *Dst* alcance su valor mínimo, lo que sugiere que este análisis podría servir para predecir tormentas geomagnéticas.

La disminución de las dimensiones fractales durante una tormenta magnética

pudo ser confirmada por el análisis de la correlación cruzada, que típicamente dio un máximo en cero.

Con el fin de investigar una posible correlación entre la dimensión fractal de la serie  $Dst$  y la actividad solar, se realizó una comparación entre  $D$  e índices de actividad solar tales como el índice de llamarada solar y el índice coronal. Se encontró que, incluso para llamaradas solares de diferentes intensidades, períodos de gran índice de llamarada solar están acompañados por una disminución en la dimensión fractal  $D$ , por lo menos para dos de los tres eventos de tormenta analizados. En cuanto al índice coronal, descensos notables de la dimensión fractal  $D$  se observaron dos semanas después de un máximo en el índice coronal solar.

El hecho de que dos estimaciones diferentes de la actividad solar estén correlacionados en cierta medida con la dimensión fractal de la serie  $Dst$ , sugiere que la relación entre las dinámicas en la magnetósfera solar y terrestre también se puede estudiar al analizar las características fractales de las fluctuaciones magnéticas medidas en la Tierra.

Todos los análisis se realizaron en tormentas individuales, aisladas, lo que podría cuestionar la importancia de estos hallazgos, ya que su validez podría limitarse a los acontecimientos particulares examinados. Teniendo esto en cuenta, se repitió la comparación entre  $D$  y  $Dst$  para los cinco años completos estudiados en la sección 4.1. Al realizar dicho análisis se obtuvieron los mismos resultados que antes, es decir, la dimensión de *box-counting* para la serie  $Dst$  disminuye sistemáticamente cuando la tormenta se aproxima. Además del hecho de que la correlación cruzada entre  $D$  y  $Dst$  produce un valor máximo positivo claro en cero, una clara disminución de  $D$  se puede observar antes del inicio de la tormenta (como se se ha explicado anteriormente), lo que refuerza la sugerencia de que la dimensión fractal podría ser de relevancia para

la predicción de las tormentas geomagnéticas.

Con el fin de comprobar si nuestra elección de cinco años separados ha sesgado nuestros resultados, también se comparó la dimensión fractal de la serie *Dst* con el índice de llamarada solar, para el ciclo solar 23 completo. En este análisis de gran escala también se encontró que la dimensión fractal  $D$  disminuye durante las tormentas geomagnéticas, y la correlación cruzada entre  $D$  y *Dst* muestra un máximo positivo cerca de cero, consistente con lo observado en el caso de las tormentas individuales y el análisis de los años completos. Esto sugiere que los resultados son cualitativamente independientes de la longitud de la muestra, lo cual es interesante, ya que significa que a pesar de que la serie de tiempo *Dst* no es estacionaria, en general, se pueden obtener conclusiones cualitativas robustas mediante el cálculo de la dimensión de *box-counting*.

## Capítulo 5

# Evolución temporal de la fractalidad: Magnetogramas

En el capítulo 4 se estudió la evolución de la dimensión fractal de la serie de tiempo *Dst*, concluyendo que la actividad magnética de la Tierra tiene correlación con sus propiedades fractales. La evolución de la serie de tiempo *Dst* está fuertemente influenciada por la actividad solar. Por su parte, la dinámica solar también tiene características fractales. En efecto, varios estudios relacionados con el cálculo de las dimensiones fractales ya sea usando algoritmos de *box-counting* u otros, han sido propuestos en el análisis de la dinámica compleja en la superficie solar. Por ejemplo, la dimensión fractal en regiones activas de la superficie solar ha sido calculada usando la relación perímetro/área [101,102], o el método integral de correlación [103]. Se puede encontrar una lista de las dimensiones fractales calculadas usando varios métodos en las Refs. [38] y [41], y en la Ref. [104] se discuten comparaciones con simulaciones numéricas. Estos métodos también han sido aplicados a escenarios tales como la topología compleja de los campos magnéticos que conducen a eventos de liberación de energía en la superficie solar, o para dinámica auroral [40].

También se ha estudiado la naturaleza multifractal de la dinámica en la superficie solar, particularmente en regiones activas [51, 52, 103, 105]. La capacidad de

los análisis fractales y multifractales como herramientas de predicción de aparición de llamadas solares, o para correlacionarlas con índices de actividad solar como el índice de llamarada solar o número de manchas solares, ha sido estudiada previamente [43, 106, 107].

Sin embargo, todos los estudios anteriores han estado restringidos, en general, a análisis locales de la complejidad. Pero, ¿es posible encontrar alguna relación entre la actividad solar global, y propiedades fractales globales en el campo magnético solar? (del mismo modo que el índice *Dst* es un índice global de actividad magnética terrestre). Y, ¿existe una relación entre las propiedades fractales de las actividades magnéticas solar y terrestre, que se puedan relacionar con la física que existe entre ellas?

Con el fin de investigar la relación entre las dinámicas geomagnética y solar a partir del estudio de las características fractales presentes, ahora estudiamos las propiedades fractales de la configuración magnética en la superficie solar. Los resultados obtenidos en este capítulo fueron publicados en la Ref. [86].

## 5.1. Análisis de años de alta actividad solar

En el capítulo 4 se han estudiado los años 1960, 1989, 2000, 2001 y 2003. En este capítulo se intentará comparar el análisis de magnetogramas con el de todos los años utilizados anteriormente, pero no hay magnetogramas en los años 1960 y 1989, por lo que restringiremos el análisis a los años 2000, 2001 y 2003. Específicamente, se analizan magnetogramas tomados del MDI Daily Magnetic Field Synoptic Data (Solar Oscillations Investigations (SOI) project [54]), como el mostrado en la figura 5.1.

Si observamos el magnetograma de la figura 5.1, notamos que a diferencia de otros magnetogramas donde se observa sólo una cara del Sol (ver otros tipos de

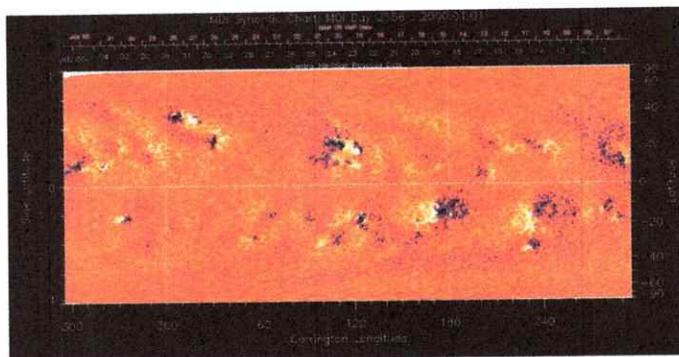


Figura 5.1: Magnetograma del 1 de enero de 2000.

magnetogramas en la Ref. [108]), en este caso se ha realizado una proyección de la superficie del Sol de tal forma de generar una imagen rectangular que represente al campo magnético solar en el disco solar completo. Se obtiene realizando promedios de varias observaciones recogidas en el curso de una rotación solar completa (27 días). Debido a la proyección de la superficie esférica en el plano, la distribución de puntos que representan la configuración magnética solar podría cambiar, alterando a su vez la dimensión fractal de la imagen. Entonces, para calcular apropiadamente la dimensión fractal para un magnetograma, es necesario considerar los efectos de proyección en la imagen, que son pronunciados mientras más cerca de los polos miramos. Muchos estudios donde se calcula la dimensión fractal para un *MDI full disk magnetogram* [41, 43] han lidiado con este problema de distorsión analizando sólo los datos observados en latitudes menores a 60 grados en el disco solar. En este trabajo, en cambio, se consideran magnetogramas como el mostrado en la figura 5.1, que consideran toda la superficie solar. Sin embargo, se observa que para todos los magnetogramas utilizados la actividad está concentrada dentro de los 60 grados de latitud solar, de modo que la contribución de los puntos en latitudes mayores es marginal y no debería afectar nuestras conclusiones.

Para calcular la dimensión fractal de un magnetograma como el mostrado en la figura 5.1, es necesario construir un diagrama de dispersión, por lo que se requiere convertir la imagen a un patrón de ceros y unos, o equivalentemente, a un patrón de puntos blancos y negros. Luego, se puede calcular la dimensión de *box-counting* de los puntos blancos o negros, usando el mismo método presentado en la sección 3.1. En este trabajo, el diagrama de dispersión corresponderá a los puntos blancos y a ellos se les calculará la dimensión de *box-counting*.

Obtener un patrón de puntos blancos y negros de un magnetograma a color es un proceso de dos pasos. Primero se transforma la imagen a escala de grises usando un algoritmo que elimina el tono y la saturación del color, y retiene sólo la luminancia (función `rgb2gray` de MATLAB [109]).

Ahora que la imagen es un patrón de intensidades, codificadas en archivos como números enteros de 0 (negro) a 255 (blanco), donde el color blanco está asociado a zonas de mayor campo magnético, se debe elegir cierto umbral de intensidad  $\alpha$ , sobre o bajo el cual un punto es considerado blanco o negro, respectivamente. Finalmente, la dimensión de *box-counting* es calculada para la región de intensidad blanca, que contiene la información de la zona con mayor actividad magnética en la fotosfera solar.

La parte no trivial de este procedimiento es la elección de  $\alpha$ . Si el umbral es muy pequeño, entonces resultará una imagen esencialmente blanca, y si éste es muy alto, la imagen podría ser esencialmente negra. Es importante, entonces, que el valor de  $\alpha$  sea escogido de tal manera que las propiedades fractales del patrón sean preservadas. Para tomar esta decisión, se han considerado 4 magnetogramas correspondientes a 4 días de baja actividad solar elegidos aleatoriamente, y se ha calculado la dimensión de *box-counting* para todas las imágenes que resultan al elegir varios valores del

umbral entre 0 y 255. Los resultados se muestran en la figura 5.2.

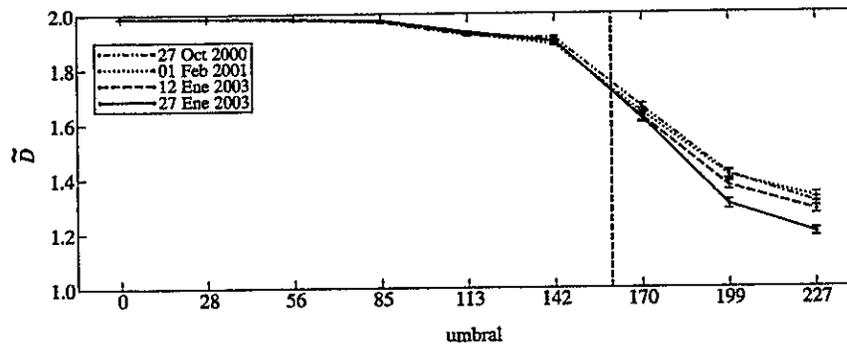


Figura 5.2: Dimensión de *box-counting* para cuatro magnetogramas, usando diez valores diferentes del umbral  $\alpha$  (ver texto). La línea vertical corresponde al umbral elegido,  $\alpha = 155$ .

De la figura 5.2 se observa que para el caso  $\alpha = 0$  (todos los puntos son considerados blancos), la dimensión fractal tiende a  $\tilde{D} = 2$ , lo cual es consistente con lo esperado. Al aumentar el umbral, la dimensión fractal disminuye de tal forma que para el caso  $\alpha \sim 255$  (casi todos los puntos son considerados negros), la dimensión fractal debería tender a cero (dimensión de un punto). Sin embargo, de la figura se observa que la dimensión se aproxima hacia  $\tilde{D} \sim 1$  sin llegar a este valor. Esto ocurre pues tal como se observa en la figura 5.1, existen líneas blancas verticales y horizontales, que son las últimas líneas en desaparecer. Luego, la dimensión fractal para un umbral suficientemente grande, debería ser cercana a 1 pero mayor que ese valor (cercana a la dimensión de una recta).

A partir de la figura 5.2, escogemos como umbral  $\alpha = 155$ , ya que está en una región de la figura donde la dimensión fractal no es demasiado sensible a la elección de  $\alpha$  (algo importante, porque dicha elección, después de todo, es arbitraria); y, por otra parte,  $\tilde{D}$  es claramente no entero, lo que significa que las características fractales de la figura 5.1 son preservadas.

Notemos que la dependencia de la dimensión fractal con el umbral es un indicio de la naturaleza multifractal del sistema, ya que cada umbral hace visible estructuras en escalas diferentes [110].

La figura 5.3 muestra el patrón blanco y negro que resulta al usar  $\alpha = 155$  con la figura 5.1. Basado en un patrón como éste para cada magnetograma diario disponible, se calcula la dimensión de *box-counting*.

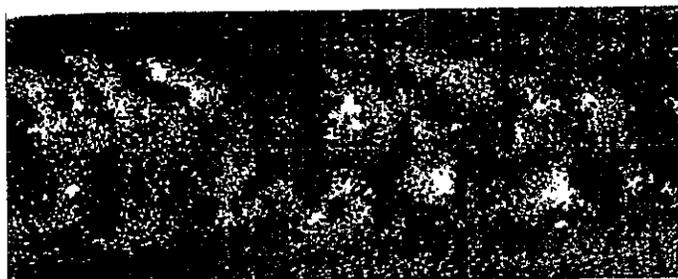


Figura 5.3: Patrón blanco y negro obtenido del magnetograma de la figura 5.1, usando un umbral  $\alpha = 155$ .

Los resultados para todos los magnetogramas diarios en los años 2000, 2001, y 2003 se presentan en la figura 5.4 (izquierda), donde las dimensiones han sido graficadas junto con el índice de llamarada solar para las mismas ventanas con las que se calculó la dimensión fractal (en este caso, cada ventana corresponde a un día). Esto se realiza con el fin de comparar la dimensión fractal encontrada, con la ocurrencia de llamaradas solares.

Primero, notemos que la dimensión de *box-counting* es claramente un valor no entero, lo cual es consistente con resultados previos en que sólo se consideraron regiones activas [51, 52, 102–105].

También, se observa una relación entre la dimensión fractal y el índice de llamarada solar. La dimensión tiende a aumentar cuando el índice de llamarada solar es alto. Sin embargo, es un efecto débil, ya que la correlación cruzada calculada entre

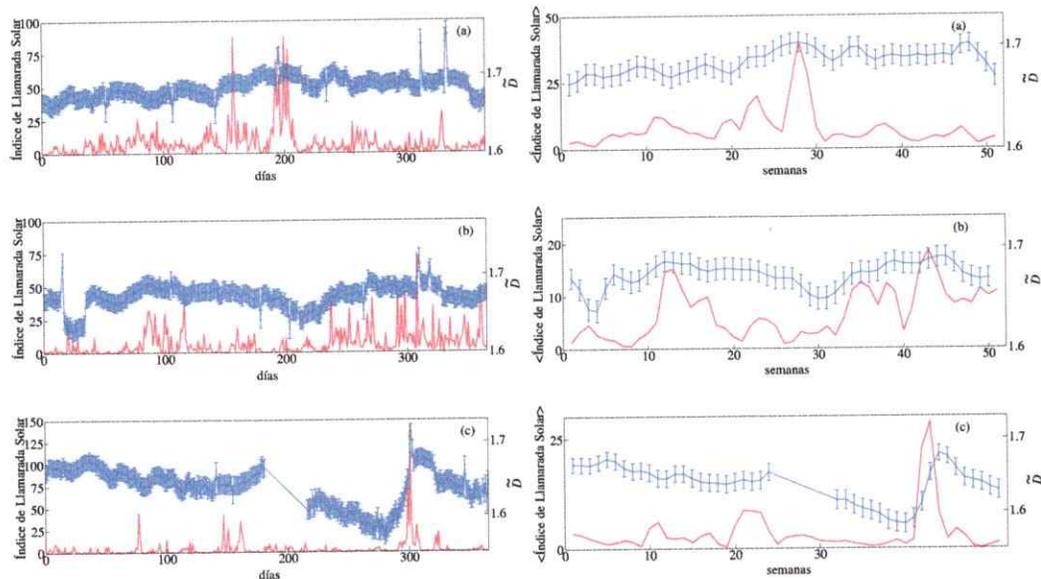


Figura 5.4: Dimensión de *box-counting* para los magnetogramas (línea azul con respectivas barras de error) e índice de llamarada solar (línea roja). Izquierda: valores diarios, derecha: promedios sobre ventanas en movimiento de los años: (a) 2000, (b) 2001, (c) 2003. El intervalo en que no hay puntos en la curva azul en la figura (c) se debe a que no existen magnetogramas en ese período .

ambas series de datos no muestra una tendencia clara.

Este efecto puede ser observado de mejor manera al promediar ambas cantidades, es decir, al considerar la dimensión fractal y el índice de llamarada solar sobre ventanas en movimiento. Para esto tomamos una ventana de ancho igual a dos semanas, tal como se realizó en el análisis con el índice *Dst*. Los resultados se muestran en la figura 5.4 (derecha) para los años 2000, 2001 y 2003.

Se puede notar en la figura 5.4 que la relación entre la dimensión fractal y el índice de llamarada solar es levemente más evidente para el análisis de ventanas móviles (ver diferencias entre el panel izquierdo y el derecho de la figura 5.4). Al calcular una correlación cruzada entre la dimensión y el índice de llamarada solar, se confirma esta observación en todos los casos, excepto para el caso del año 2003

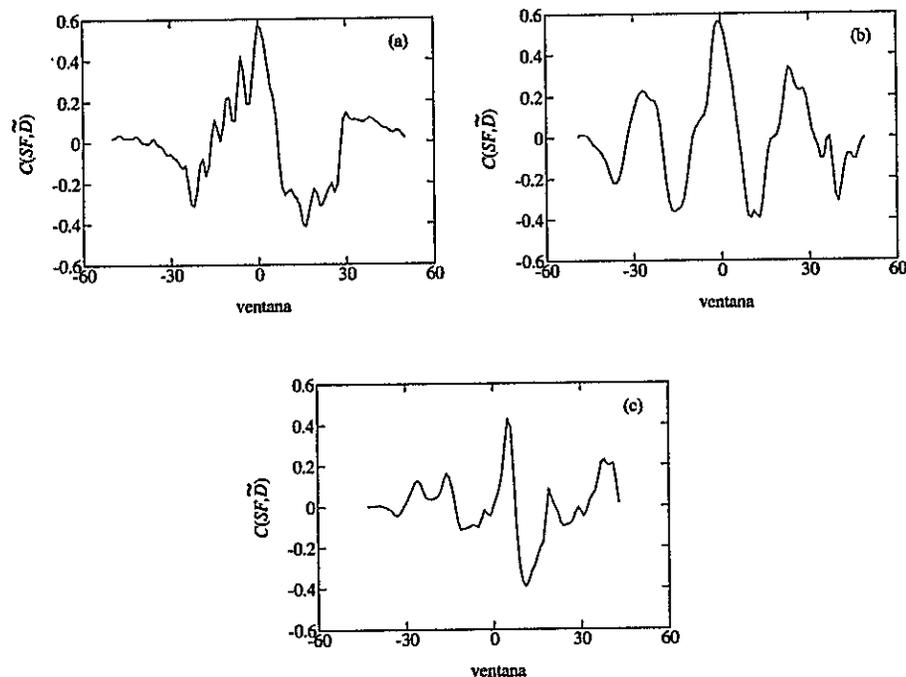


Figura 5.5: Correlación cruzada normalizada entre el índice de llamarada solar y  $\tilde{D}$  para todos los años en estudio, promediando sobre ventanas móviles de dos semanas de ancho. (a) 2000; (b) 2001; (c) 2003.

en que los datos del índice de llamarada solar no muestran una tendencia tan clara (ver figura 5.5).

Con el fin de verificar si la dimensión fractal de los magnetogramas está relacionada con la actividad magnética en la magnetósfera terrestre, comparamos estos resultados con la serie de *Dst* para los mismos años analizados en el capítulo 4. Esto se muestra en la figura 5.6. No hay una correlación evidente al observar ambas cantidades. De hecho, la correlación cruzada entre ellas no exhibe ninguna tendencia.

## 5.2. Análisis del ciclo solar 23

Al igual que en la sección 4.4, con el fin de investigar si los resultados obtenidos en la sección previa son de carácter universal, en esta sección se estudia la evolución

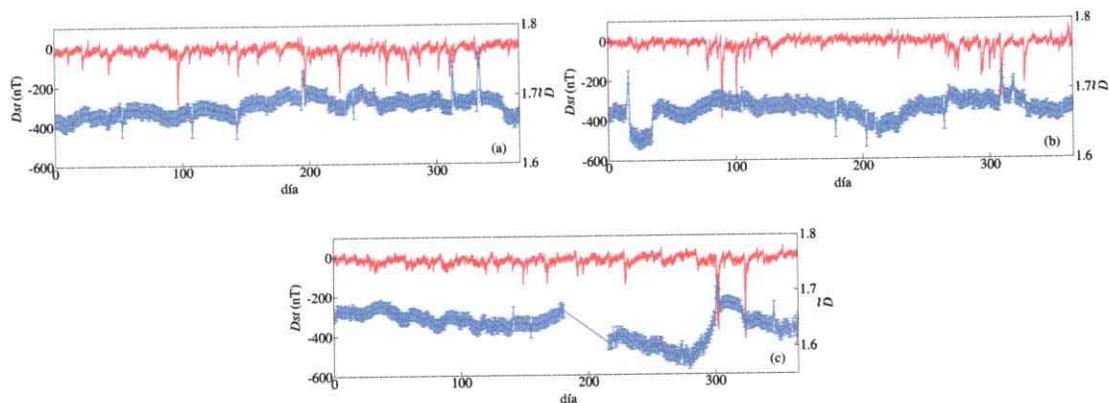


Figura 5.6: Dimensión fractal de magnetogramas (línea azul) e índice  $Dst$  (línea roja) en los años (a) 2000, (b) 2001, (c) 2003.

de la dimensión fractal calculada para magnetogramas, para un ciclo solar completo.

Entonces, utilizando el mismo método descrito en la sección 5.1, se calcula la dimensión de *box-counting*  $\tilde{D}$  a lo largo del ciclo solar 23 completo. Las dimensiones fractales resultantes se muestran como líneas azules en la figura 5.7.

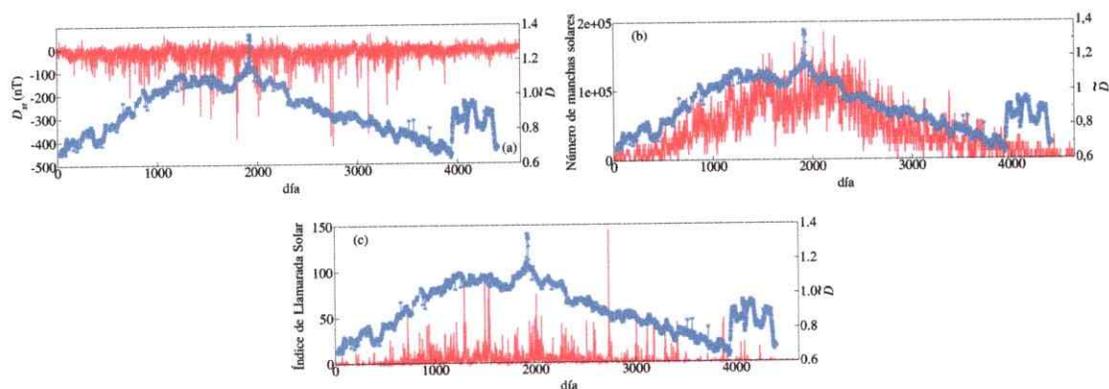


Figura 5.7: Dimensión de *box-counting* diaria con sus respectivas barras de error para el ciclo solar 23 (línea azul). Línea roja: (a) índice  $Dst$ ; (b) número de manchas solares; (c) índice de llamarada solar.

Notemos que se observa un escalón en  $\tilde{D}$  al final del ciclo solar, y un *peak* angosto al centro de la figura 5.7. Estos saltos se deben a problemas con los magnetogramas originales. Específicamente el problema radica en que en los magnetogramas existen franjas verticales (ver la región a la derecha de la figura 5.3, por ejemplo), que se vuelven más prominentes en las imágenes en algunos períodos de tiempo, y alteran el cálculo de  $\tilde{D}$ . Estas franjas no “evolucionan” de acuerdo al ciclo solar y son claramente espúreas, debidas a problemas en la detección de datos y subsecuente construcción de los magnetogramas. Lo importante es que a pesar de este efecto, la tendencia general en  $\tilde{D}$  a lo largo el ciclo solar es muy clara.

En la figura 5.7(a) se muestra la comparación entre  $\tilde{D}$  y *Dst*, sugiriendo que valores grandes de la dimensión fractal corresponden a períodos de alta actividad magnetosférica. Es importante notar que esta conclusión no fue posible de obtener al observar los resultados obtenidos en la sección 5.1. Esto sugiere que, para grandes escalas de tiempo, sí es posible encontrar una relación entre las características fractales de la fotosfera solar y la actividad geomagnética en la Tierra.

Con el fin de investigar la posible correlación entre la dimensión fractal  $\tilde{D}$  con la actividad solar, en la figura 5.7(b), se compara la dimensión fractal  $\tilde{D}$  de los magnetogramas con el número de manchas solares. Se observa que valores grandes de la dimensión fractal corresponden a períodos de alta actividad solar. Esta conexión es mucho más clara que la observada en la figura 5.7(a).

Un análisis similar resulta cuando se compara  $\tilde{D}$  con el índice de llamarada solar 5.7(c).

### 5.3. Resumen

Es este capítulo se ha estudiado la evolución de la complejidad presente en la dinámica de la fotosfera solar mediante el cálculo de la dimensión fractal de magnetogramas diarios. Se realizaron dos análisis: el primero para una escala pequeña de tiempo, en el cual se analizaron tres años de alta actividad solar: 2000, 2001 y 2003. Mientras que a una escala mayor, se estudió la dimensión de *box-counting* para el ciclo solar 23 completo. Cada uno de los resultados obtenidos fue comparado con índices de actividad solar (en particular, el índice de llamarada solar, el índice coronal y el número de manchas solares) y actividad geomagnética (índice *Dst*).

