



Mercados Habitacionales con Preferencias Incompletas

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN ECONOMÍA**

**Alumno: Emilio Alejandro Guamán Maldonado
Profesor Guía: Juan Pablo Torres-Martínez**

Santiago, Julio 2022

Mercados Habitacionales con Preferencias Incompletas ^{*}

Emilio Guamán Maldonado ^{**}

Universidad de Chile

Julio 2022

Resumen

En esta tesis se estudian modelos de asignación de bienes indivisibles entre individuos que no necesariamente saben comparar todas las alternativas disponibles, pues tienen preferencias incompletas. Se examinan y caracterizan diversos conceptos de solución que son estables a desvíos grupales.

1. Introducción

La teoría de emparejamientos unilaterales se enfoca en la asignación/redistribución de bienes indivisibles entre individuos. En este contexto, existen tres modelos clásicos en los cuales los agentes tienen preferencias definidas sobre el conjunto de objetos y las reasignaciones/redistribuciones se hacen sin transferencias: el mercado habitacional de Shapley y Scarf (1974) y los modelos de asignación habitacional de Hylland y Zeckhauser (1979) y Abdulkadiroğlu y Sönmez (1999). En el modelo de Shapley y Scarf (1974), cada agente es propietario de una casa y puede intercambiarla por otra propiedad. Este modelo se puede aplicar a la reasignación de trabajadores en oficinas o a la redistribución de espacios de parqueo. En el modelo de Hylland y Zeckhauser (1979) no existen propietarios, mientras que en el modelo de Abdulkadiroğlu y Sönmez (1999) coexisten propietarios y entrantes. Estos dos modelos se pueden aplicar para la asignación de cursos en universidades o cupos en residencias universitarias, respectivamente.

Los modelos anteriores asumen que las preferencias de los individuos son completas, transitivas y estrictas. Gracias a estas propiedades, consiguen asegurar la existencia de algoritmos que implementan soluciones estables y/o eficientes en la presencia de información incompleta. Por ejemplo, en el contexto del modelo de Shapley y Scarf (1974), David Gale propuso el Algoritmo *Top Trading Cycles* (TTC) como mecanismo directo para obtener redistribuciones de casas. Este algoritmo obtiene la única asignación en el *núcleo*, esto es, la única distribución de casas tal que ningún grupo de agentes puede mejorar saliéndose del mercado para redistribuirse sus asignaciones iniciales.

^{*}Agradezco a mi profesor guía, Juan Pablo Torres-Martínez, por su inmenso apoyo y paciencia a lo largo de todo el proceso. También agradezco a Eduardo Duque por sus valiosos comentarios. Los errores y omisiones son de mi exclusiva responsabilidad.

^{**}eguaman@fen.uchile.cl

Además, TTC es el único mecanismo Pareto eficiente, individualmente racional y *group strategy proof* (Bird (1984), Ma (1994), Sönmez (1999)). En el contexto del modelo de Hylland y Zeckhauser (1979), el Algoritmo *Serial Dictatorship* (SD) es *strategy-proof* e implementa soluciones Pareto eficientes, mientras que en el modelo de Abdulkadiroğlu y Sönmez (1999) el Algoritmo *You Request my House - I get your turn* (YRMH-IGYT) es *strategy-proof* e implementa soluciones Pareto eficientes que son estables a desvíos de grupos de propietarios.

Sin embargo, en diversos contextos en los cuales se asignan/redistribuyen objetos, los individuos pueden no ser capaces de comparar entre dos o más alternativas. Hay al menos dos razones para que esto ocurra. En primer lugar, la incapacidad para comparar dos alternativas puede surgir porque cada una de ellas es caracterizada por diversos atributos y no es claro cómo agregarlos al momento de decidir. Por ejemplo, podría no ser directo comparar entre una casa más grande que queda más lejos del lugar de trabajo respecto a otra casa más pequeña pero que queda más cerca. En segundo lugar, la incapacidad de comparar dos alternativas podría ser una consecuencia de que los agentes no cuentan con información suficiente. Por ejemplo, un individuo podría no saber comparar entre aceites de oliva provenientes de la misma región de España, pero no por eso estar dispuesto a considerarlos indiferentes.

Note que, si un agente no sabe comparar dos alternativas, entonces no está indiferente entre ellas. Esto es, estar indiferente es saber comparar.¹ El siguiente ejemplo, propuesto por Kuvalekar (2020), ilustra de manera muy simple las diferencias entre incompletitud e indiferencia cuando las preferencias son transitivas. Suponga que Anita debe elegir entre tres casas: c_1 , c_2 y c_3 . Ella tiene claro que prefiere la casa c_2 a la casa c_3 . Sin embargo, no sabe comparar el resto de alternativas. Si reemplazamos las incompletitudes en las preferencias por indiferencias, tendríamos que Anita sería indiferente entre c_2 y c_1 y entre c_1 y c_3 . Si las preferencias son transitivas, esto implicaría que Anita está indiferente entre c_2 y c_3 , una contradicción.

La literatura de emparejamientos con preferencias estrictas e incompletas es escasa y se ha enfocado principalmente en modelos de emparejamiento bilateral. Bade (2016), Chambers y Yenmez (2017) y Che, Kim y Kojima (2019) han estudiado estabilidad en modelos en que las preferencias no son completas ni transitivas. Kitahara y Okumura (2021) han incluido preferencias incompletas y transitivas en modelos de elección escolar. Además, Kuvalekar (2020) ha estudiado diversos conceptos de estabilidad coalicional en modelos en que las preferencias son incompletas, estrictas y transitivas.

Como existe un vacío en la literatura respecto a modelos de emparejamiento unilateral en que los individuos no saben comparar todas las alternativas, en esta tesis estudiaremos mercados habitacionales en escenarios donde las preferencias son incompletas, estrictas y transitivas. Esencialmente, extenderemos los modelos de Shapley y Scarf (1974), Hylland y Zeckhauser (1979) y Abdulkadiroğlu y Sönmez (1999) para permitir que los individuos, propietarios o entrantes, no necesariamente sean capaces de comparar todas las alternativas disponibles. Presentaremos y caracterizaremos una

¹En la literatura se han estudiado modelos de asignación de bienes indivisibles permitiendo que exista indiferencia en las preferencias. Cabe notar que, al permitir indiferencias, el núcleo del mercado habitacional de Shapley-Scarf puede ser vacío y no existen mecanismos Pareto eficientes y *group strategy proof* (Ehlers (2002)). Algunos autores han estudiado algoritmos que generalizan TTC para trabajar con indiferencias y tales que, bajo ciertas restricciones en preferencias, los mecanismos directos asociados son Pareto eficientes, individualmente racionales y compatibles con incentivos (Alcalde-Unzu y Molis (2011), Jaramillo y Manjunath (2012), Aziz y De Keijzer (2012)). Otros autores como Ahmad (2021) se enfocan en condiciones suficientes para asegurar que bajo preferencias no estrictas, existan mecanismos que sean *group strategy proof*.

variedad de conceptos de estabilidad y eficiencia que emergen naturalmente en los contextos antes señalados, con especial interés en entender cuando estos conceptos son diferentes de vacío y las relaciones que guardan unos con otros.

Incorporando preferencias incompletas al modelo de Shapley y Scarf (1974), estudiaremos dos conceptos de núcleo, el *núcleo débil* y el *núcleo* C_{\ominus} , en los cuales los grupos de bloqueo solo están compuestos por propietarios que saben comparar su situación antes y después del desvío. Por lo tanto, mientras mayor sea la incompletitud de las preferencias menor será el poder de bloqueo de las coaliciones. Para mostrar que estos núcleos son diferentes de vacío, vincularemos cada preferencia incompleta con sus *completamientos transitivos*, esto es con las formas de completar la preferencia que preservan transitividad. Describiremos un proceso para recuperar todos los completamientos transitivos de una preferencia incompleta, al cual llamaremos *Algoritmo CST* (Teorema 1). A partir de eso, mostraremos que el núcleo débil con preferencias incompletas coincide con la unión de los núcleos débiles para los diferentes completamientos transitivos (Teorema 2). Análogamente, mostraremos que el núcleo C_{\ominus} con preferencias incompletas coincide con la unión de los núcleos de Shapley-Scarf para los diferentes completamientos transitivos (Teorema 2) y que para construir todas las asignaciones dentro del núcleo C_{\ominus} es suficiente combinar el Algoritmo CST con el Algoritmo TTC. Además, mostraremos que cuando hay solamente un agente con preferencias incompletas, las casas que este recibe en el núcleo C_{\ominus} no las sabe comparar entre sí (Proposición 1). Este último resultado se perderá cuando haya más de un agente con preferencias incompletas.

Al considerar el modelo de Hylland y Zeckhauser (1979), mostraremos que el conjunto de asignaciones (débilmente) Pareto eficientes con preferencias incompletas coincide con la unión de los conjuntos de asignaciones (débilmente) Pareto eficientes en los modelos de emparejamiento unilateral en que las preferencias son dadas por los diferentes completamientos transitivos (Teorema 3). Además, podremos construir todas las asignaciones Pareto eficientes de dos maneras: combinando el Algoritmo CST con el Algoritmo SD aplicado a todos los posibles órdenes de prioridad o combinando el Algoritmo CST con el Algoritmo TTC considerando todas las posibles asignaciones iniciales de casas. Por otro lado, al considerar el modelo de Abdulkadiroğlu y Sönmez (1999), mostraremos que el conjunto de asignaciones *óptimas*—asignaciones Pareto eficientes que son estables a desvíos de propietarios— con preferencias incompletas coincide con la unión de los conjuntos de asignaciones óptimas para los diferentes completamientos transitivos (Teorema 4). Como consecuencia de esto, obtendremos todas las asignaciones óptimas combinando el Algoritmo CST con el Algoritmo YRMH-IGYT.

En el contexto de Shapley y Scarf (1974), para permitir que no todos los miembros de una coalición que bloquea una asignación sean obligados a saber comparar su situación antes y después del desvío, propondremos dos conceptos adicionales de núcleo: el *núcleo* C_{\otimes} y *núcleo fuerte*. Mostraremos que ambos conjuntos pueden ser vacíos. Más aún, el núcleo fuerte será vacío siempre que los núcleos C_{\ominus} y C_{\otimes} sean disjuntos.

Dado lo anterior, con el objetivo de tener un concepto de estabilidad coalicional que refine al núcleo débil y que al mismo tiempo sea siempre diferente de vacío, adaptaremos al contexto de Shapley y Scarf (1974) el *Compromise Core* propuesto por Kuvalekar (2020) para mercados matrimoniales con preferencias incompletas. Para poder explicar este concepto de estabilidad es útil introducir dos criterios de dominancia. Dadas asignaciones μ y η , diremos que μ *domina* a η si partiendo de η se puede llegar a μ al permitir que una coalición desvíe para mejorar a alguno de sus miembros, sin perjudicar a aquellos que saben comparar su situación antes y después del desvío. Además, diremos

que μ cubre a η si μ domina a η y a todas aquellas asignaciones que son dominadas por η . Entonces, el Compromise Core es el conjunto de asignaciones en el núcleo débil que no pueden ser cubiertas por ninguna otra asignación. Análogo a Kuvalekar (2020), demostraremos que el Compromise Core es diferente de vacío (Teorema 5). Además, restringiendo los acuerdos de las coaliciones a aquellos en que sus miembros forman un único ciclo de intercambio, propondremos un refinamiento del Compromise Core que continúa siendo siempre diferente de vacío.

Finalmente, demostraremos que el núcleo débil y el núcleo C_{\ominus} crecen débilmente cuando aumenta el grado de incompletitud de las preferencias. Sin embargo, a través de un ejemplo, mostraremos que el núcleo C_{\otimes} , el núcleo fuerte y el Compromise Core no necesariamente crecen cuando aumenta la incompletitud de las preferencias.

La organización de esta tesis es como sigue. La Sección 2 presenta el modelo de Shapley-Scarf con preferencias incompletas, transitivas y estrictas. La Sección 3 introduce el *Algoritmo CST*, sus propiedades y su aplicación a un ejemplo. La Sección 4 presenta resultados para los núcleos definidos en la Sección 2, enfatizando el estudio de cuales de ellos son no-vacíos y con un breve comentario sobre las propiedades del núcleo débil y el núcleo C_{\ominus} . La Sección 5 extiende varios de los resultados de la Sección 4 a los modelos de Hylland-Zeckhauser y Abdulkadiroglu-Sonmez. La Sección 6 introduce el Compromise Core y estudia sus propiedades en el contexto del modelo de Shapley-Scarf. La Sección 7 discute cómo reaccionan los núcleos a aumentos en la incompletitud de las preferencias. La sección 8 presenta algunas conclusiones.

2. Modelo

Considere un mercado habitacional de Shapley-Scarf $[N, C, >]$ caracterizado por un conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de individuos, un conjunto $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ de casas y un perfil de preferencias $> = (>_i)_{i \in N}$ de los individuos por las casas. Supondremos que la casa c_i es propiedad del individuo i , el cual tiene preferencias $>_i$ definidas sobre C tal que $c_j >_i c_k$ y $c_k >_i c_\ell$ implican que $c_j >_i c_\ell$ y no existen dos casas que el individuo i considere indiferentes.

A diferencia del modelo clásico de Shapley-Scarf, supondremos que las preferencias $(>_i)_{i \in N}$ no necesariamente son completas. Esto es, un agente i podría no saber comparar dos casas c_k y c_j , con $k \neq j$, lo cual denotaremos por $c_j \otimes_i c_k$.

Una *asignación habitacional* es caracterizada por una función biyectiva $\mu : N \rightarrow C$ que asocia a cada individuo una casa diferente. Denotaremos por \mathcal{A} al conjunto de asignaciones habitacionales.

Una coalición es un subconjunto no-vacío de N . Dada una coalición T , denotaremos por $e(T)$ al conjunto de casas que son propiedad de los individuos en T . Además, nos referiremos a cualquier función biyectiva $\sigma : T \rightarrow e(T)$ como un *acuerdo*. Por conveniencia de notación, en ocasiones identificaremos un acuerdo $\sigma : T \rightarrow e(T)$ con la familia de pares $(i, \sigma(i))$, con $i \in T$.

Consideraremos los siguientes conceptos de bloqueo y estabilidad para asignaciones habitacionales:

- **Núcleo Débil** $C_W(>)$. Una asignación habitacional μ es *fuertemente bloqueada* por una coalición T si existe un acuerdo $\sigma : T \rightarrow e(T)$ tal que $\sigma(i) >_i \mu(i)$ para todo $i \in T$. Una asignación habitacional μ está en el *núcleo débil*, lo que denotaremos como $\mu \in C_W(>)$, si no existe ninguna coalición que bloquee fuertemente μ .

- **Núcleo $C_{\ominus}(\succ)$.** Una asignación habitacional μ es \ominus -bloqueada por una coalición T si existe un acuerdo $\sigma : T \rightarrow e(T)$ tal que:

- (i) Para todo $i \in T$ tenemos que $\sigma(i) \succ_i \mu(i)$ ó $\sigma(i) = \mu(i)$.
- (ii) Existe $i \in T$ tal que $\sigma(i) \succ_i \mu(i)$.

Una asignación habitacional μ está en el *núcleo* $C_{\ominus}(\succ)$ si no existe ninguna coalición que \ominus -bloquee μ .

- **Núcleo $C_{\otimes}(\succ)$.** Una asignación habitacional μ es \otimes -bloqueada por una coalición T si existe un acuerdo $\sigma : T \rightarrow e(T)$ tal que:

- (i) Para todo $i \in T$ tenemos que $\sigma(i) \succ_i \mu(i)$ ó $\sigma(i) \otimes_i \mu(i)$.
- (ii) Existe $i \in T$ tal que $\sigma(i) \succ_i \mu(i)$.

Una asignación habitacional μ está en el *núcleo* $C_{\otimes}(\succ)$ si no existe ninguna coalición que \otimes -bloquee μ .

- **Núcleo Fuerte $C_S(\succ)$.** Una asignación habitacional μ es *débilmente bloqueada* por una coalición T si existe un acuerdo $\sigma : T \rightarrow e(T)$ tal que:

- (i) Para todo $i \in T$ tenemos que $\sigma(i) \succ_i \mu(i)$, $\sigma(i) = \mu(i)$ ó $\sigma(i) \otimes_i \mu(i)$.
- (ii) Existe $i \in T$ tal que $\sigma(i) \succ_i \mu(i)$.

Una asignación habitacional μ está en el *núcleo fuerte*, lo que denotaremos como $\mu \in C_S(\succ)$, si no existe ninguna coalición que bloquee débilmente μ .

De las definiciones, tenemos las siguientes relaciones entre los núcleos:

$$C_S \subseteq C_{\ominus} \subseteq C_W \quad \wedge \quad C_S \subseteq C_{\otimes} \subseteq C_W.$$

Lo que *a priori* no es claro es la relación entre C_{\ominus} y C_{\otimes} . Denotaremos por $\mathbb{K}_{\ominus}(\succ)$ y $\mathbb{K}_W(\succ)$ a los núcleos $C_{\ominus}(\succ)$ y $C_W(\succ)$ en el caso particular en que \succ es un perfil de preferencias completo.

El siguiente ejemplo sirve para ilustrar gráficamente las relaciones entre los núcleos hasta ahora propuestos.

Ejemplo 1. Considere un mercado de Shapley-Scarf $[N, C, (\succ_i)_{i \in N}]$ con cuatro agentes, donde las preferencias son caracterizadas por:

$$\begin{aligned} 1 : & \quad c_2 \succ_1 c_3 \succ_1 c_1, \quad c_4 \succ_1 c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_4. \\ 2 : & \quad c_1 \succ_2 c_2 \succ_2 c_3 \succ_2 c_4. \\ 3 : & \quad c_1 \succ_3 c_4 \succ_3 c_3 \succ_3 c_2. \\ 4 : & \quad c_2 \succ_4 c_4 \succ_4 c_1, \quad c_2 \succ_4 c_3 \succ_4 c_1, \quad c_3 \otimes_4 c_4. \end{aligned}$$

El objetivo es calcular los núcleos para este ejemplo. Es evidente que existen veinticuatro posibles asignaciones. Podemos descartar varias de ellas notando lo siguiente:

- Cualquier asignación donde el agente 2 obtiene la casa c_3 ó c_4 no es individualmente racional en el sentido que es fuertemente bloqueada por la coalición $\{2\}$ a través del acuerdo $[(2, c_2)]$.

