



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA PARCIAL RIGIDEZ DE SISTEMAS DE CANTOR

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

TRISTÁN RADIC CORREA

PROFESOR GUÍA:
Sebastián Donoso Fuentes

PROFESOR CO-GUÍA:
Alejandro Maass Sepúlveda

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
Rodolfo Gutiérrez Romo
María Isabel Cortez Muñoz

Este trabajo ha sido financiado por:
CMM ANID BASAL ACE210010 y CMM ANID BASAL FB210005

SANTIAGO DE CHILE
2023

RESUMEN DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER
EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS
APLICADAS Y MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: TRISTÁN RADICÓ CORREA
FECHA: 2023
PROF. GUÍA: SEBASTIÁN DONOSO FUENTES

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA PARCIAL RIGIDEZ DE SISTEMAS DE CANTOR

El objetivo de esta tesis es estudiar la parcial rigidez de sistemas de Cantor minimales de rango finito y en particular los sistemas substitutivos. Se da énfasis al desarrollo de condiciones necesarias y suficientes para tener parcial rigidez y en el cálculo de las constantes de parcial rigidez. Un sistema dinámico abstracto (X, \mathcal{B}, μ, T) es parcialmente rígido si existe $\gamma \in (0, 1]$ y una subsucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que para todo $A \in \mathcal{B}$, $\lim \mu(A \cap T^{-n_k} A) \geq \gamma \mu(A)$. Además, llamamos constante de parcial rigidez al supremo de las constantes que cumplen lo anterior, y la denotamos δ_μ .

Al representar los sistemas de Cantor minimales de rango finito a través de un diagrama de Bratteli, se entrega una condición necesaria y suficiente para que estos sistemas sean parcialmente rígidos (Teorema 2.23). Esta condición utiliza torres de Kakutani-Rokhlin engendradas por palabras especiales definidas desde cada nivel del diagrama. A partir de esa condición se deducen criterios suficientes que involucran herramientas clásicas en la literatura: criterio de alturas (Teorema 2.28), criterio de orden (Teorema 2.33), criterio de palabras de retorno (Teorema 2.43) y criterio algebraico (Teorema 2.55). Cabe destacar que todos estos criterios son útiles para determinar si estos sistemas no son mezcladores fuertes para la medida.

Como consecuencia de lo anterior, se estudian criterios necesarios y suficientes para la rigidez de los sistemas simbólicos de rango finito, es decir, cuando $\gamma = 1$. Estos criterios, en su mayoría, involucran a la complejidad del sistema, $p_\Omega(n)$, y a la cantidad de palabras completas de largo n , $q_\Omega(n)$. En particular, los sistemas dados por substituciones de largo constante son rígidos en medida si y sólo si $\limsup q_\Omega(n)/p_\Omega(n) = 1$ (Corolario 3.17). Además, para sistemas Sturmianos, se demuestra que existe una sucesión creciente $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_\Omega(r_n + 1) - q_\Omega(r_n + 1) = 2$ (Teorema 3.18). Esto último recupera que los sistemas Sturmianos son rígidos en medida.

Por último, utilizando nuevamente las torres de palabras, se encuentra una expresión para la constante de parcial rigidez δ_μ de sistemas de Cantor minimales de rango finito. Gracias a dicha caracterización, se logra demostrar que en esta clase de sistemas el supremo que define a δ_μ es un máximo (Teorema 4.3). Posteriormente, se logra simplificar la expresión anterior para sistemas substitutivos de largo constante (Teorema 4.5). Esta fórmula permite calcular la constante de parcial rigidez de varios sistemas substitutivos, en particular, para la substitución de Thue-Morse este valor es $2/3$, lo cual era desconocido hasta el momento. A su vez, se demuestra que una gran familia de sistemas substitutivos, que llamamos de tipo Thue-Morse, no son rígidos en medida y se entrega una cota superior para su constante de parcial rigidez (Teorema 4.13). Finalmente, se demuestra que el número 1 es punto de acumulación para el conjunto de las constantes de parcial rigidez de las substituciones (Corolario 4.15).

*Para mi familia,
mis padres, mi hermana y Francisca.*

Agradecimientos

Aprovecho esta página para agradecer a quienes me ayudaron de forma directa o indirecta en el desarrollo de la tesis.

En primer lugar agradecer a mi familia, mis padres Marcela y Smiljan por apoyarme todos estos años de existencia y por la forma en que me criaron, al apoyo silencioso y presente de mi hermana Olivia y a los buenos deseos de mis abuelas, tías, primos y de Bertha. En particular agradecer a mi tía Sandra que con paciencia corrigió mi desastrosa ortografía. Agradecer a Francisca por alegrarme la vida y por todo lo que me has dado estos años.

Luego, agradecer a quienes conocí en la universidad y complementaron mi formación. Al profesor de atletismo Mario Rodríguez y a las personas del área de humanidades, en particular, a la estimulante amistad con el profesor César Cuadra. Agradecer a las amistades que mantengo desde primer año Lukas, Edgardo, Bruno, Fran, Zuleta, Toño y Nico. Incluir a los compañeros del DIM, en particular con los que últimamente he intercambiado conversaciones matemáticas, Arie, Kira, Mati, Nico Cornejo y en especial a Felipe con quien formé una gran amistad gracias a los sistemas dinámicos. A esta lista quisiera agregar a gente de otras generaciones Matías Azócar, Felipe Flores, Martin Gilabert y Vicente Saavedra.

Además, agradecer a los profesores que me formaron matemáticamente durante la vida universitaria, en particular a aquellos que me aceptaron en su equipo docente, Rafael Correa, Daniel Remenik, Joaquín Fontbona, Sebastián Donoso, Rodolfo Gutiérrez, Carlos Conca y Alejandro Maass. Aprovecho de agregar a Natacha Astromujoff por su ayuda en diversos momentos.

En relación más directa con esta tesis, agradezco a los profesores Rodolfo Gutiérrez y María Isabel Cortez por aceptar ser parte de la comisión. Además, quisiera mencionar los provechosos intercambios de ideas que tuve con Bastián Espinoza y las agudas observaciones de Vincent Delecroix que me permitieron avanzar en una dirección que tenía menos explorada en ese momento.

Finalmente quería transmitir mi infinito agradecimiento a Sebastian Donoso y Alejandro Maass quienes guiaron dedicadamente todo el proceso de investigación. Les agradezco también por contagiarme la pasión por la teoría ergódica y los sistemas dinámicos y por el conocimiento que me entregaron durante todo el desarrollo de la tesis.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Nociones básicas de dinámica topológica y simbólica	4
1.1. Sistemas dinámicos topológicos y abstractos	4
1.1.1. Nociones de mezcla y rigidez para medidas invariantes	6
1.2. Sistemas de Cantor	9
1.2.1. Sistemas de Bratteli-Vershik	9
1.2.2. Torres de Kakutani-Rokhlin	13
1.2.3. Sistemas simbólicos	15
1.2.4. Sistemas substitutivos	16
1.2.5. Sistemas \mathcal{S} -adicos	17
1.2.6. Relación entre sistemas \mathcal{S} -adicos y Bratteli-Vershik	18
1.3. Medidas invariantes	21
1.3.1. Medida invariante de las substituciones	24
2. Parcial rigidez en sistemas de Cantor	26
2.1. Torres de palabras	26
2.2. Teoremas de parcial rigidez	28
2.3. Criterios de parcial rigidez en sistemas de Cantor	36
2.3.1. Criterio de crecimiento de las alturas	37
2.3.2. Criterio de orden par-consecutivo	43
2.3.3. Criterio de las palabras de retorno	46
2.3.4. Criterio de la matriz repetida infinitas veces	50
2.4. Ejemplo que no cumple los criterios	53
3. Rigidez en sistemas simbólicos	59
3.1. Rigidez en shifts de rango finito	59
3.2. Rigidez en shifts linealmente recurrentes	61
3.3. Estudio rigidez en shift de substitución	65
3.4. Rigidez en sistemas Sturmianos	70
4. Constante de parcial rigidez	74
4.1. Constante para sistemas de Bratteli-Vershik de rango finito	74
4.2. Constante de parcial rigidez para substituciones de largo constante	76
4.2.1. Constante de parcial rigidez para la substitución de Thue-Morse	77
4.2.2. Las substituciones del tipo Thue Morse no son rígidas	80
Preguntas abiertas	85

Índice de Ilustraciones

1.1.	Diagrama conmutativo que representa a un factor π	5
1.2.	Relaciones entre las nociones de mezcla y rigidez	7
1.3.	Ilustración de la dinámica en un diagrama de Bratteli ordenado	12
1.4.	Ejemplo de diagrama de Bratteli del sistema inducido en $B(2)$	14
1.5.	Relaciones entre los sistemas \mathcal{S} -adicos y los de Bratteli-Vershik.	19
2.1.	Construcción rango 2 problemático	54

Introducción

A lo largo de esta tesis se trabaja con ciertas familias de sistemas dinámicos, en particular con los sistemas llamados de Bratteli-Vershik (ver sección 1.2.1 para una definición detallada).

Un sistema de Bratteli-Vershik es un sistema de Cantor cuyos elementos son paseos infinitos en un tipo de grafo especial con un orden determinado. Esta clase de grafo se conoce como diagrama Bratteli y fue introducida en 1972 por O. Bratteli para estudiar propiedades en la teoría de álgebras de operadores en [Bra72]. Posteriormente A. M. Vershik en [Ver85], generó una dinámica en estos grafos que es conocida hoy como mapeo de Vershik y que dio origen a esta área de estudio. Un resultado que mostró la potencia de esta herramienta en el contexto dinámico fue realizado por H. Herman, I. F. Putnam y C. F. Skau [HPS92] quienes demostraron que todo sistema de Cantor minimal es isomorfo topológicamente a un sistema de Bratteli-Vershik.

Nos concentraremos en una clase de sistemas que son de especial interés dentro de esta teoría: los sistemas de Cantor de rango topológico finito.

Estos sistemas, a grandes rasgos, son aquellos en los que el diagrama de Bratteli sobre el que están contruidos tiene un número acotado de vértices por nivel. Poseen características que los vuelven atractivos de estudiar, en particular, el rango es una cota tanto para el número de medidas ergódicas [BKMS13], como para el rango racional de su grupo de dimensión [GPS95, GHH18]. Además, o bien son expansivos, o bien son equicontinuos [DM08].

Por último, todos tienen entropía cero, de hecho los ejemplos clásicos de sistemas de Cantor minimales de entropía cero son de rango finito: odómetros, shifts substitutivos, shifts linealmente recurrentes o codificaciones simbólicas de intercambios de intervalos. Además, en [DDMP21], se demostró que los subshifts con complejidad no-superlineal también tendrían rango topológico finito. Gran parte de estos resultados se pueden leer en el libro de F. Durand y D. Perrin [DP22] que sirvió como libro de apoyo constante en el desarrollo de la tesis.

La motivación inicial de esta investigación surgió por la constatación de que no se conoce ningún sistema de Cantor de rango finito que posea una medida invariante mixing y, de hecho, todo parece indicar que aquello no es posible. En efecto, hasta la fecha se ha demostrado que los siguientes sistemas **no** poseen medidas invariantes mixing: sistemas substitutivos [DK78], intercambios de intervalos [Kat80], sistemas linealmente recurrentes [CDHM03], sistemas de Cantor de rango exacto finito [BKMS13] y subshifts de complejidad sublineal [Fer96].

La investigación derivó naturalmente en una propiedad un poco más fuerte que no-mixing: la rigidez parcial de una medida.

Una medida invariante se dice parcialmente rígida si existe $\gamma > 0$ y una subsucesión creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que para todo conjunto medible A , $\lim \mu(A \cap T^{n_k} A) \geq \gamma \mu(A)$. En ese caso también decimos que es γ -rígida. Al igual que para la ausencia de mixing, los intercambios de intervalos, los sistemas linealmente recurrentes, los sistemas de rango exacto finito [Dan16] y los subshifts no superlineales [Cre22] son parcialmente rígidos para todas sus medidas ergódicas. Así la pregunta que guía gran parte de la investigación es:

¿Es posible demostrar que toda medida ergódica de un sistema de Cantor minimal de rango topológico finito es parcialmente rígida?

Cabe destacar que la pregunta es pertinente, pues los sistemas de Bratteli-Vershik de rango finito son un contexto natural para generalizar técnicas o resultados de sistemas substitutivos o linealmente recurrentes. Es el caso, por ejemplo, del estudio de los valores propios [BDM05, BDM10] y el estudio de factores topológicos [GH22, Esp20, Esp22]. De forma análoga, problemas que primero fueron trabajados en shifts no-superlineales, tienen resultados similares en rango finito, por ejemplo, en ambos casos el grupo de automorfismos $\text{Aut}(X, T)$ es virtualmente \mathbb{Z} [EM22].

En esta tesis no se entrega una respuesta tajante a la pregunta. Sin embargo, se logra formular una condición necesaria y suficiente para la parcial rigidez, gracias al límite de las medidas de torres de Kakutani-Rokhlin engendradas por una clase de palabras especiales (Teorema 2.23). Esto último abre tres líneas de análisis: condiciones para asegurar parcial rigidez, estudio de la rigidez y cálculo de la constante de parcial rigidez. Esta última, de forma intuitiva, corresponde a la constante γ más grande con la que una medida μ es γ -rígida. Esas tres direcciones coinciden justamente con los capítulos 2, 3 y 4 respectivamente.

Esa organización sugiere un método para estudiar la parcial rigidez de estos sistemas, en el que primero nos preguntamos: ¿podemos asegurar que es parcialmente rígido? Si la respuesta es sí, nos preguntamos: ¿es rígido? Si la respuesta es no, entonces tratamos de calcular su constante de parcial rigidez.

Conocer la constante de parcial rigidez puede ser de mucho interés, ya que es invariante bajo conjugaciones medibles y sólo puede crecer vía factor. Así, como todos los sistemas tienen entropía cero, esta constante podría servir para clasificarlos. En este trabajo se logra aproximar y en algunos casos calcular la constante de parcial rigidez de varios sistemas.

Como se había adelantado antes, la tesis se divide en cuatro capítulos que consisten en:

- **Capítulo 1:** En este capítulo introductorio se describen las conocidas relaciones entre las nociones de mezcla y rigidez en sistemas dinámicos abstractos. Además, se definen los sistemas de Cantor y se describen someramente tres clases de sistemas dinámicos que aparecerán en los siguientes capítulos constantemente: los sistemas de Bratteli-Vershik, los sistemas substitutivos y los sistemas \mathcal{S} -adicos. Se agrega una sección en la que se relacionan estas tres familias.

Cabe destacar que en esta tesis, generalmente, ese trabaja con sistemas de Bratteli-Vershik medibles (donde el mapeo de Vershik no necesariamente es continuo). Esta pequeña flexibilidad prácticamente no tiene ninguna importancia para el análisis del capítulo 2, pero resulta crucial para poder hacer cálculos explícitos en el capítulo 4.

En ese sentido, la generalidad que se utiliza a lo largo de la tesis, no responde a una ambición teórica, sino a posteriores simplificaciones en la combinatoria y, por lo tanto, en las cuentas.

- **Capítulo 2:** Al comienzo del capítulo se describen las subtorres de Kakutani-Rokhlin con las que se demuestran la mayoría de las proposiciones del capítulo. Luego se presenta el Teorema 2.14 que estaba de forma oculta en gran parte de la bibliografía ya citada sobre parcial rigidez. Aquel teorema es una condición suficiente para asegurar parcial rigidez, pero en seguida se presenta una modificación que resulta ser una condición necesaria y suficiente (Teorema 2.23).

Con la ayuda de ambos resultados, se desprende una serie de criterios, nuevos en su mayoría, que permiten asegurar que en ciertos contextos las medidas ergódicas del

sistema son parcialmente rígidas. Estos criterios son de distinta índole, algunos dependen solamente de la forma del diagrama de Bratteli (sección 2.3.1 y 2.3.4) y otros dependen sobretodo del orden en el conjunto de las aristas (sección 2.3.2 y 2.3.3).

En general, a lo largo del capítulo se encuentran cotas inferiores para la constante de parcial rigidez (ver tabla 2.1), sin embargo, estas cotas probablemente pueden ser mejoradas.

La sección final del capítulo consiste en un ejemplo que ilustra lo difícil que sería tratar de construir un sistema que no sea parcialmente rígido cuando el rango es mayor o igual a 2 (para rango 1 siempre es rígido). En ese sentido, podría servir para alguien que intente construir un contraejemplo, es decir, un sistema de Cantor de rango finito con medidas ergódicas que no son parcialmente rígidas.

- **Capítulo 3:** En este capítulo se trabaja con la noción de rigidez, la cual ha sido mucho más estudiada que la parcial rigidez. Existen muchas forma de asegurar que un sistema es rígido, en particular, vía conjugaciones medibles con rotaciones en grupos (es el caso de los sistemas Toeplitz, Sturmianos y odómetros).

Se introducen nuevas maneras para demostrar la rigidez de una medida ergódica sobre todo en el contexto simbólico, primero para sistemas linealmente recurrente y luego para substituciones. Se estudia el límite del cociente entre $q_\Omega(n)$ y $p_\Omega(n)$ con el cual se desprende una condición necesaria para la rigidez, que en el caso de substituciones de largo constante resulta ser una condición necesaria y suficiente.

Además, se demuestra que para todo sistema Sturmiano existe una secuencia $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $q_\Omega(r_n + 1) = p_\Omega(r_n + 1) - 2 = r_n$ y con ella se demuestra que todo Sturmiano es rígido en medida.

- **Capítulo 4:** En este último capítulo se estudia la constante de parcial rigidez para las medidas ergódicas.

En primer lugar, se logra caracterizar esta constante para todo sistema de Bratteli-Vershik de rango finito usando las mismas subtorres que en el capítulo 2. La expresión restante es difícil de ocupar, sin embargo, en el caso de las substituciones de largo constante se logra simplificarla. Gracias a ella se calcula la constante de parcial rigidez del shift de Thue-Morse: $2/3$. Esto se generaliza para una clase de sistemas llamados de tipo Thue-Morse, para los cuales se logra demostrar que no son rígidos y además encontrar una cota superior para la constante de parcial rigidez.

Gracias a esto, en muchos casos, solo será necesario conocer la medida de un número finito de cilindros para calcular la constante máxima rigidez, lo cual resulta bastante simple gracias a los conocidos resultados del libro de M. Queffélec [Que87].

Finalmente, dentro de esta misma familia de substituciones, se demuestra que para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un sistema que no es rígido, pero que es $(1 - \varepsilon)$ -rígido.

Capítulo 1

Nociones básicas de dinámica topológica y simbólica

En este capítulo se definen varios conceptos básicos para el desarrollo de la tesis con el objetivo de fijar notaciones y volver la lectura lo más auto-contenida posible. La mayoría de los conceptos han sido traducidos al español, sin embargo, para ciertos casos se optó por conservar su nombre en inglés. Los resultados de este capítulo se presentan sin demostración, sin embargo, la mayoría puede encontrarse en [DP22, Que87, DDMP21, EFHN15, BKM08, BKMS13].

1.1. Sistemas dinámicos topológicos y abstractos

Decimos que una tupa (X, \mathcal{X}, μ, T) es un *sistema dinámico abstracto* si (X, \mathcal{X}, μ) es un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ es una transformación $\mathcal{X} - \mathcal{X}$ medible que satisface:

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{X}. \quad (1.1)$$

Cuando una transformación T satisface (1.1) decimos que T *preserva la medida* μ o que μ es T -invariante. Cuando además T es biyectiva y T^{-1} es $\mathcal{X} - \mathcal{X}$ medible, decimos que el sistema es *invertible*. Decimos además que (X, \mathcal{X}, μ, T) es *ergódico* (o simplemente que la medida μ es *ergódica*) si para todo $A \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(A \Delta T^{-1}A) = 0$ entonces $\mu(A) = 0$ o $\mu(X \setminus A) = 0$. Si consideramos ahora dos sistemas dinámicos abstractos (X, \mathcal{X}, μ, T) e (Y, \mathcal{Y}, ν, S) , decimos que la función $\pi : X \rightarrow Y$ $\mathcal{X} - \mathcal{Y}$ medible es un *factor medible* si $\pi \circ T = S \circ \pi$ $\mu - c.s.$ y $\mu(\pi^{-1}B) = \nu(B)$ para todo $B \in \mathcal{Y}$ (ver Figura 1.1). Si además π es invertible casi seguramente con inversa medible, decimos que es un *isomorfismo* o una *conjugación medible*.

Existe a su vez una versión continua de los conceptos anteriores, así se entenderá que un *sistema dinámico topológico* (o simplemente *sistema dinámico*) es un par (X, T) en el que X es un espacio métrico compacto y $T : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo. Denotamos $\mathcal{O}_T(x) = \{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}$ (o simplemente $\mathcal{O}(x)$) a la órbita de $x \in X$. Un punto $x \in X$ es *periódico* si su órbita $\mathcal{O}(x)$ es un conjunto finito, en el caso contrario decimos que es *aperiódico*. Decimos que un sistema dinámico es *aperiódico* si todos sus puntos son aperiódicos y que es *minimal* si para todo $x \in X$ la órbita $\mathcal{O}(x)$ es densa en X . En los sistemas minimales todos los puntos son *uniformemente recurrentes*, es decir, para toda vecindad abierta U de $x \in X$,

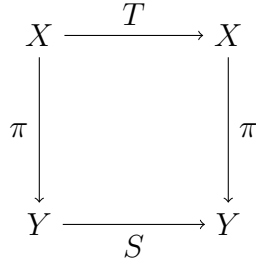


Figura 1.1: Diagrama conmutativo que representa a un factor π .

el conjunto $N(x, U) = \{n \in \mathbb{Z} : T^n x \in U\}$ es sindético.¹ Notar que si (X, T) es minimal con X de cardinalidad infinita, entonces X no posee puntos periódicos. Además, basta que las órbitas positivas $\{T^n x : n > 0\}$ de cualquier punto x sea densa para asegurar la minimalidad de X (lo mismo para órbitas negativas).

Denotamos $\mathcal{M}(X, T)$ al conjunto de medidas de probabilidad regulares T -invariantes en los Borelianos de X y $\mathcal{E}(X, T)$ el conjunto de las medidas de probabilidad ergódicas. Claramente $\mathcal{E}(X, T) \subseteq \mathcal{M}(X, T)$. Para un sistema dinámico topológico, es bien sabido que $\mathcal{E}(X, T)$ siempre posee al menos un elemento. Cuando $|\mathcal{E}(X, T)| = 1$, entonces (X, T) posee una única medida de probabilidad T -invariante y decimos que T es únicamente ergódico.

En esta tesis es de especial interés comprender propiedades de las medidas invariantes de un espacio topológico. Claramente, para $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, si $\mathcal{B}(X)$ denota la σ -álgebra de los Borelianos de X , entonces $(X, \mathcal{B}(X), \mu, T)$ es un sistema dinámico abstracto. Cuando se quiera hacer referencia a propiedades medibles de un sistema dinámico topológico para una medida $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ particular, se escribirá simplemente (X, μ, T) en vez de $(X, \mathcal{B}(X), \mu, T)$.

Al igual que en el contexto medible, un *factor* entre dos sistemas dinámicos topológicos (X, T) e (Y, S) es una función continua sobreyectiva $\pi : X \rightarrow Y$ que cumple que $\pi \circ T = S \circ \pi$, es decir satisface el mismo diagrama conmutativo de más arriba. De existir tal función π decimos que (Y, S) es un *factor* de (X, T) y que (X, T) es una *extensión* de (Y, S) . Si además π es biyectiva, decimos que π es una *conjugación* y que (X, T) e (Y, S) son *conjugados*, esto último lo denotaremos $(X, T) \cong (Y, S)$. Notar que como X es un espacio compacto, la inversa de una función continua y biyectiva de X a Y es continua, en particular una conjugación es también un homeomorfismo entre los espacios X e Y .

Decimos que una propiedad P *se hereda vía factor* si se cumple que cuando (X, T) satisface la propiedad P , entonces todo factor (Y, S) también satisface P . Podemos notar que la minimalidad y la única ergodicidad se heredan vía factor. En el contexto medible, decimos que la propiedad P *se hereda de vía factor medible* si cumple la condición anterior pero para factores medibles. Por ejemplo, la ergodicidad de un sistema dinámico abstracto se hereda vía factor medible. Gran parte de las nociones que se verán en la sección siguiente se heredan vía factor medible.

¹ Recordar que un conjunto $N \subseteq \mathbb{Z}$ es sindético si existe un conjunto finito $F \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $N + F = \mathbb{Z}$.

1.1.1. Nociones de mezcla y rigidez para medidas invariantes

Como bien se dijo en la introducción, en esta tesis se van a estudiar propiedades de mezcla y rigidez de ciertos sistemas dinámicos topológicos. Antes de definir formalmente estas nociones, vale la pena recordar que un sistema dinámico abstracto (X, \mathcal{X}, μ, T) es ergódico si y sólo si

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}A \cap B) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu(A) \cdot \mu(B). \quad (1.2)$$

Por varias razones la noción de ergodicidad es clave en el estudio de sistemas dinámicos y teoría ergódica. Inspirado en el estudio de límites similares al de (1.2) nace una serie de nociones sobre las medidas invariantes que son de gran interés. Entre ellas destacamos las siguientes:

Definición 1.1 Sea (X, \mathcal{X}, μ, T) un sistema dinámico abstracto, decimos que el sistema (o la medida de probabilidad μ) es

1. **weak-mixing** si para todo $A, B \in \mathcal{X}$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \mu(T^{-n}A \cap B) - \mu(A) \cdot \mu(B) \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (1.3)$$

2. **mild-mixing** si para todo $A \in \mathcal{X}$ con $\mu(A) \in (0, 1)$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A \Delta T^{-n}A) > 0, \quad (1.4)$$

3. **mixing** (o **strong-mixing**) si para todo $A, B \in \mathcal{X}$

$$\mu(T^{-n}A \cap B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A) \cdot \mu(B), \quad (1.5)$$

4. **γ -rígida** o **parcialmente rígida** si para una constante $\gamma > 0$, existe una secuencia $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ con $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ tal que para todo $A \in \mathcal{X}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n_k}A) \geq \gamma \mu(A), \quad (1.6)$$

y si $\gamma = 1$ decimos que μ es **rígida**.

Observación 1.2 Todas las nociones anteriores se heredan vía factor medible, en particular, la constante γ se mantiene para la rigidez parcial. En efecto, si (Y, \mathcal{Y}, ν, S) es factor medible de un sistema (X, \mathcal{X}, μ, T) que es γ -rígido, entonces para $B \in \mathcal{Y}$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(B \cap S^{-n_k}B) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\pi^{-1}(B \cap S^{-n_k}B)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\pi^{-1}B \cap T^{-n_k}(\pi^{-1}B)) \\ &\geq \gamma \mu(\pi^{-1}B) = \gamma \nu(B). \end{aligned}$$

Observación 1.4 La propiedad anterior es relevante para establecer que las rotaciones en \mathbb{T}^d , el toro d -dimensional, son rígidas para la medida de Lebesgue y, por ende, todo factor medible de una rotación en el toro tiene medida rígida. Esto implica que todo sistema equicontinuo es rígido (consultar [Aus88]).

Por último cabe destacar que para la rigidez parcial, si (X, \mathcal{X}, μ, T) es γ -rígido, entonces claramente es δ -rígido para $0 < \delta \leq \gamma$, lo cual motiva la siguiente definición:

Definición 1.5 Para un sistema dinámico abstracto (X, \mathcal{X}, μ, T) parcialmente rígido se define la constante de parcial rigidez $\delta_\mu \in (0, 1]$ de la siguiente forma

$$\delta_\mu = \sup\{\gamma \in (0, 1] : \mu \text{ es } \gamma\text{-rígido para } T\}. \quad (1.8)$$

Cuando (X, \mathcal{X}, μ, T) no es parcialmente rígido decimos que $\delta_\mu = 0$.

Encontrar esta constante para ciertos sistemas es motivo de estudio en los capítulos posteriores.

Observación 1.6 No es claro si el supremo de (1.8) se alcanza, por lo que no se puede asegurar *a priori* que todo sistema parcialmente rígido es también δ_μ -rígido. Sin embargo, como veremos más adelante, gracias al Lema 4.2, dicho supremo siempre se alcanza en los sistemas que se estudiarán en esta tesis.

Nuevamente por la heredabilidad vía factor medible, se tiene que si (X, \mathcal{X}, μ, T) es extensión de (Y, \mathcal{Y}, ν, S) entonces $0 \leq \delta_\mu \leq \delta_\nu \leq 1$, es decir, la constante de parcial rigidez sólo puede crecer o mantenerse vía factor (en particular es invariante vía conjugación).

Esto último puede ser de especial interés para clasificar ciertos sistemas, en particular, los sistemas *de rango finito* que definiremos más adelante siempre tienen entropía 0, pero presentan una diversidad de valores para δ_μ (ver capítulo 4). Además, la constante δ_μ se podría interpretar como una especie de distancia con el factor equicontinuo maximal, en particular, cuando $\delta_\mu < 1$, el sistema no es isomorfo en medida al sistema equicontinuo maximal.

Observación 1.7 Finalmente, como ya se mencionó en la observación 1.2, si una medida es parcialmente rígida (y no atómica), entonces no es mixing. En los sistemas *de rango finito* que introduciremos más adelante, las transformaciones tendrán un número finito de medidas de probabilidad ergódicas que serán no-atómicas. Ahora bien, una condición necesaria para que una medida sea mixing, es que sea ergódica, por lo tanto, para completar el estudio sobre la ausencia de mixing basta restringirse a estudiar las medidas ergódicas.

Para el resto de las medidas invariantes, si se quisiera asegurar que son parcialmente rígidas, al ser combinaciones convexas de medidas ergódicas μ_i , se debería demostrar que las sucesiones de parcial rigidez asociadas $(n_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ comparten una misma subsucesión.

1.2. Sistemas de Cantor

Decimos que (X, T) es un *sistema de Cantor* si es un sistema dinámico topológico y X es un *espacio de Cantor*, es decir, es un espacio métrico y compacto, totalmente desconexo y sin puntos aislados. Los espacios de Cantor tienen una base numerable de vecindades *clopen* (abiertas y cerradas) y son de dimensión 0.

En esta sección se introducirán dos grandes familias de sistemas de Cantor, las torres de Kakutani-Rokhlin y cómo se relacionan entre ellas.

1.2.1. Sistemas de Bratteli-Vershik

Antes de definir a los sistemas de Bratteli-Vershik, vale la pena mencionar que en esta tesis se van a considerar tanto sistemas de Bratteli-Vershik topológicos (que son los usuales en la literatura), como sistemas de Bratteli-Vershik medibles. En ambos casos el espacio de fase X_B será un espacio de Cantor y la transformación T_B será invertible, pero en el segundo caso la transformación T_B no será continua. La idea de trabajar con esta generalidad es que no solo nos interesan los sistemas de Bratteli-Vershik por sí solos, sino también como representantes de otros sistemas topológicos y muchas veces resulta más útil considerar una representación medible (estos conceptos se definen formalmente más adelante). En esta sección comenzaremos definiendo los sistemas de Bratteli-Vershik topológicos y posteriormente indicaremos qué cambia en el caso medible. Para ello tenemos que introducir la estructura básica de estos sistemas:

Un diagrama de Bratteli $B = (V, E)$ es un (multi)grafo con un conjunto de vértices y arcos numerables que cumplen las siguientes propiedades

- V posee una partición numerable $V_0, V_1, \dots, V_n, \dots$ tales que cada conjunto V_n es finito y V_0 posee un único vértice v_0 . A los vértices $v \in V_n$ se les llama *vértices en el nivel n* y el diagrama de Bratteli normalmente se representa con los niveles de arriba hacia abajo.
- E también posee una partición numerable $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ tal que todos los arcos en E_n unen un vértice de V_{n-1} a uno de V_n , en particular no hay arcos entre vértices del mismo nivel, ni con vértices a dos o más niveles de diferencia. A los arcos $e \in E_n$ se les llama *arcos del nivel n* .
- Además, definimos la función *source* $s : E_n \rightarrow V_{n-1}$ y *range* $r : E_n \rightarrow V_n$ de tal forma que para $e \in E_n$ que conecta a u con v , con $u \in V_{n-1}$ y $v \in V_n$ entonces $s(e) = u$ y $r(e) = v$. Todo diagrama de Bratteli debe cumplir que para todo $n \geq 1$, $s^{-1}(\{u\}) \neq \emptyset$ para $u \in V_{n-1}$ y $r^{-1}(\{v\}) \neq \emptyset$ para todo $v \in V_n$.

Haciendo un pequeño abuso de notación, cuando $|V_n| = d_n$, muchas veces escribiremos $V_n = \{1, \dots, d_n\}$. Para $n \geq 1$, definimos la matriz de adyacencia $M_B^{(n)} \in \mathbb{N}^{V_n \times V_{n-1}}$ (o simplemente $M^{(n)}$) como la matriz tal que la celda $(v, u) \in V_n \times V_{n-1}$ corresponde a la cantidad de arcos que unen a u con v , es decir, $M_{v,u}^{(n)} = |\{e \in E_n : s(e) = u \text{ y } r(e) = v\}|$. Cuando $M^{(1)} = (1, \dots, 1)^\top$, decimos que B es *simple-hat*.

Decimos que $\bar{e} = e_1 e_2 \cdots e_\ell$ es un *paseo* de largo ℓ si $r(e_i) = s(e_{i+1})$ para todo $1 \leq i < \ell$ y para $m > n$ denotamos $E(n, m)$ al conjunto de paseos de largo $m - n$ que unen a vértices del nivel n con vértices del nivel m . Así definimos $M^{(n,m)} = M^{(m)} M^{(m-1)} \cdots M^{(n+1)} \in \mathbb{N}^{V_m \times V_n}$

en que las celdas $(v, u) \in V_m \times V_n$ equivalen a la cantidad de paseos en $E(n, m)$ que unen a los vértices u y v (en particular $M^{(n)} = M^{(n-1, n)}$). Decimos que $B = (V, E)$ es *simple* si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que $M^{(n, m)} > 0$, es decir, tal que para cada vértice $u \in V_n$ y $v \in V_m$ existe al menos un paseo \bar{e} que los conecte.

