

UCH-FC  
DOC-IM  
A 277  
C. 1

**CONTRIBUCIONES AL ESTUDIO DE  
DINÁMICA CUÁNTICA ABIERTA  
Y NO EQUILIBRIO  
EN LA APROXIMACIÓN MARKOVIANA**

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de

Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas

Marzo 2013

por

Julián Andrés Agredo Echeverry

Director de tesis: Dr. Rolando Rebolledo.

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN  
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

Julián Andrés Agredo Echeverry

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito parcial para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemática en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 6 de Marzo de 2013.

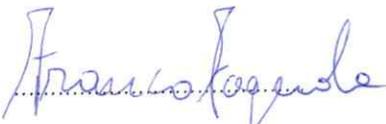
Director De Tesis  
Dr. Rolando Rebolledo, Universidad Católica de Chile.  
Comisión de Evaluación de Tesis

  
.....

Dr. Marius Mantoiu, Universidad de Chile .  
Presidente de la Comisión

  
.....

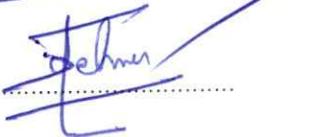
Dr. Franco Fagnola, Politecnico di Milano.

  
.....

Dr. Miguel Orszag, Universidad Católica de Chile.

  
.....

Dr. Dominique Spohner, Université Joseph Fourier.

  
.....

*Dedicada a mis padres...*



Nací en Cali (Colombia) el 26 de Febrero de 1979. A los 5 años de edad me mude con mi familia a Bogotá (Colombia) en donde hice mis estudios básicos y donde descubrí mi pasión por la pintura, la poesía, la filosofía y las matemáticas. Pese a que mi profesora de Artes me alentó por a seguir el camino de las artes al final decidí postular a la carrera de Matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia a la cual ingrese con intenciones de cambiarme en el segundo semestre a otra carrera; pero las amistades conseguidas y finalmente el convencimiento de sentir que era la profesión ideal hicieron que finalizara mis estudios de pregrado en Matemáticas. Posteriormente me mude a Santiago de Chile donde hice el magister en Matemáticas en la Universidad Católica bajo la guía del profesor Rolando Rebolledo y fue el quien me alentó y me apoyo a que siguiera mis estudios de doctorado en la Universidad de Chile y después de vencer varios obstáculos al fin voy a culminar.

# Tabla de Contenido

<b>Tabla de Contenido</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Elementos de dinámica cuántica abierta en la aproximación Markoviana</b>	<b>8</b>
1.1. Álgebras de operadores . . . . .	9
1.2. Espacios de Fock . . . . .	13
1.3. Semigrupos markovianos cuánticos (SMC) . . . . .	17
1.4. Esperanzas condicionales . . . . .	24
1.5. Teoría ergódica . . . . .	27
1.6. Condiciones de balance detallado . . . . .	29
<b>2. Una distancia tipo Wasserstein para medir desviación del equilibrio en SMCs</b>	<b>35</b>
2.1. Producción de entropía para SMCs . . . . .	36
2.2. Distancia de Wasserstein y propiedades . . . . .	39
2.3. Ejemplos . . . . .	47
2.3.1. Sistema cuántico de $m$ niveles, $3 \leq m < +\infty$ . . . . .	49
2.3.2. Semigrupos markovianos cuánticos genéricos . . . . .	54
<b>3. Sectores libres de decoherencia para SMCs</b>	<b>59</b>
3.1. Sectores libres de decoherencia . . . . .	61
3.2. Decoherencia inducida por el ambiente y subespacios libre de decoherencia . . . . .	66
3.3. SMCs con generador no acotado . . . . .	71
3.4. Ejemplos . . . . .	72
3.4.1. Interacción con baño squeezed común . . . . .	72
3.4.2. Semigrupos Markovianos cuánticos genéricos . . . . .	75

3.4.3. Sistema de fermiones disipativo . . . . .	78
<b>4. Curvatura de Wasserstein y SMCs genéricos tipo Gaussiano Gauge invariante</b>	<b>83</b>
4.1. Curvatura de Wasserstein clásica y cuántica . . . . .	84
4.2. SMCs genéricos: el caso Gaussiano Gauge invariante . . . . .	90
4.3. Aplicación a generadores asociados a procesos de nacimiento y muerte . . . . .	96
<b>Conclusiones</b>	<b>100</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>104</b>

# Agradecimientos

Durante el desarrollo de mis estudios de doctorado he sido muy afortunado, pues he contado con el apoyo de muchas personas y sin duda, sin dicho apoyo hubiese sido imposible poder culminar este doctorado y esta tesis. Son tantas las personas a las que debo agradecerles y es tanto lo que debo agradecer, que estoy seguro que en este momento en donde estoy escribiendo estas palabras se me olvidan muchos nombres; pero esto lo único que muestra es que el corazón puede guardar mas gratitud que la memoria y que es por medio de hechos por donde he de manifestarme mejor.

Teniendo en cuenta lo anterior y lejos de ser exhaustivo, pongo a continuación en manifiesto mis agradecimientos a las siguientes personas:

En primer lugar al profesor Rolando Rebolledo, quien ha sido mi guía y mi mentor durante mis estudios de Magister y Doctorado. Le agradezco inmensamente el apoyo que en todos los niveles me ha brindado, todo lo enseñado, las ideas compartidas, la inmensa paciencia y porque sin su respaldo nunca hubiera iniciado y culminado el doctorado. Valoro mucho todo lo que ha hecho por mí y mis palabras no son suficientes para agradecerle.

A mi esposa Angélica, por acompañarme en esta etapa, por la paciencia que me ha tenido, por comprenderme y por darme ese pequeño empujón que algunas veces los seres humanos necesitamos.

A ese pequeño pero selecto grupo de amigos que a la distancia siempre han estado pendientes de mi y han salido en mi ayuda cuando lo he necesitado. En particular quiero agradecer a Carolina Puerta quien siempre tuvo tiempo para escucharme sin emitir juicios en momentos donde me sentí juzgado por muchos.

También hago una mención especial y más que merecida, a mi mejor amiga Jaleydi Cárdenas, quien siempre me ha dado incondicional apoyo y ha creído en mí como persona y profesional. Me siento muy afortunado por contar con su amistad durante todo este tiempo. Como ha sido siempre, me ha brindado su respaldo en los momentos donde más lo he necesitado. También me quedo corto en palabras para expresarle toda la gratitud y cariño que siento hacia ella.

Quiero agradecer a la comisión evaluadora conformada por Franco Fagnola,

Marius Mantoiu, Miguel Orszag, Rolando Rebolledo y Dominique Spehner, por el interés mostrado en mi tesis y por las correcciones sugeridas que ayudaron a mejorar de forma importante este escrito. De manera específica, deseo manifestar el agradecimiento hacia el profesor Franco Fagnola por el trato y la hospitalidad recibida en Milán durante mi estadía en el Politecnico di Milano y también por compartir conmigo todas sus ideas que han sido muy importantes para esta tesis, en particular, para el capítulo 2 de este trabajo. Deseo destacar también la corrección minuciosa hecha por el profesor Dominique Spehner a este escrito y sus sugerencias precisas.

También agradezco al profesor Rolando Pomareda, quien me ayudó mucho en mis inicios en el programa de doctorado y al profesor Eduardo Friedmann, quien siempre ha estado disponible y atento cuando lo he necesitado, brindándome su ayuda, en particular en estos últimos meses cargados de presión y estrés.

Durante estos años de estadía en Santiago he tenido la inmensa suerte de conocer la solidaridad del pueblo chileno y como es natural tenerlos entre mis afectos. Entre los cuales quiero destacar y agradecer todo el cariño y apoyo brindado en particular de parte de Claudio Rivera y Mariela Carvacho, a quienes les valoro y les agradezco todas las cosas buenas que me han dado como personas y a Duván Henao, sus padres y hermana, quienes nos han brindado su apoyo incondicional desde el primer momento en que Angélica y yo pisamos suelo chileno.

Agradezco a mis padres porque todo lo bueno que tengo como persona se los debo a ellos y a la educación que me dieron desde pequeño. Esa ha sido la mejor herencia que me han podido dejar.

Por último y no por ello menos importante, deseo reconocer y agradecer el apoyo económico de CONICYT por medio de su programa becas de doctorado para estudiantes extranjeros sin residencia definitiva, dicho programa financió totalmente los tres últimos años de mis estudios de doctorado; a becas MECESUP y el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chile por financiar totalmente mi pasantía doctoral en Milán; a la Universidad de Chile y a la Pontificia Universidad Católica de Chile por permitirme emplear sus recursos humanos y materiales para desarrollar mis estudios y al Centro de Análisis Estocástico de la Pontificia Universidad Católica de Chile por permitirme participar en los talleres y seminarios, espacios donde he planteado y desarrollado una muy buena parte de los temas tratados en esta tesis.

# Introducción

La dinámica de un sistema cuántico abierto en la aproximación Markoviana es descrita por un semigrupo Markoviano cuántico (SMC). Estos semigrupos son una extensión no conmutativa de los semigrupos Markovianos definidos en probabilidad clásica y representan una evolución sin memoria de un sistema microscópico acorde a las leyes de la física cuántica. Más concretamente, para la representación de la dinámica en un sistema cuántico abierto se utilizan dos espacios de Hilbert: el primer espacio de Hilbert que denotaremos por  $\mathfrak{h}$  será el espacio del sistema y el segundo espacio denotado por  $\mathfrak{h}_A$  será el espacio del ambiente, donde la dinámica total del sistema es representada sobre el espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}_T = \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}_A$  por el generador  $H_T$  de un grupo unitario, siendo

$$H_T = H \otimes \mathbf{1}_{\mathfrak{h}_A} + \mathbf{1}_{\mathfrak{h}} \otimes H_A + H_I$$

en el cual  $H$  es el Hamiltoniano del sistema,  $H_A$  el Hamiltoniano del ambiente y  $H_I$  el Hamiltoniano de interacción.

Además si se quiere analizar la dinámica reducida sobre el espacio  $\mathfrak{h}$  es necesario conocer el estado inicial del ambiente, el cual es representado por una matriz de densidad  $\rho_A$ , una matriz de densidad o estado es un operador acotado positivo con traza igual a uno, definido en  $\mathfrak{h}_A$ . Con esta matriz de densidad se describe la dinámica reducida sobre  $\mathfrak{h}$  en el cuadro de Schrödinger:

$$\mathcal{T}_{*t}(\rho) = \text{tr}_{\mathfrak{h}_A}(e^{-itH} \rho \otimes \rho_A e^{itH})$$

donde  $\text{tr}_{\mathfrak{h}_A}$  es la traza parcial sobre las variables ambientales y  $(\mathcal{T}_{*t})_{t \geq 0}$  define un colección de aplicaciones y haciendo reescalamientos temporales y ciertos tipos de límites podemos obtener un semigrupo definido en  $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{h})$ , donde  $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{h})$  es el conjunto de todas las matrices densidad. También podemos utilizar el estado  $\rho_A$  para determinar la esperanza condicional  $E$  definida sobre el espacio  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  formado por todos los operadores acotados en  $\mathfrak{h}$  y describir dicha dinámica en el cuadro de Heisenberg:

$$\mathcal{T}_t(x) = E(e^{itH} x \otimes \mathbf{1}_{\mathfrak{h}_A} e^{-itH}) \quad \text{para } x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}).$$

En este caso  $\mathcal{T}_t$ , al igual que en el cuadro Schrödinger, define una colección de aplicaciones y haciendo reescalamientos temporales y ciertos tipos de límites podemos obtener un SMC.

Más exactamente, a nivel matemático y físico el tratamiento riguroso de todo lo descrito anteriormente dió como frutos una cantidad muy variada de trabajos y conceptos entre los cuales se destaca el límite de acoplamiento débil o límite estocástico y el límite de acoplamiento singular, los cuales fueron tratados en una primera versión de manera formalizada por Davies ([29],[30],[31]), enfocándose primordialmente en la dinámica reducida y recientemente se ha trabajado la dinámica en el espacio completo ([3],[7],[32],[33],[34]).

No es el objetivo de este trabajo, discutir los métodos matemáticos para justificar la aproximación Markoviana, nuestro objetivo es distinto. Nosotros suponemos la aproximación Markoviana justificada y por ende la dinámica de nuestro sistema es descrita por un SMC  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ . Bajo este supuesto, este trabajo se concentra en presentar aportes nuevos en el estudio de la evolución temporal descrita por  $\mathcal{T}$ . Mas específicamente, las contribuciones de este trabajo están enfocadas principalmente sobre tres tópicos: no equilibrio, decoherencia y curvatura de Wasserstein en semigrupos Markovianos cuánticos.

En el caso del primer tópico, no equilibrio, se supone dado  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  y que existe un operador clase traza  $\rho$  el cual es fiel (inyectivo) e invariante por  $\mathcal{T}$ , es decir  $\mathcal{T}_{*t}(\rho) = \rho$  para todo  $t \geq 0$ . Físicamente esto nos dice que a medida que pasa el tiempo el sistema evoluciona a un estado del cual no saldrá más. La pregunta a nivel fenomenológico es si este estado representa un estado de equilibrio o un estado de desequilibrio. Matemáticamente un estado de equilibrio se puede caracterizar de varias formas, esencialmente existen tres caracterizaciones: la condición de Kubo-Martin-Schwinger (condición KMS), la condición de balance detallado y la producción de entropía nula. Estas condiciones han sido trabajadas por los físico-matemáticos ampliamente (para el caso de SMCs ver [8],[10],[53],[54]); pero el caso de desequilibrio (o no equilibrio) no ha sido tratado con la profundidad necesaria, en particular, en el caso de dinámica Markoviana en sistemas cuánticos abiertos, este es un tema que hasta hace poco se viene tratando. El camino natural para estudiar esta noción en SMCs es encontrar generalizaciones de las tres caracterizaciones antes mencionadas. En [2], los autores introducen y estudian una definición de balance detallado con peso y en [40], Fagnola y Rebolledo, presentan la noción de producción de entropía en la estructura de semigrupos Markovianos cuánticos y demuestran que producción de entropía nula es equivalente a satisfacer condiciones de balance detallado cuánticas. En el capítulo 2 de este trabajo, presento una contribución en esta dirección, es decir, se muestra otra forma de caracterizar el equilibrio (y por ende el desequilibrio): encontramos otra tasa

alternativa para medir cuan lejos se encuentra  $\mathcal{T}$  del equilibrio, usando una generalización no conmutativa de la métrica de Wasserstein utilizada en probabilidad clásica y en transporte óptimo (para transporte óptimo ver [71]).

El segundo tópico que trataremos en esta tesis es la decoherencia en SMCs. La decoherencia ocurre como consecuencia de la interacción entre el ambiente y el sistema, estas interacciones son el mecanismo para que asintóticamente aparezca dinámica clásica en la evolución de un sistema cuántico. Este fenómeno se puede explicar más intuitivamente como la pérdida de características cuánticas representadas como términos fuera de la diagonal de una matriz densidad (dichos términos son llamados coherencias). Más precisamente, si suponemos que el espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$  tiene base ortonormal  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y un operador densidad  $\rho$  es descrito por sus componentes  $\rho(n, m) = \langle e_n, \rho e_m \rangle$  entonces los términos  $\rho(n, m) = \langle e_n, \rho e_m \rangle$  con  $n \neq m$  son las coherencias y la decoherencia es descrita por  $\rho_t(n, m) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , donde  $\rho_t(n, m) = \langle e_n, \mathcal{T}_*^t(\rho) e_m \rangle$  denotan las componentes de la evolución temporal de  $\rho$ . La evolución del estado  $\rho$  es dada por el semigrupo preduel del SMC  $\mathcal{T}$  denotado por  $\mathcal{T}_*$ . En otras palabras, existe una diagonalización asintótica de los estados. Este hecho es la motivación principal usada en la formulación matemática de decoherencia propuesta por Rebolledo (ver [65]). Otra formulación matemática de decoherencia llamada decoherencia inducida por el ambiente ha sido trabajada por Blanchard y Olkiewicz (ver [16],[15]) donde un elemento principal es descrito por el álgebra libre de decoherencia  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ , el cual, tal como su nombre lo indica, es una subálgebra de von-Neumann del álgebra de los operadores acotados  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  donde no existe decoherencia. Esta subálgebra es motivada por la importancia de encontrar sectores en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  donde no ocurra la decoherencia y aparece también en la formulación de teoremas ergódicos. Otra clase de sector libre de decoherencia es definido usando los subespacios libres de decoherencia (ver [26]) los cuales han surgido principalmente como aplicación en computación cuántica. Nuestra contribución en este rumbo, es desarrollada en el capítulo 3 de esta tesis en donde mostramos relaciones no conocidas entre estos sectores libres de decoherencia y el concepto de decoherencia inducida por el ambiente, estableciendo resultados nuevos en este escenario.

El tercer tópico a tratar en este trabajo es dado por la noción de curvatura de Wasserstein. Esta curvatura ha sido definida para procesos de Markov clásicos (ver [23],[24],[52] y [66]). Esta curvatura (también conocida bajo el nombre de exponente de Chen), es una tasa de convergencia exponencial a un estado invariante en la métrica de Wasserstein. Cuando el estado invariante es un estado de equilibrio se puede establecer relación con el spectral gap (brecha espectral), otra tasa exponencial trabajada en una métrica tipo  $L_2$ . En este trabajo, se define

una extensión no conmutativa de la curvatura de Wasserstein clásica. Encontramos resultados novedosos y su relación con el spectral gap cuántico. Todo esto se desarrollara en el capítulo 4 de este trabajo.

En síntesis esta tesis está organizada de la siguiente forma:

En el capítulo 1 se introduce algunos elementos de dinámica cuántica abierta en la aproximación Markoviana y conceptos preliminares sobre SMCs. Este capítulo es una revisión de la materia necesaria para el desarrollo de los siguientes capítulos.

El segundo capítulo es dedicado a la primera contribución. En este capítulo definimos una distancia  $W$  entre estados en el álgebra de von Neumann no conmutativa  $\mathfrak{B}(\hbar)$ , con el fin de medir que tan lejos se encuentra la dinámica del equilibrio usando una tasa denotada por  $W_{ep}(\cdot)$ . La restricción de  $W$  a la subálgebra diagonal de  $\mathfrak{B}(\hbar)$  coincide con la distancia de Wasserstein usada en transporte óptimo. Esta tasa es compatible con la producción de entropía definida por Fagnola y Rebolledo en [40], es decir, el estado normal invariante  $\rho$  satisface condiciones cuánticas de balance detallado si y sólo si  $W_{ep}(\cdot) = 0$ . Este capítulo pretende responder a la pregunta abierta de la existencia de nuevas caracterizaciones de no equilibrio en SMCs.

Posteriormente, en el capítulo 3 hablaremos de la segunda contribución de este trabajo. Se discutirá sobre sectores donde no ocurre decoherencia, ellos son los subespacios libres de decoherencia y la subálgebra libre de decoherencia. En el caso de los subespacios libre de decoherencia, existe una definición trabajada por Bacon, Lidar y Whaley en [13] para espacios de Hilbert de dimensión finita, en este capítulo se plantea una nueva definición que generaliza la anterior a espacios de Hilbert de dimensión infinita y la cual se puede conectar con el concepto de subálgebra libre de decoherencia (concepto trabajado en SMCs en variados trabajos, ver por ejemplo [35]), repasamos las definiciones y propiedades de este concepto y mostramos que existen álgebras libres de decoherencia construidas con subespacios libres de decoherencia mediante algunos ejemplos. Analizamos también la relación de estos conceptos con la decoherencia inducida por el ambiente, esta noción ha sido trabajada por Blanchard y Olkiewicz en [16] y todos estos resultados teóricos son aplicados a tres importantes ejemplos. Las relaciones entre los sectores libres de decoherencia, subespacios y álgebras y el concepto de decoherencia inducida por el ambiente son nuevas y buscan dar un primer paso entre la conexión de dos nociones que se han trabajado separadamente. La pregunta abierta que se pretende responder en este caso es sobre las relaciones existentes entre subespacios y álgebras libres de decoherencia.

En el capítulo 4 establecemos la tercera contribución novedosa y definimos el

concepto de curvatura de Wasserstein cuántica como una generalización no conmutativa de la curvatura de Wasserstein trabajada en probabilidad clásica. Esta curvatura nos da una tasa exponencial de convergencia hacia un estado  $\rho$  en la métrica de Wasserstein cuántica  $W_d$  definida en el capítulo 2. Nos centramos principalmente en la aplicación de SMCs genéricos que estén asociados a generadores de procesos de nacimiento y muerte. Mostramos relaciones con los subespacios libres de decoherencia, trabajados en el capítulo 3, como también con el concepto de spectral gap o brecha espectral. Los trabajos sobre curvatura de Wasserstein clásica son muy recientes y este es el primer trabajo, hasta donde tengo conocimiento, donde se plantea un análogo cuántico de dicha curvatura. Aquí tratamos de responder sobre la pregunta abierta de la existencia e implicaciones de un análogo no conmutativo de la curvatura de Wasserstein.

Finalizamos este escrito con un capítulo dedicado a comentarios, conclusiones generales, preguntas abiertas y futuras direcciones de investigación.

## Capítulo 1

# Elementos de dinámica cuántica abierta en la aproximación Markoviana

Cuando se estudia la dinámica del sistema bajo la aproximación Markoviana se define una evolución  $(\mathcal{T}_t)$ , sobre  $\mathfrak{B}(\hbar)$ , en este caso  $\mathfrak{B}(\hbar)$  es un álgebra de von Neumann, conocida como el álgebra de los observables, pues nuestros observables físicos son descritos por elementos de dicha álgebra, en términos físicos esta evolución es denominada *evolución en el cuadro de Heisenberg*. En la introducción de este trabajo también discutimos la existencia de una evolución  $\mathcal{T}_{*t}$  sobre elementos llamados matrices densidad o estados del sistema y su evolución es denominada *evolución en el cuadro de Schrödinger*, esta evolución es equivalente a la evolución en el cuadro de Heisenberg, es decir,  $\mathcal{T}_t$  define  $\mathcal{T}_{*t}$  y recíprocamente (esto será mostrado con más detenimiento en la sección 1.3). Por lo tanto, para comprender como funcionan estas evoluciones debemos estudiar conceptos involucrados con álgebras de operadores entre otros. Lo anterior motiva la siguiente distribución de temas de este capítulo:

Iniciamos la sección 1.1 revisando conceptos básicos de álgebras de operadores, debido a que este es el lenguaje matemático a usar en el resto del libro. Posteriormente en la sección 1.2, se repasan conceptos básicos sobre la construcción de espacios de Fock, nos enfocaremos principalmente en el caso fermiónico, esto con el fin de facilitar el seguimiento a la construcción del semigrupo descrito en la sección 3.4.3, el cual representa la dinámica de un sistema Fermiónico en interacción con un ambiente de fonones. Debido a que los SMCs son la herramienta usada para describir la dinámica del sistema dedicamos la sección 1.3 a la teoría de dichos semigrupos, en esta sección también recordamos generalidades de la definición de estado cuántico. En la sección 1.5 hablaremos

sobre esperanzas condicionales. La esperanza condicional es una proyección que utilizaremos con mucha frecuencia a lo largo de este escrito y por ende dedicamos un espacio a revisar este concepto, el cual se puede ligar a los automorfismos modulares de la teoría de Tomita-Takesaki. Dedicamos parte de esta sección a dicha teoría no solo por su conexión con las esperanzas condicionales sino además porque los semigrupos que conmutan con estos automorfismos son los candidatos para cumplir condiciones de balance detallado de tipo KMS, lo cual será comentado en la sección 1.6. Proseguiremos con la sección 1.5 donde hablaremos de ergodicidad y algunos resultados que serán útiles en el capítulo 3 de esta tesis. Por último en la sección 1.6 estudiamos condiciones de balance detallado, recordando que estados invariantes en equilibrio son caracterizados por cumplir condiciones de balance detallado. La mayoría de las afirmaciones de este capítulo son hechas sin prueba; pero existe una variedad de bibliografía conteniendo estas pruebas y más contenido teórico. Ver por ejemplo [12],[18],[19],[39],[60] y [64].

Asumiremos siempre los siguientes hechos:

- (a) Todos los espacios vectoriales, espacios de Hilbert y álgebras son definidas sobre el cuerpo de escalares  $\mathbb{C}$ .
- (b) En un espacio de Hilbert el producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es lineal en la segunda entrada del producto y antilineal en la primera.
- (c) Cualquier espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$  es separable y el conjunto de los operadores acotados sobre  $\mathfrak{h}$  será denotado por  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ .

Algunas veces por comodidad utilizaremos la notación de Dirac para el producto interno, es decir, el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  será algunas veces denotado por  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Por ejemplo dados  $u, v$  vectores en  $\mathfrak{h}$  se define la aplicación  $|u\rangle\langle v|$  tal que para todo  $w \in \mathfrak{h}$   $|u\rangle\langle v|(w) = \langle v, w \rangle u$ , el cual llamaremos *proyector* y que en notación de Dirac su acción es escrita como  $|u\rangle\langle v|w = \langle v|w \rangle u$ , para todo  $w \in \mathfrak{h}$ . Nótese que si  $v = w$  obtenemos un operador proyección.

## 1.1. Álgebras de operadores

A continuación definimos las estructuras algebraicas que manejaremos en este trabajo.

**Definición 1.1.1.** Una  $C^*$ -álgebra es un álgebra  $\mathcal{A}$  equipado con una involución  $x \mapsto x^*$  y una norma  $\| \cdot \|$  satisfaciendo, para todo  $x, y \in \mathcal{A}$  y para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ :

- (a)  $x^{**} = x$ ;

- (b)  $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda}x^* + \bar{\mu}y^*$ ;
- (c)  $(xy)^* = y^*x^*$ ;
- (d)  $\|x\|$  es siempre positivo,  $\|x\| = 0$  si y sólo si  $x = 0$ ;
- (e)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;
- (f)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ;
- (g)  $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ ;
- (h)  $\mathcal{A}$  es completa bajo la norma  $\|\cdot\|$ ;
- (i)  $\|xx^*\| = \|x\|^2$ .

Un álgebra satisfaciendo (a), (b), y (c) es llamada *\*-álgebra*.

Vemos que estas estructuras son conmutativas si el producto entre sus elementos es conmutativo.

Los ejemplos más importantes y básicos de  $C^*$ -álgebras son los siguientes:

- (a)  $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , el álgebra de los operadores acotados sobre el espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ . La involución es la operación adjunto de un operador y dotado de la norma del operador:

$$\|x\| = \sup_{\|v\|=1} \|x(v)\|.$$

- (b)  $\mathcal{A} = \mathfrak{K}(\mathfrak{h})$ , el álgebra de los operadores compactos sobre el espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ . Esta es una sub- $C^*$ -álgebra de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ .
- (c)  $\mathcal{A} = C_0(X)$ , el espacio de las funciones continuas anulándose en el infinito, donde  $X$  es un espacio localmente compacto. Recordemos que una función  $f$  se anula en el infinito si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un compacto  $K \subset X$  tal que  $|f| < \varepsilon$  fuera de  $K$ . La involución sobre  $\mathcal{A}$  es la conjugación compleja  $\bar{f}$  y la norma es dada por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

La importancia de estos ejemplos radica en que cada  $C^*$ -álgebra conmutativa es isomorfa a una  $C^*$ -álgebra de la forma (c) y cada  $C^*$ -álgebra es isomorfa a una subálgebra de una  $C^*$ -álgebra de la forma (a).

La dinámica que trabajamos es descrita en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  la cual puede ser dotada de varias topologías:

**Definición 1.1.2.** Sean  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  y  $(x_\alpha)$  una red en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . Definiremos varias topologías en términos de sus vecindades básicas en  $x$  como también en términos de la convergencia de la red  $(x_\alpha)$  a  $x$ .

- (a) La *topología en norma* (o *uniforme*) en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  es dada por las vecindades básicas abiertas

$$V(x; \varepsilon) = \{y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \|y - x\| < \varepsilon\} \text{ para } x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \text{ y } \varepsilon > 0.$$

$x_\alpha \rightarrow x$  en norma si y sólo si  $\|x_\alpha - x\| \rightarrow 0$ .

- (b) La *topología fuerte* en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  es dada por las vecindades básicas abiertas

$$V(x; (v_i)_{i=1}^n, \varepsilon) = \left\{ y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \sum_{i=1}^n \|(y-x)v_i\|^2 < \varepsilon \right\} \text{ para } x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}), \varepsilon > 0,$$

y cualquier conjunto finito de vectores  $(v_i)_{i=1}^n$  en  $\mathfrak{h}$ .

$x_\alpha \rightarrow x$  fuertemente si y sólo si  $\|(x_\alpha - x)v\| \rightarrow 0$  para cada  $v \in \mathfrak{h}$ .

- (c) La *topología débil* en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  es dada por las vecindades básicas abiertas

$$V(x; (v_i)_{i=1}^n, (w_i)_{i=1}^n, \varepsilon) = \left\{ y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \left| \sum_{i=1}^n \langle w_i, (y-x)v_i \rangle \right| < \varepsilon \right\}$$

para  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ,  $\varepsilon > 0$ , y cualquier conjunto finito de vectores  $(v_i)_{i=1}^n$  y  $(w_i)_{i=1}^n$  en  $\mathfrak{h}$ .

$x_\alpha \rightarrow x$  débilmente  $\langle w, (x_\alpha - x)v \rangle \rightarrow 0$  para cada  $w, v \in \mathfrak{h}$ .

- (d) La *topología  $\sigma$ -fuerte* (o *ultrafuerte*) en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  es dada por las vecindades básicas abiertas

$$V(x; (v_i)_{i=1}^\infty, \varepsilon) = \left\{ y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \sum_{i=1}^\infty \|(y-x)v_i\|^2 < \varepsilon \right\} \text{ para } x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}), \varepsilon > 0,$$

y cualquier sucesión  $(v_i)$  en  $\mathfrak{h}$  satisfaciendo  $\sum_{i=1}^\infty \|v_i\|^2 < \infty$ .

$x_\alpha \rightarrow x$   $\sigma$ -fuertemente (o ultrafuertemente) si y sólo si

$$\sum_{i=1}^\infty \|(x_\alpha - x)v_i\|^2 \rightarrow 0$$

para cada sucesión  $(v_i)$  en  $\mathfrak{h}$  satisfaciendo  $\sum_{i=1}^\infty \|v_i\|^2 < \infty$ .

- (e) La *topología  $\sigma$ -débil* (o *ultradébil*) en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  es dada por las vecindades básicas abiertas

$$V(x; (v_i)_{i=1}^\infty, (w_i)_{i=1}^\infty, \varepsilon) = \left\{ y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \left| \sum_{i=1}^\infty \langle w_i, (y-x)v_i \rangle \right| < \varepsilon \right\}$$

para  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ,  $\varepsilon > 0$ , y sucesiones  $(v_i)_{i=1}^{\infty}$  y  $(w_i)_{i=1}^{\infty}$  en  $\mathfrak{h}$  con

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|v_i\|^2 < \infty \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} \|w_i\|^2 < \infty.$$

$x_{\alpha} \rightarrow x$   $\sigma$ -débilmente (o ultradébilmente) si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle w_i, (x_{\alpha} - x)v_i \rangle \rightarrow 0$$

para cada par de sucesiones  $(w_i)$  y  $(v_i)$  en  $\mathfrak{h}$  satisfaciendo  $\sum_{i=1}^{\infty} \|v_i\|^2 < \infty$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} \|w_i\|^2 < \infty$ .

Denotaremos por  $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$  el conjunto de los operadores clase traza, equipado con la norma traza  $\|\rho\|_1 = \text{tr}|\rho|$ , donde  $|\rho| = (\rho^* \rho)^{1/2}$ . En particular, el conjunto de *matrices densidad o estados* es denotado por  $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{h})$ , donde

$$\mathfrak{L}_1(\mathfrak{h}) = \{\rho \in \mathfrak{L}; (\mathfrak{h})\rho \geq 0, \|\rho\|_1 = 1\}.$$

**Proposición 1.1.1.** *El espacio de Banach  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  es el dual topológico de  $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$  debido a la dualidad*

$$(x, \rho) = \text{tr}(x\rho),$$

$x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}), \rho \in \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ . Además la topología débil-\* en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  asociada a esta dualidad coincide con la topología  $\sigma$ -débil.

(Una prueba de esta proposición puede ser encontrada por ejemplo en [12], teorema 3.2, página 87). En virtud de este último teorema, en el resto de este trabajo  $\sigma$ -débil es denotado por  $w^*$  (débil-\* que traducido al inglés sería weak-\*).

**Definición 1.1.3.** Un *álgebra de von Neumann* es una  $C^*$ -álgebra actuando en  $\mathfrak{h}$  la cual contiene el operador identidad  $\mathbf{1}$  de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  y la cual es débilmente cerrada.

Por la definición concluimos fácilmente que el conjunto  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  es un ejemplo de álgebra de von Neumann. Otro ejemplo puede ser construido al considerar un espacio medible localmente compacto  $(X, \mu)$  con una medida  $\sigma$ -finita  $\mu$ . La  $*$ -álgebra  $L^{\infty}(X, \mu)$  actúa sobre  $\mathfrak{h} = L^2(X, \mu)$  por multiplicación. La  $C^*$ -álgebra  $C_0(X)$  actúa de la misma forma sobre  $\mathfrak{h} = L^2(X, \mu)$ . Pero cada función  $f \in L^{\infty}(X, \mu)$  es límite casi seguro de una sucesión en  $C_0(X)$ , por lo tanto, usando teorema de la convergencia dominada, el espacio  $L^{\infty}(X, \mu)$  está incluido en la clausura débil de  $C_0(X)$  y como  $L^{\infty}(X, \mu)$  es igual a su clausura entonces  $L^{\infty}(X, \mu)$  es la clausura débil de  $C_0(X)$ . De lo anterior concluimos que  $L^{\infty}(X, \mu)$  es un álgebra de von Neumann que contiene la función idénticamente uno y es la clausura débil de la  $C^*$ -álgebra  $C_0(X)$ . Vemos que además es conmutativa.

Una característica de las álgebras de von Neumann es que ellas coinciden con su doble conmutante. A continuación empezamos a aclarar esta última afirmación.

Sea  $\mathcal{M}$  un subconjunto de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . Definimos

$$\mathcal{M}' = \{y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); yx = xy \text{ para todo } y \in \mathcal{M}\}.$$

**Definición 1.1.4.** El espacio  $\mathcal{M}'$  es llamado el *conmutante* de  $\mathcal{M}$ .

Recursivamente podemos definir

$$\mathcal{M}'' = (\mathcal{M}')', \dots, \mathcal{M}^{(n)} = (\mathcal{M}^{(n-1)})', \dots$$

El teorema del biconmutante (Teorema del doble conmutante o Teorema del doble conmutante de von Neumann) establece el siguiente resultado

**Teorema 1.1.2.** Sea  $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  una sub- $*$ -álgebra del álgebra de los operadores lineales acotados en el espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ . Entonces  $\mathcal{A}$  es un álgebra de von Neumann en  $\mathfrak{h}$  si y sólo si  $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$ .

(Para una demostración ver [12], teorema 3.6 página 89).

Notar que la condición de que  $\mathcal{A}$  es un álgebra de von Neumann es por un lado una condición topológica; pero por otro lado, por el teorema del biconmutante, esta resulta ser equivalente a una condición algebraica.

## 1.2. Espacios de Fock

El siguiente material será usado para la descripción de un sistema Fermiónico disipativo en la sección 3.4.3 de esta tesis. Una descripción más detallada puede ser encontrada en [19].

Los estados puros mecánico-cuánticos de  $n$  partículas puntuales en el espacio de configuraciones  $\mathbb{R}^v$  son dados por vectores del espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^{mv})$ . Si el número de partículas no es fijo, los estados puros son descritos por vectores del espacio suma directa

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{n \geq 0} L^2(\mathbb{R}^{mv}),$$

es decir, sucesiones  $\phi = (\phi^{(n)})_{n \geq 0}$ , donde  $\phi^{(0)} \in \mathbb{C}$ ,  $\phi^{(n)} \in L^2(\mathbb{R}^{mv})$  para  $n \geq 1$  y la norma de  $\phi$  es dada por

$$\|\phi\|^2 = |\phi^{(0)}|^2 + \sum_{n \geq 1} \int dx_1 \dots dx_n |\phi^{(n)}(x_1, \dots, x_n)|^2.$$

Para describir partículas las cuales tienen estructura interna, es decir, un momento angular específico o spin, es necesario generalizar la anterior construcción. Esto lleva a los espacios de Fock.

Asumamos que los estados puros de cada partícula forman un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$  y denotemos por  $\mathfrak{h}^n = \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \otimes \dots \otimes \mathfrak{h}$  el  $n$ -ésimo producto tensorial de  $\mathfrak{h}$  consigo mismo. Representamos el *espacio de Fock*  $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  por

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{h}^n,$$

donde  $\mathfrak{h}^0 = \mathbb{C}$ . Entonces un vector  $\phi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  es una sucesión  $(\phi^{(n)})_{n \geq 0}$  de vectores  $\phi^{(n)} \in \mathfrak{h}^n$  y  $\mathfrak{h}^n$  puede ser identificado como el subespacio cerrado de  $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  formado por los vectores con todas las componentes cero excepto quizás la componente  $n$ -ésima.

Ahora, para describir partículas fermiónicas o bosónicas, necesitamos introducir subespacios de  $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  y para ello definimos los operadores  $P_{\pm}$  en  $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  como

$$P_+(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} f_{\pi_1} \otimes f_{\pi_2} \otimes \dots \otimes f_{\pi_n},$$

$$P_-(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \varepsilon_{\pi} f_{\pi_1} \otimes f_{\pi_2} \otimes \dots \otimes f_{\pi_n}$$

para todo  $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{h}$ . La suma recorre todas las permutaciones

$$\pi : (1, 2, \dots, n) \rightarrow (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

de los índices donde  $\varepsilon_{\pi}$  es 1 si  $\pi$  es una permutación par y  $-1$  si  $\pi$  es permutación impar.

El *espacio de Fock bosónico* (o *espacio Bose-Fock*)  $\Gamma_b(\mathfrak{h})$  y el *espacio de Fock Fermiónico* (o *espacio Fermi-Fock*)  $\Gamma_f(\mathfrak{h})$  son entonces definidos por

$$\Gamma_b(\mathfrak{h}) = P_+ \mathfrak{F}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{h}^{\vee n} \text{ y } \Gamma_f(\mathfrak{h}) = P_- \mathfrak{F}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{h}^{\wedge n}$$

respectivamente, donde

$$f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_n = P_+(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n),$$

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n = P_-(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n)$$

para todo  $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{h}$ .

La estructura especial de los espacios de Fock nos permite la amplificación de los operadores en  $\mathfrak{h}$  al espacio entero  $\Gamma_f(\mathfrak{h})$  y  $\Gamma_b(\mathfrak{h})$  por un método comúnmente conocido como *segunda cuantización*.

Si  $H$  es un operador autoadjunto en  $\mathfrak{h}$ , uno puede definir  $\mathbf{H}$  tal que

$$\mathbf{H}(P_{\pm}(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)) = P_{\pm} \left( \sum_{i=1}^n f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes H f_i \otimes \dots \otimes f_n \right)$$

para todo  $f_i \in D(H)$ , y entonces extender por continuidad. La clausura autoadjunta de esta suma es llamada la segunda cuantización de  $H$  y es denotada por  $d\Gamma(H)$  o  $\mathbf{H}$ .

En lo que sigue, deseamos describir dos  $C^*$ -álgebras de observables asociadas con bosones y fermiones, respectivamente. Ambas álgebras son definidas con la ayuda de los operadores *aniquilación*  $a$  y *creación*  $a^\dagger$ , los cuales son descritos como sigue.

