



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ACELERACIÓN DE ELECTRONES POR INESTABILIDADES DEBIDAS A
ANISOTROPÍAS DE TEMPERATURA EN PLASMAS ASTROFÍSICOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

ÁLVARO ALEX OSORIO HERNÁNDEZ

PROFESOR GUÍA:
MARIO RIQUELME HERNÁNDEZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MARINA STEPANOVA
PABLO MOYA FUENTES

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por ANID proyecto regular N^o 1191673 y beca
EPEC-FCFM.

SANTIAGO DE CHILE
2023

Resumen

En esta investigación se utilizaron simulaciones de plasmas tipo particle-in-cell (PIC) para estudiar el efecto de las inestabilidades debidas a anisotropías de temperatura, en la aceleración de electrones en plasmas astrofísicos débilmente colisionales. Para generar las anisotropías de temperatura nuestras simulaciones imponen un movimiento de cizalle o compresivo en el plasma. Cuando la anisotropía alcanza un valor umbral, las inestabilidades son desencadenadas, lo cual controla su aumento. Como los movimientos de cizalle o compresivo fuerzan el crecimiento de la anisotropía de presión durante todo el tiempo de simulación, nuestro estudio captura de manera consistente la evolución no lineal de las inestabilidades, sin tener que hacer suposiciones previas sobre el espectro de las ondas.

Estas inestabilidades son capaces de acelerar electrones, a través de interacciones estocásticas llamadas ‘Fermi de segundo orden’. Generando distribuciones tipo ley de potencia en altas energías. El efecto en la aceleración de los electrones dependerá principalmente del tipo de inestabilidad por anisotropía de presión que es inducida. Por ello nos concentraremos en dos regímenes físicos: uno relativista como lo son discos de acreción en torno a objetos compactos y otro no-relativista como las llamaradas solares, con la intención de entender el rol de la temperatura de los electrones en la aceleración de los mismos.

Encontramos que en ambos regímenes la aceleración es capaz de generar una ley de potencia en altas energías, siendo el régimen no-relativista el mas eficiente debido la participación de distintos tipos de modos a lo largo de la simulación.

Agradecimientos

A mi familia, por la paciencia.

Al área de Calidad de Vida de la FCFM, en especial a Felipe Bernal. Sin su valiosa ayuda y apoyo no habría podido enfrentar el desafío de sacar lo mejor de mí y ponerlo en esta tesis.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
2. Simulación del Plasma	5
2.1. Plasmas No Colisionales	5
2.2. Simulaciones Particle-in-Cell (PIC)	6
2.3. Generación de Anisotropías por Movimiento de Cizalle	7
2.4. Evolución de los Campos	8
2.4.1. Viscosidad Anisotrópica	9
2.5. Método de Simulación	18
2.5.1. Parámetros Esenciales de las Simulaciones	18
3. Interacción Onda-Partícula	21
3.1. Aceleración de Fermi de 2 orden	22
3.2. Índice espectral: Ecuación de Vlasov ‘colisional’	26
4. Resultados	30
4.1. Caso Relativista	30
4.1.1. Aceleración no-térmica	33
4.1.2. Dependencia en β_e y $\omega_{c,e}/s$	36
4.2. Caso No-Relativista	37
4.2.1. Comparación con teoría lineal.	38
4.2.2. Aceleración no-térmica	41

4.2.3.	Dependencia en $\omega_{c,e}/s$ y extrapolación a valores realistas.	44
4.2.4.	Caso Compresivo	47
5.	Conclusión	53
	Bibliografía	62
Anexo A.	Coordenadas Cizalladas	64
A.1.	Modificaciones a las ecuaciones de Maxwell	65
A.1.1.	Ecuación de Faraday: componente x	65
A.1.2.	Ecuación de Faraday: componente y	66
A.1.3.	Ecuación de Faraday: componente z	66
A.1.4.	Ecuación de Ampere: componente x	68
A.1.5.	Ecuación de Ampere: componente y	68
A.1.6.	Ecuación de Ampere: componente z	69
A.2.	Evolución del momento de las partículas en el sistema de referencia S'	70
Anexo B.	Ondas de whistler en el plasma no-colisional	73
B.1.	Modos Electromagnéticos	73

Capítulo 1

Introducción

Motivación Observacional

La presencia de partículas de alta energía es responsable de la emisión no-térmica (es decir, que no obedece a un espectro de un cuerpo negro) percibida en distintos objetos astrofísicos. Ejemplos de estos sistemas son: discos de acreción de baja luminosidad en torno a agujeros negros ([39], [50], [59]), el medio intergaláctico en clusters ([51], [7]), remanentes de supernova ([5]), jets en núcleos galácticos activos ([54], [30], [15]) e incluso en ambientes mas cercanos a nuestro planeta, como lo son la corona solar ([4], [61]) y la magnetosfera terrestre ([26]).

Esta tesis se concentra en el problema de aceleración de electrones en dos ambientes específicos: discos de acreción en torno a agujeros negros, y el caso más cercano de de las llamaradas solares. En lo que respecta a discos de acreción, sabemos que, por ejemplo, se requieren electrones no-térmicos para explicar el amplio espectro de emisión proveniente del agujero negro súpermasivo ubicado en el centro de nuestra galaxia, Sagitario A* (Sgr A*) . En efecto, modelos con electrones con distribuciones de energía tipo ley de potencia en altas energías (de aquí en adelante “cola no-térmica”), son necesarios para explicar las distintas características en el espectro de emisión y en las imágenes obtenidas desde Sgr A* ([50], [71]). Similarmente, en otros núcleos activos galácticos de baja luminosidad, la emisión de baja frecuencia en radio puede ser explicada si una pequeña parte de la energía en el flujo de acreción se concentra en una cola no-térmica ([37]). También la emisión en rayos X y en infrarrojo cercano desde Sgr A* en periodos de gran variabilidad puede ser entendida por la presencia de electrones formando una cola no-térmica ([72], [54]). Además, existen simulaciones magneto-hidrodinámicas (MHD) para el flujo de acreción en Sgr A* que demuestran que la variabilidad en rayos X mostrada por este sistema podría explicarse al incorporar electrones no-térmicos en regiones con alta magnetización ([2]). Por esta razón entender los mecanismos que operan en la aceleración de electrones y su correspondiente emisión no-térmica serán relevantes en el análisis de las imágenes y espectros de este sistema que entregará el proyecto Event Horizon Telescope (para un review, [16]). En efecto, estudios previos muestran que la emisión de los electrones de una cola no-térmica, puede dominar sobre la emisión de los electrones térmicos, aún cuando la componente no-térmica contenga un pequeña fracción de

la energía interna total ([41]).

En el caso de las llamaradas solares, sabemos hace muchos años que constituyen eficientes aceleradores de electrones, los que pueden alcanzar velocidades relativistas ([46]; [4]; [20]; [3]; [49]; [14]; [36]). Además, estos ambientes presentan una oportunidad única de estudio de la física que subyace al fenómeno de aceleración de electrones, gracias a su cercanía y a la gran variedad de instrumentos dedicados a investigar la física de la corona solar y su ulterior interacción con el medio interplanetario. Dos ejemplos notables de estos instrumentos son los satélites recientemente lanzados ‘Parker Solar Probe’¹ y ‘Solar Orbiter’², los cuales permitirán estudiar la corona solar desde distancias nunca antes logradas por una misión espacial. A pesar de aquello, no hay completo entendimiento de la manera en que el Sol acelera partículas. Si bien se cree que el fenómeno de reconexión magnética es el proceso esencial para la transferencia de energía desde los fuertes campos magnéticos presentes en la corona a las partículas, este por si solo ha tenido dificultad para explicar la aceleración de partículas necesarias para explicar las llamaradas. Por ejemplo, en los flujos producidos en la reconexión, otros mecanismos de energización pueden actuar, incluyendo aceleración de Fermi de segundo orden, entre electrones y plasmoides formados en la sabana de corriente [14]; así como aceleración de Fermi de primer orden, para el caso de re-conexión magnética relativista [24]. Esto muestra que para entender como el Sol genera partículas no-térmicas debemos considerar distintos fenómenos de aceleración, como estos actúan y se complementan en los distintos escenarios y escalas que presenta el plasma solar.

La principal dificultad para entender estos procesos es que éstos son inherentemente no lineales y multiescala. Esta última característica quiere decir que en ellos actúan fenómenos de plasmas en escalas espacio-temporales comparables al tamaño y tiempo de evolución del sistema respectivo (por ejemplo, un remanente se supernova) y además escalas espacio-temporales pequeñas, relacionadas a longitud de Debye o frecuencias como la frecuencia del plasma o la frecuencia de ciclotrón de las partículas cargadas que lo componen. El enfoque de nuestra investigación fue entonces concentrarnos en la ”micro-física”, es decir, en fenómenos de escalas espacio-temporales pequeñas, para tratar de entender qué rol pueden jugar en la aceleración de electrones en diversos plasma astrofísicos de interés observacional. En particular, nuestro foco estuvo en entender el rol que diversas inestabilidades cinéticas producidas por anisotropías de temperatura podrían tener en la aceleración de electrones.

Origen de las Anisotropías e Inestabilidades

En plasmas astrofísicos la aparición de anisotropías de temperatura es un fenómeno común, esto gracias a que en muchos sistemas la evolución temporal del plasma ocurre en escalas temporales mucho menores al tiempo típico para las colisiones Coulombianas entre partículas. De esta forma el plasma no es capaz de alcanzar el equilibrio termodinámico, permitiendo la aparición de anisotropías en la presión de las partículas. en el disco de acreción en torno a Sgr A*, en donde, como veremos más adelante, la anisotropía se genera producto de la conservación de invariantes adiabáticos relacionados con el momento en las dirección per-

¹<https://www.nasa.gov/content/goddard/parker-solar-probe>

²https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Solar_Orbiter

pendicular al campo magnético, sumado al aumento del mismo debido a los movimientos de compresión y/o cizalle al que es sometido el plasma mientras es acretrado, es capaz de generar anisotropía de la forma $T_{\perp} > T_{\parallel}$ y por lo tanto calentamiento por viscosidad anisotrópica, sin embargo hasta el momento aún no hay evidencia directa sobre la anisotropía en estos ambientes astrofísicos. De forma similar, las configuraciones de líneas de campo magnético generadas por reconexión magnética, en el Sol, pueden actuar como una trampa magnética. En la cual, el campo magnético aumenta al 'apilarse' las líneas de campo hacia la superficie del sol, pero además el loop tiene una configuración de espejos magnéticos, el cual permite atrapar los electrones con *pitch angle* grande, y aquellos con *pitch angle* pequeño escaparían hacia los 'footprints' presentes en la cromosfera. Esa configuración de espejos magnéticos permitirían generar una distribución tipo *loss cone* [19], con $T_{\perp} > T_{\parallel}$. Esta zona presenta evidencia de electrones en distribuciones no-térmicas [38], [11], [12], gracias a la gran dinámica que posee debido al flujo producto de la reconexión magnética. En particular, en este sitio se ha considerado la aceleración estocástica producto de ondas de whistler [25] [53] como un mecanismo de aceleración de electrones eficiente.

Es en presencia de estas anisotropías donde las inestabilidades cinéticas pueden ser desencadenadas utilizando la anisotropía como fuente de energía libre, lo que, a su vez, regula el crecimiento de ésta. De esta forma en los sistemas astrofísicos débilmente colisionales de interés en esta tesis encontraremos el ambiente propicio para la aparición de inestabilidades cinéticas. Estas inestabilidades, como mostramos mas adelante, pueden interactuar estocásticamente con las partículas acelerándolas a energías no térmicas.

Aceleración Estocástica

El esquema general propuesto por Fermi [18] para el fenómeno aceleración estocástica, es el 'nubes' magnéticas que se mueven y colisionan con las partículas acelerándolas mediante los campos eléctricos inducidos por la variación temporal de las mismas. Usualmente este esquema de aceleración se le llama 'Fermi de segundo orden' debido a que la ganancia de energía promedio de las partículas, es proporcional al cuadrado de la velocidad de las 'nubes' magnéticas. Esto para diferenciarlo de del mecanismo de 'Fermi de primer orden' (también llamado aceleración por difusión de ondas de choque, o DSA por sus siglas en ingles) para el cual la ganancia de energía promedio es proporcional a la velocidad de la onda de choque.

La aceleración estocástica producida por el scattering resonante entre los electrones y ondas en plasmas fue propuesto como mecanismo para acelerar partículas desde un espectro térmico hasta energías relativistas ([53], [15]). Sin embargo, la eficiencia de la aceleración depende (entre otros parámetros) del espectro de potencia de la ondas. En nuestros trabajos previos ([57] y [58]) exploramos esta idea de manera auto-consistente; es decir, sin hacer suposiciones previas sobre el espectro de potencia de las ondas. Esto se logró utilizando simulaciones de plasma tipo "particle-in-cell" (PIC). En estas simulaciones se impone de manera externa el crecimiento del campo magnético de fondo, lo cual gatilla las inestabilidades debido al crecimiento de anisotropías en la presión de los electrones. Esto nos permitió generar distintos tipos de ondas y cuantificar su efecto en la aceleración de los electrones sin necesidad de hacer suposiciones sobre sus características. El enfocarnos en los regímenes físicos de los discos de acreción en torno a agujeros negros y de las llamaradas solares responde a nuestra

intención de entender el rol del parámetro $kT_e/m_e c^2$ (la temperatura de los electrones normalizada por su energía en reposo), el cual puede variar de manera significativa en distintos ambientes astrofísicos. En efecto, en el caso relativista que caracteriza discos de acreción en torno a agujeros negros se tiene que $kT_e/m_e c^2 > \sim 1$, y en el régimen no relativista de la corona solar se tiene que $kT_e/m_e c^2 \ll 1$.

Capítulo 2

Simulación del Plasma

Las simulaciones computacionales de plasmas comprenden dos áreas principales: las basadas en la descripción cinética y las basadas en la descripción magnetohidrodinámica (MHD) del mismo, las que modelan el plasma en diferentes escalas espaciales y temporales. Para el caso de las simulaciones magnetohidrodinámicas las escalas espaciales son mucho más grandes que la longitud de Debye λ_D , la cual es la longitud de apantallamiento de fluctuaciones de densidad de carga en el plasma. Si solo estamos interesados en promedios sobre muchos λ_D podemos asumir que el plasma es eléctricamente neutro y podemos anular el lado derecho de la ley de Gauss, lo cual elimina el mecanismo responsable de las oscilaciones del plasma y las altas frecuencias asociadas con estas. El plasma MHD puede ser considerado un fluido neutro por el cual las corrientes circulan en circuitos cerrados, de esta forma no hay acumulación de carga. La aproximación MHD además típicamente supone que el plasma se mueve de forma no relativista, esto permite desprestigiar la corriente de desplazamiento al ser menor a la corriente de conducción del plasma. Otra suposición típica del enfoque MHD es considerar que el tiempo entre colisiones es menor al tiempo MHD característico, con lo cual el sistema ya no puede ser considerado no-colisional. Por lo tanto las partículas nunca estarán lejos del equilibrio termodinámico. En resumen, si buscamos estudiar fenómenos cinéticos como inestabilidades debidas a anisotropías de temperatura (las que requieren que las colisiones entre partículas sean muy poco frecuentes), este enfoque no es adecuado.

2.1. Plasmas No Colisionales

Una manera de incluir efectos no-térmicos en plasmas con baja colisionalidad, tales como la presencia de anisotropías de temperatura, aceleración de partículas o interacciones resonantes entre partículas y ondas, es simular el plasma en una escala espacial comparable a la longitud de Debye, describiremos el plasma utilizando teoría cinética de partículas. Podemos describir la evolución del plasma mediante la ecuación de Vlasov (Boltzmann no-colisional):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (2.1)$$

donde $f \equiv dN/d\mathbf{r}d\mathbf{p}$ es la función distribución de las partículas definida en el espacio de fase 6D (\mathbf{r}, \mathbf{p}) y 1D en el tiempo, \mathbf{r} es la posición de las partículas, $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ su momento y q es la carga eléctrica, junto a las ecuaciones de Maxwell para los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.5)$$

Donde la densidad de carga ρ y la corriente \mathbf{J} son definidas por sus respectivos momentos de la función distribución.

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_j q_j \int f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_j q_j \int \mathbf{v} f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2.7)$$

La sumatoria en j es sobre todas las especies de partículas en el plasma y la integración es sobre todo el espacio de velocidades. La ecuación de Vlasov para la función distribución de partículas y las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético constituyen un set completo de ecuaciones para modelar el plasma no-colisional desde primeros principios. Así podríamos resolver el problema simulando la evolución de $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ en una región del espacio de fase modelando a $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ como una función continua y resolviendo la ecuación de Vlasov en un esquema apropiado. Esto es posible pero numéricamente muy costoso dado que el espacio de fase es de 6 dimensiones y las interacciones entre todas las partículas son del orden de $N(N-1)/2 \sim N^2$.

2.2. Simulaciones Particle-in-Cell (PIC)

Alternativamente podemos realizar simulaciones tipo PIC (Particle-in-cell) en donde el plasma es representado por una colección de macro-partículas (estas representan la masa y

carga de un gran número de partículas reales) donde su evolución es obtenida integrando la fuerza de Lorentz. La evolución de los campos se obtiene resolviendo las ecuaciones de Maxwell en una grilla que representa el dominio de la simulación, y la corriente es calculada sumando las contribuciones de cada macro-partícula.

En las simulaciones PIC la ecuación de Vlasov es resuelta indirectamente al integrar las trayectorias de las partículas, este enfoque es equivalente al método de resolver directamente la ecuación de Vlasov en el espacio de fase, para mostrar esto reescribamos la ecuación de Vlasov como una ecuación de advección:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r},\mathbf{p}} \cdot (f\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

Donde $\nabla_{\mathbf{r},\mathbf{p}} = (\partial/\partial\mathbf{r}, \partial/\partial\mathbf{p})$ y $\mathbf{U} = (\mathbf{p}/\gamma m, q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c))$ de esta forma nuestra ecuación se puede resolver usando el método de las características donde reescribimos la ecuación de advección (ecuación diferencial parcial de primer orden) en las ecuaciones de Newton (ecuaciones diferenciales ordinarias) a lo largo de las curvas características que corresponden a las trayectorias de las partículas. Los tres pasos principales realizados por intervalo temporal en una simulación PIC son: (i) resolver las ecuaciones de Newton con la fuerza de Lorentz relativista para cada partícula y evolucionar su velocidad y posición, (ii) calcular la contribución de cada partícula a las densidades de carga y corriente, y (iii) resolver las ecuaciones de Maxwell y actualizar los campos en el dominio de la simulación (para más detalles de la implementación ver [62]).

2.3. Generación de Anisotropías por Movimiento de Cizalle

En esta tesis nos interesa estudiar el efecto de inestabilidades debidas a anisotropías de temperatura en la aceleración no-térmica de electrones, concentrándonos en el caso en que la temperatura perpendicular al campo magnético de fondo, $T_{\perp,e}$ es mayor que la temperatura paralela, $T_{\parallel,e}$. Para poder encontrar este efecto, resulta clave simular las inestabilidades durante tiempos prolongados, comparables a la evolución macroscópica del plasma, los que corresponden a los tiempos en que las inestabilidades debiesen operar en situaciones astrofísicas/espaciales realistas. Sin embargo, la mayoría de los estudios teóricos y numéricos de este tipo de inestabilidades, se enfocan sólo en una etapa inicial, en la que existe una evolución lineal y exponencial de éstas. Por esta razón, en esta tesis presentamos simulaciones en que las anisotropías de temperatura de los electrones son permanentemente producidas por la amplificación de un campo magnético ‘de fondo’ \mathbf{B} . Esta amplificación puede deberse a movimientos macroscópicos del plasma, los que pueden ser tipo cizalle (por ejemplo, en presencia de turbulencia no compresiva) o compresivos (por ejemplo, en ondas de choque). En estas circunstancias, la conservación del momento magnético de los electrones $\mu = v_{\perp,e}^2/B$ (donde $v_{\perp,e}$ es la componente de su velocidad perpendicular a \mathbf{B}) implica un crecimiento de $T_{\perp,e}$.

En efecto, en estas circunstancias es posible mostrar que $T_{\perp,e}$ y $T_{\parallel,e}$ obedecen las llamadas ecuaciones de estado ‘doblemente adiabáticas’ o CGL [13]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{T_{\perp,e}}{B}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{T_{\parallel,e}B^2}{n_e^2}\right) = 0, \quad (2.9)$$

donde n_e es la densidad de los electrones. Esto implica que, por ejemplo, si n_e es constante (lo cual ocurre en un movimiento tipo cizalle), la amplificación de \mathbf{B} reduce $T_{\parallel,e}$, exacerbando aún más la anisotropía $T_{\perp,e} > T_{\parallel,e}$. Si, por otro lado, \mathbf{B} crece por un movimiento compresivo, se tiene que $\mathbf{B} \propto n_e$ (por conservación del flujo magnético), y en ese caso $T_{\perp,e}$ crece mientras $T_{\parallel,e}$ se mantiene constante. De este modo, podemos ver que, independientemente de la naturaleza de la amplificación de B , esta siempre dará origen a una anisotropía $T_{\perp,e} > T_{\parallel,e}$. Por lo tanto, por medio de imponer una amplificación permanente de \mathbf{B} por movimientos de cizalle o compresivos, es posible mantener a las inestabilidades operando durante tiempos prolongados similares a los que ocurren en situaciones realistas, permitiendo así capturar de manera consistente el efecto de aceleración de electrones que las inestabilidades pueden tener. En esta tesis nos concentraremos en el caso en que las inestabilidades son generadas por movimientos tipo cizalle.

En la próxima sección explicaremos en detalle cómo un movimiento tipo cizalle puede dar origen a una amplificación de un campo magnético de fondo que permite la generación de la anisotropía $T_{\perp,e} > T_{\parallel,e}$.

2.4. Evolución de los Campos

Ahora dada la configuración de campo magnético inicial y el movimiento de cizalle impuesto evaluemos la evolución temporal del campo magnético promedio. Para ver esto usemos la ley de Ohm usual $\mathbf{J}' = \sigma\mathbf{E}'$ donde las cantidades con prima están evaluadas en el sistema de referencia en reposo con respecto al plasma. Para el caso general podemos transformar el campo eléctrico $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}$ y la densidad de corriente $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$ donde las cantidades sin prima están evaluadas en el sistema laboratorio, con esto la ley de Ohm en el caso general para un elemento de fluido con velocidad \mathbf{U} esta dada por:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (2.10)$$

Esto nos permite despejar el campo electrico,

$$\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma - \mathbf{U} \times \mathbf{B} \quad (2.11)$$

Si asumimos alta conductividad podemos despreciar el primer termino de la ecuación 2.11, usando esta definición en la ley de Faraday obtenemos,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (2.12)$$

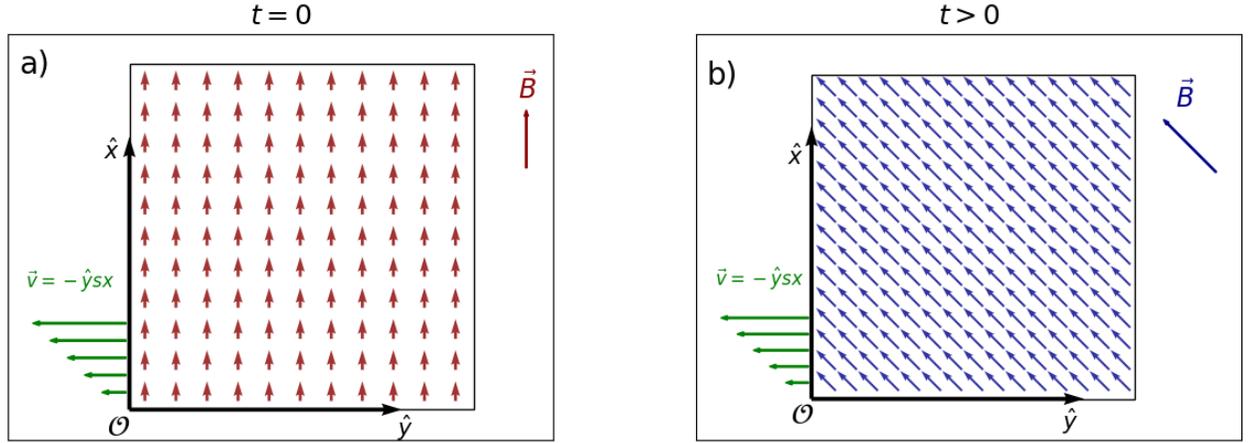


Figura 2.1: Esquema de la evolución del campo magnético \mathbf{B} . El panel a) muestra el instante inicial, donde el campo magnético es de la forma $\mathbf{B} = B_0 \hat{x}$. El panel b) muestra un instante posterior, donde el movimiento de cizalle $\mathbf{U} = -sx\hat{y}$, genera un aumento del campo magnético en el eje \hat{y} .

En el caso de nuestro movimiento de cizalle $\mathbf{U} = -sx\hat{y}$ y $\mathbf{B} = B_0\hat{x}$ obtenemos,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -sB_0 \hat{y} \quad (2.13)$$

Lo que muestra un aumento en la magnitud del campo magnético en la dirección $-\hat{y}$, como muestra la figura 2.1.

De este modo, y como se explica en la sección 2.1, debido a la falta de colisiones el momento magnético de los electrones ($\mu_e = v_{\perp,e}^2/|\mathbf{B}|$) es conservado, por lo cual al aumentar la magnitud del campo magnético la presión perpendicular al campo magnético también aumenta en la misma proporción, esto produce un aumento en la anisotropía en la presión de los electrones, definida como $\Delta p_e = p_{\perp,e} - p_{\parallel,e}$. Esto muestra que el proceso de crecimiento del campo magnético naturalmente da origen a anisotropía de temperatura. Este proceso de crecimiento de la anisotropía también implica energización de las partículas, la cual, al ser producido por un movimiento tipo cizalle, la denominaremos viscosidad anisotrópica. A continuación describiremos en detalle el origen físico de esta viscosidad.

2.4.1. Viscosidad Anisotrópica

Primero que todo, definiremos los siguientes promedios, donde el índice s denota la especie de la población de partículas, electrones e iones en general y las integraciones son en todo el

espacio de velocidades V ,

$$n_s(\mathbf{r}, t) = \int_V f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.14)$$

$$\mathbf{U}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_s} \int_V \mathbf{v} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.15)$$

$$W_s(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{1}{2} m_s v^2 f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.16)$$

$$\mathbf{Q}_s(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{1}{2} m_s v^2 \mathbf{v} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.17)$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s(\mathbf{r}, t) = \int_V m_s (\mathbf{v} - \mathbf{U}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{U}_s) f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.18)$$

La densidad de número, n_s , es el promedio de partículas del tipo s por unidad de volumen, la velocidad, \mathbf{U}_s , es la velocidad promedio de la especie s , la densidad de energía cinética, W_s , es la energía cinética promedio $(1/2)m_s v^2$ de la especie s por unidad de volumen, el tensor presión $\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s = P_{ij}$ es la tasa promedio en la cual el momento es transportado en la dirección i a través de la superficie j en el sistema de referencia que se mueve con la velocidad promedio \mathbf{U}_s , la cantidad $(\mathbf{v} - \mathbf{U}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{U}_s)$ esta definida por la siguiente matriz:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{U}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{U}_s) = \begin{bmatrix} (v_x - U_{sx})(v_x - U_{sx}) & (v_x - U_{sx})(v_y - U_{sy}) & (v_x - U_{sx})(v_z - U_{sz}) \\ (v_y - U_{sy})(v_x - U_{sx}) & (v_y - U_{sy})(v_y - U_{sy}) & (v_y - U_{sy})(v_z - U_{sz}) \\ (v_z - U_{sz})(v_x - U_{sx}) & (v_z - U_{sz})(v_y - U_{sy}) & (v_z - U_{sz})(v_z - U_{sz}) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

También podemos definir las densidades de masa ρ_m , carga ρ_q y corriente \mathbf{J} usando los promedios anteriormente definidos.

$$\rho_q = \sum_s e_s n_s \quad (2.20)$$

$$\rho_m = \sum_s m_s n_s \quad (2.21)$$

$$\mathbf{J} = \sum_s e_s n_s \mathbf{U}_s \quad (2.22)$$

Con esto podemos escribir las primeras tres ecuaciones de momentos para la ecuación de Vlasov (2.1), estas son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.23)$$

$$\rho_m \frac{dU_s}{dt} = \rho_q [\mathbf{E} + \mathbf{U}_s \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (2.25)$$

Donde en la ecuación 2.25 $W = \sum_s W_s$ es la densidad total de energía cinética y $\mathbf{Q} = \sum_s \mathbf{Q}_s$ es el flujo total de energía cinética.