Definimos $X_B = \{(x_n)_{n \geq 1} \in \prod_{n \geq 1} E_n : r(x_n) = s(x_{n+1}) \ \forall n \geq 1\}$ al espacio generado por el diagrama de Bratteli B . Si X_B tiene cardinalidad infinita y lo dotamos de la topología producto, entonces X_B es un espacio de Cantor. En particular, se lo puede dotar de la métrica d_B dada por

$$d_B((x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}) = 2^{-\inf\{n \geq 1 : x_n \neq y_n\}} \quad \text{donde consideramos } 2^{-\infty} = 0.$$

Notar que los cilindros de los paseos finitos $\bar{e} = (e_{n+1}, \dots, e_m) \in E(n, m)$ dados por $[\bar{e}]_{X_B} = \{(x_n)_{n \geq 1} \in X_B : x_{n+1} = e_{n+1}, \dots, x_m = e_m\}$ forman una base de la topología. Además, el espacio X_B es infinito si y sólo si la cardinalidad de $r^{-1}(\{v\})$ es estrictamente mayor que 1 para una cantidad infinita de vértices $v \in V$. En este trabajo sólo consideramos diagramas de Bratteli que cumplan lo anterior (salvo que se escriba explícitamente lo contrario).

Para los elementos de X_B decimos que $x, y \in X_B$ son *cofinales* si tienen la misma *cola*, es decir, si existe $n \geq 1$ tal que $x_k = y_k$ para todo $k \geq n$. Cuando x e y son cofinales escribimos $x \sim y$. Notar que cada clase de equivalencia dada por \sim es densa cuando X_B es infinito y B es simple.

Para definir la dinámica que nos interesa estudiar en X_B , es necesario dotar al diagrama de Bratteli de un orden parcial en el conjunto de arcos E , así decimos que $B = (V, E, \leq)$ es un *diagrama de Bratteli ordenado* si (V, E) es un diagrama de Bratteli y \leq es una relación de orden parcial en E donde dos arcos $e, f \in E$ son comparables si y sólo si $r(e) = r(f)$. Esta relación de orden induce a su vez un orden en el conjunto de los paseos finitos que llamamos *orden lexicográfico*: para $\bar{e}, \bar{f} \in E(n, m)$, decimos que $e_{n+1} \cdots e_m < f_{n+1} \cdots f_m$ si y sólo si existe i con $n < i \leq m$ tal que $e_i < f_i$ y $e_j = f_j$ para todo $i < j \leq m$.

Para $x = (x_n)_{n \geq 1} \in X_B$ denotamos $v_n(x) = r(x_n)$ el n -ésimo vértice de x y definimos X_B^{max} como el conjunto de puntos $x \in X_B$ tales que x_n es el arco maximal en $r^{-1}(\{v_n(x)\})$ para todo $n \geq 1$. De forma análoga se define X_B^{min} . Es claro que los conjuntos X_B^{max} y X_B^{min} son no vacíos y cuando $X_B^{max} = \{x_{max}\}$ y $X_B^{min} = \{x_{min}\}$ (es decir los paseos maximales y minimales infinitos son únicos), entonces decimos que el diagrama $B = (V, E, \leq)$ es *propiamente ordenado*. Con esto último ya estamos en condiciones de introducir el mapeo de Vershik.

Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli decimos que $T_B : X_B \rightarrow X_B$ es un *mapeo de Vershik* u *homeomorfismo de Vershik* si cumple las siguientes tres propiedades

- (V1) T_B es un homeomorfismo,
- (V2) $T_B(X_B^{max}) = X_B^{min}$
- (V3) y para $x \notin X_B^{max}$ entonces sea $k \geq 1$ el entero más pequeño tal que x_k no es un arco maximal en $r^{-1}(\{v_k(x)\})$, sea $f_k \in r^{-1}(\{v_k(x)\})$ el sucesor de x_k y $(f_1, f_2, \dots, f_{k-1}) \in E(0, k-1)$ el paseo minimal tal que $r(f_{k-1}) = s(f_k)$, con ello

$$T_B(x) = (f_1, f_2, \dots, f_{k-1}, f_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots)$$

Cuando el diagrama de Bratteli es propiamente ordenado y simple, sólo existe una función T_B que cumpla (V2) y (V3) pues X_B^{max} y X_B^{min} tienen un solo elemento. Más aún, dicha

función es un homeomorfismo, es decir, cumple (V1). Además, la función inversa de T_B viene dada por considerar el orden \geq en vez de \leq .

Por lo estudiado anteriormente, cuando X_B tiene cardinalidad infinita, (X_B, T_B) es un sistema de Cantor que llamamos *sistema de Bratteli-Vershik*. En la página siguiente, la Figura 1.3 ilustra gran parte de lo descrito en esta sección, en donde los números en los arcos indican el orden parcial del diagrama de Bratteli.

Notar que por construcción, para $B = (V, E, \leq)$ propiamente ordenado y simple, se puede notar que si $x \in \mathcal{O}_{T_B}(x_{max})$, entonces $\mathcal{O}_{T_B}(x) = [x_{min}]_{\sim} \cup [x_{max}]_{\sim}$ y si $x \notin \mathcal{O}_{T_B}(x_{max})$, entonces $\mathcal{O}_{T_B}(x) = [x]_{\sim}$, donde $[x]_{\sim}$ indica la clase de equivalencia de x con respecto a la relación cofinal \sim . En la sección 1.3 cuando se caracteriza el conjunto de medidas T_B -invariantes, se ve otra consecuencia de esta observación: las medidas invariantes no dependen de la dinámica (y, por tanto, del orden \leq) sino que pueden expresarse únicamente con respecto a la relación cofinal (y, por lo tanto, sólo a la estructura de (V, E)). Por último, nuevamente en el contexto de $B = (V, E, \leq)$ propiamente ordenado y simple, gracias a que para todo $x \in X_B$ las clases de equivalencia $[x]_{\sim}$ son densas, se tiene que (X_B, T_B) es minimal.

Como se adelantó al principio de la sección, cuando $B = (V, E, \leq)$ no cumple alguna de las hipótesis anteriores, todavía podemos definir una dinámica en el contexto medible. En efecto, si una función invertible $T_B : X_B \rightarrow X_B$ cumple (V2) y (V3), pero es sólo Borel-medible y con inversa Borel-medible, decimos que es una *transformación medible de Vershik*, pero generalmente seguiremos refiriéndonos a ella como mapeo de Vershik. Si además μ es una medida T_B -invariante decimos que $(X_B, \mathcal{B}(X_B), \mu, T_B)$ es un sistema de *Bratteli-Vershik medible*. Hay que hacer notar que los únicos puntos de discontinuidad podrían estar en las órbitas de los puntos de X_B^{max} . Es decir si $\mathcal{O}_{max} = \bigcup_{y \in X_B^{max}} \mathcal{O}_{T_B}(y)$, luego para $x \in X_B \setminus \mathcal{O}_{max}$ la transformación es continua en ese punto. Como se ve en la sección 1.3, en los casos de interés, el conjunto X_B^{max} tiene medida 0 para las medidas invariantes y, como las órbitas son numerables, \mathcal{O}_{max} también tiene medida 0. Por lo tanto, el estudio en el contexto medible no es muy distinto al caso continuo en todo punto.

Hay algunas nociones que son muy útiles para relacionar los sistemas de Cantor minimales con los sistema de Bratteli-Vershik (ver sección 1.2.6), una de ellas es la operación *telescoping*. Se define el telescoping de $B = (V, E, \leq)$ con respecto a la sucesión creciente de enteros $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al diagrama de Bratteli ordenado $B' = (V', E', \leq')$ dado por $V'_n = V_{m_n}$, $E'_n = E(m_n, m_{n+1})$ y \leq' el orden inducido por \leq en el conjunto E'_n . Las matrices de adyacencia cumplen que $M_{B'}^{(n)} = M_B^{(m_n, m_{n+1})}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que B es simple si y sólo si vía telescoping puede dar origen a un diagrama de Bratteli de matrices estrictamente positivas.

Otra noción importante es la de *rango*. Decimos que el diagrama de Bratteli $B = (V, E, \leq)$ es de rango finito si existe un entero c y una infinidad de $V_n \subseteq V$ tales que $|V_n| \leq c$. De no existir dicho c , decimos que es de *rango infinito*. Además, decimos que B tiene rango d si $d \geq 1$ es el entero más pequeño que cumple lo anterior. Por otra parte el diagrama de Bratteli es de *rango uniformemente finito d* si para todo $n \geq 1$ $|V_n| = d$. Resulta que, vía telescoping, todo diagrama de Bratteli $B = (V, E, \leq)$ de rango finito d puede dar origen a un diagrama de rango uniformemente finito d $B' = (V', E', \leq')$, para ello basta tomar la sucesión $(m_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{0\} \cup \{m \geq 1 : |V_m| = d\}$ (con $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots$).

Para finalizar esta sección vamos a definir tres familias notables de sistemas de Bratteli-Vershik. Decimos que (X_B, T_B) (o que B) es

- i) estacionaria si existe una matriz M tal que $M_B^{(n)} = M$ para todo $n \geq 2$.

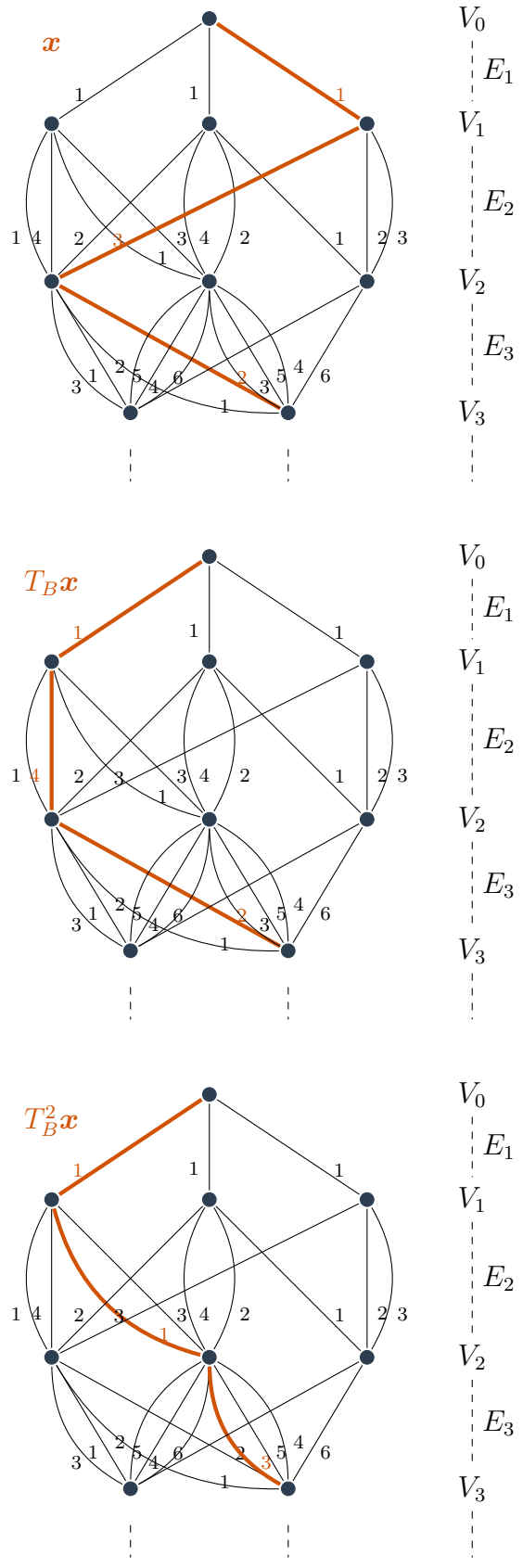


Figura 1.3: Ilustración de la dinámica en un diagrama de Bratteli ordenado

- ii) linealmente recurrente si existe un conjunto finito de matrices \mathcal{M} , tales que $(M^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$.
- iii) tipo Toeplitz si existe $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $n \geq 1$, $v \in V_n$ se tenga que $|r^{-1}(\{v\})| = q_n$, es decir, $\sum_{u \in V_{n-1}} M_{v,u}^{(n)} = q_n$.

Notar que la noción de tipo Toeplitz en este contexto no necesariamente coincide con la noción de Toeplitz usual (ver definición en [DP22]), pero por [GJ00] sabemos que todo sistema Toeplitz puede escribirse como un sistema de Bratteli-Vershik con B de tipo Toeplitz (que no necesariamente es de rango finito).

1.2.2. Torres de Kakutani-Rokhlin

Vamos a introducir una estructura característica de los sistemas de Cantor que está muy ligada a los sistemas de Bratteli-Vershik.

Sea (X, T) un sistema dinámico de Cantor, decimos que una partición \mathcal{P} de la forma $\mathcal{P} = \{T^j B_k : 1 \leq k \leq d, 0 \leq j \leq h_k\}$ es una *partición (clopen) de Kakutani-Rokhlin* si $d \geq 1$ y B_1, \dots, B_d son subconjuntos clopen disjuntos y h_1, \dots, h_d son enteros positivos. Decimos que B_k es la k -ésima base de \mathcal{P} , $\mathcal{T}_k = \bigcup_{j=0}^{h_k-1} T^j B_k$ es la k -ésima torre y $T^j B_k$ con $0 \leq j < h_k$ es el j -ésimo piso de la k -ésima torre.

Sea ahora una secuencia de particiones de Kakutani-Rokhlin:

$$(\mathcal{P}(n) = \{T^{-j} B_k(n) : 1 \leq k \leq d_n, 0 \leq j \leq h_k^{(n)}\})_{n \in \mathbb{N}} \quad (1.9)$$

con $B(n) = \bigcup_{k=1}^{d_n} B_k(n)$ la base de $\mathcal{P}(n)$ y $\mathcal{P}(0) = \{X\}$. Decimos que $(\mathcal{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ es *anidada* si para todo $n \in \mathbb{N}$ satisface

(KR 1) $B(n+1) \subseteq B(n)$

(KR 2) $\mathcal{P}(n+1) \succeq \mathcal{P}(n)$ (ie para todo $A \in \mathcal{P}(n+1)$ existe $A' \in \mathcal{P}(n)$ tal que $A \subseteq A'$).

Cuando $(\mathcal{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ es anidada, también nos gustaría que cumpla que

(KR 3) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(n)$ consiste en un solo punto.

(KR 4) La secuencia de particiones genera la topología de X , es decir, para todo punto $x \in X$ y vecindad abierta $U \subseteq X$ de x , existe $n \in \mathbb{N}$ y $P \in \mathcal{P}(n)$ tal que $x \in P$ y $P \subseteq U$.

Luego se tiene que:

Teorema 1.8 *Sea (X, T) un sistema de Cantor minimal y $x_0 \in X$ un punto arbitrario. Luego existe una secuencia de particiones de Kakutani-Rokhlin que cumple (KR 1) - (KR 4) en donde además $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(n) = \{x_0\}$*

La estructura del diagrama de Bratteli ordenado $B = (V, E, \leq)$, induce naturalmente una secuencia de torres de Kakutani-Rokhlin, $\mathcal{P}_B(n) = \{T_B^j B_v(n) : v \in V_n, 0 \leq j < h_v^{(n)}\}$ donde $B_v(n)$ y $h_v^{(n)}$ son respectivamente la base y la altura de la torre asociada al vértice $v \in V_n$ de la siguiente forma: $B_v(n) = \{x \in X_B : x_1 = e_1, x_2 = e_2, \dots, x_n = e_n\}$ con $\bar{e}(v_0, v) = e_1 e_2 \cdots e_n$ el paseo minimal para el orden en $E(v_0, v) = \{\bar{f} \in E : s(f_1) = v_0, r(f_n) = v\}$ (los caminos

que empiezan en v_0 y terminan en v). La altura $h_v^{(n)}$ es la cardinalidad del conjunto $E(v_0, v)$ y, como antes, $B(n) = \bigcup_{v \in V_n} B_v(n)$. Para $v \in V_n$, escribiremos $X_v^{(n)}$ la torre dada por el vértice v en el nivel n , ie $X_v^{(n)} = \{x \in X_B : s(x_{n+1}) = v\}$. Notar que $X_v^{(n)} = \bigcup_{i=0}^{h_v^{(n)}-1} T_B^i B_v(n)$.

No es difícil notar que para todo diagrama de Bratteli propiamente ordenado y simple, $(\mathcal{P}_B(n))_{n \in \mathbb{N}}$ cumple $(KR1)$ - $(KR4)$, más aún, $\bigcap_{n \geq 1} B(n) = \{x_{min}\}$. Más generalmente, en el caso $T_B : X_B \rightarrow X_B$ una transformación medible de Vershik para $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado (no necesariamente simple ni propiamente ordenado), $(\mathcal{P}_B(n))$ sigue siendo una secuencia de particiones de Kakutani-Rokhlin clopen que es anidada y que genera a la topología, sin embargo, sólo cumple que $\bigcap_{n \geq 1} B(n) = X_B^{min}$ (es decir cuando $|X_B^{min}| > 1$ no satisface $(KR3)$).

En ambos contextos (topológico y medible) decimos que \mathcal{T} es una sub-torre de $X_v^{(n)}$ si $\mathcal{T} \subseteq X_v^{(n)}$ y $\mathcal{T} = \bigcup_{j=0}^{h_v^{(n)}-1} T_B^j(\mathcal{T} \cap B_v(n))$, en tal caso diremos que $\mathcal{T} \cap B_v(n)$ es la base de \mathcal{T} . En la sección 2.1 se introducirán unas sub-torres de especial interés para esta tesis.

Volviendo al caso general, sea (X, T) un sistema de Cantor minimal y $U \subseteq X$ un conjunto clopen. Sea la función continua $n_U : U \rightarrow \mathbb{N}$ dado por $n_U(x) = \inf\{n \geq 1 : T^n x \in U\}$ el *primer tiempo de retorno a U*, como X es minimal tenemos que para todo $x \in U$, $n_U(x) < \infty$ y por compacidad toma una cantidad finita de valores. Definimos $T_U : U \rightarrow U$ la transformación inducida por T en U como la aplicación $x \mapsto T^{n_U(x)}x$, con ello se tiene que (U, T_U) es un sistema de Cantor minimal. En particular cuando consideramos $U = B(n)$ la base de una partición de torres de Kakutani-Rokhlin, se tiene que $n_U(x) = h_k^{(n)}$ cuando $x \in B_k(n)$.

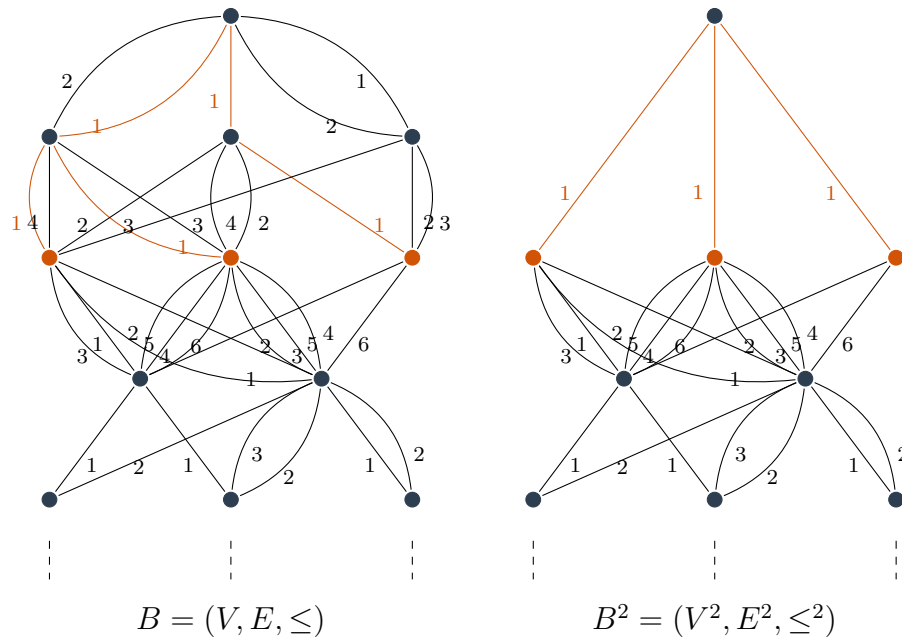


Figura 1.4: Ejemplo de diagrama de Bratteli del sistema inducido en $B(2)$

En el contexto de $(X, T) = (X_B, T_B)$ denotamos $(B(m), T_m)$ al sistema dinámico inducido por T_B en la base $B(m)$.

Luego definimos $B^m = (V^m, E^m, \leq^m)$ el diagrama de Bratteli dado por $V^m = \{v_0\} \cup \{V_n\}_{n \geq m}$, $E_1^m = \{(v_0, v) : v \in V_m\}$, $E^m = E_1^m \cup \{E_n\}_{n > m}$ y \leq^m el mismo orden que \leq en

$E_{m+n-1} = E_n^m$. Es decir, se borran los primeros $m - 1$ niveles, se une el vector v_0 con los del nivel m con un único arco y el resto del diagrama se mantiene igual (ver ejemplo Figura 1.4). Podemos observar que dada esa construcción $(B(m), T_m) \cong (X_{B^m}, T_{B^m})$. Además, cuando el diagrama B es estacionario y simple-hat, entonces $(X_B, T_B) \cong (B(m), T_m)$ para todo m .

1.2.3. Sistemas simbólicos

A un conjunto finito \mathcal{A} lo llamaremos *alfabeto* y a sus elementos, *letras*. Para un $\ell \in \mathbb{N}$ fijo, decimos que los elementos $\omega \in \mathcal{A}^\ell$ son *palabras* de largo ℓ y escribimos $\omega = \omega_1 \cdots \omega_\ell$ con $\omega_i \in \mathcal{A}$. Por convención escribimos $\mathcal{A}^0 = \{\varepsilon\}$ donde ε es la *palabra vacía*. Denotamos $\mathcal{A}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n$ y $\mathcal{A}^+ = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}^n$ al conjunto de palabras y al conjunto de palabras no vacías.

Denotamos $|\omega|$ el largo de la palabra ω . \mathcal{A}^* se dota de la operación *concatenación*, donde para ω, ϑ dos palabras de largo n y m , $\omega\vartheta$ es la palabra de largo $n + m$ dada por $\omega\vartheta = \omega_1 \cdots \omega_n \vartheta_1 \cdots \vartheta_m$. La palabra vacía ε es el neutro para la concatenación, es decir, para todo $\omega \in \mathcal{A}^*$ $\omega\varepsilon = \varepsilon\omega = \omega$.

Para dos conjuntos $W, W' \subseteq \mathcal{A}^*$, escribimos $WW' = \{\omega\omega' \in \mathcal{A}^* : (\omega, \omega') \in W \times W'\}$ si $W = \{\omega\}$ una única palabra, escribimos simplemente $\omega W'$ (y análogamente para $W' = \{\omega'\}$) y se extiende de forma natural para una colección finita de conjunto $W_1, \dots, W_\ell \subseteq \mathcal{A}^*$.

Para una palabra $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$ de largo n , escribimos $\vartheta = \omega_{[i,j]} = \omega_{[i,j+1)} = \omega_i \omega_{i+1} \cdots \omega_j$ para todo $1 \leq i \leq j \leq n$. En tal caso decimos que i es una *ocurrencia* de ϑ en ω y que ϑ es una *subpalabra* de ω . Aquello lo denotamos como $\vartheta \sqsubseteq \omega$. Cuando $i = 1$, diremos que ϑ es *prefijo* de ω , mientras que cuando $j = n$, diremos que ϑ es *sufijo* de ω . Además para $a \in \mathcal{A}$ denotamos $|\omega|_a$ el número de ocurrencias de a en ω .

Sea $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ el conjunto de palabras bi-infinitas dotado con la topología producto. A $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, S)$ se le conoce como el *full-shift* con $S : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ dado por $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. X es un espacio de Cantor que podemos dotar de la métrica d dada por:

$$d((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = 2^{-\inf\{|i| : x_i \neq y_i\}} \quad \text{donde consideramos } 2^{-\infty} = 0.$$

Podemos notar que S es un homeomorfismo, por lo tanto, $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, S)$ es un sistema de Cantor. A la función S la llamamos *shift*. Por lo demás, para todo conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ cerrado y S -invariante (es decir, $S^{-1}\Omega = \Omega$), la tupla $(\Omega, S|_\Omega)$ también es un sistema de Cantor que llamamos *subshift* o *sistema simbólico*. En tal caso, para $S|_\Omega$ vamos a escribir simplemente S . En esta tesis, generalmente vamos a utilizar la letra Ω para designar los sistemas simbólicos y X para el resto de los sistemas dinámicos.

Para (Ω, S) un *subshift*, si $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Omega$ al igual que para las palabras finitas, se define $\omega = x_{[i,j]} = x_{[i,j+1)} = x_i x_{i+1} \cdots x_j \in \mathcal{A}^{j-i+1}$ para $-\infty < i \leq j < \infty$ y también escribimos que $\omega \sqsubseteq x$. Para $x \in \Omega$ denotamos $\mathcal{L}(x) = \{\omega \in \mathcal{A}^* : \omega \sqsubseteq x\}$ el lenguaje de la secuencia x y $\mathcal{L}(\Omega) := \bigcup_{x \in \Omega} \mathcal{L}(x)$ el lenguaje de Ω . A su vez, para $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_m(x) = \mathcal{L}(x) \cap \mathcal{A}^m$ y $\mathcal{L}_m(\Omega) = \mathcal{L}(\Omega) \cap \mathcal{A}^m$. Por último, para $\omega\vartheta \in \mathcal{L}(\Omega)$ definimos el *cilindro* $[\omega \cdot \vartheta]_\Omega$ como el conjunto:

$$[\omega \cdot \vartheta]_\Omega = \{x \in \Omega : x_{[-|\omega|, |\vartheta|)} = \omega\vartheta\},$$

donde si $\omega = \varepsilon$ la palabra vacía, entonces escribimos simplemente $[\vartheta]_\Omega$. Los cilindros definen una subbase de conjuntos clopen para la topología de Ω .

Finalmente, decimos que $\mathcal{L}(\Omega)$ es *uniformemente recurrente* si para toda palabra $\omega \in \mathcal{L}(\Omega)$ existe $m \geq |\omega|$, tal que ω es subpalabra para toda palabra en $\mathcal{L}_m(\Omega)$. Con el lenguaje se puede recuperar mucha información del sistema, un ejemplo de esto es la siguiente proposición:

Proposición 1.9 Para un subshift (Ω, S) los siguientes son equivalentes

1. (Ω, S) es minimal
2. $\mathcal{L}(\Omega)$ es uniformemente recurrente
3. Todo $x \in \Omega$ es uniformemente recurrente y $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\Omega)$.

En particular, para cualquier $x \in \Omega$, $\Omega = \overline{\mathcal{O}_S(x)}$. En tal caso escribimos $\Omega = \Omega(x)$.

1.2.4. Sistemas substitutivos

Los sistemas substitutivos son un ejemplo de sistemas simbólicos que se estudian a fondo a lo largo de esta tesis y que serán muy útiles para ilustrar algunos resultados.

Para dos alfabetos \mathcal{A}, \mathcal{B} finitos, decimos que $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ es un *morfismo* si $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon$ y para todo $\omega, \vartheta \in \mathcal{A}^*$, $\sigma(\omega\vartheta) = \sigma(\omega)\sigma(\vartheta)$. Dado lo anterior, es claro que para conocer los valores de σ basta con saber como actúa en las letras del alfabeto \mathcal{A} , pues para $m \geq 1$ y $\omega \in \mathcal{A}^m$, $\sigma(\omega) = \sigma(\omega_1) \cdots \sigma(\omega_m)$. Si $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, decimos que es un *endomorfismo*. Denotamos $|\sigma| = \max_{a \in \mathcal{A}} |\sigma(a)|$ y $\langle \sigma \rangle = \min_{a \in \mathcal{A}} |\sigma(a)|$. Cuando $\langle \sigma \rangle = |\sigma|$ decimos que σ es de *largo constante*. Decimos además que un endomorfismo σ es *creciente* si $\lim \langle \sigma^n \rangle = \infty$ y que σ *no borra letras* si $\sigma(a) \neq \varepsilon$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Para un endomorfismo $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$, definimos

$$\mathcal{L}(\sigma) = \{\omega \in \mathcal{A}^* \mid \exists n \geq 1, a \in \mathcal{A} : \omega \sqsubseteq \sigma^n(a)\}.$$

El estudiante debe entregar copias en papel de la memoria en Secretaría de Titulación del Departamento o Programa para distribución a la comisión, y firmar el formulario de Autorización de Tesis Electrónica

A su vez, definimos $\Omega(\sigma)$ como el conjunto de secuencias $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tales que toda subpalabra de y pertenece a $\mathcal{L}(\sigma)$, es decir, $\mathcal{L}(y) \subseteq \mathcal{L}(\sigma)$. Notar que por definición $\mathcal{L}(\Omega(\sigma)) \subseteq \mathcal{L}(\sigma)$, pero la igualdad no siempre se alcanza. Decimos que σ es una *substitución* si es un endomorfismo que no borra letras y cumple que $\mathcal{L}(\sigma) = \mathcal{L}(\Omega(\sigma))$. Cuando σ es una substitución decimos que $\Omega(\sigma)$ es un sistema substitutivo.

Para un morfismo $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ definimos *la matriz de incidencia* $M(\sigma) \in \mathbb{N}^{\mathcal{B} \times \mathcal{A}}$ dada por $m_{b,a} = |\sigma(a)|_b$, es decir el número de ocurrencias de b en $\sigma(a)$. Notamos que para $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ y $\tau : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{C}^*$, $M(\tau \circ \sigma) = M(\tau)M(\sigma)$. Decimos que una substitución $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ es *positiva* si $M(\sigma) > 0$ y *primitiva* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que σ^n es positiva (lo cual es equivalente a que la matriz $M(\sigma)$ sea primitiva). La noción de primitividad es clave, pues se tiene la siguiente propiedad:

Proposición 1.10 Para toda substitución primitiva $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$, $\Omega(\sigma)$ es minimal.

El morfismo σ es *propio* si existen $b, b' \in \mathcal{B}$ tales que para todo $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a) \in b\mathcal{B}^*b'$. Un endomorfismo se dice *eventualmente propio* si existe un entero p tal que σ^p es propio. Muchas substituciones primitivas de interés no son propias, sin embargo, existe una construcción que “las vuelve propias” en el siguiente sentido:

Proposición 1.11 Todo sistema substitutivo minimal $(\Omega(\sigma), S)$ es conjugado a un sistema substitutivo $(\Omega(\tau), S)$ con $\tau : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ eventualmente propio y primitivo.

La construcción de la substitución τ en la proposición anterior se puede leer en [DP22, capítulo 6].

1.2.5. Sistemas \mathcal{S} -adicos

Una generalización natural de los sistemas substitutivos son los sistemas \mathcal{S} -adicos. A una secuencia de morfismos de la forma $\sigma = (\sigma_n : \mathcal{A}_{n+1}^* \rightarrow \mathcal{A}_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$, la llamamos *secuencia directiva*. Solo se consideran secuencias directivas en las que todos los morfismos no borren letras.

En el contexto de secuencias directivas, se definen conceptos heredados de las substituciones, por ejemplo, decimos que σ es *propia* si para todo $n \geq 1$ σ_n es un morfismo propio y es *positiva* si para todo $n \geq 1$ σ_n es un morfismo positivo. Nótese que no pedimos que σ_0 sea propio o positivo para ambas definiciones y de hecho, en general, no lo es. De hecho, en muchos casos de interés, se pide que $\sigma_0 : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ sea de *tipo gorro*, es decir, que $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ y que $\sigma_0|_{\mathcal{A}}$ sea una biyección entre ambos alfabetos.

Para $0 \leq i \leq j < \infty$ denotamos $\sigma_{[i,j]}$ o $\sigma_{[i,j-1]}$ al morfismo $\sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \cdots \circ \sigma_{j-1}$. Decimos que σ es *primitivo* si para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $j > i$ tal que $M(\sigma_{[i,j]}) > 0$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos el *lenguaje $\mathcal{L}^{(n)}(\sigma)$ del nivel n asociado a σ* dado por:

$$\mathcal{L}^{(n)}(\sigma) = \{\omega \in \mathcal{A}_n^* : \omega \sqsubseteq \sigma_{[n,m]}(a) \text{ para algún } a \in \mathcal{A}_m \text{ con } m > n\}$$

y $\Omega_{\sigma}^{(n)}$ como el conjunto de puntos $x \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{Z}}$ tal que $\mathcal{L}(x) \subseteq \mathcal{L}^{(n)}(\sigma)$ que llamamos el *subshift generado por $\mathcal{L}^{(n)}(\sigma)$* . Al igual que en la sección anterior, podría darse el caso que $\mathcal{L}(\Omega_{\sigma}^{(n)})$ esté estrictamente contenida en $\mathcal{L}^{(n)}(\sigma)$, pero en el caso primitivo ambos conjuntos coinciden y $\Omega_{\sigma}^{(n)}$ es minimal. Finalmente, decimos que $\Omega(\sigma) = \Omega_{\sigma}^{(0)}$ es el *sistema \mathcal{S} -adico* generado por la secuencia directiva σ .

Si consideramos una secuencia directiva constante $\sigma \equiv \sigma$ con $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ morfismo, entonces la nociones de primitividad, positividad y ser propio coinciden en ambos contextos. En particular cuando σ es primitiva (y por lo tanto σ) entonces $\Omega(\sigma) = \Omega(\sigma)$.

La última noción clave para el estudio de los sistemas \mathcal{S} -adicos es la noción de *reconocibilidad*, para ello sea $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ un morfismo y $x \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$. Si $x = S^k \sigma(y)$ para algún $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $k \in \mathbb{Z}$ decimos que (k, y) es una σ -representación de x y si $y \in \Omega \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ decimos que (k, y) es una σ -representación de x para Ω . Además, si $0 \leq k < |\sigma(y_0)|$, entonces decimos que (k, y) es una σ -representación centrada de x para Ω . De [BSTY19] decimos que σ es *reconocible en Ω* si para todo $x \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ tiene a lo más una σ -representación centrada en Ω . Similarmente, si para todo punto $x \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ aperiódico tiene a lo más una σ -representación centrada en Ω , entonces decimos que σ es *reconocible en Ω para puntos aperiódicos*.

