



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**LOCALIZACIÓN Y TRANSPORTE CONTROLADO EN REDES FOTÓNICAS:
BANDAS PLANAS, NO-LINEALIDAD Y FLUJOS MAGNÉTICOS
EFECTIVOS**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

IGNACIO ALBERTO SALINAS VALDIVIESO

PROFESOR GUÍA:
RODRIGO VICENCIO POBLETE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MARIO MOLINA GÁLVEZ
LUIS FOÀ TORRES

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:
Instituto Milenio de Investigación en Óptica MIRO (Iniciativa Milenio ICN17_012)
Fondecyt Regular No. 1191205

SANTIAGO DE CHILE

2023

LOCALIZACIÓN Y TRANSPORTE CONTROLADO EN REDES FOTÓNICAS: BANDAS PLANAS, NO-LINEALIDAD Y FLUJOS MAGNÉTICOS EFECTIVOS

El estudio de la Materia Condensada es el área de la Física con más investigadores(as) a nivel mundial. En general los fenómenos de localización y transporte son de gran relevancia en esta área de estudio, los cuales tienen múltiples aplicaciones en tecnologías asociadas a la computación. En este contexto, las redes fotónicas presentan una plataforma de investigación potente para simular sistemas en el contexto de la ciencia de los materiales, pero también presentan cualidades únicas que dan origen a nuevos fenómenos. Las redes fotónicas han sido aplicadas también en el contexto de la computación cuántica, donde son empleadas para realizar operaciones sobre *qubits*. En esta tesis, nos centramos en sistemas de redes fotónicas fabricadas mediante la técnica de láser de femtosegundos. En particular, investigamos tres geometrías de red distintas y estudiamos en ellas distintos mecanismos de localización y transporte controlado. El primer trabajo consiste en un estudio experimental de una red cuasi-1D, donde demostramos una nueva técnica para introducir un flujo magnético efectivo. Con esto, conseguimos observar localización debido al *enjaulamiento de Aharonov-Bohm* y, a partir del mismo efecto, demostramos la posibilidad de mover excitaciones de la red en cualquier dirección deseada, en el régimen lineal. Los dos trabajos restantes consisten en estudios numéricos, usando de plataforma redes con no-linealidad tipo Kerr. En estos casos calculamos distintas familias soluciones no lineales localizadas y estudiamos la posibilidad de desplazarlas a lo largo de la red, consiguiendo resultados prometedores en una de las geometrías. Adicionalmente, encontramos, en una de estas redes, una dependencia del estado fundamental del sistema respecto al tamaño del sistema. Esta tesis contribuye al conocimiento sobre el control de la luz en sistemas periódicos, como también demuestra experimentalmente fenómenos interesantes que podrían tener aplicaciones en computación cuántica. Por último, se proponen dos sistemas con propiedades novedosas los cuales pueden ser implementados experimentalmente con las técnicas que se dominan en la actualidad.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
2. Marco teórico	6
2.1. Modos electromagnéticos de una guía de ondas unidimensional	6
2.1.1. Ecuación de ondas para un medio dieléctrico	6
2.1.2. Guía de ondas unidimensional	8
2.1.3. Modos normales	9
2.2. Teoría acoplada de modos	14
2.2.1. Guía individual	14
2.2.2. Acoplamiento entre dos guías de ondas	15
2.3. Propiedades lineales de una red	18
2.4. Redes con no-linealidad tipo Kerr	21
2.4.1. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta	21
2.4.2. Propiedades de sistemas no lineales	22
2.4.3. Herramientas para el estudio de soluciones no lineales	22
2.4.4. Método de restricción	25
3. Métodos experimentales	28
3.1. Fabricación de redes con láser de femtosegundos	28
3.2. Excitación de guías de ondas	30
4. Transporte controlado basado en enjaulamiento de Aharonov-Bohm multiorbital fotónico	32
4.1. Introducción	32
4.2. Modelo y propiedades lineales	34
4.3. Resultados experimentales	36
4.3.1. Enjaulamiento de Aharonov-Bohm	37
4.3.2. Control de la dirección de transporte	38
4.4. Conclusiones	40
5. Modos localizados en una red diamante-octagonal no lineal	41
5.1. Introducción	41
5.2. Modelo	41

5.3.	Espectro lineal	42
5.4.	Modos no lineales localizados	44
5.4.1.	Modos compactos	45
5.4.2.	Modos no compactos en el gap semi-infinito $\lambda < -2$	46
5.4.3.	Dependencia del estado fundamental con respecto al tamaño de la red, para no linealidad débil	47
5.4.4.	Investigación numérica sobre movilidad	51
5.5.	Conclusiones	55
6.	Movilidad de soluciones localizadas en una cinta de grafeno no lineal	56
6.1.	Modelo	56
6.2.	Espectro lineal	57
6.3.	Soluciones no lineales localizadas	58
6.4.	Movilidad de soluciones localizadas	61
6.5.	Potencial efectivo	64
6.6.	Movilidad con una condición inicial de dos sitios	66
6.7.	Conclusiones	69
7.	Conclusiones	71
	Bibliografía	74

Índice de Ilustraciones

2.1.	(a) Esquema tridimensional e (b) índice de refracción en función de x de una guía de ondas unidimensional.	8
2.2.	Configuraciones transversal eléctrica (TE) y transversal magnética (TM). La cruz indica que el campo apunta hacia dentro de la página, mientras que el punto indica que el campo apunta hacia afuera.	11
2.3.	(a) Solución gráfica de las Ecuaciones 2.23 y 2.26. Las curvas azules (naranjas) representan la ecuación de los modos simétricos (antisimétricos), mientras que las curvas verdes son distintas circunferencias de radios $\mathcal{V}a$; las soluciones están dadas por las intersecciones entre las curvas. (b)-(d) Amplitudes del campo eléctrico para los tres modos de una guía de ondas con los parámetros señalados en el texto principal.	13
2.4.	Guía de ondas con una forma transversal arbitraria.	14
2.5.	Dibujo de una cadena unidimensional de guías de ondas. Todas las guías son iguales y se encuentran a la misma distancia de sus primeras vecinas.	18
2.6.	Difracción discreta excitando la guía central del arreglo unidimensional. (a) Evolución dinámica a lo largo de la dirección de propagación. (b) Perfil de potencias en $z = 4/V$. (c) Imagen experimental de la cara de salida de un arreglo de largo $z = 4/V$ (Cortesía de Scarlett Plaza P. y Paloma Vildoso P.)	19
2.7.	(a) Frecuencias de los autoestados de la cadena unidimensional calculados numéricamente. (b) y (c) Perfiles para los modos con $\lambda = \pm 2V$ correspondientes a los modos de los extremos de la banda del sistema. A pesar de que para el cálculo de estos estados no se define un k , estos modos son los correspondientes a los estados con $k = 0$ y $k = \pi$ para la cadena infinita.	20
2.8.	(a) y (b) Curvas de potencia vs frecuencia y Hamiltoniano vs potencia, respectivamente, para las familias de solitones discretos centradas en uno y dos sitios. (c) y (d) Perfiles de soluciones no lineales centradas en uno y dos sitios con frecuencia $\lambda = 10$. (e) y (f) Perfiles de soluciones no lineales centradas en uno y dos sitios con frecuencia $\lambda = 2.25$	23
2.9.	(a) Grado de participación vs potencia y (b) Índice de estabilidad vs potencia para las familias de soluciones estacionarias centradas en uno y dos sitios.	24
2.10.	Diferencia de Hamiltoniano en función del centro de masa para tres potencias distintas. El Hamiltoniano de referencia usado es el correspondiente a la solución centrada en un sitio con la potencia correspondiente en cada caso.	26

3.1.	Fabricación mediante técnica de láser de femtosegundos. (a) Esquema de escritura enfocando el láser, mediante un objetivo 20×, dentro de una muestra de borosilicato. La muestra se encuentra en una estación motorizada que permite desplazamientos tridimensionales. (b1,b2) Sección transversal de guías de ondas iluminadas con luz blanca.	28
3.2.	Acoplamiento interorbital. (a) Esquema de sintonización de un modo fundamental con un primer modo superior. (b) Máximo de potencia en la guía 2 en función de la diferencia de índice de refracción entre las guías 1 y 2. Datos obtenidos mediante un método de propagación de haces (BPM) de un sistema de dos guías, excitando inicialmente la guía 1 [32].	29
3.3.	Montaje de imágenes basado en dos moduladores espaciales de luz para generar una condición inicial arbitraria. P corresponde a un polarizador lineal, HWP a un polarizador $\lambda/2$ y BS a un divisor de haces.	30
3.4.	Haces modulados mediante SLMs. (a) Maestro Yoda modulado en amplitud en el perfil de un haz de 532 nm. (b) Imagen formada en la cara de entrada de una red de Lieb excitando cuatro sitios. (c) Imagen de interferometría mostrando un desfase π entre los lóbulos alineados horizontalmente y los orientados verticalmente.	31
4.1.	(a) Esquema de una red diamante multiorbital formada por sitios S y P. Flechas continuas (punteadas) indican una constante de acoplamiento positiva (negativa). El flujo magnético efectivo inducido por plaqueta se denota como ϕ . El rectángulo de líneas discontinuas define la celda unitaria compuesta por seis sitios de la red. (b1),(b2) Espectro para $\phi = 0$ y $\phi = \pi$ respectivamente. Los perfiles asociados a los modos de banda plana se muestran en los encuadres. (c) Evolución de intensidad para diferentes condiciones iniciales con un acoplamiento de $V = 0.1 \text{ mm}^{-1}$; (c1) sitio central para $\phi = 0$; (c2) sitio central para $\phi = \pi$; (c3) sitio superior o inferior para $\phi = \pi$	34
4.2.	(a) Técnica de escritura mediante método de láser de femtosegundos. (b1),(b2) Imágenes capturadas mediante microscopía óptica con luz blanca de redes diamante homogénea y multiorbital respectivamente. (c) Vista superior de la excitación y detección de una red mostrando el concepto de <i>z-scan</i> . (d) Imagen de intensidad de salida en $z = L$ para $\phi = 0$. (e),(f) Imagen de intensidad de salida en $z = z_l$ con $\phi = \pi$, para las excitaciones de un modo S y un modo P, respectivamente. Un círculo muestra la posición de la excitación inicial en (d)-(f). (g),(h) Promedio de intensidad en la guía inicial en función del largo de propagación z_l , para las excitaciones de un modo S y un modo P, respectivamente. Las barras de error corresponden a la desviación estándar.	37

4.3.	(a) Máscara óptica con excitaciones iniciales en fase (izquierda) y fuera de fase (derecha). (b1),(b2) Imágenes de intensidad de salida en $z = z_l$ con $\phi = \pi$, para las excitaciones en fase y fuera de fase respectivamente. Los círculos muestran los sitios excitados inicialmente. (c1) Esquema de la concatenación de máscaras. Colores rojo y gris corresponden a guías S y P, respectivamente. (c2),(c3) Propagación numérica para las condiciones iniciales en fase y fuera de fase, respectivamente.	39
5.1.	Representación esquemática de una red diamante-octagonal. La celda unitaria n, m está encerrada por el cuadrado discontinuo. La figura incluye la propuesta física para hacer posible que todos los acoplamientos sean considerados iguales.	42
5.2.	Espectro de frecuencias de la red diamante-octagonal en su régimen lineal. . .	43
5.3.	Distribución de amplitudes de las soluciones compactas.	44
5.4.	Combinación lineal de los compactones C1 y C2, mostrando una dinámica oscilatoria.	44
5.5.	Índice de estabilidad en función de la potencia para las soluciones compactas. Línea gris gruesa, compactón C1, $\gamma = -1$; línea gris fina, compactón C1, $\gamma = 1$; línea negra fina, compactón C2, $\gamma = -1$; línea negra gruesa, compactón C2, $\gamma = 1$.	45
5.6.	Perfiles representativos para cada una de las familias de modos en el límite anticontinuo ($\lambda = -10V$).	46
5.7.	(a) Diagrama P vs λ , (b) Hamiltoniano H , (c) grado de participación R e (d) índice de estabilidad G en función de P , para todos los modos presentados en la Figura 5.6. El recuadro en (b) muestra la diferencia de Hamiltoniano ΔH comparado con H para el compactón C2, para las soluciones que continúan hasta $\lambda = -2$	48
5.8.	Índice de estabilidad vs potencia para un compactón C2 en sistemas pequeños compuestos solamente por los sitios indicados en cada recuadro ($\gamma = -1, V = 1$, condiciones de borde fijo.)	49
5.9.	Evolución del grado de participación de la optimización del <i>ansatz</i> 5.4 en sistemas compuestos por 3×2 (curva café), 5×2 (curva azul), 7×2 (curva naranja), 5×4 (curva verde) y 7×4 (curva morada) celdas unitarias completas. En todos los casos se utilizó $P = 0.05$	50
5.10.	Simulaciones dinámicas de compactones C2 con potencias bajas para $\gamma = -1$ y $V = 1$. Las condiciones iniciales son perturbadas con un gradiente de fase en el eje vertical ($k_x = 0$) para (a) $k_y = -0.1, P = 0.005$ y (b) $k_y = -0.001, P = 0.1$. Las figuras principales muestran las componentes verticales (curvas naranjas) y horizontales (curvas azules) del centro de masa en función de la dirección de propagación z . Los recuadros muestran las distribuciones de intensidad para las distancias señaladas por las flechas. Se usó una red de 256 sitios con condición de borde fijo.	53

5.11.	Simulaciones dinámicas de compactones C2 con perturbaciones diagonales para $\gamma = -1$ y $V = 1$ en una red de 256 sitios. Los parámetros en cada caso son (a) $P = 0.005$, $k_x = k_y = -0.2$ y (b) $P = 0.1$, $k_x = k_y = -0.1$. Las figuras principales muestran las componentes vertical (curva naranja) y horizontal (curva azul) del centro de masa en función de la dirección z . Los recuadros muestran las distribuciones de intensidad para las distancias señaladas por las flechas. . . .	54
6.1.	Representación esquemática de un corte transversal de la cinta de grafeno fotónica. Las líneas blancas representan los acoplamientos entre primeros vecinos, mientras que el cuadrado de líneas entrecortadas encierra la celda unitaria. . .	57
6.2.	(a) Estructura de bandas lineales de la cinta de grafeno. (b) Modos de banda plana con constantes de propagación $\lambda_+ = V$ (b1) y $\lambda_- = -V$ (b2).	58
6.3.	Las tres familias de soluciones calculadas numéricamente a frecuencia $\lambda = 10$. .	59
6.4.	Caracterización de las cinco familias de soluciones no lineales estudiadas. (a) Diagrama P vs λ , (b) Hamiltoniano H , (c) grado de participación R e (d) índice de estabilidad G en función de P	60
6.5.	Acercamiento de la Figura 6.4(a) mostrando los puntos de bifurcación. A la izquierda los perfiles de amplitud de las cinco soluciones marcadas en el gráfico P vs λ	61
6.6.	Acercamiento de las Figuras 6.4(b-d) mostrando las soluciones localizadas no compactas calculadas numéricamente.	62
6.7.	Máximo desplazamiento del centro de masa para soluciones DA con potencias de 1 a 3.2 y gradientes de fase de 0 a $\pi/2$	62
6.8.	Centro de masa y grado de participación en $z = 30$ para la solución DA con $P = 1$ con distintos gradientes de fase.	63
6.9.	Simulación de la solución DA con $P = 2$ y $k = 0.35$. (a) Evolución del perfil de potencias en la red. (b) Centro de masa en función de z incluyendo el grado de participación de los perfiles representado por el color de los puntos.	65
6.10.	Hamiltoniano normalizado calculado a través del método de restricción, mostrando la forma del potencial de Peierls-Nabarro.	66
6.11.	Máximo desplazamiento del centro de masa para una condición inicial de dos sitios en función de la potencia y el <i>kick</i>	67
6.12.	Evolución de condición inicial de dos sitios con potencia total $P = 2$ para distintos <i>kicks</i>	68
6.13.	(a) Centro de masa y (b) grado de participación en función de la longitud de propagación, calculados a partir de las cuatro simulaciones de la Figura 6.12. .	68
6.14.	Simulación con input de dos sitios con $P = 2$ y $k = 0.75$. (a) Evolución del perfil de potencias en la red. (b) Centro de masa en función de z incluyendo el grado de participación de los perfiles representado por el color de los puntos.	69

Capítulo 1

Introducción

If, in some cataclysm, all of scientific knowledge were to be destroyed, and only one sentence passed on to the next generations of creatures, what statement would contain the most information in the fewest words? I believe it is the atomic hypothesis (or the atomic fact, or whatever you wish to call it) that all things are made of atoms—little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance apart, but repelling upon being squeezed into one another. In that one sentence, you will see, there is an enormous amount of information about the world, if just a little imagination and thinking are applied.

Richard Feynman

Tal como explica Richard Feynman al comienzo de las insignes *Feynman Lectures on Physics* [1], la naturaleza atómica de la materia es una de las bases fundamentales del mundo como lo conocemos. Específicamente en los sólidos, la forma en que los átomos se organizan y ordenan a escalas increíblemente pequeñas, definirá completamente las propiedades macroscópicas del material [2]. Con el objetivo de entender desde un punto de vista de la ciencia básica, pero también mirando hacia el futuro de las tecnologías, es que surge la investigación en Materia Condensada. Esta área de la física reúne otras áreas que antes se consideraban como independientes, pero fue sólo a partir de la década de 1950 que se comenzó a usar el término “Física de Materia Condensada” para agrupar todas las investigaciones que se realizaban en torno a la cristalografía, metalurgia, elasticidad, magnetismo, entre otras [3]. Con el tiempo esta área de la física fue creciendo a pasos agigantados, a veces con resultados revolucionarios que fueron, en varios casos, galardonados con premios nobel (en los años 1962, 1970, 1972, 1977, 1985, 1987, 1991, 1994, 2003, 2010 y 2016). Como resultado, a fines del siglo pasado se estimaba que un tercio de los físicos y las físicas de EE.UU. se identificaba con esta área de estudio [3], mientras que en 2019 una investigación señaló que, a nivel mundial, esta es el área de la física con más personas dedicadas a su estudio [4]. Una de las principales motivaciones para el estudio de la Física de Materia Condensada, ha

sido sus potenciales aplicaciones en computación, que con el paso del tiempo se han convertido en una realidad cotidiana. Al día de hoy, la mayoría de los componentes que poseen los computadores (y por supuesto muchos otros dispositivos como teléfonos, *tablets*, consolas de videojuegos, etc.) basan su funcionamiento en fenómenos estudiados por esta área de la física. Además, la investigación en Materia Condensada se suma a las muchas otras áreas de la física que han mostrado un amplio interés y poseen una larga tradición de investigación sobre los fenómenos de localización y transporte de energía, los cuales son cruciales para esta tesis. Para dar un ejemplo, en el área de la computación es fundamental controlar la energía para poder almacenar, operar y transmitir información.

Por otra parte, a fines del siglo pasado se planteó el concepto de computación cuántica, según el cual pequeños cambios en el paradigma del funcionamiento de los procesadores podrían generar gigantescos avances en algunos problemas complejos, tales como las simulaciones de sistemas cuánticos, la factorización de números y la búsqueda en bases de datos [5]. Con la irrupción de los primeros procesadores cuánticos, los sistemas físicos que los soportan se han extendido y diversificado. Así, se han propuesto varios sistemas físicos como base, con el objetivo de aprovechar las particularidades de cada sistema y así disminuir las limitaciones naturales que posee la computación cuántica. Algunas plataformas que se han investigado en el último tiempo son circuitos superconductores [5, 6], trampas de iones [7, 8], cavidades con puntos cuánticos [9], resonancias magnéticas nucleares [10, 11], circuitos fotónicos [12–15], entre otros.

En esta tesis nos centraremos en sistemas compuestos por guías de ondas fotónicas acopladas. Estos sistemas son una alternativa de bajo costo para fabricar circuitos fotónicos. A pesar de que no es la única opción, todavía es necesario estudiarla junto con todas las otras alternativas, dado que aún no se ha determinado cuál es el mejor marco para controlar la luz en un chip [16]. Otro motivo por el cual se estudian los sistemas de guías de ondas es que son sistemas completamente análogos a arreglos de átomos. Éstos últimos son ampliamente estudiados en la Física de Materia Condensada, especialmente cuando los arreglos forman redes periódicas, de forma que pueden describir sólidos cristalinos, materiales bidimensionales, cadenas de polímeros, entre otros. A pesar de que la dinámica de la luz en un arreglo de guías de ondas (o una red fotónica) es equivalente a la dinámica de un electrón en una red atómica, estos sistemas presentan una ventaja fundamental: si se desea observar el comportamiento del electrón, es imposible observar experimentalmente la función de onda de este. En cambio, en los arreglos fotónicos basta con una simple cámara digital para observar la distribución de intensidades, la cual entrega la misma información. En el mismo sentido, existen asimismo, dos ventajas más. En primer lugar, es posible fabricar a voluntad básicamente cualquier geometría deseada en dos dimensiones [16, 17], por lo que se pueden implementar sistemas que en un contexto electrónico podría ser imposible o altamente inestable. La otra ventaja que ofrece esta clase de sistemas es la simplicidad en el proceso de fabricación: si bien fabricar arreglos de guías de ondas fotónicas no es trivial, es posible realizarlo sin controlar la atmósfera de fabricación y tampoco es necesario controlar la temperatura de trabajo (siempre y cuando se mantenga constante), por lo que esta metodología se ha posicionado firmemente

como una opción para investigar fenómenos de la materia condensada.

A continuación, se presentará una breve contextualización histórica del desarrollo científico en torno a las guías de ondas; para esto, debemos remontarnos a 1973 cuando se reportó la observación de la difracción discreta [18], lo que se conoce como la primera publicación experimental en esta materia. A pesar de que antes ya se conocía la posibilidad de acoplar guías de microondas [19], el trabajo publicado por los grupos de Yariv y Hunsperger es el primero en lograr acoplar guías de ondas con modos en un rango óptico (1150 nm). Estos primeros arreglos de guías de ondas fueron fabricados bombardeando protones sobre un sustrato de GaAs. Durante 30 años la técnica de fabricación no cambió drásticamente, pasando los sustratos a ser de AlGaAs. Sin embargo, la fabricación siempre fue mediante técnicas litográficas, lo cual restringía a que solo se pudiesen fabricar redes unidimensionales. Durante esos años los principales logros experimentales fueron la observación de un solitón discreto [20] luego de ser predicha por Christodoulides y Joseph en 1988 [21], además de la demostración experimental de las oscilaciones de Bloch [22] y la estructura de bandas y *gaps* 1D [23]. En 2003, una nueva técnica fue sugerida para fabricar redes fotónicas usando un cristal fotorrefractivo SBN [24]. En primer lugar, se fabricaron redes unidimensionales y pronto se comenzó a emplear la misma técnica para inducir redes 2D, con lo que, unos años después, se observó la localización de Anderson en una red hexagonal [25].

En la actualidad, el método de fabricación más empleado para construir redes fotónicas es la técnica de láser de femtosegundos. Para explicar los orígenes de esta metodología, nos será útil plantear la siguiente cronología. En 1996, se propuso por primera vez fabricar guías de ondas enfocando un láser con pulsos ultracortos (en este caso ~ 120 fs) dentro de distintos tipos de vidrios [26]. Este trabajo significa un hito inicial en el desarrollo de esta técnica que en los años siguientes se continuó puliendo, de forma que en 2002 ya se tenía caracterizado el cambio de índice de refracción en borosilicato y sílice fundida¹ con distintos parámetros de fabricación [27]. Con estos avances, en 2005 se publicó nuevamente la observación de un solitón discreto [28], esta vez usando guías fabricadas en sílice. Gracias a esta nueva técnica, el área de investigación comienza a tener un avance revolucionario, de tal forma que durante este siglo se han conseguido realizar experimentos de gran impacto en la comunidad y de interesantes aplicaciones potenciales. Algunos ejemplos son la localización dinámica [29], analogías relativistas [30], aislantes topológicos fotónicos [31], acoplamiento interorbital [32] y localización por banda plana [33].

Este último concepto amerita una breve alusión, dado que las tres redes investigadas en esta tesis poseen bandas planas. En el año 2015 dos grupos independientemente publicaron las primeras observaciones experimentales de modos de banda plana [34, 35]: en ambos casos se observó un modo de banda plana en una red de Lieb fabricada mediante la técnica de láser de femtosegundos. El fenómeno de las bandas planas se conocía teóricamente mucho antes en el contexto de la materia condensada [36]; sin embargo, por los motivos mencionados anteriormente, no era posible observar directamente un autoestado de banda plana del

¹ Ambos materiales son, al día de hoy, los vidrios preferidos para fabricar guías de ondas mediante la técnica de láser de femtosegundos

sistema, lo que sí se consiguió en estos trabajos. Con estas publicaciones comenzó un proceso de estudio más detallado de este fenómeno, el cual consiste en una red con una banda sin dependencia de los vectores de onda de Bloch. Este hecho se traduce en: 1) la existencia de modos con velocidad de grupo nula, y 2) la localización de estos modos en una región pequeña de la red (pocas celdas unitarias). Estas características entregan la posibilidad de tener, en un único sistema, buenas opciones tanto de transporte como de localización en un régimen lineal, lo cual, como ya mencionamos antes, es uno de los objetivos en general de la física. Otra característica interesante de los sistemas de bandas planas es que, al incluir no linealidad en ellos, es posible encontrar familias de soluciones localizadas que nacen a partir de un modo de banda plana. Estas familias no poseen un umbral de potencia mínimo para excitarlas [37], lo que se contrapone a los resultados previos, que mostraban que las soluciones siempre tenían un umbral mínimo de potencia en dimensiones mayores a 1 [38].

La propuesta de la siguiente tesis es estudiar distintos fenómenos de transporte y localización en redes fotónicas, tanto en regímenes lineales como no lineales. Para realizar esto, proponemos tres geometrías distintas, todas siendo redes con bandas planas en su espectro lineal, explorando sus propiedades de transporte y localización mediante no linealidad tipo Kerr, modos de bandas planas y flujos magnéticos efectivos. En cada uno de estos tres trabajos, exploramos la posibilidad de desplazar soluciones localizadas, manteniendo la forma del paquete de ondas, teniendo en mente aplicaciones tecnológicas que puedan aprovechar estas propiedades y geometrías. Si bien los tres trabajos que presentamos a continuación están formulados a partir de redes fotónicas con bandas planas, cada uno tiene su relevancia específica e independientemente aportan a ampliar el horizonte del conocimiento de la ciencia, en esta área de investigación. El primer trabajo es relevante ya que propone una nueva forma de introducir flujos magnéticos efectivos en redes fotónicas. Aprovechando esta oportunidad, mostramos experimentalmente el enjaulamiento de Aharonov-Bohm en una red de diamante y, además, demostramos la posibilidad de mover excitaciones de la red en cualquier dirección deseada en un régimen completamente lineal. El segundo trabajo cobra relevancia por ser un estudio numérico sobre un amplio conjunto de soluciones localizadas (compactas y no compactas), en un régimen no lineal tipo Kerr. En esta investigación descubrimos una dependencia del estado fundamental del sistema respecto del tamaño de la red. El tercer y último trabajo incluido en esta tesis consiste en un trabajo numérico en una red con no linealidad tipo Kerr, donde conseguimos mover de forma controlada soluciones localizadas que ocupan pocos sitios de la red. Para concluir, nos referiremos brevemente a la estructura del presente texto. La tesis está compuesta en primer lugar por una contextualización teórica y experimental cuyo objetivo es ofrecer las bases para facilitar la cabal comprensión de las tres investigaciones. A ello le siguen las descripciones y resultados de cada uno de estos trabajos y, finalmente, la presentación de las conclusiones específicas de cada trabajo y de la tesis en general. De esta forma, el Capítulo 2 explica la teoría que describe los arreglos de guías de ondas, mientras el Capítulo 3 presenta las técnicas experimentales utilizadas en uno de los trabajos de esta tesis. Consecutivamente, los Capítulos 4, 5 y 6 exponen la teoría, los experimentos y las simulaciones de los tres trabajos que constituyen la médula de esta

investigación. Finalmente, el Capítulo 7 integra las conclusiones y posibles aplicaciones de esta tesis.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se presentarán todas las herramientas teóricas relacionadas con arreglos de guías de ondas necesarias para comprender esta tesis. En la Sección 2.1 se demostrará la existencia de modos normales guiados al interior de una guía de ondas. Este resultado servirá de base para describir la interacción entre dos guías en la Sección 2.2. Extrapolando este resultado se podrán entender las propiedades lineales de un sistema de varias guías o incluso de una red infinita, lo cual se revisará en la Sección 2.3. Por último, en la Sección 2.4 se presentarán las particularidades de introducir un tipo de no-linealidad en estos sistemas y se presentarán las herramientas matemáticas y numéricas para encontrar y caracterizar las soluciones.

2.1. Modos electromagnéticos de una guía de ondas unidimensional

2.1.1. Ecuación de ondas para un medio dieléctrico

Comenzamos a partir de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

donde \vec{E} y \vec{B} son los campos eléctrico y magnético, mientras que ρ y \vec{J} son las densidades de cargas y corrientes libres. Los campos auxiliares \vec{D} y \vec{H} se definen a través de las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},\end{aligned}$$

donde \vec{P} y \vec{M} son la polarización y magnetización del medio. La polarización \vec{P} de un material representa la respuesta frente a un campo eléctrico y, de forma general, puede ser escrita de la siguiente manera

$$\vec{P} = \epsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} \chi^{(n)} \vec{E}^n,$$

donde $\chi^{(n)}$ es la susceptibilidad eléctrica de n -ésimo orden del material. Los casos de interés para esta tesis son los materiales ópticos (en específico vidrios de borosilicato o silicio fundido) los cuales son materiales no magnéticos y no tienen cargas ni corrientes libres, es decir $\vec{M} = \vec{J} = 0$ y $\rho = 0$.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos comenzar derivando la ecuación de ondas electromagnéticas. Primero, aplicamos rotor a la Ecuación 2.4 con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) \\ &= -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

El lado izquierdo de esta ecuación puede ser reescrito usando la siguiente identidad del cálculo vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}. \quad (2.5)$$

El primer término del lado derecho de la Ecuación 2.5 puede ser despreciado en nuestros casos de interés debido a la aproximación de amplitud lentamente variable [39] de la cual hablaremos en la Sección 2.2. De esta forma, ordenando los términos obtenemos la ecuación

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

donde ocupamos la definición de la velocidad de la luz en el vacío $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Esta ecuación de ondas no lineal es una de las ecuaciones de onda más generales para un medio dieléctrico. Por ahora solo consideraremos el régimen lineal de respuesta de los materiales, por lo que consideraremos $\chi^{(n)} = 0$ para todo n excepto $n = 1$. De esta forma obtenemos la ecuación de

ondas lineal

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.7)$$

donde $\epsilon = 1 + \chi^{(1)}$ es la constante dieléctrica lineal del material.

2.1.2. Guía de ondas unidimensional

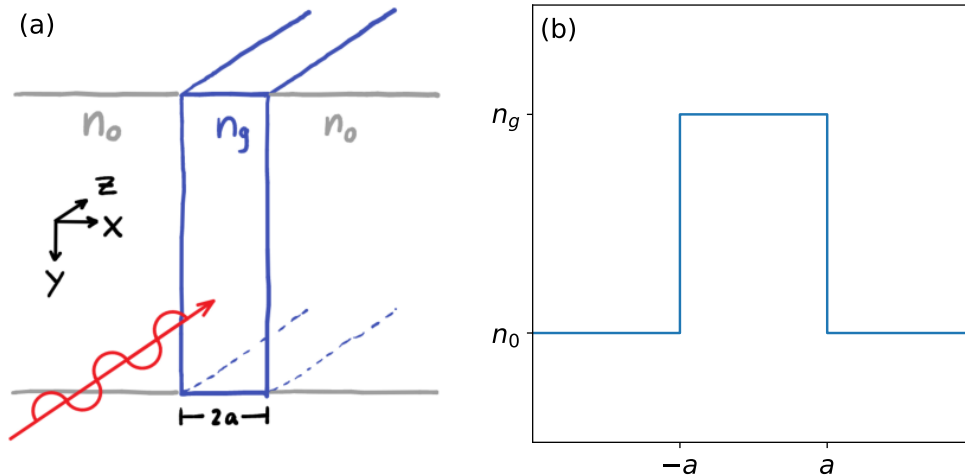


Figura 2.1: (a) Esquema tridimensional e (b) índice de refracción en función de x de una guía de ondas unidimensional.

Ahora presentaremos el sistema bajo estudio. Este consiste en un medio infinito de índice de refracción n_0 con una lámina de otro material de índice n_g el cual está confinado solo en el eje x . Tal como se muestra en la figura 2.1, el ancho de esta guía de ondas es $2a$. Llamaremos guía de ondas o núcleo a la región de alto índice de refracción y revestimiento al resto del material que encierra a este núcleo.

Antes de comenzar a buscar los modos normales que se propagan en la guía, usaremos este sistema para ejemplificar por qué podemos despreciar el término $\nabla \cdot \vec{E}$, tal como fue hecho para derivar la Ecuación 2.6. Para esto trabajaremos sobre la divergencia del desplazamiento eléctrico

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \left[\epsilon_0 \vec{E} \left(1 + \chi^{(1)} + \chi^{(2)} \vec{E} + \chi^{(3)} \vec{E}^2 + \dots \right) \right].$$

Como estamos estudiando el régimen lineal, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{D} &\approx \epsilon_0 \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) \\
&= \epsilon_0 (\epsilon \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \epsilon \cdot \vec{E}) \\
&= \epsilon_0 \left(\epsilon \nabla \cdot \vec{E} + \frac{d\epsilon}{dx} E_x \right).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

En el último paso se ha usado que el índice de refracción solo depende de x y por ende $\epsilon = n^2$ también. Además, definimos las componentes del campo eléctrico de forma que $\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$. Como estamos en ausencia de cargas libres, la Ecuación de Maxwell 2.1 nos dice que $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, de esta forma la Ecuación 2.8 puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} E_x \\
&= -E_x \frac{\partial}{\partial x} (\ln \epsilon).
\end{aligned}$$

En el laboratorio, el método más común usado para fabricar guías de ondas en la actualidad es mediante un láser de femtosegundos [16, 28] (describiremos en detalle esta técnica en la Sección 3.1). Con esta técnica las diferencias de índices de refracción entre la guía y el medio en el cual está inmerso son del orden de $\Delta n \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ [28], lo cual implica que $\Delta \epsilon \sim 10^{-8} - 10^{-6}$. Además de esto las guías de ondas reales tienen un cambio de índice de refracción menos abrupto que la función tipo escalón que estamos considerando. De esta forma, como los cambios son tan pequeños, es que podemos considerar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \ln \epsilon &\approx 0 \\
\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} &\approx 0.
\end{aligned}$$

2.1.3. Modos normales

Buscaremos ahora modos normales que se propaguen en la dirección z , por esta razón busquemos una solución a la ecuación de onda 2.7, donde la dependencia en el tiempo y en z sean solo una fase acumulada, es decir,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}(x) e^{i(k_z z - \omega t)}. \tag{2.9}$$

En este *ansatz*, $\vec{\mathcal{E}}(x)$ representa la forma transversal del modo, k_z su frecuencia espacial y ω su frecuencia temporal definida por la longitud de onda del láser con el cual se excita el sistema. Reemplazando la Expresión 2.9 en la Ecuación 2.7 y simplificando, se obtiene

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial x^2} = [k_z^2 - k_0^2 n^2(x)] \vec{\mathcal{E}}(x), \tag{2.10}$$

donde $k_0 = \omega/c$. Notemos que la Ecuación 2.10 es equivalente a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un potencial unidimensional

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = [-E_0 + U(x)] \psi. \quad (2.11)$$

Comparando las Ecuaciones 2.10 y 2.11 notamos que el problema que estamos resolviendo no es más que el de un pozo de potencial finito, donde $-n^2$ juega el rol del potencial para la partícula cuántica.

