Una Representación de Weil para los grupos ortogonales escindidos $O_q(2n,2n)$ sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_q, q > 3$.

Tesis

entregada a la

Facultad de Ciencias

de la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Doctora en Ciencias con mención en Matemáticas

Enero 2013

por

Andrea Cecilia Vera Gajardo

Director de Tesis: Dr. José Pantoja Macari.

Co - Director de Tesis: Dr. Jorge Soto Andrade.

Facultad de Ciencias Universidad de Chile Informe de Aprobación Tesis de Doctorado

Se informa a la escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por la candidata

Andrea Cecilia Vera Gajardo

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito parcial para optar al grado de Doctora en Ciencias con mención en Matemática en el exámen de Defensa de Tesis rendido el día 14 de enero de 2013.

Director de Tesis:

Dr. José Pantoja Macari. ....

Co- Director de Tesis:

Dr. Jorge Soto Andrade. ....

Comisión de Evaluación de Tesis:

Dr. Nicolás Libedinsky. ....
Presidente

Dr. Luis Arenas. ....

Dr. Yves Martin. ....

A mis hermanas, por la sincronía y la diferencia.

Biografía

Nací un 2 de febrero de 1984. Viví hasta los 20 años en Antofagasta. Estudié los primeros tres semestres de Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Católica del Norte. Luego, me trasladé a la P. Universidad Católica de Chile, lugar donde finalicé el pregrado. El año 2008 ingresé al programa de Doctorado de la Universidad de Chile, donde rápidamente aprendí el valor del trabajo en equipo y la horizontalidad.

Agradecimientos

Quiero hacer el intento de agradecer a todas las personas e instancias que participaron en este capítulo de mi vida.
(Soundtrack: Foto de Primera Comunión, Los Jaivas).

A mis profesores tutores, por acompañarme en este intenso proceso de aprendizaje. A José Pantoja por la paciencia, la disposición y el apoyo permanente. A Jorge Soto por los constantes ánimos, las metáforas y el optimismo.

A Luis Gutierrez, por ser un apoyo fundamental en mi tesis y por la constante voluntad de ayudar desinteresadamente.

A Anne-Marie Aubert por las inspiradoras conversaciones sostenidas durante mi pasantía en París.

A mis hermanas, Antonieta y Sandra, por existir, por la incondicionalidad y tantas cosas más que en este pequenõ espacio es imposible expresar.

A mis papás, Carmen y Leonel, por decidir traerme aquí, por incentivar mi curiosidad y respetar mis decisiones.

A mis compañer@s y amig@s de postgrado del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chile, porque sin ustedes habría sido imposible re-encantarme con la Matemática. Por todos los proyectos que emprendimos junt@s, las conversaciones, discusiones, acuerdos y desacuerdos. Fueron parte importantísima en mi formación. Especialmente a mis compañeros de generación Natu y Pato.

A tod@s l@s integrantes del Departamento de Matemática de la U, por la calidez de este espacio. En especial gracias a Cecilia y Santiago.

A mis amig@s, por nutrirme de cariño. Los momentos más felices han sido al lado de ustedes. Eve Ortega, Clau Godoy, Isa Aguilera, Cami Donoso, Lucho Venegas, Corola González, Pau Cecchi, Clau Correa, Cristóbal Rivas, Nico Abarzúa. Un agradecimiento especial a mis lucecitas salvadoras en París: Marcelo Pérez y Florencia Muñoz.

Al Ashtanga Yoga, por proporcionarme la energía y alegría necesarias para enfrentar la vida.

A Constanza Michelson, por mostrarme el arte de significar palabras y construir realidades.

A tod@s l@s integrantes del Instituto de Matemáticas de la P. Universidad Católica de Valparaíso, por la buena onda y la excelente acogida en estos últimos meses.

A mis compañeras de la ex-Coordinadora de Feministas Jóvenes y el ex-Circo Feminista, porque con ustedes aprendí lo lindo que es tener compañer@s.

A aquellos que no me calzaron en los formatos anteriores, pero que por distintas razones marcaron mi vida: Manolo Cabezas, Rodrigo Bamón, Mauricio Redolés.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) a través de la beca Doctorado Nacional, y por el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) a través del Proyecto Fondecyt Regular 1120578.

Resumen:

Sea $k = \mathbb{F}_q$, con $q > 3$. En esta tesis se construye una Representación de Weil generalizada para los grupos ortogonales escindidos finitos de rango par;

$$O_q(2n, 2n) = \left\{ T \in M_{4n}(k) \mid T \begin{pmatrix} 0 & I_{2n} \\ I_{2n} & 0 \end{pmatrix} T^t = \begin{pmatrix} 0 & I_{2n} \\ I_{2n} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

.

En el primer capítulo se entrega una introducción sobre el origen histórico de la representación de Weil y una breve descripción de los resultados obtenidos hasta el momento.

En los capítulos dos y tres se entregan los contenidos preliminares, esto es; aspectos generales de la teoría de representaciones de grupos y algunos tópicos de formas cuadráticas en cuerpos finitos.

En el capítulo cuatro se definen los anillos involutivos y se otorga una clasificación de las involuciones para el anillo $A = M_n(k)$, donde k es un cuerpo finito de característica impar. Aparentemente esta clasificación no se encuentra en la literatura.

En el quinto capítulo se definen los grupos $SL_*^\varepsilon(2, A)$ y la construcción de su Representación de Weil generalizada. Además se muestra uno de los resultados de este trabajo que consiste en una dualidad entre $\varepsilon = \pm 1$ y la involución escogida, para el caso de los anillos del tipo $M_2(A_0)$, con $(A_0, *)$ anillo unitario involutivo. En particular se obtiene que el grupo ortogonal escindido $O_q(2n, 2n)$ puede verse como un grupo $SL_*^\varepsilon(2, A)$ con $\varepsilon = -1$.

Finalmente, en el capítulo seis se obtiene el resultado principal de esta tesis, a saber: la construcción de la Representación de Weil generalizada para el grupo de interés. Además se estudia la estructura del grupo unitario $U(\gamma, \chi)$ asociado a las funciones γ y χ mediante las cuales se define la representación y luego utilizando este grupo, se llega a una primera descomposición de la representación.

Abstract:

Let $k = \mathbb{F}_q$, with $q > 3$. In this thesis we build a generalized Weil Representation for finite split orthogonal groups in even rank;

$$O_q(2n,2n) = \left\{ T \in M_{4n}(k) \mid T \begin{pmatrix} 0 & I_{2n} \\ I_{2n} & 0 \end{pmatrix} T^t = \begin{pmatrix} 0 & I_{2n} \\ I_{2n} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

.

The first chapter provides an introduction to the historical origin of the Weil representation and a brief description of the results obtained so far.

In chapters two and three we give the preliminary contents, that is, general aspects of group representations and some topics of quadratic forms over finite fields.

In chapter four we define involutive rings and we give a classification of involutions for the ring $A = M_n(k)$, where k is a finite field of odd characteristic. Apparently this classification is not present in the literature.

In the fifth chapter we define the $SL_*^\varepsilon(2,A)$ groups and their generalized Weil representation. Apart from that we show one of the results of this work, which is a duality between $\varepsilon = \pm 1$ and the involution chosen in the case of rings of type $M_2(A_0)$, with $(A_0,*)$ a involutive unitary ring. In particular we obtain that the split orthogonal group $O(2n,2n)$ can be seen as a group $SL_*^\varepsilon(2,A)$ with $\varepsilon = -1$.

Finally, in the sixth chapter we prove the main result of this thesis, namely the construction of a generalized Weil representation for the group of interest. Apart from that, we study the structure of the unitary group $U(\gamma,\chi)$ associated with the functions γ and χ by which the representation is defined and then using this group, we get a first decomposition of the representation.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Uno de los problemas centrales en la Teoría de Representaciones de Grupos Finitos es determinar el conjunto de representaciones irreducibles de un grupo dado. Para diversas familias de grupos, la Representación de Weil ha resultado ser una respuesta a dicho problema.

Recordemos que estas representaciones se llaman hoy en día representaciones de Weil (o Shale-Weil), debido a que surgieron de la construcción clásica de Weil ([14]), para cualquier cuerpo local, que a su vez surge en el trabajo de Shale ([11]) sobre las simetrías lineales de campos libres de bosón, en teoría cuántica.

Shale construyó la "representación de oscilador" de $Sp(2n, k)$, para $k = \mathbb{R}$. Esta representación resulta ser una representación proyectiva que toma ventaja de la teoría de representaciones del grupo de Heisenberg H_n en n grados de libertad, según lo descrito por el teorema de Stone von Neumann, el cual dice que H_n que tiene sólo una representación (salvo isomorfismos) irreducible unitaria de dimensión mayor a 1 con un carácter central dado (la representación de Schrödinger).Weil ([14])extendió más tarde esta construcción para el caso de un cuerpo local.

