MODELOS DE GEL'FAND GEOMETRICOS PARA ALGUNOS GRUPOS CLASICOS FINITOS

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

MARIA FRANCISCA YAÑEZ VALDES

Septiembre, 1990

Patrocinante: Dr. Jorge Soto Andrade

Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

INFORME DE APROBACION
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el Candidato

MARIA FRANCISCA YAÑEZ VALDES

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Patrocinante de Tesis

Dr. Jorge Soto Andrade ____________________

Comisión Informante de Tesis

Dr. Ricardo Baeza Rodríguez ____________________

Dr. Manuel Elgueta Dedes ____________________

Dr. José Pantoja Macari ____________________

Dr. Rolando Pomareda Rodríguez ____________________

Dr. Gonzalo Riera Lira ____________________

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi gratitud al Profesor Jorge Soto Andrade por haberme sugerido el problema, así como por el permanente interés, entusiasmo y apoyo brindado durante el desarrollo de esta investigación. Agradezco al Profesor George Lusztig por sus sugerencias y valiosos comentarios durante el Taller de Representaciones de Grupos, que tuviera lugar en Villa Carlos Paz, Córdoba, Argentina.

Agradezco el apoyo económico de Fundación Andes durante el transcurso de mis estudios de Doctorado.

Me siento muy reconocida con Carmen Lagos por la cuidadosa dactilografía de esta Tesis.

Finalmente, no puedo dejar de expresar mis agradecimientos a todas las personas con quienes compartí este período de mi vida.

A mi familia.

I N D I C E

Pág.

I N T R O D U C C I O N

Uno de los problemas fundamentales de la teoría de representaciones de grupos es la realización de las representaciones irreducibles de los grupos clásicos finitos y otros grupos. Uno de los métodos usados es la construcción de modelos de Gel'fand [GZ] es decir, de representaciones que contienen todas las representaciones irreducibles del grupo con multiplicidad uno. Ejemplos de tales modelos son el Modelo de Gel'fand según Klyachko para $GL(n,\mathbb{F}_q)$.

En relación con este problema es natural preguntarse por la posibilidad de construir un tal modelo a través de métodos geométricos.

Por ejemplo, de modo que el Modelo en cuestión sea una representación natural asociada a la acción del grupo en un conjunto.

Un ejemplo como este, es el caso del grupo de Lie compacto $G = SO_3$ para el cual la representación natural $(L^2(S^2),\tau)$ asociada a la acción natural de SO_3 sobre S^2 es un modelo de Gel'fand. En la descomposición de esta representación aparecen como funciones esféricas los polinomios de Legendre.

Para grupos finitos G, sin embargo, sólo existe en casos muy excepcionales un G-conjunto X tal que su representación natural $(L^2(X),\tau)$ sea un modelo de Gel'fand para G. Uno de estos ejemplos excepcionales es el caso de $G = PSL(2,\mathbb{F}_3)$ y $X = \mathbb{F}_9 \setminus \mathbb{F}_3$ provisto de la acción homográfica (de Mobius) de G. De este modo X es el doble cubrimiento del análogo finito del semiplano superior de Poincaré (Capítulo IV).

Así, para un grupo finito G, es sólo razonable pedir que existan G-conjuntos $X_1, \ldots, X_r$ transitivos tales que sus representaciones naturales $(L^2(X_i),\tau_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ no tengan multiplicidades, sean <u>transversales</u> dos a dos, es decir, $L^2(X_i)$ y $L^2(X_j)$ $(1 \leq i \neq j \leq r)$ sólo tienen en común la representación unidad (que se realiza en cada caso en el espacio de las funciones constantes) y tal que la suma directa de las representaciones naturales $L^2(X_i)$ <u>amalgamada sobre las constantes</u> (es decir, el espacio vectorial que se obtiene al identificar entre sí en $\bigoplus_{i=1} L^2(X_i) \cong L^2\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} X_i\right)$ las constantes de cada $L^2(X_i)$ con las de cada $L^2(X_j)$), es un modelo de Gel'fand M de G. Diremos, entonces, que M es un modelo de Gel'fand geométrico de largo r y que M está asociado al espacio geométrico $X = X_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} X_r$. Usualmente escribiremos $M = M_X$.

Un ejemplo donde es posible construir este tipo de modelo de Gel'fand es $G = PGL(2,\mathbb{F}_q)$ [S.A] para el cual el modelo geométrico de Gel'fand de largo tres es

$$M = L^2\left(\mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q\right) \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} L^2\left(\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_q)\right) \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} L^2\left(\mathbb{F}_q^{\times} / (\mathbb{F}_q^{\times})^2\right)$$

donde G actúa homográficamente sobre $\mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$, por la usual acción proyectiva sobre $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_q)$ y por el determinante módulo cuadrados sobre $\mathbb{F}_q^\times / (\mathbb{F}_q^\times)^2$.

Sin embargo, hemos demostrado que para $G = PSL(2,\mathbb{F}_p)$, $p > 5$, p un número primo, no es posible construir un modelo de Gel'fand geométrico (Capítulo III). Esto nos lleva a buscar otras maneras más generales de construir modelos de Gel'fand a partir de representaciones naturales de G . De este modo, es posible esperar construir modelos de Gel'fand M para un grupo finito G sumando y restando representaciones naturales canónicas de G , es decir asociadas a G-conjuntos transitivos. A este modelo lo llamamos Modelo de Gel'fand débilmente geométrico. Esto implica de hecho que M es la diferencia de dos representaciones naturales de G .

En términos de caracteres, la realización de un modelo de Gel'fand como un modelo de Gel'fand geométrico o débilmente geométrico implica que el carácter de Gel'fand χ_G de G , es decir, la suma de todos los caracteres irreducibles de G, se realiza a través del carácter χ_M del modelo de Gel'fand en cuestión. Luego, la posibilidad de realizar el modelo de Gel'fand como un modelo de Gel'fand geométrico o débilmente geométrico implica que el carácter de Gel'fand se puede calcular sumando y restando caracteres de permutación.

Pero existen otras formas de realizar el carácter de Gel'fand, como por ejemplo, construyendo una función central sobre G con valores en $\mathbb{Z}$. Un ejemplo de ello es el caso de $G = GL(n,\mathbb{F}_q)$ y la función Θ de G

en $\mathbb{N}$ definida por $g \to |\{h \in G \,/\, h\,{}^t h^{-1} = g\}|$, $(g \in G)$, donde ${}^t h$ significa la matriz transpuesta de h . R. Gow [Go1] demuestra que esta función realiza el carácter de Gel'fand χ_G .

Nuestro interés es en primer lugar determinar cuáles grupos admiten un modelo de Gel'fand geométrico o débilmente geométrico y en segundo lugar, realizar el carácter de Gel'fand χ_G para cualquier grupo finito, por ejemplo, construyendo directamente una función central del tipo de la función Θ .

En el Capítulo I después de citar algunas nociones y teoremas básicos acerca de la teoría de representaciones de grupos finitos, damos condiciones necesarias para que la realización de un modelo de Gel'fand de G sea posible vía un modelo de Gel'fand geométrico de G .

En el Capítulo II, construimos un modelo de Gel'fand geométrico para los grupos diedrales D_{2n} . En el caso que n es un número par, sólo existe dos espacios geométricos X, Y no equivalentes que suministran modelos de Gel'fand geométricos para D_{2n} y para n un número impar existe un único espacio geométrico Z de modo que M_Z es un modelo de Gel'fand para G . Todos los espacios se obtienen considerando la acción natural del grupo sobre el n-ágono.

En el Capítulo III, demostramos que no es posible construir un modelo de Gel'fand geométrico para $G = PSL(2, \mathbb{F}_p)$, $p > 5$, p primo. Ya que se conocen todos los subgrupos H de G es posible decidir primeramente para cuales de ellos la representación natural $L^2(G \,/\, H)$ tiene multiplicidades. Luego, usando el criterio mencionado en el Capítulo I y algunos elementos de la teoría de grupos finitos, obtenemos una ecuación que nos permite terminar la demostración analizando un número finito de casos.

En el Capítulo IV construimos un modelo de Gel'fand geométrico de largo uno para $PSL(2,\mathbb{F}_3)$. Además obtenemos un modelo de Gel'fand geomé - trico de largo dos para $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ considerando la acción natural de G sobre $X_1 = (\mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5)\setminus\{(0,0)\}/\sim$ donde $(x,y) \sim (-x,-y)$ y la acción de G a través del isomorfismo con $SL(2,\mathbb{F}_4)$ sobre $X_2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_4)$.

En el Capítulo V obtenemos un modelo de Gel'fand débilmente geométrico para $G = PSL(2,\mathbb{F}_q)$ (car $\mathbb{F}_q \neq 2$). Para ello debemos distinguir entre los casos $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ y $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$. En el primer caso el modelo es

$$M = L^2(G / B) + L^2(G / G) - L^2(G / D)$$

donde D es un subgrupo diedral de orden $(q - 1)$ de G y B es un subgrupo diedral de orden $(q - 1) / 2$ de D. En el segundo caso el modelo es

$$M \cong L^2(G / J) + L^2(G / H) + L^2(G / T) - L^2(G / K) - L^2(G / G) ,$$

donde H es un subgrupo diedral de orden $q + 1$ de G, J es el subgrupo cíclico de orden $(q + 1) / 2$ de H, K es el subgrupo diedral de H de orden $(q + 1) / 2$ y T es el subgrupo normalizador de un q-subgrupo de Sylow.

En el Capítulo VI construimos un modelo de Gel'fand débilmente geométrico para $G_n = GL(n,\mathbb{F}_q)$, a partir del Modelo de Gel'fand según

Klyachko $M \cong \bigoplus_{0\leq 2k<n} T_k(n)$ de G, [K]. Demostramos que cada una de las representaciones inducidas $T_k(n)$ de G es una <u>suma signada</u> (es decir combinación lineal con coeficientes $1,-1$ de representaciones naturales canónicas de G) . Para ello usamos un resultado de G. Lusztig el cual demuestra que la representación de Steinberg del grupo afín se puede construir a partir de la acción del grupo afín sobre el conjunto de las banderas afines completas de un espacio afín dado. En seguida demostramos que la representación de Gel'fand-Graev de G_n es una suma signada de representaciones naturales asociadas a ciertos conjuntos de banderas afines. Luego, demostramos que la representación $T_k(n)$ es isomorfa a la representación inducida del producto tensorial de la representación de Gel'fand-Graev de G_{n-2k} con la representación natural canónica $L^2(G_{2k}/Sp_k)$ de G_{2k} desde el subgrupo $N(k)$ de G definido por $N(k) = \begin{pmatrix} G_{n-2k} & * \\ 0 & G_{2k} \end{pmatrix}$ a G .

De este modo, queda demostrado que $T_k(n)$ es isomorfa a una suma signada de ciertas representaciones naturales, es decir, $T_k(n)$ pertenece al <u>anillo de Burnside</u> de las representaciones naturales de G , y por lo tanto la suma directa de todas las representaciones $T_k(n)$ es un modelo de Gel'fand débilmente geométrico de G .

En particular conjeturamos que el modelo de Gel'fand M de todo grupo finito G pertenece al anillo de Burnside de las representaciones naturales de G y al menos para los grupos clásicos es una suma signada de representaciones naturales canónicas. Como consecuencia de ésto, se desprende una segunda conjetura, a saber, que el carácter de Gel'fand χ_G de un grupo finito G es un carácter de permutación generalizado.

Por último, en el Capítulo VII demostramos que el carácter de Gel'fand χ_G de un grupo finito se puede realizar como una "traza torcida" vía la función t de G en $\mathbb{C}$ definida por $t(g) = tr(\rho_g \circ T)$ $(g \in G)$ donde T es un automorfismo involutivo de $L^2(G)$. Establecemos que cuando es posible definir un antiautomorfismo involutivo J de G tal que verifique:

i) $J(g)$ es conjugado a g $(g \in G)$.

ii) El número de los elementos J-invariantes en G es igual a la suma de las dimensiones de todas las representaciones irreducibles de G, entonces el automorfismo T es igual al automorfismo $J^* = ? \circ J$ de $L^2(G)$ deducido de J. Observamos que en este caso se tiene

$$t(g) = |\{h \in G \,/\, hJ(h)^{-1} = g\}| \ .$$

Por lo tanto se concluye que $\chi_G(g)$ es positivo o nulo.

Conocemos bastantes ejemplos de grupos G para los cuales χ_G toma sólo valores en $\mathbb{N}$ (en particular $G = S_n$ ó $GL(n,\mathbb{F}_q)$).

Sin embargo, para los grupos de Mathieu se puede verificar inspeccionando la tabla de caracteres que $\chi_G(g) < 0$ para algunos $g \in G$ [Sh]. Esto demuestra que existen grupos para los cuales no es posible realizar el carácter de Gel'fand vía la función t.

Es claro que para aquellos grupos cuyas representaciones irreducibles son reales (es decir realizables por matrices reales) el automorfismo de

G viene dado por aquel que envía g en g^{-1} $(g \in G)$. Ejemplos de estos grupos son D_{2n}, S_n $(n \in \mathbb{N})$.

Por otro lado se concluye de los resultados de Gow, o bien se demuestra directamente apoyándose en un resultado de Klyachko (ver Capítulo VII), que para $G = GL(n, \mathbb{F}_q)$ el antiautomorfismo adecuado es el que envía g en ${}^t g$ $(g \in G)$.

Quedan como preguntas abiertas, entre otras, las siguientes:

1. ¿Admite PGL_n ó GL_n un modelo de Gel'fand geométrico?
2. Construir modelos de Gel'fand débilmente geométricos para los otros grupos clásicos.
3. Demostrar que el carácter de Gel'fand es siempre un carácter de permutación generalizado.
4. Caracterizar los grupos G para los cuales χ_G toma sólo valores en $\mathbb{N}$.

CAPITULO I

TEORIA DE REPRESENTACIONES DE GRUPOS FINITOS

1. REPRESENTACIONES LINEALES DE GRUPOS FINITOS.

1.1. Representación lineal compleja de G .

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Denotemos por $Aut(V)$ al grupo de todos los automorfismos de V . Sea G un grupo finito. Una representación lineal compleja de G en V es un homomorfismo ρ de G en $Aut(V)$. Al espacio V se le denomina el espacio de la representación ρ y se designa por V_ρ . Se dice que G actúa sobre V_ρ por ρ . Se define la dimensión de ρ como la dimensión de V_ρ y la denotamos por $\dim \rho$.

1.2. Homomorfismo u operador de entrelazamiento.

Sean ρ y ρ' dos representaciones de G , se denomina homomorfismo u operador de entrelazamiento de ρ en ρ' a toda aplicación $\mathbb{C}$-lineal ϕ de V_ρ en $V_{\rho'}$ tal que

$$\rho'_g \circ \phi = \phi \circ \rho_g \qquad\qquad (g \in G) .$$

Un homomorfismo de V_ρ en V_ρ se denomina un endomorfismo de V_ρ .

1.3. Representaciones isomorfas.

Se dice que dos representaciones ρ y ρ' de G son isomorfas si existe un isomorfismo de ρ en ρ' . Usualmente identificaremos las representaciones isomorfas.

1.4. Carácter de G .

Una representación de G de dimensión uno es un homomorfismo μ de G en el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$ de $\mathbb{C}$. Se denomina carácter de G a toda representación unidimensional de G . En particular el carácter unidad $\underline{1}$ es el homomorfismo de G en $\mathbb{C}^\times$ que asigna el valor 1 a todo elemento de G .

1.5. Sea ρ una representación de G y sea H un subgrupo de G . Supongamos que μ es un carácter de H para el cual existe un vector no nulo $v \in V_\rho$ tal que

$$\rho_h(v) = \mu(h)v \qquad\qquad (h \in H) ,$$

entonces se dice que μ es un valor propio de H (respecto de ρ) y v es un vector propio de H asociado a μ .

1.6. Subrepresentación de una representación de G .

Sea ρ una representación de G y V' un subespacio de V_ρ tal que

$$\rho_g(v) \in V' \qquad\qquad (v \in V' \ , \ \ g \in G) \ ,$$

entonces V' es denominado <u>subespacio estable por</u> ρ o <u>subespacio</u> G-<u>estable</u>.

Luego, las restricciones de los ρ_g a V' constituyen una representación ρ' de G con V' como espacio de la representación. A esta representación de G se le llama subrepresentación de ρ y se escribe $\rho' \leq \rho$.

1.7. <u>Suma directa de representaciones de</u> G .

Sea (V,ρ) una representación de G y (V',ρ') una subrepresentación de ρ . Por un teorema de Maschke [S] el subespacio V' tiene un complemento en V , es decir, existe otro subespacio G-estable V'' de V tal que $V = V' \oplus V''$. Sea ρ'' la correspondiente subrepresentación de ρ . Entonces se dice que ρ <u>es suma directa</u> de ρ' y ρ'' se escribe $\rho = \rho' \oplus \rho''$. Claramente $\dim \rho = \dim \rho' + \dim \rho''$. La suma directa de n-representaciones de G , todas isomorfas a ρ , se denota por $n\rho$.

1.8. <u>Representación irreducible de</u> G .

Una <u>representación</u> ρ <u>de</u> G <u>es irreducible</u> si no contiene ninguna subrepresentación ρ' de dimensión no nula menor que $\dim \rho$. Por un teorema de Maschke esto es equivalente a decir que ρ no puede ser descompuesta en una suma directa $\rho = \rho' \oplus \rho''$ con $0 < \dim \rho' < \dim \rho$. Por lo tanto toda representación ρ de G de dimensión finita, puede ser descompuesta en una suma directa (canónica)

$$\rho = \bigoplus_{i=1}^{k} n_i \rho_i \ ,$$

donde los ρ_i son representaciones irreducibles no isomorfas de G. Esta descomposición es única salvo el orden de los sumandos $n_i\rho_i$.

1.9. Multiplicidad de una representación irreducible.

Sean ρ y ρ' dos representaciones de G , entonces $[\rho,\rho']$ designa la dimensión del subespacio vectorial $\mathrm{Hom}_G(V_\rho,V_{\rho'})$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho,V_{\rho'})$, de todos los operadores de entrelazamiento de V_ρ en $V_{\rho'}$. Podemos considerar V_ρ y $V_{\rho'}$ como módulos sobre el anillo de grupo $\mathbb{C}[G]$ de G . Claramente $[\rho,\rho'] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V_\rho,V_{\rho'})$. La forma $[\rho,\rho']$ es simétrica y bilineal con respecto a la suma directa. Si ambas representaciones ρ y ρ' son irreducibles, entonces, por el Lema de Schur, $[\rho,\rho'] = 1$ si $\rho \cong \rho'$ y $[\rho,\rho'] = 0$ si $\rho \not\cong \rho'$ [S].

Luego dos representaciones no tienen en común ninguna representación irreducible de G sí y sólo si $[\rho,\rho'] = 0$. En particular una representación irreducible ρ aparece en una representación ρ' sí y sólo si $[\rho,\rho'] \neq 0$. Luego, la multiplicidad de la representación irreducible ρ en la representación ρ' , es decir, el número de veces que ρ aparece en una descomposición en suma directa de ρ' , es $[\rho,\rho']$.

1.10. Algebra conmutante de una representación ρ de G .

Sea $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}V_\rho = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V_\rho,V_\rho)$. Esta es un álgebra con la composición de operadores. Esta álgebra es llamada el álgebra de Schur ó álgebra conmutante de ρ . Si (V,ρ) es una representación irreducible de G , entonces $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}\, nV$ es isomorfa a $M_n(\mathbb{C})$, el álgebra de todas las matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Si $\rho = \bigoplus n_i \rho_i$ es la descomposición en representaciones irreducibles de ρ , entonces, por el Lema de Schur, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]} V_\rho = \bigoplus M_{n_i}(\mathbb{C})$. Luego

$$[\rho,\rho] = \Sigma\, n_i^2 \ .$$

1.11. <u>Componente isotípica</u>.

Sea (V,ρ) una representación de G y (U_i,π_i) $(1 \leq i \leq k)$ todas las representaciones irreducibles de G tales que $[\pi_i,\rho] = n_i$, $n_i \neq 0$. Luego V se descompone en suma directa de subespacios G-estables V_{ji} irreducibles, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n_i$, tales que $V_{ji} \cong U_i$ $1 \leq j \leq n_i$ y

$$V = \bigoplus_{1\leq i\leq k} \left(\bigoplus_{1\leq j\leq n_i} V_{ji} \right)$$

Se llama componente isotípica de tipo π_i de ρ , al subespacio G-estable $I_{\pi_i}(V) =: \bigoplus_{1\leq j\leq n_i} V_{ji}$ de V .

1.12. <u>Representación natural de</u> G .

En general a todo G-conjunto X , es decir un conjunto X provisto de una acción de G en X , podemos asociar una representación $(L^2(X),\tau)$ de G , donde $L^2(X)$ es el espacio de Hilbert de todas las funciones complejas sobre X provisto del producto escalar:

$$\langle f,h \rangle = \sum_{x\in X} f(x)\overline{h(x)} \qquad (f,h \in L^2(X)) \ ,$$

cuya acción τ está definida por:

$$\tau_g(f)(x) = f(g^{-1}\cdot x)$$

ó

$$\tau_g(f)(x) = f(x\cdot g) \qquad (g \in G \text{ , } f \in L^2(X) \text{ , } x \in X)$$

según la acción sea por la izquierda o por la derecha. La representación $(L^2(X),\tau)$ es llamada <u>representación natural de</u> G <u>asociada a</u> X .

1.13. <u>Representación regular de</u> G .

En particular G actúa sobre sí mismo transitivamente vía multiplicar por la derecha, $x \to xg$ $(x \in G \text{ , } g \in G)$, o por la izquierda, $x \to gx$ $(x \in G \text{ , } g \in G)$. Se denomina <u>representación regular derecha</u> ρ de G a la representación natural $(L^2(G),\rho)$ asociada a la acción por la derecha de G en G y análogamente $(L^2(G),\sigma)$ denota la <u>representación regular izquierda</u> de G .

1.14. Toda representación irreducible (U,π) de G es de dimensión finita y puede ser inyectada en la representación regular derecha $(L^2(G),\rho)$ de G . Más aún $[\pi,\rho] = \dim \pi$. [S].

Sea $\rho = \bigoplus_{i=1}^{k} n_i\pi_i$ una descomposición canónica de ρ , luego $n_i = \dim \pi_i$, el número de representaciones irreducibles de G es finito, $|G| = \Sigma\, n_i^2$ y $L^2(G) = \bigoplus_{i=1}^{k} I_{\pi_i}(L^2(G))$.

1.15. Carácter de una representación de G .

Sea (V,π) una representación de dimensión n de G . Se define $\chi_\pi(g)$ $(g \in G)$ como la traza de π_g ; donde π_g es considerada como un elemento de $GL(n,\mathbb{C})$. Es claro que $\chi_\pi(g)$ no depende de la base elegida en V . Luego $\chi_\pi : G \to \mathbb{C}$ es una función bien definida, denominada el carácter de la representación π de G .

Además

i) χ_π es constante sobre las clases de conjugación en G .

ii) $\chi_{\pi_1} + \chi_{\pi_2} = \chi_{\pi_1 \oplus \pi_2}$

iii) Sean π y π' dos representaciones de G entonces $[\pi,\pi'] =$
$= \langle \chi_\pi, \chi_{\pi'} \rangle$.

2. REPRESENTACIONES INDUCIDAS.

2.1. Sea G un grupo finito, H un subgrupo de G y (W,τ) una representación de H . Designamos por V al espacio vectorial de todas las funciones $f : G \to W$ que satisfacen

$$f(gh) = \tau_{h^{-1}}(f(g)) \qquad (h \in H \ , \ g \in G) \ .$$

Luego, para definir un elemento $f \in V$ es suficiente dar sus valores sobre un sistema de representantes de G/H, (clases laterales derechas de G módulo H). Definimos la siguiente acción $\tilde{\tau}$ de G sobre V

$$\tilde{\tau}_s(f)(g) = f(s^{-1}g) \qquad (s,g \in G \ , \ f \in V) \ .$$

La representación $(V,\tilde{\tau})$ de G, así obtenida, es llamada <u>representación inducida de</u> τ <u>desde</u> H <u>a</u> G y es denotada por $\operatorname{Ind}_{H\uparrow G} \tau$.