Como la Ecuación 2.10 tiene soluciones que son senos y cosenos o exponenciales reales dependiendo del signo del término entre paréntesis, para que la solución esté localizada dentro de la guía, exigiremos algunas condiciones sobre este término². Dentro de la guía imponemos que

$$k_0^2 n^2(x) > k_z^2,$$

para que las soluciones sean senos y cosenos, mientras que fuera de la guía exigiremos

$$k_z^2 > k_0^2 n^2(x),$$

para que las soluciones sean exponenciales reales que decaen hacia $x = \pm\infty$.

Antes de continuar, es conveniente definir las constantes

$$\alpha^2 \equiv k_0^2 n_g^2 - k_z^2, \quad (2.12)$$

$$\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2,$$

$$\mathcal{V}^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2 = k_0^2 (n_g^2 - n_0^2). \quad (2.13)$$

Notemos que estas tres constantes son reales y positivas. Como el rango de valores posibles para k_z está limitado por n_0^2 y n_g^2 , la constante \mathcal{V}^2 indica que tan grande es esta región. Con esto tendremos que la solución estará definida en tres regiones:

$$\vec{\mathcal{E}}(x) = \begin{cases} \vec{\mathcal{E}}_L e^{\beta x} & \text{si } x < -a, \\ \vec{\mathcal{E}}_S \cos(\alpha x) + \vec{\mathcal{E}}_A \sin(\alpha x) & \text{si } |x| < a, \\ \vec{\mathcal{E}}_R e^{-\beta x} & \text{si } x > a. \end{cases} \quad (2.14)$$

Dentro de las soluciones posibles, separaremos en dos tipos de modos dentro del núcleo. Llamaremos modos simétricos cuando $\vec{\mathcal{E}}_A = 0$ y antisimétricos a los modos en donde $\vec{\mathcal{E}}_S = 0$.

Para encontrar los valores de $\vec{\mathcal{E}}_L, \vec{\mathcal{E}}_R, \vec{\mathcal{E}}_S$ y $\vec{\mathcal{E}}_A$ se usan las condiciones de continuidad de los campos electromagnéticos [41, 42]. En ausencia de cargas y corrientes libres, si tenemos una interfaz entre los medios 1 y 2, estas condiciones son:

² Si uno buscara otros tipos de modos, uno podría no usar esta condición, con lo cual se podrían calcular modos de radiación [40], pero no estudiaremos este tipo de modos en esta tesis.

$$D_1^\perp = D_2^\perp, \quad (2.15)$$

$$B_1^\perp = B_2^\perp, \quad (2.16)$$

$$\vec{E}_1^\parallel = \vec{E}_2^\parallel, \quad (2.17)$$

$$\vec{H}_1^\parallel = \vec{H}_2^\parallel. \quad (2.18)$$

Debido a la geometría del problema $\vec{\mathcal{E}}$ no puede tener dependencia en y . Además, si consideramos una descomposición de Fourier de los modos de manera de escribirlos como suma de ondas planas, nos damos cuenta que los vectores de onda \vec{k} de las ondas planas tampoco pueden tener componente en y . Para demostrar esto, situémonos en el caso en que existiera una componente en y , entonces la dirección de propagación no sería z , si no que tendría una componente en y también. De esta forma, bastaría rotar el sistema de referencia en torno al eje x para tener que el modo sí se propague en nuestro nuevo eje z y que \vec{k} viva en el plano xz . Esto nos permite que, además de separar entre modos simétricos y antisimétricos, podemos agrupar las soluciones posibles en modos transversales eléctricos (TE) y transversales magnéticos (TM)³.

Para los modos TE, el campo eléctrico es perpendicular a z y además como \vec{k} apunta en el plano xz , para mantener las relaciones de ortogonalidad entre \vec{E} , \vec{H} y \vec{k} , se concluye que $\vec{E} = E\hat{y}$. De la misma manera, para los modos TM tendremos que $\vec{H} = H\hat{y}$. Estas condiciones se explican gráficamente en la Figura 2.2.

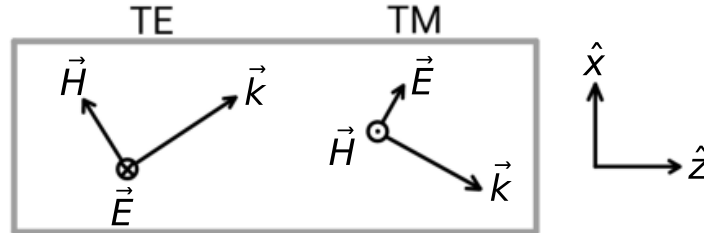


Figura 2.2: Configuraciones transversal eléctrica (TE) y transversal magnética (TM). La cruz indica que el campo apunta hacia dentro de la página, mientras que el punto indica que el campo apunta hacia afuera.

En esta tesis solo calcularemos los modos TE; sin embargo, el cálculo de los modos TM es completamente análogo. Como explicamos anteriormente, en este caso tendremos que $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\hat{y}$. Así, la Ecuación 2.9 puede ser escrita como

³ En ciertos tipos de guías de ondas es posible encontrar modos transversales electromagnéticos (TEM) donde el campo eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación, sin embargo en este sistema no existen este tipo de soluciones. Por otro lado, también es posible la existencia de modos híbridos, donde ninguno de los dos campos es perpendicular a z ; sin embargo, en nuestro sistema todas las soluciones posibles son combinaciones lineales de modos TE y TM [40, 42, 43].

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}(x)e^{i(k_z z - \omega t)}\hat{y}. \quad (2.19)$$

A partir de esta expresión, si usamos las ecuaciones de Maxwell para calcular el campo magnético obtendremos lo siguiente:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{-e^{i(k_z z - \omega t)}}{\mu_0 \omega} \left(k_z \mathcal{E}(x)\hat{x} + i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \hat{z} \right). \quad (2.20)$$

Comenzamos buscando *modos simétricos*, para esto usamos las expresiones 2.19 y 2.20 junto con las condiciones de borde 2.17 y 2.18, obteniendo

$$\mathcal{E}_S \cos(\alpha a) = \mathcal{E}_R e^{-\beta a}, \quad (2.21)$$

$$\alpha \mathcal{E}_S \sin(\alpha a) = \beta \mathcal{E}_R e^{-\beta a}. \quad (2.22)$$

Si dividimos la Ecuación 2.22 por la Ecuación 2.21 obtendremos

$$\alpha a \tan(\alpha a) = \beta a. \quad (2.23)$$

Es importante mencionar que las otras condiciones de borde y la interfaz $x = -a$ no entregan más información que las Ecuaciones 2.21 y 2.22. De esta forma aun cuando no calculemos explícitamente la forma espacial del modo, dígame $\mathcal{E}(x)$, la Ecuación 2.23 entrega la información de todos los modos simétricos existentes y cuáles son sus respectivas frecuencias espaciales k_z .

De manera análoga, para el cálculo de los *modos antisimétricos*, al usar las condiciones de borde 2.17 y 2.18 se obtiene

$$\mathcal{E}_A \sin(\alpha a) = \mathcal{E}_R e^{-\beta a}, \quad (2.24)$$

$$\alpha \mathcal{E}_A \cos(\alpha a) = -\beta \mathcal{E}_R e^{-\beta a}. \quad (2.25)$$

Luego, al dividir la Ecuación 2.25 por la Ecuación 2.24 se obtiene

$$-\alpha a \cot(\alpha a) = \beta a. \quad (2.26)$$

Así, análogamente a lo mencionado para la ecuación 2.23, la ecuación 2.26 entrega la información de todos los modos antisimétricos existentes en el sistema.

En vez de resolver las Ecuaciones 2.23 y 2.26 directamente para k_z , se puede buscar resolver para α y β agregando la relación 2.13. De esta forma es posible resolver gráficamente la cantidad de modos existentes realizando un gráfico βa vs αa como el de la Figura 2.3(a), donde graficamos las funciones tangente y cotangente, mientras que la relación 2.13 se traduce en una circunferencia de radio $\mathcal{V}a$. Así dependiendo de que tan grande es \mathcal{V} se obtienen una cierta cantidad de soluciones las cuales son los puntos de intersección entre las curvas. Luego

de obtener los valores de α y β , se pueden encontrar los perfiles de los modos a partir de la expresión 2.14. Para ejemplificar, calculamos los modos con luz roja ($\lambda = 640nm$) de una guía fabricada en vidrio ($n_0 = 1.5$ y $n_g = 1.5005$) con un ancho de $2a = 20\mu m$. Con estos parámetros la guía soporta tres modos, los cuales están graficados en las Figuras 2.3(b)-(d).

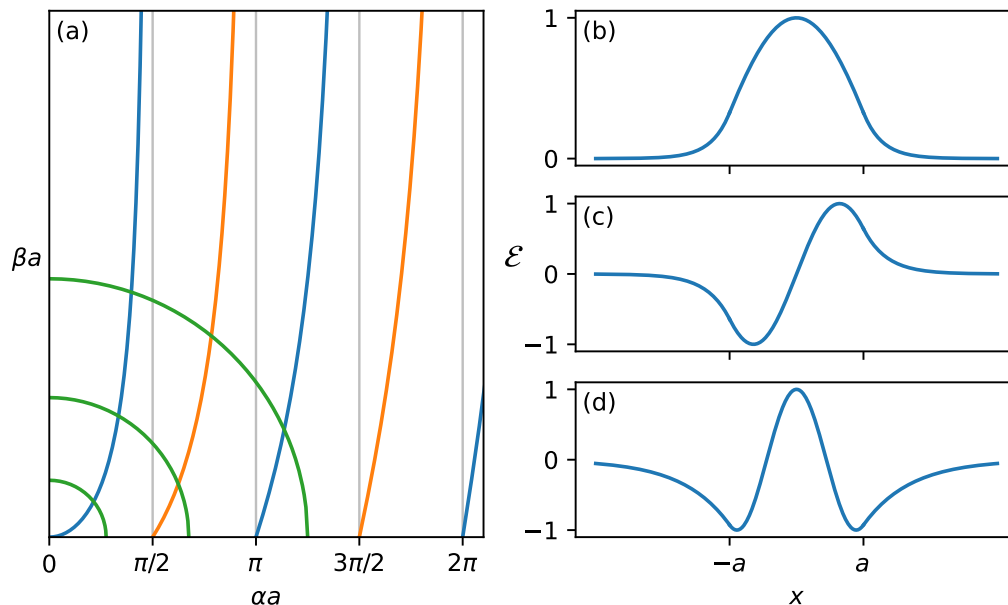


Figura 2.3: (a) Solución gráfica de las Ecuaciones 2.23 y 2.26. Las curvas azules (naranjas) representan la ecuación de los modos simétricos (antisimétricos), mientras que las curvas verdes son distintas circunferencias de radios $\mathcal{V}a$; las soluciones están dadas por las intersecciones entre las curvas. (b)-(d) Amplitudes del campo eléctrico para los tres modos de una guía de ondas con los parámetros señalados en el texto principal.

Obteniendo estos resultados es que concluimos esta sección con algunas observaciones importantes que servirán para comprender la sección siguiente. Lo primero es notar que siempre existe por lo menos un modo por muy bajo que sea el contraste de la guía, además este modo fundamental siempre será un modo simétrico. Lo otro que podemos deducir de los resultados es que a medida que aumenta el contraste \mathcal{V} más modos soportará la guía de ondas y siempre estos modos se intercalarán entre modos simétricos y antisimétricos. Por último, notamos que el número de modos siempre será finito.

Aun cuando en el laboratorio, las guías fabricadas mediante la técnica de láser de femtosegundos tienen la región de alto índice de refracción confinado en dos dimensiones, las observaciones mencionadas anteriormente son extrapolables. La forma habitual de las guías de ondas es elíptica, aun así sus modos pueden ser calculados analíticamente [44, 45].

2.2. Teoría acoplada de modos

En la sección anterior ya estudiamos el comportamiento de una guía de ondas y vimos algunas características de los modos guiados dentro de su núcleo. Ahora es el momento de estudiar la interacción entre dos guías de ondas distintas las cuales se encuentran a una distancia lo suficientemente pequeña como para que sus modos interactúen, pero lo suficientemente lejos como para que los modos de cada guía sean los mismos que si estuvieran solas en el sustrato, de manera de poder, posteriormente, discretizar el sistema. En el ámbito de la física de materia condensada el problema análogo al que estudiaremos es el de la interacción de orbitales moleculares en el formalismo de *tight binding* [46]. Esta interacción entre dos guías será la base para poder entender los fenómenos colectivos de una red de guías de ondas, donde extrapolaremos la interacción de dos guías individuales para describir las interacciones entre todas las distintas guías de una red arbitraria.

2.2.1. Guía individual

Comenzaremos con una guía de ondas infinita a lo largo de la dirección de propagación z y con una forma transversal (xy) arbitraria tal como se muestra en la figura 2.4. Como ya vimos, el campo eléctrico será una suma de los modos de esta guía, por lo que podemos escribir

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_j a_j \vec{\mathcal{E}}_j(x, y) e^{i(\beta_j z - \omega t)}, \quad (2.27)$$

donde j representa el índice de un modo. Para cada uno de estos modos $\vec{\mathcal{E}}_j$ representa la forma transversal, β_j la frecuencia espacial y a_j la amplitud. Es conveniente notar que la frecuencia temporal ω no depende del modo, ya que como fue mencionado anteriormente esta sólo depende del láser que excita el sistema.

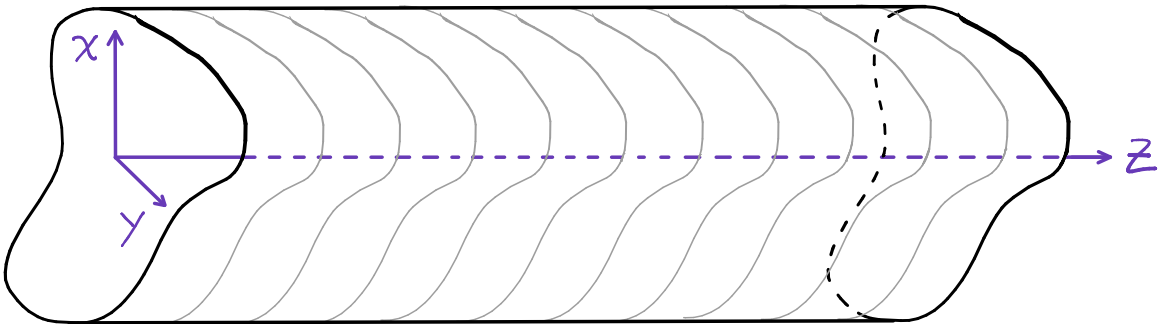


Figura 2.4: Guía de ondas con una forma transversal arbitraria.

Manteniéndonos en el régimen lineal, sabemos que el campo eléctrico debe cumplir la ecuación de ondas 2.7. Reemplazando la Expresión 2.27 en la Ecuación 2.7, se obtiene

$$\sum_j \left[a_j \left(\nabla_{\perp}^2 - \beta_j^2 - \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \right) \vec{\mathcal{E}}_j e^{i(\beta_j z - \omega t)} \right] = 0, \quad (2.28)$$

donde $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Una propiedad de los modos normales de este tipo de sistemas es que son ortogonales entre si [40, 43]; por este motivo, podemos afirmar, a partir de la ecuación 2.28, que para cada modo j se tiene que

$$\left(\nabla_{\perp}^2 - \beta_j^2 - \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \right) \vec{\mathcal{E}}_j = 0. \quad (2.29)$$

Guardaremos este resultado para más tarde y ahora pasaremos al sistema de 2 guías.

2.2.2. Acoplamiento entre dos guías de ondas

Si se tiene más de una guía, podemos escribir el campo eléctrico como la suma de los modos de cada una de las guías

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{n,j} a_{n,j}(z) \vec{\mathcal{E}}_{n,j}(x, y) e^{i(\beta_{n,j} z - \omega t)}, \quad (2.30)$$

donde el subíndice n representa cada una de las guías. En este caso, a diferencia de la expresión para una sola guía, la amplitud de cada modo si tiene una dependencia en z , debido a que los modos de cada guía ya no son modos normales del sistema.

Consideraremos ahora dos guías de ondas monomodales, con índices de refracción n_{g1} y n_{g2} inmersas en un medio con índice n_0 . Estudiaremos el acoplamiento entre los modos de cada una de las guías, considerando que las frecuencias de los modos son β_1 y β_2 . Para este caso específico reescribimos la ecuación 2.30 como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left[a_1(z) \vec{\mathcal{E}}_1(x, y) e^{i\beta_1 z} + a_2(z) \vec{\mathcal{E}}_2(x, y) e^{i\beta_2 z} \right] e^{-i\omega t}. \quad (2.31)$$

Reemplazando esta expresión para el campo eléctrico en la Ecuación 2.7 se obtiene

$$\sum_{j=1}^2 \left[\frac{d^2 a_j(z)}{dz^2} + 2i\beta_j \frac{da_j(z)}{dz} + a_j(z) \left(\nabla_{\perp}^2 - \beta_j^2 + \frac{\omega^2 n^2(x, y)}{c^2} \right) \right] \vec{\mathcal{E}}_j(x, y) e^{i\beta_j z} = 0.$$

Sobre esta expresión usaremos la aproximación de amplitud lentamente variable en la dirección de propagación [43]. Esta aproximación consiste en considerar que la variación de la amplitud de los campos a lo largo de z es lenta y a su vez la aceleración correspondiente a esa variación es mucho menor. Así

$$\left| \frac{d^2 a_j}{dz^2} \right| \ll \left| 2i\beta_j \frac{da_j}{dz} \right| \Rightarrow \sum_{j=1}^2 \left[2i\beta_j \frac{da_j(z)}{dz} + a_j(z) \left(\nabla_{\perp}^2 - \beta_j^2 + \frac{\omega^2 n^2(x, y)}{c^2} \right) \right] \vec{\mathcal{E}}_j(x, y) e^{i\beta_j z} \approx 0. \quad (2.32)$$

Nos detendremos ahora para reescribir la función de índice de refracción de manera con-

veniente. Según lo que ya mencionamos, podemos escribir la función del índice de refracción de la siguiente forma

$$n^2(x, y) = \begin{cases} n_0^2 & \text{fuera de las guías,} \\ n_{g1}^2 & \text{dentro de la guía 1,} \\ n_{g2}^2 & \text{dentro de la guía 2.} \end{cases} \quad (2.33)$$

Definimos ahora las siguientes funciones para $j = \{1, 2\}$,

$$n_j^2(x, y) \equiv \begin{cases} n_{gj}^2 - n_0^2 & \text{dentro de la guía } j, \\ 0, & \text{fuera de la guía } j. \end{cases}$$

Con esta definición podemos reescribir 2.33

$$n^2(x, y) = n_0^2 + n_1^2(x, y) + n_2^2(x, y).$$

Teniendo en cuenta esto, volvamos a mirar la Ecuación 2.32. Específicamente detengámonos en el término entre paréntesis el cual al multiplicarlo por $\vec{\mathcal{E}}_j$ tendremos que es lo mismo que se tiene en la Ecuación 2.29. Sin embargo, esta última ecuación es válida solo para una guía, por lo que en el caso de la Ecuación 2.32 el término entre paréntesis será nulo en todo el espacio excepto en la guía opuesta. De esta forma, gracias a nuestra nueva notación para el índice de refracción podemos reescribir este término

$$\begin{aligned} a_j \left(\nabla_{\perp}^2 - \beta_j + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) \vec{\mathcal{E}}_j e^{i\beta_j z} &= a_j \left[\nabla_{\perp}^2 - \beta_j + \frac{\omega^2}{c^2} (n_0^2 + n_1^2 + n_2^2) \right] \vec{\mathcal{E}}_j e^{i\beta_j z} \\ &= a_j \frac{\omega^2}{c^2} n_{j\pm 1} \vec{\mathcal{E}}_j e^{i\beta_j z}. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación 2.32 se obtiene

$$\left(2i\beta_1 \frac{da_1}{dz} + \frac{\omega}{c} n_2^2 a_1 \right) \vec{\mathcal{E}}_1 e^{i\beta_1 z} + \left(2i\beta_2 \frac{da_2}{dz} + \frac{\omega}{c} n_1^2 a_2 \right) \vec{\mathcal{E}}_2 e^{i\beta_2 z} = 0. \quad (2.34)$$

Una propiedad de los modos de las guías de ondas es que estos son ortogonales entre sí y la normalización que tienen es la siguiente [43]

$$\frac{\beta_m}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \vec{\mathcal{E}}_m \cdot \vec{\mathcal{E}}_n^* = \delta_{mn}.$$

Sabiendo esto, podemos multiplicar la ecuación 2.34 por $\vec{\mathcal{E}}_1^*$ e integrar en el plano xy . Con esto, la ecuación 2.34 se transforma en

$$-i \frac{da_1}{dz} = B_1 a_1 + V a_2 e^{i(\beta_2 - \beta_1)z}, \quad (2.35)$$

donde se ha definido las constantes B y V como

$$B_1 \equiv \frac{\omega\epsilon_0}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot \vec{\mathcal{E}}_1^* n_2^2 = \frac{\omega\epsilon_0(n_{g2}^2 - n_0^2)}{4} \int \int_{\text{guía 2}} dx dy \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1^*,$$

$$V \equiv \frac{\omega\epsilon_0}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot \vec{\mathcal{E}}_1^* n_1^2 = \frac{\omega\epsilon_0(n_{g1}^2 - n_0^2)}{4} \int \int_{\text{guía 1}} dx dy \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1^*.$$

Análogamente, si multiplicamos 2.44 por $\vec{\mathcal{E}}_2$ e integramos, se obtiene

$$-i \frac{da_2}{dz} = B_2 a_2 + V^* a_1 e^{i(\beta_1 - \beta_2)z}, \quad (2.36)$$

con

$$B_2 = \frac{\omega\epsilon_0(n_{g1}^2 - n_0^2)}{4} \int \int_{\text{guía 1}} dx dy \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_2^*,$$

$$V^* = \frac{\omega\epsilon_0(n_{g2}^2 - n_0^2)}{4} \int \int_{\text{guía 2}} dx dy \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^*.$$

A simple vista las constantes de acoplamiento V y V^* no parecen ser complejos conjugados, sin embargo, es necesario que lo sean para que se conserve la energía en el sistema [43]. Estas constantes dan cuenta del intercambio de energía entre las guías. Por otro lado, las constantes B_1 y B_2 aparecen como una corrección a primer orden de teoría de perturbaciones sobre las constantes de propagación de los modos. Otra forma de verlo es que si uno cambia el *ansatz* 2.31 por

$$\vec{E} = [a_1 \vec{\mathcal{E}}_1 e^{i(\beta_1 + B_1)z} + a_2 \vec{\mathcal{E}}_2 e^{i(\beta_2 + B_2)z}] e^{-i\omega t},$$

las ecuaciones 2.35 y 2.36 se convierten en

$$-i \frac{da_1}{dz} = V a_2 e^{i\delta z}, \quad (2.37)$$

$$-i \frac{da_2}{dz} = V^* a_1 e^{i\delta z}, \quad (2.38)$$

donde $\delta = (\beta_2 + B_2) - (\beta_1 + B_1)$. De todas formas, es importante destacar que B_1 y B_2 son, en muchos casos, despreciables debido a que son magnitudes mucho menores que las constantes de acoplamiento y que las constantes de propagación de los modos.

Las ecuaciones 2.37 y 2.38 se conocen como ecuaciones de Schrödinger discretas y son las ecuaciones más comunes para estudiar sistemas discretos de guías de ondas. Son análogas a las ecuaciones para un electrón en un sistema de átomos bajo el formalismo de *tight-binding*. Por último, es importante señalar que si $V \in \mathbb{R}$ se puede hacer el cambio de variable $z \rightarrow z/V$

resultando en la normalización de las ecuaciones eliminando la dependencia de V^4 , con lo que las ecuaciones 2.37 y 2.38 quedan

$$-i \frac{da_1}{dz} = a_2 e^{i\delta z/V}, \quad (2.39)$$

$$-i \frac{da_2}{dz} = a_1 e^{i\delta z/V}. \quad (2.40)$$

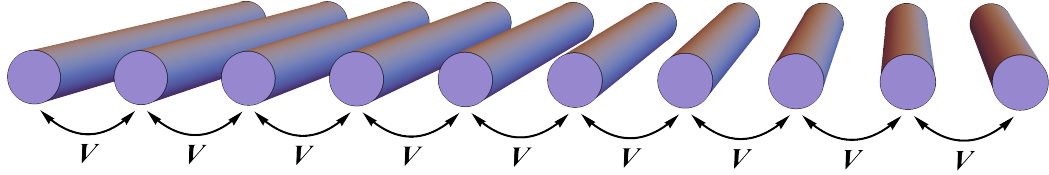


Figura 2.5: Dibujo de una cadena unidimensional de guías de ondas. Todas las guías son iguales y se encuentran a la misma distancia de sus primeras vecinas.

2.3. Propiedades lineales de una red

Cuando se tienen más guías de ondas en el sistema el análisis es el mismo; tendremos que cada guía tiene su constante de propagación (serán todas iguales mientras las guías sean iguales) y cada par de guías tendrán su acoplamiento, el cual dependerá de la forma de los modos y de la distancia entre las guías. Debido al decaimiento exponencial de los modos fuera de las guías (ver Ecuación 2.14), el acoplamiento también decaerá exponencialmente con la distancia entre guías. Por esta razón es usual aproximar los acoplamientos a cero mientras el par de guías no sean contiguas, a esto se le suele llamar aproximación a primeros vecinos y será utilizada en varias ocasiones a lo largo de esta tesis. En el caso más general, las ecuaciones que describen la dinámica de un arreglo de guías de ondas se pueden escribir como

$$-i \frac{da_{\vec{n}}}{dz} = \sum_{\vec{m}} V_{\vec{n},\vec{m}} a_{\vec{m}}, \quad (2.41)$$

donde $a_{\vec{n}}$ es la amplitud del modo en la guía \vec{n} y $V_{\vec{n},\vec{m}}$ es el acoplamiento entre las guías \vec{n} y \vec{m} . Usamos la notación de vectores en los índices debido a que estamos representando una posición en el plano xy , donde los vectores \vec{n} describen las posiciones de las guías de la red. Por otro lado, notamos que la matriz de acoplamientos $V_{\vec{n},\vec{m}}$ tiene toda la información del sistema, incluidas las constantes de propagación de las guías, las cuales estarán en su diagonal.

En particular, en esta tesis nos centraremos en el estudio de redes fotónicas, es decir arreglos periódicos de guías de ondas ópticas. Para introducir el tema estudiaremos la red más

⁴ La dependencia de V se elimina completamente solo si las constantes de propagación de los modos son las mismas, tal como se puede ver en las Ecuaciones 2.39 y 2.40

básica: la red unidimensional (1D). Consideremos N guías monomodales de ondas alineadas en el eje x equiespaciadas entre ellas como muestra la Figura 2.5. Además, supondremos que el acoplamiento a primeros vecinos correspondiente a estas guías es V . De esta forma, el conjunto de ecuaciones a resolver será

$$-i \frac{da_n}{dz} = V (a_{n-1} + a_{n+1}), \text{ para } n \in \{0, \dots, N-1\}, \quad (2.42)$$

con condiciones de borde fijas, es decir, $a_{-1} = a_N = 0$. Existen varias formas de afrontar un problema lineal discreto; se pueden estudiar sus bandas lineales asumiendo un sistema infinito, se puede trabajar analíticamente, y de manera numérica se puede resolver la dinámica o bien estudiar los autoestados.

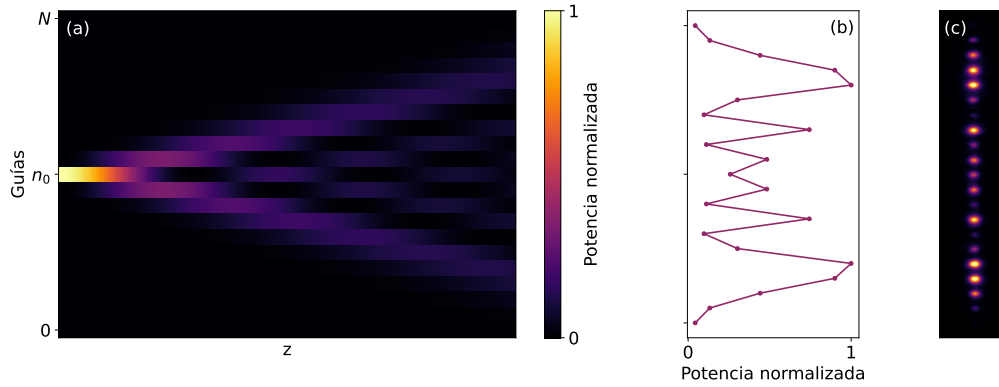


Figura 2.6: Difracción discreta excitando la guía central del arreglo unidimensional. (a) Evolución dinámica a lo largo de la dirección de propagación. (b) Perfil de potencias en $z = 4/V$. (c) Imagen experimental de la cara de salida de un arreglo de largo $z = 4/V$ (Cortesía de Scarlett Plaza P. y Paloma Vildoso P.)

Para una condición inicial excitando solamente una guía, digamos la $n = n_0$, se puede resolver analíticamente el problema [47, 48], obteniendo

$$a_n(z) = i^{n-n_0} J_{n-n_0}(2Vz),$$

donde J_n son las funciones de Bessel de primer orden. Este resultado fue presentado por primera vez por Allan Jones en 1965 y se le conoce como difracción discreta. Un resultado exacto no es habitual en esta área, por lo que muchas veces la manera más simple de estudiar la evolución dinámica es mediante simulaciones numéricas. Para los trabajos presentados en esta tesis se usó un algoritmo de Runge-Kutta de orden 5(4) [49]. La evolución dinámica de la difracción discreta para $N = 21$ se puede ver en la Figura 2.6(a). La principal diferencia con difracciones de la luz en medios continuos es que el haz no se expande homogéneamente si no que lo hace manteniendo la mayor parte de la energía en dos lóbulos exteriores.

Ahora estudiaremos los autoestados del sistema. Comenzamos con los autoestados del sistema infinito, para esto usamos un *ansatz* con un término $\exp(i\lambda z)$ que contendrá toda

la dependencia en la dirección de propagación, mientras que para la dependencia del índice de guías usamos una expresión tipo Bloch [46]. Así, las soluciones que buscamos tendrán la forma

$$a_n(z) = ae^{i(\lambda z + kn)}. \quad (2.43)$$

Reemplazando en la ecuación 2.42 se obtiene la relación de dispersión para la cadena unidimensional, la cual es

$$\lambda(k) = 2V \cos k.$$

En la relación de dispersión se tiene toda la información de los modos normales para la cadena infinita. Para cada k entre 0 y 2π se obtiene la frecuencia λ del modo y luego basta con reemplazar en la Ecuación 2.43 para obtener el perfil de amplitudes y fases del modo.

Cuando la cadena tiene un número finito de sitios los k se discretizarán y, en este caso, el sistema tendrá tantos modos como guías de ondas tenga el sistema. Para este problema también es posible encontrar numéricamente los autoestados del sistema. Para esto notemos que al reemplazar un ansatz de modos normales sin el término de Bloch [$a_n(z) = a_n \exp(i\lambda z)$] se obtiene un sistema de autovalores y autovectores, donde los autovalores serán las frecuencias λ y los autovectores serán los perfiles de los modos normales de la red. Con esto uno puede diagonalizar el sistema de forma numérica.

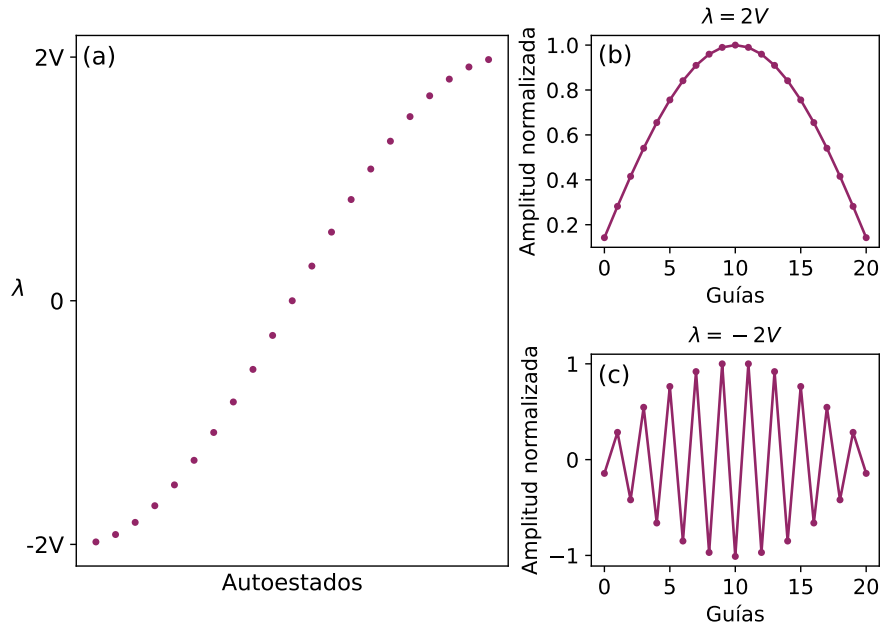


Figura 2.7: (a) Frecuencias de los autoestados de la cadena unidimensional calculados numéricamente. (b) y (c) Perfiles para los modos con $\lambda = \pm 2V$ correspondientes a los modos de los extremos de la banda del sistema. A pesar de que para el cálculo de estos estados no se define un k , estos modos son los correspondientes a los estados con $k = 0$ y $k = \pi$ para la cadena infinita.