Luego de eso, en los años 70 Pierre Cartier notó que las representaciones de Weil asociadas a cualquier forma cuadrática no degenerada Q sobre el cuerpo base podían ser construídas para $SL(2, k)$ ocupando la presentación de Bruhat del grupo, asociando a cada generador un cierto operador y verificando que los operadores definidos satisfacen las relaciones de la presentación. De esta manera la representación de Weil aparece como una construcción functorial en la categoría de espacios cuadráticos. Así, la "representación de oscilador" corresponde a la forma cuadrática de rango uno x^2 sobre k y se obtiene una representación (ordinaria) de Weil en el caso de rango par ([12]).

Uno de los aspectos más destacables de esta construcción es que si tomamos las dos formas cuadráticas no isomorfas de rango dos no degeneradas sobre k y descomponemos las representaciones de Weil asociadas a ellas, obtendremos todas las representaciones unitarias irreducibles de $SL(2,k)$. Esta afirmación vale, por ejemplo, cuando k es un cuerpo finito o un cuerpo local de característica residual distinta de dos.

En [12], Jorge Soto-Andrade extendió la construcción descrita al grupo simpléctico $Sp(2n,k)$, con k un cuerpo finito. Para ésto consideró a $Sp(2n,k)$ como un grupo "$SL(2)$" pero con entradas en el anillo de matrices $M_n(k)$, y así obtuvo una presentación adecuada para el grupo en cuestión. De esta forma construyó las representaciones de Weil de los grupos $Sp(2n,k)$ y en el caso de $Sp(4,k)$ obtuvo todas las representaciones irreducibles descomponiendo las respectivas representaciones de Weil asociadas a las formas cuadráticas no isomorfas.

Este punto de vista fue generalizado y dio origen a los grupos $SL_*^\varepsilon(2,A)$ para $(A,*)$ un anillo involutivo y $\varepsilon = \pm 1 \in A$. Ellos fueron definidos para $\varepsilon = -1$ por J. Pantoja y J. Soto-Andrade en [7] y generalizados a $\varepsilon = 1$ en [9] por los mismos autores.

Estos grupos permiten mirar grupos clásicos de rango mayor como grupos de rango dos, considerándolos con coeficientes en un nuevo anillo. La filosofía es, entonces, generalizar técnicas y métodos conocidos para los grupos especiales lineales tradicionales, para obtener resultados en estos grupos más generales.

Los grupos $SL_*^\varepsilon(2,A)$ incluyen, entre otros, los grupos simplécticos (considerando el anillo $A = M_n(F)$, F un cuerpo, $*$ la transposición de matrices y tomando $\varepsilon = -1$) y los grupos ortogonales escindidos ($A = M_n(F)$, F cuerpo, $*$ la transposición de matrices y tomando

$\varepsilon = 1$).

En [5], los autores antes mencionados junto con L. Gutierrez, construyen representaciones de Weil de manera muy general vía generadores y relaciones para los grupos $SL_*^\varepsilon(2, A)$ que cuentan con una presentación análoga a la de Bruhat.

Los autores definen operadores de Weil asociados a los generadores y luego prueban que dichos operadores satisfacen las relaciones de la presentación. Los datos necesarios para definir dichos operadores son un módulo M sobre el anillo involutivo $(A, *)$ equipado de una forma χ biaditiva no degenerada con valores a $\mathbb{C}^\times$ y su correspondiente función homogénea de orden dos γ.

Dentro de los grupos clásicos, los grupos ortogonales juegan un papel destacado. En particular, en teoría de representaciones, forman un par dual junto con los grupos simplécticos, en el sentido que cada uno de ellos tiene una representación en el mismo espacio, y que estas acciones conmutan. Esta dualidad ha permitido descomponer la representación de Weil de los grupos simplécticos ([12]). Aparentemente, si bien se han construído representaciones de Weil para los grupos simplécticos, no es el caso de los grupos ortogonales. Lo anterior lleva en forma natural a estudiar los grupos ortogonales, su representación de Weil y una eventual descomposición.

En esta tesis se construye una representación de Weil generalizada para los grupos ortogonales finitos escindidos $O_q(2n, 2n)$. Tal como se mencionó anteriormente, el grupo en cuestión es el grupo $SL_*^\varepsilon(2, A)$ considerando $(A, *)$ el anillo de matrices junto a la transposición y $\varepsilon = 1$. Sin embargo, uno de los resultados de esta tesis es realizar al grupo de interés como un grupo $SL_*^\varepsilon(2, A)$ con $\varepsilon = -1$ y utilizando una nueva involución, facilitando así algunos aspectos técnicos de la construcción. De hecho el resultado probado es más general, y contempla un isomorfismo entre los grupos $SL_*^+(2, M_2(A_0))$ y $SL_\sim^-(2, M_2(A_0))$, donde $(A_0, *)$ es un anillo unitario involutivo y $\sim$ es otra involución en A_0 obtenida a partir de $*$.

También se entrega una descripción acabada del grupo unitario asociado $U(\gamma, \chi)$ y luego utilizando este grupo se obtiene una primera descomposición de la representación construida.

Capítulo 2

Representaciones lineales complejas de grupos.

En este capítulo daremos definiciones y resultados basales de la Teoría de Representaciones de Grupos, que serán de importancia en este trabajo. Para demostraciones y más detalles consultar por ejemplo [10] o [3].

Definición 2.0.1. Sea G un grupo. Una representación lineal compleja de G es un par (V, ρ), donde V es un $\mathbb{C}-$ espacio vectorial y ρ es un homomorfismo de G en el grupo de automorfismos lineales $Aut_{\mathbb{C}}(V)$.
Si la dimensión de V es finita, entonces se define el grado de la representación como la dimensión de V. En caso contrario diremos que (V, ρ) es de dimensión infinita.

Si (V, ρ) es una representación lineal compleja de G, en general sólo diremos que es una representación de G.

Para denotar una representación usaremos indistintamente (V, ρ), V o ρ.

Definición 2.0.2. Sea (V, ρ) una representación de un grupo G. Una subrepresentación de V es un subespacio vectorial estable $W \leq V$, ésto es: $\rho(g)(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$.
En este caso (W, ρ_W), donde $\rho_W(g) = \rho(g)|_W$, es una representación de G.

Ejemplo 2.0.3. Sea G un grupo finito. Supongamos que X es un G- conjunto finito, es decir el grupo G actúa en X mediante $\sigma : G \times X \longrightarrow X$.

Sea $L^2(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C}\}$. Es claro que $L^2(X)$ es un $\mathbb{C}-$ espacio vectorial.

Para $x \in M$, consideremos la función delta de Dirac $e_x : M \longrightarrow \mathbb{C}$

$$e_x(y) = \begin{cases} 1 & , y = x \\ 0 & , y \neq x \end{cases}$$

El conjunto de las funciones delta de Dirac $\{e_x \mid x \in X\}$ es una base para $L^2(X)$.

Se define la representación natural de G asociada al $G-$ conjunto X como

$$\rho : G \longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(L^2(X))$$

$$\rho(g)(e_x) = e_{\sigma(g,x)}.$$

Ejemplo 2.0.4. En el ejemplo anterior, si $X = G$ y la acción es $\sigma(g,x) = gx$ entonces la representación obtenida se llama representación regular de G.

Definición 2.0.5. Una representación (V, ρ) de G se dice irreducible si posee exactamente dos subrepresentaciones, a saber: $\{0\}$ y V.

En caso contrario decimos que la representación es reducible.

Definición 2.0.6. Sean (V_1, ρ_1) y (V_2, ρ_2) dos representaciones de G. Un entrelazamiento entre estas representaciones es una función lineal $\psi : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que $\rho_2(g) \circ \psi = \psi \circ \rho_1(g)$ para cada $g \in G$.

El espacio vectorial de todos los entrelazamientos entre (V_1, ρ_1) y (V_2, ρ_2) lo denotaremos por $Hom_G(\rho_1, \rho_2)$ o $Hom_G(V_1, V_2)$ si no hay riesgo de confusiones. Cuando $V_1 = V_2 = V$, lo denotaremos por $End_G(V)$.

Definición 2.0.7. Decimos que (V_1, ρ_1) y (V_2, ρ_2) son representaciones isomorfas si existe un entrelazamiento biyectivo entre ellas.

Definición 2.0.8. Un carácter lineal α del grupo G es una representación lineal de G de grado 1. En otras palabras, α es un homomorfismo de grupos $\alpha : G \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$..
Decimos que α es el carácter trivial si $\alpha(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Teorema 2.0.9. *Sea G un grupo finito. Cualquier representación finita de G es suma directa de subrepresentaciones irreducibles.*

Notación: Para $a \in \mathbb{N}$ y V espacio vectorial, denotamos por aV a la suma directa $V \oplus V \oplus ... \oplus V$ (a- veces).