En relación al análisis realizado en los tres años de alta actividad, se comparó la dimensión fractal  $\tilde{D}$  con el índice de la magnetósfera (*Dst*) y un índice solar (índice de llamarada solar). A partir de ello, se obtuvieron las siguientes conclusiones: existe una conexión débil entre  $\tilde{D}$  y el índice de llamarada solar, y una correlación ligeramente más evidente cuando la serie de tiempo se suaviza al promediar en ventanas de tiempo de dos semanas. Esta última relación es verificada al realizar la correlación cruzada, donde se observa un máximo en cero. Por otro lado, no se observó una relación particular al comparar la dimensión fractal de los magnetogramas con el índice magnetosférico *Dst*, ya sea al observar directamente la serie de tiempo respectiva, o al calcular la correlación cruzada.

Si bien la correlación encontrada entre las dimensiones fractales  $\tilde{D}$  y los índices de llamarada solar y el índice *Dst* es débil o casi nula, es mucho más evidente la presencia de una relación al estudiar una escala grande de tiempo, como el ciclo solar 23 completo. En efecto, la dimensión fractal de los magnetogramas solares muestra un aumento evidente alrededor del máximo solar, y se correlaciona claramente con la

correspondiente disminución en  $Dst$ , y el aumento en el número de manchas solares. Esto sugiere que así como la dimensión de *box-counting*  $D$  para la serie  $Dst$  podría ser útil para caracterizar tormentas geomagnéticas,  $\tilde{D}$  también podría ser útil para caracterizar la evolución de la actividad en la fotosfera solar a lo largo de un ciclo solar. Sin embargo, vale la pena notar que el índice de la llamarada solar no está tan claramente correlacionado con la dimensión fractal de los magnetogramas.

## Capítulo 6

# Modelo de capas (*Shell Model*) para turbulencia MHD

En los capítulos anteriores se ha presentado el análisis de la evolución de la dimensión fractal de la actividad geomagnética (capítulo 4) y solar (capítulo 5) a través del cálculo de la dimensión de *box-counting* del índice *Dst* y de magnetogramas fotosféricos diarios, respectivamente.

A continuación, mediante un modelo teórico/computacional, se pretende reproducir la evolución de la fractalidad presente en la magnetósfera terrestre, con el objetivo de comprender e intentar determinar qué parámetros físicos pueden ser relevantes en la disminución de la dimensión fractal observada en el análisis del índice *Dst*.

Tal como se presentó en el capítulo 1, existen diversos modelos que se han utilizado para comprender y reproducir al menos cualitativamente la fenomenología de la dinámica solar y terrestre [58–60]. En esta tesis se estudia la utilidad de un modelo de capas o *shell model* para describir las características fractales de la magnetósfera terrestre.

Se ha considerado este modelo pues en trabajos previos se ha mostrado que reproduce el comportamiento de ley de potencia de la distribución de tiempos de calma entre eventos disipativos a nivel solar [61, 63], por lo que resulta interesante

estudiar si éste es capaz también de caracterizar la fractalidad a nivel magnetosférico.

Los modelos de capas o *Shell Models* han sido estudiados desde los años setenta, cuando se formuló el modelo de capas para turbulencia hidrodinámica. En ese momento, el principal objetivo era describir la estadística de la turbulencia en el espacio espectral mediante un conjunto simple de ecuaciones diferenciales ordinarias. Desde ese momento aumentó rápidamente el interés en su estudio y ya en la década de los ochenta se desarrolla un *shell model* para turbulencia magnetohidrodinámica (MHD), incluyendo interacciones entre los campos magnéticos y de velocidad. Si bien un *shell model* no da cuenta de la complejidad espacial de la turbulencia MHD, estos modelos pueden considerar valores realistas de los parámetros adimensionales que caracterizan la turbulencia (alto número de Reynolds magnético y cinemático, bajos o altos números de Prandtl, según corresponda). Este hecho hace que los *shell models* sean una buena alternativa en el momento de estudiar las propiedades de la turbulencia presente en un sistema [61-64]. Más aún considerando el gran costo computacional que significa realizar simulaciones directas de las ecuaciones de turbulencia MHD.

## 6.1. Turbulencia MHD y *Shell models*

En mecánica de fluidos se describen los fluidos en escalas espaciales grandes en comparación con el camino libre medio de las moléculas. En este límite el fluido es considerado como un continuo caracterizado completamente por un campo de velocidad  $u_i(\mathbf{x}, t)$ , un campo de temperatura  $T(\mathbf{x})$ , un campo de presión  $p(\mathbf{x})$  y un campo de densidad  $\rho(\mathbf{x})$ . Cada punto del fluido está entonces totalmente caracterizado por seis variables: tres componentes de velocidad, la presión, la temperatura, y la densidad. Con el fin de determinar la evolución de ellas, se requieren seis ecuaciones. Éstas se derivan de la conservación del momento, conservación de la masa,

conservación de la energía y la ecuación de estado. En ciertos escenarios algunas de las variables podrían ser aproximadamente constantes y el número de ecuaciones se podría reducir.

Cuando se estudia un fluido completamente turbulento, tradicionalmente se considera incompresible ( $\partial\rho/\partial t = 0$ ), eliminando inmediatamente la ecuación que especifica la densidad. Cuando las diferencias de temperatura son despreciables, se desacoplan las ecuaciones de momento y continuidad, quedando con un fluido descrito por la velocidad y el campo de presión. La dinámica de un fluido de este tipo se describe por la ecuación de Navier-Stokes [111]

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = -\partial_i p + \nu \partial_{jj} u_i + f_i, \quad (6.1)$$

y la ecuación de continuidad

$$\partial_i u_i = 0, \quad (6.2)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $f_i$  un forzamiento externo. Se ha considerado:  $\partial_i u_j = \partial u_j / \partial x_i$ ,  $\partial_{ij} u_k = \partial^2 u_k / \partial x_i \partial x_j$  y  $\partial_{kk} f = \nabla^2 f$  (denotando el laplaciano de  $f$ ).

Cuando el fluido descrito anteriormente es también magnetizado, entonces las ecuaciones anteriores son modificadas y se agrega la ecuación de inducción obtenida a partir de las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm para un medio en movimiento. En este caso, las ecuaciones que rigen el sistema están dadas por:

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i - \frac{1}{4\pi\rho} B_j \partial_j B_i = -\frac{\partial_i}{\rho} \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nu \partial_{jj} u_i, \quad (6.3)$$

$$\partial_t B_i + u_j \partial_j B_i = B_j \partial_j u_i + \eta \partial_{jj} B_i, \quad (6.4)$$

$$\partial_i u_i = 0, \quad (6.5)$$

$$\partial_i B_i = 0, \quad (6.6)$$

donde  $B$  corresponde al campo magnético y  $\eta = c^2/4\pi\sigma$  a la difusividad magnética, con  $\sigma$  la conductividad eléctrica. En (6.3) hemos ignorado el término de forzamiento; más adelante agregaremos términos de forzamiento tanto para velocidades como para el campo magnético en las ecuaciones del *shell model*. En lo sucesivo se considerará el caso de un fluido homogéneo ( $\rho = \text{constante}$ ) y el reescalamiento del campo magnético  $b = B/\sqrt{4\pi\rho}$ .

En el caso ideal ( $\nu = 0, \eta = 0$ ), las ecuaciones (6.3) y (6.4) conservan la energía total del sistema y la helicidad transversal:

$$E = \frac{1}{2} \int (u^2 + b^2) d^3r, \quad (6.7)$$

$$E_c = \int u_i b_i d^3r. \quad (6.8)$$

Utilizando las variables de Elsasser

$$\vec{z}^\pm = \vec{u} \pm \vec{b}, \quad (6.9)$$

las ecuaciones (6.3)–(6.6), se pueden escribir como [112]

$$\frac{\partial \vec{z}^\pm}{\partial t} + \vec{z}^\pm \cdot \nabla \vec{z}^\pm = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu^\pm \nabla^2 \vec{z}^\pm, \quad (6.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{z}^\pm = 0, \quad (6.11)$$

donde  $\nu^\pm = (\nu \pm \eta)/2$ , y  $P = p + B^2/8\pi$ . Luego, las ecuaciones (6.7) y (6.8) son equivalentes a conservar las pseudo-energías

$$E^\pm = \frac{1}{4} \int (z^\pm)^2 d^3r . \quad (6.12)$$

Por la condición de incompresibilidad,  $P$  se puede determinar resolviendo la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 P = -\nabla \cdot [\bar{z}^\mp \cdot \nabla z^\pm] . \quad (6.13)$$

Finalmente, realizando la transformada de Fourier de la ecuación (6.10), se obtiene la ecuación espectral de Navier-Stokes [113]

$$\frac{\partial z_\alpha^\pm(\vec{k})}{\partial t} = -ik_\beta \left( \delta_{\alpha\gamma} - \frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2} \right) \sum_{\vec{k}'} z_\gamma^\pm(\vec{k} - \vec{k}') z_\beta^\mp(\vec{k}') - \nu^\pm k^2 z_\alpha^\pm(\vec{k}) , \quad (6.14)$$

donde  $k^2 = k_j k_j$ .

La existencia de un estado turbulento en este sistema se puede describir en términos de ciertos parámetros adimensionales como el número de Reynolds y el número de Prandtl.

El número de Reynolds (Re) se define como

$$\text{Re} = \frac{u_l l}{\nu} ,$$

donde  $u_l$  es la velocidad característica y  $l$  una escala de distancia característica. Números de Reynolds altos corresponden a alto grado de turbulencia. En el caso de fluidos magnetizados, se puede definir también el número de Reynolds magnético (Rm)

$$Rm = \frac{ul}{\eta} .$$

A partir de ellos, se puede definir también el número magnético de Prandtl, que depende sólo de las propiedades del fluido, como

$$P_m = \frac{Rm}{Re} = \frac{\nu}{\eta} . \quad (6.15)$$

En la figura 6.1 se muestra un típico mapa de sistemas turbulentos en el plano (Re, Rm).

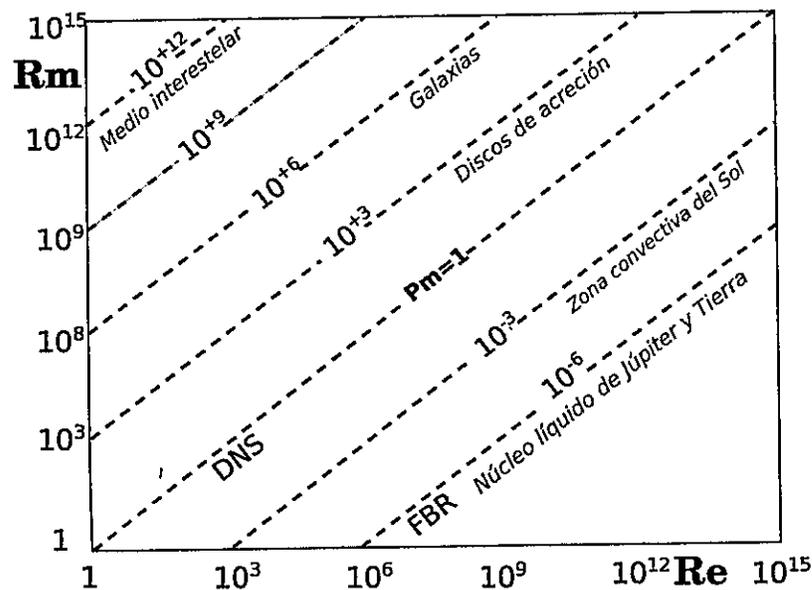


Figura 6.1: Típico mapa de sistemas turbulentos en el plano (Re, Rm). DNS corresponde a *Direct Numerical Simulation* y FBR a *Fast Breeder Reactor*. Las líneas segmentadas corresponden a ciertos valores fijos de Pm [112].

Con esto, la transferencia de energía de grandes a pequeñas escalas en fluidos turbulentos se puede describir como el flujo de energía desde un número de onda pequeño a uno grande en la representación espectral de la ecuación de Navier-Stokes.

Resolver el sistema de ecuaciones definido por la ecuación de Navier-Stokes espectral [ecuación (6.14)] de manera directa, tiene un alto costo computacional debido a que el número de grados de libertad crece significativamente cuando el número de Reynolds aumenta. De hecho, para números de Reynolds moderados,  $Re \sim 1000$ , el número efectivo de grados de libertad es del orden de  $10^7$ .

Una forma de estudiar la turbulencia MHD sin el gran costo computacional que significa resolver directamente las ecuaciones (6.14), es resolver, mediante un *shell model* o modelo de capas, una versión simplificada del espectro de Navier-Stokes o ecuaciones de turbulencia MHD.

La construcción del modelo consiste en dividir el espacio espectral en un número discreto de capas esféricas concéntricas cuyos radios crecen polinomialmente como  $k_n = k_0 \lambda^n$ , con  $n = 1, \dots, N$  y  $\lambda > 1$ , siendo  $N$  el número de capas total. Se considera un crecimiento polinomial de  $k$  con el fin de alcanzar grandes números de Reynolds con un moderado número de grados de libertad. El conjunto de números de onda contenidos en la esfera  $n$ ésima que no están contenidos en la esfera  $n - 1$  es llamado "enésimo *shell*" o "enésima capa".

A cada capa se le asigna, dependiendo del modelo, una o dos variables dinámicas ( $u_n(t)$  y/o  $b_n(t)$ , reales o complejas) que corresponden al promedio de los modos de velocidad o campo magnético entre la esfera  $n$  y la  $n + 1$ , o bien pueden ser consideradas como el incremento de velocidad o campo magnético en una escala de remolino (*eddy scale*)  $l = k_n^{-1}$ .

De la ecuación (6.14) se puede deducir que, en principio, todos los números de onda están interactuando. El modelo de capas se construye, en cambio, de tal manera que las interacciones en el espacio  $k$  son locales (las interacciones son con los dos números de onda vecinos más próximos).

El primer modelo de capas fue propuesto por A. M. Obukhov (1971) [114], no derivándolo directamente como una aproximación de la ecuación de Navier-Stokes. Luego, fue desarrollado por Gledzer (1973) [115] y 15 años más tarde gracias a Yamada y Ohkitani (1988) fue investigado numéricamente [116]. Las simulaciones mostraron que el modelo correspondía a una dinámica caótica, aumentando el interés en el estudio de estos modelos. Como no hay una conexión directa entre la ecuación de Navier-Stokes y el modelo de capas, se han propuesto muchas variaciones del modelo [111].

El modelo de capas hidrodinámico más simple es el modelo de Obukhov-Novikov, donde  $u_n$  es una variable real y la energía se conserva en ausencia de fuerzas y disipación [114]. Gloaguen *et al.* extendieron ese modelo introduciendo el campo magnético; de esta manera, las variables dinámicas son  $u_n$  y  $b_n$ , reales, y los invariantes del sistema son la energía total y la correlación cruzada (ver Ref. [117]). Este último modelo magnetohidrodinámico satisface el teorema de Liouville, lo que implica que se conserva el volumen del espacio de fase.

Un tercer invariante puede ser incluido al estudiar la generalización del modelo propuesto por Gloaguen con variables complejas, el llamado *GOY* (Gledzer-Ohkitani-Yamada) *shell model*. En este modelo, se conservan la helicidad magnética en 3D y el potencial cuadrático medio en 2D. La primera generalización del modelo fue propuesta por Biskamp (1994) [118]. En esta tesis, utilizaremos el *GOY shell model* [62, 113, 119] para describir eventos disipativos en la magnetósfera terrestre, tales como tormentas geomagnéticas.

## 6.2. GOY Shell Model

El modelo GOY de capas describe la dinámica de la cascada de energía en turbulencia MHD. En este caso, se asignan dos variables dinámicas  $u_n(t)$  y  $b_n(t)$  a cada capa o *shell*. Las variables representan el incremento de la velocidad y el campo magnético en una escala de *eddy*. El modelo se construye de tal manera que se conservan los tres invariantes ideales MHD: la energía, la correlación cruzada y la helicidad magnética o potencial magnético cuadrático. La siguiente derivación del modelo está basada en la Ref. [113].

En el modelo se utilizan las variables de Elsasser definidas en la ecuación (6.9). Como una simplificación de la ecuación de Navier-Stokes espectral [ecuación (6.14)], con interacción entre los dos vecinos más próximos, sin términos disipativos ni fuerzas externas [notemos que fácilmente se pueden incluir después, sumando un término de forzamiento como en (6.1), y el término proporcional a  $\nu$  en (6.14)], consideremos la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{dz^+}{dt} = ik_n (az_{n+1}^+ z_{n+2}^- + bz_{n+1}^- z_{n+2}^+ + cz_{n-1}^+ z_{n+1}^- + dz_{n-1}^- z_{n+1}^+ + ez_{n-2}^+ z_{n-1}^- + fz_{n-2}^- z_{n-1}^+) , \quad (6.16)$$

donde  $a, b, c, d, e$  y  $f$  son constantes a determinar. Una ecuación similar para  $z_n^-$  se obtiene intercambiando  $z_n^+$  y  $z_n^-$  en la ecuación (6.16).

Imponiendo la conservación de las pseudo-energías definidas en la ecuación (6.12) y considerando que  $k_n = k_0 \lambda^n$ , se obtienen las siguientes relaciones entre las constantes a determinar en (6.16):

$$a + \lambda c = 0 , \quad b + \lambda^2 e = 0 \quad \text{y} \quad d + \lambda f = 0 .$$

Notemos que cuando el campo magnético es cero (modelo hidrodinámico,  $z_n^+ =$

$z_n^- = u_n$ ), la ecuación (6.16) está dada por:

$$\frac{du_n}{dt} = ik_n [(a+b)u_{n+1}u_{n+2} + (c+d)u_{n-1}u_{n+1} + (e+f)u_{n-2}u_{n-1}] .$$

Entonces, imponiendo que el coeficiente del término  $u_{n+1}u_{n+2}$  sea igual a 1 y manteniendo  $a$  y  $f$  como parámetros independientes, se obtiene

$$c = -\frac{a}{\lambda} , \quad e = \frac{(a-1)}{\lambda^2} \quad \text{y} \quad d = -\lambda f .$$

Definiendo

$$\delta = a + \lambda^2 f , \quad (6.17)$$

$$\delta_m = a - \lambda^2 f , \quad (6.18)$$

podemos escribir (6.16) como

$$\begin{aligned} \frac{dz^\pm}{dt} = ik_n & \left( \frac{\delta + \delta_m}{2} z_{n+1}^\pm z_{n+2}^\mp + \frac{2 - \delta - \delta_m}{2} z_{n+1}^\mp z_{n+2}^\pm \right. \\ & + \frac{\delta_m - \delta}{2\lambda} z_{n+1}^\pm z_{n-1}^\pm - \frac{\delta + \delta_m}{2\lambda} z_{n+1}^\mp z_{n-1}^\pm \\ & \left. - \frac{\delta_m - \delta}{2\lambda^2} z_{n-1}^\pm z_{n-2}^\mp - \frac{2 - \delta - \delta_m}{2\lambda^2} z_{n-1}^\mp z_{n-2}^\pm \right) . \end{aligned} \quad (6.19)$$

A continuación escribiremos (6.19) en función de las variables  $u_n$  y  $b_n$ , reintegrando los términos disipativos [provenientes del término proporcional a  $\nu^\pm$  en (6.14)], y los forzamientos externos (un término  $f_n$  en la ecuación para  $u_n$ , y  $g_n$  para  $b_n$ ). Luego, la ecuación (6.19) en función de las variables  $u_n$  y  $b_n$  queda:

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt} = -\nu k_n^2 u_n + ik_n & \left\{ (u_{n+1}u_{n+2} - b_{n+1}b_{n+2}) - \frac{\delta}{\lambda} (u_{n-1}u_{n+1} - b_{n-1}b_{n+1}) \right. \\ & \left. - \frac{1 - \delta}{\lambda^2} (u_{n-2}u_{n-1} - b_{n-2}b_{n-1}) \right\}^* + f_n , \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{db_n}{dt} = & -\eta k_n^2 u_n + ik_n \left\{ (1 - \delta - \delta_m) (u_{n+1} b_{n+2} - b_{n+1} u_{n+2}) + \frac{\delta_m}{\lambda} (u_{n-1} b_{n+1} - b_{n-1} u_{n+1}) \right. \\ & \left. + \frac{1 - \delta_m}{\lambda^2} (u_{n-2} b_{n-1} - u_{n-2} b_{n-1}) \right\}^* + g_n . \end{aligned} \quad (6.21)$$

Para valores fijos de  $\delta$  y  $\delta_m$ , al imponer la conservación de un tercer invariante ideal  $H$  definido por

$$H = \sum_{i=0}^N \frac{|b_i|^2}{k_i^\alpha} , \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C} , \quad (6.22)$$

correspondiente a la helicidad magnética (caso  $\alpha$  real) o potencial magnético cuadrático (caso  $\alpha$  complejo), que entrega una medida de los grados de libertad de la complejidad estructural de  $\vec{B}$ , se encuentran dos posibles casos a estudiar:

- Modelo MHD de capas 2D:  $\frac{\delta_m - 1}{\delta_m} > 0$  para  $\delta_m < 0$  y  $\delta_m > 1$ . En este caso  $\alpha$  es real en la ecuación (6.22) y con ello se generan una familia de *shell models* en dos dimensiones. El tercer invariante es positivo y el modelo de capas de variables reales se recupera para el caso  $\alpha = 2$ . Aquí  $H$  puede ser caracterizado dimensionalmente como el potencial magnético cuadrático.
- Modelo MHD de capas 3D:  $\frac{\delta_m - 1}{\delta_m} < 0$  para  $0 < \delta_m < 1$ . En este caso  $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$ , siendo  $\alpha_R$  la parte real de  $\alpha$  y  $\alpha_I$  la parte imaginaria de  $\alpha$ . Con esto se genera una familia de *shell models* en tres dimensiones. Se recupera el modelo real de capas en tres dimensiones para el caso en el que el tercer invariante corresponde a la helicidad magnética y  $\alpha_R = 1$ ,  $\delta = 1/2$  y  $\delta_m = 1/3$ .

En esta tesis, trabajamos el modelo MHD de capas 3D, cuyas ecuaciones para el caso  $\lambda = 2$  están dadas por [113]:

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt} = & -\nu k_n^2 u_n + ik_n \left\{ (u_{n+1}u_{n+2} - b_{n+1}b_{n+2}) - \frac{1}{4} (u_{n-1}u_{n+1} - b_{n-1}b_{n+1}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} (u_{n-2}u_{n-1} - b_{n-2}b_{n-1}) \right\}^* + f_n, \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{db_n}{dt} = & -\eta k_n^2 u_n + ik_n \frac{1}{6} \{ (u_{n+1}b_{n+2} - b_{n+1}u_{n+2}) + (u_{n-1}b_{n+1} - b_{n-1}u_{n+1}) \\ & + (u_{n-2}b_{n-1} - u_{n-2}b_{n-1}) \}^* + g_n. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Con el objetivo de que el forzamiento sea estocástico, los términos de forzamiento son calculados de acuerdo a la ecuación de Langevin

$$\frac{d\tilde{f}_n}{dt} = -\frac{\tilde{f}_n}{\tau_0} + \mu, \quad (6.25)$$

donde  $\tilde{f}_n = f_n$  en (6.23) y  $\tilde{f}_n = g_n$  en (6.24),  $\tau_0$  es un tiempo característico de la capa mayor y  $\mu$  corresponde a un ruido blanco gaussiano.

La energía total disipada corresponde a

$$\varepsilon(t) = \nu \sum_{n=1}^N k_n^2 |u_n|^2 + \eta \sum_{n=1}^N k_n^2 |b_n|^2, \quad (6.26)$$

siendo el primer y segundo término la energía cinética y magnética disipada, respectivamente.

## Capítulo 7

# Características fractales de la actividad geomagnética a través de un modelo de capas MHD

En el capítulo 4, se presentó el estudio de la evolución de las características fractales de la actividad geomagnética mediante el análisis de la dimensión fractal de la serie de tiempo *Dst*. Para ello se definieron distintos tipos de ventanas de datos y con esto se concluyó, entre otras cosas, que la dimensión fractal durante una tormenta geomagnética o durante un período de alta actividad magnetosférica disminuye.

En este capítulo, un modelo de capas MHD como el explicado en el capítulo 6, se utiliza para describir eventos disipativos en la magnetósfera terrestre. Luego, la dimensión fractal de *box-counting* para un *scatter diagram* es calculada para la energía magnética disipada obtenida del modelo. Para efectos del análisis presentado en este trabajo, se considera que un *peak* en la serie de tiempo de la energía magnética disipada, estará asociado a un evento como una tormenta geomagnética.

De la misma manera que en el capítulo 4, en este capítulo se estudian tres maneras diferentes de construir el subconjunto de datos que define la ventana de tiempo a la cual se le calcula la dimensión de *box-counting*. Primero se estudian los estados calmos

y de tormenta (sección 7.2). En esta sección se definirá de una manera lo más rigurosa posible, el significado de un estado tormenta en la serie de tiempo estudiada. Luego, a partir de dicha definición, se presenta el análisis de ventanas de ancho variable en una tormenta (sección 7.3), y finalmente, se estudian las variaciones de la dimensión fractal a medida que se recorre una tormenta (sección 7.4) y la evolución de la dimensión al recorrer toda la serie de tiempo obtenida de la simulación (sección 7.5).

Considerando lo presentado en el capítulo 6, la existencia de un estado turbulento en un fluido magnetizado se puede describir en términos del número de Prandtl  $P_m = \nu/\eta$ . Además, tal como se observa en la figura 6.1 en el capítulo 6, en la mayoría de los sistemas turbulentos,  $P_m \neq 1$ . Sin embargo, trabajos previos donde un *shell model* ha sido utilizado con éxito para describir estadísticamente eventos disipativos en la superficie solar y la magnetósfera terrestre [61, 63], han considerado  $P_m = 1$ .

Si bien no se tiene registro del rango de  $P_m$  en la magnetósfera terrestre, a partir de la figura 6.1 pareciera ser razonable considerar valores de  $P_m$  cercanos a 1 para describir la dinámica turbulenta de la magnetósfera terrestre. Por esta razón, en las secciones 7.3, 7.4 y 7.5, se estudiará la evolución de la dimensión fractal para las series de tiempo obtenidas de la simulación para un rango de  $P_m \neq 1$ , pero cercano a 1.

A partir del análisis realizado, se logró determinar una región de parámetros para los cuales los resultados presentados en el capítulo 4 son cualitativamente reproducibles, lo que sugiere que el *shell model* es capaz de replicar las características fractales de la actividad geomagnética.