- Cualquier asignación donde el agente 3 obtiene la casa c_2 no es individualmente racional en el sentido que es fuertemente bloqueada por la coalición $\{3\}$ a través del acuerdo $[(3, c_3)]$.
- Cualquier asignación donde el agente 4 obtiene la casa c_1 no es individualmente racional en el sentido que es fuertemente bloqueada por la coalición $\{4\}$ a través del acuerdo $[(4, c_4)]$.
- Las asignaciones $[(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3), (4, c_4)]$ y $[(1, c_1), (2, c_2), (3, c_4), (4, c_3)]$ son fuertemente bloqueadas por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$.
- La asignación $[(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1), (4, c_4)]$ es fuertemente bloqueada por la coalición $\{1, 2, 4\}$ a través del acuerdo $[(1, c_4), (2, c_1), (4, c_2)]$.

Como cualquiera de las asignaciones que cumplan las características anteriores tienen coaliciones de bloqueo fuerte, no estarán en C_W . Como C_W contiene siempre al resto de núcleos, ninguna de dichas asignaciones estará en ellos.

Esto nos deja por analizar solamente las siguientes asignaciones:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3), (4, c_4)], \\ \mu_2 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_4), (4, c_3)], \\ \mu_3 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_4), (4, c_2)], \\ \mu_4 &= [(1, c_4), (2, c_1), (3, c_3), (4, c_2)], \\ \mu_5 &= [(1, c_4), (2, c_2), (3, c_1), (4, c_3)].\end{aligned}$$

La asignación μ_1 está en C_W y en C_\ominus , pues no es posible encontrar coaliciones de bloqueo fuerte ni de \ominus -bloqueo. Sin embargo, μ_1 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{3, 4\}$ a través del acuerdo $[(3, c_4), (4, c_3)]$. Por tanto, $\mu_1 \notin C_\otimes$, lo que implica que $\mu_1 \notin C_S$.

Por otro lado, μ_2 está en C_W , C_\ominus y en C_\otimes , pues no es posible encontrar coaliciones de bloqueo fuerte, \ominus -bloqueo o \otimes -bloqueo. Sin embargo, $\mu_2 \notin C_S$, pues es débilmente bloqueada por la coalición $\{1, 2, 4\}$ a través del acuerdo $[(1, c_4), (2, c_1), (4, c_2)]$. Esto ilustra que pueden haber asignaciones que estén en la intersección entre C_\ominus y C_\otimes , pero que no estén en C_S .

Tenemos que $\mu_3 \in C_W$ y $\mu_3 \in C_\otimes$, pues no es posible encontrar coaliciones de bloqueo fuerte o de \otimes -bloqueo. Sin embargo, $\mu_3 \notin C_\ominus$, pues esta asignación es \ominus -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Esto implica que $\mu_3 \notin C_S$.

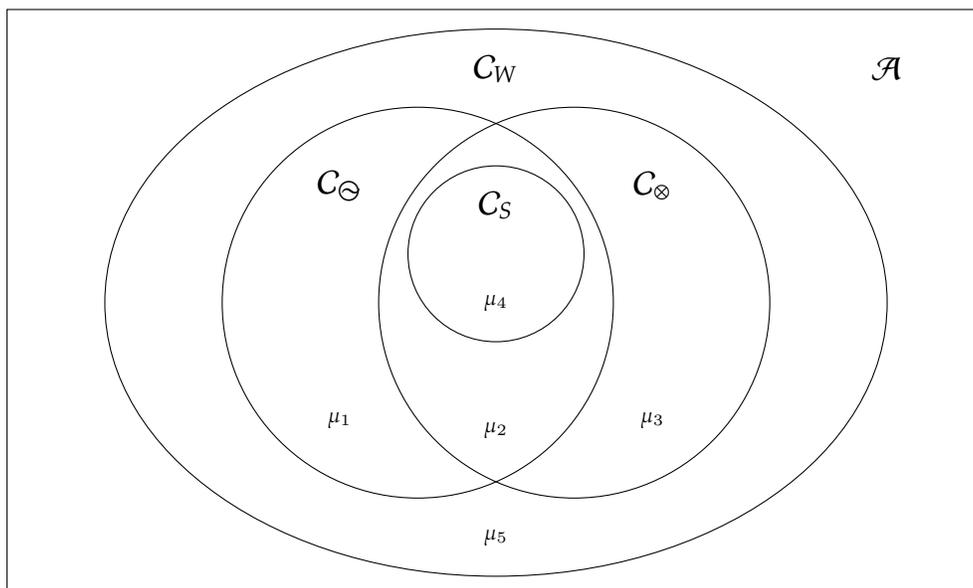
La asignación μ_4 no tiene coaliciones de bloqueo de ningún tipo, por lo que está en los cuatro núcleos.

Finalmente, $\mu_5 \in C_W$ pues no es posible encontrar coaliciones de bloqueo fuerte. Note que $\mu_5 \notin C_\ominus$, pues es \ominus -bloqueada por la coalición $\{1, 2, 4\}$ a través del acuerdo $[(1, c_4), (4, c_2), (2, c_1)]$. Además, $\mu_5 \notin C_\otimes$, pues es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Por ende, $\mu_5 \notin C_S$.

Concluimos entonces que los núcleos son tales que:

$$\begin{aligned}C_W &= \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}, & C_\ominus &= \{\mu_1, \mu_2, \mu_4\}, \\ C_\otimes &= \{\mu_2, \mu_3, \mu_4\}, & C_S &= \{\mu_4\}.\end{aligned}$$

El ejemplo anterior nos permite asegurar que el siguiente diagrama de Venn es compatible con nuestros conceptos de núcleo:



El diagrama anterior ilustra el caso particular del Ejemplo 1 en que ni el núcleo C_{\otimes} ni el núcleo C_S son conjuntos vacíos. Los Ejemplos 6 y 7 (presentados más adelante) muestran que esto no tiene por qué ser así. \square

3. El Algoritmo CST

En esta sección discutiremos la extensión de preferencias incompletas a preferencias completas que preservan la información de las preferencias originales y son transitivas. Introduciremos el Algoritmo CST (*Completamiento Secuencial y Transitivo*), que mediante un proceso simple recupera todos los completamientos transitivos de una preferencia incompleta. Como veremos en la siguiente sección, asociar preferencias incompletas a sus completamientos transitivos será fundamental para caracterizar los núcleos C_W y C_{\otimes} .

Diremos que un perfil de preferencias $\widehat{>} = (\widehat{>}_i)_{i \in N}$ es un *completamiento* de $> = (>_i)_{i \in N}$ si, para cada individuo $i \in N$, la relación de preferencias $\widehat{>}_i$ es completa y estricta sobre el conjunto de casas C y cumple la siguiente propiedad: $c >_i c' \implies c \widehat{>}_i c'$.

Note que, no todas las formas de generar preferencias completas aseguran transitividad. Por ejemplo, en un mercado con tres casas, suponga que $c_2 >_1 c_3$, $c_3 \otimes_1 c_1$, $c_2 \otimes_1 c_1$. Entonces, la preferencia $\widehat{>}_1$ que cumple con $c_2 \widehat{>}_1 c_3$, $c_3 \widehat{>}_1 c_1$ y $c_1 \widehat{>}_1 c_2$ es completa y estricta pero no es transitiva.

Diremos que un completamiento $\widehat{>} = (\widehat{>}_i)_{i \in N}$ de $> = (>_i)_{i \in N}$ es *transitivo* si para cada individuo $i \in N$, la relación de preferencias $\widehat{>}_i$ es transitiva.² Denotaremos por $\text{Co}(>)$ al conjunto de todos los completamientos transitivos del perfil de preferencias $> = (>_i)_{i \in N}$.

²En el sentido que $c_j \widehat{>}_i c_k$ y $c_k \widehat{>}_i c_l$ implican que $c_j \widehat{>}_i c_l$.

3.1. Algoritmo CST

Sea P una relación de preferencias estricta e incompleta definida sobre un conjunto finito H . A continuación describiremos el Algoritmo CST (*Completamiento Secuencial y Transitivo*), el cual permite construir una relación de preferencias completa, transitiva y estricta \widehat{P} , que está definida sobre H y cumple la siguiente propiedad: aPb implica $a\widehat{P}b$.

Algoritmo CST

- **Etapa 1:** Para cada $a, b \in H$ tal que aPb , defina $a\widehat{P}b$. Además, defina

$$Z(P) = \{(a, b) \in H \times H : a \otimes_P b\}.$$

- **Etapa 2:** Escoja $(a, b) \in Z(P)$ y elija una de las siguientes alternativas: $a\widehat{P}b$ ó $b\widehat{P}a$.

Etapa 2.1: Si eligió $a\widehat{P}b$ entonces:

- (1) Si existe $c \in H$ tal que cPa y $c \otimes_P b$, defina $c\widehat{P}b$.
- (2) Si existe $c \in H$ tal que bPc y $a \otimes_P c$, defina $a\widehat{P}c$.

Etapa 2.2: Si eligió $b\widehat{P}a$ entonces:

- (1) Si existe $c \in H$ tal que cPb y $c \otimes_P a$, defina $c\widehat{P}a$.
- (2) Si existe $c \in H$ tal que aPc y $b \otimes_P c$, defina $b\widehat{P}c$.

- **Etapa 3:** Elimine del conjunto $Z(P)$ todos los pares (x, y) para los cuales fue definido en la etapa previa que $x\widehat{P}y$ ó $y\widehat{P}x$.
- **Etapa 4:** Repita las Etapas 2 y 3 hasta llegar a que $Z(P) = \emptyset$.

Por construcción, aplicando el Algoritmo CST a un perfil de preferencias incompletas obtenemos un completamiento transitivo, el que dependerá de las decisiones tomadas en cada etapa. El siguiente resultado muestra que todo completamiento transitivo se puede obtener de esa forma.

Teorema 1. Dado un perfil de preferencias incompletas $\succ = (\succ_i)_{i \in N}$, el vector $\widehat{\succ} = (\widehat{\succ}_i)_{i \in N}$ pertenece a $\text{Co}(\succ)$ si y solamente si, para cada $i \in N$, la relación de preferencias $\widehat{\succ}_i$ es uno de los resultados que se obtienen al aplicar el Algoritmo CST a \succ_i .

Demostración. Sabemos que $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)$ si $\widehat{\succ}$ resulta de aplicar el Algoritmo CST. Recíprocamente, suponga que \succ es un perfil de preferencias incompletas y fije $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)$. Mostraremos que para cada individuo $i \in N$, $\widehat{\succ}_i$ puede obtenerse aplicando el Algoritmo CST.

Sea $\widehat{\succ}_i^*$ la preferencia del individuo i que se obtiene al aplicar el Algoritmo CST a \succ_i . Esto es, $\widehat{\succ}_i^*$ se obtiene mediante las siguientes instrucciones:

- (1) Dado $(c_j, c_k) \in C \times C$, si $c_j \succ_i c_k$, defina $c_j \widehat{\succ}_i^* c_k$.
- (2) Dado $(c_j, c_k) \in C \times C$, si $c_k \succ_i c_j$, defina $c_k \widehat{\succ}_i^* c_j$.
- (3) Defina $Z_1(\succ_i) = Z(\succ_i)$. Fije $(c_j, c_k) \in Z_1(\succ_i)$.

(M1) Si $c_j \widehat{>}_i c_k$, defina $c_j \widehat{>}_i^* c_k$. Con ello, $\widehat{>}_i$ y $\widehat{>}_i^*$ coinciden sobre c_j y c_k .

Además, siga estas indicaciones:

(M1.a) Si existe $c_\ell \in C$ tal que $c_\ell >_i c_j$ y $c_\ell \otimes_i c_k$, defina $c_\ell \widehat{>}_i^* c_k$. Note que de existir tal $c_\ell \in C$, la relación de preferencias $\widehat{>}_i$ también debe cumplir $c_\ell \widehat{>}_i c_k$. La razón es que $c_\ell >_i c_j$ implica $c_\ell \widehat{>}_i c_j$ y si se fijase $c_k \widehat{>}_i c_\ell$, se tendría por transitividad que $c_k \widehat{>}_i c_j$. Esto contradice la hipótesis, pues estamos asumiendo que $c_j \widehat{>}_i c_k$. Así, $\widehat{>}_i$ y $\widehat{>}_i^*$ coinciden sobre c_ℓ y c_k , donde c_ℓ es cualquier casa tal que $c_\ell >_i c_j$ y $c_\ell \otimes_i c_k$.

(M1.b) Si existe $c_\ell \in C$ tal que $c_k >_i c_\ell$ y $c_\ell \otimes_i c_j$, defina $c_j \widehat{>}_i^* c_\ell$. Note que de existir tal $c_\ell \in C$, la relación de preferencias $\widehat{>}_i$ también debe cumplir $c_j \widehat{>}_i c_\ell$. La razón es que $c_k >_i c_\ell$ implica $c_k \widehat{>}_i c_\ell$ y si se fijase $c_\ell \widehat{>}_i c_j$, se tendría por transitividad que $c_k \widehat{>}_i c_j$. Esto contradice la hipótesis, pues estamos asumiendo que $c_j \widehat{>}_i c_k$. Así, $\widehat{>}_i$ y $\widehat{>}_i^*$ coinciden sobre c_ℓ y c_j , donde c_ℓ es cualquier casa tal que $c_k >_i c_\ell$ y $c_\ell \otimes_i c_j$.

(M2) Si $c_k \widehat{>}_i c_j$, defina $c_k \widehat{>}_i^* c_j$. Con ello, $\widehat{>}_i$ y $\widehat{>}_i^*$ coinciden sobre c_j y c_k .

Además, siga las siguientes indicaciones:

(M2.a) Si existe $c_\ell \in C$ tal que $c_\ell >_i c_k$ y $c_\ell \otimes_i c_j$, defina $c_\ell \widehat{>}_i^* c_j$. Note que de existir tal $c_\ell \in C$, la relación de preferencias $\widehat{>}_i$ también debe cumplir $c_\ell \widehat{>}_i c_j$. La razón es que $c_\ell >_i c_k$ implica $c_\ell \widehat{>}_i c_k$ y si se fijase $c_j \widehat{>}_i c_\ell$, se tendría por transitividad que $c_j \widehat{>}_i c_k$. Esto contradice la hipótesis, pues estamos asumiendo que $c_k \widehat{>}_i c_j$. Así, $\widehat{>}_i$ y $\widehat{>}_i^*$ coinciden sobre c_ℓ y c_j , donde c_ℓ es cualquier casa tal que $c_\ell >_i c_k$ y $c_\ell \otimes_i c_j$.

(M2.b) Si existe $c_\ell \in C$ tal que $c_j >_i c_\ell$ y $c_\ell \otimes_i c_k$, defina $c_k \widehat{>}_i^* c_\ell$. Note que de existir tal $c_\ell \in C$, la relación de preferencias $\widehat{>}_i$ también debe cumplir $c_k \widehat{>}_i c_\ell$. La razón es que $c_j >_i c_\ell$ implica $c_j \widehat{>}_i c_\ell$ y si se fijase $c_\ell \widehat{>}_i c_k$, se tendría por transitividad que $c_j \widehat{>}_i c_k$. Esto contradice la hipótesis, pues estamos suponiendo que $c_k \widehat{>}_i c_j$. Así, $\widehat{>}_i$ y $\widehat{>}_i^*$ coinciden sobre c_ℓ y c_k , donde c_ℓ es cualquier casa tal que $c_j >_i c_\ell$ y $c_\ell \otimes_i c_k$.

(4) Sea $Z_2(>_i)$ el conjunto de pares $(c_r, c_s) \in Z_1(>_i)$ tal que no se cumple $c_r \widehat{>}_i^* c_s$ ó $c_s \widehat{>}_i^* c_r$. Si $Z_2(>_i)$ es diferente de vacío, elija $(c_j, c_k) \in Z_1(>_i)$. Como $\widehat{>} \in \text{Co}(>)$, tenemos que $c_j \widehat{>}_i c_k$ ó $c_k \widehat{>}_i c_j$. Si $c_j \widehat{>}_i c_k$, defina $c_j \widehat{>}_i^* c_k$ y siga las instrucciones detalladas en (M1). Si $c_k \widehat{>}_i c_j$, defina $c_k \widehat{>}_i^* c_j$ y siga las instrucciones detalladas en (M2).

(5) Repita el proceso anterior durante T etapas hasta conseguir $Z_T(>_i) = \emptyset$.

Note que lo anterior asegura que $\widehat{>}_i = \widehat{>}_i^*$. Por lo tanto, el perfil de preferencias $\widehat{>}$ se puede obtener aplicando el Algoritmo CST. □

Ejemplo 2. Para ilustrar la aplicación del Algoritmo CST, suponga que en un mercado con cinco casas las preferencias del agente 1 son:

$$c_3 >_1 c_2 >_1 c_1, \quad c_4 >_1 c_2 >_1 c_1, \quad c_5 >_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_5, \quad c_4 \otimes_1 c_5, \quad c_4 \otimes_1 c_3, \quad c_5 \otimes_1 c_3.$$

Dado que hay cuatro pares de casas que el agente 1 no sabe comparar, hay dieciséis formas de completar estas preferencias. Sin embargo, solamente ocho de esas formas preservan la transitividad. La Figura 1 (ver página siguiente) muestra cómo mediante la aplicación del Algoritmo CST a las preferencias del agente 1 podemos recuperar los ocho completamientos transitivos. □

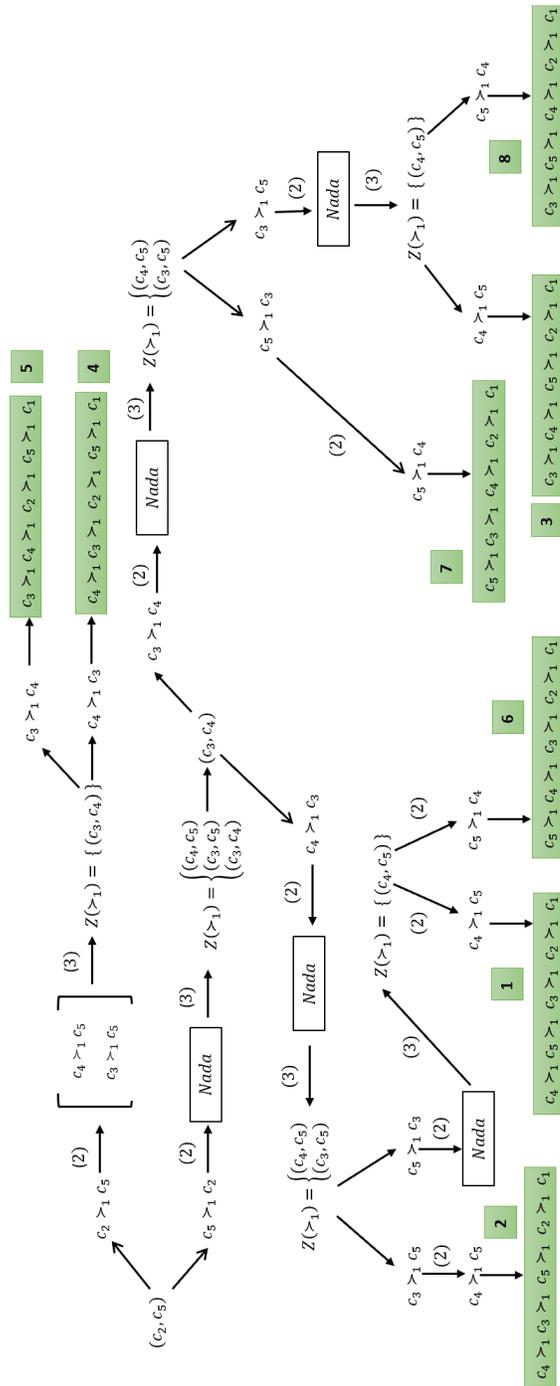


Figura 1: Aplicación del Algoritmo CST al Ejemplo 2

4. Caracterización de los núcleos

En esta sección se exploran algunas propiedades de los conceptos de estabilidad hasta ahora definidos. Primero, mostramos que el núcleo débil y el núcleo C_{\ominus} con preferencias incompletas coinciden, respectivamente, con la unión de los núcleos débiles y los núcleos de Shapley-Scarf para los diferentes completamientos transitivos. Segundo, mostramos que refinamientos sobre el núcleo débil y el núcleo C_{\ominus} pueden ser vacíos y que si hay un solo agente con preferencias incompletas, este recibe en el núcleo C_{\ominus} casas que no sabe comparar entre sí. Finalmente, demostramos con ejemplos que el núcleo C_{\otimes} y el núcleo C_S pueden ser vacíos.