2.2. Es claro que $\underline{\dim} \operatorname{Ind}_{H\uparrow G} \tau = [G : H] \dim \tau$.

2.3. Observemos que la representación $\operatorname{Ind}_{H\uparrow G} \underline{1}$ de G es isomorfa a la representación natural $L^2(G/H)$ de G y $L^2(G) = \operatorname{Ind}_{\{e\}\uparrow G} \underline{1}$.

2.4. Una primera propiedad de las representaciones inducidas es la <u>transitividad</u>:

TEOREMA [S]. Sean H y K subgrupos de G tales que $H < K < G$ y sea (W,τ) una representación de H entonces

$$\operatorname{Ind}_{K\uparrow G} \left(\operatorname{Ind}_{H\uparrow K} \tau \right) = \operatorname{Ind}_{H\uparrow G} \tau$$

2.5. Una segunda propiedad (universal) es lo que expresa el <u>teorema de la reciprocidad de Frobenius</u>, a saber

TEOREMA [S]. Sean (V,π) una representación irreducible de G y (V',π') una representación irreducible de un subgrupo H de G. La multiplicidad de la representación π en la representación $\operatorname{Ind}_{H\uparrow G} \pi'$ de G es igual a la multiplicidad de la representación $\operatorname{Res}_{G\downarrow H} \pi$ de H en la representación irreducible π' de H, es decir

$$[\pi, \operatorname{Ind}_{H\uparrow G} \pi']_G = [\operatorname{Res}_{G\downarrow H} \pi, \pi']_H$$

2.6. Una última propiedad que usaremos en este trabajo es la que se refiere a la restricción de una representación inducida.

TEOREMA [S]. Sea G un grupo finito, H,K subgrupos de G y sea (V,π) una representación del subgrupo H. Para cada $g \in G$, designemos por (V,π^g) a la representación de $K \cap H^g$ definida por: $\pi^g(x) = \pi(gxg^{-1})$ $(x \in K \cap H^g)$, entonces

$$\operatorname*{Res}_{G\downarrow K}\left(\operatorname*{Ind}_{H\uparrow G} \pi\right) = \bigoplus_{H\backslash g_i/K} \operatorname*{Ind}_{K\cap H^{g_i}\uparrow K} \pi^{g_i}$$

donde $\{g_i : i = 1, \ldots, k\}$ es un sistema de representantes de las dobles clases de G respecto de H y K.

2.7. Carácter de una representación inducida.

Sea (V,τ) una representación de un subgrupo H de un grupo finito G y sea $\tilde{\tau} = \operatorname*{Ind}_{H\uparrow G} \tau$ entonces el carácter $\chi_{\tilde{\tau}}$ de la representación $\tilde{\tau}$ de G puede ser calculado a partir del carácter χ_τ de τ por la siguiente expresión

$$\chi_{\tilde{\tau}}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{r\in R} \tilde{\chi}_\tau(r^{-1}gr)$$

donde $\tilde{\chi}_\tau$ es la función sobre G que se anula fuera de H y coincide con χ_τ sobre H y R es un sistema de representantes de las clases laterales derechas de G módulo H.

2.8. Representaciones irreducibles de un grupo finito que es producto semidirecto de dos subgrupos.

TEOREMA DE MACKEY [S]. Sea $G = H \ltimes K$, K abeliano. Sea $\omega \in \hat{K}$ un carácter de K y Γ_ω el subgrupo de H de todos los $h \in H$ tales que $\omega^h = \omega$, donde $\omega^h(k) = \omega(h^{-1}kh)$, $(k \in K)$. Entonces toda representación irreducible de G es de la forma

$$\pi^{\omega,\rho} = \operatorname*{Ind}_{\Gamma_\omega K \uparrow G} \omega \otimes \rho$$

donde $\omega \in \hat{K}$, $\rho \in (\Gamma_\omega)^\wedge$. Además $\pi^{\omega,\rho}$ es isomorfa a $\pi^{\omega',\rho'}$ sí y solamente si ω y ω' pertenecen a la misma órbita y $\rho' = \rho$.

3. REPRESENTACIONES NATURALES DE G .

3.1. G-Conjuntos equivalentes.

Sean (X_1,γ^1) y (X_2,γ^2) dos G-conjuntos. Se dice que X_1 es G-equivalente a X_2 si existe una biyección ϕ de X_1 en X_2 tal que

$$\phi \circ \gamma_g^1 = \gamma_g^2 \circ \phi \qquad (g \in G \ , \ x_i \in X_i)$$

Sea H un subgrupo de G , entonces $(L^2(G/H),\tau)$ es la representación natural de G asociada a la acción por la izquierda de G en G/H , $xH \to gxH$ $(g \in G \ , \ xH \in G/H)$.

Dado un G-conjunto X transitivo y un punto $x_o \in X$ se define el subgrupo K de G de todos los elementos $g \in G$ tales que $g \cdot x_o = x_o$.

Se denomina a K el <u>subgrupo estabilizador del punto</u> x_o y se denota por $K = \mathrm{Stab}_G \{x_o\}$. Es inmediato que si $x' \in X$, $x' \neq x_o$ y $K' = \mathrm{Stab}_G \{x'\}$ entonces existe $g \in G$ tal que $K' = K^g$.

Sea X un G-conjunto transitivo y K el subgrupo estabilizador de un punto $x_o \in X$, entonces X y G/K son G-equivalentes. Además, para todo $g \in G$ los G-conjuntos G/K y G/K^g son equivalentes.

3.2. Claramente si dos G-conjuntos son G-equivalentes entonces sus representaciones naturales asociados son isomorfas.

3.3. Sean (X_1,γ^1) y (X_2,γ^2) dos G-conjuntos entonces $X_1 \dot{\cup} X_2$ es un G-conjunto con la acción γ definida por $\gamma_g(x_i) = \gamma_g^i(x_i)$ $(g \in G ,$ $x_i \in X_i)$. Además, claramente

$$L^2((X_1 \dot{\cup} X_2),\gamma) \cong L^2(X_1,\gamma^1) \oplus L^2(X_2,\gamma_2) .$$

Inversamente si X es un G-conjunto entonces X se descompone en órbitas disjuntas X_i $(1 \leq i \leq r)$ y $L^2(X) \cong L^2(X_1) \oplus \ldots \oplus L^2(X_r)$.

3.4. Otra forma de obtener un nuevo G-conjunto a partir de dos G-conjuntos X_1 y X_2 es considerando la acción producto de G sobre $X_1 \times X_2$. Es inmediato que la representación natural $L^2(X_1 \times X_2)$ es isomorfa al producto tensorial $(L^2(X_1) \otimes L^2(X_2), \tau_1 \otimes \tau_2)$ de las representaciones naturales $L^2(X_i)$ donde la acción lineal $\tau_1 \otimes \tau_2$ está definida por

$$(\tau_1(g) \otimes \tau_2(g))(f_1 \otimes f_2) = \tau_1(g)(f_1) \otimes \tau_2(g)(f_2)$$

$$(g \in G , f_i \in L^2(X_i)) .$$

Se extiende linealmente a todo elemento f no descomponible de $L^2(X_1) \otimes L^2(X_2)$.

3.5. Representación natural canónica.

Diremos que una representación natural $(L^2(X),\tau)$ de G es canónica sí y sólo si X es un G-conjunto transitivo.

3.6. Representaciones naturales canónicas transversales.

Es claro que en toda representación natural canónica aparece la representación unidad, realizada por el espacio de las funciones constantes, con multiplicidad 1.

Diremos que dos representaciones naturales canónicas $L^2(X)$ y $L^2(Y)$ son transversales y anotaremos $L^2(X) \pitchfork L^2(Y)$ sí y sólo si tienen en común sólo la representación unidad.

3.7. Suma directa de representaciones naturales canónicas amalgamada sobre las constantes.

Sean $L^2(X_i)$ representaciones naturales canónicas de G $(1 \leq i \leq n)$ y sea $L^2(X) = L^2\left(\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}} X_i\right)$.

Notemos que la componente isotípica $I_{\underline{1}}(L^2(X))$ de tipo $\underline{1}$ de $L^2(X)$ es el espacio de todas las funciones $f \in L^2(X)$ tales que $f_{|X_i} = \underline{\lambda_i}$, $(1 \leq i \leq n)$ donde $\underline{\lambda_i}$ denota la función constante igual a λ_i con $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Descomponemos $I_{\underline{1}}(L^2(X))$ en la suma directa ortogonal del espacio de las funciones constantes sobre X y el subespacio W de las funciones $f \in I_{\underline{1}}(L^2(X))$ tales que si $f_{|X_i} = \underline{\lambda_i}$ $(1 \leq i \leq n)$

entonces $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

Luego $(L^2(X)/W,\overline{\tau})$ es una representación de G y dado que W es un subespacio de $I_1(L^2(X))$ es claro que la componente isotípica $I_{\underline{1}}(L^2(X)/W)$ es igual a $I_1(L^2(X))/W$, con lo cual la representación $(L^2(X)/W,\overline{\tau})$ de G contiene a la representación unidad con multiplicidad uno. Diremos que $L^2(X)/W$ es la <u>suma directa amalgamada sobre las constantes</u> de las representaciones naturales canónicas $L^2(X_i)$ de G $(1 \leq i \leq n)$ y escribiremos

$$L^2(X)/W = L^2(X_1) \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} \cdots \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} L^2(X_i) .$$

3.8. <u>Carácter de una representación natural canónica</u>.

Sea X un G-conjunto transitivo, $x_o \in X$ y H el subgrupo estabilizador del punto x_o, entonces $(L^2(X),\tau)$ es isomorfa a $(L^2(G/H),\tau')$. Pero como vimos en 2.3. la representación natural canónica $L^2(G/H)$ de G es isomorfa a la representación $\mathrm{Ind}_{H\uparrow G}\, \underline{1}$ de G. Luego el carácter χ_τ de la representación natural canónica $L^2(X)$ es igual al carácter $\chi_{\tilde{\underline{1}}}$ de la representación $\mathrm{Ind}_{H\uparrow G}\, \underline{1}$. Es inmediato que

$$\chi_\tau(g) = |\{xH \in G/H \;/\; gxH = xH\}|$$

4. ANILLO DE BURNSIDE $\mathcal{R}[G]$ DE LAS REPRESENTACIONES NATURALES DE G .

En lo que sigue un G-conjunto será un G-conjunto izquierdo.

4.1. Denotemos por $\mathcal{R}[G]$ al grupo abeliano generado por las clases de isomorfía de representaciones naturales de G , con las siguientes relaciones

$$[L^2(X) + L^2(Y)] = [L^2(X)] + [L^2(Y)] = [L^2(X \dot{\cup} Y)]$$

Definamos la siguiente multiplicación sobre los generadores de $\mathcal{R}[G]$:

$$[L^2(X)][L^2(Y)] = [L^2(X) \otimes L^2(Y)] = [L^2(X \times Y)]$$

Extendiéndola sobre todo $\mathcal{R}[G]$ linealmente, dotamos al grupo abeliano $\mathcal{R}[G]$ de una estructura de anillo conmutativo con unidad $[L^2(G / G)]$. Llamamos <u>anillo de Burnside de las representaciones naturales de</u> G al anillo $\mathcal{R}[G]$.

Observamos que $\mathcal{R}[G]$ está generado por el conjunto de las representaciones naturales canónicas de G .

4.2. Sea $L^2(Y)$ una subrepresentación natural de una representación natural $L^2(X)$ de G , entonces es inmediato verificar la relación

$$[L^2(X) / L^2(Y)] = [L^2(X)] - [L^2(Y)]$$

5. MODELO DE GEL'FAND GEOMETRICO O DEBILMENTE GEOMETRICO.

5.1. Una representación (M,τ) de G es un <u>modelo de Gel'fand</u> de G si M contiene todas las representaciones irreducibles de G con multiplicidad uno.

5.2. Diremos que un modelo de Gel'fand (M,τ) es un <u>modelo de Gel'fand geométrico de largo</u> r si M es isomorfo a una suma directa amalgamada sobre las constantes de r-representaciones naturales canónicas transversales, es decir

1) $$M \cong L^2(X_1) \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} \cdots \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} L^2(X_r)$$

2) $$L^2(X_i) \pitchfork L^2(X_j) \qquad (i \neq j\ ,\ \ 1 \leq i,j \leq r)\ .$$

Sea $X = \overset{r}{\underset{i=1}{\dot{\cup}}} X_i$, entonces diremos que el modelo de Gel'fand geométrico M isomorfo a $L^2(X_1) \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} \cdots \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} L^2(X_r)$ es el modelo de Gel'fand de G asociado a X y lo designaremos por M_X .

5.3. Una definición más débil que la anterior obtenemos al definir un <u>modelo de Gel'fand débilmente geométrico</u> como aquel modelo de Gel'fand M de G que es isomorfo a una suma y resta de representaciones naturales de G .

Claramente un modelo M de Gel'fand débilmente geométrico es isomorfo a la diferencia de dos representaciones naturales de G y $[M] \in \mathcal{R}[G]$.

En la siguiente Proposición damos condiciones necesarias para construir un modelo de Gel'fand geométrico de un grupo finito G.

PROPOSICION 4.1. Sea G un grupo finito, X e Y G-conjuntos transitivos y H,K subgrupos estabilizadores de G asociados a los G-conjuntos X e Y. Las representaciones naturales canónicas son transversales sí y sólo si el grupo G es el producto HK de los subgrupos H y K.

Demostración: Como $L^2(X) \cong \operatorname{Ind}_{H\uparrow G} \underline{1}$ y $L^2(Y) \cong \operatorname{Ind}_{K\uparrow G} \underline{1}$, usando el teorema de reciprocidad de Frobenius y el teorema de la restricción de una representación inducida, obtenemos:

$$[L^2(X), L^2(Y)] = \bigoplus_{K\backslash g_i/H} [\underline{1}, \operatorname{Ind}_{H\cap K^{g_i}\uparrow H} \underline{1}]_H$$

$$= |H\backslash G/K|$$

Luego, $[L^2(X), L^2(Y)] = 1$ sí y sólo si $G = HK$.

$\square$

6. CARACTER DE GEL'FAND DE UN GRUPO G.

6.1. Se denomina carácter de Gel'fand de G y se denota por χ_G a la suma de todos los caracteres irreducibles de G.

Es inmediato que el carácter χ_M de un modelo de Gel'fand M es el carácter χ_G de Gel'fand de G.

6.2. Mediante un cálculo sencillo se puede demostrar que si se considera a χ_G como una variable aleatoria sobre el espacio muestral $\Omega = G$ provisto de la medida de probabilidad uniforme se tiene

i) La esperanza $E(\chi_G)$ del carácter de Gel'fand χ_G (promedio) es uno.

ii) El cuadrado $\sigma^2(\chi_G)$ de su desviación típica standard es el número de clases de conjugación de G menos uno.

6.3. Otra propiedad característica inmediata de χ_G es la propiedad de ser Galois invariante sobre $\mathbb{Q}$. Además como los valores de χ_G son enteros algebraicos podemos concluir que el carácter de Gel'fand χ_G sólo toma valores enteros.

C A P I T U L O II

EXISTENCIA DE MODELOS GEOMETRICOS DE GEL'FAND PARA GRUPOS DIEDRALES

En este Capítulo demostramos que para los grupos diedrales D_{2n}, n impar, existe un único Modelo Geométrico de Gel'fand. Sin embargo si n es par existen dos y solamente dos de tales modelos.

1. ALGUNAS OBSERVACIONES Y DESCRIPCION DE LAS REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DE D_{2n}.

1.1. Observemos primero que el grupo diedral D_{2n} es isomorfo al grupo de simetrías G de un n-ágono regular con vértices $p_1, \dots, p_n$ orientados según las manecillas del reloj. Se puede demostrar sin dificultad que $G = \langle R \rangle \rtimes \langle J \rangle$ donde por R denotamos a la rotación que envía p_i en p_{i+1} y por J a la reflexión que fija p_1. Por lo tanto G actúa naturalmente en el conjunto de los vértices del n-ágono regular y otros conjuntos derivados de su estructura como por ejemplo el conjunto de las aristas y el conjunto de los m-ágonos regulares inscritos en el n-ágono.

1.2. Descripción de los subgrupos de G :

Si H es un subgrupo de G entonces $H = \langle R^m \rangle$ donde m / n ó $H = \langle R^m \rangle \rtimes \langle R^{m'} J \rangle$ donde m / n y $1 \leq m' \leq n$.

Es claro, si observamos que G está generado por R y J y la relación entre ellos viene dada por

$$RJ = JR^{-1} .$$

1.3. Descripción de las representaciones irreducibles de G .

Ya que G es el producto semidirecto de $\langle R \rangle$ y $\langle J \rangle$ podemos construir todas las representaciones irreducibles de G aplicando el teorema de Mackey (Cap. I, 2.8), como sigue:

Dado que el subgrupo $\langle R \rangle$ es normal en G es claro que $\langle J \rangle$ actúa en el grupo de los caracteres de $\langle R \rangle$ vía conjugación. Es decir

$$\forall\ \alpha \in \langle R \rangle^{\wedge} , \quad \alpha^J(R) = (J \cdot \alpha)(R) = \alpha(J^{-1}RJ) .$$

Sea $\alpha \in \langle R \rangle^{\wedge}$, $K_\alpha = \mathrm{Stab}_{\langle J \rangle} \{\alpha\}$ y $\beta \in \hat{K_\alpha}$ entonces, las representaciones

$$\rho^{\alpha,\beta} = \mathop{\mathrm{Ind}}_{\langle R \rangle K_\alpha \uparrow G} \alpha \otimes \beta$$

agotan todas las representaciones irreducibles de G .

Luego, dado que los subgrupos de $\langle J \rangle$ son solo los triviales, tenemos los siguientes casos:

i) $K_\alpha = \langle J \rangle$ y por lo tanto $\alpha^2 = 1$. De este modo si n es par obtenemos las soluciones $\alpha = 1$ y α_{-1} $(\alpha_{-1}(R) = -1)$ para la ecuación

$\alpha^2 = 1$, y si n es impar obtenemos una única solución $\alpha = 1$.

Para $\alpha = 1$ ó $\alpha = \alpha_{-1}$, tenemos dos caracteres β en $\langle J\rangle^{\wedge}$, a saber $\beta = 1$ y $\beta = \beta_{-1}$ $(\beta_{-1}(J) = -1)$.

Así, cuando n es par obtenemos cuatro representaciones unidimensionales:

$$\underline{1} \; , \; \rho^{\underline{1},\beta_{-1}} \; , \; \rho^{\alpha_{-1},\underline{1}} \; , \; \rho^{\alpha_{-1},\beta_{-1}}$$

y cuando n es impar, obtenemos dos representaciones unidimensionales:

$$\underline{1} \; , \; \rho^{\underline{1},\beta_{-1}} \; .$$

ii) $\alpha^2 \neq 1$ y $K_{\alpha} = \{e\}$. En este caso las representaciones irreducibles $\rho^{\alpha,1}$ son representaciones de dimensión dos y además como α^{-1} está en la órbita de α , $\rho^{\alpha,1}$ es G-isomorfa a $\rho^{\alpha^{-1},1}$.

Por lo tanto, cuando n es par, G tiene $\frac{n}{2} - 1$ representaciones irreducibles de dimensión dos y cuando n es impar tiene $\frac{n-1}{2}$ representaciones irreducibles de dimensión dos.

2. EXISTENCIA DE UN MODELO GEOMETRICO DE GEL'FAND PARA EL GRUPO DIEDRAL D_{2n} .

Ya que la suma de las dimensiones de las representaciones irreducibles de G $(n + 2$ si n es par y $n + 1$ si n es impar) no divide el orden de G entonces no existe un modelo geométrico de Gel'fand de largo uno.

2.1. Modelos Geométricos de Gel'fand para el caso n-par.

- Construcción del primer Modelo M_1 .

Sean X el conjunto de los vértices p_i del n-ágono regular, Y el conjunto de las orientaciones de los lados del n-ágono regular y Z el conjunto de los $\frac{n}{2}$-ágonos regulares inscritos con vértices en los puntos medios de los lados del n-ágono.

PROPOSICION 1. La representación $M_1 = L^2(X) \underset{\mathbb{C}}{\widetilde{\oplus}} L^2(Y) \underset{\mathbb{C}}{\widetilde{\oplus}} L^2(Z)$ de G es un modelo geométrico de Gel'fand.

Demostración: Es claro que la acción natural de G sobre los conjuntos X,Y y Z es transitiva y que

$$X \simeq_G G/\langle J\rangle \quad ; \quad Y \simeq_G G/\langle R\rangle \quad ; \quad Z \simeq_G G/\langle R^2\rangle \rtimes \langle RJ\rangle$$

ya que $L^2(X) = \underset{\langle J\rangle \uparrow G}{\mathrm{Ind}}\,\underline{1}$, $L^2(Y) = \underset{\langle R\rangle \uparrow G}{\mathrm{Ind}}\,\underline{1}$ y $L^2(Z) = \underset{\langle R^2\rangle \rtimes \langle RJ\rangle \uparrow G}{\mathrm{Ind}}\,\underline{1}$,

usaremos la reciprocidad de Frobenius [I.2.5] para investigar cuál es la descomposición en representaciones irreducibles de G en cada caso. De este modo si $\rho^{\alpha,\beta}$ es una representación irreducible de G , entonces el cálculo de

$$[\underset{\langle J\rangle \uparrow G}{\mathrm{Ind}}\,\underline{1}, \rho^{\alpha,\beta}]_G = [\underline{1}, \underset{G\downarrow \langle J\rangle}{\mathrm{Res}}\,\rho^{\alpha,\beta}]_{\langle J\rangle}$$

$$[\underset{\langle R\rangle \uparrow G}{\mathrm{Ind}}\,\underline{1}, \rho^{\alpha,\beta}]_G = [\underline{1}, \underset{G\downarrow \langle R\rangle}{\mathrm{Res}}\,\rho^{\alpha,\beta}]_{\langle R\rangle}$$

y

$$[\operatorname*{Ind}_{\langle R^2\rangle \rtimes \langle RJ\rangle \uparrow G} \underline{1}, \rho^{\alpha,\beta}]_G = [\underline{1}, \operatorname*{Res}_{G\downarrow\langle R^2\rangle \rtimes \langle RJ\rangle} \rho^{\alpha,\beta}]$$

nos dá cuenta de la multiplicidad de la representación irreducible $\rho^{\alpha,\beta}$ de G en las representaciones naturales $L^2(X)$, $L^2(Y)$ y $L^2(Z)$ de G respectivamente. En seguida haciendo uso del teorema de Mackey acerca de la representación restringida de una inducida obtenemos que

$$[\underline{1}, \operatorname*{Res}_{G\downarrow\langle J\rangle} \rho^{\alpha,\underline{1}}]_{\langle J\rangle} = [\underline{1}, \operatorname*{Ind}_{\{e\}\uparrow\langle J\rangle} (\operatorname*{Res}_{\langle R\rangle\downarrow\{e\}} \alpha \otimes \underline{1})]_{\langle J\rangle}$$

$$= [\underline{1}, \operatorname*{Ind}_{\{e\}\uparrow\langle J\rangle} \underline{1}] = 1$$

pues $\operatorname*{Ind}_{\{e\}\uparrow\langle J\rangle} \underline{1} = L^2(J) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\langle \beta_{-1}\rangle$, para todo $\alpha \in \langle R\rangle^\wedge$ tal que $\alpha^2 \neq 1$.

Si $\alpha^2 = 1$

$$[\underline{1}, \operatorname*{Res}_{G\downarrow\langle J\rangle} \rho^{\alpha,\beta}]_{\langle J\rangle} = [\underline{1}, \operatorname*{Res}_{G\downarrow\langle J\rangle} \alpha \otimes \beta] = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 1 \\ 0 & \text{si } \beta = \beta_{-1} \end{cases}$$

Análogamente para los otros casos obtenemos que

$$L^2(X) = \underline{1} \oplus \rho^{\alpha_{-1},1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \rho^{\alpha^i,\underline{1}}$$

$$L^2(Y) = \underline{1} \oplus \rho^{\underline{1},\beta_{-1}}$$

$$L^2(Z) = \underline{1} \oplus \rho^{\alpha_{-1},\beta_{-1}} .$$

Así M_1 es un modelo geométrico de Gel'fand.

$\square$

- <u>Construcción del segundo modelo</u> M_2 .

Sean X' el conjunto de los lados del n-ágono regular, Y como en M_1 y Z' el conjunto de los $\frac{n}{2}$-ágonos regulares inscritos con vértices en los vértices del n-ágono regular.