## 7.1. Energía magnética disipada y dimensión de *box-counting*

En el capítulo 4, se utilizó la serie de tiempo del índice *Dst* para describir la actividad geomagnética. Tal como se mencionó anteriormente, se pretende utilizar el modelo de capas para describir eventos disipativos en la magnetósfera terrestre. A diferencia de trabajos previos, en los que la energía disipada obtenida de un *shell model* [ecuación (6.26)], ha sido utilizada para estudiar fenómenos a nivel solar, en este caso consideraremos la energía magnética disipada como una representación de la información contenida en el índice *Dst*. Cabe señalar que de acuerdo a lo indicado en el capítulo 2, el índice *Dst*, a diferencia de otros índices (AL, por ejemplo), no es en rigor una medida de la energía disipada. Sin embargo, el índice *Dst* retiene de mejor manera la información relacionada con las tormentas geomagnéticas (eventos globales) que intentamos modelar a través del *shell model* discutido en este capítulo. Por esta razón, optaremos por la asociación descrita entre el índice *Dst* y la energía magnética disipada en el *shell model*.

Tal como se desprende de la ecuación (6.26), la energía magnética disipada obtenida de un modelo de capas como el presentado en el capítulo 6 está dada por:

$$\varepsilon_b(t) = \eta \sum_{n=1}^N k_n^2 |b_n|^2, \quad (7.1)$$

donde  $\eta$  es la resistividad magnética y  $b_n$  corresponde al campo magnético de la capa  $n$ -ésima.

Obtener una serie de tiempo para la energía magnética disipada definida en la ecuación (7.1), conlleva resolver numéricamente las ecuaciones (6.23), (6.24) y (6.25). Con el objetivo de que la energía magnética disipada definida en la ecuación (7.1)

represente de la manera más adecuada posible las características magnéticas de la magnetósfera terrestre, es necesario determinar las condiciones iniciales con las que se resolverán las ecuaciones del modelo.

Trabajos en los que se ha estudiado el comportamiento de ley de potencia en la distribución de tiempos de calma entre llamaradas solares a partir de un *shell model* [61,63], han considerado forzamientos en el campo de velocidad  $f_n$  distinto de cero, y en el campo magnético igual a cero ( $g_n = 0$ ). Esto debido a que se ha mostrado que los *shell models* reproducen el efecto dínamo magnético [113,119], entonces con un forzamiento en el campo de velocidad se genera el campo magnético, luego no es necesario forzar el sistema para producir el campo magnético del sistema. En nuestro caso, si bien también el campo magnético terrestre se debe a un efecto dínamo, con el objetivo de introducir el forzamiento que el viento solar ejerce sobre la magnetósfera terrestre, se ha considerado  $g_n \neq 0$ .

Por otro lado, si se considera la derivación del índice *Dst* presentada en el capítulo 2, se puede notar que las variaciones del campo magnético consideradas, corresponden a la diferencia entre el campo magnético observado y el campo magnético base de la Tierra. Vale decir, el índice *Dst* sólo contiene información relacionada con las perturbaciones del campo magnético de la Tierra que son originadas por perturbaciones externas [ver ecuación (2.2)]. A partir de esto, se ha considerado que inicialmente el campo magnético es cero en todos los *shells* (no existe una configuración magnética inicial). Además, se han perturbado sólo dos *shells* en el campo de velocidades. En efecto, la condición inicial corresponde a un mismo valor para ambos *shells*.

La ecuación (6.25) se ha resuelto numéricamente usando el algoritmo propuesto en la Ref. [120], explicado en profundidad en la Ref. [113], e implementado en el

código en Fortran desarrollado por el Grupo de Plasmas Astrofísicos de la Università della Calabria. En él se han definido las variables:  $\text{ntot}$  como el número total de iteraciones, y  $\text{dt}$  como el ancho de los pasos de tiempo. Con esto, el tiempo total de la simulación corresponde a  $\text{ntot} \times \text{dt}$ .

Luego, considerado  $\sigma = 0.01$ ,  $\tau_0 = 0.25$ , un número total de *shells*  $N = 19$  y dados valores de  $\eta$  y  $\nu$ , las ecuaciones del modelo de capas son integradas con las condiciones iniciales y parámetros ya descritos [ecuaciones (6.23) y (6.24)].

Una serie de tiempo para la energía magnética disipada obtenida de una simulación con  $\text{ntot} = 7 \times 10^8$  iteraciones, con pasos de tiempo de ancho  $\text{dt} = 10^{-4}$  (tiempo total de la simulación  $\text{ntot} \times \text{dt} = 7 \times 10^4$ ), se muestra en la figura 7.1. En ella, las zonas roja y azules corresponden a dos eventos disipativos adyacentes.

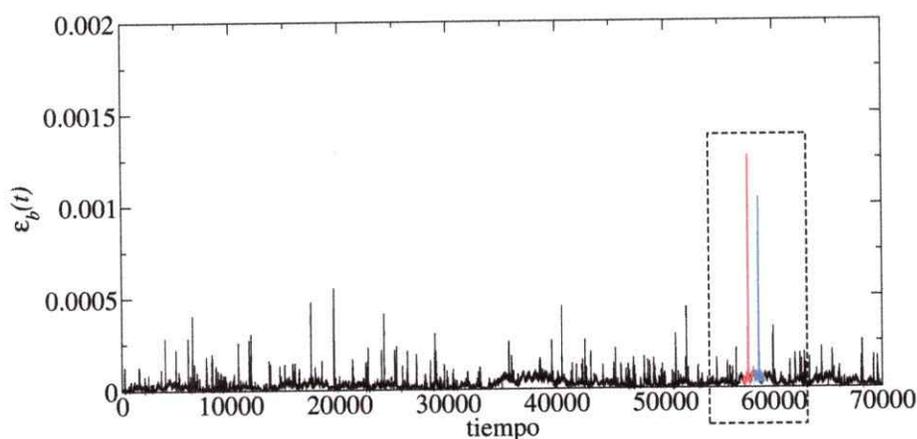


Figura 7.1: Serie de tiempo de la energía magnética disipada  $\varepsilon_b(t)$ , ecuación (7.1) para el *shell model* con  $\nu = \eta = 10^{-4}$ . Las regiones roja y azul en el interior del cuadro segmentado corresponden a dos “estados tormenta” adyacentes, como se explica en la sección 7.2.

A partir del método descrito en la sección 3.2, el cálculo de la dimensión fractal de la energía magnética disipada es realizado mediante un *scatter diagram* como el mostrado en la figura 7.2.

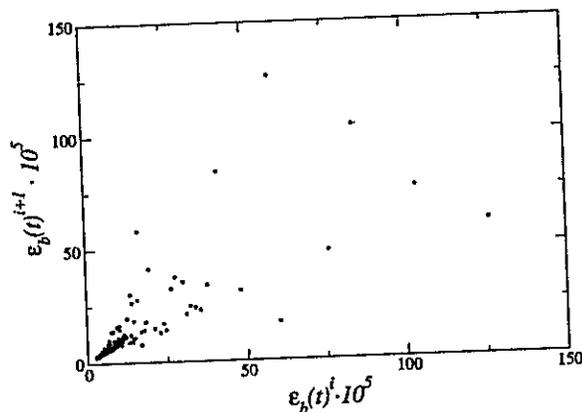


Figura 7.2: *Scatter diagram* para la serie de tiempo de la energía magnética disipada  $\varepsilon_b(t)$ . Los puntos rojos (azules) corresponden a la ventana de datos definida por la línea roja (azul) en la figura 7.1.

## 7.2. Análisis de estados calmos y de tormenta

De manera similar al procedimiento descrito en la sección 4.1 para el análisis de la serie  $Dst$ , el primer análisis realizado corresponde al de períodos calmos y de tormenta obtenidos a partir de un modelo de capas. El objetivo principal de este análisis es investigar si existe alguna relación entre eventos de actividad en  $\varepsilon_b(t)$  y su respectiva dimensión fractal, análogo a lo que se observó en el capítulo 4, donde un estado tormenta estaba asociado a una disminución de la dimensión fractal respecto a los estados de calma adyacentes.

Primero, es necesario definir los “estados de calma” y “estados tormenta”. Un trabajo similar fue realizado en la sección 4.1, donde dicha definición fue facilitada por el hecho de que existen criterios en la literatura sobre a qué corresponde llamar tormenta geomagnética, y cuál es la duración de ésta. Esto permitió definir un valor umbral de  $Dst$  para identificar tormentas, y un ancho del estado tormenta (en nuestro caso,  $Dst < -220$  nT y dos semanas, respectivamente). Nuestro primer paso

será establecer un criterio razonable para definir una "tormenta" en la simulación. Para ello, realizaremos una inspección de los datos.

Para esta inspección preliminar, calcularemos la serie de tiempo de  $\varepsilon_b(t)$  para un número de Prandtl [ecuación (6.1)],  $P_m = 1$  (valor que ha sido analizado previamente en las Refs. [61] y [63]). En este caso se han considerados valores de  $\nu$  y  $\eta$  tales que  $\nu = \eta = 10^{-\mu}$ , con  $\mu = 1, 2, 3, \dots, 12$ . De este modo, al igual que la serie mostrada en la figura 7.1, se calcularon  $7 \times 10^8$  iteraciones con un paso de tiempo de  $10^{-4}$ , de tal manera que el tiempo total de simulación corresponde a  $7 \times 10^4$ .

En el análisis realizado para la serie  $Dst$  (capítulo 4), se consideraron tormentas grandes ( $Dst < -220$  nT). En el mismo espíritu, ahora se consideran valores de  $\varepsilon_b(t)$  tales que

$$\varepsilon_b(t) > \langle \varepsilon_b(t) \rangle + n\sigma, \quad (7.2)$$

con  $n = 10$ , donde  $\langle \varepsilon_b(t) \rangle$  es el promedio de la serie y  $\sigma$  es la desviación estándar de la misma. De esta manera los estados tormenta se encontrarán suficientemente alejados del promedio de la simulación.

Luego, se requiere definir el ancho de un "estado tormenta". En la sección 4.1, el estado tormenta es definido como una ventana que empieza una semana antes del *peak Dst* y termina una semana luego de éste. Esta definición está basada en la definición típica de una tormenta magnética. Se requiere desarrollar una intuición similar para la simulación. Cabe destacar que en el caso de la serie  $Dst$ , un *peak* tiene un ancho mucho menor que dos semanas. De hecho, las dos semanas tienen información relacionada con las fases de formación y de recuperación de una tormenta. En el caso de las simulaciones, hay varias situaciones en las que el nivel de ruido es alto (véase, por ejemplo, el panel de la derecha de la figura 7.3), y por lo tanto es más difícil identificar tormentas individuales. Pero la figura 7.1 es interesante, ya

que se observan dos eventos grandes, que se distinguen claramente del ruido. En base a esto, definiremos un estado tormenta de tal manera que ambos *peaks* de la figura 7.1 puedan considerarse como dos eventos separados. Dado que la separación entre los dos *peaks* es 96000 pasos de tiempo, vamos a definir un “estado tormenta” identificando un *peak*, y luego considerando una ventana que comience 48000 pasos de tiempo antes, y termine 48000 pasos de tiempo después de dicho *peak*. Con esta definición, en la figura 7.1 hay dos estados de tormenta adyacentes, cada uno asociado con uno de los *peaks* presentes (ver líneas roja y azul en la figura 7.1). Así que, siguiendo el espíritu de la definición de estado tormenta realizada en el capítulo 4, se podría considerar una “semana” en los datos de la simulación equivalente a 48000 pasos de tiempo.

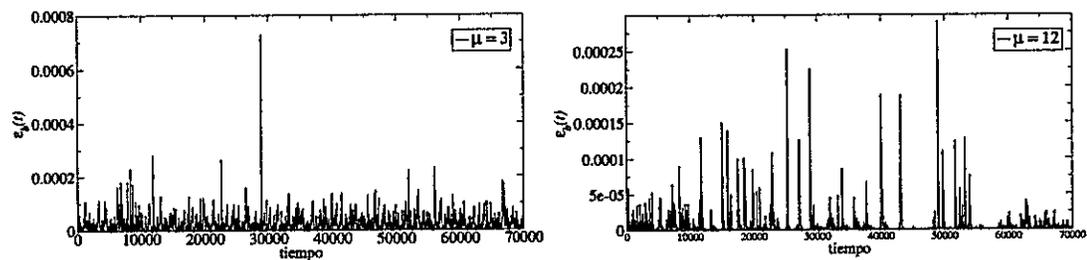


Figura 7.3: Energía magnética disipada  $\varepsilon_b(t)$ , ecuación (7.1), para el modelo de capas con  $\nu = \eta = 10^{-\mu}$ ,  $\mu = 3$  y  $\mu = 12$ .

Siguiendo con las ideas del capítulo 4, ahora que existe una definición de estados de tormenta y de calma, analizaremos simulaciones en las cuales se observan estados de tormenta aislados (de manera que la distinción entre tormenta y calma sea clara). Esto sucede para dos de las simulaciones realizadas,  $\nu = \eta = 10^{-\mu}$ , con  $\mu = 3$  y 4. En la figura 7.4 se observan en rojo los estados tormenta encontrados.

Para una futura identificación, se etiquetó cada estado de las simulaciones calculadas con números enteros consecutivos, partiendo del 1. Para ilustrar esta notación,

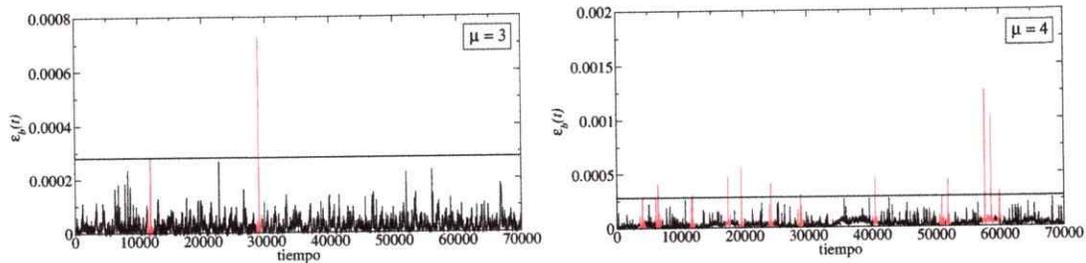


Figura 7.4: Serie de tiempo  $\varepsilon_b(t)$  para  $\mu = 3$  y 4, identificando los estados tormenta y calmos según la definición presentada en la sección 7.2. La línea sólida horizontal corresponde al umbral definido para identificar una tormenta [ver ecuación (7.2)]. Las zonas rojas corresponden a datos de un estado tormenta.

en la tabla 7.1 se muestran los *peaks* encontrados en la simulación realizada con  $\mu = 4$ , y sus respectivas etiquetas asignadas. Los números no escritos en la tabla corresponden a estados calmos intermedios entre dos estados tormenta adyacentes.

Tiempo	Estado	Máximo valor $\varepsilon_b(t) \times 10^{-4}$
4016	2	2.84
6521	4	4.05
11900	6	3.05
17420	8	4.77
19523	10	5.52
24131	12	4.14
28858	14	3.03
40501	16	4.51
50970	18	2.91
51949	20	4.38
57694	22	12.61
58654	23	10.35
59979	25	3.30

Tabla 7.1: Valor máximo del *peak* tal que  $\varepsilon_b(t) > \langle \varepsilon_b(t) \rangle + 10\sigma$ , con  $\nu = \eta = 10^{-4}$ . Cada valor máximo ocurre, por definición, en el centro de un estado tormenta. Los estados son etiquetados con números enteros consecutivos. El tiempo considerado en la primera columna, corresponde a  $\Delta t \cdot n_i$ , donde  $\Delta t$  es el paso de tiempo y  $n_i$  el número de la iteración en la simulación.

En este caso, tal como se mencionó en la sección 3.2, al tener una serie de tiempo con una gran resolución, podemos estudiar la dimensión fractal para distintas maneras de construir el *scatter diagram*. Entonces, realizando el procedimiento descrito en la sección 7.1, se calcula la dimensión fractal de un *scatter diagram* para diferentes valores de  $j$  [ver ecuación (3.3)], siendo  $j$  la distancia entre los datos. En este caso se estudiaron valores de  $j$  tales que  $j = i \cdot 10^k$ , con  $i = 1, 2, \dots, 9$  y  $k = 0, 1, \dots, 4$ . Cada uno de los *scatter diagrams* es construido a partir de los estados calmos y de tormenta obtenidos en los dos casos de estudio ( $\mu = 3$  y 4).

Los resultados para cuatro valores de  $j$  se muestran en la figura 7.5, usando los números de estado acorde con la tabla 7.1. Las barras de error en  $D_j$  están dadas por el error del ajuste de mínimos cuadrados. Se eligieron estos valores de  $j$  ya que para valores de  $j > 40$  el valor de  $D_j$  es prácticamente independiente de  $j$ . Por otra parte, en el límite opuesto, para valores de  $j < 10$  la dimensión fractal se acerca a 1.

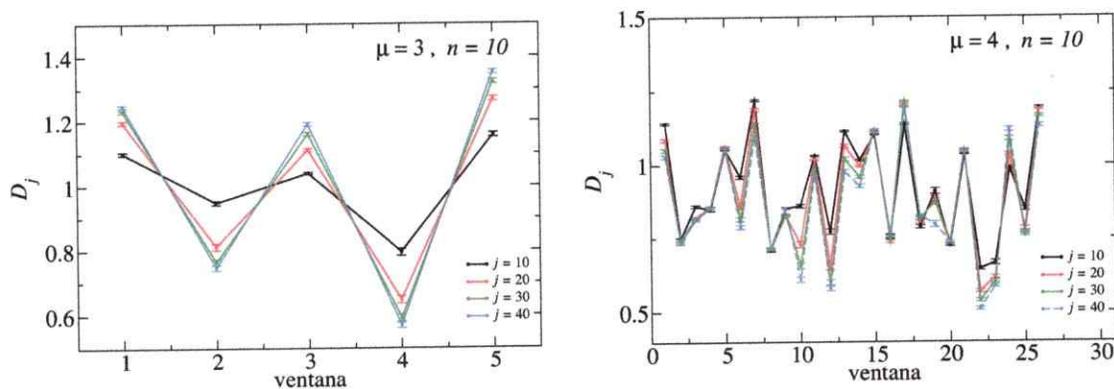


Figura 7.5: Dimensión de *box-counting*  $D_j$  para  $\varepsilon_b(t)$  durante estados tormenta y calmos con  $\mu = 3$  (izquierda) y 4 (derecha).

Notamos que, en general, un estado tormenta tiene una dimensión fractal menor que la dimensión de los estados calmos vecinos. Esto es observado para todo valor de  $j$ , aunque existen diferencias cuantitativas. Por ejemplo, si se observa el caso  $\mu = 3$

[figura 7.5 (izquierda)], se puede notar que a medida que  $j$  decrece, la diferencia entre las dimensiones de los estados calmos y tormenta se hace menos clara.

Es interesante notar que el análisis realizado para la serie *Dst* (capítulo 4) exhibe una característica similar: los estados tormenta tienen dimensión fractal menor que los estados calmos vecinos.

Como se observa en la figura 7.5, la dimensión depende de la distancia entre los datos, representada por el parámetro  $j$ . Con el fin de investigar la dependencia con  $j$ , se ha graficado la dimensión fractal de cada estado tormenta y calmo de las simulaciones estudiadas como función de la distancia entre los datos,  $j$ . Los resultados para cierto rango de  $j$  son presentados en la figura 7.6.

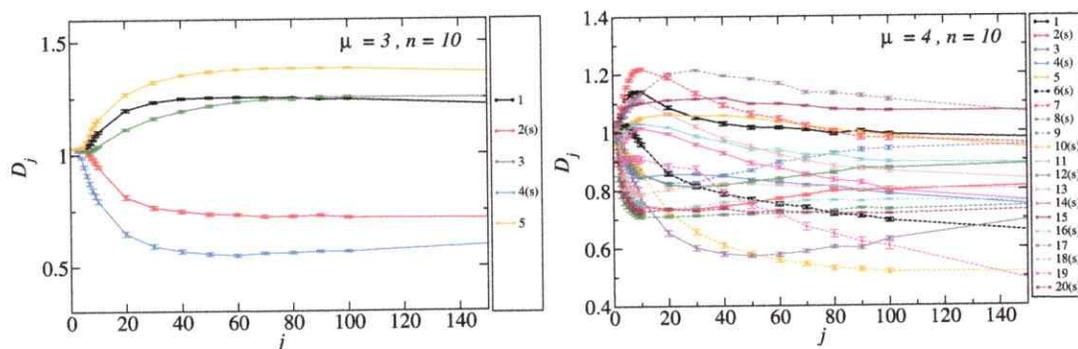


Figura 7.6: Dimensión de *box-counting*  $D_j$  para estados tormenta y calmos como función de la distancia entre los datos,  $j$ , con  $\mu = 3$  (izquierda) y 4 (derecha). Se ha añadido “(s)” en las leyendas, con el fin de destacar los estados tormenta.

Como se explicó en la sección 3.2, cuando todos los datos son considerados ( $j = 1$ ), el *scatter diagram* es una línea, con dimensión  $D = 1$ , consistente con la figura 7.6, donde las dimensiones de los estados tormenta y calmos tienden al valor  $D_1 = 1$ , cuando  $j = 1$ . Por otro lado, cuando  $j$  aumenta, un número menor de los datos de la simulación es considerado, y eventualmente, cuando  $j$  es tan grande como el número de datos, sólo un dato será considerado para el cálculo de  $D$ , por lo que  $D = 0$ ,

debe ser el valor asintótico para todas las curvas. Esto no se alcanza a observar en la figura 7.6, porque los valores de  $j$  son demasiado pequeños, pero si se continúa la figura hacia la derecha, eventualmente sí se observa que todas las curvas tienden a  $D = 0$ . Para valores intermedios de  $j$  es posible observar una dependencia no trivial de la dimensión, como se aprecia en la figura 7.6.

A pesar de esto, la figura 7.6 es bastante simple: muestra que los estados tormenta tienen dimensiones fractales más bajas que los estados calmos, en conformidad con la figura 7.5. Por otra parte, cuando  $j$  es pequeño, todos los estados de tormenta tienen dimensiones fractales menores que 1, mientras que para los estados calmos siempre son mayores que 1. Ambas observaciones son muy evidentes para  $\mu = 3$  (figura 7.6, panel izquierdo). En la figura de la derecha es menos claro porque hay más curvas, pero también se cumple.

Ya hemos notado que la dimensión fractal de la serie  $Dst$  decrece durante las tormentas. Ahora la figura 7.6 muestra que nuestra simulación mediante el modelo de capas también exhibe este comportamiento para cierto rango de  $j$ . Para  $j = 1$ ,  $D = 1$  siempre, como se ha discutido antes, pero si  $j > 1$ , pero no demasiado grande ( $j < 150$ ), la dimensión fractal durante las tormentas es siempre menor que en tiempos calmos, lo que sugiere que, para este rango de valores moderados de  $j$ , la serie obtenida a partir de la simulación puede representar la evolución de la serie observada  $Dst$ , al menos en un sentido estadístico.

Esto es interesante, porque ya se sabe que el modelo de capas es capaz de reproducir algunas de las características estadísticas de la evolución geomagnética, específicamente el comportamiento de ley de potencia de eventos disipativos [63]. Es no trivial entonces que otra medida de la complejidad, a saber, la dimensión fractal de *box-counting*, también se comporte de manera similar en ambos análisis (modelo

de capas y datos observados). Aquí vemos que éste es el caso, por lo menos para ciertos valores de la viscosidad y la resistividad.

Es interesante notar que la discusión anterior también es válida, aunque no tan clara, para el caso  $n = 5$  en la ecuación (7.2), como se muestra en la figura 7.7.

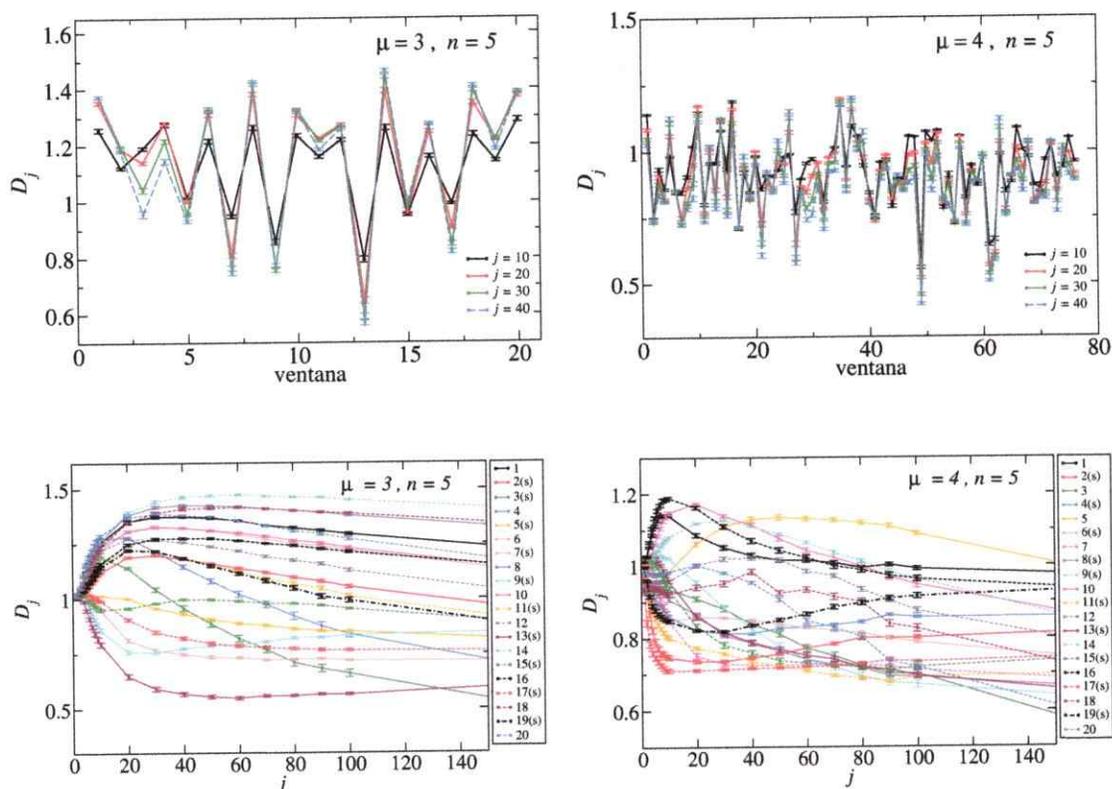


Figura 7.7: Dimensión de *box-counting*  $D_j$  para estados tormenta y calmos (arriba) y como función de la distancia entre los datos,  $j$  (abajo), con  $\mu = 3$  (izquierda) y 4 (derecha). En este caso, el umbral para definir una tormenta es tal que  $n = 5$  en la ecuación (7.2). Los estados etiquetados con “(s)” corresponden a un estado tormenta.