Ejemplo 3. Considere un mercado de Shapley-Scarf $[N, C, (>_i)_{i \in N}]$ con cuatro agentes, donde las preferencias son caracterizadas por:

$$\begin{aligned} 1 : & \quad c_2 >_1 c_3 >_1 c_1, \quad c_4 >_1 c_3 >_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_4. \\ 2 : & \quad c_1 >_2 c_2 >_2 c_3 >_2 c_4. \\ 3 : & \quad c_1 >_3 c_4 >_3 c_3 >_3 c_2. \\ 4 : & \quad c_2 >_4 c_4 >_4 c_1, \quad c_2 >_4 c_3 >_4 c_1, \quad c_3 \otimes_4 c_4. \end{aligned}$$

Note que las preferencias son las mismas que las del Ejemplo 1. Existen cuatro completamientos transitivos. Estos se detallan en la primera columna del Cuadro 1 (ver página siguiente). En la segunda columna de dicho cuadro se muestran los núcleos \mathbb{K}_W y \mathbb{K}_{\ominus} para cada completamiento transitivo. Note que cualquier coalición de bloqueo fuerte bajo las preferencias originales sigue siendo una coalición de bloqueo fuerte bajo cualquier completamiento transitivo. Por ende, y recordando los cálculos hechos para el Ejemplo 1, para calcular los núcleos \mathbb{K}_W y \mathbb{K}_{\ominus} para los diferentes completamientos transitivos, solo debemos analizar las siguientes asignaciones:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3), (4, c_4)], \\ \mu_2 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_4), (4, c_3)], \\ \mu_3 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_4), (4, c_2)], \\ \mu_4 &= [(1, c_4), (2, c_1), (3, c_3), (4, c_2)], \\ \mu_5 &= [(1, c_4), (2, c_2), (3, c_1), (4, c_3)]. \end{aligned}$$

Note que μ_2 y μ_5 no son individualmente racionales cuando las preferencias vienen dadas por los completamientos transitivos $\bar{>}$ y $>^*$, pues estas asignaciones son fuertemente bloqueadas por la coalición $\{4\}$ a través del acuerdo $[(4, c_4)]$. Por ende, $\mu_2, \mu_5 \notin \mathbb{K}_W(\bar{>})$ y $\mu_2, \mu_5 \notin \mathbb{K}_W(>^*)$. Las asignaciones μ_1, μ_3 y μ_4 no tienen coaliciones de bloqueo fuerte bajo estos completamientos. Por ende, $\mathbb{K}_W(\bar{>}) = \mathbb{K}_W(>^*) = \{\mu_1, \mu_3, \mu_4\}$.

Cuando las preferencias vienen dadas por los completamientos transitivos $>'$ y $>^\circ$, la asignación μ_1 es fuertemente bloqueada por la coalición $\{3, 4\}$ a través del acuerdo $[(3, c_4), (4, c_3)]$. Sigue entonces que $\mu_1 \notin \mathbb{K}_W(>')$ y $\mu_1 \notin \mathbb{K}_W(>^\circ)$. Las asignaciones μ_2, μ_3 y μ_4 no tienen coaliciones de bloqueo fuerte bajo estos completamientos. Además, la asignación μ_5 no tiene coaliciones de bloqueo fuerte cuando las preferencias vienen dadas por $>^\circ$. Finalmente, cuando las preferencias vienen dadas por el completamiento transitivo $>'$, la asignación μ_5 es fuertemente bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Concluimos entonces que $\mathbb{K}_W(>') = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4\}$ y $\mathbb{K}_W(>^\circ) = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$.

En la segunda columna del Cuadro 1 se muestran los núcleos \mathbb{K}_W para cada completamiento transitivo.

Por los resultados de Shapley y Scarf (1974) y Roth y Postlewaite (1977), sabemos que cuando las preferencias son completas y estrictas, aplicando el Algoritmo TTC obtenemos la única asignación en el núcleo \mathbb{K}_Θ . Por ende, podemos obtener el núcleo \mathbb{K}_Θ para cada completamiento transitivo al aplicar TTC a cada completamiento transitivo. Esto también se muestra en la segunda columna del Cuadro 1.

Completamiento transitivo	\mathbb{K}_W y \mathbb{K}_Θ
$\begin{array}{l} c_2 \succ_1 c_4 \succ_1 c_3 \succ_1 c_1 \\ c_1 \succ_2 c_2 \succ_2 c_3 \succ_2 c_4 \\ c_1 \succ_3 c_4 \succ_3 c_3 \succ_3 c_2 \\ c_2 \succ_4 c_4 \succ_4 c_3 \succ_4 c_1 \end{array}$	$\begin{array}{l} \mathbb{K}_W(\succ) = \{\mu_1, \mu_3, \mu_4\} \\ \mathbb{K}_\Theta(\succ) = \{\mu_1\} \end{array}$
$\begin{array}{l} c_4 \succ_1^* c_2 \succ_1^* c_3 \succ_1^* c_1 \\ c_1 \succ_2^* c_2 \succ_2^* c_3 \succ_2^* c_4 \\ c_1 \succ_3^* c_4 \succ_3^* c_3 \succ_3^* c_2 \\ c_2 \succ_4^* c_4 \succ_4^* c_3 \succ_4^* c_1 \end{array}$	$\begin{array}{l} \mathbb{K}_W(\succ^*) = \{\mu_1, \mu_3, \mu_4\} \\ \mathbb{K}_\Theta(\succ^*) = \{\mu_4\} \end{array}$
$\begin{array}{l} c_2 \succ_1' c_4 \succ_1' c_3 \succ_1' c_1 \\ c_1 \succ_2' c_2 \succ_2' c_3 \succ_2' c_4 \\ c_1 \succ_3' c_4 \succ_3' c_3 \succ_3' c_2 \\ c_2 \succ_4' c_3 \succ_4' c_4 \succ_4' c_1 \end{array}$	$\begin{array}{l} \mathbb{K}_W(\succ') = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4\} \\ \mathbb{K}_\Theta(\succ') = \{\mu_2\} \end{array}$
$\begin{array}{l} c_4 \succ_1^\circ c_2 \succ_1^\circ c_3 \succ_1^\circ c_1 \\ c_1 \succ_2^\circ c_2 \succ_2^\circ c_3 \succ_2^\circ c_4 \\ c_1 \succ_3^\circ c_4 \succ_3^\circ c_3 \succ_3^\circ c_2 \\ c_2 \succ_4^\circ c_3 \succ_4^\circ c_4 \succ_4^\circ c_1 \end{array}$	$\begin{array}{l} \mathbb{K}_W(\succ^\circ) = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\} \\ \mathbb{K}_\Theta(\succ^\circ) = \{\mu_4\} \end{array}$

Cuadro 1: Núcleos \mathbb{K}_W y \mathbb{K}_Θ para cada completamiento transitivo del Ejemplo 2

Como las preferencias de este ejemplo son las mismas que en el Ejemplo 1, recordemos que tenemos que $C_W = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$ y $C_\Theta = \{\mu_1, \mu_2, \mu_4\}$. Notemos entonces que los núcleos C_W y C_Θ coinciden, respectivamente, con la unión de los núcleos \mathbb{K}_W y \mathbb{K}_Θ correspondientes a los cuatro completamientos transitivos. Con este ejemplo también se puede ver que a diferencia del caso con preferencias completas y estrictas, el núcleo C_Θ no necesariamente es un singleton cuando las preferencias son incompletas. \square

El siguiente resultado muestra que estas últimas observaciones no son casualidad y se cumplen en cualquier mercado habitacional de Shapley-Scarf.

Teorema 2: Dado un perfil de preferencias \succ donde hay agentes con preferencias incompletas, se tiene que

$$C_W(\succ) = \bigcup_{\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)} \mathbb{K}_W(\widehat{\succ}) \quad \text{y} \quad C_\Theta(\succ) = \bigcup_{\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)} \mathbb{K}_\Theta(\widehat{\succ}).$$

Demostración. Haremos la demostración para la relación que involucra al núcleo $C_\Theta(\succ)$. La demostración para el núcleo $C_W(\succ)$ es análoga y se detalla en el Anexo.

Suponga que $\mu \in \mathbb{K}_\Theta(\widehat{\succ})$ para algún completamiento transitivo $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)$. Por construcción, si $\mu \notin C_\Theta(\succ)$, existe una coalición de Θ -bloqueo y entonces tendríamos $\mu \notin \mathbb{K}_\Theta(\widehat{\succ})$ debido a esa misma coalición de Θ -bloqueo. Así, como $\mu \in \mathbb{K}_\Theta(\widehat{\succ})$, se tiene que $\mu \in C_\Theta(\succ)$.

Ahora suponga que $\mu \in C_\Theta(\succ)$. Dada una coalición T , definimos:

$$\mathcal{F}(T) = \{\sigma : T \rightarrow e(T) \mid \sigma \text{ es biyectiva}\}$$

Es decir, $\mathcal{F}(T)$ es el conjunto de redistribuciones de casas σ (acuerdos) entre los individuos de T . Dado $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)$, sea:

$$\Omega_\mu(\widehat{\succ}) = \{(T, \sigma) : T \text{ es una coalición, } \sigma \in \mathcal{F}(T), T \Theta\text{-bloquea } \mu \text{ a través del acuerdo } \sigma \text{ cuando las preferencias son } \widehat{\succ}\}.$$

Es decir, $\Omega_\mu(\widehat{\succ})$ es el conjunto de pares (T, σ) tales que la coalición T Θ -bloquea μ vía una redistribución de casas (acuerdos) σ entre los individuos de T cuando las preferencias vienen dadas por el completamiento transitivo $\widehat{\succ}$.

Vamos a probar que, dado cualquier $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)$, para todo $(T, \sigma) \in \Omega_\mu(\widehat{\succ})$ existe $i \in T$ tal que $\mu(i) \otimes_i \sigma(i)$. Por contradicción, supongamos que dado $(T, \sigma) \in \Omega_\mu(\widehat{\succ})$, todo $i \in T$ puede comparar $\mu(i)$ con $\sigma(i)$. Sigue entonces que para todo $i \in T$, tenemos $\sigma(i) \widehat{\succ}_i \mu(i)$ ó $\sigma(i) = \mu(i)$, y existe $j \in T$ tal que $\sigma(j) \widehat{\succ}_j \mu(j)$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $\sigma(i) \widehat{\succ}_i \mu(i)$, para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$ y que $\sigma(i) = \mu(i)$ para todo $i \in \{m, \dots, \#T\}$, donde $\#T$ es la cardinalidad de T . Como todo individuo $i \in \{1, \dots, m-1\}$ sabe comparar las alternativas, debe ser el caso que $\sigma(i) \succ_i \mu(i)$, para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$.³ Por ende, se cumple que para todo $i \in T$, $\sigma(i) \succ_i \mu(i)$ ó $\sigma(i) = \mu(i)$, y que existe $j \in T$ tal que $\sigma(j) \succ_j \mu(j)$ (lo cumple cualquier $j \in \{1, \dots, m-1\}$). Esto es, T es una coalición de Θ -bloqueo para μ a través del acuerdo σ , según el perfil de preferencias original \succ . Así, $\mu \notin C_\Theta(\succ)$, una contradicción.

Con ello, para cada $i \in N$ definamos:

$$H(i) := \{c \in C \mid \exists \widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ), \exists (T, \sigma) \in \Omega_\mu(\widehat{\succ}) : i \in T, c = \sigma(i)\}.$$

Es decir, $H(i)$ es el conjunto de todas las casas que el individuo $i \in N$ recibiría al formar parte de cualquier coalición T de Θ -bloqueo para μ bajo algún completamiento transitivo de \succ .

Para cada $i \in N$, denotemos por $Q(\succ_i)$ las casas dentro de $H(i)$ que i no sabe comparar con $\mu(i)$:

$$Q(\succ_i) := \{\sigma(i) \in H(i) : \sigma(i) \otimes_i \mu(i)\}.$$

Considere ahora un completamiento transitivo $\widehat{\succ}^*$ de \succ tal que para todo $i \in N$, $\mu(i) \widehat{\succ}_i^* \sigma(i)$, $\forall \sigma(i) \in Q(\succ_i)$.⁴

³Si no, se daría $\mu(i) \succeq_i \sigma(i) \implies \mu(i) \widehat{\succ}_i \sigma(i)$ para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$ y habría una contradicción.

⁴Note que esto siempre se puede hacer, pues para cada $i \in N$ es suficiente que en la etapa 2 de la aplicación Algoritmo CST a la preferencia \succ_i , se elija $(\mu(i), \sigma(i))$ antes que cualquier otro elemento de $Z(\succ_i)$ y se fije $\mu(i) \widehat{\succ}_i^* \sigma(i)$.

Finalizamos la demostración probando que $\mu \in \mathbb{K}_\Theta(\widehat{\succ}^*)$. Supongamos que no. Entonces, existe una coalición T y $\sigma : T \rightarrow e(T)$ biyectiva tal que para todo $i \in T$, se tiene que $\sigma(i) \widehat{\succ}_i^* \mu(i)$ ó $\mu(i) = \sigma(i)$, y existe $j \in T$ tal que $\sigma(j) \widehat{\succ}_j^* \mu(j)$. Claramente, $(T, \sigma) \in \Omega_\mu(\widehat{\succ}^*)$. Entonces, existe algún $k \in T$ tal que $\sigma(k) \in Q(>_k)$. Pero por construcción de $\widehat{\succ}^*$, tenemos que $\mu(k) \widehat{\succ}_k^* \sigma(k)$. Luego, T no puede ser una coalición de Θ -bloqueo para μ cuando las preferencias son $\widehat{\succ}^*$, una contradicción. \square

A continuación, introducimos el Algoritmo CST-TTC, que agrupa el Algoritmo CST y el Algoritmo TTC.

Algoritmo CST-TTC

- **Etapa 1:** Cada individuo reporta sus preferencias (posiblemente incompletas), lo que da origen a un perfil de preferencias reportado $\overline{\succ} = (\overline{\succ}_i)_{i \in N}$.
- **Etapa 2:** Se aplica el Algoritmo CST al perfil de preferencias $\overline{\succ}$ para obtener $\text{Co}(\overline{\succ})$.
- **Etapa 3:** Escoja $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\overline{\succ})$ y aplique el Algoritmo TTC:

Etapa 3[$\widehat{\succ}$].**1:** Para cada $i \in N$, se anuncia al propietario de la casa que i prefiere según las preferencias $\widehat{\succ}$, pudiendo ser él mismo. Para cada ciclo, los agentes son asignados a la casa del individuo que anunciaron.

Recuerde que un ciclo es una lista ordenada de agentes $(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})$ tal que m_{i_1} anuncia a m_{i_2} , m_{i_2} anuncia a m_{i_3} y así sucesivamente hasta que m_{i_k} anuncia a m_{i_1} .

Etapa 3[$\widehat{\succ}$].**k:** Para cada $i \in N$ que no obtuvo una casa en las etapas previas, se anuncia al propietario de la casa que i prefiere entre aquellas propiedades que aún están disponibles. Para cada ciclo, los agentes son asignados a la casa del individuo que anunciaron.

La Etapa 3[$\widehat{\succ}$] finaliza cuando todos los individuos tienen asignada una casa.

Se vuelve al inicio de la Etapa 3 hasta que se ha aplicado el Algoritmo TTC a todos los completamientos transitivos $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\overline{\succ})$.

Los siguientes corolarios son consecuencias inmediatas del Teorema 2, del hecho que $C_\Theta \subseteq C_W$ y de los resultados de Shapley y Scarf (1974) y Roth y Postlewaite (1977).

Corolario 1: $C_W(>) \neq \emptyset$ y $C_\Theta(>) \neq \emptyset$ para cualquier perfil de preferencias $>$ estrictas y no necesariamente completas.

Corolario 2: Dado un perfil de preferencias incompletas y estrictas $>$, podemos recuperar todos los elementos dentro de $C_\Theta(>)$ aplicando el Algoritmo CST-TTC.

4.1. Otras propiedades de los núcleos C_W y C_Θ

Una posible preocupación es que el núcleo débil y el núcleo C_Θ sean demasiado grandes. Efectivamente, en el contexto del Ejemplo 3, las siguientes asignaciones estaban en la intersección del núcleo débil con el núcleo C_Θ :

$$\mu_1 = [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3), (4, c_4)], \quad \mu_2 = [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_4), (4, c_3)].$$

En ambas asignaciones los individuos 1 y 2 reciben la misma casa, el individuo 3 prefiere μ_2 a μ_1 y el individuo 4 no sabe comparar ambos escenarios. Por esta razón, es natural preguntarse si existe

algún refinamiento del núcleo débil y/o del núcleo C_\ominus que excluya la asignación μ_1 y mantenga a μ_2 como un resultado estable.