Corolario 2.0.10. *Sea (V, ρ) una representación de dimensión finita de un grupo finito G. Existe una descomposición de V;*

$$V = a_1V_1 \oplus a_2V_2 \oplus ... \oplus a_kV_k,$$

donde los espacios V_i son representaciones irreducibles no isomorfas de G.
Esta descomposición se llama descomposición isotípica y es única salvo isomorfismos.
Además, se puede probar que $a_i = dim(Hom_G(V, V_i)) = dim(Hom_G(V_i, V))$.

Lema 2.0.11. : (Lema de Schur) *Si (V, ρ) y (W, π) son representaciones irreducibles de G, y $\psi : V \longrightarrow W$ es un entrelazamiento, entonces:*
(1) Si ψ no es un isomorfismo, entonces $\psi \equiv 0$.
(2) Si $V = W$ y $\rho = \pi$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\psi = \lambda I$, I la función identidad.

Capítulo 3

Formas Cuadráticas sobre cuerpos finitos

Sea $k = \mathbb{F}_q$, cuerpo finito con q elementos.

Definición 3.0.12. Sea E un espacio vectorial sobre k. La aplicación $Q : E \longrightarrow k$ es una forma cuadrática en E si se cumplen:

(a) $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x) \quad \forall \lambda \in k, x \in E$;

(b) La aplicación $B : E \times E \longrightarrow k$ dada por $B(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ es bilineal.

La forma bilineal B claramente es simétrica y se llama forma bilineal asociada a Q. Si además se tiene:

$$B(x,y) = 0 \quad \forall y \Longrightarrow x = 0,$$

decimos que B y Q son no degeneradas.

Supongamos que la dimensión de E es finita y sea $E^{\perp} = \{x \in E / B(x,y) = 0 \quad \forall y \in E\}$, entonces definimos el rango de B como $rang(B) = dim(E/E^{\perp})$. Así $rang(B) = dim(E)$ si y sólo si B es no degenerada.

En lo que sigue suponemos q impar.

Notemos que si Q es una forma cuadrática en E, entonces $B^{\dagger} = \frac{1}{2}B$ es la única forma bilineal simétrica en E tal que $Q(x) = B^{\dagger}(x,x)$. Este hecho describe una correspondencia biunívoca entre formas cuadráticas (en E) y formas bilineales (en E).

Definición 3.0.13. Un espacio vectorial cuadrático es un par (E,Q) donde E es un espacio vectorial sobre k y Q es una forma cuadrática en E. Si (E,Q) y (E',Q') son dos espacios vectoriales cuadráticos, decimos que son isomorfos o equivalentes si existe un isomorfismo lineal $f : E \longrightarrow E'$ tal que $Q' \circ f = Q$.
Si $E = E'$ decimos simplemente que las formas Q y Q' son isomorfas.

Ahora revisaremos los resultados conocidos acerca de la clasificación de formas cuadráticas no degeneradas sobre k. Para ver demostraciones y más detalles, consultar por ejemplo [12] o [1].

Proposición 3.0.14. *Sea E un k-espacio vectorial tal que $dim_k(E) = 2$. Entonces existen sólo dos formas cuadráticas no degeneradas (salvo isomorfismos) sobre k, a saber:*
(1) $E = k^2$, y $Q_1(x,y) = xy$, $x,y \in k$.
(2) $E = K$, la extensión cuadrática de k, y $Q_2(z) = N(z)$, $z \in K$, N la norma de K sobre k.

De acuerdo a la proposición anterior, al primer espacio cuadrático lo denotaremos por (k^2, xy) y al segundo por (K, N).
Llamamos plano hiperbólico a cualquier espacio vectorial cuadrático isomorfo a (k^2, xy).

De aquí en adelante, suponemos $dim_k(E) < \infty$.

Proposición 3.0.15. *Todo espacio cuadrático no degenerado (E, Q) sobre k es suma ortogonal de planos hiperbólicos y de un espacio cuadrático (E_0, Q_0) que puede ser el espacio nulo o isomorfo a alguno de los siguientes:*
(i)(k, x^2);
(ii)(k, t_0x^2), *donde* t_0 *no es cuadrado en* $k^\times$;
(iii)(K, N).

De acuerdo a la proposición anterior, si (E_0, Q_0) es nulo o isomorfo a (k, x^2) decimos que (E, Q) es escindido, en otro caso decimos que es no-escindido.

Definición 3.0.16. Sea (E, Q) espacio vectorial cuadrático no degenerado sobre k, entonces el signo de Q es:

$$sign(Q) = \begin{cases} 1 & ,(E, Q) \quad \text{escindido} \\ -1 & ,(E, Q) \quad \text{no-escindido.} \end{cases}$$

Definición 3.0.17. Sea (E, Q) un espacio vectorial cuadrático sobre k y φ un caracter de k^+. Se define la suma de Gauss asociada a $\varphi \circ Q$ como:

$$S_{\varphi \circ Q} = \sum_{v \in E} \varphi(Q(v)).$$

Proposición 3.0.18. *Sea (E, Q) espacio vectorial cuadrático no degenerado de dimensión par sobre k y φ un caracter no trivial de k^+, entonces:*

$$S_{\varphi \circ Q} = sign(Q)|E|^{1/2}.$$

Capítulo 4

Anillos Involutivos

4.1. Definiciones y Resultados Previos.

Definición 4.1.1. Una involución en un anillo A es un antiautomorfismo de A de orden dos. Es decir, una biyección $\sigma : A \longrightarrow A$ tal que para cada $a, b \in A$ se cumple:

$(1)\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$;

$(2)\sigma(ab) = \sigma(b)\sigma(a)$;

$(3)\sigma^2(a) = a$.

Ejemplo 4.1.2. Consideremos el anillo de matrices $A = M_n(k)$, entonces una involución en A es $\sigma(a) = a^t$, la transposición de matrices.

Ejemplo 4.1.3. Sea K una extensión cuadrática separable de k. Entonces el automorfismo no trivial del grupo de Galois $Gal(K/k)$ es una involución en K.

Definición 4.1.4. Sean (A_1, σ_1) y (A_2, σ_2) dos anillos involutivos. Los anillos involutivos (A_1, σ_1) y (A_2, σ_2) son isomorfos, si existe un isomorfismo de anillos $F : A_1 \longrightarrow A_2$ tal que $F \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ F$. Si $A_1 = A_2$ diremos simplemente que las involuciones σ_1 y σ_2 son isomorfas.

Sea k un cuerpo. Nos centraremos en una clase particular de anillos, a saber, las $k-$álgebras del tipo $A = End_k(V)$ donde V es un $k-$ espacio vectorial de dimensión finita.

En este caso agregamos la condición de $k-$ linealidad a la involución, es decir para que un antiautomorfismo σ de A sea involución también será necesario que $\sigma(ta) = t\sigma(a) \quad t \in k, a \in A$.

Así, describiremos una correspondencia entre las involuciones de A y las formas bilineales no degeneradas sobre k que son simétricas o antisimétricas. Para ésto nos guiaremos por [6].

Sea V un $k-$ espacio vectorial y $B : V \times V \longrightarrow k$ una forma bilineal no degenerada. Entonces la función

$$\widehat{B} : V \longrightarrow V^* = Hom_k(V, k),$$

definida por

$$\widehat{B}(x)(y) = B(x, y),$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Para $f \in End_k(V)$ podemos definir $\sigma_B(f) \in End_k(V)$ mediante la siguiente propiedad:

$$B(f(x), y) = B(x, \sigma_B(f)y) \quad x, y \in V. \tag{4.1}$$

La aplicación $\sigma_B : End_k(V) \longrightarrow End_k(V)$ es un anti-automorfismo de $End_k(V)$ y se llama anti-automorfismo adjunto con respecto a la forma bilineal B. El siguiente teorema describe la correspondencia que mencionamos anteriormente.

Teorema 4.1.5. *(Knus, Merkurjev, Rost, Tignol)*
La aplicación que asocia a cada forma bilineal no degenerada $B : V \times V \longrightarrow k$ su anti-automorfismo adjunto σ_B induce una correspondencia biyectiva entre clases de equivalencia de formas bilineales no degeneradas en V módulo multiplicación por un escalar en $k^\times$ y anti-automorfismos de $End_k(V)$. Bajo esta correspondencia, las involuciones en $End_k(V)$ corresponden a formas bilineales no degeneradas que son simétricas o antisimétricas.

Demostración: ver en [6], capítulo 1.

A las involuciones que corresponden a formas bilineales simétricas las llamaremos **ortogonales**, y a las que corresponden a formas alternadas las llamaremos **simplécticas**.