A modo de ejemplo graficamos los autovalores obtenidos numéricamente para la cadena unidimensional con $N = 21$ en la Figura 2.7(a). En este caso no tenemos los valores de k , pero si tenemos todos los autovalores y autovectores del sistema finito. En las Figuras 2.7(b)-(c) graficamos los modos con $\lambda = \pm 2V$. En sistemas convencionales los modos serán siempre extendidos como en este caso, sin embargo existen algunos ingredientes que pueden causar estados localizados. Esto puede ocurrir debido a desorden [25], bandas planas [34, 35] o fenómenos topológicos [31, 50].

2.4. Redes con no-linealidad tipo Kerr

En ciertas ocasiones, a causa de usar altas potencias o al considerar algunos materiales especiales, no es suficiente usar la aproximación lineal de la polarización y es necesario considerar órdenes superiores de la susceptibilidad eléctrica.

2.4.1. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta

Un caso particular son los materiales con simetría de inversión, estos pueden ser cristales centrosimétricos o materiales desordenados, tales como gases, líquidos o sólidos amorfos como son los vidrios. En estos casos todos los órdenes pares de la susceptibilidad eléctrica son nulos, por lo que el primer orden no lineal que se considera es el cúbico [39]. De esta forma, en estos casos la polarización puede ser escrita de la siguiente forma

$$\vec{P} = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} + \chi^{(3)} |E|^2 \right) \vec{E}.$$

La consecuencia directa de este tipo de no linealidad es un cambio de índice de refracción del material debido a la sola presencia de una onda electromagnética. La forma que adquiere el índice de refracción es

$$n = n_0 + n_2 I,$$

donde n_0 es el índice de refracción lineal, I es la intensidad de la onda y n_2 una constante proporcional a $\chi^{(3)}$. Este resultado se conoce como efecto Kerr. Al desarrollar un formalismo de teoría acoplada de modos análogo al de la sección 2.2, se puede demostrar que las ecuaciones discretas que describen el sistema son [21]

$$-i \frac{da_{\vec{n}}}{dz} = \sum_{\vec{m}} \left(V_{\vec{m},\vec{n}} a_{\vec{m}} + M_{\vec{m},\vec{n}} |a_{\vec{m}}|^2 a_{\vec{n}} \right) + \gamma |a_{\vec{n}}|^2 a_{\vec{n}}, \quad (2.44)$$

donde M es una matriz de constantes de acoplamiento no lineal y γ la constante de no-linealidad de sitio. Notemos que las diferencias entre las ecuaciones 2.44 y 2.41 son la inclusión de estos dos términos no lineales; el primero representa un acoplamiento no lineal el cual podemos pensar como un acoplamiento que aumenta su magnitud al aumentar la potencia en las guías vecinas, mientras que el segundo término da cuenta de un aumento en la constante de propagación debido a la potencia de una misma guía. Usualmente, en este tipo de sistemas,

el término $\gamma|a_{\vec{n}}|^2 a_{\vec{n}}$ domina la dinámica no lineal [21], por lo que desde ahora fijaremos $M_{\vec{m},\vec{n}} = 0$, con lo cual la Ecuación 2.44 queda

$$-i \frac{da_{\vec{n}}}{dz} = \sum_{\vec{m}} V_{\vec{m},\vec{n}} a_{\vec{m}} + \gamma|a_{\vec{n}}|^2 a_{\vec{n}}. \quad (2.45)$$

Esta ecuación es conocida como ecuación de Schrödinger no lineal discreta (DNLS por sus siglas en inglés).

Con el término de no-linealidad en sitio al tener alta potencia en una guía esta cambia su constante de propagación, produciendo un defecto efectivo el cual origina un estado exponencialmente localizado, conocido como solitón discreto [21, 48].

2.4.2. Propiedades de sistemas no lineales

En sistemas de guías de ondas con no-linealidad cúbica en sitio solo existen dos cantidades conservadas, por esta razón cualquier sistema con más de dos guías ($N > 2$) no será integrable [48]. Estas dos cantidades conservadas son la potencia P y el Hamiltoniano H , las cuales están definidas de la siguiente forma

$$P \equiv \sum_{\vec{n}} |a_{\vec{n}}|^2, \quad (2.46)$$

$$H \equiv - \sum_{\vec{n}} \left[\sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{n},\vec{m}} a_{\vec{m}} a_{\vec{n}}^* + \frac{\gamma|a_{\vec{n}}|^4}{2} \right]. \quad (2.47)$$

Si observamos la Ecuación 2.45 podemos notar que el efecto de la no-linealidad crece tanto con el coeficiente no lineal γ como con la potencia. Es por esta razón que uno siempre puede renormalizar la potencia de manera de fijar $\gamma = \pm 1$ sin perder información del sistema. La elección del signo de γ depende de si el efecto no lineal es enfocante ($\gamma > 0$) o desenfocante ($\gamma < 0$).

2.4.3. Herramientas para el estudio de soluciones no lineales

En la subsección 2.4.1 ya comentamos que en este tipo de sistemas tenemos soluciones del tipo solitones discretos, ahora veremos cómo podemos calcular numéricamente estas soluciones. Como lo que se busca son soluciones estacionarias, comenzamos por usar el mismo *ansatz* del cual ya estamos acostumbrados, $a_{\vec{n}}(z) = u_{\vec{n}} e^{i\lambda z}$. Reemplazando en la ecuación 2.45 se obtiene

$$\lambda u_{\vec{n}} = \sum_{\vec{m}} V_{\vec{m},\vec{n}} u_{\vec{m}} + \gamma|u_{\vec{n}}|^2 u_{\vec{n}}. \quad (2.48)$$

Con esto, podemos implementar un algoritmo para buscar soluciones a las Ecuaciones 2.48. En esta tesis, se uso un método de Powell híbrido modificado [51]. Para este tipo de algoritmos es necesario entregar una semilla cercana a una solución de manera que el algoritmo

converja correctamente a la solución deseada. Para encontrar dicha semilla tomaremos el límite anticontinuo de la Ecuación 2.48, esto significa situarse en el caso $\lambda/V \gg 1$, con esto podemos despreciar el término de acoplamiento y se obtiene

$$\lambda \approx \gamma |u_{\vec{n}}|^2.$$

Por esta razón, podemos escoger un λ grande e introducimos una semilla que tenga todos los sitios con potencia cero, excepto uno o más sitios con potencia λ/γ . El número de sitios con amplitud no nula y la fase que otorgamos a cada uno de ellos depende meramente de la solución que busquemos. Luego, habiendo encontrado una solución a alta potencia, podemos usar esa solución como semilla para buscar otra solución con una frecuencia λ levemente más pequeña. Iterando este proceso podemos construir una familia de soluciones fenomenológicamente similares, pero para distintas potencias y frecuencias.

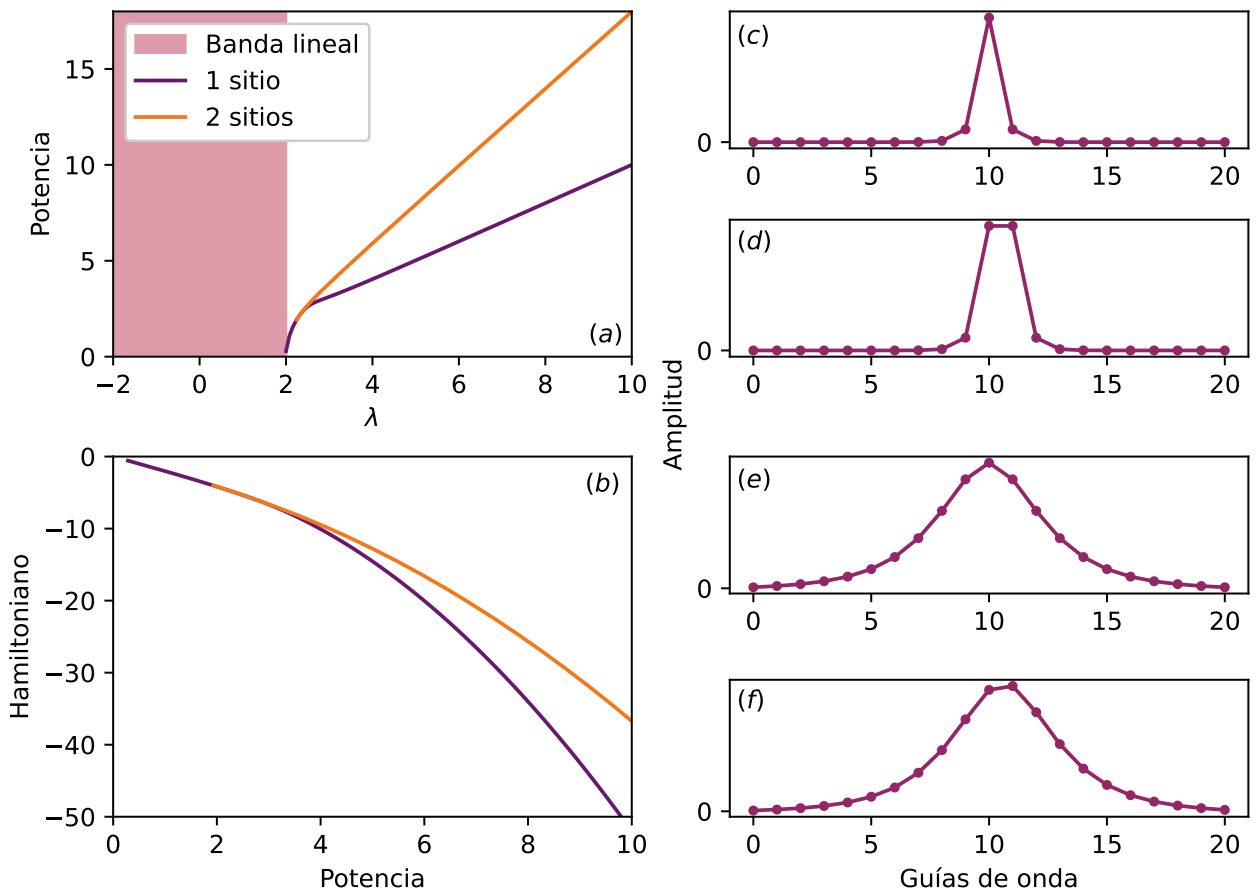


Figura 2.8: (a) y (b) Curvas de potencia vs frecuencia y Hamiltoniano vs potencia, respectivamente, para las familias de solitones discretos centradas en uno y dos sitios. (c) y (d) Perfiles de soluciones no lineales centradas en uno y dos sitios con frecuencia $\lambda = 10$. (e) y (f) Perfiles de soluciones no lineales centradas en uno y dos sitios con frecuencia $\lambda = 2.25$.

Como ejemplo, en la misma red 1D de 21 sitios que usamos en la sección anterior, calculamos dos familias de soluciones exponencialmente localizadas. En este caso usamos $\gamma = 1$ y

calculamos las familias centradas en uno y dos sitios. En las figuras 2.8(a) y 2.8(b) construimos las curvas de Potencia vs frecuencia y Hamiltoniano vs Potencia, respectivamente. De estas figuras podemos notar que la solución centrada en un sitio nace desde el extremo de la banda lineal, mientras que la solución centrada en dos sitios nace de una bifurcación tipo *pitchfork* desde la solución centrada en un sitio en una potencia cercana a 2. En las Figuras 2.8(c)-(f) graficamos distintos perfiles para estas dos familias de soluciones, los cuales corresponden a: (c) solución centrada en un sitio con $\lambda = 10$, (d) solución centrada en dos sitios con $\lambda = 10$, (e) solución centrada en un sitio con $\lambda = 2.25$ y (f) solución centrada en dos sitios con $\lambda = 2.25$. De estas figuras podemos apreciar que a medida que aumenta la frecuencia (y a su vez la potencia), las soluciones están más localizadas, lo cual concuerda con nuestro análisis del límite anticontinuo. Por otro lado, en la Figura 2.8(f) notamos que la solución es levemente asimétrica, esto indica que estamos muy cerca de la bifurcación, de hecho se puede apreciar que la solución está convergiendo a la solución de un sitio, pero centrada en la guía siguiente a la central.

Para ir más allá en la caracterización de las soluciones, definiremos el grado de participación R de la forma

$$R = \frac{P^2}{\sum_{\vec{n}} |a_{\vec{n}}|^4}. \quad (2.49)$$

Esta cantidad es un indicador de cuantos sitios ocupa una solución. Para hacer una idea, si R_0 sitios están excitados con exactamente la misma potencia tendremos $R = R_0$. En el caso de las dos familias de soluciones calculadas en la red 1D, la curva R vs P se grafica en la Figura 2.9(a).

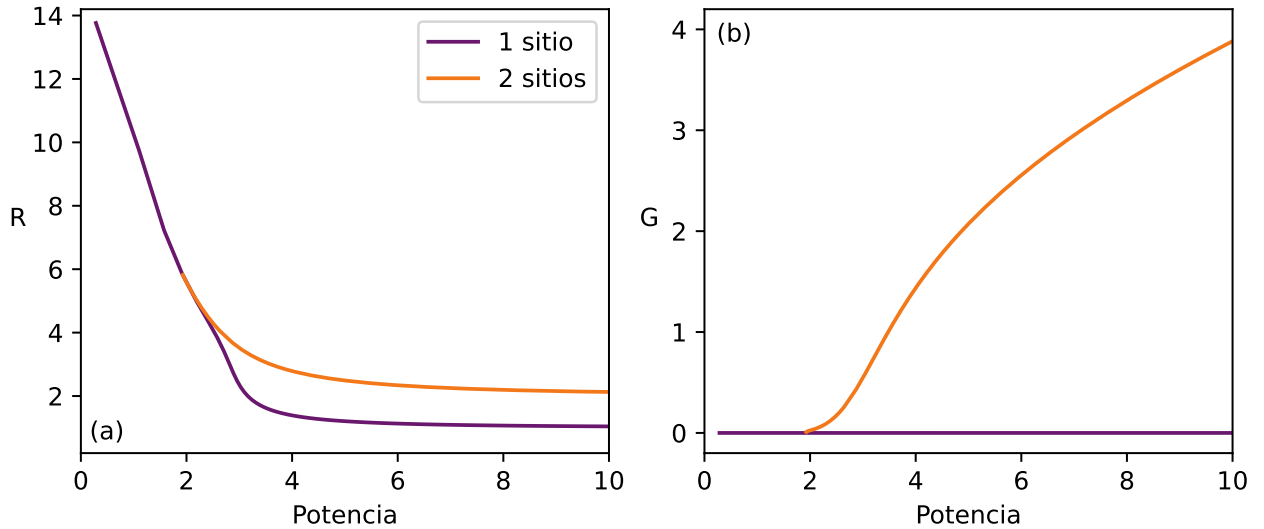


Figura 2.9: (a) Grado de participación vs potencia y (b) Índice de estabilidad vs potencia para las familias de soluciones estacionarias centradas en uno y dos sitios.

Además de la información que ya tenemos sobre las soluciones, es importante estudiar

la estabilidad que estas tienen frente a pequeñas perturbaciones. Para esto, se realiza un análisis de estabilidad lineal sobre cada una de las soluciones. El análisis consiste en lo siguiente: primero se agrega una pequeña perturbación a una solución no lineal dada, luego introducimos esta solución en las ecuaciones 2.45 y eliminamos todos los términos de segundo orden en la perturbación. Las ecuaciones resultantes forman un sistema de autovalores y autovectores el cual indica la tendencia inicial del sistema frente a la perturbación. Si existe algún autovalor con parte real positiva, entonces la solución tenderá a inestabilizarse, por lo tanto, definimos el índice de estabilidad G como la mayor parte real de los autovalores del sistema. Por consiguiente, una solución con $G = 0$ será una solución estable, mientras que si la solución tiene $G > 0$ será inestable. Además, el índice de estabilidad para una solución inestable entrega información sobre qué tan inestable es, una solución con $G > 0$ decaerá aproximadamente en una distancia $z \sim 1/G$. La estabilidad para las soluciones calculadas de la red 1D están en la Figura 2.9(b). Aquí podemos ver que la solución de un sitio es siempre estable, mientras que la solución de dos sitios es inestable siempre. Esto concuerda con la Figura 2.8(b) donde se aprecia que el Hamiltoniano de la solución de dos sitios es siempre mayor.

2.4.4. Método de restricción

Tal como mencionamos antes, los sistemas con no-linealidad tipo Kerr son sistemas donde naturalmente se puede localizar la energía, originando solitones discretos, algo que no es para nada común en sistemas lineales, donde usualmente los modos normales son extendidos. Por otro lado, si esa energía localizada en forma de solitón se pudiese mover de manera controlada y sin pérdidas, estaríamos frente a un fenómeno muy interesante desde el punto de vista de aplicaciones tecnológicas. Usualmente, observar este tipo de comportamientos no es simple, debido a que se debe otorgar momentum a una solución para poder superar el potencial de Peierls-Nabarro, el cual aparece debido a la naturaleza discreta del sistema [52]. En las últimas décadas, diversos trabajos se han realizado buscando este objetivo [37, 53–56].

Una forma de reconstruir numéricamente el potencial de Peierls-Nabarro es mediante el método de restricción [57]. Esto consiste en buscar soluciones no estacionarias centradas entre dos soluciones estacionarias conocidas, y calcular sus Hamiltonianos; de esta forma, podemos construir el potencial en función de la posición de la energía y así se puede saber de qué tamaño es la barrera de potencial que debe superar el solitón para moverse entre las dos soluciones conocidas en un principio. Para explicar en detalle el método usaremos como ejemplo las soluciones centradas en uno y dos sitios calculadas para la cadena unidimensional. Comenzaremos por definir el centro de masa, el cual nos indica la posición en torno a la cual está centrada la energía para un perfil dado.

$$\langle X \rangle = \frac{1}{P} \sum_{\vec{n}} (\vec{n} \cdot \hat{x}) |a_{\vec{n}}|^2. \quad (2.50)$$

En este caso nos interesa solo la componente x del centro de masa, debido a que estamos en un arreglo unidimensional. De la Ecuación 2.50, podemos despejar la amplitud para la guía

\vec{m}

$$a_{\vec{m}} = \pm \sqrt{\frac{P \langle X \rangle - \sum_{\vec{n} \neq \vec{m}} (\vec{n} \cdot \hat{x}) |a_{\vec{n}}|^2}{\vec{m} \cdot \hat{x}}}. \quad (2.51)$$

Para obtener esta última ecuación se usó que $a_{\vec{m}} \in \mathbb{R}^5$. Para elegir el signo de la raíz en la Ecuación 2.51, debemos tener en cuenta la estructura de fase de la solución que estamos buscando. En este caso, como las dos soluciones con que trabajaremos tienen todos los sitios en fase, debemos elegir la raíz positiva.

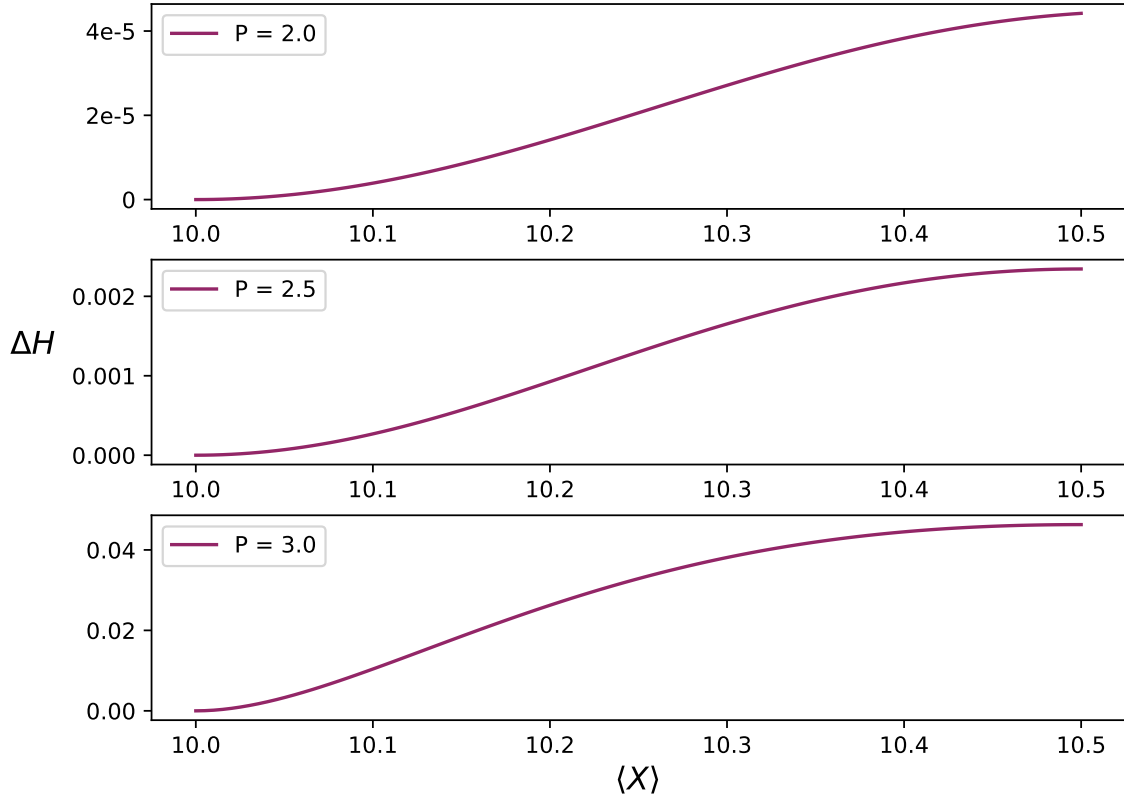


Figura 2.10: Diferencia de Hamiltoniano en función del centro de masa para tres potencias distintas. El Hamiltoniano de referencia usado es el correspondiente a la solución centrada en un sitio con la potencia correspondiente en cada caso.

Lo siguiente es buscar una solución a la Ecuación 2.48 tal como lo hacíamos en la subsección anterior, pero esta vez impondremos una restricción para el centro de masa y fijaremos la amplitud del sitio \vec{m} a través de la Ecuación 2.51. Como no conocemos las frecuencias de las soluciones que buscamos, ya no fijaremos λ , así tendremos N incógnitas ($N - 1$ amplitudes y λ) pero por ahora tenemos solo $N - 1$ ecuaciones en el Sistema 2.48 debido a que la ecuación para la amplitud $a_{\vec{m}}$ no es linealmente independiente. La última ecuación por resolver será la definición de potencia (Ecuación 2.46), la cual puede ser reescrita de la siguiente forma

⁵ Esto no necesariamente es cierto siempre, sin embargo nos centraremos en buscar soluciones que cumplan esta condición. Un ejemplo en que no se cumple esta condición son las soluciones tipo vórtice [58].

$$P - \sum_{\vec{n} \neq \vec{m}} |a_{\vec{n}}|^2 - \frac{P \langle X \rangle - \sum_{\vec{n} \neq \vec{m}} (\vec{n} \cdot \hat{x}) |a_{\vec{n}}|^2}{\vec{m} \cdot \hat{x}} = 0.$$

Con esto tendremos N ecuaciones y N incógnitas con lo que podemos resolver el sistema y encontrar las soluciones. El sitio \vec{m} debe ser elegido acorde al problema y no siempre existe una única opción. En nuestro caso, como buscaremos comenzar desde la solución de un sitio y avanzaremos hacia la de dos sitios, el sitio \vec{m} será el sitio siguiente al centro, es decir el sitio número 11. La primera semilla que usaremos será la solución centrada en un sitio y buscaremos soluciones con centros de masa entre $\langle X \rangle_{1 \text{ sitio}} = 10$ y $\langle X \rangle_{2 \text{ sitios}} = 10.5$. Es importante mencionar que este método sirve para una potencia dada, por lo que se puede repetir usando distintas potencias y así construir el potencial en función de la posición y la potencia. En la Figura 2.10 se muestra el potencial construido entre las dos soluciones calculadas de la cadena 1D para las potencias $P = 2$, $P = 2.5$ y $P = 3$; por simplicidad se ha graficado la diferencia de Hamiltoniano con respecto al Hamiltoniano de la solución centrada en un sitio para cada potencia. De estos resultados podemos ver que a medida que aumenta la potencia la barrera de potencial crece, algo que también se puede apreciar en la Figura 2.8(b).

Capítulo 3

Métodos experimentales

En este capítulo presentaremos las principales técnicas implementadas para realizar el trabajo experimental del Capítulo 4. Este capítulo está dividido en dos secciones, la primera dedicada a la fabricación de las redes de guías de ondas, mientras que la segunda explica el proceso de excitación y medición de la dinámica de los arreglos.

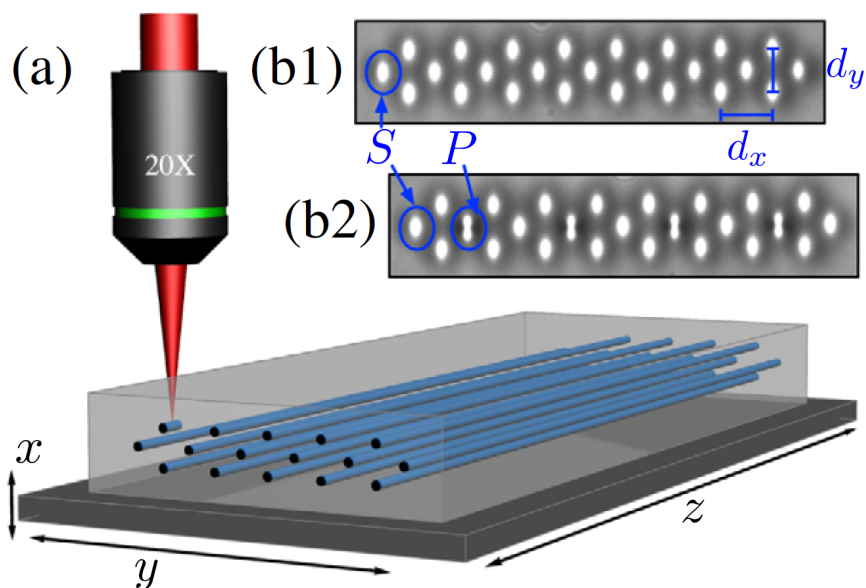


Figura 3.1: Fabricación mediante técnica de láser de femtosegundos. (a) Esquema de escritura enfocando el láser, mediante un objetivo 20 \times , dentro de una muestra de borosilicato. La muestra se encuentra en una estación motorizada que permite desplazamientos tridimensionales. (b1,b2) Sección transversal de guías de ondas iluminadas con luz blanca.

3.1. Fabricación de redes con láser de femtosegundos

A fines del siglo pasado, se descubrió que se podía usar un haz enfocado proveniente de un láser con pulsos ultra cortos (del orden de centenas de femtosegundos) para modificar localmente el índice de refracción dentro de distintos tipos de vidrios [26]. Debido a la alta densidad de energía en la región focal, se produce absorción de múltiples fotones, lo cual

genera un cambio en la estructura interna del material bajo condiciones metaestables [59]. A partir de este fenómeno, si uno traslada la muestra de vidrio mientras es expuesta a la luz enfocada, uno puede crear una guía de ondas con un recorrido arbitrario (ver Figura 3.1(a)). De esta forma, motivados por la posibilidad de fabricar guías de ondas, esta técnica se depuró rápidamente causando que en el transcurso de menos de una década ya se había logrado encontrar condiciones óptimas para la fabricación de guías de ondas en sílice fundida y borosilicato [27, 28, 59]. Naturalmente, con esta técnica la región donde el índice de refracción cambia es de forma elíptica [28, 45], por lo que la forma de los modos de cada guía también tendrán un grado de anisotropía. Por esta razón, recordando el origen del acoplamiento entre guías (ver Subsección 2.2.2), el acoplamiento entre guías en la dirección del eje mayor de la elipse será más grande que en la dirección del eje menor (para una misma distancia).

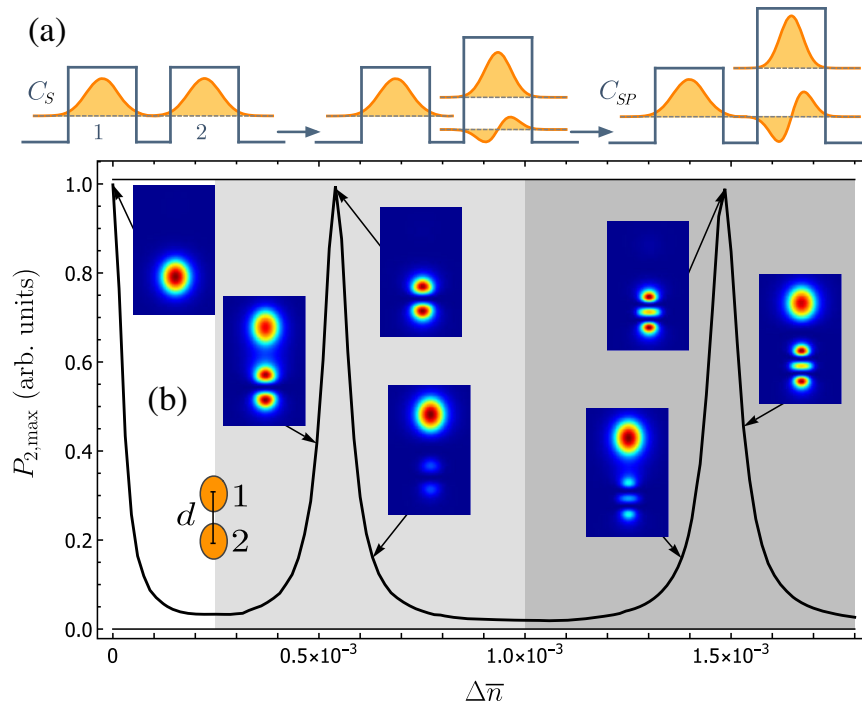


Figura 3.2: Acoplamiento interorbital. (a) Esquema de sintonización de un modo fundamental con un primer modo superior. (b) Máximo de potencia en la guía 2 en función de la diferencia de índice de refracción entre las guías 1 y 2. Datos obtenidos mediante un método de propagación de haces (BPM) de un sistema de dos guías, excitando inicialmente la guía 1 [32].

La magnitud del cambio de índice de refracción Δn puede ser controlado tanto a través de la potencia del láser de escritura, como de la velocidad de traslación de la muestra [27, 32, 59]. Usualmente, el máximo cambio de índice de refracción es del orden de $10^{-4} - 10^{-3}$ [27, 28], lo cual confirma las aproximaciones usadas en la Sección 2.1. Por otro lado, como vimos en la Subsección 2.1.3, al aumentar el contraste (Δn) de una guía de ondas, la constante de propagación de los modos aumentará, al mismo tiempo que aparecerán nuevos modos superiores. Recientemente, ha sido demostrado que ajustando cuidadosamente la potencia de escritura es posible sintonizar las constantes de propagación de dos modos distintos en

dos guías distintas [32], de manera de hacer posible la interacción entre distintos orbitales. Un esquema de la sintonización de constantes de propagación se encuentra en la Figura 3.2(a). Adicionalmente, en la Figura 3.2(b) se grafica la intensidad en una guía con índice de refracción variable (guía 2) al ser acoplada con una guía con índice de refracción fijo (guía 1), en esta simulación se muestra como dependiendo del índice de refracción de la guía 2, se pueden sintonizar sus distintos modos. Este fenómeno será clave para implementación experimental del modelo estudiado en el Capítulo 4, donde se fabricaron guías monomodales y bimodales, sintonizando el modo fundamental (S) de las primeras con el primer modo superior (P) de las segundas.

En nuestro experimento, para el proceso de fabricación de las muestras utilizadas para el trabajo descrito en el Capítulo 4, se implementó la técnica de escritura por láser de femtosegundos recién descrita, mediante un láser MenloSystems BlueCut de 1030 nm, usando pulsos de ~ 240 fs con una tasa de repetición de 500 kHz, polarizados circularmente y enfocados mediante un objetivo $20\times$ en una oblea de borosilicato de $50\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 1\text{ mm}$. El sustrato es trasladado continuamente a una velocidad de 0.4 mm/s mediante una estación Aerotech motorizada XYZ de alta precisión. Se utilizó una potencia de $\sim 82\text{ mW}$ para escribir las guías monomodales y $\sim 104\text{ mW}$ para las bimodales.

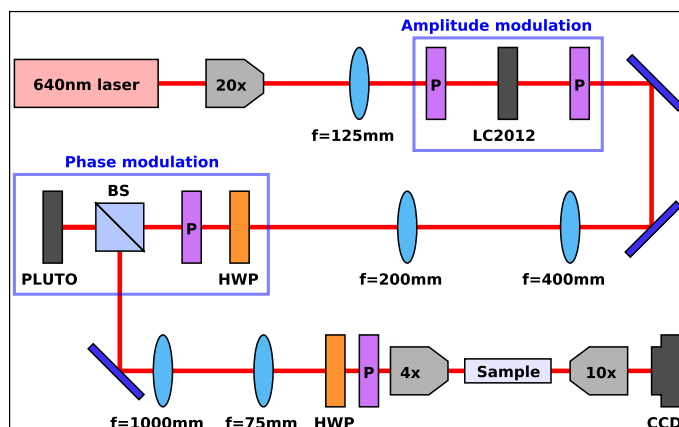


Figura 3.3: Montaje de imágenes basado en dos moduladores espaciales de luz para generar una condición inicial arbitraria. P corresponde a un polarizador lineal, HWP a un polarizador $\lambda/2$ y BS a un divisor de haces.

3.2. Excitación de guías de ondas

Para el estudio experimental de las propiedades dinámicas de un arreglo es necesario excitar los modos de las guías que lo componen. La excitación de guías de ondas es realizada usualmente configurando un experimento simple que consiste en excitar el modo fundamental de una guía al enfocar, mediante un objetivo de microscopio o una lente, un haz gaussiano proveniente de un láser. Sin embargo, existen ocasiones en que se necesita excitar una red con

una condición inicial más compleja, ya sea porque se quiere excitar un modo superior de una guía [33, 60], o bien por excitar más de una guía con una estructura de fase dada [34]. Para lograr este tipo de condiciones iniciales, configuramos un montaje de imágenes el cual está descrito en la Figura 3.3. El circuito óptico consiste en los siguientes componentes. Primero, expandimos y colimamos un láser rojo de 640 nm usando un objetivo de microscopio (MO) 20× y una lente con distancia focal $f = 125$ mm. Luego, el haz es modulado en amplitud por un modulador espacial de luz (SLM) Holoeye LC2012 de transmisión. Este elemento óptico permite imprimir sobre el perfil del haz una imagen arbitraria, por lo que el haz expandido y colimado se transforma en uno o más lóbulos en las posiciones de las guías que se deseen excitar. Dos ejemplos de haces modulados en amplitud pueden ser vistos en las Figuras 3.4(a) y (b). Una vez conseguida la modulación en amplitud es necesario agregar la estructura de fase, esto se realiza a través de otro SLM, en este caso un Holoeye PLUTO de reflexión. En la Figura 3.4(c) se muestra un interferómetro mostrando la fase otorgada a la condición inicial. Una vez lista la imagen modulada en amplitud y fase, es transferida ópticamente a la cara de entrada de la muestra (chip fotónico) a través de un telescopio kepleriano y un MO 4×. Finalmente, las imágenes de la cara de salida de la muestra son registradas con un MO 10× y una cámara CCD.