PROPOSICION 2. La representación $M = L^2(X') \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} L^2(Y) \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} L^2(Z')$ de G es un modelo geométrico de Gel'fand.

<u>Demostración</u>: Análogamente como en la Proposición 1, el grupo G actúa natural y transitivamente en estos conjuntos,

$$X' \underset{G}{\simeq} G/\langle RJ\rangle \quad ; \quad Y \underset{G}{\simeq} G/\langle R\rangle \quad ; \quad Z' = G/\langle R^2\rangle \rtimes \langle J\rangle$$

y usando nuevamente el teorema de reciprocidad de Frobenius y el teorema de restricción de Mackey obtenemos

$$L^2(X') = \underline{1} \oplus \rho^{\alpha_{-1},\beta_{-1}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \rho^{\alpha^i,\underline{1}}$$

$$L^2(Z') = \underline{1} \oplus \rho^{\alpha_{-1},\underline{1}} \quad , \quad L^2(Y) = 1 \oplus \rho^{\underline{1},\beta_{-1}}$$

Por lo tanto M_2 es un modelo geométrico de Gel'fand.

$\square$

PROPOSICION 3. Los espacios $X \dot{\cup} Y \dot{\cup} Z$ y $X' \dot{\cup} Y \dot{\cup} Z'$ no son G-isomorfos y suministran los únicos modelos geométricos de Gel'fand para $G \cong D_{2n}$, n par.

Demostración: Si $X \dot{\cup} Y \dot{\cup} Z$ fuese isomorfo a $X' \dot{\cup} Y \dot{\cup} Z'$, la órbita X tendría que ser isomorfa a X' y la órbita Z' a Z. Pero esto significaría que $L^2(X)$ es G-isomorfo con $L^2(X')$ y $L^2(Z)$ con $L^2(Z')$, lo cual es falso, pues no contienen las mismas representaciones irreducibles de G.

Para demostrar que no existen otros modelos fuera de M_1 y M_2, calculamos para cada subgrupo H de G la descomposición en representaciones irreducibles de $L^2(G/H)$. Para ello usamos nuevamente reciprocidad de Frobenius y teorema de restricción de Mackey. Además observamos que si H es un subgrupo de G entonces tenemos dos posibilidades para las dobles clases entre $\langle R \rangle$ y H, a saber, si $R^pJ \in H$ para algún p entonces $\langle R \rangle H = G$ y si $R^pJ \notin H$ para ningún p entonces hay dos dobles clases y sus representantes son e y J. De este modo la multiplicidad de $\rho^{\alpha,\underline{1}}$ será uno para aquellos caracteres α tales que $\operatorname{Res}_{\langle R \rangle \downarrow \langle R \rangle \cap H} \alpha = \underline{1}$ y será cero en los otros casos, si $R^pJ \in H$ para algún p. En el otro caso, es decir si $R^pJ \notin H$ para ningún p, dado que $\alpha^{-1} = \alpha^J$ y $\rho^{\alpha,\underline{1}} \cong \rho^{\alpha^{-1},\underline{1}}$, tendremos multiplicidad dos para aquellos α tales que $\operatorname{Res}_{\langle R \rangle \downarrow \langle R \rangle \cap H} \alpha = \underline{1}$ y cero en los otros casos.

Una situación análoga tenemos para las representaciones de dimensión uno.

De este modo obtenemos:

I) Para: $H = \langle R^m \rangle \rtimes \langle R^p J \rangle$, p par, $m|n$

$$L^2(G/H) = \underline{1} \oplus \rho^{\alpha_{-1},\underline{1}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} \rho^{\alpha^{in/m},\underline{1}} \quad , \quad m \text{ par}$$

$$L^2(G/H) = \underline{1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \rho^{\alpha^{in/m},\underline{1}} \quad , \quad m \text{ impar .}$$

Para $H = \langle R^m \rangle \rtimes \langle R^p J \rangle$, p impar, $m|n$

II) $$L^2(G/H) = \underline{1} \oplus \rho^{\alpha_{-1},\beta_{-1}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} \rho^{\alpha^{in/m},\underline{1}} \quad , \quad m \text{ par}$$

$$L^2(G/H) = \underline{1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \rho^{\alpha^{in/m},\underline{1}} \quad , \quad m \text{ impar.}$$

III) Para $H = \langle R^m \rangle$, $m|n$

$$L^2(G/H) = \underline{1} \oplus \rho^{\underline{1},\beta_{-1}} \oplus \rho^{\alpha_{-1},\underline{1}} \oplus \rho^{\alpha_{-1},\beta_{-1}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} 2\rho^{\alpha^{in/m},\underline{1}} \quad , \quad m \text{ par}$$

$$L^2(G/H) = \underline{1} \oplus \rho^{\underline{1},\beta_{-1}} \oplus \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} 2\rho^{\alpha^{in/m},\underline{1}} \quad , \quad m \text{ impar .}$$

De ésto, los G-conjuntos G/H cuyas representaciones naturales asociadas no tienen multiplicidades son sólo los G-conjuntos:

$$G / H_m = G / \langle R^m \rangle \rtimes \langle R^p J \rangle$$

$$G / H_i = G / \langle R^i \rangle \qquad \text{donde} \quad i = 1,2$$

y

$$G / \langle R^p J \rangle .$$

Las representaciones irreducibles de dimensión dos aparecen en las representaciones naturales $L^2(G / H_m)$. Por la Proposición 4.1 del Primer Capítulo sólo podemos considerar G-conjuntos G / H_{m_i} donde $(m_i, m_j) = 1$ $\forall\, i \neq j$. Si consideramos una familia $\{G / H_{m_i}\}_{0 \leq i \leq r}$ de tales G-conjuntos no podremos obtener todas las representaciones irreducibles de dimensión 2 ya que el número de representaciones irreducibles de dimensión dos que obtenemos con esta familia es

$$\frac{m_1}{2} - 1 + \Sigma \frac{m_j - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{r} m_j - r - 1 \right)$$

si m_1 es par, y

$$\sum_{j=0}^{r} \frac{m_j - 1}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=0}^{r} m_j \right) - r \right]$$

si todos los m_i son impares. En ambos casos la suma es menor que $n / 2 - 1$, (el número de representaciones irreducibles de dimensión dos de G). Esto resulta del siguiente Lema:

LEMA. Sea n número par positivo y $\{m_i\}_{i=1}^{r} \subset \mathbb{N}$ tal que $m_i | n$, $m_i \neq n$ y $(m_i, m_j) = 1$ $\forall\, i \neq j$ entonces $\sum_{j=1}^{r} m_j < n$.

Demostración: Por inducción sobre r :

Sea $r = 2$ y supongamos $m_1 > m_2$ entonces $m_1 + m_2 < 2m_1 \leq n$.

Supongamos que $\sum_{j=1}^{r} m_j < n$ para toda familia $\{m_i\}_{i=1,\ldots,r}$ tal que $m_i | n$ y $(m_i,m_j) = 1$ $i \neq j$.

Sea $\{m_i\}_{i=1,\ldots,r+1}$ tal que $m_i | m$ y $(m_i,m_j) = 1$ para $i \neq j$ entonces si todos los m_i son impares y suponiendo que m_1 es menor que todos, podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{r+1} m_j < 2m_2 + \sum_{j=3}^{r+1} m_j .$$

La familia $\{2m_2, m_3, \ldots, m_{r+1}\}$ consta de r elementos, son divisores de n y son relativamente primos entre sí, luego por hipótesis de inducción

$$\sum_{j=1}^{r+1} m_j < 2m_2 + \sum_{j=3}^{r+1} m_j < n .$$

En seguida, supongamos que m_1 es par, entonces $m_1 > m_i$ $\forall\, i = 2, \ldots, r+1$ ó $\exists\, i$ tal que $m_1 < m_i$.

En el primer caso la suma queda

$$\sum_{j=1}^{r+1} m_j < 2m_1 + \sum_{i=3}^{r+1} m_i$$

y en el segundo caso queda:

$$\sum_{j=1}^{r+1} m_j < \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{r+1} m_j + 2m_i$$

Ya que a $\{2m_1, m_3, \ldots, m_{r+1}\}$ y a $\{m_2, \ldots, 2m_i, \ldots, m_{r+1}\}$ se les puede aplicar la hipótesis de inducción obtenemos finalmente que $\sum_{j=1}^{r+1} m_j < n$.

$\square$

Por lo tanto para obtener todas las representaciones irreducibles de dimensión 2, nos queda considerar solamente los G-conjuntos $G/\langle R^p J\rangle$. Pero es claro que los G-conjuntos $G/\langle R^p J\rangle$ con p par son todos equivalentes y lo mismo ocurre para los $G/\langle R^p J\rangle$ con p impar (pues los estabilizadores son conjugados).

De este modo, podemos concluir que los modelos M_1 y M_2 son los únicos modelos geométricos de Gel'fand para G .

$\square$

2.2. Modelo Geométrico de Gel'fand para D_{2n} , n impar.

- Construcción del único Modelo Geométrico de Gel'fand para D_{2n} , n impar.

Sea X el conjunto de los vértices del n-ágono regular e Y el conjunto de las orientaciones de los lados del n-ágono regular.

PROPOSICION 4. La representación $M = L^2(X) \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} L^2(Y)$ de G es el único Modelo Geométrico de Gel'fand.

Demostración: G actúa natural y transitivamente en X e Y . Además

$$X \underset{G}{\simeq} G/\langle J\rangle \qquad y \qquad Y \underset{G}{\simeq} G/\langle R\rangle$$

y usando los mismos métodos que en las proposiciones anteriores obtenemos que

$$L^2(X) = \operatorname*{Ind}_{\langle J \rangle \uparrow G} \underline{1} = \underline{1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{(n-1)/2} \rho^{\alpha^i, \underline{1}}$$

y

$$L^2(Y) = \underline{1} \oplus \rho^{\underline{1}, \beta_{-1}} .$$

Así M es un modelo geométrico de Gel'fand.

En seguida para demostrar que M es el único Modelo de este tipo, calculamos de igual modo que en el caso anterior para cada subgrupo H de G la descomposición de $L^2(G/H)$ en representaciones irreducibles de G, obteniendo:

I Para $H = \langle R^m \rangle \rtimes \langle R^p J \rangle \qquad m|n \quad , \quad 1 \leq p \leq n$

$$L^2(G/H) = \underline{1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{(m-1)/2} \rho^{\alpha^{in/m}, \underline{1}}$$

II Para $H = \langle R^m \rangle \quad , \quad m|n$.

$$L^2(G/H) = \underline{1} \oplus \rho^{\underline{1}, \beta_{-1}} \oplus \bigoplus_{i=2}^{(m-1)/2} 2\rho^{\alpha^{in/m}, \underline{1}}$$

Usando el mismo argumento que en la Proposición 3 deducimos que para obtener todas las representaciones irreducibles de dimensión 2 solo podemos considerar los G-conjuntos $G/\langle R^p J \rangle$. Pero como es fácil ver todos estos G-conjuntos son G-equivalentes entre sí. Luego M es el único modelo para G. □

C A P I T U L O   III

NO EXISTENCIA DE UN MODELO GEOMETRICO DE GEL'FAND PARA $PSL(2,\mathbb{F}_q)$, q primo, $q > 5$

Ya que todos los subgrupos H de $\overline{G} = PSL(2,\mathbb{F}_q)$ son conocidos [Sü] es posible demostrar para la mayoría de los casos que la representación natural $L^2(\overline{G}/H)$ presenta multiplicidad mayor que uno. Para los casos excepcionales usando la Proposición 4.1 (Capítulo I), necesitamos sólo analizar un número finito de "q" . Demostramos así, caso por caso, que no existe Modelo de Geométrico de Gel'fand para G . Para esto usamos nuevamente la Proposición anterior y resultados básicos de representaciones de grupos.

3.1. Descripción de las representaciones irreducibles de G y sus clases conjugadas.

Como $\overline{G}$ es el grupo cuociente de $G = SL(2,\mathbb{F}_q)$ con su centro, las representaciones irreducibles de $\overline{G}$ son aquellas representaciones irreducibles de G que son triviales en el centro.

3.1.1. Representaciones Irreducibles de $\overline{G}$ [NS].

Notaciones:

π_1^q : representación de Steinberg de G de dimensión q.

π_α^{q+1} : representación irreducible de la serie principal de G asociada al carácter α, donde $\alpha \in (\mathbb{F}_q^\times)^\wedge$ y $\alpha^2 \neq 1$, de dimensión $q+1$

$\pi_{\alpha_o}^+$, $\pi_{\alpha_o}^-$: representaciones irreducibles de la serie principal de G asociada al carácter no trivial α_o de $\mathbb{F}_q^\times$ de orden 2, de dim $(q+1)/2$.

π_ω^{q-1} : representación irreducible de la serie cuspidal de G asociada al carácter $\omega \in \mathbb{U}^\wedge$, $\omega^2 \neq 1$, ($\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{F}_{q^2}, N(z) = 1\}$, de dim$(q-1)$.

$\pi_{\omega_o}^+$, $\pi_{\omega_o}^-$: representaciones irreducibles de la serie cuspidal asociada al caracter $\omega_o \in \mathbb{U}^\wedge$ de orden 2, de dim$(q-1)/2$.

3.1.2. Representaciones Irreducibles de $\overline{G}$.

- Sea $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$:

$$L^2(G) = 1 \oplus q\pi_1^q \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-3)/4} (q+1)\,\pi_{\alpha^{2i}}^{q+1} \oplus$$

$$\bigoplus_{i=1}^{(q-3)/4} (q-1)\,\pi_{\omega^{2i}}^{q-1} \oplus \frac{(q-1)}{2}\pi_{\omega_o}^+ \oplus \frac{(q-1)}{2}\pi_{\omega_o}^-$$

donde α y ω son generadores de $(\mathbb{F}_q^\times)$ y $\mathbb{U}^\wedge$ respectivamente.

- Sea $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$

$$L^2(PSL(2,\mathbb{F}_q)) = 1 \oplus q\pi_1^q \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-5)/4} (q+1)\, \pi_{\alpha^{2i}}^{(q+1)} \oplus$$

$$\oplus \frac{(q+1)}{2}\, \pi_{\alpha_o}^{+} \oplus \frac{(q+1)}{2}\, \pi_{\alpha_o}^{-} \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-1)/4} (q-1)\, \pi_{\omega^{2i}}^{q-1}$$

donde α y ω son como en el caso anterior.

3.2. <u>Clases de conjugación y caracteres irreducibles de</u> G .

Notación: Los elementos de $\overline{G}$ los denotaremos por $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

TABLA 1. CLASES CONJUGADAS Y CARACTERES DE $\overline{G}$.

CARACTER			$\chi_0 = 1$	χ_1^q	χ_α^{q+1}	$\chi_{\alpha_0}\pm$	χ_ω^{q-1}	$\chi_{\omega_0}\pm$
Representante	Parametrización	Orden			$\alpha \in (\mathbb{F}_q^x)^\wedge \sim \{1,\alpha_0\}$ $\alpha(-1) = 1$ mod $\alpha \sim \alpha^{-1}$	$\alpha_0 \in (\mathbb{F}_q^x)^\wedge$ orden $\alpha_0 = 2$	$\omega \in \mathbb{U}^\wedge \sim \{1, \omega_0\}$ $\omega(-1)\ 1$ mod $\omega \sim \omega^{-1}$	$\omega_0 \in \mathbb{U}^\wedge$ orden $\omega_0 = 2$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		1	1	q	(q+1)	(q+1)/2	(q-1)	(q-1)/2
$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$b = 1,\ a_0$ $a_0 \notin \mathbb{F}_q^2$	q	1	0	1	$\dfrac{(1 \pm \alpha_0(b)\sigma(e))}{2}$	-1	$\dfrac{(-1 \pm \omega_0(b)\sigma(e))}{2}$
$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$	$a \in \mathbb{F}_q^x\ \{1,-1\}$ mod $a \sim \pm a^{-1}$	$\varphi\left(\frac{q-1}{2}\right)$	1	1	$\alpha(a) + \alpha(a^{-1})$	$\alpha_0(a)$	0	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mathrm{Tr}u \end{bmatrix}$	$u \in \mathbb{U}\ \{1,-1\}$ mod $u \sim \pm\bar{u}$	$\varphi\left(\frac{q+1}{2}\right)$	1	-1	0	0	$-\omega(u)-\omega(\bar{u})$	$-\omega_0(u)$

NOTA: $\sigma(\phi) = \sum_{t \in \mathbb{F}_q^+} \phi(t^2)$, $\phi \in (\mathbb{F}_q^+)^\wedge$, $(\sigma(\phi^b) = \alpha_0(b)\sigma(\phi))$, $e \in (\mathbb{F}_q^+)^\wedge$, $e(1) = e^{2\pi i / q}$

$\phi(n)$ designa el número de divisores del entero n .

TABLA 2. CLASES CONJUGADAS DE $SL(2,\mathbb{F}_q)$.

Representante	Parametrización	Nº de elementos	Nº de clases
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$a = 1, -1$	1	2
$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$b = 1, a_0$ $a_0 \notin \mathbb{F}_q^2$	$(q^2-1)/2$	2
$\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$b = 1, a_0$ $a_0 \notin \mathbb{F}_q^2$	$(q^2-1)/2$	2
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$	$a \in \mathbb{F}_q^\times \setminus \{1,-1\}$ mod $a \sim a^{-1}$	$q(q+1)$	$(q-3)/2$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mathrm{Tr}\,u \end{pmatrix}$	$u \in \mathbb{U} \setminus \{1,-1\}$ mod $u \sim u^{-1}$	$q(q-1)$	$(q-1)/2$

3.2.1. OBSERVACION. Considerando que G se inyecta naturalmente en $PSL(2,\mathbb{F}_{q^2})$, observamos que la imagen de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Tru \end{pmatrix}$ por esta inyección es conjugada a $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}$. Sea $u \in \mathbb{U}$ tal que orden $u = q + 1$ entonces es claro que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & u \end{bmatrix}$ es un subgrupo de $PSL(2,\mathbb{F}_q)$ de orden $(q + 1)/2$.

3.3. Descripción de los Subgrupos de $\overline{G}$ y propiedades.

PROPOSICION 3.1. Sea q un número primo, $q > 3$. Si H es un subgrupo de $\overline{G}$, entonces H es isomorfo a uno de los siguientes subgrupos:

a) Un subgrupo de D_{q-1} (grupo diedral de orden $q - 1$)

b) Un subgrupo de D_{q+1}

c) Un grupo H de orden $q(q - 1)/2$ y sus subgrupos. (Un q-subgrupo de Sylow S_q es normal en H y el grupo cuociente H / S_q es un grupo cíclico de orden $(q - 1)/2)$.

d) A_4 : grupo alternante sobre 4, de orden 12.

e) S_4 : grupo simétrico sobre 4, de orden 24.

f) $PSL(2,\mathbb{F}_5)$, de orden 60.

La demostración de esta Proposición se puede ver en [Su].

PROPOSICION 3.2. Sea H un subgrupo de $\overline{G}$, q primo, $q > 5$.

Si H es isomorfo a un subgrupo de D_{q-1} ó a un subgrupo de D_{q+1} ó H es igual a S_q entonces $L^2(\overline{G} / H)$ tiene multiplicidades.

Demostración: Observamos que es suficiente demostrar la Proposición para el caso $H \cong D_{(q-1)}$ ó $H \cong D_{(q+1)}$ ó $H = S_q$ pues si $H' < H$ entonces

$L^2(\bar{G}/H) \hookrightarrow L^2(\bar{G}/H')$ ..

Debemos diferenciar los casos $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ y $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$.

i) Sea $q \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$

Entonces $-1 \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2$. Denotamos por j a una raíz cuadrada de -1 en $\mathbb{F}_{q^2}$.

Sea H isomorfo al grupo diedral de orden $(q + 1)$. Luego H es isomorfo al producto semidirecto de un subgrupo cíclico de orden $(q + 1)/2$ y de un subgrupo de orden 2. Como $q \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ el subgrupo de orden dos está generado por elementos conjugados a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. El subgrupo cíclico de orden $(q + 1)/2$ está generado por $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mathrm{Tr}u \end{bmatrix}$ donde $\langle u \rangle = \mathbb{U}$. Usando el Teorema de reciprocidad de Frobenius la multiplicidad de la representación $\pi^{q-1}_{\omega^2}$ en $L^2(\bar{G}/H)$ viene dada por:

$$\langle \underline{1}, \operatorname*{Res}_{\bar{G}\downarrow H} \chi^{q-1}_{\omega^2} \rangle = \frac{1}{(q+1)} \left\{ \chi^{q-1}_{\omega^2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + \sum_{i=1}^{\frac{q+1}{2}} \chi^{(q-1)}_{\omega^2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mathrm{Tr}(u^i) \end{bmatrix}\right) + \right.$$

$$\left. + (q+1)/2\, \chi^{q-1}_{\omega^2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{(q+1)} \left\{ (q-1) - \sum_{i=1}^{(q+1)/2-1} [\omega(u^{2i}) + \omega(\bar{u}^{2i})] - \right.$$

$$\left. - (q+1)/2\, [\omega(j^2) + \omega(\bar{j}^2)] \right\} =$$

$$= \frac{1}{(q+1)} \left\{ (q-1) - 2 \sum_{i=1}^{(q+1)/2} \omega(u^{2i}) + 2\omega(1) - \right.$$

$$- (q + 1) / 2 \cdot (-2) \Big\} =$$

$$= \frac{1}{(q + 1)} \Big\{ (q - 1) + 2 + q + 1) \Big\} = 2 \; .$$

Sea H isomorfo al grupo diedral de orden $q - 1$. Así H es isomorfo al producto semidirecto del subgrupo cíclico $\left\langle \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle$, (orden $a = q - 1$) de $\overline{G}$ de orden $(q - 1) / 2$, con el subgrupo de orden dos generado por $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Notemos que

$$N_{\overline{G}} \left(\left\langle \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle \right) = \left\langle \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \cong H \; .$$

Calculamos la multiplicidad de la representación $\pi^{\frac{q-1}{2}}_{\omega^2}$ en $L^2(\overline{G} / H)$ donde ω es un generador de $\mathbb{U}^\wedge$ de manera análoga al caso anterior obteniendo

$$\langle \underline{1}, \operatorname*{Res}_{\overline{G}\downarrow H} \chi^{\frac{q-1}{2}}_{\omega^2} \rangle = \frac{1}{(q - 1)} \left\{ (q - 1) - \frac{(q - 1)}{2} \Big[\omega^2(j) + \omega^2(-j) \Big] \right\} =$$

$$= \frac{1}{(q - 1)} \Big\{ (q - 1) + (q - 1) \Big\} = 2 \; .$$

ii) Sea $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Sea H isomorfo al grupo diedral de orden $(q + 1)$. Luego H es isomorfo al producto semidirecto del subgrupo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mathrm{Tr} u \end{bmatrix}$ con orden $u = q + 1$ y el subgrupo de orden dos $\begin{bmatrix} a_o & 0 \\ 0 & -a_o \end{bmatrix}$ donde $a_o^2 = -1$, $a_o \in \mathbb{F}_q^\times$, pues $2 \nmid (q + 1) / 2$.

Calculamos la multiplicidad de la representación $\pi^{q+1}_{\alpha^4}$ en $L^2(\bar{G}\,/\,H)$, donde α es un generador de $(\mathbb{F}_q^{\times})^{\wedge}$ y obtenemos

$$\langle \underline{1},\ \underset{\bar{G}\downarrow H}{\mathrm{Res}}\ \chi^{q+1}_{\alpha^4}\rangle = \frac{1}{(q+1)}\left\{(q+1) + \frac{(q+1)}{2}\left[\alpha^4(a_o) + \alpha^4(a_o^{-1})\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{(q+1)}\left\{(q+1) + 2\cdot\frac{(q+1)}{2}\right\} = 2\ .$$

Sea H isomorfo al grupo diedral de orden $(q-1)$. Análogamente H es isomorfo al producto semidirecto del subgrupo cíclico $\left\langle\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}\right\rangle$, donde orden $a = q - 1$ y el subgrupo de orden dos generado por $\begin{bmatrix} a_o & 0 \\ 0 & -a_o\end{bmatrix}$ donde $a_o^2 = -1$.