A partir de los resultados expuestos en esta sección, en los siguientes análisis se estudiará el caso  $j = 100$ , que está dentro del rango de valores de  $j$  donde las dimensiones fractales tienen un comportamiento similar al observado en el análisis  $D_{st}$ .

### 7.3. Análisis de ventana de ancho variable en torno a una tormenta

En la sección 7.2 hemos observado una relación cualitativa entre la dimensión fractal de *box-counting* de la serie de tiempo  $\varepsilon_b(t)$  y la existencia de una tormenta. Un resultado similar se observó anteriormente en el capítulo 4. Si esta relación es sólida, la ampliación de la ventana alrededor de una tormenta debe aumentar su dimensión fractal, puesto que más datos “calmos” son considerados. Esto era cierto para el análisis realizado en el capítulo 4, por lo que tiene sentido investigar si esto es observado en el análisis mediante la simulación del modelo de capas.

Como se mencionó en la sección 7.2, hemos identificado estados “tormenta” como *peaks* muy grandes en las simulaciones, siguiendo el espíritu del capítulo 4, donde el análisis de datos geomagnéticos se limita a las tormentas geomagnéticas más grandes ( $Dst < -220$  nT).

En este caso, utilizamos las mismas simulaciones que en la sección 7.2, pero sólo se estudia el caso  $j = 100$ , por las razones expuestas en dicha sección. Es decir, se corre la simulación, pero sólo se consideran los datos de  $\varepsilon_b(t)$  cada 100 pasos de tiempo (de esta manera, el *scatter diagram* obtenido de la serie, corresponderá al *scatter diagram* equivalente a  $j = 100$  en la sección anterior). En la sección 7.2 también se estableció, basado en la duración de una “tormenta”, lo que podría ser considerado como una “semana” en los datos de la simulación: 48000 pasos de tiempo. En este caso, dada la frecuencia de muestreo elegida, una “semana” sería equivalente a 480 puntos.

A fin de mantener la analogía con el análisis realizado en la sección 4.2, tomaremos ventanas de ancho variable alrededor de una tormenta. Ventanas que inician  $m$

“semanas” antes del peak y terminan  $m$  “semanas” luego de éste, con  $m = 1, \dots, 9$ .

Tal como se explicó en la introducción de este capítulo, en este análisis seleccionamos las tormentas de tal forma que éstas sean las tormentas más grandes observadas para cada valor de  $P_m$  y repetimos el procedimiento para diez valores distintos de  $P_m$ . Con el fin de variar  $P_m$ , fijamos la viscosidad con los valores utilizados en la sección 7.2 ( $\nu = 10^{-\mu}$  con  $\mu = 3$  y 4), y luego variamos  $\eta$ . En la figura 7.8 se muestran los resultados obtenidos para estas tormentas.

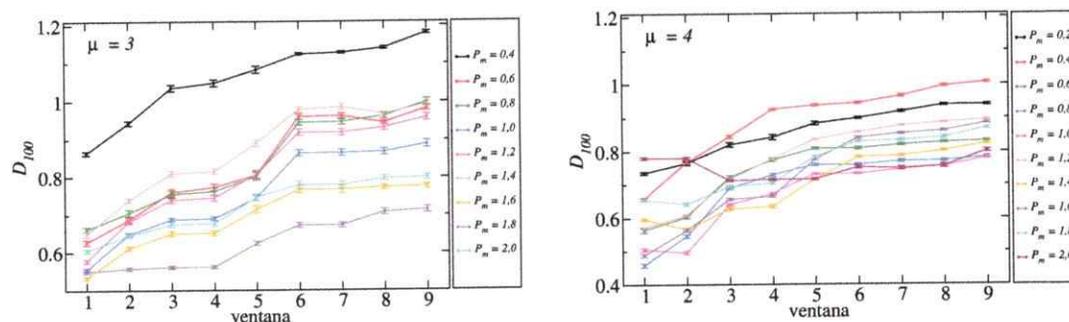


Figura 7.8: Dimensión de *box-counting* para la serie de tiempo  $\varepsilon_b(t)$  en una ventana centrada en una tormenta, como función del ancho de la ventana para distintos valores de  $P_m$ . (a)  $\mu = 3$ ; (b)  $\mu = 4$ .

Se puede notar que la dimensión de *box-counting* aumenta cuando la ventana crece, un resultado que es consistente con los observados en la figura 7.5 de la sección 7.2 y los resultados anteriores presentados en las figuras 4.5 y 4.6 de la sección 4.2, porque a medida que ampliamos la ventana alrededor de la tormenta, la relevancia de la tormenta disminuye, y la ventana debe ser más similar a un estado calmo, aumentando así el valor de su dimensión fractal.

Con el fin de detectar una posible correlación entre la dimensión fractal y el valor de  $\varepsilon_b(t)$ , se calculó el promedio de  $\varepsilon_b(t)$  en una ventana como función de  $D$  (véase figura 7.9, para las mismas tormentas que en la figura 7.8).

Si  $\mu = 3$  no se observa una clara correlación. Sin embargo, para  $\mu = 4$  parece existir un rango de  $P_m$  donde hay una correlación directa entre el valor de  $\langle \varepsilon_b(t) \rangle$  y el valor correspondiente de la dimensión fractal, como se esperaba a partir de la discusión anterior, y de acuerdo con el análisis presentado en la sección 4.2 (ver figura 4.6). Esto sugiere que el modelo de capas es capaz de reproducir mejor las características estadísticas de los datos  $Dst$  para  $\mu = 4$ .

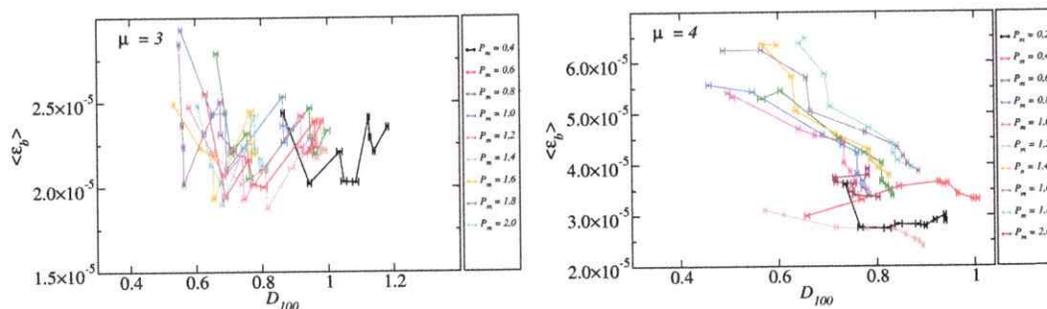


Figura 7.9:  $\langle \varepsilon_b(t) \rangle$  vs.  $D$  para ventanas de ancho variable en torno a una tormenta grande para distintos valores de  $P_m$ . (a)  $\mu = 3$ , (b)  $\mu = 4$ .

## 7.4. Análisis de ventanas móviles a lo largo de una tormenta

Consideremos ahora ventanas en movimiento a través de tormentas, con el fin de estudiar la evolución de la dimensión fractal a medida que la tormenta se desarrolla. Al igual que en la sección 7.3, analizamos tormentas grandes y utilizamos los mismos parámetros de simulación.

En este caso, las ventanas móviles se definen como un subconjunto de datos de ancho fijo  $\Delta$ , que se mueve en pasos de  $\Delta/m$ , donde  $m$  es un entero.

Una vez que se identifica la tormenta más grande de la serie, se calcula la dimensión  $D$  de cada una de las ventanas que se mueven a través de la tormenta.

Luego, al igual que en el análisis presentado en la sección 7.3, repetimos el análisis para diferentes valores de  $P_m$ , considerando los mismos valores estudiados en dicha sección.

A modo de ejemplo, algunas de las tormentas seleccionados para los casos  $\mu = 3$  y  $\mu = 4$  se muestran en Fig. 7.10.

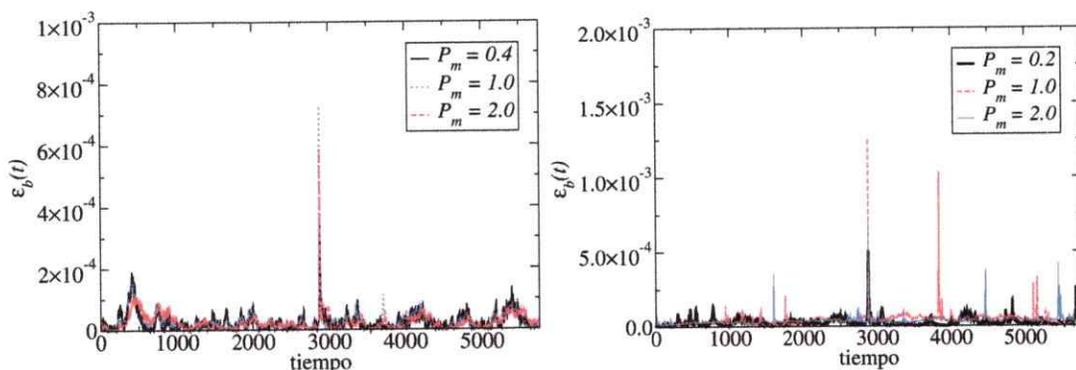


Figura 7.10: Tormentas seleccionadas para el análisis de ventanas móviles, sección 7.4, con  $\mu = 3$  and  $\mu = 4$ , y para tres valores de  $P_m$ .

Con el fin de realizar el análisis de ventanas en movimiento, es necesario elegir un determinado ancho de ventana ( $\Delta$ ), y el desplazamiento de la ventana a través de la simulación ( $m$ ). En el análisis realizado en la sección 4.3, existía una escala de tiempo natural que es la duración de una tormenta. En el caso del modelo de capas, utilizamos el ancho de la tormenta que se definió en la sección 7.2.

Se consideran dos tipos de ventanas. Ambos contienen  $\Delta = 960$  datos (ancho de la tormenta), pero difieren en la cantidad de desplazamiento entre ventanas consecutivas: los movemos en pasos de  $\Delta/m$ , con  $m = 2$  y  $3$ , para tener intuición de cuánto dependen los resultados de la suavidad con que son calculadas las curvas.

A continuación, se calcula la dimensión de *box-counting*,  $D$ , en la ventana de datos definida. En la figura 7.11 mostramos tres de los resultados obtenidos para el caso

$m = 2$ . A partir de dicha figura se observa una disminución de la dimensión fractal durante las tormentas, un resultado coherente tanto con las secciones 7.2 y 7.3, como con el análisis realizado en el capítulo 4.

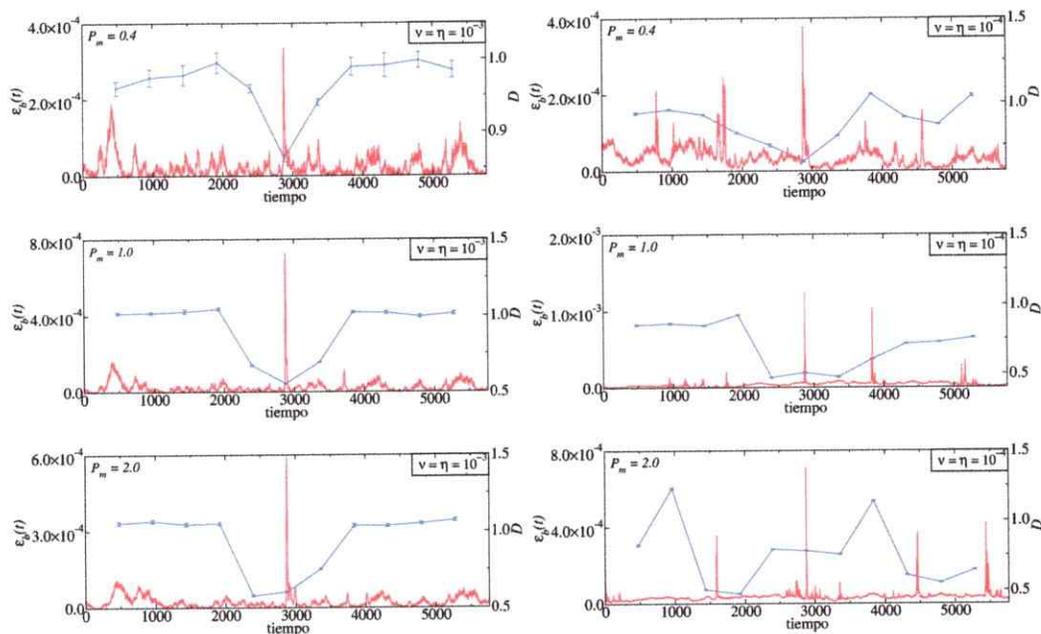


Figura 7.11: Análisis de ventanas móviles a través de una tormenta: Dimensión de *box-counting* para las tormentas seleccionadas para el análisis con  $\mu = 3$  (izquierda) y 4 (derecha) para tres valores de  $P_m$ .

Vale la pena mencionar que, como ocurre en el análisis de datos *Dst* (sección 4.3), la disminución de la dimensión fractal se puede observar antes de la ventana que contiene datos que pertenecen a la misma tormenta.

En el capítulo 4, con el fin de cuantificar la correlación existente entre la dimensión fractal y el índice *Dst*, se presentó el análisis de la correlación cruzada entre ambas variables. En este caso, al tener una mayor resolución en los datos de la serie de tiempo para  $\varepsilon_b(t)$ , y al analizar una mayor cantidad de tormentas (una para cada valor de  $P_m$ ), se consideró el análisis del Student's *t*-test, explicado en el apéndice A, para definir la correlación existente entre  $D$  y eventos disipativos en  $\varepsilon_b(t)$ . De esta

manera, cada una de las tormentas analizadas tendrá un solo parámetro,  $p$ , llamado, en el contexto de este test estadístico, el *p-value*, que cuantificará la correlación existente (como se presenta en el apéndice A, cuando  $p < 0.05$  se puede afirmar que existe una correlación entre ambas series).

En la figura 7.12 se muestran los valores de  $p$  correspondientes a estos análisis para dos valores de la viscosidad,  $\nu = 10^{-3}$  y  $10^{-4}$ , respectivamente. Específicamente, para los casos  $m = 2$  y  $m = 3$  se muestran en la figura 7.12 (arriba) y 7.12 (abajo), respectivamente.

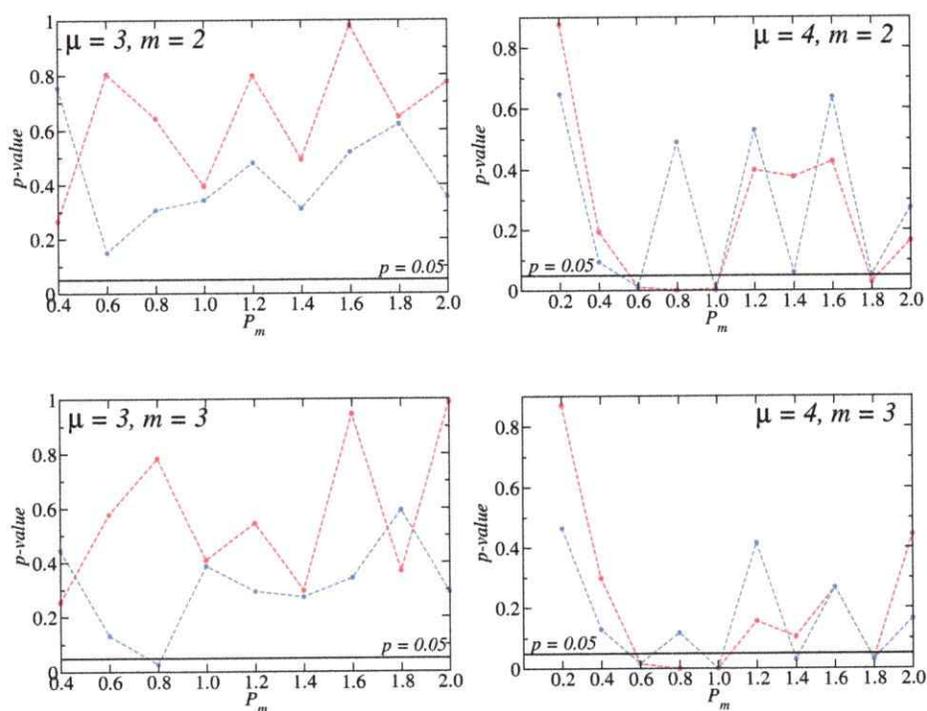


Figura 7.12:  $p$ -values. Ventanas en movimiento a lo largo de una tormenta grande usando el criterio de la mediana (línea roja) y el promedio (línea azul) (ver apéndice A). La línea negra horizontal corresponde al umbral  $p = 0.05$ .  $P_m = 1$  cuando  $\nu = 10^{-3}$  (izquierda) y  $\nu = 10^{-4}$  (derecha).

De la figura 7.12, se observa que el caso  $\mu = 3$  no muestra una correlación entre la dimensión fractal y la existencia de eventos disipativos (sólo se observa un punto

donde  $p < 0.05$ , a saber,  $P_m = 0.8$ ). Sin embargo, en el caso  $\mu = 4$  es posible encontrar un rango de  $P_m$  cercano a uno, pero menor que uno, en el que  $p < 0.05$ , es decir, existe una correlación entre la dimensión de *box-counting* de  $\varepsilon_b(t)$  y la serie  $\varepsilon_b(t)$  correspondiente, para dichos valores de  $P_m$ .

Al ser el resultado obtenido independiente del valor de  $m$ , en la siguiente sección se analizan ventanas móviles a lo largo de toda la simulación para el caso  $m = 3$ .

## 7.5. Análisis de ventanas móviles a lo largo de toda la simulación

Con el fin de estudiar si el efecto encontrado en la sección 7.4 es global y no válido sólo para las pocas tormentas particulares estudiadas, en esta sección se repite el análisis, pero para la simulación completa. Ahora tomamos 58 ventanas, cada una compuesta de  $\Delta = 3510$  datos. Cada ventana está desplazada con respecto a la anterior en  $\Delta/m$  con  $m = 3$  (1170 puntos). En la figura 7.13 se muestra la serie de  $\varepsilon_b(t)$  obtenida a partir del modelo y la definición de las ventanas en movimiento utilizada.

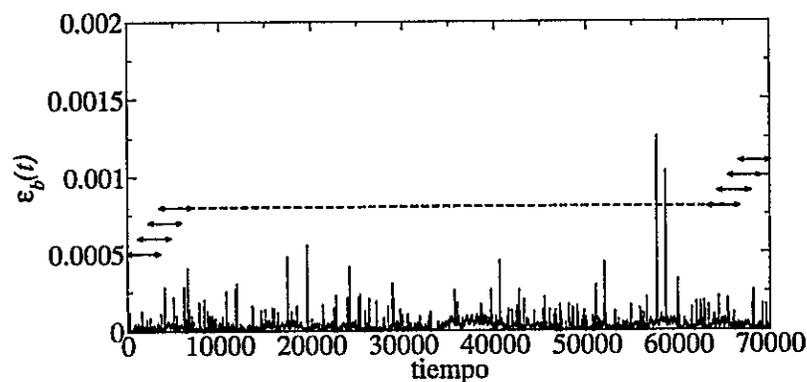


Figura 7.13: Ventana en movimiento para  $\varepsilon_b(t)$ . En este caso,  $\nu = \eta = 10^{-4}$ ,  $\Delta = 3510$ , y  $m = 3$ .

De la misma manera que en el análisis de la sección 7.4, con el objetivo de saber si existe algún rango de  $\nu$  y  $\eta$  en el que el efecto observado en la sección anterior es más dominante y con ello determinar en qué rango el modelo de capas es capaz de modelar el comportamiento de los datos geomagnéticos, en la sección 7.5.1, se presentan los resultados obtenidos para diferentes valores de la viscosidad, manteniendo  $P_m = 1$ ; luego, en la sección 7.5.2, consideramos el caso  $P_m \neq 1$ , tomando diversos valores de la resistividad, manteniendo constante la viscosidad.

### 7.5.1. Caso I: $\nu = \eta$ ( $P_m = 1$ )

En esta sección se calcula la dimensión de *box-counting* para 10 valores distintos de la viscosidad ( $\nu = \eta = 10^{-\mu}$ , con  $\mu = 3, 4, \dots, 12$ ).

Los resultados obtenidos para algunos valores de la viscosidad se presentan en la figura 7.14, donde se muestra  $\varepsilon_b(t)$  y su dimensión fractal. Las figuras de la izquierda muestran los datos para  $\varepsilon_b(t)$  utilizando toda la resolución obtenida a partir de la simulación. Las figuras de la derecha muestran el promedio de  $\varepsilon_b(t)$  en la misma ventana de ancho  $\Delta$  que se utiliza para el cálculo de la respectiva dimensión de *box-counting*.

Si observamos los resultados que se muestran en la figura 7.14, se concluye que para valores grandes de la viscosidad ( $\mu = 3$  y  $4$ ), el modelo de capas exhibe un comportamiento similar al observado en el análisis de la serie *Dst* presentado en el capítulo 4; la dimensión fractal disminuye en períodos de alta actividad, aunque no es tan claro como en los datos geomagnéticos. Esos valores de  $\mu$  corresponden justamente a los utilizados en las secciones anteriores (secciones 7.2, 7.3 y 7.4).

Con el fin de evaluar la correlación entre ambas series de tiempo más cuantitativamente, en la figura 7.15 se muestran los *p-values* del Student *t*-test. Observamos

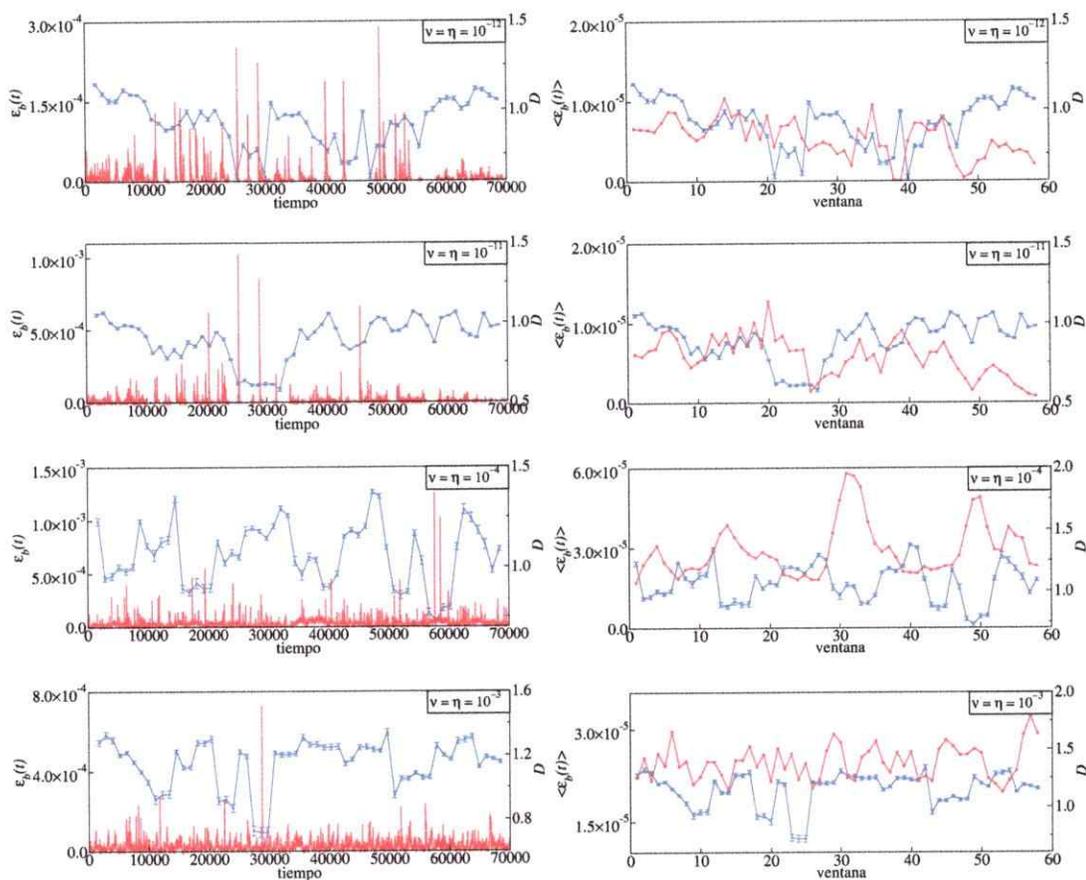


Figura 7.14: Ventanas en movimiento a lo largo de todo el tiempo de simulación ( $\nu = \eta$ ): Dimensión de *box-counting*  $D$  y  $\varepsilon_b$ . Izquierda: Usando el tiempo de resolución de la simulación. Derecha: Usando el valor promedio de  $\varepsilon_b$  sobre la ventana respectiva.

que cuando  $\mu = 4, 5, \dots, 10$  (valores grandes de la viscosidad, excepto  $\mu = 3$  y 7), los *p-values* obtenidos son menores que 0.05, con lo que se corrobora la conclusión que habíamos obtenido al mirar los resultados de la figura 7.14. Además, la correlación es más clara en el caso del análisis utilizando el criterio de la mediana.

Estos resultados sugieren que la disminución de la dimensión fractal en la presencia de eventos de tormenta se puede observar en la simulación, consistente con el comportamiento observado en el estudio de la serie *Dst* (capítulo 4).