Para cada  $f \in \mathfrak{h}$  definimos operadores  $a(f)$  y  $a^\dagger(f)$ , en  $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  tomando

$$a(f)\phi^{(0)} = 0, a^\dagger(f)\phi^{(0)} = f,$$

$$a(f)(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n) = \sqrt{n}\langle f, f_1 \rangle f_2 \otimes \cdots \otimes f_n,$$

y

$$a^\dagger(f)(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n) = \sqrt{n+1}f \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n.$$

Finalmente, se definen los operadores aniquilación y creación en  $\Gamma_f(\mathfrak{h})$  (respectivamente  $\Gamma_b(\mathfrak{h})$ ) como

$$b(f) = P_- a(f) P_- \text{ and } b^\dagger(f) = P_- a^\dagger(f) P_-$$

$$\text{(respectivamente } c(f) = P_+ a(f) P_+ \text{ and } c^\dagger(f) = P_+ a^\dagger(f) P_+)$$

Estos operadores cumplen la *relaciones de anticonmutación canónicas* denotadas CAR (canonical anti-commutation relations):

$$\{b(f), b(g)\} = 0 = \{b^\dagger(f), b^\dagger(g)\} \quad (1.2.1)$$

$$\{b(f), b^\dagger(g)\} = \langle f, g \rangle 1, \quad (1.2.2)$$

para todo  $f, g \in \mathfrak{h}$ , donde nosotros hemos usado la notación  $\{A, B\} = AB + BA$  para dos operadores  $A$  y  $B$ .

Además,  $b(f)$  y  $b^\dagger(f)$  tienen extensiones acotadas en el espacio entero  $\Gamma_f(\mathfrak{h})$ :

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $\mathfrak{h}$  espacio de Hilbert,  $\Gamma_f(\mathfrak{h})$  el espacio Fermi-Fock,  $b(f)$  and  $b^\dagger(g)$  los correspondientes operadores de creación y aniquilación en  $\Gamma_f(\mathfrak{h})$ . Entonces*

(1)  $\|b(f)\| = \|f\| = \|b^\dagger(f)\|$  para todo  $f, g \in \mathfrak{h}$ , y en consecuencia  $b(f)$  y  $b^\dagger(f)$  tienen extensiones acotadas.

(2) Si  $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$  y  $(u_n)_{n \geq 1}$  es una base ortonormal de  $\mathfrak{h}$ , entonces

$$b^\dagger(u_{n_1}) b^\dagger(u_{n_2}) \dots b^\dagger(u_{n_m}) \Omega$$

es una base ortonormal de  $\Gamma_f(\mathfrak{h})$  cuando  $\{u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_m}\}$  recorre sobre subconjuntos finitos de  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

(3) El conmutante del conjunto de operadores acotados  $\{b(f), b^\dagger(g); f, g \in \mathfrak{h}\}$  es igual a  $\mathbb{C}1$  en  $\Gamma_f(\mathfrak{h})$ .

*Demostración.* (1) Usando las relaciones CAR (1.2.1), obtenemos

$$(b^\dagger(f)b(f))^2 = b^\dagger(f)\{b(f), b^\dagger(f)\}b(f) = \|f\|^2 b^\dagger(f)b(f)$$

y por lo tanto

$$\|b(f)\|^4 = \|(b^\dagger(f)b(f))^2\| = \|f\|^2 \|b^\dagger(f)b(f)\| = \|f\|^2 \|b(f)\|^2.$$

Como  $b(f) \neq 0$  for  $f \neq 0$  se concluye que

$$\|b(f)\| = \|f\| = \|b^\dagger(f)\|.$$

(2) Este item se sigue fácilmente al corroborar la siguiente igualdad

$$b^\dagger(u_{n_1})b^\dagger(u_{n_2})\dots b^\dagger(u_{n_m})\Omega = \sqrt{n!}P_-(u_{n_1} \otimes \dots \otimes u_{n_m}).$$

(3) Sea  $T$  un operador acotado en el conmutante de  $\{b(f), b^\dagger(g); f, g \in \mathfrak{h}\}$ , entonces

$$\begin{aligned} & \langle b^\dagger(u_{s_1})b^\dagger(u_{s_2})\dots b^\dagger(u_{s_n})\Omega, T b^\dagger(v_{s_1})b^\dagger(v_{s_2})\dots b^\dagger(v_{s_m})\Omega \rangle \\ &= \langle T^*\Omega, b(u_{s_n})b(u_{s_{n-1}})\dots b(u_{s_1})b^\dagger(v_{s_1})b^\dagger(v_{s_2})\dots b^\dagger(v_{s_m})\Omega \rangle \\ &= \langle T^*\Omega, \Omega \rangle \langle b^\dagger(u_{s_1})b^\dagger(u_{s_2})\dots b^\dagger(u_{s_n})\Omega, b^\dagger(v_{s_1})b^\dagger(v_{s_2})\dots b^\dagger(v_{s_m})\Omega \rangle. \end{aligned}$$

Para establecer la última igualdad debemos considerar por separado tres casos  $n > m$ ,  $n < m$ , and  $n = m$ . En el primer caso, ambas expresiones son cero porque el operador  $b(f)$  aniquila más partículas que las que pueda crear  $b^\dagger(g)$ . En el segundo caso ambas expresiones son otra vez cero, pues se reduce al primer caso por conjugación compleja. En el tercer caso

$$b(u_{s_n})b(u_{s_{n-1}})\dots b(u_{s_1})b^\dagger(v_{s_1})b^\dagger(v_{s_2})\dots b^\dagger(v_{s_m})\Omega$$

es un múltiplo de  $\Omega$  y la igualdad deseada se sigue una vez más. Por lo tanto  $T = (\Omega, T\Omega)1$ .

□

*Nota 1.2.1.* Dada una base ortonormal  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathfrak{h}$ , denotamos  $b_n = b(\varphi_n)$  (respectivamente  $b_n^\dagger = b^\dagger(\varphi_n)$ ). Es claro que el conmutante del conjunto

$$\{b_n, b_m^\dagger; n, m \geq 1\}$$

es igual a  $\mathbb{C}1$  por la proposición 1.2.1 (3), dado que  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  es una base ortonormal de  $\mathfrak{h}$ .

En el caso bosónico, estos operadores satisfacen otras relaciones llamadas relaciones canónicas de conmutación (CCR) en el espacio Bose-Fock y los operadores aniquilación y creación son no acotados (ver [19]).

### 1.3. Semigrupos markovianos cuánticos (SMC)

Tal como hemos dicho anteriormente, los SMCs son nuestra herramienta para expresar la dinámica temporal del sistema. Estos semigrupos son una extensión no conmutativa de los semigrupos de Markov estudiados en probabilidad clásica. Los semigrupos clásicos son a menudo definidos con núcleos de transición, estos núcleos son caracterizados por una propiedad denominada positividad, el análogo no conmutativo de esta noción es conocido como completa positividad, en particular los SMCs son aplicaciones completamente positivas. A continuación discutimos sobre el concepto de aplicación completamente positiva y algunas consecuencias.

**Definición 1.3.1.** Sean dos  $*$ -álgebras  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ . Una aplicación  $\Phi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$  es

- (a) *positiva* si  $\Phi(a^*a)$  es un elemento positivo para todo  $a \in \mathcal{A}$ ;
- (b) *n-positiva* si para cualquier par de colecciones  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$  y  $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}$ , el elemento

$$\sum_{i,j=1}^n b_i^* \Phi(a_i^* a_j) b_j \in \mathcal{B},$$

es positivo;

- (c) *completamente positivo* si  $\Phi$  es n-positivo para todo  $n \geq 1$ .

Recordemos que un *elemento positivo* de una  $*$ -álgebra  $\mathcal{A}$  es un elemento de la forma  $a^*a$  con  $a \in \mathcal{A}$  y que *aplicación positiva* es una aplicación que envía elementos positivos en elementos positivos, entonces una aplicación completamente positiva es en particular 1-positiva o positiva. Si  $\Phi$  es 2-positiva entonces  $\Phi$  satisface la *desigualdad de Schwartz*

$$\Phi(a^*a) \leq \Phi(a)^* \Phi(a) \quad \forall a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}).$$

Para una demostración de esta última afirmación ver por ejemplo [64].

**Definición 1.3.2.** Un *semigrupo Markoviano cuántico* (SMC) en una  $*$ -álgebra  $\mathcal{A}$  con unidad  $\mathbf{1}$ , es una familia uniparamétrica  $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  de aplicaciones lineales de  $\mathcal{A}$  en si mismo cumpliendo

- (a)  $\mathcal{T}_0(x) = x$ , para todo  $x \in \mathcal{A}$ ;
- (b) Cada  $\mathcal{T}_t(\cdot)$  es completamente positivo;
- (c)  $\mathcal{T}_t(\mathcal{T}_s(x)) = \mathcal{T}_{t+s}(x)$ , para todo  $t, s \geq 0, x \in \mathcal{A}$ ;
- (d)  $\mathcal{T}_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  para todo  $t \geq 0$ .

De lo anterior deducimos que por la 2-positividad de  $\mathcal{T}_t$  se sigue la desigualdad de Schwartz  $\mathcal{T}_t(x^*x) \leq \mathcal{T}_t(x)^* \mathcal{T}_t(x)$  para todo  $t \geq 0$  y para todo  $x \in \mathcal{A}$ .

En este trabajo nos centraremos principalmente en SMCs definidos en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  y siempre asumiremos que todas las  $*$ -álgebras tienen unidad 1 a menos que se diga lo contrario.

La continuidad del semigrupo es definido acorde a las diferentes topologías de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ :

**Definición 1.3.3.** Un semigrupo Markoviano cuántico  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  es:

(a) *uniformemente continuo (o continuo en norma)* si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{\|x\| \leq 1} \|\mathcal{T}_t(x) - x\| = 0;$$

(b) *de Feller* si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{T}_t(x) - x\| = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h});$$

(c)  *$w^*$ -continuo* si  $\mathcal{T}_t(\cdot)$  es  $w^*$ -continuo para todo  $t \geq 0$ , y

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{tr}(\rho(\mathcal{T}_t(x) - x)) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}), \rho \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{h}).$$

El *generador*  $\mathcal{L}$  del semigrupo  $\mathcal{T}$  es definido en la topología débil-\*. Esto es, su dominio  $D(\mathcal{L})$  consiste de elementos  $x$  del álgebra para los cuales el  $w^*$ -límite of  $t^{-1}(\mathcal{T}_t(x) - x)$  existe cuando  $t \rightarrow 0$ . Este límite es denotado entonces por  $\mathcal{L}(x)$ .

El generador del semigrupo nos revela mucha información sobre el semigrupo por ejemplo, un SMC es continuo en norma si y sólo si su generador  $\mathcal{L}(\cdot)$  es un operador acotado en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . En este caso existe un conjunto de operadores  $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $L = \sum_k L_k^* L_k$  es un operador acotado en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  y  $\sum_k L_k^* x L_k \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  cuando  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  y existe también un operador autoadjunto  $H = H^* \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  tal que

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k).$$

Esta última representación es debida a Gorini, Kossakowski, Sudarshan y Lindblad y es llamada en forma abreviada *forma GKSL* de  $\mathcal{L}$ . Para una prueba ver por ejemplo teorema 5.6 de [64]. Gorini, Kossakowski y Sudarshan encontraron la forma de  $\mathcal{L}$  en el caso de dimensión finita, posteriormente Lindblad extendió la representación al caso de dimensión infinita. Existe también una representación en  $C^*$ -álgebras la cual es obra de Christensen y Evans:

**Teorema 1.3.1.** *Dado un SMC continuo en norma definido en una  $C^*$ -álgebra  $\mathcal{A}$  con clausura débil denotada simplemente por  $\overline{\mathcal{A}}$ , existe una aplicación completamente positiva  $\Phi$  definida en  $\overline{\mathcal{A}}$  y un elemento  $G \in \overline{\mathcal{A}}$  tal que*

$$\mathcal{L}(a) = G^*a + \Phi(a) + aG,$$

para todo  $a \in \mathcal{A}$ . Además el operador  $G$  satisface la desigualdad  $G + G^* \leq \mathcal{L}(1)$ .

Para una prueba ver teorema 5.4 de [64]. Dada la forma GKSL del generador  $\mathcal{L}$  de un semigrupo continuo en norma definido en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , se puede obtener la representación de Christensen y Evans tomando

$$\Phi(\cdot) := \sum_k L_k^*(\cdot)L_k \text{ y } G = -\frac{1}{2} \sum_k L_k^*L_k - iH.$$

La representación GKSL en general no es única; pero existen condiciones para aproximarse a dicha unicidad:

**Teorema 1.3.2.** *Sea  $\mathcal{L}$  el generador de un SMC continuo en norma en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  y  $\rho \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{h})$ . Entonces existe un operador acotado autoadjunto  $H$  y una sucesión finita o infinita  $(L_k)_{k \geq 1}$  de elementos de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  tal que:*

- (a)  $\text{tr}(\rho L_k) = 0$  para todo  $k \geq 1$ ,
- (b)  $\sum_{k \geq 1} L_k^*L_k$  es una suma fuertemente convergente,
- (c) si  $(c_k)_{k \geq 0}$  es una sucesión cuadrado-sumable de escalares complejos y  $c_0 \mathbf{1} + \sum_{k \geq 1} c_k L_k = 0$  entonces  $c_k = 0$  para todo  $k \geq 0$ ,
- (d) la siguiente representación de  $\mathcal{L}$  se cumple

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (L_k^*L_k x - 2L_k^*xL_k + xL_k^*L_k).$$

Si  $H', (L'_k)_{k \geq 1}$  es otra familia de operadores acotados en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  con  $H'$  autoadjunto y la sucesión  $(L'_k)_{k \geq 1}$  es finita o infinita, entonces las condiciones (a)-(d) son satisfechas con  $H, (L_k)_{k \geq 1}$  reemplazado por  $H', (L'_k)_{k \geq 1}$  respectivamente si y sólo si los tamaños de las sucesiones  $(L_k)_{k \geq 1}, (L'_k)_{k \geq 1}$  son iguales y para algún escalar  $c \in \mathbb{R}$  y una matriz unitaria  $(u_{kj})_{kj}$  tenemos que

$$H' = H + c y L'_k = \sum_j u_{kj} L_j.$$

Una prueba de este resultado puede ser consultada en el teorema 30.16 de [60]. Una representación GKSL de  $\mathcal{L}$  satisfaciendo las hipótesis del teorema anterior será llamada una *representación especial*. La matriz unitaria  $(u_{kj})_{kj}$  obviamente

puede ser vista como un operador unitario sobre un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ , llamado *espacio libre de multiplicidad* con dimensión igual a el tamaño de la sucesión  $(L_k)_{k \geq 1}$ , la cual es también determinada en forma única por  $\mathcal{L}$  debido al tamaño de la condición de minimalidad (c).

Como se había comentado anteriormente, el teorema 1.3.2 nos permite aproximarnos a la unicidad de la descomposición GKSL; más concretamente, una consecuencia inmediata de este teorema es la unicidad en la descomposición de  $\mathcal{L}$  como la suma de una derivación  $i[H, \cdot]$  y una parte disipativa  $\mathcal{L} - i[H, \cdot]$ , suponiendo la representación GKSL especial. La descomposición de  $\mathcal{L}$  en la forma

$$\mathcal{L}(x) = G^*x + \sum_{k \geq 1} L_k^*xL_k + xG$$

es única, salvo un múltiplo imaginario puro del operador identidad sumando en  $G$ .

De lo anterior podemos ver que el suponer  $\mathcal{L}(\cdot)$  acotado no sólo nos da propiedades topológicas fuertes sino además representaciones algebraicas del generador, las cuales como veremos más adelante serán bastante útiles para estudiar la dinámica descrita por  $\mathcal{S}$ . Ahora, si  $\mathcal{L}(\cdot)$  es no acotado, la situación es distinta y se debe tratar con mayor preocupación, pues en principio ni siquiera podemos asegurar fácilmente que dado un  $\mathcal{L}(\cdot)$  no acotado se pueda construir un semigrupo. En esta situación el generador no es visto como un operador directamente sino a través de una forma sesquilineal. En este caso es posible construir un SMC de la siguiente manera:

Sean  $G$  y  $L_k$  operadores ( $G$  o  $L_k$  no acotados) tales que

(MIN)  $G$  es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en  $\mathfrak{h}$ ,  $Dom(G) \subset Dom(L_k)$ , para todo  $k \geq 1$  y para todo  $u, v \in Dom(G)$  tenemos

$$\langle Gv, u \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle L_k v, L_k u \rangle + \langle v, Gu \rangle \leq 0.$$

Bajo la hipótesis (MIN), para cada  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , sea  $\mathfrak{f}(x)$  la forma sesquilineal con dominio  $Dom(G) \times Dom(G)$  definida por

$$\mathfrak{f}(x)(v, u) = \langle Gv, xu \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle L_k v, xL_k u \rangle + \langle v, xGu \rangle.$$

Es sabido que dado un dominio  $D \subset Dom(G)$ , el cual es un dominio esencial para  $G$ , es posible construir un semigrupo, llamado el semigrupo minimal cuántico,

satisfaciendo la ecuación:

$$\langle v, \mathcal{T}_t(x)u \rangle = \langle v, xu \rangle + \int_0^t \mathcal{L}(\mathcal{T}_s(x))(v, u) ds, \quad \text{for } u, v \in D. \quad (1.3.1)$$

La solución de (1.3.1) es construida por iteraciones, imitando un poco el teorema de iterados de Picard usado en ecuaciones diferenciales; pero en nuestro contexto:

**Proposición 1.3.3.** *Supongamos que la hipótesis (MIN) se cumple y sea  $(P(t))_{t \geq 0}$  el semigrupo generado por  $G$ . Entonces existe una sucesión  $(\mathcal{T}_t^{(n)})_{n \geq 0}$  de contracciones lineales en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  la cual satisface*

$$\begin{aligned} \langle v, \mathcal{T}_t^{(0)}(x)u \rangle &= \langle P(t)v, xP(t)u \rangle \\ \langle v, \mathcal{T}_t^{(n+1)}(x)u \rangle &= \langle P(t)v, xP(t)u \rangle \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_l P(t-s)v, \mathcal{T}_s^{(n)}(x)L_l P(t-s)u \rangle \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ,  $u, v \in D(G)$ . Además:

- (a) la aplicación  $\mathcal{T}_t^{(n)} : \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \mapsto \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  es completamente positiva para cada  $t \geq 0$  y cada  $n \geq 0$ ,
- (b) la aplicación  $\mathcal{T}_t^{(n)} : \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \mapsto \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  es normal para cada  $t \geq 0$  y cada  $n \geq 0$ ,
- (c) la aplicación  $t \mapsto \mathcal{T}_t^{(n)}$  es  $\sigma$ -débilmente continua para cada  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ,
- (d) la sucesión  $(\mathcal{T}_t^{(n)}(x))_{n \geq 0}$  es creciente para cada elemento positivo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ,
- (e)  $\mathcal{T}_t^{(n)}(\mathbf{1}) \leq \mathbf{1}$  para cada  $n \geq 0, t \geq 0$ .

Una prueba de esta afirmación puede ser consultada en [39], sección 3.

El semigrupo minimal satisfaciendo (1.3.1) es obtenido para todo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . En efecto, tenemos

$$\mathcal{T}_t(x) = \sup_{n \geq 0} \mathcal{T}_t^{(n)}(x)$$

para todo  $t \geq 0$  y para todo  $x$  positivo usando la positividad de  $\mathcal{T}_t$ . Se extiende a todos los elementos de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  por linealidad.

Lo anterior prueba que la solución de la ecuación (1.3.1) existe; pero aún bajo las hipótesis y el hecho de que  $D$  es un dominio esencial para  $G$ , dicha solución no necesariamente es única. El semigrupo minimal es caracterizado por la siguiente

propiedad: para cualquier familia  $w^*$ -continua  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  de aplicaciones positivas en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  satisfaciendo (1.3.1) tenemos  $\mathcal{T}_t^{(min)}(x) \leq \mathcal{T}_t(x)$  para todo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  positivo y todo  $t \geq 0$  (ver [39]). Si el semigrupo minimal es Markov, es decir,  $\mathcal{T}_t^{(min)}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  para todo  $t \geq 0$ , entonces esta es la única solución a (1.3.1). En esta tesis siempre asumiremos que los generadores formales satisfacen la propiedad de Markov y siempre nos referiremos a la única solución minimal de (1.3.1) como el *semigrupo markoviano cuántico minimal*. Para una discusión sobre condiciones suficientes para que esta propiedad se cumpla remitimos al lector a [25]. La densidad de  $D$  implica que el SMC minimal (el cual denotaremos desde ahora por  $\mathcal{T}$ ) posee un generador  $\mathcal{L}$  densamente definido, su dominio  $D(\mathcal{L})$  es dado por todos los elementos  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  para los cuales la aplicación  $(u, v) \mapsto \mathcal{L}(x)(u, v)$  es continua en norma en el espacio de Hilbert producto  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ . De esta forma, para cualquier  $x \in D(\mathcal{L})$ ,  $\mathcal{L}(x)$  es dado por  $\langle v, \mathcal{L}(x)u \rangle = \mathcal{L}(x)(u, v)$ ;  $u, v \in \mathfrak{h}$ .

Hasta el momento hemos discutido la dinámica definida en el álgebra  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , es decir, en el cuadro de Heisenberg; pero si deseamos trabajar con los estados (en el cuadro de Schrödinger) entonces debemos usar el predual de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , del cual hablaremos a continuación.

**Definición 1.3.4.** Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de von Neumann. Llamaremos *predual* de  $\mathcal{A}$  el espacio de todos los funcionales  $\sigma$ -débilmente continuos definidos en  $\mathcal{A}$ , y denotaremos el conjunto formado por estos como  $\mathcal{A}_*$ .

En particular  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})_* = \mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ , el espacio de los operadores clase traza. Es claro que  $\mathcal{A}_* \subset \mathcal{A}^*$ . Además  $\mathcal{A}_*$  es un espacio de Banach en la norma de  $\mathcal{A}^*$ .

**Definición 1.3.5.** Un funcional lineal positivo  $\omega$  sobre  $\mathcal{A}$  es *normal* si para toda red creciente  $(a_\alpha)_\alpha$  en  $\mathcal{A}_+$  con envolvente superior, tenemos  $\sup_\alpha \omega(a_\alpha) = \omega(\sup_\alpha a_\alpha)$ . Un *estado*  $\omega$  es un funcional lineal positivo tal que  $\omega(\mathbf{1}) = 1$ .

**Proposición 1.3.4.** Si  $\omega$  es un estado en  $\mathcal{A}$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a)  $\omega$  es normal;
- (b)  $\omega$  es  $\sigma$ -débilmente continuo;
- (c) existe  $\rho \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{h})$  tal que  $\omega(a) = \text{tr}(\rho a)$  para todo  $a \in \mathcal{A}$ ;
- (d)  $\omega(\sum_{i \in I} p_i) = \sum_{i \in I} \omega(p_i)$  para cada colección  $\{p_i\}_{i \in I}$  de proyecciones ortogonales dos a dos en  $\mathcal{A}$ .

Una prueba de lo anterior es encontrada en [18], teorema 2.4.21. En este contexto  $\rho$  es llamado *operador densidad*, *matriz densidad* o *estado*. En adelante identificaremos  $\omega$  con  $\rho$ .

El concepto de estado generaliza el concepto de medida de probabilidad en probabilidad clásica y el concepto de función de onda en mecánica cuántica. Se ilustra a continuación este último comentario en un caso particular el cual es fácilmente extendible a situaciones más generales. Si tomamos por ejemplo un espacio  $\Omega = \{y_1, \dots, y_s\}$  y un espacio de Hilbert con  $\dim \mathfrak{h} = s$  y consideramos todas las medidas de probabilidad  $\mu$  definidas en  $\Omega$  entonces a  $\mu$  la podemos ver como la matriz diagonal  $\rho_\mu$  con entradas en la diagonal  $(\rho_\mu)_{jj} = \mu(y_j)$  para todo  $j \in \{1, \dots, s\}$  y con entradas iguales a cero fuera de la diagonal entonces  $\rho_\mu$  define un estado en  $\mathfrak{h}$ . Mediante esta correspondencia vemos que cualquier medida de probabilidad corresponde a un estado diagonal y claramente vemos que el recíproco también es cierto, todo estado en  $\mathfrak{h}$  con una matriz diagonal define una medida de probabilidad clásica. Lo anterior nos muestra no sólo como la noción de estado es una extensión de medida de probabilidad sino además como el modelo probabilístico de Kolmogorov está contenido en esta estructura. En el caso de la función de onda usada en mecánica cuántica el argumento es el siguiente: dada una función de onda  $\Psi$  en  $\mathfrak{h} = L^2(\Omega)$ , es decir,  $\Psi$  es un vector de norma uno en  $\mathfrak{h} = L^2(\Omega)$  tal que  $|\Psi(y_j)|^2$  representa la probabilidad de que una partícula este en la posición  $y_j$  del espacio  $\Omega$  entonces el estado  $\rho_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  define un estado en nuestro contexto. Todo estado de esta forma es llamado un *estado puro*. En el capítulo 2 usaremos la entropía relativa de estados, su valor será finito dependiendo del comportamiento del soporte de sus estados, por ello recordamos aquí el concepto de proyección soporte.

**Definición 1.3.6.** Dado un funcional lineal positivo  $\omega$  definido en  $\mathcal{A}$  definimos  $s(\omega) = q^\perp$ ,  $q = 1 - p$ , donde  $q$  es la proyección más grande tal que  $\omega(q) = 0$  y decimos que  $s(\omega)$  es la *proyección soporte* de  $\omega$

Ahora hablaremos sobre la evolución de los estados que nosotros manejaremos en esta tesis:

**Definición 1.3.7.** El *semigrupo predual* de un SMC  $\mathcal{T}_*$  de  $\mathcal{A}$  es el semigrupo  $\mathcal{T}_*$  de operadores en  $\mathcal{A}_*$  definido por

$$(\mathcal{T}_{*t}(\omega))(a) = \omega(\mathcal{T}_t(a))$$

para cada  $a \in \mathcal{A}$  y cada  $\omega \in \mathcal{A}_*$ . En particular, si  $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  entonces el semigrupo predual es definido en  $\mathcal{L}_1(\mathfrak{h})$  por la relación

$$\text{tr}(\mathcal{T}_{*t}(\rho)x) = \text{tr}(\rho \mathcal{T}_t(x)) \quad \text{for all } t \geq 0, x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}), \rho \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{h}).$$

Su generador es denotado por  $\mathcal{L}_*$ .

Si  $\mathcal{T}$  es continuo con respecto a la topología débil  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , el semigrupo  $\mathcal{T}_*$  es también continuo con respecto a la topología débil en el espacio de Banach

$\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ . Entonces por el corolario 3.1.8 en [18],  $\mathcal{T}_*$  es un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Banach  $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ . Además, si  $\mathcal{T}_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  para todo  $t \geq 0$ , entonces  $\mathcal{T}_*$  aplica estados en estados. En efecto, para cada estado normal  $\omega$ ,  $\mathcal{T}_{*t}(\omega)$  es positivo y

$$(\mathcal{T}_{*t}(\omega))(\mathbf{1}) = \omega(\mathcal{T}_t(\mathbf{1})) = \omega(\mathbf{1}) = 1.$$

Una hipótesis que haremos con frecuencia es suponer que existe un estado normal fiel e invariante para el semigrupo  $\mathcal{T}$ . A continuación aclararemos que significa este supuesto

**Definición 1.3.8.** Un funcional normal  $\omega \in \mathcal{A}_*$  es llamado *invariante* con respecto a  $\mathcal{T}$  (o  $\mathcal{T}$ -invariante) si  $(\mathcal{T}_{*t}(\omega))(a) = \omega(a)$  (o equivalentemente  $\omega(\mathcal{T}_t(a)) = \omega(a)$ ) para todo  $a \in \mathcal{A}, t \geq 0$ . El funcional  $\omega$  es *fiel* si  $\omega(a^*a) > 0$  para todo  $a \neq 0$ .

Notar que si  $\omega$  es un estado fiel en  $\mathcal{A}$  entonces la forma sesquilineal definida por

$$\langle a, b \rangle_\omega := \omega(a^*b) \quad \text{para todo } a, b \in \mathcal{A}$$

es un producto interno en  $\mathcal{A}$ .

## 1.4. Esperanzas condicionales

Así como los SMCs son una generalización de los semigrupos de Markov en probabilidad clásica y la noción de estado generaliza el concepto de medida de probabilidad, también existe la extensión en nuestro contexto de esperanza condicional de probabilidad clásica la cual llamaremos con el mismo nombre. Para poder ver como esta noción se generaliza en una forma más rigurosa debemos apelar al lenguaje de probabilidad cuántica y hacer uso de los llamados espacios de probabilidad cuánticos. Omitiremos esta parte en vista de que esto nos desviaría notablemente de los intereses de esta tesis y nos enfocaremos en la definición y construcción de esperanzas condicionales. El lector interesado en espacios de probabilidad cuánticos y esperanzas condicionales puede consultar la sección 1.3 y 1.4 de [39] para una versión enfocada hacia semigrupos y flujos cuánticos o puede consultar los textos de Meyer [56] y Parthasarathy [60].

Una forma de construir esperanzas condicionales es usando la teoría de Tomita y Takesaki, por ello antes de definir esperanza condicional hablaremos un poco de esta teoría. Esta manera de construcción, nos da una esperanza condicional que depende de un estado dado. Buscando otra forma de construcción de estas sin recurrir a la dependencia sobre un estado, autores como Umegaki [70] y Moy [57]

entre otros estudian otro tipo de construcciones, este tipo de esperanzas condicionales son más ligadas a proyecciones de norma uno, lo cual da lugar al teorema de Tomiyama [68] que precisamente caracteriza las esperanzas condicionales como proyecciones de norma uno. Por eso posteriormente presentaremos el teorema de Tomiyama que será utilizado a lo largo de este escrito para justificar cuando un objeto matemático dado es una esperanza condicional.

**Definición 1.4.1.** Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de von Neumann actuando sobre  $\mathfrak{h}$ . Un subconjunto  $A \subset \mathfrak{h}$  es llamado *separador* en  $\mathcal{A}$  si para cualquier  $x \in \mathcal{A}$ ,  $xa = 0$  para cada  $a \in A$  implica  $x = 0$ . Un subconjunto  $A$  es separador en  $\mathcal{A}$  si y sólo si  $A$  es *cíclico* para  $\mathcal{A}'$ , es decir,  $\mathcal{A}'A = \{xa; x \in \mathcal{A}', a \in A\}$  es un subconjunto denso de  $\mathfrak{h}$ .

En lo que sigue asumiremos que  $\mathcal{A}$  tiene un vector cíclico y separador  $\xi_0$ . Definimos dos operadores

$$\text{Dom}S_0 = \mathcal{A}\xi_0 \quad x\xi_0 \rightarrow S_0(x\xi_0) = x^*\xi_0$$

$$\text{Dom}F_0 = \mathcal{A}'\xi_0 \quad x'\xi_0 \rightarrow F_0(x'\xi_0) = x'^*\xi_0.$$

Se puede probar que  $S_0$  y  $F_0$  son cerrables, denotamos sus clausuras por  $S$  y  $F$ , respectivamente. Sea  $S = J\Delta^{1/2}$  la descomposición polar de  $S$ , el operador positivo  $\Delta$  es llamado operador modular y la isometría antilineal  $J$  es llamada la conjugación modular. Las siguientes relaciones se verifican:

$$\Delta = FS, \quad \Delta^{-1} = SF, \quad F = J\Delta^{-1/2},$$

$$\Delta^{-1/2} = J\Delta^{1/2}J \quad J = J^*, \quad J^2 = \mathbf{1}.$$

El resultado clave de esta teoría es el teorema de Tomita-Takesaki:

**Teorema 1.4.1.** *Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de von Neumann con un vector cíclico y separador  $\xi_0$ . Sean  $\Delta$  y  $J$  el operador modular y la conjugación modular asociados. Entonces*

$$\mathcal{A}' = J\mathcal{A}J \text{ y } \mathcal{A} = \Delta^{it}\mathcal{A}\Delta^{-it} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Usando el teorema anterior se puede introducir un grupo de automorfismos los cuales son muy útiles en el análisis de álgebras de von Neumann y sistemas dinámicos cuánticos. Para ello debemos usar también representaciones de Gelfand-Neumark-Segal (en forma abreviada representaciones GNS). Dichas representaciones se obtienen mediante el siguiente teorema:

**Teorema 1.4.2.** *Sea  $\mathcal{B}$  una  $C^*$ -álgebra y  $\varphi$  un estado en  $\mathcal{B}$ . Entonces existe un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}_\varphi$ , una  $*$ -representación  $\pi_\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_\varphi)$  y un vector de norma uno  $\xi_\varphi \in \mathfrak{h}_\varphi$  tal que*

$$\varphi(x) = \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(x)\xi_\varphi \rangle, \quad x \in \mathcal{B},$$

y tal que  $\xi_\varphi$  es cíclico para  $\pi_\varphi$ , es decir,  $\overline{\pi_\varphi(\mathcal{B}\xi_\varphi)} = \mathfrak{h}_\varphi$ . La representación  $\pi_\varphi$  en  $\mathfrak{h}_\varphi$  es unívocamente determinada por  $\varphi$  salvo equivalencia unitaria. La representación  $\pi_\varphi$  es llamada representación GNS.

Sea  $\omega$  un estado fiel y normal en  $\mathcal{A}$  y sea  $(\pi_\omega, \mathfrak{h}_\omega, \xi_\omega)$  su tripla GNS asociada, entonces  $\pi_\omega$  es normal y fiel, además  $\xi_\omega$  es cíclico y separador. Considerando  $\Delta$  y  $J$  el operador modular y la conjugación modular asociados a  $\xi_\omega$  definamos

$$\sigma_t^\omega(x) = \pi_\omega^{-1}(\Delta^it_\omega(x)\Delta^{-it}), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{A}.$$

Entonces  $\{\sigma_t^\omega\}$  es un grupo ultradébilmente continuo de automorfismos  $\mathcal{A}$ , llamado el *grupo modular* asociado con  $\omega$ . El grupo modular tiene una incidencia bastante importante en las condiciones de balance detallado de lo cual hablaremos más adelante en la sección de este tópico y en decoherencia inducida por el ambiente de lo cual haremos algunos comentarios en el capítulo 3.

**Definición 1.4.2.** Sea  $\mathcal{A}$  una  $C^*$ -álgebra con una sub  $C^*$ -álgebra  $\mathcal{B}$ . Diremos que la aplicación lineal  $\mathcal{E} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es una esperanza condicional si esta es una contracción completamente positiva y satisface

$$\mathcal{E}(xy) = x\mathcal{E}(y) \text{ y } \mathcal{E}(xy) = \mathcal{E}(x)y \text{ para todo } x \in \mathcal{A} \text{ e } y \in \mathcal{B}.$$

El siguiente teorema debido a Takesaki [67] nos explica la conexión entre existencia de esperanza condicionales en subálgebras y el grupo modular.

**Teorema 1.4.3.** Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de von Neumann y  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  una subálgebra de von Neumann. Supongamos que  $\omega$  es un estado fiel y normal en  $\mathcal{A}$ . Entonces existe una esperanza condicional normal  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{A}$  hacia  $\mathcal{B}$  tal que  $\omega \circ \mathcal{E} = \omega$  si y sólo si  $\mathcal{B}$  es invariante bajo el grupo modular  $\{\sigma_t^\omega\}_{t \in \mathbb{R}}$ , es decir,  $\sigma_t^\omega(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Tal como podemos apreciar del teorema anterior, la esperanza condicional que se construye en este caso depende del estado  $\omega$ . La siguiente caracterización (teorema de Tomiyama) nos muestra como construir esperanzas condicionales sin esta dependencia

**Teorema 1.4.4.** Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de von Neumann y  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  una subálgebra de von Neumann. La aplicación lineal  $\mathcal{E} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es una esperanza condicional si y sólo si  $\mathcal{E}$  es una proyección de norma uno.

Una demostración de este teorema es encontrada en [68].

## 1.5. Teoría ergódica

En esta sección presentamos resultados de tipo ergódico para SMCs. Dichos resultados serán de gran importancia a lo largo de la tesis, principalmente en el capítulo 3 de este escrito donde haremos uso de del material expuesto aquí, el cual es un resumen de los trabajos de Evans ([38]), Frigerio ([48],[49]), Frigerio-Verri ([50]), Fagnola-Rebolledo ([43],[44],[42]), Dhari-Fagnola-Rebolledo ([35]). En esta sección nos restringiremos a estudiar los SMCs uniformemente continuos definidos en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ; pero la siguiente discusión es válida sin mayores cambios en cualquier álgebra de von Neumann.

Como punto inicial para poder estudiar ergodicidad de SMCs es necesario mirar condiciones bajo las cuales la medias de Cesaro

$$\left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{T}_s(x) ds \right\}_{t>0}$$

son débilmente convergentes. Este problema está conectado con el hecho de la  $w^*$ -compacidad de la bola unitaria en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , también está relacionado con la convergencia débil de la red

$$\left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{T}_{*s}(\omega) ds \right\}_{t>0}$$

cuando  $\omega$  varia en el predual de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . Veremos que la convergencias de estas medias es equivalente a la existencia de una esperanza condicional que proyecta en los puntos fijos de  $\mathcal{T}$ .

Notar que si  $\omega$  es un estado normal entonces  $t^{-1} \int_0^t \mathcal{T}_{*s}(\omega) ds$  es también un estado normal para todo  $t > 0$ .

**Definición 1.5.1.** Diremos que  $\mathcal{T}$  es:

- (a) *ergódico en media*, si  $\left\{ t^{-1} \int_0^t \mathcal{T}_s(x) ds \right\}_{t>0}$  es  $w^*$ -convergente para cada  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ;
- (b) *ergódico*, si  $\mathcal{T}_t(x)$  es  $w^*$ -convergente para cada  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Es claro que si  $\mathcal{T}$  es ergódico entonces también es ergódico en media y sus  $w^*$ -límites coinciden. Además,  $\mathcal{T}$  es ergódico si y sólo si existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{*t}(\omega)$  en el sentido débil en el predual de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  para todo  $\omega$ . Como ya hemos mencionado la ergodicidad de SMCs tiene un estrecho nexo con esperanzas condicionales sobre los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \{x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \mathcal{T}_t(x) = x \text{ para todo } t \geq 0\}$$

y

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}_*) = \{\omega \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})_*; \mathcal{T}_{*t}(\omega) = \omega \text{ para todo } t \geq 0\}$$

**Proposición 1.5.1.** (a) Para todo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  el límite  $w^*$  de cualquier red

$$\left\{ \frac{1}{t_\beta} \int_0^{t_\beta} \mathcal{T}_s(x) ds \right\}_\beta,$$

con  $t_\beta \rightarrow \infty$ , pertenece a  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ ;

(b) Para todo estado  $\omega$  el límite débil (respectivamente  $w^*$ ) en el predual de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  de cualquier red

$$\left\{ \frac{1}{t_\beta} \int_0^{t_\beta} \mathcal{T}_{*s}(\omega) ds \right\}_\beta,$$

con  $t_\beta \rightarrow \infty$ , pertenece a  $\mathcal{F}(\mathcal{T}_*)$  (respectivamente  $\mathcal{F}(\mathcal{T}^*)$ ).

La demostración puede ser consultada por ejemplo en [42], proposición 2.2.

A continuación planteamos un teorema y un corolario que nos muestra la relación explícita entre ergodicidad y la existencia de una esperanza condicional que proyecta sobre  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ . Las pruebas de estos dos resultados pueden ser consultadas en [69], teorema 3.13 y corolario 3.15.