Calculamos la multiplicidad de la representación $\pi^{q+1}_{\alpha^2}$ en $L^2(\bar{G}\,/\,H)$ y obtenemos

$$\langle \underline{1},\ \underset{\bar{G}\downarrow H}{\mathrm{Res}}\ \chi^{q+1}_{\alpha^2}\rangle = \frac{1}{(q-1)}\left\{(q+1) + \sum_{i=1}^{(q-1)/2\,-\,1}\left[\alpha^2(a^i) + \alpha^2(a^{-i})\right] + \right.$$

$$\left. + (q-1)\,/\,2\left[\alpha^2(a_o) + \alpha^2(a_o^{-1})\right]\right\}\ .$$

Así

$$\langle \underline{1},\ \underset{\bar{G}\downarrow H}{\mathrm{Res}}\ \chi^{q+1}_{\alpha^2}\rangle = \frac{1}{(q-1)}\left\{(q+1) + 2\sum_{i=1}^{(q-1)/2}\alpha(a^{2i}) - 2\alpha(1) + \right.$$

$$\left. + 2\,\frac{(q-1)}{2}\right\} = 2\ .$$

Y por último en ambos casos cuando H es un q-subgrupo de Sylow S_q

entonces la multiplicidad de las representaciones $\pi^{q+1}_{\alpha^{2i}}$ en $L^2(\bar{G} / S_q)$ es 2.

□

PROPOSICION 3.3. Si existe un modelo geométrico de Gel'fand para $\overline{G}$, entonces él tiene largo dos y uno de los $\overline{G}$-conjuntos transitivos es $\overline{G} / K$ donde K es un subgrupo de $N_{\overline{G}}(S_q)$ tal que $S_q \subsetneq K < N_{\overline{G}}(S_q)$.

Demostración: Como no es posible encontrar un modelo de este tipo de largo uno entonces, por Proposición (I.4.1) debemos encontrar al menos dos subgrupos H y K de $\overline{G}$ tales que $\overline{G} = HK$. De modo que q debe dividir el orden de alguno de ellos. Supongamos que $q / |K|$, entonces por Proposición 3.1. K es un subgrupo de un grupo de orden $q(q-1)/2$ pues q no divide el orden de ninguno de los otros grupos de la lista. Pero, como es fácil ver, el subgrupo $N_{\overline{G}}(S_q)$ satisface todas las condiciones de c), más aún $N_{\overline{G}}(S_q)$ es el grupo máximo para el cual S_q es normal. Por lo tanto $K < N_{\overline{G}}(S_q)$ y como S_q presenta multiplicidades, $K \neq S_q$. Luego
$S_q \subsetneq K < N_{\overline{G}}(S_q)$ y $(q+1) < |H| < \dfrac{(q^2-1)}{2}$ y $q \nmid |H|$.

Supongamos ahora que existe otro subgrupo J de $\overline{G}$ tal que $L^2(\overline{G} / J)$ no tiene multiplicidades y consideremos la siguiente representación de $\overline{G}$:

$$M = L^2(\bar{G} / H) \tilde{\bigoplus_{\mathbb{C}}} L^2(\bar{G} / K) \tilde{\bigoplus_{\mathbb{C}}} L^2(\bar{G} / J) .$$

Para que la representación M sea un modelo de Gel'fand necesitamos que $\overline{G} = HJ$, pero como $q \nmid |H|$ entonces $q \mid |J|$ y por los mismos argumentos anteriores obtenemos que

$$q < |J| < \frac{q(q-1)}{2} \ .$$

Luego $\overline{G} \neq JK$ y M no puede ser modelo geométrico de Gel'fand de $\overline{G}$.

□

PROPOSICION 3.4. Supongamos que $S_q \subsetneq K < N_{\overline{G}}(S_q)$ y $H < \overline{G}$ tal que $\overline{G} = KH$. Entonces se satisface la siguiente inecuación para el orden de H

(3.1) $\qquad |H| \geq q + 1$.

Demostración: Como $|K| \leq q \dfrac{(q-1)}{2}$ entonces

$$|\overline{G}| \leq |H|\,|K| \leq |H| \cdot q \frac{(q-1)}{2} \ .$$

Luego, como $|\overline{G}| = q\dfrac{(q^2-1)}{2}$, obtenemos de la inecuación anterior que $|H| \geq (q+1)$.

□

3.4. No existencia de un Modelo Geométrico de Gel'fand para $\overline{G} = PSL(2,\mathbb{F}_q)$, q primo, $q > 5$.

TEOREMA 3.1. No existe un Modelo Geométrico de Gel'fand para $\overline{G}$, q primo, $q > 5$.

Demostración: Por las Proposiciones (3.2), (3.3) y (3.4) es claro que la existencia de un tal modelo está relacionada directamente con la existencia de un subgrupo H de $PSL(2,\mathbb{F}_q)$ tal que $L^2(\overline{G}/H)$ no presente multiplicidades y $|H|$ sea mayor que $(q+1)$. Los subgrupos diedrales de órdenes

$(q+1)$ y $(q-1)$ y los q-subgrupos de Sylow presentan multiplicidades. Luego como q no debe dividir el orden de H, resulta que los únicos subgrupos posibles pueden ser:

1) $H \cong A_4$

2) $H \cong S_4$

3) $H \cong PSL(2,\mathbb{F}_5)$.

Si $H \cong A_4$, S_4 ó $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ entonces la inecuación (3.1) admite las soluciones $q \leq 11$, $q \leq 23$ y $q \leq 59$ respectivamente ya que $|A_4| = 12$, $|S_4| = 24$ y $|PSL(2,\mathbb{F}_5)| = 60$.

A continuación demostraremos caso por caso que o bien no existe un subgrupo K de G tal que $\overline{G} = KH$ cuando H es isomorfo a A_4 , S_4 ó $PSL_2(\mathbb{F}_5)$, o en caso de que existan tales subgrupos K , $L^2(\overline{G}/K)$ o $L^2(\overline{G}/H)$ presentan multiplicidades o bien no alcanzan a ser un Modelo de Gel'fand.

Distinguimos los casos $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ y $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$.

1) Sea $H \cong A_4$.

I. Sea $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, entonces la inecuación $q \leq 11$ implica que q puede tomar los valores $q = 7$ y $q = 11$.

- Para $q = 7$ tenemos que $|PSL(2,\mathbb{F}_q)| = 7 \cdot 3 \cdot 2^3$. Luego debe existir en K un elemento de orden dos, pero $|N_{\overline{G}}(S_q)| = 7 \cdot 3$. Por lo tanto no existe $K < \overline{G}$ tal que para $H \cong A_4$, $\overline{G} = HK$.

- Sea $q = 11$. En este caso demostraremos que la representación $\pi^{\frac{q-1}{2}}_{\omega^2}$ presenta multiplicidad 2 en $L^2(\overline{G}/H)$. En efecto, como $H \cong A_4$ entonces en H hay ocho elementos de orden 3 (correspondientes a los 3 ciclos), 3 elementos de orden 2 (correspondientes a las transposiciones) y la identidad. Como se sabe, hay un único 3-subgrupo de Sylow salvo conjugación. Por lo tanto los elementos de orden 3 están repartidos en dos clases de conjugación, cada una con 4 elementos. Los elementos de orden dos son conjugados a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Como $3 \nmid \frac{(q-1)}{2}$ entonces los elementos de orden tres son conjugados a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Tr(u^2) \end{bmatrix}$ y a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Tr(u^4) \end{bmatrix}$. De este modo la multiplicidad de $\pi^{\frac{q+1}{2}}_{\omega^2}$ en $L^2(\overline{G}/H)$ viene dada por

$$\langle \underline{1}, \underset{\overline{G}\downarrow H}{\mathrm{Res}}\, \chi^{\frac{q-1}{2}}_{\omega^2} \rangle = \frac{1}{12}\left\{10 - 4[\omega^2(u^2) + \omega^2(u^{10}) + \omega^2(u^4) + \right.$$

$$\left. + \omega^2(u^8)] - 3[\omega^2(u^3) + \omega^2(u^9)]\right\} =$$

$$= \frac{1}{12}\left\{10 - 4\cdot-[\omega^2(u^6) + \omega^2(u^{12})] + 6\right\} =$$

$$= \frac{1}{12}\left\{10 + 8 + 6\right\} = 2 .$$

II. Para el caso $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ no existe $q \leq 11$.

2) Supongamos que $H \cong S_4$.

I. Sea $q \equiv 3 (\text{mod } 4)$, entonces las soluciones para $q \leq 23$ son $q = 7, 11, 19$ y 23. Pero para $q = 11, 19$ S_4 no es subgrupo de $\overline{G}$, pues 24 no divide el orden del grupo.

- Sea $q = 7$, entonces hay una única posibilidad para K y ésta es $K = N_{\overline{G}}(S_7)$ pues $|N_{\overline{G}}(S_7)| = 7 \cdot 3$. Pero la suma de las dimensiones de $L^2(\overline{G}/H)$ y $L^2(\overline{G}/K)$ menos uno es 14 y la suma de las dimensiones de las representaciones irreducibles de $PSL(2, \mathbb{F}_7)$ es 28. Luego $L^2(\overline{G}/H) \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} L^2(\overline{G}/K)$ no es un modelo geométrico de Gel'fand y vimos que no es posible completarlo.

- Sea $q = 23$. En este caso resulta que la representación $\pi^{\frac{q-1}{2}}_{\omega^2}$ presenta multiplicidad dos en $L^2(\overline{G}/H)$. En efecto, como es sabido S_4 tiene 8 elementos de orden tres divididos en dos clases de conjugación, 6 elementos de orden cuatro divididos en dos clases de conjugación y 9 elementos de orden dos. Luego

$$\langle \underline{1}, \operatorname{Res}_{\overline{G}\downarrow H} \chi^{\frac{q-1}{2}} \rangle = \frac{1}{24}\Big\{6 - 4[\omega^2(u^4) + \omega^2(\overline{u}^4)] - 4[\omega^2(u^8) +$$

$$+ \omega^2(\overline{u}^8)] - 3[\omega^2(u^3) + \omega^2(\overline{u}^3)] -$$

$$- 3[\omega^2(u^9) + \omega^2(\overline{u}^9)] - 9[\omega^2(u^6) + \omega^2(\overline{u}^6)]\Big\} =$$

$$= \frac{1}{24}\Big\{22 - 4[\omega(u^8) + \omega(\overline{u}^8)] - 4[\omega(u^8) + \omega(\overline{u}^8)] -$$

$$- 3[\omega(u^6) + \omega(\overline{u}^6)] - 3[\omega(u^6) + \omega(\overline{u}^6)] - 9 \cdot - 2\Big\} =$$

$$= \frac{1}{24}\Big\{22 + (-4 \cdot - 1) + (-4 \cdot - 1) + -3 \cdot 0 + -3 \cdot 0 + 18\Big\} =$$

$$= 2 .$$

II. Sea $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$. Las soluciones para $q \leq 23$ son $q = 13$ y $q = 17$. Pero S_4 no es subgrupo para el caso $q = 13$ pues $24 \nmid |PSL(2,\mathbb{F}_{13})|$.

Sea $q = 17$. Como $|PSL(2,\mathbb{F}_{17})| = 17 \cdot 3^2 \cdot 2^4$ necesitamos que $3 / |K|$ pero $|N_{\overline{G}}(S_{17})| = 17 \cdot 2^3$. Luego no existe un subgrupo K tal que $\overline{G} = KH$.

3) Supongamos que $H \cong PSL(2,F_5)$.

I. Sea $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$. Los números primos menores o iguales a 59, congruentes a 3 módulo 4, para los cuales $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ podría ser un subgrupo de $PSL(2,\mathbb{F}_q)$ son: $q = 11, 31, 59$.

- Sea $q = 11$; entonces $|N_{\overline{G}}(S_{11})| = 11 \cdot 5$. Luego tenemos una única posibilidad para K , a saber $K = N_{\overline{G}}(S_{11})$. Pero la suma de las dimensiones de $L^2(\overline{G} / K)$ y $L^2(\overline{G} / H)$ menos uno es 22 y este número es menor que la suma total de las dimensiones de las representaciones irreducibles de $PSL(2,\mathbb{F}_{11})$.
- Sea $q = 31$; como $|PSL(2,\mathbb{F}_{31})| = 31 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^5 = 31 \cdot 2^3 \cdot 60$ necesitamos que 2 divida el orden de K , pero el orden de $N_{\overline{G}}(S_{31})$ es $31 \cdot 3 \cdot 5$ luego no existe un subgrupo K de $PSL(2,\mathbb{F}_3)$ tal que $\overline{G} = KH$.
- Sea $q = 59$. Demostraremos que $L^2(\overline{G} / H)$ presenta multiplicidades. En efecto, el orden de $\overline{G}$ es $59 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 29$. Como es fácil ver en $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ los elementos de orden cinco forman dos clases de conjugación cada una con 12 elementos. Hay 15 elementos de orden dos y dos clases de conjugación para los elementos de orden tres cada una con

10 elementos. Podemos pensar que las clases de conjugación de los elementos de orden 5 están representados por elementos de la forma: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Tr(u^{6k}) \end{bmatrix}$ para $1 \leq k < 5$. (Cada clase con un k distinto). Los elementos de orden dos son conjugados a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Tr(u^{15}) \end{bmatrix}$ y los elementos de orden 3 conjugados a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Tr(u^{10}) \end{bmatrix}$ ó $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Tr(u^{20}) \end{bmatrix}$, donde $\langle u \rangle = \mathbb{U}$.

Entonces

$$\langle \underline{1}, \operatorname*{Res}_{\bar{G}\downarrow H} \chi^{58}_{\omega^2} \rangle = \frac{1}{60} \Big\{ 58 - 12[\omega^2(u^{6k_1}) + \omega^2(\bar{u}^{6k_1})] -$$

$$- 12[\omega^2(u^{6k_2}) + \omega^2(\bar{u}^{6k_2})] - 10[\omega^2(u^{10}) +$$

$$+ \omega^2(\bar{u}^{10})] - 10[\omega^2(u^{20}) + \omega^2(\bar{u}^{20})] -$$

$$- 15[\omega^2(u^{15}) + \omega^2(\bar{u}^{15})] =$$

$$= \frac{1}{60} \Big\{ 58 - 12[\omega(u^{12k_1}) + \omega(\bar{u}^{12k_1}) +$$

$$+ \omega(u^{12k_2}) + \omega(\bar{u}^{12k_2})] - 10[-\omega^2(1) - \omega^2(1)] -$$

$$- 15 \cdot - 2 \Big\} =$$

$$= \frac{1}{60} \Big\{ 58 - 12 \cdot - 1 + 20 + 30 \Big\} = 2 \; .$$

II. Sea $q \equiv 1 \pmod 4$. Las únicas soluciones posibles son: $q = 29$ y $q = 41$.

- Sea $q = 29$. Ya que $|N_{\overline{G}}(S_{29})| = 29\cdot 7$ la única posibilidad para K es $K = N_{\overline{G}}(S_{29})$. Pero la suma de las dimensiones de las representaciones irreducibles de $PSL(2,29)$ (igual a 436) es mayor que la suma de las dimensiones de $L^2(\overline{G}\,/\,H)$ y $L^2(\overline{G}\,/\,K)$ (igual a 263). Luego como vimos antes no puede ser completado.
- Sea $q = 41$. Como $|PSL(2,\mathbb{F}_{41})| = 41\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 2^3$ necesitamos que 7 divida el orden K pero esto es imposible pues 7 no divide el orden del $N_{\overline{G}}(S_{41})$. Por lo tanto no existe K tal que $\overline{G} = KH$.

$\square$

CAPITULO IV

EXISTENCIA DE UN MODELO GEOMETRICO DE GEL'FAND PARA $PSL(2,\mathbb{F}_3)$ y $PSL(2,\mathbb{F}_5)$

Para grupos finitos G existe, sólo en casos excepcionales, un G-conjunto X tal que $L^2(X)$ es un modelo de Gel'fand para G. El grupo $PSL(2,\mathbb{F}_3)$ es uno de estos ejemplos excepcionales pues el G-conjunto $X = \mathbb{F}_9 \setminus \mathbb{F}_3$ provisto de la acción homográfica nos proporciona un modelo geométrico de Gel'fand.

Para $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ no es posible encontrar un G-conjunto con las características del caso anterior, pues la suma de las dimensiones de las representaciones irreducibles de $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ no divide el orden del grupo, sin embargo existe un modelo geométrico de Gel'fand de largo dos.

4.1. Modelo Geométrico de Gel'fand para $PSL(2,\mathbb{F}_3)$.

Consideremos $X = \mathbb{F}_9 \setminus \mathbb{F}_3$ provisto de la acción homográfica de $PSL(2,\mathbb{F}_3)$, es decir, si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2,\mathbb{F}_3)$ y $z \in \mathbb{F}_9 - \mathbb{F}_3$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d} .$$

PROPOSICION 4.1. La representación natural $L^2(X)$ asociada al G-conjunto X es un modelo geométrico de Gel'fand.

Demostración: Sea $i \in \mathbb{F}_9 \setminus \mathbb{F}_3$ tal que $i^2 = -1$.

Es fácil ver que

$$\mathrm{Stab}_{PSL(2,\mathbb{F}_3)}\{i\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} \\ -1 & \underline{0} \end{bmatrix} \right\rangle = H ,$$

luego

$$X \simeq PSL(2,\mathbb{F}_3)/H$$

y por lo tanto $L^2(X) \cong_G \underset{H\uparrow G}{\mathrm{Ind}} \underline{1}$.

Usando el teorema de reciprocidad de Frobenius y la tabla de caracteres calculamos la descomposición en representaciones irreducibles $L^2(X)$ obteniendo

$$L^2(X) = \underline{1} \oplus \pi_1^3 \oplus \pi_{\omega_o}^+ \oplus \pi_{\omega_o}^- .$$

□

4.2. Modelo Geométrico de Gel'fand para $PSL(2,\mathbb{F}_5)$.

Sea $X = ((\mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5) \setminus \{(0,0)\})/\sim$ donde $(x,y) \sim (x',y')$ sí y sólo si $x' = -x$ y $y' = -y$, $(x,y,x',y' \in \mathbb{F}_5)$.

Definimos la siguiente acción de $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ sobre X. Sea $[x,y] \in X$ y $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2,\mathbb{F}_5)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot [x,y] = [ax + by, cx + dy] .$$

Un simple cálculo nos dá que $\mathrm{Stab}_{PSL(2,\mathbb{F}_5)} \{[1,0]\}$ es el subgrupo

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in PSL(2,\mathbb{F}_5) \ : \ a \in \mathbb{F}_5 \right\}$$

Así $$L^2(X) \cong_G \mathrm{Ind}_{A \uparrow PSL(2,\mathbb{F}_5)} \underline{1}$$

y usando métodos análogos obtenemos que

$$L^2(X) = \underline{1} \oplus \pi_1^5 \oplus \pi_{\alpha_o}^+ \oplus \pi_{\alpha_o}^- .$$

Consideremos el siguiente subgrupo de orden 12

$$H = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \cong A_4 .$$

Entonces el natural G-conjunto transitivo $Y = PSL(2,\mathbb{F}_5)/H$ consta de 5 elementos y naturalmente

$$L^2(PSL(2,\mathbb{F}_5)/H) = \underline{1} \oplus \pi_{\omega^2}^4 .$$

La acción de $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ sobre este G-conjunto de 5 elementos podemos comprenderla en el siguiente contexto: Se sabe que $PSL(2,\mathbb{F}_4) \cong PSL(2,\mathbb{F}_5)$ y $PSL(2,\mathbb{F}_4)$ actúa naturalmente en $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_4)$. Luego podemos decir que $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ actúa en $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_4)$. La descomposición de $L^2(\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_4))$ en representaciones irreducibles de $PSL(2,\mathbb{F}_4)$ es

$$L^2(\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_4)) = \underline{1} \oplus \pi_1^4 ,$$

donde π_1^4 es la representación de Steinberg de $PSL(2,\mathbb{F}_4)$ y la descomposición de $L^2(\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_4))$ según la acción de $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ es la misma que para $L^2(PSL(2,\mathbb{F}_5)/H)$. Luego

1) $$L^2(\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_4)) \cong_{PSL(2,\mathbb{F}_5)} L^2(PSL(2,\mathbb{F}_5)/H)$$

2) La representación de Steinberg π_1^4 de $PSL(2,\mathbb{F}_4)$ corresponde a la representación cuspidal $\pi^4_{\omega^2}$ de $PSL(2,\mathbb{F}_5)$.

PROPOSICION 4.2. Sean X e Y los G-conjuntos definidos anteriormente, entonces

$$M = L^2(X) \underset{\mathbb{C}}{\tilde{\oplus}} L^2(Y)$$

es un modelo geométrico de Gel'fand para $PSL(2,\mathbb{F}_5)$.

□

CAPITULO V

UN MODELO DEBILMENTE GEOMETRICO DE GEL'FAND PARA $PSL(2,\mathbb{F}_q)$ (car $\mathbb{F}_q \neq 2$)

5.1. Modelo débilmente geométrico de Gel'fand para $G = PSL(2,\mathbb{F}_q)$, $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Vamos a considerar los siguientes subgrupos de $PSL(2,\mathbb{F}_q)$:

A. Un subgrupo diedral H de orden $q + 1$. Así H es el producto semidirecto de un subgrupo cíclico J de orden $(q + 1)/2$ isomorfo al subgrupo generado por $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Tr(u_*) \end{bmatrix}$, donde $\langle u_* \rangle = \mathbb{U}$ y un subgrupo cíclico I de orden dos isomorfo al subgrupo generado por $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

B. El subgrupo cíclico J de orden $(q + 1)/2$ de H.

C. El subgrupo diedral K de orden $(q + 1)/2$ de H. Así K es el producto semidirecto de un subgrupo cíclico $J' < J$ de orden $(q + 1)/4$ el cual es isomorfo al subgrupo cíclico generado por $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Tr(u_*^2) \end{bmatrix}$ donde $\langle u_* \rangle = \mathbb{U}$, y el subgrupo I descrito anteriormente en A.

D. El subgrupo normalizador $T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \in G \right\}$ de orden $q(q-1)/2$ del subgrupo de las matrices unitriangulares superiores $(T = N_G(S_q))$. Observemos que S_q es el único subgrupo de Sylow de T . Luego en T hay $(q-1)$ elementos de orden q y los órdenes de los otros elementos son divisores de $(q-1)/2$ ya que $(q, (q-1)/2) = 1$ y el grupo cuociente T/S_q es cíclico. Como sabemos $G = PSL(2, \mathbb{F}_q)$ actúa natural y transitivamente en los conjuntos G/H , G/J , G/K y G/T .

Estudiamos la descomposición en representaciones irreducibles de G de las representaciones naturales de G : $L^2(G/H)$, $L^2(G/J)$, $L^2(G/K)$ y $L^2(G/T)$. Aplicando el teorema de reciprocidad de Frobenius, la estructura conocida de los subgrupos en cuestión y las tablas de clases de conjugación y de los caracteres de G , obtenemos lo siguiente:

- <u>Descomposición de</u> $L^2(G/H)$.