Proposición 4.1.6. *(Knus, Merkurjev, Rost, Tignol)*

Sea σ una involución en $A = End_k(V)$.Entonces:

(1) Para cada $s \in A^{\times}$ tal que $\sigma(s) = \pm s$, la aplicación $\sigma'(a) = s\sigma(a)s^{-1}$ es una involución en A.

(2) Recíprocamente, para cada involución σ' en A existe $s \in A^{\times}$, únicamente determinado salvo un factor en $k^{\times}$, tal que:

$$\sigma'(a) = s\sigma(a)s^{-1} \quad y \quad \sigma(s) = \pm s.$$

Demostración: [6], capítulo 1.

Teorema 4.1.7. : *(Skolem-Noether) Sea F un cuerpo, A un $F-$ álgebra central simple y sea $B \subseteq A$ una subalgebra simple. Cada homomorfismo de $F-$ álgebras $\nu : B \longrightarrow A$ se extiende a un automorfismo interno de A, es decir, existe $a \in A^{\times}$ tal que $\nu(b) = aba^{-1}$ para todo $b \in B$. En particular, todo automorfismo de $F-$ álgebra de A es interno.*

4.2. Clasificación de involuciones en $A = M_n(\mathbb{F}_q)$, para q impar.

Sea $k = \mathbb{F}_q$, cuerpo finito de q elementos con q impar. En esta sección nos proponemos clasificar las involuciones de $A = M_n(k)$ utilizando las técnicas y resultados descritos en la sección anterior. Aparentemente este resultado no se encuentra en la literatura, sin embargo se deduce implícitamente de los resultados expuestos en [6].

Sean V un k-espacio vectorial, B_1 y B_2 formas bilineales en V. Decimos que B_1 y B_2 son equivalentes si existe un automorfismo F de V tal que $B_1(F(x), F(y)) = B_2(x, y)$ para cada $x, y \in V$.

En lenguaje matricial, si fijamos una base de V y llamamos b_i a la matriz que representa a B_i $(i = 1, 2)$ en dicha base, entonces B_1 y B_2 son equivalentes si existe una matriz invertible r tal que $b_2 = rb_1r^t$.

Lema 4.2.1. *Sea V espacio vectorial tal que $A \cong End_k(V)$. Dos formas bilineales equivalentes en V inducen involuciones isomorfas en A.*

Demostración: sean $<,>_1, <,>_2$: $V \times V \longrightarrow k$ dos formas bilineales equivalentes. Fijemos una base para V. Entonces, si $b \in A$ es la matriz que define a $<,>_1$, existe $r \in A^\times$ tal que $rbr^t \in A$ define a $<,>_2$. En otras palabras, si consideramos $x, y \in V$ como vectores fila respecto a alguna base, se tiene:

$< x, y >_1 = xby^t$;

$< x, y >_2 = x(rbr^t)y^t = < xr, yr >_1$.

Sean σ_1, σ_2 las involuciones que corresponden a $<,>_1$ y $<,>_2$ respectivamente, es decir para $x, y \in V$ y $a \in A$ se tiene:

$< xa, y >_1 = < x, y\sigma_1(a) >_1$;

$< xa, y >_2 = < x, y\sigma_2(a) >_2$.

Aquí, xa es la multiplicación matricial del vector fila x con la matriz cuadrada a. Entonces para todo $x, y \in V$ y $a \in A$:

$< xa, y >_2 = < xar, yr >_1 = < x, yr\sigma_1(r)\sigma_1(a) >_1$;

$< x, y\sigma_2(a) >_2 = < xr, y\sigma_2(a)r >_1 = < x, y\sigma_2(a)r\sigma_1(r) >_1$.

Dado que la forma $<,>_1$ es no degenerada tenemos que $\sigma_2(a)r\sigma_1(r) = r\sigma_1(r)\sigma_1(a)$ para todo $a \in A$. Por lo tanto el automorfismo de A dado por $F(a) = r^{-1}ar$, $(a \in A)$, es tal que $F(\sigma_2(a)) = \sigma_1(F(a))$.

□

Dado un $k-$ espacio vectorial V de dimensión n, se sabe que existen (módulo isomorfismos) sólo dos formas B_1 y B_2 bilineales simétricas y no degeneradas en V (ver por ejemplo [4], teorema 4.9). Estas formas están representadas por las siguientes matrices diagonales:
$b_1 = diag(1, 1, ..., 1) \in M_n(k)$;
$b_2 = diag(1, 1, ..., 1, t_0) \in M_n(k)$, donde t_0 no es cuadrado en $k^\times$.

Observemos que una forma de distinguir entre estas dos formas bilineales es mirar su determinante. En otras palabras, una forma bilineal simétrica no degenerada será equivalente a b_1 si su determinante es cuadrado en k, y será equivalente a b_2 si su determinante no es cuadrado en $k^\times$.

Por otra parte, se sabe también que existe sólo una forma bilineal b_3 alternada y no degenerada en V (módulo isomorfismos), y que en este caso la dimensión de V es necesariamente par. (ver [2], capítulo 2, sección 3).

En lo que sigue usaremos b_i, $i = 1, 2, 3$ para simbolizar indistintamente la forma bilineal y su matriz asociada.

Proposición 4.2.2. *Sea $A = M_n(k) \cong End_k(V)$.Entonces:*
Si n es par, existen tres involuciones no isomorfas en A.
Si n es impar, cualquier involución de A es isomorfa a la transposición.

Demostración: supongamos n par. Sean b_1, b_2 y b_3 las formas bilineales no degeneradas en V descritas arriba, y σ_1, σ_2, σ_3 las involuciones correspondientes. Con un cálculo directo obtenemos que σ_1 es la involución transposición.

Sea $*$ una involución en A y $<,>$ la forma bilineal no degenerada que corresponde a $*$. Debido al teorema 4.1.5, sabemos que $*$ es una involución ortogonal ó simpléctica. En otras palabras, $<,>$ es una forma bilineal no degenerada simétrica ó antisimétrica. Del mismo teorema se deduce también que una involución ortogonal no puede ser equivalente a una simpléctica.
Si la involución $*$ es simpléctica, entonces $<,>$ es equivalente a b_3 y de acuerdo a la proposición 4.2.1 obtenemos que $*$ es isomorfa a σ_3.

Por otra parte, si $*$ es ortogonal entonces $<,>$ es equivalente a b_1 ó a b_2, y por tanto $*$ es isomorfa a σ_1 ó a σ_2. Así, sólo queda probar que σ_1 y σ_2 no son isomorfas.

Supongamos entonces que las involuciones σ_1 y σ_2 son isomorfas, es decir, existe F automorfismo de A tal que $F \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ F$. Por el teorema de Skolem-Noether (4.1.7) sabemos que existe $r \in A^\times$ tal que para cada $a \in A$, $F(a) = rar^{-1}$

Entonces para cada $a \in A$ se tiene;

$$r\sigma_2(a)r^{-1} = \sigma_1(r^{-1})\sigma_1(a)\sigma_1(r). \tag{4.2}$$

Por otra parte, dado que $b_2(xa, y) = b_2(x, y\sigma_2(a))$ tenemos que:

$$ab_2 = b_2\sigma_2(a)^t. \tag{4.3}$$

Así, recordando que σ_1 es la involución transposición;

$$\sigma_2(a) = b_2\sigma_1(a)b_2^{-1}. \tag{4.4}$$

Reemplazando 4.4 en 4.2:

$$rb_2\sigma_1(a)b_2^{-1}r^{-1} = \sigma_1(r^{-1})\sigma_1(a)\sigma_1(r).$$

Finalmente reordenando obtenemos la siguiente igualdad para cada $a \in A$:

$$(\sigma_1(r)rb_2)\sigma_1(a) = \sigma_1(a)(\sigma_1(r)rb_2).$$

Por lo tanto, $\sigma_1(r)rb_2$ debe ser una matriz escalar invertible de rango par. Esto último nos lleva a una contradicción ya que el determinante de $\sigma_1(r)rb_2$ no es cuadrado en k.

Supongamos ahora n impar. Siguiendo el mismo razonamiento de arriba, sólo debemos probar que σ_1 y σ_2 son isomorfas.

Dado que n es impar, tenemos que $det(t_0 b_2)$ es cuadrado en $k^\times$. Por lo tanto, debido a la clasificación de formas bilineales, existe $r \in A^\times$ tal que

$$t_0 b_2 = rr^t = r\sigma_1(r). \tag{4.5}$$

Entonces $F(a) = r^{-1}ar$ es un automorfismo de A tal que $F \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ F$. En efecto, para cada $x, y \in V, a \in A$ tenemos por definición:

$$b_2(xa, y) = b_2(x, y\sigma_2(a)),$$

o equivalentemente;

$$b_2\sigma_1(a) = \sigma_2(a)b_2.$$

Despejando b_2 en (4.5) y reemplazando en la última igualdad tenemos;

$$t_0^{-1}r\sigma_1(r)\sigma_1(a) = t_0^{-1}\sigma_2(a)r\sigma_1(r).$$

Finalmente reordenando obtenemos;

$$r^{-1}\sigma_2(a)r = \sigma_1(r^{-1}ar).$$

□

Capítulo 5

Los grupos $SL_*^\varepsilon(2, A)$.