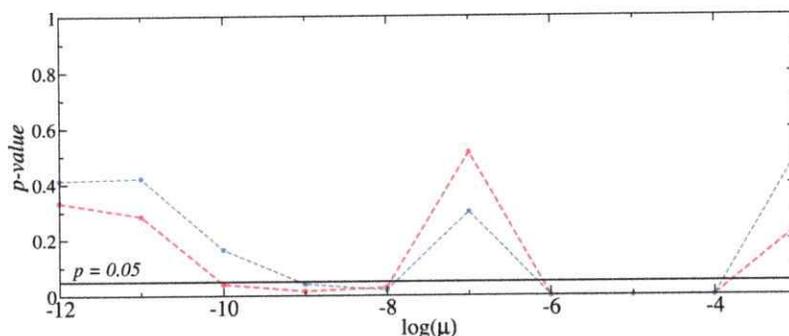


Figura 7.15:  $p$ -values para ventanas en movimiento a lo largo de todo el tiempo de simulación usando el criterio de la mediana (línea roja) o el promedio (línea azul). La línea negra horizontal corresponde al umbral  $p = 0.05$ .

### 7.5.2. Caso II: $\nu \neq \eta$ ( $P_m \neq 1$ )

En este caso, se calcula la dimensión de *box-counting* para 10 valores diferentes de  $P_m = \nu/\eta$ . Primero se fija un valor de la viscosidad ( $\nu = 10^{-\mu}$  con  $\mu = 3, 4, \dots, 8$ ) y luego se varía  $\eta$  de tal manera que  $P_m = 0, 2 \cdot i$ , con  $i = 1, 2, \dots, 10$ . Se consideran estos valores de  $\nu$  considerando que, en la sección anterior, es para ellos que se obtienen resultados más cercanos a los observados en los datos geomagnéticos. Como ilustración, algunos resultados obtenidos con  $\mu = 3$  se muestran en la figura 7.16, y con  $\mu = 4$  en la figura 7.17.

En la figura 7.18 se presentan los valores de  $p$  obtenidos para todos los casos estudiados.

Es importante notar que para  $\nu = 10^{-\mu}$ , con  $\mu = 4-6$ , existe un rango de  $P_m$ , cerca de 1, donde  $p < 0.05$ , lo que sugiere que la existencia de eventos disipativos y el valor de la dimensión fractal en el modelo de capas MHD muestra correlaciones que son similares a las observadas en los datos geomagnéticos, y que esta correlación no sólo se produce cuando la viscosidad y la resistividad son iguales, sino también para un cierto rango de valores alrededor de  $P_m = 1$ .

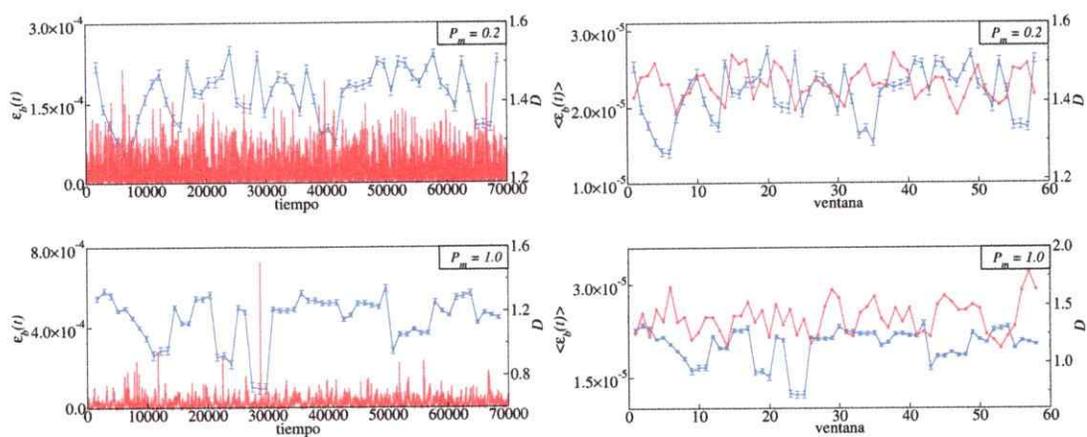


Figura 7.16: Análisis de ventanas móviles a lo largo de toda la simulación: Dimensión de *box-counting*  $D$  y  $\epsilon_b$  para  $\mu = 3$ . Izquierda: Usando la resolución de tiempo completa de la simulación. Derecha: Usando el valor promedio de  $\epsilon_b$  en cada ventana.

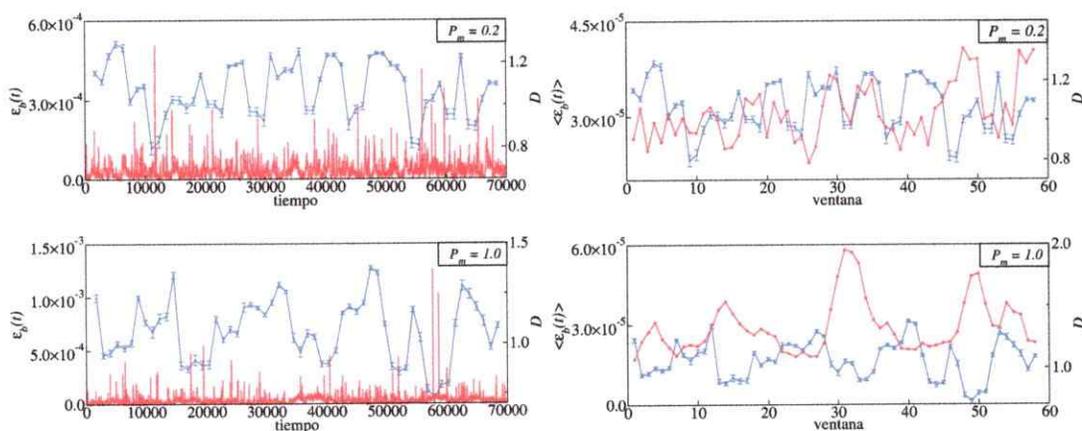


Figura 7.17: Análisis de ventanas móviles a lo largo de toda la simulación: Dimensión de *box-counting*  $D$  y  $\epsilon_b$  para  $\mu = 4$ . Izquierda: Usando la resolución de tiempo de la simulación. Derecha: Usando el valor promedio de  $\epsilon_b$  en cada ventana.

## 7.6. Resumen

En este capítulo se ha estudiado la capacidad de un *shell model* para reproducir la evolución de la complejidad presente en la dinámica magnética terrestre en presencia de eventos disipativos como una tormenta geomagnética. Para ello se ha analizado

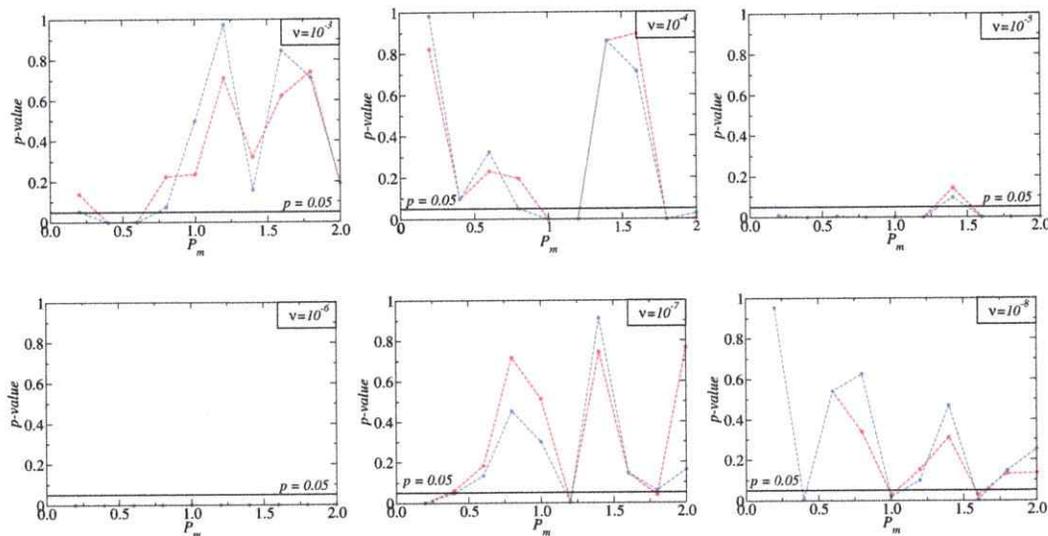


Figura 7.18:  $p$ -values: Ventanas en movimiento a lo largo de todo el tiempo de simulación usando el criterio de la mediana (línea roja) y el promedio (línea azul) (ver apéndice A), para  $\mu = 3, 4, \dots, 8$ . La línea negra horizontal corresponde al umbral  $p = 0.05$ .

la dimensión fractal de la serie de tiempo de la energía magnética disipada  $\varepsilon_b(t)$  obtenida del modelo, en tres distintas elecciones de ventanas de tiempo de la serie obtenida de la simulación.

Se ha encontrado, en general, que al igual que en el caso del análisis del índice  $Dst$  presentado en el capítulo 4, la dimensión fractal disminuye durante un período de alta actividad magnética.

En el desarrollo de este capítulo, se intentó, para cada definición de ventana estudiada, encontrar un rango de parámetros de  $P_m = \nu/\eta$ , que reprodujeran de la mejor manera posible los resultados encontrados en el análisis de datos  $Dst$ . Para esto, se estudiaron estados tormenta y calmos, ventanas de ancho variable en torno a una tormenta, y ventanas móviles a través de una tormenta. Y, en cada caso, se estudiaron 10 valores de  $P_m$  cercanos a 1 de tal manera que  $P_m = 1$  cuando  $\nu = 10^{-\mu}$

tome los valores con  $\mu = 3$  y 4. Con esto se encontró que, en general, los análisis realizados con valores de  $P_m$  cercanos a 1, reproducen de mejor manera los resultados obtenidos a partir del análisis de datos. Esto fue cuantificado mediante el cálculo del *p-value* obtenido de un Student's *t*-test. Es destacable que, según lo presentado en el capítulo 6, valores de  $P_m$  cercanos a 1 podrían tener sentido en el estudio de la magnetósfera terrestre.

Uno de los resultados interesantes de destacar corresponde al obtenido en el estudio realizado en el análisis de estados tormenta y calmos para la serie de la energía magnética disipada. En ese estudio (sección 7.2), se pudo explorar, en algún sentido, la multifractalidad presente en la serie de tiempo estudiada al calcular la dimensión de *box-counting* para un *scatter diagram* que depende de la distancia entre los datos. Se pudo comprobar que al aumentar la resolución de la serie de tiempo analizada, la variación entre dos datos consecutivos es tan pequeña que la dimensión fractal de un estado calmo o de tormenta será  $D = 1$  como esperamos, ya que el *scatter diagram* corresponde a una recta. Para valores de  $j$  mayores que 1, se encontró una bifurcación en la dimensión fractal calculada, de tal manera que los estados tormenta disminuyen su dimensión fractal a medida que aumenta la separación entre los datos utilizados para generar el *scatter diagram*, mientras que los estados calmos aumentan el valor de su dimensión. Para valores menores que  $j = 150$ , este comportamiento es observado en casi todos los estados estudiados, de la misma manera que en el caso del análisis del índice *Dst*. Sin embargo, para grandes valores de  $j$  la dimensión fractal de ambos estados (calmo y tormenta) disminuye de tal forma que alcanza su valor asintótico  $D = 0$  cuando  $j$  alcanza el valor igual al número de datos de la serie (también como esperamos, ya que el *scatter diagram* corresponde a un punto).

Al analizar ventanas de ancho variable en torno a una tormenta, los comporta-

mientos lineales entre el incremento del ancho de la ventana y la dimensión fractal observado en el estudio del índice *Dst* (capítulo 4), también fueron observados. Este resultado comprueba el hecho de que tal como se explicaba en el capítulo 4, al incrementar el ancho de la ventana de datos en torno a una tormenta, el estado tormenta, por más grande que sea la magnitud de ésta, se convertirá cada vez más en un estado calmo, incrementando su dimensión fractal.

Además, cabe destacar que en el estudio de ventanas móviles a lo largo de una tormenta, al igual que en el análisis realizado en el capítulo 4, la dimensión fractal disminuye a medida que una tormenta ocurre. Y dicha disminución comienza antes de que la ventana contenga un dato del *peak* principal.

Finalmente, con el objetivo de estudiar si los resultados encontrados eran robustos, esto es, no dependen de los estados de tormenta estudiados, en la sección 7.5 se analizó la evolución de la dimensión de *box-counting* en ventanas móviles a lo largo de toda una simulación (de manera análoga al análisis realizado para cinco años de alta actividad en la sección 4.3 y el realizado para el ciclo solar 23 completo en la sección 4.4). En este análisis también se logró encontrar un rango de  $P_m$  para el cual existe una correlación entre eventos disipativos y la disminución de la dimensión fractal. De manera consistente con los resultados previos, se encontró que para los casos  $\nu = 10^{-\mu}$  con  $\mu = 4-6$ , existe un rango de  $P_m$  cercano a 1 en el que existe la correlación esperada entre ambas series, cuantificada por el Student's *t*-test.

Con todo esto, se ha mostrado que el *shell model* es capaz de describir características fractales de la actividad geomagnética, complementando resultados anteriores, en que se ha estudiado el comportamiento de ley de potencia en la distribución de tiempos de calma entre llamaradas solares y eventos disipativos en la magnetósfera terrestre [61, 63].

## Capítulo 8

# Evolución temporal de la fractalidad: viento solar y *shell model*

Tal como se mencionó en el capítulo 2, el viento solar influye de manera directa en la actividad geomagnética. De hecho, cuando el acoplamiento del viento solar con la magnetósfera se hace fuerte y se extiende por varias horas, conduce a una tormenta geomagnética en todo el mundo. Dichos eventos pueden ser monitoreados con el índice *Dst*.

En el capítulo 4, se presentó el análisis de la evolución de la dimensión fractal del índice *Dst* cuando ocurre una tormenta, concluyendo, entre otras cosas, que la dimensión de *box-counting* disminuye durante una tormenta geomagnética. Luego, en el capítulo 7, se utilizó un *shell model* para reproducir los resultados obtenidos a partir de los datos observados. Ahí se concluyó que para ciertos valores de la viscosidad y resistividad, las correlaciones observadas a partir del análisis del índice *Dst*, pueden ser reproducibles cualitativamente.

En el capítulo 7, los términos de forzamiento del *shell model* fueron calculados de acuerdo a la ecuación de Langevin. En este capítulo se utilizan datos del viento

solar como *input* del modelo. A partir de esto, se pretende saber si la fractalidad del forzamiento del *shell model* influye en la actividad de la serie  $\epsilon_b(t)$  obtenida. En otras palabras, se pretende tener un modelo, muy sencillo y preliminar, para saber si la fractalidad del viento solar influye en la actividad geomagnética.

Trabajos previos han estudiado características multifractales de datos de la velocidad y el campo magnético del viento solar [14, 28, 46, 121]. En esos casos se ha encontrado que la fractalidad del viento solar varía según la actividad solar. En este trabajo, a diferencia de los estudios previos, se analizará la fractalidad presente a través del cálculo de la dimensión de *box-counting*. Entonces, antes de introducir datos del viento solar como forzamiento del *shell model*, estudiaremos el comportamiento de la fractalidad de los datos del viento solar que usaremos para el posterior análisis.

Por esta razón, en la sección 8.1 se presenta un análisis similar al realizado en el capítulo 4, ahora para los datos de campo magnético y velocidad del viento solar. Luego, a partir de los resultados obtenidos en la sección 8.1, en la sección 8.2 se introducen datos del viento solar como *input* del *shell model* y la correspondiente serie de  $\epsilon_b(t)$  obtenida es analizada con el fin de encontrar la posible relación existente entre la fractalidad del *input* (viento solar) y la actividad del *output* (actividad geomagnética).

## 8.1. Análisis de datos del viento solar

Los datos del viento solar trabajados en este capítulo son obtenidos de OMNI [65]. Se consideró esta fuente, ya que OMNI corresponde a una compilación de datos obtenidos de varias misiones espaciales (IMP 8, Geotail, Wind y ACE) del campo magnético del viento solar cercano a la Tierra. Específicamente se consideraron datos

correspondientes a la velocidad de flujo ( $v$ ), y las componentes de la velocidad del viento solar ( $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$ ), y a la magnitud del campo magnético ( $b$ ) y sus respectivas componentes ( $b_x$ ,  $b_y$  y  $b_z$ ) a 1 AU de distancia. Los datos tienen una resolución de 1 minuto. En este caso, el sistema coordenado corresponde a GSE (*Geocentric Solar Ecliptic*), donde el eje  $x$  apunta en la línea de la Tierra al Sol, el eje  $y$  se elige para estar en el plano de la eclíptica y apuntando hacia el anochecer (opuesto al movimiento de la Tierra) y el eje  $z$  es paralelo al polo eclíptico (ver figura 8.1).

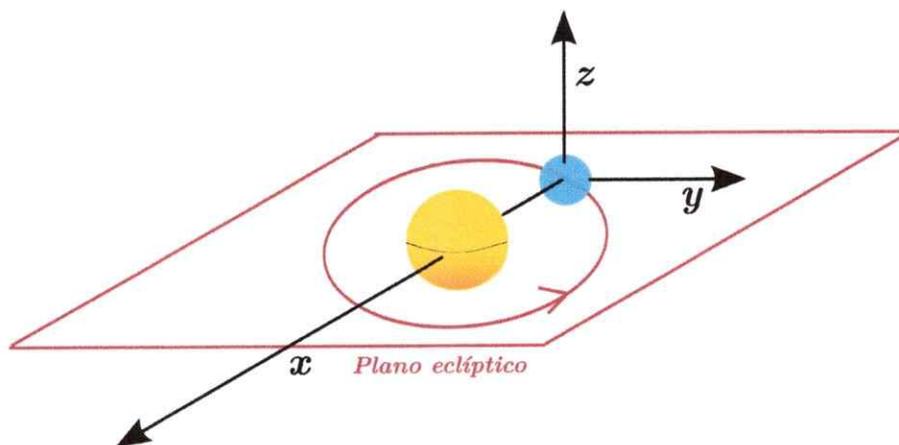


Figura 8.1: Sistema coordenado eclíptico solar geocéntrico.

### 8.1.1. Análisis de años de alta actividad

En la sección 4.3 se analizaron cinco años completos de alta actividad solar: 1960, 1989, 2000, 2001 y 2003. En este capítulo se estudian tres de dichos años (2000, 2001 y 2003). En cada caso se estudia la evolución de la dimensión fractal del campo magnético y la velocidad del viento solar a través del estudio de ventanas móviles.

Las ventanas móviles en este caso están definidas de igual manera que en la sección 4.3. Esto es, corresponden a ventanas de ancho igual a dos semanas de datos que se mueven cada un tercio de su ancho.

En la figura 8.2 (izquierda) se muestran los resultados obtenidos usando los datos del campo magnético del viento solar para el año 2001 (los otros resultados se pueden observar en el apéndice C, figura C.1). Se puede observar que la dimensión fractal disminuye cuando aumenta el módulo del campo magnético del viento solar (panel superior figura 8.2). Este hecho es observado, aunque menos robustamente, en las componentes del campo magnético para todos los años analizados. En estos casos, un *peak* en la respectiva componente del campo magnético (un aumento de la componente del campo magnético con una posterior disminución abrupta, ver por ejemplo figura 8.2 para el año 2001), es acompañado de una disminución de la dimensión fractal de *box-counting*.

Al realizar un análisis similar con los datos de la velocidad del viento solar, no se observa tan claramente una relación entre la dimensión fractal y la velocidad. En la figura 8.2 (derecha) se presentan los resultados obtenidos para el año 2001. Los resultados para los otros años pueden ser observados en el apéndice C, figura C.2. Los años 2000 y 2001 son los que presentan una mejor correlación, esto es, disminuye la dimensión fractal cuando ocurre una variación importante en la velocidad del viento solar.

Cabe destacar que grandes variaciones del comportamiento del viento solar detectables al observar el campo magnético, no son observables de la misma manera en la velocidad de éste. Por ejemplo, si se observan los resultados obtenidos el año 2001 en la figura 8.2 (izquierda), podemos observar dos grandes *peaks* en el panel superior que de manera consistente muestran una perturbación importante en las componentes del campo magnético. Sin embargo, si se observan las figuras 8.2 (derecha), no es posible observar tan claramente dichas perturbaciones en el campo de velocidades.

En el capítulo 4, los cinco años estudiados fueron elegidos por presentar tormentas

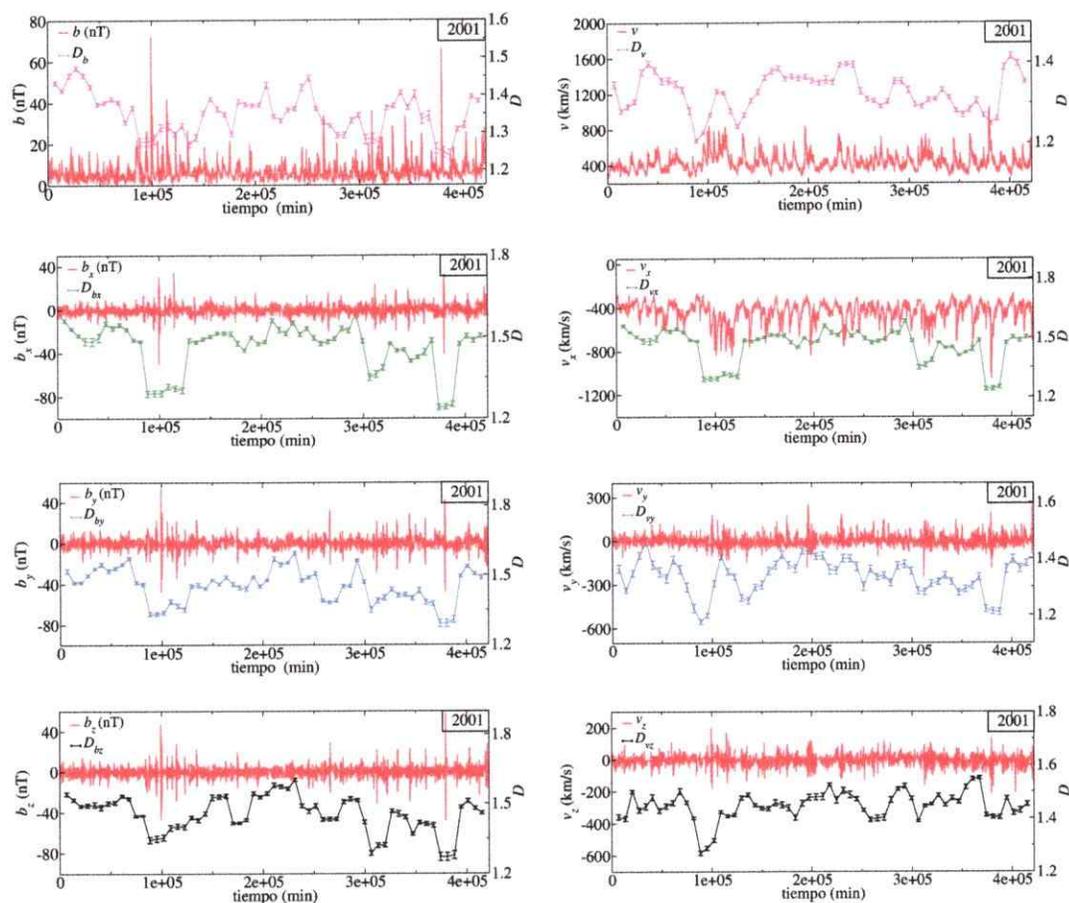


Figura 8.2: Dimensión de *box-counting* de datos del viento solar para el año 2001. En el panel superior se presentan las dimensiones fractales de las magnitudes del campo magnético (izquierda) y velocidad (derecha), correspondientes a líneas rosadas. En los paneles siguientes se presentan los resultados de las dimensiones fractales de las componentes del campo magnético y velocidad, respectivamente. Línea verde: componente  $x$ ; línea azul: componente  $y$ ; línea negra: componente  $z$ . Las líneas rojas corresponden a la serie de datos del viento solar respectiva utilizada.

geomagnéticas aisladas y con magnitudes tales que  $Dst < -220$  nT. Con el objetivo de visualizar si la evolución de la dimensión fractal observada en la figura 8.2 tiene relación con una posterior tormenta geomagnética. En la figura 8.3 se ha graficado la dimensión fractal obtenida a partir de los datos del viento solar para el año 2001 con la respectiva serie de tiempo  $Dst$ . En el apéndice C, figuras C.3 y C.4, se muestran

los resultados obtenidos para todos los años analizados.

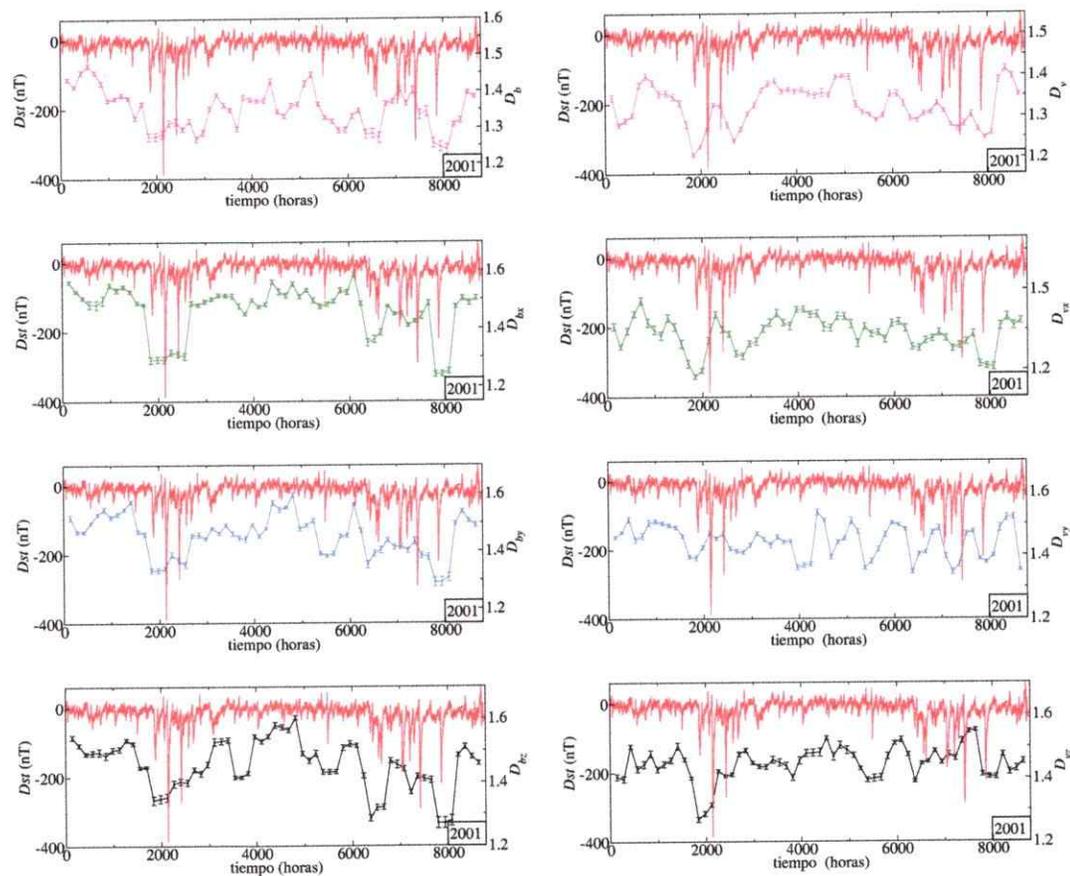


Figura 8.3: Dimensión de *box-counting* de datos del viento solar para el año 2001. Las líneas rojas corresponden al índice *Dst* correspondiente. En el panel superior se presentan las dimensiones fractales de las magnitudes del campo magnético (izquierda) y velocidad (derecha), correspondientes a líneas rosadas. En los paneles siguientes se presentan los resultados de las dimensiones fractales de las componentes del campo magnético y velocidad, respectivamente. Línea verde: componente *x*; línea azul: componente *y*; línea negra: componente *z*.