Sea ω un generador de $\mathbb{U}^\wedge$, α un generador de $(\mathbb{F}_q^\times)^\wedge$

$$\langle \underline{1}, \operatorname*{Res}_{G\downarrow H} \chi_{\underline{1}}^{q} \rangle_H = \frac{1}{(q+1)} \left\{ q + q\cdot(-1) \right\} = 0$$

$$\langle \underline{1}, \operatorname*{Res}_{G\downarrow H} \chi_{\alpha^{2k}}^{q+1} \rangle_H = \frac{1}{(q+1)} \left\{ (q+1) + q\cdot 0 \right\} = 1$$

$$\langle \underline{1}, \operatorname*{Res}_{G\downarrow H} \chi_{\omega^{2k}}^{q-1} \rangle_H = \frac{1}{q+1} \left\{ (q-1) - \sum_{\substack{u\in\mathbb{U}\smallsetminus\{\pm 1\} \\ u\sim\bar{u}}} \omega^{2k}(u) + \omega^{2k}(\bar{u}) - \right.$$

$$\left. - \frac{(q+1)}{2} \left[\omega^{2k}(u_o) + \omega^{2k}(\bar{u}_o) \right] \right\}$$

donde u_o es una raíz cuarta primitiva de 1 . Considerando que

$$\sum_{\substack{u\in \mathbb{U}\setminus\{\pm 1\} \\ u\sim\bar{u}}} \omega^{2k}(u) + \omega^{2k}(\bar{u}) = 2 \sum_{\substack{u\in \mathbb{U}\setminus\{\pm 1\} \\ u\sim\bar{u}}} \omega^{2k}(u)$$

y $\qquad \omega^{2k}(u_o) = (-1)^k$,

obtenemos

$$\langle \underline{1}, \operatorname*{Res}_{G\downarrow H} \chi^{q-1}_{\omega^{2k}} \rangle_H = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ 2 & k \text{ impar} \end{cases}$$

$$\langle \underline{1}, \operatorname*{Res}_{G\downarrow H} \chi^{\pm}_{\omega_o} \rangle_H = \frac{1}{(q+1)} \left\{ \frac{1}{2}(q-1) - \sum_{\substack{u\in \mathbb{U}\setminus\{\pm 1\} \\ u\sim\bar{u}}} \omega_o(u) - \frac{(q+1)}{2} \omega_o(u_o) \right\}$$

Como $(q+1)/2$ es par $\sum_{\substack{u\in \mathbb{U}\setminus\{\pm 1\} \\ u\sim\bar{u}}} \omega_o(u) = -1$ y ya que

$$\omega_o(u_o) = (-1)^{(q+1)/4}$$

se obtiene

$$\langle \underline{1}, \operatorname*{Res}_{G\,H} \chi_{\omega_o^{\pm}} \rangle_H = \begin{cases} 1 & \text{si } (q+1)/4 \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } (q+1)/4 \text{ es par} \end{cases}$$

De este modo

$$L^2(G/H) = \underline{1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-3)/4} \pi^{q+1}_{\alpha^{2i}} \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{(q-3)/4} 2\pi^{q-1}_{\omega^{2i}} \oplus \pi_{\omega_o^+} \oplus \pi_{\omega_o^-}$$

si $(q + 1) / 4$ es impar, y

$$L^2(G/H) = \underline{1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-3)/4} \pi^{q+1}_{\alpha^{2i}} \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{(q-3)/4} 2\pi^{q-1}_{\omega^{2i}}$$

si $(q + 1) / 4$ es par.

Siguiendo el mismo tipo de consideraciones obtenemos la siguiente:

- <u>Descomposición para</u> $L^2(G / J)$.

$$L^2(G / J) = \underline{1} \oplus \pi^q_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-3)/4} 2\pi^{q+1}_{\alpha^{2i}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-3)/4} 2\pi^{q-1}_{\omega^{2i}} \oplus \pi^+_{\omega_o} \oplus \pi^-_{\omega_o}$$

- <u>Decomposición para</u> $L^2(G / K)$.

$$L^2(G / K) = \underline{1} \oplus \pi^q_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-3)/4} 2\pi^{q+1}_{\alpha^{2i}} \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{(q-3)/4} 3\pi^{q-1}_{\omega^{2i}} \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \text{ par}}}^{(q-3)/4} \pi^{q-1}_{\omega^{2i}}$$

si $(q + 1) / 4$ es par y

$$L^2(G / K) = \underline{1} \oplus \pi^q_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-3)/4} 2\pi^{q+1}_{\alpha^{2i}} \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{(q-3)/4} 3\pi^{q-1}_{\omega^{2i}} \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \text{ par}}}^{(q-3)/4} \pi^{q+1}_{\omega^{2i}} \oplus$$

$$\oplus \pi_{\omega^+_o} \oplus \pi_{\omega^-_o}$$

si $(q + 1) / 4$ es impar.

- <u>Descomposición para</u> $L^2(G/T)$.

$$L^2(G/T) = \underline{1} \oplus \pi_1^q .$$

PROPOSICION 5.1. Sea M la siguiente representación (en principio virtual pero en realidad ordinaria) de $PSL_2(\mathbb{F}_q)$

$$M = L^2(G/J) + L^2(G/H) - L^2(G/K) + L^2(G/T) - L^2(G/G) .$$

Entonces M es un modelo débilmente geométrico de Gel'fand para $PSL(2,\mathbb{F}_q)$, $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$.

La demostración es clara después de las observaciones anteriores.

5.2. <u>Modelo de Gel'fand débilmente geométrico para</u> $PSL(2,\mathbb{F}_q)$, $q \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$.

Consideremos los siguientes subgrupos de $PSL(2,\mathbb{F}_q)$.

A. Un subgrupo diedral D de orden $(q-1)$. Por lo tanto D es el producto semidirecto de un subgrupo cíclico E de orden $(q-1)/2$ isomorfo al subgrupo generado por $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$, donde $\langle a \rangle = \mathbb{F}_q^{\times}$, y un subgrupo cíclico C de orden dos isomorfo al grupo generado por $\begin{bmatrix} a_o & 0 \\ 0 & -a_o \end{bmatrix}$, donde $a_o^2 = -1$.

B. El subgrupo diedral B de D de orden $(q-1)/2$. Así B es el producto semidirecto del subgrupo cíclico E' de E de orden $(q-1)/4$ el cual es isomorfo al subgrupo generado por $\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^{-2} \end{bmatrix}$ donde a es como en A. y el subgrupo cíclico C descrito anteriormente.

Análogamente a lo desarrollado para el caso $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, estudiamos la descomposición de las representaciones naturales $L^2(G/D)$ y $L^2(G/B)$ en representaciones irreducibles de $PSL(2,\mathbb{F}_q)$, obteniendo lo siguiente:

- <u>Descomposición de</u> $L^2(G/D)$.

$$L^2(G/D) = \underline{1} \oplus 2\pi_1^q \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i\ \mathrm{par}}}^{(q-5)/4} 2\pi_{\alpha^{2i}} \oplus \pi_{\alpha_o^+} \oplus \pi_{\alpha_o^-} \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-1)/4} \pi_{\omega^{2i}}$$

si $(q-1)/4$ es par

$$L^2(G/D) = 1 \oplus 2\pi_1^q \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i\ \mathrm{par}}}^{(q-5)/4} 2\pi_{\alpha^{2i}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-1)/4} \pi^{q-1}_{\omega^{2i}}$$

si $(q-1)/4$ es impar.

- <u>Descomposición de</u> $L^2(G/B)$

$$L^2(G/B) = \underline{1} \oplus 3\pi_1^q \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i\ \mathrm{par}}}^{(q-5)/4} 3\pi_{\alpha^{2i}} \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i\ \mathrm{impar}}}^{(q-5)/4} \pi_{\alpha^{2i}} \oplus$$

$$\oplus\, 2\pi_{\alpha_o^+} \oplus 2\pi_{\alpha_o^-} \oplus \bigoplus_{i=1}^{(q-1)/4} 2\pi^{q-1}_{\omega^{2i}}$$

si $(q-1)/4$ es par.

CAPITULO VI

EXISTENCIA DE UN MODELO DEBILMENTE GEOMETRICO DE GEL'FAND PARA $Gl(n,\mathbb{F}_q)$

1. NOTACIONES Y DEFINICIONES.

Sea V espacio vectorial de dimensión $n+1$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}_q$. Denotemos por G_{n+1} al grupo de las transformaciones $\mathbb{F}_q$-lineales sobre V.

En G_{n+1} consideraremos los siguientes subgrupos:

1.1. Grupo afín A_n : Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todos los espacios afines de dimensión n contenidos en V que no contienen el origen. G_{n+1} actúa en $\mathcal{E}$ natural y transitivamente, $(E \in \mathcal{E}\ ,\ \ g \in G_{n+1}\ ,\ \ g\cdot E = g(E))$. Fijemos el espacio afín $E_* = e_{n+1} + \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ en $\mathcal{E}$, entonces podemos identificar el grupo de las transformaciones afines del espacio afín E_* con el subgrupo estabilizador de E_* por la acción de G_{n+1} en $\mathcal{E}$. Este será denotado por A_n y sus elementos son de la forma:

$\begin{pmatrix} g_n & \vec{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde $g_n \in G_n$ y $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{F}_q$.

1.2. Denotaremos por U_{n+1} al subgrupo de A_n de las matrices unitriangulares superiores. $(U_{n+1} < A_n)$.

1.3. El grupo simpléctico Sp_k de las formas bilineales antisimétricas de dimensión $2k$. $(Sp_k < G_{2k})$.

1.4. Para cada $0 \leq 2k \leq n + 1$ introducimos las siguientes notaciones:

1.4.1. El subgrupo $G(k)$ de G_{n+1} de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} u & * \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

donde $u \in U_{n+1-2k}$ y $s \in Sp_k$.

Observemos que $G(0) = U_{n+1}$;

1.4.2. El subgrupo $N(k)$ de G_{n+1} , cuyos elementos son de la forma

$$\begin{pmatrix} g & * \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

donde $g \in G_{n+1-2k}$ y $h \in G_{2k}$.

Notemos que $G(k)$ es subgrupo de $N(k)$;

1.4.3. El subgrupo $L(k)$ de $N(k)$ de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

y $H(k)$ el subgrupo normal de $N(k)$ cuyos elementos son de la forma

$$\begin{pmatrix} I_{n+1-2k} & * \\ 0 & I_{2k} \end{pmatrix}$$

Es inmediato que

$$N(k) = L(k) \ltimes H(k) \ .$$

1.5. <u>Banderas afines</u>.

Sea $E \in \mathcal{E}$ un espacio afín de dimensión n cualquiera de $\mathcal{E}$. Denotaremos por $\mathcal{B}(E)$ al conjunto de las banderas afines completas de E. De este modo un elemento $b \in \mathcal{B}(E)$ será una n-cadena:

$$E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{n-1}$$

donde E_i, $0 \leq i \leq n-1$, es un subespacio afín de E de dimensión i.

1.6. <u>Banderas afines incompletas</u>.

1.6.1. Sea $[n-1] = \{0,1, \ldots, n-1\}$ y $\mathcal{P}_k[n-1]$ el conjunto de todos los subconjuntos de $[n-1]$ de cardinalidad k, donde $0 \leq k \leq n$. Cuando n esté fijo anotaremos sólo $\mathcal{P}_k$.

1.6.2. Para cada $I \subset [n-1]$, $\mathcal{B}^I(E)$ denotará el conjunto de las banderas afines incompletas a las cuales les faltan los subespacios afines de dimensión i $(i \in I)$ para ser completas.

1.6.3. Para cada $I \subset [n - 1]$ existe una aplicación epiyectiva P_I de $\mathcal{B}(E)$ sobre $\mathcal{B}^I(E)$ tal que conmuta con la acción natural de A_n en ambos conjuntos.

En efecto, sea $b \in \mathcal{B}(E)$ y definamos por $P_I(b) =: b^I$ a la bandera incompleta de $\mathcal{B}^I(E)$ que se obtiene al quitarle a la bandera b los subespacios afines de dimensión i, con $i \in I$. Es claro de la definición de P_I, que ella es epiyectiva y conmuta con la acción natural de A_n en $\mathcal{B}(E)$ y $\mathcal{B}^I(E)$.

NOTACION: 1) Si $I = \{i\}$ entonces $P_I =: P_i$, $\mathcal{B}^I(E) =: \mathcal{B}^i(E)$ y $P_i(b) = b^i$.

2) Si $I = \phi$, entonces $\mathcal{B}^I(E) = \mathcal{B}(E)$ y P_I es la aplicación identidad sobre $\mathcal{B}(E)$.

1.7. Finalmente $L^2(\mathcal{B}^I(E))$, $I \subset [n - 1]$, será el espacio de Hilbert de todas las funciones de $\mathcal{B}^I(E)$ en $\mathbb{C}$.

1.7.1. Observamos que a partir de la aplicación P_I podemos definir el operador lineal inyectivo P_I^* de $L^2(\mathcal{B}^I(E))$ en $L^2(\mathcal{B}(E))$ dado por

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(E) \arrow[r, "P_I"] \arrow[dr, "P_I^*(h) = h \circ P_I"'] & \mathcal{B}^I(E) \arrow[d, "h"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

1.9.3. Es claro que, para $h \in L^2(\mathcal{B}(E))$: $h \in P_I^*(L^2(\mathcal{B}^I(E)))$ sí y sólo si para todo $b \in \mathcal{B}(E)$ la función h restringida a $P_I^{-1}(b^I)$ es la función constante igual a $h(b)$.

NOTACION. $\underline{c}$ designará la función constante c .

1.9.4. El operador P_I^* es un operador de entrelazamiento entre las representaciones naturales $L^2(\mathcal{B}(E))$ y $L^2(\mathcal{B}^I(E))$ de A_n . (Esto es consecuencia de 1.8.3.).

Denotaremos por $L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim$ a la imagen de $L^2(\mathcal{B}^I(E))$ por P_I^* . $(L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim \lhd L^2(\mathcal{B}(E)))$.

2. REPRESENTACION AFIN DE STEINBERG Y REPRESENTACION DE GEL'FAND-GRAEV.

Representación afín de Steinberg.

DEFINICION 2.1. Sea Ψ un carácter no trivial de $(\mathbb{F}_q)^+$ y Ψ_o la representación unidimensional no singular de U_{n+1} definida por

$$\Psi_o(u) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,i+1}\right)$$

donde $u = (u_{ij}) \in U_{n+1}$.

DEFINICION 2.2. Llamamos representación afín de Steinberg a la representación $\operatorname{Ind}_{U_{n+1}\uparrow A_n} \Psi_o$ del grupo afín A_n .

TEOREMA 2.1. (Gel'fand [G] y Fadeev [Fa]). La representación afín de Steinberg es irreducible y es la única representación irreducible de dimensión $(q^{n-1} - 1) \dots (q - 1)$ de A_n .

□

Sea $E \in \mathcal{E}$ un espacio afín y consideremos la representación natural $(L^2(\mathcal{B}(E)),\tau)$ de A_n, obtenida a partir de la acción de A_n sobre $\mathcal{B}(E)$.

TEOREMA 2.2. (G. Lusztig [L]). Sea St el subespacio vectorial de las funciones $f \in L^2(\mathcal{B}(E))$ tales que

$$(1) \qquad \sum_{(b')^i = b^i} f(b') = 0$$

para todo $b \in \mathcal{B}(E)$ y para todo $i \in [n-1]$, entonces St es una subrepresentación irreducible de τ cuya dimensión es $(q^{n-1}-1)\ldots(q-1)$.

<u>Demostración</u>: Es claro que St es un subespacio estable por τ.

Sea $b \in \mathcal{B}(E)$ y denotemos por K al subgrupo estabilizador de b por la acción de A_n en $\mathcal{B}(E)$. Entonces

$$(L^2(\mathcal{B}(E)),\tau) \cong_{A_n} \left(\operatorname{Ind}_{K\uparrow A_n} \underline{1}\right) .$$

Luego, para demostrar que la subrepresentación St de τ es irreducible basta demostrar que el subespacio vectorial St^K de los vectores fijos por K en St es unidimensional. En efecto, basta observar que como St es subespacio de $L^2(\mathcal{B}(E))$ entonces

$$\dim \operatorname{End}_{A_n}(St,St) \leq \dim \operatorname{Hom}_{A_n}(L^2(\mathcal{B}(E)),St) .$$

Luego, por el teorema de reciprocidad de Frobenius

$$\operatorname{Hom}_{A_n}(L^2(\mathcal{B}(E)),St) \cong \operatorname{Hom}_K\left(\underline{1}_K, \operatorname{Res}_{A_n\downarrow K} St\right) .$$

Es claro que $\mathrm{Hom}_K\big(\underline{1}_K, \operatorname*{Res}_{A_n \downarrow K} St\big) \cong St^K$, de modo que

$$\dim \mathrm{End}_{A_n}(St, St) = 1$$

y por lo tanto St es irreducible.

G. Lusztig [L] demuestra que existe un único $f \in St$ (módulo multiplicar por un escalar) tal que $\forall\, k \in K$, $\tau_k(f) = f$. Además, usando una descripción homológica para la representación afín de Steinberg, se demuestra mediante sucesiones exactas de homología que la dimensión es $(q^{n-1} - 1) \ldots (q - 1)$. Una descripción análoga usa también L. Solomon [So].

$\square$

COROLARIO 2.1. (de Teoremas 2.1. y 2.2). La representación St de A_n es isomorfa a la representación afín de Steinberg $\operatorname*{Ind}_{U_{n+1} \uparrow A_n} \Psi_o$.

$\square$

En lo que sigue, demostraremos que la representación afín de Steinberg está en el Anillo de Burnside $\mathcal{R}(A_n)$ de las representaciones naturales de A_n y, más aún, es isomorfa a una suma signada de representaciones naturales de A_n asociada a A_n-conjuntos transitivos.

Algunas Observaciones y Proposiciones acerca del espacio de Hilbert $L^2(\mathcal{B}(E))$.

PROPOSICION 2.1.

$$L^2(\mathcal{B}(E)) = St \textcircled{\perp} \sum_{i=0}^{n-1} L^2(\mathcal{B}^i(E))^{\sim} .$$

Demostración: Basta notar que la condición (1), que caracteriza a las funciones $f \in St$, significa precisamente que

$$f \in \left[\sum_{i=0}^{n-1} L^2(\mathcal{B}^i(E))^{\sim}\right]^{\perp}$$

□

OBSERVACION 2.1. Sean $I \subset I' \subset [n - 1]$, entonces

$$L^2(\mathcal{B}^{I'}(E))^{\sim} \lhd L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim} \lhd L^2(\mathcal{B}(E)) .$$

Demostración: Es consecuencia del hecho que si $I \subset I'$ entonces para todo $b \in \mathcal{B}(E)$,

$$P_I^{-1}(b^I) \subset P_{I'}^{-1}(b^{I'}) .$$

□

OBSERVACION 2.2. Sean $I,J \subset [n - 1]$, entonces

$$L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim} \cap L^2(\mathcal{B}^J(E))^{\sim} = L^2(\mathcal{B}^{I\cup J}(E))^{\sim} .$$

<u>Demostración</u>: Es claro por Observación 2.1. que $L^2(\mathcal{B}^{I\cup J}(E))^{\sim}$ es subespacio de $L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim} \cap L^2(\mathcal{B}^J(E))^{\sim}$.

Para demostrar la contención recíproca observemos que si b y $b' \in \mathcal{B}(E)$ son tales que $b^{I\cup J} = (b')^{I\cup J}$ entonces podemos encontrar una bandera b'' tal que $(b'')^I = (b')^I$ y $(b'')^J = b^J$. En efecto, ya que $(b')^{I\cup J} = b^{I\cup J}$, para todo $k \in \mathbb{N} - (I \cup J)$ los subespacios afines de dimensión k de b y b' son iguales. Además si b'' es otra bandera tal que $(b'')^I = (b')^I$ entonces para todo $k \in \mathbb{N} - (I \cup J) \subset \mathbb{N} - I$ los subespacios afines de dimensión k de b'' , b' y b son iguales. Escojamos entre las banderas b'' tales que $(b'')^I = (b')^I$ aquellas donde, para todo $k \in (I - J)$, los subespacios afines de dimensión k de b y b'' son iguales. Luego si b'' es una de estas banderas se tiene que para todo $k \in (I - J) \cup \mathbb{N} - (I \cup J) = \mathbb{N} - J$ los subespacios afines de b'' y b de dimensión k son iguales, es decir $(b'')^J = b^J$.

Sea $h \in L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim} \cap L^2(\mathcal{B}^J(E))^{\sim}$ y sean b y b' banderas tales que $(b')^{I\cup J} = b^{I\cup J}$; por lo anterior existe una bandera b'' tal que

$$(b'')^I = (b')^I \quad \text{y} \quad (b'')^J = b^J \ .$$

Luego

$$h(b) = h(b'') = h(b') \ .$$

Por lo tanto, h es constante sobre $(P_{I\cup J})^{-1}(b)$, es decir $h \in L^2(\mathcal{B}^{I\cup J}(E))^{\sim}$.

DEFINICION 2.3. Para cada $J \subset [n-1]$, denotaremos por M_J al operador lineal de $L^2(\mathcal{B}(E))$ en $L^2(\mathcal{B}(E))$ definido por

$$(2) \qquad M_J(f)(b) = \frac{1}{C_J} \sum_{b' \in P_J^{-1}(b^J)} f(b')$$

para todo $f \in L^2(\mathcal{B}(E))$, para todo $b \in \mathcal{B}(E)$ y donde

$$C_J = |P_J^{-1}(b^J)| = \prod_{j \in J} |P_j^{-1}(b^j)|$$

$$|P_J^{-1}(b^j)| = \begin{cases} q & j = 0 \\ q+1 & j \neq 0 . \end{cases}$$

PROPOSICION 2.2. Sea $J \in \mathcal{P}_k$, $(0 \leq k \leq n)$, entonces

1) $M_J(L^2(\mathcal{B}(E))) = L^2(\mathcal{B}^J(E))^{\sim}$

2) $M_J(L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim}) = L^2(\mathcal{B}^{I \cup J}(E))^{\sim} \lhd \sum_{I \in \mathcal{P}_{k+1}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim}$

3) M_J es un operador de entrelazamiento.

<u>Demostración</u>: 1) y 2) son consecuencia directa de la definición misma de M_J y de las Observaciones 2.1. y 2.2.

3) Sea $g \in A_n$, $f \in L^2(\mathcal{B}(E))$ y $b \in \mathcal{B}(E)$ entonces

$$(M_J \circ \tau_g)(f)(b) = C_J \sum_{b' \in P_J^{-1}(b^J)} \tau_g(f)(b')$$

$$= C_J \sum_{b' \in P_J^{-1}(b^J)} f(g^{-1} \cdot b')$$

$$= C_J \sum_{g\cdot b''\in P_J^{-1}(b^J)} f(b'') .$$

Si $g\cdot b'' \in P_J^{-1}(b^J)$ entonces $P_J(g\cdot b'') = P_J(b)$, luego como P_J conmuta con la acción de A_n en $\mathcal{B}(E)$ obtenemos que $g\cdot P_J(b'') = P_J(b)$ o equivalentemente $b'' \in P_J^{-1}((g^{-1}\cdot b)^J)$.

Luego

$$\begin{aligned}(M_J \circ \tau_g)(f)(b) &= C_J \sum_{b''\in P_J^{-1}((g^{-1}\cdot b)^J)} f(b'') \\ &= M_J(f)(g^{-1}\cdot b) \\ &= (\tau_g \circ M_J)(f)(b) .\end{aligned}$$

COROLARIO 2.2. Sea $J \in \mathcal{P}_k$, entonces

a) $$M_J\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{P}_k\\ I\neq J}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim}\right) \triangleleft \sum_{\substack{I\in\mathcal{P}_{k+1}\\ J\subset I}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim} \triangleleft L^2(\mathcal{B}^J(E))^{\sim}$$

b) $$M_J\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_{k+1}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim}\right) \triangleleft \sum_{I\in\mathcal{P}_{k+1}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim}$$

LEMA 2.1.

$$\sum_{J\in\mathcal{P}_k} L^2(\mathcal{B}^J(E))^{\sim} \Big/ \sum_{I\in\mathcal{P}_{k+1}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim} \cong_{A_n}$$

$$\bigoplus_{J\in\mathcal{P}_k} \left(L^2(\mathcal{B}^J(E))^{\sim} \Big/ \sum_{\substack{I\in\mathcal{P}_{k+1}\\ J\subset I}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim}\right) .$$

Demostración: Por Corolario 2.2. b)

$$M_J \left(\sum_{I\in P_{k+1}} L^2(B^I(E))^{\sim} \right) \triangleleft \sum_{I\in P_{k+1}} L^2(B^I(E))^{\sim}$$

podemos definir el operador $\overline{M}_J$ por paso al cuociente. Denotemos por $\overline{h}$ a la clase módulo $\sum_{I\in P_{k+1}} L^2(B^J(E))^{\sim}$ de una función h perteneciente a $\sum_{J\in P_k} L^2(B^J(E))^{\sim}$, entonces

$$\overline{M}_J(\overline{h}) = \overline{M_J(h)} .$$

Observemos que:

1) $\overline{M}_J \circ \overline{M}_J = \overline{M}_J$

2) $\overline{M}_J \circ \overline{M}_I = 0 \qquad$ si $J \neq I$

3) $\sum_{I\in P_k} \overline{M}_I = Id$,

ya que si $h \in L^2(B^J(E))^{\sim}$, por la definición misma de M_J , se tiene que $M_J(h) = h$ y por la Proposición 2.2. $M_J(L^2(B^I(E))^{\sim}$ es subespacio de $\sum_{I\in P_{k+1}} L^2(B^I(E))^{\sim}$.