5.1. Definición y Presentación

Los grupos $SL_*^\varepsilon(2, A)$ donde $\varepsilon = \pm 1$ y A es un anillo unitario provisto de una involución $*$, son una generalización de los grupos especiales lineales $SL(2, F)$, donde F es un cuerpo. Ellos fueron definidos para $\varepsilon = -1$ por Pantoja y Soto-Andrade en [7] y generalizados a $\varepsilon = 1$ en [9] por los mismos autores.

Definición 5.1.1. Para un anillo unitario involutivo $(A, *)$, el grupo $SL_*^\varepsilon(2, A)$ es el conjunto de las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(A)$ tales que:

(1)$ab^* = -\varepsilon ba^*$;

(2)$cd^* = -\varepsilon dc^*$;

(3)$a^*c = -\varepsilon c^*a$;

(4)$b^*d = -\varepsilon d^*b$;

(5)$ad^* + \varepsilon bc^* = a^*d + \varepsilon c^*b = 1$,

provisto de la multiplicación matricial.

Observación 5.1.2. : Notemos que la involución de A se puede extender a $M_2(A)$ de la siguiente manera:
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$, $(a,b,c,d \in A)$.

Denotemos por H_ε a la forma $\varepsilon-$ hermitiana en $A^2 = A \times A$ asociada a la matriz $J_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$.

Proposición 5.1.3. *(Gutierrez, Pantoja, Soto-Andrade, [5])*

El grupo $SL_*^\varepsilon(2,A)$ *puede ser definido equivalentemente como el conjunto de todos los automorfismos* g *del* $A-$ *módulo* $M = A \times A$ *tal que* $H_\varepsilon \circ (g \times g) = H_\varepsilon$ *o en forma matricial;*

$$SL_*^\varepsilon(2,A) = \{T \in GL(2,A) \mid TJ_\varepsilon T^* = J_\varepsilon\}.$$

Demostración: es posible extraer una demostración de esta proposición, a partir de los hechos demostrados en la sección 4 de [9]. En efecto, del lema 1, sección 4 en [9] tenemos que si $T \in SL_*^\varepsilon(2,A)$ entonces $T^* \in SL_*^\varepsilon(2,A)$. Así, ocupando las igualdades $TJ_\varepsilon T^* = J_\varepsilon$ y $T^*J_\varepsilon T = J_\varepsilon$ se obtiene la demostración de la proposición. □

Ejemplo 5.1.4. Consideremos el anillo de matrices $A = M_n(k)$ junto con la involución $*$ dada por la transposición de matrices, entonces:

$SL_*^-(2,A) = Sp(2n,k)$, el grupo simpléctico.

$SL_*^+(2,A) = O(n,n)$, el grupo ortogonal escindido.

Definición 5.1.5. Sea $A_\varepsilon^{sym} = \{a \in A \mid a^* = -\varepsilon a\}$. Decimos que el grupo $SL_*^\varepsilon(2,A)$ tiene una presentación de Bruhat si está generado por los siguientes elementos:

$h_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{*-1} \end{pmatrix} (t \in A^\times), w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, u_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (s \in A^{sym})$

con las relaciones:

(1) $h_t h_{t'} = h_{tt'}$, $u_s u_{s'} = u_{s+s'}$;

(2) $w^2 = h_\varepsilon$;

(3)$h_t u_s = u_{tst^*} h_t$;

(4) $w h_t = h_{t^{*-1}} w$;

(5)$w u_{t^{-1}} w u_{-\varepsilon t} w u_{t^{-1}} = h_{-\varepsilon t}$, $\quad t \in A^\times \cap A^{sym}$.

Observación 5.1.6. Es sabido que si k es un cuerpo, el grupo $SL(2,k)$ está generado por los elementos ;

$h_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad (a \in k^\times), \quad u_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b \in k^+), \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ junto a las relaciones:

(1) $h_a h_d = h_{ad}$, $u_b u_c = u_{b+c} \quad (a, d \in k^\times, b, c \in k^+)$;

(2) $w^2 = h_{-1}$;

(3)$h_a u_b = u_{a^2 b} h_a \quad (a \in k^\times, b \in k^+)$;

(4) $w h_a = h_{a^{-1}} w \quad (a \in k^\times)$;

(5)$w u_{a^{-1}} w u_a w u_{a^{-1}} = h_a, \quad (a \in k^\times)$.

Así, la presentación antes definida para los grupos $SL_*^\varepsilon(2,A)$ es una generalización natural del caso clásico.

5.2. Una Representación de Weil generalizada para $G = SL_*^\varepsilon(2, A)$.

En esta sección recordamos la construcción de la Representación de Weil generalizada para los grupos $SL_*^\varepsilon(2, A)$ descrita en [5] . Con el objetivo de contextualizar este resultado, recordemos una de las construcciones de la representación de Weil para el grupo $SL(2, k)$, donde $k = \mathbb{F}_q$. Para ésto nos guiamos por [12], capítulo 1, sección 2.

Sea (E, Q) un espacio cuadrático no degenerado sobre k. Tal como en el capítulo 3 denotamos por B a la forma bilineal simétrica asociada a Q.

Teorema 5.2.1. *(Soto-Andrade, [12])*
Sean (E, Q) un espacio cuadrático no degenerado de dimensión $2m$ sobre k y φ un carácter no trivial de k^+. Se puede definir una representación $(V, \rho) = (V_{Q,\varphi}, \rho_{Q,\varphi})$ de $SL(2, k)$, llamada representación de Weil de $SL(2, k)$ asociada al espacio cuadrático (E, Q) y al carácter φ, considerando $V = L^2(E)$ y definiendo ρ sobre los generadores de Bruhat de $SL(2, k)$ de la siguiente manera;
$[\rho(h_a)f](x) = f(xa);$
$[\rho(u_b)f](x) = \varphi(bQ(x))f(x);$
$[\rho(w)f](x) = sign(Q)q^{-m} \sum_{y\in E} \varphi(B(x, y))f(y).$

Supongamos ahora que A es un anillo finito y que el grupo $G = SL_*^\varepsilon(2, A)$ cuenta con una presentación de Bruhat. Entonces para construir una representación de Weil generalizada para G necesitamos:

- Un $A-$ módulo derecho finito M.

- Una función biaditiva $\chi : M \times M \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$ y un caracter $\alpha \in \widehat{A}^{\times}$ tal que para cada $x, y \in M, \quad t \in A^{\times}$:

  (a)$\chi(xt, y) = \alpha(tt^*)\chi(x, yt^*)$, ($\chi$ es α- balanceada);

  (b)$\chi(y, x) = \chi(-\varepsilon x, y)$, ($\chi$ es ε- simétrica);

  (c)$\chi(x, y) = 1 \quad \forall x \in M \Rightarrow y = 0$, ($\chi$ es no degenerada).

- una función $\gamma : A^{sym} \times M \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$ tal que para cada $s, s' \in A^{sym}, x \in M$:

  (a)$\gamma(s + s', x) = \gamma(s, x)\gamma(s', x)$;

  (b)$\gamma(b, xt) = \gamma(tbt^*, x)$;

  (c)$\gamma(t, x + z) = \gamma(t, x)\gamma(t, z)\chi(x, zt)$.

- $c \in \mathbb{C}^{\times}$ tal que $c^2|M| = \alpha(\varepsilon)$. Además se debe cumplir para todo $s \in A^{sym} \cap A^{\times}$ la siguiente igualdad:

$$\sum_{y \in M} \gamma(s, y) = \frac{\alpha(\varepsilon s)}{c}.$$

Teorema 5.2.2. *(Gutierrez, Pantoja, Soto-Andrade, [5])*

Dados los datos (M, α, γ, chi) cumpliendo las hipótesis antesriores,existe una representación $(L^2(M), \rho)$ de G tal que para cada $t \in A^{\times}, x \in M, s \in A^{sym}$:

(1)$\rho(h_t)(f)(x) = \overline{\alpha}(t)f(xt)$;

(2)$\rho(u_s)(f)(x) = \gamma(s, x)f(x)$;

(3)$\rho(w)(f)(x) = c\sum_{y \in M} \chi(-\varepsilon x, y)f(y)$.

$(L^2(M), \rho)$ se llama ***Representación de Weil generalizada de G*** *asociada a los datos $(M, \alpha, \gamma, \chi)$.*

Demostración: ver [5], Teorema 4.4.