Considere los siguientes conjuntos:

$$A_W = \{\mu \in C_W(\succ) : \forall i \in N, \forall \eta \in C_W(\succ), \mu(i) \otimes_i \eta(i) \vee \mu(i) \succeq_i \eta(i)\},$$

$$A_\ominus = \{\mu \in C_\ominus(\succ) : \forall i \in N, \forall \eta \in C_\ominus(\succ), \mu(i) \otimes_i \eta(i) \vee \mu(i) \succeq_i \eta(i)\}.$$

Esto es, A_W es el conjunto de las asignaciones de C_W tal que no existe otra asignación en este núcleo que sea estrictamente más preferida por algún individuo en el mercado. A_\ominus es su análogo considerando asignaciones dentro de C_\ominus .

El siguiente ejemplo muestra que A_W y A_\ominus pueden ser vacíos, por lo que no hay garantía de que estos refinamientos “naturales” nos lleven a un concepto de solución satisfactorio.

Ejemplo 4. Considere el siguiente mercado de Shapley-Scarf $[N, C, (\succ)_{i \in N}]$ con tres agentes y donde las preferencias son:

$$\begin{aligned} 1 : & \quad c_3 \succ_1 c_1 \succ_1 c_2. \\ 2 : & \quad c_3 \succ_2 c_2 \succ_2 c_1. \\ 3 : & \quad c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \succ_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2. \end{aligned}$$

Hay seis posibles asignaciones. Note que cualquier asignación en que el agente 1 obtenga la casa c_2 o en la que el agente 2 obtenga la casa c_1 no es individualmente racional y por tanto no estará dentro de C_W ni de C_\ominus . Además, la asignación $[(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)]$ es fuertemente bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Esto nos deja por analizar solamente las siguientes asignaciones:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)], \\ \mu_2 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)]. \end{aligned}$$

Ambas asignaciones están en C_W y C_\ominus , pues no existen coaliciones de bloqueo fuerte ni de \ominus -bloqueo. Por tanto en este ejemplo se tiene que:

$$C_W = C_\ominus = \{\mu_1, \mu_2\}.$$

Claramente, el agente 1 prefiere la casa que recibe bajo μ_2 a la que obtiene bajo μ_1 , y el agente 2 piensa de manera opuesta. Luego, es directo que $A_W = A_\ominus = \emptyset$. \square

En este ejemplo, el único agente que tiene preferencias incompletas (el agente 3) recibe casas que no sabe comparar entre sí bajo las asignaciones que forman parte del núcleo C_\ominus . La siguiente proposición formaliza esta observación.

Proposición 1: *Considere un mercado habitacional $[N, C, \succ]$ con n agentes. Suponga que existe un agente $i \in N$ que es el único con preferencias incompletas por elementos de C . Entonces, en toda asignación dentro de $C_\ominus(\succ)$, el agente i obtiene la misma casa u obtiene casas distintas que no sabe comparar.*

Demostración. Por contradicción, suponga que existen asignaciones $\mu, \eta \in C_{\ominus}(\succ)$ en las cuales el individuo i recibe casas diferentes y que sabe comparar. Sin pérdida de generalidad, suponga que $\mu(i) \succ_i \eta(i)$. Esto implica que $\mu(i) \widehat{\succ}_i \eta(i)$, para todo completamiento transitivo $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)$. Además, por el Teorema 2, sabemos que existen perfiles de preferencias $\widehat{\succ}^\mu, \widehat{\succ}^\eta \in \text{Co}(\succ)$ tales que al aplicar TTC cuando las preferencias son $\widehat{\succ}^\mu$ se obtiene la asignación μ y al aplicar TTC cuando las preferencias son $\widehat{\succ}^\eta$ se obtiene la asignación η . Como todos los individuos en $N \setminus \{i\}$ tienen preferencias completas y estrictas, ellos se comportarán igual independiente del perfil $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)$ al que se aplique TTC. Por lo tanto, la única fuente de variación en el resultado de aplicar TTC está asociada al comportamiento del individuo i . Como $\mu(i) \widehat{\succ}_i \eta(i)$ para todo $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)$ y el resultado de TTC cuando las preferencias son $\widehat{\succ}^\mu$ es μ , el individuo i recibe la casa $\mu(i)$ independiente del completamiento transitivo al cual se aplique TTC. Esto contradice la existencia del perfil $\widehat{\succ}^\eta$. \square

El siguiente ejemplo muestra que la Proposición 1 deja de cumplirse cuando hay más de un agente con preferencias incompletas.

Ejemplo 5. Considere el siguiente mercado de Shapley-Scarf $[N, C, (\succ)_{i \in N}]$ con tres agentes, donde las preferencias son:

$$\begin{aligned} 1: & \quad c_2 \succ_1 c_1, \quad c_3 \succ_1 c_1, \quad c_3 \otimes_1 c_2. \\ 2: & \quad c_3 \succ_2 c_2 \succ_2 c_1. \\ 3: & \quad c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \succ_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2. \end{aligned}$$

Hay cuatro posibles completamientos. Al aplicar TTC a cada completamiento transitivo, podemos obtener el núcleo \mathbb{K}_{\ominus} para cada uno de ellos. Esto se muestra en el Cuadro 2 (ver página siguiente), utilizando la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)], \\ \mu_2 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)], \\ \mu_3 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)]. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2, tenemos que $C_{\ominus} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$. Como $c_2 \succ_1 c_1$ y $c_3 \succ_1 c_1$, el agente 1 prefiere estrictamente las asignaciones μ_1 y μ_3 a la asignación μ_2 . Esto demuestra que cuando hay más de un agente con preferencias incompletas, uno de estos agentes puede preferir una asignación dentro del núcleo C_{\ominus} por sobre otra que también está en dicho núcleo. \square

4.2. Los núcleos C_{\otimes} y C_S pueden ser vacíos

A diferencia de los núcleos C_W y C_{\ominus} , los núcleos C_{\otimes} y C_S sí pueden ser vacíos. Los siguientes ejemplos lo ilustran.

Ejemplo 6. Considere el siguiente mercado de Shapley-Scarf $[N, C, (\succ)_{i \in N}]$ con tres agentes y donde las preferencias son:

$$\begin{aligned} 1: & \quad c_3 \succ_1 c_1 \succ_1 c_2. \\ 2: & \quad c_3 \succ_2 c_2 \succ_2 c_1. \\ 3: & \quad c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \succ_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2. \end{aligned}$$

Completamiento transitivo	\mathbb{K}_Θ
$c_2 \bar{>}_1 c_3 \bar{>}_1 c_1$ $c_3 \bar{>}_2 c_2 \bar{>}_2 c_1$ $c_1 \bar{>}_3 c_2 \bar{>}_3 c_3$	$\mathbb{K}_\Theta(\bar{>}) = \{\mu_1\}$
$c_2 >^*_1 c_3 >^*_1 c_1$ $c_3 >^*_2 c_2 >^*_2 c_1$ $c_2 >^*_3 c_1 >^*_3 c_3$	$\mathbb{K}_\Theta(>^*) = \{\mu_2\}$
$c_3 >'_1 c_2 >'_1 c_1$ $c_3 >'_2 c_2 >'_2 c_1$ $c_1 >'_3 c_2 >'_3 c_3$	$\mathbb{K}_\Theta(>') = \{\mu_3\}$
$c_3 >^\circ_1 c_2 >^\circ_1 c_1$ $c_3 >^\circ_2 c_2 >^\circ_2 c_1$ $c_2 >^\circ_3 c_1 >^\circ_3 c_3$	$\mathbb{K}_\Theta(>^\circ) = \{\mu_2\}$

Cuadro 2: Núcleo \mathbb{K}_Θ para cada completamiento transitivo del Ejemplo 5

Las preferencias son las mismas que las del Ejemplo 4, por lo que ya vimos que:

$$C_W = C_\Theta = \{\mu_1, \mu_2\},$$

$$\mu_1 = [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)], \quad \mu_2 = [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)].$$

La asignación μ_1 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$ y la asignación μ_2 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$. Estas asignaciones eran las únicas candidatas a estar en C_\otimes , pues toda asignación en C_\otimes debe estar también en C_W . Concluimos entonces que $C_\otimes = \emptyset$. Como $C_S \subseteq C_\otimes$, se tiene que $C_S = \emptyset$. \square

Puede también ocurrir que $C_\otimes \neq \emptyset$ y $C_S = \emptyset$. El siguiente ejemplo lo muestra.

Ejemplo 7. Considere el siguiente mercado $[N, C, (>_i)_{i \in N}]$ con tres agentes, donde las preferencias son:

$$1 : c_2 >_1 c_1, \quad c_3 >_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3.$$

$$2 : c_1 >_2 c_3 >_2 c_2.$$

$$3 : c_1 >_3 c_2 >_3 c_3.$$

Hay seis posibles asignaciones. La asignación $[(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)]$ es fuertemente bloqueada por la coalición $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$. Además, la asignación $[(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)]$ es fuertemente bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Luego, ninguna

de estas asignaciones está en C_W , por lo que tampoco estarán en el resto de núcleos. Esto nos deja por analizar las siguientes asignaciones:

$$\mu_1 = [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)],$$

$$\mu_2 = [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)],$$

$$\mu_3 = [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)],$$

$$\mu_4 = [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)].$$

Note que $\mu_1 \notin C_\otimes$ pues esta asignación es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Esto implica que $\mu_1 \notin C_S$. Además, $\mu_4 \notin C_\otimes$ pues es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Esto implica que $\mu_4 \notin C_S$. Las asignaciones μ_2 y μ_3 no tienen coaliciones de \otimes -bloqueo.

Por otro lado, $\mu_2 \notin C_\ominus$, pues esta asignación es \ominus -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Esto implica que $\mu_2 \notin C_S$. De igual forma, $\mu_3 \notin C_\ominus$, pues es \ominus -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Esto implica que $\mu_3 \notin C_S$. Las asignaciones μ_1 y μ_4 no tienen coaliciones de \ominus -bloqueo. Concluimos entonces que:

$$C_W = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$$

$$C_\ominus = \{\mu_1, \mu_4\}$$

$$C_\otimes = \{\mu_2, \mu_3\}$$

$$C_S = \emptyset.$$

El hecho que $C_S = \emptyset$, se podía inferir directamente de que debe satisfacerse siempre que $C_S \subseteq C_\ominus$ y $C_S \subseteq C_\otimes$. Como en este caso $C_\ominus \cap C_\otimes = \emptyset$, debe ocurrir que $C_S = \emptyset$. Una pregunta pendiente es si puede ocurrir que $C_\ominus \cap C_\otimes \neq \emptyset$ y $C_S = \emptyset$. \square

5. Otros modelos de asignación habitacional

En este apartado se muestra que el Teorema 2 tiene extensiones naturales a los otros dos modelos de asignación habitacionales clásicos: el problema de asignación habitacional sin propietarios de Hylland y Zeckhauser (1979) y el problema de asignación habitacional con propietarios y entrantes de Abdulkadiroğlu y Sönmez (1999).

5.1. Modelo de Hylland-Zeckhauser con preferencias incompletas

Considere un mercado habitacional $[N, C, >]$ equivalente al modelo de Shapley-Scarf con preferencias incompletas (ver Sección 2), pero con la diferencia de que ningún individuo es propietario. Asumiremos que los conjuntos N y C tienen el mismo número de elementos.

Diremos que una asignación μ es *débilmente Pareto eficiente* si no existe $\eta : N \rightarrow C$ tal que $\eta(i) >_i \mu(i)$ para todo $i \in N$. Denotaremos por $\mathcal{P}_W(>)$ al conjunto de asignaciones débilmente Pareto eficientes cuando las preferencias vienen dadas por $>$. Además, denotaremos por $\mathbb{P}_W(>)$ al conjunto $\mathcal{P}_W(>)$ en el caso particular en que $>$ sea tal que todos los agentes tienen preferencias completas.

Diremos que una asignación μ es *Pareto eficiente* si no existe $\eta : N \rightarrow C$ tal que $\eta(i) \succ_i \mu(i)$ ó $\eta(i) = \mu(i)$ para todo $i \in N$, y existe $j \in N$ tal que $\eta(j) \succ_j \mu(j)$. Denotaremos por $\mathcal{P}_\Theta(\succ)$ al conjunto de asignaciones Pareto eficientes cuando las preferencias vienen dadas por \succ . Además, denotaremos por $\mathbb{P}_\Theta(\succ)$ al conjunto $\mathcal{P}_\Theta(\succ)$ en el caso particular en que \succ sea tal que todos los agentes tienen preferencias completas.

Sigue de las definiciones que $\mathcal{P}_\Theta(\succ) \subseteq \mathcal{P}_W(\succ)$.

El siguiente resultado es el análogo al Teorema 2 para el modelo de Hylland-Zeckhauser.

Teorema 3: *Dado un perfil de preferencias \succ donde hay agentes con preferencias incompletas, se tiene que*

$$\mathcal{P}_W(\succ) = \bigcup_{\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)} \mathbb{P}_W(\widehat{\succ}) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_\Theta(\succ) = \bigcup_{\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)} \mathbb{P}_\Theta(\widehat{\succ}).$$

Demostración. La demostración es exactamente igual a la del Teorema 2, pues lo único que cambia es que la única coalición que puede ser de bloqueo fuerte o Θ -bloqueo para alguna asignación es N . \square

En el contexto descrito, considere el Algoritmo CST-SD que agrupa el Algoritmo CST y el Algoritmo *Serial Dictatorship*.

Algoritmo CST-SD

- **Etapa 1:** Cada individuo reporta su preferencia (posiblemente incompleta), lo que da origen a un perfil de preferencias reportado $\bar{\succ}$. Los individuos son ordenados siguiendo algún criterio.
- **Etapa 2:** Se aplica el Algoritmo CST al perfil de preferencias $\bar{\succ}$ para obtener $\text{Co}(\bar{\succ})$.
- **Etapa 3:** Para cada $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\bar{\succ})$ y en base al ordenamiento determinado, se adjudican las casas de tal forma que cada agente recibe su mejor opción de acuerdo a las preferencias $\widehat{\succ}$ entre las que están disponibles.

Cuando las preferencias son completas y estrictas, sabemos que dado un orden prefijado para los individuos, el Algoritmo SD obtiene una asignación Pareto eficiente. Es más, con preferencias completas y estrictas podemos recuperar todas las asignaciones Pareto eficientes mediante dos procedimientos (Abdulkadiroğlu y Sönmez (1998)):

- Aplicando el Algoritmo SD a todos los posibles ordenamientos para los individuos.
- Aplicando el Algoritmo TTC a todas las posibles asignaciones iniciales de casas.

El siguiente corolario es consecuencia directa del Teorema 3, del hecho que $\mathcal{P}_\Theta \subseteq \mathcal{P}_W$ y de los resultados de Abdulkadiroğlu y Sönmez (1998):

Corolario 3: $\mathcal{P}_W(\succ) \neq \emptyset$ y $\mathcal{P}_\Theta(\succ) \neq \emptyset$ para cualquier perfil de preferencias \succ estrictas y no necesariamente completas.

Corolario 4: *Dado un perfil de preferencias incompletas y estrictas \succ , podemos obtener todos los elementos dentro de $\mathcal{P}_\Theta(\succ)$ de dos formas:*

- Aplicando el Algoritmo CST-SD a cada uno de los posibles ordenamientos para los individuos en el conjunto N .
- Aplicando el Algoritmo CST-TTC a cada uno de los mercados habitacionales de Shapley-Scarf (con preferencias incompletas) que se obtienen distribuyendo las casas entre los individuos.

5.2. Modelo de Abdulkadiroglu-Sönmez con preferencias incompletas

Considere un problema de asignación habitacional con propietarios y entrantes $[P, R, C, >]$ caracterizado por un conjunto $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ de propietarios, un conjunto $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ de entrantes y un conjunto $C = \{c_1, \dots, c_{m+n}\}$ de casas, tal que la casa c_i es propiedad de p_i , con $i \in \{1, \dots, m\}$. Cada agente $k \in P \cup R$ tiene preferencias estrictas $>_k$ definidas sobre C , tales que $c_j >_k c_k$ y $c_k >_k c_\ell$ implican que $c_j >_k c_\ell$. Tal como antes, supondremos que las preferencias $> = (>_k)_{k \in P \cup R}$ no necesariamente son completas.

Una asignación habitacional es caracterizada por una función biyectiva $\mu : P \cup R \rightarrow C$ que asocia a cada individuo una casa diferente. Sea \mathcal{A} el conjunto de asignaciones habitacionales. Dado $T \subseteq P$ no-vacío, denotaremos por $e(T)$ al conjunto de casas que son propiedad de los individuos en T .

Diremos que una asignación μ es *óptima* si cumple las siguiente condiciones:

- *Pareto eficiencia*: No existe $\eta \in \mathcal{A}$ tal que $\eta(k) >_k \mu(k)$ ó $\eta(k) = \mu(k)$ para todo $k \in N$, y $\eta(j) >_j \mu(j)$ para algún $j \in N$.
- *Estabilidad a desvíos fuertes de propietarios*: No existe $T \subseteq P$ no-vacío y una función biyectiva $f : T \rightarrow e(T)$ tal que $f(k) >_k \mu(k)$ para todo $k \in T$.

Denotaremos por $O(>)$ al conjunto de asignaciones óptimas cuando las preferencias vienen dadas por $>$. Además, denotaremos por $\mathbb{O}(>)$ al conjunto $O(>)$ en el caso particular en que $>$ es tal que todos los agentes tienen preferencias completas.

Note que para el concepto de Pareto eficiencia no es relevante la distinción entre propietarios y entrantes. Por tanto, en este contexto también se cumple el Teorema 3.

Asimismo, note que el concepto de estabilidad a desvíos fuertes de propietarios no involucra a individuos en R . Por ende, si se define que las coaliciones de bloqueo fuerte solo pueden ser subconjuntos no-vacíos de P , el resultado análogo al Teorema 2 también se cumple en este modelo. Esto es: una asignación μ es estable a desvíos fuertes de propietarios según las preferencias originales si y solamente si lo es según algún completamiento transitivo.

El siguiente resultado es directo por lo discutido en los últimos dos párrafos.

Teorema 4: *Dado un perfil de preferencias $>$ donde hay agentes con preferencias incompletas, se tiene que*

$$O(>) = \bigcup_{\widehat{>} \in \text{Co}(>)} \mathbb{O}(\widehat{>}).$$

En lo que sigue introducimos el Algoritmo CST-YRMH-IGYT, que agrupa el Algoritmo CST y el Algoritmo YRMH-IGYT (*You request my house – I get your turn*) propuesto por Abdulkadiroglu y Sönmez (1999).