Nuestro objetivo al invocar las ecuaciones de momentos es obtener una expresión para el cambio en la energía del plasma (y dar cierre a la secuencia de momentos), para ello escribiremos la ecuación 2.25 para un sistema de referencia que se mueve con el fluido, U_e , realizando el siguiente cambio de variable $\mathbf{v} = \mathbf{U}_s + \mathbf{u}$, donde \mathbf{u} es la velocidad térmica, la cual por su naturaleza aleatoria tiene promedio cero, hacer este cambio de variable nos permite escribir:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s(\mathbf{r}, t) = \int_V m_s \mathbf{u} \mathbf{u} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.26)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{1}{2} m_s u^2 \mathbf{u} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.27)$$

La última ecuación corresponde al flujo de energía en el sistema de referencia que se mueve con el fluido, notemos también la traza:

$$Tr(\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s(\mathbf{r}, t)) = \int_V m_s u^2 f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.28)$$

Da cuenta de la presión 'escalar'

$$p_s \equiv \frac{1}{3} Tr(\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s) \quad (2.29)$$

Así podemos relacionar la presión con la densidad de energía cinética,

$$\frac{3}{2} p_s(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{1}{2} m_s u^2 f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.30)$$

Comenzaremos con el flujo de energía cinética por especie, la ecuación (16), para el cambio de variable propuesto, (omitiremos las dependencias $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$) esto es:

$$\mathbf{Q}_s = \int_V \frac{1}{2} m_s (\mathbf{U}_s + \mathbf{u})^2 (\mathbf{U}_s + \mathbf{u}) f_s d^3u \quad (2.31)$$

$$\mathbf{Q}_s = \frac{m_s}{2} \int_V d^3u f_s \left(u^2 \mathbf{u} + U_s^2 \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_s) \mathbf{u} + u^2 \mathbf{U}_s + U_s^2 \mathbf{U}_s + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_s) \mathbf{U}_s \right) \quad (2.32)$$

Ahora debido a la naturaleza aleatoria de la velocidad térmica \mathbf{u} los terminos proporcionales a \mathbf{u}^1 integran cero.

$$\mathbf{Q}_s = \frac{m_s}{2} \int_V d^3u f_s \left(u^2 \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_s) \mathbf{u} + u^2 \mathbf{U}_s + U_s^2 \mathbf{U}_s \right) \quad (2.33)$$

$$\mathbf{Q}_s = \frac{m_s}{2} \int_V d^3u u^2 \mathbf{u} f_s + \mathbf{U}_s \cdot m_s \int_V d^3u \mathbf{u} \mathbf{u} f_s + \frac{\mathbf{U}_s}{2} m_s \int_V d^3u u^2 f_s + \frac{m_s U_s^2 \mathbf{U}_s}{2} \int_V d^3u f_s \quad (2.34)$$

Notemos que el primer termino al lado derecho de la ecuación 2.34 es por definición \mathbf{q}_s , para el segundo término la velocidad \mathbf{U}_s es una constante, por lo cual la podemos sacar de la integral dejando dentro de ella $\mathbf{u} \mathbf{u}$, lo cual corresponde al tensor presión $\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s$, en el tercer termino tenemos $Tr(\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s)$ y en el último no hay términos proporcionales a \mathbf{u} por lo cual al integrar $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ obtenemos solo la densidad de número n_s .

$$\mathbf{Q}_s = \mathbf{q}_s + \mathbf{P}_s \cdot \mathbf{U}_s + \frac{\mathbf{U}_s}{2} Tr(\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s) + \frac{m_s n_s U_s^2 \mathbf{U}_s}{2} \quad (2.35)$$

Donde $\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s \cdot \mathbf{U}_s = \sum_j P_{ij} U_j$, ahora debemos calcular la divergencia de \mathbf{Q}_s

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}_s = \nabla \cdot \mathbf{q}_s + \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{U}_s \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s)}_{\clubsuit} + \underbrace{\frac{m_s}{2} \nabla \cdot (n_s \mathbf{U}_s U_s^2)}_{\heartsuit} + \underbrace{\frac{3}{2} \nabla \cdot (\mathbf{U}_s p_s)}_{\clubsuit} \quad (2.36)$$

Veamos los términos por separado,

$$\begin{aligned}
\spadesuit \rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{U}_s \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (U_j P_{ij}) \\
&= P_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + U_j \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i} \\
&= \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s : \nabla \cdot \mathbf{U}_s + \mathbf{U}_s \cdot (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

En la última ecuación hemos definido el doble producto punto " : ", el cual más claro de ver usando notación de Einstein.

$$\heartsuit \rightarrow \frac{m_s}{2} \nabla \cdot (n_s \mathbf{U}_s U_s^2) = \frac{m_s}{2} U_s^2 \nabla \cdot (n_s \mathbf{U}_s) + \frac{m_s n_s \mathbf{U}_s}{2} \cdot \nabla U_s^2 \tag{2.38}$$

$$\clubsuit \rightarrow \frac{3}{2} \nabla \cdot (\mathbf{U}_s p_s) = \frac{3}{2} p_s \nabla \cdot \mathbf{U}_s + \frac{3}{2} \mathbf{U}_s \cdot \nabla p_s \tag{2.39}$$

Finalmente nos queda:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{Q}_s &= \nabla \cdot \mathbf{q}_s + \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s : \nabla \cdot \mathbf{U}_s + \mathbf{U}_s \cdot (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s) + \frac{m_s}{2} U_s^2 \nabla \cdot (n_s \mathbf{U}_s) + \\
&\quad \frac{m_s n_s \mathbf{U}_s}{2} \cdot \nabla U_s^2 + \frac{3}{2} p_s \nabla \cdot \mathbf{U}_s + \frac{3}{2} \mathbf{U}_s \cdot \nabla p_s
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Ahora apliquemos el cambio de variable a la densidad de energía cinética W_s , esto es:

$$W_s = \frac{m_s}{2} \int_V m_s v^2 f_s d^3 v = \frac{m_s}{2} \int_V m_s (\mathbf{U}_s + \mathbf{u})^2 f_s d^3 u \tag{2.41}$$

Al desarrollar el binomio $(\mathbf{U}_s + \mathbf{u})^2$ el termino cruzado integra cero, por lo cual lo podemos descartar

$$W_s = \frac{m_s}{2} \int_V u^2 f_s d^3 u + \frac{m_s}{2} U_s^2 \int_V f_s d^3 u \tag{2.42}$$

$$W_s = \frac{1}{2} Tr (\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s) + \frac{m_s n_s U_s^2}{2} \tag{2.43}$$

$$W_s = \frac{3}{2} p_s + \frac{m_s n_s U_s^2}{2} \tag{2.44}$$

Tomando derivada temporal

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_s}{\partial t} &= \frac{3}{2} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{m_s}{2} \frac{\partial (U_s^2 n_s)}{\partial t} \\
&= \frac{3}{2} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{n_s m_s}{2} \frac{\partial U_s^2}{\partial t} + \frac{U_s^2 m_s}{2} \frac{\partial n_s}{\partial t} \\
&= \frac{3}{2} \frac{\partial p_s}{\partial t} + n_s m_s \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} \cdot \mathbf{U}_s + \frac{U_s^2 m_s}{2} \frac{\partial n_s}{\partial t}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Ahora juntando (y ordenando) todo tenemos que la ecuación de momento de orden 2 queda como

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{3}{2} p_s \nabla \cdot \mathbf{U}_s + n_s m_s \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} \cdot \mathbf{U}_s + \\
&\frac{U_s^2 m_s}{2} \frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{U_s^2 m_s}{2} \nabla \cdot (n_s \mathbf{U}_s) + \nabla \cdot \mathbf{q}_s + \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s : \nabla \cdot \mathbf{U}_s + \\
&\mathbf{U}_s \cdot (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s) + \frac{m_s n_s \mathbf{U}_s}{2} \cdot \nabla U_s^2 + \frac{3}{2} \mathbf{U}_s \cdot \nabla p_s - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s = 0
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Acá notemos que los primeros dos términos de la ecuación anterior corresponde a la derivada convectiva de p_s (la cual notaremos como $\frac{dp_s}{dt}$), además veamos que para el cuarto y quinto (primero y segundo de la segunda fila) corresponde a la ecuación de continuidad por lo cual al sumarlos se anulan,

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2} \frac{dp_s}{dt} + n_s m_s \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} \cdot \mathbf{U}_s + \nabla \cdot \mathbf{q}_s + \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s : \nabla \cdot \mathbf{U}_s + \\
&\mathbf{U}_s \cdot (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s) + \frac{m_s n_s \mathbf{U}_s}{2} \cdot \nabla U_s^2 + \frac{3}{2} \mathbf{U}_s \cdot \nabla p_s - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_s = 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Para simplificar aún mas tomemos la ecuación de momento de orden 1, la ecuación 2.24, y le hacemos producto punto con la velocidad promedio $\cdot \mathbf{U}_s$, esto es

$$-m_s n_s \left(\frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} + (\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \mathbf{U}_s \right) \cdot \mathbf{U}_s + \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} - (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s) \cdot \mathbf{U}_s = 0 \tag{2.48}$$

$$-m_s n_s \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} \cdot \mathbf{U}_s - m_s n_s (\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{U}_s + \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} - (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s) \cdot \mathbf{U}_s = 0 \tag{2.49}$$

desarrollemos un poco el segundo termino

$$\begin{aligned}
m_s n_s (\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{U}_s &= m_s n_s U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i} U_j \\
&= m_s n_s U_i \frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x_i} \\
&= \frac{m_s n_s \mathbf{U}_s}{2} \cdot \nabla U_s^2
\end{aligned} \tag{2.50}$$

de esta forma tenemos

$$-m_s n_s \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} \cdot \mathbf{U}_s - \frac{m_s n_s \mathbf{U}_s}{2} \cdot \nabla U_s^2 + \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} - (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s) \cdot \mathbf{U}_s = 0 \quad (2.51)$$

De esta forma al sumar la ecuación 2.51 con la ecuación 2.47 se anulan todos los términos de 2.51 quedando

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_s + \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s : \nabla \cdot \mathbf{U}_s + \frac{3}{2} p_s \nabla \cdot \mathbf{U}_s = 0 \quad (2.52)$$

En el tercer termino de la ecuación anterior el tensor presión lo podemos separar en su parte diagonal (p_s) y los términos fuera de la diagonal, esto es:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s = \overleftrightarrow{\mathbf{1}} p_s + \overleftrightarrow{\sigma}_s \quad (2.53)$$

Con esto

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_s : \nabla \cdot \mathbf{U}_s &= P_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = p_s \delta_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \\ &= p_s \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \\ &= p_s \nabla \cdot \mathbf{U}_s + \overleftrightarrow{\sigma}_s : \nabla \cdot \mathbf{U}_s \end{aligned} \quad (2.54)$$

Con la ecuación 2.54 en la ecuación 2.52 y recordando la ecuación 2.30 obtenemos finalmente

$$\frac{\partial W_s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_s + \overleftrightarrow{\sigma}_s : \nabla \cdot \mathbf{U}_s + \frac{5}{2} p_s \nabla \cdot \mathbf{U}_s = 0 \quad (2.55)$$

Esta ecuación da cuenta de la conservación de energía cinética para la especie s del plasma, el segundo termino corresponde al flujo de energía cinética en el sistema de referencia del fluido, el tercer termino corresponde al calentamiento por viscosidad anisotrópica, el último es el calentamiento por compresión. Notemos que esta ecuación corresponde al caso general. Para aplicarla en el caso de nuestro interés debemos considerar que la velocidad promedio de nuestras partículas sujetas al movimiento de cizalle es $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{U}_s = -qx\hat{y}$, de esta forma $\nabla \cdot \mathbf{U}_s = 0$, por lo cual no hay calentamiento por compresión, veamos el termino de calentamiento viscoso.

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s : \nabla \cdot \mathbf{U}_s = \sum_{i,j} \sigma_{s,ij} \frac{\partial U_{s,j}}{\partial r_i} = \sigma_{s,xy} \frac{\partial U_y}{\partial x} \quad (2.56)$$

La última igualdad es debido a que el resto de las derivadas son nulas para $\mathbf{U}_s = -qx\hat{y}$, para calcular $\sigma_{s,xy}$ consideremos un sistema de referencia que se mueve con velocidad \mathbf{U}_s (ver figura 4.20) podemos relacionar las velocidades en ambos sistemas como

$$\begin{aligned} v_x &= \cos \theta v_{x'} + \sin \theta v_{y'} \\ v_y &= -\sin \theta v_{x'} + \cos \theta v_{y'} \end{aligned} \quad (2.57)$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \sigma_{s,xy} &= m_s \int_V d^3v f_s v_x v_y \\ &= m_s \int_V d^3v f_s (\cos \theta v_{x'} + \sin \theta v_{y'}) (-\sin \theta v_{x'} + \cos \theta v_{y'}) \\ &= m_s \sin \theta \cos \theta \int_V f_s (v_{y'}^2 - v_{x'}^2) d^3v + m_s (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \int_V f_s v_{x'} v_{y'} d^3v \end{aligned} \quad (2.58)$$

Podemos considerar nuestro plasma como girotrópico, es decir que la presión es isotropica en cualquier dirección perpendicular al campo magnético promedio. Esto permite que el tensor presión en el sistema de referencia del fluido sea diagonal y esté caracterizado solo por la presión paralela y perpendicular al campo magnético por lo cual

$$\begin{aligned} m_s \int_V f_s v_{x'} v_{y'} d^3v &= 0 \\ m_s \int_V f_s v_{x'}^2 d^3v &= p_{\parallel,s} \\ m_s \int_V f_s v_{y'}^2 d^3v &= p_{\perp,s} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Usando el set de ecuaciones 2.59 en la ecuación 2.58 tenemos:

$$\sigma_{s,xy} = \sin \theta \cos \theta (p_{\perp,s} - p_{\parallel,s}) \quad (2.60)$$

Luego

$$\overleftrightarrow{\sigma}_s : \nabla \cdot \mathbf{U}_s = -q \sin \theta \cos \theta (p_{\perp,s} - p_{\parallel,s}) \quad (2.61)$$

Pero por construcción

$$\begin{aligned}\frac{B_x}{|\mathbf{B}|} &= \cos \theta \equiv \hat{b}_x \\ \frac{B_y}{|\mathbf{B}|} &= -\sin \theta \equiv \hat{b}_y\end{aligned}\tag{2.62}$$

Por lo cual,

$$\overleftarrow{\sigma}_s^\rightarrow : \nabla \cdot \mathbf{U}_s = q \hat{b}_x \hat{b}_y (p_{\perp,s} - p_{\parallel,s})\tag{2.63}$$

Anteriormente habíamos mostrado que la evolución temporal del campo magnético esta dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -q B_0 \hat{y}\tag{2.64}$$

esto muestra que la única componente del campo magnético que cambia en el tiempo es B_y , la componente B_x permanece constante e inicialmente corresponde al modulo del campo magnético, por lo cual podemos escribir la ecuación anterior como

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -q B_x\tag{2.65}$$

Si evaluamos la derivada temporal del modulo del campo magnético, esto es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial |\mathbf{B}|}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (B_x^2 + B_y^2)^{1/2} = \frac{1}{2(B_x^2 + B_y^2)^{1/2}} 2B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ &= -\frac{q B_x B_y}{|\mathbf{B}|}\end{aligned}\tag{2.66}$$

Recordamos las ecuaciones 2.62 podemos escribir:

$$\frac{\partial |\mathbf{B}| / \partial t}{|\mathbf{B}|} = -q \hat{b}_x \hat{b}_y\tag{2.67}$$

Con esto podemos escribir el termino de calentamiento por viscosidad anisotropica como

$$\overleftarrow{\sigma}_s^\rightarrow : \nabla \cdot \mathbf{U}_s = -\frac{\partial |\mathbf{B}| / \partial t}{|\mathbf{B}|} (p_{\perp,s} - p_{\parallel,s})\tag{2.68}$$

Finalmente podemos escribir la ecuación de conservación de energía (sin flujo de energía cinética) como:

$$\frac{\partial W_s}{\partial t} = k\Delta p_e \quad (2.69)$$

Donde k es la tasa de crecimiento del campo magnético ($k = \partial|\mathbf{B}|/\partial t/|\mathbf{B}|$)

Esta ganancia de energía es lo que denominamos viscosidad anisotrópica, y será una fuente permanente de calentamiento de los electrones en nuestras simulaciones. Este calentamiento por viscosidad actuará sobre las partículas además del proceso de aceleración estocástica debido a interacción onda-partícula, también conocida como aceleración de Fermi de segundo orden. La idea esencial de este tipo de aceleración no térmica de partículas la explicaremos en mayor detalle en el capítulo 3.

2.5. Método de Simulación

Usamos el código PIC electromagnético y relativista TRISTAN-MP en 2D y 1D [65], [8]. Se utilizó este código para simular plasmas con iones ‘infinitamente masivos’. Esto quiere decir que los iones están inmóviles y su presencia es para mantener la neutralidad del plasma. De esta forma nos podemos enfocar en las inestabilidades que operan en escalas atingentes a la dinámica de los electrones. Esta suposición es razonable dada la significativa separación de escalas espacio-temporales entre las dinámicas de iones y electrones (dado que la razón de masa entre protones y electrones es aproximadamente 1836). El dominio de la simulación es una caja cuadrada para el caso 2D y una franja delgada a lo largo del eje \hat{x} en el caso 1D, en donde nuestro plasma está contenido con un campo magnético inicial $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{x}$. El sistema está bajo un movimiento de cizalle de modo que la velocidad de las partículas es $\langle \mathbf{v} \rangle = -sx\hat{y}$ donde x es la distancia a lo largo de \hat{x} y s es el parámetro del cizalle, el cual tiene unidades de frecuencia (ver en el Apéndice A la manera en que se imponen los movimientos tipo cizalle en nuestras simulaciones). El uso de simulaciones en una dimensión está permitido siempre y cuando los modos dominantes generados por las inestabilidades dominantes sean paralelos (o cuasi-paralelos) al campo magnético promedio. Al cumplirse esta condición podemos simular, en lugar de una caja bidimensional, una franja delgada donde la única componente capturada es la componente paralela al campo magnético promedio. De esta forma se pueden ejecutar simulaciones menos costosas computacionalmente y de igual forma capturar la física relevante dada la geometría de los modos. Los resultados obtenidos con simulaciones en 1D fueron contrastados con simulaciones en 2D, mostrando gran correlación en la eficiencia de la aceleración en los casos en que efectivamente ésta está dominada por modos paralelos al campo de fondo.

2.5.1. Parámetros Esenciales de las Simulaciones

Los parámetros físicos relevantes en nuestras simulaciones son: el parámetro beta inicial de los electrones $\beta_{e,init}$ que corresponde al cociente entre la presión de los electrones y la

presión magnética ($\beta_e \equiv 8\pi n_e k_B T_e / B^2$), la temperatura expresada como $k_B T_e / m_e c^2$ (donde k_B , T_e y m_e son la constante de Boltzmann, la temperatura de los electrones y la masa de los electrones) esto corresponde a la cúspide de la distribución de velocidades en el instante inicial, donde esta es maxweliana. El tercer y último parámetro físico es la magnetización inicial definida como el cociente entre el valor inicial de la frecuencia de ciclotrón de los electrones y el parámetro del cizalle s , $\omega_{c,e}/s$ ($\omega_{c,e} = eB/m_e c$, donde e es la carga del electrón y c es la velocidad de la luz). Usualmente en astrofísica el cociente $\omega_{c,e}/s$ es enorme. Como referencia a ~ 10 radios de Schwarzschild de Sgr A* el plasma tiene una magnetización del orden de $\omega_{c,e}/s \sim 10^{11}$ [54], en donde el parámetro del cizalle s aproximadamente corresponde a la frecuencia de rotación Kepleriana a esa distancia de Sgr A*. Dado que no es posible simular plasmas con magnetizaciones realistas debido al alto costo computacional, en cambio, utilizaremos valores que cumplan con la condición $\omega_{c,e}/s \gg 1$ pero mucho menores que las magnetizaciones reales, esto bajo la hipótesis de que la magnetización no juega un papel relevante en la eficiencia de aceleración de electrones siempre que $\omega_{c,e}/s \gg 1$. Comprobaremos que esta hipótesis es correcta verificando que un aumento considerable en la magnetización, es decir del doble o el triple del valor inicial, no afecte la aceleración final. Nuestro objetivo es determinar para que valores de $\beta_{e,inic}$ y $k_B T_e / m_e c^2$ la aceleración por inestabilidades cinéticas debido a anisotropías de la temperatura es relevante. Estudios previos ([15]; [53]) muestran que la aceleración por ondas de Whistler es sensible al cociente $\omega_{c,e}/\omega_{p,e}$, este cociente puede ser determinado por los parámetros β_e y $k_B T_e / m_e c^2$, para esto recordemos:

$$\begin{aligned}\omega_{p,e}^2 &= \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \\ \omega_{c,e}^2 &= \frac{e^2 B^2}{m_e^2 c^2}\end{aligned}\tag{2.70}$$

de esta forma podemos armar,

$$\left(\frac{\omega_{p,e}}{\omega_{c,e}}\right)^2 = \frac{4\pi n_e m_e c^2}{B^2}\tag{2.71}$$

ahora podemos reescribir β_e como:

$$\beta_e = \left(\frac{k_B T_e}{m_e c^2}\right) \left(\frac{n_e m_e c^2}{B^2} \cdot 4\pi\right) \cdot 2\tag{2.72}$$

así

$$\beta_e/2 = \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \left(\frac{\omega_{p,e}}{\omega_{c,e}}\right)^2\tag{2.73}$$

de esta forma podemos determinar el cociente $\omega_{c,e}/\omega_{p,e}$ como:

$$\frac{\omega_{c,e}}{\omega_{p,e}} = \sqrt{\frac{2k_B T_e}{\beta_e m_e c^2}} \quad (2.74)$$

Los parámetros numéricos en nuestras simulaciones son: el número de macro-electrones por celda N_{ppc} , la "skin depth" de los electrones en unidades de la separación en los puntos de grilla $c/\omega_{p,e}/\Delta_x$.

Capítulo 3

Interacción Onda-Partícula

Hasta el momento hemos discutido cómo la amplificación del campo magnético de fondo por movimientos tipo cizalle en un plasma no-colisional puede producir anisotropías de temperatura, las que producen calentamiento de partículas por viscosidad, y además pueden dar origen a inestabilidades. En este capítulo describiremos cómo este proceso puede además producir aceleración estocástica de los electrones, debido a la interacción entre estas partículas y las ondas producidas por las inestabilidades.

En efecto, las inestabilidades consisten en crecimientos exponenciales de diversos tipos de modos en el plasma, los que producen scattering en las partículas, limitando las anisotropías que les dieron origen. La presencia de estas inestabilidades se ha verificado en mediciones in-situ de anisotropías en la temperatura de iones y electrones en ambientes como el viento solar ([27],[48]) y la magnetósfera terrestre ([9], [69]). En estas mediciones, se ha podido verificar que las anisotropías pueden crecer hasta cierto límite, el cual coincide con diversas predicciones de teoría lineal de Vlasov ([21]). En efecto, en el Apéndice B utilizamos dicha teoría para mostrar la aparición de la inestabilidad de whistler debido a la presencia de anisotropías en la temperatura en los electrones.

En este capítulo describiremos en términos generales porqué la existencia de modos inestables debido a la presencia de anisotropías puede dar origen a aceleración estocástica de electrones. Para eso nos basaremos en el esquema de aceleración estocástica propuesto originalmente por Fermi [18], en el cual las partículas cargadas chocan y son reflejadas elásticamente por nubes magnéticas muy masivas que se mueven de forma aleatoria con una velocidad típica v (hoy en día estas nubes magnéticas son remplazadas por fluctuaciones MHD o en nuestro caso por las ondas producidas por las inestabilidades). En la idea original de Fermi, los sucesivos encuentros y reflexiones de las partículas con las nubes magnéticas hacen que las partículas puedan perder o ganar energía, esto dependiendo si es una colisión por alcance o de frente. Para ver esto imaginemos este proceso de scattering como una colisión elástica entre los electrones (de velocidad v y masa m) y las nubes magnéticas (de velocidad V y masa M) las cantidades con primas son luego de la colisión, entonces usando la conservación de momento y energía obtenemos que la velocidad del electrón luego del scattering esta dada por:

$$v' = \frac{v(m - M) + 2MV}{m + M} \quad (3.1)$$

Ahora, asumiendo que la masa de las nubes magnéticas es muy grande en comparación con la de los electrones ($m \ll M$), tenemos que:

$$v' = -v + 2V \quad (3.2)$$

de esta forma si la colisión es de frente ($v > 0$ y $V < 0$) tenemos que:

$$v' = -(v + 2V) \quad (3.3)$$

y si es por alcance:

$$v' = -(v - 2V) \quad (3.4)$$

tenemos que en ambos casos la partícula es reflejada, ya que las partículas se mueven mucho mas rápido que las nubes (ya que en general son relativistas y las nubes no), pero en el caso que la colisión es de frente la partícula es reflejada con mayor velocidad. Para que las partículas experimenten un aumento sostenido las colisiones de frente deben ser mas frecuentes que las por alcance. Esto es en efecto lo que se espera ya que la velocidad relativa entre la partícula y la nube es mayor para una colisión de frente que por alcance, por lo tanto podemos estimar las frecuencias de colisión en ambos casos usando una separación típica para los electrones y las nubes, la cual llamaremos Δ , así para el caso de las colisiones de frente tenemos que la velocidad relativa es $v + V$ y en el caso por colisiones por alcance $v - V$, así la frecuencia de colisiones ($\omega = V_{relativa}/\Delta$) es mayor en el caso donde las partículas ganan energía.

3.1. Aceleración de Fermi de 2 orden

Para comenzar es instructivo considerar el mismo esquema de Fermi donde el scattering es modelado como una colisión elástica entre un objeto muy masivo representado por una nube magnética y otro de mayor velocidad pero mucho menos masivo como lo son los electrones relativistas, debido a la diferencia entre las masas la nube magnética no ve alterada su velocidad, pero la partícula es reflejada conservando su energía, en el sistema de referencia que se mueve solidario a la nube magnética el cual denotaremos como S' . En este sistema de referencia utilizando las transformaciones de Lorentz podemos escribir la energía y el momento de la partícula de la siguiente forma:

$$E' = \gamma (E - p_x V) \quad p'_x = \gamma (p_x - VE/c^2) \quad (3.5)$$

donde $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ y $p_x = |\mathbf{p}| \cos \theta$.

Luego de la colisión, la energía de la partícula se conserva pero el momento es reflejado, de esta forma la energía y el momento quedan como:

$$E' = \gamma (E - p_x V) \quad p'_x = \gamma (VE/c^2 - p_x) \quad (3.6)$$

Para contabilizar la ganancia de energía debemos volver al sistema de referencia del observador al cual denotaremos con doble prima (S'')

$$E'' = \gamma (E' + p'_x) \quad (3.7)$$

reemplazando por las cantidades en el sistema de referencia S' tenemos

$$E'' = \gamma^2 (E + V^2 E/c^2 - 2V p_x) \quad (3.8)$$

asumiremos que nuestras partículas son ultra-relativistas, es decir que su velocidad es del orden de c por lo tanto $p_x = -(E/c) \cos \theta$, así

$$E'' = \gamma^2 E (1 + (2V/c) \cos \theta + V^2/c^2) \quad (3.9)$$

ahora asumiremos que las nubes magnéticas no son relativistas, por lo tanto

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - V^2/c^2} \sim 1 + V^2/c^2 \quad (3.10)$$

reemplazando tenemos:

$$E'' = E (1 + V^2/c^2)(1 + (2V/c) \cos \theta + V^2/c^2) \quad (3.11)$$

guardando hasta el segundo orden en V/c

$$E'' = E (1 + (2V/c) \cos \theta + 2V^2/c^2) \quad (3.12)$$

finalmente

$$\Delta E = E'' - E = E((2V/c) \cos \theta + 2(V/c)^2) \quad (3.13)$$

Ahora debemos promediar en el angulo de incidencia θ , para eso recordemos que debemos asignar distintas probabilidades de ocurrencia a la colisión dependiendo si esta es de frente ($\theta = 0$) o por alcance ($\theta = \pi$), para ello consideraremos que la probabilidad de ocurrencia de la

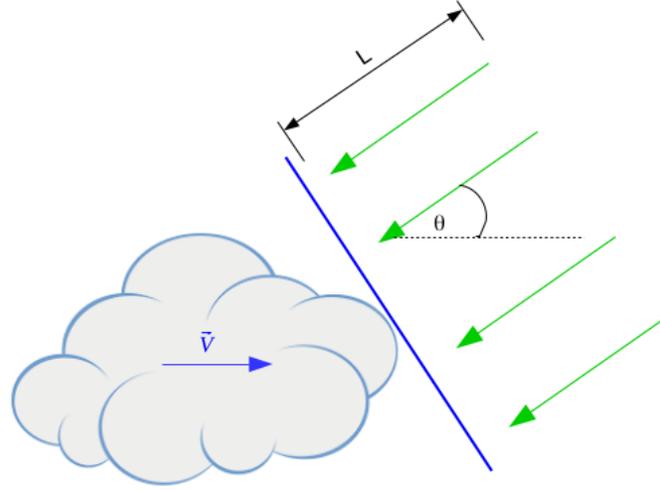


Figura 3.1: Esquema original de Fermi

interacción es directamente proporcional al flujo de partículas y este a su vez es inversamente proporcional al tiempo que le toma a una partícula a una distancia L de la nube y con el mismo ángulo θ atravesar el plano de incidencia (representado con una línea azul en la figura 3.1) el cual se mueve con la velocidad de la nube. Para estimar este tiempo (lo llamaremos T_n) consideraremos como T_0 al tiempo que tomaría atravesar el plano de incidencia pero en el caso que la nube tenga velocidad nula, de esta forma podemos definir el tiempo T_n como la distancia L menos la distancia recorrida por la nube en el tiempo T_n todo esto dividido por la velocidad de la partícula.

$$T_n = \frac{L - T_n V \cos \theta}{c} = T_0 - T_n \frac{V}{c} \cos \theta \quad (3.14)$$

Con esto el tiempo de viaje de la partícula se puede escribir convenientemente como

$$T_n = \frac{T_0}{1 + (V/c) \cos \theta} \quad (3.15)$$

para así escribir nuestra distribución de probabilidad como

$$\mathcal{P} \propto 1 + (V/c) \cos \theta \quad (3.16)$$

esta probabilidad es maxima cuando la colision es con $\theta = 0$ y minima cuando la colisión es por alcance con $\theta = \pi$, por lo cual las interacciones que energizan a las partículas son más probables que ocurran, de esta forma podemos tomar promedio para todos los angulos de incidencia integrando en todo el angulo solido $d\Omega = 2\pi d \cos \theta$ y normalizando con \mathcal{P}

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{\int_0^\pi d\Omega \Delta E \cdot \mathcal{P}}{\int_0^\pi d\Omega \mathcal{P}} \quad (3.17)$$

para resolver esto notemos en ΔE que solo tenemos dependencia en θ en un solo termino por lo cual solo debemos resolver dos integrales, estas son:

$$\int_0^\pi d \cos \theta (1 + (V/c) \cos \theta) = -2 \quad (3.18)$$

$$\int_0^\pi d \cos \theta (\cos \theta + (V/c) \cos^2 \theta) = \frac{-2V}{3c} \quad (3.19)$$

Así,

$$\frac{\langle \Delta E \rangle}{E} = \frac{2}{3} \left(\frac{V}{c} \right)^2 + 2 \left(\frac{V}{c} \right)^2 = \frac{8}{3} \left(\frac{V}{c} \right)^2 \quad (3.20)$$

De esta forma podemos estimar el cambio en energía como:

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{\langle \Delta E \rangle}{\tau_{sc}} = \frac{8}{3} \left(\frac{V}{c} \right)^2 \frac{E}{\tau_{sc}} \quad (3.21)$$

Donde τ_{sc} es el tiempo típico entre dos procesos de scattering sucesivos. El cambio en la energía es proporcional al cuadrado de la velocidad de las nubes magnéticas, razón por la cual este proceso es llamado ‘de segundo orden’.