**Teorema 1.5.2.** Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a)  $\mathcal{T}$  es ergódico en media;
- (b) la red  $(\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \mathcal{T}_s(x) ds)_{\lambda > 0}$  es  $w^*$  convergente para cada  $x$  cuando  $\lambda \rightarrow 0$ ;
- (c) existe  $\mathcal{E} \in \overline{\text{co}\{\mathcal{T}_t\}_t}^s$  tal que  $\mathcal{E}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{E} = \mathcal{E}$  para todo  $\mathcal{R} \in \overline{\text{co}\{\mathcal{T}_t\}_t}^s$ ;
- (d) Existe una proyección lineal  $w^*$ -continua  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$  tal que  $\mathcal{E}\mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t\mathcal{E} = \mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}x \in \overline{\text{co}\{\mathcal{T}_t x\}_t}^{w^*}$  para todo  $x$ .
- (e)  $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{T}_{*s}(\omega) ds$  existe en el predual para cada  $\omega$ ;

Si alguna de las anteriores condiciones se cumple, entonces

$$\mathcal{E}(x) = w^* - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{T}_s(x) ds.$$

**Corolario 1.5.3.** Si  $\mathcal{T}$  es ergódico en media, entonces

$$\mathcal{E}(x) = w^* - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{T}_s(x) ds$$

satisface las siguientes propiedades:

- (a)  $\mathcal{E} : \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{T})$  es lineal,  $w^*$ -continua y completamente positiva;
- (b)  $\mathcal{E}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ ;
- (c)  $\mathcal{E} \mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t \mathcal{E} = \mathcal{E}$  para todo  $t \geq 0$ .

Además, si existe un estado fiel invariante en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , entonces

- (d)  $\mathcal{E}(a\mathcal{E}(b)) = \mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b)$  para todo  $a, b \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . Es decir,  $\mathcal{E}$  es una esperanza condicional y  $\mathcal{E}$  es la única que cumple con las afirmaciones (a)-(d). En particular,  $\mathcal{E}$  satisface (d) si y sólo si  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$  es un álgebra.

El siguiente conjunto será de importancia en el capítulo 3 de la tesis:

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \{x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \mathcal{T}_t(x^*x) = \mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(x), \mathcal{T}_t(xx^*) = \mathcal{T}_t(x)\mathcal{T}_t(x^*), \forall t \geq 0\}.$$

Aquí lo relacionamos con resultado de ergodicidad dado por Frigerio:

**Teorema 1.5.4.** Sea  $\mathcal{T}$  un SMC. Si existe un estado normal, fiel e invariante de  $\mathcal{T}$ , entonces  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{F}(\mathcal{T})$  implica

$$w^* - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{T}_t(x) = \mathcal{E}(x) \text{ para todo } x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}),$$

donde  $\mathcal{E}$  es la esperanza condicional definida en 1.5.3.

La prueba de este teorema es encontrada en el teorema 3.1 de [48]. Además este resultado de Frigerio se cumple con la hipótesis menos restrictiva de suponer  $\mathcal{T}$  SMC  $w^*$ -continuo.

Estos resultados también se pueden relacionar con la forma GKSL del generador tal como se muestran en [43], [44],[42], [35] entre otros. Este tipo resultados serán mencionados y usados en el capítulo 3 de esta tesis.

## 1.6. Condiciones de balance detallado

Los estados de equilibrio son caracterizados por condiciones de balance detallado, por esta razón, el fenómeno de no equilibrio es relacionado con esta noción. En esta sección discutimos sobre la definición matemática y principalmente nos guiamos por [40]. Cabe notar que existe una literatura bastante amplia sobre el

tema, sin embargo, si se desea hacer una revisión más profunda acerca de este tema más acorde a la estructura de este trabajo, recomendamos la visión más moderna de los trabajos de Fagnola-Umanità ([47], [46], [45], por ejemplo) y las referencias contenidas en estos trabajos.

La noción de balance detallado que manejaremos aquí es una extensión no conmutativa de la que se emplea en probabilidad clásica, por esta razón empezamos hablando del caso clásico.

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida con  $\mu$  medida  $\sigma$ -finita y sea  $T = (T_t)_{t \geq 0}$  un semigrupo de Markov clásico  $w^*$ -continuo formado por funciones lineales acotadas sobre  $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ .  $T$  es el semigrupo dual de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo sobre el espacio predual  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  denotado por  $T_*$ . Supongamos que  $T$  admite una densidad de probabilidad  $\pi$  la cual es invariante por  $T$  (es decir,  $\pi$  es una función no negativa de norma uno en  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  tal que  $T_{*t}(\pi) = \pi$  para  $t \geq 0$ ) anulándose únicamente en elementos de  $\Omega$  que tengan medida nula. Entonces es bien sabido que la forma sesquilineal

$$(f, g) = \int_{\Omega} \overline{f} g \pi d\mu$$

define un producto escalar sobre  $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  que denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ . Si denotamos por  $\tilde{T}_t$  el operador adjunto de  $T_t$  con respecto a este producto escalar, es fácil ver que

$$\tilde{T}_t(g) = \pi^{-1} T_{*t}(\pi g) \text{ para todo } t \geq 0 \text{ y para todo } g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu).$$

En efecto, si  $\pi g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , como  $\pi$  es invariante bajo  $T_*$  entonces

$$|\tilde{T}_t(g)| \leq \pi^{-1} T_{*t}(\pi) \|g\|_\infty = \|g\|_\infty,$$

por lo tanto  $\tilde{T}_t$  es un operador acotado bien definido en  $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ . Además

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}_t(g), f \rangle_\pi &= \int_{\Omega} \overline{\tilde{T}_t(g)} f \pi d\mu = \int_{\Omega} \overline{\pi^{-1} T_{*t}(\pi g)} f \pi d\mu \\ &= \int_{\Omega} T_{*t}(\pi \overline{g}) f d\mu = \int_{\Omega} (\pi \overline{g}) T_t(f) d\mu = \langle g, T_t(f) \rangle_\pi \end{aligned}$$

para todo  $f, g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ . Claramente la aplicación  $\tilde{T}_t$  también es positiva, entonces  $\tilde{T} = (\tilde{T}_t)_{t \geq 0}$  es un semigrupo  $w^*$ -continuo de aplicaciones positivas acotadas en  $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ .

El semigrupo  $\tilde{T}$  es Markov pues  $\tilde{T}_t(\mathbf{1}) = \pi^{-1} T_{*t}(\pi) = \mathbf{1}$ .

**Definición 1.6.1.** Diremos que  $T$  satisface la *condición de balance detallado clásica* si cada operador  $T_t$  es autoadjunto con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ , es decir,  $\tilde{T}_t = T_t$ .

Entonces  $T$  satisface la condición de balance detallado clásica si y sólo si para todo  $t \geq 0$

$$T_t(f) = \pi^{-1} T_{*t}(\pi f). \quad (1.6.1)$$

*Nota 1.6.1.* Balance detallado es equivalente a reversibilidad en el contexto de cadenas de Markov clásicas. En efecto, si asumimos por ejemplo (por simplicidad)  $\Omega = \{1, \dots, d\}$  con la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  igual al conjunto de partes de  $\Omega$ , la medida  $\mu$  como la medida de conteo y además con un semigrupo de Markov al cual le asociamos una matriz de tasas de transición  $(q_{jk})_{1 \leq j, k \leq d}$  definida por

$$q_{jk} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (T_t 1_{\{k\}} - 1_{\{k\}})(j),$$

siendo  $1_{\{k\}}$  la función indicatriz del conjunto  $\{k\}$ . Denotando  $(\tilde{q}_{jk})_{1 \leq j, k \leq d}$  la matriz de tasa de transición del semigrupo de Markov  $(\tilde{T}_t)_{t \geq 0}$ , se sigue inmediatamente de la definición que (1.6.1) es equivalente a la condición  $\pi_j q_{jk} = \pi_k q_{kj}$  para todo  $j, k \in \Omega$ . Esta condición es conocida como *reversibilidad*, la cual es también conocida en cadenas de Markov a tiempo discreto.

En el caso cuántico, dada su naturaleza no conmutativa se tiene que varias definiciones de condiciones de balance detallado cuántico (BDC) existen en la literatura. Al parecer, históricamente, la primera fue trabajada por Agarwal ( ver [8] ) y posteriormente extendida por Majewski ( ver [54] ), esta definición involucra una operación  $\Theta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  de tal forma que si  $a, b \in \mathcal{A}$  entonces:

- (a)  $\Theta(a^*) = \Theta(a)^*$ ,
- (b)  $\Theta(ab) = \Theta(b)\Theta(a)$ ,
- (c)  $\Theta^2(a) = a$ .

En este contexto, un SMC  $\mathcal{T}$  satisface la condición de BDC de Agarwal-Majewski con respecto al estado  $\omega$  y al operador reversante  $\Theta$ , si

$$\omega(a \mathcal{T}_t(b)) = \omega(\Theta(b) \mathcal{T}_t(\Theta(a))) \quad \text{para todo } a, b \in \mathcal{A}.$$

Si el estado  $\omega$  es invariante bajo el operador reversante ( $\omega(\Theta(a)) = \omega(a)$  para todo  $a \in \mathcal{A}$ ) entonces la condición BDC de Agarwal-Majewski es equivalente a

$$\omega(a \mathcal{T}_t(b)) = \omega((\Theta \circ \mathcal{T}_t \circ \Theta)(a)b) \quad \text{para todo } a, b \in \mathcal{A}. \quad (1.6.2)$$

En consecuencia, si  $\omega$  es fiel e invariante bajo  $\Theta$ , la igualdad (1.6.2) significa que bajo el producto interno definido por  $\omega$  la aplicación  $\mathcal{T}_t$  admite aplicaciones duales coincidiendo con  $\Theta \circ \mathcal{T}_t \circ \Theta$  para todo  $t \geq 0$ ; en particular las aplicaciones duales deben ser positivas dado que  $\Theta$  preserva la positividad.

Si  $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , la elección canónica para  $\Theta_\theta$  es dada por  $\Theta_\theta(a) = \theta a^* \theta$  donde  $\theta$  es definida sobre una base ortonormal fijada  $(e_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathfrak{h}$  como

$$\theta \left( \sum_{n \geq 0} u_n e_n \right) = \sum_{n \geq 0} \overline{u_n} e_n.$$

En este caso, vemos que  $\theta^2 = 1$  y  $\langle \theta v, \theta u \rangle = \langle u, v \rangle$  para todo  $u, v \in \mathfrak{h}$  (es decir,  $\theta$  es una involución y un operador antiunitario). Además, si  $\omega$  es invariante bajo  $\theta$  y un estado normal es representado por  $\rho \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{h})$  entonces

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho a) &= \text{tr}(\rho(\Theta_\theta(a))) = \text{tr}(\rho \theta a^* \theta) = \sum_n \langle e_n, \rho \theta a^* \theta e_n \rangle \\ &= \sum_n \langle \theta \rho \theta a^*(\theta e_n), (\theta e_n) \rangle = \text{tr}(\theta \rho \theta a) \end{aligned}$$

para todo  $a \in \mathcal{A}$ , entonces  $\rho = \theta \rho \theta$ , es decir,  $\theta$  conmuta con  $\rho$ . Es fácil ver que si  $\theta$  conmuta con  $\rho$  entonces  $\omega$  es invariante bajo  $\Theta_\theta$ . Por lo tanto obtenemos:

**Proposición 1.6.1.** *Si  $\omega(\cdot) = \text{tr}(\rho \cdot)$  es un estado en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ,  $\omega$  es invariante bajo la operación reversante canónica  $\Theta_\theta$  si y sólo si  $\theta$  conmuta con  $\rho$ .*

La condición BDC más popular es debida a Alicki [10], [11] y Kossakowski, Frigerio, Gorini, Verri [53]. En este caso, BDC se cumple si existe un SMC dual  $\widetilde{\mathcal{T}} = (\widetilde{\mathcal{T}}_t)_{t \geq 0}$  (GNS-dual) en  $\mathcal{A}$  tal que  $\omega(a \mathcal{T}_t(b)) = \omega(\widetilde{\mathcal{T}}_t(a)b)$  y la diferencia de generadores  $\mathcal{L}$  y  $\widetilde{\mathcal{L}}$  es una derivación.

Cuando esta condición se cumple, todas las aplicaciones positivas  $\mathcal{T}_t$  admiten aplicaciones duales positivas con respecto al producto interno definido por la forma bilineal  $(a, b) \rightarrow \omega(ab)$ , entonces todas las aplicaciones  $\mathcal{T}_t$  deben conmutar con el grupo modular  $(\sigma_t^\omega)_{t \in \mathbb{R}}$  asociado con el par  $(\mathcal{A}, \omega)$  (ver Prop. 2,1 en [53], Prop. 5 en [55]).

Esta restricción algebraica es evitable, si consideramos la forma bilineal

$$(a, b) \rightarrow \omega(\sigma_{i/2}(a)b)$$

introducida por Petz (ver [62]) entonces podemos definir un SMC dual (KMS-dual), también cuando las aplicaciones  $\mathcal{T}_t$  no conmutan con el grupo modular (ver [27], [51]).

Las condiciones BDC que surgen cuando consideramos KMS-duales en vez de GNS-duales son llamadas *estándar*:

**Definición 1.6.2.** Sea  $\mathcal{T}$  un SMC con SMC dual  $\mathcal{T}'$  satisfaciendo

$$\omega(\sigma_{i/2}(a) \mathcal{T}_t(b)) = \omega(\sigma_{i/2}(\mathcal{T}'_t(a))b) \text{ para todo } a, b \in \mathcal{A}, t \geq 0.$$

El semigrupo  $\mathcal{T}$  satisface:

- (a) La condición de balance detallado cuántica estándar con respecto a la operación reversante  $\Theta$  (BDCE- $\Theta$ ), si  $\mathcal{T}'_t = \Theta \circ \mathcal{T}_t \circ \Theta$  para todo  $t \geq 0$ ,
- (b) La condición de balance detallado cuántica estándar (BDCE), si la diferencia de generadores  $\mathcal{L} - \mathcal{L}'$  de  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  es una derivación densamente definida.

Nos concentraremos en el caso  $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  y todos los estados serán asumidos normales e identificados con sus densidades. Entonces  $\omega(x) = \text{tr}(\rho x)$  y  $\sigma_t(x) = \rho^t x \rho^{-t}$ . En consecuencia, la definición 1.6.2 se lee

**Definición 1.6.3.** Sea  $\mathcal{T}$  un SMC en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  con un SMC dual  $\mathcal{T}'$  que cumple

$$\text{tr}(\rho^{1/2} x \rho^{1/2} \mathcal{T}_t(y)) = \text{tr}(\rho^{1/2} \mathcal{T}'_t(x) \rho^{1/2} y).$$

El semigrupo  $\mathcal{T}$  satisface:

- (a) La condición de balance detallado cuántica estándar con respecto a la operación reversante  $\Theta$  (BDCE- $\Theta$ ), si

$$\text{tr}(\rho^{1/2} \theta x^* \theta \rho^{1/2} \mathcal{T}_t(y)) = \text{tr}(\rho^{1/2} \theta \mathcal{T}_t(x^*) \theta \rho^{1/2} y)$$

para todo  $x, y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  y para todo  $t \geq 0$ ,

- (b) La condición de balance detallado cuántica estándar (BDCE), si existe un operador autoadjunto  $K$  tal que

$$\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}'(x) = 2i[K, x],$$

para todo  $x \in \text{Dom}(K)$ . Donde  $\mathcal{L}$  es el generador de  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{L}'$  es el generador de  $\mathcal{T}'$ , y  $\text{Dom}(K)$  es denso en  $\mathfrak{h}$ .

En este caso, la condición BDCE coincide con la condición de Agarwal-Majewski y Alicki-Gorini-Kossakowski-Frigerio-Verri respectivamente cuando el SMC  $\mathcal{T}$  conmuta con el grupo modular  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$  asociado con el par  $(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}), \rho)$  (ver, [27], [55], [47], [46]).

Supondremos adicionalmente que la aplicación canónica  $\Theta_\theta$  será una operación reversante con respecto a alguna base tal que dado un estado fiel invariante  $\rho$  entonces  $\rho$  conmuta con  $\theta$ . Un proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt muestra que siempre es posible encontrar dicha base ortonormal de  $\mathfrak{h}$  conformada de vectores propios de  $\rho$  que son también  $\theta$ -invariantes (ver proposición 7 en [40]).

Las siguientes afirmaciones describen caracterizaciones de SMCs continuos en norma satisfaciendo condiciones de BDC estándar (las demostraciones pueden ser consultadas en [46], teorema 15, 18 y nota 4).

**Teorema 1.6.2.** *Un SMC  $\mathcal{F}$  satisface la condición de BDCE si y sólo si para cualquier representación especial GKSL del generador  $\mathcal{L}$  por medio de los operadores  $G, L_k$  existe una matriz unitaria  $(u_{mk})_{mk}$  en  $\mathfrak{K}$  la cual es también simétrica (es decir,  $u_{mk} = u_{km}$  para todo  $m, k$ ) tal que, para todo  $s \geq 1$ ,*

$$\rho^{1/2} L_s^* = \sum_k u_{sk} L_k \rho^{1/2}.$$

**Teorema 1.6.3.** *Un SMC  $\mathcal{F}$  satisface la condición BDCE- $\theta$  si y sólo si para cualquier representación especial GKSL del generador  $\mathcal{L}$  por medio de los operadores  $G, L_k$  existe una matriz unitaria  $(u_{mk})_{mk}$  en  $\mathfrak{K}$  la cual es también simétrica tal que:*

- (a)  $\rho^{1/2} \theta G^* \theta = G \rho^{1/2}$ ,
- (b)  $\rho^{1/2} L_s^* = \sum_k u_{sk} L_k \rho^{1/2}$  para todo  $s \geq 1$ .

*Nota 1.6.2.* La condición BDCE- $\theta$  es más restrictiva que la condición BDCE porque esta involucra también la identidad  $\rho^{1/2} \theta G^* \theta = G \rho^{1/2}$ ; pero si  $\theta G^* \theta = G$  and  $\rho$  conmutan con  $G$  entonces ambas condiciones son equivalentes. Esta última suposición es satisfecha por muchos SMCs como por ejemplo, aquellos derivados del límite de acoplamiento débil (o límite estocástico) (ver [6], [34]).

**Teorema 1.6.4.** *Sea  $\mathcal{F}$  un SMC con generador  $\mathcal{L}$  teniendo representación especial GKSL por medio de los operadores  $G, L_k$ . Asumamos que*

$$\rho^{1/2} L_s^* = \sum_k u_{sk} L_k \rho^{1/2}$$

*para todo  $s \geq 1$ , y para una matriz unitaria autoadjunta  $(u_{mk})_{mk}$  en  $\mathfrak{K}$ . Entonces*

$$\mathcal{L}'(x) - (\Theta_\theta \circ \mathcal{L} \circ \Theta_\theta)(x) = i[K, x]$$

*con  $K$  autoadjunto conmutando con  $\rho$ .*

La demostración de este teorema puede ser consultada en [40]. Este resultado muestra que únicamente la condición (b) en 1.6.3, implica que la diferencia  $\mathcal{L}' - (\Theta_\theta \circ \mathcal{L} \circ \Theta_\theta)$  es una derivación y clarifica diferencias entre los teoremas 1.6.2 y 1.6.3.

## Capítulo 2

# Una distancia tipo Wasserstein para medir desviación del equilibrio en SMCs

En este capítulo introducimos una distancia  $W_d$  entre estados definidos en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , con el fin de medir desviaciones del equilibrio usando una tasa  $\mathbf{pe}_w(\cdot, \cdot)$ . La restricción de  $W_d$  a la subálgebra diagonal de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  coincide con la distancia de Wasserstein usada en transporte óptimo (ver [71] para la teoría de transporte óptimo). Demostraremos que esta tasa es compatible con condiciones de balance detallado, es decir:

(EQ) dado un SMC  $\mathcal{T}$ , un estado  $\rho$  normal e invariante bajo  $\mathcal{T}$  satisface condiciones de balance detallado si y sólo si  $\mathbf{pe}_w(\mathcal{T}, \rho) = 0$ .

Existe otra tasa que discrimina cuando un estado cumple condiciones de balance detallado o no, llamada tasa de producción de entropía  $\mathbf{pe}(\cdot, \cdot)$ , esta tasa es definida por Fagnola-Rebolledo en [40] y [41]. Dicha tasa es definida usando la entropía relativa y se tiene que el estado  $\rho$  normal e invariante bajo  $\mathcal{T}$  satisface condiciones de balance detallado si y sólo si  $\mathbf{pe}(\mathcal{T}, \rho) = 0$ , por lo tanto demostrar (EQ) es equivalente a demostrar que  $\mathbf{pe}_w(\mathcal{T}, \rho) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{pe}(\mathcal{T}, \rho) = 0$ . Como un estado es de equilibrio si y sólo si  $\mathbf{pe}(\mathcal{T}, \rho) = 0$  entonces demostrar (EQ) es equivalente a demostrar que un estado es de equilibrio si y sólo si  $\mathbf{pe}(\mathcal{T}, \rho) = 0$  si y solo si  $\mathbf{pe}_w(\mathcal{T}, \rho) = 0$ . Es decir, demostrando (EQ) demostraremos que estas dos tasas discriminan en forma equivalente cuando un estado describe equilibrio o desequilibrio y por lo tanto mostramos otra forma de caracterizar el equilibrio y el desequilibrio en SMCs. En particular si  $\mathbf{pe}_w(\mathcal{T}, \rho) \neq 0$  estamos midiendo cuan lejos se encuentra un estado de describir el equilibrio y por lo tanto  $\mathbf{pe}_w(\mathcal{T}, \rho)$  mide desviación del equilibrio.

Se puede ver fácilmente que la entropía relativa es una función definida entre dos estados en el predual de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , la cual es una separación, no una distancia, mientras que la tasa que definimos en este capítulo está efectivamente definida en términos de una distancia  $W_d$ . Esto muestra que nuestra tasa matemáticamente es distinta a la tasa de producción de entropía; pero que miden en forma equivalente el desequilibrio, motivados por este hecho llamamos a la tasa  $\text{pe}_{W_d}(\mathcal{T}, \rho)$  tasa de producción de entropía con respecto a  $W_d$  ó en forma abreviada  $W_d$ -tasa de producción de entropía.

Para un mejor entendimiento de este capítulo recomendamos repasar el material sobre condiciones de balance detallado en la sección 1.6. El capítulo es organizado de la siguiente forma: en la sección 2 revisamos algunos elementos sobre producción de entropía y condición de balance detallado. Definimos una distancia tipo Wasserstein en la sección 3 y mostramos sus propiedades principales, en particular, mostramos como esta puede ser aplicada a medir desviaciones del equilibrio usando una tasa. Finalmente, en la sección 4, mostramos dos ejemplos: un sistema cuántico con  $m$  niveles ( $m$  es un número natural finito tal que  $m \geq 3$ ) y semigrupos markovianos cuánticos genéricos.

En este capítulo nos restringiremos a SMCs continuos en norma para evitar hipótesis técnicas.

## 2.1. Producción de entropía para SMCs

Fagnola y Rebolledo definieron el concepto de producción de entropía para SMCs (ver [40]), el cual es una extensión no conmutativa del caso clásico (ver [41]) y probaron que un estado invariante con producción de entropía nula es caracterizado por condiciones de balance detallado estándar (definición 1.5.2) entonces la producción de entropía mide no reversibilidad y por lo tanto no equilibrio.

En esta sección, repasaremos la noción de producción de entropía en SMCs. Asumiremos que es dado un SMC con un estado fiel e invariante con respecto al semigrupo, el cual es definido en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . La producción de entropía será definida en términos de la entropía relativa de estados de dos puntos forward y backward.

Sean  $V$  un conjunto contable y  $(e_n)_{n \in V}$  una base ortonormal de  $\mathfrak{h}$  la cual da una representación diagonal del estado  $\mathcal{T}$ -invariante  $\rho$ .

**Definición 2.1.1.** El estado de dos puntos forward es definido por

$$\vec{\Omega}_t(x \otimes y) = \text{tr} \left( \rho^{1/2} \theta x^* \theta \rho^{1/2} \mathcal{T}_t(y) \right), \quad x, y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$$

y el estado de dos puntos backward es dado por

$$\overleftarrow{\Omega}_t(x \otimes y) = \text{tr}(\rho^{1/2} \theta \mathcal{T}_t(x^*) \theta \rho^{1/2} y), \quad x, y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}).$$

Es claro de la definición anterior que  $\mathcal{T}$  satisface la condición BDCE- $\theta$  si y sólo si  $\overrightarrow{\Omega}_t = \overleftarrow{\Omega}_t$  para todo  $t \geq 0$ .

**Proposición 2.1.1.** Sea  $\rho = \sum_j \rho_j |e_j\rangle\langle e_j|$  una descomposición espectral de  $\rho$ .

(1) Los funcionales  $\overrightarrow{\Omega}_t$  y  $\overleftarrow{\Omega}_t$  son estados normales en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  con densidades

$$\overrightarrow{D}_t = (I \otimes \mathcal{T}_{*t})(D) \text{ y } \overleftarrow{D}_t = (\mathcal{T}_{*t} \otimes I)(D) \text{ respectivamente,} \quad (2.1.1)$$

donde  $D = |r\rangle\langle r|$  con  $r = \sum_j \rho_j^{1/2} \theta e_j \otimes e_j$ .

(2) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a)  $\overrightarrow{\Omega}_t = \overleftarrow{\Omega}_t$ .

(b)  $\frac{d}{dt} \overrightarrow{D}_t|_{t=0} = (I \otimes \mathcal{L}_*)(D) = \frac{d}{dt} \overleftarrow{D}_t|_{t=0} = (\mathcal{L}_* \otimes I)(D)$ .

*Demostración.* (1) Es claro que tanto  $\overrightarrow{\Omega}_t$  como  $\overleftarrow{\Omega}_t$  son funcionales lineales normalizados en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  puesto que  $\theta(za)^* \theta = \theta \bar{z} a^* \theta = z \theta a^* \theta$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$  y todo  $a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . Además, si  $x, y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  tenemos

$$\begin{aligned} \langle r, (a \otimes b) r \rangle &= \sum_{j,k} (\rho_j \rho_k)^{1/2} \langle \theta e_j \otimes e_j, (a \otimes b) \theta e_k \otimes e_k \rangle \\ &= \sum_{j,k} (\rho_j \rho_k)^{1/2} \langle \theta e_j, a \theta e_k \rangle \langle e_j, b e_k \rangle \\ &= \sum_{j,k} (\rho_j \rho_k)^{1/2} \langle \theta a \theta e_k, e_j \rangle \langle e_j, b e_k \rangle \\ &= \sum_k (\rho_k)^{1/2} \langle \theta a \theta e_k, \rho^{1/2} b e_k \rangle \\ &= \text{tr}(\rho^{1/2} \theta a^* \theta \rho^{1/2} b). \end{aligned}$$

Entonces

$$\overrightarrow{\Omega}_0(a \otimes b) = \text{tr}((I \otimes \mathcal{T}_{*0})(D)(a \otimes b)) = \text{tr}((\mathcal{T}_{*0} \otimes I)(D)(a \otimes b)) = \overleftarrow{\Omega}_0(a \otimes b).$$

Es inmediato ver que

$$\overrightarrow{\Omega}_t(a \otimes b) = \overrightarrow{\Omega}_0(a \otimes \mathcal{T}_t(b)) \text{ y } \overleftarrow{\Omega}_t(a \otimes b) = \overleftarrow{\Omega}_0(\mathcal{T}_t(a) \otimes b).$$

La afirmación 2.1.1(1), se sigue de esta última igualdad. En particular  $\overrightarrow{\Omega}_t$  y  $\overleftarrow{\Omega}_t$  son funcionales normales y positivos.

(2) Claramente (a) implica (b) diferenciando en la variable  $t$  y luego evaluando en  $t = 0$ . Recíprocamente, si (b) se cumple, entonces, puesto que  $1 \otimes \mathcal{L}_*$  y  $\mathcal{L}_* \otimes 1$  conmutan, se tiene

$$(1 \otimes \mathcal{L}_*)^2(D) = (1 \otimes \mathcal{L}_*)(\mathcal{L}_* \otimes 1)(D) = (\mathcal{L}_* \otimes 1)(1 \otimes \mathcal{L}_*)(D) = (\mathcal{L}_* \otimes 1)^2(D).$$

Por lo tanto, por inducción, se sigue que  $(1 \otimes \mathcal{L}_*)^n(D) = (\mathcal{L}_* \otimes 1)^n(D)$ , para todo  $n \geq 1$ , entonces

$$\vec{D}_t = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (1 \otimes \mathcal{L}_*)^n(D) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (\mathcal{L}_* \otimes 1)^n(D) = \overleftarrow{D}_t,$$

para todo  $t \geq 0$  y (a) es demostrado.  $\square$

Los operadores  $\theta x^* \theta$  pueden ser vistos como elementos del álgebra opuesta  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})^\circ$  de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . En efecto, recordando que  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})^\circ$  esta en correspondencia inyectiva con  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  como un conjunto via la identificación trivial  $x \rightarrow x^\circ$ , teniendo la misma estructura de espacio vectorial, la misma involución y norma pero con producto  $\odot$  definido por  $x^\circ \odot y^\circ = (yx)^\circ$ . Entonces la aplicación lineal  $\Theta_\theta : \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{h})^\circ$  definida por  $x \rightarrow \theta x^* \theta$  es un \*-isomorfismo (sobreyectivo) de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})^\circ$  puesto que

$$\Theta_\theta(x) \odot \Theta_\theta(y) = \theta x^* \theta \odot \theta y^* \theta = \theta y^* \theta \theta x^* \theta = \theta (xy)^* \theta = \Theta_\theta(xy).$$

Claramente  $\Theta_\theta \otimes 1 : \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{h})^\circ \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  es un \*-isomorfismo. Esta observación es útil para definir producción de entropía como un índice que mide desviación de la condición de balance detallado estándar sin operación reversante. En efecto, se puede definir el estado  $\vec{\Omega}'_0 = \overleftarrow{\Omega}'_0$  en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})^\circ \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  por

$$\vec{\Omega}'_0(x \otimes y) = \text{tr}(\rho^{1/2} x \rho^{1/2} y).$$

Por lo tanto, podemos definir la producción de entropía otra vez considerando la entropía relativa de  $\vec{D}_t$  y  $\overleftarrow{D}_t$  pero ahora visto como densidades de estados en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})^\circ \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ .

Denotamos la traza sobre  $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$  por  $\text{Tr}(\cdot)$ . La entropía relativa de  $\vec{\Omega}_t$  con respecto a  $\overleftarrow{\Omega}_t$  es dada por

$$S(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t) = \text{Tr} \left( \vec{D}_t \left( \log \vec{D}_t - \log \overleftarrow{D}_t \right) \right),$$

si el soporte de  $\vec{\Omega}_t$  esta incluido en el soporte de  $\overleftarrow{\Omega}_t$ , en caso contrario

$$S(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t) = +\infty.$$

**Definición 2.1.2.** La tasa de producción de entropía de un SMC  $\mathcal{T}$  y un estado invariante  $\rho$  es definido por

$$\text{pe}(\mathcal{T}, \rho) = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t)}{t}.$$

Es claro que  $\text{pe}(\mathcal{T}, \rho) \geq 0$  y entonces  $\text{pe}(\mathcal{T}, \rho) = 0$  si y sólo si la condición BDCE- $\theta$  (o la condición de BDCE, viendo  $\vec{\Omega}_t$  y  $\overleftarrow{\Omega}_t$  como estados en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})^\circ \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ) se cumple.

**Teorema 2.1.2.** *Asumamos todas las suposiciones previas dadas en esta sección. Sea  $\mathcal{T}$  un SMC continuo en norma definido en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  con un estado normal, fiel e invariante  $\rho$ . Si el soporte de  $\vec{D}_t$  y el soporte de  $\overleftarrow{D}_t$  coinciden y son de dimensión finita entonces*

$$\text{pe}(\mathcal{T}, \rho) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \left( \vec{\Phi}_*(D) - \overleftarrow{\Phi}_*(D) \right) \left( \log \left( \vec{\Phi}_*(D) \right) - \log \left( \overleftarrow{\Phi}_*(D) \right) \right) \right),$$

donde

$$\vec{\Phi}_*(D) = \sum_k (1 \otimes L_k) D (1 \otimes L_k^*) \text{ y } \overleftarrow{\Phi}_*(D) = \sum_k (L_k \otimes 1) D (L_k^* \otimes 1)$$

con  $L_k$  operadores de una representación especial GKSL de  $\mathcal{L}$ .

Adicionalmente, si  $G$  es dado en la representación especial GKSL de  $\mathcal{L}$  tal que  $[\rho, G] = [\rho, \theta] = 0$  y  $\theta G^* \theta = G$  entonces  $\text{pe}(\mathcal{T}, \rho) = 0$  si y sólo si la condición BDCE- $\theta$  (o la condición de BDCE, viendo  $\vec{\Omega}_t$  y  $\overleftarrow{\Omega}_t$  como estados en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})^\circ \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ), se cumple.

Para una demostración ver teorema 5 en [40].

## 2.2. Distancia de Wasserstein y propiedades

Si  $\mathfrak{h}$  es un espacio de Hilbert de dimensión infinita definimos  $V = \mathbb{N}$  y si  $\mathfrak{h}$  es un espacio de Hilbert de dimensión  $m$  definimos  $V = \{1, \dots, m\}$ . Suponemos dado  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  un SMC en  $\mathfrak{h}$  con estado  $\rho$  normal  $\mathcal{T}$ -invariante y  $(e_n)_{n \in V}$  una base ortonormal de  $\mathfrak{h}$  la cual da una representación diagonal de  $\rho$ .

*Nota 2.2.1.* La distancia de Wasserstein clásica es definida por

$$w_d(\mu, \nu) = \inf_{\vartheta \in \Xi(\mu, \nu)} \int_{M \times M} d(m, n) d\vartheta(m, n)$$

donde  $(M, d)$  es un espacio metrico y  $\Xi(\mu, \nu)$  es el conjunto de medidas de probabilidad Borel  $\vartheta$  en  $M \times M$  tal que para todo subconjunto medible  $A, B \subseteq M$

$$\vartheta(A \times M) = \mu(A), \quad \vartheta(M \times B) = \nu(B).$$

Cuando  $M$  es un espacio separable y  $d$  es semicontinua inferiormente, el teorema de Kantorovich—Rubinstein plantea otra representación para la métrica de Wasserstein:

$$w_d(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_M f d(\mu - \nu); \quad f \in L_1(d|\mu - \nu|); \quad \|f\|_{Lip} \leq 1 \right\}$$

donde

$$\|f\|_{Lip} = \sup_{m \neq n} \frac{|f(n) - f(m)|}{d(m, n)}$$

(Para una prueba del teorema de Kantorovich—Rubinstein ver por ejemplo [36]).

La definición de distancia de Wasserstein en el caso cuántico es inspirada por la nota previa. Para establecer dicha definición nosotros **siempre supondremos que la distancia  $d$  cumple la siguiente condición:**

(D1)  $d : V \times V \rightarrow [0, +\infty)$  es una distancia donde para todo  $s \in V$  existe una constante  $c_s > 0$  tal que  $d(s, l) > c_s$  para todo  $s \neq l$ .

Nótese que si  $\mathfrak{h}$  es de dimensión finita entonces  $V$  es finito y por lo tanto cualquier distancia sobre  $V$  cumple la condición (D1).

**Definición 2.2.1.** La *distancia de Wasserstein cuántica* entre dos estados

$$\varphi_{\sigma_1}(\cdot) = \text{tr}(\sigma_1(\cdot)), \quad \varphi_{\sigma_2}(\cdot) = \text{tr}(\sigma_2(\cdot)) \quad \text{in } \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$$

es definida por:

$$W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) = \sup_{a \in \Upsilon_d} |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a)|$$

con

$$\Upsilon_d = \left\{ a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \quad \sup_{m, l \in V, m \neq l} \|\delta_{ml}(a)\| \leq 1 \right\},$$

$$\delta_{ml}^d(a) = \frac{1}{d(m, l)} [(|e_m\rangle\langle e_l| + |e_l\rangle\langle e_m|), a]$$

y  $d$  una distancia definida en  $V$ .

Notamos que la definición de  $W_d$  depende no solamente de la distancia  $d$  sino además de la base  $(e_k)_{k \in V}$  del espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ . Como ya lo hemos dicho anteriormente, suponemos dado un SMC  $\mathcal{S}_t$  y un estado  $\rho$  normal, fiel e invariante para el semigrupo  $\mathcal{S}_t$ , la base que define a  $W_d$  será escogida de tal forma que  $(e_k)_{k \in V}$  diagonalice a  $\rho$ .

Denotamos  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty]$  y

$$\|a\|_{LIP_d} := \sup_{m, l \in V, m \neq l} \|\delta_{ml}^d(a)\| \quad \text{para todo } a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}).$$

*Nota 2.2.2.* Para todo  $s, t \in V$  se tiene que  $0 < \| |e_s\rangle\langle e_t| \|_{LIP_d} < \infty$ . En efecto, nótese que para todo  $s, t \in V$  se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_{ml}^d(|e_s\rangle\langle e_t|) &= \frac{1}{d(m, l)} (|e_m\rangle\langle e_t| |e_s\rangle\langle e_t| + |e_t\rangle\langle e_m| |e_s\rangle\langle e_t| - |e_s\rangle\langle e_t| |e_m\rangle\langle e_t|) \\ &\quad - \frac{1}{d(m, l)} |e_s\rangle\langle e_t| |e_l\rangle\langle e_m| \\ &= \frac{1}{d(m, l)} (1_{\{l=s\}} |e_m\rangle\langle e_t| + 1_{\{m=s\}} |e_l\rangle\langle e_t| - 1_{\{t=m\}} |e_s\rangle\langle e_t| \\ &\quad - 1_{\{l=t\}} |e_s\rangle\langle e_m|) \end{aligned}$$

para todo  $m \neq l$  y donde  $1_A$  es la función indicatriz del conjunto  $A$ . Vemos que

$$1_{\{l=s\}} |e_m\rangle\langle e_t| + 1_{\{m=s\}} |e_l\rangle\langle e_t| - 1_{\{t=m\}} |e_s\rangle\langle e_t| - 1_{\{l=t\}} |e_s\rangle\langle e_m| \neq 0$$

pues  $m \neq l$  y por lo tanto  $0 < \| |e_s\rangle\langle e_t| \|_{LIP_d}$ . Además, como  $d$  satisface la suposición (D1) tenemos que para todo  $s, t \in V$

$$\| |e_s\rangle\langle e_t| \|_{LIP_d} \leq \frac{2}{\min\{c_s, c_t\}}$$

Por lo tanto  $0 < \| |e_s\rangle\langle e_t| \|_{LIP_d} < \infty$  para todo  $s, t \in V$ .

**Proposición 2.2.1.**  $W_d : \mathfrak{L}_1(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{L}_1(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathbb{R}^l$  con  $d$  cumpliendo la condición (D1) es efectivamente una distancia.

*Demostración.* Sean  $\rho_1, \rho_2$  estados arbitrarios. Es claro que

$$W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) = W_d(\varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_1}).$$

Además dado otro estado arbitrario  $\rho_3$ , usando las propiedades del supremo vemos que

$$\begin{aligned} W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) &= \sup_{a \in \Upsilon_d} |tr((\sigma_1 - \sigma_2)a)| \\ &\leq \sup_{a \in \Upsilon_d} |tr((\sigma_1 - \sigma_3)a)| + \sup_{a \in \Upsilon_d} |tr((\sigma_3 - \sigma_2)a)| \\ &= W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_3}) + W_d(\varphi_{\sigma_3}, \varphi_{\sigma_2}) \end{aligned}$$

También es claro de la definición que  $W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) \geq 0$ . Ahora, si

$$W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) = 0$$

entonces  $\sup_{a \in \Upsilon_d} |tr((\sigma_1 - \sigma_2)a)| = 0$ , es decir,  $tr((\sigma_1 - \sigma_2)a) = 0$  para todo  $a \in \Upsilon_d$ .