Algoritmo CST-YRMH-IGYT

- **Etapa 1:** Cada individuo reporta su preferencia (posiblemente incompleta), lo que da origen a un perfil de preferencias reportado $\bar{>}$. Siguiendo alguna distribución prefijada, se sortea un orden para los individuos.
- **Etapa 2:** Se aplica el Algoritmo CST al perfil de preferencias $\bar{>}$ para obtener $\text{Co}(\bar{>})$.
- **Etapa 3:** Para cada $\widehat{>} \in \text{Co}(\bar{>})$ se hace lo siguiente:

Etapa 3.1: Siguiendo el orden sorteado, se adjudican las casas de tal forma que cada agente recibe su mejor opción entre las que están disponibles de acuerdo a las preferencias $\widehat{>}$, a menos que solicite una casa ocupada.

Etapa 3.2: Si al propietario original de esa casa ya se le adjudicó otra, se continua con la asignación. Caso contrario, el propietario obtiene prioridad por sobre el solicitante y se continua con el algoritmo.

Etapa 3.3: Si aparece un ciclo, se le asignan las casas a los agentes involucrados y se continúa con el proceso.

Dado un problema de asignación habitacional $[P, R, C, >]$ donde $>$ es un perfil de preferencias completo, suponga que la función biyectiva $g : \{1, \dots, m+n\} \rightarrow P \cup R$ define el ordenamiento de los individuos para aplicar el Algoritmo YRMH-IGYT, de tal forma que $g(k)$ es el individuo que está en el k -ésimo lugar de prioridad.

Note que, al aplicar el Algoritmo YRMH-IGYT, a partir del orden determinado por g se induce *endógenamente* un reordenamiento de las prioridades que los individuos tienen al momento de escoger una casa (si durante la implementación del algoritmo se genera un ciclo entre propietarios, estos se ordenan secuencialmente, uno después del otro, de forma arbitraria). Suponga que, luego de este reordenamiento endógeno, las prioridades de los agentes quedan determinadas por una función $b : \{1, \dots, m+n\} \rightarrow P \cup R$. Entonces, la asignación habitacional $\bar{\mu}$ que se obtiene al aplicar YRMH-IGYT cuando las preferencias son $>$ coincide con la que se obtendría al embargar las propiedades de los agentes en P y aplicar el algoritmo SD siguiendo los órdenes de prioridad determinados por la función b .

Con esto en mente, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2: Si $\bar{\mu}$ es el resultado de aplicar el Algoritmo YRMH-IGYT a un perfil de preferencias completo $>$, entonces $\bar{\mu}$ es una asignación óptima.

Demostración. Por los resultados de Sönmez y Ünver (2010), el Algoritmo YRMH-IGYT implementa asignaciones Pareto eficientes. Así, $\bar{\mu}$ es Pareto eficiente.

Resta probar que $\bar{\mu}$ es estable a desvíos fuertes de propietarios. Por contradicción, suponga que existe $T \subseteq P$ no-vacío y una función biyectiva $f : T \rightarrow e(T)$ tal que $f(k) >_k \mu(k)$ para todo $k \in T$. Sea $b : \{1, \dots, m+n\} \rightarrow P \cup R$ la función biyectiva que caracteriza el orden de prioridad subyacente a la aplicación del algoritmo YRMH-IGYT cuyo resultado fue $\bar{\mu}$. Esto es, b determina el orden de prioridad de los agentes tal que al aplicar SD siguiendo dicho orden, se obtiene $\bar{\mu}$.

Siguiendo el orden especificado por b , sea p_{ni} el primer propietario que pertenece a T . Como $\bar{\mu}(p_{ni})$ es la mejor alternativa que p_{ni} tenía disponible al momento de elegir, para que se cumpla

$f(p_{ni}) \succ_{p_{ni}} \bar{\mu}(p_{ni})$, es necesario que $f(p_{ni}) \in \{c_{n1}, \dots, c_{n(i-1)}\}$. Pero por hipótesis p_{ni} es el primer propietario en T , lo que implica que $f(p_{ni}) \notin e(T)$, una contradicción. \square

Los siguientes corolarios son consecuencias directas del Teorema 4 y de la Proposición 2.

Corolario 5: $O(\succ) \neq \emptyset$ para cualquier perfil de preferencias \succ estrictas y no necesariamente completas.

Corolario 6: Dado un perfil de preferencias incompletas y estrictas \succ , podemos recuperar todos los elementos dentro de $O(\succ)$ aplicando el Algoritmo CST-YRMH-IGYT.

6. Compromise Core

El *núcleo débil* y el núcleo C_{\ominus} son siempre diferentes de vacío, pero asumen que los bloqueos solo vienen de coaliciones compuestas por agentes que saben comparar su situación antes y después del desvío. En la búsqueda de un concepto de solución que no exija tanta información por parte de las coaliciones al momento de evaluar un desvío, nos encontramos con el *núcleo fuerte* y el núcleo C_{\otimes} . Lamentablemente, estos conjuntos pueden ser vacíos. Esto motiva la búsqueda de un concepto alternativo de estabilidad coalicional.

El *Compromise Core* es un concepto propuesto por Kuvalekar (2020) para mercados matrimoniales, el cual adaptaremos para acomodarlo al mercado habitacional de Shapley-Scarf. Mostraremos que este núcleo es siempre no-vacío y selecciona asignaciones dentro del núcleo débil en base a un criterio de dominancia, que permite movimientos de coaliciones que mejoran a alguno de sus miembros sin perjudicar a aquellos que saben comparar su situación antes y después del desvío.

Dada una asignación μ y una coalición T sea $\mu(T) = \{\mu(i) : i \in T\}$ el conjunto de casas que reciben los individuos de T cuando se implementa μ . Diremos que la coalición T es un *trading cycle de μ* si $\mu(T) = e(T)$ y $\mu(T') \neq e(T')$ para cualquier subconjunto no vacío $T' \subset T$. Intuitivamente, un *trading cycle de μ* es una coalición T cuyos miembros intercambian sus casas entre sí para obtener sus asignaciones y no se puede eliminar a ninguno de ellos sin comprometer el intercambio. Note que existe una única partición del conjunto de agentes en *trading cycles de μ* y podemos escribir $N = \bigcup_{i \in N} S_i^\mu$, donde S_i^μ es el *trading cycle de μ* al que pertenece el agente $i \in N$.

Los siguientes conceptos, que se aplican a cualquier par de asignaciones $\sigma, \mu \in \mathcal{A}$, son necesarios para definir el *Compromise Core*.

Concepto	Definición
Implementación de σ sobre μ	Una coalición T <u>implementa σ sobre μ</u> cuando se cumplen las siguientes condiciones: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Si $S_i^\mu \cap T = \emptyset$, entonces $\sigma(i) = \mu(i)$. ▪ Si $S_i^\mu \cap T \neq \emptyset$ y $i \notin T$, entonces $\sigma(i) = e(i)$. ▪ Si $S_i^\mu \cap T \neq \emptyset$ y $i \in T$, entonces $\sigma(i) \in e(T)$.
Dominancia de σ sobre μ	La asignación σ <u>domina a μ</u> si existe una coalición T tal que las siguientes condiciones son satisfechas: <ul style="list-style-type: none"> ▪ T implementa σ sobre μ. ▪ T bloquea débilmente a μ con el acuerdo inducido por σ. El símbolo $\sigma \underline{\mathcal{D}} \mu$ hará notar que σ domina a μ . Cuando $\sigma \underline{\mathcal{D}} \mu$ y no se cumpla que $\mu \underline{\mathcal{D}} \sigma$, diremos que <u>σ domina estrictamente a μ</u> . Esta última propiedad la denotaremos por $\sigma \underline{\mathcal{D}} \mu$.
Cobertura de σ sobre μ	La asignación σ <u>cubre a μ</u> cuando $\sigma \underline{\mathcal{D}} \mu$ y para todo $\eta \in C_W$ tenemos que $\mu \underline{\mathcal{D}} \eta$ implica $\sigma \underline{\mathcal{D}} \eta$. El símbolo $\sigma \underline{\mathcal{C}} \mu$ hará notar que σ cubre a μ .

Note que, si una coalición T implementa σ sobre μ , cualquier cambio de casa que se observe en σ respecto de μ se deberá a los efectos que los movimientos de los miembros de T generan. Esto es, todo individuo $i \in T$ recibe la casa $\sigma(i)$, mientras que todo individuo $j \notin T$ que dependía de alguien en T para recibir la casa $\mu(j)$ pasa a recibir su asignación inicial $e(j)$. Por otro lado, σ domina a μ si existe una coalición T que además de implementar σ sobre μ es una coalición de bloqueo débil de μ . Finalmente, σ cubre a μ cuando σ domina estrictamente a μ y a cualquier otra asignación en el núcleo débil que es estrictamente dominada por μ .

El *Compromise Core*, que denotaremos por C_C , es el conjunto de todas las asignaciones dentro del núcleo débil que no son cubiertas por ninguna otra asignación dentro de este núcleo. Esto es:

$$C_C = \{\sigma \in C_W : \nexists \mu \in C_W \text{ tal que } \mu \underline{\mathcal{C}} \sigma\}.$$

Los siguientes conceptos nos permitirán definir un refinamiento del *Compromise Core*:

Concepto	Definición
Implementación fuerte de σ sobre μ	Una coalición T <u>implementa fuertemente σ sobre μ</u> cuando se cumplen las siguientes condiciones: <ul style="list-style-type: none"> ▪ T implementa σ sobre μ. ▪ Para cada $i \in T$ tenemos que $T = S_i^\sigma$.
Dominancia fuerte de σ sobre μ	La asignación σ <u>domina fuertemente a μ</u> si existe una coalición T tal que las siguientes condiciones son satisfechas: <ul style="list-style-type: none"> ▪ T implementa fuertemente σ sobre μ. ▪ T bloquea débilmente a μ con el acuerdo inducido por σ. El símbolo $\sigma \underline{\mathcal{D}}_f \mu$ hará notar que σ domina fuertemente a μ . Cuando $\sigma \underline{\mathcal{D}}_f \mu$ y no se cumpla que $\mu \underline{\mathcal{D}}_f \sigma$, diremos que <u>σ domina fuerte y estrictamente a μ</u> . Esta última propiedad la denotaremos por $\sigma \mathcal{D}_f \mu$.
Cobertura fuerte de σ sobre μ	La asignación σ <u>cubre fuertemente a μ</u> cuando $\sigma \mathcal{D}_f \mu$ y para todo $\eta \in \mathcal{C}_W$ tenemos que $\mu \mathcal{D}_f \eta$ implica $\sigma \mathcal{D}_f \eta$. El símbolo $\sigma \mathcal{C}_f \mu$ hará notar que σ cubre fuertemente a μ .

Definimos el *Compromise Core Fuerte* como el conjunto de todas las asignaciones dentro del núcleo débil que no son cubiertas fuertemente por ninguna otra asignación dentro de este núcleo:

$$\mathcal{C}_C^f = \{\sigma \in \mathcal{C}_W : \nexists \mu \in \mathcal{C}_W \text{ tal que } \mu \mathcal{C}_f \sigma\}.$$

El siguiente resultado caracteriza propiedades básicas del Compromise Core (Fuerte).

Teorema 5. Los núcleos \mathcal{C}_C y \mathcal{C}_C^f son no-vacíos y cumplen

$$\mathcal{C}_S \subseteq \mathcal{C}_C \subseteq \mathcal{C}_C^f \subseteq \mathcal{C}_W.$$

Demostración. Note que dado que es más difícil cubrir fuertemente que cubrir, es directo que $\mathcal{C}_C \subseteq \mathcal{C}_C^f$. Además, si $\mu \in \mathcal{C}_S$ no puede existir $\sigma \in \mathcal{C}_W$ que domine a μ , pues por definición no existe coalición de bloqueo débil para μ . Por tanto, tampoco existirá $\sigma \in \mathcal{C}_W$ que cubra a μ . De esto, podemos concluir que el núcleo fuerte está contenido en el Compromise Core.

Como \mathcal{C}_W es no-vacío, elija un elemento $\mu_0 \in \mathcal{C}_W$. Si μ_0 no es cubierta por otra asignación en \mathcal{C}_W , entonces \mathcal{C}_C es no-vacío. Caso contrario, existe $\mu_1 \in \mathcal{C}_W$ tal que $\mu_1 \mathcal{C} \mu_0$, con $\mu_1 \neq \mu_0$. Si μ_1 no es cubierta por otra asignación de \mathcal{C}_W , entonces \mathcal{C}_C es no-vacío. Caso contrario, existe $\mu_2 \in \mathcal{C}_W$ tal que $\mu_2 \mathcal{C} \mu_1$, con $\mu_1 \neq \mu_2$.

Como Kuvalekar (2020) demuestra que \mathcal{C} es una relación binaria transitiva y antisimétrica, podemos generar una secuencia $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots\}$ tal que:

$$\dots \mathcal{C} \mu_2 \mathcal{C} \mu_1 \mathcal{C} \mu_0.$$

Sea $Q = \#\mathcal{C}_W$. Como \mathcal{C}_W es un conjunto finito, ocurrirá que $\mu_{Q+1} \in \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_Q\}$. Por tanto, $\mu_k = \mu_j$ para algún $k \neq j$, donde μ_k y μ_j son elementos de la secuencia anterior. Sin pérdida de

generalidad, suponga que $j > k$. Por transitividad de \mathfrak{C} , tenemos que $\mu_j = \mu_k \mathfrak{C} \mu_{k+1}$.⁵ Sin embargo, por construcción de la secuencia, tenemos que $\mu_{k+1} \mathfrak{C} \mu_k$, una contradicción con el hecho que \mathfrak{C} es antisimétrica. Así, la transitividad y antisimetría de \mathfrak{C} aseguran que C_C es siempre no-vacío. Del hecho que $C_C \subseteq C_C^f$, tenemos que C_C^f también es siempre no-vacío. \square

En Kuvalekar (2020) se hace notar que el Compromise Core cumple la siguiente propiedad que se denomina *estabilidad externa* (Neumann y Morgenstern (1944)), cuya demostración es válida también para el contexto acá estudiado y por tanto se omite.

Teorema (Kuvalekar (2020)). Si $\mu \in C_W \setminus C_C$, entonces existe $\mu' \in C_C$ tal que $\mu' \mathfrak{D} \mu$.

El siguiente ejemplo demuestra que los núcleos C_C y C_C^f pueden ser distintos.

Ejemplo 8. Considere un mercado de Shapley-Scarf $[N, C, (\succ_i)_{i \in N}]$ con cuatro agentes y en el cual las preferencias son caracterizadas por:

$$\begin{aligned} 1: & \quad c_2 \succ_1 c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \succ_1 c_4 \succ_1 c_1, \quad c_3 \otimes_1 c_4. \\ 2: & \quad c_1 \succ_2 c_2 \succ_2 c_3 \succ_2 c_4. \\ 3: & \quad c_4 \succ_3 c_3 \succ_3 c_1 \succ_3 c_2. \\ 4: & \quad c_3 \succ_4 c_4 \succ_4 c_1, \quad c_3 \succ_4 c_2 \succ_4 c_1, \quad c_4 \otimes_4 c_2. \end{aligned}$$

Es evidente que existen 24 posibles asignaciones habitacionales. Podemos descartar varias de ellas notando lo siguiente.

Cualquier asignación en que el agente 2 obtenga la casa c_3 o la casa c_4 no es individualmente racional, en el sentido que es fuertemente bloqueada por la coalición $\{2\}$ a través del acuerdo $[(2, c_2)]$. Asimismo, cualquier asignación en la que el agente 3 obtenga la casa c_1 ó c_2 no es individualmente racional, pues es fuertemente bloqueada por la coalición $\{3\}$ a través del acuerdo $[(3, c_3)]$. Cualquier asignación en que el agente 4 obtenga la casa c_1 tampoco es individualmente racional, pues es fuertemente bloqueada por la coalición $\{4\}$ a través del acuerdo $[(4, c_4)]$.

Por lo tanto, las asignaciones que cumplen con alguna de las características anteriores tienen coaliciones de bloqueo fuerte, por lo que no están en C_W . Como C_W contiene al resto de núcleos, estas asignaciones no están presentes en ninguno de ellos.

Además, se cumplen las siguientes propiedades:

- Las asignaciones

$$[(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3), (4, c_4)]$$

$$[(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3), (4, c_4)]$$

$$[(1, c_4), (2, c_1), (3, c_3), (4, c_2)]$$

son fuertemente bloqueadas por la coalición $\{3, 4\}$ a través del acuerdo $[(3, c_4), (4, c_3)]$. Por tanto, no están en ningún núcleo.

- La asignación $[(1, c_1), (2, c_2), (3, c_4), (4, c_3)]$ es fuertemente bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$ y por tanto no está en ningún núcleo.

⁵Note que como $\mu_j = \mu_k$ y $\mu_k \neq \mu_{k+1}$, no puede ocurrir que $j = k + 1$

Esto nos deja solamente con dos asignaciones por analizar:

$$\mu_1 = [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_4), (4, c_3)],$$

$$\mu_2 = [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_4), (4, c_2)].$$

La asignación μ_1 es tal que todo agente está con su casa preferida. Por ende, nadie puede mejorar estrictamente su situación y por tanto no hay forma de armar coaliciones para ningún tipo de bloqueo. Esto implica que μ_1 está en todos los núcleos, y en particular está en C_C y en C_C^f , pues está en el núcleo fuerte.

La asignación μ_2 no tiene coaliciones de bloqueo fuerte, ni tampoco coaliciones de \otimes -bloqueo. Sin embargo, la coalición $\{1, 2\}$ \ominus -bloquea μ_2 a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Sigue que $\mu_2 \notin C_\ominus$, lo que a su vez implica que $\mu_2 \notin C_S$.

Con esto concluimos que $C_W = \{\mu_1, \mu_2\}$. Por lo tanto, para encontrar los núcleos C_C y C_C^f , se deben examinar las relaciones de dominancia y cobertura entre μ_1 y μ_2 .

Afirmamos que μ_2 no domina (fuertemente) a μ_1 . Al comparar μ_1 y μ_2 , podemos ver que el agente 1 prefiere la casa obtenida bajo μ_1 a la que obtiene bajo μ_2 . Los agentes 2 y 3 están exactamente con las mismas casas bajo μ_1 y μ_2 . El agente 4 también prefiere la casa obtenida bajo μ_1 a la obtenida bajo μ_2 . Esto automáticamente implica que μ_2 no puede dominar a μ_1 . La razón es que para ello debería ser posible encontrar una coalición de bloqueo débil que implemente μ_2 sobre μ_1 , pero como ningún agente prefiere estrictamente la casa que obtiene bajo μ_2 , esto es imposible. Como μ_2 no domina a μ_1 , en particular, μ_2 no domina fuertemente a μ_1 .