Luego la familia $\{\overline{M}_J : J \in P_k\}$ es una familia de proyectores, que induce la descomposición en suma directa de subespacios del espacio cuo - ciente en cuestión. Demostraremos que estos subespacios son A_n-isomorfos a los espacios cuocientes del Lema.

Definamos el siguiente operador lineal $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L} : \overline{M}_J\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_k} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim} \Big/ \sum_{I\in\mathcal{P}_{k+1}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow L^2(\mathcal{B}^J(E))^{\sim} \Big/ \sum_{\substack{I\in\mathcal{P}_{k+1} \\ J\subset I}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim}$$

tal que $\qquad \mathcal{L}(\overline{M_J(h)}) = \overline{\overline{M_J(h)}}$

donde $\overline{\overline{M_J(h)}}$ denota la clase de $M_J(h)$ en el espacio vectorial cuociente $L^2(\mathcal{B}^J(E))^{\sim} \Big/ \sum_{\substack{I\in\mathcal{P}_{k+1} \\ J\subset I}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim}$.

Veremos primero que $\mathcal{L}$ está bien definido, es decir su definición no depende del representante escogido.

- $\mathcal{L}$ <u>no depende del representante</u> pues si $\overline{M_J(h)} = \overline{M_J(h')}$ entonces

$$M_J(h - h') \in \sum_{I\in\mathcal{P}_{k+1}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^{\sim} .$$

Aplicando M_J a ambos lados y usando la Proposición 2.2. 2) obtenemos que

$$M_J(h - h') \in \sum_{I\in\mathcal{P}_{k+1}} L^2(\mathcal{B}^{I\cup J}(E))^{\sim}$$

y por Observación 2.1. tenemos

$$\sum_{I\in P_{k+1}} L^2(B^{I\cup J}(E))^{\sim} \triangleleft \sum_{\substack{I\in P_{k+1}\\ J\subset I}} L^2(B^I(E))^{\sim}$$

y por lo tanto

$$\overline{\overline{M_J(h)}} = \overline{\overline{M_J(h')}} \ .$$

- $\mathcal{L}$ es claramente epiyectiva.

- $\mathcal{L}$ es inyectiva pues

$$\sum_{\substack{I\in P_{k+1}\\ J\subset I}} L^2(B^I(E))^{\sim} \triangleleft \sum_{I\in P_{k+1}} L^2(B^I(E))^{\sim} \ .$$

Consideremos las representaciones

$$\left(L^2(B^J(E))^{\sim} \Big/ \sum_{\substack{I\in P_{k+1}\\ J\subset I}} L^2(B^I(E))^{\sim} \ , \ \bar{\bar{\tau}}_J \right)$$

de A_n donde:

$$(\bar{\bar{\tau}}_J)_g(\bar{\bar{h}}) = \overline{\overline{\tau_g(h)}} \qquad\qquad (g \in A_n)$$

y las representaciones $(\mathrm{Im}\ \overline{M}_J \ , \ \overline{\tau}|_{\mathrm{Im}\ \overline{M}_J})$ de A_n donde

$$\left(\overline{\tau}|_{\mathrm{Im}\ \overline{M}_J}\right)_g (\overline{M_J(h)}) = \overline{\tau_g(M_J(h))} \qquad\qquad (g \in G) \ .$$

Es claro que ellas están bien definidas pues estamos considerando subespacios estables.

A partir de la definición de estas representaciones, $\mathcal{L}$ es claramente un A_n-isomorfismo y por lo tanto hemos demostrado el Lema.

□

COROLARIO 2.3. Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}_k[n-1]$; denotemos por $\mathcal{P}_{k+1}(\mathcal{I})$ al subconjunto de los $I' \in \mathcal{P}_{k+1}$ tales que I' contiene al menos un $I \in \mathcal{I}$. Entonces

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim \Big/ \sum_{I'\in\mathcal{P}_{k+1}(\mathcal{I})} L^2(\mathcal{B}^{I'}(E))^\sim \cong_{A_n}$$

$$\bigoplus_{I\in\mathcal{I}} \left(L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim \Big/ \sum_{\substack{I'\in\mathcal{P}_{k+1}(\mathcal{I}) \\ I\subset I'}} L^2(\mathcal{B}^{I'}(E))^\sim \right)$$

<u>Demostración</u>: Basta considerar la familia de proyectores $\{\overline{M}_J : J \in \mathcal{I}\}$ y observar que

$$M_J\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_{k+1}(\mathcal{I})} L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim \right) \triangleleft \sum_{I\in\mathcal{P}_{k+1}(\mathcal{I})} L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim$$

debido a la Proposición 2.2. El resto es análogo al Lema 2.1.

TEOREMA 2.3. Sea $0 \leq k \leq n$

$$\sum_{I\in\mathcal{P}_k} L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim \cong_{A_n} \bigoplus_{I\in\mathcal{P}_k} \left(L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim \Big/ \sum_{\substack{I'\in\mathcal{P}_{k+1} \\ I\subset I'}} L^2(\mathcal{B}^{I'}(E))^\sim \right)$$

$$\bigoplus \sum_{I\in\mathcal{P}_{k+1}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim$$

Demostración: Resulta del Lema 2.1.

□

Después del Teorema 2.3 estamos en condiciones de demostrar que la representación de St pertenece a $\mathcal{R}(A_n)$. Recordemos que $[V] \in \mathcal{R}(A_n)$ denota la clase de las representaciones naturales A_n-isomorfas a V .

OBSERVACION 2.3. Debido a que P_I^* es un monomorfismo (de representacio - nes) para todo $I \subset [n-1]$, entonces es claro que:

$$[L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim] = [L^2(\mathcal{B}^I(E))]$$

para todo $I \subset [n-1]$.

PROPOSICION 2.3. Sea $\ell \leq n$:

$$\left[\sum_{i=0}^{\ell-1} L^2(\mathcal{B}^i(E))^\sim\right] = \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k+1} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}_k[\ell-1]} [L^2(\mathcal{B}^I(E))]\right) .$$

Demostración: La demostraremos por Inducción sobre ℓ . Sea $\ell = 2$, en - tonces aplicando el Corolario 2.3. a $\mathcal{I} = \{\{0\}, \{1\}\}$ obtenemos

$$L^2(\mathcal{B}^o(E))^\sim + L^2(\mathcal{B}^1(E))^\sim \cong_{A_n}$$

$$L^2(\mathcal{B}^o(E))^\sim \Big/ L^2(\mathcal{B}^{\{0,1\}}(E))^\sim \oplus L^2(\mathcal{B}^1(E))^\sim \Big/ L^2(\mathcal{B}^{\{0,1\}}(E))^\sim$$

$$\oplus\ L^2(\mathcal{B}^{\{0,1\}}(E))^\sim .$$

Luego en $\mathcal{R}(A_n)$:

$$[\sum_{i=0}^{1} L^2(\mathcal{B}^i(E))^\sim] = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \sum_{I\in P_k[1]} [L^2(\mathcal{B}^I(E))]$$

Supongamos válida la Proposición para todo $\ell' < \ell$ entonces

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} L^2(\mathcal{B}^i(E))^\sim = \sum_{i=0}^{\ell-2} L^2(\mathcal{B}^i(E))^\sim + L^2(\mathcal{B}^{\ell-1}(E))^\sim .$$

Como en general para cualquier par de subespacios vectoriales V_1, V_2 de un espacio vectorial se verifica que:

$$V_1 + V_2 \cong V_1 / V_1 \cap V_2 \oplus V_2 / V_1 \cap V_2 \oplus V_1 \cap V_2$$

y por hipótesis de inducción $\sum_{i=0}^{\ell-2} L^2(\mathcal{B}^i(E))^\sim$ pertenece a $\mathcal{R}(A_n)$ entonces <u>si el subespacio</u>

$$\left(\sum_{i=0}^{\ell-2} L^2(\mathcal{B}^i(E))^\sim\right) \cap L^2(\mathcal{B}^{\ell-1}(E))^\sim = W$$

<u>de</u> $L^2(\mathcal{B}(E))$ <u>pertenece a</u> $\mathcal{R}(A_n)$, se verificará lo siguiente:

$$(1) \quad \left[\sum_{i=0}^{\ell-1} L^2(\mathcal{B}^i(E))^\sim\right] = \left[\sum_{i=0}^{\ell-2} L^2(\mathcal{B}^i(E))^\sim\right] + [L^2(\mathcal{B}^{\ell-1}(E))]$$
$$- \left[\left(\sum_{i=0}^{\ell-2} L^2(\mathcal{B}^i(E))^\sim\right) \cap L^2(\mathcal{B}^{\ell-1}(E))^\sim\right] .$$

El siguiente Lema demuestra que efectivamente el subespacio W , definido previamente pertenece a $\mathcal{R}(A_n)$.

LEMA 2.2. Para todo $\mathcal{I} \subset P([\ell - 1])$

$$L^2(\mathcal{B}^{\ell-1}(E))^\sim \cap \sum_{I\in\mathcal{I}} L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim = \sum_{I\in\mathcal{I}} L^2(\mathcal{B}^{I\cup\{\ell-1\}}(E))^\sim$$

<u>Demostración del Lema</u>: Sea $h \in L^2(\mathcal{B}^{\ell-1}(E))^\sim$ tal que $h = \sum_{I\in\mathcal{I}} h_I$ donde $h_I \in L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim$, entonces por la Proposición 2.2.

$$h = M_{\ell-1}(h) = \sum_{I\in\mathcal{I}} M_{\ell-1}(h_I) \in \sum_{I\in\mathcal{I}} L^2(\mathcal{B}^{I\cup\{\ell-1\}}(E))^\sim .$$

La contención recíproca es clara en general.

$\square$

Por hipótesis de inducción

$$\left[\sum_{i=0}^{\ell-2} L^2(\mathcal{B}^i(E))^\sim\right] = \sum_{k=1}^{\ell-1} (-1)^{k+1} \sum_{I\in P_k[\ell-2]} [L^2(\mathcal{B}^I(E))] .$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{\ell-2} L^2(\mathcal{B}^i(E))^\sim \oplus \bigoplus_{\substack{k=1\\ k \text{ par}}}^{\ell-1} \bigoplus_{I\in P_k[\ell-2]} L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim = \tag{2}$$

$$\bigoplus_{\substack{k=1\\ k \text{ impar}}}^{\ell-1} \bigoplus_{I\in P_k[\ell-2]} L^2(\mathcal{B}^I(E))^\sim$$

Luego, intersectando con $L^2(\mathcal{B}^{\ell-1}(E))^{\sim}$ ambos miembros de la identidad (2) y usando el Lema 2.2. obtenemos

$$\left[\left(\sum_{i=0}^{\ell-2} (L^2(\mathcal{B}^i(E))^{\sim}\right) \cap L^2(\mathcal{B}^{\ell-1}(E))^{\sim}\right] =$$

(3)

$$= \sum_{k=1}^{\ell-1} (-1)^{k+1} \sum_{I\in P_k[\ell-1]} [L^2(\mathcal{B}^{I\cup\{\ell-1\}}(E))]$$

$\square$

Luego la identidad (1) es válida. En seguida, haciendo uso de la hipótesis de inducción y de la expresión (3), se obtiene:

$$\left[\sum_{i=0}^{\ell-1} L^2(\mathcal{B}^i(E))^{\sim}\right] = \sum_{I\in P_1[\ell-1]} [L^2(\mathcal{B}^I(E))] +$$

(4)

$$+ \sum_{k'=2}^{\ell-1} (-1)^{k'+1} \sum_{I\in P_{k'}[\ell-2]} [L^2(\mathcal{B}^I(E))] -$$

$$- \sum_{k=1}^{\ell-1} (-1)^{k+1} \sum_{I\in P_k[\ell-2]} [L^2(\mathcal{B}^{I\cup\{\ell-1\}}(E))] .$$

Pero, la contribución al miembro derecho de (4) de las sumas correspondientes a $k' = j$ y $k = j - 1$ es:

$$(-1)^{j+1} \sum_{I \in P_j[\ell-2]} [L^2(B^I(E))] - (-1)^{(j-1)+1} \sum_{I \in P_{j-1}[\ell-2]} [L^2(B^{I \cup \{\ell-1\}}(E))] =$$

(5)

$$= (-1)^{j+1} \sum_{I \in P_j[\ell-1]} [L^2(B^I(E))] \ ,$$

pues

$$P_j[\ell-1] = P_j[\ell-2] \cup P_j[\ell-1](\ell - 1) \ ,$$

donde

$$P_j[\ell-1](\ell - 1) = \{I \in P_j\ [\ell-1] \ / \ell - 1 \in I\} \ .$$

Introduciendo la expresión (5) en la (4) y observando que

$$-(-1)^{\ell} \sum_{I \in P_{\ell-1}[\ell-2]} [L^2(B^{I \cup \{\ell-1\}}(E))] =$$

$$(-1)^{\ell+1} [L^2(B^{[\ell-1]}(E))]$$

se obtiene finalmente:

$$(6) \quad [\sum_{i=0}^{\ell-1} L^2(B^i(E))^{\sim}] = \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k+1} \sum_{I \in P_k[\ell-1]} [L^2(B^I(E))]$$

que es lo que queríamos demostrar.

□

TEOREMA 2.4. La representación afín de Steinberg St pertenece a $\mathcal{R}(A_n)$ y

$$[St] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{I\in \mathcal{P}_k[n-1]} [L^2(\mathcal{B}^I(E))] .$$

Demostración: Es claro a partir de la Proposición 2.3. y 2.1.

□

Representación de Gel'fand Graev.

DEFINICION 2.4. Sea Ψ_o la representación unidimensional de U_n definida por

$$\Psi_o(u) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1}\right)$$

donde $u \in U_n$, $u = (u_{ij})$ y Ψ es un carácter no trivial de $\mathbb{F}_q^+$.

DEFINICION 2.5. Llamamos representación de Gel'fand-Graev de G_n a la representación de G_n : $\operatorname{Ind}_{U_n\uparrow G_n} \Psi_o$.

DEFINICION 2.6. - Se llaman representaciones irreducibles no degeneradas de G_n a las representaciones irreducibles de G_n contenidas en la representación de Gel'fand Graev de G_n .

- Para cada representación irreducible π de G_n llamamos dimensión de Gel'fand-Kirillov de π y denotamos $\dim_{G.K}\pi$, al grado del polinomio en q que da su dimensión.

Así por ejemplo, la serie principal, la serie cuspidal, la representación de Steinberg tienen dimensión de Gel'fand-Kirillov 1 para G_2. Más generalmente la máxima dimensión de Gel'fand-Kirillov para las representaciones irreducibles de G_n es $\frac{1}{2}n(n - 1)$.

TEOREMA 2.6. (Gel'fand-Graev [G-Gr], Zelevinsky [Z]). La representación de Gel'fand-Graev no tiene multiplicidades y sus componentes irreducibles son las representaciones irreducibles de G_n de máxima dimensión de Gel'fand-Kirillov.

COROLARIO 2.3. Las representaciones irreducibles cuspidales de G_n son componentes irreducibles de la representación de Gel'fand-Graev de G_n, con multiplicidad 1.

En seguida construiremos para cada $I \subset [n - 1]$ un G_n-conjunto transitivo de tal modo que nos permitirá afirmar que la representación de Gel'fand-Graev de G_n pertence al anillo de Burnside de $\mathcal{R}(G_n)$ de las representaciones naturales de G_n

Recordemos las notaciones entregadas en el número 1 de este Capítulo, con la única diferencia que ahora V será un $\mathbb{F}_q$-espacio vectorial de dimensión n. Así, G_n actúa sobre $\mathcal{E}$ transitivamente y denotamos por

$$(2.1) \qquad A_{n-1} =: \mathrm{Stab}_{G_n} \{E_*\}$$

donde $E_* \in \mathcal{E}$ es el subespacio afin fijo de dimensión $n - 1$ que no contiene el origen definido por

(2.2) $\qquad E_* =: e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$

donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de V.

DEFINICION 2.7. Sea $I \subset [n-1]$ entonces

$$\mathcal{B}^I[\mathcal{E}] = \{(E,b) \in \mathcal{E} \times \bigcup_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{B}^I(E) \,/\, b \in \mathcal{B}^I(E)\} .$$

OBSERVACION 2.5. $\mathcal{B}^I[\mathcal{E}]$ se fibra sobre $\mathcal{E}$ con proyección p definida por:

$$p(E,b) = E \qquad ((E,b) \in \mathcal{B}^I[\mathcal{E}]) .$$

Notemos que la fibra sobre $E \in \mathcal{E}$ es el conjunto $\mathcal{B}^I(E)$.

PROPOSICION 2.4. G_n actúa en $\mathcal{B}^I[\mathcal{E}]$ natural y transitivamente.

Demostración: Usando las acciones de G_n sobre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}^I(E)$, para todo $E \in \mathcal{E}$, es fácil ver que la siguiente fórmula:

(7) $\quad g\cdot(E,b) =: (g\cdot E, g\cdot b)$, $\quad (g \in G_n) \quad ((E,b) \in \mathcal{B}^I[\mathcal{E}])$

define una acción natural de G_n sobre $\mathcal{B}^I[\mathcal{E}]$.

Sea E_* como en (2.2) y b_* cualquier bandera en $\mathcal{B}^I(E_*)$. Demostraremos que la órbita que contiene a (E_*,b_*) es igual a $\mathcal{B}^I[\mathcal{E}]$. Para ello, sea $(E,b) \in \mathcal{B}^I[\mathcal{E}]$. Como G_n actúa transitivamente en $\mathcal{E}$ existe una matriz $g \in G_n$ tal que $g\cdot E = E_*$. Como $b \in \mathcal{B}^I(E)$ entonces $g\cdot b \in \mathcal{B}^I(E_*)$, pero como A_{n-1} actúa transitivamente en $\mathcal{B}^I(E_*)$ existe $h \in A_{n-1}$ tal que $h\cdot(g\cdot b) = b_*$. Como A_{n-1} es el subgrupo estabilizador de E_* obtenemos:

$$(hg)\cdot(E,b) = ((hg)\cdot E, hgb) = (E_*, b_*) \ .$$

Por lo tanto la acción natural de G_n sobre $\mathcal{B}^I[\mathcal{E}]$ definida en (7) es transitiva.

OBSERVACION 2.6. Consideremos el conjunto $\Gamma_G(\mathcal{B}^I[\mathcal{E}])$ de las secciones γ del fibrado $\mathcal{B}^I[\mathcal{E}]$ tales que son G_n-invariantes, es decir que verifican la siguiente relación:

$$\gamma(g\cdot E) = g\cdot\gamma(E) \qquad\qquad (g \in G \ , \quad E \in \mathcal{E})$$

entonces

$$\Gamma_G(\mathcal{B}^I[\mathcal{E}]) \simeq_{G_n} \mathcal{B}^I(E)$$

para todo $E \in \mathcal{E}$.

Esto es consecuencia del hecho que para definir una sección γ que sea G-invariante basta con determinar su imagen en algún espacio vectorial afin E , fijo, en $\mathcal{E}$.

TEOREMA 2.6. La representación de Gel'fand-Graev pertenece al anillo de Burnside $\mathcal{R}(G_n)$ (de las representaciones naturales de G_n) y

$$(8) \qquad \left[\operatorname*{Ind}_{U_n\uparrow G_n} \widetilde{\Psi}_o\right] = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{I\in\mathcal{P}_k[n-1]} [L^2(\mathcal{B}^I[\mathcal{E}])]$$

<u>Demostración</u>: Sea $K_I = \mathrm{Stab}_{G_n}\{E_*, b_*)\}$. Por la Proposición 2.4

$$L^2(\mathcal{B}^I[\mathcal{E}]) \cong \operatorname*{Ind}_{K_I\uparrow G_n} \underline{1} \ . \qquad\qquad (I \subset [n-1])$$

Pero como además $K_I = \mathrm{Stab}_{A_{n-1}}\{b_*\}$,

$$\operatorname*{Ind}_{K_I\uparrow G_n} \underline{1} \cong \operatorname*{Ind}_{A_{n-1}\uparrow G_n} \left(\operatorname*{Ind}_{K_I\uparrow A_{n-1}} \underline{1}\right) \cong \operatorname*{Ind}_{A_{n-1}\uparrow G_n} L^2(\mathcal{B}^I(E_*))^\sim$$

entonces

$$L^2(\mathcal{B}^I[\mathcal{E}]) \cong \operatorname*{Ind}_{A_{n-1}\uparrow G_n} L^2(\mathcal{B}^I(E_*))^\sim . \tag{9}$$

Además como

$$\operatorname*{Ind}_{U_n\uparrow G_n} \widetilde{\Psi} = \operatorname*{Ind}_{A_{n-1}\uparrow G_n} \left(\operatorname*{Ind}_{U_n\uparrow A_{n-1}} \widetilde{\Psi}\right) = \operatorname*{Ind}_{A_{n-1}\uparrow G_n} St \tag{10}$$

entonces por Teorema 2.5.

$$\begin{aligned} St \oplus \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \text{ impar}}}^{n-1} \bigoplus_{I\in\mathcal{P}_k} L^2(\mathcal{B}^I(E_*)^\sim &= \\ \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{n-1} \bigoplus_{I\in\mathcal{P}_k} L^2(\mathcal{B}^I(E_*))^\sim &. \end{aligned} \tag{11}$$

Luego induciendo de A_{n-1} a G_n ambos miembros de la identidad anterior y pasando a $\mathcal{R}(G_n)$ obtenemos

$$\left[\operatorname*{Ind}_{A_{n-1}\uparrow G_n} St\right] = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{I\in\mathcal{P}_k[n-1]} \left[\operatorname*{Ind}_{A_{n-1}\uparrow G_n} L^2(\mathcal{B}^I(E_*))^\sim\right] \tag{12}$$

Reemplazando en (12) por las identidades (9) y (10) obtenemos

$$\left[\underset{U_n \uparrow G_n}{\mathrm{Ind}} \; \widetilde{\Psi}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{I \in P_k[n-1]} L^2(B^I[\&])$$

□

3. MODELO DE GEL'FAND PARA G_n SEGUN KLYACHKO [K].

DEFINICION 3.1. Consideremos en G_n la familia de subgrupos $G(k)$ donde $0 \leq 2k \leq n$. Elijamos un carácter aditivo no trivial Ψ de $\mathbb{F}_q^+$ y definamos el siguiente carácter $(\widetilde{\Psi}_k)$ del grupo $G(k)$ por la fórmula

$$(\widetilde{\Psi}_k)\left(\begin{pmatrix} u & * \\ 0 & s \end{pmatrix}\right) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{n-2k} u_{i,i+1}\right) ,$$

donde $u = (u_{ij}) \in U_{n-2k}$ y $s \in Sp_k$.

Denotemos por $T_k(n)$ a la representación de G_n inducida por el carácter $(\widetilde{\Psi}_k)$ del subgrupo $G(k)$.

Observemos que $G(0) = U_n$ y $T_o(n)$ es la representación de Gel'fand Graev de G_n .

TEOREMA 3.1. (Klyachko [K]). La representación de G_n

$$M = \bigoplus_{0 \leq 2k \leq n} T_k(n)$$

es un modelo de Gel'fand de G_n .

OBSERVACION 3.1.

Consideremos el subgrupo $N(k)$ definido en 1.4.2. Por 1.4.3. sabemos que $N(k) = L(k) \rtimes H(k)$ donde

$$L(k) \cong G_{n-2k} \times G_{2k}$$

y

$$H(k) = \left\{ \begin{pmatrix} I_{n-2k} & c \\ 0 & I_{2k} \end{pmatrix} : c \in M_{n-2k,2k}(\mathbb{F}_q) \right\}$$

DEFINICION 3.2. Sea Ψ_k el carácter de U_{n-2k} definido por la fórmula siguiente

$$\Psi_k(u) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,i+1} \right)$$

donde $u \in U_n$ y Ψ es un carácter no trivial de $\mathbb{F}_q^+$ y $0 \le 2k \le n$.

Observemos que para $k = 0$, Ψ_o es el carácter de U_n definido en la Definición 2.4.