Usando la nota 2.2.2, tenemos que para todo  $s, t \in V$

$$\frac{1}{\| |e_s\rangle\langle e_t| \|_{LIP}} tr((\sigma_1 - \sigma_2)|e_s\rangle\langle e_t|) = 0,$$

lo cual equivale a decir para todo  $s, t \in V$   $\langle e_s, (\sigma_1 - \sigma_2)e_t \rangle = 0$  esto implica  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Por lo tanto  $W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) = 0$  implica  $\sigma_1 = \sigma_2$  entonces

$$W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) = 0 \text{ si y sólo si } \sigma_1 = \sigma_2.$$

□

Aunque no será de utilidad en este capítulo cabe notar que de la definición de  $W_d$  también se puede inferir fácilmente que esta distancia es convexa en cada argumento, es decir

**Proposición 2.2.2.** Sean  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  estados en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  entonces para todo  $t \in [0, 1]$  se tiene:

$$W_d(\varphi_{t\sigma_1+(1-t)\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}) \leq tW_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_3}) + (1-t)W_d(\varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3})$$

y

$$W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{t\sigma_2+(1-t)\sigma_3}) \leq tW_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) + (1-t)W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_3})$$

Su demostración es inmediata.

Otra propiedad que veremos en el capítulo 4 es que bajo ciertas condiciones en  $d$  se puede establecer desigualdades con la norma traza  $\|\cdot\|_1$ .

Volviendo a los intereses de este capítulo nosotros presentamos las siguientes álgebras las cuales serán de mucha importancia.

**Definición 2.2.2.** Sea  $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  o  $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . Entonces  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  es la subálgebra diagonal de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{D}_{off}(\mathcal{A})$  es el espacio de operadores sin diagonal, más precisamente el subespacio cerrado (en la topología débil \*) formado por  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  tales que  $\langle u_n, xu_n \rangle = 0$  para todo  $n$ , con  $(u_n)_{n \in V}$  base ortonormal.

Sea  $\mathcal{E} : \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  la aplicación con rango  $\mathcal{D}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}))$  definida por

$$\mathcal{E}(x) = \sum_j x_{jj} |e_j\rangle \langle e_j|, \quad (2.2.1)$$

por el teorema 1.4.4 vemos que  $\mathcal{E}$  es una esperanza condicional. Denotando  $\mathcal{E}_*$  la aplicación predual en los operadores clase traza con rango  $l_1(V)$  tenemos que

$$\mathcal{E}_*(\omega) = \sum_j \omega_{jj} |e_j\rangle \langle e_j|. \quad (2.2.2)$$

**Nota 2.2.3.** Si  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  entonces  $\mathcal{E}(x) = \sum_{s \in V} x(s) |e_s\rangle \langle e_s|$  donde  $x(s) \in \mathbb{C}$  y la convergencia de la suma es en la topología débil\*. Entonces

$$\begin{aligned} & \sup_{m, l \in V, m \neq l} \|\delta_{ml}^d(\mathcal{E}(x))\| \\ &= \sup_{m, l \in V, m \neq l} \frac{1}{d(m, l)} \|(x(l) - x(m)) |e_l\rangle \langle e_m| - (x(l) - x(m)) |e_m\rangle \langle e_l|\| \\ &= \sup_{m, l \in V, m \neq l} \frac{1}{d(m, l)} |x(l) - x(m)|. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\sup_{m,l \in V, m \neq l} \|\delta_{ml}^d(\mathcal{E}(x))\| \leq 1 \text{ si y sólo si } \|x(\cdot)\|_{Lip_d} \leq 1. \quad (2.2.3)$$

Sean  $\sigma_1, \sigma_2$  estados en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  entonces  $\mathcal{E}_*(\sigma_1), \mathcal{E}_*(\sigma_2)$  son estados diagonales con respecto a  $(e_j)_{j \in V}$  (es decir, medidas de probabilidad en  $V$ ), entonces

$$\begin{aligned} \text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)\mathcal{E}(x)) &= \text{tr}(\mathcal{E}_*(\sigma_1 - \sigma_2)\mathcal{E}(x)) = \sum_s x(s)(\sigma_1 - \sigma_2)(s) \\ &= \int_V x(\cdot) d(\sigma_1(\cdot) - \sigma_2(\cdot)). \end{aligned}$$

Usando la equivalencia (2.2.3) y la nota 2.2.1 se sigue que

$$\begin{aligned} |W_d(\mathcal{E}_*(\sigma_1), \mathcal{E}_*(\sigma_2))| &= \sup_{\gamma_d} |\text{tr}(\mathcal{E}_*(\sigma_1 - \sigma_2)a)| = \sup_{\gamma_d} |\text{tr}(\mathcal{E}_*(\sigma_1 - \sigma_2)\mathcal{E}(a))| \\ &= \sup_{\gamma_d \cap \mathcal{D}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}))} |\text{tr}(\mathcal{E}_*(\sigma_1 - \sigma_2)a)| \\ &= w_d(\mathcal{E}_*(\sigma_1(\cdot)), \mathcal{E}_*(\sigma_2(\cdot))) \end{aligned}$$

para toda pareja  $(\sigma_1, \sigma_2)$  de estados. Entonces la restricción de  $W_d$  a la subálgebra diagonal de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  coincide con la distancia de Wasserstein clásica  $w_d$ .

La distancia  $W_d$  es definida en estados de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  en forma similar a la definición previa; pero la acción del operador  $\delta$  es extendida a dos componentes es decir

$$\delta_{ml}^d(a) = \frac{1}{d(m,l)} [(|e_m\rangle\langle e_l| + |e_l\rangle\langle e_m|) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (|e_m\rangle\langle e_l| + |e_l\rangle\langle e_m|), a].$$

En el resto de este capítulo trabajaremos con la distancia  $W_d$  definida de esta última forma. A continuación planteamos un comentario y un lema con el cual demostraremos el teorema central de este capítulo.

Dado un estado normal y fiel  $\varphi$ , podemos definir la aplicación

$$\mathbb{E}_\varphi(x) = \Pi x \Pi + \frac{\varphi(\Pi^\perp x \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \Pi^\perp, \quad x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h}),$$

donde  $\Pi$  es una proyección unidimensional sobre  $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ . Usando el teorema 1.4.4, vemos que  $\mathbb{E}_\varphi$  es una esperanza condicional. Además se obtiene el siguiente resultado:

**Lema 2.2.3.** *Sea la esperanza condicional en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  definida por*

$$\mathbb{E}_\varphi(x) = \Pi x \Pi + \frac{\varphi(\Pi^\perp x \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \Pi^\perp, \quad x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h}),$$

donde  $\varphi$  es un estado normal y fiel. Además  $\Pi$  es una proyección unidimensional en  $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ . Entonces existe una constante  $c(\Pi, \varphi, d) > 0$  tal que

$$\sup_{x \in \Upsilon_d \cap B_0(1)} \left| \text{Tr} \left( (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) \mathbb{E}_\varphi(x) \right) \right| \leq c(\Pi, \varphi, d) W_d \left( \vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t \right),$$

con  $B_0(1) = \{x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \|x\| \leq 1\}$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \Upsilon_d \cap B_0(1)$  entonces

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left( (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) \mathbb{E}_\varphi(x) \right) &= \left[ \text{Tr}(\Pi x) - \frac{\varphi(\Pi^\perp x \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \right] \text{Tr} \left( \Pi (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) \right) \\ &\quad + \frac{\varphi(\Pi^\perp x \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \text{Tr}(\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t). \end{aligned}$$

Dado que  $\text{Tr} \vec{D}_t = \text{Tr} \overleftarrow{D}_t = 1$  entonces  $\text{Tr}(\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) = 0$  y por lo tanto el último término de la desigualdad anterior desaparece y entonces:

$$\text{Tr} \left( (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) \mathbb{E}_\varphi(x) \right) = \left[ \text{Tr}(\Pi x) - \frac{\varphi(\Pi^\perp x \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \right] \text{Tr} \left( \Pi (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) \right).$$

Usando las ideas de la nota 2.2.2 podemos probar que  $0 < \|\Pi\|_{LIP_d} < \infty$ , por lo tanto  $\frac{\Pi}{\|\Pi\|_{LIP_d}} \in \Upsilon_d$  y entonces

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left( (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) \mathbb{E}_\varphi(x) \right) &= \left[ \text{Tr}(\Pi x) - \frac{\varphi(\Pi^\perp x \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \right] \text{Tr} \left( \Pi (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) \right) \\ &\leq \left| \text{Tr} \left( \frac{\Pi}{\|\Pi\|_{LIP_d}} (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) \right) \right| \sup_{x \in \Upsilon_d \cap B_0(1)} \left( \|x\| + \frac{\|\varphi\| \|x\| \|\Pi^\perp\|^2}{\varphi(\Pi^\perp)} \right) \|\Pi\|_{LIP_d} \\ &\leq c(\Pi, \varphi, d) \sup_{x \in \Upsilon_d} \left| \text{Tr} \left( (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) x \right) \right| = c(\Pi, \varphi, d) W_d \left( \vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t \right) \end{aligned}$$

de esta última desigualdad se sigue la afirmación.  $\square$

**Definición 2.2.3.** La  $W_d$ -tasa de producción de entropía de una matriz densidad  $\rho$  es definida como

$$\text{pew}_d(\mathcal{T}, \rho) := \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{W_d \left( \vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t \right)}{t}$$

**Teorema 2.2.4.** Un semigrupo Markoviano cuántico  $\mathcal{T}$  tiene  $\text{pew}_d(\mathcal{T}, \rho) = 0$  si y sólo si  $\vec{\Omega}_t = \overleftarrow{\Omega}_t$  para todo  $t \geq 0$ . En particular  $\text{pew}_d(\mathcal{T}, \rho) = 0$  si y sólo si la condición BDCE- $\theta$  (o la condición BDCE viendo  $\vec{\Omega}_t$  y  $\overleftarrow{\Omega}_t$  como estados en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})^\circ \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ) se cumple.

*Demostración.* Es claro que si  $\vec{\Omega}_t = \overleftarrow{\Omega}_t$  para todo  $t \geq 0$  entonces  $W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  y por lo tanto  $\text{pe}_{W_d}(\mathcal{I}, \rho) = 0$ .

Supongamos ahora que  $\text{pe}_{W_d}(\mathcal{I}, \rho) = 0$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t)}{t} = 0.$$

Usando el lema 2.2.3, vemos que la anterior igualdad implica

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \sup_{a \in Y_d \cap B_0(1)} \left| \text{Tr} \left( (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) \mathbb{E}^\varphi(a) \right) \right| = 0. \quad (2.2.4)$$

Además, calculando fácilmente obtenemos:

$$\text{Tr} \left( \vec{D}_t \circ \mathbb{E}_\varphi(a) \right) = \vec{\lambda}_t \text{Tr}(\Pi(a)) + (1 - \vec{\lambda}_t) \frac{\varphi(\Pi^\perp a \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)},$$

$$\text{Tr} \left( \overleftarrow{D}_t \circ \mathbb{E}_\varphi(a) \right) (x) = \overleftarrow{\lambda}_t \text{Tr}(\Pi(a)) + (1 - \overleftarrow{\lambda}_t) \frac{\varphi(\Pi^\perp a \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)},$$

donde  $t \mapsto \vec{\lambda}_t = \text{tr}(\Pi \vec{D}_t)$ , y  $t \mapsto \overleftarrow{\lambda}_t = \text{tr}(\Pi \overleftarrow{D}_t)$  son diferenciables.

Se sigue que la ecuación (2.2.4) es equivalente a

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \sup_{a \in Y_d \cap B_0(1)} \left| (\vec{\lambda}_t - \overleftarrow{\lambda}_t) \left( \text{Tr}(\Pi(a)) - \frac{\varphi(\Pi^\perp a \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \right) \right|.$$

Una expansión de Taylor en torno a cero nos permite ver que

$$\vec{\lambda}_t = \vec{\lambda}_0 + \vec{\lambda}'_0 t + o(t) \quad \text{y} \quad \overleftarrow{\lambda}_t = \overleftarrow{\lambda}_0 + \overleftarrow{\lambda}'_0 t + o(t),$$

con  $\vec{\lambda}_0 = \overleftarrow{\lambda}_0$  dado que  $\vec{D}_0 = \overleftarrow{D}_0 = D$ . Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \sup_{a \in Y_d \cap B_0(1)} \left| (\vec{\lambda}_t - \overleftarrow{\lambda}_t) \left( \text{Tr}(\Pi(a)) - \frac{\varphi(\Pi^\perp a \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \right) \right| \\ &\geq \lim_{t \rightarrow 0^+} |(\vec{\lambda}'_0 - \overleftarrow{\lambda}'_0)| \left( \text{Tr}(\Pi(a)) - \frac{\varphi(\Pi^\perp a \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \right) \\ &\quad + \frac{o(t)}{t} \left| \text{Tr}(\Pi(a)) - \frac{\varphi(\Pi^\perp a \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \right| \\ &= |(\vec{\lambda}'_0 - \overleftarrow{\lambda}'_0)| \left| \text{Tr}(\Pi(a)) - \frac{\varphi(\Pi^\perp a \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \right| \end{aligned}$$

para todo  $a \in Y_d \cap B_0(1)$  y para todo  $\varphi$  normal y fiel. Tomando  $\varphi$  de tal forma que exista  $a \in Y_d \cap B_0(1)$  tal que  $\text{Tr}(\Pi(a)) - \frac{\varphi(\Pi^\perp a \Pi^\perp)}{\varphi(\Pi^\perp)} \neq 0$  concluimos que  $\vec{\lambda}'_0 = \overleftarrow{\lambda}'_0$  esto último equivale a

$$\text{tr}(\Pi(\mathcal{L}_* \otimes 1)(D)) = \text{tr}(\Pi(1 \otimes \mathcal{L}_*)(D)).$$

Usando un argumento de densidad de proyecciones unidimensionales  $\Pi$ , vemos que la anterior igualdad se cumple para cualquier proyección unidimensional y entonces

$$(\mathcal{L}_* \otimes \mathbf{1})(D) = (\mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_*)(D), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

La afirmación se sigue por la proposición 2.1.1.  $\square$

Hemos probado que la condición (EQ) se cumple y por lo tanto que nuestra tasa  $\text{pe}_{W_d}(\cdot, \cdot)$  en efecto mide desviaciones del equilibrio.

Sea  $\mathfrak{R}(\Upsilon_d) = \{a \in \Upsilon_d \mid a = a^*\}$ . Es posible restringir el supremo que define a  $W_d$  a el conjunto  $\mathfrak{R}(\Upsilon_d)$ :

**Proposición 2.2.5.**

$$W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) = \sup_{a \in \mathfrak{R}(\Upsilon_d)} |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a)|$$

*Demostración.* Supongamos primero que  $W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) < \infty$ .

Sea  $\varepsilon > 0$  entonces existe  $a \in \Upsilon_d$  tal que

$$W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) - \varepsilon < |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a)| = |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a^*)|.$$

Sea  $\theta$  tal que

$$e^{i\theta} \text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a) = |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a)|,$$

entonces  $y := \frac{e^{i\theta}a + e^{-i\theta}a^*}{2} \in \Upsilon_d$ . En efecto,

$$\sup_{m,l} \|\delta_{ml}^d(y)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{m,l} \left( \|\delta_{ml}^d(a)\| + \|\delta_{ml}^d(a^*)\| \right) \leq 1.$$

Además  $y \in \mathfrak{R}(\Upsilon_d)$  y

$$|\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)y)| = |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a)| > W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) - \varepsilon.$$

De esto se sigue la afirmación. Si  $W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) = \infty$ , entonces dado  $\varepsilon > 0$  existe  $a \in \Upsilon_d$  tal que

$$W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) > |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a)| = |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a^*)| > \varepsilon.$$

Tomando  $y := \frac{e^{i\theta}a + e^{-i\theta}a^*}{2}$ , vemos que  $y \in \mathfrak{R}(\Upsilon_d)$  (se sigue el mismo razonamiento de la primer parte) además

$$\varepsilon < |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)y)| = |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a)| < W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2})$$

y por lo tanto en este caso se sigue también la afirmación.  $\square$

### 2.3. Ejemplos

Si  $a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  y  $(e_x \otimes e_y)_{x,y \in V}$  es una base ortonormal de  $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ , escribimos  $a_{xy}^{zw} := \langle e_x \otimes e_y, a(e_z \otimes e_w) \rangle$ ,  $a_{xy}^{xy} := a_{xy}$ , para todo  $x, y, z, w \in V$  y

$$\text{sgn}(r) = \begin{cases} 1, & \text{si } r > 0 \\ 0, & \text{si } r \leq 0, \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}.$$

La siguiente proposición será útil en los ejemplos:

**Proposición 2.3.1.** Sea  $\mathfrak{h}$  de dimensión finita y  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h}))$  autoadjunto con

$$x = \sum_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} |e_\alpha \otimes e_\beta\rangle \langle e_\alpha \otimes e_\beta|.$$

Entonces

$$\|\delta_{ml}^d(x)\| = \frac{2}{d(m,l)} \max \left\{ \max_k |x_{lk} - x_{mk}|, \max_k |x_{kl} - x_{km}| \right\},$$

y  $\sup_{m,l \in V, m \neq l} \|\delta_{ml}^d(x)\| \leq 1$  es equivalente a

$$\sup_{m,l \in V, m \neq l} \left( \frac{1}{d(m,l)} \max \left\{ \max_k |x_{lk} - x_{mk}|, \max_k |x_{kl} - x_{km}| \right\} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

*Demostración.* Sea  $x = \sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha\beta} |e_\alpha \otimes e_\beta\rangle \langle e_\alpha \otimes e_\beta| = \sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha\beta} (|e_\alpha\rangle \langle e_\alpha| \otimes |e_\beta\rangle \langle e_\beta|)$ .

Tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_{ml}^d(x) &= \frac{1}{d(m,l)} [(|e_m\rangle \langle e_l| + |e_l\rangle \langle e_m|) \otimes \mathbf{1}, x] + [\mathbf{1} \otimes (|e_m\rangle \langle e_l| + |e_l\rangle \langle e_m|), x] \\ &= \frac{1}{d(m,l)} \sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha\beta} \{ [(|e_m\rangle \langle e_l| + |e_l\rangle \langle e_m|) \otimes \mathbf{1}, |e_\alpha\rangle \langle e_\alpha| \otimes |e_\beta\rangle \langle e_\beta|] \\ &\quad + [\mathbf{1} \otimes (|e_m\rangle \langle e_l| + |e_l\rangle \langle e_m|), |e_\alpha\rangle \langle e_\alpha| \otimes |e_\beta\rangle \langle e_\beta|] \} \\ &= \frac{1}{d(m,l)} \sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha\beta} \{ [(|e_m\rangle \langle e_l| + |e_l\rangle \langle e_m|), |e_\alpha\rangle \langle e_\alpha|] \otimes |e_\beta\rangle \langle e_\beta| \\ &\quad + |e_\alpha\rangle \langle e_\alpha| \otimes [(|e_m\rangle \langle e_l| + |e_l\rangle \langle e_m|), |e_\beta\rangle \langle e_\beta|] \} \\ &= \frac{1}{d(m,l)} \sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha\beta} \{ (\chi_{\{\alpha\}}(m) - \chi_{\{\alpha\}}(l)) (|e_m\rangle \langle e_l| + |e_l\rangle \langle e_m|) \otimes |e_\beta\rangle \langle e_\beta| \\ &\quad + |e_\alpha\rangle \langle e_\alpha| \otimes (\chi_{\{\beta\}}(m) - \chi_{\{\beta\}}(l)) (|e_m\rangle \langle e_l| + |e_l\rangle \langle e_m|) \} \\ &= \frac{1}{d(m,l)} (|e_m\rangle \langle e_l| + |e_l\rangle \langle e_m|) \otimes \left( \sum_{\beta} (x_{m\beta} - x_{l\beta}) |e_\beta\rangle \langle e_\beta| \right) \\ &\quad + \frac{1}{d(m,l)} \left( \sum_{\alpha} (x_{\alpha m} - x_{\alpha l}) |e_\alpha\rangle \langle e_\alpha| \right) \otimes (|e_m\rangle \langle e_l| + |e_l\rangle \langle e_m|). \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\delta_{lm}^d(x) = \frac{1}{d(m,l)} E_{lm} \otimes Z_{lm} + \frac{1}{d(m,l)} Z'_{lm} \otimes E_{lm}.$$

con

$$Z_{lm} = \sum_{\beta} (x_{m\beta} - x_{l\beta}) |e_{\beta}\rangle \langle e_{\beta}|,$$

$$Z'_{lm} = \sum_{\alpha} (x_{\alpha m} - x_{\alpha l}) |e_{\alpha}\rangle \langle e_{\alpha}|,$$

$$E_{lm} = (|e_m\rangle \langle e_l| + |e_l\rangle \langle e_m|).$$

Sea  $u = \sum_{j,k} u_{jk} e_j \otimes e_k$ ,  $\|u\| \leq 1$ . Entonces para todo  $l \neq m$  tenemos

$$\begin{aligned} \|\delta_{ml}^d(x)\| &= \frac{1}{d(m,l)} \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle u, (E_{lm} \otimes Z_{lm} + Z'_{lm} \otimes E_{lm}) u \rangle| \\ &= \frac{2}{d(m,l)} \sup_{\|u\| \leq 1} \left| \operatorname{Im} \sum_k u_{mk} \bar{u}_{lk} \langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle + u_{km} \bar{u}_{kl} \langle e_k, Z'_{lm} e_k \rangle \right| \\ &\leq \frac{2}{d(m,l)} \max \left\{ \sup_k |\langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle|, \sup_k |\langle e_k, Z'_{lm} e_k \rangle| \right\} \\ &\quad \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle u_m, u_l \rangle + \langle u, u_l \rangle| \\ &\leq \frac{1}{d(m,l)} \max \left\{ \sup_k |\langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle|, \sup_k |\langle e_k, Z'_{lm} e_k \rangle| \right\} \\ &\quad \sup_{\|u\| \leq 1} (\|u_m\|^2 + \|u_l\|^2 + \|u_m\|^2 + \|u_l\|^2) \\ &\leq \frac{1}{d(m,l)} \max \left\{ \sup_k |\langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle|, \sup_k |\langle e_k, Z'_{lm} e_k \rangle| \right\} \\ &\quad \sup_{\|u\| \leq 1} \left( \sum_{j,k} |u_{jk}|^2 + \sum_{j,k} |u_{jk}|^2 \right) \\ &= \frac{2}{d(m,l)} \max \left\{ \sup_k |\langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle|, \sup_k |\langle e_k, Z'_{lm} e_k \rangle| \right\}. \end{aligned}$$

Ahora probaremos que

$$\|\delta_{ml}^d(x)\| \geq \frac{2}{d(m,l)} \max \left\{ \max_k |x_{lk} - x_{mk}|, \max_k |x_{kl} - x_{km}| \right\}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\max \left\{ \sup_k |\langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle|, \sup_k |\langle e_k, Z'_{lm} e_k \rangle| \right\} = \sup_k |\langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle|,$$

puesto que el razonamiento siguiente es igual para el otro caso.

Si tenemos que  $\max_k \langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle = \langle e_j, Z_{lm} e_j \rangle, j \neq m, j \neq l$ , consideremos  $u$  tal que

$$u_{ml} = \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}}, u_{lm} = \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}}, u_{ll} = \frac{e^{i\pi}}{\sqrt{2}}, u_{mm} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

y

$$u_{rs} = 0 \quad \text{en otro caso.}$$

Si  $\max_k \langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle = \langle e_m, Z_{lm} e_m \rangle$  o  $\max_k \langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle = \langle e_l, Z_{lm} e_l \rangle$ , tomemos  $u$  tal que

$$u_{mj} = \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}}, u_{lj} = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_{jm} = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_{jl} = \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}},$$

y

$$u_{rs} = 0 \quad \text{en otro caso.}$$

En cualquiera de estas situaciones vemos que  $\|u\| \leq 1$  y

$$|\langle u, (E_{lm} \otimes Z_{lm} + Z_{lm} \otimes E_{lm})u \rangle| = 2 \max_k \langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\delta_{ml}^d(x)\| &= \frac{2}{d(m,l)} \max \left\{ \sup_k |\langle e_k, Z_{lm} e_k \rangle|, \sup_k |\langle e_k, Z_{lm}' e_k \rangle| \right\} \\ &= \frac{2}{d(m,l)} \max \left\{ \max_k |x_{mk} - x_{lk}|, \max_k |x_{km} - x_{kl}| \right\}. \end{aligned}$$

□

*Nota 2.3.1.* En esta última proposición asumimos  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h}))$  autoadjunto, como  $\mathfrak{h}$  es de dimensión finita, esta hipótesis es equivalente a tener  $x_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$  para todo  $\alpha, \beta$ .

### 2.3.1. Sistema cuántico de $m$ niveles, $3 \leq m < +\infty$

Sea

$$\mathcal{L}(x) = \alpha S^* x S + (1 - \alpha) S x S^* - x,$$

el generador infinitesimal de un SMC definido en  $\mathfrak{B}(\mathbb{C}^m)$ , donde  $S$  es el operador unitario desplazamiento hacia la derecha (right shift) definido en la base ortonormal  $(e_k)_{k \in \mathcal{V}}$  de  $\mathbb{C}^m$  por  $S e_k = e_{k+1}$  (el recorrido sobre los subíndices se debe entender módulo  $m$ ) y  $\alpha \in (0, 1)$ .

El operador  $\rho = \mathbf{1}/m$  es un estado fiel e invariante de este SMC. Se puede ver fácilmente que

$$\vec{D}_t = \sum_{jk} E_j^k \otimes \mathcal{T}_{*t}(E_j^k),$$

$$\overleftarrow{D}_t = \sum_{jk} \mathcal{T}_{*t}(E_j^k) \otimes E_j^k,$$

con  $E_j^k = |e_j\rangle\langle e_k|$  entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{T}_{*t}(E_j^k) &= \mathcal{T}_{*t}(\mathcal{L}_*(E_j^k)) \\ &= \alpha \mathcal{T}_{*t}(E_{j+1}^{k+1}) - \mathcal{T}_{*t}(E_j^k) + (1 - \alpha) \mathcal{T}_{*t}(E_{j-1}^{k-1}) \end{aligned}$$

(donde las sumas sobre  $j, k$  son módulo  $m$ ).

La solución de este sistema es dada por la matriz exponencial de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & -1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \varphi_0(t) & \varphi_{m-1}(t) & \varphi_{m-2}(t) & \dots & \varphi_1(t) \\ \varphi_1(t) & \varphi_0(t) & \varphi_{m-1}(t) & \dots & \varphi_2(t) \\ \varphi_2(t) & \varphi_1(t) & \varphi_0(t) & \dots & \varphi_3(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m-1}(t) & \varphi_{m-2}(t) & \varphi_{m-3}(t) & \dots & \varphi_0(t) \end{pmatrix}$$

con

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{m} \left[ 1 + e^{-2t} + 2 \sum_{n=1}^{\frac{m-2}{2}} e^{t(\cos(\frac{2n\pi}{m})-1)} \cos(\gamma_n t - \frac{2nk\pi}{m}) \right], & \text{si } m \text{ es par;} \\ \frac{1}{m} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} e^{t(\cos(\frac{2n\pi}{m})-1)} \cos(\gamma_n t - \frac{2nk\pi}{m}) \right], & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde la constante  $\gamma_n$  es dada por  $\gamma_n := (2\alpha - 1) \sin(\frac{2n\pi}{m})$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ . Se sigue que

$$\mathcal{T}_{*t}(E_j^k) = \varphi_0(t)E_j^k + \varphi_1(t)E_{j-1}^{k-1} + \dots + \varphi_2(t)E_{j+m-2}^{k+m-2} + \varphi_{m-1}(t)E_{j+1}^{k+1}. \quad (2.3.1)$$

Entonces

$$\vec{D}_t = \sum_{jk} \varphi_0(t) E_j^k \otimes E_j^k + \varphi_1(t) E_j^k \otimes E_{j-1}^{k-1} + \dots + \varphi_{m-1}(t) E_j^k \otimes E_{j+1}^{k+1}$$

$$\overleftarrow{D}_t = \sum_{jk} \varphi_0(t) E_j^k \otimes E_j^k + \varphi_1(t) E_{j-1}^{k-1} \otimes E_j^k + \dots + \varphi_{m-1}(t) E_{j+1}^{k+1} \otimes E_j^k.$$

Sea

$$\chi_A(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in A \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si  $m$  es par, una expansión de Taylor cuando  $t \rightarrow 0^+$  da:

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \frac{1}{m} \left[ 1 + e^{-2t} + 2 \sum_{n=1}^{\frac{m-2}{2}} e^{t(\cos(\frac{2n\pi}{m})-1)} \cos\left(\gamma_n t - \frac{2nk\pi}{m}\right) \right] \\ &= \frac{2}{m} + \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{\frac{m-2}{2}} \cos\left(\frac{2nk\pi}{m}\right) \\ &\quad - \frac{2}{m} t + \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{\frac{m-2}{2}} \left( \cos\left(\frac{2n\pi}{m}\right) - 1 \right) \cos\left(\frac{2nk\pi}{m}\right) t + \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{\frac{m-2}{2}} \gamma_n \sin\left(\frac{2nk\pi}{m}\right) t \\ &\quad + \frac{4}{m} \frac{t^2}{2} + \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{\frac{m-2}{2}} \left( \cos\left(\frac{2n\pi}{m}\right) - 1 \right)^2 \cos\left(\frac{2nk\pi}{m}\right) \frac{t^2}{2} \\ &\quad + \frac{2}{m} \left( 2 \sum_{n=1}^{\frac{m-2}{2}} \gamma_n \left( \cos\left(\frac{2n\pi}{m}\right) - 1 \right) \sin\left(\frac{2nk\pi}{m}\right) - \sum_{n=1}^{\frac{m-2}{2}} \gamma_n^2 \cos\frac{2nk\pi}{m} \right) \frac{t^2}{2} \\ &\quad + \dots + o(t) \\ &= \left( \frac{2}{m} + \frac{1}{m} (-4 + m\alpha) t \right) \chi_{\{k=1\}}(k) \\ &\quad + \left( \frac{2}{m} + \frac{1}{m} (-4 + m(1-\alpha)) t \right) \chi_{\{k=m-1\}}(k) \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2} t^2 \chi_{\{k=2\}}(k) + \frac{(\alpha-1)^2}{2} t^2 \chi_{\{k=m-2\}}(k) \\ &\quad + \left( \frac{2}{m} (1-2t) \right) \chi_{\{k \neq 1, 2, m-1, m-2; k \text{ es impar}\}} \\ &\quad + \frac{1}{m} (1 + (2\alpha-1)^2) t^2 \chi_{\{k \neq 1, 2, m-1, m-2; k \text{ es par}\}} + o(t) \end{aligned}$$

y si  $m$  es impar la expansión de Taylor da:

$$\begin{aligned}
\varphi_k(t) &= \frac{1}{m} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} e^{t(\cos(\frac{2n\pi}{m})-1)} \cos\left(\gamma_n t - \frac{2nk\pi}{m}\right) \right] \\
&= \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( \cos\left(\frac{2n\pi}{m}\right) - 1 \right) \cos\left(\frac{2nk\pi}{m}\right) t \\
&+ \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} \gamma_n \sin\left(\frac{2nk\pi}{m}\right) t + \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( \cos\left(\frac{2n\pi}{m}\right) - 1 \right)^2 \cos\left(\frac{2nk\pi}{m}\right) \frac{t^2}{2} \\
&+ \frac{2}{m} \left( 2 \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} \gamma_n \left( \cos\left(\frac{2n\pi}{m}\right) - 1 \right) \sin\left(\frac{2nk\pi}{m}\right) - \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} \gamma_n^2 \cos\left(\frac{2nk\pi}{m}\right) \right) \frac{t^2}{2} \\
&+ \dots + o(t) \\
&= \frac{\alpha^{|k|} t^{|k|}}{|k|!} \chi_{\{k=1,2,\dots,\frac{m-1}{2}\}}(k) + \frac{(1-\alpha)^{|k|} t^{|k|}}{|k|!} \chi_{\{k \neq 1,2,\dots,\frac{m-1}{2}\}}(k) + o(t)
\end{aligned}$$

Sea

$$a = \sum_{x,y,z,w} a_{xy}^{zw} |e_x \otimes e_y\rangle \langle e_z \otimes e_w| = \sum_{x,y,z,w} a_{xy}^{zw} |e_x\rangle \langle e_z| \otimes |e_y\rangle \langle e_w|.$$

De la igualdad (2.3.1), se sigue que

$$\begin{aligned}
tr\left(\left(\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t\right) a\right) &= \frac{1}{m} \left[ \sum_{x,y} a_{xy}^{xy} (\langle e_y, \mathcal{I}_{*t}(|e_x\rangle \langle e_x|) e_y\rangle - \langle e_x, \mathcal{I}_{*t}(|e_y\rangle \langle e_y|) e_x\rangle) \right] \\
&+ \frac{1}{m} \left[ \sum_{z \neq j, y, w} \sum a_{jy}^{zw} \langle e_w, \mathcal{I}_{*t}(|e_z\rangle \langle e_j|) e_y\rangle - \sum_{w \neq j, x, z} \sum a_{xj}^{zw} \langle e_z, \mathcal{I}_{*t}(|e_w\rangle \langle e_j|) e_x\rangle \right] \\
&= \frac{1}{m} \left[ \sum_{x,y} a_{xy}^{xy} (\varphi_{x-y}(t) - \varphi_{-(x-y)}(t)) + \sum_{z \neq j; z-w=j-y} a_{jy}^{zw} (\varphi_{z-w}(t) - \varphi_{w-z}(t)) \right]
\end{aligned}$$

Supongamos que  $m$  es un número impar. La igualdad previa nos permite concluir que

$$\begin{aligned}
W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t) &= \sup_{a \in \Upsilon_d} \left| \text{tr} \left( (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) a \right) \right| \\
&= \sup_{a \in \Upsilon_d} \left| \frac{1}{m} \left[ \sum_{x,y} \alpha_{xy}^{xy} (\varphi_{x-y}(t) - \varphi_{-(x-y)}(t)) + \sum_{z \neq jz-w=j-y} \alpha_{jy}^{zw} (\varphi_{z-w}(t) - \varphi_{w-z}(t)) \right] \right| \\
&\leq \frac{1}{m} \sup_{a \in \Upsilon_d} |(2\alpha - 1)t(a_{10} - a_{01})| + \frac{1}{m} \sup_{a \in \Upsilon_d} \left| t^2 \sum_{x < y; (xy) \neq (10), (01)} (\alpha_{xy}^{xy} - \alpha_{yx}^{yx}) p_{xy}(\alpha, t) \right| \\
&\quad + t \frac{1}{m} \sup_{a \in \Upsilon_d} \left| \sum_{x < y; (xy) \neq (10), (01)} (\alpha_{xy}^{xy} - \alpha_{yx}^{yx}) \left( \frac{o(t^{|x-y|})}{t} \right) \right| \\
&\quad + \frac{1}{m} t \sup_{a \in \Upsilon_d} \left[ \sum_{z \neq jz-w=j-y} |\alpha_{jy}^{zw}| \left( \frac{o(t^{|z-y|})}{t} \right) \right]
\end{aligned}$$

con  $p_k(\alpha, t)$  un polinomio en las variables  $x, y$ . Usando la proposición 2.3.1 y la anterior desigualdad obtenemos

$$\frac{W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t)}{t} \leq \frac{d(1,0)}{m} |2\alpha - 1| + c(m) \frac{o(t)}{t}. \quad (2.3.2)$$

Por otro lado, sea  $a$  tal que

$$a_{10} = \frac{d(1,0)}{2} \text{sgn}(\varphi_1(t) - \varphi_{-1}(t)), \quad a_{01} = \frac{d(1,0)}{2} \text{sgn}(\varphi_{-1}(t) - \varphi_1(t))$$

y  $\alpha_{xy}^{zw} = 0$ , en otro caso. Supongamos que escogemos  $d$  tal que  $d(1,0) \leq d(1,s)$  para todo  $s \neq 1$  y  $d(1,0) \leq d(s,0)$  para todo  $s \neq 0, s \in V$ , por la proposición 2.3.1 y la nota 2.3.1 se sigue que  $a \in \Upsilon_d$  y por lo tanto

$$\frac{d(1,0)}{m} |2\alpha - 1| = \frac{\text{tr} \left( (\vec{D}_t - \overleftarrow{D}_t) a \right)}{t} \leq \frac{W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t)}{t} \quad (2.3.3)$$

Reuniendo las desigualdades (2.3.2) y (2.3.3) tenemos:

$$\frac{d(1,0)}{m} |2\alpha - 1| \leq \frac{W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t)}{t} \leq \frac{d(1,0)}{m} |2\alpha - 1| + c(m) \frac{o(t)}{t}$$

con  $c(m) > 0$ .

En consecuencia

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t)}{t} = \frac{d(1,0)}{m} |2\alpha - 1|.$$

De forma similar, para el caso cuando  $m$  es par se prueba que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t)}{t} = \frac{d(1,0)}{m} |2\alpha - 1|$$

Entonces tenemos el siguiente resultado

**Proposición 2.3.2.** *Sea  $\mathcal{T}$  un SMC describiendo la dinámica del sistema de  $m$  niveles ( $3 \leq m < +\infty$ ) sobre  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  con  $\mathfrak{h}$  de dimensión finita. Si  $d$  es una distancia sobre  $V = \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $d(1,0) \leq d(1,s)$  para todo  $s \neq 1$  y  $d(1,0) \leq d(s,0)$  para todo  $s \neq 0, s \in V$  entonces*

$$\text{pe}_{W_d}(\mathcal{T}, \rho) = \frac{d(1,0)}{m} |2\alpha - 1| \quad \text{para todo } 3 \leq m < +\infty.$$

Por el teorema 2.2.4 podemos concluir que

$$\text{pe}_{W_d}(\mathcal{T}, \rho) = 0 \text{ si y sólo si } \vec{\Omega}_t = \overleftarrow{\Omega}_t, \text{ para todo } t \geq 0 \text{ si y sólo si } \alpha = 1/2.$$

Por lo tanto el estado  $\rho = 1/m$  es un estado de equilibrio si y sólo si  $\alpha = 1/2$ . Esta última conclusión fue obtenida también por Fagnola y Rebolledo en [40] usando la tasa de producción de entropía  $\text{pe}(\mathcal{T}, \rho)$ .

### 2.3.2. Semigrupos markovianos cuánticos genéricos

Para la presentación de estos semigrupos en esta sección usamos una representación matemática que describe tanto el caso Gaussian Gauge invariant como el caso Fock. Otra representación será usada en la sección 3.4.2.