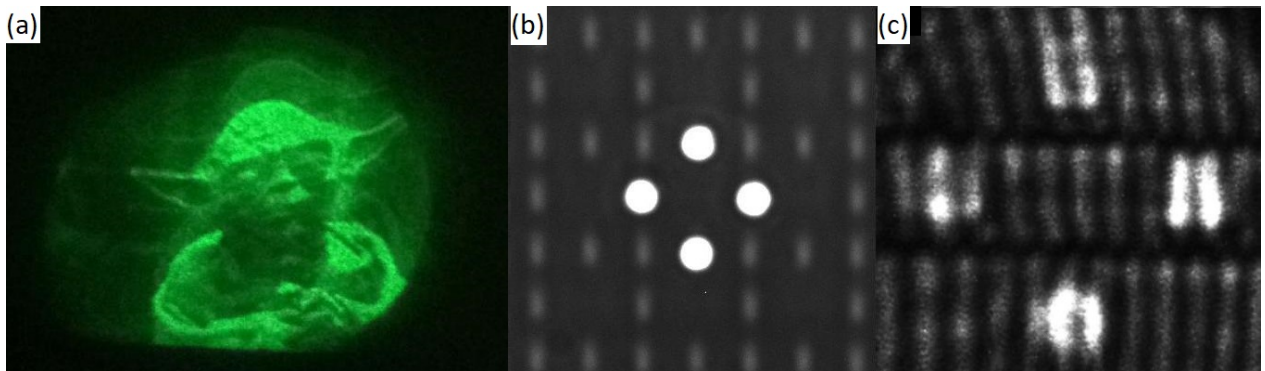


Figura 3.4: Haces modulados mediante SLMs. (a) Maestro Yoda modulado en amplitud en el perfil de un haz de 532 nm. (b) Imagen formada en la cara de entrada de una red de Lieb excitando cuatro sitios. (c) Imagen de interferometría mostrando un desfase π entre los lóbulos alineados horizontalmente y los orientados verticalmente.

Capítulo 4

Transporte controlado basado en enjaulamiento de Aharonov-Bohm multiorbital fotónico

4.1. Introducción

Al introducir un flujo magnético en una red atómica, se obtiene una fase extra en el *hopping* o acoplamiento, correspondiente a la sustitución de Peierls. Para valores muy específicos de este flujo, se puede observar un fenómeno de extrema localización llamado *enjaulamiento de Aharonov-Bohm* (AB) [61–63]. En este caso, todos los autoestados se vuelven degenerados y forman un conjunto de bandas planas [16]. Por lo tanto, cualquier excitación de la red se puede descomponer en modos compactos de banda plana, de forma que el transporte es abruptamente reducido a unas pocas celdas unitarias y así la energía es enjaulada. El conjunto de sitios de la red donde una excitación inicial tipo δ queda atrapada se denomina *jaula*. En general al introducir un flujo magnético en una red, el fenómeno resultante será uno de los siguientes [62]:

- Para cualquier flujo magnético la energía no está enjaulada.
- Para algunos flujos magnéticos específicos la energía queda enjaulada al excitar ciertos sitios de la red.
- Para algunos flujos magnéticos específicos todas las excitaciones son enjauladas.

Para poder determinar *a priori* si una geometría específica cumple las condiciones para soportar enjaulamiento AB, no existe una única receta. Una opción es usar el método de sustitución de Peierls para calcular la fase adquirida en cada acoplamiento y luego estudiar el sistema a través de ondas de Bloch. Sin embargo, ya que el enjaulamiento de AB es un fenómeno local, es posible estudiarlo sin la necesidad de considerar un sistema periódico e infinito. Mediante el cálculo recursivo de densidad de estados local (LDOS por sus siglas en inglés) [62, 64], es posible mapear un cluster centrado en un sitio a una cadena 1D donde

cada sitio corresponde a un orden de vecinos. Así, el primer sitio de la cadena será el centro del cluster, el segundo corresponderá a todos los primeros vecinos del centro del cluster y así en adelante. De esta forma, con este método se puede estudiar la evolución de una condición inicial localizada en un sitio y predecir si esta excitación se mantendrá enjaulada. Este método es particularmente útil si se desea estudiar la dinámica de redes con defectos, distintos tipos de condiciones de borde e incluso cuasicristales.

A pesar de que el uso de flujos magnéticos fue inicialmente planeado para redes electrónicas, es posible extrapolar su efecto para redes no electrónicas mediante el uso de campos de *gauge* artificiales [65]. Esto abre la posibilidad de estudiar el efecto AB en otros sistemas físicos [66–72] e incluso ha permitido observarlo experimentalmente [73, 74]. Muy recientemente, se han implementado flujos magnéticos sintéticos en contextos fotónicos al aplicar una desintonización y modulación de guías de ondas curvadas [75], al aplicar guías de ondas auxiliares para generar un acoplamiento negativo efectivo [76], o mediante la excitación de haces especiales cargados de momentum angular orbital [77].

En este trabajo se propone una nueva forma de implementar un flujo magnético efectivo en redes fotónicas a través del uso de un acoplamiento interorbital [32] en una red de diamante [66]. Al considerar la interacción efectiva entre un modo fundamental (S) y uno de segundo orden (P), se pueden conseguir acoplamientos positivos o negativos dependiendo de la orientación de las guías. Esto nos permite inducir un flujo magnético efectivo $\phi = \pi$ por cada plaqueta (ciclo cerrado en la red), permitiendo la observación directa del enjaulamiento de Aharonov-Bohm. Usando la técnica de escritura mediante láser de femtosegundos (ver Sección 3.1) fabricamos una red fotónica multiorbital consistente de guías de ondas rectas las cuales soportan uno o dos modos. Con estas redes logramos observar de forma clara el enjaulamiento AB para los modos S y P. Además de esto, proponemos y demostramos experimentalmente un nuevo mecanismo para transporte direccional de excitaciones lineales localizadas. Con esto conseguimos un manejo perfecto de energía altamente localizada a través de la red. Todos los resultados incluidos en este trabajo se encuentran publicados en la Referencia [78].

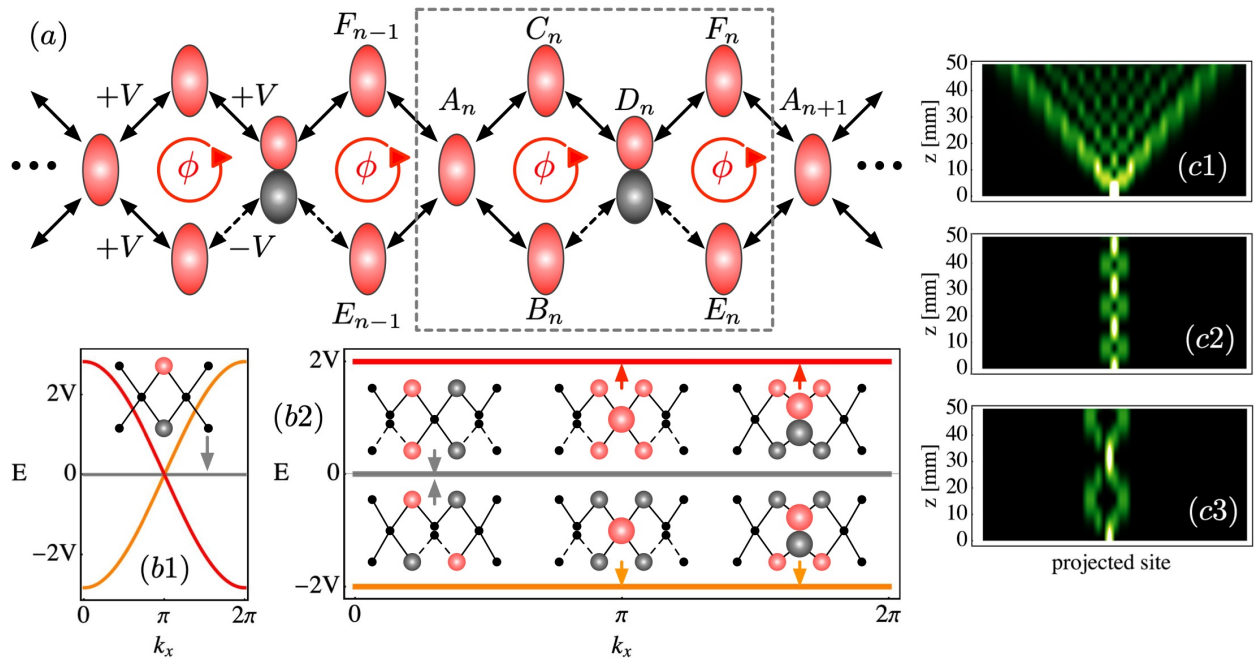


Figura 4.1: (a) Esquema de una red diamante multiorbital formada por sitios S y P. Flechas continuas (punteadas) indican una constante de acoplamiento positiva (negativa). El flujo magnético efectivo inducido por plaqueta se denota como ϕ . El rectángulo de líneas discontinuas define la celda unitaria compuesta por seis sitios de la red. (b1),(b2) Espectro para $\phi = 0$ y $\phi = \pi$ respectivamente. Los perfiles asociados a los modos de banda plana se muestran en los encuadres. (c) Evolución de intensidad para diferentes condiciones iniciales con un acoplamiento de $V = 0.1 \text{ mm}^{-1}$; (c1) sitio central para $\phi = 0$; (c2) sitio central para $\phi = \pi$; (c3) sitio superior o inferior para $\phi = \pi$

4.2. Modelo y propiedades lineales

Nuestro modelo consiste en una cadena tipo diamante multiorbital, la cual incluye sitios que soportan modos S solamente y sitios que también soportan modos P, tal como muestra la Figura 4.1(a). Como el modelo matemático es equivalente al de la evolución de partículas cuánticas en una red de *tight-binding*, usamos la nomenclatura de los orbitales S y P del átomo de hidrógeno. Recientemente se ha demostrado (ver Sección 3.1 y Referencia [32]) que se puede obtener una interacción efectiva entre diferentes orbitales con un proceso de sintonización, de manera de igualar sus constantes de propagación (o energías en el caso atómico). Al realizar este proceso, el modo fundamental de los sitios P ya no se encuentra en resonancia con los sitios S, por lo que simplemente no interactúan y así solo es necesario considerar en el modelo un orbital por sitio. La celda unitaria de esta red consiste en seis sitios, tal como muestra el rectángulo de líneas discontinuas en la Figura 4.1(a). La interacción entre primeros vecinos está determinada por la constante de acoplamiento $\pm V$, la cual depende de la orientación espacial de las guías de ondas y sus respectivos modos. Hemos esquematizado la parte positiva de las funciones de onda usando color rojo, mientras que con gris la parte

negativa. Para cualquier distancia, el acoplamiento horizontal entre guías S y P, en la fila central, es nulo. Esto se debe a que la estructura de fase π del modo P provoca que el acoplamiento que produce un lóbulo del modo P se anule con su contrario (para recordar el cálculo de acoplamientos ver Sección 2.2). De hecho, es por esta misma razón que el modo P también hace posible obtener constantes de acoplamiento positivas y negativas en una red dada e inducir nuevos fenómenos sin la necesidad de implementar configuraciones más complejas como las usadas en las referencias [75–77]. Para ahondar en como un modo P puede acoplarse con constantes de propagación de distintos signos en un mismo sistema, se recomienda revisar las referencias [32, 79], las cuales incluyen sistemas multiorbitales simples.

Un único acoplamiento negativo en una plaqueta induce, efectivamente, un flujo magnético sintético $\phi = \pm\pi$ [66], el cual es el principal requisito para observar el enjaulamiento AB. En este trabajo usamos un enfoque *tight-binding* para describir el sistema, de esta forma, las ecuaciones acopladas que dirigen la dinámica son

$$\begin{aligned}
-i\frac{da_n}{dz} &= V(b_n + c_n + e_{n-1} + f_{n-1}), \\
-i\frac{db_n}{dz} &= V(a_n - d_n), \\
-i\frac{dc_n}{dz} &= V(a_n + d_n), \\
-i\frac{dd_n}{dz} &= V(-b_n + c_n - e_n + f_n), \\
-i\frac{de_n}{dz} &= V(a_{n+1} - d_n), \\
-i\frac{df_n}{dz} &= V(a_{n+1} + d_n).
\end{aligned}$$

Aquí, a_n, b_n, c_n, d_n, e_n y f_n son las amplitudes en cada uno de los sitios, z la dirección de propagación y $\pm V$ el valor del acoplamiento a primeros vecinos. Para comenzar, buscamos la relación de dispersión asumiendo un *ansatz* tipo Bloch como el de la Ecuación 2.43. Notamos que, para una red homogénea, compuesta solamente por guías S, el flujo efectivo es simplemente $\phi = 0$, la celda unitaria se reduce a solo tres sitios y por ende el espectro lineal contiene solo tres bandas [66]: $\lambda = 0, \pm 2\sqrt{2} \cos(k_x/2)$. Graficamos este espectro en la Figura 4.1(b1), donde observamos una única banda plana con estados localizados compactos [16, 80], cuya forma se muestra en el encuadre. La localización de banda plana se consigue típicamente mediante la interferencia destructiva del acoplamiento a sitios conectores específicos [16, 81], el cual, en este caso, corresponde a los sitios de la fila central. Por este motivo, la excitación de sitios centrales no resuena con los estados de banda plana y excita solamente bandas dispersivas, tal como muestra la simulación numérica en la Figura 4.1(c1).

Por otro lado, una red multiorbital como la mostrada en la Figura 4.1(a) induce un flujo efectivo $\phi = \pi$ en una plaqueta cerrada. Este pequeño cambio en los coeficientes de acoplamiento produce un cambio fundamental en las propiedades lineales: todos los modos de la red se vuelven compactos y completamente localizados. El flujo magnético sintético

cancela la dispersión de la red, dejando sin posibilidad de existir modos extendidos en el sistema. Con este cambio, la relación de dispersión tiene seis bandas con solo tres autovalores diferentes (cada banda teniendo degeneración de orden 2):

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_+ = 2V, \quad \lambda_- = -2V.$$

Este espectro plano es mostrado en la Figura 4.1(b2), incluyendo los perfiles de los seis modos compactos mostrados en el encuadre de la figura. Notamos de inmediato que cualquier excitación de un sitio en la red resonará con una cantidad reducida de modos de banda plana. El enjaulamiento de AB es entendido usualmente [75–77] como una oscilación simétrica de energía en una pequeña región de la red, como una consecuencia de excitar un par de estados de banda plana correspondientes a dos constantes de propagación distintas. Al introducir luz en los sitios S o P en la columna central, solo dos bandas planas serán excitadas con frecuencias $\pm 2V$, por lo que se tendrá un periodo de enjaulamiento de $z_c = \pi/2V$. Simulamos este escenario en la Figura 4.1(c2), donde un sitio de la fila central (S o P) es excitado. Observamos como la energía es atrapada, yendo y viniendo, oscilando en torno a la posición inicial, es decir, la energía es enjaulada. Una interferencia destructiva perfecta ocurre en los sitios centrales siguientes y no hay amplitud transmitida al resto de la red. Como consecuencia, la energía retorna a la posición de la condición inicial, y el ciclo comienza otra vez. La Figura 4.1(c3) muestra como, de manera similar, al inyectar luz en los sitios S de la fila superior o inferior, resulta en una dinámica periódica debido a la excitación, en este caso, de tres bandas planas.

4.3. Resultados experimentales

Fabricamos un set de redes fotónicas mediante la técnica de escritura de láser de femtosegundos [28]. La descripción detallada de esta técnica, incluyendo los parámetros de fabricación para estas redes, se encuentran en la Sección 3.1. Para las pruebas experimentales usamos un montaje de imágenes [34], el cual está descrito en la Sección 3.2. Comenzamos por fabricar una red diamante homogénea (solo compuesta por sitios S), como se muestra en la Figura 4.2(b1), con distancias nominales $\{d_x, d_y\} = \{36.00, 29.72\} \mu\text{m}$. Al excitar una guía S en la fila central, observamos un perfil espacial mostrando un alto nivel de difracción, este perfil se muestra en la Figura 4.2(d). Notamos que la energía se esparce cubriendo prácticamente toda la red, como un resultado de excitar solo la parte dispersiva de la relación de dispersión. Luego, aumentamos la potencia de escritura a 104 mW para las guías P, las cuales están situadas en la fila central, como muestra la Figura 4.2(b2). Las potencias de escritura se escogen de manera de conseguir el máximo acoplamiento (sintonización) entre las guías S y P [32], tal como se explicó en la Sección 3.1. Con las redes multiorbitales implementamos un método llamado *z-scan* para caracterizar la dinámica a lo largo de la dirección de propagación. En este caso, el método consiste en fabricar doce redes multiorbitales, donde todas las guías (S y P) de la fila central tienen un largo completo $L = 50$ mm, mientras que el resto de las guías en las filas superior e inferior tienen una longitud de propagación z_l igual o más corta, específicamente de 6 a 50 mm, en pasos de 4 mm, tal como se muestra en la Figura 4.2(c).

De esta forma, al excitar un sitio S o P en la fila central, podemos rastrear la dinámica para distintas distancias de propagación.

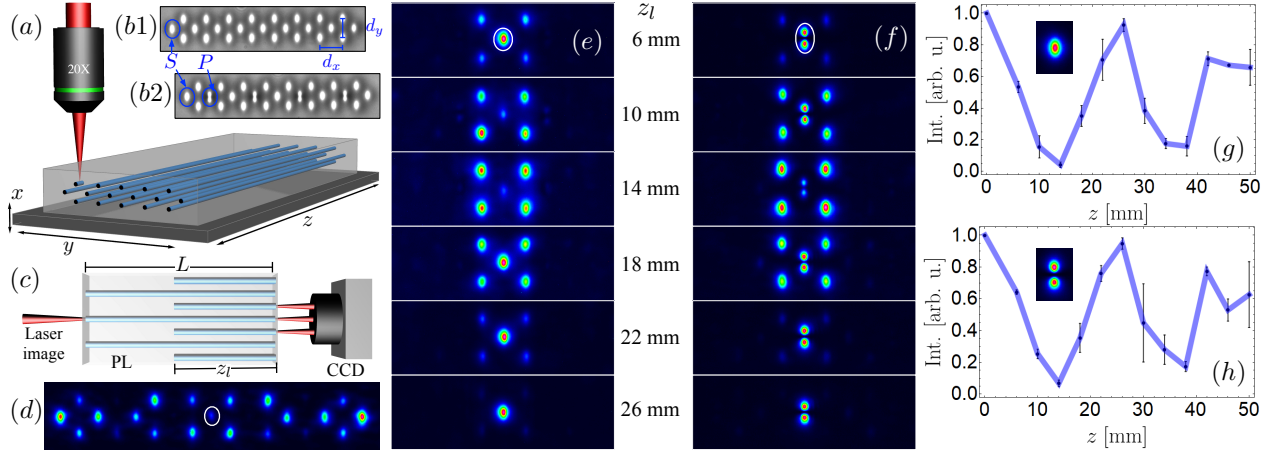


Figura 4.2: (a) Técnica de escritura mediante método de láser de femto-segundos. (b1),(b2) Imágenes capturadas mediante microscopía óptica con luz blanca de redes diamante homogénea y multiorbital respectivamente. (c) Vista superior de la excitación y detección de una red mostrando el concepto de z -scan. (d) Imagen de intensidad de salida en $z = L$ para $\phi = 0$. (e),(f) Imagen de intensidad de salida en $z = z_l$ con $\phi = \pi$, para las excitaciones de un modo S y un modo P, respectivamente. Un círculo muestra la posición de la excitación inicial en (d)-(f). (g),(h) Promedio de intensidad en la guía inicial en función del largo de propagación z_l , para las excitaciones de un modo S y un modo P, respectivamente. Las barras de error corresponden a la desviación estándar.

4.3.1. Enjaulamiento de Aharonov-Bohm

Para poner a prueba las redes multiorbitales, comenzamos por excitar un sitio central S y observamos de forma bastante clara el enjaulamiento del modo S en la Figura 4.2(e), para las distancias indicadas en la columna central. En este caso, observamos que la luz es capaz de acoplarse a los primeros vecinos en las filas superior e inferior, pero no puede propagarse más allá a través de la red debido a la interferencia destructiva en los siguientes sitios centrales. Medimos la intensidad de salida en el sitio inicial para diferentes valores de z_l y graficamos estos datos en la Figura 4.2(g), donde promediamos los datos para los tres sitios centrales S que tienen nuestros arreglos. En este caso la luz oscila dos veces para los 50 mm de largo, con un periodo de enjaulamiento $z_c \approx 26$ mm, lo cual implica que se tiene un acoplamiento de $V \approx 0.06$ mm⁻¹. Las simulaciones numéricas presentes en la Figura 4.2(c2) describen la oscilación tanto para los modos S como los P. Por esta razón, deberíamos observar un fenómeno de enjaulamiento similar también al usar un modo P como condición inicial, el cual consiste en dos lóbulos con una diferencia de fase π . El perfil de salida obtenido luego de excitar la red con un segundo modo en una guía central P se muestra en la Figura 4.2(f). En estas imágenes observamos de forma correcta y clara el enjaulamiento de AB para un modo P. La luz trata de escapar del sitio inicial y se acopla a sus primeros vecinos S, pero

desde antes ya tiene una diferencia de fase debido a la paridad del modo P. Esto genera la imposibilidad para la luz de continuar escapando, debido a la interferencia destructiva que ocurre al intentar acoplarse al siguiente sitio S central. De esta forma, podemos afirmar que se crea una barrera efectiva debido al flujo magnético sintético inducido y que la luz es reflejada de vuelta hacia la posición inicial, luego, el ciclo comienza otra vez. En la Figura 4.2(h), observamos dos ciclos de oscilación en 50 mm y un periodo de enjaulamiento similar para la excitación del segundo modo (promediamos los datos considerando cuatro sitios centrales P). En ambos casos, observamos que más del 90 % de la energía es enjaulada en el primer ciclo. Como son necesarias condiciones perfectas de sintonización de los modos y de simetrías de los acoplamientos, al mismo tiempo que son muy difíciles de conseguir experimentalmente, esperamos tener cierta dispersión al aumentar la longitud de propagación. Una vez que la interferencia destructiva no está perfectamente balanceada, debido a cualquier mecanismo de quiebre de simetría, una parte de la energía será radiada a través de la red. A pesar de esto, observamos en las Figuras 4.2(e)-(h) que la mayoría de la energía es confinada de muy buena manera en una región espacial estrecha, por lo que el enjaulamiento multiorbital es demostrado claramente [75–77].

4.3.2. Control de la dirección de transporte

Notamos que, en un arreglo homogéneo, el transporte es distribuido uniformemente en dos direcciones [ver Figura 4.2(d)], mientras que al usar una máscara multiorbital, un desplazamiento unidireccional puede ser observado, permitiendo decidir si la luz se propaga hacia la izquierda o hacia la derecha en el sistema. Para demostrar esto, fabricamos una red multiorbital más pequeña, la cual llamaremos *máscara óptica*, la cual está esquematizada en la Figura 4.3(a). Nuevamente, implementamos un método *z-scan* fabricando seis arreglos, donde los sitios S de las filas superior e inferior en la columna central tienen la longitud de propagación completa L , mientras que el resto de las guías tienen una distancia de propagación más corta z_l , la cual va de 4 a 24 mm en pasos de 4 mm. El experimento consiste en excitar simultáneamente dos sitios S de largo completo mediante el montaje de imágenes descrito en la Sección 3.2. Una excitación en fase (++) [mostrada a la izquierda en el panel de la Figura 4.3(a)] produce una cancelación de amplitudes perfecta en el sitio central P a la derecha y por lo tanto no permite el transporte de energía hacia la derecha de la máscara. En contraste, la luz se propagará hacia la izquierda, ya que el primer acoplamiento ocurre solo con la guía central S, la cual luego se acopla con los siguientes sitios S superior e inferior (hacia la izquierda). Con esto, se consigue una traslación completa y perfecta, de forma controlada y precisa, transportando la energía de una celda unitaria a otra. En este caso, la energía no puede seguir moviéndose hacia la siguiente guía P: la luz encuentra un muro debido a la interferencia, por lo que es reflejada de vuelta hacia la posición inicial, en una dinámica similar al enjaulamiento descrito previamente. Las imágenes experimentales de intensidad obtenidas en este experimento son presentadas en la Figura 4.3(b1), donde podemos observar como el sistema no permite la propagación de la luz hacia la derecha y solo puede moverse hacia la izquierda. De hecho, nuestro experimento muestra claramente como la condición inicial ha

sido trasladada precisamente hacia la izquierda en una distancia $z_l \approx 24$ mm. Desde luego, esta condición inicial también excita un transporte tipo enjaulamiento debido a la composición de solo bandas planas en el espectro, por lo que la energía oscila en una región bien definida: para una propagación más larga, la energía volverá y replicará la condición inicial en fase. Por otro lado, la condición inicial fuera de fase ($+-$), mostrada en el panel derecho de la Figura 4.3(a), mostrará la dinámica opuesta. La interferencia destructiva cancelará la amplitud en el sitio central S a la izquierda, por lo que no habrá flujo de energía en esa dirección. Sin embargo, la diferencia de fase π cancelará el efecto del acoplamiento negativo y la energía fluirá a través del sitio central P mientras mantiene la diferencia de fase inicial. Por esta misma diferencia de fase, al intentar acoplarse al sitio central S a la derecha, la interferencia destructiva provocará que la amplitud sea simplemente cero en este sitio. Las imágenes experimentales mostrando el caso fuera de fase son presentadas en la Figura 4.3(b2).

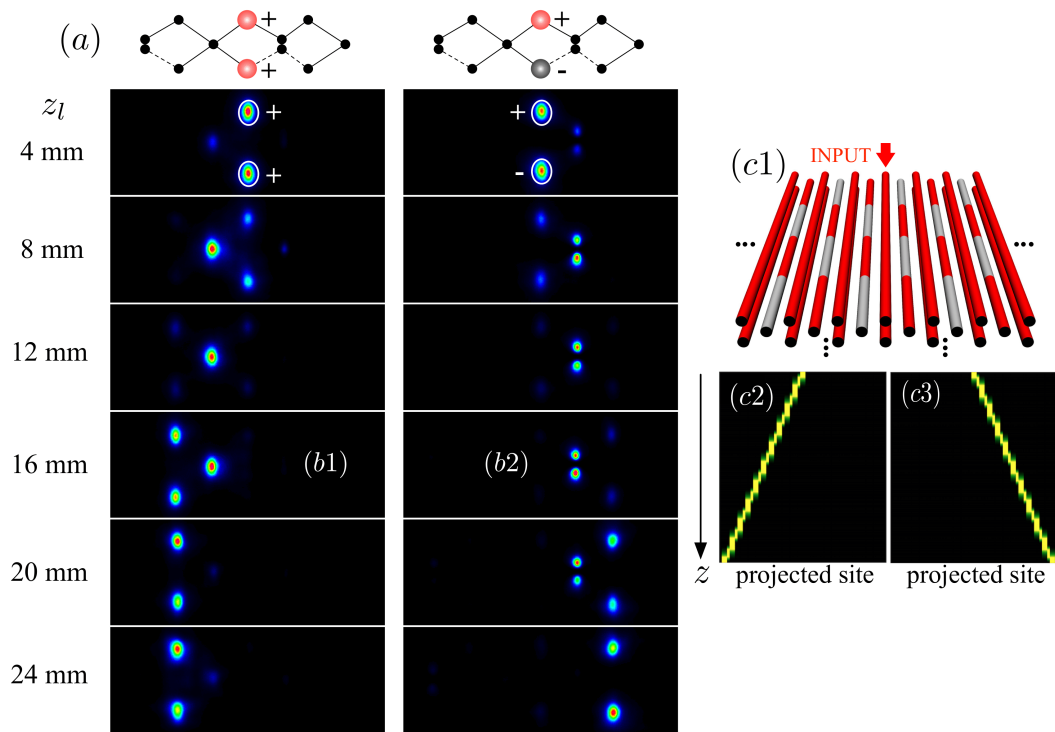


Figura 4.3: (a) Máscara óptica con excitaciones iniciales en fase (izquierda) y fuera de fase (derecha). (b1),(b2) Imágenes de intensidad de salida en $z = z_l$ con $\phi = \pi$, para las excitaciones en fase y fuera de fase respectivamente. Los círculos muestran los sitios excitados inicialmente. (c1) Esquema de la concatenación de máscaras. Colores rojo y gris corresponden a guías S y P, respectivamente. (c2),(c3) Propagación numérica para las condiciones iniciales en fase y fuera de fase, respectivamente.

Para proponer una aplicación concreta y prometedora en nivel de impacto, mostramos numéricamente que, al concatenar muchas máscaras ópticas, de la forma esquematizada en la Figura 4.3(c1) (cada máscara cambia los sitios S y P centrales periódicamente en la dirección de propagación), logramos conseguir un desplazamiento controlado en una estructura de red más grande. Con esto se obtiene una traslación perfecta de la energía (hacia la izquierda

o hacia la derecha), tal como indican las simulaciones numéricas en las Figuras 4.3(c2) y 4.3(c3). De hecho, al igual que en el caso de una sola máscara, al cambiar la fase o la posición inicial, uno puede revertir la dirección del movimiento. Por ejemplo, un perfil inicial en fase se moverá hacia la izquierda si es introducido en las posiciones $\{B_n, C_n\}$, en cambio se moverá hacia la derecha si es introducido en los sitios $\{E_{n\pm 1}, F_{n\pm 1}\}$. Consideramos de especial importancia este resultado [48, 82], teniendo en cuenta que nuestra propuesta se basa solamente en propiedades lineales. De esta forma, nosotros sugerimos un método simple y claro para conseguir transporte perfecto de energía, con un alto nivel de control y estabilidad. La inyección de condiciones iniciales en fase o fuera de fase nos permite propagar la energía de manera libre a través de la red, mientras por el otro lado, la inyección de modos S o P en la fila central induce enjaulamiento de AB. Por lo tanto, nuestro modelo de red entrega una solución perfecta para transporte controlado y localización en el régimen lineal.

4.4. Conclusiones

En conclusión, hemos propuesto un nuevo esquema para inducir flujos magnéticos sintéticos en sistemas de redes fotónicas. Este efecto surge a partir de la interacción entre los modos fundamentales (S) y excitados (P), observando un flujo neto de π por plaqueta [83]. Experimentalmente demostramos este sistema fabricando redes fotónicas multiorbitales con geometría tipo diamante, donde observamos el enjaulamiento de Aharonov-Bohm para ambos modos, lo cual es una prueba experimental directa para la inducción de un flujo magnético efectivo. Demostramos la posibilidad de controlar la dirección de transporte determinada por la condición inicial y, por lo tanto, nuestra propuesta entrega una solución simple para el transporte y la localización en redes. Creemos que nuestra configuración multiorbital tiene la flexibilidad de incluir más efectos en estudios futuros incluyendo, por ejemplo, no-hermiticidad [84] o efectos no lineales [85], con lo que se podrían conseguir nuevos fenómenos interesantes. Nuestros descubrimientos podrían ser particularmente útiles en la creación y manipulación de compuertas lógicas concatenadas [86, 87], lo cual podría ser una dirección prometedora en la investigación en torno a la computación cuántica [88].

Capítulo 5

Modos localizados en una red diamante-octagonal no lineal

5.1. Introducción

En este trabajo se estudió la propagación de luz a través de una red diamante-octagonal [89] bidimensional (2D) no lineal tipo Kerr. Al incluir un acoplamiento específico diagonal dentro de la celda unitaria con forma de diamante, el sistema adquiere dos bandas planas en su relación de dispersión, cada una con un modo compacto asociado [89]. Al incluir no linealidad tipo Kerr en cada sitio del arreglo, se espera que los modos de banda plana den origen a familias de soluciones no lineales compactas [37]. Además de éstas, se estudiaron otras familias de soluciones localizadas. Todos los resultados de este capítulo están publicados en la Referencia [90].

5.2. Modelo

En la Figura 5.1 se encuentra un dibujo esquemático de un corte transversal de la red diamante-octagonal, donde se puede apreciar la celda unitaria escogida, la cual consta de cuatro sitios denotados a, b, c y d . Cada uno de los sitios se encuentra acoplado linealmente con todos los otros sitios de la celda unitaria además de un sitio de una celda unitaria vecina. Si denotamos el número de celdas unitarias en las direcciones x e y con N y M , respectivamente, la red puede ser modelada por un conjunto de $4NM$ ecuaciones dinámicas acopladas tipo Schrödinger no lineal discretas:

$$\begin{aligned} -i \frac{da_{n,m}}{dz} &= V(b_{n,m} + c_{n,m} + d_{n,m} + d_{n,m+1}) + \gamma |a_{n,m}|^2 a_{n,m}, \\ -i \frac{db_{n,m}}{dz} &= V(a_{n,m} + c_{n,m} + d_{n,m} + c_{n-1,m}) + \gamma |b_{n,m}|^2 b_{n,m}, \\ -i \frac{dc_{n,m}}{dz} &= V(a_{n,m} + b_{n,m} + d_{n,m} + b_{n+1,m}) + \gamma |c_{n,m}|^2 c_{n,m}, \\ -i \frac{dd_{n,m}}{dz} &= V(a_{n,m} + b_{n,m} + c_{n,m} + a_{n,m-1}) + \gamma |d_{n,m}|^2 d_{n,m}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde z es la dirección de propagación, V el acoplamiento entre guías y γ el coeficiente no lineal, el cual, como ya hemos mencionado en la sección 2.4, define la naturaleza de la no linealidad, ya sea enfocante ($\gamma > 0$) o desenfocante ($\gamma < 0$). A simple vista el acoplamiento diagonal siempre debería ser menor que el acoplamiento a primeros vecinos debido a que la distancia entre las guías es mayor (por ejemplo, dentro de una celda unitaria, si la distancia entre las guías a y b es l , entonces la distancia entre las guías a y c sería $l\sqrt{2}$); sin embargo, debido a la forma elíptica que poseen las guías de ondas al ser fabricadas mediante la técnica de láser de femtosegundos (ver Sección 3.1), es que el acoplamiento en el eje largo de la elipse es mayor que en el eje corto para una misma distancia [32, 91]. De esta forma, si las guías se orientan de la forma en que se presentan en la Figura 5.1, se puede realizar un ajuste fino de la longitud de onda y/o distancias de manera de conseguir que todos los acoplamientos tengan la misma magnitud.