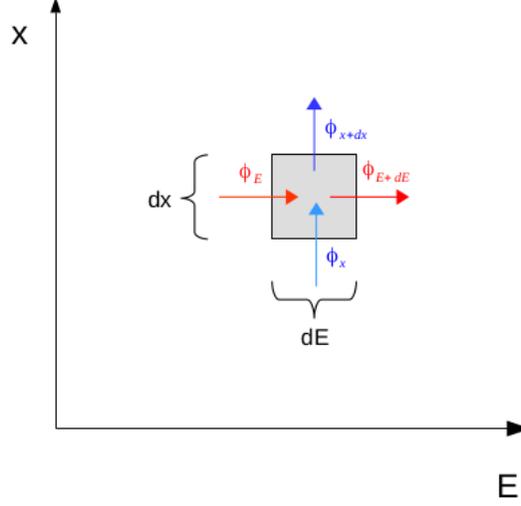


Figura 3.2: Espacio de Fase

3.2. Índice espectral: Ecuación de Vlasov ‘colisional’

Ya estamos en posición de obtener un índice espectral usando la ecuación de difusión y pérdida. Para obtener esta ecuación usaremos la ecuación de Vlasov, que describe la evolución de la función distribución de un plasma (f), pero considerando las interacciones aleatorias y de corto alcance entre las ondas (representadas por las nubes magnéticas) y los electrones. Para ello agregaremos un operador ‘colisional’, el cual trataremos como un proceso difusivo producto de la aleatoriedad del scattering. Entonces en un espacio de fase definido por las variables posición (1 dimensión para simplificar, luego extenderemos el resultado a 3 dimensiones) y energía podemos escribir:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial E} \left(f \frac{dE}{dt} \right) = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c \quad (3.22)$$

Para obtener una expresión del lado derecho de esta ecuación consideraremos el espacio de fase de la figura 3.2, donde graficamos en un eje la energía y el otro la posición, los flujos mostrados corresponden a los cambios en energía y en posición de los electrones producto de la interacción con las nubes magnéticas. Así podemos contabilizar el cambio en el número de electrones del área demarcada con gris en la figura como:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} f(x, E, t) dE dx = & (\phi_x(x, E, t) - \phi_{x+dx}(x + dx, E, t)) dE + \\ & (\phi_E(x, E, t) - \phi_{E+dE}(x, E + dE, t)) dx \end{aligned} \quad (3.23)$$

dividiendo por el volumen del espacio de fase $dE dx$ obtenemos derivadas para el flujo en espacio y energía

$$\frac{\delta f}{\delta t} = -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\phi_E}{\partial E} \quad (3.24)$$

ahora debemos calcular los flujos ϕ_x y ϕ_E y obtener los coeficientes de difusión, para ello consideremos primero la difusión espacial, para lo cual tomaremos como diferencial de longitud dx el camino libre medio de la partícula λ_{sc} , también consideraremos el tiempo típico del scattering como $\tau_{sc} = 1/\nu_{sc}$, donde $\nu_{sc} = \langle v \rangle / \lambda_{sc}$ es la frecuencia de scattering dada por el cociente entre la velocidad media de las partículas y el camino libre medio. Asumiremos que en cada casillero del espacio de fase es igual de probable difundir hacia la izquierda o a la derecha (ver figura 3.2) por lo cual para una población grande de partículas podemos considerar que la mitad va para izquierda y la otra mitad para la derecha. De esta forma podemos considerar el flujo ϕ_x como el número de partículas que se mueven de casillero $((1/2)f_i dE dx)$ dividido el tiempo que les toma por el area transversal $(\tau_{sc} dx)$. Así el flujo a través de la linea solida del dibujo esta dado por las contribuciones de los casilleros a cada uno de sus lados, esto es,

$$\phi_x = \frac{f_i dE \lambda_{sc}}{2 dE \tau_{sc}} - \frac{f_{i+1} dE \lambda_{sc}}{2 dE \tau_{sc}} \quad (3.25)$$

multiplicando esta expresión por $\lambda_{sc}/\lambda_{sc}$ podemos armar una derivada, así,

$$\phi_x = -\frac{\lambda_{sc}^2}{2\tau_{sc}} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.26)$$

donde denotaremos como el coeficiente de difusión espacial $D_x = \frac{\lambda_{sc}^2}{2\tau_{sc}}$

$$\phi_x = -D_x \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.27)$$

asumiendo que λ_{sc} y τ_{sc} son independientes de las coordenadas espaciales

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial x} = -D_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (3.28)$$

Usando el mismo argumento podemos extender este resultado a las 3 dimensiones espaciales, así podemos escribir el termino de difusión espacial como:

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial \mathbf{x}} = -D_x \nabla^2 f \quad (3.29)$$

De esta misma forma podemos derivar el coeficiente de difusión en energía, pero ahora nuestro diferencial de energía dE estará dado por la raíz del promedio al cuadrado de ΔE

obtenido en la ecuación 3.13, guardando hasta el segundo orden tenemos que:

$$(\Delta E)^2 = 4E^2(V/c)^2 \cos^2 \theta \quad (3.30)$$

Para tomar promedio en un ensamble de partículas que chocan isotropicamente con nuestra nube magnética, debemos calcular el siguiente promedio

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{\int_0^\pi d \cos \theta \cos^2 \theta (1 + (V/c) \cos \theta)}{\int_0^\pi d \cos \theta (1 + (V/c) \cos \theta)} = \frac{1}{3} \quad (3.31)$$

así,

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = \frac{4}{3} \left(\frac{V}{c} \right)^2 E^2 \quad (3.32)$$

con esto podemos escribir el flujo ϕ_E como:

$$\phi_E = \left(\frac{f_i \langle (\Delta E)^2 \rangle}{2 \tau_{sc}} - \frac{f_{i+1} \langle (\Delta E)^2 \rangle}{2 \tau_{sc}} \right) \frac{1}{\sqrt{\langle (\Delta E)^2 \rangle}} \quad (3.33)$$

así,

$$\phi_E = -\frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\langle (\Delta E)^2 \rangle}{2 \tau_{sc}} f \right) \quad (3.34)$$

reemplazando la ecuación 3.32 en la 3.34 y definiendo el coeficiente de difusión en energía como:

$$D_E = \frac{2}{3} \left(\frac{V}{c} \right)^2 \frac{E^2}{\tau_{sc}} \quad (3.35)$$

también definimos el tiempo de aceleración τ_{ac} como:

$$\tau_{ac} = \frac{\tau_{sc}}{\frac{2}{3}(V/c)^2} \quad (3.36)$$

finalmente

$$\phi_E = -D_E \frac{\partial f}{\partial E} \quad (3.37)$$

donde

$$D_E = \frac{E^2}{\tau_{ac}} \quad (3.38)$$

aprovechando nuestras nuevas definiciones, podemos reescribir el resultado de la ecuación 3.21 como

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8}{3} \left(\frac{V}{c} \right)^2 \frac{E}{\tau_{sc}} = \frac{4E}{\tau_{ac}} \quad (3.39)$$

de esta forma podemos escribir nuestra ecuación de Vlasov mas el operador de colisionabilidad efectiva como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial E} \left(f \frac{4E}{\tau_{ac}} \right) - D_x \nabla^2 f - \frac{\partial^2}{\partial E^2} \left(\frac{E^2}{\tau_{ac}} f \right) = 0 \quad (3.40)$$

ahora podemos transformar esta ecuación en la de difusión y perdida haciendo algunas aproximaciones. En la parte espacial de esta ecuación asumiremos que las partículas son aceleradas hasta que escapan del sistema en el cual son energizadas. El tiempo típico que le toma a una partícula escapar lo llamaremos τ_{esc} . Además asumiremos homogeneidad espacial de la función f , de esta forma aproximaremos el segundo término de la ecuación 3.40 por f/τ_{esc} y podemos anular el termino de difusión en el espacio, así tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{\tau_{esc}} + \frac{\partial}{\partial E} \left(f \frac{4E}{\tau_{ac}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial E^2} \left(\frac{E^2}{\tau_{ac}} f \right) = 0 \quad (3.41)$$

buscando una solución estacionaria de la forma $f = kE^{-\nu}$ donde k es una constante y ν es el indice espectral.

$$\frac{1}{\tau_{esc}} + \frac{4(1-\nu)}{\tau_{ac}} - \frac{(2-\nu)(1-\nu)}{\tau_{ac}} = 0 \quad (3.42)$$

así,

$$\frac{\tau_{ac}}{\tau_{esc}} = \nu^2 + \nu - 2 \quad (3.43)$$

resolviendo para ν , obtenemos:

$$\nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\tau_{ac}}{\tau_{esc}} + \frac{9}{4}} \quad (3.44)$$

De esta forma tenemos un indice para el espectro de energía de los electrones.

Capítulo 4

Resultados

Llego el momento de mostrar, usando simulaciones PIC, como las inestabilidades debidas a anisotropías de temperatura pueden acelerar electrones. Dividiremos este análisis en dos partes, en la primera parte analizaremos el caso relativista que caracteriza discos de acreción en torno a agujeros negros y otros objetos compactos, y en la segunda parte analizaremos el caso no-relativista que corresponde a las condiciones del plasma en las llamaradas solares.

4.1. Caso Relativista

Analizaremos el caso en que imponemos un movimiento tipo cizalle (de modo de amplificar lentamente el campo de fondo) a un plasma con valores iniciales $\beta_e = 2$ y $k_B T_e / m_e c^2 = 0,28$. Este lo tomaremos como caso de referencia y mostraremos como estas inestabilidades regulan la anisotropía en la temperatura de los electrones y además aceleran electrones.

En la figura 4.1 panel **a**) vemos como debido al cizalle evoluciona la energía en las componentes del campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$. La componente y , en línea sólida verde, permanece constante, mientras la componente x , en línea sólida azul, aumenta en el tiempo producto del cizalle impuesto sobre el plasma. Además se muestra la evolución de la energía en las fluctuaciones magnéticas ($\delta \mathbf{B} \equiv \mathbf{B} - \langle \mathbf{B} \rangle$), en línea roja sólida, dividido en dos componentes, una cuasi-paralela δB_{qp} , en línea negra segmentada, y otra oblicua δB_{ob} , en línea sólida negra, respecto al campo magnético promedio. Definimos un modo ‘cuasi-paralelo’ cuando el ángulo entre su vector de onda \mathbf{k} y el campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$ es menor a 20 grados, en el caso contrario se denomina como modo ‘oblicuo’. Para nuestro caso los modos inestables dominantes son cuasi-paralelos y de naturaleza electromagnética, mas adelante veremos que estos tienen polarización derecha, por lo que los identificaremos como modos de Whistler.

En la figura 4.1 panel **b**), vemos la evolución en la temperatura de los electrones, en las componentes paralela y perpendicular al campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$. Debido al aumento

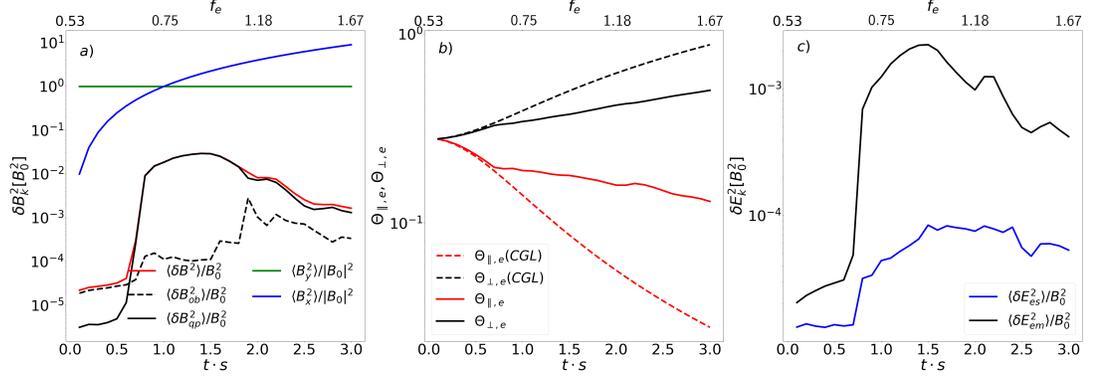


Figura 4.1: Evolución temporal de los campos y temperatura para el caso de referencia con valores iniciales de $\beta_e = 2$ y $\Theta_{e,\parallel} = \Theta_{e,\perp} = k_B T_e / m_e c^2 = 0,28$. El eje horizontal inferior muestra el tiempo transcurrido en unidades del periodo de cizalla s , el eje horizontal superior muestra el valor instantáneo de $f_e = \omega_{c,e} / \omega_{p,e}$. El Panel **a)** muestra la evolución temporal de la energía en las componentes x (línea continua azul) e y (línea continua verde) del campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$. En línea continua roja se muestra la evolución en energía de las fluctuaciones en el campo magnético $\delta \mathbf{B} = \mathbf{B} - \langle \mathbf{B} \rangle$. En línea negra continua se muestra la evolución temporal de la contribución a δB de los modos quasi-paralelos al campo magnético promedio y en línea negra segmentada la contribución de los modos oblicuos al campo magnético promedio. El panel **b)** muestra la evolución temporal de la temperatura perpendicular y paralela al campo magnético promedio y en líneas segmentadas se muestra la evolución según la ecuación de estado adiabática Chew-Goldberg-Low (CGL). El panel **c)** muestra la evolución temporal de la energía del campo eléctrico en las fluctuaciones electrostáticas y electromagnéticas, en líneas azul y negra, respectivamente.

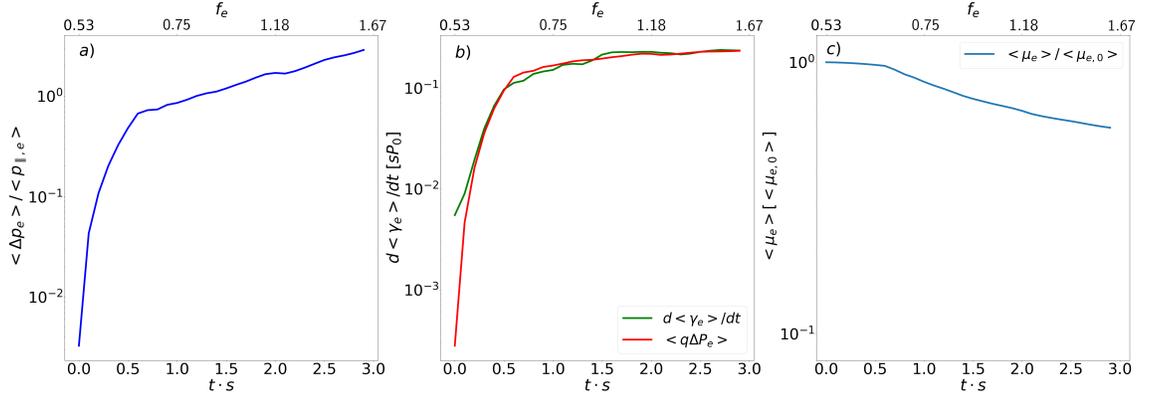


Figura 4.2: Evolución temporal de distintos parámetros, para el caso de referencia relativa. El panel **a)** muestra la anisotropía en la presión de los electrones $\Delta p_e = p_{\perp,e} - p_{\parallel,e}$ normalizado por la presión paralela $p_{\parallel,e}$. El panel **b)** muestra, en línea sólida roja, la tasa de calentamiento de los electrones, promediado sobre las partículas. Esto comparado con la tasa de calentamiento por viscosidad anisotrópica producto de la anisotropía en la presión de los electrones, promediado sobre las partículas. El panel **c)** se muestra la evolución del momento magnético promedio de los electrones, normalizado por su valor inicial.

neto del mismo, la temperatura paralela al campo disminuye y la temperatura perpendicular al campo aumenta, aumentando la anisotropía. Esto ocurre de manera adiabática hasta el momento en el que emergen las inestabilidades. En línea segmentada para cada caso, se muestra la aproximación usando la ecuación de estado CGL, mencionada anteriormente. Hasta el instante $t \cdot s = 0,5$ la evolución en la anisotropía corresponde bastante bien a esta aproximación, esto debido a que el aumento del campo magnético se hace de manera lenta. Luego de ese instante, se produce un desvío de esta aproximación adiabática debido a la rápida variación de los campos, producto de las fluctuaciones generadas por las inestabilidades, limitando la diferencia entre ambas componentes y por lo tanto limitando la anisotropía en la temperatura electrónica.

Esto mismo lo podemos observar en la figura 4.2 panel **c)**, donde se muestra el momento magnético promedio de los electrones, normalizado por su valor promedio inicial. El momento magnético permanece relativamente constante hasta el momento donde emergen las inestabilidades, en donde sale del régimen adiabático. En la misma figura, panel **a)** se muestra la evolución de la anisotropía, pero esta vez en la presión de los electrones. De este gráfico podemos ver como la anisotropía aumenta rápidamente hasta la generación de las inestabilidades, las cuales regulan la tasa de su aumento. El panel **b)** muestra como el calentamiento por viscosidad anisotrópica, es la única fuente de energía del sistema, y es proporcional a la tasa de crecimiento del campo magnético de fondo y a la anisotropía de presión como vimos en el capítulo 2.

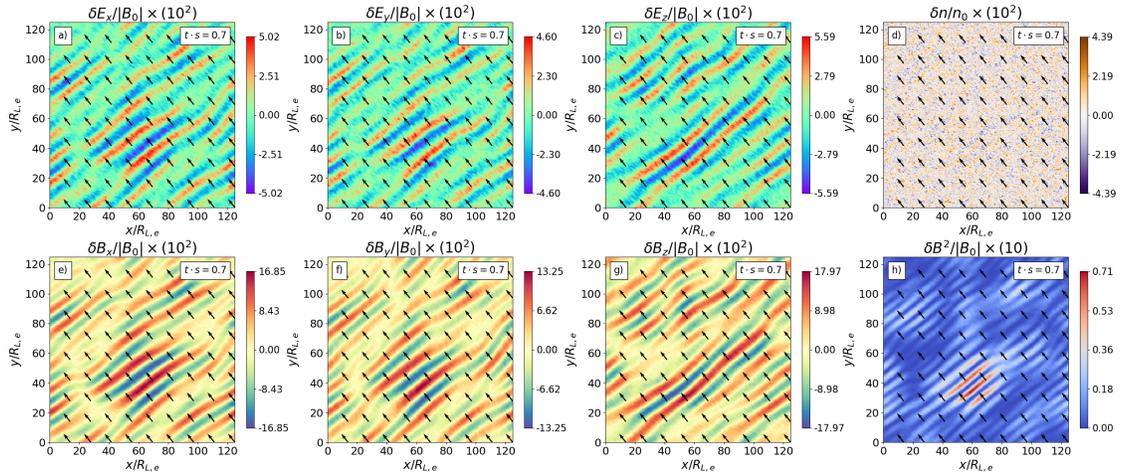


Figura 4.3: Caso Relativista: Distribución espacial de las componentes de las fluctuaciones $\delta\mathbf{B}$, $\delta\mathbf{E}$, la densidad de los electrones $\delta n_e (\equiv n_e - \langle n_e \rangle)$ y la energía en $\delta\mathbf{B}$, los campos normalizados por el modulo del campo magnético inicial y la densidad por su valor promedio $\langle n_e \rangle$, con flechas negras se muestra la dirección en la que apunta el campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$. Esto para el instante $t \cdot q = 0,7$

Podemos dar más luces sobre la geometría de los modos de Whistler observando la figura 4.3 que nos presenta las fluctuaciones de las componentes de los campos eléctrico y

magnéticos, donde podemos ver que estas son mayoritariamente paralelas al campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$, pero además podemos advertir la ausencia de fluctuaciones en la densidad de los electrones lo que nos indica que los modos inestables son de naturaleza electromagnética.

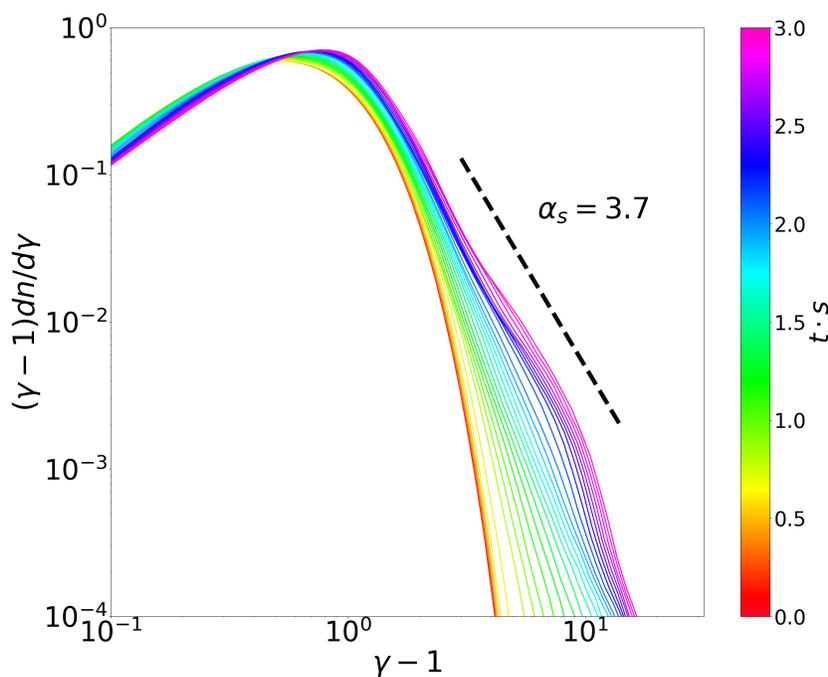


Figura 4.4: Evolución temporal del espectro de energía de los electrones con el tiempo correspondiente a cada espectro mostrado en la barra de color. A partir del instante $t \cdot s = 0,6$ (espectros amarillos) hay un rápido crecimiento de la cola no-térmica

4.1.1. Aceleración no-térmica

El calentamiento por viscosidad anisotrópica tiene dos consecuencias. Primero, está el calentamiento global por viscosidad, el cual lo podemos ver en la figura 4.4, donde el máximo del espectro se mueve a mayores energías. Pero además hay aceleración, la cual se puede ver a partir de la generación de una cola no-térmica a altas energías, la cual se modela como una ley de potencia de la forma: $dn/d\gamma \propto (\gamma - 1)^{-\alpha_s}$. La formación de esta cola no-térmica ocurre producto de la interacción entre modos inestables y los electrones, y se sostiene hasta el final de la simulación momento en el cual alcanza un índice espectral de $\alpha_s = 3,7$.

Aspecto clave para la aceleración de electrones y el posterior desarrollo de una cola no-térmica, es la evolución de los modos. Para entender este aspecto, calculamos el espectro de potencia de las fluctuaciones $\delta \mathbf{B}$ del campo magnético, realizando transformadas de Fourier en el tiempo y en el espacio de $\delta \mathbf{B}$. Para simplificar este análisis, corrimos simulaciones análogas

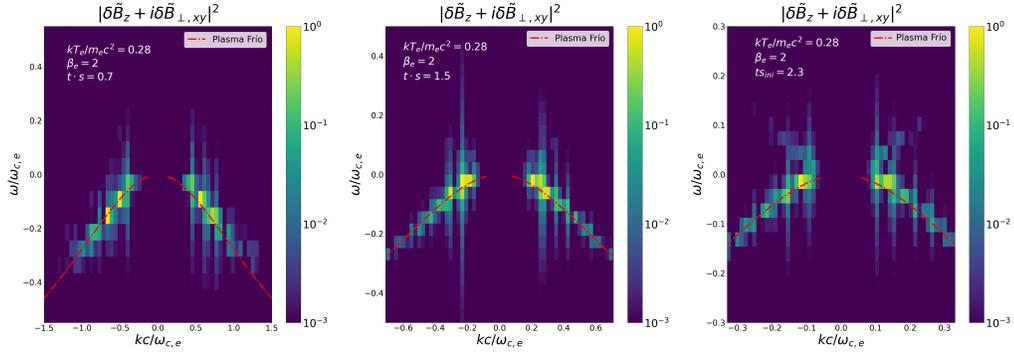


Figura 4.5: Evolución temporal de la relación de dispersión. Donde $\delta\tilde{B}_z$ y $\delta\tilde{B}_{\perp,xy}$ corresponden a las transformadas de Fourier en tiempo y espacio para componentes de las fluctuaciones magnéticas $\delta\mathbf{B}$ perpendiculares al campo magnético promedio $\langle\mathbf{B}\rangle$. La combinación $\delta\tilde{B}_z + i\delta\tilde{B}_{\perp,xy}$ permite mostrar modos con polarización circular derecha e izquierda, con frecuencias ω negativas y positivas, respectivamente. En este caso podemos advertir que los modos inestables corresponden a modos de Whistler dada su polarización circular derecha.

a la mostrada en la figura 4.5, pero en una dimensión (1D). Estas simulaciones entregaron similares resultados en términos de la aceleración de los electrones. El uso de simulaciones 1D es válido debido a que los modos que dominan son cuasi-paralelos (se propagan a lo largo del campo magnético de fondo), y por lo tanto pueden ser capturados bastante bien en simulaciones 1D.

La figura 4.5 muestra para distintos tiempos el módulo de $\delta\tilde{B}_z + i\delta\tilde{B}_{\perp,xy}$, donde el tilde denota la transformada de Fourier de una cantidad, $i = \sqrt{-1}$, y $\delta B_{\perp,xy}$ corresponde a la componente de $\delta\vec{B}$ perpendicular tanto al campo magnético de fondo \vec{B} y al eje z . Es posible mostrar que la combinación $\delta\tilde{B}_z + i\delta\tilde{B}_{\perp,xy}$ hace que las contribuciones de ondas de polarización circular izquierda y derecha aparezcan con frecuencias ω mayor y menor que cero, respectivamente (ver, por ejemplo, [33]). El hecho que en nuestro caso el espectro de las ondas esté dominado por ondas con $\omega < 0$ indica que la inestabilidad corresponde a ondas con polarización circular derecha, lo que coincide con la expectativa de que estamos en presencia de ondas de Whistler.

La figura 4.5 muestra como los modos dominantes tienen números de onda más pequeños. Esto permite que los modos interactúen con partículas térmicas como aquellas de alta energía. La condición de resonancia es:

$$\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} = \omega_{c,e}/\gamma \quad (4.1)$$

Donde ω es la frecuencia de los modos, v_{\parallel} es la velocidad de los electrones paralela al campo magnético y $\omega_{c,e}$ es la frecuencia de ciclotrón no-relativista de los electrones. Los modos de Whistler satisfacen [70]:

$$\omega/\omega_{c,e} = \Delta p_e/(\Delta p_e + p_{\parallel,e}) \quad (4.2)$$

Para este caso $\Delta p_e/p_{\parallel,e} \sim 1$ y asumiendo $\gamma \sim 1$, de esta forma la condición de resonancia queda como:

$$\omega_{c,e} \sim k_{\parallel}|v_{\parallel}| \quad (4.3)$$

Es necesario que para el proceso de aceleración sea sostenido en el tiempo, los modos inestables deben ir disminuyendo su número de onda a medida que avanza la simulación, así las nuevas partículas no-térmicas generadas luego de la emergencia de los modos inestables, pueden seguir interactuando con nuevos modos.

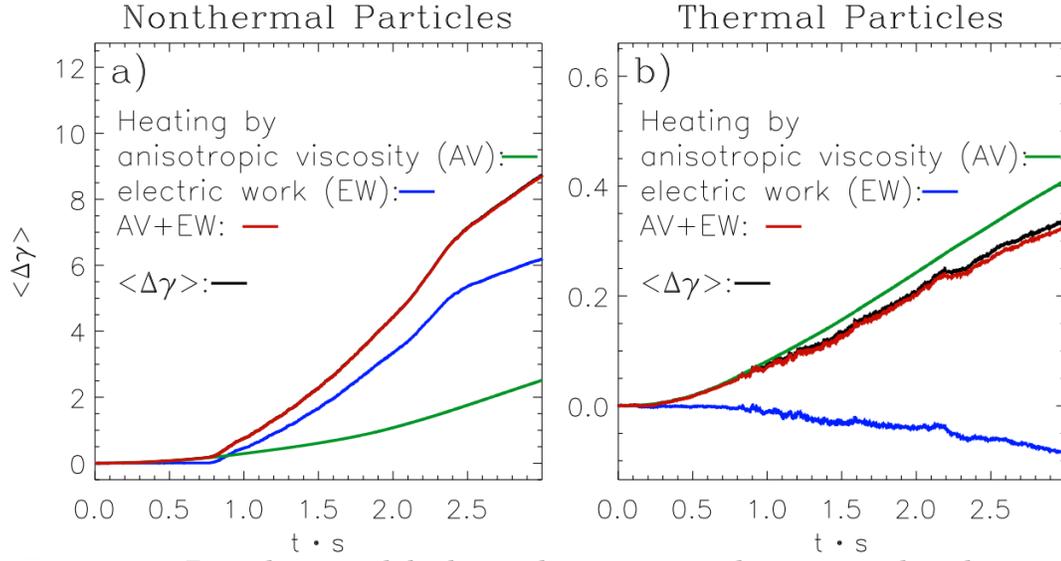


Figura 4.6: Ambos paneles muestran el cambio promedio del factor de Lorentz para dos grupos de electrones, el primero corresponde a los electrones que para el final de la simulación ($t \cdot s = 3$) tienen un factor gamma de Lorentz mayor a 10, a este grupo lo llamamos ‘partículas no-térmicas’; el segundo grupo de electrones corresponde a aquellos que para el final de la simulación tienen un factor de Lorentz entre $1,99 < \gamma < 2$, las cuales llamamos ‘partículas térmicas’. En ambos casos el trabajo hecho por el campo eléctrico se muestra en azul y el trabajo hecho por el calentamiento por viscosidad anisotrópica en verde. En negro se muestra el cambio promedio del factor de Lorentz. En ambos casos el trabajo hecho por la viscosidad anisotrópica es positivo, pero el trabajo hecho por el campo eléctrico es negativo para el caso de electrones térmicos, y para el caso de los electrones no-térmicos el trabajo hecho por el campo eléctrico es la principal fuente de energía.

Para estudiar esta interacción entre los modos inestables y los electrones estudiamos dos poblaciones de partículas, las cuales caracterizamos por su factor de Lorentz final. A cada uno de estos grupos calculamos su factor de Lorentz promedio, así como el trabajo realizado por el calentamiento por viscosidad anisotrópica y el trabajo hecho por el campo eléctrico asociado a los modos inestables, como se aprecia en la figura 4.6. En ambos casos el calentamiento por viscosidad anisotrópica y el trabajo hecho por el campo eléctrico da cuenta del cambio promedio en el factor de Lorentz de cada población. Si bien el proceso de viscosidad

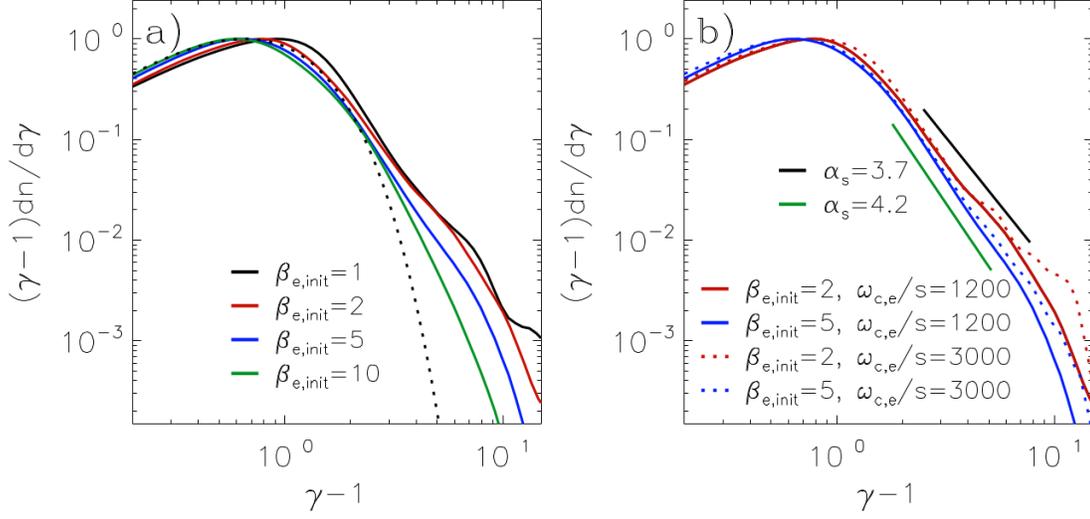


Figura 4.7: Panel **a)** muestra el espectro de simulaciones con $k_B T_e / m_e c^2 = 0,28$, $\omega_{c,e}/s = 1200$ y con distintos valores de β_e luego de tres periodos de cizalle ($t \cdot s = 3$). La línea punteada corresponde a un espectro térmico. A medida que el valor inicial de β_e aumenta el espectro final presenta una cola con un menor índice espectral, este ultimo alcanza su máximo en los casos de $\beta_e = 1$ y $\beta_e = 2$. El panel **b)** muestra los espectros finales de simulaciones con $\beta_{e,ini} = 2$ (líneas rojas) y $\beta_{e,ini} = 5$ (líneas azules), cada caso con dos valores de $\omega_{c,e}/s = 1200$ (líneas sólidas) y $\omega_{c,e}/s = 3000$ (líneas punteadas). Para ambos casos de $\beta_{e,ini}$ el índice espectral no cambia significativamente al aumentar $\omega_{c,e}/s$, esto muestra que $\omega_{c,e}/s$ no juega un rol preponderante en la aceleración y posterior formación de la cola de altas energías, incluso para valores realistas de $\omega_{c,e}/s$

anisotrópica energiza a ambos grupos de partículas, el aspecto más interesante a notar es que el trabajo hecho por el campo eléctrico entrega energía a la población no-térmica pero se lo quita a la población de electrones térmicos. Además el trabajo hecho por el campo eléctrico sobre la población no-térmica es más del doble al trabajo realizado por el calentamiento por viscosidad anisotrópica.