Para que σ sea reconocible para puntos aperiódicos, basta que cumpla una de las siguientes tres hipótesis:

- $rg(M(\sigma)) = |\mathcal{A}|$
- $|\mathcal{A}| = 2$ o que
- σ sea un morfismo *permutable por izquierda* o *por derecha*, es decir, si para todo par de letras $a \neq b$, la primera (resp. última) letra de $\sigma(a)$ es distinta a la primera (resp. última) letra de $\sigma(b)$.

Dado lo anterior, decimos que $\sigma = (\sigma_n : \mathcal{A}_{n+1}^* \rightarrow \mathcal{A}_n^*)$ es *reconocible en el nivel n* si σ_n es reconocible en $\Omega_{\sigma}^{(n+1)}$. La secuencia directiva σ es *reconocible* si es reconocible en cada nivel $n \geq 0$. Decimos que σ es *eventualmente reconocible* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que todo σ_n es reconocible para $n > m$.

1.2.6. Relación entre sistemas \mathcal{S} -adicos y Bratteli-Vershik

Gran parte de los resultados que se enuncian en los capítulos siguientes son demostrados en el contexto de diagramas de Bratteli, sin embargo, los sistemas de Bratteli-Vershik tienen una relación íntima con los sistemas \mathcal{S} -adicos. En particular, dada una secuencia directiva σ generalmente es posible establecer una representación explícita en un diagrama de Bratteli. Para motivar esto vamos a enunciar un teorema central para el estudio de los sistemas de Cantor:

Teorema 1.12 (Herman, Putman, Skau) *Para todo sistema de Cantor minimal (X, T) , existe un diagrama de Bratteli simple y propiamente ordenado $B = (V, E, \leq)$ tal que (X, T) es conjugado topológicamente a (X_B, T_B) .*

La demostración de este teorema viene dada por el Teorema 1.8. En la sección 1.2.2 se muestra cómo la estructura de los diagramas de Bratteli induce naturalmente una secuencia de torres de Kakutani-Rokhlin y la idea de la demostración de este teorema es que se puede hacer el camino inverso, es decir, de una secuencia de torres de Kakutani-Rokhlin que cumple $(KR1)$ - $(KR4)$ se puede construir un diagrama de Bratteli ordenado cuyo sistema de Bratteli-Vershik asociado es conjugado al sistema (X, T) original. La demostración de ambos teoremas se puede leer en [DP22, capítulos 5 y 6].

Si para un diagrama Bratteli simple y propiamente ordenado $B = (V, E, \leq)$ se tiene que $(X_B, T_B) \cong (X, T)$, decimos que B es una *BV-representación* de (X, T) . El teorema anterior establece que todo sistema de Cantor minimal tiene una BV-representación, sin embargo, no se precisa cómo será dicha representación.

Como se mencionó, para algunos sistemas \mathcal{S} -adicos se puede establecer una BV-representación explícita. Antes de pasar a ese teorema, hay que mencionar que las BV-representaciones no son únicas, pero cumplen una estructura común. En efecto, decimos que dos diagramas de Bratteli simples y propiamente ordenados $B = (V, E, \leq)$ y $B' = (V', E', \leq')$ son equivalentes, que denotamos $B \simeq B'$, si existe un tercer diagrama de Bratteli ordenado $B'' = (V'', E'', \leq'')$ que es generado por ambos vía telescoping. Con ello se tiene que:

Proposición 1.13 *Sea $B = (V, E, \leq)$ y $B' = (V', E', \leq')$ dos diagramas de Bratteli propiamente ordenados y simples. Entonces $B \simeq B'$ si y solo si $(X_B, T_B) \cong (X_{B'}, T_{B'})$*

Con ello definimos el siguiente concepto clave

Definición 1.14 *Sea (X, T) un sistema de Cantor, si existe $B = (V, E, \leq)$ una BV-representación de rango finito de (X, T) , decimos que (X, T) es de **rango topológico finito**, si además toda BV-representación tiene rango al menos d , decimos que su **rango topológico** es d .*

Observación 1.15 Es importante notar que se han introducido hasta el momento dos nociones de *rango*. La primera es el rango de un diagrama de Bratteli ordenado y la segunda es el rango topológico de un sistema de Cantor minimal. A lo largo de esta tesis se trabajará con la hipótesis de que B es de rango finito y bueno (ver definición 1.29), lo cual es ligeramente más general que rango topológico finito, pues B no siempre será simple y propiamente ordenado.

La familia de sistemas de Cantor minimales de rango topológico finito es interesante pues reúne a los odómetros, los shifts substitutivos, los shifts de complejidad sublineal y gran parte

de los sistemas \mathcal{S} -adicos. En el resto del capítulo nos preocupamos de explicitar ese último punto.

Para un diagrama de Bratteli ordenado $B = (V, E, \leq)$ definimos la secuencia de morfismos que *se leen* en B , $\boldsymbol{\tau}^B = (\{\tau_n^B : V_{n+1}^* \rightarrow V_n^*\}_{n \geq 1} \cup \{\tau_0^B : V_1^* \rightarrow E_1^*\})$, dada por

$$\begin{aligned} \tau_0^B(v) &= e_1(v)e_2(v) \cdots e_\ell(v) && \text{para } v \in V_1 \\ \tau_n^B(v) &= s(e_1(v))s(e_2(v)) \cdots s(e_\ell(v)) && \text{para } v \in V_{n+1}, \end{aligned}$$

donde estamos escribiendo $r^{-1}(\{v\}) = \{e_1(v) \leq e_2(v) \leq \cdots \leq e_\ell(v)\} \subseteq E_{n+1}$ con \leq el orden del diagrama de Bratteli en $r^{-1}(\{v\})$. Decimos que el morfismo τ_n^B *se lee en el nivel $n+1$ de B* . Cuando B es simple y propiamente ordenado, por la unicidad de x_{max} y x_{min} , podemos suponer, vía telescoping, que $\boldsymbol{\tau}^B$ es propio. Ahora definimos

$$\Omega_B^{(0)} = \Omega_B = \{(\pi_1(T_B^k x))_{k \in \mathbb{Z}} : x = (x_i)_{i \geq 1} \in X_B\} \subseteq E_1^{\mathbb{Z}}$$

con $\pi_n : X_B \rightarrow E_n$ la proyección dada por $\pi_n(x) = x_n$. Sea la función $\phi_0 : X_B \rightarrow \Omega_B$ dado por $\phi_0(x) = (\pi_1(T_B^k x))_{k \in \mathbb{Z}}$, entonces ϕ_0 es sobreyectiva, medible y cumple que $\phi_0(T_B x) = (\pi_1(T_B^k T_B x))_{k \in \mathbb{Z}} = (\pi_1(T_B^{k+1} x))_{k \in \mathbb{Z}} = S(\phi_0 x)$. Además cuando B es simple y propiamente ordenado ϕ_0 es continua. Por lo tanto, ϕ_0 es factor (medible o topológico) entre (X_B, T_B) y (Ω_B, S) que llamamos *factor natural*. Ahora, dado B^n el diagrama de Bratteli ordenado dado por la base $B(n)$, definimos $\Omega_B^{(n)} = \Omega_{B^n}$ y el *factor natural en la base n* $\phi_n : X_{B^n} \rightarrow \Omega_B^{(n)}$. En particular, cuando B es simple y propiamente ordenado (de rango mayor o igual a 2) queda que $(\Omega_B^{(n)}, S) \cong (\Omega_{\boldsymbol{\tau}^B}^{(n)}, S)$, para esto último solo hay que notar que $\Omega_B^{(n)} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} S^k \tau_n^B(r(\Omega_B^{(n+1)}))$.

Vía telescoping, siempre podemos suponer que nuestro diagrama de Bratteli cumple que, para todo $v \in V_1$, $|r^{-1}(\{v\})| = 1$, es decir, B se vuelve simple-hat (basta agregar E_1 al conjunto de vértices entre V_0 y V_1). Bajo la hipótesis de simple-hat, podemos considerar que la secuencia de morfismos que se leen en B , es simplemente $\boldsymbol{\tau}^B = (\tau_n^B : V_{n+1}^* \rightarrow V_n^*)_{n \geq 1}$, pues τ_0^B no hace más que renombrar las letras. Aquello es consistente con la construcción anterior, pues cuando B es simple-hat $B = B^1$.

Así en la Figura 1.5 se puede ver un resumen de los resultados anteriores:

$$\begin{array}{ccc} (X_B, T_B) & \xrightarrow{\phi_0} & (\Omega_B, S) \cong (\Omega(\boldsymbol{\tau}^B), S) \\ \text{Inducido} \downarrow & & \\ (B(m), T_m) & \xrightarrow{\phi_m} & (\Omega_B^{(m)}, S) \cong (\Omega_{\boldsymbol{\tau}^B}^{(m)}, S) \end{array}$$

Figura 1.5: Relaciones entre los sistemas \mathcal{S} -adicos y los de Bratteli-Vershik.

Con ello sólo resta saber en qué casos se puede asegurar que ϕ_0 no es sólo un factor sino una conjugación. Así de [DDMP21] tenemos que:

Teorema 1.16

Sea $\sigma = (\sigma_n : \mathcal{A}_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$ una secuencia directiva reconocible y propia, con σ_0 un morfismo tipo gorro. Entonces, el subshift \mathcal{S} -adico generado por σ es topológicamente conjugado al sistema de Bratteli-Vershik (X_B, T_B) con B tal que $\tau^B = \sigma$.

A su vez de forma recíproca tenemos que

Sea (X, T) un sistema minimal de Cantor dado por $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado. Si (X, T) es expansivo, entonces la secuencia de morfismos que se leen en B , $\tau^B = (\tau_n^B : V_{n+1}^* \rightarrow V_n^*)_{n \geq 0}$ es eventualmente reconocible. Más aún, (X, T) es topológicamente conjugado al subshift \mathcal{S} -adico generado por una secuencia directiva σ propia y reconocible obtenida de τ^B (vía contracción) al hacer telescoping en B .

En ambos casos el factor natural $\phi_0 : \Omega(\sigma) \rightarrow X_B$ es la conjugación.

Observación 1.17 Vale la pena explicitar que el teorema anterior solo tiene sentido cuando el sistema de Cantor (X, T) tiene rango topológico estrictamente mayor que 1, pues por [DM08] es conocida la dicotomía que para sistemas de Cantor minimales de rango topológico finito: tener rango topológico igual a 1 implica ser equicontinuo, mientras que para rangos estrictamente mayores que 1 implica ser expansivo y por lo tanto conjugado a un subshift.

Observación 1.18 Notar que la notación de las matrices puede llevar a algunas confusiones, pues se tiene que

$$M_B^{(n)} = M(\tau_n^B)^\top \quad \forall n \geq 1$$

Observación 1.19 Dado el teorema anterior y la Proposición 1.11, salvo conjugación, la familia de sistemas de Cantor dados por un diagrama de Bratteli propiamente ordenado, estacionario y simple-hat es idéntica a la familia de sistemas substitutivos (el resultado es originalmente de [DHS99]). Sin embargo, la substitución conjugada a la original que cumpla ser propia y primitiva, generalmente es más compleja combinatorialmente lo cual puede complicar el estudio de las medidas invariantes. Es por esto que en lo que sigue introducimos una noción similar, pero un poco más flexible, que es válida únicamente en el contexto medible y que facilita bastante los cálculos.

Decimos que $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado (no necesariamente simple ni propiamente ordenado) es una *BV-representación medible* del sistema $(Y, \mathcal{Y}, \nu, \mathcal{S})$, si $(X_B, \mathcal{B}(X_B), \mu, T_B)$ es isomorfo a ese sistema, donde μ es una medida T_B -invariante. Notar que como estamos considerando conjugaciones medibles, no es necesario que Y tenga las mismas propiedades topológicas que X_B .

Por lo demás, cabe destacar que si T y S son transformaciones medibles en (X, \mathcal{X}) e (Y, \mathcal{Y}) respectivamente y consideramos una función $\pi : X \rightarrow Y$ biyectiva, medible y con inversa medible, que conmuta con las dinámicas ($\pi \circ T = S \circ \pi$), entonces las medidas invariantes para S inducen medidas invariantes T (y viceversa), tomando simplemente $\mu = \pi \nu$ (o $\nu = \pi^{-1} \mu$ respectivamente). Mencionamos esto pues generalmente cuando se trabaja con factores medibles se considera que π es invertible c.s. para ciertas medidas μ y ν particulares de los espacios respectivos, sin embargo, en nuestro caso, los isomorfismos que definen las BV-representaciones medibles serán invertibles en todo punto (y no sólo para conjuntos de medida 1). Por lo tanto, se realiza el análisis con cualquiera de las medidas invariantes de la

misma forma que se hace cuando se trabaja con conjugaciones topológicas.

En esa línea, siguiendo con el estudio de [BSTY19] tenemos la siguiente proposición (generalización de un resultado de [Liv88]) que no pide que σ sea propio como en el Teorema 1.16, pero aún así establece una conjugación medible entre el sistema \mathcal{S} -adico con secuencia directiva σ y sistema de Bratteli-Vershik medible dado por el diagrama B_σ :

Teorema 1.20 *Sea σ una secuencia directiva primitiva y (X_B, T) el sistema de Bratteli-Vershik medible asociado naturalmente a σ (es decir con $\sigma = \tau^B$). Entonces $(\Omega(\sigma), S)$ es factor medible de (X_B, T) y si además σ es reconocible, entonces ambos sistemas son conjugados en medida.*

Observación 1.21 En el teorema anterior, el factor medible en cuestión es justamente la función $\phi_0 : (X_B, T) \rightarrow (\Omega(\sigma), S)$ definida más arriba. Cuando este es el caso, tanto en el contexto medible como topológico, diremos que B es la BV-representación natural de $(\Omega(\sigma), S)$.

Finalmente, podemos mencionar que en la versión original de este teorema en vez de pedir que $\sigma = (\sigma_n : \mathcal{A}_{n+1}^* \rightarrow \mathcal{A}_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ sea primitivo, piden que sea *creciente en todas partes*, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{a \in \mathcal{A}_n^*} \sigma_{[0,n]}(a) = \infty$. En ese caso, en vez de asegurar que $\Omega(\sigma)$ es minimal, aseguran que no tiene puntos periódicos.

1.3. Medidas invariantes

En esta sección, antes de estudiar las medidas invariantes en el contexto de los sistemas de Bratteli-Vershik, presentamos la noción de medidas invariantes con respecto a una relación de equivalencia. Esa noción es útil para definir a las medidas invariantes con respecto a la relación cofinal \sim .

Definición 1.22 *Sea (X, \mathcal{X}) un espacio medible y $\text{Aut}(X, \mathcal{X})$ el conjunto de automorfismos medibles, es decir, de funciones biyectivas medibles con inversa medible. Sea $G \subseteq \text{Aut}(X, \mathcal{X})$ un grupo, decimos que G actúa sobre X y escribimos generalmente gx en vez de $g(x)$ para $x \in X$ y $g \in G$. Por último denotamos $Gx = \{gx : g \in G\}$.*

Un ejemplo de un grupo G es $\{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$ para $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{X})$.

Sea además \mathcal{R} una relación de equivalencia numerable (es decir con clases de equivalencia numerables), cuyas clases de equivalencia son conjuntos pertenecientes a la σ -álgebra \mathcal{X} . Decimos que un grupo $G \subseteq \text{Aut}(X, \mathcal{X})$ genera a \mathcal{R} si para todo $x \in X$ $[x]_{\mathcal{R}} = Gx$. Decimos además que una medida μ es \mathcal{R} -invariante si es G -invariante para todo grupo $G \subseteq \text{Aut}(X, \mathcal{X})$ numerable tal que genera a \mathcal{R} (es decir $\forall A \in \mathcal{X}, g \in G \mu(gA) = \mu(A)$).

Proposición 1.23 *Sea $G, H \subseteq \text{Aut}(X, \mathcal{X})$ dos grupos numerables tales que $Gx = Hx$ para todo $x \in X$ y μ una medida G -invariante de X entonces μ es H -invariante.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \in \mathcal{X}$ y $h \in H$ arbitrarios, como $Gx = Hx$ para todo x , se tiene que para todo $a \in A$, existe $g \in G$ tal que $ga = ha$ (pues ha está en Ga). Con ello se define el conjunto medible $A_g = \{a \in A : ga = ha\}$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que la familia de conjuntos $\{A_g\}_{g \in G}$ es disjunta dos a dos, de lo contrario se puede construir una familia similar de forma inductiva en la que se *quitan* los puntos repetidos (recordar que G es numerable). Con ello se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mu(hA) &= \mu\left(\bigcup_{g \in G} hA_g\right) = \mu\left(\bigcup_{g \in G} gA_g\right) && \text{(definición de } A_g) \\
&= \sum_{g \in G} \mu(gA_g) = \sum_{g \in G} \mu(A_g) && (G - \text{invarianza}) \\
&= \mu(A)
\end{aligned}$$

□

Observación 1.24 La propiedad anterior implica que en la definición de medidas \mathcal{R} -invariantes, puedo reemplazar “para todo grupo G numerable que genera a \mathcal{R} ” por “para algún grupo G numerable que genera a \mathcal{R} ”. En particular, si $\mathcal{M}^*(\mathcal{R})$ es el conjunto de las medidas \mathcal{R} -invariantes y $\mathcal{M}^*(G), \mathcal{M}^*(H)$ el conjunto de las medidas invariantes respectivas para $G, H \subseteq \text{Aut}(X, \mathcal{X})$ dos grupos numerables que generan a \mathcal{R} , entonces $\mathcal{M}^*(\mathcal{R}) = \mathcal{M}^*(G) = \mathcal{M}^*(H)$.

Observación 1.25 De forma similar, se definen las medidas ergódicas con respecto a una relación de equivalencia \mathcal{R} , es decir, si G un grupo numerable de automorfismos medibles que genera a \mathcal{R} y μ una medida \mathcal{R} -invariante, entonces se dice ergódica si $\mu(A \Delta gA) = 0 \ \forall g \in G \Leftrightarrow \mu(A) = 0 \vee \mu(A^c) = 0$.

Definición 1.26 Decimos que una relación de equivalencia \mathcal{R} es **aperiódica** si todas las clases de equivalencia tienen cardinalidad infinita.

Proposición 1.27 Sea μ una medida de probabilidad \mathcal{R} -invariante con \mathcal{R} aperiódica, entonces μ es no atómica, es decir, $\forall x \in X \ \mu(\{x\}) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo que genera a \mathcal{R} , si existe $\mu(\{x\}) = \alpha > 0$, entonces como \mathcal{R} es aperiódica, el conjunto Gx tiene cardinalidad infinita y, por lo tanto, $\mu(Gx) = |Gx|\alpha = \infty$ lo cual contradice el hecho que μ sea medida de probabilidad. □

Observación 1.28 En la proposición anterior, se está suponiendo implícitamente que la σ -álgebra del espacio \mathcal{X} contiene a los singletones, lo cual es cierto en los casos que nos interesa estudiar.

Como se mencionó queremos aplicar lo anterior para la relación de equivalencia cofinal \sim en un diagrama de Bratteli ordenado $B = (V, E, \leq)$. En particular, bajo hipótesis mínimas sobre B , el conjunto de las medidas de probabilidad regulares invariantes para una transformación medible de Vershik coincide con el de las medidas de probabilidad regulares (\sim)-invariantes. Para poder enunciar esto apropiadamente, definimos la siguiente noción que será la hipótesis estándar a lo largo de la tesis:

Definición 1.29 Decimos que $B = (V, E, \leq)$ es **bueno** si

1. X_B no posee puntos aislados,
2. la relación cofinal es aperiódica, es decir, no existen clases de equivalencia $[x]_{\sim}$ finitas.

Observación 1.30 Ninguna de las dos condiciones anteriores dependen del orden. Además, como se comentó en la sección 1.2.1, si B es simple y X_B es infinito, entonces B es bueno. En particular, todos los enunciados sobre sistemas de Bratteli-Vershik medibles cuyo diagrama de Bratteli ordenado B es bueno y de rango finito serán validos para los sistemas de Cantor minimales de rango topológico finito.

Definición 1.31 Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado, \sim la relación cofinal entre los paseos infinitos. Escribimos $\mathcal{M}(X_B, \sim)$ y $\mathcal{E}(X_B, \sim)$, el conjunto de medidas de probabilidad regulares (\sim) -invariantes y ergódicas respectivamente.

Observación 1.32 Notamos que en la definición 1.22 siempre se pide que un cierto subgrupo numerable de los automorfismos medibles G genere a \mathcal{R} , pero que exista dicho grupo G no es evidente. Sin embargo, en el contexto de la relación cofinal podemos asegurarlo, más aún es subgrupo de los homeomorfismos de X_B en sí mismo. Como no es el objetivo de esta tesis, no se ahondará más en aquello, sin embargo, los detalles se pueden encontrar en [GPS04].

Observación 1.33 Gracias a la Proposición 1.27, podemos asegurar que las medidas en $\mathcal{M}(X_B, \sim)$ no pueden ser atómicas cuando B es bueno. Bajo esa hipótesis, entonces sabemos que X_B^{max} tiene medida 0 y, por lo tanto, \mathcal{O}_{max} también tiene medida 0. Con ello podemos notar tres cosas:

- Como para $x \in X_B \setminus \mathcal{O}_{max}$, $\mathcal{O}_{T_B}(x) = [x]_{\sim}$ y además \mathcal{O}_{max} tiene medida cero para toda medida en $\mathcal{M}(X_B, \sim)$, entonces se tiene que, al igual que en la observación 1.24, $\mathcal{M}(X_B, \sim) = \mathcal{M}(T_B)$ donde $\mathcal{M}(T_B)$ el conjunto de las medidas de probabilidad T_B -invariantes (sin importar si T_B es continuo en todo punto).
- Además, como $\bigcap_{n \geq 1} B(n) = X_B^{min}$ queda que $\mu(B(n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- A su vez, haciendo un pequeño abuso de notación, aún en los casos en los que el diagrama de Bratteli no sea propiamente ordenado, se hablará de “el” mapeo de Vershik dado por el diagrama de Bratteli ordenado B , porque para cualquier medida de probabilidad invariante, las transformaciones medibles de Vershik dadas por B coinciden y son continuas en el conjunto $X_B \setminus \mathcal{O}_{max}$ que es de medida 1.

Notemos que el primer punto nos indica que las medidas invariantes con respecto al mapeo de Vershik no dependen del orden, sino únicamente de la forma del diagrama de Bratteli. Más aun, en [BKMS13] muestran que las medidas de probabilidad invariantes se pueden caracterizar completamente con las matrices de adyacencia. De dicho estudio, vamos a destacar la siguiente proposición:

Proposición 1.34 Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado bueno, simple-hat y de rango uniformemente finito d . Entonces se puede contraer B de tal forma que

- Para μ una medida ergódica, si $W_\mu = \{v \in \{1, \dots, d\} : \inf_{n \geq 1} \mu(X_v^{(n)}) > 0\}$, entonces $W_\mu \neq \emptyset$ (donde se está usando el abuso de notación $V_n = \{1, \dots, d\}$ para todo $n \geq 1$).
- Para $\mu \neq \nu$ dos medidas de probabilidad ergódicas, entonces $W_\mu \cap W_\nu = \emptyset$
- Para μ una medida ergódica y para todo $v \notin W_\mu$,

$$\sum_{n \geq 1} \mu(X_v^{(n)}) < \infty$$

En particular $\mu(X_v^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Bajo esas hipótesis, escribimos $\eta(\mu) = \sup\{\eta > 0 : \mu(X_v^{(n)}) \geq \eta, \forall v \in W_\mu, n \geq 1\}$

Observación 1.35 En lo que sigue cuando un diagrama B sea bueno, simple-hat y de rango uniforme finito d , se supondrá que está contraído de tal forma que la proposición anterior sea válida.

Definición 1.36 Para un diagrama de Bratteli ordenado bueno, simple-hat y de rango uniformemente finito d , si existe una medida ergódica μ tal que $W_\mu = \{1, \dots, d\}$, entonces decimos que el diagrama es de **rango exacto**.

Esta condición implica que μ es la única medida invariante.

1.3.1. Medida invariante de las sustituciones

Lo que sigue es la reescritura de parte del capítulo 5 del libro de Queffélec [Que87] en la que se genera un método explícito para calcular la medida de los cilindros dados por la única medida ergódica de los sistemas substitutivos. En el capítulo 4 se escriben directamente las medidas de los cilindros de ciertas sustituciones, por lo que vale la pena dejar bien descrita la metodología con la que se llega a dichos valores.

Primero vale la pena mencionar que los sistemas substitutivos minimales son únicamente ergódicos. Más aún, para σ primitiva, la medida invariante ν de $\Omega(\sigma)$ se puede caracterizar de la siguiente forma:

Sea τ una potencia de σ tal que $\omega = \tau^\infty(a)$ es un punto fijo para τ (es decir, $\tau(\tau^\infty(a)) = \tau^\infty(a)$), donde $\tau^\infty(a) = \lim \tau^n(a)$. De ser así $\mathcal{L}(\omega) = \mathcal{L}(\sigma)$ y se tiene que para $\vartheta \in \mathcal{L}(\sigma)$

$$\nu([\vartheta]_\Omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{i \in \{1, \dots, N\} : \vartheta = \omega_{[i, i+|\vartheta|]}\}|}{N},$$

es decir la frecuencia de las ocurrencias de ϑ en ω . Si bien *a priori* no es directo, resulta que no importa la elección del punto fijo ω con la que caracterizamos a ν , pues la frecuencia siempre será la misma.

Para construir las medidas invariantes de los cilindros vamos a estudiar los valores y vectores propios de las matrices $M(\sigma)$ y $M(\sigma_\ell)$ (por definir). Para ello, será crucial el teorema de Perron-Frobenius:

Teorema 1.37 (Perron-Frobenius) *Sea M una matriz primitiva. Entonces*

- a) M admite un valor propio θ real y positivo tal que el resto de los valores propios λ cumplen que $|\lambda| < \theta$.
- b) Existe un vector propio asociado a θ que es positivo.
- c) θ es un valor propio simple.

En el contexto de sustituciones primitivas $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$, $M(\sigma)$ es primitiva y por lo tanto cumple las hipótesis de Perron-Frobenius. Así al valor propio máximo θ de $M(\sigma)$ lo

llamamos el *valor propio de Perron-Frobenius* de σ . Cabe destacar que cuando σ es primitiva y de largo constante L , entonces el valor propio de Perron-Frobenius de σ es L .

Por ejemplo, para Thue-Morse $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = ba$ se tiene que $M(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ el valor propio de Perron-Frobenius es 2 y un vector propio positivo es $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Para una substitución primitiva $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ y un número natural $\ell \geq 2$, definimos $\sigma_\ell : \mathcal{L}_\ell(\sigma)^* \rightarrow \mathcal{L}_\ell(\sigma)^*$ como sigue, para $\omega = \omega_1 \cdots \omega_\ell \in \mathcal{L}_\ell(\sigma)$ se tiene que

$$\sigma(\omega) =: \vartheta = \vartheta_1 \cdots \vartheta_{|\sigma(\omega_1)|} \vartheta_{|\sigma(\omega_1)|+1} \cdots \vartheta_{|\sigma(\omega_1\omega_2)|} \vartheta_{|\sigma(\omega_1\omega_2)|+1} \cdots \vartheta_{|\sigma(\omega_1\omega_2 \cdots \omega_\ell)|}$$

Con ello, escribimos

$$\sigma_\ell(\omega) = (\vartheta_1 \cdots \vartheta_{|\sigma(\omega_1)|}) (\vartheta_2 \cdots \vartheta_{|\sigma(\omega_1)|+1}) \cdots (\vartheta_{|\sigma(\omega_1)|} \cdots \vartheta_{|\sigma(\omega_1)|+\ell-1})$$

Es decir $\sigma_\ell(\omega)$ es una lista ordenada de las primeras $|\sigma(\omega_1)|$ subpalabras de largo ℓ de ω . En particular $|\sigma_\ell(\omega)| = |\sigma(\omega_1)|$. En [Que87] demuestran que si σ es primitiva, entonces σ_ℓ también lo es. Además, si θ es el valor propio de Perron-Frobenius de σ también es el valor propio de Perron-Frobenius de σ_ℓ . Finalmente, la proposición que nos interesa es la siguiente:

Proposición 1.38 *Sea $(\nu_a)_{a \in \mathcal{A}}$ el vector propio positivo y normalizado asociado a θ el valor propio de Perron-Frobenius de σ , entonces la medida de los cilindros de largo uno viene dado por*

$$\nu([a]) = \nu_a$$

Más aún, para $\ell \geq 2$, si $(\nu_\omega)_{\omega \in \mathcal{L}_\ell(\sigma)}$ el vector propio asociado a θ el valor propio de Perron-Frobenius de σ_ℓ (es decir con respecto a $M(\sigma_\ell)$), entonces la medida de los cilindros de largo ℓ viene dado por

$$\nu([\omega]) = \nu_\omega$$

Los valores del siguiente ejemplo se usan en el capítulo 4:

Ejemplo Sea $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ la substitución de Thue-Morse. Con ello $\mathcal{L}_2(\sigma) = \{(aa), (ab), (ba), (bb)\}$ tenemos que $\sigma(aa) = abab$ y por lo tanto $\sigma_2((aa)) = (ab)(ba)$.

De la misma forma, $\sigma_2((ab)) = (ab)(bb)$, $\sigma_2((ba)) = (ba)(aa)$ y $\sigma_2((bb)) = (ba)(ab)$. Así

$$M(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último, el vector propio positivo y normalizado asociado a $\theta = 2$ es igual a $(1/6, 1/3, 1/3, 1/6)$ y, con ello, $\nu([aa]) = \nu([bb]) = \frac{1}{6}$; $\nu([ab]) = \nu([ba]) = \frac{1}{3}$

Capítulo 2

Parcial rigidez en sistemas de Cantor

2.1. Torres de palabras

En esta sección vamos a considerar $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado y bueno, $(X_B, \mathcal{B}, T_B, \mu)$ un sistema de Bratteli-Vershik medible dado por B . Tal como se comentó en la sección 1.2.2 gran parte del estudio de la parcial rigidez de los sistemas de Bratteli-Vershik se hace gracias a sub-torres de $X_v^{(n)}$ (con $v \in V_n$). Dichas torres son las torres de palabras:

Definición 2.1 Sea $\omega \in V_n^*$ una palabra de largo λ ($\omega = \omega_1 \cdots \omega_\lambda$). Se define $B_\omega(n)$ como el conjunto de paseos infinitos $x \in X_B$ tales que $x \in B_{\omega_1}(n)$, $T^{h_{\omega_1}^{(n)}} x \in B_{\omega_2}(n)$, $T^{h_{\omega_2}^{(n)} + h_{\omega_1}^{(n)}} x \in B_{\omega_3}(n)$, ..., $T^{h_{\omega_{\lambda-1}}^{(n)} + h_{\omega_{\lambda-2}}^{(n)} + \cdots + h_{\omega_1}^{(n)}} x \in B_{\omega_\lambda}(n)$.

Además, se define $X_\omega^{(n)} = \bigcup_{i=0}^{h_{\omega_1}^{(n)}-1} T^i B_\omega(n)$. Al conjunto $X_\omega^{(n)}$ lo llamamos **sub-torre de la palabra ω en el nivel n** y a $B_\omega(n)$ la base de dicha torre.

Observación 2.2 Es claro por construcción que $X_\omega^{(n)}$ es sub-torre de $X_{\omega_1}^{(n)}$, que $B_\omega(n) = B_{\omega_1}(n) \cap X_\omega^{(n)}$ y que $\mu(X_\omega^{(n)}) = h_{\omega_1}^{(n)} \mu(B_\omega(n))$.

Observación 2.3 Una manera de pensar el conjunto anterior es la siguiente: para $\omega \in V_n^*$ ($\omega = \omega_1 \cdots \omega_\lambda$), $X_\omega^{(n)}$ representa el conjunto de caminos infinitos x que pasan por el vértice ω_1 en el nivel n (ie $x \in X_{\omega_1}^{(n)}$) y son tal que los vértices de origen de las $\lambda - 1$ aristas siguientes entre el nivel n y $n + 1$ a x_{n+1} según el orden \leq , son las letras $\omega_2, \dots, \omega_\lambda$.

Observación 2.4 Si se piensa el diagrama B^n introducido en la sección 1.2.6 como un sub-diagrama de B , entonces el conjunto $B_\omega(n)$ nace naturalmente de considerar a la preimagen de $[\omega]_{\Omega_B^{(n)}}$ vía ϕ_n , es decir, $B_\omega(n) = \phi_n^{-1}([\omega]_{\Omega_B^{(n)}})$

Observación 2.5 Sea $\lambda \geq 1$ fijo, luego

$$X_B = \bigcup_{\omega \in V_n^\lambda} X_\omega^{(n)}$$

donde V_n^λ es el conjunto de palabras de largo λ sobre el alfabeto V_n .

Proposición 2.6 Sea $\vartheta, \omega \in V_n^*$, luego se tiene que

- Si ϑ es prefijo de ω entonces $X_\omega^{(n)}$ es subtorre de $X_\vartheta^{(n)}$.
- Si, ni ϑ es prefijo de ω , ni ω de ϑ , entonces $X_\omega^{(n)} \cap X_\vartheta^{(n)} = \emptyset$
- Si $\vartheta \sqsubseteq \omega$ entonces

$$\frac{h_{\vartheta_1}^{(n)}}{h_{\omega_1}^{(n)}} \mu(X_\omega^{(n)}) \leq \mu(X_\vartheta^{(n)})$$

DEMOSTRACIÓN.