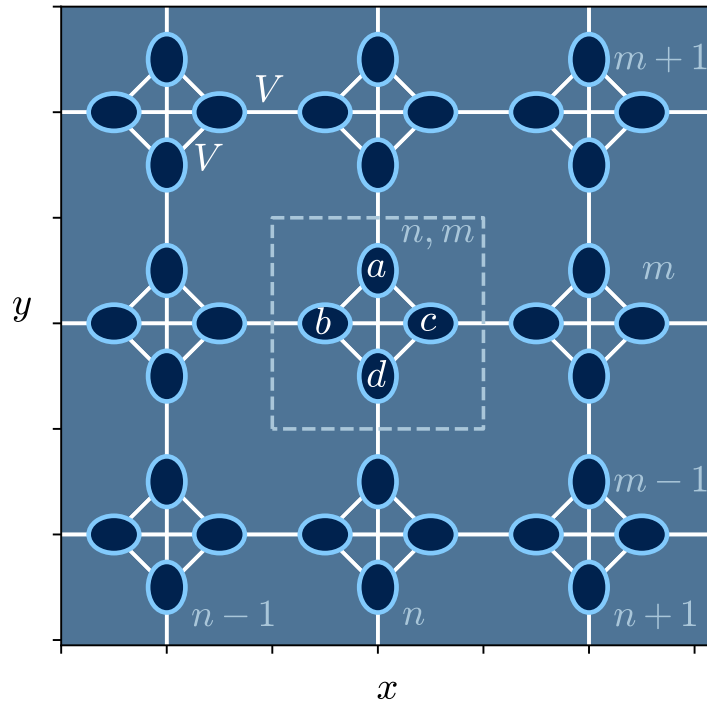


Figura 5.1: Representación esquemática de una red diamante-octagonal. La celda unitaria n, m está encerrada por el cuadrado discontinuo. La figura incluye la propuesta física para hacer posible que todos los acoplamientos sean considerados iguales.

5.3. Espectro lineal

Al considerar un sistema infinito, podemos estudiar la relación de dispersión lineal del sistema. Para este fin, en esta sección fijamos $\gamma = 0$ y buscamos soluciones estacionarias usando un *ansatz* tipo Bloch de la forma

$$\{a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}, d_{n,m}\}(z) = \{a, b, c, d\}e^{i\lambda z}e^{i(k_x n + k_y m)}.$$

Al reemplazar esta expresión en las Ecuaciones dinámicas 5.1 se obtiene el siguiente sistema de autovalores y autovectores:

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 + e^{ik_y} \\ 1 & 0 & 1 + e^{-ik_x} & 1 \\ 1 & 1 + e^{ik_x} & 0 & 1 \\ 1 + e^{-ik_y} & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

La ecuación matricial 5.2 fue resuelta analíticamente, obteniendo el siguiente espectro de bandas lineales:

$$\lambda_{FB1} = 0, \quad \lambda_{FB2} = -2V, \quad \lambda_{\pm}(k_x, k_y) = V \left[1 \pm \sqrt{5 + 2(\cos k_x + \cos k_y)} \right].$$

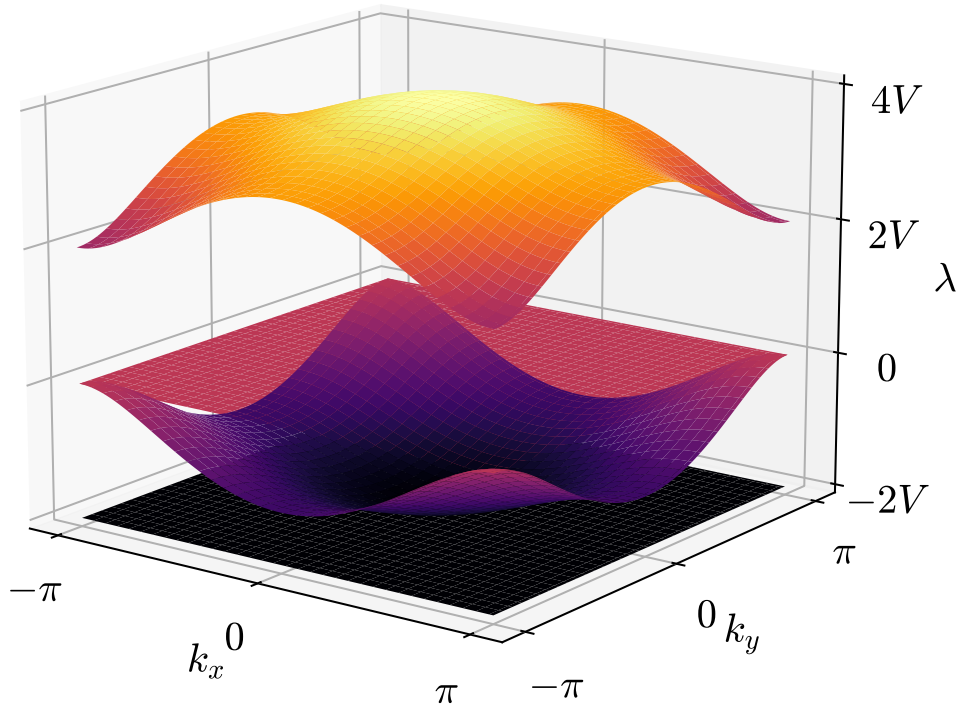


Figura 5.2: Espectro de frecuencias de la red diamante-octogonal en su régimen lineal.

Esta relación de dispersión está graficada en la Figura 5.2. Como podemos apreciar, dos bandas son dispersivas, mientras dos bandas son independientes del vector de onda \vec{k} , por lo que son bandas planas con modos compactos (compactones) asociados. Los modos de las dos bandas planas están graficados en la Figura 5.3. Cada uno de ellos está compuesto por ocho sitios con amplitud distinta de cero organizados en forma de anillo, encerrados dentro

de cuatro celdas unitarias; diferenciándose entre ellos solamente por la estructura de fase que poseen. En adelante usaremos la abreviación C1 y C2 para referirnos a los modos compactos correspondientes a las bandas $\lambda_{FB1} = 0$ y $\lambda_{FB2} = -2$, respectivamente.

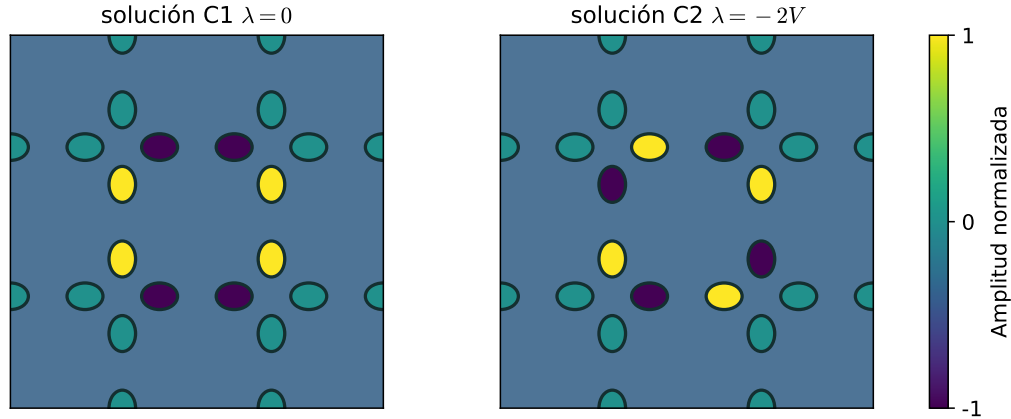


Figura 5.3: Distribución de amplitudes de las soluciones compactas.

Como nos encontramos en el régimen lineal, cualquier combinación lineal de soluciones también será una solución del sistema. En particular, si combinamos dos soluciones compactas de la misma banda, al tener la misma frecuencia, la combinación también será una solución estacionaria. En cambio, si sumamos dos soluciones compactas de distinto tipo superpuestas en los mismos sitios de la red, obtendremos que las amplitudes oscilarán con frecuencia $|\lambda_{FB1} - \lambda_{FB2}| = 2V$. Esta propiedad podría ser usada como un “reloj de bandas planas” que mostrará una oscilación de intensidades bien definida, lo cual podría ser usado como un mecanismo de aplicación de energía para excitar regiones específicas de una red de manera periódica temporal o espacialmente de tal manera de excitar, por ejemplo, una interacción o reacción específica. Un esquema de la dinámica de este efecto se presenta en la Figura 5.4.

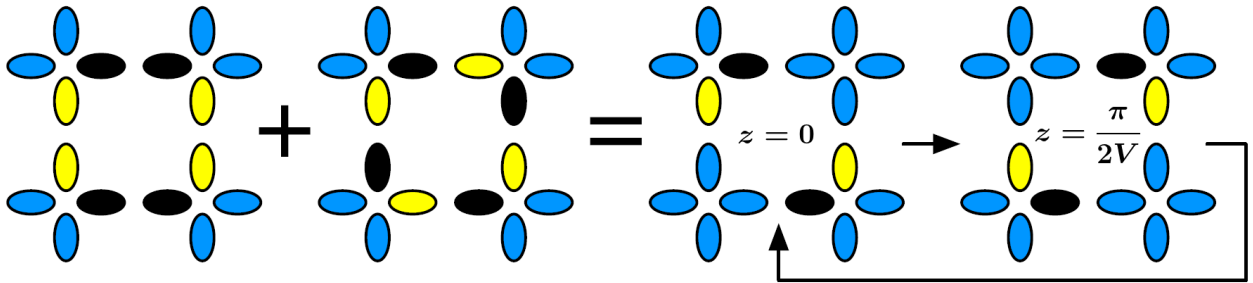


Figura 5.4: Combinación lineal de los compactones C1 y C2, mostrando una dinámica oscilatoria.

5.4. Modos no lineales localizados

5.4.1. Modos compactos

El efecto no lineal en sitio permite que las soluciones compactas asociadas a los modos de banda plana continúen existiendo, sin ningún umbral de potencia mínimo [38], dando origen a una familia de soluciones no lineales para cada uno de los modos de banda plana. La estructura de amplitudes y fases sigue siendo la misma; sin embargo la frecuencia del modo cambiará y dependerá de la potencia que tenga el modo compacto o “compactón” [92] dado. A partir de las Ecuaciones 5.1 es posible encontrar analíticamente la corrección no lineal de la frecuencia de los modos, la cual es

$$\lambda_{C1} = \frac{\gamma P}{8},$$

$$\lambda_{C2} = -2V + \frac{\gamma P}{8},$$

donde P es la suma de la potencia de los ocho sitios del modo.

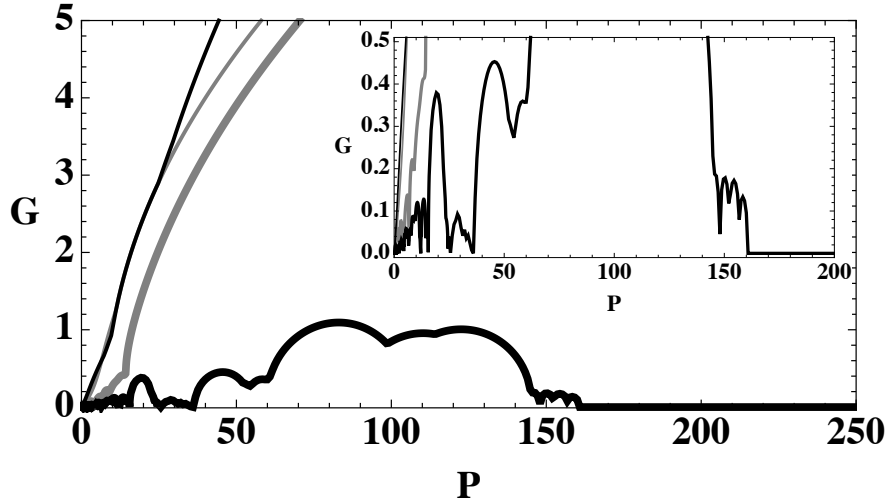


Figura 5.5: Índice de estabilidad en función de la potencia para las soluciones compactas. Línea gris gruesa, compactón C1, $\gamma = -1$; línea gris fina, compactón C1, $\gamma = 1$; línea negra fina, compactón C2, $\gamma = -1$; línea negra gruesa, compactón C2, $\gamma = 1$.

La existencia de estas soluciones no garantiza su estabilidad (lineal), por lo que se realizó un cálculo de estabilidad frente a perturbaciones pequeñas, tal como se explicó en la Sección 2.4. Para cada una de las familias se calculó el índice de estabilidad G en función de la potencia, en presencia de no linealidad enfocante y desenfocante. Los resultados se presentan en la Figura 5.5, donde se puede apreciar que en general estas soluciones son inestables, a excepción de la solución C2 en un régimen de alta potencia y con efecto no lineal enfocante. Para más detalles sobre la estabilidad de los compactones en los distintos regímenes revisar la Referencia [90].

5.4.2. Modos no compactos en el gap semi-infinito $\lambda < -2$

En esta subsección investigaremos una variedad de soluciones estacionarias localizadas, las cuales existen en el gap semi-infinito bajo la banda plana situada en $\lambda = -2V$, en presencia de no linealidad desenfocante. Para todos los cálculos numéricos a continuación se fijó, sin pérdida de generalidad, $\gamma = -1$ y $V = 1$; de esta forma el parámetro que describe el efecto no lineal es la potencia P .

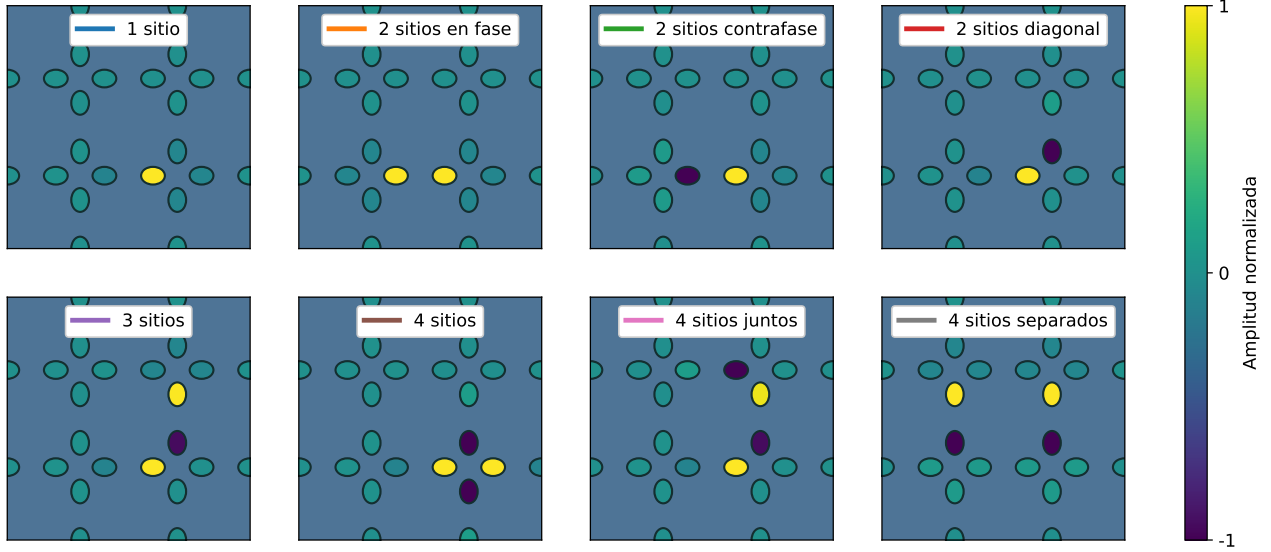


Figura 5.6: Perfiles representativos para cada una de las familias de modos en el límite anticontinuo ($\lambda = -10V$).

Las familias de soluciones localizadas consideradas se muestran en la figura 5.6, donde se presentan sus perfiles de amplitud en el límite anticontinuo (o límite de alta potencia); en específico, se presentan las soluciones de cada familia para una frecuencia $\lambda = -10$. En la figura 5.7(a) se presenta la dependencia de potencia vs λ , estas curvas son obtenidas a partir de la continuación numérica de los patrones de la figura 5.6 en la dirección de λ creciente, mediante el método descrito en la Sección 2.4. La única familia de soluciones incluida que no fue calculada mediante este método es la familia de soluciones compactas C2, debido a que sus perfiles y dependencias ya fueron calculadas analíticamente en la subsección anterior. A excepción de esta familia, todas las demás son familias de solitones discretos, en el sentido de que sus perfiles decaen exponencialmente (como se vio en la sección 2.4).

Como es de esperar, varias de estas familias desaparecen en bifurcaciones con otras soluciones (algunos no se muestran en la figura) antes de alcanzar el límite de las bandas lineales ($\lambda = -2$), sin embargo, identificamos cuatro modos cualitativamente distintos que pueden ser continuados hasta el límite de potencia cero en $\lambda = -2$. Esto también puede ser visto en las Figuras 5.7(b)-(d), donde el Hamiltoniano, el grado de participación y el índice de estabilidad son graficados en función de la potencia para cada una de las soluciones. Para no-linealidades altas, la solución de un sitio (curva azul) siempre es el estado fundamental estable del sistema (tener en cuenta que con la convención de signos usada en esta sección,

las soluciones estables son máximos del Hamiltoniano). Sin embargo, los modos centrados en un sitio sólo existen para potencias $P \gtrsim 2.4$, donde bifurcan a través de una bifurcación tipo *pitchfork* desde la familia de soluciones centrada en dos sitios en contrafase (curva verde) situados horizontalmente (o bien, verticalmente, debido a la simetría de la red diamante-octagonal). Para toda potencia menor, esta familia centrada en dos sitios en contrafase será el estado fundamental y también será el modo más localizado en el sentido de tener el menor grado de participación, tal como se puede ver en la figura 5.7(c). Las otras dos soluciones que continúan hasta el límite lineal son los modos centrados en dos sitios en diagonal (dentro de una misma celda unitaria) excitados en contrafase (curva roja); y los modos con cuatro sitios excitados en contrafase dentro de una misma celda unitaria (curva café). Sin embargo, al ver la figura 5.7(d) notamos que estas dos familias son siempre inestables. Otras familias de soluciones que nacen a partir de bifurcaciones tipo *pitchfork*, son las soluciones de cuatro sitios juntos (curva rosada), la cual nace de la solución del anillo C2; y la familia de cuatro sitios separados (curva gris), que nace a partir de dos anillos C2 excitados en contrafase y separados por un octágono entre ellos. Ambas bifurcaciones se pueden apreciar en la Figura 5.7(c). Adicionalmente, es importante mencionar que a pesar de que el estado fundamental del sistema es único, tal como muestra la figura 5.7(d) existen otros modos estables para distintas potencias, por lo que eligiendo cuidadosamente las condiciones iniciales, se esperaría que estos modos sobrevivan a distancias de propagación largas bajo condiciones experimentales realistas.

5.4.3. Dependencia del estado fundamental con respecto al tamaño de la red, para no linealidad débil

A partir de las ecuaciones dinámicas generales para una red con no linealidad tipo Kerr (Ecuación 2.45) y de la definición de Hamiltoniano (Ecuación 2.47), se puede demostrar que para cualquier solución estacionaria, lineal o no lineal, con constante de propagación λ , se tendrá que [93]

$$H = -\lambda P - \frac{\gamma P^2}{2R}. \quad (5.3)$$

A partir de esta expresión, podemos afirmar que en el límite lineal ($\gamma = 0$), cualquier combinación lineal de soluciones compactas tipo C2 será una solución estacionaria exacta con Hamiltoniano $H = 2VP$. Por lo tanto, todas las combinaciones lineales posibles de compactones C2 conforman un estado fundamental altamente degenerado. Sin embargo, al activar la no linealidad del sistema, no todas estas combinaciones se mantienen estacionarias. En particular, el estado fundamental será la combinación lineal de anillos que maximice el Hamiltoniano para una potencia dada, por lo que a partir de la Expresión 5.3 esperamos que el estado fundamental del sistema sea el que minimice el grado de participación R , es decir, el más localizado.

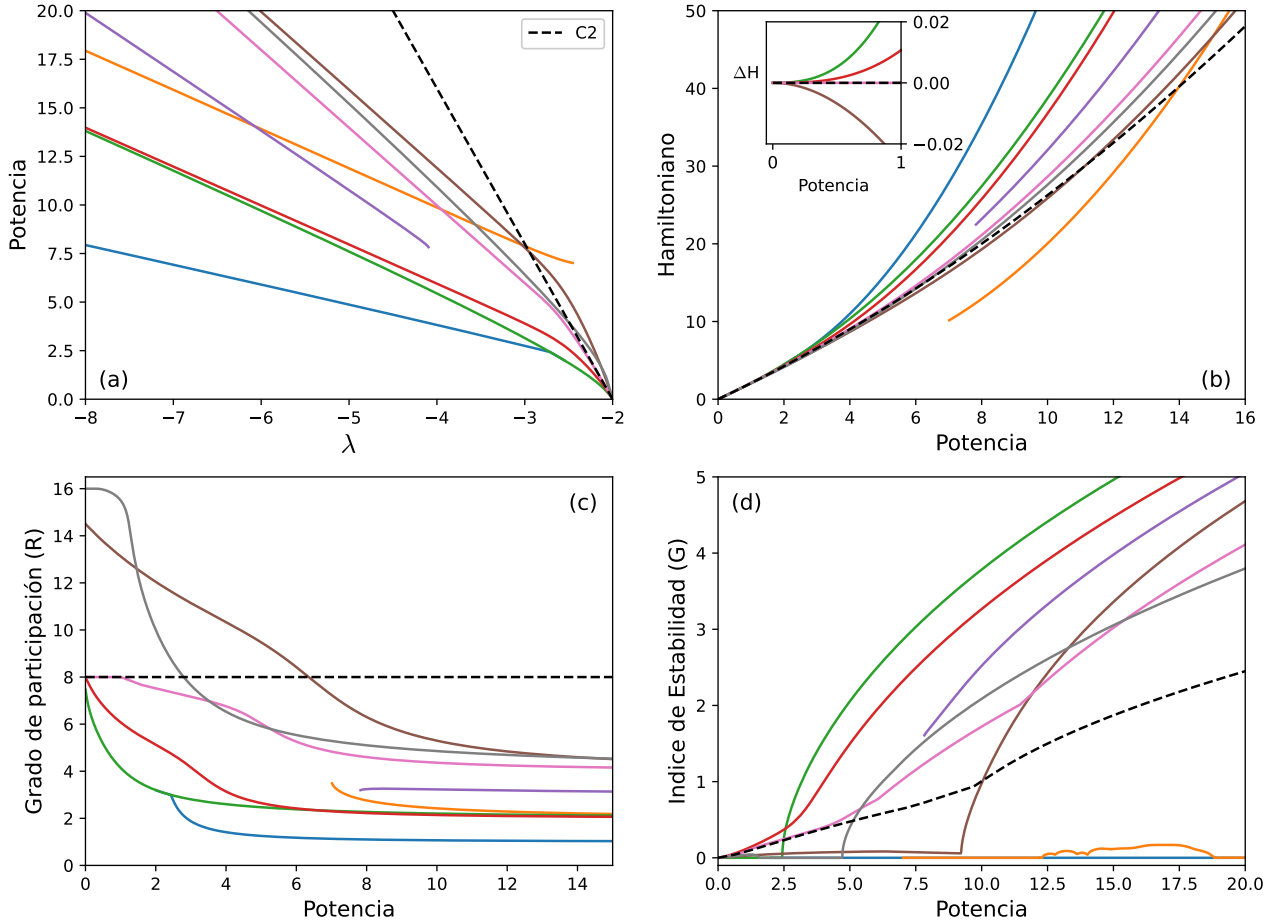


Figura 5.7: (a) Diagrama P vs λ , (b) Hamiltoniano H , (c) grado de participación R e (d) índice de estabilidad G en función de P , para todos los modos presentados en la Figura 5.6. El recuadro en (b) muestra la diferencia de Hamiltoniano ΔH comparado con H para el compactón C2, para las soluciones que continúan hasta $\lambda = -2$.

Al comparar con el escenario análogo para la red de kagome [37], un primer candidato para el estado fundamental para no linealidades débiles, es la solución del anillo C2 con $R = 8$, sin embargo, al ver las Figuras 5.7(b)-(c) vemos que no es el candidato correcto. Es más, sabemos que el estado fundamental será un modo centrado en dos sitios en contrafase. Podemos construir un perfil similar al sumar dos anillos contiguos (horizontal o verticalmente) excitados en contrafase, obteniendo un perfil de potencia centrado en los mismos dos sitios que la solución verde de la Figura 5.6. Sin embargo, un cálculo directo para esta combinación de anillos nos indica que su grado de participación es $R = 9.09 > 8$, por lo que un modo de dos anillos tendría un Hamiltoniano menor que el de un solo anillo. Incluso si agregamos dos anillos más para formar un segmento lineal de 4 anillos, un proceso directo de optimización nos indica que el mínimo R posible para una combinación lineal este tipo es $R \approx 8.70$, por lo que el modo compacto C2 seguiría siendo el estado fundamental para un sistema pequeño compuesto por los sitios que ocupan estos 4 anillos. De esta forma, podemos afirmar que tiene que haber un tamaño crítico para el sistema donde el estado fundamental para no linealidades débiles cambia de un anillo compacto a una combinación lineal no trivial de

anillos que formen un patrón de potencias centrado en dos sitios.

Ya que con combinaciones simples no se encontró el perfil correcto para determinar el tamaño crítico del sistema, construimos un *ansatz* que consiste en una combinación lineal de 14 anillos compactos:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z, u, v) = & x(A_{0,0} - A_{0,1}) + y(A_{0,-1} - A_{0,2}) + z(A_{0,-2} - A_{0,3}) \\ & + u(A_{1,0} - A_{1,1} + A_{-1,0} - A_{-1,1}) + v(A_{1,-1} - A_{1,2} + A_{-1,-1} - A_{-1,2}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

En esta expresión $A_{i,j}$ representa una solución compacta C2 con amplitud normalizada en la posición (i, j) , mientras que x, y, z, u y v son coeficientes positivos los cuales se optimizarán para minimizar R . De esta forma, al reemplazar la expresión 5.4 en la definición de R (Ecuación 2.49) obtenemos la función que queremos minimizar, restringiendo las constantes con la ecuación $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4u^2 + 4v^2 = 1$. Todas las optimizaciones presentadas a continuación fueron realizadas con la librería SciPy. A partir de la ecuación 5.4 podemos optimizar R para distintos tamaños de la red (varios de estos tamaños de red están graficados en los recuadros dentro de la Figura 5.8). Por ejemplo, si fijamos $z = u = v = 0$ estaremos estudiando el sistema de 4 anillos en fila que mencionamos anteriormente (curva azul en la Figura 5.8). Si sumamos dos anillos más en la misma dirección (curva naranja en la Figura 5.8), debemos fijar $u = v = 0$, con lo que se obtiene un grado de participación mínimo de $R \approx 8.67$. Por otro lado, si fijamos $z = v = 0$ construyendo un sistema con 8 anillos, para este caso el algoritmo de optimización entrega $R \approx 8.12$. Si consideramos un sistema donde caben 10 anillos fijando $v = 0$, el mínimo será $R \approx 8.09$. Si buscamos estudiar un sistema con 12 anillos (curva verde en la Figura 5.8), restringimos $z = 0$, en este caso el mínimo es $R \approx 7.86 < 8$. Por último, si consideramos los 14 anillos del *ansatz* (curva roja en la Figura 5.8), el mínimo es $R \approx 7.79$.

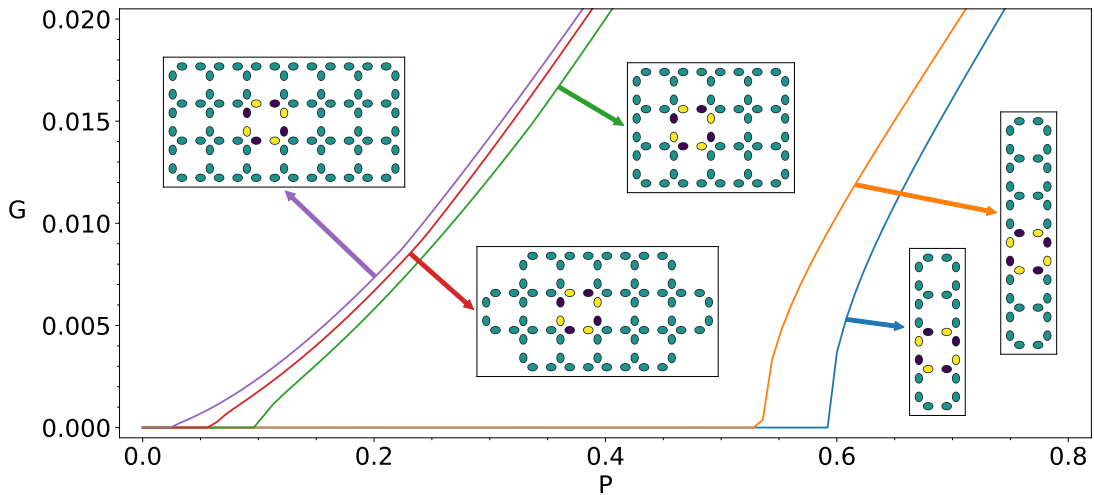


Figura 5.8: Índice de estabilidad vs potencia para un compactón C2 en sistemas pequeños compuestos solamente por los sitios indicados en cada recuadro ($\gamma = -1, V = 1$, condiciones de borde fijo.)

Con estos resultados, queda demostrado que para sistemas donde no se pueden combinar 12 anillos de la forma presentada anteriormente, el estado fundamental del sistema para no linealidades débiles será el anillo compacto C2, mientras que sobre este tamaño crítico, el estado fundamental será una combinación no trivial de anillos que tendrá máximos de potencia en dos sitios vecinos, tal como se muestra en los cálculos de la sección anterior.

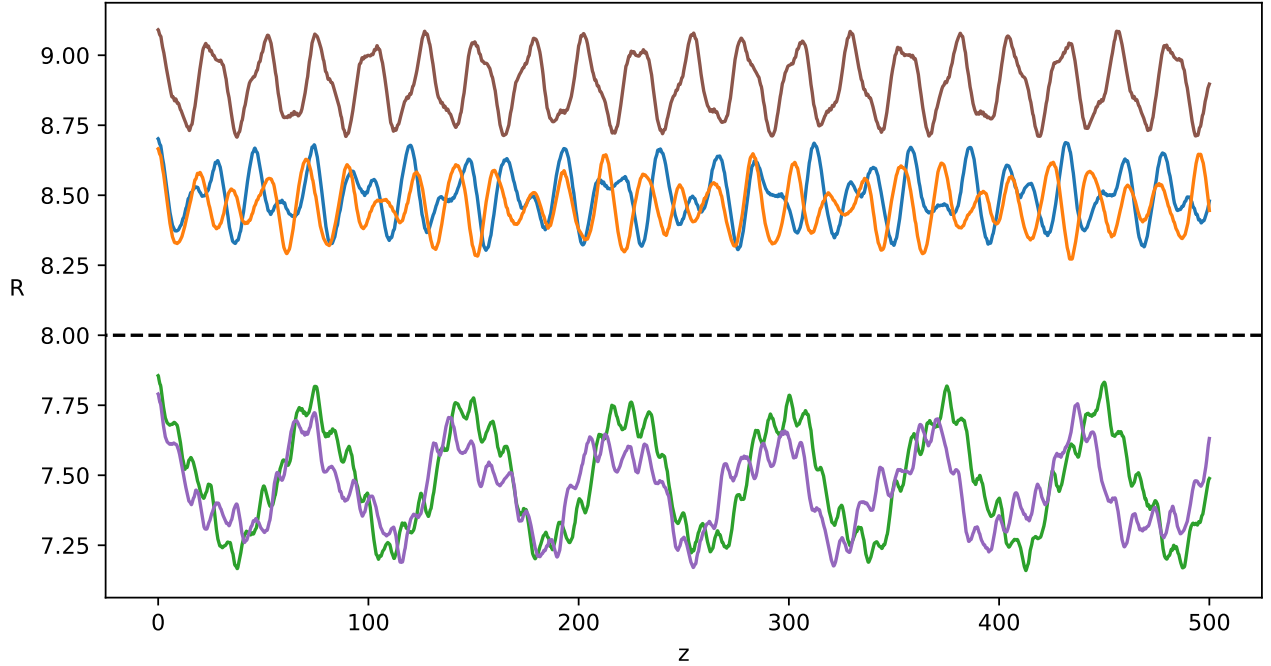


Figura 5.9: Evolución del grado de participación de la optimización del *ansatz* 5.4 en sistemas compuestos por 3×2 (curva café), 5×2 (curva azul), 7×2 (curva naranja), 5×4 (curva verde) y 7×4 (curva morada) celdas unitarias completas. En todos los casos se utilizó $P = 0.05$

Para ver como esta transición del estado fundamental se refleja en el modelo no lineal, graficamos en la Figura 5.8 el índice de estabilidad G versus potencia P para un anillo C2 en sistemas pequeños compuestos solamente por la cantidad de guías presentadas en cada recuadro, con condición de borde fija. Como se puede ver, para los sistemas más pequeños, donde caben solo 4 o 6 anillos y el anillo C2 es el estado fundamental en el límite de no linealidad débil, en efecto la solución es estable en una región considerable para potencias bajas. Cuando se agranda el sistema a 12, 14 y 18 anillos, donde la solución compacta ya no es el estado fundamental, la potencia a la cual se inestabiliza la solución disminuye drásticamente. A pesar de esto, es importante mencionar que incluso en estos tamaños de sistemas, existe una pequeña región de estabilidad para potencias muy bajas ($P < 0.1$), sin embargo, esta región se reduce con el crecimiento del sistema. Por lo tanto, incluso cuando el compactón no es el estado fundamental del sistema, es, aparentemente, metaestable. Para agregar otra verificación, en la Figura 5.9 realizamos simulaciones numéricas sobre sistemas pequeños compuestos por celdas unitarias completas de cuatro sitios (a diferencia de los cálculos presentados en la Figura 5.8, donde las celdas unitarias no están completas en los bordes), usando de condición inicial los perfiles obtenidos al optimizar R para el *ansatz* 5.4

para el mayor número de anillos que contenga cada sistema. Con esto confirmamos que para sistemas con tamaños de (3×2) , (5×2) y (7×2) celdas unitarias (curvas café, azul y naranja, respectivamente), el grado de participación se mantiene sobre 8, mientras que para sistemas de (5×4) y (7×4) celdas unitarias (curvas verde y morada, respectivamente), se mantiene con $R < 8$ para distancias largas, no linealidad débil y perturbaciones aleatorias pequeñas. De esta forma, demostramos que, para no linealidad débil, el tamaño de 12 anillos sigue siendo el tamaño crítico para la transición del estado fundamental, incluso cuando el sistema no es puramente compuesto por 12 anillos, si no que por (5×4) celdas unitarias.