4.1.2. Dependencia en β_e y $\omega_{c,e}/s$

La figura 4.7 panel **a)** muestra el espectro final para cuatro simulaciones con $k_B T_e / m_e c^2 = 0,28$, $\omega_{c,e}/s = 1200$ y distintos valores iniciales de β_e . Vemos que luego de $t \cdot s = 3,0$ a menor β_e inicial, mayor dureza en la cola no-térmica, donde los casos con $\beta_e = 1$ y $\beta_e = 2$ son aquellos que desarrollan un menor índice espectral (es decir, la aceleración más eficiente). Esto se debe a que a mayor β_e inicial la inestabilidad de Whistler pone una cota menor a la anisotropía [22], lo que limita el calentamiento por viscosidad anisotrópica, esto lo podemos ver en la figura 4.7 panel **a)** donde el máximo de las distribuciones se encuentra a mayores energías para β_e mas pequeños. El caso con $\beta_{e,ini} = 1$ presenta una cola no-térmica más 'quebrada' o con mas 'bumps' que el caso con $\beta_{e,ini} = 2$, esto sugiere que la evolución de los modos a números de onda más pequeños mostrados para el caso de referencia en la figura

4.5, también sucede para el caso con $\beta_{e,ini} = 1$. Elegimos el caso con $\beta_{e,ini} = 2$ como caso de referencia ya que genera un índice espectral similar al caso $\beta_{e,ini} = 1$, pero con una cola a altas energías menos quebrada y con un índice espectral más claro.

Nuestras simulaciones tienen valores para la magnetización de los electrones que son mucho mayores que la unidad, pero que aún están muy lejos de los valores realistas presentes en ambientes astrofísicos. Para probar que este parámetro no afecta nuestros resultados compararemos simulaciones con $\beta_{e,ini} = 2$ y 5 y con magnetizaciones $\omega_{c,e}/s = 1200$ y 3000 en el panel **b)** de la figura 4.7. Vemos que para ambos casos $\beta_{e,ini} = 2$ y 5 (en rojo y azul respectivamente) hay poca diferencia entre los casos con $\omega_{c,e}/s = 1200$ y 3000 (en líneas sólidas y punteadas respectivamente), y la diferencia es que el caso de mayor magnetización presenta un espectro algo más duro, lo que nos sugiere que al seguir aumentando la magnetización nuestra cola no-térmica no desaparecerá.

4.2. Caso No-Relativista

En este caso analizaremos simulaciones que buscan ser representativas de las condiciones encontradas en llamaradas solares, específicamente en las zonas llamadas ‘above-the-loop-top’ (ALT). Estos parámetros están basados en los valores esperados en la zona ALT, para la temperatura de los electrones se reportan valores de algunas decenas de MK ([17], [43], [44], [20]), la densidad de los electrones, es estimada en el rango de $n_e \sim 10^8 - 10^{12} [cm^{-3}]$ ([17], [43], [44], [67]), así como la intensidad del campo magnético, la cual es cercana a $B = 100 [G]$ ([32]). Basados en esto elegimos los siguientes valores iniciales para nuestras simulaciones: $T_e = 52 [MK]$, $B = 100 [G]$ y $n_e = 10^9 [cm^{-3}]$. Equivalentemente $\beta_e = 0,0625$ y $k_B T_e / m_e c^2 = 0,00875$

La figura 4.8 es análoga a la figura 4.1. En su panel **b)**, podemos ver que la evolución en la anisotropía es similar al caso no-relativista, a excepción de que la emergencia de las inestabilidades ocurre a tiempos posteriores. Por lo cual estas simulaciones corren por cuatro periodos de cizalle s^{-1} , con el fin de capturar de mejor manera la evolución de los modos inestables.

La figura 4.8 panel **a)** muestra que inicialmente los modos oblicuos (aquellos en que el ángulo entre su vector de onda \mathbf{k} y el campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$ es mayor a 20 grados) son dominantes hasta aproximadamente el instante $t \cdot s \sim 2,2$ donde modos cuasi-paralelos comienzan a dominar. Otra característica que diferencia estos dos regímenes es la importante componente electrostática de los modos oblicuos, lo cual se puede ver con claridad en la figura 4.8 panel **c)** donde se muestra la energía asociada a componentes electrostática y electromagnética del campo eléctrico de los modos. Inicialmente en el régimen ‘oblicuo’ la energía asociada a las fluctuaciones eléctricas es principalmente de naturaleza electrostática, la que gradualmente cede ante la parte electromagnética, para que en tiempos posteriores entrado en el régimen ‘cuasi-paralelo’ la energía de las fluctuaciones eléctricas sea predominantemente de naturaleza electromagnética. Esta misma situación se puede apreciar en los

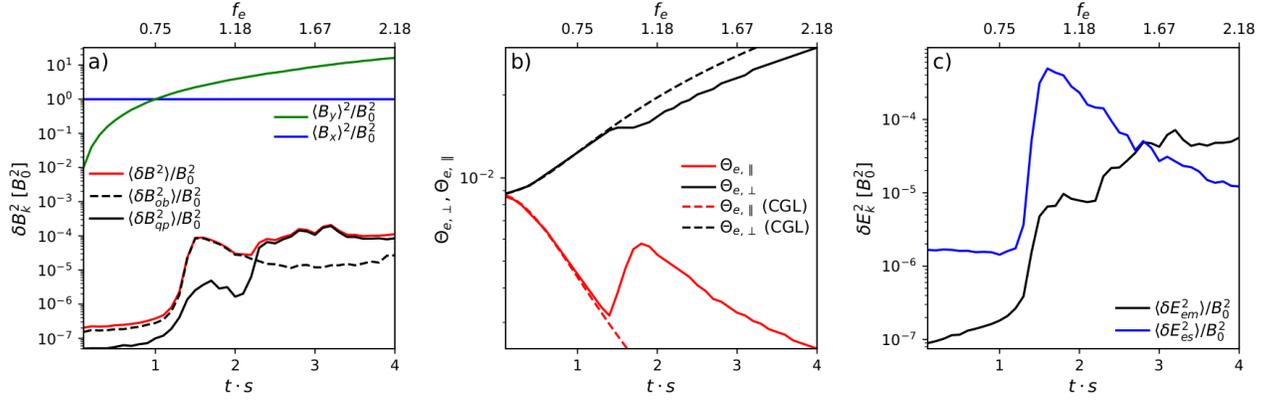


Figura 4.8: Evolución temporal de los campos y temperatura para el caso no relativista con valores iniciales de $\beta_e = 0,0625$ $\Theta_{e,\parallel} = \Theta_{e,\perp} = k_B T_e / m_e c^2 = 0,00875$. El eje horizontal inferior muestra el tiempo transcurrido en unidades del periodo de cizalle s , el eje horizontal superior muestra el valor instantáneo de $f_e = \omega_{c,e} / \omega_{p,e}$. El Panel **a**) muestra la evolución temporal de la energía en las componentes x (línea continua azul) e y (línea continua verde) del campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$. En línea continua roja se muestra la evolución en energía de las fluctuaciones en el campo magnético $\delta \mathbf{B} = \mathbf{B} - \langle \mathbf{B} \rangle$. En línea negra continua se muestra la evolución temporal de la contribución a δB de los modos quasi-paralelos al campo magnético promedio y en línea negra segmentada la contribución de los modos oblicuos al campo magnético promedio. El panel **b**) muestra la evolución temporal de la temperatura perpendicular y paralela al campo magnético promedio, en líneas segmentadas se muestra la evolución según la ecuación de estado adiabática Chew-Goldberg-Low (CGL). El panel **c**) muestra la evolución temporal de la energía en las fluctuaciones electrostáticas y electromagnéticas, en líneas azul y negra, respectivamente.

paneles **d**) de las figuras 4.9 y 4.10 donde se muestran las fluctuaciones en la densidad de los electrones. En el instante $t \cdot s = 1,5$ se pueden ver modos oblicuos en las fluctuaciones de densidad de electrones, lo cual refleja la presencia de una significativa fluctuación en la densidad de carga del plasma (recordar que en nuestras simulaciones los iones sólo se mueven con el fluido de fondo, pero no tienen dinámica), esto implica la presencia de una componente electrostática en ese régimen. Posteriormente, en el instante $t \cdot s = 3,0$ entrado ya el régimen ‘cuasi-paralelo’ las fluctuaciones en la densidad de los electrones ya no son preponderantes, pero de todas formas se puede advertir la presencia de un modo electrostático cuasi-paralelo.

4.2.1. Comparación con teoría lineal.

Una aspecto relevante sobre esta transición entre modos electromagnéticos paralelos y modos oblicuos con componente electrostática, es si existe correlato en la teoría lineal. Estudios previos [21] muestran que para el rango de parámetros del plasma no-relativista presentados en esta sección, existen tres tipos de modos relevantes: modos de Whistler, modos Z (ambos predominantemente paralelos al campo magnético promedio) y modos cuasi-electrostáticos (oblicuos al campo magnético promedio). Usando teoría de Vlasov lineal es posible encontrar

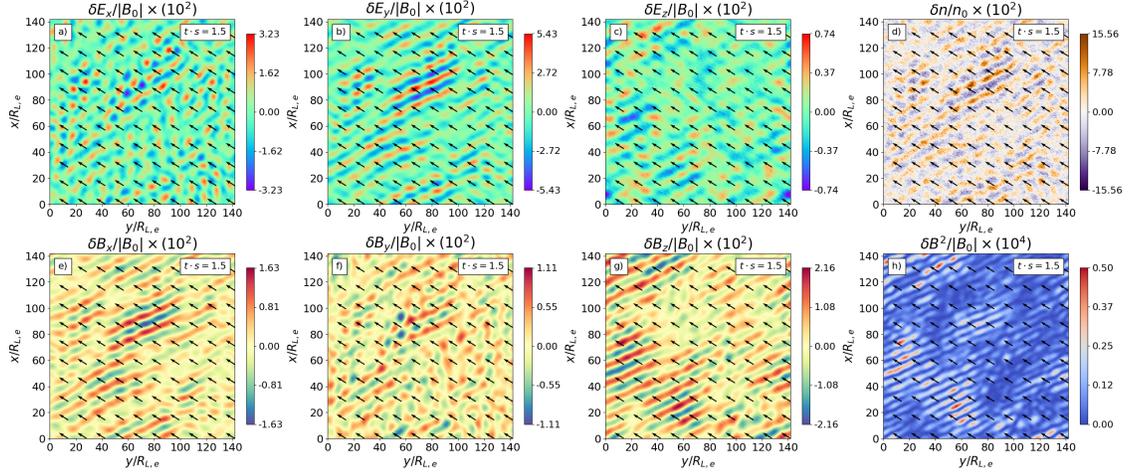


Figura 4.9: Caso No-relativista: Distribución espacial de las componentes de las fluctuaciones, $\delta\mathbf{B}$ (paneles e, f y g), $\delta\mathbf{E}$ (paneles a, b y c), la densidad de los electrones $\delta n_e (\equiv n_e - \langle n_e \rangle)$; panel d) y la energía en $\delta\mathbf{B}$, los campos normalizados por el modulo del campo magnético inicial y la densidad por su valor promedio $\langle n_e \rangle$. Con flechas negras se muestra la dirección en la que apunta el campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$. Todos los paneles corresponden al instante $t \cdot s = 1,5$

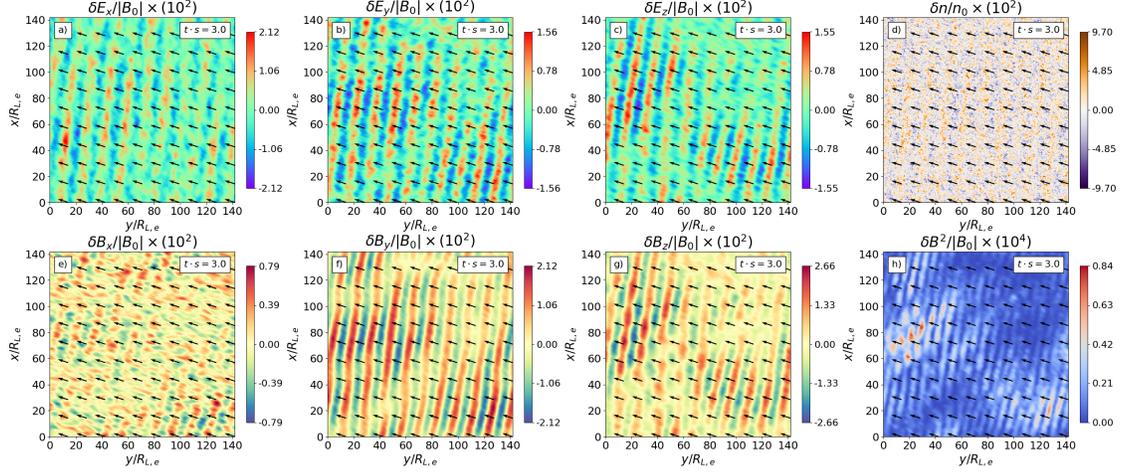


Figura 4.10: Mismo caso que el presentado que la figura 4.9, pero para el instante $t \cdot s = 3,0$

qué modos son más inestables. Esta información fue proveída por nuestro colaborador Daniel Verscharen, quien hizo uso del ‘The New Hampshire Dispersion relation Solver’ (NHDS) presentado en [68].

De este modo obtuvimos los umbrales para la anisotropía en la temperatura $\Theta_{e,\perp}/\Theta_{e,\parallel} - 1$ necesarios para el crecimiento de los distintos modos, esto asumiendo valores para la taza de

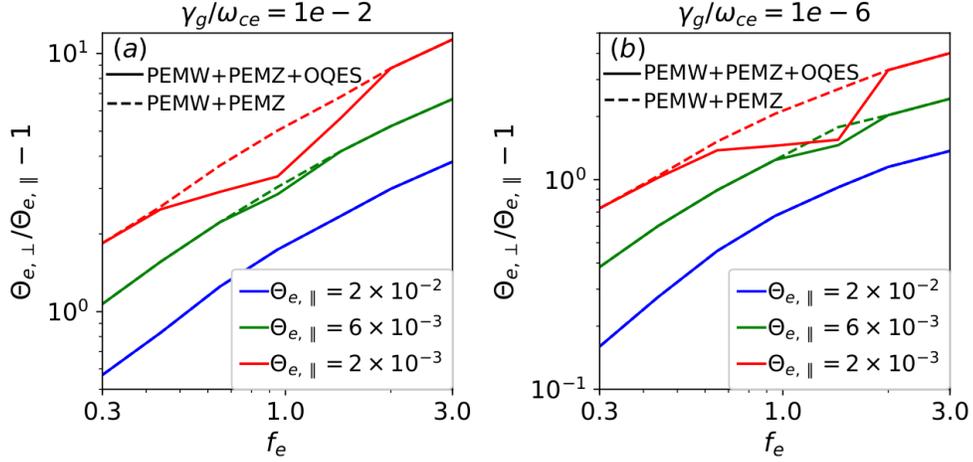


Figura 4.11: Umbrales de anisotropía para el crecimiento de modos paralelos (lineas segmentadas) y modos con propagación libre (lineas sólidas) como función del parámetro f_e y la temperatura paralela de los electrones (para tres valores diferenciados por colores). Los paneles (a) y (b) muestran los umbrales asumiendo tasas de crecimiento de $\gamma_g = 10^{-2} \omega_{c,e}$ y $\gamma_g = 10^{-6} \omega_{c,e}$ respectivamente.

crecimiento γ_g , el parámetro f_e y la temperatura paralela electrónica $\Theta_{e,\parallel}$.

La figura 4.11 muestra los umbrales para los tres modos presentes en nuestras simulaciones, los identificaremos por siglas en inglés: modos de Whistler como ‘parallel electromagnetic whistler’ (PEMW), modos Z como ‘parallel electromagnetic Z’ (PEMZ), modos oblicuos cuasi-electrostáticos como ‘oblique quasi-electrostatic’ (OQES), donde los primeros dos tipos de modos tienen propagación paralela al campo magnético promedio, mientras que el último se propaga preferentemente de manera oblicua. Las líneas segmentadas corresponden a los umbrales para los modos de propagación paralela (considerando el menor umbral entre los modos PEMW y modos PEMZ), mientras que las líneas sólidas corresponden al modo con menor umbral de anisotropía considerando todos los ángulos de propagación. En colores se muestran los umbrales asumiendo distintos valores para la temperatura paralela de los electrones, $\Theta_{e,\parallel} = 0,002$ en rojo, $\Theta_{e,\parallel} = 0,006$ en verde y $\Theta_{e,\parallel} = 0,02$ en azul. El panel **a)** muestra los umbrales de anisotropía asumiendo una tasa de crecimiento $\gamma_g/\omega_{c,e} = 10^{-2}$ y el panel **b)** asume una tasa de crecimiento de $\gamma_g/\omega_{c,e} = 10^{-6}$.

Para el caso de la simulación presentada en la figura 4.8 estimamos γ_g mirando el panel **a)**, durante la fase de crecimiento exponencial que ocurre para $\delta\mathbf{B}$ la cual ocurre en el intervalo de tiempo $t \cdot s \sim 1,2 - 1,4$. En este intervalo $\delta\mathbf{B}$ aumenta 10 veces su valor aproximadamente. Así la tasa de crecimiento es del orden de $\gamma_g \sim 10s$. Tomando que esta simulación tiene una magnetización inicial de $\omega_{c,e}^{ini}/s = 1200$, podemos expresar la tasa de crecimiento como $\gamma_g = 10^{-2} \omega_{c,e}^{ini}$ por lo cual para esta simulación el panel **a)** de la figura 4.11 es el más representativo. Para los casos con temperatura paralela $\Theta_{e,\parallel} = 2 \times 10^{-2}$ y $\Theta_{e,\parallel} = 6 \times 10^{-3}$ vemos que hay una separación entre los modos que son de propagación paralela de aquellos con propagación libre, estos últimos los cuales tienen menor umbral de anisotropía.

Esta separación nos muestra que hay casos para los cuales los modos oblicuos cuasi-electrostáticos son mas inestables y por lo tanto dominan por sobre los modos paralelos. Esto ocurre para dos casos de la temperatura paralela $\Theta_{e,\parallel} = 0,002$ y $\Theta_{e,\parallel} = 0,006$ y cuando el parámetro f_e esta entre $0,4 \lesssim f_e \lesssim 1,8$ y $0,8 \lesssim f_e \lesssim 1,3$, respectivamente. Veamos que estas son precisamente las condiciones que se cumplen cuando los modos oblicuos dominan al comienzo de la simulación, desde que la inestabilidad emerge hasta que deja de ser dominante ocurre para valores del parámetro f_e entre $0,8 \lesssim f_e \lesssim 1,3$, además el panel b) de la figura 4.8 muestra que para ese intervalo de valores de f_e la temperatura paralela $\Theta_{e,\parallel}$ esta en el rango de $0,0025 \lesssim \Theta_{e,\parallel} \lesssim 0,005$, lo cual es consistente con la teoría lineal presentada.

4.2.2. Aceleración no-térmica

Vemos en la figura 4.12 que al momento de emerger los primeros modos oblicuos, a partir del instante $t \cdot s \simeq 1,4$ hasta el instante $t \cdot s \simeq 2,2$, estos no son tan eficientes acelerando partículas. Mas bien durante esta primera etapa estos modos predominantemente calientan las partículas que inicialmente tienen mayor energía, sin mayor cambio en el indice espectral. Este calentamiento tiene efectos regulando la anisotropía, en el panel **a)** de la figura 4.13 y el panel **b)** de la figura 4.8, los cuales muestran la anisotropía en la presión y en la temperatura respectivamente. Durante esta fase inicial el plasma disminuye su anisotropía, por única vez en toda la simulación. Luego cuando los modos paralelos son los dominantes, la aceleración se hace más eficiente y la anisotropía comienza nuevamente a aumentar. Esta fase donde los modos paralelos dominan es cuando la aceleración es realmente eficiente, lo que produce un indice espectral que llega a $\alpha_s = 2,9$ al final de la simulación.

Podemos obtener más luces sobre como estos modos interactúan con los electrones, analizando $p_{e,\perp}/p_{e,\parallel}$ y la energización, de tres grupos de electrones, diferenciados por su energía final. Estos tienen como objetivo caracterizar distintas zonas del espectro final. La primera son los electrones que llamamos ‘térmicos’ ($\gamma_e - 1 < 0,05$) y corresponden a aquellos en el peak del espectro. La segunda zona corresponde a los electrones en la cola ‘no-térmica’ entre $0,05 < \gamma_e - 1 < 0,2$, lo cual corresponde al intervalo que mas se asemeja a una ley de potencia de indice espectral $\alpha_s = 2,9$, estos electrones lo llamaremos ‘no-térmicos de baja energía’. El intervalo final corresponde al ‘chichón’ en la parte más energética del espectro ($0,2 < \gamma_e - 1$), a estos electrones los llamaremos ‘no-térmicos de alta energía’.

La figura 4.14 muestra la evolución de las diferentes fuentes de energización para nuestras tres poblaciones de electrones: electrones ‘térmicos’ en el panel **a)**, electrones ‘no-térmicos de baja energía’ en el panel **b)** y electrones ‘no-térmicos de alta energía’ en el panel **c)**. Si bien la viscosidad anisotropica es el mecanismo dominante en la evolución de la tasa de energización total de los electrones, como muestra el panel **b)** de la figura 4.14. El trabajo hecho por el campo eléctrico asociado a los modos inestables, es el mecanismo principal de energización de los electrones, para los electrones no térmicos de alta energía mostrados en el panel **c)**. Además el trabajo hecho por los modos inestables actúa de forma diferente dependiendo de la posición en el espectro de los electrones, a diferencia de los electrones en la cola no-térmica,

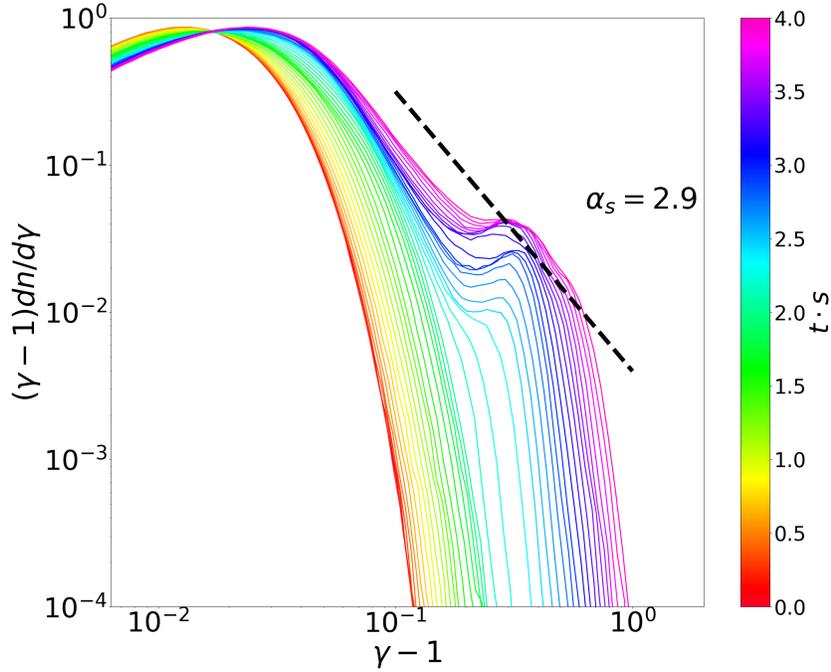


Figura 4.12: Evolución temporal del espectro de energía de los electrones, el tiempo correspondiente a cada espectro se muestra en la barra de color.

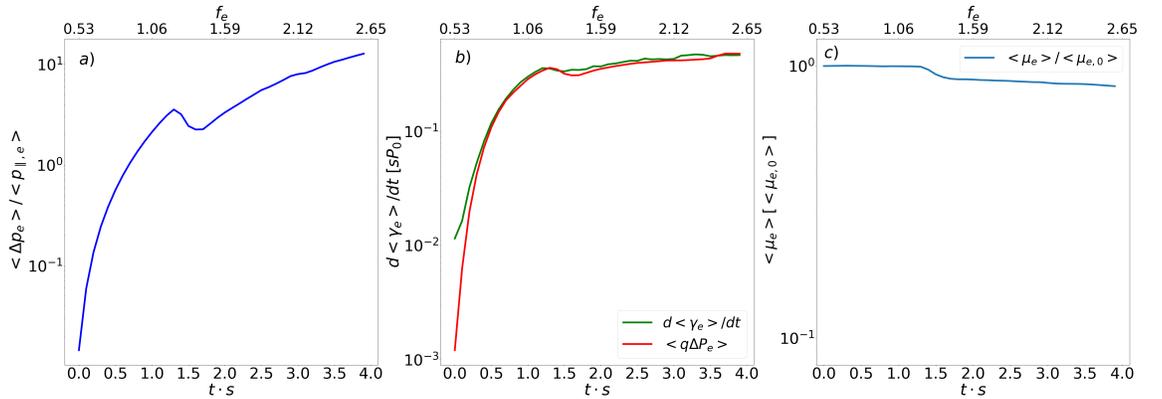


Figura 4.13: Evolución temporal de distintos parámetros para el caso de referencia no-relativista. El panel a) muestra la anisotropía en la presión de los electrones $\Delta p_e = p_{\perp, e} - p_{\parallel, e}$ normalizado por la presión paralela $p_{\parallel, e}$. El panel b) muestra, en línea sólida roja, la tasa de calentamiento de los electrones, promediado sobre las partículas. Esto comparado con la tasa de calentamiento por viscosidad anisotópica producto de la anisotropía en la presión de los electrones, promediado sobre las partículas. El panel c) se muestra la evolución del momento magnético promedio de los electrones, normalizado por su valor inicial.

para los electrones ‘térnicos’ el trabajo hecho por los modos inestables es negativo. Esto sugiere que la formación de la cola no-térmica es causada por la transferencia de energía, desde los electrones térmicos, a través de los campos eléctricos generados por los modos inestables.

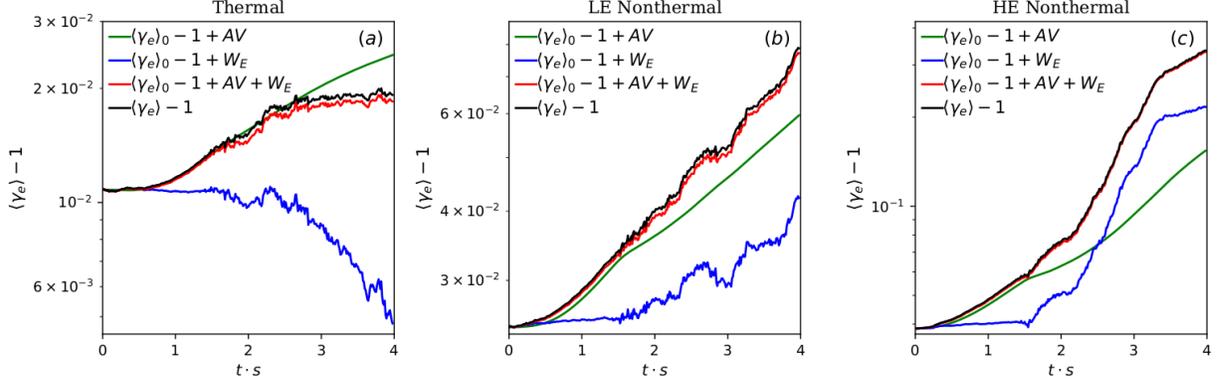


Figura 4.14: Evolución temporal de las distintas contribuciones a la energización de los electrones (normalizadas por su energía en reposo), divididos en tres poblaciones, dependiendo de su energía final. El panel **a)** muestra electrones que para el final de la simulación cumplen con $\gamma_e < 1,05$, el panel **b)** electrones que para el final cumplen con $1,05 < \gamma_e < 1,2$ y el panel **c)** electrones que para el final cumplen con $1,2 < \gamma_e$. En cada panel se muestra en línea negra sólida la evolución de la energía promedio para el correspondiente grupo de electrones, en línea azul el trabajo promedio hecho por el campo eléctrico (W_E) sobre los electrones, en línea verde el trabajo promedio hecho por la viscosidad anisotrópica (AV) sobre los electrones y final mente en rojo la suma de los trabajos anteriores

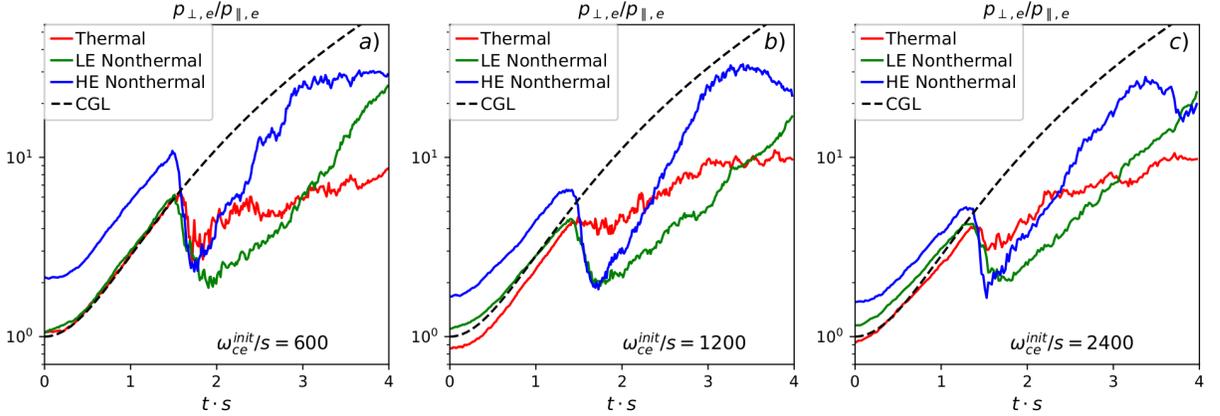


Figura 4.15: $p_{\perp,e}/p_{\parallel,e}$ promedio para tres distintas poblaciones de electrones, dependiendo de su energía final. En rojo electrones que para el final de la simulación cumplen con $\gamma_e < 1,05$, en verde electrones que para el final cumplen con $1,05 < \gamma_e < 1,2$ y en azul electrones que para el final cumplen con $1,2 < \gamma_e$. Cada panel muestra un caso con distinta magnetización, vemos que para los tres casos el comportamiento de la anisotropía es similar, sugiriendo que la evolución de este es bastante independiente de la magnetización.

Cabe mencionar que una situación bastante similar al caso relativista presentado en la figura 4.6, donde el campo eléctrico asociado a las inestabilidades extrae energía en la población de electrones ‘térnicos’ y se lo entrega a aquellos electrones que terminan en la cola no-térmica.