Sea  $S$  un sistema cuántico descrito por un Hamiltoniano  $H_S$  con espectro discreto actuando sobre un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ . Supondremos que  $\mathfrak{h}$  es de dimensión  $m$ , es decir,  $V = \{1, 2, \dots, m\}$ . Siguiendo Accardi y Kozyrev ([5]), llamaremos  $H_S$  genérico si el espectro  $\text{esp}(H_S)$  de  $H_S$  es no degenerado y para cualquier  $\omega > 0$  en  $\{\omega = \varepsilon_l - \varepsilon_m \mid \varepsilon_l, \varepsilon_m \in \text{esp}(H_S)\}$  existe único par de niveles de energía  $\varepsilon_l, \varepsilon_m \in \text{sp}(H_S)$  tal que  $\omega = \varepsilon_l - \varepsilon_m$ . Por lo tanto,

$$H_S = \sum_{n \in V} \varepsilon_n |e_n\rangle \langle e_n|, \text{ donde } (e_n)_{n \in V} \text{ es una base ortonormal de } \mathfrak{h}.$$

Los SMCs genéricos surgen del límite estocástico de un sistema genérico interactuante de un campo cuántico Gaussiano de media cero con un Hamiltoniano dipolo. Estos semigrupos son continuos en norma en  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  con generador infinitesimal descrito por

$$\mathcal{L}(x) = - \sum_{\omega \in F} \left( \Gamma_{\omega}^{-} \left( \frac{1}{2} \{E_{\omega}^* E_{\omega}, x\} - E_{\omega}^* x E_{\omega} \right) + \Gamma_{\omega}^{+} \left( \frac{1}{2} \{E_{\omega} E_{\omega}^*, x\} - E_{\omega} x E_{\omega}^* \right) \right) + i[H, x],$$

donde  $F = \{\omega = \varepsilon_l - \varepsilon_m \mid l > m\}$  es el conjunto de frecuencias de Bohr de  $H_S$ ,

$$H = \sum_{j=1}^m \kappa_j |e_j\rangle\langle e_j|, \quad \kappa_j \in \mathbb{R},$$

y

$$E_{\omega} = |e_m\rangle\langle e_l| \quad \text{para } \omega = \varepsilon_l - \varepsilon_m, \quad \Gamma_{\omega}^{\pm} \geq 0.$$

El semigrupo tiene un estado fiel e invariante descrito por  $\rho = \sum_{n=1}^m \rho_n |e_n\rangle\langle e_n|$  y el generador del semigrupo predual  $\mathcal{L}_*$  es tal que

$$\mathcal{L}_*(|e_n\rangle\langle e_n|) = \sum_l \zeta_{nl} |e_l\rangle\langle e_l|,$$

$$\text{donde } \zeta_{nl} = \begin{cases} -\sum_m \beta_{nm}, & \text{si } l = n \\ \beta_{nl}, & \text{si } l \neq n \end{cases} \quad \text{y } \beta_{lm} = \begin{cases} \Gamma_{\varepsilon_l - \varepsilon_m}^{-}, & \text{si } l > m \\ \Gamma_{\varepsilon_m - \varepsilon_l}^{+}, & \text{si } l < m, \\ 0, & \text{si } l = m. \end{cases}$$

Para calcular la  $W_d$ - tasa de producción de entropía necesitamos el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.3.** *El álgebra abeliana  $\mathcal{D}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}))$  y el espacio de operadores  $\mathcal{D}_{off}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}))$  son  $\mathcal{T}_t$ -invariantes para todo  $t \geq 0$ . Además existe  $c_{nm} \in \mathbb{C}$  tal que*

$$\mathcal{T}_t(|e_n\rangle\langle e_m|) = e^{c_{nm}t} |e_n\rangle\langle e_m| \quad \text{para todo } n, m \in V, n \neq m.$$

Una demostración de este resultado es encontrada en [1],[4], y [21].

Usando el teorema previo, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{D}_t &= \sum_j \rho_j (|e_j\rangle\langle e_j| \otimes \mathcal{T}_{*t}(|e_j\rangle\langle e_j|)) + \sum_{j \neq k} (\rho_k \rho_j)^{1/2} (|e_k\rangle\langle e_j| \otimes \mathcal{T}_{*t}(|e_k\rangle\langle e_j|)) \\ &= \sum_j \rho_j (|e_j\rangle\langle e_j| \otimes \mathcal{T}_{*t}(|e_j\rangle\langle e_j|)) + \sum_{j \neq k} (\rho_k \rho_j)^{1/2} e^{c_{km}t} (|e_k\rangle\langle e_j| \otimes |e_k\rangle\langle e_j|) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\overleftarrow{D}_t &= \sum_j \rho_j (\mathcal{T}_{*t}(|e_j\rangle\langle e_j|) \otimes |e_j\rangle\langle e_j|) + \sum_{j \neq k} (\rho_k \rho_j)^{1/2} (\mathcal{T}_{*t}(|e_k\rangle\langle e_j|) \otimes |e_k\rangle\langle e_j|) \\ &= \sum_j \rho_j (\mathcal{T}_{*t}(|e_j\rangle\langle e_j|) \otimes |e_j\rangle\langle e_j|) + \sum_{j \neq k} (\rho_k \rho_j)^{1/2} e^{c_{mk}t} (|e_k\rangle\langle e_j| \otimes |e_k\rangle\langle e_j|).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{tr} \left( \left( \overrightarrow{D}_t - \overleftarrow{D}_t \right) a \right) \quad (2.3.4)$$

$$= \text{tr} \left( \sum_j \rho_j (|e_j\rangle\langle e_j| \otimes \mathcal{T}_{*t}(|e_j\rangle\langle e_j|) - \mathcal{T}_{*t}(|e_j\rangle\langle e_j|) \otimes |e_j\rangle\langle e_j|) a \right). \quad (2.3.5)$$

**Proposición 2.3.4.** Si  $\Upsilon'_d = \Upsilon_d \cap \mathcal{D}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h}))$  y  $\mathcal{T}$  es un SMC genérico entonces

$$W_d \left( \overrightarrow{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t \right) = \sup_{a \in \Upsilon'_d} \text{tr} \left( \left( \overrightarrow{D}_t - \overleftarrow{D}_t \right) a \right).$$

*Demostración.* Sea  $a \in \Upsilon_d$  con  $a = \sum_{x,y,z,w} a_{x,y}^{z,w} |e_x \otimes e_y\rangle\langle e_z \otimes e_w|$ . Usando (2.3.4) obtenemos

$$\begin{aligned}\text{tr} \left( \left( \overrightarrow{D}_t - \overleftarrow{D}_t \right) a \right) &= \sum_{x,y,w} \rho_x a_{x,y}^{x,w} \langle e_w, \mathcal{T}_{*t}(|e_x\rangle\langle e_x|) e_y \rangle \\ &\quad - \sum_{x,y,z} \rho_y a_{x,y}^{z,y} \langle e_z, \mathcal{T}_{*t}(|e_y\rangle\langle e_y|) e_x \rangle.\end{aligned}$$

Por el teorema 2.3.3 se sigue que  $\mathcal{T}_{*t}(|e_x\rangle\langle e_x|) \in \mathcal{D}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}))$ , entonces

$$\langle e_w, \mathcal{T}_{*t}(|e_x\rangle\langle e_x|) e_y \rangle = \langle e_z, \mathcal{T}_{*t}(|e_y\rangle\langle e_y|) e_x \rangle = 0 \quad \text{si } x \neq z, \quad y \neq w.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\text{tr} \left( \left( \overrightarrow{D}_t - \overleftarrow{D}_t \right) a \right) &= \sum_{x,y} \rho_x a_{x,y}^{x,y} \langle e_y, \mathcal{T}_{*t}(|e_x\rangle\langle e_x|) e_y \rangle - \sum_{x,y} \rho_y a_{x,y}^{x,y} \langle e_x, \mathcal{T}_{*t}(|e_y\rangle\langle e_y|) e_x \rangle \\ &\leq \sup_{a \in \Upsilon'_d} \text{tr} \left( \left( \overrightarrow{D}_t - \overleftarrow{D}_t \right) a \right).\end{aligned}$$

entonces

$$\sup_{a \in \Upsilon'_d} \text{tr} \left( \left( \overrightarrow{D}_t - \overleftarrow{D}_t \right) a \right) \leq W_d \left( \overrightarrow{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t \right) \leq \sup_{a \in \Upsilon'_d} \text{tr} \left( \left( \overrightarrow{D}_t - \overleftarrow{D}_t \right) a \right).$$

□

En consecuencia, por la proposición 2.3.4, tenemos que:

**Corolario 2.3.5.** Si  $\mathcal{T}$  es un SMC genérico entonces

$$W(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t) = w(\mathcal{E}_*(\vec{\Omega}_t), \mathcal{E}_*(\overleftarrow{\Omega}_t)),$$

donde  $w$  es la distancia de Wasserstein clásica y  $\mathcal{E}_*$  es definida por la ecuación (2.2.2).

Por la proposición 2.3.1 se tiene que si  $a \in \Upsilon'_d$  entonces

$$|a_{xy} - a_{yx}| \leq |a_{xy} - a_{yy}| + |a_{yy} - a_{yx}| \leq d(x, y)$$

Entonces utilizando las proposiciones 2.2.5 y 2.3.4 junto con la desigualdad 2.3.2, obtenemos

$$\begin{aligned} W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t) &= \sup_{a \in \Upsilon'_d} \left| \sum_{x \neq y} a_{xy} (\rho_x \langle e_y, \mathcal{T}_{*t}(|e_x\rangle \langle e_x|) e_y) - \rho_y \langle e_x, \mathcal{T}_{*t}(|e_y\rangle \langle e_y|) e_x \rangle \right| \\ &\leq \sup_{a \in \Upsilon'_d} \sum_{x < y} |a_{xy} - a_{yx}| |\rho_x \langle e_y, \mathcal{T}_{*t}(|e_x\rangle \langle e_x|) e_y) - \rho_y \langle e_x, \mathcal{T}_{*t}(|e_y\rangle \langle e_y|) e_x \rangle| \\ &\leq \sum_{x < y} d(x, y) |\rho_x \langle e_y, \mathcal{T}_{*t}(|e_x\rangle \langle e_x|) e_y) - \rho_y \langle e_x, \mathcal{T}_{*t}(|e_y\rangle \langle e_y|) e_x \rangle| \end{aligned}$$

entonces

$$W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t) \leq \sum_{x < y} d(x, y) |\rho_x \langle e_y, \mathcal{T}_{*t}(|e_x\rangle \langle e_x|) e_y) - \rho_y \langle e_x, \mathcal{T}_{*t}(|e_y\rangle \langle e_y|) e_x \rangle|. \quad (2.3.6)$$

Por otro lado, sea  $d(x_m, y_m) = \min_{x < y} d(x, y)$ , si fijamos  $r, s \in V$  con  $r \neq s$  consideremos  $a \in \mathcal{D}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{B}(\mathfrak{h}))$  tal que

$$a_{rs} = \frac{d(x_m, y_m)}{2} \operatorname{sgn}(\rho_r \langle e_s, \mathcal{T}_{*t}(|e_r\rangle \langle e_r|) e_s) - \rho_s \langle e_r, \mathcal{T}_{*t}(|e_s\rangle \langle e_s|) e_r \rangle)$$

y cero en otro caso. Tenemos que para todo  $l \neq m$  y para todo  $k$

$$|a_{lk} - a_{mk}| \leq \frac{1}{2} |d(x_m, y_m)| \leq \frac{1}{2} d(l, m).$$

Entonces por la nota 2.3.1 y por la proposición 2.3.1 tenemos que  $a \in \Upsilon'_d$  y por lo tanto para todo  $r, s \in V$  tenemos

$$d(r, s) |\rho_r \langle e_s, \mathcal{T}_{*t}(|e_r\rangle \langle e_r|) e_s) - \rho_s \langle e_r, \mathcal{T}_{*t}(|e_s\rangle \langle e_s|) e_r \rangle| \leq W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t) \quad (2.3.7)$$

De las desigualdades (2.3.6) y (2.3.7) tenemos que

$$\begin{aligned} d(r, s) |\rho_r \langle e_s, \mathcal{T}_{*t}(|e_r\rangle \langle e_r|) e_s) - \rho_s \langle e_r, \mathcal{T}_{*t}(|e_s\rangle \langle e_s|) e_r \rangle| &\leq W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t) \\ &\leq \sum_{x < y} d(x, y) |\rho_x \langle e_y, \mathcal{T}_{*t}(|e_x\rangle \langle e_x|) e_y) - \rho_y \langle e_x, \mathcal{T}_{*t}(|e_y\rangle \langle e_y|) e_x \rangle|. \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t)}{t} &\leq \\ &\sum_{x < y} d(x, y) |\rho_x \langle e_y, \mathcal{L}_*(|e_x\rangle\langle e_x|) e_y \rangle - \rho_y \langle e_x, \mathcal{L}_*(|e_y\rangle\langle e_y|) e_x \rangle| \\ &= \sum_{x < y} d(x, y) |\rho_x \zeta_{xy} - \rho_y \zeta_{yx}|, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{W_d(\vec{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t)}{t} &\geq d(x_m, y_m) |\rho_r \langle e_s, \mathcal{L}_*(|e_r\rangle\langle e_r|) e_s \rangle - \rho_s \langle e_r, \mathcal{L}_*(|e_s\rangle\langle e_s|) e_r \rangle| \\ &= d(x_m, y_m) |\rho_r \zeta_{rs} - \rho_s \zeta_{sr}|, \end{aligned}$$

para todo  $r \neq s$ , es decir,

$$d(x_m, y_m) |\rho_r \zeta_{rs} - \rho_s \zeta_{sr}| \leq \text{pew}_d(\mathcal{T}, \rho) \leq \sum_{x < y} d(x, y) |\rho_x \zeta_{xy} - \rho_y \zeta_{yx}|.$$

para todo  $r \neq s$ . Por el teorema 2.2.4 podemos concluir que

$$\text{pew}_d(\mathcal{T}, \rho) = 0 \text{ si y sólo si } \vec{\Omega}_t = \overleftarrow{\Omega}_t \text{ para todo } t \geq 0$$

si y sólo si  $\rho_x \zeta_{xy} = \rho_y \zeta_{yx}$  para todo  $x, y$ . De la anterior discusión se desprende inmediatamente la prueba de la siguiente proposición

**Proposición 2.3.6.** *Dado un SMC genérico con estado normal, fiel e invariante descrito por  $\rho = \sum_{n=1}^m \rho_n |e_n\rangle\langle e_n|$ . Entonces  $\rho$  describe un estado de equilibrio si sólo si se cumple la condición de balance detallado física  $\rho_x \zeta_{xy} = \rho_y \zeta_{yx}$  para todo  $x, y$ .*

## Capítulo 3

# Sectores libres de decoherencia para SMCs

En este capítulo estudiamos subespacios libres de decoherencia y subálgebras libres de decoherencia para semigrupos Markovianos cuánticos. Llamaremos sectores libres de decoherencia a estos dos conceptos que vamos a estudiar.

El primer concepto, los subespacios libres de decoherencia son definidos en este trabajo de tal forma que cuando estos subespacios están contenidos en un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$  de dimensión finita dicha noción coincide con aquella noción introducida por Lidar (ver [26]) bajo el mismo nombre. Como observamos en esta última referencia, esta noción es aplicada principalmente a computación cuántica; pero también ha sido aplicada en un contexto netamente físico (ver por ejemplo [58]). Desde el punto de vista físico es de interés el manejo de tasas temporales de decoherencia, tasa temporal de entrelazamiento o desentrelazamiento o una relación entre las anteriores y los subespacios libres de decoherencia son tomados como puntos de referencia para estudiar dichas tasas. Por otro lado, desde el punto de vista de álgebras de operadores la decoherencia ha sido ligada a la descomposición del álgebra  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  como la suma directa de un sector donde no hay decoherencia  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ , llamada subálgebra libre de decoherencia, y un sector donde ocurre la decoherencia, cuando ocurre dicha descomposición de forma no trivial se dice que existe decoherencia inducida por el ambiente. Esta noción ha sido planteada y estudiada principalmente por Blanchard y Olkiewicz (ver por ejemplo [16],[15]), obteniendo como resultado central la siguiente afirmación:

**Teorema 3.0.7.** *Dado un SMC  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  el cual posee un estado normal, fiel e invariante entonces existe una subálgebra de von Neumann  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$  y un  $*$ -espacio de Banach  $\mathcal{M}_0$  invariante por  $\mathcal{T}$  tal que*

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{M}_0$$

donde

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \{x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \mathcal{T}_t(x^*x) = \mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(x), \mathcal{T}_t(xx^*) = \mathcal{T}_t(x)\mathcal{T}_t(x^*), \forall t \geq 0\}$$

y

$$\{0\} \neq \mathcal{M}_0 \subset \left\{ x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}(\rho \mathcal{T}_t(x)) = 0, \quad \forall \rho \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{h}) \right\}$$

Este resultado ha sido obtenido por los mismos autores para semigrupos definidos en cualquier álgebra de von Neumann (no solamente  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ) y con una hipótesis mas general que el suponer la existencia de un estado normal, fiel e invariante. En vez de esto último ellos suponen la existencia de un peso fiel subinvariante y que el semigrupo  $\mathcal{T}$  conmuta con el automorfismo modular. Una demostración puede ser vista en [15].

Como un primer paso hacia la interacción entre estos dos puntos de vista, mostramos una relación existente entre los subespacios libres de decoherencia, la subálgebra  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$  (es decir los sectores libres de decoherencia) y la decoherencia inducida por el ambiente. Mas exactamente, si  $\mathfrak{h}_p$  es un subespacio libre de decoherencia entonces  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$  (el álgebra de los operadores acotados en  $\mathfrak{h}_p$ ) esta contenido en  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ . Además, si  $p$  es la proyección asociadas al subespacio libre de decoherencia maximal  $\mathfrak{h}_p$ , es decir  $\mathfrak{h}_p = p(\mathfrak{h})$  entonces la igualdad

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1 \quad (3.0.1)$$

es relacionada con decoherencia de SMCs donde una parte del espacio de Banach  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_{p^\perp})$  (donde  $p^\perp$  es la proyección asociada al complemento ortogonal de  $p(\mathfrak{h})$ ) está contenida en en el sector de disipación (es decir, en  $\mathcal{M}_0$ ).

Vemos que  $1_{\mathfrak{B}(\mathfrak{h})} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$  si y sólo si  $\mathfrak{h}_p = \mathfrak{h}$  si y sólo si y sólo si  $\mathcal{T}_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$  para todo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . Por lo tanto evitaremos la situación trivial cuando  $\mathcal{T}_t$  es un automorfismo para todo  $t \geq 0$  suponiendo que  $p \neq 1_{\mathfrak{B}(\mathfrak{h})}$ . Bajo este supuesto tiene sentido considerar la igualdad (3.0.1).

El capítulo esta organizado de la siguiente forma:

En la sección 3.1, estudiamos los sectores libres de decoherencia. Introducimos la subálgebra libre de decoherencia  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ , discutimos sus principales propiedades y hacemos un esquema de la demostración de su caracterización en términos de la forma GKSL de SMCs continuos en norma. Posteriormente definimos los subespacios libres de decoherencia (SLD). Describimos una condición necesaria y suficiente para la existencia de SLD usando la representación GKSL del generador  $\mathcal{L}$ . Esta condición fue probada por Bacon, Lidar y Waley (ver [13]) en espacios de Hilbert de dimensión finita, nosotros presentamos una prueba diferente la cual sirve para espacios de Hilbert de dimensión arbitraria.

En la sección 3.2, estudiamos decoherencia inducida por el ambiente y su relación con los subespacios libres de decoherencia. Si el álgebra  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$  es generada por subespacios libres de decoherencia entonces obtenemos una parte del espacio de disipación esta formada por proyecciones asociadas a complementos ortogonales de subespacios libres de decoherencia. Como se ve en el teorema 3.0.7, la existencia de un estado normal, fiel e invariante es una condición suficiente típica para la decoherencia inducida por el ambiente; pero en el caso donde  $\mathfrak{h}$  es de dimensión finita, esta hipótesis puede ser reemplazada por una condición espectral sobre el generador  $\mathcal{L}$  del semigrupo:  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$  contiene todos los vectores propios de  $\mathcal{L}$  asociados con valores propios con parte real nula, esta condición también es tratada en [22] sin usar subespacios libres de decoherencia.

En las secciones 3.1 y 3.2, nos limitamos a SMCs continuos en norma para evitar hipótesis técnica, luego en la sección 3.3 tratamos el caso cuando el generador es representado en una forma GKSL generalizada con coeficientes posiblemente no acotados.

Finalmente en la sección 3.4, damos ejemplos de SMCs teniendo subálgebras libres de decoherencia de la forma  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$ , vemos que en particular  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$  es no trivial. En el primer ejemplo, el SMC describe la dinámica de baño común squeezed (ver [58]), donde el semigrupo es continuo en norma. Dos ejemplos de SMCs con coeficientes no acotados son dados. El primero, es el SMC genérico en el caso Gaussiano y Gauge invariante (ver [21]) y el segundo describe un sistema disipativo de fermiones afectado por un campo magnético (ver [63]). Los resultados de las secciones previas son usados para analizar decoherencia en estos semigrupos.

### 3.1. Sectores libres de decoherencia

En esta sección estudiamos los sectores libres de decoherencia descritos por subespacios y subálgebras.

**Definición 3.1.1.** La subálgebra libre de decoherencia de  $\mathcal{T}$  es definida como

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \{x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \mathcal{T}_t(x^*x) = \mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(x), \mathcal{T}_t(xx^*) = \mathcal{T}_t(x)\mathcal{T}_t(x^*), \forall t \geq 0\}.$$

Es fácil ver que  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{A}(\mathcal{P})$ , donde  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$  es el álgebra de von Neumann generada por el conjunto  $\mathcal{P}$  de todas las proyecciones  $P$  en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  tal que  $\mathcal{T}_t(P)$  sigue siendo una proyección para todo  $t \geq 0$ .

**Teorema 3.1.1.** Las siguientes afirmaciones se cumplen:

- (a)  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$  es  $\mathcal{T}_t$ -invariante para todo  $t \geq 0$ .

(b) Para todo  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$  y todo  $y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  tenemos

$$\mathcal{T}_t(x^*y) = \mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(y), \quad \mathcal{T}_t(y^*x) = \mathcal{T}_t(y^*)\mathcal{T}_t(x).$$

(c)  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$  es un subálgebra de von Neumann de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ .

(d) Si  $\mathcal{T}$  es un SMC continuo en norma definido en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  cuyo generador  $\mathcal{L}$  es representado en la forma GKSL

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k).$$

Entonces  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$  coincide con el conmutador del conjunto de operadores:

$$\{\delta_H^n(L_l), \delta_H^n(L_l^*) \mid l \geq 1, n \geq 0\} \quad \text{donde } \delta_H(x) = [H, x].$$

Además  $\mathcal{T}_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$  para todo  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$ .

*Demostración.*

(a) Si  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$  y  $t > 0$ , entonces, para todo  $s > 0$  tenemos

$$\mathcal{T}_s(\mathcal{T}_t(x^*x)) = \mathcal{T}_{s+t}(x^*x) = \mathcal{T}_{s+t}(x^*)\mathcal{T}_{s+t}(x) = \mathcal{T}_s(\mathcal{T}_t(x)^*)\mathcal{T}_s(\mathcal{T}_t(x)).$$

Podemos demostrar en forma análoga que  $\mathcal{T}_s(\mathcal{T}_t(xx^*)) = \mathcal{T}_s(\mathcal{T}_t(x))\mathcal{T}_s(\mathcal{T}_t(x)^*)$  y

$$\mathcal{T}_t(x) \in \mathcal{N}(\mathcal{T}).$$

(b) Para todo  $t \geq 0$  y  $x, y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  tomemos  $D_t(x, y) = \mathcal{T}_t(x^*y) - \mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(y)$ . Para cualquier estado  $\omega$  en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  y cualquier número complejo  $z$ , por la 2-positividad de  $\mathcal{T}_t$ , tenemos  $\omega(D_t(zx + y, zx + y)) \geq 0$ . Ahora, si  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$ , entonces  $\omega(D_t(x, x)) = 0$  por lo tanto

$$0 \leq \omega(D_t(zx + y, zx + y)) = 2\Re e(\bar{z}\omega(D_t(x, y))) + \omega(D_t(y, y))$$

para todo número complejo  $z$ . Se sigue que  $\omega(D_t(x, y)) = 0$  es decir,

$$\mathcal{T}_t(x^*y) = \mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(y),$$

dado que  $\omega$  es arbitrario, y por lo tanto (b) es probado.

(c)  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$  es un espacio vectorial por el ítem (b). Además, para todo  $x, y \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$ , tenemos también por el ítem (b) que

$$\mathcal{T}_t((xy)^*(xy)) = \mathcal{T}_t(y^*)\mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(x)\mathcal{T}_t(y) = \mathcal{T}_t((xy)^*)\mathcal{T}_t(xy).$$

La invarianza de  $\mathcal{N}(\mathcal{F})$  por la adjunción es obvia. Finalmente, para cualquier conjunto  $(x_\alpha)_\alpha$  de elementos de  $\mathcal{N}(\mathcal{F})$  convergiendo  $\sigma$ -fuertemente a un  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  tenemos

$$\mathcal{T}_t(x^*x) = \lim_\alpha \mathcal{T}_t(x^*x_\alpha) = \lim_\alpha \mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(x_\alpha) = \mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(x).$$

Por lo tanto  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$  y (c) es probado.

(d) Una prueba detallada de este ítem es encontrada en [43]. La idea de la prueba es esquematizada aquí.

Si  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$ , entonces, diferenciando  $\mathcal{T}_t(x^*x) = \mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(x)$  en  $t = 0$ , encontramos

$$\mathcal{L}(x^*x) = x^*\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x^*)x.$$

Por lo tanto, dado que  $\mathcal{L}(x^*x) = x^*\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x^*)x + \sum_k [L_k, x]^* [L_k, x]$  se sigue que  $[L_k, x] = 0$  para todo  $k$  y, tomando el adjunto  $[L_k^*, x] = 0$ , puesto que  $x^* \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$  también. Entonces  $\mathcal{L}(x) = i[H, x]$  y  $\mathcal{L}(x) \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$  por (b), entonces, por la identidad de Jacobi,

$$0 = [L_k, [H, x]] = -[H, [x, L_k]] - [x, [H, L_k]] = [[H, L_k], x]$$

y  $x$  conmuta también con  $[H, L_k]$ . El mismo argumento para  $x^*$  muestra que  $x$  conmuta con  $[H, L_k]$ . Iterando mostramos que  $x$  conmuta con conmutadores múltiples en

$$\{\delta_H^n(L_l), \delta_H^n(L_l^*) \mid l \geq 1, n \geq 0\} \quad \text{donde } \delta_H(x) = [H, x].$$

Recíprocamente, si  $x$  pertenece al conmutador de

$$\{\delta_H^n(L_l), \delta_H^n(L_l^*) \mid l \geq 1, n \geq 0\}, \quad \mathcal{L}(x) = i[H, x]$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(x) &= i\mathcal{L}([H, x]) \\ &= -[H, [H, x]] + \frac{i}{2} \sum_{k \geq 1} (L_k^* [[H, x], L_k] + [L_k^*, [H, x]] L_k) \\ &= [H, [H, x]] \end{aligned}$$

porque  $[[H, x], L_k] = -[[x, L_k], H] - [[L_k, H], x] = 0$  y

$$[L_k^*, [H, x]] = -[H, [x, L_k^*]] - [x, [L_k^*, H]] = 0.$$

Tomando  $\delta_H(x) = [H, x]$  e iterando encontramos que  $\mathcal{L}^n(x) = i^n \delta_H^n(x)$  y entonces

$$\mathcal{T}_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$$

y  $x$  pertenece a  $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ . □

Dada una proyección  $p : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ , denotamos  $\mathfrak{h}_p := p(\mathfrak{h})$  y

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) = \{x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); x(\mathfrak{h}_p^\perp) = 0\}.$$

**Definición 3.1.2.** Sea  $p$  una proyección diferente de la proyección cero, el subespacio  $\mathfrak{h}_p$  es

- (a) un *subespacio libre de decoherencia* (SLD) si  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})$  y  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$  es  $\mathcal{T}_t$ -invariante para todo  $t \geq 0$ ;
- (b) un *subespacio libre de decoherencia en el sentido de Lidar* (SLDL) si existe un grupo unitario  $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$  tal que  $U_t \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ,  $U_t(\mathfrak{h}_p) \subset \mathfrak{h}_p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y

$$\mathcal{T}_{*t}(\rho) = U_t \rho U_t^* \quad \text{para todo } \rho \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{h}_p), \quad t \geq 0.$$

*Nota 3.1.1.* Las definiciones previas son equivalentes si  $\mathcal{T}$  es un SMC continuo en norma.

En efecto, supongamos primero que  $\mathfrak{h}_p$  es un SLD entonces  $\mathcal{T}_t|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)}$  es un \*-homomorfismo continuo en norma. Por el teorema 3.1.1(d), tenemos que  $\mathcal{T}_t(x) = U_t^* x U_t$  para todo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$ , con  $U_t$  operador unitario en  $\mathfrak{h}_p$ . Es claro que el semigrupo predual es definido por  $\mathcal{T}_{*t}(\rho) = U_t \rho U_t^*$  para todo  $\rho \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{h}_p)$ . La afirmación recíproca es inmediata.

Los SLDL son definidos por Lidar en dimension finita (ver [26]) y los SLD son propuestos como una generalización.

*Nota 3.1.2.* Sea  $P$  un operador definido en  $\mathfrak{h}$  y  $u \in \mathfrak{h}$  de tal forma que existe una constante  $c_P \in \mathbb{C}$  tal que  $Pu = c_P u$  y  $P^*u = \overline{c_P} u$  entonces

$$P^*P|u\rangle\langle u| - 2P^*|u\rangle\langle u|P + |u\rangle\langle u|P^*P = 0.$$

En efecto, como

$$P^*P|u\rangle\langle u| = |P^*Pu\rangle\langle u| = |c_P u\rangle\langle u| = |c_P|^2|u\rangle\langle u|,$$

$$P^*|u\rangle\langle u|P = |P^*u\rangle\langle P^*u| = |\overline{c_P} u\rangle\langle \overline{c_P} u| = \overline{c_P}|u\rangle\langle \overline{c_P} u| = \overline{c_P}c_P|u\rangle\langle u| = |c_P|^2|u\rangle\langle u|$$

y

$$|u\rangle\langle u|P^*P = |u\rangle\langle P^*Pu| = |u\rangle\langle |c_P|^2 u| = |c_P|^2|u\rangle\langle u|$$

entonces

$$P^*P|u\rangle\langle u| - 2P^*|u\rangle\langle u|P + |u\rangle\langle u|P^*P = |c_P|^2 - 2|c_P|^2 + |c_P|^2 = 0$$

**Teorema 3.1.2.** *Sea  $\mathcal{T}$  un SMC continuo en norma definido en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . Supongamos que el generador  $\mathcal{L}$  es representado en la forma GKSL*

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k),$$

donde  $L_k$  es un operador acotado en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  para todo  $k$  y  $\mathfrak{h}_p$  tiene base ortonormal  $(e_k)_{k \in V}$ ,  $V$  contable, formada por vectores propios de  $H$ .

$\mathfrak{h}_p$  es un subespacio libre de decoherencia si y sólo si existe  $c_k \in \mathbb{C}$  tal que  $L_k e_s = c_k e_s$  para todo  $k, s \in \mathbb{N}$ , es decir,  $(e_s)_{s \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal de vectores propios de  $L_k$  y  $L_k^*$  con valores propios degenerados.

*Demostración.* Si  $\mathfrak{h}_p$  es un subespacio libre de decoherencia con base ortonormal  $(e_k)_{k \in V}$ , entonces por la definición (3.1.2),  $|e_s\rangle\langle e_m| \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$  para todo  $s, m$ . Por el teorema (3.1.1)  $|e_s\rangle\langle e_m|$  es un elemento de el conmutador del conjunto de operadores:

$$\{\delta_H^n(L_l), \delta_H^n(L_l^*) | l \geq 1, n \geq 0\}.$$

En particular,  $L_k |e_s\rangle\langle e_m| = |e_s\rangle\langle e_m| L_k$  para todo  $s, m, k$ . Entonces

$$L_k e_s = L_k |e_s\rangle\langle e_m| e_m = |e_s\rangle\langle e_m| L_k |e_m\rangle$$
 para todo  $m$ .

Por lo tanto  $L_k e_s = c_k e_s$  para todo  $k, s$ ; donde  $c_k \in \mathbb{C}$ .

Recíprocamente, si  $(e_s)_{s \in V}$  es una base ortonormal de vectores propios de  $L_k$  con valores propios degenerados, tal que  $L_k e_s = c_k e_s$  entonces por la nota 3.1.2 con  $P = L_k$  se tiene que  $\mathcal{L}(|e_s\rangle\langle e_s|) = i[H, |e_s\rangle\langle e_s|]$ . Como  $e_s$  es vector propio de  $H$  tenemos que  $\mathcal{L}(|e_s\rangle\langle e_s|) = 0$ , iterando se puede ver que  $\mathcal{L}^n(|e_s\rangle\langle e_s|) = 0$  y esto implica que  $|e_s\rangle\langle e_s| \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$  para todo  $s$ . Los elementos  $|e_s\rangle\langle e_s|$  son proyecciones del álgebra de von Neumann  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$ , donde  $\mathfrak{h}_p$  es el espacio de Hilbert generado por la base  $(e_k)_{k \in V}$ , entonces  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})$ . Es fácil ver que  $H e_k \in \mathfrak{h}_p$  para todo  $k \in V$  implica que  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$  es  $\mathcal{L}$ -invariante entonces  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$  es  $\mathcal{T}$ -invariante.  $\square$

Nótese que si  $L_k \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  entonces la condición  $L_k e_s = c_k e_s$  para todo  $s \in V$  implica  $L_k^* e_s = \overline{c_k} e_s$  para todo  $s \in V$ , por lo tanto la condición  $L_k^* e_s = \overline{c_k} e_s$  es redundante si  $L_k$  es un operador acotado, en particular la condición es redundante si  $\mathfrak{h}$  es de dimensión finita (pues todo operador lineal definido en un espacio de dimensión finita es un operador acotado). Por esta razón en el teorema dado a Bacon, Lidar y Waley aparece en las hipótesis únicamente la condición  $L_k e_s = c_k e_s$  para todo  $s \in V$ , puesto que trabajan en espacios de Hilbert con dimensión finita.

Una condición necesaria y suficiente para la decoherencia de la evolución definida por SMCs definidos sobre espacios de matrices es dada en [22]; las demostraciones usan fuertemente la descomposición de Jordan. El siguiente corolario es inspirado en este hecho.

**Corolario 3.1.3.** *Sea  $\mathcal{T}$  un SMC que satisface todas las hipótesis previas del teorema 3.1.2.*

*Cuando  $\mathfrak{h}_p$  es un SLD con base ortonormal  $(e_k)_{k \in V}$  conformada por vectores propios de  $H$  entonces  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{h}} \subset \mathcal{A}(V_0)$ . Donde  $\mathcal{A}(V_0)$  es el álgebra de von Neumann generada por el espacio asociado a los valores propios de  $\mathcal{L}$  con parte real nula.*

*Demostración.* Sea  $|e_n\rangle\langle e_n|$  una proyección arbitraria de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$ . Por el teorema 3.1.2

$$\mathcal{L}(|e_n\rangle\langle e_n|) = i[H, |e_n\rangle\langle e_n|].$$

El vector  $e_n$  es un vector propio de  $H$  por hipótesis, entonces existe  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  tal que

$$\mathcal{L}(|e_n\rangle\langle e_n|) = i(\lambda_n |e_n\rangle\langle e_n| - \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|) = 0,$$

entonces  $|e_n\rangle\langle e_n| \in V_0$ .

Puesto que un elemento en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$  es generado por sus proyecciones,

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{h}} \subset \mathcal{A}(V_0).$$

□

## 3.2. Decoherencia inducida por el ambiente y subespacios libre de decoherencia

Denotamos por  $p$  la proyección asociada al subespacio libre de decoherencia  $\mathfrak{h}_p$ . Teniendo en cuenta esto enunciamos a continuación una proposición que nos servirá para no considerar en nuestro estudio el caso trivial cuando  $\mathcal{T}_t$  es un automorfismo para todo  $t \geq 0$ .

**Proposición 3.2.1.** *Sea  $\mathcal{T}$  un SMC definido en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a)  $I_{\mathfrak{B}(\mathfrak{h})} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$
- (b)  $\mathfrak{h}_p = \mathfrak{h}$
- (c)  $p = I_{\mathfrak{B}(\mathfrak{h})}$
- (d)  $\mathcal{T}_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$  para todo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$

*Demostración.* La demostración es inmediata. □

Por lo tanto siempre supondremos que  $p \neq \mathbf{1}_{\mathfrak{B}(\mathfrak{h})}$  para evitar el caso trivial cuando el semigrupo es un automorfismo sobre  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ .

Es claro que

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_p \oplus \mathfrak{h}_{p^\perp} \text{ y que } \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_{p^\perp}^\perp) = \{0\}. \quad (3.2.1)$$

Asumiremos sin pérdida de generalidad que  $\mathfrak{h}_p$  es generada por la base ortonormal  $\{e_k^p\}_{k \in V}$ ,  $\mathfrak{h}_{p^\perp}$  generada por la base ortonormal  $\{e_k^{p^\perp}\}_{k \in V'}$  con  $V$  y  $V'$  conjuntos contables y además que  $\mathfrak{h}$  es generada por la base  $\{e_k^p\}_{k \in V} \cup \{e_k^{p^\perp}\}_{k \in V'}$ .

*Nota 3.2.1.* Sea  $\mathfrak{p}(\mathfrak{h})$  la colección de todas las proyecciones definidas en  $\mathfrak{h}$ . Si  $x \in \mathfrak{p}(\mathfrak{h})$ , entonces

$$x = \sum_{k \in V} |e_k^p\rangle \langle e_k^p| + \sum_{k \in V'} |e_k^{p^\perp}\rangle \langle e_k^{p^\perp}|,$$

donde

$$V, V' \subset \mathbb{N}, \quad \sum_{k \in V} |e_k^p\rangle \langle e_k^p| \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p), \quad \text{y} \quad \sum_{k \in V'} |e_k^{p^\perp}\rangle \langle e_k^{p^\perp}| \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_{p^\perp}),$$

es decir, existe  $x_p \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$ ,  $x_Q \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_{p^\perp})$ , tal que  $x = x_p + x_Q$ .

**Proposición 3.2.2.** *Los siguientes hechos se cumplen:*

(a) *Si  $p \neq \mathbf{1}_{\mathfrak{h}}$  y  $p^\perp \neq \mathbf{1}_{\mathfrak{h}}$ , entonces  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbf{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{h}}$  si y sólo si*

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) \cap (\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_{p^\perp}) - \mathbf{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{h}_{p^\perp}}) = \{0\}.$$

(b) *If  $p^\perp = \mathbf{1}_{\mathfrak{h}}$  ó  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathbf{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{h}}$ , entonces  $p = p_0$  ( $p_0$  es la proyección idénticamente cero) y  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{p^\perp}$ .*

*Demostración.* La prueba es una aplicación inmediata de la nota 3.2.1.  $\square$

El teorema 3.1.2 plantea condiciones sobre los operadores  $(L_k)_k$  en la forma GKSL del generador para la existencia de  $\mathfrak{h}_p$ . A continuación discutimos condiciones sobre el Hamiltoniano  $H$  en la forma GKSL para la existencia del subespacio libre de decoherencia.

Dado un operador normal  $K$ , denotamos por  $W^*(K)$  su álgebra generada entonces  $W^*(K)'$  es el conmutante de  $W^*(K)$ . Es claro que  $W^*(K)$  es conmutativa entonces  $W^*(K) \subset W^*(K)'$ .