Afirmamos que μ_1 domina a μ_2 . Los agentes 1 y 4 prefieren estrictamente la casa que obtienen bajo μ_1 , por lo que una potencial coalición de bloqueo débil que implemente μ_1 sobre μ_2 debería incluir por lo menos a uno de estos agentes. Notemos ahora que, a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1), (3, c_4), (4, c_3)]$, la gran coalición $N = \{1, 2, 3, 4\}$ implementa μ_1 sobre μ_2 y además es una coalición de bloqueo débil de μ_2 . Por lo tanto, concluimos que $\mu_1 \mathfrak{D} \mu_2$.

Afirmamos μ_1 no domina fuertemente a μ_2 . Cualquier coalición que implemente fuertemente μ_1 sobre μ_2 , deberá incluir a los agentes 1 y 4, pues estos cambian la casa que reciben al pasar desde μ_2 a μ_1 . Como el agente 1 recibe en μ_1 la casa c_2 y el agente 4 recibe en μ_1 la casa c_3 , los agentes 2 y 3, al ser los propietarios de estas casas, también deberán formar parte de cualquier coalición que implemente fuertemente μ_1 sobre μ_2 . Con esto, concluimos que solamente la gran coalición N podría implementar fuertemente μ_1 sobre μ_2 , pero no lo hace. El único acuerdo consistente con lo que cada agente recibe en μ_1 es $[(1, c_2), (2, c_1), (3, c_4), (4, c_3)]$, y dicho acuerdo es tal que $S_1^{\mu_1} = S_2^{\mu_1} = \{1, 2\}$ y $S_3^{\mu_1} = S_4^{\mu_1} = \{3, 4\}$, por lo que no se cumple que $S_i^{\mu_1}$ para todo $i \in N$.

Del análisis anterior, tenemos que $\mu_1 \mathfrak{D} \mu_2$ y que μ_1 y μ_2 no son comparables bajo la relación de dominancia fuerte. Esto lo resumimos en la siguiente tabla:

Dominancia	Dominancia fuerte	Coaliciones de dominancia y sus movimientos
$\mu_1 \mathfrak{D} \mu_2$	μ_1 y μ_2 no son $\underline{\mathfrak{D}}_f$ -comparables	$\{1, 2, 3, 4\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$

Note que μ_2 no domina ninguna asignación dentro de C_W . Por ende, $\mu_1 \mathfrak{D} \mu_2$ implica que $\mu_1 \mathfrak{C} \mu_2$. Además, μ_1 y μ_2 no son comparables bajo relación de cobertura fuerte, pues no hay una relación de dominancia fuerte entre estas asignaciones.

Cobertura	Cobertura fuerte
$\mu_1 \underline{C} \mu_2$	μ_1 y μ_2 no son \underline{C}_f -comparables

De esto, tenemos que solamente μ_1 está en C_C , pero tanto μ_1 como μ_2 están en C_C^f .

En resumen, en este ejemplo tenemos que

$$\begin{aligned} C_W &= \{\mu_1, \mu_2\}, & C_\ominus &= \{\mu_1\}, & C_\otimes &= \{\mu_1, \mu_2\}, \\ C_S &= \{\mu_1\}, & C_C &= \{\mu_1\}, & C_C^f &= \{\mu_1, \mu_2\}, \end{aligned}$$

lo cual implica que el Compromise Core y el Compromise Core Fuerte pueden ser distintos, que el Compromise Core puede coincidir con el núcleo fuerte y que el Compromise Core Fuerte puede coincidir con el núcleo débil. \square

7. Estática Comparativa

El objetivo de esta sección es ver qué ocurre en un mercado habitacional de Shapley-Scarf al ir agregando, de manera secuencial, incompletitudes a las preferencias. Haremos dos ejercicios de estática comparativa: uno en que se agregan secuencialmente incompletitudes a las preferencias de agentes distintos y otro en que se agregan secuencialmente incompletitudes a las preferencias de un mismo agente. Los movimientos de los núcleos estos análisis de estática comparativa pueden interpretarse como el efecto de aumentar el grado de ignorancia en el mercado.

7.1. Agregando incompletitudes a agentes distintos

Si $[N, C, (>_i)_{i \in N}]$ es un mercado de Shapley-Scarf con tres agentes, entonces las posibles asignaciones son:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)], & \mu_2 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)], & \mu_3 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)], \\ \mu_4 &= [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)], & \mu_5 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)], & \mu_6 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)]. \end{aligned}$$

El siguiente cuadro reporta los diferentes núcleos para diversos escenarios de preferencias (los cálculos están detallados en el Anexo).⁶

⁶En los ejemplos de esta sección y de la sección 7.2, las relaciones de dominancia y dominancia fuerte son indistinguibles. Por ello, también lo son las relaciones de cobertura, y el Compromise Core siempre coincide con el Compromise Core Fuerte. Por esta razón, no reportamos el Compromise Core Fuerte C_C^f en las tablas.

Escenario	Preferencias	Núcleos
1	1 : $c_2 \succ_1 c_1, \quad c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3$ 2 : $c_1 \succ_2 c_3 \succ_2 c_2$ 3 : $c_1 \succ_3 c_2 \succ_3 c_3$	$C_W = \{\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\ominus = \{\mu_3, \mu_6\}$ $C_\otimes = \{\mu_4, \mu_5\}$ $C_S = \emptyset$ $C_C = \{\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$
2	1 : $c_2 \succ_1 c_1, \quad c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3$ 2 : $c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \succ_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3$ 3 : $c_1 \succ_3 c_2 \succ_3 c_3$	$C_W = \{\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\ominus = \{\mu_3, \mu_4, \mu_6\}$ $C_\otimes = \{\mu_4\}$ $C_S = \{\mu_4\}$ $C_C = \{\mu_4\}$
3	1 : $c_2 \succ_1 c_1, \quad c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3$ 2 : $c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \succ_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3$ 3 : $c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \succ_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2$	$C_W = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\ominus = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\otimes = \{\mu_4, \mu_5\}$ $C_S = \{\mu_4, \mu_5\}$ $C_C = \{\mu_4, \mu_5\}$
4	1 : $c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3$ 2 : $c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \succ_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3$ 3 : $c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \succ_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2$	$C_W = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\ominus = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\otimes = \{\mu_4, \mu_5\}$ $C_S = \{\mu_4, \mu_5\}$ $C_C = \{\mu_4, \mu_5\}$
5	1 : $c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3$ 2 : $c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \otimes_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3$ 3 : $c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \succ_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2$	$C_W = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\ominus = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\otimes = \{\mu_4, \mu_5\}$ $C_S = \{\mu_4, \mu_5\}$ $C_C = \{\mu_4, \mu_5\}$
6	1 : $c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3$ 2 : $c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \otimes_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3$ 3 : $c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \otimes_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2$	$C_W = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\ominus = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\otimes = \{\mu_4, \mu_5\}$ $C_S = \{\mu_4, \mu_5\}$ $C_C = \{\mu_4, \mu_5\}$
7	1 : $c_3 \otimes_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3$ 2 : $c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \otimes_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3$ 3 : $c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \otimes_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2$	$C_W = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\ominus = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\otimes = \{\mu_2, \mu_4, \mu_5\}$ $C_S = \{\mu_2, \mu_4, \mu_5\}$ $C_C = \{\mu_2, \mu_4, \mu_5\}$

Algo que salta a la vista del cuadro anterior es que los núcleos C_W , C_\ominus y C_S se agrandan débilmente al aumentar la ignorancia en el mercado. Esto no ocurre con los núcleos C_\otimes y C_C , pues al pasar del escenario 1 al escenario 2, estos se contraen y luego comienzan a expandirse.

Es llamativo el hecho que C_S aumente su tamaño al pasar del escenario 1 al escenario 2. Efectivamente, uno podría pensar que al agregar más incompletitudes a las preferencias aumentan las posibilidades de encontrar coaliciones de \otimes -bloqueo y de bloqueo débil, pues hay más margen para que ciertos agentes que no saben comparar “acompañen” a otros que podrían mejorar estrictamente su situación. Lo que termina ocurriendo en este ejemplo tiene que ver con un factor que es menos

evidente. Al agregar incompletitudes en el top de las preferencias de los agentes, se puede estar evitando que exista un agente que pueda mejorar estrictamente al desviar desde una asignación dada. Como toda coalición de bloqueo (de cualquier tipo) debe contener al menos un agente que mejore estrictamente su situación al bloquear, al agregar incompletitudes de esta forma no necesariamente se aumenta el conjunto de coaliciones factibles.

7.2. Agregando incompletitudes a las preferencias de un mismo agente

Si $[N, C, (>_i)_{i \in N}]$ es un mercado de Shapley-Scarf con tres agentes, entonces las posibles asignaciones son:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)], & \mu_2 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)], & \mu_3 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)], \\ \mu_4 &= [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)], & \mu_5 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)], & \mu_6 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]. \end{aligned}$$

El siguiente cuadro reporta los diferentes núcleos para diversos escenarios de preferencias (los cálculos están detallados en el Anexo).

Escenario	Preferencias	Núcleos
1	$1 : c_1 >_1 c_2, \quad c_1 >_1 c_3, \quad c_2 \otimes_1 c_3$ $2 : c_1 >_2 c_3 >_2 c_2$ $3 : c_1 >_3 c_2 >_3 c_3$	$C_W = \{\mu_2\}$ $C_\ominus = \{\mu_2\}$ $C_\otimes = \{\mu_2\}$ $C_S = \{\mu_2\}$ $C_C = \{\mu_2\}$
2	$1 : c_1 \otimes_1 c_2, \quad c_1 >_1 c_3, \quad c_2 \otimes_1 c_3$ $2 : c_1 >_2 c_3 >_2 c_2$ $3 : c_1 >_3 c_2 >_3 c_3$	$C_W = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4\}$ $C_\ominus = \{\mu_2, \mu_3\}$ $C_\otimes = \{\mu_4\}$ $C_S = \emptyset$ $C_C = \{\mu_3\}$
3	$1 : c_1 \otimes_1 c_2, \quad c_1 \otimes_1 c_3, \quad c_2 \otimes_1 c_3$ $2 : c_1 >_2 c_3 >_2 c_2$ $3 : c_1 >_3 c_2 >_3 c_3$	$C_W = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ $C_\ominus = \{\mu_2, \mu_3, \mu_5\}$ $C_\otimes = \{\mu_4, \mu_6\}$ $C_S = \emptyset$ $C_C = \{\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$

Se puede observar que los núcleos C_W y C_\ominus crecen al aumentar la incompletitud en las preferencias (un comportamiento similar al ya observado en el ejemplo de la sección previa).

Además, los ejercicios de estática comparativa que hemos hecho nos permiten concluir que el comportamiento del núcleo fuerte C_S no es monótono en relación al aumento de la incompletitud de las preferencias. Efectivamente, en el ejemplo dado en la sección previa el núcleo fuerte no se contrae, mientras que en el ejemplo de esta sección el núcleo fuerte no se expande.

7.3. Monotonía frente a aumentos de la incompletitud en las preferencias

En esta sección demostraremos un resultado que muestra cómo los núcleos reaccionan al aumento de la incompletitud de las preferencias.

Sea \mathcal{R} el conjunto de perfiles de preferencia $\succ = (\succ_i)_{i \in N}$ tales que, para cada $i \in N$, \succ_i es una preferencia definida sobre C tal que $c_j \succ_i c_k$ y $c_k \succ_i c_\ell$ implican que $c_j \succ_i c_\ell$ y no existen dos casas que el individuo i considere indiferentes.

Dados dos perfiles de preferencia $\succ = (\succ_i)_{i \in N}$ y $\succ' = (\succ'_i)_{i \in N}$ en \mathcal{R} , diremos que \succ es *más completo* que \succ' si, para cada agente $i \in N$, tenemos que $c_1 \succ'_i c_2$ implica que $c_1 \succ_i c_2$. Además, diremos que una correspondencia $\Gamma : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ es *IG-monótona* si $\Gamma(\succ) \subseteq \Gamma(\succ')$ cuando el perfil de preferencias \succ es más completo que \succ' .

Proposición 3. *Las correspondencias $C_W : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ y $C_\ominus : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ son IG-monótonas, mientras que las correspondencias $C_\otimes : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$, $C_S : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ y $C_C : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ no lo son.*

Demostración. Para demostrar que $C_W : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ es IG-monótona vamos a suponer, por contradicción, que existen perfiles de preferencias $\succ, \succ' \in \mathcal{R}$ tales que \succ es más completo que \succ' y para algún $\mu \in C_W(\succ)$ tenemos que $\mu \notin C_W(\succ')$. Esto implica que existe una coalición de bloqueo fuerte para μ cuando las preferencias son \succ' . Pero como \succ es más completo que \succ' , esa misma coalición bloqueará fuertemente μ cuando las preferencias son \succ . Por tanto, $\mu \notin C_W(\succ)$, una contradicción. La demostración para $C_\ominus : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ es análoga, utilizando \ominus -bloqueos en vez de bloqueos fuertes.

El hecho que las correspondencias $C_\otimes : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$, $C_S : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ y $C_C : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ no sean IG-monótonas es una consecuencia de los ejemplos dados en las dos subsecciones previas. \square

8. Conclusión

En esta tesis se estudiaron modelos de mercados habitacionales donde los agentes tienen preferencias transitivas e incompletas. El énfasis fue puesto sobre el modelo habitacional de Shapley y Scarf (1974), pero varios de los resultados obtenidos en este escenario se extendieron para incluir preferencias incompletas en los modelos de Hylland y Zeckhauser (1979) y de Abdulkadiroğlu y Sönmez (1999). Se definieron y caracterizaron una variedad de conceptos de estabilidad coalicional: núcleo débil, núcleo C_\ominus , núcleo C_\otimes , Compromise Core (Fuerte) y núcleo fuerte.

Demostramos que los núcleos que imponen más barreras a la formación de coaliciones en escenarios con preferencias incompletas, el núcleo débil C_W y el núcleo C_\ominus , coinciden con la unión de sus análogos cuando las preferencias vienen caracterizadas por los completamientos transitivos. Una consecuencia inmediata de esto es que C_W y C_\ominus son siempre diferentes de vacío. Además, demostramos que es posible obtener el núcleo C_\ominus encontrando todos los completamientos transitivos de la preferencia original—utilizando el Algoritmo CST—para luego aplicar el Algoritmo TTC a cada uno de ellos. También demostramos que una estrategia similar puede ser utilizada para encontrar todos los elementos del núcleo C_\ominus en el contexto de los modelos de Hylland y Zeckhauser (1979) y Abdulkadiroğlu y Sönmez (1999), pues es suficiente utilizar el Algoritmo SD o el Algoritmo YRMH-IGYT en vez del Algoritmo TTC.

Como el núcleo débil puede ser demasiado grande, fue natural estudiar refinamientos de este concepto de solución. En principio, el que nos pareció el más natural de los refinamientos, el núcleo fuerte—en el cual las coaliciones pueden incluir a individuos que no son capaces de comparar su situación antes y después del desvío—terminó siendo un conjunto vacío en muchos escenarios. Esto nos motivó a introducir el Compromise Core, adaptando el concepto propuesto por Kuvalekar (2020) en mercados matrimoniales de Gale y Shapley (1962). Finalmente, hicimos un ejercicio de estática comparativa cuyo objetivo fue estudiar los cambios en los núcleos que se dan al ir agregando

secuencialmente incompletitudes en las preferencias. Mostramos que, con el aumento de la incompletitud de las preferencias, crecen débilmente C_W y C_\ominus , mientras que para los otros conceptos de estabilidad coalicional no se observó un patrón claro.

Este trabajo se centró en la existencia de soluciones estables a desvíos de coaliciones, por lo que una de las aristas que quedan abiertas para futura investigación son las consideraciones estratégicas de los algoritmos que fueron propuestos para encontrar asignaciones en los diferentes núcleos. Por ejemplo, verificar si estos algoritmos son *strategy-proof*, *group strategy-proof*, o compatibles con incentivos en estrategias Nash. Por otro lado, queda pendiente ver si el Compromise Core puede ser extendido al contexto de los modelos Hylland y Zeckhauser (1979) o Abdulkadiroğlu y Sönmez (1999), o a modelos más amplios como el propuesto por Roth, Sönmez y Ünver (2004) para plataformas de trasplante de riñón. Evidentemente, condicional a qué tan apropiado se juzgue al Compromise Core como concepto de solución, otro desafío interesante es encontrar algoritmos computacionalmente eficientes que permitan calcularlo.

Referencias

- Abdulkadiroğlu, Atila y Tayfun Sönmez (1998). “Random serial dictatorship and the core from random endowments in house allocation problems”. En: *Econometrica* 66(3), págs. 689-701.
- Abdulkadiroğlu, Atila y Tayfun Sönmez (1999). “House allocation with existing tenants”. En: *Journal of Economic Theory* 88(2), págs. 233-260.
- Ahmad, Ghufuran (2021). “Group incentive compatibility in the housing market problem with weak preferences”. En: *Games and Economic Behavior* 126, págs. 136-162.
- Alcalde-Unzu, Jorge y Elena Molis (2011). “Exchange of indivisible goods and indifferences: The top trading absorbing sets mechanisms”. En: *Games and Economic Behavior* 73(1), págs. 1-16.
- Aziz, Haris y Bart De Keijzer (2012). “Housing markets with indifferences: A tale of two mechanisms”. En: *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Vol. 26. 1, págs. 1249-1255.
- Bade, Sophie (2016). “Pareto-optimal matching allocation mechanisms for boundedly rational agents”. En: *Social Choice and Welfare* 47(3), págs. 501-510.
- Bird, Charles G (1984). “Group incentive compatibility in a market with indivisible goods”. En: *Economics Letters* 14(4), págs. 309-313.
- Chambers, Christopher P y M Bumin Yenmez (2017). “Choice and matching”. En: *American Economic Journal: Microeconomics* 9(3), págs. 126-47.
- Che, Yeon-Koo, Jinwoo Kim y Fuhito Kojima (2019). “Weak monotone comparative statics”. En: *Available at SSRN 3486365*.
- Ehlers, Lars (2002). “Coalitional strategy-proof house allocation”. En: *Journal of Economic Theory* 105(2), págs. 298-317.
- Gale, David y Lloyd Shapley (1962). “College admissions and the stability of marriage”. En: *The American Mathematical Monthly* 69(1), págs. 9-15.
- Hylland, Aanund y Richard Zeckhauser (1979). “The efficient allocation of individuals to positions”. En: *Journal of Political Economy* 87(2), págs. 293-314.
- Jaramillo, Paula y Vikram Manjunath (2012). “The difference indifference makes in strategy-proof allocation of objects”. En: *Journal of Economic Theory* 147(5), págs. 1913-1946.
- Kitahara, Minoru y Yasunori Okumura (2021). “Improving efficiency in school choice under partial priorities”. En: *International Journal of Game Theory*, págs. 1-17.
- Kuvalekar, Aditya (2020). “Matching with Incomplete Preferences”. En: *Available at SSRN 3560889*.