La figura 4.15 muestra la evolución de $p_{\perp,e}/p_{\parallel,e}$ promedio, para las tres poblaciones de elec-

trones especificadas en el párrafo anterior y para tres casos de distinta magnetización $\omega_{c,e}^{ini}/s$. Además para comparar, en línea segmentada negra, se muestra la evolución de $p_{\perp,e}/p_{\parallel,e}$ de acuerdo a la ecuación de estado CGL para una población que inicialmente es isotrópica. Lo primero que salta a la vista en la figura 4.15 es que los electrones que terminan con mayor energía al final de la simulación, inicialmente tienen un ángulo de inclinación mayor, esto se podría explicar por la forma que opera el calentamiento por viscosidad anisotrópica, el cual es proporcional a la anisotropía en la presión, por lo cual a mayor anisotropía mayor es el calentamiento. Luego de que los modos oblicuos emergen hay un rápido decrecimiento del ángulo de inclinación principalmente para las poblaciones no-térmicas, acercándose a la isotropía. Durante este periodo es donde encontramos que la contribución de estos modos oblicuos a la aceleración es poco relevante, pero no así el calentamiento. En la figura 4.13 durante este periodo ($1,5 \lesssim t \cdot s \lesssim 2,2$) vemos que los electrones de mayor energía avanzan a aún mayores energías generando un pequeño ‘bump’ antes de entrar en el régimen de modos paralelos (líneas color cyan). En la figura 4.14 cuando los modos paralelos entran en acción, podemos ver que estos energizan más eficientemente electrones. Por lo cual, si bien la contribución a la aceleración de los modos oblicuos es sub-dominante, estos dejan a los electrones de mayor energía en mejor pie para seguir ganando energía por la aceleración estocástica generada por los modos paralelos.

4.2.3. Dependencia en $\omega_{c,e}/s$ y extrapolación a valores realistas.

Estimaremos el parámetro s dividiendo la velocidad de Alfvén típica v_A en la zona ‘loop-tops’ (v_A debe ser cercana a la velocidad de las líneas de campo recién re-conectadas, siendo expulsadas de la sabana de corriente) por la longitud típica de los ‘looptops’ contrayéndose L_{LT} . Usando los parámetros de referencia $n_e \sim 10^9 [cm^{-3}]$ y $B \sim 100 [G]$, además estimando $L_{LT} \sim 10^9 [cm]$ [11], obtenemos $s \sim 1 [seg^{-1}]$ y $\omega_{c,e}/s \sim 10^9$. Estos valores están muy por encima de los que podemos alcanzar en nuestras simulaciones. Por lo tanto, debemos cerciorarnos de que la predominancia de los modos PEMZ y OQES mostrada en el caso $\omega_{c,e}/s = 1200$ ocurra de forma similar para casos con $\omega_{c,e}/s$ realistas, así como el efecto que tiene la aceleración de electrones en el espectro final de los electrones.

El parámetro s establece la escala de tiempo en la cual evolucionan las condiciones macroscópicas del plasma, entre ellas la tasa de crecimiento de los modos inestables γ_g . Como habíamos mostrado para el cálculo de los umbrales de anisotropía, nuestro caso de referencia no-relativista presenta una tasa de crecimiento para los modos inestables del orden de $\gamma_g/s \sim 10$. La figura 4.16 nos muestra que esta tasa de crecimiento es similar para los tres casos presentados los cuales solo difieren en el valor de $\omega_{c,e}/s$. Esto nos sugiere que para encontrar que modos son inestables para valores realistas de $\omega_{c,e}/s$, debemos calcular los umbrales de anisotropía para valores comparativamente más pequeños de $\omega_{c,e}/\gamma_g$. Esto se muestra en el panel **b)** de la figura 4.11 donde se calculan los umbrales de anisotropía para los mismos valores de f_e y $\Theta_{e,\parallel}$ mostrados en el panel **a)** de la misma figura, pero asumiendo una tasa de $\gamma_g/\omega_{c,e} = 10^{-6}$. Podemos ver que para esta tasa de crecimiento los modos PEMW, PEMZ y OQES dominan de forma similar al caso mostrado $\gamma_g/\omega_{c,e} = 10^{-2}$. Esto

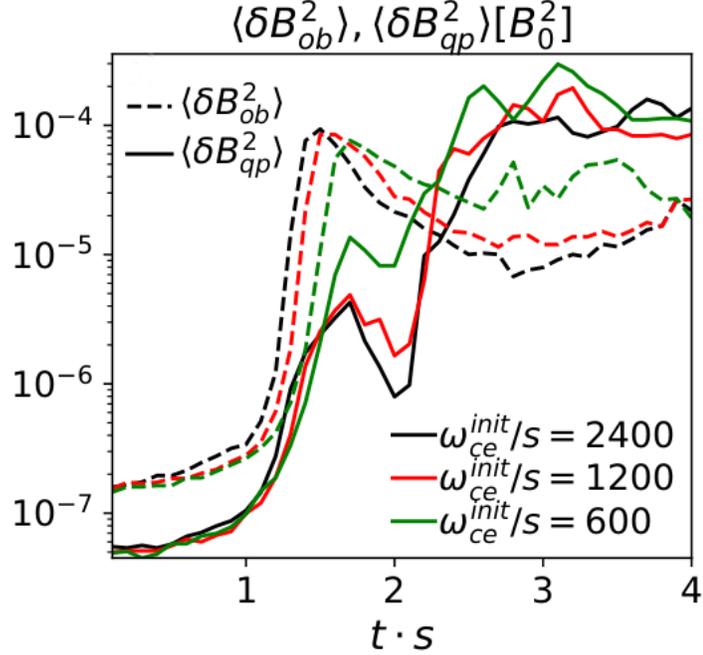


Figura 4.16: Comparación de la evolución temporal de la energía contenida en las fluctuaciones del campo magnético $\delta\mathbf{B}$, dividido en modos paralelos (líneas continuas) y modos oblicuos (líneas segmentadas), para los casos con $\omega_{c,e}/s = 600, 1200$ y 2400 , en color verde, rojo y negro, respectivamente.

nos muestra que el rol de los diferentes modos inestables en el control de la anisotropía no cambia significativamente para valores realistas de $\omega_{c,e}/s$.

Sobre el efecto final en el espectro, la figura 4.17 muestra el instante final ($t \cdot s = 4,0$) de 4 simulaciones para el caso de referencia no-relativista las cuales solo difieren en el valor inicial parámetro $\omega_{c,e}/s$. Vemos que no hay diferencias significativas en el índice espectral final, salvo un pequeño endurecimiento en el espectro a medida aumenta el valor inicial de $\omega_{c,e}/s$, el cual para los casos $\omega_{c,e}/s = 1200$ y $\omega_{c,e}/s = 2400$ es despreciable. Esto nos muestra que la aceleración final no se ve afectada por el aumento de $\omega_{c,e}/s$, y de hacerlo el espectro se endurece ligeramente, por lo cual para valores realistas de $\omega_{c,e}/s$, la aceleración será igual de importante.

Veamos como se relacionan la frecuencia efectiva de scattering ν_{eff} y la tasa de crecimiento del campo s . Para eso nos apoyaremos en teoría lineal [60], estimaremos ν_{eff} usando la evolución de $\Theta_{e,\parallel}$, la cual esta dada por:

$$\frac{d\Theta_{e,\parallel}}{dt} + 2\Theta_{e,\parallel} \hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}} : \nabla \mathbf{v} = \nu_{eff} \frac{2}{3} \Delta \Theta_e \quad (4.4)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de cizalle del plasma ($\mathbf{v} = -sv\hat{y}$), $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{B}}/B$ y $\Delta \Theta_e = \Theta_{e,\perp} - \Theta_{e,\parallel}$, así:

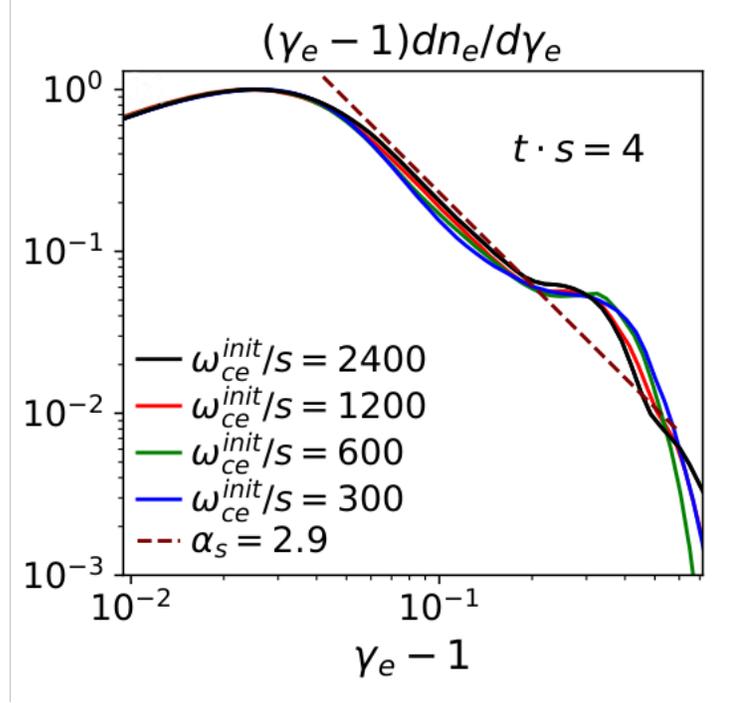


Figura 4.17: Espectros finales para distintas simulaciones en nuestro caso de referencia no-relativista, donde el único parámetro que cambia es $\omega_{c,e}/s$. Mostramos los casos $\omega_{c,e}/s = 300$, 600, 1200 y 2400, en color, azul, verde, rojo y negro, respectivamente. En línea segmentada marrón se muestra una ley de potencia de índice $\alpha_s = 2,9$

$$\frac{d\Theta_{e,\parallel}}{d(ts)} + 2\Theta_{e,\parallel}\hat{b}_x\hat{b}_y = \frac{2}{3}\Delta\Theta_e\frac{\nu_{eff}}{s} \quad (4.5)$$

La figura 4.18 panel **a)** muestra la evolución de la anisotropía en la temperatura promedio de los electrones $\langle\Delta\Theta_e\rangle$, y el panel **b)** muestra la evolución de la temperatura paralela al campo magnético promedio de los electrones para tres simulaciones las cuales solo difieren en el valor inicial de $\omega_{c,e}/s$, en verde $\omega_{c,e}/s = 600$, en rojo $\omega_{c,e}/s = 1200$ y en negro $\omega_{c,e}/s = 2400$. Podemos ver que para el caso $\langle\Delta\Theta_e\rangle$ no hay diferencias significativas y para el caso $\langle\Theta_{e,\parallel}\rangle$ la temperatura es bastante similar entre los tres casos, salvo un ligero aumento para los casos de mayor $\omega_{c,e}/s$. Esto nos permite evaluar que el lado derecho de la ecuación 4.5, la cual depende de la evolución $\langle\Theta_{e,\parallel}\rangle$, es relativamente constante para los tres valores iniciales de $\omega_{c,e}/s$. Para el caso del lado derecho que depende de $\langle\Delta\Theta_e\rangle$ la cual es bastante similar para los distintos casos de $\omega_{c,e}/s$. Con ambos lados de la ecuación 4.5 sin mayores cambios al aumentar el valor inicial de $\omega_{c,e}/s$ podemos inferir que el cociente ν_{eff}/s , es relativamente constante para los tres valores de $\omega_{c,e}^{ini}/s$ presentados. Lo que nos permite establecer que ν_{eff} es proporcional a s y que el número de veces que los electrones son efectivamente scattereados en un intervalo de tiempo fijo, es independiente de $\omega_{c,e}^{ini}/s$. Así, en este esquema de aceleración estocástica, esperamos que el efecto en la aceleración en un periodo de tiempo fijo, dependerá solo en las propiedades dispersivas de los modos inestables [66], las cuales no dependen de $\omega_{c,e}^{ini}/s$. Por esto esperamos que la eficiencia en la aceleración sea independiente de $\omega_{c,e}^{ini}/s$. Mientras este parámetro sea mucho mayor a la unidad la propagación de los modos inestables y la oscilación de las partículas no se verá afectada por la evolución macroscópica del plasma, la

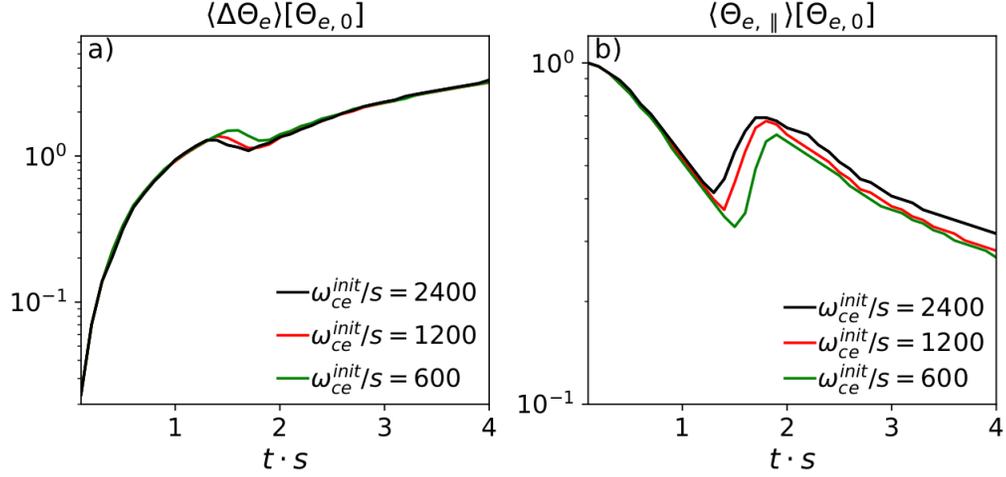


Figura 4.18: El panel *a)* muestra la evolución de anisotropía promedio de los electrones para tres simulaciones del caso de referencia no-relativista, las cuales solo difieren en el valor inicial de $\omega_{c,e}/s$, en verde $\omega_{c,e}/s = 600$, en rojo $\omega_{c,e}/s = 1200$ y en negro $\omega_{c,e}/s = 2400$. El panel *b)* muestra la evolución de la temperatura paralela al campo magnético promedio de los electrones, para los mismos casos que el panel anterior.

cual esta dada por s .

4.2.4. Caso Compresivo

Como mencionamos anteriormente, la amplificación del campo magnético de fondo que da origen a las anisotropías de temperatura puede deberse tanto a movimientos tipo cizalle como compresivos. En esta sección exploramos el efecto de usar compresión, analizando simulaciones que fueron proveídas por nuestro colaborador Lorenzo Sironi. Para este tipo de simulaciones nosotros nos concentramos solamente en el análisis. Las simulaciones mismas fueron corridas por el profesor Sironi, usando el método expuesto en [63]. Para comparar con el caso cizallado, las simulaciones compresivas iniciaran con los mismas condiciones iniciales ($f_e \approx 0,53$ $\Theta_e^{ini} = 0,00875$) y correrán hasta que el parámetro $f_e \equiv \omega_{c,e}/\omega_{p,e}$ llegue a $f_e \approx 2$. De es esta forma testaremos si la transición entre modos OQES y PEMZ ocurre de la misma forma que para el caso cizallado y el efecto que esto tiene en la aceleración de electrones.

En el caso de las simulaciones compresivas, el plasma es sometido a un campo de velocidades de la forma $v = -q(y\hat{y} + z\hat{z})/(1 + qt)$, (donde q es un parámetro que da cuenta de la tasa de compresión, tiene unidades de frecuencia) lo que genera (por conservación del flujo magnético) un aumento en el campo magnético de la forma $|\langle \mathbf{B} \rangle| = B_0(1 + qt)^2$. Esto es una tasa de crecimiento mayor al caso del cizalle ($(1 + st^2)^{1/2}$). Lo que tiene como consecuencia que la evolución del parámetro f_e en el caso compresivo es distinta al caso cizallado, donde para el primer caso solo necesitaremos tres periodos del parámetro de compresión, a diferencia de los cuatro periodos en el caso cizallado.

Operaremos de forma similar al caso de las simulaciones cizalladas, primero veremos como la evolución del campo magnético genera calentamiento, y luego veremos el efecto que éste tiene en la aceleración de electrones.

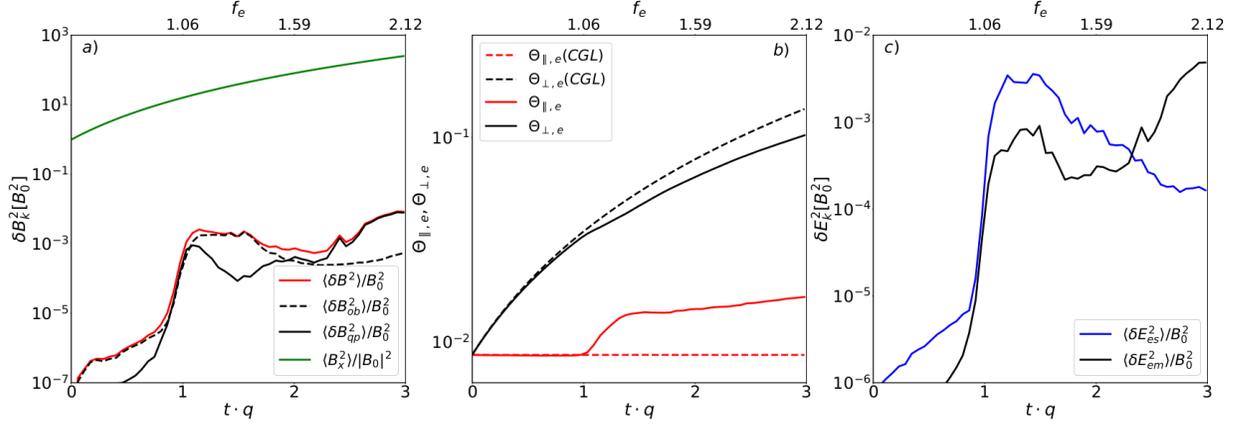


Figura 4.19: Evolución temporal de los campos y temperatura para el caso no relativista y compresivo con valores iniciales de $\beta_e = 0,0625$ $\Theta_{e,\parallel} = \Theta_{e,\perp} = k_B T_e / m_e c^2 = 0,00875$. El eje horizontal inferior muestra el tiempo transcurrido en unidades del periodo de compresión q , el eje horizontal superior muestra el valor instantáneo de $f_e = \omega_{c,e} / \omega_{p,e}$. El Panel **a)** muestra la evolución temporal de la energía en las componentes x (línea continua azul) e y (línea continua verde) del campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$. En línea continua roja se muestra la evolución en energía de las fluctuaciones en el campo magnético $\delta \mathbf{B} = \mathbf{B} - \langle \mathbf{B} \rangle$. En línea negra continua se muestra la evolución temporal de la contribución a δB de los modos cuasiparalelos al campo magnético promedio y en línea negra segmentada la contribución de los modos oblicuos al campo magnético promedio. El panel **b)** muestra la evolución temporal de la temperatura perpendicular y paralela al campo magnético promedio, en líneas segmentadas se muestra la evolución según la ecuación de estado adiabática Chew-Goldberg-Low (CGL). El panel **c)** muestra la evolución temporal de la energía en las fluctuaciones electrostáticas y electromagnéticas, en líneas azul y negra, respectivamente.

La figura 4.19 muestra la evolución de los campos y temperatura de los electrones. El panel **a)** muestra en línea sólida verde el crecimiento del campo magnético, el cual ocurre en la componente \hat{x} de la simulación $|B_x| = |\langle \mathbf{B} \rangle| = B_0(1+qt)^2$. Inicialmente, dada la amplificación del campo magnético, las componentes paralelas y perpendiculares a este evolucionan de manera adiabática. El panel **b)** muestra que hasta el instante $t \cdot q \approx 1$, la evolución de $\Theta_{e,\parallel}$ y $\Theta_{e,\perp}$ coinciden con la aproximación adiabática mostrada en líneas segmentadas para cada caso. El panel **a)** muestra en línea roja sólida $\delta \mathbf{B}$, luego de un abrupto aumento entre $t \cdot q \approx 0,8$ y $t \cdot q \approx 1,0$, $\delta \mathbf{B}$ satura su crecimiento, mismo instante en el que comienza la separación de la evolución adiabática $\Theta_{e,\parallel}$ y $\Theta_{e,\perp}$. Esto muestra que al igual que en el caso cizallado el scattering entre los modos inestables y los electrones regula el crecimiento de la anisotropía de los mismos.

La figura 4.20 muestra la componente en \hat{z} de las fluctuaciones de los modos inestables δB_z en los instantes $t \cdot q = 1,5$ (panel **a)**) y $t \cdot q = 3,0$ (panel **b)**) respectivamente. El efecto compresivo queda en evidencia dado que el eje \hat{y} disminuye en el tiempo como $1/(1+qt)$,

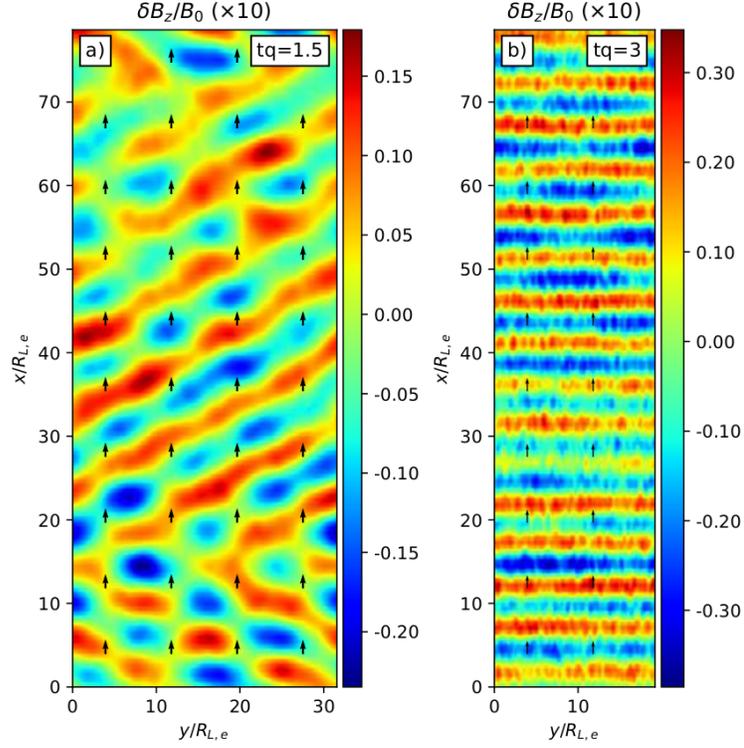


Figura 4.20: Caso no-relativista compresivo: Distribución espacial de δB_z normalizado por B_0 , para los instantes $t \cdot q = 1,5$ (panel **a**) y $t \cdot q = 3,0$ (panel **b**). Las flechas negras indican la dirección de $\langle \mathbf{B} \rangle$. Si bien inicialmente el dominio de la simulación es cuadrado, el efecto de la compresión disminuye el tamaño del eje \hat{y} progresivamente.

tomando una forma mas alargada a medida avanza el tiempo. En el instante $t \cdot q = 1,5$ los modos dominantes tienen vectores de onda oblicuos con respecto al campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$, el cual se muestra con flechas negras. Esta situación cambia para el final de la simulación ($t \cdot q = 3,0$) cuando los modos inestables se propagan principalmente paralelos al campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$. De la misma forma que con las simulaciones cizalladas; definimos un modo ‘cuasi-paralelo’ cuando el ángulo entre su vector de onda \mathbf{k} y el campo magnético promedio $\langle \mathbf{B} \rangle$ es menor a 20 grados, en el caso contrario se denomina como modo ‘oblicuo’. Lo que nos permite diferenciar ambos tipos de modos y ver la transición entre ambos regímenes, para esto en la figura 4.19 panel **a**) se muestran las energías asociadas a cada modo, en línea negra segmentada los modos oblicuos y en línea solida negra los modos paralelos. Los modos oblicuos dominan hasta el instante $t \cdot s \approx 2$ ($f_e \approx 1,6$), a partir de donde la energía en los modos cuasi-paralelos domina las fluctuaciones magnéticas.

De forma similar al caso cizallado, cuando los modos oblicuos dominan, estos tienen una importante componente electrostática. La figura 4.21 muestra las fluctuaciones en la densidad de los electrones, para los instantes $t \cdot q = 1,5$ (panel **a**) y $t \cdot q = 3,0$ (panel **b**). En donde vemos que cuando los modos oblicuos dominan estos tienen una componente electrostática la cual desaparece cuando los modos cuasi-paralelos dominan. Esto lo podemos corroborar al calcular las energías asociadas a las componentes electrostáticas y electromagnéticas de las fluctuaciones eléctricas $\delta \mathbf{E}$. Estas se muestran en el panel **c**) de la figura 4.19, donde

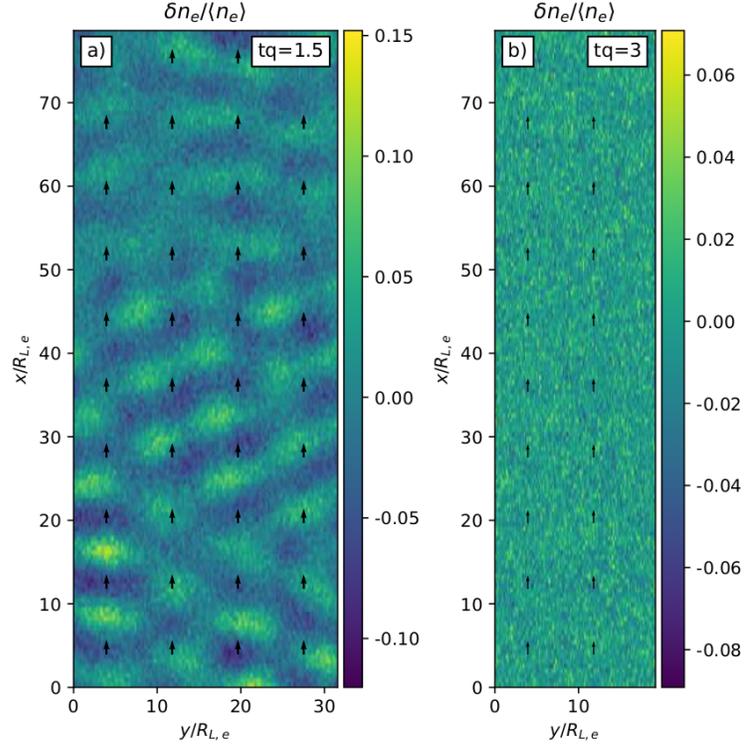


Figura 4.21: Caso no-relativista compresivo: Distribución espacial de δn_e normalizado por $\langle n_e \rangle$, para los instantes $t \cdot q = 1,5$ (panel **a**) y $t \cdot q = 3,0$ (panel **b**). Las flechas negras indican la dirección de $\langle \mathbf{B} \rangle$.

se muestran las componentes electrostática (δE_{es}^2) y electromagnética (δE_{em}^2), las cuales se muestran en línea azul y negra respectivamente. Esto además nos permite mostrar que la transición entre modos oblicuos y cuasi-paralelos ocurre cuando $f_e \sim 1,6 - 1,7$, lo cual es similar al caso cizallado en el cual esta transición ocurre cuando $f_e \sim 1,2 - 1,5$.

Aceleración no-térmica: Caso Compresivo

De forma similar al caso cizallado los modos cuasi-paralelos PEMZ son capaces de acelerar electrones generando una cola no-térmica, salvo una diferencia. En este caso compresivo el calentamiento global por viscosidad anisotrópica es mucho más importante que el caso cizallado. Esto lo podemos ver al comparar la evolución de la temperatura perpendicular de los electrones mostrada en los paneles **b**) de las figuras 4.8 y 4.19. En ambos casos la evolución de f_e va desde $f_e = 0,53$ hasta $f_e \approx 2$, pero para el caso compresivo $\Theta_{e,\perp}$ alcanza un valor final aproximadamente 3 veces mayor al caso cizallado. Los electrones en el caso compresivo son significativamente más calientes, lo que afecta la forma en que los electrones pueden ganar energía por la interacción con los modos PEMZ, como se muestra en estudios previos usando teoría cuasi-lineal sobre la aceleración estocástica entre electrones y modos de whistler/z [66].

La figura 4.22 muestra la evolución del espectro de energías de los electrones para una

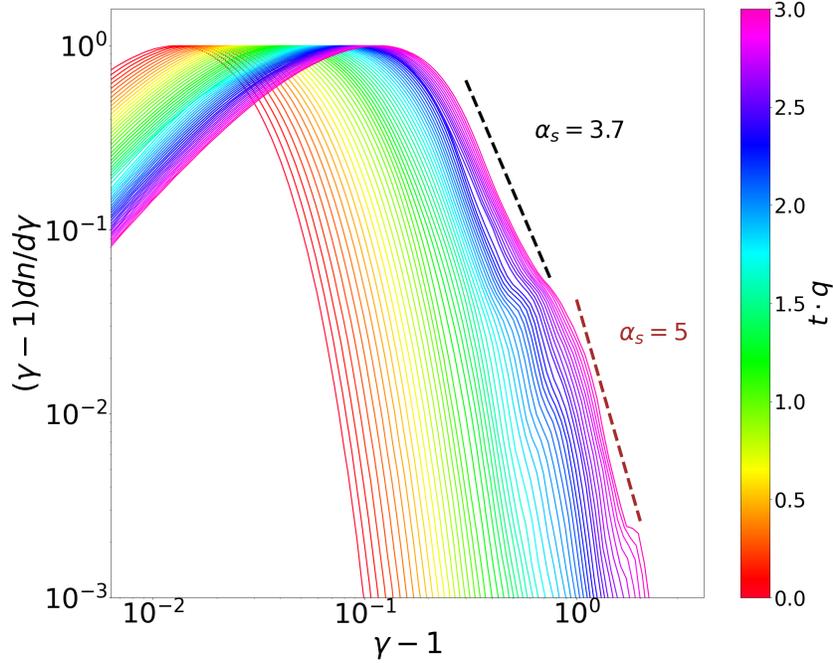


Figura 4.22: Evolución temporal del espectro de energía de los electrones, para el caso compresivo. El tiempo correspondiente a cada espectro se muestra en la barra de color.

simulación para el caso de referencia no-relativista, para una simulación compresiva con magnetización $\omega_{c,e}/q = 2400$. Vemos que luego del instante $t \cdot q \approx 2$, cuando los modos PEMZ comienzan a dominar, hay un rápido crecimiento de la cola no-térmica. Para el instante $t \cdot q \approx 2,5$ vemos que la cola no-térmica puede ser caracterizada por una ley de potencia de índice $\alpha_s \approx 3,7$, con un quiebre en $\gamma_e - 1 \sim 1$ donde el espectro toma una ley de potencia $\alpha_s \approx 5,0$. Este espectro es significativamente más suave que para el caso cizallado, producto de que la energía interna de los electrones es mayor en el caso compresivo, como habíamos mencionado en el párrafo anterior. Esto lo podemos ver en la figura 4.22 en la evolución del máximo del espectro el cual avanza a mayores energías que el caso compresivo.