**Definición 3.2.1.** Un operador  $K$  acotado es *libre de multiplicidades* o *no degenerado* si existe un vector cíclico para  $C^*(K)$ , es decir,  $\{f(K)w; f \in C(Sp(K))\}$  es denso en  $\mathfrak{h}$  para algún vector  $w$ , donde  $Sp(K)$  denota el espectro de  $K$ . Si  $K$  es no acotado, es libre de multiplicidades si existe un vector  $w$  en la intersección de todos los dominios  $D(K^n)$  para todo  $n \geq 1$ , tal que el subespacio generado por los vectores  $(K^n w, n \geq 1)$  es denso en  $\mathfrak{h}$ .

El álgebra abeliana  $W^*(K)$  es maximal si y sólo si  $K$  es libre de multiplicidades (ver Pedersen [61]), en particular  $W^*(K) = W^*(K)'$ .

**Proposición 3.2.3.** *Sea  $\mathcal{T}$  un SMC  $w^*$ -continuo definido en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  donde  $\mathfrak{h}$  es un espacio de Hilbert separable con base ortonormal  $(e_k)$  formada por vectores propios de un operador autoadjunto  $K$ . Si existe un SLD entonces  $K$  tiene multiplicidades.*

*Demostración.* Sabemos que  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \subset W^*(K)'$ . Razonando por reducción al absurdo, si suponemos  $K$  libre de multiplicidades entonces  $W^*(K)'$  es conmutativa. Entonces por la contención inicial  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p)$  es conmutativa lo cual es contradictorio.  $\square$

**Definición 3.2.2.** Blanchard y Olkiewicz en [16] dicen que *el ambiente induce decoherencia en el sistema* cuya dinámica es descrita por  $\mathcal{T}$ , si existe un subespacio de Banach  $\mathcal{M}_2$  de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$   $*$ -invariante tal que:

- (a)  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{M}_2$  donde  $\mathcal{M}_2$  es  $\mathcal{T}_t$ -invariante para todo  $t \geq 0$ .
- (b)  $\{0\} \neq \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_0$  con

$$\mathcal{M}_0 := \left\{ x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr} \rho \mathcal{T}_t(x) = 0 \text{ para todo } \rho \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{h}) \right\}.$$

Denotamos  $\mathcal{F}(\mathcal{T}) := \{x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \mathcal{T}_t(x) = x\}$ .

**Lema 3.2.4.** *Si existe un estado normal, fiel e invariante  $\rho$  de  $\mathcal{T}$  entonces*

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{T}).$$

*Demostración.* Sea  $x \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$  entonces  $\mathcal{T}_t(x)^* \mathcal{T}_t(x) = x^*x$ , por la desigualdad de Schwartz se tiene  $\mathcal{T}_t(x^*x) \leq \mathcal{T}_t(x)^* \mathcal{T}_t(x) = x^*x$  entonces dado que  $\rho$  es invariante tenemos:

$$0 \leq \text{tr}(\rho(\mathcal{T}_t(x^*x) - \mathcal{T}_t(x)^* \mathcal{T}_t(x))) = \text{tr}(\rho \mathcal{T}_t(x^*x)) - \text{tr}(\rho x^*x) = 0$$

for all  $t \geq 0$ , entonces por la fidelidad de  $\rho$  se sigue que

$$\mathcal{T}_t(x^*x) = \mathcal{T}_t(x)^* \mathcal{T}_t(x) = x^*x \forall t \geq 0$$

entonces  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$ .  $\square$

El anterior lema será de utilidad para estudiar decoherencia, de igual forma el siguiente resultado será de importancia para estudiar también decoherencia

**Lema 3.2.5.** (a) Sea  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semigrupo fuertemente continuo con generador  $A$  en el espacio de Banach reflexivo  $M$ . Si  $\text{Spect}(A) \cap i\mathbb{R}$  es un conjunto contable y el espectro puntual de  $A$  esta contenido en el complemento del conjunto  $i\mathbb{R}$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_t(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in X.$$

(b) Sea  $\mathcal{T}$  un SMC  $w^*$ -continuo. Si existe un estado normal fiel e invariante de  $\mathcal{T}$ , entonces  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{F}(\mathcal{T})$  implica

$$w^* - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{T}_t(x) = \mathcal{E}(x) \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}),$$

donde  $\mathcal{E}$  es una proyeccion lineal, débilmente\* continua de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  en  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$  sobreyectiva.

La prueba del lema (a) puede ser encontrada en el corolario 2.22, capítulo V de [37]. El lema (b) es un resultado de Frigerio y su prueba puede ser encontrada en el teorema 3.1 de [48].

Establecemos el resultado central de esta sección.

**Teorema 3.2.6.** Sea  $\mathcal{T}$  un SMC continuo en norma definido en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  con generador  $\mathcal{L}$  representado en la forma GKSL

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k),$$

$\mathfrak{h}$  espacio de Hilbert separable con base ortonormal  $(e_k)$  conformada por vectores propios de  $H$ .

$$\text{Si } \mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}} \text{ y } p \neq 1_{\mathfrak{B}(\mathfrak{h})},$$

entonces obtenemos decoherencia inducida por el ambiente con una parte de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_{p^\perp}) - \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}_p^\perp}$  contenida en  $\mathcal{M}_0$ , bajo cualquiera de la siguientes hipótesis:

(a)  $\mathfrak{h}$  es finito dimensional y  $V_0 \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})$  donde  $V_0$  es el espacio asociado a los valores propios de  $\mathcal{L}$  con parte real nula.

(b) Existe un estado normal, fiel e invariante para  $\mathcal{T}$ .

*Demostración.* Si suponemos (a) entonces por el corolario 3.1.3, se tiene que

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}} \subset \mathcal{A}(V_0) \quad \text{y por hipótesis } \mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{A}(V_0),$$

entonces

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp = \mathcal{A}(V_0) \oplus \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp,$$

donde la ortogonalidad es medida con respecto al producto interno  $\langle x, y \rangle = \text{tr}(x^*y)$  y  $\mathcal{A}(V_0)$  es el álgebra de von Neumann generada por  $V_0$ . Por el lema 3.2.5 (a)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr} \rho \mathcal{T}_t(x) = 0 \quad \text{para todo estado } \rho \text{ y para todo } x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp.$$

Además, es claro que  $\{0\} \neq (\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_{p^\perp}) - \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{h}_{p^\perp}}) \cap \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp \subset \mathcal{M}_0$ .

Si suponemos (b) y que  $\rho$  es un estado normal, fiel e invariante entonces  $\mathcal{A}(V_0) = \mathcal{N}(\mathcal{T})$ . En efecto, si  $x \in V_0$  entonces  $\mathcal{L}(x) = i\lambda x$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$\mathcal{T}_t(x) = e^{t\mathcal{L}}x = e^{it\lambda}x, \quad \mathcal{T}_t(x^*) = \mathcal{T}_t(x)^* = e^{-it\lambda}x^*$$

para todo  $t \geq 0$ . Por lo tanto,  $\mathcal{T}_t(x)^* \mathcal{T}_t(x) = x^*x$  y por la desigualdad de Schwarz y la invarianza de  $\rho$  se tiene

$$0 \leq \text{tr}(\rho(\mathcal{T}_t(x^*x) - \mathcal{T}_t(x)^* \mathcal{T}_t(x))) = \text{tr}(\rho \mathcal{T}_t(x^*x)) - \text{tr}(\rho x^*x) = 0$$

para todo  $t \geq 0$  y en consecuencia  $\mathcal{T}_t(x^*x) = \mathcal{T}_t(x)^* \mathcal{T}_t(x)$  por la fidelidad de  $\rho$ . Similarmente probamos que  $\mathcal{T}_t(xx^*) = \mathcal{T}_t(x) \mathcal{T}_t(x)^*$ , y por lo tanto  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$  entonces  $V_0 \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})$ , es decir,  $\mathcal{A}(V_0) \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})$ . La igualdad se sigue de 3.1.3.

La igualdad  $\mathcal{A}(V_0) = \mathcal{N}(\mathcal{T})$  implica

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{N}(\mathcal{T})^{\perp p} = \mathcal{A}(V_0) \oplus \mathcal{N}(\mathcal{T})^{\perp p},$$

cuya ortogonalidad es medida con respecto al producto interno

$$\langle x, y \rangle = \text{tr}(\rho x^*y).$$

Además

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \bigoplus_{p \in P} \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{h}} \subset W^*(H) \cap \mathcal{N}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{T})$$

y por el lema 3.2.4 se sigue que  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{F}(\mathcal{T})$ .

Por el lema 3.2.5(b) obtenemos que

$$w^* - \lim_t \mathcal{T}_t(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^{\perp p}.$$

Es claro que

$$\emptyset \neq (\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_{p^\perp}) - \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{h}_{p^\perp}}) \cap \mathcal{N}(\mathcal{T})^{\perp p} \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})^{\perp p} \subset \mathcal{M}_0.$$

□

### 3.3. SMCs con generador no acotado

Siguiendo [35], en esta sección nos enfocamos en semigrupos Markovianos cuánticos definidos en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  con generador formal representable en una forma GKSL generalizada por medio de operadores  $G$  y  $L_k$  ( $G$  ó  $L_k$  no acotado) tal que

(H1)  $G$  es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en  $\mathfrak{h}$ ,  $Dom(G)$  esta contenido en  $Dom(L_k)$ , para todo  $k \geq 1$  y para todo  $u, v \in Dom(G)$ , tenemos

$$\langle Gv, u \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle L_k v, L_k u \rangle + \langle v, Gu \rangle = 0.$$

(H2) Existe una variedad lineal  $D$  densa en  $\mathfrak{h}$  contenida en los dominios de los operadores  $G, G^*$  y  $L_l, L_l^*$  para todo  $l \geq 1$ , el cual es un dominio esencial para  $G$  y

- (a)  $L_l$  es cerrado y  $D$  es dominio esencial para  $L_l$  para todo  $l \geq 1$ ,
- (b) el operador  $H$  definido en  $u \in D$  por  $Hu = i(Gu - G^*u)/2$  es esencialmente autoadjunto y el grupo unitario  $(e^{itH})_{t \in \mathbb{R}}$  generado por  $iH$  satisface  $e^{itH}(D) \subset Dom(G)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,
- (c) el operador  $G_0$  definido en  $u \in D$  by  $G_0u = (Gu + G^*u)/2$  es esencialmente autoadjunto y  $Dom(G) \subset Dom(G_0) \subset Dom(L_l)$  para todo  $l \geq 1$ .

Para cada  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  podemos considerar la forma cuadrática  $\mathcal{L}(x)$  con dominio  $Dom(G) \times Dom(G)$  definida por

$$\mathcal{L}(x)(v, u) = \langle Gv, xu \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle L_k v, x L_k u \rangle + \langle v, x Gu \rangle.$$

La hipótesis (H-1) nos permite construir el semigrupo minimal en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  asociado con los operadores  $G, L_l$  (ver por ejemplo. [39], sección 3). Este es el SMC  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  de aplicaciones completamente positivas definidas en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  satisfaciendo

$$\langle v, \mathcal{T}_t(x)u \rangle = \langle v, xu \rangle + \int_0^t \mathcal{L}(\mathcal{T}_s(x))(v, u) ds, \quad \text{para todo } u, v \in D. \quad (3.3.1)$$

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $\mathcal{T}$  el SMC minimal asociado con los operadores  $G, L_l$  satisfaciendo (H-1) y (H-2). Si  $\mathcal{T}$  es Markov, entonces*

(a)  $\mathcal{N}(\mathcal{F})$  esta contenido en el conmutador generalizado de

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \{e^{-itH}L_l e^{itH}, e^{-itH}L_l^* e^{itH}; l \geq 1, t \geq 0\}$$

y para cada  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$  tenemos  $\mathcal{T}_l(x) = e^{itH}x e^{-itH}$ .

(b) Si  $L_k$  es un operador acotado en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  para todo  $k$  y  $\mathfrak{h}_p$  tiene base ortonormal  $(e_k)_{k \in V}$ ,  $V$  contable, formada por vectores propios de  $H$ , entonces  $\mathfrak{h}_p$  es un subespacio libre de decoherencia si y sólo si existe  $c_k \in \mathbb{C}$  tal que  $L_k e_s = c_k e_s$  para todo  $k, s \in \mathbb{N}$ , es decir,  $(e_s)_{s \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal de vectores propios de  $L_k$  y  $L_k^*$  con valores propios degenerados.

(c) El teorema 3.2.6 se cumple.

La prueba de la parte (a) de esta afirmación se encuentra en [35] y la prueba de las partes (b) y (c) son similares al caso continuo en norma.

## 3.4. Ejemplos

### 3.4.1. Interacción con baño squeezed común

Siguiendo Mundarain y Orszag ([58]), empezamos considerando el generador del semigrupo, para un sistema de dos niveles en un vacío broadband squeezed :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{2}\gamma(\eta+1)(D^*Dx - 2D^*xD + xD^*D) - \frac{1}{2}\gamma\eta(DD^*x - 2DxD^* + xDD^*) \\ & + \frac{1}{2}\gamma\vartheta e^{i\theta}D^*xD^* + \frac{1}{2}\gamma\vartheta e^{-i\theta}DxD. \end{aligned}$$

Donde  $\gamma$  es la constante de decaimiento del vacío y  $\eta$ ,  $\vartheta = \eta^{1/2}(\eta+1)^{1/2}$  junto con  $\theta$  son los parámetros squeeze de el baño.

Ilustramos el caso con un átomo de dos niveles, esto es  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^2$  y  $D, D^*$  son los operadores de subida y bajada en  $\mathbb{C}^2$ :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación maestra puede ser escrita en una forma de Lindblad explícita usando únicamente un operador disipativo:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{\gamma}{2}(S^*Sx - 2S^*xS + xS^*S), \quad \text{con } S = (\eta+1)^{1/2}D - \eta^{1/2}e^{i\theta}D^*. \quad (3.4.1)$$

El Lindbladiano  $S$  tiene dos vectores propios  $v_1$  y  $v_2$  descritos por

$$v_1 = \sqrt{\frac{\eta}{\eta + \vartheta}}(1, 0) - i\sqrt{\frac{\eta}{\eta + \vartheta}}e^{-i\theta}(0, 1),$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{\eta}{\eta + \vartheta}}(1, 0) + i\sqrt{\frac{\eta}{\eta + \vartheta}}e^{-i\theta}(0, 1),$$

y valores propios asociados  $\lambda_1 = i\sqrt{\vartheta}e^{i\theta/2}$  y  $\lambda_2 = -i\sqrt{\vartheta}e^{i\theta/2}$ , respectivamente.

Para un sistema de dos niveles interactuando con un baño squeezed comun (es decir,  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ ), el generador tiene la misma estructura como en el caso de una partícula, pero ahora, con Lindbladiano:

$$L = S \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes S, \quad \text{donde } S \text{ es el operador definido en (3.4.1).}$$

Por el teorema 3.1.2, el SLD es compuesto por todos los vectores propios de  $L$ , en este caso, los valores propios son cero. Los siguientes dos vectores satisfacen dicha propiedad:

$$u_1 = v_1 \otimes v_2, \quad u_2 = v_2 \otimes v_1.$$

Desafortunadamente, estos dos vectores no son ortogonales. Ellos definen un plano en el espacio de Hilbert, generado por los siguientes vectores ortonormales:

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}}[\eta(1, 0) \otimes (1, 0) + \vartheta e^{-i\theta}(0, 1) \otimes (0, 1)],$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[(1, 0) \otimes (0, 1) - (0, 1) \otimes (1, 0)].$$

Ahora, se puede definir otros dos estados  $\phi_3, \phi_4$  los cuales son ortogonales a  $\phi_1$  y  $\phi_2$  tal que  $(\phi_n)_{n=1, \dots, 4}$  es una base ortonormal de  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ :

$$\phi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[(1, 0) \otimes (0, 1) + (0, 1) \otimes (1, 0)],$$

$$\phi_4 = \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}}[\vartheta(1, 0) \otimes (1, 0) - \eta e^{-i\theta}(0, 1) \otimes (0, 1)].$$

Sea  $\mathfrak{h}_p$  un SLD de  $\mathfrak{h}$  generado por  $\phi_1$  y  $\phi_2$  con proyección asociada  $p$  y  $q = p^\perp$  (es decir,  $\mathfrak{h}_p$  es un SLD maximal) entonces  $P \neq \mathbf{1}$ . Por el teorema 3.1.1

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{h}_q} \subset \mathcal{N}(\mathcal{S}) \subset \{L, L^*\}'.$$

En la base  $(\phi_n)_{n=1, \dots, 4}$  el operador  $L$  tiene la siguiente forma:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta e^{i\theta} \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } \alpha = \sqrt{\frac{2}{2\eta + 1}}, \beta = -2\sqrt{\eta(\eta + 1)}\alpha,$$

$\delta = \frac{2}{\alpha}$ . No es difícil mostrar que

$$\{L, L^*\} \subset \left\{ x; x = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } k, e, f \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\subset \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}}$$

entonces  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}_q}$ .

**Proposición 3.4.1.**  $V_0 \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}}$ , donde  $V_0$  es el espacio asociado a los valores propios de  $\mathcal{L}$  con parte real nula.

*Demostración.* Sea  $V_0$  el conjunto de vectores propios de  $\mathcal{L}$  con valor propio asociado  $i\lambda$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $y \in V_0$ .

Supongamos  $\lambda \neq 0$ . Un cálculo sencillo nos permite mostrar que si  $\mathcal{L}(y) = i\lambda y$  entonces

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto  $y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_q)$ , es decir,

$$V_0 \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_q). \quad (3.4.2)$$

Ahora, si  $y \in \bigoplus_{p \in P} \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}}$  entonces por el teorema 3.1.2(d), se sigue que  $\mathcal{T}_t(y) = y$ , y entonces  $\mathcal{L}(y) = 0$ , por lo tanto  $y \in V_0$ . En consecuencia  $\bigoplus_{p \in P} \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}} \subset V_0$ . Por (3.4.2), se sigue que,

$$\bigoplus_{p \in P} \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_q),$$

esto no es posible, entonces  $\lambda = 0$  y por ende  $\mathcal{L}(y) = 0$  para todo  $y \in V_0$ .

Entonces,  $x \in V_0$  implica  $\mathcal{L}(x) = 0$ , es decir,  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}}$ .  $\square$

Si  $\mathfrak{h}_p$  es un SLD generado por  $\phi_1$  y  $\phi_2$  con proyección asociada  $p$  entonces denotamos  $\mathfrak{h}_q$  el subespacio generado por  $\phi_3$  y  $\phi_4$  con proyección asociada  $q = p^\perp$ . Por el teorema 3.2.6 y proposición 3.4.1, el ambiente induce decoherencia, es decir,  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{M}_0$  con  $\mathfrak{h}_q$  generado por  $\phi_3$  y  $\phi_4$  tal que  $\mathcal{D}_{off}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_q)) \subset (\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_q) - \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}_q}) \cap \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp \subset \mathcal{M}_0$ . Además,  $\mathcal{T}_t(x) = x$  para todo  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr} \rho \mathcal{T}_t(x) = 0$  para todo  $x \in \mathcal{D}_{off}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_q))$  y para todo estado  $\rho$ .

### 3.4.2. Semigrupos Markovianos cuánticos genéricos

En la sección 2.3.2, estudiamos la producción de entropía de este SMC. En esta sección usamos otra representación para este semigrupo y mostramos el caso Gaussiano Gauge invariante.

El SMC es definido sobre  $\mathfrak{h}$  el cual es a su vez generado por  $(e_k)_{k \in V}$  y es obtenido en el límite estocástico de un sistema discreto con un Hamiltoniano genérico  $H_S = \sum_{k \in V} \varepsilon_k |e_k\rangle\langle e_k|$ , interactuando con un campo Gaussiano de media Gauge invariante con temperatura inversa  $\beta > 0$  a travez de una interacción tipo dipolo (ver [5]) con forma sesquilineal

$$\mathcal{L}(x) = G^*x + \sum_{k,j;k \neq j} L_{kj}^* x L_{kj} + xG,$$

donde

$$L_{kj} = \begin{cases} \sqrt{\gamma_{kj}^-} |e_j\rangle\langle e_k|, & \text{si } j < k \\ \sqrt{\gamma_{kj}^+} |e_j\rangle\langle e_k|, & \text{si } k < j, \end{cases}$$

$$G = - \sum_{k \in V} \left( \frac{\mu_k + \lambda_k}{2} + i\kappa_k \right) |e_k\rangle\langle e_k| = -\frac{1}{2} \sum_{k,j;k \neq j} L_{kj}^* L_{kj} - iH,$$

$$H = \sum_{k \in V} \kappa_k |e_k\rangle\langle e_k|.$$

Asumiremos las siguientes condiciones

$$\mu_k := \sum_{j \in V, j < k} \gamma_{kj}^- < \infty, \quad \lambda_k := \sum_{j \in V, j < k} \gamma_{kj}^+ < \infty$$

y

$$\sum_{j \in V, j < k} (|\xi_{kj}^-| + |\xi_{jk}^+|) < \infty,$$

tal que para todo  $k \in V$

$$\kappa_k := \sum_{j \in V, j < k} (\xi_{kj}^- + \xi_{jk}^+).$$

Los operadores  $L_{kj}$  son acotados. Si  $G$  es no acotado, es decir,  $\sup_{k \in V} (\mu_k + \lambda_k + |\kappa_k|) = +\infty$ , consideramos el SMC minimal construido de los operadores  $G; L_{kj}$ . El generador formal  $\mathcal{L}(x)$  esta bien definido como una forma cuadrática en  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ , donde  $\mathcal{V}$  es la variedad lineal generada por combinaciones lineales finitas de vectores  $e_k$ .

Las constantes reales  $\gamma_{kj}$ , llamadas las susceptibilidades generalizadas, son positivas y pueden ser interpretadas como tasas de saltos de  $e_k$  a  $e_j$ . Las constantes

reales  $\xi_{kj}$  son llamadas shifts Lamb generalizados. Algunas veces es conveniente distinguir estos coeficientes teniendo en mente el orden de los valores propios (energías)  $k, j$ , de esta forma nosotros denotaremos  $\varepsilon_j > \varepsilon_k$

$$\gamma_{kj}^+ = \gamma_{kj}, \quad \xi_{kj}^+ = \xi_{kj}, \quad \gamma_{jk}^- = \gamma_{jk}, \quad \xi_{jk}^- = \xi_{jk}.$$

En este modelo las constantes  $\gamma_{kj}^-$ ,  $\xi_{kj}^-$ ,  $\gamma_{jk}^+$ ,  $\xi_{jk}^+$  son dadas por

$$\gamma_{jk}^- = 2\Re(g|g|_{\omega}^-) \langle e_j, De_k \rangle|^2, \quad \xi_{jk}^- = \Im m(g|g|_{\omega}^-) \langle e_j, De_k \rangle|^2,$$

$$\gamma_{kj}^+ = 2\Re(g|g|_{\omega}^+) \langle e_j, De_k \rangle|^2, \quad \xi_{kj}^+ = \Im m(g|g|_{\omega}^+) \langle e_j, De_k \rangle|^2,$$

$$\omega = \varepsilon_j - \varepsilon_k, \quad \varepsilon_j > \varepsilon_k.$$

Las constantes  $(g|g|_{\omega}^-)$ ,  $(g|g|_{\omega}^+)$  son dadas por

$$(g|g|_{\omega}^-) = \pi \int_{S(\omega)} \frac{|g(x)|^2 e^{\beta\omega(x)}}{e^{\beta\omega(x)} - 1} d_S(x) - i p.p. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|g(x)|^2 e^{\beta\omega(x)}}{(e^{\beta\omega(x)} - 1)(\omega(x) - \omega)} dx,$$

$$(g|g|_{\omega}^+) = \pi \int_{S(\omega)} \frac{|g(x)|^2}{e^{\beta\omega(x)} - 1} d_S(x) - i p.p. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|g(x)|^2}{(e^{\beta\omega(x)} - 1)(\omega(x) - \omega)} dx.$$

donde  $\beta > 0$  es la inversa de la temperatura del campo Gaussiano de media cero, Gauge invariante,  $S(\omega)$  (con un abuso de la notación  $\omega$ ) denota la superficie  $S(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^d; \omega(x) = \omega\}$ ,  $d_S x$  la integral de superficie y p.p. la parte principal (ó valor principal) de la integral. Además, las funciones  $\omega$  y  $g$  satisfacen los siguientes supuestos físicos:

- (a) La función dispersión  $\omega : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$  es radial y estrictamente creciente a lo largo de cada semirecta empezando en 0,
- (b) El corte  $g$  pertenece a el espacio de Schwarz de funciones suaves rápidamente decrecientes en el infinito,
- (c) El corte  $g$  y la función de dispersión  $\omega$  satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\omega(x)} |g(x)|^2 dx \right| dt < \infty.$$

Elecciones frecuentes de la función de dispersión son las funciones  $\omega(x) = |x|$  y  $\omega(x) = |x|^2 + m$  ( $m \geq 0$ ). Con estas elecciones tenemos que la condición (c) se cumple para  $d \geq 2$  y  $d \geq 3$  respectivamente. Por lo tanto asumiremos también lo siguiente

- (d)  $d \geq 2$ .

En particular se sigue que

$$\gamma_{kj} = \gamma_{kj}^+ > 0 \text{ si y sólo si } \gamma_{jk} = \gamma_{jk}^- > 0$$

$$\text{y } \lambda_j > 0 \text{ si y sólo si } \mu_j > 0.$$

Sea  $\mathfrak{h}_p$  el espacio de Hilbert generado por  $\mathbb{G} = \{e_j; \mu_j = 0\}$ , y  $\mathfrak{h}_q = \mathfrak{h}_p^\perp$ . Vemos que  $\mu_j = 0$  si y sólo si

$$\gamma_{jk} = \gamma_{kj} = 0 \text{ para todo } k \in V.$$

Aumiremos ademas que:

- (A1)  $\gamma_{jk} \neq 0$  para todo  $e_k, e_j \in \mathfrak{h}_q$ .
- (A2) El SMC minimal es Markov (el semigrupo minimal es Markov si y sólo si su restricción a  $l^\infty(V)$  es Markov, ver [21]).
- (A3)  $Z := \sum_{k \in V} e^{-\beta \epsilon_k} < \infty$ . En este caso

$$\sigma = Z^{-1} \sum_{k \in V} e^{-\beta \epsilon_k} |e_k\rangle \langle e_k|$$

es un estado  $\mathcal{T}$ -invariante.

- (A4)  $H$  es degenerado en virtud de la proposición 3.2.3.

Por (A2), el teorema 3.3.1 (a) y (b) se cumplen. Entonces,

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) \subset \{L_k, L_k^*; \text{ para todo } k \in V\}'. \quad (3.4.3)$$

Si  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$ , por (3.4.3),  $x \in \{L_{kj}, L_{kj}^*; \text{ para todo } k \in V\}'$ , entonces

$$\langle e_s, L_{kj} x e_k \rangle = \langle e_s, x L_{kj} e_k \rangle,$$

equivalentemente  $\delta_{js} \sqrt{\gamma_{kj}} \langle e_k, x e_k \rangle = \sqrt{\gamma_{kj}} \langle e_s, x e_j \rangle$ . Usando (A1), se sigue que:

- (a) Si  $e_j \in \mathfrak{h}_q$  y  $e_s \neq e_j$  entonces  $\langle e_s, x e_j \rangle = 0$ , entonces  $pxq = 0$  y  $qxq$  es diagonal.
- (b) Si  $e_j \in \mathfrak{h}_q$  y  $e_s = e_j$  entonces  $\langle e_s, x e_s \rangle = \langle e_k, x e_k \rangle$  para todo  $e_k \in \mathfrak{h}_q$ , y por (a),  $qxq \in \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}_q}$ .
- (c) Si  $e_s \in \mathfrak{h}_q$  y  $e_j \in \mathfrak{h}_p$  entonces  $e_s \neq e_j$  y por (a), se sigue que  $\langle e_s, x e_j \rangle = \langle e_j, x^* e_s \rangle = 0$ , entonces  $qxp = 0$ .

Por lo tanto  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}_q}$ , es decir,  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}_q}$  y por el teorema 3.3.1(b),  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1 \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})$ , entonces  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}1$ .

Por el teorema 3.3.1(c), el ambiente induce decoherencia, donde  $\mathcal{T}_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$  para todo  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr} \rho \mathcal{T}_t(x) = 0$  para todo  $x \in (\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_q) - \mathbb{C}1_{\mathfrak{h}_q}) \cap \mathcal{N}(\mathcal{T})^{\perp \sigma}$  y para todo estado  $\rho$ .

### 3.4.3. Sistema de fermiones disipativo

Como se había dicho anteriormente, los semigrupos genéricos son derivados de un procedimiento llamado límite estocástico o límite de acoplamiento débil, el cual es un procedimiento de carácter matemático; pero a diferencia de este, existen otros modelos que se derivan de otro tipo de procedimientos. Uno de estos modelos es el que describiremos a continuación, el cual es derivado fenomenológicamente, como producto de un estudio de transporte electrónico del cual se dio un primer modelo introducido por un trabajo en conjunto realizado por Bellisard, Rebolledo, Spehner y von Waldenfelds (ver [14]). Posterior a este trabajo surgieron otros siguiendo las bases del transporte electrónico, entre estos trabajos está un reciente modelo descrito por Rebolledo en [63] el cual describe la dinámica de un sistema compuesto de fermiones bajo la interacción con el ambiente el cual contiene la acción de un campo magnético.

Por lo anterior seguiremos la referencia ([63]) para explicar la construcción de este SMC y seguiremos [9] para introducir los niveles de Landau para un electrón sencillo sometido a un campo magnético. Posteriormente, un sistema entero de electrones será considerado y subsecuentemente serán introducidas las perturbaciones dadas a la acción de un reservorio bosónico.

Consideremos el espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}_0 = L^2(\mathbb{R}^2)$  con base ortonormal descrita por el conjunto de funciones de Hermite,

$$e_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{x^2}{2}} h_n(x),$$

donde  $h_n$  denota el  $n$ -ésimo polinomio:

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

El argumento el cual justifica la elección de esta base ortonormal particular es que cada  $e_n$  es un vector propio de de el Hamiltoniano el cual describe un oscilador armónico  $H_0 = \frac{1}{2}P^2 + Q^2$  donde  $P$  denota el operador momentum y  $Q$ , el operador posición.

$$H_0 e_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) e_n.$$

Consideremos ahora la acción de un campo magnético actuando a lo largo de la dirección positiva del eje  $z$ . Suponemos que el campo es producido por un vector potencial  $V^\dagger = \frac{1}{2}(-y, x, 0)$  tal que el campo magnético es dado por  $\vec{B} = \nabla \times V^\dagger = (0, 0, 1)$ . La posición  $Q_-$  y el momentum  $P_-$  bajo el campo magnético son definidos por

$$Q_- = -i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2} \text{ y } P_- = -i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2}.$$

Entonces, el Hamiltoniano oscilador armónico es dado por  $H^\uparrow = \frac{1}{2}(P_-^2 + Q_-^2)$ .

Ahora, si suponemos que el campo magnético es orientado a lo largo del eje  $z$  en la dirección negativa, el cual tiene un vector potencial  $V^\downarrow = \frac{1}{2}(y, -x, 0)$  y  $\vec{B} = \nabla \times V^\downarrow = (0, 0, -1)$ . En consecuencia,

$$Q_+ = -i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}, P_+ = -i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \text{ y } H^\downarrow = \frac{1}{2}(P_+^2 + Q_+^2).$$

Considerando los dos Hamiltonianos, se puede ver que se obtiene la siguiente relación de conmutatividad  $[H^\uparrow, H^\downarrow] = 0$  y por lo tanto se puede escoger una familia de vectores ortonormales  $e_{m,l}$  tal que

$$H^\downarrow e_{m,l} = \left(m + \frac{1}{2}\right) e_{m,l} \text{ and } H^\uparrow e_{m,l} = \left(l + \frac{1}{2}\right) e_{m,l}.$$

Definimos  $S = \{\uparrow, \downarrow\}$  y consideramos dos aplicaciones  $E; d : S \times \mathbb{N}^2$  tal que para cualquier  $s \in S$ , y  $\mathbf{n} = (m, l)$ , ellos son dados por

$$E(s, \mathbf{n}) = \begin{cases} (m + \frac{1}{2}), & \text{if } s = \downarrow, \\ (l + \frac{1}{2}), & \text{if } s = \uparrow. \end{cases} \quad d(s, \mathbf{n}) = \begin{cases} l, & \text{if } s = \downarrow, \\ m, & \text{if } s = \uparrow. \end{cases}$$

Cada Hamiltoniano  $H^s$  es no acotado y tiene dominio

$$D(H^s) = \left\{ u = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2} \alpha(\mathbf{n}) e_{\mathbf{n}} \in \mathfrak{h}_0; \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2} (\alpha(\mathbf{n}) E(s, \mathbf{n}))^2 < \infty \right\}.$$

Bajo la acción de este campo, ha sido observado experimentalmente que los estados que pueden ser medidos saltan juntos en niveles de Landau separados por la energía ciclotrónica. Como el campo magnético es suave, los niveles de Landau se mueven relativos a la energía fermiónica.

Denotamos  $\mathfrak{h} = \Gamma_f(\mathfrak{h}_0)$ , el espacio de Fock fermiónico (ver sección 1.2). Dado que  $\mathbb{N}^2$  es un conjunto contable, escogeremos una enumeración fija, esto es, escribiremos

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k, \dots\},$$

donde  $\mathbf{n}_0 = (0, 0)$ ,  $\mathbf{n}_k = (m_k, l_k)$ .

El conjunto de todos los subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}^2$  es denotado por  $P_f(\mathbb{N}^2)$  y para cada  $F \in P_f(\mathbb{N}^2)$ , escribimos  $1_F$  la función característica de este conjunto. Entonces,  $1_F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  y llamaremos a esta función  $\eta = 1_F$  una configuración. Denotamos  $\mathfrak{C}$  el conjunto de todas las configuraciones, esto es

$$\mathfrak{C} = \{\eta : \mathbb{N}^2 \rightarrow \{0, 1\}; \eta(\mathbf{n}) = 1 \text{ para un número finito de puntos } \mathbf{n}\}$$

Dado  $\eta \in \mathcal{C}$ , su soporte es el conjunto finito mas pequeño  $\Lambda \subset \mathbb{N}^2$  tal que  $\eta(\mathbf{k}) = 0$  para todo  $\mathbf{k} \in \Lambda^c$ . Denotaremos  $\mathcal{C}(\Lambda)$  el conjunto de todas las configuraciones con soporte contenido en un conjunto finito  $\Lambda \subset \mathbb{N}^2$ .

Sea  $1_{\mathbf{k}}$  la configuración  $1_{\{\mathbf{k}\}}$ , ( $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2$ ) y para todo  $\eta = 1_{\{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m\}}$

$$\mathbf{b}^\dagger(\eta) = b_{\mathbf{n}_m}^\dagger b_{\mathbf{n}_{m-1}}^\dagger \dots b_{\mathbf{n}_1}^\dagger \text{ and } \mathbf{b}(\eta) = b_{\mathbf{n}_m} b_{\mathbf{n}_{m-1}} \dots b_{\mathbf{n}_1},$$

Donde  $b_{\mathbf{n}} := b(e_{\mathbf{n}})$ ,  $b_{\mathbf{n}}^\dagger := b^\dagger(e_{\mathbf{n}})$  con  $(e_{\mathbf{n}})$  base ortonormal de  $\mathfrak{h}_0$  y  $b(g)$  (respectivamente  $b^\dagger(g)$ ) son los operadores aniquilación (respectivamente operador creación) asociados con  $g \in \mathfrak{h}_0$ .

Denotamos por  $\mathbf{H}_0^s$  la segunda cuantización del Hamiltoniano  $H^s$ , definido por  $\mathbf{H}_0^s e(u) = e(H^s u)$ ,  $u \in D(H^s)$ .

Por lo tanto, el Hamiltoniano en el espacio de Fermi-Fock es dado por

$$\mathbf{H}^s = \mathbf{P}_a \mathbf{H}_0^s \mathbf{P}_a = \sum_i E(s, \mathbf{i}) b_{\mathbf{i}}^\dagger b_{\mathbf{i}}.$$

La  $C^*$  álgebra generada por  $\mathbf{1}$  y todos los elementos de la forma  $b(g)$ , tal que  $g \in \mathfrak{h}_0$  es denotada por  $\mathfrak{A}(\mathfrak{h}_0)$ . El álgebra  $\mathfrak{A}(\mathfrak{h}_0)$  es la clausura fuerte de  $\mathfrak{D} = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}^2)} \mathfrak{A}(\mathfrak{h}_0^\Delta)$ , donde  $\mathfrak{h}_0^\Delta$  es el espacio de Hilbert con base ortonormal  $(e_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n} \in \Delta}$ .

Para obtener una representación cíclica de  $\mathfrak{A}(\mathfrak{h}_0)$  llamaremos a  $|0\rangle$  el vector vacío en  $\mathfrak{h}$ , y  $|\eta\rangle = b_{\mathbf{n}}^\dagger(|\eta\rangle)|0\rangle$ . El conjunto  $(|\eta\rangle; \eta \in \mathcal{C})$  es una base ortonormal de  $\mathfrak{h}$ . Entonces, cualquier  $x \in \mathfrak{A}(\mathfrak{h}_0)$  puede ser representado como un operador  $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$  en la forma

$$x = \sum_{\eta, \zeta} x(\eta, \zeta) |\eta\rangle \langle \zeta|.$$

Además, para cada  $x \in \mathfrak{D}$ , existe un conjunto finito  $\Lambda \subset \mathbb{N}^2$  tal que la suma puede ser reducida a  $\eta, \zeta \in \mathcal{C}(\Lambda)$ . En particular, el dominio  $D(\mathbf{H}^s)$  incluye a  $\mathfrak{v}$ , el espacio vectorial generado por  $(|\eta\rangle; \eta \in \mathcal{C})$  y el Hamiltoniano  $\mathbf{H}^s$  puede formalmente ser escrito como  $\mathbf{H}^s = \sum_{\eta \in \mathcal{C}} E(s, \eta) |\eta\rangle \langle \eta|$ .

Consideraremos ahora la interacción del sistema principal con un reservorio de fonones. Esto será reflejado por medio del SMC, es decir, propondremos un generador del semigrupo.

El generador del SMC es formalmente definido para todo  $s \in S$  en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  por

$$\mathcal{L}^s(x) = i[\mathbf{H}^s, x] - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{ij} \in \mathbb{N}^2} (L_{\mathbf{ij}}(s)^* L_{\mathbf{ij}}(s)x - 2L_{\mathbf{ij}}(s)^* x L_{\mathbf{ij}}(s) + x L_{\mathbf{ij}}(s)^* L_{\mathbf{ij}}(s)), \quad (3.4.4)$$

Los operadores  $L_{\mathbf{ij}}(s)$  definidos como  $L_{\mathbf{ij}}(s) = \sqrt{c_{\mathbf{ij}}(s)} b_{\mathbf{j}}^\dagger b_{\mathbf{i}}$  con  $b_{\mathbf{n}}^\dagger = b^\dagger(e_{\mathbf{n}})$  (respectivamente  $b_{\mathbf{n}} = b(e_{\mathbf{n}})$ ) el operador creación (respectivamente, operador aniquilación) asociados con  $e_{\mathbf{n}} \in \mathfrak{h}_0$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$ .

Asumimos que para todo  $s \in S$  y todo  $i, j$ , se tiene que

$$c_{ij}(s) > 0 \text{ y } \sup_i \sum_{j \in \mathbb{N}^2} c_{ij}(s) < \infty.$$

También asumimos  $\mathbf{H}^s$  degenerado en virtud de la proposición 3.2.3.