- Ma, Jinpeng (1994). "Strategy-proofness and the strict core in a market with indivisibilities". En: *International Journal of Game Theory* 23(1), págs. 75-83.
- Neumann, John von y Oskar Morgenstern (1944). "Theory of Games and Economic Behavior". En: Roth, Alvin E y Andrew Postlewaite (1977). "Weak versus strong domination in a market with indivisible goods". En: *Journal of Mathematical Economics* 4(2), págs. 131-137.
- Roth, Alvin E, Tayfun Sönmez y M Utku Ünver (2004). "Kidney exchange". En: *The Quarterly journal of economics* 119(2), págs. 457-488.
- Shapley, Lloyd y Herbert Scarf (1974). "On cores and Indivisibility". En: *Journal of Mathematical Economics* 1(1), págs. 23-37.
- Sönmez, Tayfun (1999). "Strategy-proofness and essentially single-valued cores". En: *Econometrica* 67(3), págs. 677-689.
- Sönmez, Tayfun y M Utku Ünver (2010). "House allocation with existing tenants: A characterization". En: *Games and Economic Behavior* 69(2), págs. 425-445.

9. Anexo

9.1. Teorema 2 para núcleo C_W

Teorema A.2: Dado un perfil de preferencias \succ donde hay agentes con preferencias incompletas, se tiene que

$$C_W(\succ) = \bigcup_{\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)} \mathbb{K}_W(\widehat{\succ}).$$

Demostración. Suponga que $\mu \in \mathbb{K}_W(\widehat{\succ})$ para algún completamiento transitivo $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)$. Por construcción, si $\mu \notin C_W(\succ)$, existe una coalición de bloqueo fuerte y entonces tendríamos $\mu \notin \mathbb{K}_W(\widehat{\succ})$ debido a esa misma coalición de bloqueo fuerte. Así, como $\mu \in \mathbb{K}_W(\widehat{\succ})$, se tiene que $\mu \in C_W(\succ)$.

Ahora suponga que $\mu \in C_W(\succ)$. Dada una coalición T , definimos:

$$\mathcal{F}(T) = \{\sigma : T \rightarrow e(T) \mid \sigma \text{ es biyectiva}\}$$

Es decir, $\mathcal{F}(T)$ es el conjunto de redistribuciones de casas (acuerdos) σ entre los individuos de T . Dado $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)$, sea:

$$\Omega_\mu(\widehat{\succ}) = \{(T, \sigma) : T \text{ es una coalición, } \sigma \in \mathcal{F}(T), T \text{ bloquea fuertemente } \mu \text{ a través del acuerdo } \sigma \text{ cuando las preferencias son } \widehat{\succ}\}.$$

Es decir, $\Omega_\mu(\widehat{\succ})$ es el conjunto de pares (T, σ) tales que T bloquea fuertemente μ vía una redistribución de casas σ entre los individuos de T cuando las preferencias vienen dadas por el completamiento transitivo $\widehat{\succ}$.

Vamos a demostrar que dado cualquier $\widehat{\succ} \in \text{Co}(\succ)$, para todo $(T, \sigma) \in \Omega_\mu(\widehat{\succ})$ existe $i \in T$ tal que $\mu(i) \otimes_i \sigma(i)$. Por contradicción, supongamos que dado $(T, \sigma) \in \Omega_\mu(\widehat{\succ})$, todo $i \in T$ puede comparar $\mu(i)$ con $\sigma(i)$. Sigue entonces que para todo $i \in T$, tenemos que $\sigma(i) \widehat{\succ}_i \mu(i)$. Note entonces que como todo individuo en T sabe comparar $\mu(i)$ con $\sigma(i)$, debe ser el caso que $\sigma(i) \succ_i \mu(i)$ para todo $i \in T$.⁷ Pero entonces T es una coalición de bloqueo fuerte para μ vía σ , según las preferencias originales \succ . Así, $\mu \notin C_W(\succ)$, una contradicción.

⁷Si no, se daría $\mu(i) \succeq_i \sigma(i) \implies \mu(i) \widehat{\succ}_i \sigma(i)$ para todo $i \in T$ y habría una contradicción.

Con ello, para cada $i \in N$ definamos:

$$H(i) := \{c \in C \mid \exists \widehat{>} \in \text{Co}(>), \exists (T, \sigma) \in \Omega_\mu(\widehat{>}) : i \in T, c = \sigma(i)\}.$$

Es decir, $H(i)$ es el conjunto de todas las casas que el individuo $i \in N$ recibiría al formar parte de cualquier coalición T de bloqueo fuerte para μ bajo algún completamiento transitivo de $>$.

Para cada $i \in N$, denotemos por $Q(>_i)$ las casas dentro de $H(i)$ que i no sabe comparar con $\mu(i)$:

$$Q(>_i) := \{\sigma(i) \in H(i) : \sigma(i) \otimes_i \mu(i)\}.$$

Considere ahora un completamiento transitivo $\widehat{>}^*$ de $>$ tal que para todo $i \in N$, $\mu(i) \widehat{>}_i^* \sigma(i)$, $\forall \sigma(i) \in Q(>_i)$.⁸

Finalizamos la demostración probando que $\mu \in \mathbb{K}_W(\widehat{>}^*)$. Supongamos que no. Entonces, existe una coalición T y $\sigma : T \rightarrow e(T)$ biyectiva tal que para todo $i \in T$, se tiene que $\sigma(i) \widehat{>}_i^* \mu(i)$. Claramente, $(T, \sigma) \in \Omega_\mu(\widehat{>}^*)$. Entonces, existe algún $k \in T$ tal que $\sigma(k) \in Q(>_k)$. Pero por construcción de $\widehat{>}^*$, tenemos que $\mu(k) \widehat{>}_k^* \sigma(k)$. Luego, T no puede ser una coalición de bloqueo fuerte para μ cuando las preferencias son $\widehat{>}^*$, una contradicción. \square

9.2. Detalle con cálculos de la sección 7.1

Escenario 1. Considere el siguiente mercado $[N, C, (>_i)_{i \in N}]$ con tres agentes y en el cual las preferencias son caracterizadas por:

$$\begin{aligned} 1 : & \quad c_2 >_1 c_1, \quad c_3 >_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3. \\ 2 : & \quad c_1 >_2 c_3 >_2 c_2. \\ 3 : & \quad c_1 >_3 c_2 >_3 c_3. \end{aligned}$$

Las posibles asignaciones son:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)] \\ \mu_2 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)] \\ \mu_3 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)] \\ \mu_4 &= [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)] \\ \mu_5 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)] \\ \mu_6 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)] \end{aligned}$$

Se puede ver que $\mu_1 \notin \mathcal{C}_W$, pues esta asignación es fuertemente bloqueada por la coalición $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$. Asimismo, $\mu_2 \notin \mathcal{C}_W$, pues es fuertemente bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. De esto sabemos que las asignaciones μ_1 y μ_2 no están en ninguno de los núcleos. El resto de asignaciones no tienen coaliciones de bloqueo fuerte.

⁸Note que esto siempre se puede hacer, pues para cada $i \in N$ es suficiente que en la etapa 2 de la aplicación Algoritmo CST a la preferencia $>_i$, se elija $(\mu(i), \sigma(i))$ antes que cualquier otro elemento de $Z(>_i)$ y se fije $\mu(i) \widehat{>}_i^* \sigma(i)$.

Note que $\mu_3 \notin C_{\otimes}$ pues esta asignación es \otimes -bloqueada la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Además, $\mu_6 \notin C_{\otimes}$ pues es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Las asignaciones μ_4 y μ_5 no tienen coaliciones de \otimes -bloqueo.

Por otro lado, $\mu_4 \notin C_{\ominus}$, pues es \ominus -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. De igual forma, $\mu_5 \notin C_{\ominus}$ es \ominus -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Las asignaciones μ_3 y μ_6 no tienen coaliciones de \ominus -bloqueo.

Como $C_{\ominus} \cap C_{\otimes} = \emptyset$, tenemos que $C_S = \emptyset$. Concluimos entonces que:

$$C_W = \{\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}, \quad C_{\ominus} = \{\mu_3, \mu_6\}$$

$$C_{\otimes} = \{\mu_4, \mu_5\}, \quad C_S = \emptyset.$$

Las siguientes tablas resumen las relaciones de dominancia y cobertura en este ejemplo para las asignaciones dentro de C_W .

Dominancia	Coaliciones que implementan y sus movimientos
$\mu_3 \mathcal{D} \mu_4$	$\{1, 2\}$ a través del acuerdo $(1, c_2), (2, c_1)$
$\mu_5 \mathcal{D} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)$
$\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6 \wedge \mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$	Para $\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6$, se tiene $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $(1, c_2), (2, c_1)$ Para $\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$, se tiene $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $(1, c_3), (3, c_1)$
$\neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_5) \wedge \neg(\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_4)$	
$\mu_4 \mathcal{D} \mu_6$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)$
$\mu_6 \mathcal{D} \mu_5$	$\{1, 3\}$ a través del acuerdo $(1, c_3), (3, c_1)$

Cobertura
μ_3 y μ_4 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_3 y μ_5 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_3 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_4 y μ_5 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_4 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_5 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables

Este ejemplo ilustra las diferencias entre dominancia y cobertura: note que $\mu_5 \mathcal{D} \mu_3$, pero aún así μ_5 no cubre μ_3 (pues $\mu_3 \mathcal{D} \mu_4$ pero μ_5 y μ_4 no son comparables bajo relación de dominancia).

Concluimos que:

$$C_C = \{\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}.$$

Escenario 2. Ahora agregamos una nueva incompletitud, al hacer que las alternativas en el top de la preferencia del agente 2 ya no sean comparables entre sí. Las nuevas preferencias son:

$$1: c_2 \succ_1 c_1, \quad c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3.$$

$$2: c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \succ_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3.$$

$$3: c_1 \succ_3 c_2 \succ_3 c_3.$$

Re-escribimos las posibles asignaciones:

$$\mu_1 = [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)]$$

$$\mu_2 = [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)]$$

$$\mu_3 = [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)]$$

$$\mu_4 = [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$$

$$\mu_5 = [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$$

$$\mu_6 = [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)].$$

Por la IG-monotonía que cumplen los núcleos C_W y C_\ominus , sabemos que en este nuevo escenario se cumple que $\{\mu_3, \mu_6\} \subseteq C_\ominus$ y $\{\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} \subseteq C_W$. Note que tal como en el escenario 1, $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$ es una coalición de bloqueo fuerte para μ_1 y $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$ es una coalición de bloqueo fuerte para μ_2 . Por tanto, μ_1 y μ_2 no están en ningún núcleo. Se tiene entonces $C_W = \{\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$, por lo que el núcleo débil se mantiene como en el escenario 1.

Note que $\mu_3 \notin C_\otimes$, pues es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Esto implica que $\mu_3 \notin C_S$.

Por otro lado, note que ahora se cumple que $\mu_4 \in C_\ominus$ y $\mu_4 \in C_S$. En efecto, al agregar una incompletitud en el top de la preferencia del agente 2, la asignación μ_4 es tal que no es posible que ningún agente mejore estrictamente su situación. Luego, no hay coaliciones de bloqueo de ningún tipo para μ_4 .

Tenemos que $\mu_5 \notin C_\ominus$, pues es \ominus -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Esto implica que $\mu_5 \notin C_S$. A diferencia del escenario 1, ahora $\mu_5 \notin C_\otimes$, pues esta asignación es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.

Finalmente, note que $\mu_6 \notin C_\otimes$ pues es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Esto implica que $\mu_6 \notin C_S$.

Concluimos entonces que:

$$C_\ominus = \{\mu_3, \mu_4, \mu_6\},$$

$$C_\otimes = \{\mu_4\}.$$

$$C_S = \{\mu_4\}.$$

Se agrandó el núcleo C_\ominus y el núcleo fuerte dejó de ser vacío. Intuitivamente, μ_4 antes no estaba en el núcleo fuerte porque el individuo 2 podía mejorar al recibir la casa c_1 en vez de c_3 y se podía armar una coalición con el agente 2. Al agregar la incompletitud al top de la preferencia del agente 2, ahora ocurre que ya no se puede mejorar estrictamente al agente 2 cuando este está con c_3 .

Las siguientes tablas resumen las relaciones de dominancia y cobertura para las asignaciones dentro de C_W en el escenario 2.

Dominancia	Coaliciones que implementan y sus movimientos
$\mu_4 \mathcal{D} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_5 \mathcal{D} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.
$\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6 \wedge \mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$	Para $\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6$, se tiene $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Para $\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$, se tiene $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_4 \mathcal{D} \mu_5$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$
$\mu_4 \mathcal{D} \mu_6$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_6 \mathcal{D} \mu_5$	$\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.

Cobertura
$\mu_4 \mathfrak{C} \mu_3$
$\mu_5 \mathfrak{C} \mu_3$
μ_3 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables
$\mu_4 \mathfrak{C} \mu_5$
$\mu_4 \mathfrak{C} \mu_6$
μ_5 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables

Note que hay algunas cambios en las relaciones de dominancia y cobertura respecto al escenario 1. Por ejemplo, μ_4 domina estrictamente μ_3 , y ocurría lo inverso en el escenario base. En el escenario base ningún par de asignaciones dentro del núcleo débil eran \mathfrak{C} -comparables, mientras que ahora se puede ver que cualquier asignación distinta a μ_4 es cubierta por otra. Tenemos entonces que $C_C = \{\mu_4\}$.

Note que el paso del escenario 1 al escenario 2 ilustra que C_C no cumple la propiedad de monotonía. De hecho, este núcleo disminuyó considerablemente su tamaño hasta coincidir con el núcleo fuerte.

Escenario 3. Ahora agregamos una incompletitud en el top de la preferencia del agente 3. Las nuevas preferencias son:

$$\begin{aligned}
1: & \quad c_2 \succ_1 c_1, \quad c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3. \\
2: & \quad c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \succ_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3. \\
3: & \quad c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \succ_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2.
\end{aligned}$$

Re-escribimos las posibles asignaciones:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)] \\
\mu_2 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)] \\
\mu_3 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)] \\
\mu_4 &= [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)] \\
\mu_5 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)] \\
\mu_6 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)].
\end{aligned}$$

Por la propiedad de IG-monotonía, sabemos que se cumple $\{\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} \subseteq C_W$ y $\{\mu_3, \mu_4, \mu_6\} \subseteq C_\ominus$. Note que μ_1 es fuertemente bloqueada por la coalición $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$, por lo que no está en ningún núcleo.

Note que ahora no existen coaliciones de \ominus -bloqueo para μ_2 . Entonces, $\mu_2 \in C_W$ y $\mu_2 \in C_\ominus$. Por otro lado, μ_2 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. De esto concluimos que $\mu_2 \notin C_\otimes$ y $\mu_2 \notin C_S$.

La asignación μ_3 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Por tanto, $\mu_3 \notin C_\otimes$ y $\mu_3 \notin C_S$. Las asignaciones μ_4 y μ_5 no tienen coaliciones de bloqueo de ningún tipo, por lo que están en todos los núcleos. Finalmente, la asignación μ_6 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Por tanto, $\mu_6 \notin C_\otimes$ y $\mu_6 \notin C_S$. Concluimos hasta ahora que:

$$\begin{aligned} C_W &= \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}, \\ C_\ominus &= \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}, \\ C_\otimes &= \{\mu_4, \mu_5\}, \\ C_S &= \{\mu_4, \mu_5\}. \end{aligned}$$

Note que respecto al escenario 2, los núcleos C_W y C_\ominus se agrandaron y coinciden, mientras que el núcleo fuerte se agrandó hasta coincidir con C_\otimes .

La siguientes tablas muestra las relaciones de dominancia y cobertura entre las asignaciones dentro de C_W .

Dominancia	Coaliciones que implementan y sus movimientos
$\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_3 \wedge \mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_2$	Para $\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$, se tiene $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$. Para $\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_2$, se tiene $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$.
$\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_2$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_2$	$\{1, 2, 3\}$ vía $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.
$\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_6 \wedge \mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_2$	Para $\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_6$, se tiene $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$. Para $\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_2$, se tiene $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.
$\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6 \wedge \mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$	Para $\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6$, se tiene $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Para $\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$, se tiene $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_5) \wedge \neg(\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_4)$	
$\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_6$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_6$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.

Cobertura
μ_2 y μ_3 no son \mathfrak{C} -comparables
$\mu_4 \mathfrak{C} \mu_2$
$\mu_5 \mathfrak{C} \mu_2$
μ_2 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables
$\mu_4 \mathfrak{C} \mu_3$
$\mu_5 \mathfrak{C} \mu_3$
μ_3 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_4 y μ_5 no son \mathfrak{C} -comparables
$\mu_4 \mathfrak{C} \mu_6$
$\mu_5 \mathfrak{C} \mu_6$

Se puede ver que las únicas asignaciones no cubiertas por otra son μ_4 y μ_5 . Así, $C_C = \{\mu_4, \mu_5\}$.

De esta manera, C_C creció con respecto al caso anterior, coincidiendo con el núcleo fuerte.

Escenario 4. Se agrega una nueva incompletitud en la preferencia del agente 1. Las nuevas preferencias son:

$$\begin{aligned}
 1 : & \quad c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3. \\
 2 : & \quad c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \succ_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3. \\
 3 : & \quad c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \succ_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2.
 \end{aligned}$$

Re-escribimos las posibles asignaciones:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)], \\
 \mu_2 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)], \\
 \mu_3 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)], \\
 \mu_4 &= [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)], \\
 \mu_5 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)], \\
 \mu_6 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)].
 \end{aligned}$$

Por la propiedad de monotonía, tenemos que $\{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} \subseteq C_W$ y $\{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} \subseteq C_\otimes$. Note que μ_1 es fuertemente bloqueada por la coalición $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$. Por tanto, esta asignación no está en ningún núcleo. Podemos concluir desde ya que $C_W = C_\otimes = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$.

Note que la asignación μ_2 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Por tanto, $\mu_2 \notin C_\otimes$ y $\mu_2 \notin C_S$. Tal como en el escenario 3, la asignación μ_3 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Por tanto, $\mu_3 \notin C_\otimes$ y $\mu_3 \notin C_S$. Las asignaciones μ_4 y μ_5 no tienen coaliciones de bloqueo de ningún tipo, por lo que están en todos los núcleos. La asignación μ_6 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$, por lo que μ_6 no está en C_\otimes ni en C_S . Concluimos entonces que $C_\otimes = C_S = \{\mu_4, \mu_5\}$.