La figura 4.23 nos muestra la convergencia en el espectro final de los electrones para distintas magnetizaciones $\omega_{c,e}/s = 300, 600, 1200$ y 2400 . Si bien para el caso con menor magnetización $\omega_{c,e}/s = 300$ en línea azul, hay un ‘bump’ o ‘chichón’ en altas energías, el cual desaparece a medida que aumentamos la magnetización. Para el caso $\omega_{c,e}/s = 2400$ (línea negra) el espectro es bastante suave, en donde para la primera parte de la cola no-térmica $0,3 \lesssim \gamma_e - 1 \lesssim 0,8$ converge en una ley de potencia de índice $\alpha_s \approx 3,7$ lo que muestra un ligero endurecimiento en el espectro en comparación al caso $\omega_{c,e}/s = 1200$ (línea roja). Esto nos permite concluir que el caso $\omega_{c,e}/s = 2400$ nos entrega una aproximación razonable para el espectro de energías en la ambiente generado por las llamaradas solares.

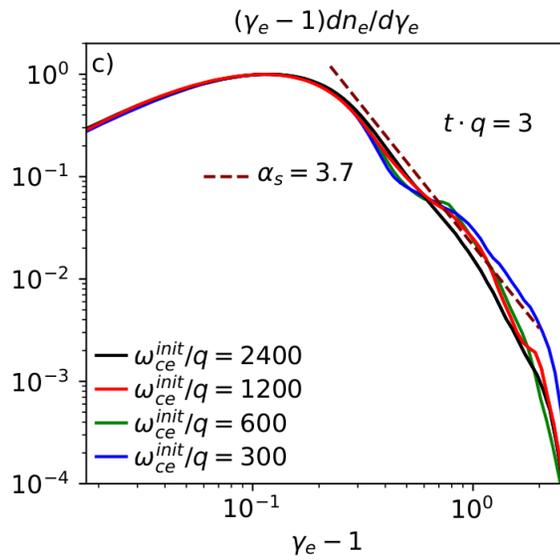


Figura 4.23: Espectros finales para distintas simulaciones compresivas en nuestro caso de referencia no-relativista, donde el único parámetro que cambia es $\omega_{c,e}/s$. Mostramos los casos $\omega_{c,e}/s = 300, 600, 1200$ y 2400 , en color, azul, verde, rojo y negro, respectivamente. En línea segmentada marrón se muestra una ley de potencia de índice $\alpha_s = 3,7$.

Capítulo 5

Conclusión

En este trabajo usamos simulaciones PIC, en 1D y 2D, para mostrar el efecto de anisotropías de temperatura en la aceleración de electrones, en dos contextos astrofísicos: discos de acreción en torno a objetos compactos y la corona solar. En nuestras simulaciones generamos un crecimiento en la anisotropía de la forma $T_{e,\perp} > T_{e,\parallel}$ imponiendo un movimiento de cizalle o compresión en el plasma, lo cual genera un aumento en el campo magnético \mathbf{B} . En estos contextos astrofísicos, que son débilmente colisionales, el momento magnético de los electrones ($\mu_e = v_{\perp,e}^2/|\mathbf{B}|$) es una cantidad conservada, lo cual hace que la evolución de las temperaturas sea adiabática. Por lo cual, un aumento en el campo magnético genera un aumento en la temperatura perpendicular al campo magnético, generando anisotropía. Cuando la anisotropía es lo suficientemente grande diferentes modos del plasma emergen para regular el aumento de la misma. Es ahí donde estos modos son capaces de extraer energía de una población de electrones y traspasarla a otra, generando una ‘cola no-térmica’ en el espectro de energías.

Dentro de este esquema de aceleración estocástica, los distintos modos inestables del plasma son clave para entender la eficiencia en la aceleración de electrones, ya que las fluctuaciones generadas por estos modos tienen distintas características, como lo son la dirección de propagación y su naturaleza electrostática/electromagnética. Estas características hacen variar el efecto en la interacción entre estas y los electrones. En el caso relativista tenemos solo modos con propagación cuasi-paralela al campo y de naturaleza electromagnética, los cuales identificamos como modos de Whistler. Este caso nos presenta una buena oportunidad para ver a un solo modo participando en la aceleración de electrones y el efecto que esta tiene en el espectro de los mismos. Podemos ver en la figura 4.4 que la evolución del espectro de energía de los electrones es uniforme a partir de emergencia de los modos de Whistler ($t \cdot s \sim 0,6$) hasta alcanzar una cola no-térmica de índice espectral $\alpha_s = 3,7$ para el final de la simulación. Esta situación cambia en el caso no-relativista, donde hay dos modos ‘colaborando’ con la aceleración de electrones. Inicialmente tenemos modos oblicuos al campo magnético promedio y de naturaleza electrostática, para luego dar paso a modos cuasi-paralelos al campo magnético promedio y de naturaleza preferentemente electromagnética. Esta coexistencia entre modos muestra una gran mejora en la aceleración de electrones, y el efecto se puede apreciar en la evolución del espectro de energías mostrado en el figura 4.12, donde en el momento en

que comienzan a dominar los modos electromagnéticos ($t \cdot s \sim 3,0$) se puede ver una rápida aceleración en el espectro. Además de alcanzar un menor índice espectral ($\alpha_s = 2,9$) que el caso no-relativista, el espectro de energías tiene un ‘bump’ en medio de la cola no-térmica.

El caso compresivo, mostrado en el caso no-relativista, nos muestra que la forma en la cual generamos la anisotropía puede tener efecto en como opera el calentamiento y por ende en el espectro de energía de los electrones. Esto es de esperarse ya que en las simulaciones compresivas la evolución del campo magnético promedio tiene una tasa de crecimiento mayor que en las simulaciones cizalladas, además que la temperatura perpendicular de los electrones alcanza un valor tres veces mayor que el caso cizallado. De todas formas los tipos de modos inestables y la transición en la cual pasamos de modos oblicuos a modos cuasi-paralelos ocurre de manera similar. Lo mismo ocurre con la aceleración, la cual es preferentemente realizada por los modos cuasi-paralelos, generando una cola no-térmica con un índice espectral de $\alpha_s = 3,7$, con un quiebre en $\gamma_e \approx 2$ pasando a un índice espectral de $\alpha_s = 5,0$.

El objetivo de este estudio no es el de poder hacer predicciones o plantear teorías sobre los fenómenos no-térmicos observados tanto en la zona ‘above the loop top’ en la corona solar y sobre el disco de acreción en torno a Sgr A*. Más bien buscamos replicar las condiciones del plasma en estos ambientes, y establecer si para esas condiciones la aceleración estocástica por inestabilidades cinéticas es capaz de generar un espectro con una cola no-térmica con algún índice espectral significativo. Esto se debe a que los mecanismos de aceleración estocástica actúan en la escala que hemos denominado como micro-física del plasma, haciendo referencia a la escala de los electrones. Por lo tanto, aun nos queda considerar que sucede con las otras escalas relevantes como la de los protones, las inestabilidades MHD y para que decir sobre fenómenos de gran escala como reconexión magnética. Para lograr esto es vital complementar todas las áreas de estudio, es decir: observación, teoría y simulaciones, y en el caso de la corona solar, la exploración directa.

Para finalizar, con el fin de entender como son aceleradas las partículas en los ambientes astrofísicos aquí presentados, es fundamental entender que este proceso es uno que envuelve varias escalas. Además, entre nuestra ‘micro-física’ y la macro escala del plasma que conforma estos ambientes astrofísicos, existe una meso-escala en la cual existen diversos fenómenos, los cuales influyen tanto en el estado macroscópico del plasma, como en las condiciones presentes para los electrones en la micro escala. Por lo tanto para un estudio acabado sobre la aceleración en alguno de los ambientes astrofísicos aquí presentados, es necesario poder integrar estas distintas escalas y mecanismos de aceleración. Ejemplo de esto es la aceleración presentada en el caso no-relativista, en el cual tenemos dos inestabilidades las cuales se complementan durante la simulación, obteniendo mayor aceleración que en el caso en el que solo tenemos una inestabilidad dominando todo el tiempo de simulación. Esto nos muestra que incluso en la misma escala, la acción de distintos mecanismos de aceleración puede ser sinérgica. Esto puede complementar la necesidad de re-aceleración que presenta, por ejemplo, el fenómeno de aceleración por ondas de choque [10] en el viento solar, el cual necesita semillas de partículas de alta energía para obtener espectro de energías con una ley de potencia. En ese contexto una primera aproximación para integrar la micro-física del plasma en las escalas superiores, es evaluar el índice espectral en el largo plazo bajo esfuerzos de cizalle

y/o compresión. Para eso, una opción es revertir estos movimientos realizando los mismos esfuerzos pero invirtiendo la velocidad de estos, con el fin de ‘descizallar’ o ‘descomprimir’ el plasma, para luego volver a realizar nuevamente el cizalle o compresión. La idea sería ver si se alcanza un régimen estacionario para el espectro de energía y de ser así, cuantos ciclos de cizalle/descizalle o compresión/descompresión se necesitan para alcanzar este estado. Si bien en el periodo de descizalle o descompresión la anisotropía tendría de la forma $T_{\parallel} > T_{\perp}$ y no se generarían las inestabilidades cinéticas que son capaces de acelerar electrones, si existirían otro tipo de inestabilidades que podrían tener incidencia en la aceleración de otras especies.

Bibliografía

- [1] M. Ackermann, A. Albert, W. B. Atwood, L. Baldini, J. Ballet, G. Barbiellini, D. Bastieri, R. Bellazzini, E. Bissaldi, R. D. Blandford, E. D. Bloom, E. Bottacini, T. J. Brandt, J. Bregeon, P. Bruel, R. Buehler, S. Buson, G. A. Caliandro, R. A. Cameron, M. Caragiulo, P. A. Caraveo, E. Cavazzuti, C. Cecchi, E. Charles, A. Chekhtman, J. Chiang, G. Chiaro, S. Ciprini, R. Claus, J. Cohen-Tanugi, J. Conrad, S. Cutini, F. DAMmando, A. de Angelis, F. de Palma, C. D. Dermer, S. W. Digel, L. Di Venere, E. do Couto e Silva, P. S. Drell, C. Favuzzi, E. C. Ferrara, W. B. Focke, A. Franckowiak, Y. Fukazawa, S. Funk, P. Fusco, F. Gargano, D. Gasparri, S. Germani, N. Giglietto, F. Giordano, M. Giroletti, G. Godfrey, G. A. Gomez-Vargas, I. A. Grenier, S. Guiriec, D. Hadasch, A. K. Harding, E. Hays, J. W. Hewitt, X. Hou, T. Jogler, G. Jóhannesson, A. S. Johnson, W. N. Johnson, T. Kamae, J. Kataoka, J. Knödseder, D. Kocevski, M. Kuss, S. Larsson, L. Latronico, F. Longo, F. Loparco, M. N. Lovellette, P. Lubrano, D. Malyshev, A. Manfreda, F. Massaro, M. Mayer, M. N. Mazziotta, J. E. McEnery, P. F. Michelson, W. Mitthumsiri, T. Mizuno, M. E. Monzani, A. Morselli, I. V. Moskalenko, S. Murgia, R. Nemmen, E. Nuss, T. Ohsugi, N. Omodei, M. Orienti, E. Orlando, J. F. Ormes, D. Panque, J. H. Panetta, J. S. Perkins, M. Pesce-Rollins, V. Petrosian, F. Piron, G. Pivato, S. Rainò, R. Rando, M. Razzano, S. Razzaque, A. Reimer, O. Reimer, M. Sánchez-Conde, M. Schaal, A. Schulz, C. Sgrò, E. J. Siskind, G. Spandre, P. Spinelli, Lukasz Stawarz, A. W. Strong, D. J. Suson, M. Tahara, H. Takahashi, J. B. Thayer, L. Tibaldo, M. Tinivella, D. F. Torres, G. Tosti, E. Troja, Y. Uchiyama, G. Vianello, M. Werner, B. L. Winer, K. S. Wood, M. Wood, and G. Zaharijas. The Spectrum And Morphology Of The Fermi Bubbles. *The Astrophysical Journal*, 793(1):64, sep 2014.
- [2] David Ball, Feryal Özel, Dimitrios Psaltis, and Chi-kwan Chan. Particle acceleration and the origin of x-ray flares in grmhd simulations of sgr a. *The Astrophysical Journal*, 826(1):77, 2016.
- [3] Arnold O Benz. Flare observations. *Living Reviews in Solar Physics*, 14(1):1–59, 2017.
- [4] Arnold O Benz and Manuel Güdel. Physical processes in magnetically driven flares on the sun, stars, and young stellar objects. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48:241–287, 2010.
- [5] KJ Borkowski, J Rho, KK Dyer, and SP Reynolds. Thermal and nonthermal x-ray emission in snr rcw 86. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, volume 195, pages 43–13, 1999.

- [6] G. Brunetti and A. Lazarian. Stochastic reacceleration of relativistic electrons by turbulent reconnection: a mechanism for cluster-scale radio emission? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 458(3):2584–2595, 03 2016.
- [7] Gianfranco Brunetti and Thomas W Jones. Cosmic rays in galaxy clusters and their nonthermal emission. *International Journal of Modern Physics D*, 23(04):1430007, 2014.
- [8] Oscar Buneman. The 3-d electromagnetic particle code. *Computer space plasma physics*, pages 67–84, 1993.
- [9] C. Béghin, M. Hamelin, J. P. Lebreton, X. Vallieres, J. Moré, and P. Henri. Electron temperature anisotropy associated to field-aligned currents in the earth’s magnetosphere inferred from rosetta mip-rpc observations during 2009 flyby. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 122(7):6964–6977, 2017.
- [10] Damiano Caprioli, Horace Zhang, and Anatoly Spitkovsky. Diffusive shock reacceleration. *Journal of Plasma Physics*, 84(3):715840301, 2018.
- [11] B. Chen, C. Shen, D. Gary, K. Reeves, G. Fleishman, S. Yu, F. Guo, S. Krucker, J. Lin, G. Nita, and X. Kong. Measurement of magnetic field and relativistic electrons along a solar flare current sheet. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts #236*, volume 236 of *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, page 112.02, June 2020.
- [12] Bin Chen, Marina Battaglia, Säm Krucker, Katharine K. Reeves, and Lindsay Glesener. Energetic Electron Distribution of the Coronal Acceleration Region: First Results from Joint Microwave and Hard X-Ray Imaging Spectroscopy. , 908(2):L55, February 2021.
- [13] GF Chew, ML Goldberger, and FE Low. The boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 236(1204):112–118, 1956.
- [14] J. T. Dahlin. Prospectus on electron acceleration via magnetic reconnection. *Physics of Plasmas*, 27(10):100601, 2020.
- [15] Charles D Dermer, James A Miller, and Hui Li. Stochastic particle acceleration near accreting black holes. *arXiv preprint astro-ph/9508069*, 1995.
- [16] Heino Falcke. Imaging black holes: past, present and future. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 942, page 012001. IOP Publishing, 2017.
- [17] U Feldman, E Hiei, KJH Phillips, CM Brown, and J Lang. Very impulsive solar flares observed with the yohkoh spacecraft. *The Astrophysical Journal*, 421:843–850, 1994.
- [18] Enrico Fermi. On the origin of the cosmic radiation. *Phys. Rev.*, 75:1169–1174, Apr 1949.
- [19] G. D. Fleishman and V. F. Mel’nikov. Reviews Of Topical Problems: Millisecond solar radio spikes. *Physics Uspekhi*, 41(12):1157–1189, December 1998.

- [20] L. Fletcher, B. R. Dennis, H. S. Hudson, S. Krucker, K. Phillips, A. Veronig, M. Battaglia, L. Bone, A. Caspi, Q. Chen, P. Gallagher, P. T. Grigis, H. Ji, W. Liu, R. O. Milligan, and M. Temmer. An observational overview of solar flares. *Space Science Reviews*, 159(1-4):19–106, aug 2011.
- [21] S. Peter Gary and Iver H. Cairns. Electron temperature anisotropy instabilities: Whistler, electrostatic and z mode. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 104(A9):19835–19842, 1999.
- [22] S. Peter Gary and Joseph Wang. Whistler instability: Electron anisotropy upper bound. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 101(A5):10749–10754, 1996.
- [23] PA Gritsyk and BV Somov. Electron acceleration in solar-flare magnetic traps: Model properties and their observational confirmations. *Astronomy Letters*, 43(9):614–623, 2017.
- [24] Fan Guo, Hui Li, William Daughton, and Yi-Hsin Liu. Formation of Hard Power Laws in the Energetic Particle Spectra Resulting from Relativistic Magnetic Reconnection. , 113(15):155005, October 2014.
- [25] Russell J Hamilton and Vahe Petrosian. Stochastic acceleration of electrons. i-effects of collisions in solar flares. *The Astrophysical Journal*, 398:350–358, 1992.
- [26] Richard B Horne, Richard M Thorne, Yuri Y Shprits, Nigel P Meredith, Sarah A Glauert, Andy J Smith, Shrikanth G Kanekal, Daniel N Baker, Mark J Engebretson, Jennifer L Posch, et al. Wave acceleration of electrons in the van allen radiation belts. *Nature*, 437(7056):227–230, 2005.
- [27] Jia Huang, J. C. Kasper, D. Vech, K. G. Klein, M. Stevens, Mihailo M. Martinović, B. L. Alterman, Tereza Ďurovcová, Kristoff Paulson, Bennett A. Maruca, Ramiz A. Qudsi, A. W. Case, K. E. Korreck, Lan K. Jian, Marco Velli, B. Lavraud, A. Hegedus, C. M. Bert, J. Holmes, Stuart D. Bale, Davin E. Larson, Roberto Livi, P. Whittlesey, Marc Pulupa, Robert J. MacDowall, David M. Malaspina, John W. Bonnell, Peter Harvey, Keith Goetz, and Thierry Dudok de Wit. Proton Temperature Anisotropy Variations in Inner Heliosphere Estimated with the First Parker Solar Probe Observations. , 246(2):70, February 2020.
- [28] Michael Johnson, Michael Rowan, Ramesh Narayan, Andrew Chael, and Lorenzo Sironi. The role of electron heating physics in images and variability of the Galactic Centre black hole Sagittarius A*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 478(4):5209–5229, 06 2018.
- [29] Frank C. Jones. A theoretical review of diffusive shock acceleration. *International Astronomical Union Colloquium*, 142:561–565, 1994.
- [30] Bidzina Kapanadze, Stefano Vercellone, and Patrizia Romano. Stochastic acceleration in the relativistic jets of bl lacertae objects. *New Astronomy*, 79:101393, 2020.
- [31] Ioannis Karatzas. and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2000.

- [32] David Kuridze, M Mathioudakis, H Morgan, R Oliver, L Kleint, TV Zaqarashvili, A Reid, J Koza, Mats G Löfdahl, Tomas Hillberg, et al. Mapping the magnetic field of flare coronal loops. *The Astrophysical Journal*, 874(2):126, 2019.
- [33] Francisco Ley, Mario Riquelme, Lorenzo Sironi, Daniel Verscharen, and Astor Sandoval. Stochastic ion acceleration by the ion-cyclotron instability in a growing magnetic field. *The Astrophysical Journal*, 880(2):100, 2019.
- [34] Jiang-Tao Li, Edmund Hodges-Kluck, Yelena Stein, Joel N. Bregman, Judith A. Irwin, and Ralf-Jurgen Dettmar. Detection of non-thermal hard X-ray emission from the "Fermi bubble" in an external galaxy. *Astrophys. J.*, 873:27, 2019.
- [35] Xiaocan Li, Fan Guo, Hui Li, and Gang Li. Nonthermally dominated electron acceleration during magnetic reconnection in a low- β plasma. *The Astrophysical Journal Letters*, 811(2):L24, 2015.
- [36] Xiaocan Li, Fan Guo, and Yi-Hsin Liu. The acceleration of charged particles and formation of power-law energy spectra in nonrelativistic magnetic reconnection. *Physics of Plasmas*, 28(5):052905, 2021.
- [37] Hu Liu and Qingwen Wu. Possible Origin Of Radio Emission From Nonthermal Electrons In Hot Accretion Flows For Low-Luminosity Active Galactic Nuclei. *The Astrophysical Journal*, 764(1):17, jan 2013.
- [38] Wei Liu, Vahé Petrosian, Brian R. Dennis, and Yan Wei Jiang. Double coronal hard and soft x-ray source observed by iRHessi/i: Evidence for magnetic reconnection and particle acceleration in solar flares. *The Astrophysical Journal*, 676(1):704–716, mar 2008.
- [39] Jacob W Lynn, Eliot Quataert, Benjamin DG Chandran, and Ian J Parrish. Acceleration of relativistic electrons by magnetohydrodynamic turbulence: implications for non-thermal emission from black hole accretion disks. *The Astrophysical Journal*, 791(1):71, 2014.
- [40] Jacob William Lynn. *Heating and Acceleration of Charged Particles by Weakly Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence*. University of California, Berkeley, 2014.
- [41] S Alwin Mao, Jason Dexter, and Eliot Quataert. The impact of non-thermal electrons on event horizon scale images and spectra of sgr a. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 466(4):4307–4319, 2017.
- [42] Alexandre Marcowith, Antoine Bret, Andrei Bykov, Mark Eric Dieckman, L O’C Drury, Bertrand Lembège, Martin Lemoine, Giovanni Morlino, Gareth Murphy, Guy Pelletier, et al. The microphysics of collisionless shock waves. *Reports on Progress in Physics*, 79(4):046901, 2016.
- [43] S Masuda, T Kosugi, H Hara, S Tsuneta, and Y Ogawara. A loop-top hard x-ray source in a compact solar flare as evidence for magnetic reconnection. *Nature*, 371(6497):495–497, 1994.

- [44] Satoshi Masuda, Takeo Kosugi, Hirohisa Hara, Taro Sakao, Kazunari Shibata, and Saku Tsuneta. Hard x-ray sources and the primary energy-release site in solar flares. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 47:677–689, 1995.
- [45] Philipp Mertsch and Vahé Petrosian. The Fermi Bubbles from Stochastic Acceleration by Turbulence in a Galactic Outflow. *PoS, ICRC2017:1108*, 2018. [Astron. Astrophys.622,A203(2019)].
- [46] James A. Miller, Peter J. Cargill, A. Gordon Emslie, Gordon D. Holman, Brian R. Dennis, T. N. LaRosa, Robert M. Winglee, Stephen G. Benka, and S. Tsuneta. Critical issues for understanding particle acceleration in impulsive solar flares. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 102(A7):14631–14659, 1997.
- [47] Takashi Minoshima, Satoshi Masuda, and Yoshizumi Miyoshi. Drift-kinetic modeling of particle acceleration and transport in solar flares. *The Astrophysical Journal*, 714(1):332, 2010.
- [48] J. G. Mitchell, G. A. De Nolfo, M. E. Hill, E. R. Christian, I. G. Richardson, D. J. McComas, R. L. McNutt, D. G. Mitchell, N. A. Schwadron, S. D. Bale, J. Giacalone, C. J. Joyce, J. T. Niehof, and J. R. Szalay. Energetic Electron Observations by Parker Solar Probe/IS \odot IS during the First Widespread SEP Event of Solar Cycle 25 on 2020 November 29. , 919(2):119, October 2021.
- [49] M Oka, J Birn, M Battaglia, CC Chaston, SM Hatch, G Livadiotis, S Imada, Y Miyoshi, M Kuhar, F Effenberger, et al. Electron power-law spectra in solar and space plasmas. *Space Science Reviews*, 214(5):1–66, 2018.
- [50] Feryal Ozel, Dimitrios Psaltis, and Ramesh Narayan. Hybrid thermal-nonthermal synchrotron emission from hot accretion flows. *Astrophys. J.*, 541:234, 2000.
- [51] Vahé Petrosian. On the nonthermal emission and acceleration of electrons in coma and other clusters of galaxies. *The Astrophysical Journal*, 557(2):560, 2001.
- [52] Vahé Petrosian. Stochastic acceleration by turbulence. *Space Science Reviews*, 173(1-4):535–556, jun 2012.
- [53] Vahé Petrosian and Siming Liu. Stochastic acceleration of electrons and protons. i. acceleration by parallel-propagating waves. *The Astrophysical Journal*, 610(1):550, 2004.
- [54] G. Ponti et al. A powerful flare from sgr a* confirms the synchrotron nature of the x-ray emission. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 468(2):2447–2468, 2017.
- [55] Philip Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 1990.
- [56] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Number 293 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin [u.a.], 3. ed edition, 1999.
- [57] Mario Riquelme, Alvaro Osorio, and Eliot Quataert. Stochastic electron acceleration by the whistler instability in a growing magnetic field. *Astrophys. J.*, 850(2):113, 2017.

- [58] Mario Riquelme, Alvaro Osorio, Daniel Verscharen, and Lorenzo Sironi. Stochastic electron acceleration by temperature anisotropy instabilities under solar flare plasma conditions. *The Astrophysical Journal*, 924(2):52, 2022.
- [59] Gustavo Esteban Romero, Florencia Laura Vieyro, and Gabriela Soledad Vila. Non-thermal processes around accreting galactic black holes. *Astronomy & Astrophysics*, 519:A109, 2010.
- [60] Prateek Sharma, Eliot Quataert, Gregory W. Hammett, and James M. Stone. Electron heating in hot accretion flows. *The Astrophysical Journal*, 667(2):714, oct 2007.
- [61] Paulo JA Simões and Eduard P Kontar. Implications for electron acceleration and transport from non-thermal electron rates at looptop and footpoint sources in solar flares. *Astronomy & Astrophysics*, 551:A135, 2013.
- [62] Lorenzo Sironi and Benoit Cerutti. Particle Acceleration in Pulsar Wind Nebulae: PIC Modelling. *Astrophys. Space Sci. Libr.*, 446:247–277, 2017.
- [63] Lorenzo Sironi and Ramesh Narayan. Electron heating by the ion cyclotron instability in collisionless accretion flows. i. compression-driven instabilities and the electron heating mechanism. *The Astrophysical Journal*, 800(2):88, 2015.
- [64] Lorenzo Sironi and Anatoly Spitkovsky. Relativistic reconnection: an efficient source of non-thermal particles. *The Astrophysical Journal Letters*, 783(1):L21, 2014.
- [65] Anatoly Spitkovsky. Simulations of relativistic collisionless shocks: shock structure and particle acceleration. *AIP Conference Proceedings*, 801(1):345–350, 2005.
- [66] Danny Summers, Richard M. Thorne, and Fuliang Xiao. Relativistic theory of wave-particle resonant diffusion with application to electron acceleration in the magnetosphere. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 103(A9):20487–20500, 1998.
- [67] Saku Tsuneta, Satoshi Masuda, Takeo Kosugi, and Jun Sato. Hot and superhot plasmas above an impulsive flare loop. *The Astrophysical Journal*, 478(2):787, 1997.
- [68] Daniel Verscharen and Benjamin D. G. Chandran. Nhds: The new hampshire dispersion relation solver. *Research Notes of the American Astronomical Society*, 2(2):13, April 2018.
- [69] Chih-Ping Wang, Sorin G. Zaharia, Larry R. Lyons, and Vassilis Angelopoulos. Spatial distributions of ion pitch angle anisotropy in the near-earth magnetosphere and tail plasma sheet. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 118(1):244–255, 2013.
- [70] Peter H. Yoon, Jung Joon Seough, Junggi Lee, Junmo An, and Jae Ok Lee. Empirical model of whistler anisotropy instability. *Physics of Plasmas*, 18(10):102103, 2011.
- [71] Feng Yuan, Eliot Quataert, and Ramesh Narayan. Nonthermal electrons in radiatively inefficient accretion flow models of sagittarius a*. *Astrophys. J.*, 598:301–312, 2003.
- [72] Feng Yuan, Eliot Quataert, and Ramesh Narayan. On the nature of the variable infrared emission from sagittarius a. *The Astrophysical Journal*, 606(2):894, 2004.

- [73] Vladimir Zhdankin, Gregory R Werner, Dmitri A Uzdensky, and Mitchell C Begelman. Kinetic turbulence in relativistic plasma: from thermal bath to nonthermal continuum. *Physical Review Letters*, 118(5):055103, 2017.

ANEXOS

Anexo A

Coordenadas Cizalladas

Describiremos el plasma en el sistema de referencia de las coordenadas cizalladas, S' , la cual esta relacionada con el sistema de referencia cartesiano usual S por la siguiente transformación de coordenadas:

$$\begin{aligned}x' &= x & z' &= z \\ y' &= \Gamma (y - vt) & t' &= \Gamma (t - vy/c^2)\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde las coordenadas con prima corresponden al sistema de referencia S' , $\Gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ es el factor de Lorentz producto del cizalle, $v = -sx$ es la componente y de la velocidad de cizalle y por último s es el parámetro de cizalle. En S' el plasma esta inicialmente en reposo, lo que nos permite reemplazar las condiciones de borde periódicas de caja cizallada a condiciones de borde periódicas normales.

Las transformaciones de los campos eléctricos y magnéticos de S hacia S' puede ser expresada usando transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned}E'_y &= E_y & B'_y &= B_y \\ \vec{E}'_{\perp} &= \Gamma (\vec{E}_{\perp} + \vec{v}/c \times \vec{B}_{\perp}) & \vec{B}'_{\perp} &= \Gamma (\vec{B}_{\perp} - \vec{v}/c \times \vec{E}_{\perp})\end{aligned}\tag{A.2}$$

Como veremos, la evolución de los campos en S' esta dada por las versiones modificadas de las ecuaciones de Maxwell. Las modificaciones emergen de la dependencia de v y Γ en x . Aunque estamos interesados en el limite de caja pequeña, derivaremos la evolución de \vec{E}' y \vec{B}' asumiendo una caja arbitrariamente grande, tomando el limite de caja pequeña al final del calculo. Dado que el modulo de $v(x)$ no puede sobrepasar c , usaremos un perfil de cizalle 'local' que visto por un observador que se mueve con el flujo es $v_{local} = -sx_{local}$, donde $x_{local} = 0$ en la posición del observador. De esta forma se puede demostrar que esta condición implica un cizalle global en la caja dado por $v/c = -\text{arctanh}(sx/c)$. Con esta dependencia de $v(x)$, las derivadas con respecto a x de v y Γ están dada por:

$$\begin{aligned} dv/dx &= -s/\Gamma^2 \\ d\Gamma/dx &= -s\Gamma v/c^2, \end{aligned} \tag{A.3}$$

las cuales usaremos en la derivación de la dinámica de los campos.

A.1. Modificaciones a las ecuaciones de Maxwell

Determinaremos los cambios en cada componente de las ecuaciones de Maxwell. Comenzando con la ecuación de Faraday.

A.1.1. Ecuación de Faraday: componente x

Dadas las ecuaciones definidas en A.1 y A.2, queremos transformar:

$$\frac{\partial B_x(\vec{r}, t)}{\partial t} = -(c\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t))_x \tag{A.4}$$

en el sistema de referencia transformado S' . De las ecuaciones A.2 obtenemos

$$\begin{aligned} B'_x(\vec{r}, t') &= \Gamma(B_x(\vec{r}, t) - \frac{v}{c}E_x(\vec{r}, t)) \\ E'_z(\vec{r}, t') &= \Gamma(E_z(\vec{r}, t) - \frac{v}{c}B_x(\vec{r}, t)) \\ E'_y(\vec{r}, t') &= E_y(\vec{r}, t) \end{aligned} \tag{A.5}$$

Así, de la ecuación A.1 es posible mostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B'_x(\vec{r}, t')}{\partial t'} &= \Gamma^2 \left(\frac{\partial B_x(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{v}{c} \frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial t} + v \frac{\partial B_x(\vec{r}, t)}{\partial y} - \frac{v^2}{c} \frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial E'_y(\vec{r}, t')}{\partial z'} &= \frac{\partial E_y(\vec{r}, t)}{\partial z} \\ \frac{\partial E'_z(\vec{r}, t')}{\partial y'} &= \Gamma^2 \left(\frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{v^2}{c^3} \frac{\partial B_x(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial y} - \frac{v}{c} \frac{\partial B_x(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \end{aligned} \tag{A.6}$$

Combinando estas tres expresiones, podemos mostrar que:

$$\frac{\partial B'_x(\vec{r}', t')}{\partial t'} = -(c\nabla' \times \vec{E}'(\vec{r}', t'))_x \tag{A.7}$$

Así la componente x de la ecuación de Faraday no cambia ante la transformación a coordenadas cizalladas.