LEMA 3.1. Sea G grupo finito, H,K y L subgrupos de G tales que $G = (H \times K) \ltimes L$, $H' \times K'$ subgrupo de $H \times K$, ϕ un caracter de H' y sea $\widetilde{\phi}$ el carácter de $G' = (H' \times K') \ltimes L$ definido por

$$\widetilde{\phi}(h',k',\ell) = \phi(h') .$$

Entonces

$$\operatorname*{Ind}_{G'\uparrow G} \tilde{\phi} \cong \operatorname*{Ind}_{H'\uparrow H} \phi \otimes \operatorname*{Ind}_{K'\uparrow K} 1 \otimes \underline{1}_L .$$

<u>Demostración</u>: Sea ϕ' el carácter de $H' \times K'$ definido por

$$\phi'(h',k') = \phi(h') \qquad (h' \in H' \text{ y } k' \in K) .$$

Es sabido que la representación $\operatorname*{Ind}_{H'\times K'\uparrow H\times K} \phi'$ de $H \times K$ es isomorfa a la representación

$$\operatorname*{Ind}_{H'\uparrow H} \phi \otimes \operatorname*{Ind}_{K'\uparrow K} \underline{1} \qquad \text{de } H \times K .$$

Sea W el espacio de la representación $\rho = \operatorname*{Ind}_{G'\uparrow G} \tilde{\phi}$ y sea $f \in W$, entonces:

i) $f(gg') = \tilde{\phi}^{-1}(g')f(g)$

ii) $\rho_{g_o}(f)(g) = f(g_o^{-1}g) \qquad (g , g_o \in G \text{ y } g' \in G')$.

Pero para todo $(h,k,\ell) \in G$ se satisface lo siguiente

$$(h,k,\ell) = (h,k,e)(e , e,\ell') \qquad \text{cierto } \ell' \in L .$$

Luego, <u>si</u> $f \in W$ <u>entonces</u>

$$f(h,k,\ell) = \tilde{\phi}^{-1}(e,e,\ell')f(h,k,e) = f(h,k,e) .$$

De donde se deduce que el subespacio vectorial W de $L^2(G)$ es G-isomorfo al producto tensorial $W' \otimes \{ctes\}$ donde W' es el subespacio vectorial de las funciones $f \in L^2(H \times K)$ tales que

i) $f((h,k)(h',k')) = \phi'^{-1}(h',k')f(h,k)$

ii) $\rho_{(h_o,k_o)}(f)(h,k) = f((h_o^{-1},k_o^{-1})(h,k)) \qquad ((h_o,k_o),(h,k) \in H \times K \ , \ f \in W')$

es decir, W' es el espacio de la representación $\operatorname{Ind}_{H'\times K'\uparrow H\times K} \phi$.

(Considerar $\Phi : W \to W' \otimes \{\text{ctes}\}$, $\Phi(f) = \tilde{f} \otimes \underline{1}$, donde $\tilde{f}(h,k) =$
$= f(h,k,e))$.

□

PROPOSICION 3.1.

$$\operatorname{Ind}_{G(k)\uparrow N(k)} \tilde{\Psi}_k = \operatorname{Ind}_{U_{n-2k}\uparrow G_{n-2k}} \Psi_k \otimes \operatorname{Ind}_{Sp_k\uparrow G_{2k}} \underline{1} \otimes \underline{1}_{H(k)} .$$

Demostración: Resulta del Lema 3.1. y Observaciones 1.4.

4. MODELO DEBILMENTE GEOMETRICO DE GEL'FAND PARA G_n .

4.1. Construcción de los G_n-espacios transitivos.

DEFINICION 4.1.

4.1.1. Sea V un $\mathbb{F}_q$-espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{W}_k$ el conjunto de todos los subespacios de V de dimensión $n-2k$, $0 \leq 2k \leq n$. Como es sabido G_n actúa transitivamente en $\mathcal{W}_k$ mediante la acción natural

$$g\cdot W =: g(W) \qquad (g \in G_n \ , \ W \in \mathcal{W}_k) .$$

Es fácil ver que si W_* es el subespacio de V generado por $\{e_1, \ldots, e_{n-2k}\}$ entonces el subgrupo estabilizador de W_* por la acción de G_n en $\mathcal{W}_k$ es el subgrupo $N(k)$.

4.1.2. Para cada $W \in \mathcal{W}_k$, $0 \leq 2k + 2 \leq n$, definimos $\mathcal{E}(W)$ como el conjunto de todos los espacios afines contenidos en W de dimensión $n - 2k - 1$ que no contienen el origen.

4.1.3. Para todo $I \subset [n - 2k - 2]$ y $W \in \mathcal{W}_k$, definimos por $\mathcal{B}^I[\mathcal{E}(W)]$ al siguiente conjunto:

$$\mathcal{B}^I[\mathcal{E}(W)] = \{(E,b) \in \mathcal{E}(W) \times \bigcup_{E'\in\mathcal{E}(W)} \mathcal{B}^I(E') \,/\, b \in \mathcal{B}^I(E)\} .$$

4.1.4. Para cada $0 \leq 2k + 2 \leq n$ y cada $I \subset [n - 2k - 2]$ definimos

$$X_k^I = \bigcup_{W\in\mathcal{W}_k} \mathcal{B}^I[\mathcal{E}(W)] .$$

Definimos, además, la siguiente acción de G_n sobre X_k^I :

$$g\cdot(E,b) = (g(E),g\cdot b) \qquad ((E,b) \in X_k^I , \quad g \in G_n) \tag{4.1}$$

4.1.5. Denotemos por Z_k , $0 \leq 2k \leq n$, al conjunto de las formas bilineales antisimétricas de V de rango $2k$ y definamos la siguiente acción de G_n sobre Z_k :

$$(g\cdot f)(u,v) =: f^g(u,v) = f(g(u), g(v)) \tag{4.2}$$

$$(g \in G_n , \ f \in Z_k , \ (u,v) \in V \times V) .$$

OBSERVACION 4.1. Recordemos que si f es forma bilineal antisimétrica de rango $2k$ entonces existen subespacios W y $W^\perp$ tales que $V = W \oplus W^\perp$

y $\dim W = n - 2k$, es decir W es el espacio nulo de f . Luego f^g es una forma bilineal antisimétrica cuyo espacio nulo es el subespacio $\bar{g}^1(W)$ de V de dimensión $n - 2k$. Así f^g es una forma antisimétrica de rango $2k$.

OBSERVACION 4.2. Sea $Z_k(W)$ el conjunto de las formas bilineales antisimétricas de V de rango $2k$ y espacio nulo W . Entonces

$$Z_k = \bigcup_{W \in \mathcal{W}_k} Z_k(W) \ .$$

PROPOSICION 4.1. Las acciones de G_n definidas sobre X_k^I , $0 \leq 2k + 2 \leq n$, $I \subset [n - 2k - 2]$ y Z_k , $0 \leq 2k \leq n$ son transitivas.

<u>Demostración</u>: Demostraremos primero la transitividad de la acción de G_n sobre X_k^I . Para ello mostraremos que la órbita de $(E_*,b_*) \in X_k^I$, donde $E_* = e_{n-2k} + \langle e_1, \ldots, e_{n-2k-1} \rangle$ subespacio afín de dimensión $n - 2k - 1$ contenido en W_* y b_* una bandera de $\mathcal{B}^I(E_*)$, es todo X_k^I .

Sea $(E,b) \in \mathcal{B}[\mathcal{E}(W)]$ para cierto $W \in \mathcal{W}_k$. Como G_n actúa transitivamente en $\mathcal{W}_k$, existe $g_* \in G_n$ tal que $g_* \cdot W = W_*$. De este modo:

$$g_* \cdot (E,b) = (g_*(E), g_* \cdot b) \in \mathcal{B}[\mathcal{E}(W_*)] \ .$$

Como vimos al comienzo de este Capítulo, $\mathcal{E}(W_*)$ es un G_{n-2k} - conjunto transitivo, luego existe $g_{n-2k} \in G_{n-2k}$ tal que $g_{n-2k} \cdot (g_* \cdot E) = E_*$.

Supongamos que $g_*(E) = v_{n-2k} + \langle v_1, \ldots, v_{n-2k-1} \rangle$, como $g_*(E)$ es un espacio afin que no contiene el origen entonces $\{v_1, \ldots, v_{n-2k}\}$ es un conjunto linealmente independiente en V . Por lo tanto podemos describir los vectores de V usando una base completada de $\{v_1, \ldots, v_{n-2k}\}$

de modo que las n-2k-primeras componentes corresponden a los coeficientes según los vectores $v_1, \ldots, v_{n-2k}$. Según esta base los elementos de $g_*(E)$ se escriben de la forma $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2k-1}, 1,0, \ldots, 0)$. Luego

$$\begin{pmatrix} g_{n-2k} & 0 \\ & \\ 0 & I_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2k-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{n-2k} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2k-1} \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto, dados $g_*(E)$ y $E_* \in \mathcal{E}(W_*)$ existe $h = \begin{pmatrix} g_{n-2k} & 0 \\ 0 & I_{2k} \end{pmatrix} \in N(k)$ tal que

$$h(g_*(E)) = E_* .$$

Notemos que $(hg_*)(W) = W_*$ pues $h \in \mathrm{Stab}_{G_n}\{W_*\}$.

En seguida miramos $(hg_*)\cdot b$ y b_* . Estas dos banderas afines están en $\mathcal{B}^I(E_*)$. Como también vimos al comienzo de este Capítulo, el grupo afín A_{n-2k-1} actúa en $\mathcal{B}^I(E_*)$ transitivamente, luego existe $a_{n-2k-1} \in A_{n-2k-1}$ tal que:

$$a_{n-2k-1}\cdot(hg_*)\cdot b = b_*$$

y entonces

$$a = \begin{pmatrix} a_{n-2k-1} & 0 \\ 0 & I_{2k} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A_{n-2k-1} & 0 \\ 0 & G_{2k} \end{pmatrix}$$

es tal que $a((hg_*)\cdot b) = b_*$. Además $a\cdot E_* = E_*$ pues $a_{n-2k-1} \in \mathrm{Stab}_{G_{n-2k}} \{E_*\}$.

Finalmente hemos demostrado así que existe $g = ahg_* \in G_n$ tal que

$$g\cdot(E,b) = ah(g_*(E),g_*\cdot b) = k(E_*,(hg_*)\cdot b)$$

$$= (E_*,b_*) .$$

Además

$$\mathrm{Stab}_{G_n} \{(E_*,b_*)\} = \begin{pmatrix} K_k^I & * \\ 0 & G_{2k} \end{pmatrix}$$

donde $K_k^I = \mathrm{Stab}_{A_{n-2k-1}} \{b_*\}$.

Finalmente demostraremos que Z_k es un G_n-conjunto transitivo usando el mismo método anterior. Sea f_* la forma bilineal antisimétrica definida por la fórmula:

$$f(\vec{x},\vec{y}) = {}^t\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

donde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$. Sea f cualquier otra forma bilineal antisimétrica de rango $2k$. Sean B_1 y B_2 bases ordenadas de V tales que las representaciones matriciales de f y f_* respectivamente sean el producto directo de la matriz nula de

$n - 2k$ por $n - 2k$ y k matrices de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, es decir

$$[f]_{B_1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & 0 & \\ \hline & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right) = [f_*]_{B_2}$$

Sea $g \in G_n$ tal que $g(B_2) = B_1$, entonces

$$[f^g]_{B_2} = [f \circ g]_{B_2} = [f]_{B_1} = [f_*]_{B_2} .$$

Luego $f^g = f_*$.

Por lo tanto la acción de G_n sobre Z_k es transitiva. Además el subgrupo estabilizador de f_* bajo la acción de G_n es el subgrupo $\begin{pmatrix} G_{n-2k} & * \\ 0 & Sp_k \end{pmatrix}$, pues si $g \in G_n$, podemos escribir $g = \begin{pmatrix} g_{n-2k} & A \\ B & g_{2k} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} {}^t g_{n-2k} & {}^t A \\ {}^t B & {}^t g_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{n-2k} & A \\ B & g_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t BJB & {}^t BJg_{2k} \\ {}^t g_{2k}JB & {}^t g_{2k}Jg_{2k} \end{pmatrix}$$

pero

$$\begin{pmatrix} {}^t BJB & {}^t BJg_{2k} \\ {}^t g_{2k}JB & {}^t g_{2k}Jg_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$$

sí y sólo si $B = 0$ y $^t g_{2k} J g_{2k} = J$.

□

DEFINICION 4.2. Sea $0 \leq 2k \leq n$.

4.2.1. Si $2k + 2 \leq n$

$$\Omega_k^I = X_k^I \times Z_k$$

para todo $I \subset [n - 2k - 2]$.

4.2.2. Si $n = 2k + 1$

$$\Omega_n = (V \setminus \{0\}) \times Z_k$$

$$g \cdot (v,f) = (g(v), f^g) \qquad ((v,f) \in \Omega_k \text{ y } g \in G_n) .$$

4.2.3. Si $n = 2k$

$$\Omega_n = Z_k$$

PROPOSICION 4.2. Para todo $0 \leq 2k \leq n$ y para todo $I \subset [n - 2k - 2]$ el conjunto Ω_k^I es un G_n-conjunto transitivo con la acción producto y

$$\mathrm{Stab}_{G_n} \{((E_*, b_*), f_*)\} = \begin{pmatrix} K_k^I & * \\ 0 & Sp_k \end{pmatrix} = P_k^I .$$

<u>Demostración</u>: Resulta de la Proposición 4.1.

□

TEOREMA 4.1. Para todo $0 \leq 2k+2 \leq n$.

$$(4.3) \qquad \left[T_k(n)\right] \cong_{G_n} \sum_{s=0}^{n-2k-1} (-1)^s \left(\sum_{I \in P_s[n-2k-2]} [L^2(\Omega_k^I)] \right) .$$

<u>Demostración</u>: Por la Proposición 4.2.

$$L^2(\Omega_k^I) \cong_{G_n} L^2(G_n / P_k^I) \cong_{G_n} \operatorname*{Ind}_{P_k^I \uparrow G_n} \underline{1} .$$

Pero

$$\operatorname*{Ind}_{P_k^I \uparrow G_n} \underline{1} \cong_{G_n} \operatorname*{Ind}_{N(k) \uparrow G_n} \left(\operatorname*{Ind}_{P_k^I \uparrow N(k)} \underline{1} \right)$$

y por el Lema 3.1.

$$\operatorname*{Ind}_{P_k^I \uparrow N(k)} \underline{1} \cong_{G_n} \operatorname*{Ind}_{K_k^I \uparrow G_{n-2k}} \underline{1} \otimes \operatorname*{Ind}_{Sp_k \uparrow G_{2k}} \underline{1} \otimes \underline{1}_{H(k)}$$

ya que

$$P_k^I \cong \left(K_k^I \times Sp_k \right) \ltimes H(k) .$$

Así

$$L^2(\Omega_k^I) = \operatorname*{Ind}_{N(k) \uparrow G_n} \left(\operatorname*{Ind}_{K_k^I \uparrow G_{n-2k}} \underline{1} \otimes \operatorname*{Ind}_{Sp_k \uparrow G_{2k}} \underline{1} \otimes \underline{1}_{H(k)} \right)$$

y por lo tanto:

$$\bigoplus_{\substack{s=0 \\ s \text{ par}}}^{n-2k-1} \left(\bigoplus_{I \in P_k[n-2k-2]} L^2(\Omega_k^I) \right) =$$

(4.4)

$$\operatorname*{Ind}_{N(k)\uparrow G_n} \left(\left(\bigoplus_{\substack{s=0 \\ s \text{ par}}}^{n-2k-1} \left(\bigoplus_{I \in P_s[n-2k-2]} \operatorname*{Ind}_{K_k^I \uparrow G_{n-2k}} \underline{1} \right) \right) \otimes \operatorname*{Ind}_{Sp_k \uparrow G_{2k}} \underline{1} \otimes \underline{1}_{H(k)} \right)$$

Por el Teorema 2.6 el miembro de la derecha de (4.4) es isomorfo a:

$$\operatorname*{Ind}_{N(k)\uparrow G_n} \left(\left(\bigoplus_{\substack{s=0 \\ s \text{ impar}}}^{n-2k-1} \left(\bigoplus_{I \in P_s[n-2k-2]} \operatorname*{Ind}_{K_k^I \uparrow G_{n-2k}} \underline{1} \right) \oplus \operatorname*{Ind}_{U_{n-2k} \uparrow G_{n-2k}} \widetilde{\Psi}_k \right) \otimes \right.$$

(4.5)

$$\left. \otimes \operatorname*{Ind}_{Sp_k \uparrow G_{2k}} \underline{1} \otimes \underline{1}_{H(k)} \right)$$

Pero (4.5) se puede escribir como

$$\left(\bigoplus_{\substack{s=0 \\ s \text{ impar}}}^{n-2k-1} \left(\bigoplus_{I \in P_k[n-2k-2]} \operatorname*{Ind}_{N(k)\uparrow G_n} \left(\operatorname*{Ind}_{K_k^I \uparrow G_{n-2k}} \underline{1} \otimes \operatorname*{Ind}_{Sp_k \uparrow G_{2k}} \underline{1} \otimes \underline{1}_{H(k)} \right) \right) \right) \oplus$$

(4.6)

$$\oplus \operatorname*{Ind}_{N(k)\uparrow G_n} \left(\operatorname*{Ind}_{U_{n-2k} \uparrow G_{n-2k}} \widetilde{\Psi}_k \otimes \operatorname*{Ind}_{Sp_k \uparrow G_{2k}} \underline{1} \otimes \underline{1}_{H(k)} \right)$$

Por la Proposición 3.1 y el Lema 3.1 obtenemos que (4.6) es equivalente a:

$$\left(\bigoplus_{s=0}^{n-2k-1}\left(\bigoplus_{I\in P_k[n-2k-2]} \operatorname{Ind}_{P_k^I\uparrow G_n} \underline{1}\right)\right) \oplus$$

(4.7)

$$\oplus \operatorname{Ind}_{N(k)\uparrow G_n}\left(\operatorname{Ind}_{G(k)\uparrow N(k)} \widetilde{\Psi}_k\right)$$

Luego

$$\bigoplus_{s=0}^{n-2k-1}\left(\bigoplus_{I\in P_k[n-2k-2]} L^2(\Omega_k^I)\right) \cong$$

(4.8)

$$\left(\bigoplus_{\substack{s=0\\ s \text{ impar}}}^{n-2k-1}\left(\bigoplus_{I\in P_k[n-2k-2]} L^2(\Omega_k^I)\right)\right) \oplus \operatorname{Ind}_{G(k)\uparrow G_n} \widetilde{\Psi}_k \,,$$

y por lo tanto en $\mathcal{R}(G_n)$:

$$\left[\operatorname{Ind}_{G(k)\uparrow G_n} \widetilde{\Psi}_k\right] = \sum_{s=0}^{n-2k-1} (-1)^s \left(\sum_{I\in P_k[n-2k-2]} [L^2(\Omega_k^I)]\right).$$

Con lo cual queda demostrado el teorema.

$\square$

TEOREMA 4.2. Sea Ω la siguiente representación de G_n :

$$\Omega = \sum_{0\leq 2k+2\leq n}\left(\sum_{s=0}^{n-2k-1} (-1)^s \sum_{I\in P_s[n-2k-2]} [L^2(\Omega_k^I)]\right) + \Omega_n$$

entonces, Ω <u>es un modelo débilmente geométrico de Gel'fand de</u> G_n .

<u>Demostración</u>: Basta observar que por Teorema 4.1

$$\Omega = \sum_{0\leq 2k\leq n} [\, T_k(n)]$$

y recordar que $M = \bigoplus_{0\leq 2k\leq n} T_k(n)$ es el modelo de Gel'fand según Klyachko de G_n .

$\square$

C A P I T U L O VII

REALIZACION DEL CARACTER DE GEL'FAND χ_G DE UN GRUPO FINITO G

Recordemos que el carácter de Gel'fand de G es el carácter de cualquier modelo de Gel'fand de G. Distintas realizaciones de él se logran naturalmente al construir distintos modelos de Gel'fand para el grupo G. Sin embargo hay otras formas de realizarlo.

Por ejemplo, es un resultado de teoría de caracteres de grupos finitos [F] que la función central $\Theta_1 : G \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Theta_1(g) = |\{h \in G \,/\, h^2 = g\}| \qquad (g \in G) ,$$

es un carácter generalizado de la forma

$$\Theta_1(g) = \sum_{\pi \in \hat{G}} \nu(\pi)\chi_\pi(g) \tag{7.1}$$

donde $\nu(\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\pi(g^2)$ es el número de Frobenius-Schur (F - S) del carácter χ_π de la representación irreducible π de G (igual a 1,-1,0 según los casos).

Luego la función $\Theta_1(g)$ realiza el carácter de Gel'fand χ_G de G sí y sólo si $\nu(\pi)$ es igual a 1 para toda representación irreducible π de G. Además se demuestra usando teoremas de Frobenius y Schur [F] que el número $\nu(\pi)$ de F - S de un carácter irreducible χ_π de G vale uno sí y sólo si la representación irreducible π de G se puede realizar sobre el cuerpo de los números reales (por matrices reales). En este caso, se dice que la representación π es real. Entre los grupos cuyas representaciones irreducibles son todas reales se encuentran el grupo simétrico S_n, el grupo diedral D_{2n} y el grupo ortogonal $\mathcal{O}(n,\mathbb{F}_q)$, car $\mathbb{F}_q \neq 2$. [Go2]

Otro ejemplo encontramos en los resultados obtenidos por R. Gow [Go1] para $G = GL(n,\mathbb{F}_q)$.

TEOREMA 1. (R. Gow). Sea $\Theta_2 : G \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$\Theta_2(g) = |\{h \in G / h\cdot {}^th^{-1} = g\}|$$

entonces

$$\Theta_2(g) = \sum_{\pi\in\hat{G}} \chi_\pi(g)$$

es decir la función Θ_2 es central y realiza el carácter de Gel'fand χ_G de $G = GL(n,\mathbb{F}_q)$.

<u>Idea de la demostración</u>: Sea $u : G \to G$ el automorfismo definido por $u(g) = {}^tg^{-1}$ y G^+ la extensión escindida de G por el elemento u de

orden dos satisfaciendo $u^{-1}gu = {}^tg^{-1}$. Observamos que en G^+ todo elemento es conjugado con su inverso, es decir todos los elementos son reales y por lo tanto todo carácter de G toma sólo valores reales.

En seguida demuestra que el número de $F - S$ de los caracteres reales de las representaciones irreducibles de los subgrupos $\mathbb{R}$-elementales de G^+ es uno. Luego, por un teorema de Brawer-Witt, se concluye que el número de $F - S$ de todos los caracteres irreducibles de G^+ es uno y por lo tanto en G^+ , la función Θ_1, definida anteriormente realiza el carácter de Gel'fand de G^+ . Restringiendo la función Θ_1 a G y usando el teorema de Mackey acerca de las representaciones irreducibles de un producto semidirecto de subgrupos obtiene la fórmula para la función Θ_2 .

□

Sin embargo, observamos que tanto la función central Θ_1 como la función central Θ_2 se pueden definir en otros términos como "Trazas torcidas" de la siguiente forma:

PROPOSICION 1.

1) Sea G un grupo finito, $(L^2(G),\rho)$ y $(L^2(G),\sigma)$ las representaciones regulares derechas e izquierdas de G . J el antiautomorfismo de G que envía g en g^{-1} $(g \in G)$, entonces

$$\mathrm{Tr}(\rho_g \circ J^*) = \Theta_1(g) \qquad (g \in G)$$

donde J^* es el automorfismo de $L^2(G)$ definido por $J^*(f) = f \circ J$ $(f \in L^2(G))$.

2) Sea $G = GL(n, \mathbb{F}_q)$, $(L^2(G), \rho)$, $(L^2(G), \sigma)$ como en 1) y S el antiautomorfismo de G que envía g en tg $(g \in G)$, entonces

$$Tr(\rho_g \circ S^*) = \Theta_2(g) ,$$

donde $S^*(f) = f \circ S$ $(f \in L^2(G))$.

Demostración: Calculando la traza de los operadores $\rho_g \circ J^*$ y $\rho_g \circ S^*$ según la base canónica $\{\delta_g\}_{g \in G}$ donde $\delta_g(h) = \delta_{g,h}$ $(h \in G)$, se obtiene sin dificultad lo anunciado.