De los resultados del año 2001 (figura 8.3), se observa que existe una relación clara entre la presencia de las dos tormentas geomagnéticas detectadas con el índice *Dst* y la magnitud del campo magnético del viento solar (primera figura, izquierda) y las componentes del campo magnético del viento solar (siguientes figuras). Esta

relación es menos evidente, pero aún está presente, en los otros años estudiados. Sin embargo, al observar las figuras del panel derecho, correspondiente a las dimensiones fractales de la serie de tiempo de la velocidad del viento solar, no es posible visualizar dicha relación tan claramente.

### 8.1.2. Análisis del ciclo solar 23

Siguiendo el mismo procedimiento realizado en el capítulo 4, a continuación se analiza el comportamiento de la dimensión fractal en el ciclo solar 23 completo. El principal objetivo de este estudio, es investigar la importancia de la escala de tiempo estudiada en los resultados obtenidos y con ello, concluir si los resultados son robustos en distintas escalas de tiempo. De esta manera, ahora se analizan ventanas móviles de ancho igual a tres meses que se desplazan respecto a la ventana anterior en una "distancia" igual a un mes y medio. En la figura 8.4 se muestran los resultados obtenidos.

Consistente con los resultados de la sección 8.1, la dimensión de *box-counting* muestra una disminución clara cuando ocurre una perturbación magnética importante [figura 8.4 (izquierda)].

A diferencia de los resultados presentados en la sección anterior, se hace un poco más evidente, pero aún es débil, la relación entre la dimensión fractal del viento solar y la respectiva serie de tiempo de la velocidad del viento solar [figura 8.4 (derecha)].

En el espíritu de incorporar los datos del viento solar como forzamiento del *shell model*, a continuación presentamos los resultados obtenidos del cálculo de la dimensión fractal de *box-counting* para cada uno de los años presentes en el ciclo solar 23. Se han analizado desde el año 1996 al año 2008. A partir de este estudio se pretende definir de mejor manera el conjunto de datos que se utilizará como *input* del modelo.

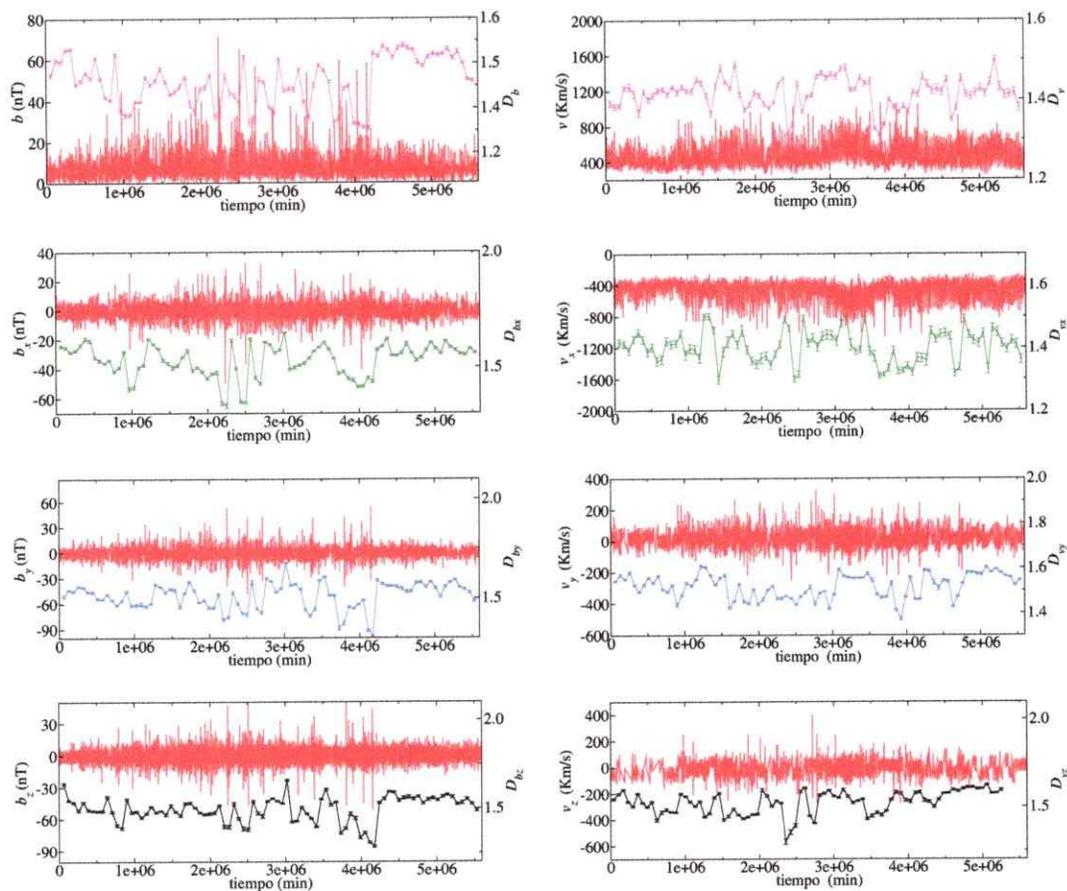


Figura 8.4: Dimensión de *box-counting* para el ciclo solar 23 completo. Líneas rojas corresponden al campo magnético o velocidad del viento solar y sus respectivas componentes, según corresponda. En el panel superior se presentan las dimensiones fractales de las magnitudes del campo magnético (izquierda) y velocidad (derecha), correspondientes a líneas rosadas. En los paneles siguientes se presentan los resultados de las dimensiones fractales de las componentes del campo magnético y velocidad, respectivamente. Línea verde: componente  $x$ ; línea azul: componente  $y$ ; línea negra: componente  $z$ .

Tal como se observa en la figura 8.5, la dimensión de *box-counting* para el campo magnético del viento solar decrece durante el máximo solar (años 2000 a 2004). Con esto, se puede concluir que durante los años de menor actividad solar, la dimensión fractal crece.

De manera consistente con los resultados anteriores (sección 8.1.1), no se observan

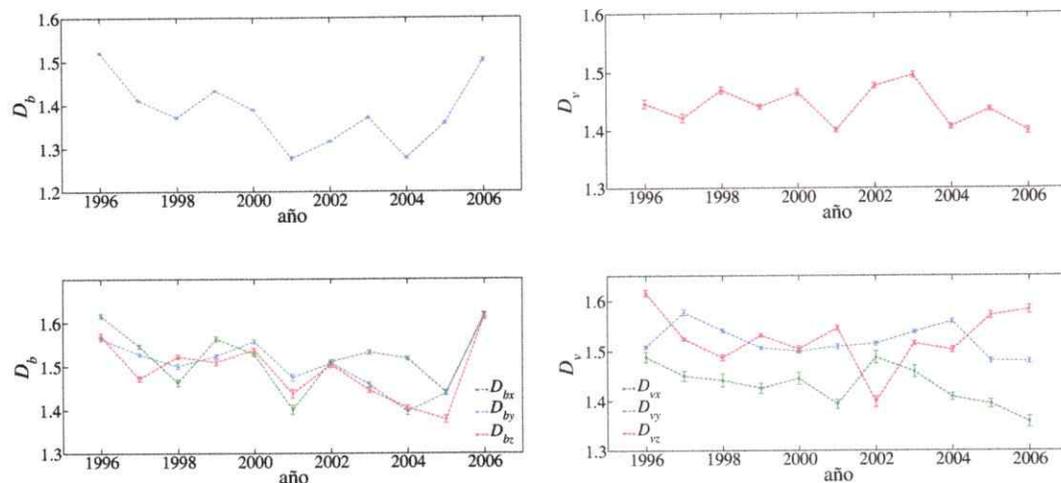


Figura 8.5: Dimensión de *box-counting* para cada año del ciclo solar 23. Arriba se observan las dimensiones fractales de la magnitud del campo magnético (izquierda) y magnitud de la velocidad del viento solar (derecha). En las figuras de abajo, las líneas verdes corresponden a la componente  $x$ , azul a componente  $y$  y negra a la componente  $z$  del campo magnético (izquierda) y velocidad (derecha), respectivamente.

relaciones importantes entre las dimensiones de la velocidad del viento solar y los años de alta actividad.

## 8.2. *Shell Model* y viento solar

Con el objetivo de analizar la relación existente entre la fractalidad del viento solar y la actividad geomagnética desde otra perspectiva, en esta sección se expone una manera diferente de tratar un *shell model*. En el capítulo 7 se ha presentado el análisis de la evolución de la fractalidad de la serie de tiempo de la energía magnética disipada obtenida de un *shell model* en donde los términos de forzamiento de éste son calculados a partir de la ecuación de Langevin. En esta sección, el modelo será forzado a partir de datos del viento solar como los estudiados en la sección anterior. De esta manera, tal como se explicó en la introducción de este capítulo, se pretende estudiar la posible relación existente entre la fractalidad del *input* (viento solar) y la actividad

del *output* (actividad geomagnética).

Antes de cambiar la fractalidad del forzamiento del modelo, es interesante destacar que el forzamiento obtenido a partir de la ecuación de Langevin, tiene una dimensión de *box-counting* característica  $D \sim 1.7$ . Si observamos la figura 8.5, podemos notar que la fractalidad de la magnitud del campo magnético y la velocidad es cercana a la fractalidad del forzamiento generado a partir de la ecuación de Langevin en los años correspondientes a los extremos del ciclo solar (menor actividad solar).

El procedimiento a seguir para cambiar la fractalidad del forzamiento del modelo corresponde al siguiente: Se considera como *input* del modelo [valores de los forzamientos en el campo de velocidad ( $f_1$ ) y en el campo magnético ( $g_1$ ) en las ecuaciones (6.23) y (6.24), respectivamente]:  $f_1(t) = |\vec{v}|e^{i2\pi n_t}$  y  $g_1(t) = |\vec{b}|e^{i2\pi n_t}$ , con  $n_t$  un número aleatorio en cada paso de tiempo de la simulación,  $|\vec{v}|$  y  $|\vec{b}|$ , el módulo de la velocidad y el campo magnético del viento solar. Con esto, a partir de un escalar (módulos de la velocidad y campo magnético del viento solar), se consigue el forzamiento complejo requerido para resolver las ecuaciones del modelo. Además, con el objetivo de que los forzamientos considerados sean del mismo orden que los obtenidos con la ecuación de Langevin [ecuación (6.25)], se han multiplicado los forzamientos con un factor  $10^{-2}$  en el caso de  $f_1$  y  $10^{-4}$  en el caso de  $g_1$ . Luego, se consideran los trece años presentes en el ciclo solar 23 (1996 a 2008), que como ya se presentó en la sección 8.1.2 (figura 8.5), tienen una dimensión fractal característica que varía de acuerdo a la actividad del ciclo solar. Entonces, se generan trece series de tiempo para  $\varepsilon_b(t)$  [ecuación (6.26)], cada una de ellas utilizando como *input* la correspondiente serie de datos del viento solar de los años considerados. Para que el *shell model* alcance un estado estacionario, es necesario realizar un gran número de iteraciones, lo cual no es posible conseguir con los datos correspondientes a sólo un

año como *input*, ya que la resolución de ellos es de 1 minuto ( $5 \times 10^5$  datos aproximadamente), mientras que las simulaciones realizadas en este caso tienen un total de  $7 \times 10^7$  iteraciones. Por esto, fue necesario repetir las series de tiempo las veces que fuese necesario hasta completar el número de datos del *input* requerido por la simulación.

Dos series de tiempo obtenidas a partir de este procedimiento se muestran en la figura 8.6.

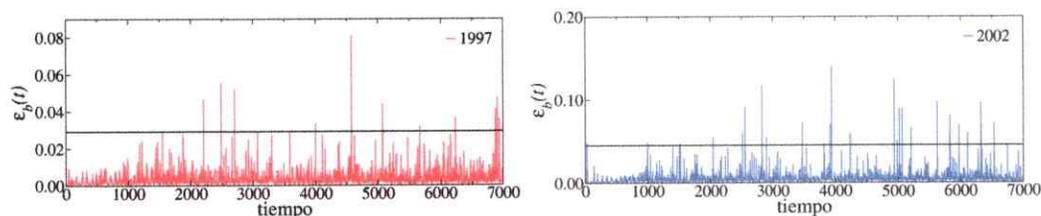


Figura 8.6: Energía magnética disipada obtenida del *shell model* cuyos términos de forzamiento corresponden a los datos del campo magnético y velocidad de los años 1997 (izquierda) y 2002 (derecha). Las líneas negras horizontales corresponden al umbral  $\tilde{\varepsilon}_b(t) = \langle \varepsilon_b(t) \rangle + n \cdot \sigma$ , donde  $\sigma$  es la desviación estándar y  $n = 10$  [ecuación (7.2)].

Una vez obtenidas las trece series de tiempo de la energía magnética disipada utilizando como *input* la correspondiente serie de datos de campo magnético y velocidad de cada año, el siguiente paso es calcular la actividad de la serie obtenida con el fin de encontrar la posible relación entre la fractalidad del *input* y la actividad del *output*.

Para ello, se define un umbral en base al cual se definen cuatro parámetros de actividad. El umbral es tal que  $\tilde{\varepsilon}_b(t) = \langle \varepsilon_b(t) \rangle + n \cdot \sigma$ , donde  $\sigma$  es la desviación estándar y  $n = 10$  [consistente con la ecuación (7.2)]. Las líneas negras horizontales en la figura 8.6 corresponden al umbral para cada uno de los años presentados. Los parámetros de actividad han sido definidos de la siguiente manera:

- Número de datos  $N$  de la serie que se encuentran sobre el umbral  $\tilde{\varepsilon}_b$ .
- Promedio de la serie de tiempo obtenida  $\langle \varepsilon_b(t) \rangle$ .
- Promedio de los datos de la serie de tiempo que se encuentran sobre el umbral  $\langle \varepsilon_b(t) \rangle_{up}$ .
- Máximo valor de  $\varepsilon_b(t)$  obtenido,  $\max(\varepsilon_b)$ .

Se han definido cuatro parámetros de actividad puesto que no es clara la manera de definir “actividad” para esta simulación. A partir de estas definiciones de actividad, en la figura 8.7 se muestran los resultados obtenidos.

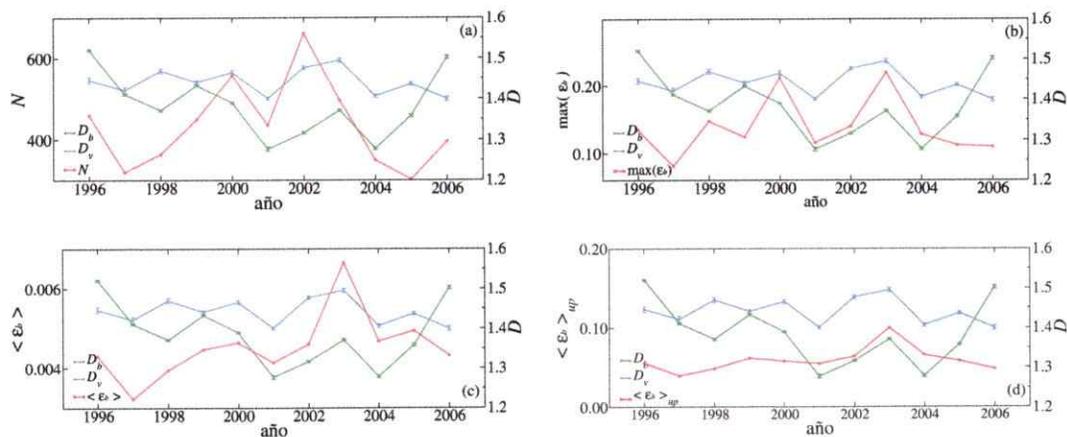


Figura 8.7: Dimensión de *box-counting* de los términos de forzamiento ( $|v|$  y  $|b|$  del viento solar) con su respectivo parámetro de actividad (línea roja). (a)  $N$ , (b)  $\max(\varepsilon_b(t))$ , (c)  $\langle \varepsilon_b(t) \rangle$  y (d)  $\langle \varepsilon_b(t) \rangle_{up}$ . Línea verde: dimensión de *box-counting* para la magnitud del campo magnético del viento solar (*input*); línea azul: dimensión de *box-counting* para la magnitud de la velocidad del viento solar (*input*)

Es importante notar que de los cuatro parámetros de actividad definidos, sólo  $N$  y  $\langle \varepsilon_b(t) \rangle$  presentan un *peak* cercano al máximo solar. Además la dimensión fractal de los términos de forzamiento correspondientes al campo magnético (línea verde en figura 8.7), muestra un mínimo cerca del máximo solar. Sin embargo, los términos

de forzamiento del campo de velocidades no muestran una clara correlación con los parámetros de actividad. Esto sugiere que la complejidad de los términos de forzamiento del campo magnético podría tener, en la simulación, un efecto más fuerte que la complejidad del forzamiento del campo de velocidades. De esta manera, se sugiere que las variaciones en la fractalidad del campo magnético del viento solar utilizado como *input* (disminución de la dimensión en el máximo solar), influyen más fuertemente en la formación de un *peak* en el parámetro de actividad cercano al máximo solar.

### 8.3. Resumen

La evolución de la dimensión fractal del campo magnético y la velocidad del viento solar medida a 1 AU de distancia [65] ha sido presentada en este capítulo. El análisis se ha realizado tanto a partir de datos anuales (años 2000, 2001 y 2003) como de datos correspondientes al ciclo solar 23 completo.

A partir de lo expuesto, se ha concluido que la complejidad presente en el campo magnético del viento solar, cuantificada a través del cálculo de la dimensión de *box-counting* de dicha serie de tiempo, parece tener una fuerte influencia en la generación de tormentas geomagnéticas detectadas con el índice *Dst*. Lo anterior es sustentado en el hecho de que la dimensión fractal de *box-counting* disminuye cuando ocurre una fuerte perturbación en el campo magnético del viento solar. Además, dicha disminución está relacionada también con un decrecimiento del índice *Dst* cuando se analizan los años por separado.

Si bien, variaciones en la velocidad y el campo magnético del viento solar están relacionados con la formación de tormentas en la magnetósfera terrestre, en esta tesis, dicha relación sólo fue observada al estudiar las dimensiones fractales del campo

magnético del viento solar en el análisis anual y el ciclo solar 23 completo. No sucedió lo mismo al analizar la velocidad del viento solar. En este caso, sólo se aprecia una leve correlación, y sólo al estudiar el ciclo solar 23 completo.

Posteriormente, se han utilizado datos del viento solar como términos de forzamiento del *shell model*. Específicamente, se generaron trece series de tiempo de energía magnética disipada forzadas a partir de los datos del viento solar de cada uno de los años del ciclo solar.

De manera muy interesante, el *shell model* es capaz de retener la información de la actividad del viento solar, generando series de tiempo de energía magnética disipada con mayor o menor actividad cuando se usan forzamientos que corresponden a períodos de máximo o mínimo solar, respectivamente. Además se observa una relación inversa entre la dimensión fractal del campo magnético del viento solar y parámetros de actividad de la serie generada a partir de ese forzamiento. Esto es, años de alta actividad solar del ciclo solar 23 corresponden a bajas dimensiones fractales del campo magnético del viento solar, y a altos parámetros de actividad.

# Capítulo 9

## Conclusiones

En este trabajo se presentó un estudio de la evolución de la fractalidad presente en la magnetósfera terrestre y en la fotosfera solar. Para esto se caracterizó la ocurrencia de eventos como llamaradas solares y tormentas geomagnéticas por medio de una dimensión de *box-counting*, como una manera de medir la complejidad presente en el sistema, y determinar algún parámetro que permita eventualmente la predicción de estos eventos. Esto se realizó mediante un análisis sistemático de datos, y a través de un modelo teórico/computacional que describa las principales características estadísticas del sistema en estudio.

A continuación, se presenta una breve descripción de los principales resultados obtenidos en cada uno de los análisis realizados. Luego se presenta la discusión de ellos, destacando los aportes más relevantes obtenidos en esta tesis.

Respecto al análisis realizado en la magnetósfera terrestre, se estudió la evolución de la dimensión de *box-counting* de la serie de tiempo del índice *Dst* (capítulo 4). Para esto, se analizaron tres grandes tormentas ( $Dst < -220$  nT), cinco años de alta actividad magnética, y el ciclo solar 23 completo. Las series de tiempo *Dst* se

estudiaron de tres maneras diferentes: estados tormenta y calmos; ventanas de tiempo de ancho variable en torno a una tormenta; y ventanas móviles a lo largo de una tormenta o a través de la serie de tiempo completa. En todos los casos estudiados, se encontró que la dimensión fractal de *box-counting* de la serie de tiempo *Dst* es sensible a variaciones magnéticas. Específicamente, la dimensión calculada disminuye en presencia de tormentas geomagnéticas, y más interesante aún, esta disminución comienza días antes de que el índice *Dst* alcance su valor mínimo.

Con el objetivo de investigar una posible correlación entre la dimensión fractal de la serie *Dst* y la actividad solar, se realizó una comparación entre la dimensión de *box-counting* y diversos índices de actividad solar (capítulo 5). Se encontró que existe una relación inversa entre la dimensión de *box-counting* del índice *Dst* y el índice de llamarada solar, esto es, períodos de gran índice de llamarada solar están acompañados por una disminución en la dimensión fractal. Además, descensos notables de la dimensión fractal se observan dos semanas después de un máximo en el índice coronal.

Luego, se realizó el análisis de la dimensión fractal de magnetogramas fotosféricos diarios, estudiando la evolución de la fractalidad presente en la compleja dinámica magnética solar. Se encontró una correlación débil entre la dimensión fractal y el índice de llamarada solar, y una correlación ligeramente más evidente, verificada al realizar la correlación cruzada, cuando la serie se suaviza al promediar en ventanas de dos semanas.

A diferencia de los resultados obtenidos en el análisis del índice *Dst*, donde los

resultados obtenidos son robustos en distintas escalas de tiempo, los resultados obtenidos en el caso de los magnetogramas son más claros a grandes escalas. Esto es, una correlación entre la dimensión fractal de los magnetogramas diarios e índices de actividad solar como el índice coronal, índice de llamarada solar y número de manchas solares, o con el índice *Dst* a nivel magnetosférico, es observable al analizar el ciclo solar 23 completo. En efecto, la dimensión fractal de los magnetogramas solares muestra un aumento evidente alrededor del máximo solar, correlacionado claramente con la correspondiente disminución en *Dst*, y el aumento en el número de manchas solares.

Una vez realizado el análisis de datos en la magnetósfera terrestre y en la fotosfera solar, y al encontrar en ambos estudios una relación sistemática entre la dimensión fractal de *box-counting* calculada y la actividad solar y geomagnética según corresponda, el siguiente paso en esta investigación consistió en utilizar un modelo teórico/computacional para intentar comprender la física que podría influir en la disminución de la dimensión fractal en la magnetósfera terrestre en períodos de alta actividad magnética. Para esto, se estudió la capacidad de un *shell model* para reproducir la evolución de la complejidad presente en la dinámica magnética terrestre (capítulo 7). A partir de ello, se intentó determinar un rango de parámetros del modelo que reprodujera de la mejor manera posible los resultados obtenidos a partir del análisis del índice *Dst*.

Específicamente se calculó la dimensión de *box-counting* de la serie de tiempo de la energía magnética disipada obtenida del *shell model*, en las mismas tres formas de definir una ventana de tiempo utilizadas en el análisis *Dst*, a saber: tormenta y

calmo; ancho variable en torno a una tormenta; y ventanas móviles a lo largo de una tormenta. Para efectos de este trabajo, se consideró un *peak* en la serie de tiempo de la energía magnética disipada obtenida del modelo, como el indicio de la presencia de una tormenta geomagnética.

A partir del análisis realizado, se encontró que, al igual que en el caso del análisis del índice *Dst*, la dimensión fractal disminuye durante períodos de alta actividad geomagnética, al menos para un determinado rango del número de Prandtl magnético,  $P_m = \nu/\eta$ .

En efecto, con el objetivo de determinar el rango de parámetros de la viscosidad cinemática y resistividad magnética ( $\nu$  y  $\eta$ , respectivamente) en los cuales los resultados obtenidos a partir del modelo reproducen los resultados estadísticos observados en el análisis *Dst*, se realizó un estudio sistemático de diversas simulaciones obtenidas con distintos valores de los parámetros  $\nu$  y  $\eta$ , y se realizó una prueba de significancia estadística para cuantificar la correlación existente entre la serie obtenida y su respectiva dimensión fractal. En este caso, se realizó un *Student's t-test*. A partir de dicho análisis se encontró que generalmente valores altos de  $\nu$  y  $\eta$ , en el caso  $P_m = 1$  ( $\nu = \eta = 10^{-\mu}$ , con  $\mu = 3$  y  $4$ ), poseen una mejor correlación entre la dimensión de *box-counting* y la energía magnética disipada. Además, al variar  $P_m$  de tal forma de mantener fijo el valor de  $\nu = 10^{-\mu}$ , con  $\mu = 3$  y  $4$ , se encontró que valores  $P_m \lesssim 1$  son adecuados para utilizar el modelo para describir la estadística presente en la magnetósfera terrestre.