Las siguientes tablas muestran las relaciones de dominancia y cobertura entre las asignaciones dentro de C_W .

Dominancia	Coaliciones que implementan y sus movimientos
$\mu_2 \mathcal{D} \mu_3$	$\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$.
$\neg(\mu_2 \mathcal{D} \mu_4) \wedge \neg(\mu_4 \mathcal{D} \mu_2)$	
$\mu_5 \mathcal{D} \mu_2$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.
$\mu_2 \mathcal{D} \mu_6 \wedge \mu_6 \mathcal{D} \mu_2$	Para $\mu_2 \mathcal{D} \mu_6$, se tiene $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$. Para $\mu_6 \mathcal{D} \mu_2$, se tiene $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_4 \mathcal{D} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_5 \mathcal{D} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.
$\mu_3 \mathcal{D} \mu_6 \wedge \mu_6 \mathcal{D} \mu_3$	Para $\mu_3 \mathcal{D} \mu_6$, se tiene $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Para $\mu_6 \mathcal{D} \mu_3$, se tiene $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\neg(\mu_4 \mathcal{D} \mu_5) \wedge \neg(\mu_5 \mathcal{D} \mu_4)$	
$\mu_4 \mathcal{D} \mu_6$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_5 \mathcal{D} \mu_6$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.

Cobertura
$\mu_2 \mathcal{C} \mu_3$
μ_2 y μ_4 no son \mathcal{C} -comparables
$\mu_5 \mathcal{C} \mu_2$
μ_2 y μ_6 no son \mathcal{C} -comparables
$\mu_4 \mathcal{C} \mu_3$
$\mu_5 \mathcal{C} \mu_3$
μ_3 y μ_6 no son \mathcal{C} -comparables
μ_4 y μ_5 no son \mathcal{C} -comparables
$\mu_4 \mathcal{C} \mu_6$
$\mu_5 \mathcal{C} \mu_6$

Es directo que tal como en el escenario anterior, μ_4 y μ_5 son las únicas asignaciones no cubiertas por otra. Así, concluimos que $C_C = \{\mu_4, \mu_5\}$.

Escenario 5. Agregamos una nueva incompletitud a la preferencia del agente 2.

$$1 : c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3.$$

$$2 : c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \otimes_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3.$$

$$3 : c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \succ_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2.$$

Re-escribimos las posibles asignaciones:

$$\mu_1 = [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)]$$

$$\mu_2 = [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)]$$

$$\mu_3 = [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)]$$

$$\mu_4 = [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$$

$$\mu_5 = [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$$

$$\mu_6 = [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)].$$

Por la propiedad de IG-monotonía, tenemos que $\{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} \subseteq C_W$ y $\{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} \subseteq C_\ominus$. Note que μ_1 es fuertemente bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Por tanto, esta asignación no está en ningún núcleo. Concluimos que $C_W = C_\ominus = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$.

La asignaciones μ_2 y μ_3 son \otimes -bloqueadas por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Luego, estas dos asignaciones no están en C_\otimes ni en C_S . Las asignaciones μ_4 y μ_5 no tienen coaliciones de bloqueo de ningún tipo, por lo que están en todos los núcleos. Finalmente, μ_6 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Por tanto, $\mu_6 \notin C_\otimes$ y $\mu_6 \notin C_S$. Concluimos que $C_\otimes = C_S = \{\mu_4, \mu_5\}$.

Las siguientes tablas muestran las relaciones de dominancia y cobertura para las asignaciones dentro de C_W .

Dominancia	Coaliciones que implementan y sus movimientos
$\mu_2 \mathcal{D} \mu_3$	$\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$.
$\neg(\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_4) \wedge \neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_2)$	
$\mu_5 \mathcal{D} \mu_2$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.
$\mu_6 \mathcal{D} \mu_2$	$\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_4 \mathcal{D} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_5 \mathcal{D} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.
$\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6 \wedge \mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$	Para $\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6$, se tiene $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Para $\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$, se tiene $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_5) \wedge \neg(\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_4)$	
$\neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_6) \wedge \neg(\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_4)$	
$\mu_5 \mathcal{D} \mu_6$	$\{1, 2, 3\}$ vía $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.

Cobertura
$\mu_2 \mathcal{C} \mu_3$
μ_2 y μ_4 no son \mathcal{C} -comparables
$\mu_5 \mathcal{C} \mu_2$
μ_2 y μ_6 no son \mathcal{C} -comparables
$\mu_4 \mathcal{C} \mu_3$
$\mu_5 \mathcal{C} \mu_3$
μ_3 y μ_6 no son \mathcal{C} -comparables
μ_4 y μ_5 no son \mathcal{C} -comparables
μ_4 y μ_6 no son \mathcal{C} -comparables
$\mu_5 \mathcal{C} \mu_6$

Podemos ver que solamente μ_4 y μ_5 son las únicas asignaciones no cubiertas por otra. Luego, se mantiene que $C_C = \{\mu_4, \mu_5\}$.

Escenario 6. Agregamos una nueva incompletitud a la preferencia del agente 3.

$$\begin{aligned}
1 : & \quad c_3 \succ_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3 \\
2 : & \quad c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \otimes_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3 \\
3 : & \quad c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \otimes_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2
\end{aligned}$$

Re-escribimos las posibles asignaciones:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)] \\
\mu_2 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)] \\
\mu_3 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)] \\
\mu_4 &= [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)] \\
\mu_5 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)] \\
\mu_6 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)].
\end{aligned}$$

Por la propiedad de IG-monotonía, tenemos que $\{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} \subseteq C_W$ y $\{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} \subseteq C_\otimes$. Note que μ_1 es fuertemente bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Por tanto, esta asignación no está en ningún núcleo. Concluimos que $C_W = C_\otimes = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$.

Las asignaciones μ_2 y μ_3 son \otimes -bloqueadas por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Por tanto, estas asignaciones no están en C_\otimes ni en C_S . Las asignaciones μ_4 y μ_5 no tienen coaliciones de bloqueo de ningún tipo, por lo que están en todos los núcleos. La asignación μ_6 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$, por lo que $\mu_6 \notin C_\otimes$ y $\mu_6 \notin C_S$. Concluimos que $C_\otimes = C_S = \{\mu_4, \mu_5\}$, por lo que nuevamente estos núcleos se mantienen igual.

Las siguientes tablas muestran las relaciones de dominancia y cobertura para las asignaciones dentro de C_W .

Dominancia	Coaliciones que implementan y sus movimientos
$\neg(\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_3) \wedge \neg(\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_2)$	
$\neg(\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_4) \wedge \neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_2)$	
$\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_2$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.
$\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_2$	$\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ vía $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\neg(\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_5) \wedge \neg(\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_3)$	
$\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6 \wedge \mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$	Para $\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6$, se tiene $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Para $\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$, se tiene $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_5) \wedge \neg(\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_4)$	
$\neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_6) \wedge \neg(\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_4)$	
$\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_6$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.

Cobertura
μ_2 y μ_3 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_2 y μ_4 no son \mathfrak{C} -comparables
$\mu_5 \mathfrak{C} \mu_2$
$\mu_6 \mathfrak{C} \mu_2$
$\mu_4 \mathfrak{C} \mu_3$
μ_3 y μ_5 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_3 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_4 y μ_5 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_4 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables
$\mu_5 \mathfrak{C} \mu_6$

Vemos que nuevamente solo μ_4 y μ_5 son asignaciones no cubiertas por otra, por lo que $C_C = \{\mu_4, \mu_5\}$.

Escenario 7. Agregamos una nueva incompletitud a la preferencia del agente 1, haciendo que no sepa comparar ninguna alternativa.

$$\begin{aligned}
 1 : & \quad c_3 \otimes_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_1, \quad c_2 \otimes_1 c_3. \\
 2 : & \quad c_1 \succ_2 c_2, \quad c_3 \otimes_2 c_2, \quad c_1 \otimes_2 c_3. \\
 3 : & \quad c_1 \succ_3 c_3, \quad c_2 \otimes_3 c_3, \quad c_1 \otimes_3 c_2.
 \end{aligned}$$

Re-escribimos las posibles asignaciones:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)], \\
 \mu_2 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)], \\
 \mu_3 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)], \\
 \mu_4 &= [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)], \\
 \mu_5 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)], \\
 \mu_6 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)].
 \end{aligned}$$

Por la propiedad de IG-monotonía, tenemos que $\{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} \subseteq C_W$ y $\{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} \subseteq C_\ominus$. Note que ahora μ_1 no tiene coaliciones de bloqueo fuerte ni de \ominus -bloqueo. De esto concluimos que $C_W = C_\ominus = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$.

Las asignaciones μ_1 y μ_3 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Además, μ_6 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Por ende, ninguna de estas asignaciones está en C_\otimes o en C_S . Por otro lado, las asignaciones μ_2, μ_4 y μ_5 no tienen coaliciones de bloqueo de ningún tipo. Por ende, estas asignaciones están en C_\otimes y en C_S . Concluimos entonces que $C_\otimes = C_S = \{\mu_2, \mu_4, \mu_5\}$.

Las siguientes tablas muestran las relaciones de dominancia y cobertura para las asignaciones dentro de C_W .

Dominancia	Coaliciones que implementan y sus movimientos
$\neg(\mu_1 \underline{\mathcal{D}} \mu_2) \wedge \neg(\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_1)$	
$\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_1$	$\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$.
$\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_1$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_1$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.
$\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_1$	$\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\neg(\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_3) \wedge \neg(\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_2)$	
$\neg(\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_4) \wedge \neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_2)$	
$\neg(\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_5) \wedge \neg(\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_2)$	
$\neg(\mu_2 \underline{\mathcal{D}} \mu_6) \wedge \neg(\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_2)$	
$\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\neg(\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_5) \wedge \neg(\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_3)$	
$\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6 \wedge \mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$	Para $\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_6$, se tiene $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Para $\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$, se tiene $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_5) \wedge \neg(\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_4)$	
$\neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_6) \wedge \neg(\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_4)$	
$\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_6$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.

Cobertura
μ_1 y μ_2 no son \mathfrak{C} -comparables
$\mu_3 \mathfrak{C} \mu_1$
$\mu_4 \mathfrak{C} \mu_1$
$\mu_5 \mathfrak{C} \mu_1$
$\mu_6 \mathfrak{C} \mu_1$
μ_2 y μ_3 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_2 y μ_4 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_2 y μ_5 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_2 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables
$\mu_4 \mathfrak{C} \mu_3$
μ_3 y μ_5 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_3 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_4 y μ_5 no son \mathfrak{C} -comparables
μ_4 y μ_6 no son \mathfrak{C} -comparables
$\mu_5 \mathfrak{C} \mu_6$

Vemos que ahora μ_2, μ_4 y μ_5 son las asignaciones no cubiertas por otra. Por tanto, $C_C = \{\mu_2, \mu_4, \mu_5\}$.

9.3. Detalle con cálculos de la sección 7.2

Escenario 1. Considere el siguiente mercado $[N, C, (\succ_i)_{i \in N}]$ con tres agentes y donde las preferencias vienen caracterizadas por:

- 1: $c_1 \succ_1 c_2, \quad c_1 \succ_1 c_3, \quad c_2 \otimes_1 c_3.$
- 2: $c_1 \succ_2 c_3 \succ_2 c_2.$
- 3: $c_1 \succ_3 c_2 \succ_3 c_3.$

Las posibles asignaciones son:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)], \\ \mu_2 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)], \\ \mu_3 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)], \\ \mu_4 &= [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)], \\ \mu_5 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)], \\ \mu_6 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)].\end{aligned}$$

Note que cualquier asignación en que el agente 1 está con una casa distinta a c_1 no es individualmente racional (es fuertemente bloqueada por $\{1\}$ a través del acuerdo $[(1, c_1)]$) y por tanto no está en ningún núcleo. Además, la asignación μ_1 es fuertemente bloqueada por la coalición $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$, por lo que no está tampoco en ningún núcleo. Por tanto, tenemos que todos los núcleos coinciden y contienen solo a la asignación μ_2 .

Escenario 2. Se agrega una incompletitud adicional a la preferencia del agente 1. Considere ahora que las preferencias son:

$$\begin{aligned}1: & c_1 \otimes_1 c_2, \quad c_1 \succ_1 c_3, \quad c_2 \otimes_1 c_3. \\ 2: & c_1 \succ_2 c_3 \succ_2 c_2. \\ 3: & c_1 \succ_3 c_2 \succ_3 c_3.\end{aligned}$$

Las posibles asignaciones son:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)], \\ \mu_2 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)], \\ \mu_3 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)], \\ \mu_4 &= [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)], \\ \mu_5 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)], \\ \mu_6 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)].\end{aligned}$$

Como los núcleos C_W y C_\otimes son IG-monótonos, sabemos que $\mu_2 \in C_W$ y $\mu_2 \in C_\otimes$. Por otro lado, note que la asignación μ_1 es fuertemente bloqueada por la coalición $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$, por lo que no está en ningún núcleo. Además, las asignaciones μ_5 y μ_6 no son individualmente racionales para el agente 1, y por tanto son fuertemente bloqueadas por la coalición $\{1\}$ a través del acuerdo $[(1, c_1)]$. Por ende, no están en ningún núcleo. Las asignaciones μ_3 y μ_4 no tienen coaliciones de bloqueo fuerte ni de \otimes -bloqueo.

Nótese que μ_2 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Así, $\mu_2 \notin C_\otimes$ y $\mu_2 \notin C_S$. La asignación μ_3 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. La asignación μ_4 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$, y no tiene coaliciones de \otimes -bloqueo. Luego, $\mu_4 \notin C_\otimes$ y $\mu_4 \notin C_S$. En resumen:

$$\begin{aligned}C_W &= \{\mu_2, \mu_3, \mu_4\}, \\ C_\otimes &= \{\mu_2, \mu_3\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\otimes} &= \{\mu_4\}, \\ C_S &= \emptyset. \end{aligned}$$

Nótese que comparando con el escenario 1, podemos concluir que el núcleo fuerte no es IG-monótono. Respecto de las relaciones de dominancia y cobertura para las asignaciones dentro de C_W :

Dominancia	Coaliciones posibles y sus movimientos
$\mu_3 \mathcal{D} \mu_2$	$\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$.
$\mu_4 \mathcal{D} \mu_2$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_3 \mathcal{D} \mu_4$	$\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$.

Cobertura
$\mu_3 \mathcal{C} \mu_2$
$\mu_4 \mathcal{C} \mu_2$
$\mu_3 \mathcal{C} \mu_4$

Concluimos entonces que:

$$C_C = \{\mu_3\}.$$

Escenario 3. Considere ahora que las preferencias son:

- 1: $c_1 \otimes_1 c_2, \quad c_1 \otimes_1 c_3, \quad c_2 \otimes_1 c_3.$
- 2: $c_1 \succ_2 c_3 \succ_2 c_2.$
- 3: $c_1 \succ_3 c_2 \succ_3 c_3.$

Las posibles asignaciones son:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [(1, c_1), (2, c_2), (3, c_3)] \\ \mu_2 &= [(1, c_1), (2, c_3), (3, c_2)] \\ \mu_3 &= [(1, c_2), (2, c_1), (3, c_3)] \\ \mu_4 &= [(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)] \\ \mu_5 &= [(1, c_3), (2, c_2), (3, c_1)] \\ \mu_6 &= [(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]. \end{aligned}$$

Por la IG-monotonía de los núcleos C_W y C_{\otimes} , tenemos que $\{\mu_2, \mu_3, \mu_4\} \subseteq C_W$ y $\{\mu_2, \mu_3\} \subseteq C_{\otimes}$. La asignación μ_1 es fuertemente bloqueada por la coalición $\{2, 3\}$ a través del acuerdo $[(2, c_3), (3, c_2)]$, por lo que esta asignación no está en ningún núcleo. El resto de asignaciones no tienen coaliciones de bloqueo fuerte. Luego, $C_W = \{\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$.

Note que μ_4 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Además, la asignación μ_6 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$. Por ende, estas dos asignaciones no están en C_{\otimes} ni en C_S . La asignación μ_5 no tiene coaliciones de \otimes -bloqueo. Las asignaciones μ_2 y μ_3 son \otimes -bloqueadas por la coalición $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. La asignación μ_3 es \otimes -bloqueada por la coalición $\{1, 3\}$ a través del acuerdo

$[(1, c_3), (3, c_1)]$. Las asignaciones μ_4 y μ_6 no tienen coaliciones de \otimes -bloqueo. De todo esto, concluimos que $C_{\ominus} = \{\mu_2, \mu_3, \mu_5\}$ y $C_{\otimes} = \{\mu_4, \mu_6\}$. Como $C_{\ominus} \cap C_{\otimes} = \emptyset$, concluimos que $C_S = \emptyset$.

Respecto de las relaciones de dominancia y cobertura para las asignaciones dentro de C_W :

Dominancia	Coaliciones posibles y sus movimientos
$\mu_3 \mathcal{D} \mu_2$	$\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$.
$\mu_4 \mathcal{D} \mu_2$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_5 \mathcal{D} \mu_2$	$\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_6 \mathcal{D} \mu_2$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.
$\mu_3 \mathcal{D} \mu_4$	$\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$.
$\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_5 \wedge \mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$	Para $\mu_3 \underline{\mathcal{D}} \mu_5$ se tiene $\{1, 2\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_1)]$. Para $\mu_5 \underline{\mathcal{D}} \mu_3$ se tiene $\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.
$\mu_6 \mathcal{D} \mu_3$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (2, c_1), (3, c_2)]$.
$\mu_4 \mathcal{D} \mu_5$	$\{1, 2, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_2), (2, c_3), (3, c_1)]$.
$\neg(\mu_4 \underline{\mathcal{D}} \mu_6) \wedge \neg(\mu_6 \underline{\mathcal{D}} \mu_4)$	
$\mu_5 \mathcal{D} \mu_6$	$\{1, 3\}$ a través del acuerdo $[(1, c_3), (3, c_1)]$.

Cobertura
$\mu_3 \mathcal{C} \mu_2$
$\mu_4 \mathcal{C} \mu_2$
$\mu_5 \mathcal{C} \mu_2$
$\mu_6 \mathcal{C} \mu_2$
μ_3 y μ_4 no son \mathcal{C} -comparables
μ_3 y μ_5 no son \mathcal{C} -comparables
μ_3 y μ_6 no son \mathcal{C} -comparables
μ_4 y μ_5 no son \mathcal{C} -comparables
μ_4 y μ_6 no son \mathcal{C} -comparables
μ_5 y μ_6 no son \mathcal{C} -comparables

Por tanto, tenemos:

$$C_C = \{\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}.$$