A.1.2. Ecuación de Faraday: componente y

Aquí el procedimiento es análogo al caso descrito para la componente x . No obstante, dado que esta componente tiene derivadas con respecto a x' , el cual tiene una dependencia en v y Γ , producto de la transformación de Lorentz, los cuales nos entregan nuevos términos al ser derivados. De las transformaciones A.2 obtenemos:

$$\begin{aligned} B'_y(\vec{r}, t') &= B_y(\vec{r}, t) \\ E'_z(\vec{r}, t') &= \Gamma(E_z(\vec{r}, t) - \frac{v}{c}B_x(\vec{r}, t)) \\ E'_x(\vec{r}, t') &= \Gamma(E_x(\vec{r}, t) + \frac{v}{c}B_z(\vec{r}, t)) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B'_y(\vec{r}, t')}{\partial t'} &= \Gamma \left(\frac{\partial B_y(\vec{r}, t)}{\partial t} + v \frac{\partial B_y(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial E'_x(\vec{r}, t')}{\partial z'} &= \Gamma \left(\frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial z} + \frac{v}{c} \frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E'_z(\vec{r}, t')}{\partial y'} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial x} (E_z(\vec{r}, t) - \frac{v}{c}B_x(\vec{r}, t)) - \frac{\Gamma}{c} \frac{\partial v}{\partial x} B_x(\vec{r}, t) + \Gamma \left(\frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial x} - \frac{v}{c} \frac{B_x(\vec{r}, t)}{\partial x} \right) \\ &\quad + \Gamma \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x} (y' + vt') + \Gamma t' \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial y} - \frac{v}{c} \frac{B_x(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \\ &\quad + \Gamma \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x} (t' + \frac{vy'}{c^2}) + \Gamma \frac{t'}{c^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{v}{c} \frac{B_x(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Combinando las ecuaciones A.9 y usando las derivadas A.3, obtenemos,

$$\frac{\partial B'_x(\vec{r}', t')}{\partial t'} = -(c\nabla' \times \vec{E}'(\vec{r}', t'))_y - sB'_x(\vec{r}', t') + s \left(ct' \frac{\partial E'_z}{\partial y'} + \frac{y'}{c} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} \right) \quad (\text{A.10})$$

A.1.3. Ecuación de Faraday: componente z

Este caso es análogo al caso presentado para la componente y . De la transformación en A.2 obtenemos:

$$\begin{aligned} B'_z(\vec{r}', t') &= \Gamma(B_z(\vec{r}, t) + \frac{v}{c}E_x(\vec{r}, t)) \\ E'_x(\vec{r}', t') &= \Gamma(E_x(\vec{r}, t) + \frac{v}{c}B_z(\vec{r}, t)) \\ E'_y(\vec{r}', t') &= E'_y(\vec{r}, t') \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Lo que implica:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B'_z(\vec{r}', t')}{\partial t'} &= \Gamma^2 \left(\frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{v}{c} \frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial t} + v \frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial y} - \frac{v^2}{c} \frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial E'_x(\vec{r}', t')}{\partial y'} &= \Gamma^2 \left(\frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{v^2}{c^3} \frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial y} + \frac{v}{c} \frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial E'_y(\vec{r}', t')}{\partial x'} &= \frac{\partial E_y(\vec{r}, t)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(\vec{r}, t)}{\partial y} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x'} (y' + vt') + \Gamma t' \frac{\partial v}{\partial x'} \right) + \frac{\partial E_y(\vec{r}, t)}{\partial t} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x'} (t' + \frac{v}{c^2} y') + \frac{y'}{c^2} \Gamma \frac{\partial v}{\partial x'} \right)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Luego, combinando las ecuaciones A.12, con las derivadas de v y Γ presentadas en A.3 tenemos:

$$\frac{\partial B'_z(\vec{r}', t')}{\partial t'} = -(c\nabla' \times \vec{E}'(\vec{r}', t'))_z - s \left(ct' \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{y'}{c} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} \right) \tag{A.13}$$

Finalmente combinando las tres componentes de la ecuación de Faraday, tenemos:

$$\frac{\partial \vec{B}'(\vec{r}', t')}{\partial t'} = c\nabla' \times \vec{E}'(\vec{r}', t') - sB_x(\vec{r}', t')\hat{y} + s \left(ct' \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{y'}{c} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} \right) \times \hat{x} \tag{A.14}$$

La ecuación A.14 contiene un término dependiente del tiempo el cual emerge producto de las evolución temporal de las coordenadas S' on respecto a las coordenadas sin cizallar S . De hecho, así como el tiempo avanza, $\partial \vec{E}'/\partial x'$ ($\partial \vec{B}'/\partial x'$) debe aumentar su diferencia con respecto $\partial \vec{E}/\partial x$ ($\partial \vec{B}/\partial x$), esto debido a que dos puntos con igual y ($\Delta y = 0$) tienen una diferencia y' ($\Delta y'$) la cual crece linealmente con el tiempo. Esto explica por que el término dependiente del tiempo debe ser proporcional en la medida en que los campos dependen de y' . Así, en el caso 2D (relevante para este caso), este termino dependiente del tiempo no juega ningún rol.

Además del término dependiente del tiempo, hay un termino proporcional de y' . Sin embargo, en el limite de caja pequeña, (i.e., cuando y' es mucho mas pequeño que la distancia característica del problema, en este caso la distancia entre el origen de la caja y el centro del disco de acreción r_0), la magnitud de la velocidad sy' es mucho mas pequeña que la velocidad orbital del disco (v_0). Así, como $v_0 \ll c$, tenemos también que $sy' \ll c$ lo que nos permite despreciar el termino dependiente del espacio en A.14, especialmente si se espera que $|\vec{E}'| \ll |\vec{B}'|$ en turbulencia no-relativista. Así, dada nuestra aproximación de caja pequeña no-relativista, podemos despreciar la dependencia y' en a ecuación A.14, lo cual nos permite usar formalmente el enfoque 2D en este problema. En ese limite, la ecuación de Faraday puede ser expresada como:

$$\frac{\partial \vec{B}'(\vec{r}', t')}{\partial t'} = c\nabla' \times \vec{E}'(\vec{r}', t') - sB_x(\vec{r}', t')\hat{y} \tag{A.15}$$

A.1.4. Ecuación de Ampere: componente x

Queremos obtener una ecuación análoga a:

$$\frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial t} = (c\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t))_x - 4\pi J_x \quad (\text{A.16})$$

en el sistema de referencia S' . De las ecuaciones A.2 tenemos:

$$\begin{aligned} E'_x(\vec{r}', t') &= \Gamma(E_x(\vec{r}, t) + \frac{v}{c}B_z(\vec{r}, t)) \\ B'_z(\vec{r}', t') &= \Gamma(B_z(\vec{r}, t) + \frac{v}{c}E_x(\vec{r}, t)) \\ B'_y(\vec{r}', t') &= B'_y(\vec{r}, t') \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Así, de la transformación B.34 tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'_x(\vec{r}', t')}{\partial t'} &= \Gamma^2 \left(\frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{v}{c} \frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial t} + v \frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial y} + \frac{v^2}{c} \frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial B'_y(\vec{r}', t')}{\partial z'} &= \frac{\partial B_y(\vec{r}, t)}{\partial z} \\ \frac{\partial B'_z(\vec{r}', t')}{\partial y'} &= \Gamma^2 \left(\frac{v}{c^2} \frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{v^2}{c^3} \frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial y} + \frac{v}{c} \frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Combinando las ecuaciones en A.18 y considerando que la corriente en el eje x transforma como $J'_x = J_x$, es posible mostrar que:

$$\frac{\partial E'_x(\vec{r}', t')}{\partial t'} = (c\nabla' \times \vec{B}'(\vec{r}', t'))_x - 4\pi J'_x \quad (\text{A.19})$$

A.1.5. Ecuación de Ampere: componente y

Aquí procederemos de manera similar a la sección anterior. De las transformaciones definidas en las ecuaciones A.2 obtenemos:

$$\begin{aligned} E'_y(\vec{r}', t') &= E_y(\vec{r}, t) \\ B'_z(\vec{r}', t') &= \Gamma(B_z(\vec{r}, t) + \frac{v}{c}E_x(\vec{r}, t)) \\ B'_x(\vec{r}', t') &= \Gamma(B_x(\vec{r}, t) - \frac{v}{c}E_z(\vec{r}, t)) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Usando las ecuaciones A.1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E'_y(\vec{r}', t')}{\partial t'} &= \Gamma \left(\frac{\partial E_y(\vec{r}, t)}{\partial t} + v \frac{\partial E_y(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial B'_x(\vec{r}', t')}{\partial z'} &= \Gamma \left(\frac{\partial B_x(\vec{r}, t)}{\partial z} - \frac{v}{c} \frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial B'_z(\vec{r}', t')}{\partial x'} &= \Gamma \left(\frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial x} + \frac{v}{c} \frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x} (y' + vt') + \Gamma t' \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial y} + \frac{v}{c} \frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \left(t' + \frac{vy'}{c^2} \right) + \frac{\Gamma y'}{c^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{v}{c} \frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial t} \right)
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Combinando las ecuaciones en A.21 y considerando que la corriente en y transforma $J'_y = \Gamma(J_y - v\rho_c)$ obtenemos:

$$\frac{\partial E'_y(\vec{r}', t')}{\partial t'} = (c\nabla' \times \vec{B}'(\vec{r}', t'))_y - 4\pi J'_y - sE'_x(\vec{r}', t')s \left(ct' \frac{\partial B'_z(\vec{r}, t)}{\partial y'} + \frac{y'}{c} \frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial t'} \right) \tag{A.22}$$

A.1.6. Ecuación de Ampere: componente z

Procederemos de manera similar a las dos sub-secciones anteriores. De las transformaciones definidas en A.2 obtenemos:

$$\begin{aligned}
E'_z(\vec{r}', t') &= \Gamma(E_z(\vec{r}, t) - \frac{v}{c} B_x(\vec{r}, t)) \\
B'_x(\vec{r}', t') &= \Gamma(B_x(\vec{r}, t) - \frac{v}{c} E_z(\vec{r}, t)) \\
B'_y(\vec{r}', t') &= E_y(\vec{r}, t)
\end{aligned} \tag{A.23}$$

También, de A.1 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E'_z(\vec{r}', t')}{\partial t'} &= \Gamma^2 \left(\frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{v}{c} \frac{\partial B_x(\vec{r}, t)}{\partial t} + v \frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial y} - \frac{v^2}{c} \frac{\partial B_x(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial B'_x(\vec{r}', t')}{\partial y'} &= \Gamma^2 \left(\frac{v}{c^2} \frac{\partial B_x(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{v^2}{c^3} \frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial B_x(\vec{r}, t)}{\partial y} - \frac{v}{c} \frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial B'_y(\vec{r}', t')}{\partial x'} &= \frac{\partial B_y(\vec{r}, t)}{\partial x} + \frac{\partial B_y(\vec{r}, t)}{\partial y} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x} (y' + vt') + \Gamma t' \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial B_z(\vec{r}, t)}{\partial t} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \left(t' + \frac{vy'}{c^2} \right) + \frac{y'}{c^2} \Gamma \frac{\partial v}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Combinando las ecuaciones anteriores y considerando que la corriente en x transforma como $J'_z = J_z$ podemos mostrar que:

$$\frac{\partial E'_z(\vec{r}', t')}{\partial t'} = (c\nabla' \times \vec{B}'(\vec{r}', t'))_z - 4\pi J'_z + s \left(ct' \frac{\partial B'_y(\vec{r}, t)}{\partial y'} + \frac{y'}{c} \frac{\partial B'_y(\vec{r}, t)}{\partial t'} \right) \quad (\text{A.25})$$

Combinando las tres componentes de la ley de Ampere (Ecuaciones A.19, A.22, A.25) obtenemos:

$$\frac{\partial \vec{E}'(\vec{r}', t')}{\partial t'} = (c\nabla' \times \vec{B}'(\vec{r}', t')) - 4\pi \vec{J}' - s E'_x(\vec{r}', t') \hat{y} + s \left(ct' \frac{\partial \vec{B}'(\vec{r}, t)}{\partial y'} + \frac{y'}{c} \frac{\partial \vec{B}'(\vec{r}, t)}{\partial t'} \right) \times \hat{x} \quad (\text{A.26})$$

De la misma forma que con la ecuación de Faraday, la ecuación de Ampere también tiene un termino dependiente del tiempo que desaparece bajo la aproximación 2D. De manera similar, el limite 2D requiere que el termino proporcional a y' sea despreciable. Como en el caso de la ecuación de Faraday, esto se obtiene notando que $\partial \vec{B}'/\partial t' \sim \nabla' \times \vec{E}'$, luego $\nabla' \times \vec{B}' \gg sy' \partial \vec{B}'/\partial t'$, considerando que $sy' \ll c$ y $|\vec{E}'| \ll |\vec{B}'|$. Esto significa que el termino $sy' \partial \vec{B}'/\partial t'$ puede ser despreciado en el caso de la ecuación de Ampere.

Así, asumiendo la geometría en 2D, la ecuación queda como:

$$\frac{\partial \vec{E}'(\vec{r}', t')}{\partial t'} = (c\nabla' \times \vec{B}'(\vec{r}', t')) - 4\pi \vec{J}' - s E'_x(\vec{r}', t') \hat{y} \quad (\text{A.27})$$

A.2. Evolución del momento de las partículas en el sistema de referencia S'

Aplicando la transformación de Lorentz presentada en A.1 las componentes de la corriente transforman como:

$$J'_x = J_x \quad J'_y = \Gamma(J_y - v\rho_c) \quad J'_z = J_z \quad (\text{A.28})$$

y la densidad de carga:

$$\rho'_c = \Gamma(\rho_c - vJ_y/c^2 + sy'J_x/(c^2\Gamma)) \quad (\text{A.29})$$

Dado que las partículas en nuestra simulación pueden llegar a ser relativistas, también transformaremos el momento \vec{p} , así:

$$\begin{aligned} p'_x &= p_x & p'_y &= \Gamma(p_y - v\gamma) \\ p'_z &= p_z & \gamma' &= \Gamma(\gamma - vp_y/(mc^2)) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

donde m es la masa de las partículas, usando estas últimas relaciones, junto con las transformaciones A.1 tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{dp'_x}{dt'} &= \frac{dp_x/dt}{\Gamma(1 - vu_y/c^2) + su_x y'/c^2} \\ \frac{dp'_y}{dt'} &= \frac{dp_y/dt - mvd\gamma/dt + sp_x(1 - vu_y/c^2)}{1 - vu_y/c^2 + su_x y'/(\Gamma c^2)} \\ \frac{dp'_z}{dt'} &= \frac{dp_z/dt}{\Gamma(1 - vu_y/c^2) + su_x y'/c^2}\end{aligned}\tag{A.31}$$

Donde u_x y u_y son las componentes x e y de las velocidades de las partículas en el sistema de referencia S . Es directo mostrar que en el limite no-relativista, las ecuaciones anteriores corresponden una transformación estándar de una fuerza entre dos sistema de referencia inerciales, mas un termino extra $sp'_x \hat{y}$. En adición a estas fuerzas, también necesitamos encontrar la transformación de las fuerzas de marea y de coriolis sobre las partículas. Sabemos que en el sistema de referencia S tenemos:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = 3\omega_0^2 x \hat{x} - 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u}\tag{A.32}$$

Es directo mostrar que en limite de plasma frio, la versión en el sistema de referencia S' de la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{d\vec{u}'}{dt} = -2\omega_0 \hat{z} \times \vec{u}'\tag{A.33}$$

Dado que esta fuerza no realiza trabajo sobre las partículas, se puede escribir es terminos de \vec{p}' en vez de \vec{u}' , así combinando la ecuación anterior con las transformaciones de Lorentz para la fuerza obtenemos:

$$\frac{d\vec{p}'}{dt} = 2\omega_0 p'_y \hat{x} - \frac{1}{2}\omega_0 p'_y \hat{y} + q \left(\vec{E}' + \frac{\vec{u}'}{c} \times \vec{B}' \right)\tag{A.34}$$

donde q es la carga de la partícula.

Finalmente, es importante apuntar que las transformaciones del momentum mostradas en A.30 no es completamente consistente con la evolución de las posiciones de las partículas. De hecho, derivando directamente A.1 obtenemos:

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{u_x}{\Gamma(1 - vu_y/c^2) + su_x y'/c^2} \\
u'_y &= \frac{u_y - v + su_x t'/\Gamma}{(1 - vu_y/c^2) + su_x y'/(\Gamma c^2)} \\
u'_z &= \frac{u_z}{\Gamma(1 - vu_y/c^2) + su_x y'/c^2}
\end{aligned}
\tag{A.35}$$

En el régimen no relativista, la discrepancia solo aparece en u'_y . En el caso 2D, esto no implica ninguna inconsistencia entre los valores de u'_y y la evolución de la posición de las partículas y' .

Anexo B

Ondas de whistler en el plasma no-colisional

B.1. Modos Electromagnéticos

Queremos obtener la relación de dispersión para un plasma caliente y magnetizado. Para aquello debemos resolver de manera consistente las ecuaciones de movimiento para las partículas y las ecuaciones de Maxwell en su forma microscópica.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{B.4})$$

La forma macroscópica nace de dividir la carga y la corriente total en carga y corriente libre y ligada. En nuestro caso consideraremos que todas las cargas son ligadas, así podemos expresar el vector desplazamiento como $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$.

Además consideraremos que la suma de los momentos magnéticos individuales de las partículas, se anulan ya que consideraremos que hay tantas partículas con momento magnético en una dirección como en la contraria de esta forma podemos considerar que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

Como veremos más adelante los campos y las distribuciones constarán de una cantidad a orden cero más una pequeña perturbación, el análisis posterior se hará conservando hasta el orden lineal en la perturbación, en este esquema y usando la versión macroscópica de

las ecuaciones de Maxwell el vector desplazamiento debe ser una función lineal del campo electrico, es decir:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{B.5})$$

Donde definimos el tensor dielectrico $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}}$, para obtenerlo primero calcularemos el tensor resistividad, para ello utilizaremos transformadas de Fourier, esto dado el esquema lineal propuesto. Comenzaremos linealizando la ecuacion de Vlasov.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (\text{B.6})$$

El esquema lineal es:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \quad (\text{B.8})$$

$$f(\mathbf{v}) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{v}) \quad (\text{B.9})$$

Donde el termino f_0 es homogéneo en el espacio.

Reemplacemos:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} (f_0 + f_1) + \frac{q}{m} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} (f_0 + f_1) = 0 \quad (\text{B.10})$$

Primero podemos cancelar los términos homogéneos que son derivados en las coordenadas espaciales, así:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_1 + \frac{q}{m} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 + \frac{q}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_1 = 0 \quad (\text{B.11})$$

Comencemos mirando el termino $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0$, para eso tenemos la siguiente geometría

Con esto como referencia tenemos que:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = v_y B_0 \hat{x} - v_x B_0 \hat{y} \quad (\text{B.12})$$

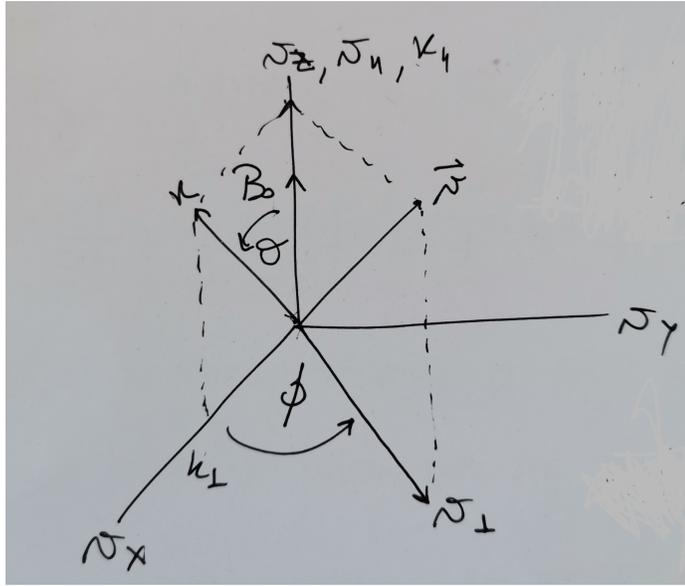


Figura B.1: Sistema de coordenadas cilíndrico para la velocidad

$$\nabla_{\mathbf{v}} f_0 = \begin{pmatrix} \partial f_0 / \partial v_x \\ \partial f_0 / \partial v_y \\ \partial f_0 / \partial v_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Así:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = \left(v_y \frac{\partial f_0}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial f_0}{\partial v_y} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = \left(v_{\perp} \sin \phi \frac{\partial f_0}{\partial v_x} - v_{\perp} \cos \phi \frac{\partial f_0}{\partial v_y} \right) \quad (\text{B.15})$$

Notemos que:

$$v_{\perp} \sin \phi = v_y \quad (\text{B.16})$$

$$v_{\perp} \cos \phi = v_x \quad (\text{B.17})$$

Derivando estas expresiones con respecto a ϕ

$$\frac{\partial v_y}{\partial \phi} = v_{\perp} \cos \phi \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial \phi} = -v_{\perp} \sin \phi \quad (\text{B.19})$$

Juntando todo tenemos.

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = - \left(\frac{\partial v_x}{\partial \phi} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + \frac{\partial v_y}{\partial \phi} \frac{\partial f_0}{\partial v_y} \right) B_0 \quad (\text{B.20})$$

Donde el termino entre paréntesis corresponde a $\partial f / \partial \phi$, recordemos que la distribución a orden cero tiene simetría azimutal, ya que las partículas se mueven circularmente alrededor del campo magnético (ya que $\mathbf{E}_0 = 0$), por lo tanto:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = -B_0 \frac{\partial f_0}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{B.21})$$

y de la misma forma podemos expresar:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_1 = -B_0 \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \quad (\text{B.22})$$

De esta forma:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_1 - \omega_c \frac{\partial f_1}{\partial \phi} + \frac{q}{m} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = 0 \quad (\text{B.23})$$

Ahora con nuestra ecuación linealizada podemos ir al espacio de fourier, $\nabla \rightarrow i \mathbf{k}$; $\partial / \partial t \rightarrow -i \omega$

Para simplificar un poco la notación omitiremos los subíndices 1 y conservaremos el el subíndice para las cantidades a orden 0

$$(-i\omega + \mathbf{v} \cdot i \mathbf{k}) \tilde{f} - \omega_c \frac{\tilde{f}}{\partial \phi} + \frac{q}{m} (\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \tilde{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = 0 \quad (\text{B.24})$$

Con el fin de eliminar el campo magnetico a primer orden usaremos la ley de Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, que en el espacio de fourier la podemos expresar como $\mathbf{B} = \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} / \omega$, así:

$$(-i\omega + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \tilde{f} - \omega_c \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} = -\frac{q}{m} \left(\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \left(\frac{\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}}{\omega} \right) \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \quad (\text{B.25})$$

Gracias a la simetría azimutal podemos asumir sin perdida de generalidad que \mathbf{k} esta contenido en el plano $x - z$ con componentes paralelas y perpendiculares al campo magnético. Así podemos escribir:

$$\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{x} + k_{\parallel} \hat{z} \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{v} = v_{\perp} \cos \phi \hat{x} + v_{\perp} \sin \phi \hat{y} + v_{\parallel} \hat{z} \quad (\text{B.27})$$

Así

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = k_{\parallel} v_{\parallel} + k_{\perp} v_{\perp} \cos \phi \quad (\text{B.28})$$

Reemplazando:

$$[i\omega + i(k_{\parallel} v_{\parallel} + k_{\perp} v_{\perp} \cos \phi)] \tilde{f} - \omega_c \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} = -\frac{q}{m} \left(\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \left(\frac{\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}}{\omega} \right) \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \quad (\text{B.29})$$

$$[i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) + ik_{\perp} v_{\perp} \cos \phi] \tilde{f} - \omega_c \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} = -\frac{q}{m} \left(\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \left(\frac{\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}}{\omega} \right) \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \quad (\text{B.30})$$

dividiendo por ω_c

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} - i(\alpha + \beta \cos \phi) \tilde{f} = \frac{q}{m\omega_c} \left(\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \left(\frac{\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}}{\omega} \right) \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \quad (\text{B.31})$$

Donde definimos:

$$\alpha = \frac{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega}{\omega_c} \quad ; \quad \beta = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \quad (\text{B.32})$$

Ahora podemos expandir $\mathbf{v} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}) = \mathbf{k}(\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\tilde{\mathbf{E}}$, así

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}) = \mathbf{k}(\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - (k_{\parallel} v_{\parallel} + k_{\perp} v_{\perp} \cos \phi) \tilde{\mathbf{E}} \quad (\text{B.33})$$

De esta forma la ecuación de Vlasov queda como:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} - i(\alpha + \beta \cos \phi) \tilde{f} = \frac{q}{m\omega_c} \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} - \frac{k_{\perp} v_{\perp} \cos \phi}{\omega} \right) \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\mathbf{k}}{\omega} (\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \quad (\text{B.34})$$

Ahora desarrollemos algunos terminos que faltan en las variables de nuestra geometría $(\mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{v}_{\parallel}, \phi)$, comencemos con:

$$\tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = \tilde{E}_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + \tilde{E}_y \frac{\partial f_0}{\partial v_y} + \tilde{E}_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \quad (\text{B.35})$$

$$\tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = \tilde{E}_x \frac{\partial v_{\perp}}{\partial v_x} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \tilde{E}_y \frac{\partial v_{\perp}}{\partial v_y} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \tilde{E}_z \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \quad (\text{B.36})$$

Recordemos que $v_{\perp} = v_x \cos \phi + v_y \sin \phi$, así:

$$\frac{\partial v_{\perp}}{\partial v_x} = \cos \phi = \frac{v_x}{v_{\perp}} \quad ; \quad \frac{\partial v_{\perp}}{\partial v_y} = \sin \phi = \frac{v_y}{v_{\perp}} \quad (\text{B.37})$$

Luego:

$$\tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \left(\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi \right) + \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \tilde{E}_z \quad (\text{B.38})$$

También necesitamos:

$$\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = v_x \tilde{E}_x + v_y \tilde{E}_y + v_z \tilde{E}_z = v_{\perp} (\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi) + v_{\parallel} \tilde{E}_z \quad (\text{B.39})$$

Ahora remplacemos estas expresiones en el lado derecho de B,34 así:

$$\dots = \frac{q}{m\omega_c} \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} - \frac{k_{\perp} v_{\perp} \cos \phi}{\omega} \right) \tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 + \frac{\mathbf{k}}{\omega} \left(\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \right] \quad (\text{B.40})$$

$$\dots = \frac{q}{m\omega_c} \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} - \frac{k_{\perp} v_{\perp} \cos \phi}{\omega} \right) \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \left(\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi \right) + \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \tilde{E}_z \right\} + \frac{\mathbf{k}}{\omega} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \left\{ v_{\perp} (\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi) + v_{\parallel} \tilde{E}_z \right\} \right] \quad (\text{B.41})$$

Aprovechamos para cambiarnos a la distribución normalizada $f_0 = n_0 F_0$

$$\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_0 = k_{\parallel} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} + k_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} \cos \phi \quad (\text{B.42})$$

$$\dots = \frac{qn_0}{m\omega_c} \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} - \frac{k_{\perp} v_{\perp} \cos \phi}{\omega} \right) \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} \left(\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi \right) + \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} \tilde{E}_z \right\} + \left(k_{\parallel} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} + k_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} \cos \phi \right) \left\{ v_{\perp} (\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi) + v_{\parallel} \tilde{E}_z \right\} \right] \quad (\text{B.43})$$

Ahora vamos a desarmar este lado derecho, en particular el termino entre paréntesis cuadrados, veremos que se cancelan varios términos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \left(\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi \right) + \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_z - \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} (E_x \cos \phi + E_y \sin \phi) - \\
& \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_z - \frac{k_\perp v_\perp}{\omega} \cos \phi \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \left(\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi \right) - \frac{k_\perp v_\perp}{\omega} \cos \phi \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_z + \\
& \frac{k_\parallel v_\perp}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \left(\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi \right) + \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_z + \frac{k_\perp v_\perp}{\omega} \cos \phi \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \left(\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi \right) + \\
& \frac{k_\perp v_\parallel}{\omega} \cos \phi \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \tilde{E}_z
\end{aligned} \tag{B.44}$$

Ahora vemos que podemos cancelar el el cuarto termino (primero de la segunda fila) con el octavo (segundo de la tercera fila) y el quinto (segundo de la segunda fila) con el noveno (tercer termino de la tercera fila), lo que nos queda;

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \left(\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi \right) + \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_z - \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} (E_x \cos \phi + E_y \sin \phi) - \\
& \frac{k_\perp v_\perp}{\omega} \cos \phi \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \tilde{E}_z + \frac{k_\parallel v_\perp}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \left(\tilde{E}_x \cos \phi + \tilde{E}_y \sin \phi \right) + \frac{k_\perp v_\parallel}{\omega} \cos \phi \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \tilde{E}_z
\end{aligned} \tag{B.45}$$

Ahora factorizaremos por $\sin \phi$ y $\cos \phi$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \tilde{E}_x - \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \tilde{E}_x - \frac{k_\perp v_\perp}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_z + \frac{k_\perp v_\parallel}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \tilde{E}_z + \frac{k_\parallel v_\perp}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_x \right) \cos \phi \\
& + \left(\frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \tilde{E}_y - \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \tilde{E}_y + \frac{k_\parallel v_\perp}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_y \right) \sin \phi + \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_z
\end{aligned} \tag{B.46}$$

Reordenando un poquito más:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[\frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} + \frac{k_\parallel}{\omega} \left(v_\perp \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} - v_\parallel \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \right) \right] \tilde{E}_x + \left[-\frac{k_\perp}{\omega} \left(v_\perp \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} - v_\parallel \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \right) \right] \tilde{E}_z \right\} \cos \phi \\
& + \left[\frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} + \frac{k_\parallel}{\omega} \left(v_\perp \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} - v_\parallel \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \right) \right] \tilde{E}_y \sin \phi + \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_z
\end{aligned} \tag{B.47}$$

donde aprovechamos de renombrar los términos entre paréntesis cuadrados

$$A = \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} + \frac{k_\parallel}{\omega} \left(v_\perp \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} - v_\parallel \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \right) \quad (\text{B.48})$$

$$D = -\frac{k_\perp}{\omega} \left(v_\perp \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} - v_\parallel \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \right) \quad (\text{B.49})$$

Así juntando todo lo que tenemos del lado derecho, tenemos finalmente:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} - i(\alpha + \beta \cos \phi) \tilde{f} = \frac{qn_0}{m\omega_c} \left[(A \tilde{E}_x + D \tilde{E}_z) \cos \phi + A \tilde{E}_y \sin \phi + \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_z \right] \quad (\text{B.50})$$

esta es una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + P(x)f = Q(x) \quad (\text{B.51})$$

que tiene como solución general:

$$f = e^{-\int_x P(x')dx'} \left(\int_x Q(x') e^{\int_x P(x'')dx''} dx' \right) \quad (\text{B.52})$$

donde el término $\int_x P(x)dx$ es el llamado factor integrante, en este caso:

$$\begin{aligned} \int_\phi P(\phi')d\phi' &= -i \int_\phi (\alpha + \beta \cos \phi')d\phi' \\ &= -i(\alpha\phi + \beta \sin \phi) \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Reemplazando en la solución propuesta:

$$\tilde{f} = e^{i(\alpha\phi + \beta \sin \phi)} \int \frac{qn_0}{m\omega_c} \left[(A \tilde{E}_x + D \tilde{E}_z) \cos \phi' + A \tilde{E}_y \sin \phi' + \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} \tilde{E}_z \right] e^{-i(\alpha\phi' + \beta \sin \phi')} d\phi' \quad (\text{B.54})$$

Para resolver estas integrales debemos usar las siguientes propiedades:

$$\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \quad (\text{B.55})$$

$$\sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \quad (\text{B.56})$$

$$e^{-i\beta \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{-in\phi} \quad (\text{B.57})$$

Donde J_n es la función de Bessel de primer tipo.