- Como ϑ es prefijo de ω , si $x \in B_\omega(n)$ entonces $x \in B_{\omega_1}(n)$, $T^{h_{\omega_1}^{(n)}} x \in B_{\omega_2}(n)$, ..., $T^{h_{\omega_{\lambda-1}}^{(n)}} T^{h_{\omega_{\lambda-2}}^{(n)}} \dots T^{h_{\omega_1}^{(n)}} x \in B_{\omega_\lambda}(n)$, en particular, se cumple para todas las letras de ϑ . Por lo tanto $B_\omega(n) \subseteq B_\vartheta(n)$, luego $x \in X_\omega^{(n)}$ si y sólo si existe $0 \leq \ell < h_{\omega_1}^{(n)} = h_{\vartheta_1}^{(n)}$ e $y \in B_\omega^{(n)}$ tal que $T^\ell y = x$. Así $x \in X_\vartheta^{(n)}$.
- Sea j tal que por primera vez $\omega_j \neq \vartheta_j$. Luego si $x \in B_\omega(n) \cap B_\vartheta(n)$ queda que $T^{h_{\omega_{j-1}}^{(n)}} T^{h_{\omega_{j-2}}^{(n)}} \dots T^{h_{\omega_1}^{(n)}} x \in B_{\omega_j}(n) \cap B_{\vartheta_j}(n)$, pero esto no se puede, ya que $B_{\omega_j}(n), B_{\vartheta_j}(n)$ son disjuntos. Así vemos que $B_\omega(n) \cap B_\vartheta(n) = \emptyset$ y con ello se concluye para $X_\omega^{(n)}$ y $X_\vartheta^{(n)}$.
- Siguiendo el primer razonamiento: si $\vartheta \sqsubseteq \omega$, sea r la posición donde parte la palabra ϑ en ω y $q = \sum_{i=1}^{r-1} h_{\omega_i}^{(n)}$, luego para todo $x \in B_\omega(n)$, $T^q x \in B_\vartheta(n)$ con ello:

$$\mu(B_\omega(n)) = \mu(T^q B_\omega(n)) \leq \mu(B_\vartheta(n))$$

Con esto tenemos que:

$$\frac{\mu(X_\omega^{(n)})}{h_{\omega_1}^{(n)}} \leq \frac{\mu(X_\vartheta^{(n)})}{h_{\vartheta_1}^{(n)}}$$

□

Proposición 2.7 Sea $\tau = (\tau_n : V_{n+1}^* \rightarrow V_n^*)$ la secuencia de substituciones que se lee en un diagrama de Bratteli ordenado $B = (V, E, \leq)$. Sea $\omega \in V_{n+1}^*$ y $\vartheta = \tau_n(\omega)$ entonces

$$B_\omega(n+1) \subseteq B_\vartheta(n) \cap B_{\omega_1}(n+1) \tag{2.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Primero hay que notar que $B_\omega(n+1) \subseteq B_{\omega_1}(n+1) \subseteq B_{\vartheta_1}(n)$ (esto último pues ϑ_1 es el primer vértice de $\tau_n(\omega)$).

Supongamos $x \in B_\omega(n+1)$ con $\omega = \omega_1 \dots \omega_\lambda$ y denotamos $t_i = |\tau_n(\omega_i)|$, $t = \sum_{i=1}^\lambda t_i$. Luego como $x \in B_\omega(n+1) \subseteq B_{\omega_1}(n+1)$, entonces por definición de τ_n :

$$T^{h_{\vartheta_1}^{(n)} + \dots + h_{\vartheta_j}^{(n)}} x \in B_{\vartheta_{j+1}}(n) \quad \forall 1 \leq j < t_1$$

A su vez, tenemos que $h_{\omega_1}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{t_1} h_{\vartheta_j}^{(n)}$ y $x \in B_\omega(n+1)$, por lo tanto,

$$T^{h_{\vartheta_1}^{(n)} + \dots + h_{\vartheta_{t_1}}^{(n)}} x = T^{h_{\omega_1}^{(n)}} x \in B_{\omega_2}(n+1) \subseteq B_{\vartheta_{t_1+1}}(n)$$

donde la última inclusión se tiene porque ϑ_{t_1+1} es la primera letra de $\tau_n(\omega_2)$. Así, se puede hacer un análisis similar al anterior para ver que si $s_i = \sum_{k=1}^{i-1} t_k$ y $q_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{\ell=1}^{t_k} h_{\vartheta_{s_k+\ell}}^{(n)}$ entonces:

$$T^{q_{i,j} + h_{\vartheta_{s_i+1}}^{(n)} + \dots + h_{\vartheta_{s_i+j}}^{(n)}} x \in B_{\vartheta_{j+1}}(n) \quad \forall 1 \leq i < \lambda, \quad \forall 1 \leq j < t_i$$

Con ello se concluye que $x \in B_{\vartheta}(n)$ y con lo anterior $x \in B_{\vartheta}(n) \cap B_{\omega_1}(n+1)$. □

Observación 2.8 Con esta propiedad tenemos que si $\vartheta = \tau_n(\omega)$ entonces

$$\frac{\mu(X_{\vartheta}^{(n)})}{h_{\vartheta_1}^{(n)}} \geq \frac{\mu(X_{\omega}^{(n+1)})}{h_{\omega_1}^{(n+1)}}$$

Observación 2.9 La igualdad en (2.1) se debería dar en varios casos. Por ejemplo, si τ_n es de largo constante y $\tau_n(v) \neq \tau_n(u)$ para todo $u \neq v$ entonces se tiene la igualdad en (2.1).

Otro caso interesante en el que la igualdad se alcanza es cuando $\omega \in V_{n+1}^*$ es una sola letra a , es decir, para $a \in V_{n+1}$

$$B_a(n+1) = B_{\tau_n(a)}(n) \cap B_a(n+1),$$

es decir, $B_a(n+1) \subseteq B_{\tau_n(a)}(n)$. Si además $\tau_n(v)$ no es prefijo de $\tau_n(a)$, ni $\tau_n(a)$ de $\tau_n(v)$, para ningún $v \in V_{n+1} \setminus \{a\}$, entonces

$$B_a(n+1) = B_{\tau_n(a)}(n) \cap B(n+1)$$

2.2. Teoremas de parcial rigidez

En esta sección primero demostramos un resultado suficiente para la parcial rigidez y luego un teorema necesario y suficiente. Para ello citamos un lema de [Dan16] gracias al cual se puede demostrar parcial rigidez en diferentes sistemas. En particular, en el paper recién citado, Danilenko demuestra que los sistemas de Bratteli-Vershik dados por un diagrama de rango exacto son parcialmente rígidos para su única medida invariante. Para enunciar el lema necesitamos definir el operador de Koopman:

Definición 2.10 Para (X, \mathcal{X}, μ, T) un sistema dinámica abstracto, se define el operador de Koopman $U_T : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ como $U_T f = f \circ T$ para todo $f \in L^2(\mu)$.

Lema 2.11 (Danilenko) Sea (X, \mathcal{X}, μ, T) un sistema dinámico abstracto invertible con μ una medida ergódica. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de conjuntos medibles de X , tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \gamma > 0$ y $\|U_T \mathbf{1}_{A_n} - \mathbf{1}_{A_n}\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Entonces para cada boreliano $B \subseteq X$ se tiene que $\mu(B \cap A_n) \rightarrow \gamma \mu(B)$.

DEMOSTRACIÓN. Por teorema ergódico de Von-Neumann se tiene que $\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} U_T^j \mathbb{1}_B \xrightarrow{L^2} \mu(B)$ y, por lo tanto, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varepsilon \geq \left| \left\langle \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} U_T^j \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_{A_n} \right\rangle - \mu(B)\mu(A_n) \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \langle \mathbb{1}_B, U_T^{-j} \mathbb{1}_{A_n} \rangle - \mu(B)\mu(A_n) \right|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, considerando que por hipótesis $\|U_T \mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_{A_n}\|_2 \rightarrow 0$ y utilizando que U_T es operador unitario en $L^2(\mu)$ y la desigualdad triangular, queda que para N fijo

$$\|U_T^{-j} \mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_{A_n}\|_2 \rightarrow 0 \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left\langle \mathbb{1}_B, \underbrace{U_T^{-j} \mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_{A_n}}_{\rightarrow 0} \right\rangle + \underbrace{\langle \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_{A_n} \rangle}_{=\mu(B \cap A_n)} - \underbrace{\mu(A_n)\mu(B)}_{\rightarrow \gamma} \right| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mu(B \cap A_n) - \gamma\mu(B)| \end{aligned}$$

y finalmente se concluye notando que como $\varepsilon > 0$ era arbitrario: $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mu(B \cap A_n) - \gamma\mu(B)| = \liminf_{n \rightarrow \infty} |\mu(B \cap A_n) - \gamma\mu(B)| = 0$ \square

Observación 2.12 En las próximas demostraciones se utiliza que por definición de U_T , $\|U_T \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\|_2 = \mu(A \Delta T^{-1}A)$

En lo que sigue, dado un espacio de Cantor X , \mathcal{B} denota a la σ -álgebra de los Borelianos. El siguiente lema también es clave para la demostración del Teorema 2.14:

Lema 2.13 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado y bueno. Sea además $X = X_B$ y T el mapeo de Vershik dado por B y μ una medida T -invariante. Si $(\omega(n) \in V_n^*)_{n \geq 1}$ es una secuencia de palabras, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_{\omega(n)}^{(n)} \Delta T^{-1} X_{\omega(n)}^{(n)}) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN.

Es claro por definición de las torres de Kakutani-Rokhlin que $X_{\omega(n)}^{(n)} \Delta T(X_{\omega(n)}^{(n)}) \subseteq B(n)$, luego

$$\mu(X_{\omega(n)}^{(n)} \Delta T^{-1} X_{\omega(n)}^{(n)}) = \mu(X_{\omega(n)}^{(n)} \Delta T(X_{\omega(n)}^{(n)})) \leq \mu(B(n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

\square

Estamos en condiciones de enunciar uno de los teoremas principales de este capítulo:

Teorema 2.14 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado, bueno y de rango uniforme d . Sea además $X = X_B$, T el mapeo de Vershik dado por B y μ una medida ergódica T -invariante. Si $(\omega(n))_{n \geq 1} \subseteq \{1, \dots, d\}^*$ es una secuencia de palabras de largo mayor o igual a 2, las cuales empiezan y terminan con la misma letra y además existe $\gamma > 0$ tal que*

$$\mu(X_{\omega(n)}^{(n)}) \geq \gamma \quad (2.2)$$

para una infinidad de $n \in \mathbb{N}$, entonces (X, \mathcal{B}, μ, T) es γ -rígido.

DEMOSTRACIÓN. Sólo para no sobrecargar la notación vamos a escribir $\omega(n)$ como ω , pero hay que tener en cuenta que las palabras pueden ser distintas por nivel. Escribimos también $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_\lambda$ con $\omega_1 = \omega_\lambda = a$. Sea además $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} : \mu(X_\omega^{(n)}) \geq \gamma\}$ que por enunciado es infinito.

Con ello para $n \in \mathcal{N}$, se define la secuencia $q_n = h_a^{(n)} + h_{\omega_2}^{(n)} + \cdots + h_{\omega_{\lambda-1}}^{(n)}$, que podemos suponer creciente vía subsucesión en \mathcal{N} . Como $\omega = a\omega_2\omega_3 \cdots \omega_{\lambda-1}a$, por definición de $B_\omega(n)$ se tiene que para todo $0 \leq \ell < h_a^{(n)}$:

$$T^{q_n+\ell} B_\omega(n) \subseteq T^\ell B_a(n). \quad (2.3)$$

Sea $A \subseteq X$ con $\mu(A) > 0$ tal que es la unión de pisos de una de las torres del nivel n_0 , digamos $A = \bigcup_{j \in J} T^j B_b(n_0)$ con $J \subseteq \{0, 1, \dots, h_b^{(n_0)} - 1\}$, siendo b una letra arbitraria del alfabeto. Notemos que como $\mu(X_\omega^{(n)}) \geq \gamma$ para $n \in \mathcal{N}$ tenemos que $\limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}} \mu(X_\omega^{(n)}) \geq \gamma$. Así tomando subsucesión, escribimos $\lim_n \mu(X_\omega^{(n)}) = \delta \geq \gamma$. Además, por Lema 2.13, tenemos que $\mu(X_\omega^{(n)} \Delta T^{-1} X_\omega^{(n)}) \rightarrow 0$ y así por Lema 2.11 tenemos que

$$\mu(A \cap X_\omega^{(n)}) \xrightarrow[n \in \mathcal{N}]{n \rightarrow \infty} \delta \mu(A). \quad (2.4)$$

Sea $D_n = A \cap X_\omega^{(n)}$, por (2.4) tenemos que para una infinidad de $n \in \mathcal{N}$, $\mu(D_n) > 0$.

Ahora bien como las torres de Kakutani-Rokhlin están anidadas, entonces para todo $0 \leq \ell < h_a^{(n)}$, o bien, $T^\ell B_a(n)$ es disjunta de $T^j B_b(n_0)$ (para $j \in J$) o bien está incluido. Así, si $x \in D_n$, entonces existe un $0 \leq \ell < h_a^{(n)}$ y un $j \in J$ tales que $x \in T^\ell B_a(n)$ y $x \in T^j B_b(n_0)$, es decir, no son disjuntos, por lo tanto, $T^\ell B_a(n) \subseteq T^j B_b(n_0)$.

Con esto, usando la relación (2.3) se tiene que si $x \in D_n$ entonces $T^{q_n} x \in T^{q_n+\ell} B_\omega(n) \subseteq T^\ell B_a(n) \subseteq T^j B_b(n_0) \subseteq A$, por lo tanto

$$D_n \subseteq A \cap T^{-q_n} A$$

Juntando aquello con (2.4), queda que:

$$\lim \mu(A \cap T^{-q_n} A) \geq \lim \mu(D_n) = \delta \mu(A) \geq \gamma \mu(A) \quad (2.5)$$

Con lo que se concluye. □

Observación 2.15 En la demostración anterior, cuando se toman subsucesiones de $n \in \mathcal{N}$, estas nunca dependen del conjunto A , sólo dependen de la secuencia de conjuntos $X_{\omega(n)}^{(n)}$ y con esto podemos asegurar que la subsucesión que entrega la rigidez parcial es $(q_n)_{n \in \mathcal{N}'}$ donde $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ es el subconjunto infinito de \mathcal{N} en el que todo funciona.

Cabe destacar que si $\omega(n) = \omega(n)_1 \cdots \omega(n)_{\lambda_n}$, la secuencia (q_n) está dada por $q_n = h_{\omega(n)_1}^{(n)} + \cdots + h_{\omega(n)_{\lambda_n-1}}^{(n)}$.

Notar que en la demostración se usa implícitamente que las torres de Kakutani Rokhlin generan la topología (y con ello a los borelianos), por lo tanto, los borelianos son aproximados por conjuntos de la forma

$$A = \bigcup_{u=1}^d A_u = \bigcup_{u=1}^d \bigcup_{j \in J_u} T^j B_u(n_0).$$

Y como las uniones son disjuntas, se tiene que:

$$\lim \mu(A \cap T^{-q_n} A) = \sum_{u=1}^d \lim \mu(A_u \cap T^{-q_n} A_u) \geq \delta \sum_{u=1}^d \mu(A_u) = \delta \mu(A)$$

Observación 2.16 Esta tesis está enfocada en sistemas de Cantor de rango finito, sin embargo, la demostración del Teorema 2.14 no requiere en ningún momento que el diagrama de Bratteli sea de así. Para demostrar el caso general basta que las palabras de la secuencia $(\omega(n))_{n \geq 1}$ pertenezcan respectivamente a V_n^* , es decir, no se tendría el mismo alfabeto en cada nivel. Más aún, en el contexto de rango finito, tampoco es necesario que sea de rango uniformemente finito. No se demostró el teorema con toda esta generalidad para no generar confusiones innecesarias con la notación.

Observación 2.17 En la demostración podemos notar que se puede pedir una condición más débil que (2.2), que es que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(X_{\omega(n)}^{(n)}) \geq \gamma$, sin embargo, para las demostraciones de parcial rigidez es más recurrente encontrar la hipótesis como se enuncia en el teorema (ver la sección 2.3).

Ejemplo Un corolario directo del Teorema 2.14 es el hecho de que los odómetros son rígidos. Este resultado es muy conocido, basta recordar que los odómetros son equicontinuos. Sin embargo, aquí lo demostramos sin utilizar ese hecho. Cabe destacar que la definición que vamos a presentar a continuación no es la usual, pero es la que nos servirá para esta demostración. Para una sucesión $\mathbf{q} = (q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de enteros mayores estrictamente que 1, se define $(X_{\mathbf{q}}, T)$ al sistema de Bratteli-Vershik dado por el diagrama de Bratteli B con 1 vértice y q_n aristas por nivel.

Con esto, vamos a llamar simplemente a al vértice de los distintos niveles, es decir, $V_n = \{a\}$. Es claro que $X_{aa}^{(n)} = X_{\mathbf{q}}$, por lo tanto, si μ es su única medida invariante, $\mu(X_{aa}^{(n)}) = 1$ para todo $n \geq 1$. Así, por Teorema 2.14 $(X_{\mathbf{q}}, T)$ es 1-rígido para μ , es decir, $(X_{\mathbf{q}}, T)$ es rígido en medida.

El Teorema 2.14 puede ser visto como un corolario del Teorema 2.23 que se lee más adelante. Para ello se definen un par de nociones previas:

Definición 2.18 Para \mathcal{A} un alfabeto finito y $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}^*$ un conjunto de palabras, se define el conjunto de palabras completas de \mathcal{L} como $\mathcal{CL} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} a\mathcal{A}^*a \cap \mathcal{L}$. Para $a \in \mathcal{A}$ fijo también se usará la notación $\mathcal{L}_a = a\mathcal{A}^*a \cap \mathcal{L}$, es decir, $\mathcal{CL} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{L}_a$.

Cabe destacar que el adjetivo *completo* hace referencia a la noción de *palabra de retorno completa* que se puede encontrar en el paper [BDD⁺17].

Definición 2.19 Para un diagrama de Bratteli ordenado $B = (V, E, \leq)$ y $m \geq 1$ se define el lenguaje en la base $B(m)$ que denotamos $\mathcal{L}^{(m)}(B)$ o simplemente $\mathcal{L}^{(m)}$ como las subpalabras de las proyecciones de los elementos en la base vía ϕ_m (ver sección 1.2.6).

Observación 2.20 Recordar que $\phi_m : (B(m), T_m) \rightarrow (\Omega_B^{(m)}, S)$ no siempre define una conjugación topológica. Por ejemplo, para un diagrama de Bratteli de rango uniformemente 1 se tiene que para todo $m \geq 1$ $\phi_m(B(m)) = \{a^\infty\}$, es decir, $(\Omega_B^{(m)}, S)$ es el sistema trivial de un solo elemento. Este caso sigue siendo de interés, pues se puede asegurar que $\mathcal{L}^{(m)} = \{a\}^*$ y, como ya se vio en el ejemplo más arriba, eso implica que los odómetros son rígidos en medida

Observación 2.21 Notar que $\omega \in \mathcal{L}^{(n)}(B)$ si y sólo si $X_\omega^{(n)} \neq \emptyset$.

Definición 2.22 Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado, definimos la relación de equivalencia en $\mathcal{CL}^{(n)}(B)$ dada por

$$\omega \sim_n \vartheta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{|\omega|-1} h_{\omega_i}^{(n)} = \sum_{k=1}^{|\vartheta|-1} h_{\vartheta_k}^{(n)}$$

Denotamos $[\omega]_n$ a la clase de equivalencia de $\omega \in \mathcal{CL}^{(n)}(B)$ u $[\omega]$ cuando no hay ambigüedad. Por último denotamos:

$$X_{[\omega]}^{(n)} = \bigcup_{\vartheta \in [\omega]} X_\vartheta^{(n)}$$

Con estos elementos se demuestra el siguiente teorema que entrega una condición necesaria y suficiente para que un sistema de Bratteli-Vershik sea parcialmente rígido:

Teorema 2.23 Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado, bueno y de rango finito d . Sea además (X, \mathcal{B}, μ, T) un sistema de Batteli-Vershik medible dado por B con μ una medida ergódica y sea $\gamma > 0$ una constante. Entonces, (X, \mathcal{B}, μ, T) es γ -rígido si y sólo si existe una sucesión de palabras completas $(\omega(n) \in \mathcal{CL}^{(n)}(B))_{n \geq 1}$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(X_{[\omega(n)]}^{(n)}) \geq \gamma \tag{2.6}$$

DEMOSTRACIÓN.

\Leftarrow Sea $(\omega(n))_{n \in \mathbb{N}}$ como en el enunciado y $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n \in \mathcal{N}, n \rightarrow \infty} \mu(X_{[\omega(n)]}^{(n)}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(X_{[\omega(n)]}^{(n)}) = \delta \geq \gamma > 0$$

Al igual que para el Lema 2.13 se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu(X_{[\omega(n)]}^{(n)} \Delta T^{-1} X_{[\omega(n)]}^{(n)}) &= \mu(T(X_{[\omega(n)]}^{(n)}) \Delta X_{[\omega(n)]}^{(n)}) \\ &\leq \mu(B(n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Así con por el Lema 2.11 para cada Boreliano $A \subseteq X$ con medida positiva se tiene que

$$\mu(A \cap X_{[\omega(n)]}^{(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \in \mathcal{N}} \delta \mu(A) \tag{2.7}$$

Desde ahora fijemos $n \in \mathcal{N}$, $\vartheta \in [\omega(n)]_n$, $a = \vartheta_1 = \vartheta_{|\vartheta|}$ y $q_n = \sum_{i=1}^{|\vartheta|-1} h_{\vartheta_i}^{(n)}$. Notemos que por definición de \sim_n el valor q_n es el mismo para todas las palabras $\vartheta \in [\omega(n)]_n$. Podemos suponer que $(q_n)_{n \in \mathcal{N}}$ es creciente, sino basta tomar subsucesión y renombrar el conjunto \mathcal{N} .

Ahora bien, al ser ϑ una palabra completa, por definición de $B_\vartheta(n)$ se tiene que para todo $0 \leq \ell < h_a^{(n)}$.

$$T^{q_n+\ell} B_\vartheta(n) \subseteq T^\ell B_a(n) \quad (2.8)$$

Vamos a suponer que el Boreliano $A \subseteq X$ de medida positiva es del tipo

$$A = \bigcup_{u \in V_{n_0}} A_u = \bigcup_{u \in V_{n_0}} \bigcup_{j \in J_u} T^j B_u(n_0). \quad (2.9)$$

donde $n_0 < n$ y $J_u \subseteq \{0, \dots, h_u^{(n_0)} - 1\}$, es decir, los A_u son uniones de pisos de la torre $X_u^{(n_0)}$. Cabe destacar que las uniones en (2.9) son disjuntas.

Si llamamos $D_\vartheta = A \cap X_\vartheta^{(n)}$, por (2.7) podemos suponer que $\mu(D_\vartheta) > 0$, si no se toma un $n \in \mathcal{N}$ más grande u otra palabra $\vartheta' \in [\omega(n)]_n$.

Ahora bien como las torres de Kakutani-Rokhlin están anidadas, entonces para todo $0 \leq \ell < h_a^{(n)}$ y $u \in V_{n_0}$, o bien $T^\ell B_a(n)$ es disjunta de $T^j B_u(n_0)$ (para $j \in J_u$) o bien está incluido. Con ello, si $x \in D_\vartheta$, entonces existe un $0 \leq \ell < h_a^{(n)}$, un $u \in V_{n_0}$ y un $j \in J_u$ tales que $x \in T^\ell B_a(n)$ y $x \in T^j B_u(n_0)$, es decir, no son disjuntos, por lo tanto, $T^\ell B_a(n) \subseteq T^j B_u(n_0)$.

Usando la relación (2.8) se tiene que si $x \in D_\vartheta$ entonces $T^{q_n} x \in T^{q_n+\ell} B_\vartheta(n) \subseteq T^\ell B_a(n) \subseteq T^j B_u(n_0) \subseteq A$, por lo tanto:

$$D_\vartheta \subseteq A \cap T^{-q_n} A$$

Esto se cumple para todo $\vartheta \in [\omega(n)]$ (con $\mu(D_\vartheta) > 0$) y, por lo tanto, si escribimos:

$$D_n = \bigcup_{\vartheta \in [\omega(n)]} D_\vartheta = A \cap X_{[\omega(n)]}^{(n)}$$

al juntarlo con (2.7), queda que:

$$\lim \mu(A \cap T^{-q_n} A) \geq \lim \mu(D_n) = \delta \mu(A) \geq \gamma \mu(A) \quad (2.10)$$

Se concluye notando que los conjuntos A de la forma (2.9) generan la σ -álgebra de los borelianos.

\Rightarrow En efecto, fijemos ε y por el momento fijemos un nivel $m \geq 1$, tenemos por γ -rigidez, que existe $k_{\varepsilon, m} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $a \in V_m$

$$\mu(B_a(m) \cap T^{-n_k} B_a(m)) \geq \gamma \mu(B_a(m)) - \frac{\varepsilon}{p_m} \quad \forall k \geq k_{\varepsilon, m} \quad (2.11)$$

donde $p_m = \sum_{v \in V_m} h_v^{(m)}$.

Luego notamos que $x \in B_a(m) \cap T^{-n_k} B_a(m)$ si y solo si existe $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_\lambda \in \mathcal{L}_a^{(m)}(B)$ tal que $h_{\omega_1}^{(m)} + \cdots + h_{\omega_{\lambda-1}}^{(m)} = n_k$ y $x \in B_\omega(m)$. Con ello,

$$B_a(m) \cap T^{-n_k} B_a(m) \subseteq \bigcup_{\vartheta \in [\omega]_m \cap \mathcal{L}_a^{(m)}(B)} B_\vartheta(m)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{\vartheta \in [\omega]_m \cap \mathcal{L}_a^{(m)}} X_\vartheta^{(m)} \right) &= \sum_{\vartheta \in [\omega]_m \cap \mathcal{L}_a^{(m)}} \mu(X_\vartheta^{(m)}) \\ &= \sum_{\vartheta \in [\omega]_m \cap \mathcal{L}_a^{(m)}} h_a^{(m)} \mu(B_\vartheta(m)) \\ &= h_a^{(m)} \mu \left(\bigcup_{\vartheta \in [\omega]_m \cap \mathcal{L}_a^{(m)}} B_\vartheta(m) \right) \\ &\geq h_a^{(m)} \mu(B_a(m) \cap T^{-n_k} B_a(m)) \\ &\geq h_a^{(m)} \left(\gamma \mu(B_a(m)) - \frac{\varepsilon}{p_m} \right) \\ &= \gamma \mu(X_a^{(m)}) - h_a^{(m)} \frac{\varepsilon}{p_m} \end{aligned}$$

Como $a \in V_m$ era arbitrario, se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(X_{[\omega]_m}^{(m)}) &= \mu \left(\bigcup_{\vartheta \in [\omega]_m} X_\vartheta^{(m)} \right) = \sum_{a \in V_m} \mu \left(\bigcup_{\vartheta \in [\omega]_m \cap \mathcal{L}_a^{(m)}} X_\vartheta^{(m)} \right) \\ &\geq \sum_{a \in V_m} \left(\gamma \mu(X_a^{(m)}) - h_a^{(m)} \frac{\varepsilon}{p_m} \right) = \gamma - \varepsilon \end{aligned}$$

Cabe destacar que ω depende de m , pero para no saturar la notación se había obviado la dependencia. Como ahora resulta relevante escribimos $\omega(m)$, así

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \mu(X_{[\omega(m)]}^{(m)}) \geq \gamma - \varepsilon$$

Y como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, se concluye haciéndolo tender a 0.

□

Observación 2.24 Notemos que la observación 2.16 también es válida para el Teorema 2.23, es decir, la hipótesis de rango finito está demás.

Finalmente se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2.25 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado, bueno y de rango finito. Sea además (X, \mathcal{B}, μ, T) un sistema de Batteli-Vershik medible dado por B con μ una medida ergódica. Entonces, (X, \mathcal{B}, μ, T) es rígido si y sólo si existe $(\omega(n) \in \mathcal{CL}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(X_{[\omega(n)]}^{(n)}) = 1 \quad (2.12)$$

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar $\gamma = 1$ y usar el Teorema 2.23 □

Con los tres resultados principales de esta sección se abren tres líneas de investigación que se van a desarrollar en los siguientes capítulos:

La primera, que ocupa el resto de este capítulo, es demostrar que ciertos sistemas son parcialmente rígidos. Generalmente dichas demostraciones involucran únicamente el Teorema 2.14 que entrega una condición suficiente para ser parcialmente rígido.

A partir del Corolario 2.25, se desprende una segunda línea de investigación, en la cual se desarrolla una serie de condiciones tanto necesarias como suficientes para que ciertos sistemas de Cantor sean rígidos, particularmente para sistemas substitutivos y para subshifts linealmente recurrentes.

Finalmente, en el capítulo 4, se retoma el estudio de la parcial rigidez, pero esta vez enfocándose en encontrar el valor exacto de la constante de parcial rigidez de cada sistema. En este, una versión más fina del Teorema 2.23 nos permite encontrar una expresión para la constante que luego aplicada a subshift de substitución de largo constante nos permite aproximar e incluso encontrar dichas constantes para ciertos sistemas.

2.3. Criterios de parcial rigidez en sistemas de Cantor

En esta sección aplicamos los teoremas anteriores y con ellos deducimos criterios suficientes para asegurar parcial rigidez. A continuación insertamos una tabla que resume los resultados más relevantes de esta sección, cabe señalar que muchos de los conceptos y las notaciones serán definidas a lo largo de la sección.

Bajo la hipótesis de $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado de rango uniforme d , simple-hat y bueno, la tabla muestra algunos criterios para que el sistema sea parcialmente rígido, junto con una cota inferior para la constante de parcial rigidez que se desprende de las demostraciones correspondientes y que, en muchos casos, seguramente no es la óptima.

*	Criterio	Cota para δ_μ
Teorema 2.26	B de rango exacto	$\eta(\mu)/d^d$
Teorema 2.28	Existe $\mathbf{v} \in W_\mu$ tal que $\limsup_n \frac{h_{\mathbf{v}}^{(n)}}{h_u^{(n)}} < \infty$ para todo $u \notin W_\mu$	$\eta(\mu)/d^d$
Proposición 2.36	B m -consecutivo	$(m-1)/dm$
Teorema 2.37	B m -consecutivo y tipo Toeplitz	$(m-1)/m$
Proposición 2.42	Existe un vértice $a \in W_\mu$ y una constante $C > 0$ tal que $ \mathcal{R}^{(n)}(a) \leq C$ para una infinidad de n	$\eta(\mu)/C$
Teorema 2.43	Existe $C > 0$ tal que $\sum_{a \in V_n} \mathcal{R}^{(n)}(a) \leq C$ para una infinidad de n	$1/C$
Corolario 2.57	Existe una matriz estrictamente positiva M que se repite una infinidad de veces en la secuencia $\{M_B^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$	$1/d\zeta$

Tabla 2.1: Resumen con los principales criterios suficientes para la parcial rigidez

Cabe destacar que el primer resultado es de [Dan16] que es una generalización de [BKMS13]. A su vez, el tercer resultado es una generalización de otro teorema de ese mismo paper. Buscando en la bibliografía, todo indica que el resto de los resultados son nuevos.

2.3.1. Criterio de crecimiento de las alturas

En esta sección comenzamos demostrando que bajo la hipótesis de rango exacto (definición 1.36) los sistemas de Bratteli-Vershik son parcialmente rígidos para su única medida invariante. Como ya se mencionó, aquel resultado proviene de [Dan16] y la demostración será la misma, pero utilizando la notación introducida al principio de este capítulo. Después de aquello se escribirá una pequeña generalización que involucra las velocidades de crecimiento de las alturas $h_v^{(n)}$.

Teorema 2.26 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli de rango uniforme finito d , bueno y de rango exacto, entonces (X, \mathcal{B}, μ, T) , el sistema de Bratteli-Vershik dado por B , es parcialmente rígido.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que la definición de rango exacto asegura que existe una constante $\eta = \eta(\mu) > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ y $v \in \{1, \dots, d\} = V_n$ se tiene que $\mu(X_v^{(n)}) \geq \eta$.

Fijemos un nivel $n \geq 1$, para dicho nivel sea $a_0 \in \{1, \dots, d\}$ tal que $\mu(B_{a_0}(n)) = \max_{a \in \{1, \dots, d\}} \mu(B_a(n))$. Luego sea $a_1 \in \{1, \dots, d\}$ tal que

$$\mu(B_{a_1}(n) \cap T^{h_{a_0}^{(n)}} B_{a_0}(n)) \geq \frac{\mu(B_{a_0}(n))}{d}$$

De la misma forma fijamos $a_2 \in \{1, \dots, d\}$ tal que

$$\mu(B_{a_2}(n) \cap T^{h_{a_1}^{(n)}} (B_{a_1}(n) \cap T^{h_{a_0}^{(n)}} B_{a_0}(n))) \geq \frac{\mu(B_{a_0}(n))}{d^2}$$

Se repite esto inductivamente hasta formar una palabra $\omega = a_0 a_1 \cdots a_d \in \{1, \dots, d\}^*$. Luego como el largo de la palabra es $d + 1$, tenemos que existe $0 \leq i < j \leq d$ tal que $a_i = a_j$. A dicha letra la llamaremos a y notaremos $\vartheta = a_i a_{i+1} \cdots a_j$.

Con ello se deduce que:

$$\mu(B_\vartheta(n)) \geq \frac{\mu(B_{a_0}(n))}{d^d} \geq \frac{\mu(B_a(n))}{d^d}$$

Con esto al multiplicar por $h_a^{(n)}$ a ambos lados queda que

$$\mu(X_\vartheta^{(n)}) \geq \frac{\mu(X_a^{(n)})}{d^d}.$$

Así para cada nivel n , existe una palabra $\vartheta = \vartheta(n)$ tal que $\mu(X_\vartheta^{(n)}) \geq \eta \cdot d^{-d}$ y se concluye con el Teorema 2.14. □

Antes de escribir una pequeña generalización del Teorema 2.26, enunciamos un lema que puede ser de interés en sí mismo

Lema 2.27 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli de rango uniforme finito d , simple-hat, bueno y que no es de rango exacto. Sea además μ una medida ergódica, entonces si para todo $u \notin W_\mu$ se cumple que:*

$$\frac{\mu(B_u(n))}{\mu(B(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

entonces (X, \mathcal{B}, μ, T) , el sistema de Bratteli-Vershik dado por B , es parcialmente rígido.