Un cálculo elemental basado sobre las C.A.R. (ver ecuación (1.2.1)) lleva a

$$b_j^\dagger |\eta\rangle = (1 - \eta(j)) |\eta + 1_j\rangle,$$

$$b_i |\eta\rangle = \eta(i) |\eta - 1_i\rangle,$$

$$N_i |\eta\rangle := b_i^\dagger b_i |\eta\rangle,$$

para cualquier  $\eta \in \mathcal{E}$ .

Cada operador  $L_{ij}(s)$  es tal que  $\|L_{ij}(s)\| = \sqrt{c_{ij}(s)}$  entonces  $L_{ij}(s)$  es un operador acotado en  $\mathfrak{h} = \Gamma_{\mathcal{F}}(\mathfrak{h}_0)$ . Además,  $\mathfrak{v}$  es denso en  $\mathfrak{h}$ , y es dominio esencial para  $G = -i\mathbf{H}^s - \frac{1}{2} \sum_{ij \in \mathbb{N}^2} (L_{ij}(s))^* L_{ij}(s)$ , el cual es el generador de un semigrupo de contracción; es decir, las hipótesis (H-1) y (H-2) se cumplen tomando la variedad lineal  $D = \mathfrak{v}$  y la propiedad Markoviana es garantizada por  $\mathcal{L}^s(\mathbf{1}) = 0$ .

Agregamos a nuestro sistema un elemento extra que llamaremos cementerio completando  $\mathbb{N}^2$  con un punto  $\partial \notin \mathbb{N}^2$ . Asumimos que  $c_{i\partial}(s), c_{\partial i}(s) \geq 0$  y  $c_{\partial\partial}(s) = 0$ . Por otra parte, tomamos  $L_{i\partial} = \sqrt{c_{i\partial}(s)} b_i, L_{\partial j} = \sqrt{c_{\partial j}(s)} b_j^\dagger$  para todo  $i, j \in \mathbb{N}^2$ , y  $L_{\partial\partial} = 0$ . Las configuraciones son ahora definidas en  $\overline{\mathbb{N}^2} = \mathbb{N}^2 \cup \{\partial\}$ . Finalmente definimos  $E_\partial = \mu > 0$ , el cual llamaremos potencial químico. El generador  $\mathcal{L}^s(\cdot)$  es naturalmente extendido tomandola suma en (3.4.4) recorriendo sobre todos los índices  $(i, j) \in \overline{\mathbb{N}^2} \times \overline{\mathbb{N}^2}$ .

El teorema 3.3.1 (a) y (b) se cumplen. En particular

$$\mathcal{N}(\mathcal{G}) \subset \{L_{ij}(s), L_{ij}(s)^*; \text{ para todo } i, j \in \mathbb{N}^2\}'.$$

Sea  $\mathfrak{h}_p$  el espacio de Hilbert generado por

$$\mathbb{G} = \{|\eta\rangle; \eta \in \mathcal{E} \text{ and } c_{i\partial}(s) = c_{\partial i}(s) = 0 \text{ para todo } i \in \eta\}$$

y  $\mathfrak{h}_q = \mathfrak{h}_p^\perp$ .

Si  $x \in \{L_{ij}(s), L_{ij}(s)^*; \text{ para todo } i, j \in \mathbb{N}^2\}'$  entonces  $\langle \eta, L_{i\partial} x \eta' \rangle = \langle \eta, x L_{i\partial} \eta' \rangle$  para todo  $\eta, \eta' \in \mathfrak{h}_q$ , entonces

$$\sqrt{c_{i\partial}(s)} \langle \eta, b_i x \eta' \rangle = \sqrt{c_{i\partial}(s)} \langle \eta, x b_i \eta' \rangle \quad \text{con } c_{i\partial}(s) \neq 0$$

y

$$\sqrt{c_{\partial i}(s)} \langle \eta, b_i^\dagger x \eta' \rangle = \sqrt{c_{\partial i}(s)} \langle \eta, x b_i^\dagger \eta' \rangle \quad \text{con } c_{\partial i}(s) \neq 0$$

entonces  $x|_{\mathfrak{h}_q} \in \{b_k^\dagger|_{\mathfrak{h}_q}, b_k|_{\mathfrak{h}_q}, k \in \mathbb{N}^2\}' = \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{h}_q}$ .

Por lo tanto,

$$x = x|_{\mathfrak{h}_p} + \mathbf{1}_{\mathfrak{h}_q} = x|_{\mathfrak{h}_p} - \mathbf{1}_{\mathfrak{h}_p} + \mathbf{1}_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$$

es decir,  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$ .

Por el teorema 3.3.1(b),  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1} \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})$ , entonces  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_p) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$ . Además,

$$\sigma = \frac{1}{Z(s, \beta, \mu)} e^{-\beta(H^s - \mu N)}$$

es un estado de equilibrio fiel de el SMC  $\mathcal{T}^s$  si asumimos

$$e^{-\beta(E(s, i) - \mu)} c_{ij}(s) = e^{-\beta(E(s, j) - \mu)} c_{ji}(s)$$

y  $\beta > 0$ .

Por el teorema 3.3.1(c) el ambiente induce decoherencia, donde

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{N}(\mathcal{T})^{\perp \sigma}$$

con  $\mathfrak{h}_q = \mathfrak{h}_{p^\perp}$  y  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_q) \subset \mathcal{M}_0$ . Además,  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) \neq \mathbb{C}\mathbf{1}$  si y sólo si  $\mathfrak{h}_p \neq 0$ .

## Capítulo 4

# Curvatura de Wasserstein y SMCs genéricos tipo Gaussiano Gauge invariante

En este capítulo estudiamos una clase de tasa exponencial para la convergencia de semigrupos Markovianos cuánticos a un estado invariante usando una distancia de tipo Wasserstein. Esta distancia es la misma que se definió en el capítulo de este trabajo.

La tasa es denotada como  $\Sigma_d$  y la llamamos curvatura de Wasserstein cuántica puesto que es un análogo no conmutativo de la curvatura de Wasserstein clásica (también conocida como exponente de Chen)  $\sigma_d$  trabajada en procesos de Markov clásicos (ver [23],[24],[52],[66]). Aplicamos los resultados obtenidos para probar estimativas en SMCs de tipo Gaussiano Gauge invariante y específicamente en generadores ligados a procesos de nacimiento y muerte genéricos, es decir, estos resultados extienden algunos resultados dados en [20],[21] para SMCs. Usamos  $\Sigma_d$  y  $\sigma_d$  para mostrar que bajo ciertas condiciones la convergencia en  $\mathcal{W}_d$  implica convergencia en otra métrica y en consecuencia este mismo hecho muestra la importancia de estudiar estas tasas exponenciales.

El capítulo es organizado como sigue. En la sección 4.2 recordamos los aspectos básicos sobre curvatura de Wasserstein clásica y definimos su análogo cuántico usando la distancia  $\mathcal{W}_d$  definida en el capítulo 2. Algunas propiedades de la curvatura de Wasserstein cuántica y de la distancia  $\mathcal{W}_d$  son mostradas en esta sección. Recordamos algunas generalidades de semigrupos de Markov cuánticos y encontramos condiciones suficientes para la convergencia a un estado invariante en la sección 4.3. Finalmente, en la sección 4.4 mostramos una aplicación a generadores asociados a procesos de nacimiento y muerte. Específicamente vemos la

relación entre  $\sigma_d, \Sigma_d$  y la brecha espectral (ó spectral gap) de  $\mathcal{T}$ .

#### 4.1. Curvatura de Wasserstein clásica y cuántica

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado y sea

$$\{(X_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E}\}$$

un proceso cadlai (o cadlag) de salto Markoviano  $E$ -valuado. En esta sección  $E$  es un espacio Polaco dotado de una métrica  $d$ .

Consideremos  $Lip_d(E)$  el espacio de las funciones Lipschitz en  $E$  con una seminorma la cual llamaremos seminorma Lipschitz definida por

$$\|f\|_{Lip_d} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} < +\infty$$

y  $\mathfrak{B}(E)$  el espacio de las funciones medibles y acotadas en  $E$  dotado con su norma natural, la norma del supremo  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$ .

Sea  $(T_t)_{t \geq 0}$  el semigrupo de Markov actuando sobre el espacio  $\mathfrak{B}(E)$  como sigue:

$$T_t f(x) = \int_E f(y) P_t(x, dy), \quad P_t(x, dy) = \mathbb{P}_x(X_t \in dy), \quad x \in E.$$

Denotamos las medidas de probabilidad  $\mu$  definidas en  $E$  tales que

$$\int_E d(x, y) \mu(dy) < +\infty$$

para algún (o equivalentemente, para todo)  $x \in E$ , por  $\mathcal{P}_d(E)$ . Si el kernel (o núcleo) de Markov  $P_t(x, \cdot) \in \mathcal{P}_d(E)$  para cualquier  $t > 0$  y para cualquier  $x \in E$ , entonces el semigrupo es bien definido en el espacio  $Lip_d(E)$ , mas aún, en este caso se observa lo siguiente:

**Proposición 4.1.1.** *Bajo todas las suposiciones de esta sección, si el kernel (o núcleo) de Markov  $P_t(x, \cdot) \in \mathcal{P}_d(E)$  para cualquier  $t > 0$  y para cualquier  $x \in E$ , entonces  $T_t(f)$  esta bien definido para todo  $f \in Lip_d(E)$*

*Demostración.* Sea  $f \in Lip_d(E)$  como  $T_t f(x) = \int_E f(y) P_t(x, dy)$  entonces para un  $z \in E$  fijo se tiene

$$\begin{aligned} |T_t f(x)| &\leq \int_E |f(x) - f(z)| P_t(x, dy) + |f(z)| \\ &\leq \|f\|_{Lip_d} \int_E d(x, z) P_t(x, dy) + |f(z)| < \infty. \end{aligned}$$

□

Definimos

$$\bar{\sigma}_d(t) := -\sup\{\log \|T_t f\|_{Lip_d}; \|f\|_{Lip_d} = 1\}, \quad t \geq 0,$$

en particular vemos que  $\bar{\sigma}_d(0) = 0$ .

**Proposición 4.1.2.** Si suponemos que para cada  $t \geq 0$  tenemos que  $\bar{\sigma}_d(t) < \infty$  entonces

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\bar{\sigma}_d(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\bar{\sigma}_d(t)}{t}. \quad (4.1.1)$$

existe

*Demostración.* Por la propiedad de semigrupo de  $T_t$  y la definición de  $\bar{\sigma}_d(t)$  se sigue que

$$\begin{aligned} \|T_{t+s}(f)\|_{Lip_d} &= \|T_t(T_s(f))\|_{Lip_d} \leq e^{-\bar{\sigma}_d(t)} \|T_s(f)\|_{Lip_d} \\ &\leq e^{(-\bar{\sigma}_d(t) - \bar{\sigma}_d(s))} \|f\|_{Lip_d}. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad anterior y nuevamente la definición de  $\bar{\sigma}_d(t)$  tenemos

$$\log \left( \frac{\|T_{t+s}(f)\|_{Lip_d}}{\|f\|_{Lip_d}} \right) = -(\bar{\sigma}_d(t) + \bar{\sigma}_d(s)) \leq -\bar{\sigma}_d(t+s),$$

entonces  $\bar{\sigma}_d(t+s) \leq \bar{\sigma}_d(t) + \bar{\sigma}_d(s)$ , es decir  $\bar{\sigma}_d(t)$  es superaditiva y por un resultado asintótico se tiene que el siguiente limite existe

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\bar{\sigma}_d(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\bar{\sigma}_d(t)}{t}.$$

□

Por lo anterior definimos  $\sigma_d := \lim_{t \downarrow 0} \frac{\bar{\sigma}_d(t)}{t}$ . Es facil ver que el número  $\sigma_d$  es la mejor constante (maximal)  $\alpha$  en la desigualdad de contracción

$$\|T_t f\|_{Lip_d} \leq e^{-\alpha t} \|f\|_{Lip_d}, \quad f \in Lip_d(E), \quad t > 0.$$

**Definición 4.1.1.** Asumiendo  $P_t(x, \cdot) \in \mathcal{P}_d(E)$  para cualquier  $t > 0$  y cualquier  $x \in E$  y asumiendo que  $\bar{\sigma}_d(t) < \infty$  para todo  $t \geq 0$  decimos que el número  $\sigma_d$  dado por (4.1.1) es llamado *curvatura de Wasserstein* del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  con respecto a una metrica  $d$ .

Esta noción de curvatura fue introducida por Joulin [52] y Ollivier [59] y esta conectada a la noción de curvatura de Ricci en variedades Riemannianas (ver [72]).

En el resto de esta sección, asumiremos implícitamente que  $\bar{\sigma}_d(t) < \infty$  para todo  $t \geq 0$  y que el kernel  $P_t(x, \cdot)$  pertenece al espacio  $\mathcal{P}_d(E)$  para todo  $t > 0$  y cualquier  $x \in E$ .

Al igual que en el capítulo 2, recordamos a continuación la definición de distancia de Wasserstein clásica:

*Nota 4.1.1.* La distancia de Wasserstein clásica es definida por

$$w_d(\mu, \nu) = \inf_{\vartheta \in \Xi(\mu, \nu)} \int_{M \times M} d(m, n) d\vartheta(m, n)$$

donde  $(M, d)$  es un espacio métrico y  $\Xi(\mu, \nu)$  es el conjunto de todas las medidas de probabilidad Borel  $\vartheta$  en  $M \times M$  tal que para todo subconjunto medible  $A, B \subseteq X$

$$\vartheta(A \times M) = \mu(A), \quad \vartheta(M \times B) = \nu(B).$$

Cuando  $M$  es un espacio separable y  $d$  es semicontinua inferiormente el teorema de Kantorovich—Rubinstein da otra representación para la métrica de Wasserstein:

$$w_d(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_M f d(\mu - \nu); \quad f \in L_1(d|\mu - \nu|); \quad \|f\|_{Lip_d} \leq 1 \right\}$$

(para una prueba del teorema Kantorovich—Rubinstein ver por ejemplo [36]).

Por la nota 4.1.1, la curvatura de Wasserstein  $\sigma_d$  es la mejor constante (maximal)  $\alpha$  en la desigualdad

$$w_d(P_t(x, \cdot), P_t(y, \cdot)) \leq e^{-\alpha t} d(x, y), \quad x, y \in E, \quad t > 0. \quad (4.1.2)$$

De la desigualdad (4.1.2), podemos ver que la curvatura de Wasserstein esta relacionada con la ergodicidad del semigrupo. Más específicamente:

**Teorema 4.1.3.** Si  $\sigma > 0$  entonces el proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  admite una única distribución estacionaria  $\pi_e \in \mathcal{P}_d(E)$  tal que para todo  $x \in E$

$$w_d(P_t(x, \cdot), \pi_e) \leq e^{-\sigma t} \int_E d(x, y) \pi_e(dy) \rightarrow 0 \quad \text{if } t \rightarrow +\infty.$$

Para una demostración ver [23], teorema 5.23.

**Definición 4.1.2.** Sea  $\mathbb{M}$  el conjunto de todas las métricas definidas sobre  $V \times V$  ( $V$  es un conjunto contable). Dada una constante  $c > 0$ , denotamos:

$$\mathbb{M}_c = \{d \in \mathbb{M}; d(l, m) > c \text{ para todo } l \neq m, \}$$

y  $\mathbb{M}' = \cup_{c>0} \mathbb{M}_c$

En el caso cuántico, consideramos  $\mathfrak{h}$  finito dimensional (es decir,  $V$  es un conjunto finito) para evitar detalles técnicos, en esta situación tomamos  $\|x\| := \|x\|_\infty$  para todo  $x \in \mathfrak{h}$ . En el capítulo 2, definimos una versión cuántica de la distancia  $w_d$ . Recordamos su definición :

**Definición 4.1.3.** La *distancia de Wasserstein cuántica* entre dos estados

$$\varphi_{\sigma_1}(\cdot) = \text{tr}(\sigma_1(\cdot)), \quad \varphi_{\sigma_2}(\cdot) = \text{tr}(\sigma_2(\cdot)) \quad \text{in } \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$$

es definida por:

$$W_d(\sigma_1, \sigma_2) := W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) = \sup_{a \in \Upsilon} |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a)|$$

con

$$\Upsilon = \left\{ a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \sup_{m, l \in V, m \neq l} \|\delta_{ml}^d(a)\| \leq 1 \right\},$$

$$\delta_{ml}^d(a) = \frac{1}{d(m, l)} [(|e_m\rangle\langle e_l| + |e_l\rangle\langle e_m|), a],$$

y  $d$  una distancia definida en un conjunto contable  $V$ .

Sea  $\mathfrak{K}(\Upsilon) = \{a \in \Upsilon | a = a^*\}$ . Recordamos un resultado del capítulo 2 el cual nos será de mucha utilidad en este capítulo.

**Proposición 4.1.4.**

$$W_d(\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}) = \sup_{a \in \mathfrak{K}(\Upsilon)} |\text{tr}((\sigma_1 - \sigma_2)a)|$$

Para una demostración ver la proposición 2.2.5.

En el capítulo 2 también introducimos la siguiente esperanza condicional:

Sea  $\mathcal{E} : \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{D}$  la esperanza condicional con rango  $\mathcal{D}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h})) := \mathcal{D}$  (donde  $\mathcal{D}(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}))$  es la subálgebra diagonal de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ )

$$\mathcal{E}(x) = \sum_j x_{jj} |e_j\rangle\langle e_j| := \sum_j x(j) |e_j\rangle\langle e_j| \quad (4.1.3)$$

y sea  $\mathcal{E}_*$  la aplicación predual en los operadores clase traza con rango  $l_1(V)$

$$\mathcal{E}_*(\omega) = \sum_j \omega_{jj} |e_j\rangle\langle e_j|. \quad (4.1.4)$$

En la nota 2.2.3, ecuación (2.2.3), vemos que:

$$\sup_{m,l \in V, m \neq l} \|\delta_{ml}^d(\mathcal{E}(x))\| \leq 1 \text{ si y sólo si } \|x(\cdot)\|_{LIP_d} \leq 1.$$

Esta equivalencia es la motivación para la definición de curvatura de Wasserstein en el caso cuántico:

$$\text{si definimos } \|x\|_{LIP_d} := \sup_{m,l \in V, m \neq l} \|\delta_{ml}^d(x)\| \text{ para todo } x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \text{ y}$$

$$\bar{\Sigma}_d(t) := -\sup\{\log \|\mathcal{T}_t(x)\|_{LIP_d}; \|x\|_{LIP_d} = 1, x = x^*\},$$

en particular vemos que  $\bar{\Sigma}_d(0) = 0$ .

En analogía con el caso clásico, si suponemos que  $\bar{\Sigma}_d(t)$  es finita para todo  $t \geq 0$ , entonces por la propiedad de semigrupo de  $\mathcal{T}_t$ , se sigue que la función  $\bar{\Sigma}_d(t)$  es superaditiva así que el siguiente límite es bien definido:

$$\Sigma_d := \lim_{t \downarrow 0} \frac{\bar{\Sigma}_d(t)}{t} = \inf_{t \geq 0} \frac{\bar{\Sigma}_d(t)}{t}. \quad (4.1.5)$$

Además, el número  $\Sigma_d$  es la mejor constante (maximal)  $\alpha$  en la desigualdad de contracción

$$\|\mathcal{T}_t(x)\|_{LIP_d} \leq e^{-\alpha t} \|x\|_{LIP_d}, \quad t > 0, \quad x \in LIP_d(\mathfrak{B}(\mathfrak{h})), \quad x = x^*$$

donde  $LIP_d(\mathfrak{B}(\mathfrak{h})) := \{x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \|x\|_{LIP_d} < \infty\}$ . Usando la definición de  $W_d$  y la proposición 4.1.4, se sigue que

$$W_d(\mathcal{T}_{*t}(\rho_1), \mathcal{T}_{*t}(\rho_2)) \leq e^{-\Sigma_d t} W_d(\rho_1, \rho_2).$$

La curvatura de Wasserstein cuántica  $\Sigma_d$  es la mejor constante (maximal)  $\alpha$  cumpliendo simultáneamente las desigualdades

$$W_d(\mathcal{T}_{*t}(\rho_1), \mathcal{T}_{*t}(\rho_2)) \leq e^{-\alpha t} W_d(\rho_1, \rho_2)$$

y

$$\|\mathcal{T}_t(x)\|_{LIP} \leq e^{-\alpha t} \|x\|_{LIP}, \quad x = x^*.$$

En general, la positividad estricta de  $\Sigma_d$  no puede ser garantizada pero podemos encontrar condiciones suficientes. Recordando que

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \{x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}); \mathcal{T}_t(x^*x) = \mathcal{T}_t(x^*)\mathcal{T}_t(x), \mathcal{T}_t(xx^*) = \mathcal{T}_t(x)\mathcal{T}_t(x^*), \forall t \geq 0\}.$$

El siguiente teorema da una condición necesaria para la positividad de  $\Sigma_d$ .

**Teorema 4.1.5.** *Sea  $\mathcal{T}$  un SMC con una esperanza condicional*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{N}} : \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{T}) \text{ tal que } \mathcal{N}(\mathcal{T}) \neq \mathbb{C}\mathbf{1},$$

$[\mathcal{T}, \mathcal{E}_{\mathcal{N}}] = 0$  y  $\mathcal{T}_t(\mathcal{E}(x)) = e^{itH} \mathcal{E}(x) e^{-itH}$  para todo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , donde  $H$  es un operador autoadjunto entonces  $\Sigma_d \leq 0$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ,  $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{\mathcal{N}}$  y  $\rho_1, \rho_2$  dos estados diferentes tales que  $\mathcal{E}_{\mathcal{N}*}(\rho_1) = e^{-itH} \rho_1 e^{-itH}$  y  $\mathcal{E}_{\mathcal{N}*}(\rho_2) = e^{-itH} \rho_2 e^{itH}$ . Entonces

$$\begin{aligned} W_d(\rho_1, \rho_2) &= \sup_{\|x\|_{LIP_d} \leq 1} \text{tr}(\mathcal{E}_*(\rho_1 - \rho_2)(x)) = \sup_{\|x\|_{LIP_d} \leq 1} \text{tr}(e^{-itH}(\rho_1 - \rho_2)e^{itH} \mathcal{E}(x)) \\ &= \sup_{\|x\|_{LIP_d} \leq 1} \text{tr}((\rho_1 - \rho_2) \mathcal{T}_t(\mathcal{E}(x))) = W_d(\mathcal{T}_{*t}(\mathcal{E}_*(\rho_1)), \mathcal{T}_{*t}(\mathcal{E}_*(\rho_2))) \\ &\leq e^{-\Sigma_d t} \sup_{\|\mathcal{E}(x)\|_{LIP_d} \leq 1} \text{tr}((\rho_1 - \rho_2) \mathcal{E}(x)) \leq e^{-\Sigma_d t} W_d(\rho_1, \rho_2) \end{aligned}$$

Dado que  $W_d(\rho_1, \rho_2) > 0$  entonces  $\Sigma_d \leq 0$ .  $\square$

Cuando un SMC  $\mathcal{T}$  es definido en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , si existe un estado normal, fiel e invariante para  $\mathcal{T}$  y si  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) \neq \mathbb{C}\mathbf{1}$  entonces las hipótesis en el teorema 4.1.5 son satisfechas (ver Blanchard-Olkiewicz [15], teorema 12).

Del teorema anterior se obtiene un muy interesante resultado,

**Corolario 4.1.6.** *Si existe  $\rho$  estado normal, fiel e invariante y si  $\Sigma_d > 0$  entonces  $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathbb{C}\mathbf{1}$  y además el semigrupo es ergódico.*

*Si existe un espacio libre de decoherencia entonces  $\Sigma_d \leq 0$*

Usando la definición de  $\bar{\Sigma}_d(t)$ , vemos que si  $d \in \mathbb{M}^l$  entonces  $\Sigma_d \geq 0$ . En efecto, si  $d \in \mathbb{M}^l$  entonces  $d(l, m) > c$  para todo  $l \neq m$  con  $c > 2$  entonces

$$\|\mathcal{T}_t(x)\|_{LIP_d} \leq \sup_{l \neq m} \frac{1}{d(l, m)} \|\delta_{lm} \mathcal{T}_t(x)\| \leq \frac{2}{c} e^{t\|\mathcal{L}\|} \|x\|.$$

Por lo tanto

$$-\bar{\Sigma}_d(t) \leq \log \left( \frac{2}{c} e^{t\|\mathcal{L}\|} \right). \quad (4.1.6)$$

Usando la equivalencia

$$t \in \left[ 0, \frac{\log(c/2)}{\|\mathcal{L}\|} \right] \text{ iff } \log \left( \frac{2}{c} e^{t\|\mathcal{L}\|} \right) \leq 0$$

( $\log(c/2) > 0$  pues  $c > 2$ ) y la desigualdad (4.1.6), vemos que  $\bar{\Sigma}_d(t) \geq 0$  para todo  $t \in \left[ 0, \frac{\log(c/2)}{\|\mathcal{L}\|} \right]$  entonces

$$\Sigma_d = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\bar{\Sigma}_d(t)}{t} \geq 0.$$

En consecuencia, tenemos la siguiente afirmación:

**Teorema 4.1.7.** *Sea  $\mathcal{T}$  un SMC definido en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . Si  $d \in \mathbb{M}'$  entonces  $\Sigma_d \geq 0$ . En particular si  $\Sigma_d > 0$  entonces  $\mathcal{T}$  tiene a lo más un estado invariante.*

**Definición 4.1.4.** La constante  $\Sigma_d$  dada por la desigualdad (4.1.5) es llamada *curvatura de Wasserstein cuántica* de el SMC  $\mathcal{T}$  con respecto a la métrica  $d$ .

*Nota 4.1.2.* Si  $d \in \mathbb{M}_c$  entonces

$$\|\rho_1 - \rho_2\|_1 \leq \frac{2}{c} W_d(\rho_1, \rho_2),$$

donde  $\|\cdot\|_1$  es la norma traza.

En efecto, si  $d \in \mathbb{M}_c$  entonces  $\|x\|_{LIP} \leq \frac{2}{c}\|x\|$ , por lo tanto

$$\{x; \|x\| \leq 1\} \subset \{x; (c/2)\|x\|_{LIP} \leq 1\},$$

de esta forma tenemos

$$\begin{aligned} \frac{c}{2}\|\rho_1 - \rho_2\|_1 &= \frac{c}{2} \sup_{\|x\| \leq 1} \text{tr}(\rho_1 - \rho_2)x \leq \frac{c}{2} \sup_{(c/2)\|x\|_{LIP} \leq 1} \text{tr}(\rho_1 - \rho_2)x \\ &\leq \sup_{\|x\|_{LIP} \leq 1} \text{tr}(\rho_1 - \rho_2)x = W_d(\rho_1, \rho_2). \end{aligned}$$

En la siguiente sección, estudiamos la curvatura de Wasserstein cuántica en la estructura de SMCs genéricos. Nos enfocaremos principalmente en generadores asociados a procesos de nacimiento y muerte.

## 4.2. SMCs genéricos: el caso Gaussiano Gauge invariante

Introducimos SMCs genéricos en el caso Gaussiano Gauge invariante en las secciones 2.3.2 y 3.4.2. En esta sección, recordamos su construcción y principales propiedades de este semigrupo (una descripción mas detallada es encontrada en [5]).

Este SMC es definido en  $\mathfrak{h}$  donde  $\mathfrak{h}$  tiene base ortonormal dada por  $(e_k)_{k \in V}$ . Dicho semigrupo es obtenido en el límite estocástico de un sistema discreto con un Hamiltoniano genérico  $H_S = \sum_{k \in V} \epsilon_k |e_k\rangle\langle e_k|$ , interactuando con un campo Gaussiano Gauge invariante de media cero donde la inversa de la temperatura es denotada por la constante  $\beta > 0$ , el sistema actúa por medio de una interacción Hamiltoniana tipo dipolo

$$H_I = D \otimes A^+(g) + D^+ \otimes A(g)$$

donde  $D, D^+$  son un sistema de operadores, es decir, operadores en  $\mathfrak{h}$ , con dominio conteniendo a  $\mathcal{V}$ , de tal forma que  $\langle v, Du \rangle = \langle D^+v, u \rangle$  para todo  $u, v \in \mathcal{V}$  y satisfaciendo la condición

$$\sum_{n \geq 1} |\langle e_j, D^n e_k \rangle| \Gamma(\theta n)^{-1} < \infty \quad \text{with } \Gamma \text{ Euler Gamma function,}$$

para todo  $k, j \in V$  y para algún  $\theta \in (0, 1)$ .

Los operadores  $A(g)$  y  $A^+(g)$  son respectivamente los operadores creación y aniquilación (el ambiente es descrito por un espacio de Fock Bosónico sobre el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ ).

El generador es dado por

$$\mathcal{L}(x) = G^*x + \sum_{k,j;k \neq j} L_{kj}^* x L_{kj} + xG,$$

donde

$$L_{kj} = \begin{cases} \sqrt{\gamma_{kj}^-} |e_j\rangle \langle e_k|, & \text{if } j < k \\ \sqrt{\gamma_{kj}^+} |e_j\rangle \langle e_k|, & \text{if } k < j, \end{cases}$$

$$G = - \sum_{k \in V} \left( \frac{\mu_k + \lambda_k}{2} + i\kappa_k \right) |e_k\rangle \langle e_k| = -\frac{1}{2} \sum_{k,j;k \neq j} L_{kj}^* L_{kj} - iH,$$

$$H = \sum_{k \in V} \kappa_k |e_k\rangle \langle e_k|.$$

Asumiremos las siguientes condiciones

$$\mu_k := \sum_{j \in V, e_j < e_k} \gamma_{kj}^- < \infty, \quad \lambda_k := \sum_{j \in V, e_j < e_k} \gamma_{kj}^+ < \infty$$

y

$$\sum_{j \in V, e_j < e_k} (|\xi_{kj}^-| + |\xi_{jk}^+|) < \infty,$$

y definimos para todo  $k \in V$

$$\kappa_k := \sum_{j \in V, e_j < e_k} (\xi_{kj}^- + \xi_{jk}^+).$$

Los operadores  $L_{kj}$  son acotados.

Las constantes reales  $\gamma_{kj}$ , son llamadas susceptibilidades generalizadas, son positivas y pueden ser interpretadas como tasas de salto de  $e_k$  a  $e_j$ . Las constantes reales  $\xi_{kj}$  son llamadas shifts Lamb generalizadas. Algunas veces es conveniente distinguir estos coeficientes teniendo en mente el orden de los valores propios (energías)  $k, j$  y denotaremos para  $\varepsilon_j > \varepsilon_k$

$$\gamma_{kj}^+ = \gamma_{kj}, \quad \xi_{kj}^+ = \xi_{kj}, \quad \gamma_{jk}^- = \gamma_{jk}, \quad \xi_{jk}^- = \xi_{jk}.$$

En este modelo las constantes  $\gamma_{jk}^-$ ,  $\xi_{kj}^-$ ,  $\gamma_{jk}^+$ ,  $\xi_{jk}^+$  son dadas por

$$\begin{aligned}\gamma_{jk}^- &= 2\Re e(g|g)_\omega^- |\langle e_j, De_k \rangle|^2, & \xi_{jk}^- &= \Im m(g|g)_\omega^- |\langle e_j, De_k \rangle|^2, \\ \gamma_{kj}^+ &= 2\Re e(g|g)_\omega^+ |\langle e_j, De_k \rangle|^2, & \xi_{kj}^+ &= \Im m(g|g)_\omega^+ |\langle e_j, De_k \rangle|^2,\end{aligned}$$

$$\omega = \varepsilon_j - \varepsilon_k, \varepsilon_j > \varepsilon_k.$$

Las constantes  $(g|g)_\omega^-$ ,  $(g|g)_\omega^+$  son dadas por

$$\begin{aligned}(g|g)_\omega^- &= \pi \int_{S(\omega)} \frac{|g(x)|^2 e^{\beta\omega(x)}}{e^{\beta\omega(x)} - 1} d_S(x) - i.p.p. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|g(x)|^2 e^{\beta\omega(x)}}{(e^{\beta\omega(x)} - 1)(\omega(x) - \omega)} dx, \\ (g|g)_\omega^+ &= \pi \int_{S(\omega)} \frac{|g(x)|^2}{e^{\beta\omega(x)} - 1} d_S(x) - i.p.p. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|g(x)|^2}{(e^{\beta\omega(x)} - 1)(\omega(x) - \omega)} dx.\end{aligned}$$

Donde  $\beta > 0$ , como ya lo habíamos dicho es la inversa de la temperatura,  $S(\omega)$  (con abuso de la notación  $\omega$ ) denota la superficie

$$S(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^d; \omega(x) = \omega\},$$

$d_S(x)$  la integral de superficie y p.p. la parte principal de la integral. Además, las funciones  $\omega$  y  $g$  satisfacen las siguientes hipótesis física:

- (a) La función dispersión  $\omega : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$  es radial y estrictamente creciente a lo largo de cada semirecta empezando desde 0,
- (b) la función de test  $g$  pertenece al espacio de Schwarz de funciones suaves rápidamente decrecientes en el infinito,
- (c) la función de test  $g$  y la función dispersión  $\omega$  satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\omega(x)} |g(x)|^2 dx \right| dt < \infty.$$

Elecciones frecuentes de la función dispersión son  $\omega(x) = |x|$  y  $\omega(x) = |x|^2 + m$  ( $m \geq 0$ ). Con estas elecciones, la condición analítica (c) se cumple para  $d \geq 2$  y  $d \geq 3$  respectivamente. Por lo tanto, también asumiremos

- (d)  $d \geq 2$ .

Recordamos que el espacio de operadores sin diagonal es el subespacio cerrado (en norma, topologías fuertes y débil\*) de  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  tal que

$$\langle e_k, x e_k \rangle = 0 \text{ para todo } k \in V$$

y es denotado por  $\mathcal{D}_{off}$ . Las siguientes propiedades son importantes en esta sección:

**Teorema 4.2.1.** *La subálgebra abeliana  $\mathcal{D}$  y el espacio de operadores  $\mathcal{D}_{off}$  son  $\mathcal{T}_t$ -invariantes para todo  $t \geq 0$ . Además  $\mathcal{T}_t(x) = P_t^* x P_t$  para todo  $x \in \mathcal{D}_{off}$ .*

La afirmación es demostrada en el teorema 3,1 de [21].

El álgebra diagonal  $\mathcal{D}$  es claramente isomorfa isométricamente a el espacio de Banach  $l^\infty(V)$ . Identificando  $\mathcal{D}$  con  $l^\infty(V)$  y tomando la restricción de  $\mathcal{T}_t$  a  $\mathcal{D}$  encontramos un semigrupo sub-Markov débilmente-\* continuo  $T = (T_t)_{t \geq 0}$  en  $l^\infty(V)$ . El generador  $A$  es caracterizado (ver por ejemplo, [40], Lema 2.19) por

$$Dom(A) = Dom(L) \cap l^\infty(V), \quad Af = \mathcal{L}(f) \quad \text{para todo } f \in Dom(A).$$

Un cálculo sencillo muestra que el operador  $A$  satisface

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \gamma_{jk}^-, \quad \text{para todo } j, k \text{ with } k < j, \\ A_{kj} &= \gamma_{kj}^+, \quad \text{para todo } j, k \text{ with } j < k, \\ A_{kk} &= - \sum_{\{k \in V | \epsilon_k < \epsilon_j\}} \gamma_{jk}^- - \sum_{\{k \in V | \epsilon_j < \epsilon_k\}} \gamma_{jk}^+ = -(\mu_j + \lambda_j). \end{aligned}$$

Existe una formula de representación para el semigrupo genérico (ver [21] teorema 3.2 para la prueba):

**Teorema 4.2.2.** *El semigrupo de Markov cuántico  $\mathcal{T}$  satisface*

$$\mathcal{T}_t(x) = \Phi[e^{tA}](x) \text{ para todo } x \in \mathcal{D} \text{ y } \mathcal{T}_t(x) = P_t^* x P_t \text{ para todo } x \in \mathcal{D}_{off},$$

donde

$$\Phi[e^{tA}](x) = \sum_{k,j} (e^{tA})_{kj} \langle e_j, x e_j \rangle |e_k\rangle \langle e_k|.$$

Dada la estructura del SMC genérico  $\mathcal{T}$  es claro que  $\mathcal{T}$  restringido a  $\mathcal{D}$  define un semigrupo clásico  $T_t$  tal que  $T_t$  satisface una desigualdad análoga (con curvatura de Wasserstein clásica  $\sigma_d$ ) a la desigualdad (4.1.2) con respecto a la métrica clásica  $w_d$ . Mas aún:

**Teorema 4.2.3.** *Sea  $\mathcal{T}$  un SMC genérico tal que para todo  $n, m \in V$  existe un entero  $c_{mn}$  tal que  $\kappa_m = \kappa_n + c_{mn}\pi$  entonces:*

(a)

$$W_d(\mathcal{T}_{*t}(\rho_1), \mathcal{T}_{*t}(\rho_2)) \leq \left( e^{-\sigma_d t} + e^{-t \inf_{m \neq l} \frac{\mu_m + \lambda_m + \mu_l + \lambda_l}{2}} \right) W_d(\rho_1, \rho_2)$$

para todo  $\rho_1, \rho_2$  estados y para todo  $t > 0$ .

(b)  $\|\mathcal{T}_t(x)\|_{LIP} \leq e^{-tk} \|x\|_{LIP}$  para todo  $t > 0$ ; y para todo  $x$  autoadjunto con

$$k = \inf_{n \neq m} \left\{ \frac{\mu_n + \lambda_n + \mu_m + \lambda_m}{2} \wedge \sigma_d \right\}.$$

(c)

$$W_d(\mathcal{T}_{*t}(\rho_1), \mathcal{T}_{*t}(\rho_2)) \leq e^{-t \inf_{n,m} \left\{ \frac{\mu_n + \lambda_n + \mu_m + \lambda_m}{2} \wedge \sigma_d \right\}} W_d(\rho_1, \rho_2)$$

para todo  $\rho_1, \rho_2$  estados y para todo  $t > 0$ .