Observación 5.2.3. Notemos que si tomamos $A = k$, $\varepsilon = -1$ y $*$ es la involución trivial, entonces obtenemos $SL_*^{\varepsilon}(2, A)$= $SL(2, k)$. Además si (E, Q) es un espacio cuadrático no degenerado sobre k y φ un carácter no trivial de k^+, podemos considerar;

- $M = E$ con la acción dada por la estructura vectorial.

- $\chi : M \times M \longrightarrow \mathbb{C}^\times$,

  $\chi((x, y)) = \varphi(B(x, y))$.

- α el carácter trivial de $A^\times$.

- $\gamma : A^{sym} \times M \longrightarrow \mathbb{C}^\times$,

  $\gamma(b, x) = \varphi(bQ(x))$.

Es inmediato comprobar que la representación de Weil generalizada asociada a estos datos coincide con la representación definida en el Teorema 5.2.1.

5.3. Dualidad entre involuciones y $\varepsilon = \pm 1$.

Sea $(A_0, *)$ un anillo unitario involutivo y $A = M_2(A_0)$. De acuerdo a la observación (5.1.2) sabemos que A hereda la involución de A_0.

La matriz $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in A^\times$ cumple las igualdades $s^{-1} = s^* = -s$. A partir de s podemos construir una nueva involución en A, a saber, $a^\sim = sa^*s^{-1}$.

Consideremos el anillo $M_2(A)$ dotado de las involuciones $*$ y $\sim$ heredadas de A, y la matriz $U = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in GL_2(A)$.

Un cálculo directo muestra que para cada $T \in M_2(A)$ se cumple $T^\sim U = UT^*$.

El siguiente teorema es un resultado de esta tesis y entrega una relación entre los grupos SL^{+} y SL^{-}:

Teorema 5.3.1. *Los grupos $SL^{+}_{*}(2,A)$ y $SL^{-}_{\sim}(2,A)$ son isomorfos.*

Demostración: de acuerdo a la proposición 5.1.3, sabemos que una forma de describir estos grupos es

$$SL^{-}_{\sim}(2,A) = \{T \in M_2(A)/TJ_-T^{\sim} = J_-\};$$
$$SL^{+}_{*}(2,A) = \{T \in M_2(A)/TJ_+T^{*} = J_+\}$$

donde $J_{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \pm I & 0 \end{pmatrix}$ $, I \in A.$

Notemos que $TJ_-T^{\sim} = J_-$ si y sólo si $TJ_-UT^{*} = J_-U$, por lo tanto debemos probar que J_-U y J_+ son equivalentes.

En efecto, la matriz $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(A)$ es tal que $P^{-1} = P^{t}$ y $PJ_+P^{t} = J_-U$.

$\square$

Sea k un cuerpo de característica distinta de dos. Observemos el caso particular en que $(A_0,*)$ es el anillo de matrices $M_n(k)$ dotado de la involución dada por la transposición de matrices. Conservando la notación de arriba obtenemos $A = M_{2n}(k)$ con la involución transposición.

Siguiendo el procedimiento indicado anteriormente, al conjugar por la matriz antisimétrica $s = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in A$ obtenemos una nueva involución en A, a saber;

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{\sim} = s \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{*} s^{-1} = \begin{pmatrix} a_4^* & -a_2^* \\ -a_3^* & a_1^* \end{pmatrix} \quad a_1, a_2, a_3, a_4 \in M_n(k). \tag{5.1}$$

De esta forma, obtenemos el siguiente Corolario;

Corolario 5.3.2. *Los grupos $SL_*^+(2, M_{2n}(k))$ y $SL_\sim^-(2, M_{2n}(k))$ son isomorfos.*

Sea V un $k-$ espacio vectorial de dimensión $2n$ y fijemos una base para V. Tenemos $M_{2n}(k) \cong End_k(V)$.

Sea $<\ ,\ >: V \times V \longrightarrow k$ la forma bilineal simétrica no degenerada dada por el producto coordenada a coordenada con respecto a la base escogida. Consideremos la forma bilineal alternada no degenerada $[\ ,\ ] : V \times V \longrightarrow k$, dada por $[x, y] = < x, ys >$.

Recordando el Teorema 4.1.5, es inmediato chequear que $<\ ,\ >$ corresponde a la involución $*$ y $[\ ,\ ]$ corresponde a la involución $\sim$. Es decir, para cada $x, y \in V, a \in A$ tenemos:

$$< xa, y > = < x, ya^* >; \tag{5.2}$$

$$[xa, y] = [x, ya^\sim]. \tag{5.3}$$

Capítulo 6

Una Representación de Weil generalizada para $O_q(2n, 2n)$, $q > 3$.

En este capítulo nos proponemos construir una representación de Weil generalizada para el grupo de interés y luego llegar a una primera descomposición de la representación obtenida. Los hechos demostrados en las secciones 6.1 y 6.2 son resultados de esta tesis.

Sea $m \in \mathbb{N}$ y $k = \mathbb{F}_q$ un cuerpo finito de q elementos. El grupo ortogonal escindido de grado m es:

$$O_q(m,m) = \{T \in M_{2m}(k)/T \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} T^t = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\} \quad (I = I_m),$$

provisto de la multiplicación de matrices.

Tal como vimos en el ejemplo (5.1.4) si consideramos $A = M_m(k)$, $*$ la transposición de matrices y $\varepsilon = 1$, entonces $SL_*^{\varepsilon}(2, A) = O_q(m, m)$.

Desde ahora suponemos $q > 3$. En este capítulo construiremos una representación de Weil generalizada para los grupos $O_q(2n, 2n)$ utilizando el método descrito en [5]. La razón por la cual no abordaremos el caso m impar, es la ausencia de una presentación de Bruhat para $SL_*^{+}(2, M_m(k))$, ya que cuando m es impar no existen matrices antisimétricas e invertibles, es decir $A_{\varepsilon}^{sym} \cap A^{\times} = \emptyset$.

Sea $G = O_q(2n, 2n) = SL_*^+(2, M_{2n}(k))$. Del corolario 5.3.2 sabemos que $G \cong SL_\sim^-(2, M_{2n}(k))$, por lo tanto construiremos la representación para este último grupo.

En [8] se demuestra que $SL_\sim^-(2, M_{2n}(k))$ cuenta con una presentación de Bruhat cuando $q > 3$.

6.1. Construcción de una Representación de Weil generalizada para $O_q(2n, 2n)$, $q > 3$

Sabemos que $A \cong End_k(V)$, con $dim_k(V) = 2n$. En V consideramos las formas bilineales no degeneradas descritas al final de la sección 5.3.

Sea φ un carácter no trivial de k^+. De acuerdo a las notaciones de la sección (5.2), consideremos:

- M el $A-$ módulo derecho V^2 con la acción:

$$(x, y)a = (xa, ya) \qquad a \in A, x, y \in V.$$

- $\chi : M \times M \longrightarrow \mathbb{C}^\times$,
  $\chi((x, y), (v, z)) = \varphi([x, z] - [y, v])$.
- α el carácter trivial de $A^\times$.
- $\gamma : A^{sym} \times M \longrightarrow \mathbb{C}^\times$,
  $\gamma(u, (x, y)) = \varphi([xu, y])$.

Lema 6.1.1. *Para cada $u \in A^\times \cap A^{sym}$, $Q_u : V^2 \longrightarrow k$ dada por $Q_u((x, y)) = [xu, y]$ es una forma cuadrática no degenerada.*
Además para $u, u' \in A^\times \cap A^{sym}$ las formas Q_u y $Q_{u'}$ son equivalentes.
En particular $sign(Q_u) = sign(Q_{u'}) \quad \forall\, u, u' \in A^\times \cap A^{sym}$.

Demostración: sean $\lambda \in k, (x,y), (v,z) \in V^2$ es claro que $Q_u(\lambda(x,y)) = \lambda^2 Q_u((x,y))$. Probaremos entonces que

$B((x,y),(v,z)) = Q_u((x+v, y+z)) - Q_u((x,y)) - Q_u((v,z))$ es una forma bilineal no degenerada.

Desarrollando, obtenemos que;

$B((x,y),(v,z)) = [xu + vu, y+z] - [xu, y] - [vu, z] = [xu, z] + [vu, y]$.

Ahora;

$$\begin{aligned} B((x,y)+(r,t),(v,z)) =& [(x+r)u, z] + [vu, (y+t)] \\ =& [xu, z] + [ru, z] + [vu, y] + [vu, t] \\ =& B((x,y),(v,z)) + B((r,t)+(v,z)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\lambda(x,y),(v,z)) &= [\lambda xu, z] + [vu, \lambda y] \\ &= \lambda[xu, z] + \lambda[vu, y] \\ &= \lambda B((x,y),(v,z)). \end{aligned}$$

Luego, por simetría, B es forma bilineal.