DEMOSTRACIÓN. Si repetimos la construcción de la demostración del Teorema 2.26 para todo $n \geq 1$ podemos encontrar una palabra $\vartheta(n) = \vartheta \in \mathcal{CL}^{(n)}(B)$ tal que

$$\frac{\mu(B_{a_n}(n))}{d^d} \leq \mu(B_{\vartheta}(n))$$

Donde $a_n \in V_n$ es tal que $\mu(B_{a_n}(n)) = \max_{a \in V_n} \mu(B_a(n))$. Vía subsucesión vamos a suponer que a_n es siempre el mismo vértice $a \in \{1, \dots, d\}$. Veamos que $a \in W_\mu$, para ello supongamos que $a \notin W_\mu$, luego por hipótesis $\frac{\mu(B_a(n))}{\mu(B(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ lo que implica que

$$1 = \frac{\mu(B(n))}{\mu(B(n))} = \frac{\sum_{v \in V_n} \mu(B_v(n))}{\mu(B(n))} \leq d \cdot \frac{\mu(B_a(n))}{\mu(B(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.13)$$

Lo cual es una clara contradicción. A su vez, nuevamente vía subsucesión, podemos suponer que $\vartheta(n)$ siempre parte con la misma letra $b \in \{1, \dots, d\}$. Veamos que dicho vértice b también pertenece a W_μ . En efecto, de lo contrario, por exactamente la misma razón anterior:

$$\frac{1}{d^d} \frac{\mu(B_a(n))}{\mu(B(n))} \leq \frac{\mu(B_{\vartheta}(n))}{\mu(B(n))} \leq \frac{\mu(B_b(n))}{\mu(B(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Lo que que llevaría a la misma contradicción anterior que las desigualdades de (2.13). Finalmente, podemos usar la misma idea que para la demostración del Teorema 2.26, pues se tienen las siguientes desigualdades:

$$\frac{\mu(B_b(n))}{d^d} \leq \frac{\mu(B_a(n))}{d^d} \leq \mu(B_{\vartheta}(n))$$

y multiplicando a ambos extremos por $h_b^{(n)}$ queda que

$$\frac{\eta(\mu)}{d^d} \leq \frac{\mu(X_b^{(n)})}{d^d} \leq \mu(X_{\vartheta}^{(n)})$$

y se concluye usando el Teorema 2.14

□

Así se deduce el siguiente teorema:

Teorema 2.28 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado simple-hat, bueno y de rango uniformemente finito d . Sea $T : X_B \rightarrow X_B$ el mapeo de Vershik y sea μ una medida ergódica. Si consideramos una de las siguientes hipótesis:*

1. $W_\mu = \{1, \dots, d\}$
2. Existe $\mathbf{v} \in W_\mu$ tal que $\limsup_n \frac{h_{\mathbf{v}}^{(n)}}{h_u^{(n)}} < \infty$ para todo $u \notin W_\mu$,

entonces $(X_B, \mathcal{B}, \mu, T)$ es parcialmente rígido.

DEMOSTRACIÓN. Si consideramos la hipótesis 1 estamos en el caso de rango exacto y simplemente hacemos uso del Teorema 2.26.

Para lo que sigue, consideraremos la hipótesis 2 y veamos que para todo $u \notin W_\mu$, $\frac{\mu(B_u(n))}{\mu(B(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. En efecto, como para todo $u \notin W_\mu$ $\limsup_n \frac{h_v^{(n)}}{h_u^{(n)}} < \infty$, se puede fijar $c \in [0, \infty)$ tal que $\frac{h_v^{(n)}}{h_u^{(n)}} \leq c$ ($\forall u \notin W_\mu$ y una infinidad de $n \geq 1$).

Así para $u \notin W_\mu$ arbitrario se tiene que

$$\begin{aligned} \limsup_n \frac{\mu(B_u(n))}{\mu(B(n))} &\leq \limsup_n \frac{\mu(B_u(n))}{\mu(B_v(n))} \\ &= \limsup_n \left(\frac{h_v^{(n)}}{h_u^{(n)}} \right) \limsup_n \left(\frac{h_u^{(n)}}{h_v^{(n)}} \frac{\mu(B_u(n))}{\mu(B_v(n))} \right) \\ &\leq \frac{c}{\eta(\mu)} \limsup_n h_u^{(n)} \mu(B_u(n)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{ver Proposición 1.34})$$

Y se concluye con el Lema 2.27. □

A continuación desarrollamos un par de ejemplos que permiten ilustrar el Teorema 2.28 y mostrar que efectivamente es una generalización del Teorema 2.26, es decir, se logra salir de la hipótesis de rango exacto. La construcción de este tipo de ejemplos fue tomada de la tesis de Alexander Frank [FM14].

Ejemplo Sea B_σ un diagrama de Bratteli ordenado y simple-hat que tiene 3 vértices por nivel y cuya secuencia de sustituciones que se leen en B_σ viene dada por $\sigma = (\sigma_n)_{n \geq 1}$ de la siguiente forma:

$$\sigma_n(v) = \begin{cases} 1(2)^{7^n} (3)^{7^{n+2}} 1 & \text{si } v = 1 \\ 1(2)^{7^n} (3)^{7^{n-1}} 11 & \text{si } v = 2 \\ 1(2)^{7^n} (3)^{7^{n+5}} 1 & \text{si } v = 3 \end{cases}$$

Es directo que B_σ es simple y propiamente ordenado. Con ello, el sistema (X, T) dado por B_σ es minimal. Veamos que en el diagrama B_σ se cumplen las siguientes desigualdades para $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} h_2^{(n)} &< h_1^{(n)} < h_3^{(n)} \\ h_3^{(n)} &< 7^3 h_1^{(n)} < 7^6 h_2^{(n)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Esto último es directo de inducción y de que, denotando $H^{(n)} = (h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, h_3^{(n)})^\top$

$$H^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 2 & 7^n & 7^{n+2} \\ 3 & 7^n & 7^{n-1} \\ 2 & 7^n & 7^{n+5} \end{bmatrix} H^{(n)}$$

Veamos que el diagrama B_σ posee una única medida invariante para la relación cofinal y además si denotamos por μ su única medida invariante, entonces $W_\mu = \{2, 3\}$. En efecto, consideremos una medida ergódica μ y un entero $n \geq 1$ y estudiemos $\mu(X_1^{(n)})$, para esto notemos que por las desigualdades anteriores queda que

$$\begin{aligned}
h_1^{(n+1)} &> 7^{n+2}h_3^{(n)} > 7^{n-1}h_1^{(n)} \\
h_2^{(n+1)} &> 7^{n-1}h_3^{(n)} > 7^{n-1}h_1^{(n)} \\
h_3^{(n+1)} &> 7^{n+5}h_3^{(n)} > 7^{n-1}h_1^{(n)}
\end{aligned}$$

Y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mu(X_1^{(n)}) &= h_1^{(n)} \left(\frac{2\mu(X_1^{(n+1)})}{h_1^{(n+1)}} + \frac{3\mu(X_2^{(n+1)})}{h_2^{(n+1)}} + \frac{2\mu(X_3^{(n+1)})}{h_3^{(n+1)}} \right) < \frac{3}{7^{n-1}} \\
&\implies \sum_{n \geq 1} \mu(X_1^{(n)}) < \infty
\end{aligned}$$

Repetimos un análisis similar para $\mu(X_2^{(n)})$, para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mu(X_2^{(n)}) &= 7^n h_2^{(n)} \left(\frac{\mu(X_1^{(n+1)})}{h_1^{(n+1)}} + \frac{\mu(X_2^{(n+1)})}{h_2^{(n+1)}} + \frac{\mu(X_3^{(n+1)})}{h_3^{(n+1)}} \right) \\
&> \frac{7^n h_2^{(n)}}{h_3^{(n+1)}} = \frac{7^n h_2^{(n)}}{2h_1^{(n)} + 7^n h_2^{(n)} + 7^{n+5} h_3^{(n)}} > \frac{1}{7^{11+1}}
\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad no es óptima y para llegar a ella se volvieron a utilizar las desigualdades (2.14). De igual forma se puede demostrar que $\mu(X_3^{(n)}) > 1/7^{7+1}$. Con ello queda claro que los vértices 2 y 3 tienen que pertenecer a W_μ , mientras que el vértice 1 no. Así, como los conjuntos W_μ son disjuntos para distintas medidas ergódicas queda que solo puede haber una. Además, es directo de (2.14) que se cumple la segunda hipótesis del Teorema 2.28, por lo tanto (X, T) tiene una única medida que es parcialmente rígida.

Observación 2.29 Este sistema cumple que para todo $u, v \in \{1, \dots, d\}$ existe $C > 0$ tal que para todo $n \geq 1$: $h_u^{(n)} \geq Ch_v^{(n)}$. Y esta clase de sistemas claramente cumplen las hipótesis del Teorema 2.28. Según el Corolario 6.8 de [DDMP21] esto implica que el sistema de Cantor es conjugado a un sistema que tiene complejidad no-superlineal, por lo que se podría haber concluido esto mismo utilizando el resultado ya mencionado del paper [Cre22]. Veamos entonces un ejemplo que sigue cumpliendo las hipótesis del Teorema 2.28 pero que no cumple esta proporcionalidad entre las alturas de las torres:

Ejemplo Sea como antes, B_σ un diagrama de Bratteli ordenado y simple-hat que tiene a 3 vértices por nivel y cuya secuencia de sustituciones que se leen en B_σ viene dada por $\sigma = (\sigma_n)_{n \geq 2}$ que se define como sigue:

$$\sigma_n(v) = \begin{cases} 1(2)^{2^n}(3)^{2^n}1 & \text{si } v = 1 \\ 1(2)^{2^n}(3)^{2^n}11 & \text{si } v = 2 \\ 1(2)^{2^n}(3)^{2^n}1 & \text{si } v = 3 \end{cases}$$

Notamos que

$$H^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 2 & 2^n & 2^n \\ 3 & 2^n & 2^{2n} \\ 2 & 2^n & 2^n \end{bmatrix} H^{(n)} \quad (2.15)$$

Y por lo tanto,

$$\begin{aligned} h_1^{(n)} &= h_3^{(n)} \leq h_2^{(n)} \\ h_2^{(n+1)} &\leq 2^n h_1^{(n+1)} = 2^n h_3^{(n+1)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Al igual que antes, es directo que B_σ es simple y propiamente ordenada, con ello, el sistema (X, T) dado por B_σ es minimal. Veamos que B_σ es únicamente ergódico y que $W_\mu = \{2, 3\}$. En efecto, sea μ una medida ergódica, luego

$$\begin{aligned} \mu(X_1^{(n)}) &= h_1^{(n)} \left(\frac{2\mu(X_1^{(n+1)})}{h_1^{(n+1)}} + \frac{3\mu(X_2^{(n+1)})}{h_2^{(n+1)}} + \frac{2\mu(X_3^{(n+1)})}{h_3^{(n+1)}} \right) \\ &\leq h_1^{(n)} \left(\frac{2\mu(X_1^{(n+1)})}{2^n h_1^{(n)}} + \frac{3\mu(X_2^{(n+1)})}{2^{2n} h_1^{(n)}} + \frac{2\mu(X_3^{(n+1)})}{2^n h_1^{(n)}} \right) \leq \frac{h_1^{(n)}}{2^{n-1} h_1^{(n)}} = 2^{-(n-1)} \end{aligned}$$

Con esto $\sum_{n \geq 1} \mu(X_1^{(n)}) < \infty$, es decir $1 \notin W_\mu$. Para las desigualdades anteriores se usó que $h_1^{(n+1)} \geq 2^n h_1^{(n)}$, $h_2^{(n+1)} \geq 2^{2n} h_1^{(n)}$ y $h_3^{(n+1)} \geq 2^n h_1^{(n)}$ que se deducen directamente de (2.15). Veamos ahora que $3 \in W_\mu$:

$$\begin{aligned} \mu(X_3^{(n)}) &= 2^n h_3^{(n)} \left(\frac{\mu(X_1^{(n+1)})}{h_1^{(n+1)}} + \frac{2^n \mu(X_2^{(n+1)})}{h_2^{(n+1)}} + \frac{\mu(X_3^{(n+1)})}{h_3^{(n+1)}} \right) \\ &\geq 2^{2n} h_3^{(n)} \frac{\mu(X_2^{(n+1)})}{h_2^{(n+1)}} = 2^{2n} h_3^{(n)} \frac{\mu(X_2^{(n+1)})}{3h_1^{(n)} + 2^n h_2^{(n)} + 2^{2n} h_3^{(n)}} \\ &\geq 2^{2n} h_3^{(n)} \frac{\mu(X_2^{(n+1)})}{3h_3^{(n)} + 2^{2n-1} h_3^{(n)} + 2^{2n} h_3^{(n)}} = \frac{\mu(X_2^{(n+1)})}{\frac{3}{4^n} + \frac{1}{2} + 2} \geq \frac{\mu(X_2^{(n+1)})}{6} \end{aligned}$$

Con esto $3 \in W_\mu$ si $2 \in W_\mu$. Se puede hacer un cálculo similar y llegar a la conclusión de que $2 \in W_\mu$ si $3 \in W_\mu$. Es decir $2 \in W_\mu$ si y solo si $3 \in W_\mu$, pero como W_μ es no vacío y $1 \notin W_\mu$ queda que $W_\mu = \{2, 3\}$ y concluimos que μ es la única medida invariante. Ahora bien, notemos que $h_1^{(n)} = h_3^{(n)}$, por lo tanto, si tomamos $\mathbf{v} = 3$ se cumple que $\limsup \frac{h_3^{(n)}}{h_1^{(n)}} = 1 < \infty$ y podemos concluir que B_σ es parcialmente rígida. Lo que es interesante es que si en vez del vértice $3 \in W_\mu$, consideramos $2 \in W_\mu$ podemos notar que $\lim \frac{h_2^{(n)}}{h_1^{(n)}} = \infty$. En efecto:

$$\begin{aligned}
h_1^{(n+1)} &= (2 + 2^n)h_1^{(n)} + 2^n h_2^{(n)} \\
&\leq 2^{\frac{n}{2}}(2 + 2^n)h_1^{(n)} + 2^n h_2^{(n)} & (\star) \\
&\leq 2^{\frac{3n}{2}+1}h_1^{(n)} + 2^n h_2^{(n)} \\
&\leq 2^{2n}h_1^{(n)} + 2^n h_2^{(n)} & \text{pues } n \geq 1 \\
&\leq h_2^{(n+1)}
\end{aligned}$$

Con esto

$$\begin{aligned}
(\star) &= 2^{\frac{n}{2}}(h_1^{(n+1)} - 2^n h_2^{(n)}) + 2^n h_2^{(n)} \leq h_2^{(n+1)} \\
&\Rightarrow 2^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{2^n h_2^{(n)}}{h_1^{(n+1)}} \right) + \frac{2^n h_2^{(n)}}{h_1^{(n+1)}} \leq \frac{h_2^{(n+1)}}{h_1^{(n+1)}}
\end{aligned}$$

Ahora bien $0 \leq \frac{2^n h_2^{(n)}}{h_1^{(n+1)}} < 1$ y es decreciente, en particular si consideramos $h_2^{(1)} = 1$, $h_1^{(1+1)} = 6$, se llega a que $\frac{h_2^{(n)}}{h_1^{(n+1)}} \leq 1/6$. Además, $\frac{2^n h_2^{(n)}}{h_1^{(n+1)}}$ es un termino positivo, por lo tanto

$$\frac{5}{6} 2^{\frac{n}{2}} \leq \frac{h_2^{(n+1)}}{h_1^{(n+1)}}$$

Con lo que se concluye el límite.

Para finalizar, a modo de recuerdo, en cada sección vamos a destacar que estos criterios también sirven para asegurar que los sistemas (X, \mathcal{B}, μ, T) no son mixing. Para estos enunciados nos restringiremos a diagramas de Bratteli simples y propiamente ordenados, puesto que es en este contexto en el que podrían tener más relevancia.

Corolario 2.30 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli simple, propiamente ordenado, simple-hat y de rango uniformemente finito d . Sea $T : X_B \rightarrow X_B$ el mapeo de Vershik y sea μ una medida ergódica. Si consideramos una de las siguientes hipótesis:*

1. $W_\mu = \{1, \dots, d\}$
2. Existe $\mathbf{v} \in W_\mu$ tal que $\limsup_n \frac{h_{\mathbf{v}}^{(n)}}{h_u^{(n)}} < \infty$ para todo $u \notin W_\mu$

entonces $(X_B, \mathcal{B}, \mu, T)$ no es mixing.

DEMOSTRACIÓN. Directo de que μ es no-atómica por la simplicidad y del Teorema 2.28. \square

2.3.2. Criterio de orden par-consecutivo

En esta sección incluimos una generalización de un segundo resultado de [Dan16] que también proviene de tomar una propiedad sobre la ausencia de mixing en [BKMS13] y transformarla en una demostración de parcial rigidez. Para ello, vamos a definir los diagramas de Bratteli con orden consecutivo (introducidos en [Dur10]).

Definición 2.31 *Decimos que un diagrama de Bratteli $B = (V, E, \leq)$ tiene **orden consecutivo** si se tiene que para todo vértice $v \in V_n$ ($n \geq 1$) si $e, f, g \in r^{-1}(v)$ (es decir, tres arcos con el mismo rango) y tales que $s(e) = s(g)$ y $e \leq f \leq g$, entonces $s(e) = s(f) = s(g)$.*

En [Dan16] se demuestra que estos sistemas son parcialmente rígidos, pero solo puede demostrarlo cuando le exigen una hipótesis extra: para todo nivel si $e \in r^{-1}(v)$ entonces existe al menos una arista $f \neq e$ tal que $s(e) = s(f)$. Es decir, si $u \in V_n$ está conectado con $v \in V_{n+1}$ entonces existen al menos dos arcos que los conecten. Resulta que suponiendo orden consecutivo, esto implica que para todo $e \in r^{-1}(v)$ siempre se podrá asegurar que la arista que viene justo antes o justo después comparte el mismo origen. Esta última hipótesis es la realmente necesaria para poder concluir, lo cual motiva la siguiente definición:

Definición 2.32 *Decimos que $B = (V, E, \leq)$ cumple con ser **par-consecutivo** si para todo $v \in V_n$ y para todo $e_i \in r^{-1}(v)$ se cumple que*

$$s(e_i) = s(e_{i-1}) \vee s(e_i) = s(e_{i+1})$$

donde los arcos e_i son tales que $r^{-1}(v) = \{e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_\ell\}$

Teorema 2.33 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado de rango finito d , bueno y par-consecutivo. Entonces todas las medidas ergódicas del mapeo de Bratteli-Vershik son $\frac{1}{2d}$ -rígidas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathcal{N} el conjunto de niveles n tales que $|V_n| = d$. Sea además $a_n \in V_n$ tal que $\mu(X_{a_n}^{(n)}) \geq \mu(X_v^{(n+1)})$ para todo $v \in V_n$. Con ello es claro que $\mu(X_{a_n}^{(n)}) \geq \frac{1}{d}$.

Sea ahora $U_{n+1} = \{u \in V_{n+1} : \exists e \in E \text{ tal que } s(e) = a_n \text{ y } r(e) = u\}$, es decir, si $u \in U_{n+1}$, $X_{a_n}^{(n)} \cap X_u^{(n+1)} \neq \emptyset$. Fijemos ahora un $u \in U_{n+1}$ arbitrario, luego se tiene que

$$X_{a_n}^{(n)} \cap X_u^{(n+1)} = \bigcup_{\bar{e} \in E(v_0, a_n)} \bigcup_{s(e)=a_n, r(e)=u} [\bar{e}e]_{X_B} \quad (2.17)$$

Luego como B es par-consecutivo, sabemos que para toda arista e tal que $s(e) = a_n$ y $r(e) = u$ tiene como sucesor o antecesor directo una arista f que también cumple que $s(f) = a_n$ y $r(f) = u$. En particular, al menos la mitad de las aristas que cumplen que $s(e) = a_n$ y $r(e) = u$ tienen como sucesor directo a una arista f que también lo cumple. A ese conjunto lo denotamos $E_{a_n a_n}$, es decir, $E_{a_n a_n} = \{e_i \in r^{-1}(u) : s(e_i) = a_n, r(e_i) = u \wedge s(e_{i+1}) = a_n, r(e_{i+1}) = u\}$, donde estamos usando la escritura $r^{-1}(u) = \{e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_\ell\}$.

Es directo de la definición de $E_{a_n a_n}$ que si $x \in [e]_{X_B}$ con $e \in E_{a_n a_n}$ entonces $x \in X_{a_n a_n}^{(n)} \cap X_u^{(n+1)}$. Como la mitad de las aristas cumplen esto y la medida μ es invariante para \sim , gracias a la igualdad (2.17) se tiene que

$$\mu(X_{a_n a_n}^{(n)} \cap X_u^{(n+1)}) \geq \frac{1}{2} \mu(X_{a_n}^{(n)} \cap X_u^{(n+1)})$$

pero como $u \in U_{n+1}$ era arbitrario tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(X_{a_n a_n}^{(n)}) &= \sum_{u \in U_{n+1}} \mu(X_{a_n a_n}^{(n)} \cap X_u^{(n+1)}) \\ &\geq \sum_{u \in U_{n+1}} \frac{1}{2} \mu(X_{a_n}^{(n)} \cap X_u^{(n+1)}) \\ &= \frac{1}{2} \mu(X_{a_n}^{(n)}) \geq \frac{1}{2d} \end{aligned}$$

Así tomando $(\omega(n))_{n \in \mathcal{N}}$ como $\omega(n) = a_n a_n$, se concluye con el Teorema 2.14. \square

Observación 2.34 Tal como se mencionó, la proposición anterior incluye a los sistemas con orden consecutivo, con la hipótesis extra de poseer al menos dos aristas entre los vértices que están conectados.

Este teorema ofrece uno de los criterios más simples de verificar para asegurar que un sistema es parcialmente rígido con respecto a sus medidas ergódicas, basta que los morfismos que se leen en el diagrama τ^B cumplan que

$$\tau_n^B(v) = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_\ell^{k_\ell} \quad \text{con } a_i \in V_n, k_i \geq 2, \text{ para todo } v \in V_{n+1}$$

Otro aspecto que vuelve esta noción interesante es que, a diferencia de los diagramas que poseen un orden consecutivo, la propiedad de ser par-consecutivo se preserva vía telescoping.

Observación 2.35 Tal como se ha comentado para otras proposiciones, también se puede caracterizar cuál es la secuencia $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que vuelve a la medida $\mu_{\frac{1}{2d}}$ -rígida y es simplemente $n_k = h_{a_k}^{(k)}$ con $k \in \mathcal{N}$ como se describe en la demostración.

Al igual que los diagramas de Bratteli ordenados par-consecutivos se puede definir de forma natural los diagramas trio-consecutivos o más generalmente m -consecutivos (con $m \geq 2$), es decir, para todo $v \in V_n$ si denotamos $r^{-1}(v) = \{e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_\ell\}$, entonces para todo e_i se tiene que existe $k, j \in \mathbb{N}$, tales que $j \neq 0$, $k + j = m$ y

$$s(e_{i-k}) = s(e_{i-k+1}) = \dots = s(e_i) = \dots = s(e_{i+j-1})$$

Claramente ser m -consecutivo implica ser par-consecutivo, por lo tanto, la parcial rigidez se hereda de forma natural, pero se puede mejorar la cota inferior de la constante de parcial rigidez:

Proposición 2.36 Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado de rango finito d , bueno y m -consecutivo. Entonces todas las medidas ergódicas del mapeo de Vershik son $\left(\frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{d}\right)$ -rígidas.

DEMOSTRACIÓN. Basta repetir la demostración del Teorema 2.33 reemplazando la constatación de que “al menos la mitad de las aristas que cumplen $s(a_n) = e = r(u)$ tienen como sucesor directo a una arista f que también lo cumple”, por “una proporción de al menos $\frac{m-1}{m}$ de las aristas que cumplen...” y con eso se cambia el $\frac{1}{2}$ del teorema anterior por el $\frac{m-1}{m}$. \square

Vamos ahora a escribir una aplicación interesante del Teorema 2.23 que involucra a los sistemas tipo Toeplitz y m -consecutivos. Recordemos que un diagrama de Bratteli es de tipo Toeplitz si existe $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $n \geq 1$, $v \in V_n$ se tenga que $|r^{-1}(\{v\})| = q_n$, es decir, $\sum_{u \in V_{n-1}} M_{v,u}^{(n)} = q_n$. Así tenemos que

Teorema 2.37 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado bueno, simple-hat, tipo Toeplitz y m -consecutivo (no necesariamente de rango finito). Entonces todas las medidas ergódicas del mapeo de Bratteli-Vershik son $\frac{m-1}{m}$ -rígidas.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a usar el Teorema 2.23 que por la observación 2.24 sabemos que no es necesario exigir rango finito. En lo que sigue repetiremos gran parte de la demostración del Teorema 2.33 introduciendo algunos pequeños cambios:

Para un nivel $n \geq 1$, vamos a denotar $q_n = \sum_{u \in V_{n-1}} M_{v,u}^{(n)}$ que no depende de la elección de $v \in V_n$ por ser tipo Toeplitz. Fijemos $a \in V_n$ arbitrario y definamos el conjunto $U_{n+1} = \{u \in V_{n+1} : \exists e \in E \text{ tal que } s(e) = a \text{ y } r(e) = u\}$, es decir, si $u \in U_{n+1}$, entonces $X_a^{(n)} \cap X_u^{(n)} \neq \emptyset$. Así, fijamos también $u \in U_{n+1}$ arbitrario, luego se tiene que

$$X_a^{(n)} \cap X_u^{(n+1)} = \bigcup_{\bar{e} \in E(v_0, a)} \bigcup_{s(e)=a, r(e)=u} [\bar{e}e]_{X_B} \quad (2.18)$$

Como B es m -consecutivo, una proporción de al menos $\frac{m-1}{m}$ de las aristas que cumplen que $s(e) = a$ y $r(e) = u$ tienen como sucesor directo a una arista f que también lo cumple, a ese conjunto lo denotamos E_{aa} (es decir $E_{aa} = \{e_i \in r^{-1}(u) : s(e_i) = a, r(e_i) = u \wedge s(e_{i+1}) = a, r(e_{i+1}) = u\}$, donde estamos usando la escritura $r^{-1}(u) = \{e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_{q_n}\}$).

Es directo de la definición de E_{aa} que si $x \in [e]_{X_B}$ con $e \in E_{aa}$ entonces $x \in X_a^{(n)} \cap X_u^{(n+1)}$. Como una proporción $\frac{m-1}{m}$ de las aristas cumplen esto y la medida μ es invariante para \sim , gracias a la igualdad (2.18), se tiene que

$$\mu(X_{aa}^{(n)} \cap X_u^{(n+1)}) \geq \frac{m-1}{m} \mu(X_a^{(n)} \cap X_u^{(n+1)})$$

Pero como $u \in U_{n+1}$ era arbitrario tenemos que

$$\mu(X_{aa}^{(n)}) = \sum_{u \in U_{n+1}} \mu(X_{aa}^{(n)} \cap X_u^{(n+1)}) \geq \sum_{u \in U_{n+1}} \frac{m-1}{m} \mu(X_a^{(n)} \cap X_u^{(n+1)}) = \frac{m-1}{m} \mu(X_a^{(n)}) \quad (2.19)$$

Ahora bien, al estar en el caso tipo Toeplitz, tenemos que para todo $b \in V_n$, las alturas $h_b^{(n)}$ tienen un valor constante igual a $q_{n-1} \cdot \dots \cdot q_1$ y, por lo tanto, se tiene que para todo $a, b \in V_n$, $aa \sim_n bb$. Así de la ecuación (2.19) como $a \in V_n$ era arbitrario tenemos que

$$\mu(X_{[aa]_n}^{(n)}) = \sum_{b \in V_n} \mu(X_{bb}^{(n)}) \geq \sum_{b \in V_n} \left(\frac{m-1}{m} \mu(X_b^{(n)}) \right) = \frac{m-1}{m}$$

Así concluimos con el Teorema 2.23. □

Para finalizar, al igual que en la sección anterior, incluimos el siguiente corolario

Corolario 2.38 Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli simple, propiamente ordenado y par-consecutivo. Si cumple al menos una de las siguientes hipótesis:

1. B es de rango finito.
2. B es de tipo Toeplitz

entonces $(X_B, \mathcal{B}, \mu, T_B)$ no es mixing para ninguna de sus medidas ergódicas.

DEMOSTRACIÓN. Directo de los Teoremas 2.33 y 2.37. □

2.3.3. Criterio de las palabras de retorno

En el estudio de los sistemas simbólicos, las palabras de retorno juegan un rol muy importante, lo cual, también resulta cierto en el caso de la parcial rigidez. Partimos con la definición en un contexto general y luego analizamos sus consecuencias.

Definición 2.39 Sea (Ω, S) un sistema simbólico en un alfabeto finito \mathcal{A} . Si $\omega \in \mathcal{L}(\Omega)$, se define el conjunto de palabras de retorno por la derecha de ω , $\mathcal{R}_\Omega(\omega)$ como las palabras $\vartheta \in \mathcal{L}(\Omega)$ tal que $\omega\vartheta \in \mathcal{L}(\Omega)$, ω es sufixo propio de $\omega\vartheta$ y la palabra ω tiene solo dos ocurrencias en $\omega\vartheta$. De forma análoga se define $\mathcal{R}'_\Omega(\omega)$ el conjunto de palabras de retorno por la izquierda de ω .

Observación 2.40 Si (Ω, S) es minimal y $\omega \in \mathcal{L}(\Omega)$, entonces $\mathcal{R}_\Omega(\omega)$ es un conjunto finito. Igualmente para $\mathcal{R}'_\Omega(\omega)$.

Observación 2.41 Una de las características de las palabras de retorno es que para Ω un sistema simbólico, entonces

$$[\omega]_\Omega = \bigcup_{\vartheta \in \mathcal{R}_\Omega(\omega)} [\omega\vartheta]_\Omega$$

Volviendo a los sistemas de Bratteli-Vershik dados por $B = (V, E, \leq)$, cuando $\omega \in \mathcal{L}^{(n)}(B)$ denotamos $\mathcal{R}_B^{(n)}(\omega)$, o simplemente $\mathcal{R}^{(n)}(\omega)$, al conjunto de palabra de retorno por la derecha de ω en $\Omega_B^{(n)}$. Con lo anterior, podemos ver que

$$X_\omega^{(n)} = \bigcup_{\vartheta \in \mathcal{R}_B^{(n)}(\omega)} X_{\omega\vartheta}^{(n)}$$

En esta sección estamos suponiendo implícitamente que (Ω_B, S) es un sistema de Cantor, o dicho de otra forma que X_B no es un odómetro. En el contexto topológico, básicamente estamos suponiendo que (X_B, T_B) es expansivo, de lo contrario Ω_B sería finito y la noción de palabra de retorno un poco artificial (ver la discusión de la sección 1.2.6).

Proposición 2.42 Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli bueno, de rango uniforme d y simple-hat. Sea además $(X, T) = (X_B, T_B)$ y μ una medida ergódica. Si existe un vértice $a \in W_\mu$ y una constante $C > 0$ tales que $|\mathcal{R}^{(n)}(a)| \leq C$ para una infinidad de n , entonces (X, \mathcal{B}, μ, T) es parcialmente rígido.

DEMOSTRACIÓN. Como $a \in W_\mu$, tenemos que $\mu(X_a^{(n)}) \geq \eta(\mu) = \eta$ para todo $n \geq 1$, en particular para $n \in \mathcal{N} = \{k \geq 1 : |\mathcal{R}^{(k)}(a)| \leq C\}$. Luego como

$$X_a^{(n)} = \bigcup_{w \in \mathcal{R}^{(n)}(a)} X_{aw}^{(n)}$$

Entonces se tiene que para todo $n \in \mathcal{N}$ existe $\omega(n) \in a\mathcal{R}^{(n)}(a)$ tal que $\mu(X_{\omega(n)}^{(n)}) \geq \frac{\eta}{|\mathcal{R}^{(n)}(a)|} \geq \frac{\eta}{C}$ y se concluye con el Teorema 2.14. \square

Puede ser de interés saber una cota inferior para la constante de parcial rigidez. En la proposición anterior, tal como en la mayoría de las proposiciones enunciadas en este capítulo se usa la constante $\eta(\mu)$ para el cálculo de la cota, pero $\eta(\mu)$ no es fácil de estimar en general. Con esto, el siguiente teorema cobra especial importancia dado que el valor de $\eta(\mu)$ no está involucrado.

Teorema 2.43 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli bueno, de rango uniforme d y simple-hat. Si existe $C > 0$ tal que $\sum_{a \in V_n} |\mathcal{R}^{(n)}(a)| \leq C$ para una infinidad de n , entonces (X, \mathcal{B}, μ, T) es $\frac{1}{C}$ -rígido para a toda medida ergódica μ .*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, notemos que para todo $n \geq 1$

$$X = \bigcup_{a \in V_n} \bigcup_{w \in \mathcal{R}^{(n)}(a)} X_{aw}^{(n)} \quad (2.20)$$

La unión anterior es disjunta con lo cual siempre existe $a_n \in V_n$ y $\omega(n)$ tal que $\omega(n) \in a_n \mathcal{R}^{(n)}(a_n)$ tal que $\mu(X_{\omega(n)}^{(n)}) \geq \frac{1}{\sum_{a \in V_n} |\mathcal{R}^{(n)}(a)|} \geq \frac{1}{C}$ y se concluye con el Teorema 2.14. \square

Observación 2.44 Notar que en este caso la hipótesis de rango uniformemente finito no es necesaria, pues bastaría hacer telescoping en los niveles en los que $\sum_{a \in V_n} |\mathcal{R}^{(n)}(a)| \leq C$, (esto no modifica la cardinalidad de las palabras de retorno en esos niveles) y volver a hacer telescoping para que quede de rango uniforme. Notar que esto último es posible ya que si $\sum_{a \in V_n} |\mathcal{R}^{(n)}(a)| \leq C$, en particular $|V_n| \leq C$ con lo que la constante C también acota el rango.