*Demostración.* (a) Sean  $\rho_1, \rho_2$  estados y  $\mathcal{E}^\perp := 1 - \mathcal{E}$  donde  $\mathcal{E}$  es definida por (4.1.3), entonces

$$\begin{aligned} W_d(\mathcal{T}_{*t}(\rho_1), \mathcal{T}_{*t}(\rho_2)) &= \sup_{\|x\|_{LIP} \leq 1} \text{tr}((\mathcal{T}_{*t}(\rho_1) - \mathcal{T}_{*t}(\rho_2))x) \\ &\leq \sup_{\|x\|_{LIP} \leq 1} \text{tr}((\mathcal{T}_{*t}(\rho_1) - \mathcal{T}_{*t}(\rho_2))\mathcal{E}(x)) + \sup_{\|x\|_{LIP} \leq 1} \text{tr}((\mathcal{T}_{*t}(\rho_1) - \mathcal{T}_{*t}(\rho_2))\mathcal{E}^\perp(x)) \\ &\leq e^{-\sigma_d t} W_d(\mathcal{E}_*(\rho_1), \mathcal{E}_*(\rho_2)) + \sup_{\|x\|_{LIP} \leq 1} \text{tr}((\rho_1 - \rho_2)P_t^* \mathcal{E}^\perp(x)P_t) \\ &\leq e^{-\sigma_d t} W_d(\rho_1, \rho_2) + \sup_{\|\mathcal{E}^\perp(x)\|_{LIP} \leq 1} \text{tr}((\rho_1 - \rho_2)P_t^* \mathcal{E}^\perp(x)P_t), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$W_d(\mathcal{T}_{*t}(\rho_1), \mathcal{T}_{*t}(\rho_2)) \leq e^{-\sigma_d t} W_d(\rho_1, \rho_2) + \sup_{\|\mathcal{E}^\perp(x)\|_{LIP} \leq 1} \text{tr}((\rho_1 - \rho_2)P_t^* \mathcal{E}^\perp(x)P_t). \quad (4.2.1)$$

Por otro lado, vemos que por la proposición 4.1.4, podemos asumir  $x$  autoadjunto, entonces

$$\begin{aligned} |\langle e_l, \delta_{lm}(P_t^* \mathcal{E}^\perp(x)P_t)e_l \rangle| &= |\langle e_m, \delta_{lm}(P_t^* \mathcal{E}^\perp(x)P_t)e_m \rangle| \\ &= 2|\text{Im}[e^{-t(\frac{\mu_m + \lambda_m}{2} - i\kappa_m + \frac{\mu_l + \lambda_l}{2} + i\kappa_l)} \langle e_m, \mathcal{E}^\perp(x)e_l \rangle]| \end{aligned}$$

y cero en otro caso. En consecuencia

$$\|P_t^* \mathcal{E}^\perp(x)P_t\|_{LIP} = 2 \sup_{l \neq m} \frac{1}{d(m, l)} e^{-t(\frac{\mu_m + \lambda_m + \mu_l + \lambda_l}{2})} |\text{Im} \langle e_m, \mathcal{E}^\perp(x)e_l \rangle|.$$

De forma similar, vemos que

$$\|\mathcal{E}^\perp(x)\|_{LIP} = 2 \sup_{l \neq m} \frac{1}{d(m, l)} |\text{Im} \langle e_m, \mathcal{E}^\perp(x)e_l \rangle|$$

entonces

$$\|P_t^* \mathcal{E}^\perp(x)P_t\|_{LIP} \leq 2e^{-t \inf_{m,l} \left\{ \frac{\mu_m + \lambda_m + \mu_l + \lambda_l}{2} \right\}} \|\mathcal{E}^\perp(x)\|_{LIP}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sup_{\|\mathcal{E}^\perp(x)\|_{LIP} \leq 1} \text{tr}((\rho_1 - \rho_2)P_t^* \mathcal{E}^\perp(x)P_t) &\leq \\ &\sup_{\|\mathcal{E}^\perp(x)\|_{LIP} \leq 1} \text{tr}((\rho_1 - \rho_2)P_t^* \mathcal{E}^\perp(x)P_t) \leq \\ &\frac{1}{2} e^{-t \inf_{m,l} \left\{ \frac{\mu_m + \lambda_m + \mu_l + \lambda_l}{2} \right\}} \|\mathcal{E}^\perp(x)\|_{LIP} \leq \\ &2e^{-t \inf_{m,l} \left\{ \frac{\mu_m + \lambda_m + \mu_l + \lambda_l}{2} \right\}} W_d(\rho_1, \rho_2). \end{aligned}$$

Usando la desigualdad (4.2.1) obtenemos la afirmación (a).

(b) Por analogía al ítem (a) se sigue que para todo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  tal que  $x = x^*$ :

$$|\langle en, \delta_{nm}(x)e_n \rangle| = |\langle em, \delta_{nm}(x)e_m \rangle| = |\langle e_n, xe_m \rangle - \langle e_m, xe_n \rangle|$$

y

$$|\langle en, \delta_{nm}(x)e_m \rangle| = |\langle em, \delta_{nm}(x)e_n \rangle| = |\langle e_n, xe_n \rangle - \langle e_m, xe_m \rangle|$$

entonces

$$\begin{aligned} \|\delta_{nm}(x)\| = \\ \text{máx}\{2|\text{Im}\langle e_m, \mathcal{E}^\perp(x)e_n \rangle|, |\langle e_m, \mathcal{E}(x)e_m \rangle - \langle e_n, \mathcal{E}(x)e_n \rangle|\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\delta_{nm}(\mathcal{T}_t(x))\| = \\ \text{máx}\{2e^{-t\left(\frac{\mu_n + \lambda_n + \mu_m + \lambda_m}{2}\right)}|\text{Im}\langle e_m, \mathcal{E}^\perp(x)e_n \rangle|, |\langle e_m, T_t(\mathcal{E}(x))e_m \rangle - \langle e_n, T_t(\mathcal{E}(x))e_n \rangle|\} \end{aligned}$$

Entonces existe  $k > 0$  tal que  $\|\delta_{nm}(\mathcal{T}_t(x))\| \leq d\|\delta_{nm}(x)\|$ , lo cual implica

$$\|\mathcal{T}_t(x)\|_{LIP} \leq k\|x\|_{LIP} \text{ para todo } x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \text{ autoadjunto.}$$

(c) Se sigue fácilmente del ítem (b), proposición 4.1.4, y definición de la métrica  $\mathcal{W}_d$ .  $\square$

De lo anterior obtenemos que existe una constante  $r > 0$  tal que  $\|\mathcal{T}_t(x)\|_{LIP} \leq r\|x\|$  para todo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ , en efecto, si  $x = x^*$  entonces por 4.2.3(b) existe  $r > 0$  tal que  $\|\mathcal{T}_t(x)\|_{LIP} \leq k\|x\|$ . La afirmación se sigue para  $x$  arbitrario, usando el hecho de que  $x$  puede ser descompuesto en una combinación lineal compleja de operadores autoadjuntos.

Vemos que  $\|\mathcal{T}_t(x)\|_{LIP} \leq k\|x\|$  implica que  $\bar{\Sigma}_d(t)$  es bien definido entonces podemos hablar sobre  $\Sigma_d$ . Además, podemos decir en este caso que existe una relación entre  $\sigma_d$  y  $\Sigma_d$ , usando el teorema 4.2.3(a).

**Corolario 4.2.4.** *Bajo las hipótesis del teorema 4.2.3, los siguientes hechos se cumplen:*

(a)  $\Sigma_d \leq \sigma_d$  para todo  $d \in \mathbb{M}$ .

(b) Si  $\sigma_d < 0$  entonces  $d \notin \mathbb{M}'$ .

(c) Si  $\mathcal{T}$  tiene un estado invariante  $\rho$ ,  $\sigma_d > 0$  y  $\inf_{m \neq l} \frac{\mu_l + \lambda_l + \mu_m + \lambda_m}{2} > 0$  entonces  $\mathcal{T}_{*t}(\rho_1) \rightarrow \rho$  si  $t \rightarrow \infty$  para todo estado  $\rho_1$ , en el sentido de la topología generada por  $\mathcal{W}_d$  y en el sentido de la topología generada por  $\|\cdot\|_1$ .

(d)

$$\min_{n \neq m} \left\{ \frac{\mu_n + \lambda_n + \mu_m + \lambda_m}{2} \wedge \sigma_d \right\} \leq \Sigma_d \leq \sigma_d.$$

*Demostración.* (a) Es claro que  $\|\mathcal{T}_t(x)\|_{Lip_d} \leq \|x\|_{Lip_d}$  para todo  $t > 0$  y para todo  $x \in \mathcal{D}$  entonces por la optimalidad de  $\sigma_d$  con respecto al semigrupo clásico  $T$  se sigue que  $\Sigma_d \leq \sigma_d$ .

(b) Por el ítem (a), si  $\sigma_d < 0$  entonces  $\Sigma_d < 0$ . La afirmación se sigue por aplicación del teorema 4.1.7.

(c) Se sigue por el teorema 4.2.3 (a) y la nota 4.1.2.

(d) Se sigue por el ítem (a) y el teorema 4.2.3 (b).  $\square$

### 4.3. Aplicación a generadores asociados a procesos de nacimiento y muerte

Suponemos  $\varepsilon_n < \varepsilon_m$  cuando  $m < n$ .

$A$  es llamado un generador asociado a un proceso de nacimiento y muerte cuando  $\gamma_{kj}^+ = 0$  y  $\gamma_{kj}^- = 0$  para  $|j - k| \geq 2$ . En este caso definimos  $\lambda_k := \gamma_{k,k+1}^+$  las tasas de nacimiento y  $\mu_k := \gamma_{k,k+1}^-$  las tasas de muerte; además, cuando las tasas de muerte son diferentes de cero, podemos definir los coeficientes potenciales

$$\mu_0 := 1, \quad \mu_n := \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}, \quad n \geq 1.$$

A continuación seguimos Joulin (ver [52]) para el cálculo de  $\sigma_d$  para  $A$ .

**Definición 4.3.1.** Dada una función  $u$  estrictamente positiva definida en  $V$ , definimos la métrica  $\mathbf{d} : V \times V \rightarrow [0, +\infty)$  como

$$\mathbf{d}(n, m) = \left| \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{m-1} u_k \right|, \quad u_{-1} := 1$$

En [52] calculan la curvatura de Wasserstein clásica asociada a esta métrica empleando la noción de operadores de acoplamiento usada por Chen (ver [23]).

**Proposición 4.3.1.** La curvatura de Wasserstein  $\sigma_d$  con respecto a la métrica  $\mathbf{d}$  del generador  $A$  asociado a un proceso de nacimiento y muerte es dado por la fórmula

$$\sigma_d = \inf_{n \in V} \left\{ \mu_{n+1} + \lambda_n - \mu_n \frac{u_{n-1}}{u_n} - \lambda_{n+1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}.$$

Una prueba de la proposición 4.3.1 puede ser encontrada en el teorema 4.3 en [52].

Usando el corolario 4.2.4(d) de la sección previa y la proposición 4.3.1, obtenemos lo siguiente:

**Teorema 4.3.2.** *Sea  $\mathcal{F}$  un SMC genérico tal que para todo  $n, m \in V$  existe un entero  $c_{mn}$  de tal forma que  $\kappa_m = \kappa_n + c_{mn}\pi$  entonces*

$$\min_{n \neq m} \left\{ \frac{\mu_n + \lambda_n + \mu_m + \lambda_m}{2} \wedge \inf_{n \in V} \left\{ \mu_{n+1} + \lambda_n - \mu_n \frac{u_{n-1}}{u_n} - \lambda_{n+1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\} \right\} \leq \Sigma_d$$

y

$$\Sigma_d \leq \inf_{n \in V} \left\{ \mu_{n+1} + \lambda_n - \mu_n \frac{u_{n-1}}{u_n} - \lambda_{n+1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}.$$

Estudiamos ahora, la relacion entre la curvatura de Wasserstein y la brecha espectral. Por lo tanto, empezamos introduciendo el concepto de brecha espectral. Seguimos [21].

Sea  $\rho$  un estado normal, fiel e invariante. El estado  $\rho$  induce un producto escalar ( y consecuentemente una norma tipo  $L^2$  ) en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ ,

$$\langle x, y \rangle_\rho = \text{tr} \left( \rho^{1/2} x^* \rho^{1/2} y \right) \quad \|x\|_\rho = \left( \text{tr} \left| \rho^{1/4} x \rho^{1/4} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Consideramos la forma cuadratica asociada con el generador  $\mathcal{L}$  y  $\rho$ ,

$$\mathcal{E}(x) = -\langle x, \mathcal{L}(x) \rangle = -\text{tr} \left( \rho^{1/2} x^* \rho^{1/2} \mathcal{L}(x) \right)$$

para todo  $x \in \text{Dom}(\mathcal{L})$ , y definimos la brecha espectral (o spectral gap) de  $\mathcal{L}$  como

$$\text{gap}(\mathcal{L}) = \inf \{ \mathcal{E}(x); \|x\|_\rho = 1, x \in \text{Dom}(\mathcal{L}), \langle x, \mathbf{1} \rangle_\rho = 0 \}.$$

La brecha espectral esta relacionada con las propiedades de convergencia del semigrupo; más precisamente  $\text{gap}(\mathcal{L})$  es el máximo valor real  $\alpha$  satisfaciendo la igualdad

$$\|\mathcal{T}_t(x - \langle x, \rho \rangle_\rho \mathbf{1})\|_\rho \leq e^{-\alpha t} \|x - \langle x, \rho \rangle_\rho \mathbf{1}\|_\rho,$$

para todo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ . En particular, si  $\langle x, \rho \rangle_\rho = 0$  entonces  $\|\mathcal{T}_t(x)\|_\rho \leq e^{-\alpha t} \|x\|_\rho$ . Por lo tanto, si conocemos que  $\text{gap}(\mathcal{L})$  es estrictamente positivo, podemos decir que todos los elementos  $x$  ortogonales a  $\mathbf{1}$  convergen a 0 con rapidez exponencial y con la misma tasa  $\alpha$ .

Usando las propiedades del generador genérico y denotando siempre por  $\mathcal{E}(x)$  la componente diagonal de  $x$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{C}(x)}{\|x\|_\rho^2} &= \frac{\mathcal{C}(\mathcal{E}(x)) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (A_{jj} + A_{ii}) \sqrt{\rho_i \rho_j} |x_{ij}|^2}{\|\mathcal{E}(x)\|_\rho^2 + \sum_{i \neq j} \sqrt{\rho_i \rho_j} |x_{ij}|^2} \\ &\geq \min \left\{ \frac{\mathcal{C}(\mathcal{E}(x))}{\|\mathcal{E}(x)\|_\rho^2}, \frac{1}{2} \inf_{i \neq j} (|A_{ii} + A_{jj}|) \right\}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad elemental  $a + bc + d \geq \min\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\}$ , para  $a, b, c, d$  positivos. Además, escogiendo  $x = \mathcal{E}(x)$  o  $x = |e_i\rangle\langle e_j|$ , tenemos las identidades

$$\begin{aligned} \text{gap}(\mathcal{L}) &= \inf_{x \neq 0, \langle x, 1 \rangle_\rho = 0} \frac{\mathcal{C}(x)}{\|x\|_\rho^2} \\ &= \min \left\{ \inf_{\mathcal{E}(x) \neq 0, \langle \mathcal{E}(x), 1 \rangle_\rho = 0} \frac{\mathcal{C}(\mathcal{E}(x))}{\|\mathcal{E}(x)\|_\rho^2}, \frac{1}{2} \inf_{i \neq j} (|A_{ii} + A_{jj}|) \right\} \\ &= \min \left\{ \text{gap}(A), \frac{1}{2} \inf_{i \neq j} (|A_{ii} + A_{jj}|) \right\}. \end{aligned}$$

Pero  $|A_{ii}| = E(|e_i\rangle\langle e_i|) \leq \text{gap}(A)$ , entonces  $\frac{1}{2}(|A_{ii} + A_{jj}|) \leq \text{gap}(A)$  y consecuentemente

$$\text{gap}(\mathcal{L}) = \text{gap}(A). \quad (4.3.1)$$

Chen usó un método de acoplamiento el cual nos entrega la siguiente formula para la brecha espectral:

**Teorema 4.3.3.** *Sea  $T$  un proceso de nacimiento y muerte clásico (Markoviano) y  $\rho$  es un estado normal, fiel e invariante para  $T$  (es decir,  $\rho$  es diagonal), con producción de entropía nula (es decir,  $\rho$  es un estado de equilibrio). Si  $A$  es el generador del semigroup  $T$  entonces*

$$\text{gap}(A) = \sup_{\mathbf{d} \in \mathbb{M}_+} \sigma_{\mathbf{d}}$$

donde

$$\mathbb{M}_+ = \left\{ \mathbf{d}; \mathbf{d}(n, m) = \left| \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{m-1} u_k \right|, u_{-1} := 1 \text{ con } u_k > 0 \text{ para todo } k \geq 0 \right\}$$

Ver teorema 1.1 en [24], para la prueba.

Usando el teorema 4.3.2, la igualdad (4.3.1), y el teorema 4.3.3, obtenemos fácilmente, la siguiente afirmación:

**Teorema 4.3.4.** Sea  $\mathcal{T}$  un SMC genérico el cual tiene un estado normal, fiel e invariante  $\rho$  con producción de entropía nula (es decir,  $\rho$  es un estado de equilibrio) y para todo  $n, m \in V$  existe un entero  $c_{mn}$  tal que  $\kappa_m = \kappa_n + c_{mn}\pi$  entonces

$$\sup_{d \in \mathbb{M}_+} \min_{n \neq m} \left\{ \frac{\mu_n + \lambda_n + \mu_m + \lambda_m}{2} \wedge \sigma_d \right\} \leq \sup_{d \in \mathbb{M}_+} \Sigma_d \leq \sup_{d \in \mathbb{M}_+} \sigma_d = \text{gap}(\mathcal{L}).$$

Usando el corolario 4.1.6, teorema 4.1.7 y el teorema 4.3.4, obtenemos:

**Corolario 4.3.5.** Bajo las mismas hipótesis del teorema 4.3.4, si

$$\sup_{d \in \mathbb{M}_+} \min_{n \neq m} \left\{ \frac{\mu_n + \lambda_n + \mu_m + \lambda_m}{2} \wedge \sigma_d \right\} = \sup_{d \in \mathbb{M}_+} \sigma_d$$

entonces

$$\sup_{d \in \mathbb{M}_+} \Sigma_d = \sup_{d \in \mathbb{M}_+} \sigma_d = \text{gap}(\mathcal{L}).$$

Adicionalmente: si  $\mathfrak{h}_p$  es el espacio de Hilbert generado por  $\mathbb{G} = \{e_j; \mu_j = 0\}$  es no trivial (es decir, existe un subespacio libre de decoherencia) entonces

$$0 \leq \sup_{d \in \mathbb{M}'_+} \Sigma_d \leq \sup_{d \in \mathbb{M}_+} \Sigma_d = \sup_{d \in \mathbb{M}_+} \sigma_d = \text{gap}(\mathcal{L}) \leq 0;$$

es decir,

$$\sup_{d \in \mathbb{M}'_+} \Sigma_d = \sup_{d \in \mathbb{M}_+} \Sigma_d = \sup_{d \in \mathbb{M}_+} \sigma_d = \text{gap}(\mathcal{L}) = 0,$$

donde  $\mathbb{M}'_+ := \mathbb{M}_+ \cap \mathbb{M}'$ .

La idea detrás de este último corolario es que para obtener ergodicidad exponencial debemos asegurar que  $\mu_j > 0$  para todo  $j$ . Esta condición es verdad en particular si  $T$  es irreducible.

**Definición 4.3.2.** El semigrupo de Markov clásico  $T$  es llamado *irreducible* si para todo  $i, j \in V$  existe  $n$  e índices  $i_1, \dots, i_n$  tales que  $\gamma_{ii_1} \gamma_{i_1 i_2} \dots \gamma_{i_n j} > 0$ , es decir, empezando de cualquier  $i$  es posible alcanzar cualquier  $j$  con probabilidad positiva.

**Corolario 4.3.6.** Sea  $\mathcal{T}$  un SMC genérico el cual posee un estado normal, fiel e invariante  $\rho$  el cual es diagonal, con producción de entropía nula (es decir,  $\rho$  es un estado de equilibrio), para todo  $n, m \in V$  existe un entero  $c_{mn}$  tal que  $\kappa_m = \kappa_n + c_{mn}\pi$  y existe  $d' \in \mathbb{M}_+$  tal que  $\sigma_{d'} > 0$  entonces  $\rho$  es el único estado invariante y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{*t}(\eta) = \rho, \quad \text{en las métricas: } W_{d'}, \quad \|\cdot\|_1, \text{ y } \|\cdot\|_\rho.$$

Además  $w^* \text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} = \text{tr}(\rho x) \mathbf{1}$  para todo estado normal  $\eta$  en  $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$  y todo  $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ .

## Conclusiones

En la primera contribución se definió una distancia  $W_d$  la cual se puede ver como un análogo no conmutativo de la distancia de Wasserstein. Suponiendo que era dado un SMC  $\mathcal{S}$  y un estado normal, fiel e invariante  $\rho$  y usando la distancia  $W_d$  definimos una tasa  $\text{pe}_{W_d}(\mathcal{S}, \rho)$  la cual llamamos  $W_d$ - tasa de producción de entropía. Nuestra afirmación central:  $\text{pe}_{W_d}(\mathcal{S}, \rho) = 0$  si y sólo si  $\rho$  es un estado de equilibrio, nos permite ver que la tasa  $\text{pe}_{W_d}(\mathcal{S}, \rho)$  es una forma de caracterizar el equilibrio y por ende el desequilibrio, la cual es compatible con la tasa de producción de entropía  $\text{pe}(\mathcal{S}, \rho)$  definida y trabajada por Fagnola y Rebolledo en [41] y [40]. Ilustramos el uso de esta tasa con dos ejemplos importantes en donde se muestra bajo que parámetros se caracteriza el equilibrio, recuperando algunas conclusiones obtenidas en [40]; pero usando una nueva metodología. Una de las conclusiones importantes de este capítulo es como se dijo anteriormente mostrar otra forma de caracterizar el no equilibrio, en este caso, usamos una métrica, a diferencia de la tasa  $\text{pe}(\mathcal{S}, \rho)$ , la cual es definida usando la entropía relativa, esta entropía relativa no es una métrica, es una separación, con esta simple observación podemos ver que el aporte de este capítulo es totalmente nuevo; pero que se conecta con el problema de medir ó caracterizar el no equilibrio en SMCs, este último es un programa reciente en el cual se han involucrado diferentes investigadores de Chile, Francia, México e Italia y el cual ha dejado como fruto diferentes trabajos (ver por ejemplo [40], [17] y [2]); donde el aporte presentado en esta contribución es diferente a los trabajos citados; pero que se conecta de forma natural con estos. Una observación interesante en esta primera contribución se puede notar cuando vemos que en los semigrupos genéricos (sección 2.3.2) la tasa  $\text{pe}_{W_d}(\mathcal{S}, \rho)$  es dada por la distancia de Wasserstein clásica  $w_d$ , lo cual nos sugiere una relación con la teoría del transporte óptimo clásica trabajada por Villani (ver [71]). Podemos por lo tanto pensar en establecer una teoría del transporte cuántico óptimo que tenga una conexión con no equilibrio en SMCs, este sería una pregunta abierta que deja esta tesis. Pretender responderla ahora sería algo ambicioso, por lo que se debería empezar por responder a preguntas mas concretas direccionadas en este sentido. Una de estas preguntas nace de observar que la distancia de Wasserstein clásica

posee otra forma alterna de expresión dada por el ínfimo sobre una colección de medidas de probabilidad conjunta (teorema de Kantorovich—Rubinstein). En el caso cuántico, no ha sido aún posible probar que exista una representación análoga para  $W_d$ , es decir, una de estas preguntas concretas a resolver es la existencia de un teorema tipo Kantorovich—Rubinstein para la métrica  $W_d$ .

Otro comentario importante con respecto a la primera contribución esta ligada a la siguiente observación: En este capítulo, como ya lo hemos mencionado suponemos que es dado el semigrupo  $\mathcal{S}$  y el estado invariante  $\rho$ . Luego fijamos una base ortogonal  $(e_k)_k$  en el espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$  que diagonaliza al estado  $\rho$ , una vez fijada esta base definimos la distancia  $W_d$  en términos de esta base; por lo tanto la distancia  $W_d$  es dependiente no sólo de la distancia  $d$  sino además de la base  $(e_k)_k$ . Para los fines de esta contribución, como podemos ver, no parece posible evitar la dependencia de  $W_d$  con respecto a la base  $(e_k)_k$ ; pero si se pretende emplear la  $W_d$  en otro tipo de problemas donde la base no intervenga, entonces una pregunta abierta e interesante sería plantear a  $W_d$  sin depender de  $(e_k)_k$ . En mi opinión esto dependerá del problema que busquemos resolver.

En la segunda contribución se definieron los subespacios libres de decoherencia, una definición de subespacios libres de decoherencia en espacios de Hilbert de dimensión finita fue trabajada en [13], nuestra definición contiene a ésta como un caso particular y se puede manejar en espacios de Hilbert de dimensión infinita, además, nuestra definición de subespacio libre de decoherencia nos permite hacer conexión con las subálgebras libres de decoherencia trabajadas en SMCs en varios artículos (por ejemplo [16] y [35]). Denominamos sectores libres de decoherencia a los subespacios y subálgebras libres de decoherencia y de lo anterior establecimos un aporte nuevo, donde además mostramos una relación no conocida entre los sectores libres de decoherencia, mostramos que en algunos casos la subálgebra libre de decoherencia puede ser generada por los operadores acotados definidos sobre los subespacios libres de decoherencia y que además se da lugar a la decoherencia inducida por el ambiente. Damos ejemplos de modelos donde se tiene esta situación y hacemos un estudio de decoherencia en dichos modelos. Todos estos aportes hacen una conexión inédita entre dos forma de trabajar la decoherencia y además de mostrar que estos dos sectores libres de decoherencia aparentemente sin conexión alguna, se pueden relacionar. Aprovechamos estas relaciones no conocidas para arrojar resultados nuevos en el estudio de decoherencia dado por los modelos. En el ejemplo de la sección 3.4.2 podemos ver que existen relaciones entre los subespacios libres de decoherencia y las susceptibilidades generalizadas de tal forma que si definimos un grafo no dirigido donde por ejemplo los vértices  $i, j$  del grafo están conectados si y sólo si la susceptibilidad generalizada asociada a  $i$  y  $j$  es diferente de cero. Construyendo un grafo de esta forma, podemos ver

que existe subespacio libre de decoherencia si y sólo si existen vertices aislados, esto nos sugiere una relación entre conectividad de grafos definidos por las susceptibilidades generalizadas o por los coeficientes de transporte y su repercusión fenomenológica en este tipo de semigrupos. Esta es sin duda, una pregunta abierta que buscamos estudiarla con más profundidad a futuro. Como hemos visto, tenemos por el momento un primer resultado parcial en esta dirección que involucra a subespacios libres de decoherencia. Por otro lado, los subespacios libres de decoherencia son un tipo de sectores donde se preserva o se protege el entrelazamiento, por lo tanto éstos son usados para estudiar el entrelazamiento cuántico en la evolución de un semigrupo (para un trabajo con este enfoque, ver por ejemplo [58]). Considerando que en nuestra segunda contribución damos un nuevo enfoque a los subespacios libres de decoherencia ligado al lenguaje de álgebras de operadores, este trabajo sugiere que a futuro se deba intentar explotar esta visión para el estudio de entrelazamiento cuántico.

En la tercera y última contribución de este trabajo volvemos a usar la distancia  $W_d$  pero esta vez para estudiar una tasa exponencial  $\Sigma_d$  dada en la convergencia hacia un estado invariante con respecto a la distancia  $W_d$ . La tasa  $\Sigma_d$  es llamada curvatura de Wasserstein cuántica y es una definición totalmente novedosa la cual es una extensión cuántica de la curvatura de Wasserstein clásica (o exponente de Chen) trabajada para procesos de Markov (ver por ejemplo [52] y [24]). En la contribución me centro totalmente sobre SMCs genéricos asociados a generadores de procesos de nacimiento y muerte. Hasta donde tengo conocimiento, es el primer trabajo en esta dirección para SMCs, por lo tanto, es natural que las preguntas abiertas sean muchas. En mi opinión, esta contribución es tan solo un primer paso para el estudio de convergencias en esta métrica. El nombre de curvatura de Wasserstein en el caso clásico, es por que en efecto, este concepto está asociado a una noción de curvatura de una cierta variedad Riemanniana llamada curvatura de Ricci (ver por ejemplo [72]). Esto sugiere estudiar las conexiones geométricas existentes para esta curvatura en geometría no conmutativa. Por otro lado, en el caso clásico, cuando se hacen cálculos explícitos de la curvatura se usan técnicas de acoplamiento para generadores de semigrupos, en el caso cuántico no se conoce este tipo de técnicas, lo cual fue una limitante de peso en el desarrollo de esta última contribución. De aquí surge otro problema abierto interesante: definir un concepto adecuado de acoplamiento de SMCs y técnicas para construir dichos acoplamientos, este problema también tiene relación con el problema abierto de encontrar un teorema tipo Kantorovich—Rubinstein para  $W_d$ , pues en el caso clásico, la prueba de este resultado descansa sobre técnicas de acoplamiento.

Como último comentario, quisiera notar que tal como se discute en el capítulo 2, la distancia  $W_d$  posee propiedades similares a la entropía relativa, esta última

ha sido usada en varios artículos de Física para establecer medidas de entrelazamiento, lo que sugiere intentar explorar la métrica  $W_d$  para este fin y tal como se dijo anteriormente, explotar el formalismo usado en el capítulo 3 para estudiar la protección de entrelazamiento en SMCs.

## Bibliografía

- [1] L. Accardi, F. Fagnola, S. Hachicha, *Generic  $q$ -Markov Semigroups and Speed of Convergence of  $q$ -Algorithms*, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **9**, 567 (2006).
- [2] L. Accardi, F. Fagnola, R. Quezada, *Weighted Detailed Balance and Local KMS condition for non-equilibrium stationary states*, *Bussei Kenkyu* **97**, 318 (2011).
- [3] L. Accardi, A. Frigerio, Y.G Lu, *Weak coupling limit as a quantum functional central limit theorem*, *Comm. Math. Phys.* **131**,537 (1990).
- [4] L. Accardi, S. Hachicha, H. Ouerdiane, *Generic Quantum Markov Semigroups: the Fock Case*, *Open Sys. Information Dyn.* **12**, 385 (2005).
- [5] L. Accardi, S. Kozyrev, *Lectures on Quantum Interacting Particle Systems*, in: *Quantum interacting particle systems (Trento, 2000)*, L. Accardi and F. Fagnola, eds., QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal. **14**, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, pp. 1–195.
- [6] L. Accardi, Y. G. Lu, I. Volovich, *Quantum theory and its stochastic limit*, Springer-Verlag, Berlin, (2002).
- [7] L. Accardi, Y. G. Lu, I. Volovich *Quantum Theory and Its Stochastic Limit*, Springer, New York. Phys. (2002).
- [8] G.S. Agarwal, *Open quantum Markovian systems and the microreversibility*, *Z. Physik* **258**, 409 (1973).

- [9] S.T Ali, F. Bagarello, G. Honnouvo, *Modular structures on trace class operators and applications to Landau levels*, Journal of Physics A: Math. Theor. **43** (2010).
- [10] R. Alicki, *On the detailed balance condition for non-Hamiltonian systems*, Rep. Math. Phys. **10** (1976).
- [11] R. Alicki, K: Lendi *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*, Lecture Notes in Physics **286**, (1987) Springer-Verlag, Berlin.
- [12] S. Attal, *Elements of Operators Algebras and Modular Theory*, Open Quantum Systems I: The Hamiltonian approach. Springer Verlag, Lectures Notes in Mathematics 2006, pp. 1–105.
- [13] D. Bacon, D. Lidar, K. Whaley, *Concatenating Decoherence-Free Subspaces with Quantum Error Correcting Codes*, Phys. Rev. Lett. **82**, 4556 (1999).
- [14] J. Bellisard, R. Rebolledo, D. Spehner, W. von Wandelfels *The quantum flow of electronic transport*, preprint Mathematical Physics.
- [15] Ph. Blanchard, R. Olkiewicz, *Decoherence as irreversible dynamical process in open quantum systems*, Open Quantum Systems III - Recent Developments, Lecture Notes in Mathematics 1882, Springer Berlin, Heidelberg (2006), pp. 117–159.
- [16] Ph. Blanchard, R. Olkiewicz, *Decoherence induced transition from quantum to classical dynamics*, Re. Math. Phys. **15**, 217 (2003).
- [17] J. Bolaños, R. Quezada, *A cycle decomposition and entropy production for circulant quantum Markov semigroups*, arXiv:1210.6401v1
- [18] O. Bratelli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, vol 1, second e.d., springer-Verlag, 1987
- [19] O. Bratelli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, vol 2, second e.d., springer-Verlag, 1996

- [20] R. Carbone, F. Fagnola, *Exponential  $L_2$ -convergence of quantum Markov semigroups on  $B(h)$* , Math. Notes **68**, 452 (2000).
- [21] R. Carbone, F. Fagnola, S. Hachicha, *Generic Quantum Markov Semigroups: the Gaussian Gauge Invariant Case*, Open Sys. Information Dyn. **14**, 425 (2007).
- [22] R. Carbone, E. Sasso, V. Umanità, *Decoherence for Quantum Markov Semigroups on Matrix Algebras*, Ann. Henri Poincaré (2012).
- [23] M. Chen, *From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems*, NJ: World Scientific (2004), 2nd ed. River Edge.
- [24] M. Chen, *Estimation of spectral gap for Markov chains*, Acta Math. Sin. **12** (4), 337 (1996).
- [25] A.M. Chebotarev, F. Fagnola, *Sufficient conditions for conservativity of minimal quantum dynamical semigroups*, J. Funct. Anal. **153** (1998).
- [26] I. Chuang, D. Lidar, K. Whaley, *Decoherence-Free Subspaces for Quantum Computation*, Phys. Rev. Lett. **81**, 12 (1998).
- [27] F. Cipriani, *Dirichlet forms and markovian semigroups on standard forms of von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **147**, 259 (1997).
- [28] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, CA, (1994).
- [29] E. B. Davies, *Markovian master equations*, Comm. Math. Phys. **39** (1974) .
- [30] E. B. Davies, *Markovian master equations II*, Math. Ann. **219** (1976) .
- [31] E. B. Davies, *One parameter semigroups*, Academic Press (1980).
- [32] J. Dereziński, W. De Roeck, *Extended weak coupling limit for Friedrichs Hamiltonians*, Journ. Math. Phys. **48** (2007).

- [33] J. Dereziński, W. De Roeck, *Extended weak coupling limit for Pauli-Fierz operators*, Comm. Math. Phys. **279** (2008).
- [34] J. Dereziński, R. Fruboos, *Fermi golden rule and open quantum systems*, Open Quantum Systems III - Recent Developments, Lecture Notes in Mathematics 1882, Springer Berlin, Heidelberg (2006), pp. 67116.
- [35] A. Dhahri, F. Fagnola, R. Rebolledo, *The decoherence-free subalgebra of a quantum Markov semigroup with unbounded generator*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **13** (2010).
- [36] R. Dudley, *Real analysis and probability*, Cambridge in Advanced Mathematics 74. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [37] K-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter Semigroups for Linear Evolutions Equations*, Springer, New York, 2000.
- [38] D.E Evans, *Irreducible quantum dynamical semigroups*, Comm. Math. Phys.,**54**, (1977).
- [39] F. Fagnola, *Quantum Markov semigroups and quantum flows*, Proyecciones. J. Math **18**, (3), (1999).
- [40] F. Fagnola, R. Rebolledo, *Entropy production for quantum Markov semigroups*, arXiv:1212.1366v1
- [41] F. Fagnola, R. Rebolledo, *From classical to quantum entropy production*, QP–PQ: Quantum Probab. White Noise Anal. **25**, 245 (2010).
- [42] F. Fagnola, R. Rebolledo, *Notes on qualitative behaviour of quantum Markov semigroups* , Open Quantum Systems III: Recent Developments. Springer Verlag, Lectures Notes in Mathematics 2006, pp. 161–206.
- [43] F. Fagnola, R. Rebolledo, *Algebraic conditions for convergence of a quantum Markov semigroup to a steady state*, Infinite Dimen. Anal. Appl. **11**, (3), 467 (2008).

- [44] F. Fagnola, R. Rebolledo, *Lectures on the qualitative analysis of quantum Markov semigroups in: Quantum interacting particle systems*, QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal. **14**, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (2002), pp. 197.
- [45] F. Fagnola, V. Umanità, *Generic Quantum Markov Semigroups, Cycle Decomposition and Deviation From Equilibrium*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **15** No. 3 (2012).
- [46] F. Fagnola, V. Umanità, *Generators of KMS symmetric Markov semigroups on  $\mathfrak{B}(h)$ . Symmetry and quantum detailed balance*, Commun. Math. Phys. **298**, 298 (2010).
- [47] F. Fagnola, V. Umanità, *Generators of detailed balance quantum Markov semigroups*, Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Rel. Topics **10**, 335 (2007).
- [48] A. Frigerio, *Stationary states of quantum dynamical semigroups*, Communications in Mathematical Physics **63**, (3), (1978).
- [49] A. Frigerio, *Quantum dynamical semigroups and approach to equilibrium*, Lett. Math. Phys., **2**, (1977).
- [50] A. Frigerio, M. Verri, *Long-time asymptotic properties of dynamical semigroups on  $W^*$ -algebras*, Math. Zeitschrift, **180**, (1982).
- [51] S. Goldstein, J.M. Lindsay, *Beurling-Deny condition for KMS symmetric dynamical semigroups*, C. R. Acad. Sci. Paris **317**, 1053 (1993).
- [52] A. Joulin, *Poisson-type deviation inequalities for curved continuous-time Markov chains*, Bernoulli **13** no. 3, 782, (2007).
- [53] A. Kossakowski, V. Gorini, M. Verri, *Quantum detailed balance and KMS condition*, Comm. Math. Phys. **57**, 97 (1977).
- [54] W.A. Majewski, *The detailed balance condition in quantum statistical mechanics*, J. Math. Phys. **25**, 614 (1984).

- [55] W.A. Majewski, R.F. Streater, *Detailed balance and quantum dynamical maps*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 7981 (1998).
- [56] P.A. Meyer, *Quantum Probability for Probabilists*, Lect. Notes Math. 1538, Springer-Verlag, (1994).
- [57] S.C. Moy, *Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces.*, Pacific J. Math. Volume 4, Number 1 (1954).
- [58] D. Mundarain, M. Orszag, *Decoherence Free Subspace and entanglement by interaction with a common squeezed bath*, Phys. Rev. A **75**, 4 (2007).
- [59] Y. Ollivier, *A survey of Ricci curvature for metric spaces and Markov chains, Probabilistic approach to geometry*, Adv. Stud. Pure Math., **57**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 343 (2010).
- [60] K.R. Parthasarathy, *An introduction to quantum stochastic calculus*, Monographs in Mathematics vol **85**, Birkhäuser- Verlag, Basel 1992.
- [61] G.K. Pedersen, *Analysis Now*, Graduate Texts in Math., vol **118** Springer Verlag, 1989.
- [62] D. Petz, *Conditional expectation in quantum probability*, in Quantum Probability and Applications III. Lecture Notes in Mathematics **1303** Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1988, pp. 251260.
- [63] R. Rebolledo, *Equilibrium Analysis of a Dissipative Fermion System*, Spectral Analysis of Quantum Hamiltonians, Spectral Days 2010. Birkhäuser, Operator Theory: Advances and Applications Volume 224, 2012, pp 277-299.
- [64] R. Rebolledo, *Complete Positivity and the Markov structure of Open Quantum Systems*, Open Quantum Systems II: The Markovian approach. Springer Verlag, Lectures Notes in Mathematics 2006, pp. 149–182.

- [65] R. Rebolledo, *Decoherence of quantum Markov semigroups*, Ann. I. H. Poincaré. **41**, 349 (2005).
- [66] M. Sammer, *Aspects of mass transportation in discrete concentration inequalities*, Ph.D. Thesis, Georgia: Georgia Institute of Technology. (2005), available at <http://smartech.gatech.edu/dspace/handle/1853/7006>.
- [67] M. Takesaki, *Conditional expectations in von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **9**, 306 (1972).
- [68] J. Tomiyama, *On the projection of norm one in  $W^*$ -algebras*, Proc. Japan Acad. **33** (1957), 608-612.
- [69] V. Umanità, *Classification and decomposition of quantum Markov semigroups*, Ph.D. Thesis, Università di Genova, (2005).
- [70] H. Umegaki *Conditional expectation in operator algebras*, I. Tohoku Math. J. **6** (1954), 177-181; II. **8** (1956), 86100; III. Kodai Math. Semi. Rep. **11** (1959), 51-64; IV. Kodai Math. Semi. Rep. **14** (1962), 59-85.
- [71] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Mathematics **58**, American Mathematical Society, Providence 2003.
- [72] M. von Renesse, K. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **58** **7**, 923 (2005).
- [73] S. Watanabe, *Ergodic theorems for  $W^*$ -dynamical semigroups*, Hokkaido Math. J., **8**, (1979).