Al hacer crecer más el tamaño del sistema, más anillos se agregan a la combinación lineal del *ansatz* 5.4, pero al optimizar los coeficientes notamos que estos decrecen con la distancia hacia el centro. Con esto encontramos, numéricamente, que el grado de participación (en el límite de baja potencia) disminuye a $R \approx 7.48, 7.37$ y 7.34 para sistemas con 256 (8×8), 576 (12×12) y 784 (14×14) sitios (celdas unitarias), respectivamente. Sin embargo, cualitativamente el estado fundamental para no linealidad débil se mantiene igual para todos los sistemas que contengan 12 anillos o más, caracterizándose por los dos sitios principales excitados en contrafase.

5.4.4. Investigación numérica sobre movilidad

Debido a la similitud de la estructura de bandas alrededor de $\lambda = -2V$ con la de la red de Kagome, donde se encontró buena movilidad en la vecindad de la frontera entre la banda plana y el gap semi-infinito [37], se realizó un esfuerzo para identificar posibles modos móviles para la red diamante-octagonal en este régimen. Dos ejemplos típicos se ilustran en la Figura 5.10, donde una solución compacta C2 en la vecindad del borde del gap semi infinito se ha perturbado transversalmente con un gradiente de fase. En otras palabras, la condición inicial es

$$a_{\vec{n}}^{(R)} e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{n}\}},$$

donde $a_{\vec{n}}^{(R)}$ representa una solución C2 a una cierta potencia, \vec{n} define la posición de cada guía de la red en el plano xy y $\vec{k} = \{k_x, k_y\}$ es el gradiente de fase. Este procedimiento es el camino estándar para estudiar movilidad en este tipo de sistemas (ver, por ejemplo, las Referencias [37, 56, 94]). Como se puede ver, no se encontró una movilidad adecuada, sino que el modo se mantiene oscilando en torno a un mínimo del potencial efectivo de Peierls-Nabarro (ver Sección 2.4) situado en el estado fundamental de dos máximos. Un gradiente de fase mayor no ayuda al modo para sobrepasar la barrera de Peierls-Nabarro y llegar a la siguiente posición del anillo, por el contrario, excita más modos internos y radiación desarmando la estructura localizada de la solución. Heurísticamente, podemos interpretar la imposibilidad de trasladar el compactón como una consecuencia de que el estado fundamental, en el límite de potencias bajas, sea una combinación no trivial de muchos modos de anillos, en contraste con la combinación de sólo dos anillos para la red de Kagome [37]. A medida que el anillo en la red diamante-octagonal se traslada hacia la solución estable de dos máximos, muchos

modos adicionales de anillos son excitados, lo cual dificulta que se reorganice la energía en un solo anillo trasladado.

Adicionalmente, investigamos la posibilidad de mover un modo de anillo C2 en un dirección diagonal y presentamos dos resultados representativos en la Figura 5.11. Esto lo realizamos motivados por la existencia de las soluciones de dos sitios en diagonal y las centradas en cuatro sitios (curvas roja y café, respectivamente, en las Figuras 5.6-5.7), las cuales podrían jugar el rol de caminos intermedios en un movimiento diagonal. Sin embargo, en la Figura 5.11 vemos que la solución de cuatro sitios en una celda unitaria no participa de la dinámica y el resultado termina siendo similar al del movimiento axial: el modo no se traslada. Además, en la Figura 5.11(b) podemos apreciar que la energía oscila primero diagonalmente y luego de un tiempo decae hacia la solución de dos sitios, la cual es el estado fundamental para potencias bajas. Por estos motivos, aparentemente no se puede conseguir movilidad traslacional en ninguna dirección para los modos compactos cercanos a la banda plana inferior.

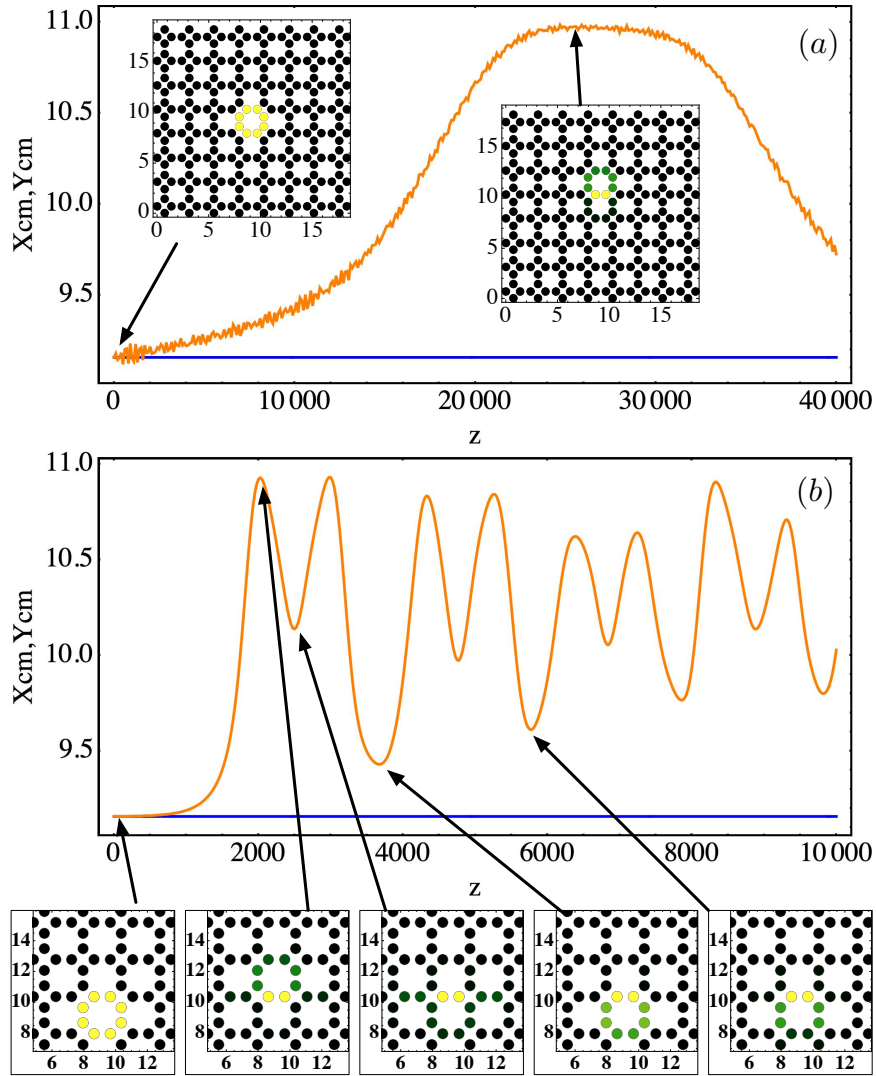


Figura 5.10: Simulaciones dinámicas de compactones C2 con potencias bajas para $\gamma = -1$ y $V = 1$. Las condiciones iniciales son perturbadas con un gradiente de fase en el eje vertical ($k_x = 0$) para (a) $k_y = -0.1, P = 0.005$ y (b) $k_y = -0.001, P = 0.1$. Las figuras principales muestran las componentes verticales (curvas naranjas) y horizontales (curvas azules) del centro de masa en función de la dirección de propagación z . Los recuadros muestran las distribuciones de intensidad para las distancias señaladas por las flechas. Se usó una red de 256 sitios con condición de borde fijo.

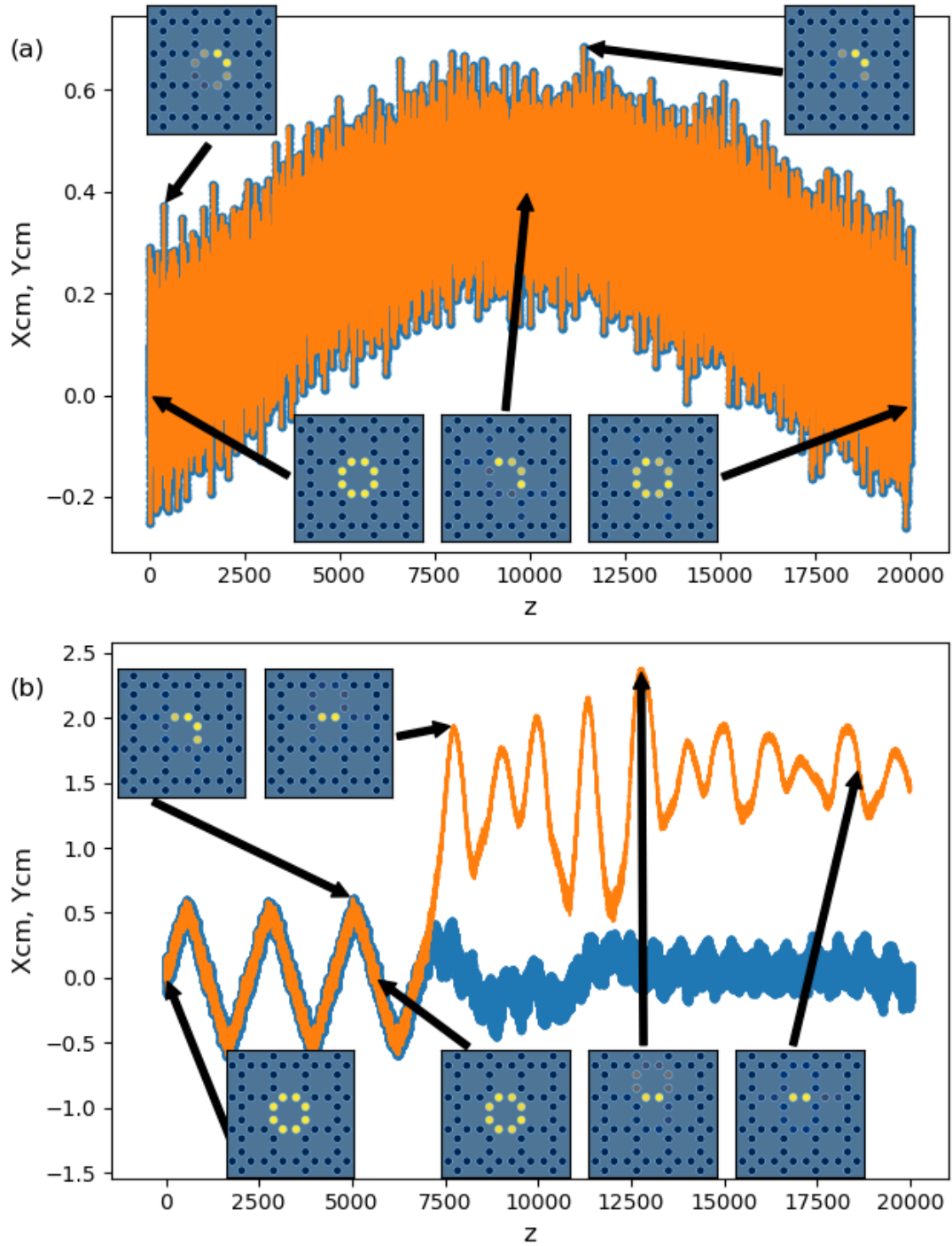


Figura 5.11: Simulaciones dinámicas de compactones C2 con perturbaciones diagonales para $\gamma = -1$ y $V = 1$ en una red de 256 sitios. Los parámetros en cada caso son (a) $P = 0.005$, $k_x = k_y = -0.2$ y (b) $P = 0.1$, $k_x = k_y = -0.1$. Las figuras principales muestran las componentes vertical (curva naranja) y horizontal (curva azul) del centro de masa en función de la dirección z . Los recuadros muestran las distribuciones de intensidad para las distancias señaladas por las flechas.

5.5. Conclusiones

La red diamante-octagonal es conocida por tener interesantes propiedades teóricas, en particular para el caso en que el acoplamiento diagonal dentro de la celda unitaria es ajustado finamente para ser idéntico al acoplamiento entre primeros vecinos. Este caso se identifica por una relación de dispersión lineal con dos bandas exactamente planas y dos modos de banda plana ortogonales y compactos, ambos con distribución idéntica de potencia, pero con diferentes estructuras de fase. En este trabajo propusimos una forma de realizar experimentalmente dicha red, usando guías de ondas fotónicas con forma elíptica. Para dicho modelo, analizamos las propiedades de sus modos tanto en el régimen lineal, como en el no lineal tipo Kerr. Encontramos que los modos localizados de banda plana continúan existiendo como soluciones compactas exactas en presencia de no linealidad. Sin embargo, estas soluciones son típicamente inestables en el régimen no lineal, a excepción del compactón C2 a potencias altas y con no linealidad enfocante.

Por lo tanto, desde el punto de vista de las aplicaciones, la red diamante-octagonal podría ser de interés principalmente por el uso de sus propiedades lineales. Con dos bandas planas a distintas frecuencias, una oscilación de bandas planas puede ser implementada para diseminar y controlar, efectivamente, la cantidad de energía en una región dada de la red y con una frecuencia muy bien definida. Adicionalmente, como se pueden excitar simultáneamente las soluciones compactas en distintos sitios de la red, la cantidad de posibles combinaciones crece como 2^{N_A} , con N_A el número de posiciones posibles donde se puede excitar el anillo (2 por la diferencia de excitación en fase y en contrafase) [34]. Esta codificación puede ser mejorada también si se excitan simultáneamente soluciones C1 y C2, agregando un grado de libertad extra. Esto es ciertamente un aporte para un objetivo importante en la actualidad de las comunicaciones ópticas, donde diferentes formas de codificación son requeridas para encriptar eficientemente una enorme cantidad de datos digitales.

La red diamante-octagonal no lineal también exhibe efectos de tamaño intrigantes que en nuestro conocimiento no han sido estudiados antes en sistemas de bandas planas (al momento de publicación de este trabajo [90]). Demostramos que el estado fundamental para no linealidad débil en el régimen desenfocante, cambia de ser un modo compacto C2 a una combinación lineal no trivial consistente en mínimo 12 anillos compactos.

Capítulo 6

Movilidad de soluciones localizadas en una cinta de grafeno no lineal

6.1. Modelo

En este trabajo estudiamos la red cuasi-unidimensional conocida como cinta de grafeno [33, 95], con no-linealidad tipo Kerr. Como se aprecia en la Figura 6.1, la celda unitaria de esta red consiste en seis guías de ondas ubicadas en los vértices de un hexágono, las que rotularemos con las letras A, B, C, D, E y F. Las ecuaciones que rigen la dinámica de este sistema, se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} -i \frac{da_n}{dz} &= V(b_n + d_{n-1} + f_n) + \gamma |a_n|^2 a_n, \\ -i \frac{db_n}{dz} &= V(a_n + c_n) + \gamma |b_n|^2 b_n, \\ -i \frac{dc_n}{dz} &= V(b_n + d_n) + \gamma |c_n|^2 c_n, \\ -i \frac{dd_n}{dz} &= V(a_{n+1} + c_n + e_n) + \gamma |d_n|^2 d_n, \\ -i \frac{de_n}{dz} &= V(d_n + f_n) + \gamma |e_n|^2 e_n, \\ -i \frac{df_n}{dz} &= V(a_n + e_n) + \gamma |f_n|^2 f_n, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde V es la constante de acoplamiento entre primeros vecinos y γ el coeficiente no lineal. Las amplitudes en la n -ésima celda unitaria son a_n , b_n , c_n , d_n , e_n y f_n . En este trabajo nos centraremos en el régimen de no-linealidad enfocante ($\gamma > 0$), con lo que buscaremos modos que nacen del borde superior de las bandas. Como el sistema corresponde a una red bipartita, el espectro será simétrico y de esta forma los modos que estudiaremos son equivalentes a los que se encontrarán si se usa no-linealidad desenfocante y se estudian los modos que viven bajo el límite inferior de las bandas [56]. La única diferencia entre estos dos conjuntos de modos, será que para $\gamma < 0$ las soluciones tendrán un desfase π entre sitios vecinos, mientras que para $\gamma > 0$ esta fase será 0.

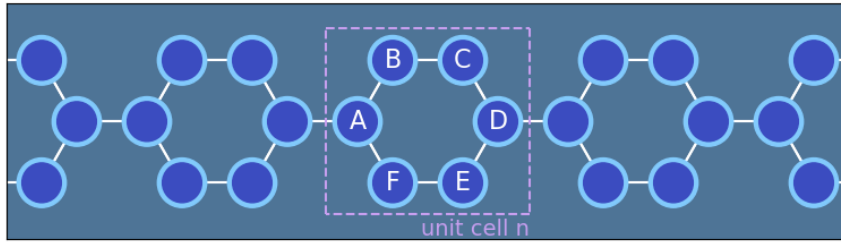


Figura 6.1: Representación esquemática de un corte transversal de la cinta de grafeno fotónica. Las líneas blancas representan los acoplamientos entre primeros vecinos, mientras que el cuadrado de líneas entrecortadas encierra la celda unitaria.

6.2. Espectro lineal

Comenzaremos estudiando las propiedades lineales de la red, por esta razón fijamos $\gamma = 0$ en esta sección. Para calcular las bandas lineales, buscamos soluciones usando un *ansatz* tipo Bloch tal como el de la Ecuación 2.43. En este caso las soluciones correspondientes tendrán la forma

$$\{a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n\}(z) = \{a, b, c, d, e, f\}e^{i\lambda z}e^{ik_x n}.$$

Reemplazando en las Ecuaciones 6.1 se obtiene

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & e^{-ik_x} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e^{ik_x} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}.$$

Este sistema fue resuelto analíticamente obteniendo una relación de dispersión compuesta por dos bandas dispersivas y dos bandas planas. Las frecuencias de las soluciones tienen las siguientes dependencias en k_x (y están graficadas en la Figura 6.2(a)):

$$\begin{aligned}
\lambda_{FB+} &= V, \\
\lambda_{FB-} &= -V, \\
\lambda_1(k_x) &= V\sqrt{3 + 2\sqrt{2}\cos(k_x/2)}, \\
\lambda_2(k_x) &= V\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos(k_x/2)}, \\
\lambda_3(k_x) &= -V\sqrt{3 + 2\sqrt{2}\cos(k_x/2)}, \\
\lambda_4(k_x) &= -V\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos(k_x/2)}.
\end{aligned}$$

Los modos compactos asociados a cada banda plana están localizados en solo cuatro sitios de la red. Ambos modos están graficados en las Figuras 6.2(b1-b2).

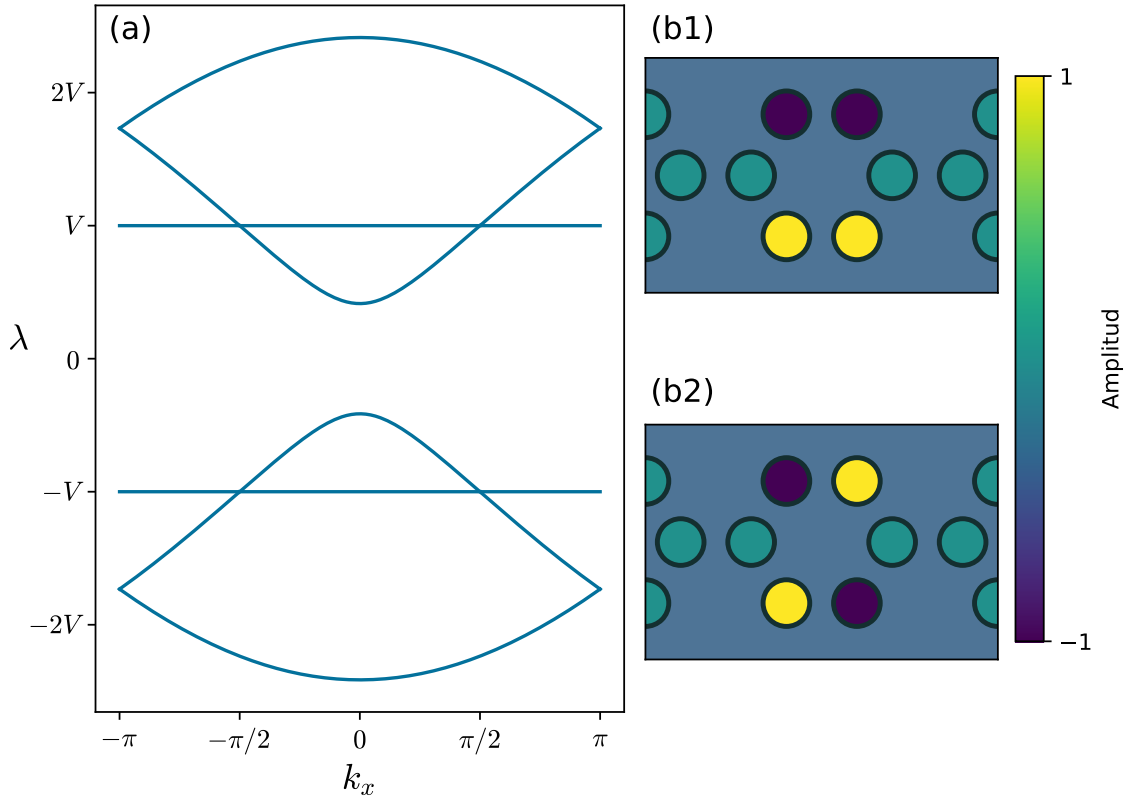


Figura 6.2: (a) Estructura de bandas lineales de la cinta de grafeno. (b) Modos de banda plana con constantes de propagación $\lambda_+ = V$ (b1) y $\lambda_- = -V$ (b2).

6.3. Soluciones no lineales localizadas

El efecto no lineal en cada sitio permite que las dos soluciones compactas sigan siendo soluciones del sistema sin una potencia mínima, pero modificando sus frecuencias. Estas dependencias de las frecuencias se pueden obtener analíticamente de las Ecuaciones 6.1 y son

las siguientes:

$$\lambda_+ = V + \frac{\gamma P}{4},$$

$$\lambda_- = -V + \frac{\gamma P}{4}.$$

Tal como se explicó en las Subsecciones 2.2.2 y 2.4.2, fijaremos, sin pérdida de generalidad, las constantes de acoplamiento y no-linealidad como $V = \gamma = 1$ para todos los cálculos numéricos de ahora en adelante. Usando el método explicado en la Subsección 2.4.3 se encontraron y estudiaron tres diferentes familias de soluciones localizadas no compactas. Nombramos estas familias por los sitios donde tienen sus *peaks*: A, AD y DA (la D primero porque es el sitio D de la celda unitaria anterior). Los perfiles de amplitud para las tres soluciones a frecuencia $\lambda = 10$ se pueden ver en la Figura 6.3.

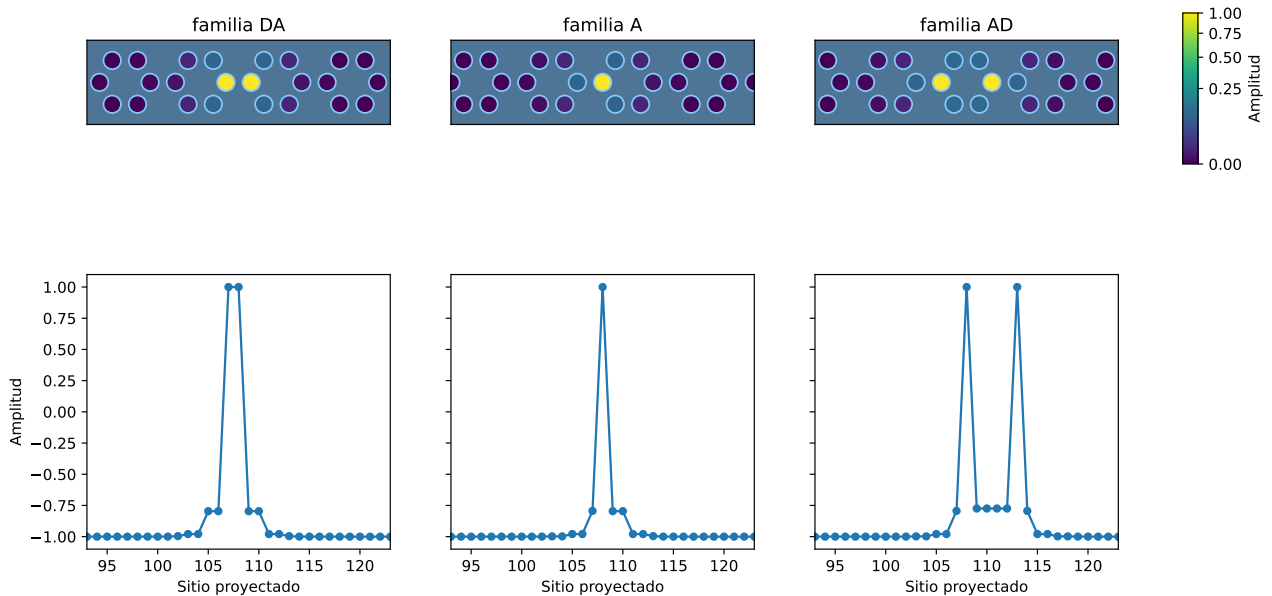


Figura 6.3: Las tres familias de soluciones calculadas numéricamente a frecuencia $\lambda = 10$.

Una vez obtenidos los perfiles y frecuencias de las soluciones, se calculó la potencia P , el Hamiltoniano H , el grado de participación R y el índice de estabilidad G (recomendamos revisar la Sección 2.4 y la Referencia [90]). En la Figura 6.4 graficamos todas estas cantidades que caracterizan a las diferentes familias de soluciones, además se incluyó las dos soluciones compactas correspondientes a los modos de banda plana. En la Figura 6.4(a) graficamos potencia vs frecuencia, acá podemos ver como las dos soluciones compactas (líneas roja y café) emergen desde las frecuencias de banda plana. Por el contrario, las otras familias de soluciones nacen directamente desde el borde de una de las bandas dispersivas, a potencia baja (régimen lineal) las tres soluciones son la misma, pero después de dos potencias críticas distintas se separan en bifurcaciones tipo *pitchfork*. En la Figura 6.4(b) se graficó el Hamiltoniano vs

potencia, donde se pueden apreciar las mismas bifurcaciones. Además, podemos notar que la familia A siempre tiene menor Hamiltoniano para una potencia fija, por lo que podríamos esperar que esta solución sea el estado fundamental. En la Figura 6.4(c) se graficó el grado de participación vs potencia, donde también se pueden confirmar las mismas bifurcaciones. Por último, en la Figura 6.4(d) se graficó el índice de estabilidad vs potencia, en esta figura podemos apreciar que, tal como esperaríamos del estado fundamental, la familia de soluciones A es siempre estable, y que luego de las bifurcaciones, las otras dos familias se inestabilizan. Adicional a la Figura 6.4, en la Figura 6.5 se muestra un acercamiento de las curvas P vs λ en la región donde ocurren las bifurcaciones, el mismo acercamiento para las otras tres curvas calculadas se puede encontrar en la Figura 6.6.

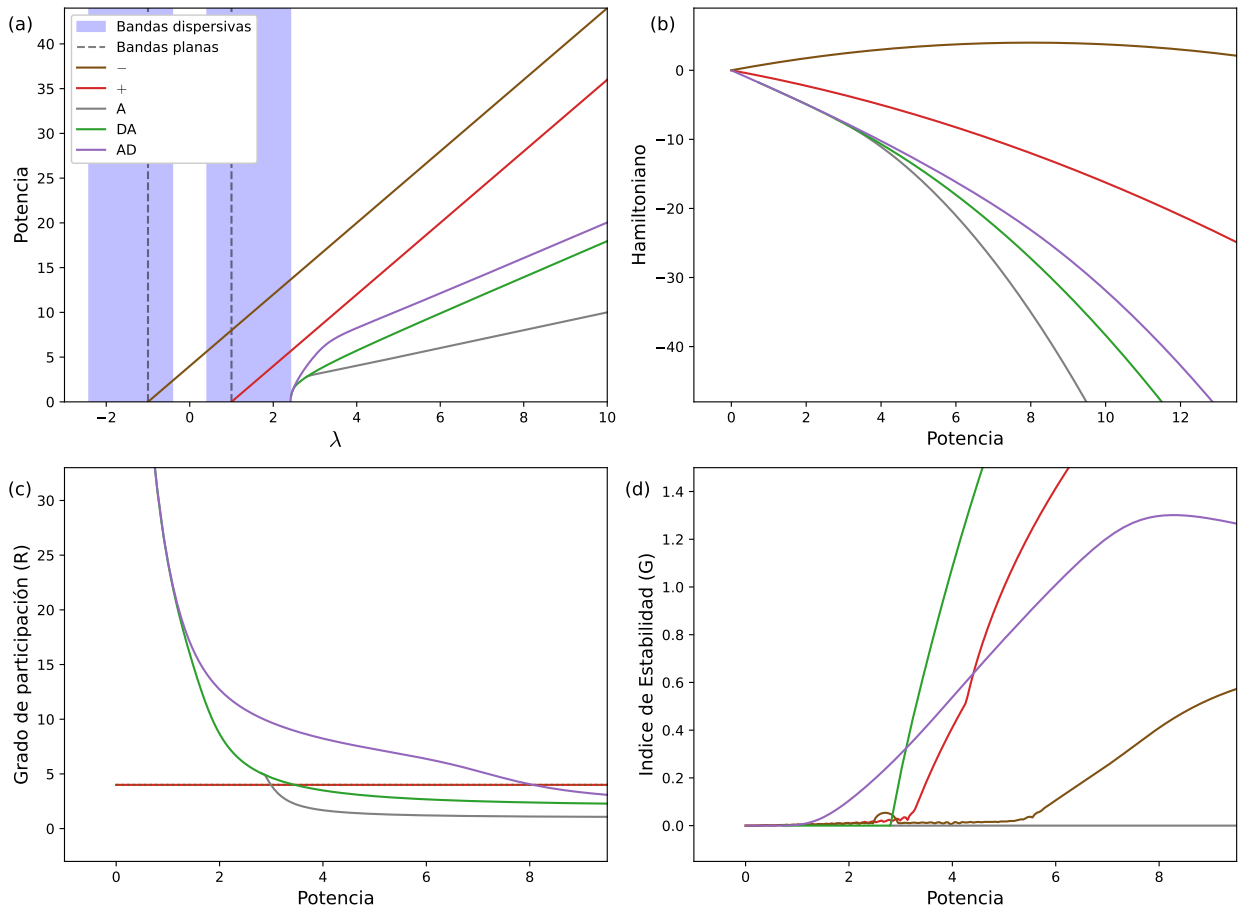


Figura 6.4: Caracterización de las cinco familias de soluciones no lineales estudiadas. (a) Diagrama P vs λ , (b) Hamiltoniano H , (c) grado de participación R e (d) índice de estabilidad G en función de P .

Debido a que en las potencias críticas las soluciones se unen en bifurcaciones, es importante verificar como son las simetrías de las soluciones bajo estas potencias, de esta forma podremos encontrar cuál de las familias es la que nace desde el borde de las bandas lineales. En la Figura 6.5 hay cinco puntos marcados en las curvas P vs λ correspondientes a soluciones con potencias bajo y sobre cada bifurcación, para cada uno de estos puntos se graficó al lado

derecho el perfil de dichas soluciones. De esta figura podemos ver claramente que la familia DA no tiene un umbral de potencia mínima, ya que se origina desde una solución extendida de la banda lineal. Mientras tanto, las otras dos familias de soluciones bifurcan de la familia DA.

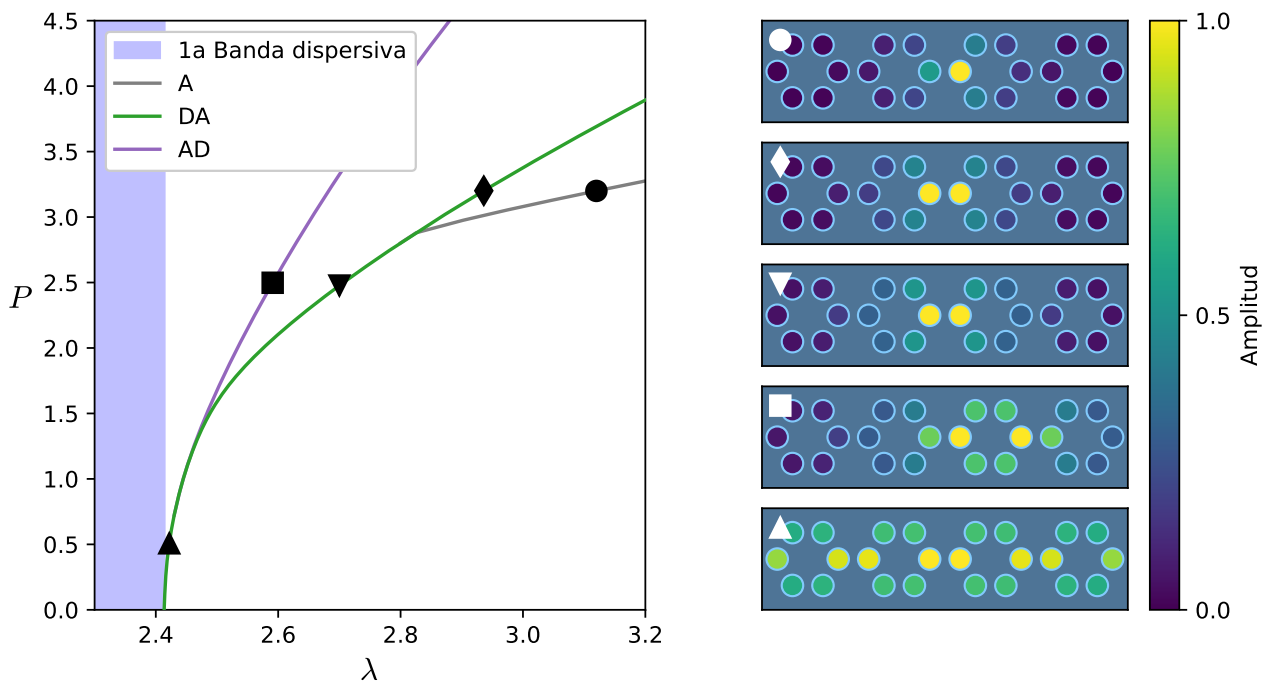


Figura 6.5: Acercamiento de la Figura 6.4(a) mostrando los puntos de bifurcación. A la izquierda los perfiles de amplitud de las cinco soluciones marcadas en el gráfico P vs λ .