Del teorema anterior se deduce el siguiente corolario:

Corolario 2.45 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli bueno, de rango uniforme d y simple-hat. Si existe $C > 0$ tal que para todo $a \in \{1, \dots, d\}$, $|\mathcal{R}^{(n)}(a)| \leq C$ para una infinidad de n , entonces (X, \mathcal{B}, μ, T) es $\frac{1}{dC}$ -rígido para toda medida ergódica μ .*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $\sum_{a \in V_n} |\mathcal{R}^{(n)}(a)| \leq dC$ y se concluye con el Teorema 2.43. \square

Observación 2.46 Tanto el Teorema 2.43 como el Corolario 2.45 son válidos cuando consideramos las palabras de retorno por la izquierda de $\Omega_B^{(n)}$, que escribimos $\mathcal{R}'^{(n)}(a)$, ya que se puede realizar la misma demostración reemplazando la igualdad (2.20) por

$$X = \bigcup_{a \in V_n} \bigcup_{w \in \mathcal{R}'^{(n)}(a)} X_{wa}^{(n)}$$

Al igual que en las secciones anteriores, deducimos lo siguiente con respecto a la ausencia de mixing de esta clase de sistemas:

Corolario 2.47 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli simple, propiamente ordenado y de rango finito. Sea (X, T) el sistema de Bratteli-Vershik dado por B . Si existe $C > 0$ tal que $\sum_{a \in V_n} |\mathcal{R}^{(n)}(a)| \leq C$ para una infinidad de n , entonces (X, \mathcal{B}, μ, T) no es mixing para ninguna medida T -invariante μ .*

DEMOSTRACIÓN. Basta recordar que como (X, T) es de rango finito, tiene un número finito de medidas ergódicas que, por el Teorema 2.43, sabemos que serán parcialmente rígidas y luego se concluye gracias a la observación 1.7. \square

En lo que sigue listamos una serie de ejemplos en los que estos criterios son relevantes. Muchos de ellos vienen motivados por la codificación de sistemas con origen geométrico. Estos sistemas son \mathcal{S} -ádicos, pero por las mismas razones citadas varias veces en esta tesis, se pueden ocupar los resultados de forma *directa*.

Ejemplo De [BBY22, BST20] rescatamos las sustituciones de Jacobi-Perron. Estas sustituciones son dadas por tuplas de enteros (a, b) en la malla $\mathcal{K} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq a \leq b, b \neq 0\}$

$$\sigma_{a,b} : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 12^a 3^b \end{cases}$$

Denotamos \mathcal{S}_{JP} al conjunto de las sustituciones de Jacobi-Perron. Luego si $\sigma_{a,b}, \sigma_{c,d} \in \mathcal{S}_{JP}$ tenemos que

$$\sigma_{a,b} \circ \sigma_{c,d} : \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 12^a 3^b \\ 3 \mapsto 23^c (12^a 3^b)^d \end{cases}$$

Sea ahora una secuencia $\sigma \subseteq \mathcal{S}_{JP}$ y $n \geq 1$ arbitrario, si $\sigma_{n+1} = \sigma_{a,b}$ y $\sigma_n = \sigma_{c,d}$ y suponemos que $a \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(n)}(1) &\subseteq \{2^a 3^b 1, 2^a 3^b 23^c 1, 2^a 3^b 31, 2^a 3^b 323^c 1\} \\ \mathcal{R}^{(n)}(2) &\subseteq \{2, 3^b 2, 3^b 12, 3^b 32, 3^b 312\} \\ \mathcal{R}^{(n)}(3) &\subseteq \{3, 13, 23, 12^a 3\} \end{aligned}$$

Para lo anterior podemos notar primero que como $(a, b) \in \mathcal{K}$, $b \geq 1$ y, por lo tanto, $11, 21 \notin \mathcal{L}_\sigma^{(m)}$ para todo $m \geq 1$. Así, si suponemos que hay una infinidad de $\sigma_n = \sigma_{a_n, b_n}$ tales que $a_n \neq 0$, entonces tenemos que los conjuntos de las palabras de retorno de cada letra tiene cardinalidad finita y, por lo tanto, $\Omega(\sigma)$ es parcialmente rígido con respecto a cualquiera de sus medidas ergódicas (con constante al menos $\gamma = 1/12$).

Ejemplo Otros sistemas relevantes son los sistemas de Cassaigne-Selmer dados por $\mathcal{S}_{CS} = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ donde

$$\begin{array}{cc}
a \xrightarrow{\gamma_1} a & a \xrightarrow{\gamma_2} b \\
b \xrightarrow{\gamma_1} ac & b \xrightarrow{\gamma_2} ac \\
c \xrightarrow{\gamma_1} b & c \xrightarrow{\gamma_2} c
\end{array}$$

Se puede notar que para toda letra $\ell \in \{a, b, c\}$

$$\begin{array}{cc}
a \sqsubseteq \gamma_1 \circ \gamma_1(\ell) & b \sqsubseteq \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_1(\ell) \\
c \sqsubseteq \gamma_2 \circ \gamma_2(\ell) & b \sqsubseteq \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_2(\ell) \\
a \sqsubseteq \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1(\ell) & b \sqsubseteq \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1(\ell) \\
c \sqsubseteq \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2(\ell) & b \sqsubseteq \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2(\ell)
\end{array}$$

Con lo anterior se demuestra que para toda letra $\ell \in \{a, b, c\}$ existe una constante $C > 0$ y una infinidad de $n \in \mathbb{N}$ tales que $|\mathcal{R}^{(n)}(\ell)| < C$

Mostremos un solo ejemplo, sea $\sigma \subseteq \mathcal{S}_{CS}$ tal que $\sigma_n = \gamma_1$ y $\sigma_{n+1} = \gamma_1$, luego si $w \in R^{(n)}(a)$, entonces es claro que existe $\ell, \ell' \in \{a, b, c\}$ tales que $aw \sqsubseteq \sigma_n \sigma_{n+1}(\ell \ell') = \gamma_1^2(\ell \ell')$, ya que a aparece tanto en $\gamma_1^2(\ell)$ como en $\gamma_1^2(\ell')$. Con ello $|R^{(n)}(a)| \leq 3^{2|\gamma_1^2|}$. Así podemos concluir usando el Teorema 2.43.

Ejemplo (Shifts dendricos) Finalizamos esta sección con una familia de subshifts particular: los sistemas dendricos.

Estos sistemas tienen una serie de propiedades muy interesantes que son citadas sin demostración de [DP22, Capítulo 7]. La idea es que gracias al Corolario 2.45 se puede asegurar que para Ω un shift dendrico en un alfabeto \mathcal{A} tiene medidas ergódicas $\frac{1}{|\mathcal{A}|^2}$ -rígidas:

Para definir los sistemas dendricos, debemos primero construir el grafo $\mathcal{E}_\Omega(\omega)$, así sea Ω un sistema simbólico sobre el alfabeto \mathcal{A} y $\omega \in \mathcal{L}(\Omega)$, denotamos

$$\begin{aligned}
L_\Omega(\omega) &= \{a \in \mathcal{A} : a\omega \in \mathcal{L}(\Omega)\} \\
R_\Omega(\omega) &= \{b \in \mathcal{A} : \omega b \in \mathcal{L}(\Omega)\} \\
E_\Omega(\omega) &= \{(a, b) \in L_\Omega(\omega) \times R_\Omega(\omega) : a\omega b \in \mathcal{L}(\Omega)\}
\end{aligned}$$

Con ello se define el grafo de extensión de ω , que denotamos $\mathcal{E}_\Omega(\omega)$, como el grafo bipartito cuyo conjunto de vértices es la unión disjunta de $L_\Omega(\omega)$ y $R_\Omega(\omega)$ y cuyos arcos son los elementos de $E_\Omega(\omega)$. Cuando no hay ambigüedad denotaremos a estos conjuntos $L(\omega)$, $R(\omega)$, $E(\omega)$ y $\mathcal{E}(\omega)$ en vez de $L_\Omega(\omega)$, $R_\Omega(\omega)$, $E_\Omega(\omega)$ y $\mathcal{E}_\Omega(\omega)$.

Cabe destacar que nada asegura que $L(\omega)$ y $R(\omega)$ sean disjuntos, por lo tanto, para la construcción de $\mathcal{E}(\omega)$ lo que se hace formalmente es una copia de ambos conjuntos que se denotan $1 \otimes L(\omega)$ y $R(\omega) \otimes 1$ y así se fuerza a que los conjuntos sean disjuntos.

Definición 2.48 Decimos que un subshift Ω es dendrico si para todo $\omega \in \mathcal{L}(\Omega)$, el grafo $\mathcal{E}_\Omega(\omega)$ es un árbol. Si Ω es dendrico, decimos que $\mathcal{L}(\Omega)$ es un conjunto dendrico.

Resulta que varios sistemas relevantes son dendricos, en particular los sistemas Sturmianos y, más generalmente, los de Arnoux-Rauzy.

En lo que sigue enumeramos una serie de propiedades que cumplen estos sistemas y que

están lejos de ser triviales de constatar en la definición. Sea Ω un shift dendrico y minimal en el alfabeto \mathcal{A} con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ y $|\mathcal{A}| = d \geq 2$ podemos asegurar que

1. Para toda palabra $w \in \mathcal{L}(\Omega)$, el conjunto $\mathcal{R}_\Omega(w)$ es base del monoide libre \mathcal{A}^* . En particular, $|\mathcal{R}_\Omega(w)| = d$.
2. En un alfabeto \mathcal{A} , se define la familia de automorfismos elementales como la familia que contiene a las permutaciones en \mathcal{A} y los automorfismos de la forma

$$\alpha_{a,b}(c) = \begin{cases} ab & \text{si } c = a \\ c & \text{si } c \neq a \end{cases} \quad \text{y} \quad \tilde{\alpha}_{a,b}(c) = \begin{cases} ba & \text{si } c = a \\ c & \text{si } c \neq a \end{cases}$$

A dicha familia la denotamos \mathcal{S}_e y podemos asegurar que (Ω, S) puede escribirse como un sistema \mathcal{S}_e -ádico primitivo. Más aún, si $\tau = (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_e$ es la secuencia directiva, se tiene que para todo $n \geq 1$, $\Omega_\tau^{(n)}$ es dendrico para el mismo alfabeto \mathcal{A} .

3. Además, dicha escritura \mathcal{S}_e -ádica es conjugada topológicamente a su BV-representación natural.

Con esas tres propiedades se puede asegurar que

Proposición 2.49 *Sea (Ω, S) un sistema dendrico y minimal en un alfabeto \mathcal{A} con $|\mathcal{A}| = d \geq 2$, luego toda medida ergódica μ es $\frac{1}{d^2}$ -rígida.*

DEMOSTRACIÓN. Por el punto 2 y 3, podemos considerar el diagrama de Bratteli propiamente ordenado dado por la secuencia $\tau = (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_e$. Luego, todo sistema $\Omega_B^{(n)}$ es dendrico y minimal en el alfabeto \mathcal{A} (nuevamente por el punto 2). Así por el punto 1 tenemos que $\forall a \in \mathcal{A}, n \geq 1 \quad |\mathcal{R}^{(n)}(a)| = |\mathcal{A}| = d$ y gracias al Corolario 2.45 se concluye lo deseado. \square

Observación 2.50 Se sabe que todo shift dendrico tiene complejidad sublineal, por el resultado de [Cre22] es directo mostrar que los sistemas dendricos son parcialmente rígidos. Sin embargo, con la demostración anterior, se entrega una cota inferior a la constante de rigidez de los sistemas dendricos ($\delta_\mu \geq d^{-2}$) y dicha constante solo depende de la cantidad de letras del alfabeto \mathcal{A} ($|\mathcal{A}| = d$), lo cual destaca una característica especial de los sistemas dendricos.

2.3.4. Criterio de la matriz repetida infinitas veces

En esta sección se entrega uno de los criterios más simples verificar para asegurar que un sistema de Bratteli-Vershik (medible) es parcialmente rígido y que involucra solamente a la secuencia de matrices $\{M_B^{(n)}\}_{n \geq 1}$. Esto es consecuencia del criterio de las palabras de retorno de la sección anterior (Teorema 2.43). Para lo que sigue vamos a introducir una notación que sólo se usará en esta sección, pero que es útil para la demostración:

Definición 2.51 *Para $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado cuya familia de matrices de adyacencia es $\{M^{(n)}\}_{n \geq 1}$, denotamos*

$$\zeta^{(n)} = 2 \max_{u \in V_{n+1}} \left\{ \sum_{v \in V_n} M_{u,v}^{(n)} \right\}$$

Observación 2.52 Otra manera equivalente de escribir la constante anterior es

$$\zeta^{(n)} = 2 \max_{u \in V_{n+1}} |\tau_n^B(u)|$$

Resulta que $\zeta^{(n)}$ es una cota natural para la cardinalidad de $\mathcal{R}_B^{(n)}(v)$ en una gran cantidad de casos:

Lema 2.53 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado. Para un número entero $n \geq 1$ y una letra $a \in V_n$ fijos, si $M_{u,a}^{(n)} \geq 1$ para todo $u \in V_{n+1}$ entonces, $|\mathcal{R}_B^{(n)}(a)| \leq \zeta^{(n)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in X_a^{(n)}$ arbitrario y $\tau_n : V_{n+1}^* \rightarrow V_n^*$ el morfismo que se lee en B en el nivel n . Luego sea $u \in V_{n+1}$ tal que $u = r(x_{n+1})$, escribimos:

$$\tau_n(u) = v_1 v_2 \cdots v_{k_u}$$

Sea e_i tal que $x_{n+1} = e_i$, es decir x pasa por la arista e_i entre el nivel n y $n+1$, como $x \in X_a^{(n)}$ es claro que $s(e_i) = v_i = a$. Luego si existe $i < j \leq k_u$ tal que $v_j = a$, entonces se tiene que $x \in X_{v_i v_{i+1} \cdots v_j}^{(n)}$, donde claramente $|v_i v_{i+1} \cdots v_j| < \zeta^{(n)}$ y $v_{i+1} \cdots v_j \in \mathcal{R}^{(n)}(a)$.

Ahora bien si e_i es la última arista tal que $s(e_i) = v_i = a$, es decir, si $i \leq k_u$ es tal que $v_i = a$ y $v_j \neq a \quad \forall i < j \leq k_u$, entonces se tiene que después de pasar por $v_{i+1} v_{i+2} \cdots v_{k_u}$ se salta a otro vértice $\tilde{u} \in V_{n+1}$ (que podría ser u nuevamente pero no necesariamente lo es). Luego escribimos:

$$\tau_n(\tilde{u}) = \tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \cdots \tilde{v}_{k_{\tilde{u}}}$$

Sabemos que a ocurre en $\tau_n(\tilde{u})$ (pues $M_{u,a}^{(n)} \geq 1$ para todo $u \in V_{n+1}$), por lo tanto, sea $1 \leq \ell \leq k_{\tilde{u}}$ la primera ocurrencia de a , con ello se tiene que si $\omega = v_i v_{i+1} \cdots v_{k_u} \tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \cdots \tilde{v}_\ell$, entonces $x \in X_\omega^{(n)}$. Para concluir es claro que $|\omega| \leq \zeta^{(n)}$ y, como con ello se tienen todos los casos, se concluye. \square

Observación 2.54 Recordamos nuevamente que $M_{u,a}^{(n)} \geq 1$ es equivalente a $|\tau_n^B(u)|_a \geq 1$

Con ello podemos enunciar el siguiente teorema

Teorema 2.55 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado, bueno y de rango uniforme d . Sea (X, T) el sistema de Bratteli-Vershik dado por B y μ una medida ergódica. Si existe una matriz M que cumpla que para un vértice $v \in W_\mu$ es tal que $M_{v,u} \geq 1$ para todo $u \in \{1, \dots, d\}$ y tal que se repite una infinidad de veces en la secuencia $\{M^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces (X, \mathcal{B}, μ, T) es parcialmente rígido.*

DEMOSTRACIÓN. Directo del Teorema 2.43, del Lema 2.53 \square

Con ello se tienen dos corolarios, el primero es un poco técnico, pero útil en ciertos casos (ver ejemplo más abajo) y el segundo es quizás el resultado más importante de la sección porque las hipótesis son simples de chequear.

Corolario 2.56 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado de rango uniforme d y bueno. Sea (X, T) el sistema de Bratteli-Vershik dado por B y τ la secuencia directiva que*

se lee en B . Si existe un conjunto de sustituciones $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ que cumplen que $|\sigma_a(u)|_a \geq 1$ para todo $a \in \{1, \dots, d\}$ y tal que se repiten una infinidad de veces en τ , entonces (X, \mathcal{B}, μ, T) es parcialmente rígida medida ergódica μ .

DEMOSTRACIÓN. Para μ medida ergódica, basta usar σ_v con $v \in W_\mu$ y el Teorema 2.55 con la observación 2.54. \square

Corolario 2.57 Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado, de rango uniforme d y bueno. Sea (X, T) el sistema de Bratteli-Vershik dado por B . Si existe una matriz estrictamente positiva M tal que se repite una infinidad de veces en la secuencia $\{M^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces (X, \mathcal{B}, μ, T) es parcialmente rígida para su única medida invariante μ .

DEMOSTRACIÓN. Directo del Corolario 2.56. \square

Observación 2.58 Que el sistema del último corolario sea únicamente ergódico puede leerse como consecuencia de [Vee78] y [BKMS13].

Ejemplo Un ejemplo en el que se usa directamente el Corolario 2.56 es en el de la familia de sustituciones de Arnoux-Rauzy (ver [ACFH21]) con 3 letras que se pueden escribir como sistemas \mathcal{S} -ádicos con sustituciones en $\mathcal{S}_{AR} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ donde

$$\begin{array}{lll} a \xrightarrow{\alpha_1} a & a \xrightarrow{\alpha_2} ba & a \xrightarrow{\alpha_3} ca \\ b \xrightarrow{\alpha_1} ab & b \xrightarrow{\alpha_2} b & b \xrightarrow{\alpha_3} cb \\ c \xrightarrow{\alpha_1} ac & c \xrightarrow{\alpha_2} bc & c \xrightarrow{\alpha_3} c \end{array}$$

Por reconocibilidad (ver sección 1.2.6) las secuencias directivas en \mathcal{S}_{AR} dan origen a un sistema \mathcal{S}_{AR} -ádico conjugado en medida al sistema de Bratteli-Vershik dada por la misma secuencia. Con ello, si cada sustitución $\alpha_i \in \mathcal{S}_{AR}$ se repite una infinidad de veces en la secuencia directiva, entonces se cumplen las hipótesis del Corolario 2.56 donde $\sigma_a = \alpha_1$, $\sigma_b = \alpha_2$ y $\sigma_c = \alpha_3$. Así se concluye que toda medida ergódica de dichos sistemas será parcialmente rígida.

Finalizamos con la versión mixing del Corolario 2.57:

Corolario 2.59 Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli simple y propiamente ordenado, de rango finito. Sea (X, T) el sistema de Bratteli-Vershik dado por B . Si existe una matriz estrictamente positiva M tal que se repite una infinidad de veces en la secuencia $\{M^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces (X, \mathcal{B}, μ, T) no es mixing para ninguna medida T -invariante μ .

DEMOSTRACIÓN. Directo del Corolario 2.57 y de la observación observación 1.7. \square

2.4. Ejemplo que no cumple los criterios

Llegado este punto, es claro que hay poco espacio para que un sistema de Bratteli-Vershik de rango finito posea una medida ergódica que no sea parcialmente rígida. Si alguien quisiera construir explícitamente un sistema que no sea parcialmente rígido, este no podría cumplir ninguno de los criterios anteriores.

En esta sección construimos un sistema que no cumple ninguno de los criterios de la sección 2.3, pero que no sabemos si deja de cumplir el Teorema 2.23. El objetivo es dar una idea de lo raro que tendría que ser un hipotético sistema de rango finito que no sea parcialmente rígido:

Ejemplo Vamos a escribir primero todo de una forma general, para que se entienda la naturaleza de los resultados y, al final del capítulo, se presenta el sistema de forma explícita.

En lo que sigue suponemos que $B = (V, E, \leq)$ es un diagrama de Bratteli propiamente ordenado y simple. Más aún suponemos que las matrices de adyacencia $M^{(n)}$ son positivas. Generalmente, vamos a usar el abuso de notación $V_n = V_{n-1} = \{a, b\}$, pero cuando sea necesario hacer la diferencia escribimos $V_n = \{a(n), b(n)\}$. Además, fijamos $(X, T) = (X_B, T_B)$ y $\tau = (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la secuencia que se lee en B con τ_0 del tipo gorro (es decir B es simple-hat).

Como consideramos solamente 2 vértices por nivel, distinguimos $E_n = A_n \cup B_n \cup C_n \cup D_n$ donde $A_n = E(a(n), a(n+1))$, $B_n = E(b(n), a(n+1))$, $C_n = E(a(n), b(n+1))$ y $D_n = E(b(n), b(n+1))$. Por último notemos que

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} |\tau_n(a)|_a & |\tau_n(a)|_b \\ |\tau_n(b)|_a & |\tau_n(b)|_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A_n| & |B_n| \\ |C_n| & |D_n| \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si tomamos una medida ergódica en (X, T) , como estamos tratando de analizar los casos donde la parcial rigidez podría fallar, lo primero es suponer que el diagrama **no** es de rango exacto. Con ello, sin pérdida de generalidad fijamos que $W_\mu = \{a\}$, por lo tanto, se tienen los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_a^{(n)}) &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_b^{(n)}) &= 0 \end{aligned}$$

donde el primer límite implica que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_a^{(n)} \cap X_a^{(n+1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{e \in A_n} [e]_X \right) \quad (2.21)$$

Si se quisiera trabajar este tipo de sistemas en detalle habría que considerar dos casos: primero, cuando $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión acotada y segundo, cuando $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. No es difícil demostrar que cuando se está en el primer caso y la subsucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cumple que $a_{n_k} \geq 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces el sistema es parcialmente rígido. Básicamente las aristas en A_n tendrían todo el peso y al ser finitas se podría acotar inferiormente la constante de parcial rigidez δ_μ .

Por lo anterior, es necesario suponer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, lo cual vía telescoping puede reemplazarse por la hipótesis que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente.

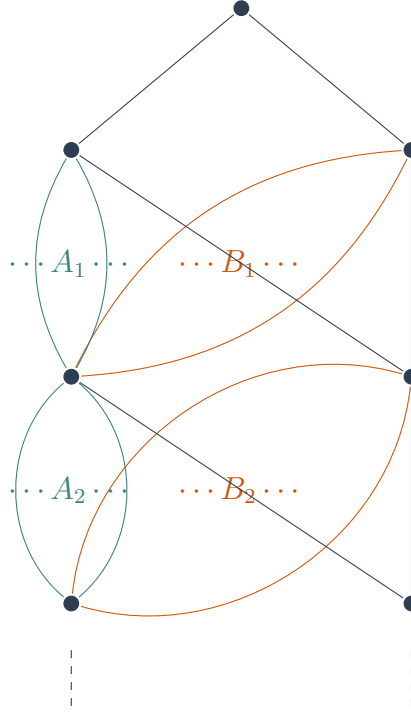


Figura 2.1: Construcción rango 2 problemático

Así suponiendo que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de enteros estrictamente creciente, se tiene que

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (2.22)$$

Si se restringe un poco el análisis para aproximarnos al ejemplo que queremos mostrar, consideramos que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \equiv 1$ y $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \equiv 1$ (ver Figura 2.1), es decir,

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que si suponemos que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $b_n \leq Ka_n$ entonces existe $k \in \{0, \dots, K\}$ tal que

$$\mu(X_{ab^k a}^{(n)}) \geq \frac{1}{K} \mu(X_a^{(n)} \cap X_a^{(n+1)})$$

Con lo que, por el Teorema 2.14, (X, \mathcal{B}, μ, T) sería $\frac{1}{K}$ -rígido (ver límite (2.21)). Esto se debe básicamente a que por la desigualdad anterior, para algún $k \in \{0, \dots, K\}$ se tiene que cumplir que $ab^k a$ tiene que leerse al menos $\lfloor \frac{a_n}{K} \rfloor$ veces en $\tau_n(a)$ y, con ello, al menos $\lfloor \frac{a_n}{K} \rfloor$ cilindros $[e]_X$ con $e \in A_n$ serían subconjunto de $X_{ab^k a}^{(n)}$.

Por lo tanto, suponemos que:

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.23)$$

Cabe destacar que las alturas están dadas por $h_a^{(n+1)} = a_n h_a^{(n)} + b_n h_b^{(n)}$ y $h_b^{(n+1)} = h_a^{(n)} + h_b^{(n)}$, con lo cual, como $a_n \rightarrow \infty$ queda claro que

$$\frac{h_b^{(n)}}{h_a^{(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.24)$$

Así, ya podemos notar que se incumplen las hipótesis del Teorema 2.28. Ahora debemos notar que en esta familia el no ser de rango exacto no es gratis:

$$\begin{aligned} W_\mu = \{a\} &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_b^{(n)}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n h_b^{(n)}}{h_a^{(n+1)}} \mu(X_a^{(n+1)}) + \underbrace{\frac{h_b^{(n)}}{h_b^{(n+1)}} \mu(X_b^{(n+1)})}_{\text{esto tiende a 0 por (2.24)}} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n h_b^{(n)}}{a_n h_a^{(n)} + b_n h_b^{(n)}} \mu(X_a^{(n+1)}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{a_n h_a^{(n)}}{b_n h_b^{(n)}}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n h_a^{(n)}}{b_n h_b^{(n)}} = \infty \end{aligned}$$

Donde en la cuarta equivalencia se utilizó que de derecha a izquierda es trivial (dado que $(\mu(X_a^{(n+1)}))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada) y de izquierda a derecha que como $a \in W_\mu$ sabemos que existe $\eta > 0$ tal que $\mu(X_a^{(n+1)}) \geq \eta$ para todo n . Ahora estudiamos ese último límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n h_a^{(n)}}{b_n h_b^{(n)}} = \infty \quad (2.25)$$

Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{a_n h_a^{(n)}}{b_n h_b^{(n)}} &= \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{a_{n-1} h_a^{(n-1)} + b_{n-1} h_b^{(n-1)}}{h_a^{(n-1)} + h_b^{(n-1)}} = \frac{a_n a_{n-1} \frac{h_a^{(n-1)}}{h_b^{(n-1)}} + a_n b_{n-1}}{b_n + b_n \frac{h_a^{(n-1)}}{h_b^{(n-1)}}} \\ &= \frac{\frac{a_n a_{n-1}}{b_n} + \frac{a_n b_{n-1}}{b_n} \frac{h_b^{(n-1)}}{h_a^{(n-1)}}}{\frac{h_b^{(n-1)}}{h_a^{(n-1)}} + 1} \\ &\sim \frac{a_n a_{n-1}}{b_n} + \frac{a_n b_{n-1}}{b_n} \cdot \frac{h_b^{(n-1)}}{h_a^{(n-1)}} \quad \text{pues } \frac{h_b^{(n-1)}}{h_a^{(n-1)}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, queremos que lo último converja a infinito y para ello, al menos uno de los dos sumandos tiene que converger a infinito. Supongamos que el segundo sumando lo hace y recordemos que por (2.25) tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1} h_b^{(n-1)}}{a_{n-1} h_a^{(n-1)}} = 0$$

Luego

$$\frac{\underbrace{b_{n-1} h_b^{(n-1)}}_{\rightarrow 0}}{\underbrace{a_{n-1} h_a^{(n-1)}}_{\rightarrow \infty}} = \frac{a_n b_{n-1}}{b_n} \cdot \frac{h_b^{(n-1)}}{h_a^{(n-1)}} \cdot \frac{b_n}{a_{n-1} a_n}$$

Por lo tanto $\frac{b_n}{a_{n-1} a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Con ello, volviendo a la expresión original, vemos que cuando el segundo sumando converge a infinito implica que el primer sumando también. Por lo tanto, si se cumple (2.25) también se va a cumplir

$$\frac{a_n a_{n-1}}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (2.26)$$

Quizás sea interesante destacar que como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, esto implica que necesitamos por una parte que $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ y a la vez que $\frac{a_n^2}{b_n} \rightarrow \infty$, lo cual reduce bastante los candidatos.

Otro criterio que se podría aplicar para demostrar que un sistema es parcialmente rígido, es el de las palabras de retorno (Proposición 2.42) que en este caso sería que si $|\mathcal{R}^{(n)}(a)| \leq C$, entonces (X, T, μ) es parcialmente rígido. Ahora bien, en este caso nos podemos concentrar solamente en las palabras de retorno ω que aparecen en $\tau_n(a)$, puesto que esos serán las que podrían engendrar torres del tipo $X_{a\omega}^{(n)}$ que tengan peso. A ese conjunto lo llamaremos $\mathcal{R}_*^{(n)}(a) \subseteq \mathcal{R}^{(n)}(a)$. Para que no se cumpla el criterio entonces se tiene que cumplir que $z_n := |\mathcal{R}_*^{(n)}(a)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Notemos que las palabras de retorno en este caso son todas de la forma $b^k a$ con $ab^k a \in \mathcal{L}^{(n)}$. Por lo tanto, para que se lean z_n palabras de retorno en $\tau_n(a)$ tienen que existir z_n valores distintos de k , tales que $ab^k a \sqsubseteq \tau_n(a)$ y, en particular, tienen que haber al menos z_n letras a , con ello:

$$\sum_{k=0}^{z_n-1} k = \frac{z_n(z_n-1)}{2} \leq b_n \quad (2.27)$$

$$z_n \leq a_n \quad (2.28)$$

Es interesante notar que no se puede alcanzar la igualdad en (2.28) pues al juntarla con (2.27) quedaría que $a_n^2 - a_n \leq 2b_n$ lo que contradiría que $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ y $\frac{a_n^2}{b_n} \rightarrow \infty$. Con ello la desigualdad en (2.28) tiene que ser estricta, más aún, bajo la misma argumentación, se tiene que cumplir que

$$\frac{z_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.29)$$

Ahora sí con todo el análisis anterior podemos construir el siguiente ejemplo dado por τ de la forma

$$\begin{aligned}
\tau_n : V_{n+1}^* &\rightarrow V_n^* \\
\tau_n(a) &= (ab^2ab^3 \cdots ab^{n+1})(ab^3 \cdots ab^{n+1}ab^2) \cdots (ab^{n+1}ab^2 \cdots ab^n) \\
\tau_n(b) &= ab
\end{aligned}$$

Dicho sistema cumple que

$$\begin{aligned}
a_n &= n^2 \\
b_n &= \frac{n^2(n+3)}{2} \\
z_n &= n
\end{aligned}$$

satisfaciendo cada una de las desigualdades (2.22) - (2.29)

Notemos además que para este sistema de Bratteli-Vershik tampoco se puede cumplir la desigualdad (2.2) del Teorema 2.14, es decir, para toda sucesión de palabras $(\omega(n))_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}\{a, b\}^*$ se cumplirá que:

$$\mu(X_{\omega(n)}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.30)$$

En efecto, si algunas palabras de la secuencia $(\omega(n))_{n \in \mathbb{N}}$ comienzan con b , entonces la torre $X_{\omega(n)}^{(n)} \subseteq X_b^{(n)}$, pero sabemos que $\mu(X_b^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Supongamos entonces que la palabra empieza con a , notemos que en el lenguaje del nivel $n \geq 1$ no se lee la palabra aa , por lo tanto $\mu(X_{aa}^{(n)}) = 0$. Vemos que $a\mathcal{R}^{(n)}(a) = \{aba, ab^2a, \dots, ab^na, ab^{n+1}a\}$ y que por lo tanto no se cumple el Teorema 2.43.

Más aún, para el caso aba , por la forma de las substituciones tenemos que $X_{aba}^{(n)} \subseteq X_a^{(n)} \cap X_b^{(n+1)}$ y por la misma razón de antes su medida converge a 0. Finalmente, para $ab^k a$ con $2 \leq k \leq n+1$ notamos que

$$X_{ab^k a}^{(n)} = \bigcup_{\substack{i, \ell=0, \\ i+\ell \pmod n = k-2}}^n [e_{i+\ell n}]_X$$

donde los e_j son las aristas de $A_n = \{e_0 < e_1 < \dots < e_{n^2-1}\}$. Con ello

$$\mu(X_{ab^k a}^{(n)}) = n\mu([e_0]_X) = \frac{n}{n^2}\mu(X_a^{(n)} \cap X_a^{(n+1)}) \leq \frac{1}{n}$$

Con lo que nuevamente se iría a 0. Por último, si ahora $\omega(n)$ es cualquier palabra que empieza y termina con a , sabemos que se va a poder escribir como $\omega(n) = aw_1w_2 \cdots w_r$ con $w_j \in \mathcal{R}(a)$, por lo tanto, gracias a la Proposición 2.6, quedaría que:

$$\mu(X_{\omega(n)}^{(n)}) \leq \mu(X_{aw_1}^{(n)})$$

y con ello, también tendería a 0. Con lo que se concluye (2.30), por lo que si fuera parcialmente rígido la única herramienta que queda para demostrarlo es el Teorema 2.23, pero no queda claro cómo formar conjuntos $X_{[\omega(n)]_n}^{(n)}$ lo suficientemente grandes.

Observación 2.60 En el ejemplo anterior el orden es importante, puesto que si escribimos

$$\begin{aligned}\sigma_n : V_{n+1}^* &\rightarrow V_n^* \\ \sigma_n(a) &= (ab^2ab^3 \dots ab^{n+1})^n \\ \sigma_n(b) &= ab\end{aligned}$$

Esto daría origen al mismo diagrama pero con un orden distinto. Más aún, se seguiría teniendo que:

$$\begin{aligned}a_n &= n^2 \\ b_n &= \frac{n^2(n+3)}{2} \\ z_n &= n,\end{aligned}$$

pero se puede demostrar que es rígido, puesto que si ordeno $A_n = \{e_0 < e_1 < \dots < e_{n^2-1}\}$ con el orden inducido, queda claro que los primeros $n^2 - n$ cilindros $[e_i]_X$ cumplen con ser subconjuntos de $X_{[\omega(n)]_n}^{(n)}$ donde $\omega(n) = ab^2ab^3 \dots ab^{n+1}a$, pues cumplen que

$$T^{nh_a^{(n)} + \frac{n(n+3)}{2}h_b^{(n)}} [e_i]_X = [e_{i+n}]_X \subseteq X_a^{(n)}$$

Con ello, como todos los cilindros $[e_i]_X$ pesan lo mismo, queda que

$$\mu(X_{[\omega(n)]_n}^{(n)}) \geq \frac{n^2 - n}{n^2} \mu(X_a^{(n)} \cap X_a^{(n+1)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Y se concluye usando el Teorema 2.23.

Capítulo 3

Rigidez en sistemas simbólicos

En este capítulo se centra en la rigidez de ciertos sistemas de Cantor, particularmente para subshift linealmente recurrentes y para sistemas substitutivos.