Uno de los resultados interesantes de destacar corresponde al análisis realizado al

estudiar los estado tormenta y calmos de la energía magnética disipada obtenida del *shell model*. Ahí se pudo explorar, en algún sentido, la multifractalidad presente en la serie estudiada. Esto gracias al análisis realizado al calcular la dimensión de *box-counting* para un *scatter diagram* que depende de la distancia entre los datos,  $j$ . Se encontró que el conjunto de dimensiones fractales de un estado tormenta y un estado calmo obtenido a partir de las distintas maneras de construir el *scatter diagram* (distinta separación entre los datos),  $D_j$ , tienen una estructura específica y distinta entre ellas. Esto es, existe un rango para  $j$  en el cual las dimensiones de un estado tormenta se encuentran sobre 1, mientras que para estados tormentas, se encuentran bajo 1.

Cabe mencionar que los resultados obtenidos en todos los tipos de ventana analizados con el índice *Dst* fueron, para cierto rango de  $P_m$ , estadísticamente reproducidos en el estudio del modelo.

Finalmente, con el objetivo de saber si la fractalidad del *input* del modelo influye en la actividad del *output* de éste (energía magnética disipada), en la última parte de este trabajo se utilizaron datos del viento solar como *input* del modelo (capítulo 8). Con este análisis se buscó construir un modelo, muy sencillo y preliminar, para saber si la fractalidad del viento solar influye en la actividad geomagnética.

Al estudiar la fractalidad de la velocidad y el campo magnético del viento solar, utilizando el mismo formalismo utilizado para el estudio de la serie *Dst*, se encontró que la dimensión fractal disminuye cuando ocurre un *peak* en el campo magnético del viento solar. Hecho que no pudo ser verificable tan robustamente para el caso de la velocidad del viento solar. Además, dicha disminución de la dimensión

fractal está relacionada también con un descenso del índice *Dst*. Los resultados anteriores fueron obtenidos analizando tres años de alta actividad, y son aún más claros al estudiar el ciclo solar 23 completo, observándose que el máximo del ciclo solar está acompañado de una disminución de la dimensión fractal calculada.

Posteriormente, al utilizar los datos del viento solar como términos de forzamiento del *shell model*, se obtuvieron resultados interesantes. El *shell model* es capaz de retener, en algún sentido, la información de la actividad del viento solar, generando series de tiempo de energía magnética disipada con mayor o menor actividad cuando se usan forzamientos que corresponden a períodos de máximo o mínimo solar, respectivamente. Además se observa una relación inversa entre la dimensión fractal del campo magnético del viento solar y parámetros de actividad de la serie generada a partir de ese forzamiento. Esto es, años de alta actividad solar del ciclo solar 23 corresponden a bajas dimensiones fractales del campo magnético del viento solar, y a altos parámetros de actividad.

Si bien es sabido que los sistemas estudiados a lo largo de esta tesis exhiben características multifractales, es interesante encontrar que un análisis fractal, más sencillo, permite estudiar la evolución de la dinámica magnética cerca de la Tierra o en la superficie solar, sugiriendo que podría ser una herramienta útil para la comprensión y la eventual predicción de la actividad geomagnética y solar. En efecto, destacamos los siguientes resultados:

*La dimensión fractal de la serie de tiempo  $Dst$  y de la serie de  $\epsilon_b(t)$  obtenida de un shell model, disminuye en períodos de alta actividad y en presencia de una*

*tormenta geomagnética.* Dicho descenso en la dimensionalidad obtenida en períodos de alta actividad geomagnética, y antes de éstos, que se ha encontrado de manera robusta tanto en el análisis de datos, como a partir del estudio del *shell model*, podría ser el indicio de un ordenamiento de la configuración magnética en la magnetósfera terrestre que conlleva a un estado disipativo posterior. La disminución de la dimensión fractal obtenida podría estar relacionada también con un cambio en las condiciones del viento solar. Este último hecho tiene sentido, considerando el análisis preliminar realizado en la última parte de esta tesis (capítulo 8), donde se encontró que la disminución en la dimensión fractal del campo magnético del viento solar, antecede a un suceso disipativo en la magnetósfera terrestre, como lo es una tormenta geomagnética, la cual es monitoreada por el índice *Dst*.

*Existe una relación entre la dimensión fractal del índice Dst e índices de actividad solar.* Los resultados obtenidos sugieren que existe una relación entre las dinámicas magnéticas solar y terrestre, que pueden ser estudiadas al analizar las características fractales de las fluctuaciones magnéticas medidas en la Tierra. Este hecho es corroborado con la disminución de la dimensión fractal del índice *Dst* observada dos semanas después de un máximo en el índice coronal.

*La dimensión fractal de magnetogramas fotosféricos aumenta en el máximo del ciclo solar.* Este aumento en la dimensión del sistema podría estar relacionada con la existencia de un mayor número de zonas activas en la fotosfera solar, con una mayor intensidad del campo magnético. Cabe destacar que, durante el máximo del ciclo solar, existe un aumento en el número de manchas solares, con una configuración más compleja, que conllevan a mayor número de eventos disipativos como tormentas

solares y eyecciones de masa coronal. Esto sugiere que así como la dimensión fractal de la serie *Dst* podría ser útil para caracterizar tormentas geomagnéticas, la dimensión fractal de los magnetogramas diarios también podría ser útil para caracterizar la evolución de la actividad en la fotosfera solar en una escala de tiempo mayor, como un ciclo solar completo.

*El shell model es capaz de describir las características fractales de la actividad geomagnética en al menos un rango de los parámetros del modelo.* En efecto, el análisis fractal de la energía magnética disipada obtenida de un *shell model*, reproduce las características observadas en la magnetósfera terrestre a través del análisis del índice *Dst*. Específicamente, para ciertos valores de la viscosidad y la resistividad, la dimensión fractal disminuye en presencia de eventos disipativos. Dicho descenso puede ser explicado de la misma manera que para el caso del índice *Dst*, a saber, la baja dimensionalidad puede estar asociada a un ordenamiento del sistema que conlleva un evento disipativo posterior.

Es interesante destacar que el análisis de datos presentado en esta tesis es, hasta donde sabemos, el primer estudio sistemático, conjunto, de la fractalidad de datos a nivel solar y magnetosférico. Además, el haber analizado distintas escalas temporales (tormentas o años particulares y el ciclo solar 23 completo) ha permitido obtener resultados robustos que aportan al entendimiento del acoplamiento entre las dinámicas solar y magnetosférica. A partir de dichos estudios, hemos obtenido el primer indicio, hasta donde sabemos, de que la dimensión de *box-counting* aquí calculada podría servir como una herramienta para predecir tormentas geomagnéticas.

En cuanto al modelo numérico, estudios previos basados en el *shell model* utilizado en esta tesis habían incluido forzamientos sólo en el campo de velocidades. Aquí, sin embargo, hemos incluido también el forzamiento magnético en el *shell model*. Este hecho resultó ser relevante en las conclusiones obtenidas, ya que se pudo observar que parece existir una relación entre la fractalidad del campo magnético (y no tanto de la velocidad) del viento solar utilizada como *input* del modelo, y la actividad de la energía magnética disipada obtenida a partir de éste.

A modo de proyecciones y continuación de este trabajo de tesis surgen varias alternativas. Con el fin de analizar más profundamente la correlación entre la dimensión fractal y la actividad geomagnética, podría ser interesante estudiar el índice SYM-H. Esto debido a que al igual que el índice *Dst*, este índice contiene información respecto a las variaciones magnéticas en la magnetósfera, pero, a diferencia del índice *Dst*, la resolución de éste corresponde a 1 minuto, razón por la cual se podrían explorar otras escalas de tiempo. Además, un análisis similar al realizado con la energía magnética disipada obtenida del *shell model*, específicamente, estudiar la dimensión de *box-counting* dependiente de la separación entre los datos, podría ser realizado a partir del análisis del índice SYM-H.

Además, estudiar la multifractalidad presente en ambos sistemas (fotosfera solar y magnetósfera terrestre), es sin duda un campo interesante de abordar. Esto debido a que los sistemas estudiados exhiben características multifractales que han sido estudiadas con anterioridad. Sin embargo, un estudio sistemático de datos como el presentado en esta tesis, aún no ha sido realizado, y éste podría proporcionar nuevos conocimientos que contribuyan en el entendimiento de las actividades solar y mag-

netosféricas, tanto a corto como a largo plazo.

Finalmente, si bien el modelo utilizado en esta tesis es capaz de reproducir cualitativamente las características fractales de la actividad geomagnética, sería interesante mejorar el modelo de tal forma de aportar de una mejor manera al entendimiento de los procesos físicos que conllevan a una tormenta geomagnética a partir del análisis de la fractalidad/multifractalidad presente. En este aspecto, sería interesante forzar el modelo de otra manera. Por ejemplo, utilizando una ecuación en la que se pueda controlar la fractalidad del *input*, o bien, acoplar dos *shell models*, uno a nivel solar (como el estudiado en las Refs. [61, 63]), y otro como el utilizado en esta tesis. Con esto, se podría utilizar el *output* del modelo a nivel solar, como *input* del modelo de la magnetósfera terrestre.

## Apéndice A

### Prueba de significancia estadística: *Student's t-test*

Hay muchos métodos para medir la significancia estadística de la correlación entre dos series de tiempo [122].

En este trabajo, se ha utilizado el llamado *Student's t-test* [123, capítulo 6], el cual es una medida de la significancia de la diferencia de los promedios entre dos distribuciones  $x_A$  y  $x_B$ . En particular, se ha usado el *t-test* para varianzas desiguales (*unequal-variance t-test*), que es adecuado para comparar dos distribuciones con una diferencia significativa en sus varianzas.

El principal objetivo de este método es construir dos series de tiempo como se explica a continuación, e identificar la correlación entre ellas basándose en la diferencia de sus promedios.

Los valores estadísticos en esta prueba *t-value* y los grados de libertad *df*, dados por

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{[\text{Var}(x_A)/N_A + \text{Var}(x_B)/N_B]^{1/2}}, \quad (\text{A.1})$$

$$df = \frac{\left[ \frac{\text{Var}(x_A)}{N_A} + \frac{\text{Var}(x_B)}{N_B} \right]^2}{\frac{[\text{Var}(x_A)/N_A]^2}{N_A-1} + \frac{[\text{Var}(x_B)/N_B]^2}{N_B-1}}. \quad (\text{A.2})$$

Aquí,  $N_A$  y  $N_B$  corresponden al número total de datos de las series  $x_A$  y  $x_B$ , respectivamente.  $\text{Var}(x)$  es la varianza de la serie de tiempo  $x$ .

Luego, se define una cantidad denominada *p-value*, que es una función de  $t$  y  $df$ , definida en términos de funciones Beta incompletas [122].

La hipótesis es satisfecha si el *p-value* es tal que  $p < 0.05$ , lo que significa que la diferencia entre los promedios de las dos series construidas es significativa [122].

En esta tesis, las series de tiempo  $x_A$  y  $x_B$  son construidas a partir de la serie de tiempo para la energía magnética disipada  $\varepsilon_b(t)$ , de la siguiente manera:

1. Se calcula la dimensión de *box-counting*  $D$  para cada ventana de datos de  $\varepsilon_b(t)$ .
2. Se calcula el promedio de  $\varepsilon_b(t)$  para cada ventana.
3. Se calculan los valores del promedio y mediana de la dimensión  $D$  (para la simulación completa).
4. Se crean los subconjuntos de datos  $x_A$  y  $x_B$ , donde  $x_A$  ( $x_B$ ) son los subconjuntos de la serie de  $\varepsilon_b(t)$  que corresponden a los datos que se encuentran sobre (bajo) el promedio o mediana de  $D$ .

Una vez obtenidas las dos series de tiempo, se calcula el valor del *p-value* para probar la diferencia estadística entre los promedios de las distribuciones  $x_A$  y  $x_B$ .

Luego, mediante la realización del *Student's t-test* de estas series, podemos saber si existe una diferencia significativa entre los promedios (o medianas) de  $\varepsilon_b$  cuando su dimensión fractal está sobre (o bajo) la media (o mediana) de los valores de la dimensión fractal de la simulación completa. De esta manera, si la hipótesis se

cumple, identificaría una correlación entre la dimensión fractal y la existencia de una tormenta.

## Apéndice B

### Análisis tormentas pequeñas

En este apéndice, se analizan tormentas más pequeñas que las que se consideran en la sección 7.3, con el fin de comprobar si los resultados también son válidos para otras situaciones, donde la distinción entre un “evento” y el comportamiento de fondo es menos clara. Las tormentas seleccionadas y sus respectivos *peaks* se muestran en la figura B.1. Ellos son mucho más pequeños que los que se consideran en las secciones 7.3 y 7.4 (ver, por ejemplo, figura 7.10).

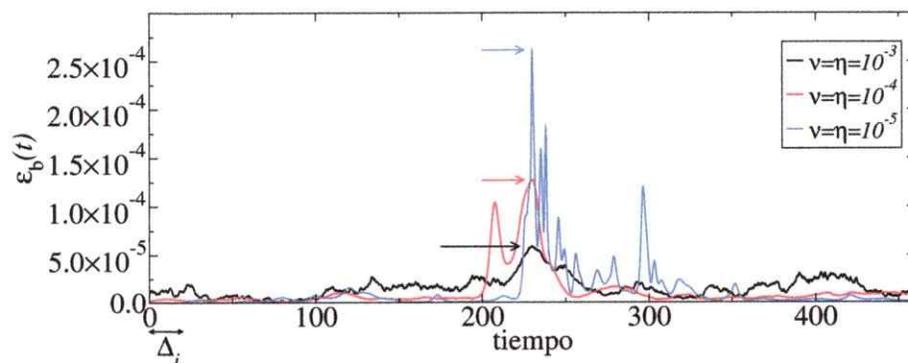


Figura B.1: Tormentas pequeñas analizadas en la sección. B.1.

## B.1. Ventana de ancho variable en torno a una tormenta pequeña

Al igual que en la sección 7.3, se calcula la dimensión de *box-counting* para ventanas de ancho variable centradas en los máximos de las tormentas pequeñas identificados con flechas en la figura B.1. Se analizaron 23 ventanas de ancho  $m\Delta_i$  con  $m = 1, \dots, 23$  y  $\Delta_i = 2000$  puntos.

Se analizaron tormentas para tres valores diferentes de viscosidad y resistividad ( $\nu = \eta = 10^{-\mu}$ , con  $\mu = 3, 4, 5$ ). Se consideraron estos valores de  $\mu$  pues, al menos con dos de los tres parámetros, los resultados obtenidos en la sección 7.3 fueron consistentes con los observados en el análisis del índice *Dst* presentado en el capítulo 4. Los resultados se muestran en la figura B.2.

Considerando que los resultados obtenidos en la sección 7.2 son menos robustos para el caso  $n = 5$  en la ecuación (7.2) (tormentas pequeñas) y tomando en cuenta que en la sección 7.3 los resultados fueron más robustos para valores de  $P_m$  cercanos a 1, en este caso sólo se realiza el análisis de tormentas pequeñas para el caso  $P_m = 1$ .

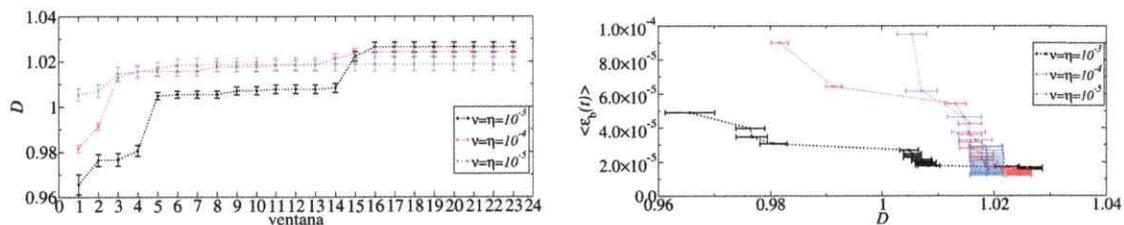


Figura B.2: (a) Dimensión de *box-counting* para tormentas pequeñas (Fig. B.1) con sus respectivas barras de error, como función del número de ventana de ancho variable considerada. (b) Valor promedio de  $\epsilon_b$  para cada ventana de ancho variable como función de la dimensión de *box-counting*, con sus respectivas barras de error

De la figura B.2 se concluye que la dimensión de *box-counting*  $D$  aumenta a medida que aumenta el ancho de la ventana [Fig. B.2(a)], y valores mayores de  $\langle \epsilon_b(t) \rangle$

se asocian con valores pequeños de  $D$  [Fig. B.2(b)]. Así, la dimensión fractal tiene el mismo comportamiento observado en las tormentas más grandes (véase figuras 7.8 y 7.9) y en el análisis presentado en la sección 4.2 de la serie *Dst*.

## B.2. Ventanas móviles a lo largo de una tormenta pequeña

Se analizaron tormentas pequeñas para tres valores diferentes de la viscosidad y la resistividad. Por las razones expuestas en la sección B.1, se consideraron los mismos valores de viscosidad y resistencia que se analizaron en dicha sección (ver fig. B.1).

Consideramos 45 ventanas de ancho  $\Delta_i = 2000$  datos. Cada ventana se posiciona inicialmente mucho antes del *peak* de la tormenta, y se mueve en pasos de  $\Delta/2$ .

En la figura B.3 se muestran los resultados obtenidos para  $P_m = 1$ . El comportamiento es similar al observado en la sección 7.4 y el capítulo 4, para los valores más pequeños de los parámetros (véase la última fila en la figura B.3, para  $\nu = \eta = 10^{-5}$ ).

Ahora, se calcula la dimensión de *box-counting* para 10 valores diferentes de  $P_m$ . Hemos fijado los valores de viscosidad de la misma manera que en sección 7.4.

En las figuras B.4 y B.5 se muestran los resultados obtenidos con  $P_m = 0.8$  y  $1.2$ , con  $\nu = 10^{-3}$  y  $\nu = 10^{-4}$ . De estas dos figuras, se concluye que los resultados no muestran una relación clara entre  $D$  y  $\epsilon_b$ .

En la figura B.6 mostramos los *p-values* del análisis realizado con los datos de simulación y  $D$  calculado. Al variar el valor de la viscosidad, los *peaks* observados desaparecen y no se pueden distinguir del ruido. Por lo tanto, la línea vertical en la figura B.6 indica el valor de  $P_m$  sobre el cual los resultados tienen sentido, porque existen los *peaks* analizados.

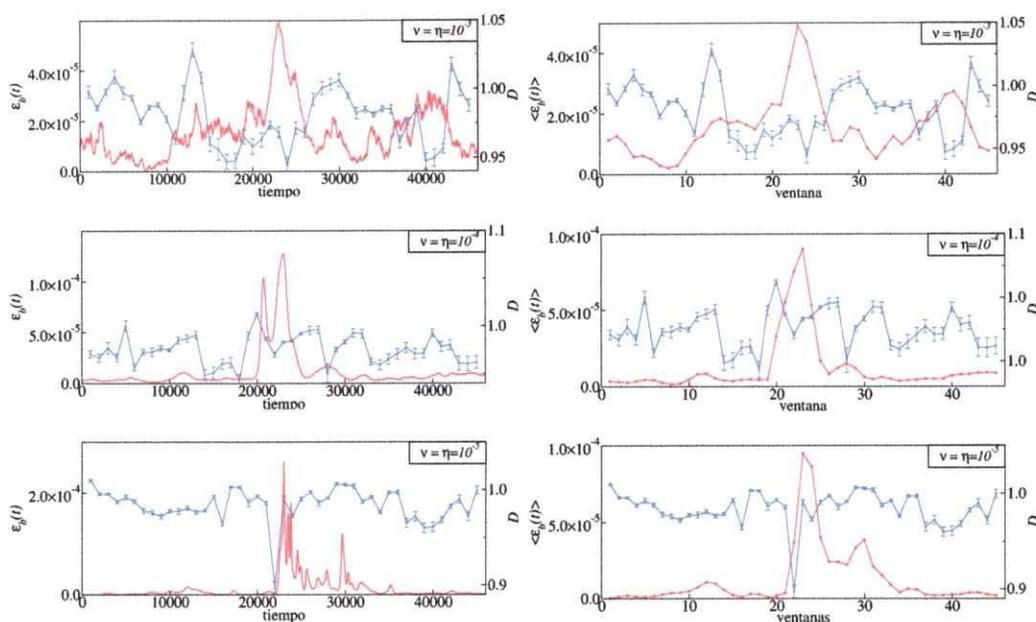


Figura B.3: Ventanas en movimiento con  $\nu = \eta$ , a lo largo de una tormenta pequeña. Línea azul: dimensión de *box-counting*  $D$ . Línea roja: (izquierda)  $\epsilon_b$ , usando la resolución completa de la simulación; (derecha) Usando el valor promedio de  $\epsilon_b$  sobre cada ventana.

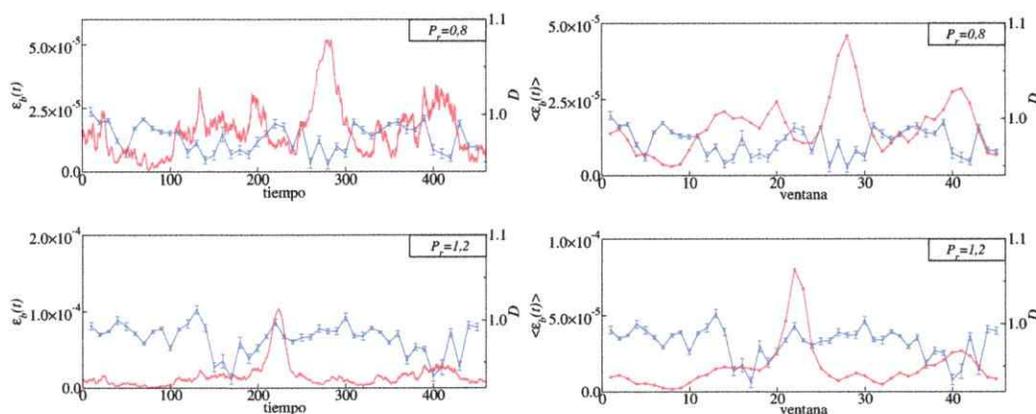


Figura B.4: Ventanas en movimiento con  $\nu \neq \eta$ , a lo largo de una tormenta pequeña.  $P_m = 1$  cuando  $\nu = 10^{-3}$ . Línea azul: dimensión de *box-counting*  $D$ . Línea roja: (izquierda)  $\epsilon_b$ , usando la resolución completa de la simulación; (derecha) Usando el valor promedio de  $\epsilon_b$  sobre cada ventana.

A diferencia de la observación realizada a partir de los resultados mostrados en las figuras B.4 y B.5, al analizar los  $p$ -values para todos los valores de  $P_m$  estudiados,

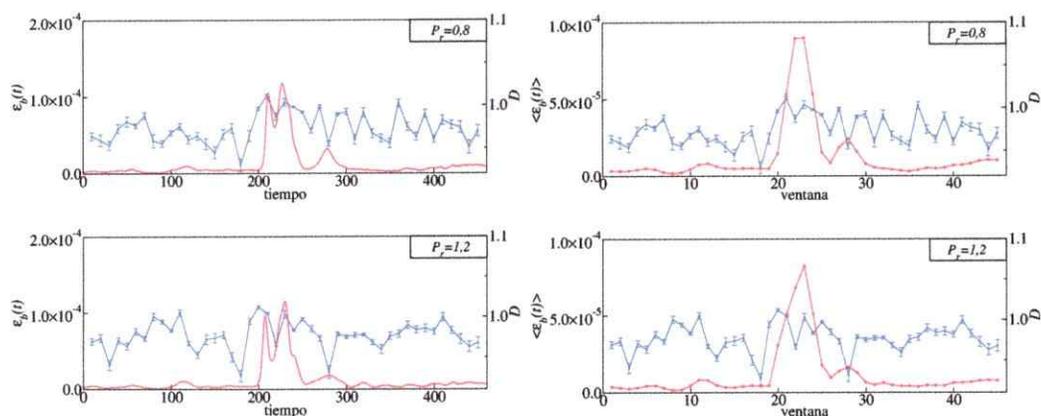


Figura B.5: Ventanas en movimiento con  $\nu \neq \eta$ , a lo largo de una tormenta pequeña.  $P_m = 1$  cuando  $\nu = 10^{-4}$ . Línea azul: dimensión de *box-counting*  $D$ . Línea roja: (izquierda)  $\epsilon_b$ , usando la resolución completa de la simulación; (derecha) Usando el valor promedio de  $\epsilon_b$  sobre cada ventana.

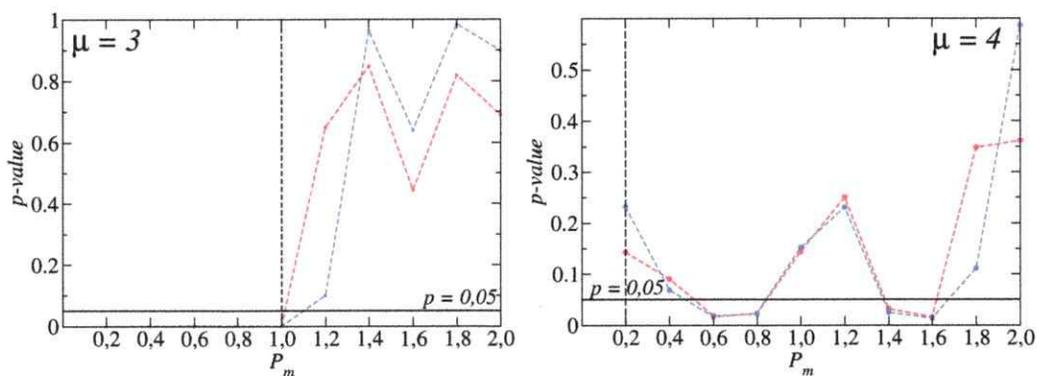


Figura B.6:  $p$ -values. Ventanas en movimiento a través de una tormenta pequeña a lo largo de una tormenta pequeña usando el criterio de la mediana (línea roja) o del promedio (línea azul). La línea horizontal corresponde al valor umbral  $p = 0,05$ . Izquierda:  $\nu = 10^{-3}$ . Derecha:  $\nu = 10^{-4}$ . La línea segmentada vertical corresponde al valor de  $P_m$  sobre el cual existe el estado tormenta.

en ambos casos,  $\mu = 3$  y  $4$ , se observa un rango de  $P_m$  donde la condición  $p < 0,05$  es satisfecha.