6.4. Movilidad de soluciones localizadas

Si dos soluciones estacionarias están cerca en el espacio de parámetros, el sistema nos muestra que existe la posibilidad de transformar adiabáticamente una solución en otra. Esta es la idea básica con la cual se podría mover luz en el eje transversal de la red [56]. Para poder conseguir esto usualmente se le otorga momentum a una condición inicial a través de un gradiente de fase (*kick*)[37, 56, 94, 96]. De las Figuras 6.4, 6.5 y 6.6 podemos apreciar que esta condición se cumple cerca de las potencias críticas donde ocurren las bifurcaciones. A raíz de esto, buscamos en esta región movilidad controlada a través de simulaciones numéricas de las ecuaciones dinámicas 6.1 usando como condición inicial la familia de soluciones DA perturbadas por un gradiente horizontal de fase. De esta forma, si tenemos una solución $a_{\vec{n}}^{(s)}$, la condición inicial perturbada por un *kick* k será

$$a_{\vec{n}}^{(s)} e^{ik(\vec{n} \cdot \hat{x})}.$$

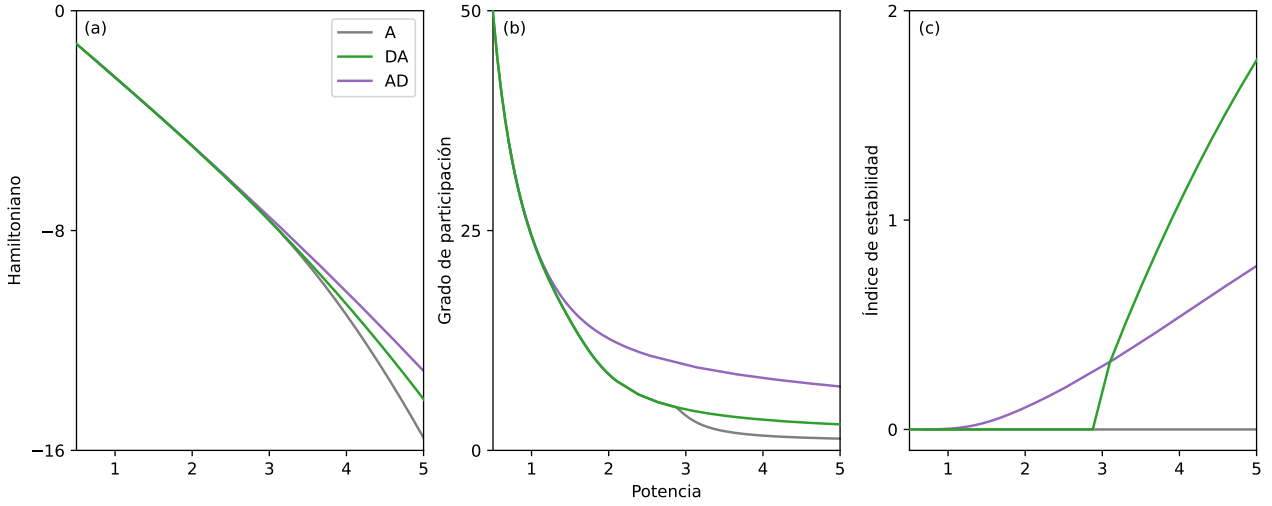


Figura 6.6: Acercamiento de las Figuras 6.4(b-d) mostrando las soluciones localizadas no compactas calculadas numéricamente.

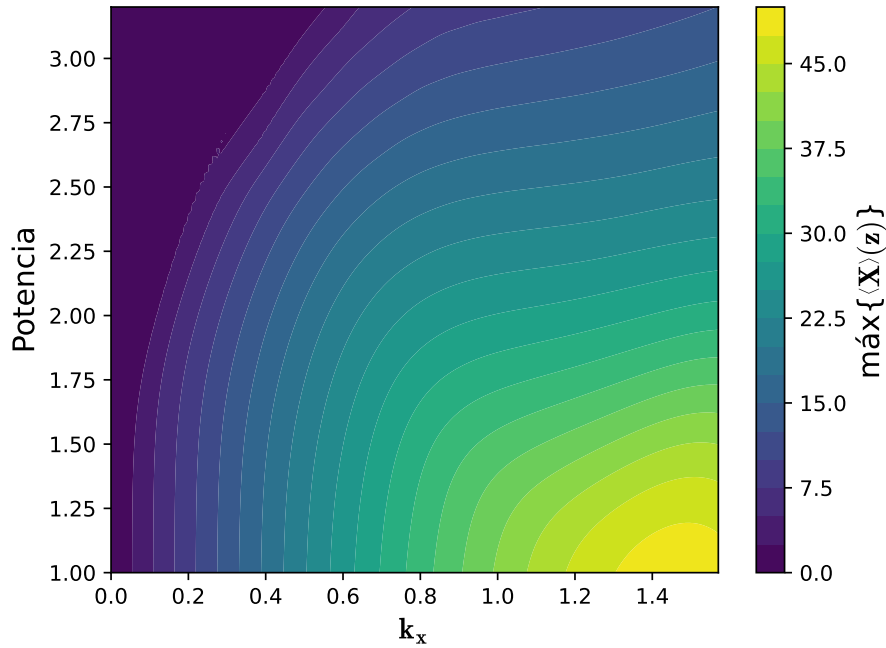


Figura 6.7: Máximo desplazamiento del centro de masa para soluciones DA con potencias de 1 a 3.2 y gradientes de fase de 0 a $\pi/2$.

Elegimos como input la familia DA debido solamente a que, como se explicó en la sección anterior, es la familia de soluciones que existe bajo las potencias críticas, pero también se pueden elegir las otras familias para potencias sobre las bifurcaciones donde nacen. Como primer acercamiento, realizamos un barrido de parámetros, variando potencia (de 1 a 3.2) y el gradiente de fase (de 0 a $\pi/2$) y simulamos la dinámica para cada una de las condiciones iniciales. En cada paso de la simulación, rastreamos la componente horizontal del centro de masa $\langle X \rangle$ definida en la Ecuación 2.50. Luego, para cada condición inicial guardamos el desplazamiento máximo del centro de masa a lo largo de z . Para las simulaciones se usó una

red con $N = 6 \times 36 = 216$ sitios y se propagó hasta $z = 35$. Elegimos estos parámetros porque sabemos que el paquete de onda no llegará a los bordes del arreglo, de manera de aislar la dinámica solamente a propiedades del bulto de la red.

Los resultados se muestran en el gráfico de contorno en la Figura 6.7. Aquí podemos ver que casi toda la región escogida tiene buen transporte de energía, especialmente a bajas potencias y altos *kicks*. Para hacerse una idea, la distancia entre dos celdas unitarias adyacentes es 3, por lo tanto, incluso a altas potencias se ve un muy buen transporte de energía. Sin embargo, esto solo prueba que el centro de masa del paquete se está moviendo, pero no sabemos aún si la solución se está desarmando y esparciendo a través del arreglo (lo cual es muy normal en este tipo de sistemas, especialmente con *kicks* altos) o bien si se mantiene localizada como quisiéramos.

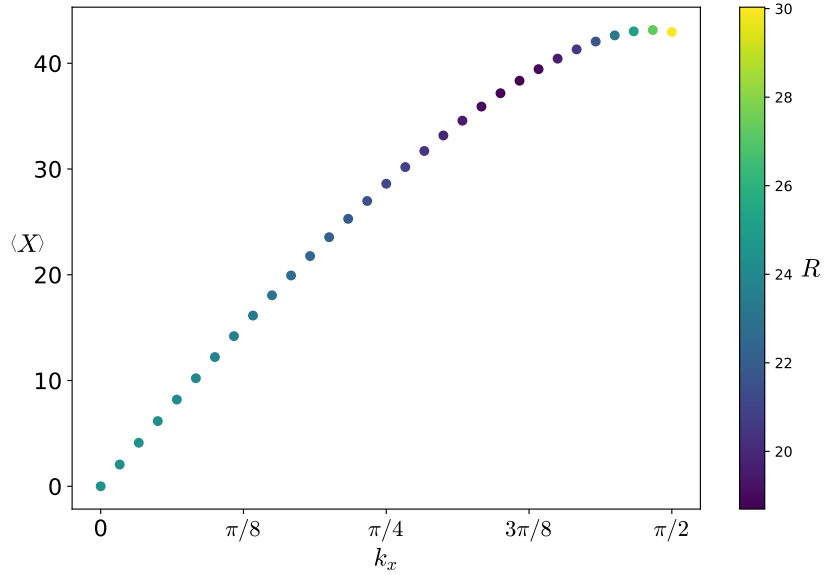


Figura 6.8: Centro de masa y grado de participación en $z = 30$ para la solución DA con $P = 1$ con distintos gradientes de fase.

Afortunadamente, al explorar en detalle las simulaciones de distintos puntos en la Figura 6.7, encontramos que casi siempre las soluciones se mantienen igual de localizadas que antes de la propagación. Por ejemplo, simulamos la evolución para la solución con $P = 1$ con 31 *kicks* diferentes y graficamos en la Figura 6.8 el centro de masa del perfil en $z = 30$ vs el *kick* de la condición inicial. Adicionalmente, calculamos el grado de participación del perfil de salida y lo graficamos como el color de los marcadores de cada una de las simulaciones. Debido a que la condición inicial con $k = 0$ es una solución estable, el grado de participación del primer punto de la Figura 6.8 indica el tamaño del paquete de energía de todas las condiciones iniciales. De esta forma, podemos observar en el gráfico que incluso a altos *kicks* la solución no se extiende más de lo que es en un principio. Además, podemos ver en esta figura que podemos elegir entre varias posiciones de salida para la luz al aplicar distintos gradientes de fase. Esta propiedad en particular propone este sistema físico para aplicaciones en las que podemos elegir un puerto de salida variando solamente la estructura de fase de

la condición inicial. Para mostrar otro ejemplo de buena movilidad a una potencia más alta, ilustramos la evolución dinámica de la solución DA con potencia $P = 2$ perturbada con $k = 0.35$ en la Figura 6.9(a). En la Figura 6.9(b) graficamos el centro de masa en función de z para dicha evolución, incluyendo el grado de participación para cada z , esto último se indica con el color de los puntos del gráfico.

6.5. Potencial efectivo

Debido a la discretización natural de nuestro sistema, para mover soluciones es necesario superar un potencial tipo Peierls-Nabarro [37, 52–56]. Para entender mejor el sistema y la movilidad buscamos calcular este potencial, para esto usamos el método de restricciones descrito en la subsección 2.4.4. A partir de la Figura 6.9 podemos notar que el movimiento de la solución involucra las soluciones DA y AD, esto es esperable para potencias menores a $P = 2.9$, debido a que esta es la potencia crítica donde bifurca la solución A (ver Figura 6.6). Por esta razón implementamos el método de restricción comenzando desde la solución DA (que tiene un centro de masa $\langle X \rangle = 53.5$) restringiendo la amplitud del sitio D opuesto, de manera de terminar el método en la solución AD (con $\langle X \rangle = 55$). Repetimos este proceso para potencias entre $P = 1$ y $P = 2.9$.

Si observamos las Figuras 6.4(b) y 6.6(a) podemos notar que a medida que la potencia aumenta, el Hamiltoniano de ambas soluciones (AD y DA) decrece rápidamente comparado con la diferencia de Hamiltoniano ΔH entre ellas para una misma potencia. Por esta razón, para una mejor visualización de los resultados, normalizamos los Hamiltonianos en cada potencia dividiéndolos por el valor absoluto del Hamiltoniano de la solución DA (el cual es el más negativo). Como todos los Hamiltonianos para estas soluciones son negativos, dividimos por $-H$ para conservar la idea de que las soluciones estables son mínimos del Hamiltoniano normalizado.

Los resultados son presentados en la Figura 6.10(a), de donde se puede apreciar la forma del potencial efectivo de Peierls-Nabarro. Como era de esperarse, se muestra que las soluciones DA ($\langle X \rangle = 53.5$) son las estables. Además, podemos ver que a potencias bajas la diferencia de Hamiltoniano entre las dos soluciones es prácticamente despreciable, permitiendo que la solución viaje con una velocidad casi constante y sin difractar, tal como se mostró antes en las Figuras 6.7 y 6.8.

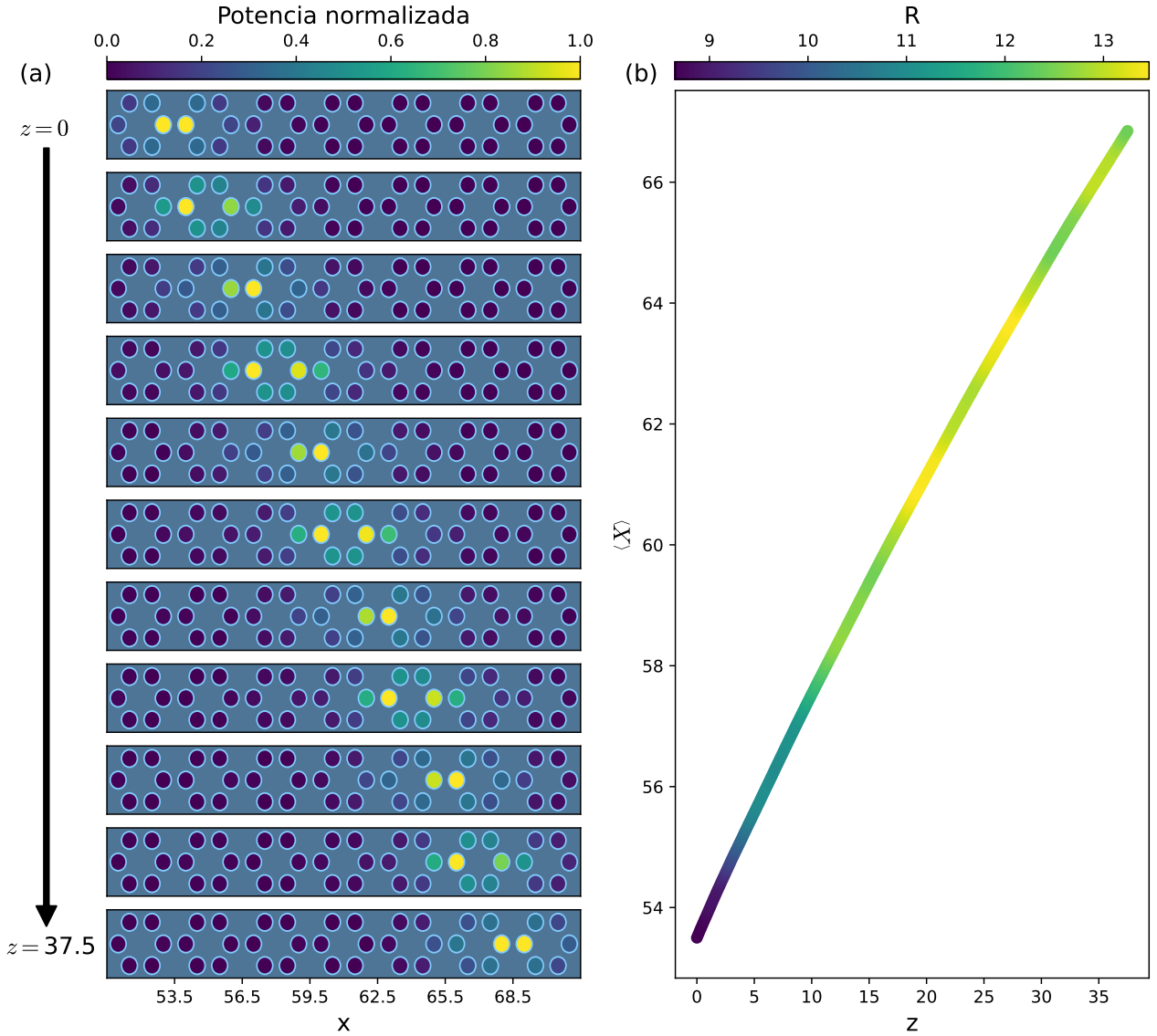


Figura 6.9: Simulación de la solución DA con $P = 2$ y $k = 0.35$. (a) Evolución del perfil de potencias en la red. (b) Centro de masa en función de z incluyendo el grado de participación de los perfiles representado por el color de los puntos.

Para estudiar el potencial sobre $P = 2.9$ es necesario modificar la estrategia usada. Ahora debemos realizar dos métodos de restricción para poder estudiar el potencial entre las tres soluciones en juego (DA, A y AD). De esta forma se realizaron dos cálculos análogos para soluciones con potencias desde $P = 2.9$ hasta $P = 4$, uno conectando las soluciones DA y A, mientras que el otro conecta las soluciones A y AD. Para ambos casos se usó como semilla la solución A la cual tiene un centro de masa que varía en función de la potencia, en un comienzo bifurca desde la solución DA que tiene $\langle X \rangle = 53.5$ y a potencias muy altas converge a $\langle X \rangle = 54$. La amplitud donde se aplicó la restricción fue el sitio D de la celda anterior y el de la misma celda según corresponde para cada uno de los casos. Los resultados se presentan en la Figura 6.10(b) donde se pueden apreciar claramente cinco soluciones en el potencial construido, tres soluciones inestables (máximos del potencial) correspondientes

a las soluciones DA ($\langle X \rangle = 53.5$ y $\langle X \rangle = 56.5$) y AD ($\langle X \rangle = 55$), además de la solución A que es estable y la solución simétrica a esta (que podríamos llamar D siguiendo la convención usada hasta ahora). También podemos ver como varía el centro de masa de la solución A (y D), el cual se acerca a la solución en DA al bajar la potencia.

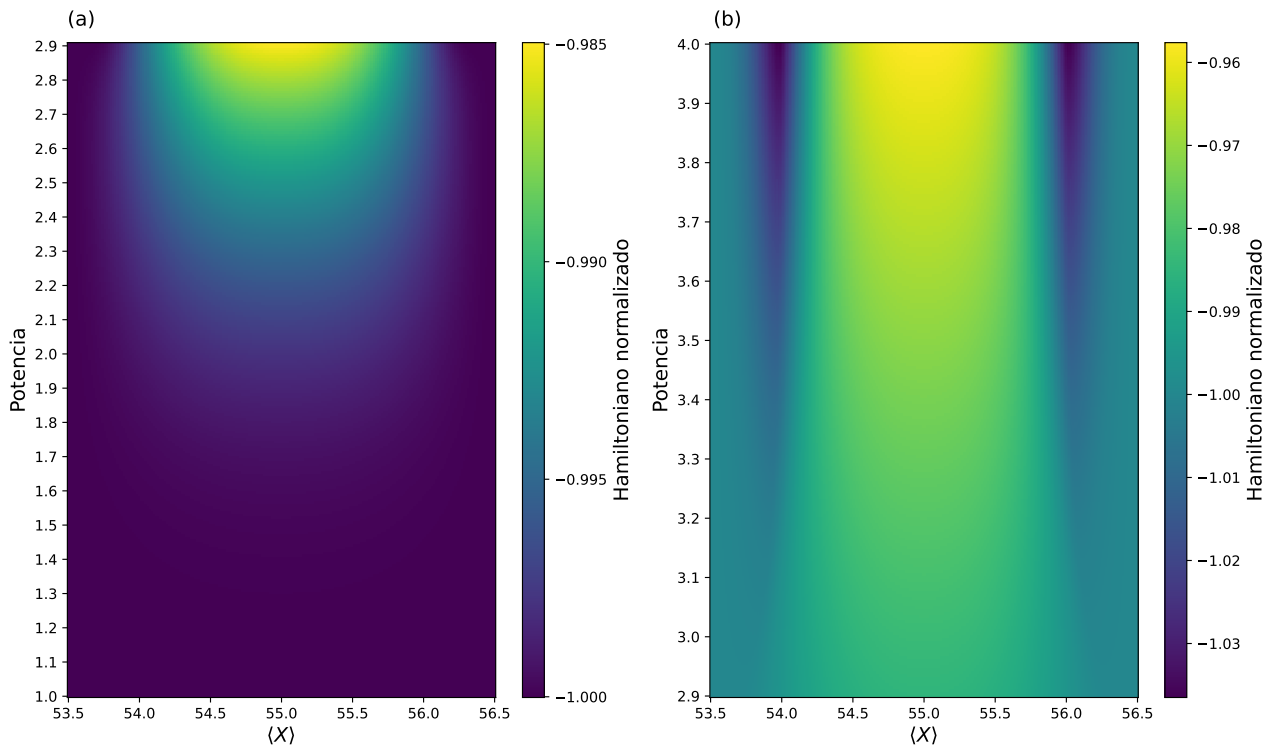


Figura 6.10: Hamiltoniano normalizado calculado a través del método de restricción, mostrando la forma del potencial de Peierls-Nabarro.

6.6. Movilidad con una condición inicial de dos sitios

Teniendo en mente una implementación experimental del sistema para ver el fenómeno de movilidad que se presenta es que exploramos la evolución dinámica con la excitación de solo dos sitios centrales (similar a la familia DA), en vez de la solución exacta, de manera de tener una condición inicial más abordable experimentalmente. Realizamos simulaciones hasta $z = 50$ para un set de parámetros similar al de la Figura 6.7, variando la potencia de 0 a 3 y el gradiente de fase de 0 a $\pi/2$. Al igual que en el caso de la Figura 6.7 graficamos el máximo desplazamiento del centro de masa. Los resultados son presentados en el gráfico de contornos de la figura 6.11.

A primera vista estos resultados se ven prometedores, sin embargo, son algo engañosos. Si miramos en detalle las simulaciones para *kicks* bajos o nulos (en la Figura 6.12 se muestran algunos casos representativos) podremos ver una evolución muy similar a una difracción discreta (ver Figura 2.6) con dos lóbulos viajando cada uno en una dirección diferente. Esto es algo esperado para potencias bajas donde el sistema es más cercano al régimen lineal, sin embargo, este efecto todavía se puede ver para potencias más altas. Como ejemplo,

graficamos en la Figura 6.12 las evoluciones de un input de dos sitios con potencia $P = 2$ con cuatro *kicks* distintos, mientras que en la Figura 6.13 se muestra el centro de masa y el grado de participación correspondientes a estas simulaciones. Al observar en detalle la Figura 6.12 se puede apreciar el fenómeno que señalamos: a medida que el *kick* aumenta, vemos que la evolución es prácticamente igual que para $k = 0$, salvo por que uno de los lóbulos carga más potencia que el otro, causando que el centro de masa se desplace. Este fenómeno permite transportar energía de forma controlada para *kicks* altos, sin embargo, por lo que mencionamos previamente, consideramos que el mecanismo de movilidad es distinto al caso de las secciones anteriores y amerita ser estudiado en detalle a futuro. Como ejemplo de movilidad, se muestra en la Figura 6.14 la evolución de la excitación de dos sitios con potencia $P = 2.5$ y un ángulo de $k = 0.75$, en esta evolución podemos ver que si se escoge cuidadosamente el largo de propagación es posible conseguir que la luz esté localizada en pocos sitios.

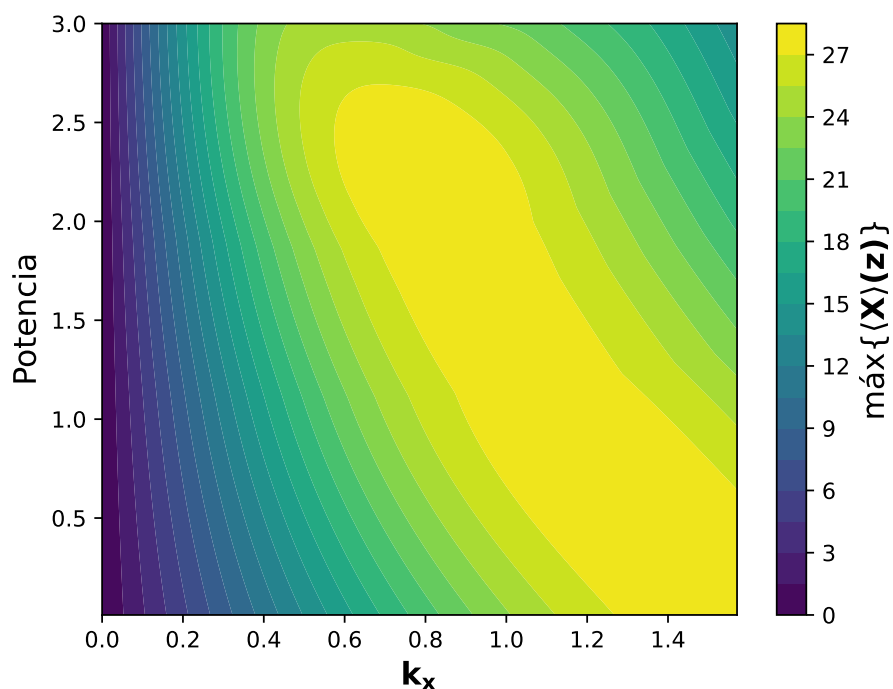


Figura 6.11: Máximo desplazamiento del centro de masa para una condición inicial de dos sitios en función de la potencia y el *kick*.

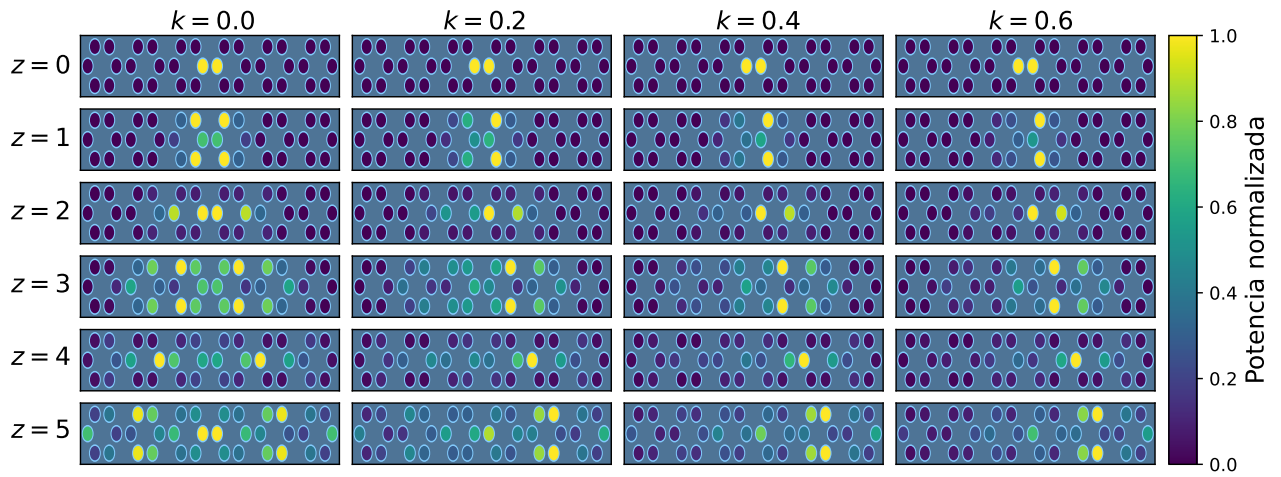


Figura 6.12: Evolución de condición inicial de dos sitios con potencia total $P = 2$ para distintos *kicks*.

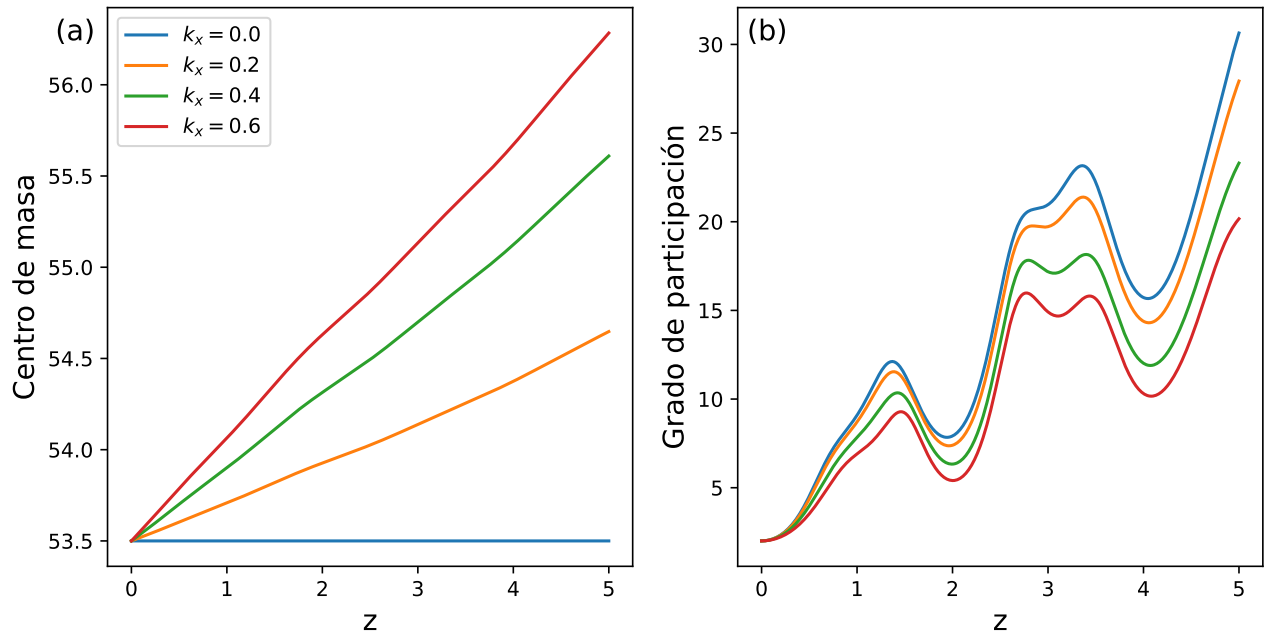


Figura 6.13: (a) Centro de masa y (b) grado de participación en función de la longitud de propagación, calculados a partir de las cuatro simulaciones de la Figura 6.12.

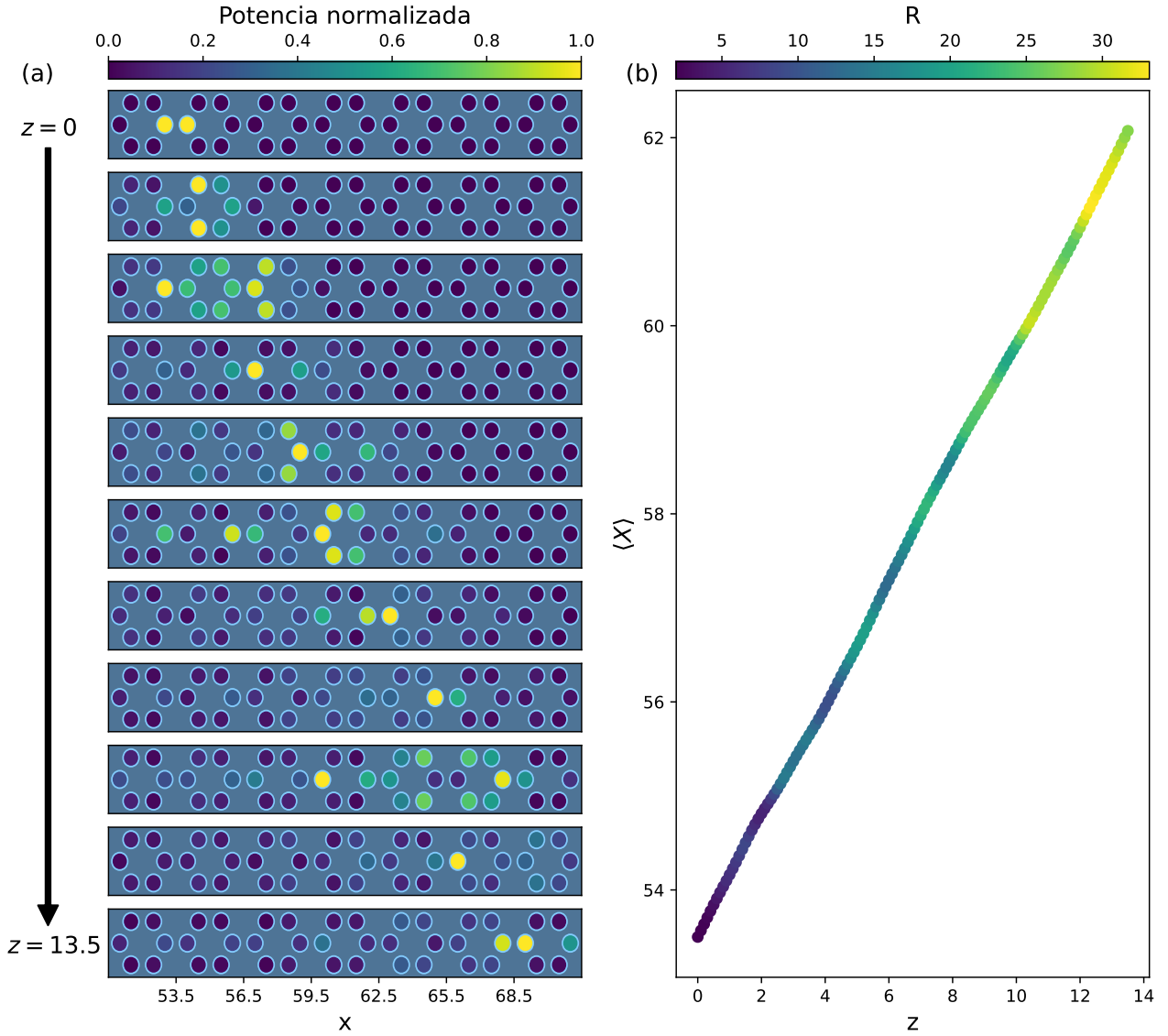


Figura 6.14: Simulación con input de dos sitios con $P = 2$ y $k = 0.75$. (a) Evolución del perfil de potencias en la red. (b) Centro de masa en función de z incluyendo el grado de participación de los perfiles representado por el color de los puntos.

6.7. Conclusiones

En este capítulo se ha mostrado que usando una cinta de grafeno se pueden obtener dos bandas completamente planas, las cuales tienen modos compactos que ocupan solo cuatro sitios. Al incluir no-linealidad tipo Kerr al sistema, mostramos que los modos compactos existen como soluciones exactas sin un umbral mínimo de potencia. Aparte de estas soluciones, mostramos la existencia de tres familias de soluciones localizadas no compactas de las cuales una emerge desde un extremo de una banda lineal y las otras dos bifurcan desde la primera en dos bifurcaciones tipo *pitchfork*. Por otro lado, logramos encontrar regiones de parámetros donde podemos mover estas soluciones a través de la red, fenómeno prometedor teniendo en mente aplicaciones tecnológicas; además, mostramos que se pueden obtener

resultados similares de movilidad con condiciones iniciales mucho más simples, las cuales podrían ser implementadas experimentalmente sin mayores complicaciones. Para comprender mejor la movilidad, construimos numéricamente el potencial de Peierls-Nabarro que afecta a las soluciones al momento de moverse en la red. Todo lo presentado aporta a ampliar el conocimiento sobre movilidad en redes no lineales y se presenta una geometría nueva donde se puede encontrar movilidad controlada de energía con muy pocas pérdidas, lo cual podría ser un gran aporte para dispositivos de comunicación y transmisión de información. Además, se encontró un fenómeno novedoso de movilidad con la excitación de solo dos sitios, lo cual plantea un problema interesante para investigar a futuro, ya que se logró observar que el mecanismo con que la red permite desplazar la energía no es el habitual en este tipo de sistemas. Por último, pensando en una implementación experimental, también queda como trabajo a futuro investigar la posibilidad de mover una condición inicial más cercana al modo calculado numéricamente. Por ejemplo, usando una condición inicial que ocupe los seis sitios con más potencia del modo, lo cual podría disminuir considerablemente las pérdidas producidas por el movimiento. Sin embargo, también es posible considerar otros sistemas fotónicos donde se tengan más opciones para excitar de mejor manera el modo deseado, por ejemplo, en redes de polaritones es posible controlar la energía (símil de la frecuencia λ en nuestros sistemas) de la condición inicial [97], con lo que se podría observar el fenómeno de movilidad considerando las técnicas experimentales contemporáneas.