Debemos calcular las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \int e^{-i(\alpha\phi' + \beta \sin \phi')} d\phi' &= \sum_n J_n(\beta) \int e^{-i(\alpha+n)\phi'} d\phi' \\ &= i \sum_n \frac{J_n(\beta)}{\alpha+n} e^{-i(\alpha+n)\phi} \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

$$\begin{aligned} \int (e^{i\phi'} + e^{-i\phi'}) e^{-i(\alpha\phi' + \beta \sin \phi')} d\phi' &= \sum_n J_n(\beta) \int (e^{-i(\alpha-1+n)\phi} + e^{-i(\alpha+1+n)\phi}) d\phi' \\ &= i \sum_n J_n(\beta) \left[\frac{e^{-i(\alpha-1+n)\phi}}{\alpha-1+n} + \frac{e^{-i(\alpha+1+n)\phi}}{\alpha+1+n} \right] \\ &= i \sum_n \frac{e^{-i(\alpha+n)\phi}}{\alpha+n} \left[J_{n+1}(\beta) + J_{n-1}(\beta) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

donde en el último paso reemplazamos $n \rightarrow n+1$ y $n \rightarrow n-1$ ya que la suma va de $n = -\infty$ hasta $n = \infty$.

$$\begin{aligned} \int (e^{i\phi'} - e^{-i\phi'}) e^{-i(\alpha\phi' + \beta \sin \phi')} d\phi' &= \sum_n J_n(\beta) \int (e^{-i(\alpha-1+n)\phi} - e^{-i(\alpha+1+n)\phi}) d\phi' \\ &= i \sum_n J_n(\beta) \left[\frac{e^{-i(\alpha-1+n)\phi}}{\alpha-1+n} - \frac{e^{-i(\alpha+1+n)\phi}}{\alpha+1+n} \right] \\ &= i \sum_n \frac{e^{-i(\alpha+n)\phi}}{\alpha+n} \left[J_{n+1}(\beta) - J_{n-1}(\beta) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Ahora juntando todo:

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= i \sum_m J_m(\beta) e^{i(\alpha+m)\phi} \frac{qn_0}{m\omega_c} \left(\frac{A\tilde{E}_x + D\tilde{E}_z}{2} \sum_n \frac{e^{-i(\alpha+n)\phi}}{\alpha+n} \left[J_{n+1}(\beta) + J_{n-1}(\beta) \right] \right. \\ &\quad + \frac{A\tilde{E}_y}{2i} \sum_n \frac{e^{-i(\alpha+n)\phi}}{\alpha+n} \left[J_{n+1}(\beta) - J_{n-1}(\beta) \right] \\ &\quad \left. + \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} \tilde{E}_z \sum_n \frac{e^{-i(\alpha+n)\phi}}{\alpha+n} J_n(\beta) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

Usamos las siguientes propiedades de las funciones de Bessel $J_{n+1}(\beta) + J_{n-1}(\beta) = 2n/\beta J_n(\beta)$ y $J_{n+1}(\beta) - J_{n-1}(\beta) = -2J'_n(\beta)$

$$\begin{aligned} \tilde{f} = i \frac{qn_0}{m\omega_c} & \left(\frac{A\tilde{E}_x + D\tilde{E}_z}{2} \sum_{m,n} J_m(\beta) \frac{2n}{\beta} J_n(\beta) \frac{e^{i(m-n)\phi}}{\alpha+n} \right. \\ & - \frac{A\tilde{E}_y}{2i} \sum_{m,n} J_m(\beta) 2J'_n(\beta) J_n(\beta) \frac{e^{i(m-n)\phi}}{\alpha+n} \\ & \left. + \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} \tilde{E}_z J_m(\beta) J_n(\beta) \frac{e^{i(m-n)\phi}}{\alpha+n} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

$$\begin{aligned} \tilde{f} = i \frac{qn_0}{m\omega_c} \sum_{m,n} \frac{e^{i(m-n)\phi}}{\alpha+n} J_m(\beta) & \left[(A\tilde{E}_x + D\tilde{E}_z) \frac{n}{\beta} J_n(\beta) \right. \\ & \left. + iA\tilde{E}_y J'_n(\beta) + \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} \tilde{E}_z J_n(\beta) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

factorizaremos por A y al resto lo llamaremos B

$$\begin{aligned} \tilde{f} = i \frac{qn_0}{m\omega_c} \sum_{m,n} \frac{e^{i(m-n)\phi}}{\alpha+n} J_m(\beta) & \left[A \left(\frac{n}{\beta} J_n(\beta) \tilde{E}_x + iJ'_n(\beta) \tilde{E}_y \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} \tilde{E}_z J_n(\beta) + \frac{n}{\beta} D\tilde{E}_z J_n(\beta) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

Bautizamos:

$$B = \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} + \frac{n}{\beta} D \quad (\text{B.65})$$

$$\tilde{f} = i \frac{qn_0}{m\omega_c} \sum_{m,n} \frac{e^{i(m-n)\phi}}{\alpha+n} J_m(\beta) \left[A \left(\frac{n}{\beta} J_n(\beta) \tilde{E}_x + iJ'_n(\beta) \tilde{E}_y \right) + J_n(\beta) \tilde{E}_z B \right] \quad (\text{B.66})$$

Finalmente podemos computar $\tilde{\mathbf{J}}$

$$\tilde{\mathbf{J}} = q \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{v} \tilde{f} v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\phi \quad (\text{B.67})$$

Donde $\mathbf{v} = \hat{x}v_{\perp} \cos \phi + \hat{y}v_{\perp} \sin \phi + \hat{z}v_{\parallel}$

Matricialmente tenemos:

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.68})$$

Así calcularemos por componentes, por ejemplo para \hat{x} :

$$\tilde{J}_x = \sigma_{xx}\tilde{E}_x + \sigma_{xy}\tilde{E}_y + \sigma_{xz}\tilde{E}_z \quad (\text{B.69})$$

Para integrar en $d\phi$ expresaremos las funciones trigonométricas en su forma exponencial, comenzaremos mirando \hat{x} (proporcional a $\cos \phi$)

$$\int_0^{2\pi} i \frac{q^2 n_0}{m\omega_c} \frac{(e^{i\phi} + e^{-i\phi})}{2} \sum_{m,n} \frac{e^{i(m-n)\phi}}{\alpha + n} J_m(\beta) \left[A \left(\frac{n}{\beta} J_n(\beta) \tilde{E}_x + i J'_n(\beta) \tilde{E}_y \right) + J_n(\beta) \tilde{E}_z B \right] d\phi \quad (\text{B.70})$$

Veamos que lo que esta dentro de los paréntesis cuadrados no depende de ϕ y la dependencia en esta variable esta solo en las exponenciales, veamos esta en detalle, para eso recordemos:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m,n} \quad (\text{B.71})$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n+1)\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} e^{i(m-(n-1))\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m,n'} = 2\pi \delta_{m,n-1} \quad (\text{B.72})$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n-1)\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} e^{i(m-(n+1))\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m,n'} = 2\pi \delta_{m,n+1} \quad (\text{B.73})$$

Usando esto podemos escribir:

$$\int_0^{2\pi} (e^{i(m-n+1)\phi} + e^{i(m-n-1)\phi}) d\phi = 2\pi(\delta_{m,n-1} + \delta_{m,n+1}) \quad (\text{B.74})$$

$$\int_0^{2\pi} (e^{i(m-n+1)\phi} - e^{i(m-n-1)\phi}) d\phi = 2\pi(\delta_{m,n-1} - \delta_{m,n+1}) \quad (\text{B.75})$$

Así:

$$i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \sum_{m,n} \frac{\pi(\delta_{m,n+1} + \delta_{m,n-1})}{\alpha + n} J_m(\beta) \left[A \left(\frac{n}{\beta} J_n(\beta) \tilde{E}_x + i J'_n(\beta) \tilde{E}_y \right) + J_n(\beta) \tilde{E}_z B \right] \quad (\text{B.76})$$

podemos colapsar la sumatoria de m con la delta, en el estilo:

$$\sum_j \delta_{ij} a_j = a_i \quad (\text{B.77})$$

$$i \frac{q^2 n_0 \pi}{m \omega_c} \sum_n \frac{J_{n+1}(\beta) + J_{n-1}(\beta)}{\alpha + n} \left[A \left(\frac{n}{\beta} J_n(\beta) \tilde{E}_x + i J'_n(\beta) \tilde{E}_y \right) + J_n(\beta) \tilde{E}_z B \right] \quad (\text{B.78})$$

$$i \frac{q^2 n_0 \pi}{m \omega_c} \sum_n \frac{2n J_n(\beta)}{\beta(\alpha + n)} \left[A \left(\frac{n}{\beta} J_n(\beta) \tilde{E}_x + i J'_n(\beta) \tilde{E}_y \right) + J_n(\beta) \tilde{E}_z B \right] \quad (\text{B.79})$$

con esto ya podemos escribir \tilde{J}_x

$$\sigma_{xx} = \left[i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\alpha + n} \right] A \left(\frac{n}{\beta} \right)^2 v_{\perp} J_n^2(\beta) \quad (\text{B.80})$$

$$\sigma_{xy} = \left[i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\alpha + n} \right] i A \frac{n}{\beta} v_{\perp} J_n(\beta) J'_n(\beta) \quad (\text{B.81})$$

$$\sigma_{xz} = \left[i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\alpha + n} \right] B \frac{n}{\beta} v_{\perp} J_n^2(\beta) \quad (\text{B.82})$$

Veamos ahora $\tilde{J}_y = \sigma_{yx} \tilde{E}_x + \sigma_{yy} \tilde{E}_y + \sigma_{yz} \tilde{E}_z$ de manera similar al caso anterior solo que ahora proporcional a $\sin \phi$

$$\int_0^{2\pi} i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \frac{(e^{i\phi} - e^{-i\phi})}{2i} \sum_{m,n} \frac{e^{i(m-n)\phi}}{\alpha + n} J_m(\beta) \left[A \left(\frac{n}{\beta} J_n(\beta) \tilde{E}_x + i J'_n(\beta) \tilde{E}_y \right) + J_n(\beta) \tilde{E}_z B \right] d\phi \quad (\text{B.83})$$

$$i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \sum_{m,n} \frac{\pi(\delta_{m,n-1} - \delta_{m,n+1})}{i(\alpha + n)} J_m(\beta) \left[A \left(\frac{n}{\beta} J_n(\beta) \tilde{E}_x + i J'_n(\beta) \tilde{E}_y \right) + J_n(\beta) \tilde{E}_z B \right] \quad (\text{B.84})$$

$$i \frac{q^2 n_0 \pi}{m \omega_c} \sum_n \frac{J_{n-1}(\beta) - J_{n+1}(\beta)}{i(\alpha + n)} \left[A \left(\frac{n}{\beta} J_n(\beta) \tilde{E}_x + i J'_n(\beta) \tilde{E}_y \right) + J_n(\beta) \tilde{E}_z B \right] \quad (\text{B.85})$$

$$i \frac{q^2 n_0 \pi}{m \omega_c} \sum_n \frac{2J'_n(\beta)}{i(\alpha + n)} \left[A \left(\frac{n}{\beta} J_n(\beta) \tilde{E}_x + i J'_n(\beta) \tilde{E}_y \right) + J_n(\beta) \tilde{E}_z B \right] \quad (\text{B.86})$$

vamos con \tilde{J}_y

$$\sigma_{yx} = \left[i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\alpha + n} \right] A \left(\frac{n}{i\beta} \right) v_{\perp} J'_n(\beta) J_n(\beta) \quad (\text{B.87})$$

$$\sigma_{yy} = \left[i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\alpha + n} \right] A v_{\perp} J'_n(\beta) J'_n(\beta) \quad (\text{B.88})$$

$$\sigma_{yz} = \left[i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\alpha + n} \right] \frac{B}{i} v_{\perp} J'_n(\beta) J_n(\beta) \quad (\text{B.89})$$

Finalmente para \hat{z}

$$\sigma_{zx} = \left[i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\alpha + n} \right] A \left(\frac{n}{\beta} \right) v_{\parallel} J_n^2(\beta) \quad (\text{B.90})$$

$$\sigma_{zy} = \left[i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\alpha + n} \right] i A v_{\parallel} J_n(\beta) J'_n(\beta) \quad (\text{B.91})$$

$$\sigma_{zz} = \left[i \frac{q^2 n_0}{m \omega_c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\alpha + n} \right] B v_{\parallel} J_n^2(\beta) \quad (\text{B.92})$$

Matricialmente queda mejor:

$$\overleftrightarrow{\sigma} = i \sum_s \frac{e_s^2 n_s}{m_s \omega_{c,s}} \sum_n \int_{+\infty}^{-\infty} \int_{+\infty}^0 \frac{2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\alpha + n} \begin{pmatrix} A_s \frac{n^2 v_{\perp}}{\beta_s^2} J_n^2 & i A_s \frac{n v_{\perp}}{\beta_s} J_n J'_n & B_s \frac{n v_{\perp}}{\beta_s} J_n^2 \\ -i A_s \frac{n v_{\perp}}{\beta_s} J_n J'_n & A_s v_{\perp} J_n J'_n & -i B_s v_{\perp} J_n J'_n \\ A_s \frac{n v_{\parallel}}{\beta_s} J_n^2 & i A_s v_{\parallel} J_n J'_n & B_s v_{\parallel} J_n^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.93})$$

Ahora estamos en condiciones de evaluar el tensor dieléctrico:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}} = \overleftrightarrow{\mathbf{1}} - \frac{\overleftrightarrow{\sigma}}{i\omega\epsilon_0} \quad (\text{B.94})$$

Para escribir los elementos de $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}$, para eso consideremos:

$$\omega_{c,s}(\alpha + n) = \omega_{c,s} \left(\frac{k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega}{\omega_{c,s}} + n \right) = k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + n\omega_{c,s} \quad (\text{B.95})$$

además, podemos escribir:

$$A_s = \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel}v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \right] \quad (\text{B.96})$$

Comencemos:

$$K_{xx} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2 J_n^2}{\beta_s^2(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + n\omega_{c,s})} \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel}v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \right] 2\pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (\text{B.97})$$

$$K_{xy} = -i \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n J_n J'_n}{\beta_s(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + n\omega_{c,s})} \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel}v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \right] 2\pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (\text{B.98})$$

$$K_{xz} = - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n J_n^2}{\beta_s(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + n\omega_{c,s})} \left[\frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} - \frac{n\omega_{c,s}}{\omega v_{\perp}} \left(v_{\perp} \frac{\partial f_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial f_{0,s}}{\partial v_{\perp}} \right) \right] 2\pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (\text{B.99})$$

$$K_{yx} = i \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n J_n J'_n}{\beta_s(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + n\omega_{c,s})} \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel}v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \right] 2\pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (\text{B.100})$$

$$K_{yy} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n J_n J'_n}{(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n \omega_{c,s})} \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \right] 2\pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (\text{B.101})$$

$$K_{yz} = i \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{J_n J'_n}{(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n \omega_{c,s})} \left[\frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} - \frac{n \omega_{c,s}}{\omega v_{\perp}} \left(v_{\perp} \frac{\partial f_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial f_{0,s}}{\partial v_{\perp}} \right) \right] 2\pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (\text{B.102})$$

$$K_{zx} = - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n J_n^2}{\beta_s (k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n \omega_{c,s})} \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \right] 2\pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (\text{B.103})$$

$$K_{zy} = -i \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{J_n J'_n}{(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n \omega_{c,s})} \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \right] 2\pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (\text{B.104})$$

$$K_{zz} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{J_n^2}{(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n \omega_{c,s})} \left[\frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} - \frac{n \omega_{c,s}}{\omega v_{\perp}} \left(v_{\perp} \frac{\partial f_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial f_{0,s}}{\partial v_{\perp}} \right) \right] 2\pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (\text{B.105})$$

Dado que queremos obtener la relación de dispersión para ondas electromagnéticas necesitamos desacoplar los campos en las ecuaciones de Maxwell, ya usamos la ley de Faraday, necesitamos otra ecuación, en este caso la ley de Amperè (libre de fuentes)

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E} \right) \quad (\text{B.106})$$

Que en el espacio de Fourier:

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}} = -i\omega \left(\mu_0 \varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \right) \quad (\text{B.107})$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \quad (\text{B.108})$$

Recordando:

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = \omega \tilde{\mathbf{B}} \quad (\text{B.109})$$

y desacoplando:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}) + \frac{\omega^2}{c^2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (\text{B.110})$$

Podemos simplificar esta expresión recordando que asumimos que: $k_x = |k| \sin \theta$ $k_z = |k| \cos \theta$ $k_y = 0$, así

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (\text{B.111})$$

Donde:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} -k_z^2 & 0 & k_x k_z \\ 0 & -(k_x^2 + k_z^2) & 0 \\ k_x k_z & 0 & -k_x^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.112})$$

De esta forma:

$$\begin{pmatrix} K_{xx} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \cos^2 \theta & K_{xy} & K_{xz} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \sin \theta \cos \theta \\ K_{yx} & K_{yy} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} & K_{yz} \\ K_{zx} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \sin \theta \cos \theta & K_{zy} & K_{zz} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.113})$$

Ahora para obtener la relación de dispersión (el determinante de la matriz anterior) asumiremos que los modos se propagan en una dirección dada, vemos si el modo de propagación es paralelo con el campo magnético de fondo, la matriz anterior se simplifica bastante al ser $\theta = 0$, por esta razón evaluaremos para modos cuasi-paralelos lo que nos permite asumir que $\beta = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{c,s}} \ll 1$, por lo cual guardaremos hasta orden 1 en β_s , también .

Podemos evaluar también K_{xz} K_{zx} son proporcionales a $\frac{n J_n^2(\beta_s)}{\beta_s}$, recordemos que a primer orden $J_0 \sim 1$ y $J_{\pm 1} \sim \pm \beta_s / 2$, esto usando la expresión asintótica:

$$J_{\alpha}(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha} \quad (\text{B.114})$$

Para el caso $n = 0$:

$$\frac{nJ_n^2(\beta_s)}{\beta_s} \rightarrow \frac{0 \cdot 1}{\beta_s} = 0 \quad (\text{B.115})$$

Para $n = \pm 1$

$$\frac{nJ_n^2(\beta_s)}{\beta_s} \rightarrow \pm \frac{\beta_s^2/4}{\beta_s} = \pm \frac{\beta_s}{4} = 0 \quad (\text{B.116})$$

Podemos hacer un análisis similar para K_{yz} y K_{zy} los cuales son proporcionales a $J_n(\beta_s)J'_n(\beta_s)$, considerando que $J'_0(\beta_s) = -J_1(\beta_s) = -\beta_s/2$. De esta forma para cuando $n = -1, 0, +1$ $J_n(\beta_s)J'_n(\beta_s)$ es igual a cero. Así nuestra matriz queda como:

$$\begin{pmatrix} K_{xx} - \frac{c^2k^2}{\omega^2} & K_{xy} & 0 \\ K_{yx} & K_{yy} - \frac{c^2k^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.117})$$

Tomando el determinante:

$$D(k, \omega) = \left[\left(K_{xx} - \frac{c^2k^2}{\omega^2} \right) \left(K_{yy} - \frac{c^2k^2}{\omega^2} \right) - K_{xy}K_{yx} \right] K_{zz} = 0 \quad (\text{B.118})$$

Aún podemos decir más sobre K_{xx} y K_{xy} , que para el caso $n = 0$ son iguales a la unidad en el limite $\beta_s \rightarrow 0$, usando la siguiente propiedad sobre la derivada de la función de Bessel:

$$J'_n(\beta) = J_{n-1}(\beta) - \frac{n}{\beta}J_n(\beta) = -J_{n+1}(\beta) + \frac{n}{\beta}J_n(\beta) \quad (\text{B.119})$$

Usando esta propiedad en K_{yy} cuyo segundo termino es proporcional a $J'_n(\beta_s)J'_n(\beta_s)$ usando la primera igualdad de la propiedad B.119 para el caso $n = -1$ y la segunda igualdad para el caso $n = +1$ lo que nos permite despreciar el primer termino el cual es de un orden superior en β_s , así, en el limite $\beta_s \rightarrow 0$:

$$J'_n(\beta_s)J'_n(\beta_s) \approx \frac{n^2J_n^2}{\beta_s} \quad (\text{B.120})$$

Lo que nos permite igual K_{xx} y K_{yy} , además por inspección de K_{xy} K_{yx} podemos ver que $K_{xy} = -K_{yx}$ de esta forma podemos simplificar aún mas nuestra relación de dispersión (electromagnética):

$$D(k, \omega) = \left(K_{xx} - \frac{c^2k^2}{\omega^2} \right)^2 + K_{xy}^2 = 0 \quad (\text{B.121})$$

$$D(k, \omega) = \left(K_{xx} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + iK_{xy} \right) \left(K_{xx} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - iK_{xy} \right) = 0 \quad (\text{B.122})$$

Ahora considerando el limite $\beta_s \rightarrow 0$ y la propiedad B.119 el primer paréntesis corresponde a ondas planas:

$$K_{xx} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + iK_{xy} = 1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0 \quad (\text{B.123})$$

Para el otro paréntesis consideramos que en el limite $\beta_s \rightarrow 0$:

$$\frac{n^2 J_n^2(\beta_s)}{\beta_s^2} = \frac{n J_n(\beta_s) J_n'(\beta_s)}{\beta_s} = \frac{1}{4} \quad (\text{B.124})$$

De esta forma escribimos la relación de dispersión como:

$$\begin{aligned} D(k, \omega) &= K_{xx} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - iK_{xy} \\ &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1/4}{(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n\omega_{c,s})} A_s 2\pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \\ &\quad - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1/4}{(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n\omega_{c,s})} A_s 2\pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \end{aligned} \quad (\text{B.125})$$

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k}{\omega} \left(v_{\perp} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} \right)}{(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n\omega_{c,s})} \pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (\text{B.126})$$

Factorizando el último término por k/ω

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_{o,s}}{v_{\parallel} - \frac{\omega \pm \omega_{c,s}}{k_{\parallel}}} dv_{\parallel} \quad (\text{B.127})$$

Donde

$$G_{o,s}(v_{\parallel}) = \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{\omega}{k_{\parallel}} - v_{\parallel} \right) \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} + v_{\perp} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \right] \pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} \quad (\text{B.128})$$

Aquí podemos hacer un paréntesis y hablar como seguir aproximando, con el fin de poder evaluar nuestra relación de dispersión, esta vez usando la aproximación de tasa de crecimiento

lento, haremos un Taylor para la variable $p = \gamma - i\omega$, asumiremos que el crecimiento es lento, es decir, asumiremos que $|\gamma| \ll |\omega|$, así el Taylor será al rededor de $p = -i\omega$, así:

$$D(k, p) = D(k, -i\omega) + \frac{\partial D(k, -i\omega)}{\partial p} \gamma \quad (\text{B.129})$$

$$D(k, p) = D(k, -i\omega) + \frac{\partial D(k, -i\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial p} \gamma \quad (\text{B.130})$$

$$D(k, p) = D(k, -i\omega) + i \frac{\partial D(k, -i\omega)}{\partial \omega} \gamma \quad (\text{B.131})$$

donde $D(k, -i\omega)$ tiene una parte real y otra imaginaria.

$$D(k, -i\omega) = D_r(k, -i\omega) + iD_i(k, -i\omega) \quad (\text{B.132})$$

Para el caso de $\partial D/\partial \omega$ guardaremos solo la parte real ya que la parte imaginaria contribuye poco a la parte real de D_r :

$$D_r + iD_i + i \left(\frac{\partial D_r}{\partial \omega} + i \frac{\partial D_i}{\partial \omega} \right) \gamma = 0 \quad (\text{B.133})$$

$$\underbrace{D_r - \frac{\partial D_i}{\partial \omega} \gamma}_{\heartsuit} + i \underbrace{\left(D_i + \frac{\partial D_r}{\partial \omega} \gamma \right)}{\spadesuit} = 0 \quad (\text{B.134})$$

Donde cada llave deben ser por separado igual a cero, para la primera llave:

$$\heartsuit \rightarrow D_r = \frac{\partial D_i}{\partial \omega} \gamma \quad (\text{B.135})$$

Para el caso anterior habíamos mencionado que la derivada de la parte imaginaria de $D(k, -i\omega)$ es despreciable, además multiplicado con γ que habíamos asumido pequeño en comparación a la frecuencia del modo en cuestión, por lo tanto:

$$D_r = 0 \quad (\text{B.136})$$

Ahora para el caso de la segunda llave:

$$\spadesuit \rightarrow D_i = -\frac{\partial D_r}{\partial \omega} \gamma \quad (\text{B.137})$$

Eso nos permite escribir una expresión para γ

$$\gamma = \frac{-D_i}{\partial D_r / \partial \omega} \quad (\text{B.138})$$

Para poder evaluar D_r y D_i usaremos la relación de Plemelj, sobre la relación de dispersión para $D_{k,i\omega}$, esto corresponde a:

$$D(k, -i\omega) = 1 - \frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{0,s}(v_{\parallel})}{v_{\parallel} - \frac{p \pm \omega_{c,s}}{k_{\parallel}}} dv_{\parallel} \quad (\text{B.139})$$

Así:

$$D_r = 1 - \frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_{0,s}(v_{\parallel})}{v_{\parallel} - \frac{\omega \pm \omega_{c,s}}{k_{\parallel}}} dv_{\parallel} \quad (\text{B.140})$$

$$D_i = -\pi \frac{k}{|k|} \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2} G_{0,s}(v_{\parallel}) \Big|_{v_{\parallel}=v_{\parallel, res}} \quad (\text{B.141})$$

Donde $v_{\parallel, res} = \frac{\omega \pm \omega_{c,s}}{k_{\parallel}}$

Así, la tasa de crecimiento:

$$\gamma = \frac{-D_i}{\partial D_r / \partial \omega} = \pi \frac{k/|k|}{\partial D_r / \partial \omega} \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2} G_{0,s}(v_{\parallel}) \Big|_{v_{\parallel}=v_{\parallel, res}} \quad (\text{B.142})$$

Recordemos:

$$G_{0,s}(v_{\parallel}) = \frac{\omega}{k_{\parallel}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} \pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} - \int_0^{+\infty} \left(v_{\parallel} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \right) \pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} \quad (\text{B.143})$$

Podemos integrar por partes el primer termino de la ecuación anterior:

$$G_{0,s}(v_{\parallel}) = -\frac{\omega}{k_{\parallel}} \int_0^{+\infty} F_{0,s} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} - \int_0^{+\infty} \left(v_{\parallel} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \right) \pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} \quad (\text{B.144})$$

Así:

$$\gamma = \pi \frac{1}{\partial D_r / \partial \omega} \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2} \left[-\frac{\omega}{k_{\parallel}} \int_0^{+\infty} F_{0,s} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} - \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \int_0^{+\infty} \left(v_{\parallel} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \right) \pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} \right] \Big|_{v_{\parallel}=v_{\parallel, res}} \quad (\text{B.145})$$

Ahora, la forma mas fácil de evaluar esta relación de dispersión, es asumir que el plasma esta frio, a pesar que hicimos todo lo que tiene este capitulo para encontrar las ondas en un plasma caliente.

Para eso tomaremos $F_{0,s}$ como deltas de Dirac.

$$F_{0,s} = \frac{1}{2\pi v_{\perp}} \delta(v_{\perp}) \delta(v_{\parallel}) \quad (\text{B.146})$$

Lo que nos permite evaluar $G_{0,s}$:

$$G_{0,s} = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\omega}{k_{\parallel}} - v_{\parallel} \right] \pi v_{\perp}^2 \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\perp}} dv_{\perp} + \int_0^{+\infty} v_{\perp}^3 \frac{\partial F_{0,s}}{\partial v_{\parallel}} \pi dv_{\perp} \quad (\text{B.147})$$

Podemos integrar por partes nuevamente:

$$G_{0,s} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \left[\left(\frac{\omega}{k_{\parallel}} - v_{\parallel} \right) \pi v_{\perp}^2 \right] F_{0,s} dv_{\perp} + \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} (v_{\perp}^3 \pi) F_{0,s} dv_{\perp} \quad (\text{B.148})$$

Vemos que el segundo termino es nulo por la derivada en v_{\parallel} , así:

$$G_{0,s} = - \left(\frac{\omega}{k_{\parallel}} - v_{\parallel} \right) \delta(v_{\parallel}) \quad (\text{B.149})$$

Remplazando esta expresión en la relación de dispersión B,140, resolveremos para la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{- \left(\frac{\omega}{k_{\parallel}} - v_{\parallel} \right) \delta(v_{\parallel})}{v_{\parallel} - \frac{\omega \pm \omega_{c,s}}{k_{\parallel}}} dv_{\parallel} = \frac{-\frac{\omega}{k_{\parallel}}}{-\frac{\omega \pm \omega_{c,s}}{k_{\parallel}}} = \frac{\omega}{\omega \pm \omega_{c,s}} \quad (\text{B.150})$$

Ahora podemos ignorar el movimiento de los iones ya que al ser mas masivos, tienen valores para ω_c y ω_p mucho menores que los electrones, lo que nos permite despreciarlos, tomaremos el caso (-), así:

$$D_r = -\frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega} + \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} = 0 \quad (\text{B.151})$$

Donde también despreciamos la unidad en B,140, esta última ecuación nos permite despear k_{\parallel} :

$$k_{\parallel} = \frac{\omega_p \omega^{1/2}}{c(\omega_c - \omega)^{1/2}} \quad (\text{B.152})$$

Así podemos evaluar $v_{\parallel, res}$

$$v_{\parallel, res} = -c \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \frac{(\omega_c - \omega)^{3/2}}{\omega^{1/2} \omega_p} \quad (\text{B.153})$$

Lo que nos permite apreciar que $v_{\parallel, res}$ y k_{\parallel} tienen signos contrarios.