Las propiedades del capítulo son, en su mayoría, consecuencia del Corolario 2.25. Como se trabaja sobre todo en el contexto simbólico, los resultados del primer capítulo que ligan a los sistemas de Bratteli-Vershik con los sistemas simbólicos juegan un rol muy importante. A lo largo de este capítulo se entiende que los *shifts de rango finito* son aquellos sistemas simbólicos (Ω, S) que tienen una BV-representación medible $B = (V, E, \leq)$ de rango finito y bueno.

Además, se usa una notación que es muy común cuando se trabaja con palabras finitas en un alfabeto finito \mathcal{A} la cual consiste en considerar la operación concatenación como una operación de grupo: para una letra $a \in \mathcal{A}$ escribimos a^{-1} al elemento tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = \varepsilon$ con ε la palabra vacía. A su vez, para una palabra $\omega \in \mathcal{A}^*$ escribimos ω^{-1} de tal forma que $\omega\omega^{-1} = \omega^{-1}\omega = \varepsilon$ y que se puede escribir en función de sus letras de manera obvia.

3.1. Rigidez en shifts de rango finito

Comenzamos esta sección escribiendo una condición necesaria para que un sistema sea rígido:

Proposición 3.1 *Sea (Ω, S) un shift sobre el alfabeto \mathcal{A} , minimal y de rango finito. Sea además ν una medida ergódica y rígida para S , entonces*

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left[\nu \left(\bigcup_{w \in \mathcal{CL}_m(\Omega)} [w]_\Omega \right) \right] = 1 \quad (3.1)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $(X, T) = (X_B, T_B)$ el sistema de Bratteli-Vershik que es conjugado (al menos en medida) a (Ω, S) dado por $B = (V, E, \leq)$ de rango finito y bueno. Por el Corolario 2.25 sabemos que existe una sucesión $(\omega(n) \in \mathcal{CL}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(X_{[\omega(n)]_n}^{(n)}) = 1$$

Para un n fijo, consideremos $\vartheta \in [\omega(n)]_n$ y fijamos $\ell = |\sigma_{[0,n]}(\vartheta_1)|$, donde $\sigma = (\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la secuencia que se lee en el diagrama de Bratteli B . Para $0 \leq k \leq \ell$ denotamos $p_k^{\vartheta_1, n}$ al k -ésimo prefijo de $\sigma_{[0,n]}(\vartheta_1)$ (ie $|p_k^{\vartheta_1, n}| = k$ y es prefijo de $\sigma_{[0,n]}(\vartheta_1)$) y denotamos $s_k^{\vartheta_1, n}$ al

k -ésimo sufijo de $\sigma_{[0,n]}(\vartheta_1)$ (ie $|s_k^{\vartheta_1,n}| = \ell - k$ y es sufijo de $\sigma_{[0,n]}(\vartheta_1)$). Notar que $p_0^{\vartheta_1,n}$ y $s_\ell^{\vartheta_1,n}$ son la palabra vacía.

Luego tomando $\phi_0 : (X, T) \rightarrow (\Omega, S)$ la conjugación natural se tiene que:

$$\phi_0(X_\vartheta^{(n)}) \subseteq \bigcup_{w \in \mathcal{C}_\vartheta^n} [w]_\Omega$$

$$\text{donde } \mathcal{C}_\vartheta^n = \{(p_k^{\vartheta_1,n})^{-1} \sigma_{[0,n]}(\vartheta) (s_{k+1}^{\vartheta_1,n})^{-1} : 0 \leq k < \ell\} \subseteq \mathcal{A}^*$$

Notar que las palabras de \mathcal{C}_ϑ^n son aquellas representadas en azul en el esquema siguiente:

$$\sigma_{[0,n]}(\vartheta) = \underbrace{a_0 a_1 \cdots a_{k-1}}_{p_k^{\vartheta_1,n}} \overbrace{a_k a_{k+1} \cdots a_{\ell-1}}^{\sigma_{[0,n]}(\vartheta_1)} \sigma_{[0,n]}(\vartheta_2 \cdots \vartheta_{|\vartheta|-1}) \overbrace{a_0 a_1 \cdots a_{k-1} a_k a_{k+1} \cdots a_{\ell-1}}^{\sigma_{[0,n]}(\vartheta_1)} \underbrace{a_{k+1} \cdots a_{\ell-1}}_{s_{k+1}^{\vartheta_1,n}}$$

De la misma forma tenemos entonces que

$$\phi_0(X_{[\omega(n)]_n^{(n)}}) \subseteq \bigcup_{\vartheta \in [\omega(n)]_n} \bigcup_{w \in \mathcal{C}_\vartheta^n} [w]_\Omega \quad (3.2)$$

Para concluir hay que notar que por definición de \sim_n , se tiene que si $w^1, w^2 \in \bigcup_{\vartheta \in [\omega(n)]_n} \mathcal{C}_\vartheta^n$ entonces w^1 y w^2 tienen el mismo largo (que llamaremos m_n) y además son palabras completas (empiezan y terminan con la misma letra). Es decir,

$$w \in \bigcup_{\vartheta \in [\omega(n)]} \mathcal{C}_\vartheta^n \Rightarrow w \in \mathcal{CL}_{m_n}(\Omega) \quad (\forall n \geq 1)$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(X_{[\omega(n)]_n}) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \nu \left(\bigcup_{\vartheta \in [\omega(n)]_n} \bigcup_{w \in \mathcal{C}_\vartheta^n} [w]_\Omega \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \nu \left(\bigcup_{w \in \mathcal{CL}_{m_n}(\Omega)} [w]_\Omega \right) \end{aligned}$$

□

Observación 3.2 Dada la demostración anterior, se puede caracterizar la subsucesión $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\nu \left(\bigcup_{w \in \mathcal{CL}_{m_n}(\Omega)} [w]_\Omega \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, en efecto

$$m_n = 1 + |\sigma_{[0,n]}(\omega_1(n) \omega_2(n) \cdots \omega_{|\omega(n)|-1}(n))|$$

En particular, cuando el diagrama de Bratteli es estacionario, es decir, $\sigma_n = \sigma$ para todo n (con σ una substitución), entonces

$$m_n = 1 + |\sigma^n(\omega_1(n) \omega_2(n) \cdots \omega_{|\omega(n)|-1}(n))|$$

En algunos casos de interés, ver ejemplo de la secuencia de Fibonacci en la sección 3.3, se podrá asegurar que $m_n = 1 + |\sigma^n(a)|$, es decir, podíamos elegir $\omega(n) = aa$.

3.2. Rigidez en shifts linealmente recurrentes

Decimos que un shift (Ω, S) es *linealmente recurrente* si es minimal y existe $K > 0$ tal que para todo $u \in \mathcal{L}(\Omega)$ y toda palabra de retorno por la derecha w de u se cumple que $|w| \leq K|u|$.

En [DP22, capítulo 6] se construye una BV-representación para los shift linealmente que resulta ser simple, propiamente ordenada y cuyas matrices $\{M_B^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ son positivas y pertenecen a una familia finita de matrices, es decir, son linealmente recurrente en el sentido del capítulo 1. Con ello podemos usar los resultados de [CDHM03] como la única ergodicidad y otras desigualdades útiles.

En este tipo de sistemas, la rigidez se observa directamente en el lenguaje:

Teorema 3.3 *Sea (Ω, S) un shift minimal linealmente recurrente y ν su medida invariante. Si ν es rígida para S , entonces*

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{q_\Omega(m)}{p_\Omega(m)} = 1 \quad (3.3)$$

Con $p_\Omega(m) = |\mathcal{L}_m(\Omega)|$ y $q_\Omega(m) = |\mathcal{C}\mathcal{L}_m(\Omega)|$

Para demostrar este teorema usamos el siguiente lema que puede ser de interés en sí mismo

Lema 3.4 *Sea (Ω, S) un shift linealmente recurrente y $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ una secuencia de conjuntos con palabras de largo n (es decir $w \in W_n \Rightarrow |w| = n$). Para una subsucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\frac{|W_{n_k}|}{p_\Omega(n_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{si y solo si} \quad \nu \left(\bigcup_{w \in W_{n_k}} [w]_\Omega \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

DEMOSTRACIÓN.

Notemos que como (Ω, S) es linealmente recurrente, existe $L > 0$ tal que

$$\forall u, w \in \mathcal{L}_n(\sigma), \quad \nu([u]_\Omega) \leq L\nu([w]_\Omega) \quad (3.4)$$

Si llamamos $w_n, u_n \in \mathcal{L}_n(\Omega)$ tal que $\nu([w_n]_\Omega) = \max_{w \in \mathcal{L}_n(\Omega)} \nu([w]_\Omega)$ y $\nu([u_n]_\Omega) = \min_{w \in \mathcal{L}_n(\Omega)} \nu([w]_\Omega)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\nu \left(\bigcup_{w \in W_n} [w]_\Omega \right) &= \frac{\nu(\bigcup_{w \in W_n} [w]_\Omega)}{\nu(\bigcup_{w \in \mathcal{L}_n(\Omega)} [w]_\Omega)} && \text{dividiendo por 1} \\
&\leq \frac{|W_n| \nu([w_n]_\Omega)}{|\mathcal{L}_n(\Omega)| \nu([u_n]_\Omega)} \\
&\leq L \frac{|W_n|}{|\mathcal{L}_n(\Omega)|} \frac{\nu([w_n]_\Omega)}{\nu([u_n]_\Omega)} && \text{por (3.4)} \\
&= L \frac{|W_n|}{p_\Omega(n)}
\end{aligned}$$

Así si $\frac{|W_{n_k}|}{p_\Omega(n_k)} \rightarrow 0$ entonces $\nu(\bigcup_{w \in W_{n_k}} [w]_\Omega) \rightarrow 0$. De igual forma

$$\begin{aligned}
\nu \left(\bigcup_{w \in W_n} [w]_\Omega \right) &= \frac{\nu(\bigcup_{w \in W_n} [w]_\Omega)}{\nu(\bigcup_{w \in \mathcal{L}_n(\Omega)} [w]_\Omega)} && \text{dividiendo por 1} \\
&\geq \frac{|W_n| \nu([u_n]_\Omega)}{|\mathcal{L}_n(\Omega)| \nu([w_n]_\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{L} \frac{|W_n|}{|\mathcal{L}_n(\Omega)|} \frac{\nu([u_n]_\Omega)}{\nu([w_n]_\Omega)} && \text{por (3.4)} \\
&= \frac{1}{L} \frac{|W_n|}{p_\Omega(n)}
\end{aligned}$$

Así si $\nu(\bigcup_{w \in W_{n_k}} [w]_\Omega) \rightarrow 0$ entonces $\frac{|W_{n_k}|}{p_\Omega(n_k)} \rightarrow 0$. □

DEMOSTRACIÓN. (del Teorema 3.3)

Por la Proposición 3.1 como ν es rígida se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu \left(\bigcup_{w \in \mathcal{C}\mathcal{L}_{n_k}(\Omega)} [w]_\Omega \right) = 1$$

Con ello, al considerar $W_k = \mathcal{L}_{n_k}(\Omega) \setminus \mathcal{C}\mathcal{L}_{n_k}(\Omega)$, por el Lema 3.4 queda que

$$\lim_k \frac{|W_k|}{p_\Omega(n_k)} = 0$$

Luego como $\frac{|W_k|}{p_\Omega(n_k)} + \frac{q_\Omega(n_k)}{p_\Omega(n_k)} = 1$ para todo $k \geq 1$, se concluye el resultado. □

A partir de ahora $q_\Omega(n)$ siempre se refiere a la cardinalidad del conjunto $\mathcal{C}\mathcal{L}_n(\Omega)$ con (Ω, S) un sistema simbólico y $p_\Omega(n)$ es la cardinalidad del conjunto $\mathcal{L}_n(\Omega)$ que es usualmente conocida como la complejidad del sistema. Cabe destacar que el límite señalado anteriormente solo se alcanza en el infinito, más precisamente:

Proposición 3.5 *Sea (Ω, S) un shift y $\mathcal{L}(\Omega)$ su lenguaje. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}\mathcal{L}_m(\Omega) = \mathcal{L}_m(\Omega)$ entonces $\mathcal{L}(\Omega)$ es finito y por lo tanto Ω es finito.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos m tal que $\mathcal{CL}_m(\Omega) = \mathcal{L}_m(\Omega)$ y una palabra $\vartheta = a_1 a_2 \cdots a_m \in \mathcal{L}_m(\Omega)$ arbitraria y veamos que es únicamente extensible por la derecha. Supongamos que $b \in \mathcal{A}$ cumple que $\vartheta b \in \mathcal{L}(\Omega)$, eso implica que $a_2 \cdots a_m b \in \mathcal{L}_m(\Omega)$ y, por lo tanto, $a_2 \cdots a_m b \in \mathcal{CL}_m(\Omega)$ y así $b = a_2$ con lo que se concluye. \square

Ejemplo Gracias al Teorema 3.3, estamos en condiciones de demostrar que el subshift de Thue-Morse no es rígido (de hecho en la sección 4.2.1 se demuestra que su constante de parcial rigidez es $2/3$). Recordemos que el subshift de Thue Morse $(\Omega(\sigma), S)$ viene dado por $\sigma : a \mapsto ab, b \mapsto ba$.

Si escribimos $p(n) = |\mathcal{L}_n(\sigma)|$, $q(n) = |\mathcal{CL}_n(\sigma)|$ y $\bar{q}(n) = |\mathcal{L}_n(\sigma)| - |\mathcal{CL}_n(\sigma)|$, entonces

$$\begin{aligned} p(2n) &= p(n) + p(n+1) \\ q(2n) &= \bar{q}(n) + \bar{q}(n+1) \\ \bar{q}(2n) &= q(n) + q(n+1) \\ p(2n+1) &= 2p(n+1) \\ q(2n+1) &= 2q(n+1) \\ \bar{q}(2n+1) &= 2\bar{q}(n+1) \end{aligned}$$

Esto es directo del hecho que si $v \in \mathcal{CL}_{n+1}(\sigma)$ entonces $v = xv'x$ (con $x \in \{a, b\}$, $v' \in \mathcal{L}_{n-1}(\sigma)$), luego v da origen de manera única² a las palabras $x\bar{x}\sigma(v')x\bar{x} \in \mathcal{L}_{2n+2}(\sigma) \setminus \mathcal{CL}_{2n+2}(\sigma)$, $x\bar{x}\sigma(v')x, \bar{x}\sigma(v')x\bar{x} \in \mathcal{CL}_{2n+1}(\sigma)$ y $\bar{x}\sigma(v')x \in \mathcal{L}_{2n}(\sigma) \setminus \mathcal{CL}_{2n}(\sigma)$. Donde se usó la notación $x = a \Leftrightarrow \bar{x} = b$. Lo mismo se puede hacer para el caso $v \in \mathcal{L}_{n+1}(\sigma) \setminus \mathcal{CL}_{n+1}(\sigma)$. Por lo tanto para saber los valores de $p(n)$, $q(n)$ y $\bar{q}(n)$ basta saber que $p(2) = 4$, $q(2) = 2$ y $\bar{q}(2) = 2$ (pues $\mathcal{L}_2(\sigma) = \{aa, ab, ba, bb\}$).

Afirmación: para todo $n \geq 2$ se tiene que

$$\frac{1}{3} \leq \frac{q(n)}{p(n)} \leq \frac{2}{3}$$

En efecto, por inducción (fuerte) supongamos que es verdad para todo $k < 2n$ y demostrémoslo para $2n$ y $2n+1$. Para el caso $2n$, primero notemos que si $\alpha, \beta, r, r', s, s'$ positivos cualesquiera con $\alpha \leq \frac{r}{s} \leq \beta$ y $\alpha \leq \frac{r'}{s'} \leq \beta$ entonces $\alpha \leq \frac{r+r'}{s+s'} \leq \beta$, por lo tanto,

$$\frac{1}{3} \leq \frac{q(n) + q(n+1)}{p(n) + p(n+1)} \leq \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{\bar{q}(2n)}{p(2n)} \leq \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{q(2n)}{p(2n)} \leq \frac{2}{3}$$

El caso $2n+1$ es mucho más simple, pues $\frac{q(2n+1)}{p(2n+1)} = \frac{q(n+1)}{p(n+1)}$. Con ello, la sucesión $(\frac{q(n)}{p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ vive acotada en el intervalo $[1/3, 2/3]$ (con lo que no puede converger a 1) y por el Teorema 3.3 se concluye que el shift de Thue-Morse no es rígido.

Vamos a terminar esta sección con el siguiente lema:

² En la sección 4.2.1 esto se estudia más formalmente

Lema 3.6 Sea (X, T) un sistema de Bratteli-Vershik linealmente recurrente y μ su única medida invariante. (X, \mathcal{B}, μ, T) es rígido si y sólo si existe $(\omega(n) \in \mathcal{CL}(\Omega))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(B_{[\omega(n)]_n}(n))}{\mu(B(n))} = 1 \quad (3.5)$$

donde $B_{[\omega(n)]_n}(n) = \bigcup_{w \in [\omega(n)]} B_w(n)$.

DEMOSTRACIÓN.

\Leftarrow Sea la subsucesión $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathcal{N}}} \frac{\mu(B_{[\omega(n)]_n}(n))}{\mu(B(n))} = 1$$

Supongamos que d es la cardinalidad máxima de vértices por nivel del diagrama de Bratteli (es claro que $d < \infty$ puesto que el diagrama presenta un número finito de matrices). Más aún, cómo estamos trabajando vía subsucesión, podemos suponer que V_n tiene la misma cardinalidad d para todo $n \in \mathcal{N}$ (escribiremos $V_n = \mathcal{A} = \{1, \dots, d\}$). Veamos que aquello implica que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathcal{N}}} \mu(X_{[\omega(n)]}^{(n)}) = 1$$

De lo contrario, si denotamos $C_n = X \setminus X_{[\omega(n)]}^{(n)}$ tendríamos que salvo subsucesión existe una constante $\rho > 0$ tal que $\mu(C_n) \geq \rho$. Luego existe $(a_n)_{n \in \mathcal{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tal que

$$\mu(C_n \cap X_{a_n}^{(n)}) \geq \frac{\rho}{d}$$

Podemos suponer (vía subsucesión nuevamente) que para todo $n \in \mathcal{N}$, $a_n = a$ para cierta letra $a \in \mathcal{A}$. Como $X_{[\omega(n)]}^{(n)} \cap X_a^{(n)}$ es una unión disjunta (posiblemente vacía) de subtorres de $X_a^{(n)}$ queda que $C_n \cap X_a^{(n)}$ también es una subtorre de $X_a^{(n)}$, así

$$\mu(C_n \cap B_a(n)) \geq \frac{\rho}{dh_a^{(n)}}$$

Luego usando la lineal recurrencia, sabemos que existe $L > 0$ tal que $h_a^{(n)} \leq Lh_b^{(n)}$ para todo n . Así

$$\begin{aligned} \frac{\mu(C_n \cap B_a(n))}{\mu(B(n))} &\geq \frac{\rho}{dh_a^{(n)}} \frac{1}{\mu(B(n))} = \frac{\rho}{d} \frac{1}{h_a^{(n)} \sum_{b \in \mathcal{A}} \mu(B_b(n))} \\ &\geq \frac{\rho}{d} \cdot \frac{1}{L \sum_{b \in \mathcal{A}} h_b^{(n)} \mu(B_b(n))} = \frac{\rho}{Ld} \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción con el hecho que $\frac{\mu(C_n \cap B_a(n))}{\mu(B(n))} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \in \mathcal{N}} 0$.

⇒ (es exactamente el mismo razonamiento)

Partamos ahora de que por el Corolario 2.25 existe una secuencia $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\mu(X_{[\omega(n_k)]}^{(n_k)}) \rightarrow 1$ y supongamos rumbo a contradicción que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(B_{[\omega(n_k)]n_k}(n_k))}{\mu(B(n_k))} = \rho < 1$$

Con ello si consideramos $C_{n_k} = B(n_k) \setminus B_{[\omega(n_k)]n_k}(n_k)$ queda que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(C_{n_k})}{\mu(B(n_k))} = 1 - \rho > 0$$

Sea entonces $A_{n_k} = C_{n_k} \cap B_a(n_k)$ con a el vértice (vía subsucesión) que cumple que $\limsup_k \frac{\mu(A_{n_k})}{\mu(B(n_k))} \geq \frac{1-\rho}{d}$ (con d como antes). Ahora bien A_{n_k} es la base de una subtorre de $X_a^{(n_k)}$, dicha torre es el conjunto $\mathcal{T}_{n_k} = \bigcup_{i=0}^{h_a^{(n_k)}-1} T^i A_{n_k}$ que por construcción está en el complemento de $X_{[\omega(n_k)]}^{(n_k)}$. Luego

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1-\rho}{d} &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{h_a^{(n_k)} \mu(A_{n_k})}{h_a^{(n_k)} \mu(B(n_k))} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} L \frac{\mu(\mathcal{T}_{n_k})}{\sum_{v=1}^d h_v^{(n_k)} \mu(B_v(n_k))} = L \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{T}_{n_k}) \end{aligned}$$

Como $\mathcal{T}_{n_k} \subseteq X \setminus X_{[\omega(n_k)]n_k}^{(n_k)}$ llegamos a una contradicción y así $\frac{\mu(B_{[\omega(n_k)]n_k}(n_k))}{\mu(B(n_k))} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$

□

3.3. Estudio rigidez en shift de substitución

En esta sección nos concentramos en un caso particular de los shifts linealmente recurrentes que son los shifts de substitución. Antes de aquello, vamos a definir una nueva relación de equivalencia similar a \sim_n , pero que es mucho más fácil de observar.

Definición 3.7 Para un alfabeto finito \mathcal{A} llamamos función de abelianización $f_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ a la función dada por $\omega \mapsto (|\omega|_a)_{a \in \mathcal{A}}$.

Con ella, para un lenguaje $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}^*$ se define la relación de equivalencia \sim_{00} en $\mathcal{C}\mathcal{L}$ dada por

$$w \sim_{00} u \Leftrightarrow f_{\mathcal{A}}(ww_{|w|}^{-1}) = f_{\mathcal{A}}(uu_{|u|}^{-1})$$

y denotamos $[w]_{00}$ a la clase de equivalencia dada por \sim_{00} .

Ejemplo

- $abcaa \sim_{00} baacb$ pues $abcaaa^{-1} = abca$, $baacbb^{-1} = baac$ y

$$|abca|_a = |baac|_a = 2 \ ; \ |abca|_b = |baac|_b = 1 \ ; \ |abca|_c = |baac|_c = 1$$

- Si $\Omega(\sigma)$ el shif de Fibonacci

$$[abaaba]_{00} = \mathcal{CL}_6(\sigma) = \{abaaba, baabab, aababa, ababaa, babaab\}$$

Observación 3.8 Si juntamos esta noción con la de la sección 2.2 notamos que $\forall w, u \in \mathcal{CL}^{(n)}$, $w \sim_{00} u \Rightarrow w \sim_n u$.

A partir de ahora, consideramos $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$, seguimos denotando $(\Omega(\sigma), S)$ al shift generado por σ y (X, T) al sistema de Bratteli-Vershik dado por el diagrama de Bratteli $B_\sigma = (V, E, \leq)$ estacionario generado por la secuencia $\sigma \equiv \sigma$. Vamos a suponer que σ es **reconocible** y que $\Omega(\sigma)$ tiene cardinalidad infinita, así como ya se ha comentado $(\Omega(\sigma), S)$ es conjugado en medida a (X, T) para su única medida invariante.

Cabe destacar que en este contexto para $w, u \in \mathcal{CL}(\sigma)$

$$w \sim_n u \Leftrightarrow f_{\mathcal{A}}(\sigma^n(w w_{|w|}^{-1})) = f_{\mathcal{A}}(\sigma^n(u u_{|u|}^{-1}))$$

Observación 3.9 Como los niveles del diagrama de Bratteli B_σ son idénticos, se tiene que $\mathcal{L}^{(n)} = \mathcal{L}^{(m)} = \mathcal{L}(\sigma)$ para todo $n, m \geq 1$.

Definición 3.10 Sea $\omega \in \mathcal{CL}(\sigma)$, se define C_ω el cilindro de la clase de equivalencia de ω en $\Omega(\sigma)$ como

$$C_\omega = \bigsqcup_{w \in [\omega]_{00}} [w]_\Omega$$

Con $[w]_\Omega = \{x \in \Omega(\sigma) : x_{[0, |w|]} = w\}$ el cilindro dado por la palabra w . Similarmente,

$$C_\omega^n = \bigsqcup_{w \in [\omega]_n} [w]_\Omega$$

Con esta notación podemos enuncia el siguiente proposición

Proposición 3.11 Sea ν la única medida invariante para $(\Omega(\sigma), S)$. Si existe una secuencia de palabras $\omega(n) \in \mathcal{CL}(\sigma)$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(C_{\omega(n)}) = 1 \tag{3.6}$$

Entonces $(\Omega(\sigma), \mathcal{B}, \nu, S)$ es rígido.

DEMOSTRACIÓN. En efecto si $(B(m), T_m)$ el sistema inducido por (X, T) en las bases del nivel m , $\mu_m = \frac{\mu}{\mu(B(m))}$ la medida inducida y $\phi_m : (B(m), T_m) \rightarrow (\Omega(\sigma), S)$ la conjugación natural entre ambos sistemas, se tiene que $\phi_m^{-1} C_\omega = B_{[w]_{00}}^{(m)}$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
1 &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \nu(C_{\omega(m)}) \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \mu_m(B_{[\omega(m)]_{00}}^{(m)}) \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\mu(B_{[\omega(m)]_m}^{(m)})}{\mu(B(m))} \quad (\text{por la obs 3.8})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\mu(B_{[\omega(m)]_m}^{(m)})}{\mu(B(m))} = 1$ y se concluye con el Lema 3.6. \square

Ahora vamos a escribir una condición similar a la de la Proposición 3.11 pero involucrando únicamente las palabras en $\mathcal{L}(\sigma)$, es decir, sin considerar la medida de los cilindros que engendran:

Teorema 3.12 *Si existe una subsucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y una secuencia de palabras $(\omega(k) \in \mathcal{CL}_{n_k}(\sigma))_{k \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$\frac{|[\omega(k)]_{00}|}{p_{\Omega}(n_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \quad (3.7)$$

Entonces, $(\Omega(\sigma), \nu, S)$ es rígido (donde ν es su única medida invariante).

DEMOSTRACIÓN. Definimos $W_k = \mathcal{L}_{n_k}(\sigma) \setminus [\omega(k)]_{00}$. Por (3.7) se tiene que $\frac{|W_k|}{p_{\Omega}(n_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ y por Lema 3.4 se tiene que

$$\nu \left(\bigcup_{w \in W_k} [w]_{\Omega} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Luego como $\nu \left(\bigcup_{w \in W_k} [w]_{\Omega} \right) + \nu(C_{\omega(k)}) = 1$ para todo $k \geq 1$ queda que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu(C_{\omega(k)}) = 1$$

Y se concluye con la Proposición 3.11 \square

Ejemplo Vamos a mostrar lo que debería ser una demostración típica de rigidez usando el teorema anterior. La idea sería estudiar ciertos shift de substitución $\Omega(\sigma)$ tales que exista $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(\omega(k) \in \mathcal{CL}_{n_k}(\sigma))_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

- $[\omega(k)]_{00} = \mathcal{CL}_{n_k}(\sigma)$
- $\frac{q_{\Omega}(n_k)}{p_{\Omega}(n_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$

Para ello estudiemos qué sucede con el shift de Fibonacci (en la sección 3.4, se ve que todos los Sturmianos presentan un comportamiento similar):

Sea $\mathcal{A} = \{a, b\}$ y $\phi : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ la substitución de Fibonacci dada por $\phi(a) = ab$ y $\phi(b) = a$. Sea $\omega(n) = \phi^n(b)a$ que para todo $n \geq 1$ pertenece a $\mathcal{CL}(\sigma)$, pues $\phi^n(b)a \sqsubseteq \phi^n(ba) = \phi^n(b)\phi^n(a)$ y para todo $w \in \mathcal{A}^+$, $\phi(w)$ siempre comienza con a .

Luego notamos que $|\omega(n)| = \varphi_n + 1$ con $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la secuencia de Fibonacci

$$\begin{cases} \varphi_{-1} & = & 1 \\ \varphi_0 & = & 1 \\ \varphi_{n+1} & = & \varphi_n + \varphi_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Se demostrará por inducción que $|\mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}}(\phi)| = \varphi_n$ y con ello como $p_\Omega(\varphi_n + 1) = \varphi_n + 2$ queda que $\frac{q_\Omega(\varphi_{n+1})}{p_\Omega(\varphi_{n+1})} = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. En efecto, se verá que $|a\mathcal{A}^*a \cap \mathcal{L}_{\varphi_{n+1}}| = \varphi_{n-1}$ y $|b\mathcal{A}^*b \cap \mathcal{L}_{\varphi_{n+1}}| = \varphi_{n-2}$. Al mismo tiempo, se demuestra que para todo $\vartheta \in \mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}}(\phi)$ $|\vartheta_1^{-1}\vartheta|_a = \varphi_{n-1}$ y $|\vartheta_1^{-1}\vartheta|_b = \varphi_{n-2}$, es decir, $\vartheta \sim_{00} \omega(n)$.

Por inducción tomemos como caso base $\varphi_3 + 1 = 5 + 1$:

$$\mathcal{CL}_6(\phi) = \{ababaa, aababa, abaaba\} \cup \{babaab, baabab\}$$

lo cual cumple todas las hipótesis que requeríamos. Luego supongamos que aquello se tiene hasta n , así si

- $w \in \mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}} \cap b\mathcal{A}^*b$ entonces
 - $\phi(w) \in \mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}+1} \cap a\mathcal{A}^*a$
- $w \in \mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}} \cap a\mathcal{A}^*a$ entonces
 - $\phi(w)b^{-1} \in \mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}+1} \cap a\mathcal{A}^*a$
 - $a^{-1}\phi(w) \in \mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}+1} \cap b\mathcal{A}^*b$

Cabe destacar que los tres casos anteriores dan origen a palabras distintas y que constituyen la única forma de crear palabras en $\mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}+1}(\phi)$, por lo tanto, usando la hipótesis inductiva queda que

$$\begin{aligned} |\mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}+1} \cap a\mathcal{A}^*a| &= |\mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}} \cap b\mathcal{A}^*b| + |\mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}} \cap a\mathcal{A}^*a| \\ &= \varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} = \varphi_n \\ |\mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}+1} \cap b\mathcal{A}^*b| &= |\mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}} \cap a\mathcal{A}^*a| \\ &= \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

Además, con estas mismas expresiones queda claro que si $\vartheta \in \mathcal{CL}_{\varphi_{n+1}+1}(\phi)$, entonces $|\vartheta_1^{-1}\vartheta|_a = \varphi_n$ y $|\vartheta_1^{-1}\vartheta|_b = \varphi_{n-1}$, con lo que se concluye.

En lo que sigue, presentamos un teorema similar al anterior, pero usando la relación \sim_m en vez de \sim_{00} . Este caso es difícil de aplicar, pero también es más general. Posteriormente, en el caso de sustituciones de largo constante, se deduce un criterio muchísimo más simple. Para ello, es necesaria una última definición

Definición 3.13 Para $\omega \in \mathcal{CL}(\sigma)$ se define su radio n -ésimo $r_n(\omega)$ como

$$r_n(\omega) = \max\{|u| : u \sim_n \omega\}$$

Y llamaremos $\mathcal{P}_n(\omega)$ al conjunto de palabras de largo $r_n(\omega)$ que tengan como prefijo una palabra $\vartheta \in [\omega]_n$, es decir,

$$\mathcal{P}_n(\omega) = \{\varpi \in \mathcal{L}_{r_n(\omega)}(\sigma) : \exists \vartheta \in [\omega]_n \text{ tal que } \vartheta \text{ es prefijo de } \varpi\}$$

Finalmente denotamos $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_n(\omega)} = \bigsqcup_{w \in \mathcal{P}_n(\omega)} [w]_\Omega$

Observación 3.14

$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}_n(\omega)} = \mathcal{C}_\omega^n$$

Esto es directo de que para cualquier palabra w

$$[w]_\Omega = \bigcup_{\substack{\vartheta \in \mathcal{L}_m(\sigma): \\ w \text{ es prefijo de } \vartheta}} [\vartheta]_\Omega$$

con $m \geq |w|$ para que tenga sentido.

Ahora introducimos un lema que es muy similar a la Proposición 3.11 y cuya demostración es exactamente igual. La única diferencia es que en este caso no es sólo una condición suficiente, sino una equivalencia.

Lema 3.15 *Sea ν la única medida invariante para $(\Omega(\sigma), S)$. $(\Omega(\sigma), \nu, S)$ es rígido si y solo si existe una secuencia de palabras $\omega(n) \in \mathcal{CL}(\sigma)$ tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(C_{\omega(n)}^n) = 1 \quad (3.8)$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto sea $(B(m), T_m)$ el sistema inducido por (X, T) en las bases del nivel m , $\mu_m = \frac{\mu}{\mu(B(m))}$ la medida inducida y $\phi_m : (B(m), T_m) \rightarrow (\Omega(\sigma), S)$ la conjugación natural entre estos dos sistemas dinámicos, se tiene que $\phi_m^{-1}C_w^m = B_{[w]_m}^{(m)}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1 &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \nu(C_{\omega(m)}^m) \\ &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \mu_m(\phi_m^{-1}C_{\omega(m)}^m) \\ &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \mu_m(B_{[\omega(m)]_m}^{(m)}) \end{aligned}$$

Luego se concluye con el Lema 3.6 (notar que todos los pasos son equivalencias). □

Con esto enunciamos la siguiente propiedad:

Proposición 3.16 *$(\Omega(\sigma), S)$ es rígido con respecto a su única medida invariante ν si y solo si existe una secuencia de palabras $(\omega(n) \in \mathcal{CL}_n(\sigma))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{P}_n(\omega(n))|}{p_\Omega(r_n(\omega(n)))} = 1 \quad (3.9)$$

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia directa de la observación anterior, el Lema 3.4 y el Lema 3.15 siguiendo el esquema de demostración del Teorema 3.12. □

Como se adelantó anteriormente se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.17 *Sea $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ una substitución de largo constante y ν la única medida invariante de $(\Omega(\sigma), S)$. Entonces, $(\Omega(\sigma), \nu, S)$ es rígido si y solo si*

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{q_{\Omega}(m)}{p_{\Omega}(m)} = 1 \quad (3.10)$$

DEMOSTRACIÓN. Si fijamos $m \geq 1$, como la substitución tiene largo constante es claro que para todo $\omega, \vartheta \in \mathcal{CL}_m(\sigma)$ se tiene que $|\sigma^n(\omega)| = |\sigma^n(\vartheta)|$, por lo tanto, $\omega \sim_n \vartheta$ (sin importar el valor de n).