Capítulo 7

Conclusiones

A continuación, presentaremos las conclusiones específicas de cada uno de los tres trabajos expuestos en los Capítulos 4, 5 y 6. Finalmente cerraremos esta tesis con las conclusiones generales y una breve perspectiva hacia el futuro de las investigaciones en el área.

En el Capítulo 4, se propuso un nuevo esquema para inducir flujos magnéticos sintéticos en sistemas de redes fotónicas. Este efecto surge a partir de la interacción entre los modos fundamentales (S) y excitados (P), observando un flujo neto de π por plaqueta [83]. Experimentalmente demostramos este sistema fabricando redes fotónicas multiorbitales con geometría tipo diamante, donde observamos el enjaulamiento de Aharonov-Bohm para ambos modos, lo cual es una prueba experimental directa para la inducción de un flujo magnético efectivo. Demostramos la posibilidad de controlar la dirección de transporte determinada por la condición inicial y, por lo tanto, nuestra propuesta entrega una solución simple para el transporte y la localización en redes. Creemos que nuestra configuración multiorbital tiene la flexibilidad de incluir más efectos en estudios futuros incluyendo, por ejemplo, no-hermiticidad [84] o efectos no lineales [85], con lo que se podrían conseguir nuevos fenómenos interesantes. Nuestros descubrimientos podrían ser particularmente útiles en la creación y manipulación de compuertas lógicas concatenadas [86, 87], lo cual podría ser una dirección prometedora en la investigación en torno a la computación cuántica [88].

Respecto al Capítulo 5, la red diamante-octagonal es conocida por tener interesantes propiedades teóricas, en particular para el caso en que el acoplamiento diagonal dentro de la celda unitaria es ajustado finamente para ser idéntico al acoplamiento entre primeros vecinos. Este caso se identifica por una relación de dispersión lineal con dos bandas exactamente planas y dos modos de banda plana ortogonales y compactos, ambos con distribución idéntica de potencia, pero con diferentes estructuras de fase. En este trabajo propusimos una forma de realizar experimentalmente dicha red, usando guías de ondas fotónicas con forma elíptica. Para dicho modelo, analizamos las propiedades de sus modos tanto en el régimen lineal, como en el no lineal tipo Kerr. Encontramos que los modos localizados de banda plana continúan existiendo como soluciones compactas exactas en presencia de no linealidad. Sin embargo, estas soluciones son típicamente inestables en el régimen no lineal, a excepción del compactón C2 a potencias altas y con no linealidad enfocante.

Por lo tanto, desde el punto de vista de las aplicaciones, la red diamante-octagonal podría ser de interés principalmente por el uso de sus propiedades lineales. Con dos bandas planas a distintas frecuencias, una oscilación de bandas planas puede ser implementada para diseminar y controlar, efectivamente, la cantidad de energía en una región dada de la red y con una frecuencia muy bien definida. Adicionalmente, como se pueden excitar simultáneamente las soluciones compactas en distintos sitios de la red, la cantidad de posibles combinaciones crece como 2^{N_A} , con N_A el número de posiciones posibles donde se puede excitar el anillo (2 por la diferencia de excitación en fase y en contrafase) [34]. Esta codificación puede ser mejorada también si se excitan simultáneamente soluciones C1 y C2, agregando un grado de libertad extra. Esto es ciertamente un aporte para un objetivo importante en la actualidad de las comunicaciones ópticas, donde diferentes formas de codificación son requeridas para encriptar eficientemente una enorme cantidad de datos digitales.

En el Capítulo 6, se ha mostrado que usando una cinta de grafeno se pueden obtener dos bandas completamente planas, las cuales tienen modos compactos que ocupan solo cuatro sitios. Al incluir no-linealidad tipo Kerr al sistema, mostramos que los modos compactos existen como soluciones exactas sin un umbral mínimo de potencia. Aparte de estas soluciones, mostramos la existencia de tres familias de soluciones localizadas no compactas de las cuales una emerge desde un extremo de una banda lineal y las otras dos bifurcan desde la primera en dos bifurcaciones tipo *pitchfork*. Por otro lado, logramos encontrar regiones de parámetros donde podemos mover estas soluciones a través de la red, fenómeno prometedor teniendo en mente aplicaciones tecnológicas; además, mostramos que se pueden obtener resultados similares de movilidad con condiciones iniciales mucho más simples, las cuales podrían ser implementadas experimentalmente sin mayores complicaciones. Para comprender mejor la movilidad, construimos numéricamente el potencial de Peierls-Nabarro que afecta a las soluciones al momento de moverse en la red. Todo lo presentado aporta a ampliar el conocimiento sobre movilidad en redes no lineales y se presenta una geometría nueva donde se puede encontrar movilidad controlada de energía con muy pocas pérdidas, lo cual podría ser un gran aporte para dispositivos de comunicación y transmisión de información. Además, se encontró un fenómeno novedoso de movilidad con la excitación de solo dos sitios, lo cual plantea un problema interesante para investigar a futuro, ya que se logró observar que el mecanismo con que la red permite desplazar la energía no es el habitual en este tipo de sistemas. Por último, pensando en una implementación experimental, también queda como trabajo a futuro investigar la posibilidad de mover una condición inicial más cercana al modo calculado numéricamente. Por ejemplo, usando una condición inicial que ocupe los seis sitios con más potencia del modo, lo cual podría disminuir considerablemente las pérdidas producidas por el movimiento. Sin embargo, también es posible considerar otros sistemas fotónicos donde se tengan más opciones para excitar de mejor manera el modo deseado, por ejemplo, en redes de polaritones es posible controlar la energía (símil de la frecuencia λ en nuestros sistemas) de la condición inicial [97], con lo que se podría observar el fenómeno de movilidad considerando las técnicas experimentales contemporáneas.

A partir de los tres trabajos que componen esta tesis, podemos concluir que las redes

fotónicas escritas mediante la técnica de láser de femtosegundos presentan una plataforma excelente para la investigación científica básica, pero también presentan cualidades muy interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones. Las geometrías que poseen los sistemas fotónicos discretos permiten observar una gran variedad de fenómenos interesantes y en esta tesis mostramos solo unos pocos. Estos y otros pueden ser aprovechados dentro de lo que se conoce como segunda revolución cuántica [98], ya que pueden ser usados para controlar luz cuántica aprovechando sus cualidades para aplicaciones en computación cuántica, metrología cuántica, entre otras. Desde el punto de vista de la ciencia básica, estudiamos fenómenos interesantes, como el efecto Aharonov-Bohm al incluir flujos magnéticos efectivos (de una forma no propuesta hasta ahora), estudiamos movilidad de soluciones no lineales localizadas calculando el potencial de Peierls-Nabarro asociado, y encontramos una interesante dependencia del estado fundamental con el tamaño de la red. Todas las cualidades y particularidades de cada sistema estudiado en esta tesis conforman un aporte sustancial al estudio del control de la luz en redes, donde observamos y demostramos distintos mecanismos, tanto de localización como de transporte, los cuales permiten controlar de distintas formas la energía dentro de sistemas periódicos. Como ya mencionamos antes, todos los trabajos incluidos en la tesis son siempre motivados en la perspectiva de las aplicaciones. Por esta razón, incluso cuando dos son trabajos teóricos, estos son enfocados en ser implementados experimentalmente sin mayores problemas. A su vez, el trabajo experimental incluido presenta y utiliza por primera vez desde su descubrimiento el acoplamiento interorbital [32], el cual es una herramienta novedosa que abre puertas para nuevos trabajos experimentales con perspectivas en aplicaciones tecnológicas.

Bibliografía

- [1] Feynman, R., Leighton, R. B., y Sands, M., *The Feynman Lectures on Physics*. Addison Wesley Longman, 1970.
- [2] Kaxiras, E., *Atomic and Electronic Structure of Solids*. Cambridge University Press, 2019.
- [3] Kohn, W., “An essay on condensed matter physics in the twentieth century,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 71, no. 2, p. S59, 1999.
- [4] Battiston, F., Musciotto, F., Wang, D., Barabási, A., Szell, M., y Sinatra, R., “Taking census of physics,” *Nature Reviews Physics*, vol. 1, p. 89, 2019, [doi:10.1038/s42254-018-0005-3](https://doi.org/10.1038/s42254-018-0005-3).
- [5] Barends, R., Kelly, J., Megrant, A., Veitia, A., Sank, D., Jeffrey, E., White, T. C., Mutus, J., Fowler, A. G., Campbell, B., Chen, Y., Chen, Z., Chiaro, B., Dunsworth, A., Neill, C., O’Malley, P., Roushan, P., Vainsencher, A., Wenner, J., Korotkov, A. N., Cleland, A. N., y Martinis, J. M., “Superconducting quantum circuits at the surface code threshold for fault tolerance,” *Nature*, vol. 508, pp. 500–503, 2014, [doi:10.1038/nature13171](https://doi.org/10.1038/nature13171).
- [6] DiCarlo, L., Chow, J. M., Gambetta, J. M., Bishop, L. S., Johnson, B. R., Schuster, D. I., Majer, J., Blais, A., Frunzio, L., Girvin, S. M., y Schoelkopf, R. J., “Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor,” *Nature*, vol. 460, pp. 240–244, 2009, [doi:10.1038/nature08121](https://doi.org/10.1038/nature08121).
- [7] Debnath, S., Linke, N. M., Figgatt, C., Landsman, K. A., Wright, K., y Monroe, C., “Demonstration of a small programmable quantum computer with atomic qubits,” *Nature*, vol. 536, pp. 63–66, 2016, [doi:10.1038/nature18648](https://doi.org/10.1038/nature18648).
- [8] Monz, T., Nigg, D., Martinez, E. A., Brandl, M. F., Schindler, P., Rines, R., Wang, S. X., Chuang, I. L., y Blatt, R., “Realization of a scalable shor algorithm,” *Science*, vol. 351, no. 6277, pp. 1068–1070, 2016, [doi:10.1126/science.aad9480](https://doi.org/10.1126/science.aad9480).
- [9] Heo, J. y Choi, S.-G., “Photonic scheme of quantum phase estimation for quantum algorithms via quantum dots,” *Quantum Information Processing*, vol. 21, p. 6, 2021, [doi:10.1007/s11128-021-03335-2](https://doi.org/10.1007/s11128-021-03335-2).
- [10] Jones, J. A., “Quantum computing with nmr,” *Progress in Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy*, vol. 59, no. 2, pp. 91–120, 2011, [doi:https://doi.org/10.1016/j.pnmrs.2010.11.001](https://doi.org/10.1016/j.pnmrs.2010.11.001).

- [11] Linden, N., Barjat, H., y Freeman, R., “An implementation of the deutsch–jozsa algorithm on a three-qubit nmr quantum computer,” *Chemical Physics Letters*, vol. 296, no. 1, pp. 61–67, 1998, [doi:https://doi.org/10.1016/S0009-2614\(98\)01015-X](https://doi.org/10.1016/S0009-2614(98)01015-X).
- [12] Martín-López, E., Laing, A., Lawson, T., Alvarez, R., Zhou, X.-Q., y O’Brien, J. L., “Experimental realization of shor’s quantum factoring algorithm using qubit recycling,” *Nature Photonics*, vol. 6, pp. 773–776, 2012, [doi:10.1038/nphoton.2012.259](https://doi.org/10.1038/nphoton.2012.259).
- [13] Paesani, S., Gentile, A. A., Santagati, R., Wang, J., Wiebe, N., Tew, D. P., O’Brien, J. L., y Thompson, M. G., “Experimental bayesian quantum phase estimation on a silicon photonic chip,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 118, p. 100503, 2017, [doi:10.1103/PhysRevLett.118.100503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.100503).
- [14] Knill, E., Laflamme, R., y Milburn, G. J., “A scheme for efficient quantum computation with linear optics,” *Nature*, vol. 409, pp. 46–52, 2001, [doi:10.1038/35051009](https://doi.org/10.1038/35051009).
- [15] Zambrano, L., Pereira, L., Martínez, D., Cañas, G., Lima, G., y Delgado, A., “Estimation of pure states using three measurement bases,” *Phys. Rev. Applied*, vol. 14, p. 064004, 2020, [doi:10.1103/PhysRevApplied.14.064004](https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.14.064004).
- [16] Poblete, R. A. V., “Photonic flat band dynamics,” *Advances in Physics: X*, vol. 6, no. 1, p. 1878057, 2021, [doi:10.1080/23746149.2021.1878057](https://doi.org/10.1080/23746149.2021.1878057).
- [17] Szameit, A. y Nolte, S., “Discrete optics in femtosecond-laser-written photonic structures,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 43, no. 16, p. 163001, 2010.
- [18] Somekh, S., Garmire, E., Yariv, A., Garvin, H., y Hunsperger, R., “Channel optical waveguide directional couplers,” *Applied physics letters*, vol. 22, no. 1, pp. 46–47, 1973.
- [19] Louisell, W. H., *Coupled mode and parametric electronics*. Wiley, 1960.
- [20] Eisenberg, H., Silberberg, Y., Morandotti, R., Boyd, A., y Aitchison, J., “Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays,” *Physical Review Letters*, vol. 81, no. 16, p. 3383, 1998.
- [21] Christodoulides, D. N. y Joseph, R. I., “Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides,” *Opt. Lett.*, vol. 13, pp. 794–796, 1988, [doi:10.1364/OL.13.000794](https://doi.org/10.1364/OL.13.000794).
- [22] Pertsch, T., Dannberg, P., Elflein, W., Bräuer, A., y Lederer, F., “Optical bloch oscillations in temperature tuned waveguide arrays,” *Physical Review Letters*, vol. 83, no. 23, p. 4752, 1999.
- [23] Mandelik, D., Eisenberg, H., Silberberg, Y., Morandotti, R., y Aitchison, J., “Band-gap structure of waveguide arrays and excitation of floquet-bloch solitons,” *Physical review letters*, vol. 90, no. 5, p. 053902, 2003.
- [24] Fleischer, J. W., Carmon, T., Segev, M., Efremidis, N. K., y Christodoulides, D. N., “Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays,” *Physical review letters*, vol. 90, no. 2, p. 023902, 2003.

- [25] Schwartz, T., Bartal, G., Fishman, S., y Segev, M., “Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices,” *Nature*, vol. 446, pp. 52–55, 2007, doi:<https://doi.org/10.1038/nature05623>.
- [26] Davis, K. M., Miura, K., Sugimoto, N., y Hirao, K., “Writing waveguides in glass with a femtosecond laser,” *Opt. Lett.*, vol. 21, pp. 1729–1731, 1996, doi:[10.1364/OL.21.001729](https://doi.org/10.1364/OL.21.001729).
- [27] Streltsov, A. M. y Borrelli, N. F., “Study of femtosecond-laser-written waveguides in glasses,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 19, pp. 2496–2504, 2002, doi:[10.1364/JOSAB.19.002496](https://doi.org/10.1364/JOSAB.19.002496).
- [28] Szameit, A., Blömer, D., Burghoff, J., Schreiber, T., Pertsch, T., Nolte, S., Tünnermann, A., y Lederer, F., “Discrete nonlinear localization in femtosecond laser written waveguides in fused silica,” *Opt. Express*, vol. 13, pp. 10552–10557, 2005, doi:[10.1364/OPEX.13.010552](https://doi.org/10.1364/OPEX.13.010552).
- [29] Szameit, A., Garanovich, I. L., Heinrich, M., Sukhorukov, A. A., Dreisow, F., Pertsch, T., Nolte, S., Tünnermann, A., Longhi, S., y Kivshar, Y. S., “Observation of two-dimensional dynamic localization of light,” *Physical review letters*, vol. 104, no. 22, p. 223903, 2010.
- [30] Keil, R., Zeuner, J. M., Dreisow, F., Heinrich, M., Tünnermann, A., Nolte, S., y Szameit, A., “The random mass dirac model and long-range correlations on an integrated optical platform,” *Nature communications*, vol. 4, no. 1, pp. 1–9, 2013.
- [31] Rechtsman, M. C., Zeuner, J. M., Plotnik, Y., Lumer, Y., Podolsky, D., Dreisow, F., Nolte, S., Segev, M., y Szameit, A., “Photonic floquet topological insulators,” *Nature*, vol. 496, pp. 196–200, 2013, doi:<https://doi.org/10.1038/nature12066>.
- [32] Guzmán-Silva, D., Cáceres-Aravena, G., y Vicencio, R. A., “Experimental observation of interorbital coupling,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 127, p. 066601, 2021, doi:[10.1103/PhysRevLett.127.066601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.066601).
- [33] Cantillano, C., Mukherjee, S., Morales-Inostroza, L., Real, B., Cáceres-Aravena, G., Hermann-Avigliano, C., Thomson, R. R., y Vicencio, R. A., “Observation of localized ground and excited orbitals in graphene photonic ribbons,” *New Journal of Physics*, vol. 20, p. 033028, 2018, doi:[10.1088/1367-2630/aab483](https://doi.org/10.1088/1367-2630/aab483).
- [34] Vicencio, R. A., Cantillano, C., Morales-Inostroza, L., Real, B., Mejía-Cortés, C., Weimann, S., Szameit, A., y Molina, M. I., “Observation of localized states in lieb photonic lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 114, p. 245503, 2015, doi:[10.1103/PhysRevLett.114.245503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.245503).
- [35] Mukherjee, S., Spracklen, A., Choudhury, D., Goldman, N., Öhberg, P., Andersson, E., y Thomson, R. R., “Observation of a localized flat-band state in a photonic lieb lattice,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 114, p. 245504, 2015, doi:[10.1103/PhysRevLett.114.245504](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.245504).
- [36] Sutherland, B., “Localization of electronic wave functions due to local topology,” *Phys. Rev. B*, vol. 34, pp. 5208–5211, 1986, doi:[10.1103/PhysRevB.34.5208](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.34.5208).

- [37] Vicencio, R. A. y Johansson, M., “Discrete flat-band solitons in the kagome lattice,” *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 061803, 2013, [doi:10.1103/PhysRevA.87.061803](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.061803).
- [38] Flach, S., Kladko, K., y MacKay, R. S., “Energy thresholds for discrete breathers in one-, two-, and three-dimensional lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, pp. 1207–1210, 1997, [doi:10.1103/PhysRevLett.78.1207](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.1207).
- [39] Boyd, R. W., *Nonlinear Optics*. Academic Press, 2008.
- [40] Pollock, C. R. y Lipson, M., *Integrated Photonics*. Springer, 2003.
- [41] Griffiths, D. J., *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2017.
- [42] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1999.
- [43] Yariv, A. y Yeh, P., *Photonics: Optical Electronics in Modern Communications*. Oxford University Press, 2007.
- [44] Yeh, C., Ha, K., Dong, S. B., y Brown, W. P., “Single-mode optical waveguides,” *Appl. Opt.*, vol. 18, pp. 1490–1504, 1979, [doi:10.1364/AO.18.001490](https://doi.org/10.1364/AO.18.001490).
- [45] Rojas-Rojas, S., Morales-Inostroza, L., Naether, U., Xavier, G. B., Nolte, S., Szameit, A., Vicencio, R. A., Lima, G., y Delgado, A., “Analytical model for polarization-dependent light propagation in waveguide arrays and applications,” *Phys. Rev. A*, vol. 90, p. 063823, 2014, [doi:10.1103/PhysRevA.90.063823](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.063823).
- [46] Simon, S. H., *The Oxford Solid State Basics*. Oxford University Press, 2013.
- [47] Jones, A. L., “Coupling of optical fibers and scattering in fibers*,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 55, pp. 261–271, 1965, [doi:10.1364/JOSA.55.000261](https://doi.org/10.1364/JOSA.55.000261).
- [48] Lederer, F., Stegeman, G. I., Christodoulides, D. N., Assanto, G., Segev, M., y Silberberg, Y., “Discrete solitons in optics,” *Physics Reports*, vol. 463, no. 1, pp. 1–126, 2008, [doi:https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.04.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.04.004).
- [49] Dormand, J. y Prince, P., “A family of embedded runge-kutta formulae,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 6, no. 1, pp. 19–26, 1980, [doi:https://doi.org/10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3).
- [50] Kraus, Y. E., Lahini, Y., Ringel, Z., Verbin, M., y Silberberg, O., “Topological states and adiabatic pumping in quasicrystals,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 106402, 2012, [doi:10.1103/PhysRevLett.109.106402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.106402).
- [51] Moré, J. J., Garbow, B. S., y Hillstom, K. E., *User Guide for MINPACK-1*. 1980.
- [52] Kivshar, Y. S. y Campbell, D. K., “Peierls-nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes,” *Phys. Rev. E*, vol. 48, pp. 3077–3081, 1993, [doi:10.1103/PhysRevE.48.3077](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.48.3077).
- [53] Morandotti, R., Peschel, U., Aitchison, J. S., Eisenberg, H. S., y Silberberg, Y., “Dynamics of discrete solitons in optical waveguide arrays,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 2726–2729, 1999, [doi:10.1103/PhysRevLett.83.2726](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.2726).

- [54] Królikowski, W., Trutschel, U., Cronin-Golomb, M., y Schmidt-Hattenberger, C., “Solitonlike optical switching in a circular fiber array,” *Opt. Lett.*, vol. 19, pp. 320–322, 1994, [doi:10.1364/OL.19.000320](https://doi.org/10.1364/OL.19.000320).
- [55] Hadžievski, L. c. v., Maluckov, A., Stepić, M., y Kip, D., “Power controlled soliton stability and steering in lattices with saturable nonlinearity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 033901, 2004, [doi:10.1103/PhysRevLett.93.033901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.033901).
- [56] Real, B. y Vicencio, R. A., “Controlled mobility of compact discrete solitons in nonlinear lieb photonic lattices,” *Phys. Rev. A*, vol. 98, p. 053845, 2018, [doi:10.1103/PhysRevA.98.053845](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.053845).
- [57] Naether, U., Vicencio, R. A., y Stepić, M., “Mobility of high-power solitons in saturable nonlinear photonic lattices,” *Opt. Lett.*, vol. 36, pp. 1467–1469, 2011, [doi:10.1364/OL.36.001467](https://doi.org/10.1364/OL.36.001467).
- [58] Alexander, T. J., Sukhorukov, A. A., y Kivshar, Y. S., “Asymmetric vortex solitons in nonlinear periodic lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 063901, 2004, [doi:10.1103/PhysRevLett.93.063901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.063901).
- [59] Nasu, Y., Kohtoku, M., y Hibino, Y., “Low-loss waveguides written with a femtosecond laser for flexible interconnection in a planar light-wave circuit,” *Opt. Lett.*, vol. 30, pp. 723–725, 2005, [doi:10.1364/OL.30.000723](https://doi.org/10.1364/OL.30.000723).
- [60] Cantillano, C., Morales-Inostroza, L., Real, B., Rojas-Rojas, S., Delgado, A., Szameit, A., y Vicencio, R. A., “Observation of dipolar transport in one-dimensional photonic lattices,” *Science Bulletin*, vol. 62, no. 5, pp. 339–344, 2017, [doi:https://doi.org/10.1016/j.scib.2017.01.035](https://doi.org/10.1016/j.scib.2017.01.035).
- [61] Aharonov, Y. y Bohm, D., “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory,” *Phys. Rev.*, vol. 115, pp. 485–491, 1959, [doi:10.1103/PhysRev.115.485](https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.485).
- [62] Vidal, J., Mosseri, R., y Douçot, B., “Aharonov-bohm cages in two-dimensional structures,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 5888–5891, 1998, [doi:10.1103/PhysRevLett.81.5888](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.5888).
- [63] Vidal, J., Douçot, B., Mosseri, R., y Butaud, P., “Interaction induced delocalization for two particles in a periodic potential,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 3906–3909, 2000, [doi:10.1103/PhysRevLett.85.3906](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.3906).
- [64] Haydock, R., Heine, V., y Kelly, M. J., “Electronic structure based on the local atomic environment for tight-binding bands. ii,” *Journal of Physics C: Solid State Physics*, vol. 8, p. 2591, 1975, [doi:10.1088/0022-3719/8/16/011](https://doi.org/10.1088/0022-3719/8/16/011).
- [65] Aidelsburger, M., Nascimbene, S., y Goldman, N., “Artificial gauge fields in materials and engineered systems,” *Comptes Rendus Physique*, vol. 19, no. 6, pp. 394–432, 2018, [doi:https://doi.org/10.1016/j.crhy.2018.03.002](https://doi.org/10.1016/j.crhy.2018.03.002). Quantum simulation / Simulation quantique.
- [66] Longhi, S., “Aharonov–bohm photonic cages in waveguide and coupled reso-

- nator lattices by synthetic magnetic fields,” *Opt. Lett.*, vol. 39, pp. 5892–5895, 2014, [doi:10.1364/OL.39.005892](https://doi.org/10.1364/OL.39.005892).
- [67] Fang, K., Yu, Z., y Fan, S., “Photonic aharonov-bohm effect based on dynamic modulation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 153901, 2012, [doi:10.1103/PhysRevLett.108.153901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.153901).
- [68] Bloch, I., Dalibard, J., y Nascimbène, S., “Quantum simulations with ultracold quantum gases,” *Nature Physics*, vol. 8, pp. 267–276, 2012, [doi:10.1038/nphys2259](https://doi.org/10.1038/nphys2259).
- [69] Brosco, V., Pilozzi, L., y Conti, C., “Two-flux tunable aharonov-bohm effect in a photonic lattice,” *Phys. Rev. B*, vol. 104, p. 024306, 2021, [doi:10.1103/PhysRevB.104.024306](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.104.024306).
- [70] Perrin, H., Fuchs, J.-N., y Mosseri, R., “Tunable aharonov-bohm-like cages for quantum walks,” *Phys. Rev. B*, vol. 101, p. 235167, 2020, [doi:10.1103/PhysRevB.101.235167](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.235167).
- [71] Möller, G. y Cooper, N. R., “Correlated phases of bosons in the flat lowest band of the dice lattice,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 045306, 2012, [doi:10.1103/PhysRevLett.108.045306](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.045306).
- [72] Bermudez, A., Schaetz, T., y Porras, D., “Synthetic gauge fields for vibrational excitations of trapped ions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 150501, 2011, [doi:10.1103/PhysRevLett.107.150501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.150501).
- [73] Abilio, C. C., Butaud, P., Fournier, T., Pannetier, B., Vidal, J., Tedesco, S., y Dalzotto, B., “Magnetic field induced localization in a two-dimensional superconducting wire network,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 5102–5105, 1999, [doi:10.1103/PhysRevLett.83.5102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.5102).
- [74] Naud, C., Faini, G., y Maily, D., “Aharonov-bohm cages in 2d normal metal networks,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, pp. 5104–5107, 2001, [doi:10.1103/PhysRevLett.86.5104](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5104).
- [75] Mukherjee, S., Di Liberto, M., Öhberg, P., Thomson, R. R., y Goldman, N., “Experimental observation of aharonov-bohm cages in photonic lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 121, p. 075502, 2018, [doi:10.1103/PhysRevLett.121.075502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.075502).
- [76] Kremer, M., Petrides, I., Meyer, E., Heinrich, M., Zilberberg, O., y Szameit, A., “A square-root topological insulator with non-quantized indices realized with photonic aharonov-bohm cages,” *Nat. Commun.*, vol. 11, p. 907, 2020, [doi:10.1038/s41467-020-14692-4](https://doi.org/10.1038/s41467-020-14692-4).
- [77] Jörg, C., Queraltó, G., Kremer, M., Pelegrí, G., Schulz, J., Szameit, A., von Freymann, G., Mompert, J., y Ahufinger, V., “Artificial gauge field switching using orbital angular momentum modes in optical waveguides,” *Light: Science & Applications*, vol. 9, p. 150, 2020, [doi:10.1038/s41377-020-00385-6](https://doi.org/10.1038/s41377-020-00385-6).
- [78] Cáceres-Aravena, G., Guzmán-Silva, D., Salinas, I., y Vicencio, R. A., “Controlled transport based on multiorbital aharonov-bohm photonic caging,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 128, p. 256602, 2022, [doi:10.1103/PhysRevLett.128.256602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.128.256602).
- [79] Cáceres-Aravena, G., Torres, L. E. F. F., y Vicencio, R. A., “Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices,”

- Phys. Rev. A, vol. 102, p. 023505, 2020, [doi:10.1103/PhysRevA.102.023505](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.023505).
- [80] Mukherjee, S. y Thomson, R. R., “Observation of localized flat-band modes in a quasi-one-dimensional photonic rhombic lattice,” *Opt. Lett.*, vol. 40, pp. 5443–5446, 2015, [doi:10.1364/OL.40.005443](https://doi.org/10.1364/OL.40.005443).
- [81] Morales-Inostroza, L. y Vicencio, R. A., “Simple method to construct flat-band lattices,” *Phys. Rev. A*, vol. 94, p. 043831, 2016, [doi:10.1103/PhysRevA.94.043831](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.043831).
- [82] Flach, S. y Gorbach, A. V., “Discrete breathers — advances in theory and applications,” *Physics Reports*, vol. 467, no. 1, pp. 1–116, 2008, [doi:https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.05.002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.05.002).
- [83] Schulz, J., Noh, J., Benalcazar, W. A., Bahl, G., y von Freymann, G., “Photonic quadrupole topological insulator using orbital-induced synthetic flux,” 2022, [doi:10.48550/ARXIV.2204.06238](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2204.06238).
- [84] Zhang, S. M. y Jin, L., “Localization in non-hermitian asymmetric rhombic lattice,” *Phys. Rev. Research*, vol. 2, p. 033127, 2020, [doi:10.1103/PhysRevResearch.2.033127](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.033127).
- [85] Chang, N., Gundogdu, S., Leykam, D., Angelakis, D. G., Kou, S., Flach, S., y Malucukov, A., “Nonlinear bloch wave dynamics in photonic aharonov–bohm cages,” *APL Photonics*, vol. 6, no. 3, p. 030801, 2021, [doi:10.1063/5.0037767](https://doi.org/10.1063/5.0037767).
- [86] Pérez, D., Gasulla, I., Mahapatra, P. D., y Capmany, J., “Principles, fundamentals, and applications of programmable integrated photonics,” *Adv. Opt. Photon.*, vol. 12, pp. 709–786, 2020, [doi:10.1364/AOP.387155](https://doi.org/10.1364/AOP.387155).
- [87] Corrielli, G., Crespi, A., y Osellame, R., “Femtosecond laser micromachining for integrated quantum photonics,” *Nanophotonics*, vol. 10, no. 15, pp. 3789–3812, 2021, [doi:doi:10.1515/nanoph-2021-0419](https://doi.org/10.1515/nanoph-2021-0419).
- [88] Arrazola, J. M., Bergholm, V., Brádler, K., Bromley, T. R., Collins, M. J., Dhand, I., Fumagalli, A., Gerrits, T., Goussev, A., Helt, L. G., Hundal, J., Isacson, T., Israel, R. B., Izaac, J., Jahangiri, S., Janik, R., Killoran, N., Kumar, S. P., Lavoie, J., Lita, A. E., Mahler, D. H., Menotti, M., Morrison, B., Nam, S. W., Neuhaus, L., Qi, H. Y., Quesada, N., Repeatingon, A., Sabapathy, K. K., Schuld, M., Su, D., Swinarton, J., Száva, A., Tan, K., Tan, P., Vaidya, V. D., Vernon, Z., Zabaneh, Z., y Zhang, Y., “Quantum circuits with many photons on a programmable nanophotonic chip,” *Nature*, vol. 591, pp. 54–60, 2021, [doi:10.1038/s41586-021-03202-1](https://doi.org/10.1038/s41586-021-03202-1).
- [89] Pal, B., “Nontrivial topological flat bands in a diamond-octagon lattice geometry,” *Phys. Rev. B*, vol. 98, p. 245116, 2018, [doi:10.1103/PhysRevB.98.245116](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.245116).
- [90] Stojanović, M. G., Krasić, M. S. a. c., Maluckov, A., Johansson, M., Salinas, I. A., Vicencio, R. A., y Stepić, M., “Localized modes in linear and nonlinear octagonal-diamond lattices with two flat bands,” *Phys. Rev. A*, vol. 102, p. 023532, 2020, [doi:10.1103/PhysRevA.102.023532](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.023532).

- [91] Szameit, A., Blömer, D., Burghoff, J., Pertsch, T., Nolte, S., y Tünnermann, A., “Hexagonal waveguide arrays written with fs-laser pulses,” *Applied Physics B*, vol. 82, pp. 507–512, 2006, [doi:10.1007/s00340-005-2127-4](https://doi.org/10.1007/s00340-005-2127-4).
- [92] Kevrekidis, P. G. y Konotop, V. V., “Bright compact breathers,” *Phys. Rev. E*, vol. 65, p. 066614, 2002, [doi:10.1103/PhysRevE.65.066614](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.066614).
- [93] Naether, U., Martínez, A. J., Guzmán-Silva, D., Molina, M. I., y Vicencio, R. A., “Self-trapping transition in nonlinear cubic lattices,” *Phys. Rev. E*, vol. 87, p. 062914, 2013, [doi:10.1103/PhysRevE.87.062914](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.062914).
- [94] Hadžievski, L. c. v., Maluckov, A., Stepić, M., y Kip, D., “Power controlled soliton stability and steering in lattices with saturable nonlinearity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 033901, 2004, [doi:10.1103/PhysRevLett.93.033901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.033901).
- [95] Molina, M. I. y Kivshar, Y. S., “Discrete and surface solitons in photonic graphene nanoribbons,” *Opt. Lett.*, vol. 35, pp. 2895–2897, 2010, [doi:10.1364/OL.35.002895](https://doi.org/10.1364/OL.35.002895).
- [96] Vicencio, R. A., Molina, M. I., y Kivshar, Y. S., “Controlled switching of discrete solitons in waveguide arrays,” *Opt. Lett.*, vol. 28, pp. 1942–1944, 2003, [doi:10.1364/OL.28.001942](https://doi.org/10.1364/OL.28.001942).
- [97] Real, B., Jamadi, O., Milićević, M., Pernet, N., St-Jean, P., Ozawa, T., Montambaux, G., Sagnes, I., Lemaître, A., Le Gratiet, L., Harouri, A., Ravets, S., Bloch, J., y Amo, A., “Semi-dirac transport and anisotropic localization in polariton honeycomb lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 125, p. 186601, 2020, [doi:10.1103/PhysRevLett.125.186601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.186601).
- [98] Dowling, J. P. y Milburn, G. J., “Quantum technology: the second quantum revolution,” *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol. 361, pp. 1655–1674, 2003, [doi:10.1098/rsta.2003.1227](https://doi.org/10.1098/rsta.2003.1227).