Supongamos $B((x,y),(v,z)) = 0$ para todo $(v,z) \in V^2$.

Sea $v = 0$, entonces $[xu, z] = 0$ para cada $z \in V$. Dado que $[\ ,\ ]$ es no degenerada y u es invertible, obtenemos $x = 0$. Análogamente $y = 0$. Por lo tanto, B es no degenerada.

Ahora, si $u, u' \in A^\times \cap A^{sym}$ entonces us^* y $u's^*$ son matrices antisimétricas invertibles, por lo tanto ambas representan una forma bilineal alternada no degenerada. Es decir, existe $j \in A^\times$ tal que $us^* = ju's^*j^*$.

Así, recordando que $s^* = s^{-1} = -s$ y utilizando (5.1) obtenemos:

$Q_{u'}((xj, yj)) = [xju', yj] = Q_u((x,y))$.

Por lo tanto $signQ_u = signQ_{u'}$. $\square$

Teorema 6.1.2. *Los datos $(M, \alpha, \gamma, \chi)$ describen una Representación de Weil generalizada para $G = O_q(2n, 2n)$. Además esta representación es independiente de la elección de φ.*

Demostración: comprobemos que χ cumple con las propiedades pedidas:

Sean $(x, y), (v, z) \in M, a \in A$;

(1)

$$\begin{aligned} \chi((x,y)a,(v,z)) =& \varphi([xa,z]-[ya,v]) \\ =& \varphi([x,za^{\sim}]-[y,va^{\sim}]) \qquad \text{, por (5.3)} \\ =& \chi((x,y),(v,z)a^{\sim}). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \chi((v,z),(x,y)) =& \varphi([v,y]-[z,x]) \\ =& \varphi([x,z]-[y,v]) \\ =& \chi((x,y),(v,z)). \end{aligned}$$

(3)

Supongamos que $\chi((x, y), (v, z)) = 1 \quad \forall (v, z) \in M$.

Sea $v = 0$, entonces $\varphi([x, z]) = 1 \quad \forall z \in V$.

Supongamos que $x \neq 0$, entonces $[x, \cdot] : V \longrightarrow k$ es un funcional lineal no trivial, y por tanto es epiyectivo.

Sea $\lambda \in k$ tal que $\varphi(\lambda) \neq 1$, y $t = t(\lambda) \in V$ tal que $\lambda = [x, t]$, entonces obtenemos a la siguiente contradicción:

$$1 = \varphi([x, t]) = \varphi(\lambda).$$

Por lo tanto $x = 0$, y análogamente $y = 0$.

Ahora, probaremos que γ satisface las propiedades pedidas.

Sean $u, u' \in A^{sym}$, $a \in A^\times$, $(x, y), (v, z) \in M$;

(1)

$$\begin{aligned}\gamma(u+u', (x,y)) =& \varphi([xu+xu', y]) \\ =& \varphi([xu, y])\varphi([xu', y]) \\ =& \gamma(u, (x,y))\gamma(u', (x,y)).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\gamma(u, (x,y)a) =& \varphi([xau, ya]) \\ =& \varphi([xaua^{\sim}, y]) \\ =& \gamma(aua^{\sim}, (x,y)).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\gamma(u, (x,y)+(v,z)) =& \varphi([(x+v)u, y+z]) \\ =& \varphi([xu, y])\varphi([xu, z])\varphi([vu, y])\varphi([vu, z]) \\ =& \gamma(u, (x,y))\gamma(u, (v,z))\varphi([x, zu]-[y, vu]) \\ =& \gamma(u, (x,y))\gamma(u, (v,z))\chi((x,y), (v,z)u).\end{aligned}$$

Además debemos escoger $c \in \mathbb{C}^\times$ que cumpla $c^2|M| = 1$ y probar que para $u \in A^\times \cap A^{sym}$, vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{(x,y)\in M} \gamma(u, (x,y)) = \sum_{x,y\in V} \varphi([xu, y]) = \frac{1}{c}.$$

Utilizando el lema 6.1.1, obtenemos que $\sum_{(x,y)\in M}\gamma(u,(x,y))$ es una suma de Gauss de una forma cuadrática en un espacio vectorial de dimensión $4n$, por lo tanto de la proposición 3.0.18 sabemos que es igual a $sign(Q_u)q^{2n}$. Sea $\xi = sign(Q_u)$.

Escogemos $c = \dfrac{1}{\xi q^{2n}}$ para obtener:

$$\sum_{(x,y)\in M}\gamma(u,x) = \frac{1}{c}.$$

Ahora, probemos que dados φ_1 y φ_2 caracteres no triviales de k^+, entonces las representaciones obtenidas son isomorfas.

Sabemos que existe $\lambda \in k^\times$ tal que para cada $r \in k$ se tiene $\varphi_2(r) = \varphi_1(\lambda r)$. Sean $(L^2(M), \rho_1)$ y $(L^2(M), \rho_2)$ las representaciones de Weil provenientes de φ_1 y φ_2 respectivamente. Entonces el automorfismo lineal $\Psi : L^2(M) \longrightarrow L^2(M)$ dado por $(\Psi f)(x,y) = f(x, \lambda y)$ es un isomorfismo entre las representaciones $(L^2(M), \rho_1)$ y $(L^2(M), \rho_2)$.

□

6.2. El grupo unitario $U(\gamma, \chi)$.

De acuerdo a [5], llamamos grupo unitario del par (γ, χ) al grupo $U(\gamma, \chi)$ formado por todos los automorfismos $A-$ lineales β de M tales que:

1. $\gamma(u, \beta(x,y)) = \gamma(u,(x,y)) \qquad \forall u \in A^{sym}, (x,y) \in M;$

2. $\chi(\beta(x,y), \beta(v,z)) = \chi((x,y),(v,z)) \qquad \forall (x,y),(v,z) \in M.$

Observación 6.2.1. Dado que $A^{sym} \cap A^\times \neq \emptyset$, la condición (2) se desprende de (1). En efecto, sea $s \in A^{sym} \cap A^\times$, entonces para cada $x, y \in M$ se cumple ([5]):

$$\chi(x,y) = \frac{\gamma(s, x+ys^{-1})}{\gamma(s,x)\gamma(s,ys^{-1})} = \frac{\gamma(s, \beta(x)+\beta(y)s^{-1})}{\gamma(s,\beta(x))\gamma(s,\beta(y)s^{-1})} = \chi(\beta(x), \beta(y)).$$

El siguiente teorema es un resultado de este trabajo, que entrega una descripción acabada del grupo unitario $U(\gamma, \chi)$. Es importante conocer la estructura del grupo unitario así como el conjunto de sus representaciones irreducibles, ya que esta información se ocupará más adelante para obtener una descomposición de la Representación de Weil.

Cabe observar que el grupo obtenido no depende de q ni de n.

Teorema 6.2.2. *Sean γ y χ las funciones definidas en la sección (6.1), entonces $U(\gamma, \chi) \cong SL_2(k)$.*

Demostración: sea $\beta \in U(\gamma, \chi)$. En particular β es $k-$ lineal, por lo tanto podemos suponer que $\beta \in M_{4n}(k)$.

Podemos también representar matricialmente la acción de A sobre M de la siguiente manera:

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = (xa \quad ya) \qquad x, y \in V, a \in A.$$

Dado que β es $A-$lineal tenemos que $\beta(x, y)a = \beta(xa, ya)$, escribiendo esta condición matricialmente obtenemos;

$$\beta\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\beta.$$

Sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in A$ tal que $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$, entonces por la condición de conmutación obtenemos que cada uno de estos bloques debe ser escalar, así $\beta = \begin{pmatrix} b_1 I_{2n} & b_2 I_{2n} \\ b_3 I_{2n} & b_4 I_{2n} \end{pmatrix}$, $b_1, b_2, b_3, b_4 \in k$. Luego;

$\gamma(u, \beta(x, y)) = \varphi([(b_1 x + b_3 y)u, b_2 x + b_4 y])$.

Observemos que para cada $u \in A^{sym}$ la forma bilineal $(x, y) \mapsto [xu, y]$ es una forma bilineal alternada, por lo tanto $[xu, x] = 0$ para cada $x \in V, u \in A^{sym}$. Luego;

$\gamma(u, \beta(x, y)) = \varphi((b_1 b_4 - b_2 b_3)[xu, y]) = \varphi([xu, y]) = \gamma(u, (x, y)), \qquad \forall x, y \in V, u \in A^{sym}$.

Entonces;

$\varphi((b_1b_4 - b_2b_3 - 1)[xu, y]) = 1 \quad \forall x\,, y \in V, u \in A^{sym}$.