Además observamos que el automorfismo J^* entrelaza las representaciones ρ y σ de G y en el caso de $G_n = GL(n, \mathbb{F}_q)$ el automorfismo S^* entrelaza las representaciones ρ y σ^* donde la acción σ^* está definida por $\sigma^*_g = \sigma_{t_g^{-1}}$. Ambos automorfismos J^* y S^* son involuciones, $\rho_g \circ \sigma_h = \sigma_h \circ \rho_g$ $(g,h \in G)$ y para G_n análogamente se verifica que

$$\rho_g \circ \sigma^*_h = \sigma^*_h \circ \rho_g \qquad (g \in G , \quad h \in H) .$$

En general, se puede demostrar la siguiente

PROPOSICION 2. Sean (V,π) y (V,π') dos representaciones isomorfas de un grupo finito G tales que $\pi_h \circ \pi'_g = \pi'_g \circ \pi_h$ y T un automorfismo involutivo de V que entrelaza las representaciones π y π' de G. Entonces la función $tr(\rho_? \circ T)$ definida sobre G con valores en $\mathbb{C}$ es central.

Demostración: Sean $g,h \in G$,

$$\mathrm{Tr}(\pi_{g^{-1}hg} \circ T) = \mathrm{Tr}(\pi_g \circ T \circ \pi_{g^{-1}h}) = \mathrm{Tr}(T \circ \pi'_g \circ \pi_{g^{-1}h})$$

$$= \mathrm{Tr}(T \circ \pi_{g^{-1}h} \circ \pi'_g) = \mathrm{Tr}(\pi'_g \circ T \circ \pi_{g^{-1}h})$$

$$= \mathrm{Tr}(\pi_h \circ T) \ .$$

COROLARIO 2.1. La función $\mathrm{Tr}(\pi_? \circ T)$ es una combinación lineal compleja de caracteres irreducibles de G , con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Estas observaciones nos sugieren la siguiente conjetura:

CONJETURA: Para todo grupo finito G , existen representaciones isomorfas (V,π) y (V,π') y un automorfismo T de V tales que

1) $T^2 = Id_V$

2) T entrelaza las representaciones π y π' de G $(\pi \cong \pi')$

3) π_g conmuta con π'_h para todo h,g en G

4) La función $\mathrm{Tr}(\pi_? \circ T)$ de G en $\mathbb{C}$ realiza el carácter de Gel'fand de G .

A continuación demostraremos esta conjetura, pero antes necesitamos algunos preliminares.

Componentes isotípicas en la representación regular $(L^2(G),\rho)$.

Recordemos (Capítulo I, 1.9) que toda representación irreducible (U,π) de G puede ser inyectada en $L^2(G)$ y la multiplicidad de la representación (U,π) en $(L^2(G),\rho)$ es la dimensión de U . Por lo tanto en $L^2(G)$ hay $\dim U$ copias de U . Luego, como vimos en (Capítulo I, 1.10) la componente isotípica $I_\pi(L^2(G))$ de tipo π de ρ se descompone en irreducibles de la forma $I_\pi(L^2(G)) = \bigoplus_{1\le i\le n} V_i$, donde $n = \dim U$, $V_i \triangleleft L^2(G)$ tal que $V_i \cong U$, $(1 \le i \le n)$. Designemos por ϕ_i a un isomorfismo de U con V_i $(1 \le i \le n)$.

TEOREMA 2. (de Klyachko) [K]. Para toda representación compleja (U,π) de $G = GL(n,\mathbb{F}_q)$ es posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de U de modo que la matriz $[\pi_g]_{\mathcal{B}}$ de π según la base $\mathcal{B}$ satisface

$$(7.3)\qquad [\pi_{{}^t g}]_{\mathcal{B}} = {}^t[\pi_g]_{\mathcal{B}}.$$

Demostración: Ver referencia [K].

LEMA 1. Sea (U,π) una representación irreducible de G (no necesariamente unitaria) entonces

$$I_\pi(L^2(G)) \cong U \otimes U^* .$$

Demostración: Para cada $\omega \in U^*$ definimos el operador $\phi_\omega : U \to L^2(G)$ por $\phi_\omega(u)(g) = \omega(\pi_g(u))$ $(u \in U\ ,\ g \in G)$. Es fácil ver que ϕ_ω es un operador de entrelazamiento de las representaciones π y ρ de G . Además ϕ_ω es un monomorfismo si $\omega \neq 0$.

Por otro lado, si $\phi \in \mathrm{Hom}(U,L^2(G))$ entonces $\omega(u) = \phi(u)(e)$ $(u \in U)$ es una forma lineal de U^* .

Es inmediato después de las observaciones anteriores que la aplica - ción lineal Ψ_1 de U^* en $\mathrm{Hom}_G(U,L^2(G))$ definida por

$$\Psi_1(\omega) = \phi_\omega \qquad (\omega \in U^*)$$

es un isomorfismo de U^* en $\mathrm{Hom}_G(U,L^2(G))$.

Por lo tanto $\mathrm{Id}_U \otimes \Psi_1$ es un isomorfismo lineal de $U \otimes U^*$ en $U \otimes \mathrm{Hom}_G(U,L^2(G))$.

Además la aplicación lineal $\Psi_2 : U \otimes U^* \to I_\pi(L^2(G))$ definida sobre los elementos descomponibles por

$$\Psi_2(u \otimes \omega) = \phi_\omega(u) \qquad (u \in U \ , \ \omega \in U^*)$$

y extendida linealmente a todo $U \otimes U^*$, es un isomorfismo. En efecto, basta demostrar que es epiyectivo. Sea $v \in I_\pi(L^2(G))$ luego $v = \sum_{1\leq i\leq n} \phi_i(u_i)$. Pero $\phi_i = \phi_{\omega_i}$ ciertos $\omega_i \in U^*$ (Ψ_1 es epiyectiva). Luego $v = \Psi_2(\Sigma\, u_i \otimes \omega_i)$.

Por lo tanto $U \otimes U^* \cong I_\pi(L^2(G))$.

COROLARIO 1.1. Sean (U^k,π^k) , $1 \leq k \leq r$ todas las representaciones irre ducibles de G . Sea $\mathcal{U}_k$ una base de U^k y $(e^k_{ij}(g))$ la matriz del operador π_g según la base $\mathcal{U}_k$. Entonces el conjunto $\{e^k_{ij} : 1 \leq k \leq r ,$ $1 \leq i,j \leq n_k\}$ donde $n_k = \dim U_k$, es una base de $L^2(G)$.

<u>Demostración</u>: Basta observar que si $\mathcal{U}_k = \{u_1, \ldots, u_{n_k}\}$ entonces

$$e^k_{ij} = \phi_{u^*_i}(u_j)$$

donde $u^*_i(u_j) = \delta_{ij}$.

Análogo a este Lema es el siguiente

TEOREMA 3. [S]. Sean (U^k,π^k) , $1 \leq k \leq r$ todas las representaciones unitarias irreducibles de G (toda representación irreducible es equivalente a una unitaria) y $(S^k_{ij}(g))_{k,i,j}$ la matriz de π_g según una base ortonormal de U . Entonces el conjunto $\{ \sqrt{n_k}\ S^k_{ij} \quad 1 \leq k \leq r \ , \ 1 \leq i,j \leq n_k\}$ es una base ortonormal de $L^2(G)$. Además por ser π_g unitaria los coeficientes S^k_{ij} verifican la relación

$$(7.2) \qquad S^k_{ij}(g^{-1}) = \overline{S^k_{ji}(g)} \ .$$

<u>Demostración</u>: Ver referencia [NS].

TEOREMA 4. Sea G un grupo finito y $(L^2(G),\rho)$ su representación regular derecha, entonces existe un automorfismo T de $L^2(G)$ y una representación $\tilde{\sigma}$ de G en $L^2(G)$ tal que:

1) $T^2 = Id_{L^2(G)}$

2) $\rho_g \circ T = T \circ \tilde{\sigma}_g \qquad (g \in G)$

3) $\rho_g \circ \tilde{\sigma}_h = \tilde{\sigma}_h \circ \rho_g \qquad (g,h \in G)$,

4) $\quad Tr(\rho_g \circ T) = \chi_G(g) \qquad (g \in G)$

<u>Demostración</u>: Sean (U^k,π^k) , $1 \leq k \leq r$ todas las representaciones irreducibles de G y la base $\mathcal{B} = \{e^k_{ij} : 1 \leq k \leq r \ , \ 1 \leq i,j \leq n_k\}$ de $L^2(G)$ donde $(e^k_{ij}(g))$ es la matriz $[\pi^k_g]$ de π^k_g según una base cualquiera de U^k y n_k es la dimensión de U_k .

Sea T el automorfismo lineal de $L^2(G)$ definido por

$$T(e^k_{ij}) = e^k_{ji} \qquad (e^k_{ij} \in \mathcal{B}) .$$

Es claro que $T^2 = Id_{L^2(G)}$.

Definamos además la siguiente acción $\tilde{\sigma}$ de G sobre $L^2(G)$:

$$\tilde{\sigma}_g(e^k_{ij}) = \sum_{\ell=1}^{n_k} e^k_{\ell i}(g)e^k_{\ell j} \qquad (e^k_{ij} \in \mathcal{B}) .$$

Extendiendo linealmente $\tilde{\sigma}_g$ a todo elemento de $L^2(G)$ obtenemos una representación tal que $\tilde{\sigma}_g = T \circ \rho_g \circ T$. En efecto, es claro que

$$\tilde{\sigma}_g(e^k_{ij}) = T[\rho_g(T(e^k_{ij}))] \qquad (g \in G \ , \ e^k_{ij} \in \mathcal{B}) .$$

Luego $\tilde{\sigma}_g$ es un automorfismo de $L^2(G)$ $(g \in G)$ y $\tilde{\sigma}$ es un homomorfismo de G en $Aut(L^2(G))$ tal que $\rho_g \circ T = T \circ \tilde{\sigma}_g$.

Además para $g,h \in G$ y $e^k_{ij} \in \mathcal{B}$ se verifica:

$$(\rho_g \circ \tilde{\sigma}_h)(e^k_{ij}) = \rho_g\left(\sum_{\ell=1}^{n_k} e^k_{\ell i}(h)\cdot e^k_{\ell j}\right) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n_k} e^k_{\ell i}(h) \sum_{m=1}^{n_k} e^k_{mj}(g)\cdot e^k_{\ell m}$$

$$= \sum_{m=1}^{n_k} e^k_{mj}(g)\left(\sum_{\ell=1}^{n_k} e^k_{\ell i}(h)\cdot e^k_{\ell m}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{n_k} e^k_{mj}(g)\cdot\tilde{\sigma}_h(e^k_{im})$$

$$= \tilde{\sigma}_h\left(\sum_{m=1}^{n_k} e^k_{mj}(g)\cdot e^k_{im}\right)$$

$$= (\tilde{\sigma}_h \circ \rho_g)(e^k_{ij}) \ .$$

Por lo tanto $\rho_g \circ \tilde{\sigma}_h = \tilde{\sigma}_h \circ \rho_g \quad (h,g \in G)$.

Finalmente, como

$$(\rho_g \circ T)(e^k_{ij}) = \sum_{\ell=1}^{n_k} e^k_{\ell i}(g)\cdot e^k_{j\ell} \qquad (g \in G \ , \ e^k_{ij} \in \mathcal{B})$$

entonces

$$\mathrm{Tr}(\rho_g \circ T) = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{n_k} e^k_{ii}(g)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \chi^k(g)$$

$$= \chi_G(g) \ .$$

$\square$

OBSERVACION 1. Los automorfismos J^* y T DE $L^2(G)$ definidos anteriormente, coinciden sí y sólo si todas las representaciones irreducibles de G se pueden realizar sobre el cuerpo de los números reales, es decir, sí y sólo si el número de F - S toma el valor uno para todos los caracteres irreducibles de G .

Demostración: Escogemos como base de las representaciones irreducibles de G la base

$$\mathcal{U} = \{\sqrt{n_k}\, S^k_{ij} : 1 \leq k \leq r \ , \ 1 \leq i,j \leq n_k\}$$

de $L^2(G)$ mencionada en el Teorema 3 de este Capítulo. Designemos por u^k_{ij} al elemento $\sqrt{n_k}\ S^k_{ij}$ de la base $\mathcal{U}$ de $L^2(G)$. Usando la relación 7.2 del Teorema 3 obtenemos:

$$J^*(u^k_{ij})(g) = \overline{u^k_{ji}}(g) \qquad\qquad (g \in G).$$

Por lo tanto, claramente los automorfismos J^* y T coinciden sí y sólo si cada elemento u^k_{ij} de $\mathcal{U}$ es una función de G en $\mathbb{R}$.

□

OBSERVACION 2. Sea G un grupo finito, entonces

$$Tr(\rho_g \circ J^*) = \sum_{K=1}^{r} \nu(\pi^k)\cdot\chi_{\pi^k}(g) \ .$$

Demostración: Una forma de demostrarlo es usando la Proposición 1 y el hecho que la función Θ_1 verifica la fórmula 7.1. Sin embargo otra demostración se obtiene al usar el Teorema 3., calculando los coeficientes de Fourier de la función central $Tr(\rho_? \circ J^*) = Tr(\sigma_? \circ J^*)$.

OBSERVACION 3. Sea G un grupo finito cuyas representaciones irreducibles son todas realizables sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ entonces la representación $(L^2(G),\tilde{\sigma})$ de G es exactamente la representación $(L^2(G),\sigma)$ de G .

<u>Demostración</u>: Por la Observación 1 los automorfismos J^* y T de $L^2(G)$ coinciden. Además $\rho_g \circ J^* = J^* \circ \sigma_g$ y $\rho_g \circ T = T \circ \tilde{\sigma}_g$. Por lo tanto $\tilde{\sigma}_g = \sigma_g = \sigma_{J(g^{-1})}$ $(g \in G)$.

□

De modo que para los grupos finitos cuyas representaciones irreducibles son realizables sobre $\mathbb{R}$, el automorfismo T de $L^2(G)$ definido en el Teorema 4 es realizable a partir del antiautomorfismo J del grupo G .

Una conclusión análoga obtenemos para $G = GL(n,\mathbb{F}_q)$ usando el Teorema 2 de Klyachko al definir el antiautomorfismo S de G que envía g en ${}^tg$ $(g \in G)$. (Es claro, que el antiautomorfismo J no es el apropiado ya que en $GL(n,\mathbb{F}_q)$ existen elementos no reales).

TEOREMA 5. Sea $G = GL(n,\mathbb{F}_q)$ y S^* el automorfismo de $L^2(G)$ definido por:

$$S^*(f)(g) = f({}^tg) \qquad (f \in L^2(G) \ , \ g \in G) \ ,$$

entonces

$$\chi_G = Tr(\rho_? \circ S^*) \ .$$

Demostración: Usando el Teorema 2 de Klyachko, existe una base $\mathcal{B}_k$ para cada representación irreducible (U^k,π^k) de G $(1 \leq k \leq r)$ tal que verifica la relación 7.3. Luego por el Lema 1 el subconjunto $\mathcal{B} = \{e^k_{ij}$, $1 \leq k \leq r$, $1 \leq i,j \leq n_k\}$ de $L^2(G)$, donde $(e^k_{ij})_{i,j} = [\pi^k_g]_{\mathcal{B}_k}$, es una base de $L^2(G)$. Como consecuencia de la relación 7.3 los coeficientes matriciales e^k_{ij} verifican

$$(7.4) \qquad e^k_{ij}(t_g) = e^k_{ji}(g) \qquad (e^k_{ij} \in \mathcal{B}\ ,\ \ g \in G)\ .$$

Luego como $S^*(e^k_{ij})(g) = e^k_{ij}({}^t g)$, el automorfismo T es igual a S^* y por lo tanto

$$\chi_G = \mathrm{Tr}(\rho_? \circ S^*)\ .$$

□

OBSERVACION 5. Sea $(L^2(G),\sigma^*)$ la representación de G definida por: $\sigma^*_g = \sigma_{S(g^{-1})}$ $(g \in G)$. El automorfismo S^* de $L^2(G)$ entrelaza las representaciones ρ y σ^* por lo tanto, en este caso, $\sigma^* = \tilde{\sigma}$.

□

PROPOSICION 3. Sea G un grupo finito y L un antiautomorfismo involutivo de G tal que el automorfismo L^* de $L^2(G)$ deducido por L coincide con el automorfismo T de $L^2(G)$ definido en el Teorema 4. Entonces el carácter de Gel'fand de G sólo toma valores positivos o cero.

Demostración: Si calculamos $Tr(\rho_g \circ L^*)$ usando la base canónica $\{\delta_g : g \in G\}$ de $L^2(G)$ obtenemos

$$Tr(\rho_g \circ L^*) = |\{h \in G \,/\, hL(h^{-1}) = g\}| \,.$$

Aplicando el Teorema 4 obtenemos

$$\chi_G(g) = |\{h \in G \,/\, hL(h^{-1}) = g\}| \,.$$

□

Nos preguntamos si será posible para todo grupo finito realizar el automorfismo T como un automorfismo L^*. La respuesta es nó, pues es fácil verificar, con ayuda de las tablas de caracteres que para todos los grupos de Mathieu M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23} y M_{24} el carácter de Gel'fand toma valores negativos [Sh].

El Teorema 3 de Klyachko se puede extender a cualquier grupo finito del siguiente modo:

PRELIMINARES. [K] Supongamos que L es un antiautomorfismo involutivo de G tal que $L(g)$ y g son conjugados, entonces L induce un antiautomorfismo sobre el álgebra de grupo compleja de G y actúa como la identidad sobre el centro. (Una base del centro son los caracteres irreducibles χ de G y como $L(g)$ y g son conjugados entonces $\chi(L(g)) = \chi(g)$). Luego L induce un antiautomorfismo sobre cada componente simple ($\mathbb{C}[G] \cong M(n_1,\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M(n_r,\mathbb{C})$, donde $n_i = \dim U_i$ y (U_i,π_i) $1 \leq i \leq r$ son las representaciones irreducibles de G [S]).

Un antiautomorfismo $\widetilde{L}$ de un álgebra de matrices completa es conjugada a la transposición (Skolem-Noether): $\widetilde{L}(a) = b^{-1}\,{}^t ab$ ($a \in M_n(\mathbb{C})$ y

$b \in GL(n,\mathbb{C})$. Además si el antiautomorfismo $\tilde{L}$ es involutivo entonces para cualquier matriz a , $\tilde{L}(\tilde{L}(a)) = b^{-1}\, {}^{t}b a b^{-1}\, {}^{t}b$. Esta última relación significa que $b^{-1}b^{t}$ pertenece al centro, es decir ${}^{t}b = \varepsilon b$ donde ε es un escalar. Pero esto es posible sólo si $\varepsilon = \pm 1$.

DEFINICION 1. Diremos que $\tilde{L}$ es una involución de primera especie si $\varepsilon = 1$, es decir la matriz b es simétrica y de segunda especie si $\varepsilon = -1$, es decir, la matriz b es simpléctica.

Por lo tanto la dimensión del espacio de los elementos $\tilde{L}$-invariantes de un álgebra de matrices de dimensión n es $n(n + 1) / 2$ para una involución de primera especie.

La ecuación $\tilde{L}(a) = b^{-1}\, {}^{t}ab$ significa de $\tilde{L}(a)$ es la matriz del operador conjugado respecto de una forma bilineal con matriz b .

TEOREMA 5. Sea L un antiautomorfismo de G tal que $L(g)$ y g son conjugados $(g \in G)$. Si

$$Tr(L^{*}) = |\{g \in G \,/\, L(g) = g\}| = \sum_{i=1}^{r} \dim \pi_i$$

donde (U_i,π_i) son las representaciones irreducibles de G $(1 \leq i \leq r)$, entonces $\tilde{L}$ es una involución de primera especie sobre cada componente simple del álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$.

Demostración: Calculamos de dos maneras distintas la dimensión del espacio de los elementos del álgebra de grupo de G que son $\tilde{L}$-invariantes.

Por un lado es claro que la dimensión es igual al número de elementos distintos en el álgebra de grupo de la forma $g + L(g)$ con $g \in G$; esto es

$$|\{g \in G \,/\, g = L(g)\}| + \frac{1}{2}\,|\{g \in G \,/\, g \neq L(g)\}| =$$

$$= \frac{1}{2}\,|G| + \frac{1}{2}\,|\{g \in G \,/\, g = L(g)\}| \;.$$

Pero por otro lado, la dimensión del espacio de los elementos $\tilde{L}$-invariantes del álgebra de matrices de orden n_i (componentes simples de $\mathbb{C}[G]$) es $\frac{1}{2}\,n_i(n_i + \varepsilon)$ donde $\varepsilon = \pm 1$.

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{2}\,n_i(n_i + \varepsilon) = \frac{1}{2}\,|G| + \frac{1}{2}\,|\{g \in G \,/\, g = L(g)\}| \;.$$

Pero $\sum_{i=1}^{r} n_i^2 = |G|$, luego

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon n_i = |\{g \in G \,/\, g = L(g)\}| = Tr(L^*)$$

y por hipótesis $Tr(L^*) = \sum_{i=1}^{n} n_i$, por lo tanto $\varepsilon_i = 1 \quad (1 \leq i \leq r)$.

□

OBSERVACION 6. Bajo las hipótesis del Teorema, para cada representación (V,π) de G existe una forma bilineal simétrica b con respecto a la cual los operadores π_g y $\tilde{L}(\pi_g)$ son conjugados es decir:

$$b\tilde{L}(\pi_g) = \pi_g b \qquad (g \in G) .$$

Eligiendo una base ortonormal $\mathcal{B}$ respecto de la forma b, obtenemos la siguiente expresión para los coeficientes matriciales de π_g según la base $\mathcal{B}$:

$$(7.4) \qquad [\pi_{L(g)}]_{\mathcal{B}} = {}^t[\pi_g]_{\mathcal{B}} .$$

COROLARIO 5.1. Bajo las mismas hipótesis del Teorema $L^* = T$.

<u>Demostración</u>: Para cada representación (U_k,π_k) irreducible de G elejimos la base $\mathcal{B}_i$ para la cual se satisface la relación 7.4. Por el Lema 1 los coeficientes matriciales $(e^k_{ij}(g))$ de las matrices $\pi_k(g)$ $(g \in G$, $1 \leq i \leq r)$ según la base $\mathcal{B}_k$ forman una base $\mathcal{B}$ de $L^2(G)$. Sea $e^k_{ij} \in \mathcal{B}$, entonces

$$L^*(e^k_{ij})(g) = e^k_{ij}(L(g)) = e^k_{ji}(g) = T(e^k_{ij})(g) .$$

□

R E F E R E N C I A S

[F] W. FEIT., Characters of finite groups. W.A. Benjamin, New York (1967).

[Fa] D.K. FADDEEV., On complex representations of the full affine group over a finite field. Soviet Math. Dokl. Vol. 17, N° 5 (1976), 1315-1318.

[GZ] I.M. GEL'FAND and A.V. ZELEVINSKI., Models of representations of classical groups and their Hidden symmetries. Funct. Anal. and its Appl. Vol. 18, N° 3 (1984), 183-198.

[G] S.I. GEL'FAND., Representations of the full Linear Group over a finite field. Math. U.S.S.R. Sbornik, Vol. 12, N° 1 (1970), 13-20.

[G-Gr] I.M. GEL'FAND and M.I. GRAEV., Construction of irreducible repre - sentation of simple algebraic groups over a finite field. Soviet Math. Dokl. 3 (1962), 1646-1649.

[Go1] R. GOW., Properties of the characters of the finite general linear group related for the transpose-inverse involution. London Math. Soc. (3) 47 (1983), 493-506.

[Go2] R. Gow., Real representations of the finite Orthogonal and Symplectic Groups of Odd characteristic. J. of Algebra 96 (1985), 249-274.

[K] A.A. KLYACHKO., Models for the complex representations of the groups GL(n,q) . Math. U.S.S.R. Sbornik. Vol. 48, N° 2 (1984), 365-379.

[L] G. LUSZTIG., Ph. Dissertation: The discrete series representation of the general linear group over a finite field. University of Warwick, Mathematics Institute (Coventry), (1973).

[NS] M.A. NAIMARK and A.I. STERN., Theory of Group Representation. Springer Verlag, Berlín, (1982).

[SA] J. SOTO-ANDRADE., Geometrical Gel'fand Models, Tensor Quotients and Weil Representations. Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. 47. (1987), 305-316.

[S] J.P. SERRE., Representation lineaires des groupes finis, Hermann, Paris, (1971).

[Su] M. SUZUKI., Group Theory I, Springer Verlag, Berlín (1982)

[Sh] K. SHINODA., Comunicación personal.

[So] L. SOLOMON., On the affine group over a finite field. Symp. Pure Math. A.M.S. (1971).

[Z] A.V. ZELEVINSKI., Representations of finite classical groups. Lecture Notes in Math. 869. Springer Verlag, Berlín (1981).