## Apéndice C

### Análisis de datos del viento solar

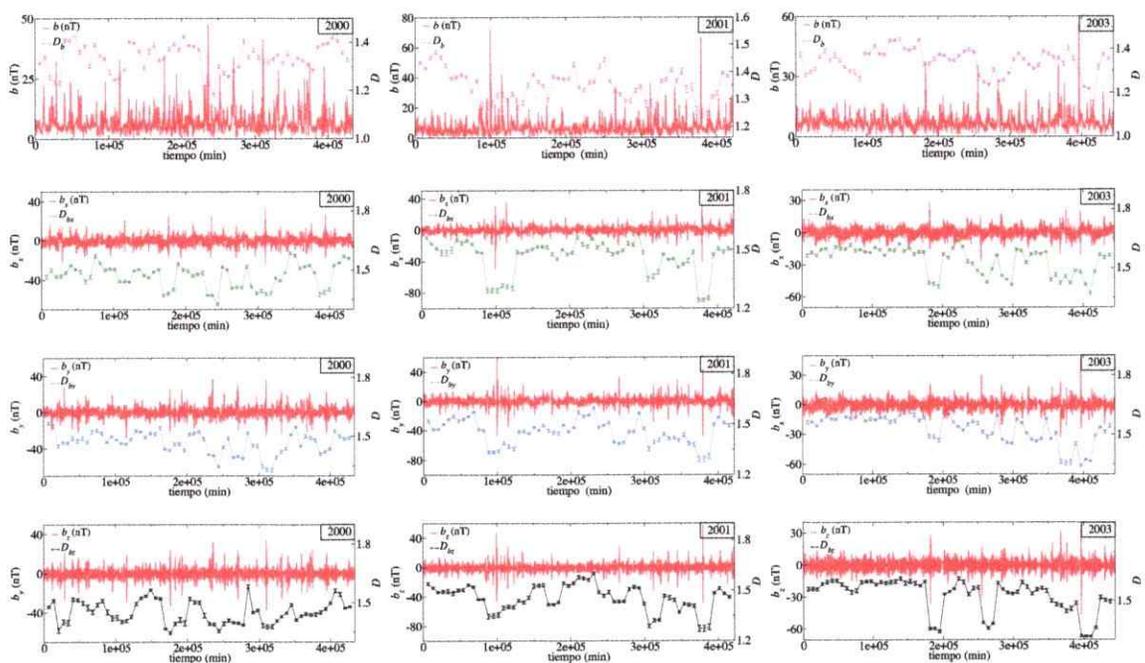


Figura C.1: Dimensión de *box-counting* de datos del campo magnético del viento solar. En el panel superior se presentan las dimensiones fractales de la magnitud del campo magnético, correspondientes a líneas rosadas. En los paneles siguientes se presentan los resultados de las dimensiones fractales de las componentes del campo magnético. Línea verde: componente  $x$ ; línea azul: componente  $y$ ; línea negra: componente  $z$ . Las líneas rojas corresponden a la serie de datos del viento solar respectiva utilizada. De izquierda a derecha se presentan los resultados de los años 2000, 2001 y 2003.

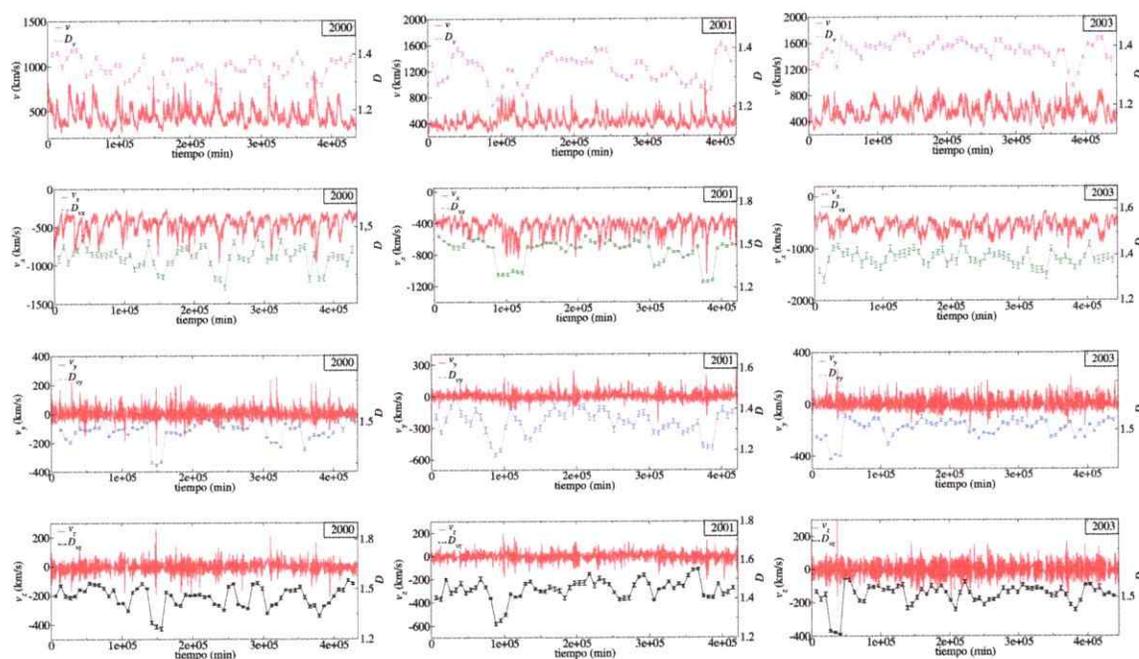


Figura C.2: Dimensión de *box-counting* de datos de velocidad del viento solar. En el panel superior se presentan las dimensiones fractales de la magnitud de la velocidad, correspondientes a líneas rosadas. En los paneles siguientes se presentan los resultados de las dimensiones fractales de las componentes de la velocidad. Línea verde: componente  $x$ ; línea azul: componente  $y$ ; línea negra: componente  $z$ . Las líneas rojas corresponden a la serie de datos del viento solar respectiva utilizada. De izquierda a derecha se presentan los resultados de los años 2000, 2001 y 2003.

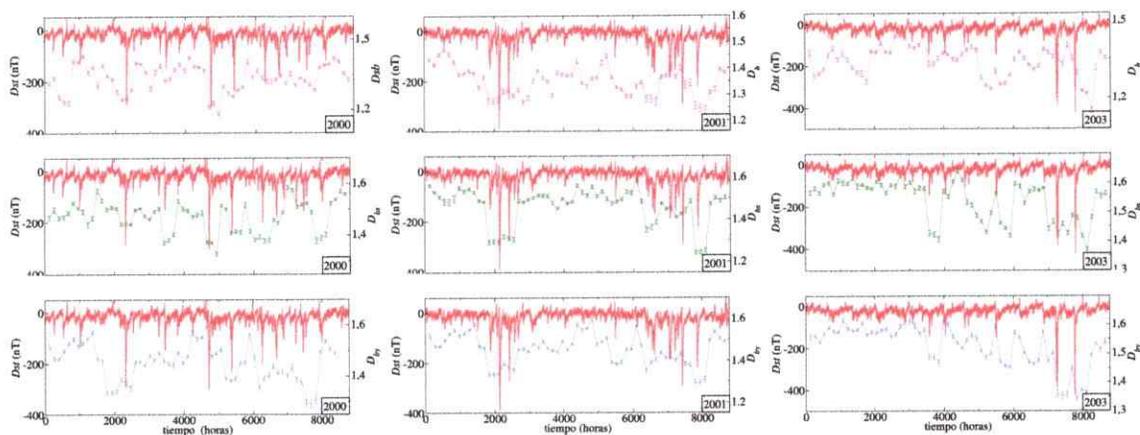


Figura C.3: Dimensión de *box-counting* del campo magnético del viento solar para tres años en una fase solar activa. Las líneas rojas corresponden al índice *Dst* correspondiente. Línea rosada: magnitud de  $|\vec{b}|$ ; línea verde: componente  $x$ ; línea azul: componente  $y$ ; línea negra: componente  $z$ . De izquierda a derecha se presentan los resultados de los años 2000, 2001 y 2003.

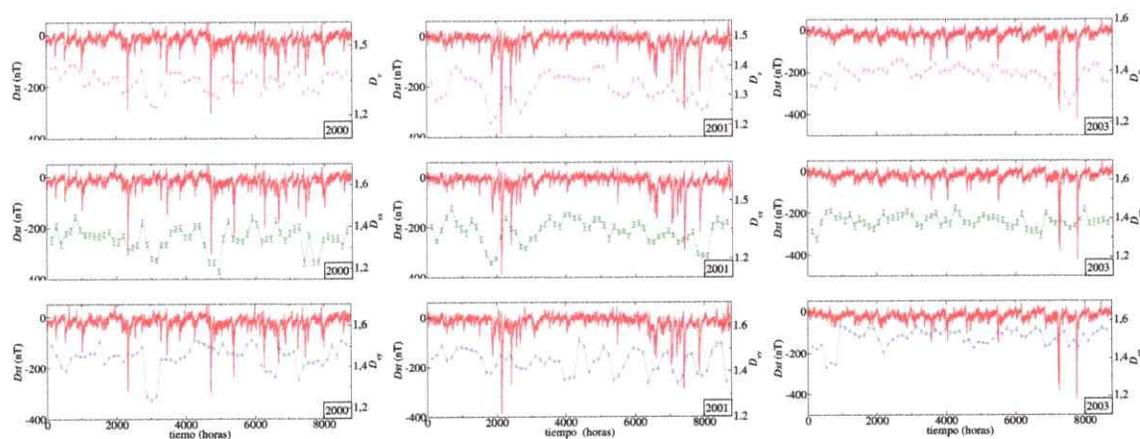


Figura C.4: Dimensión de *box-counting* de la velocidad del viento solar para tres años en una fase solar activa. Las líneas rojas corresponden al índice *Dst* correspondiente. Línea rosada: magnitud  $|\vec{v}|$ ; línea verde: componente  $x$ ; línea azul: componente  $y$ ; línea negra: componente  $z$ . De izquierda a derecha se presentan los resultados de los años 2000, 2001 y 2003.

## Referencias

- [1] F. F. Chen, *Introduction To Plasma Physics And Controlled Fusion* (Plenum Press, New York, 1984), segunda ed.
- [2] T. Chang, *Phys. Plasmas* **6**, 4137 (1999).
- [3] J. A. Valdivia, J. Rogan, V. Muñoz, L. Gomberoff, A. Klimas, D. Vassiliadis, V. Uritsky, S. Sharma, B. Toledo y L. Wastavino, *Adv. Spa. Res.* **35**, 961 (2005).
- [4] J. A. Valdivia, J. Rogan, V. Muñoz y B. Toledo, *Space Sci. Rev.* **122**, 313 (2006).
- [5] W. M. Macek, *Adv. Spa. Res.* **46**, 526 (2010).
- [6] R. O. Dendy, S. C. Chapman y M. Paczuski, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **49**, A95 (2007).
- [7] A. J. Klimas, J. A. Valdivia, D. Vassiliadis, D. N. Baker, M. Hesse y J. Takalo, *J. Geophys. Res.* **105**, 18765 (2000).
- [8] J. Takalo, J. Timonen, A. Klimas, J. Valdivia y D. Vassiliadis, *Geophys. Res. Lett.* **26**, 1813 (1999).
- [9] T. Chang y C. C. Wu, *Phys. Rev. E* **77**, 045401 (2008).

- [10] J. A. Valdivia, G. M. Milikh y K. Papadopoulos, *Radio Science* **33**, 1655 (1988).
- [11] T. Chang, *Phys. Plasmas* **6**, 4137 (1999).
- [12] J. A. Valdivia, A. Klimas, D. Vassiliadis, V. Uritsky y J. Takalo, *Space Sci. Rev.* **107**, 515 (2003).
- [13] J. A. Valdivia, J. Rogan, V. Muñoz, B. Toledo y M. Stepanova, *Adv. Space Res.* **51**, 1934 (2013).
- [14] W. M. Macek, *Adv. Space Res.* **46**, 526 (2010).
- [15] M. A. Berger y M. Asgari-Targhi, *Astrophys. J.* **705**, 347 (2009).
- [16] M. Dimitropoulou, M. Georgoulis, H. Isliker, L. Vlahos, A. Anastasiadis, D. Strintzi y X. Moussas, *Astron. Astrophys.* **505**, 1245 (2009).
- [17] A. A. Golovko, I. I. Salakhutdinova y A. I. Khlystova, *Geomagnetism and Aeronomy* **49**, 907 (2010).
- [18] G. Balasis y K. Eftaxias, *Eur. Phys. J. Special Topics* **174**, 219 (2009).
- [19] J. A. Valdivia, A. S. Sharma y K. Papadopoulos, *Geophys. Res. Lett.* **23**, 2899 (2012).
- [20] J. A. Valdivia, D. Vassiliadis, A. Klimas y A. S. Sharma, *Phys. Plasmas* **6**, 4185 (1999).
- [21] J. A. Valdivia, D. Vassiliadis, A. Klimas, A. S. Sharma y K. Papadopoulos, *J. Geophys. Res.* **104**, 12239 (1999).
- [22] K. Nanjo y H. Nagahama, *Chaos, Solitons and Fractals* **19**, 387 (2004).

- [23] M. Sahimi, M. Robertson y C. Sammis, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2186 (1993).
- [24] G. Günduz y U. Günduz, *Physica A* **357**, 565 (2005).
- [25] K. J. Hsü y A. J. Hsü, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **87**, 938 (1990).
- [26] Z. Su y T. Wu, *Physica A* **380**, 418 (2007).
- [27] R. Granek, *Phys. Rev. E* **83**, 020902(R) (2011).
- [28] W. Macek, R. Bruno y G. Consolini, *Phys. Rev. E* **72**, 017202 (2005).
- [29] A. Szczepaniak y W. M. Macek, *Nonlinear Proc. Geophys.* **15**, 615 (2008).
- [30] T. Chang y C. Wu, *Phys. Rev. E* **77**, 045401 (2008).
- [31] C. R. Neto, Z. O. Guimarães-Filho, I. L. Caldas, I. C. Nascimento y Y. K. Kuznetsov, *Phys. Plasmas* **15**, 082311 (2008).
- [32] M. Materassi y G. Consolini, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 175002 (2007).
- [33] G. Zaginaylov, A. Grudiev, K. Schünemann y P. Turbin, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 195005 (2002).
- [34] B. A. Carreras, V. E. Lynch, D. E. Newman, R. Balbín, J. Bleuel, M. A. Pedrosa, M. Endler, B. van Milligen, E. Sánchez y C. Hidalgo, *Phys. Plasmas* **7**, 3278 (2000).
- [35] V. V. Yankov, *Phys. Plasmas* **4**, 571 (1997).
- [36] M. Dimitropoulou, M. Georgoulis, H. Isliker, L. Vlahos, A. Anastasiadis, D. Strintzi y X. Moussas, *Astron. Astrophys.* **505**, 1245 (2009).
- [37] R. J. McAteer, P. T. Gallagher y P. A. Conlon, *Adv. Spa. Res.* **45**, 1067 (2010).

- [38] M. J. Aschwanden y P. D. Aschwanden, *Astrophys. J.* **674**, 530 (2008).
- [39] M. J. Aschwanden y P. D. Aschwanden, *Astrophys. J.* **674**, 544 (2008).
- [40] B. V. Kozelov, *Ann. Geophys.* **21**, 2011 (2003).
- [41] R. T. J. McAteer, P. T. Gallagher y J. Ireland, *Astrophys. J.* **631**, 628 (2005).
- [42] V. M. Uritsky, A. J. Klimas y D. Vassiliadis, *Adv. Space Res.* **37**, 539 (2006).
- [43] M. K. Georgoulis, *Solar Phys.* **276**, 161 (2012).
- [44] R. J. McAteer, P. T. Gallagher y P. A. Conlon, *Adv. Space Res.* **45**, 1067 (2010).
- [45] P. A. Conlon, P. T. Gallagher, R. T. J. McAteer, J. Ireland, C. A. Young, P. Kestener, R. J. Hewett y K. Maguire, *Solar Phys.* **248**, 297 (2008).
- [46] S. C. Chapman, B. Hnat y K. Kiyani, *Nonlinear Proc. Geophys.* **15**, 445 (2008).
- [47] K. Kiyani, S. C. Chapman, B. Hnat y R. M. Nicol, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 211101 (2007).
- [48] P. S. Addison, *Fractals and Chaos, an Illustrated Course*, vol. 1 (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1997), segunda ed.
- [49] A. Osella, A. Favetto y V. Silbergleit, *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.* **59**, 445 (1997).
- [50] P. T. Gallagher, K. J. H. Phillips, L. K. Harra-Murnion y F. P. Keenan, *Astron. Astrophys.* **335**, 733 (1998).
- [51] J. K. Lawrence, A. A. Ruzmaikin y A. C. Cadavid, *Astrophys. J.* **417**, 805 (1993).

- [52] A. C. Cadavid, J. K. Lawrence, A. A. Ruzmaikin y A. Kayleng-Knight, *Astrophys. J.* **429**, 391 (1994).
- [53] World Data Center for Geomagnetism, Kioto,  
<http://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/caplot/index.html>.
- [54] Solar Oscillations Investigations (SOI) project,  
<http://soi.stanford.edu/magnetic/index5.html>.
- [55] R. S. Witte y J. S. Witte, *Statistics* (Wiley, 2009), cap. 6, novena ed.
- [56] G. Balasis, I. A. Daglis, P. Kapiris, M. Manda, D. Vassiliadis y K. Eftaxias, *Ann. Geophys.* **24**, 3557 (2006).
- [57] V. H. A. Dias y A. R. R. Papa, *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.* **72**, 109 (2010).
- [58] D. Hughes, M. Paczuski, R. Dendy, P. Helander y K. McClements, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 131101 (2003).
- [59] S. C. Chapman, N. W. Watkins, R. O. Dendy, P. Helander y G. Rowlands, *Geophys. Res. Lett.* **25**, 2397 (1998).
- [60] E. Lu y R. Hamilton, *Astrophys. J.* **380**, L89 (1991).
- [61] G. Boffetta, V. Carbone, P. Giuliani, P. Veltri y A. Vulpiani, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4662 (1999).
- [62] P. Giuliani y V. Carbone, *Europhys. Lett.* **43**, 527 (1998).
- [63] F. Lepreti, V. Carbone, P. Giuliani, L. Sorriso-Valvo y P. Veltri, *Planet. Space Sci.* **52**, 957 (2004).

- [64] V. Carbone, R. Cavazzana, V. Antoni, L. Sorriso-Valvo, E. Spada, G. Regnoli, P. Giuliani, N. Vianello, F. Lepreti, R. Bruno, E. Martines y P. Veltri, *Europhys. Lett.* **58**, 349 (2002).
- [65] OMNIWeb Plus data and service, [http://cdaweb.gsfc.nasa.gov/istp\\_public](http://cdaweb.gsfc.nasa.gov/istp_public).
- [66] Y. Kamide y A. C. L. Chian, editores, *Handbook of the Solar-Terrestrial Environment* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007).
- [67] M. G. Kivelson y C. T. Russell, editores, *Introduction to Space Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [68] R. Smith, *Observational Astrophysics* (Cambridge University Press, 1995).
- [69] NASA/Jenny Mottar,  
[http://www.nasa.gov/mission\\_pages/sunearth/multimedia/solar-anatomy\\_prt.htm](http://www.nasa.gov/mission_pages/sunearth/multimedia/solar-anatomy_prt.htm).
- [70] E. Priest, *Solar Magneto-Hydrodynamics*, Geophysics and Astrophysics monographs (D. Reidel Pub. Co., 1984).
- [71] NASA/SDO,  
[http://www.nasa.gov/sites/default/files/bigspot20140107\\_sdo\\_earth\\_0.jpg](http://www.nasa.gov/sites/default/files/bigspot20140107_sdo_earth_0.jpg).
- [72] NASA/SDO and the AIA, EVE, and HMI science teams,  
[http://sdo.gsfc.nasa.gov/assets/img/latest/latest\\_2048.0193.jpg](http://sdo.gsfc.nasa.gov/assets/img/latest/latest_2048.0193.jpg).
- [73] C. Schrijver y G. Siscoe, *Heliophysics: Evolving Solar Activity and the Climates of Space and Earth*, Heliophysics 3 Volume Set (Cambridge University Press, 2010).

- [74] Solar Oscillations Investigations (SOI) project,  
<http://soi.stanford.edu/general/>.
- [75] National Geophysical Data Center (NOAA), Solar Data Services,  
<http://www.ngdc.noaa.gov/stp/solar>.
- [76] T. Ataç y A. Özgüç, *Solar Phys.* **180**, 397 (1998).
- [77] A. Özgüç, T. Ataç y J. Rybák, *Solar Phys.* **214**, 375 (2003).
- [78] M. Rybanský, V. Rušin y M. Minarovjech, *Space Sci. Rev.* **95**, 227 (2001).
- [79] World Data for Geomagnetism, Kioto,  
<http://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/dstdir/dst2/ondstindex.html>.
- [80] L. Tan, *Commun. Math. Phys.* **134**, 587 (1990).
- [81] R. V. Damme, *J. Phys. A* **22**, 5249 (1989).
- [82] J. Theiler, *J. Opt. Soc. Am. A* **7**, 1055 (1990).
- [83] J. Walleczek, *Self-Organized Biological Dynamics and Nonlinear Control: Toward Understanding Complexity, Chaos and Emergent Function in Living Systems* (Cambridge University Press, 2000).
- [84] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W.H. Freeman and Company, New York, 1982).
- [85] M. Small, *Applied Nonlinear Time Series Analysis. Applications in Physics, Physiology and Finance* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005).
- [86] M. Domínguez, V. Muñoz y J. A. Valdivia, *J. Geophys. Res.* **119**, 3585 (2014).

- [87] N. Arimitsu y T. Arimitsu, J. Korean Phys. Soc. **40**, 1032 (2002).
- [88] A. B. Chhabra, C. Meneveau, R. V. Jensen y K. Sreenivasan, Phys. Rev. A **40**, 5284 (1989).
- [89] A. B. Chhabra y R. V. Jensen, Phys. Rev. Lett. **62**, 1327 (1989).
- [90] L. Meisel, *Box Counting Multifractal Analysis*, Rep. Tec. 10, DTIC Document (1992).
- [91] R. Riedi y B. Mandelbrot, Adv. Appl. Math. **16**, 132 (1995).
- [92] H. Stanley y P. Meakin, Nature **335**, 405 (1988).
- [93] P. Grassberger, Phys. Lett. A **97**, 227 (1983).
- [94] A. Rényi, *Probability Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1970).
- [95] T. Halsey, M. Jensen, L. Kadanoff, Í. Procaccia y B. Shraiman, Phys. Rev. A **33**, 1141 (1986).
- [96] B. T. Tsurutani y W. D. Gonzalez, EOS, Transactions, American Geophysical Union **75**, 49 (1994).
- [97] W. D. Gonzalez, J. A. Joselyn, Y. Kamide, H. W. Kroehl, G. Rostoker, B. T. Tsurutani y V. M. Vasyliunas, J. Geophys. Res. **93**, 5771 (1994).
- [98] A. Meloni, P. D. Michelis y R. Tozzi, Mem. S.A.It. **76**, 882 (2005).
- [99] J. Wanliss y V. Uritsky, J. Geophys. Res. **115**, A03215 (2010).
- [100] V. Yurchyshyn, H. Wang y V. Abramenko, Space Weather **2**, S02001 (2004).
- [101] N. Meunier, Astrophys. J. **515**, 801 (1999).

- [102] U. Paniveni, V. Krishan, J. Singh y R. Srikanth, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **402**, 424 (2010).
- [103] V. M. Uritsky y J. M. Davila, *Astrophys. J.* **748**, 60 (2012).
- [104] K. Janssen, A. Vögler y F. Kneer, *Astron. Astrophys.* **409**, 1127 (2003).
- [105] V. M. Uritsky, J. M. Davila, L. Ofman y A. J. Coyner, *Astrophys. J.* **769**, 62 (2013).
- [106] Y. Vertyagina y A. Kozlovskiy, *New Astronomy* **23-24**, 36 (2013).
- [107] V. Abramenko y V. Yurchyshyn, *Astrophys. J.* **722**, 122 (2010).
- [108] Solar Data Analysis Center, NASA Goddard Space Flight Center,  
<http://umbra.nascom.nasa.gov/images/>.
- [109] MATLAB rgb2gray function,  
<http://www.mathworks.com/help/images/ref/rgb2gray.html>.
- [110] V. I. Abramenko, *Solar Phys.* **228**, 29 (2005).
- [111] P. D. Ditlevsen, *Turbulence and Shell Models* (Cambridge University Press, 2011).
- [112] F. Plunian, R. Stepanov y P. Frick, *Physics Reports* **523**, 1 (2013).
- [113] P. Giuliani, *Shell models of MHD turbulence cascade*, Tesis de Doctorado, Università della Calabria (1999).
- [114] A. M. Obukhov, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Atmos. Okeana* **7**, 695 (1971).
- [115] E. B. Gledzer, *Sov. Phys. Dokl. SSSR* **18**, 216 (1973).

- [116] M. Yamada y K. Okhitani, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 983 (1988).
- [117] C. Gloaguen, J. Lórat, A. Pouquet y R. Grappin, *Physica D* **17**, 154 (1985).
- [118] D. Biskamp, *Phys. Rev. E* **50**, 2702 (1994).
- [119] P. Giuliani, *In: T. Passot and P.L. Sulem (Eds): Nonlinear MHD Waves and Turbulence, Lectures Notes in Physics*, vol. 536 (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999).
- [120] R. Fox, I. Gatland, R. Roy y G. Vemuri, *Phys. Rev. A* **38**, 5938 (1988).
- [121] W. M. Macek, *Nonlinear Proc. Geophys.* **14**, 695 (2007).
- [122] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery, *Numerical Recipes* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1992).