De esta última igualdad se deduce que $b_1b_4 - b_2b_3 = 1$. En efecto, tomemos $u \in A^{sym} \cap A^{\times}$, $x \neq 0$ y supongamos que $b_1b_4 - b_2b_3 - 1 \neq 0$. $F_{x,u} : V \longrightarrow k$ dada por

$F_{x,u}(z) = [(b_1b_4 - b_2b_3 - 1)xu, z]$ es un funcional lineal no trivial y por lo tanto es epiyectivo. Sea $\lambda \in k$ tal que $\varphi(\lambda) \neq 1$ y $z = z(\lambda) \in V$ tal que $\lambda = [(b_1b_4 - b_2b_3 - 1)xu, z]$, entonces llegamos a la siguiente contradicción:

$\varphi(\lambda) = \varphi([(b_1b_4 - b_2b_3 - 1)xu, z]) = 1.$ □

6.3. Descomposición de la Representación de Weil según $U(\gamma, \chi)$.

De acuerdo a [5], podemos encontrar una primera descomposición de la representación de Weil utilizando el grupo $U := U(\gamma, \chi)$. A continuación hacemos explícita dicha descomposición.

Para $\beta \in U$ y $x \in M$ denotamos $\beta.x = \beta(x)$.

El grupo U actúa naturalmente en $W := L^2(M)$, es decir mediante

$$\sigma : U \longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(L^2(M)),$$
$$\sigma_\beta(f)(x) = f(\beta^{-1}.x).$$

Proposición 6.3.1. *(Gutierrez, Pantoja, Soto-Andrade)*
La acción natural de U en W conmuta con la acción de la Representación de Weil.

Demostración: ver en [5], proposición 7.4.

Sea $\widehat{U}$ el conjunto de representaciones irreducibles de U. De acuerdo a la sección anterior, sabemos que $U \cong SL_2(k)$, por lo tanto conocemos el conjunto de sus representaciones irreducibles (ver por ejemplo [13]).

Consideremos la descomposición isotípica de W con respecto a U,

$$W \cong \bigoplus_{\pi \in \widehat{U}} n_\pi V_\pi.$$

Dado que $n_\pi = dim(Hom_U(V_\pi, W)) = dim(Hom_U(W, V_\pi))$, podemos expresar esta descomposición de la siguiente manera:

$$W \cong \bigoplus_{\pi \in \widehat{U}} (Hom_U(W, V_\pi) \otimes V_\pi.)$$

Si ponemos $m_\pi = dim(V_\pi)$ obtenemos;

$$W \cong \bigoplus_{\pi \in \widehat{U}} m_\pi Hom_U(W, V_\pi.)$$

El espacio $Hom_U(W, V_\pi)$ consta de las funciones lineales $\Theta : W \longrightarrow V_\pi$ tales que

$$\Theta \circ \sigma_\beta = \pi_\beta \circ \Theta \quad \forall \beta \in U. \tag{6.1}$$

Consideremos la base de W dada por las funciones delta de Dirac $\{e_x \mid x \in M\}$ y la función $\theta : M \longrightarrow V_\pi$ tal que $\theta(x) = \Theta(e_x)$ para cada $x \in M$. La condición (6.1) se transforma en:

$$\theta(\beta.x) = \pi_\beta \circ \theta(x) \quad \forall \beta \in U, x \in M. \tag{6.2}$$

Recíprocamente, dado $\theta : M \longrightarrow V_\pi$ cumpliendo 6.2, extendemos linealmente y obtenemos una función $\Theta : W \longrightarrow V_\pi$ que cumple 6.1.

De esta forma, podemos ver el espacio $Hom_U(W, V_\pi)$ como el espacio de funciones $\theta : M \longrightarrow V_\pi$ tales que $\theta(\beta.x) = \pi_\beta \circ \theta(x) \quad \forall \beta \in U, x \in M$. El grupo G actúa en este espacio, vía la representación de Weil, utilizando las mismas fórmulas definidas en el Teorema 5.2.2. De igual manera, se puede definir la acción natural del grupo U en este espacio, ya que -al igual que W- está formado por funciones con dominio M.

Denotamos por ρ la acción de Weil de G en W y por $\widehat{\rho}$ la acción de Weil de G en $\bigoplus_{\pi \in \widehat{U}} m_\pi Hom_U(W, V_\pi)$.

Entonces debido a cómo se define la representación de Weil, existen escalares $K_g(x, y) \in \mathbb{C}$ que sólo dependen de $g \in G$ y $x, y \in M$, tal que para cada $f \in W$, $\Lambda \in \bigoplus_{\pi\in\widehat{U}} m_\pi Hom_U(W, V_\pi)$ se tiene;

$$\rho_g(f) = \sum_{y\in M} K_g(\cdot, y)f(y); \tag{6.3}$$

$$\widehat{\rho}_g(\Lambda) = \sum_{y\in M} K_g(\cdot, y)\Lambda(y). \tag{6.4}$$

Lema 6.3.2. (W, ρ) y $(\bigoplus_{\pi\in\widehat{U}} m_\pi Hom_U(W, V_\pi), \widehat{\rho})$ son representaciones isomorfas de G.

Demostración: sea F el isomorfismo lineal entre W y $\bigoplus_{\pi\in\widehat{U}} m_\pi Hom_U(W, V_\pi)$, entonces:
$F(\rho_g(f)) = F(\sum_{y\in M} K_g(\cdot, y)f(y)) = \sum_{y\in M} K_g(\cdot, y)F(f(y)) = \widehat{\rho}_g(F(f))$.
Luego, F es un isomorfismo de representaciones. □

Finalmente, tenemos:

Proposición 6.3.3. *El espacio $Hom_U(W, V_\pi)$ es invariante bajo la acción de Weil de G.*

Demostración: sean $g \in G$, $\theta \in Hom_U(W, V_\pi)$, $\beta \in U$, $x \in M$:

$$\begin{aligned}
(\widehat{\rho}_g\theta)(\beta.x) &= \sigma_{\beta^{-1}}(\widehat{\rho}_g\theta)(x), \quad \textit{(definición de } \sigma_\beta\textit{)} \\
&= \widehat{\rho}_g(\sigma_{\beta^{-1}}\theta)(x), \quad \textit{(Proposición 6.3.1)} \\
&= \widehat{\rho}_g(\pi_\beta \circ \theta)(x), \quad (\sigma_{\beta^{-1}}(\theta) = \pi_\beta \circ \theta) \\
&= \pi_\beta(\widehat{\rho}_g\theta(x).)
\end{aligned}$$

La última igualdad resulta de (6.4).

□

Así se obtiene una primera descomposición de la Representación de Weil (W, ρ).

La irreducibilidad de las componentes obtenidas queda como un problema abierto. Conjeturamos que estas representaciones son irreducibles salvo para ciertas representaciones patológicas de $SL_2(k)$ por determinar.

Bibliografía

[1] DIEUDONNÉ J.. La géometrie des groupes classiques. *Springer-Verlag.* 1963

[2] DIEUDONNÉ J.. Sur les groupes classiques. *Hermann.* 1967

[3] FULTON W. & HARRIS J.. Representation Theory: A First Course. *Springer-Verlag.* 1991

[4] GROOVE L.. Classical groups and geometric algebra. *Graduate Studies in Mathematics, AMS.* 2002

[5] L. GUTIERREZ, J.PANTOJA & J. SOTO ANDRADE. On Generalized Weil Representations over Involutive Rings. *Contemporary Mathematics* 544 (2011).

[6] M. KNUS, A. MERKURJEV, M. ROST & J. TIGNOL. The Book of Involutions.*AMS Colloquium Publications.* 44 1998.

[7] J. PANTOJA & J. SOTO-ANDRADE. A Bruhat decomposition of the group $Sl_*(2, A)$. *Journal of Algebra* **262** (2003)

[8] J. PANTOJA. A presentation of the group $Sl_*(2, A)$, A a simple artinian ring with involution. *Manuscripta math.* **121** (2006)

[9] J. PANTOJA & J. SOTO-ANDRADE. Bruhat presentations for $*-$ classical groups. *Communications in Algebra* **37** (2009).

[10] SERRE J.. Linear Representations of Finite Groups. *Springer-Verlag.* 1977

[11] SHALE D..Linear symmetries of free Boson fields. *Trans. Amer. Math. Soc.* **103** 1962.

[12] J. Soto-Andrade. Représentations de certain groupes symplectiques finis. *Bull. Soc. Math. France Mem.* **55-56** (1978).

[13] Tanaka S.. Construction and classification of irreducible representations of special linear group of the second order over a finite field. *Osaka J. Math.* 4 (1967).

[14] Weil A..Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.* **111** 1964.

Andrea Vera Gajardo

Dep. de Matemáticas, Fac. de Ciencias, Univ. de Chile

Las Palmeras 3425, Ñuñoa, Santiago, Chile

Email: andreaveragajardo@gmail.com