Con ello, para todo $n \geq 1$ y $\omega \in \mathcal{CL}_m(\sigma)$ $[\omega]_n = \mathcal{CL}_m(\sigma) = \mathcal{P}_n(\omega)$ y $r_n(\omega) = m$ (es decir n no juega ningún rol). Así queda que:

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{P}_m(\omega(m))|}{p_{\Omega}(r_m(\omega(m)))} = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{q_{\Omega}(m)}{p_{\Omega}(m)} = 1$$

donde $\omega(m)$ es cualquier palabra completa de largo m y se concluye con la Proposición 3.16. \square

3.4. Rigidez en sistemas Sturmianos

En esta sección se estudia la rigidez de los sistemas Sturmianos. Estos sistemas simbólicos tienen relevancia histórica, puesto que son aquellos que tienen la función de complejidad $n \mapsto p_{\Omega}(n)$ más pequeña posible, es decir, $p(n) = n + 1$. Estos sistemas cumplen varias propiedades interesantes y la mayoría de estas puede leer en [MH40, BHZ06, DP22]. Listamos un par antes de mostrar los resultados:

Primero se sabe que los sistemas Sturmianos coinciden con la codificación en dos letras de una rotación en el toro 1-dimensional \mathbb{T} por un irracional $\alpha \in (0, 1)$. Dicho irracional tiene una única escritura infinita en fracciones continuas de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5 + \dots}}}}}$$

donde los coeficientes a_i son enteros mayores o iguales a 1. Esto último se denota compactamente como $\alpha = [0; a_1, a_2, a_3, \dots]$. Estos coeficiente juegan un rol muy particular en los sistemas Sturmianos, en efecto, se puede demostrar que si

$$L_0 : \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 01 \end{cases} \quad L_1 : \begin{cases} 0 \mapsto 10 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

Entonces el sistema \mathcal{S} -adico dado por la secuencia directiva $\boldsymbol{\tau} = L_0^{a_1-1} L_1^{a_2} L_0^{a_3} L_1^{a_4} \dots$ es el sistema Sturmiano original. Además de [KT64] si llamamos $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a la secuencia dada por $r_0 = 0, r_1 = 1, r_{n+1} = a_n r_n + r_{n-1}$, entonces $r_n \alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \pmod{1}$, es decir r_n es una secuencia de rigidez para la rotación por α , (\mathbb{T}, R_{α}) . Como (Ω, ν, S) es conjugado en medida, entonces también es rígido con la misma secuencia $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La idea de esta sección es primero constatar algo muy curioso sobre la relación entre la secuencia $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y el lenguaje $\mathcal{L}(\Omega)$ que refuerzan la idea de que la secuencia $(q_{\Omega}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ está estrechamente relacionada con la rigidez. Además, se demuestra de forma alternativa

y gracias a un resultado del capítulo 4, que los sistemas Sturmianos son rígidos. Para ello, en lo que sigue, cuando se hable de sistema Sturmiano, se considera bajo su representación \mathcal{S} -adica

Teorema 3.18 *Sea (Ω, S) un shift Sturmiano dado por $\alpha = [0; a_1, a_2, a_3, \dots]$. Si escribimos $r_0 = 0, r_1 = 1$ y $r_{n+1} = a_n r_n + r_{n-1}$, entonces para todo $n \geq 2$*

$$q_\Omega(r_n + 1) = p_\Omega(r_n + 1) - 2 = r_n$$

Más aún, si $a_1 > 1$:

$$\begin{aligned} [L_0^{a_1-1} L_1^{a_2} L_0^{a_3} \dots L_1^{a_{2k}}(0)0]_{00} &= \mathcal{C}\mathcal{L}_{1+r_{2k}}(\Omega) \\ [L_0^{a_1-1} L_1^{a_2} L_0^{a_3} \dots L_0^{a_{2k+1}}(1)0]_{00} &= \mathcal{C}\mathcal{L}_{1+r_{2k+1}}(\Omega) \end{aligned}$$

y si $a_1 = 1$:

$$\begin{aligned} [L_1^{a_2} L_0^{a_3} \dots L_1^{a_{2k}}(0)1]_{00} &= \mathcal{C}\mathcal{L}_{1+r_{2k}}(\Omega) \\ [L_1^{a_2} L_0^{a_3} \dots L_0^{a_{2k+1}}(1)1]_{00} &= \mathcal{C}\mathcal{L}_{1+r_{2k+1}}(\Omega) \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $p_\Omega(r_n + 1) - 2 = r_n + 1 + 1 - 2 = r_n$, por lo que para la primera igualdad solo resta demostrar que $q_\Omega(r_n + 1) = r_n$. Con esa misma demostración las igualdades de conjuntos listadas posteriormente serán directas.

Vamos a verlo de forma inductiva. Sin pérdida de generalidad (salvo intercambiar los roles de las letras 0 y 1), supongamos que $a_1 > 1$, esto último es solo para dejar establecido que la secuencia directiva $\tau = L_0^{a_1-1} L_1^{a_2} L_0^{a_3} L_1^{a_4} \dots$ realmente comienza con una potencia de la sustitución L_0 .

Notemos que todos los sistemas $\Omega_\tau^{(n)}$ son infinitos y, con ello, tanto 01 como 10 están en $\mathcal{L}^{(n)}(\tau)$, en particular $10 \in \mathcal{L}^{(2)}(\tau)$ y luego $L_1^{a_2}(10) = 11^{a_2}0$. Así como $a_2 \geq 1$, entonces $11 \sqsubseteq 11^{a_2}0$ y con ello $11 \in \mathcal{L}^{(1)}(\tau)$.

Por lo tanto, $L_0^{a_1-1}(11) = 0^{a_1-1}10^{a_1-1}1 \in \mathcal{L}(\tau)$. Notemos que

$$[L_0^{a_1-1}(1)0]_{00} = \{0^i 10^{a_1-i}\}_{i=1}^{a_1-1} \cup \{10^{a_1-1}1\}$$

Luego la cardinalidad de la \sim_{00} -clase de equivalencia de $L_0^{a_1-1}(1)0$ es $r_2 = a_1$. (Notar que si se hace el mismo análisis cuando $a_1 = 1$ se demostraría que $\text{card}([L_1^{a_2}(0)1]_{00}) = a_2 + 1 = r_3$). Cabe destacar que los otros dos elementos en $\mathcal{L}_{1+r_2}(\tau)$ son $0^{a_1}1$ y 10^{a_1} , con lo que efectivamente $q(r_2 + 1) = a_1 = r_2$.

Es claro que lo anterior no solo se puede hacer en el primer nivel, sino también en todos los niveles, lo único que hay que tener en cuenta es la paridad: si estamos en $\mathcal{L}^{(2k)}(\tau)$, entonces se tendrá exactamente lo mismo, en el caso $\mathcal{L}^{(2k+1)}(\tau)$ hay que intercambiar los roles de las letras 0 y 1 (aquí estamos usando implícitamente que los sistemas $\Omega_\tau^{(n)}$ también son Sturmianos).

Veamos ahora qué sucede cuando consideramos dos niveles y con esto se deduce cómo se comporta para una cantidad de niveles arbitrarios:

Por el análisis anterior (aún en el caso $a_1 > 1$) tenemos que $00 \in \mathcal{L}^{(2)}(\tau)$, luego al igual que antes $L_1^{a_2}(00) = 1^{a_2}01^{a_2}0$ y con ello destacamos las palabras de la forma $1^i 01^{a_2+1-i}$ con

$1 \leq i \leq a_2$ y $01^{a_2}0$. Luego

$$L_0^{a_1-1}(1^i 01^{a_2+1-i}) = (0^{a_1-1}1)^i 0(0^{a_1-1}1)^{a_2+1-i}$$

La observación clave es considerar la palabra $0^{a_1-1}1$ como un bloque que se repite al principio y final de la palabra, así para i fijo se construye el siguiente grupo de palabras quitando y dejando simétricamente las letras de ese bloque:

$$\begin{aligned}\omega_{i,j} &= 0^j 1(0^{a_1-1}1)^{i-1} 0(0^{a_1-1}1)^{a_2-i} 0^{a_1-j} \\ \vartheta_i &= 1(0^{a_1-1}1)^{i-1} 0(0^{a_1-1}1)^{a_2+1-i}\end{aligned}$$

que son claramente distintas para todo $1 \leq i \leq a_2$ y $1 \leq j \leq a_1 - 1$. Lo mismo vale para $L_0^{a_1-1}(01^{a_2}0) = 0(0^{a_1-1}1)^{a_2}0$. Vamos a escribir

$$\varpi = 0(0^{a_1-1}1)^{a_2}0$$

Notar que las palabras de la forma $\omega_{i,j}$ son $a_2(a_1 - 1)$, las de la forma ϑ_i son a_2 , y queda la palabra ϖ . En total son $a_2(a_1 - 1) + a_2 + 1 = a_2 a_1 + 1 = r_3$. Además, todas tienen largo $a_2 a_1 + 2 = r_3 + 1$ y, por construcción, son todas distintas y \sim_{00} – equivalentes. Con ello, volvemos a concluir. Notar que, en este caso podemos decir que cada palabra $1^i 01^{a_2+1-i}$ dio origen a $a_1 - 1$ palabras que comenzaban y terminaban con 0 y 1 palabra que empezaba y terminaba con 1, en cambio $01^{a_2}0$ sólo dio origen a una palabra.

El resto de los casos se realiza de forma análoga, donde dependiendo de por cual letra parta implicará cuantas palabras nuevas forma (para el caso $n = 3$ se escribirás palabras de la forma $\omega_{i,j,k}$, $\omega'_{i,j}$, ϑ_i , ϖ_i y ξ para $1 \leq i \leq a_3$, $1 \leq j \leq a_2$, $1 \leq k \leq a_1 - 1$ que estarían construidas de palabras como las que se analizó en el caso 2, dependiendo de si parten o no con 0).

□

Observación 3.19 Este teorema muestra que la rigidez en la secuencia $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es bastante fuerte, pues no solo se cumple un criterio similar al del Teorema 3.12, sino que hay sólo 2 palabras en $\mathcal{L}_{r_n+1}(\sigma)$ que no son completas. Interpretado como rotación, esto nos dice que dentro de las $r_n + 2$ trayectorias de largo $r_n + 1$ posibles, solo 2 no vuelven al intervalo de donde partieron.

Lo otro que hay que notar es que los sistemas Sturmianos no necesariamente son substituciones, de hecho no necesariamente son linealmente recurrentes (esto depende exclusivamente de los coeficientes de la fracción continua), por lo que, si ahora queremos demostrar que es rígido para su medida invariante, no podemos utilizar las técnicas vistas previamente en este capítulo. De hecho, para el próximo teorema necesitamos usar uno de los resultados del próximo capítulo: el Teorema 4.3. Para ello vamos a demostrar que para todo Sturmiano (Ω, S)

$$1 = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup_{w \in \mathcal{L}^{(n)}(\Omega)} \mu(X_{[w]_n}^{(n)}) \right\}$$

y, como se verá, esto implica que son 1-rígidos.

Teorema 3.20 *Sea (Ω, S) un shift Sturmiano, entonces es rígido en medida para su única medida invariante.*

DEMOSTRACIÓN. La idea es la siguiente, si $\tau = L_0^{a_1-1} L_1^{a_2} L_0^{a_3} \dots$ la secuencia directiva del shift Sturmiano, entonces $\Omega^{(n)}(\tau)$ también es un shift Sturmiano (asociado a $\alpha^{(n)} = [0; a_{n+1} + 1, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots]$).

Luego, para todo $n \geq 1$ por el Teorema 3.18 queda que existe una secuencia $(r_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ y una secuencia de palabras completas $(\omega_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ que tienen largo $r_k^n + 1$, tales que para todo $k \in \mathbb{N}$ $[\omega_k^{(n)}]_{00} = \mathcal{CL}_{1+r_k^n}^{(n)}(\tau)$ cuya cardinalidad es r_k^n .

Con esto, para $n \geq 1$ fijo y arbitrario, hay sólo dos palabras en el $\mathcal{L}_{1+r_k^n}^{(n)}(\tau)$ que no son completas y que llamamos ϑ_k y ϑ'_k . Así:

$$\begin{aligned} \mu(X_{[\omega_k^{(n)}]_n}^{(n)}) &\geq \mu(X_{[\omega_k^{(n)}]_{00}}^{(n)}) = \mu\left(\bigcup_{w \in \mathcal{CL}_{r_k^n+1}^{(n)}(\tau)} X_w^{(n)}\right) \\ &= \mu(X \setminus (X_{\vartheta_k}^{(n)} \cup X_{\vartheta'_k}^{(n)})) \xrightarrow{k \rightarrow 1} 1 \quad (\text{pues } \mu \text{ no atómica}) \end{aligned}$$

Con esto, para todo $n \geq 1$, $\sup_{w \in \mathcal{CL}^{(n)}} \mu(X_{[w]_n}^{(n)}) = 1$ y, por lo tanto, el ínfimo sobre n también es 1. Así, usando el Teorema 4.3, queda que el sistema es rígido para su única medida invariante. □

Capítulo 4

Constante de parcial rigidez

En este capítulo se estudiará la constante de parcial rigidez de algunos sistemas de Cantor. Para ello, recordemos la definición de la constante de parcial rigidez:

Definición Para un sistema dinámico abstracto (X, \mathcal{X}, μ, T) parcialmente rígido se define la constante de parcial rigidez $\delta_\mu \in (0, 1]$ de la siguiente forma

$$\delta_\mu = \sup\{\gamma \in (0, 1] : \mu \text{ es } \gamma\text{-rígido para } T\}. \quad (4.1)$$

Cuando (X, \mathcal{X}, μ, T) no es parcialmente rígido decimos que $\delta_\mu = 0$.

Observación 4.1 Se deduce de la definición anterior que:

- si (X, \mathcal{X}, μ, T) es rígido entonces $\delta_\mu = 1$.
- (X, \mathcal{X}, μ, T) es γ -rígido para todo $\gamma \in (0, \delta_\mu)$

Como se comentó en el capítulo 1, no se sabe si en el caso general los sistemas dinámicos abstractos son δ_μ -rígidos, pero como veremos en la sección siguiente para los sistemas de Bratteli-Vershik de rango finito (con B bueno) esto sí se cumple. En otras palabras, el supremo en (4.1) es un máximo.

4.1. Constante para sistemas de Bratteli-Vershik de rango finito

A continuación se presenta, en forma de lema, una primera caracterización de la constante de parcial rigidez para una gran cantidad de sistemas. Con este lema, somos capaces de entregar una versión más amigable de esta constante en el Teorema 4.3. Finalmente, al adaptar este resultado a casos particulares, en la sección 4.2 se realizan algunos cálculos explícitos de constantes de parcial rigidez.

Lema 4.2 Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado, bueno y de rango finito d . Sea además μ una medida ergódica. Entonces,

$$\delta_\mu = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{w \in \mathcal{CL}^{(n)}} \mu(X_{[w]_n}^{(n)}) \right\} \quad (4.2)$$

Más aún, $(X_B, \mathcal{B}, \mu, T_B)$ es δ_μ -rígido.

DEMOSTRACIÓN. Llamemos M al lado derecho de la igualdad (4.2). Es claro que para toda secuencia de palabras $(\omega(n) \in \mathcal{CL}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(X_{[\omega(n)]}^{(n)}) \leq M \quad (4.3)$$

Es decir, todas las posibles constantes de rigidez de $(X_B, \mathcal{B}, \mu, T_B)$ están acotadas por M (ver Teorema 2.23). Ahora, para todo $n \geq 1$, elegimos una palabra $\omega(n) \in \mathcal{CL}^{(n)}$ tal que $\sup_{w \in \mathcal{CL}^{(n)}} \mu(X_{[w]_n}^{(n)}) - \frac{1}{n} \leq \mu(X_{[\omega(n)]_n}^{(n)})$ (que siempre existe por definición de supremo). Con ello,

$$\begin{aligned} M &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(X_{[\omega(n)]_n}^{(n)}) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{w \in \mathcal{CL}^{(n)}} \mu(X_{[w]_n}^{(n)}) - \frac{1}{n} \right\} = M \end{aligned}$$

Es decir, nuevamente por el Teorema 2.23, $(X_B, \mathcal{B}, \mu, T_B)$ es M -rígido y a la vez M es una cota superior. Por lo tanto, $\delta_\mu = M$ y el sistema es δ_μ -rígido. \square

Con el lema anterior estamos en condiciones de escribir el teorema principal de esta sección:

Teorema 4.3 *Sea $B = (V, E, \leq)$ un diagrama de Bratteli ordenado, bueno y de rango finito d . Sea además μ una medida ergódica. Entonces,*

$$\delta_\mu = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup_{w \in \mathcal{CL}^{(n)}} \mu(X_{[w]_n}^{(n)}) \right\} \quad (4.4)$$

Más aún, $(X_B, \mathcal{B}, \mu, T_B)$ es δ_μ -rígido.

DEMOSTRACIÓN.

Basta demostrar que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{w \in \mathcal{CL}^{(n)}} \mu(X_{[w]_n}^{(n)}) \right\} = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup_{w \in \mathcal{CL}^{(n)}} \mu(X_{[w]_n}^{(n)}) \right\}$ y concluir con el Lema 4.2. Para ello, notemos que si $w \in \mathcal{CL}^{(n+1)}$ con $w = a_1 a_2 \cdots a_m$ (donde $a_1 = a_m$) y para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ escribimos $\tau_n(a_i) = \omega^i$ (con τ la secuencia que se lee en el sistema de Bratteli-Vershik), tenemos que:

$$X_w^{(n+1)} \subseteq \bigcup_{j \in \{1, \dots, \ell\}} X_{s_j \omega^{2 \dots \omega^{m-1}} p_j}^{(n)}$$

con $\ell = |\omega^1|$, $s_j = \omega_{[j, \ell]}^1$ y $p_j = \omega_{[1, j]}^1$ (esto es directo de la definición).

Ahora, notemos que la palabra $\vartheta^j = s_j \omega^{2 \dots \omega^{m-1}} p_j$ comienza y termina con la misma letra ω_j^1 , pero más importante aún, para todo $j, j' \in \{1, \dots, \ell\}$ se tiene que $\vartheta^j \sim_n \vartheta^{j'}$. Para esto basta notar que, sin importar el valor de j , se tiene que $\sum_{k=1}^{|\vartheta^j| - 1} h_{\vartheta_k^j}^{(n)} = \sum_{i=1}^{m-1} h_{a_i}^{(n+1)}$.

Por lo tanto,

$$X_w^{(n+1)} \subseteq X_{[\vartheta^1]_n}^{(n)}$$

Y con el mismo razonamiento se tiene entonces que:

$$X_{[w]_{n+1}}^{(n+1)} \subseteq X_{[\vartheta^1]_n}^{(n)}$$

Con ello, finalmente podemos asegurar que:

$$\sup_{w \in \mathcal{CL}^{(n+1)}} \mu(X_{[w]_{n+1}}^{(n+1)}) \leq \sup_{w \in \mathcal{CL}^{(n)}} \mu(X_{[w]_n}^{(n)})$$

Así, como la sucesión es decreciente, dicho límite no es más que un ínfimo. \square

Observación 4.4 Dado lo comentado anteriormente y el Teorema 4.3, en el contexto de sistemas de Bratteli-Vershik de rango finito, podemos plantear la definición de δ_μ de una forma más intuitiva: la constante de parcial rigidez $\delta_\mu \in (0, 1]$ es aquel número que hace que μ sea δ_μ -rígido, pero que no sea $(\delta_\mu + \varepsilon)$ -rígido para todo $\varepsilon > 0$.

Sólo para reforzar el punto, en este contexto, se pueden asegurar propiedades más fuertes que las vistas en la observación 4.1, en efecto:

- (X, \mathcal{B}, μ, T) es rígido si y sólo si $\delta_\mu = 1$.
- (X, \mathcal{B}, μ, T) es γ -rígido para todo $\gamma \in (0, \delta_\mu]$

4.2. Constante de parcial rigidez para sustituciones de largo constante

En esta sección se trabaja con sustituciones de largo constante en las que se puede caracterizar la constante δ_μ más sencillamente.

Teorema 4.5 *Sea $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ una sustitución de largo constante, primitiva y reconocible. Para $(\Omega(\sigma), \nu, S)$ se tiene que la constante de parcial rigidez es*

$$\delta_\nu = \sup_{n \geq 2} \left\{ \nu \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{CL}_n(\sigma)} [\omega]_\Omega \right) \right\}$$

DEMOSTRACIÓN. Es fácil notar que si consideramos el diagrama de Bratteli estacionario conjugado (en medida) a $(\Omega(\sigma), S)$, la simetría entrega que para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y $m \geq 1$

$$h_a^{(m)} = h_b^{(m)} = |\sigma(a)|^m = |\sigma(b)|^m \quad (4.5)$$

Ahora bien, si denotamos como en capítulos anteriores $\mu_m(\cdot) = \mu(\cdot)/\mu(B(m))$ tenemos que para $\omega \in \mathcal{CL}(\sigma)$

$$\begin{aligned} \mu_m(B_\omega(m)) &= \frac{\mu(B_\omega(m))}{\mu(B(m))} \\ &= \frac{\mu(B_\omega(m))}{\sum_{i \in \mathcal{A}} \mu(B_i(m))} \\ &= \frac{h_a^{(m)} \mu(B_\omega(m))}{h_a^{(m)} \sum_{b \in \mathcal{A}} \mu(B_b(m))} \quad (\text{con } a = \omega_1) \\ &= \frac{\mu(X_\omega^{(m)})}{\sum_{b \in \mathcal{A}} \mu(X_b^{(m)})} = \mu(X_\omega^{(m)}) \end{aligned}$$

Luego, tenemos que al considerar $\phi_m : (B(m), \mu_m, T_m) \rightarrow (\Omega(\sigma), \nu, \mathcal{S})$ la conjugación natural entre el sistema inducido en las bases y el shift de sustitución dado por σ queda que:

$$\nu([\omega]_\Omega) = \mu_m(B_\omega(m)) = \mu(X_\omega^{(m)}) \quad (\text{sin importar el valor de } m) \quad (4.6)$$

Por otro lado, tenemos que para $\omega, \vartheta \in \mathcal{CL}(\sigma)$: $\omega \sim_m \vartheta$ si y sólo si $\sum_{i=1}^{|\omega|-1} h_{\omega_i}^{(m)} = \sum_{i=1}^{|\vartheta|-1} h_{\vartheta_i}^{(m)}$, pero por (4.5), $\sum_{i=1}^{|\omega|-1} h_{\omega_i}^{(m)} = (|\omega| - 1)|\sigma(\omega_1)|^m$ y $\sum_{i=1}^{|\vartheta|-1} h_{\vartheta_i}^{(m)} = (|\vartheta| - 1)|\sigma(\vartheta_1)|^m$, así

$$\omega \sim_m \vartheta \Leftrightarrow |\omega| = |\vartheta|$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\forall m \geq 1, \forall \omega \in \mathcal{CL}(\sigma) : [\omega]_m = \mathcal{CL}_{|\omega|}(\sigma) \quad (4.7)$$

Juntando (4.6) y (4.7) queda que

$$\mu(X_{[\omega]_k}^{(k)}) = \mu(X_{[\omega]_m}^{(m)}) = \nu \left(\bigcup_{\vartheta \in \mathcal{CL}_{|\omega|}(\sigma)} [\vartheta]_\Omega \right) \quad \forall m, k \geq 1$$

Por lo tanto, el límite del Teorema 4.3 se puede escribir como

$$\delta_\mu = \inf_{m \geq 1} \left\{ \sup_{n \geq 2} \nu \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{CL}_n(\sigma)} [\omega]_\Omega \right) \right\}$$

que no depende de m con lo que se concluye. □

Notar que una de las principales virtudes de este teorema es que permite de forma relativamente sencilla encontrar una cota inferior para δ_μ , pues basta conocer el valor de los cilindros de un cierto largo, lo cual se puede hacer con la metodología de [Que87] que copiamos en la sección 1.3.1.

Observación 4.6 Notar que con este teorema también se podría haber hecho una demostración alternativa del Corolario 3.17 que establece que los sistemas dados por sustituciones de largo constante son rígidos si y sólo si $\limsup_n \frac{q(n)}{p(n)} = 1$.

4.2.1. Constante de parcial rigidez para la sustitución de Thue-Morse

En esta sección calculamos la constante de parcial rigidez del subshift de Thue-Morse. Este resultado puede leerse como un corolario de los resultados de la sección siguiente, sin embargo, vale la pena redactar esta demostración de manera independiente pues la notación es más clara y porque la sustitución de Thue-Morse tiene una importancia por sí sola. Para el desarrollo de esta sección resultaron muy útiles los estudios realizados en [Bal11] y en [Dek92].

Antes de comenzar, fijemos ciertas nociones y notación. Para una sustitución $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ fija, $i, j \in \mathbb{N}$ y $v \in \mathcal{A}^+$ definimos $\sigma_{i,j}(v)$ como la palabra que se obtiene de $\sigma(v)$ borrándole

las primeras i letras y las últimas j letras (pedimos que $i + j < |\sigma(v)|$). Decimos que $w \in \mathcal{A}^*$ admite una interpretación $s = (v_1 v_2 \cdots v_m, i, j)$ si $\sigma_{i,j}(v_1 v_2 \cdots v_m) = w$ donde $a(s) = v_1 \cdots v_m \in \mathcal{A}^*$ e $i < |\sigma(v_1)|$, $j < |\sigma(v_m)|$. Decimos que la palabra $a(s)$ es ancestro de $w \in \mathcal{A}^*$. Al conjunto de interpretaciones de w lo llamamos $I(w)$.

El siguiente lema es consecuencia de [Fri98]:

Lema 4.7 *Sea $\sigma : \mathcal{A}^+ \rightarrow \mathcal{A}^*$ una substitución primitiva y λ el valor propio de Perron-Frobenius de la matriz $M(\sigma)$. Si ν es la única medida invariante en $\Omega(\sigma)$ con respecto al shift, entonces*

$$\nu([w]) = \frac{1}{\lambda} \sum_{s \in I(w)} \nu([a(s)])$$

Resulta que para una substitución primitiva de largo constante ℓ , el valor propio de Perron-Frobenius de la matriz $M(\sigma)$ es simplemente ℓ .

Para Thue-Morse se puede demostrar que toda palabra w de largo estrictamente mayor que $\ell = 2$ posee un único ancestro (abusando de la notación anterior, denotamos $a(w)$ a dicho ancestro). En particular se tiene que:

$$\nu([w]) = \frac{1}{\ell} \nu([a(w)])$$

De hecho, al igual que en el ejemplo de la sección 3.2, se puede demostrar lo siguiente:

Si $v \in \mathcal{CL}_n(\sigma)$ entonces escribimos $xv'x$ (con $x \in \{a, b\}$ y $v' \in \mathcal{L}_{n-1}(\sigma)$) luego v es ancestro de $x\bar{x}\sigma(v')x\bar{x}$, $x\bar{x}\sigma(v')x$, $\bar{x}\sigma(v')x\bar{x}$, $\bar{x}\sigma(v')x$ (estamos usando la notación $x = a \iff \bar{x} = b$). Con ello,

$$\frac{1}{2} \nu([v]) = \nu([x\bar{x}\sigma(v')x\bar{x}]) = \nu([x\bar{x}\sigma(v')x]) = \nu([\bar{x}\sigma(v')x\bar{x}]) = \nu([\bar{x}\sigma(v')x])$$

De la misma forma si $v \in \overline{\mathcal{CL}}_n(\sigma) = \mathcal{L}_n(\sigma) \setminus \mathcal{CL}_n(\sigma)$ entonces escribimos $xv'\bar{x}$ (con $x \in \{a, b\}$) luego v es ancestro de $x\bar{x}\sigma(v')\bar{x}x$, $x\bar{x}\sigma(v')\bar{x}$, $x\sigma(v')\bar{x}x$, $\bar{x}\sigma(v')\bar{x}$. Así, al igual que antes,

$$\frac{1}{2} \nu([v]) = \nu([x\bar{x}\sigma(v')\bar{x}x]) = \nu([x\bar{x}\sigma(v')\bar{x}]) = \nu([\bar{x}\sigma(v')\bar{x}x]) = \nu([\bar{x}\sigma(v')\bar{x}])$$

Así, una palabra de $w \in \mathcal{CL}_{2n}(\sigma)$ tiene como único ancestro, o bien una palabra $v \in \overline{\mathcal{CL}}_n(\sigma)$, o bien una palabra $v' \in \overline{\mathcal{CL}}_{n+1}(\sigma)$. Con estas observaciones, se deduce que

$$\begin{aligned} \nu \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{CL}_{2n}(\sigma)} [\omega]_\Omega \right) &= \sum_{\omega \in \mathcal{CL}_{2n}(\sigma)} \nu([\omega]_\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \mathcal{CL}_{2n}(\sigma)} \nu([a(\omega)]_\Omega) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in \overline{\mathcal{CL}}_n(\sigma)} \nu([v]_\Omega) + \sum_{v' \in \overline{\mathcal{CL}}_{n+1}(\sigma)} \nu([v']_\Omega) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \nu \left(\bigcup_{v \in \overline{\mathcal{CL}}_n(\sigma)} [v]_\Omega \right) + \nu \left(\bigcup_{v' \in \overline{\mathcal{CL}}_{n+1}(\sigma)} [v']_\Omega \right) \right\} \end{aligned}$$

De la misma forma que podemos demostrar que:

$$\nu \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{CL}_{2n+1}(\sigma)} [\omega]_{\Omega} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \nu \left(\bigcup_{v \in \mathcal{CL}_{n+1}(\sigma)} [v]_{\Omega} \right) + \nu \left(\bigcup_{v \in \mathcal{CL}_{n+1}(\sigma)} [v]_{\Omega} \right) \right\} = \nu \left(\bigcup_{v \in \mathcal{CL}_{n+1}(\sigma)} [v]_{\Omega} \right),$$

y por último que

$$\begin{aligned} \nu \left(\bigcup_{\omega \in \overline{\mathcal{CL}_{2n}(\sigma)}} [\omega]_{\Omega} \right) &= \frac{1}{2} \left\{ \nu \left(\bigcup_{v \in \mathcal{CL}_n} (\sigma)[v]_{\Omega} \right) + \nu \left(\bigcup_{v' \in \mathcal{CL}_{n+1}(\sigma)} [v']_{\Omega} \right) \right\}; \\ \nu \left(\bigcup_{\omega \in \overline{\mathcal{CL}_{2n+1}(\sigma)}} [\omega]_{\Omega} \right) &= \nu \left(\bigcup_{v \in \overline{\mathcal{CL}_{n+1}(\sigma)}} [v]_{\Omega} \right). \end{aligned}$$

Con ello, por inducción, para todo $m \in \mathbb{N}$, el valor de $\nu \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{CL}_m(\sigma)} [\omega]_{\Omega} \right)$ es una combinación convexa de los valores $\left\{ \nu \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{CL}_2(\sigma)} [\omega]_{\Omega} \right), \nu \left(\bigcup_{\omega \in \overline{\mathcal{CL}_2(\sigma)}} [\omega]_{\Omega} \right) \right\}$ y por lo tanto aplicando el Teorema 4.5 queda que:

$$\delta_{\nu} \leq \max \left\{ \nu \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{CL}_2(\sigma)} [\omega]_{\Omega} \right), \nu \left(\bigcup_{\omega \in \overline{\mathcal{CL}_2(\sigma)}} [\omega]_{\Omega} \right) \right\} \quad (4.8)$$

En particular, se concluye que:

Teorema 4.8 *La constante de rigidez parcial para $(\Omega(\sigma), \nu, S)$ el shift de Thue-Morse es $\delta_{\nu} = \frac{2}{3}$*

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que por lo calculado en la sección 1.3.1:

$$\begin{aligned} \nu([aa]) &= \nu([bb]) = \frac{1}{6} \\ \nu([ab]) &= \nu([ab]) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\nu \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{CL}_2(\sigma)} [\omega]_{\Omega} \right) = \frac{1}{3}$ y $\nu \left(\bigcup_{\omega \in \overline{\mathcal{CL}_2(\sigma)}} [\omega]_{\Omega} \right) = \frac{2}{3}$. Así, usando la desigualdad (4.8) queda que $\delta_{\nu} \leq \frac{2}{3}$.

Además por la recurrencia anterior, tenemos que $\nu \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{CL}_3(\sigma)} [\omega]_{\Omega} \right) = \nu \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{CL}_2(\sigma)} [\omega]_{\Omega} \right) = \frac{1}{3}$ y $\nu \left(\bigcup_{\omega \in \overline{\mathcal{CL}_3(\sigma)}} [\omega]_{\Omega} \right) = \nu \left(\bigcup_{\omega \in \overline{\mathcal{CL}_2(\sigma)}} [\omega]_{\Omega} \right) = \frac{2}{3}$ y, con ello,

$$\begin{aligned} \nu \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{CL}_4(\sigma)} [\omega]_{\Omega} \right) &= \frac{1}{2} \left\{ \nu \left(\bigcup_{v \in \overline{\mathcal{CL}_2(\sigma)}} [v]_{\Omega} \right) + \nu \left(\bigcup_{v' \in \overline{\mathcal{CL}_3(\sigma)}} [v']_{\Omega} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Así usando el Teorema 4.5 queda que $\frac{2}{3} \leq \delta_{\nu}$, con lo que se concluye la igualdad.

□

4.2.2. Las sustituciones del tipo Thue Morse no son rígidas

Sea (\mathcal{A}, \cdot) un grupo abeliano finito. Para una palabra $\theta = \theta_1\theta_2 \cdots \theta_\ell$ en \mathcal{A}^* , se define el morfismo $\sigma_\theta : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ como

$$\sigma_\theta(g) = (\theta_1 \cdot g)(\theta_2 \cdot g) \cdots (\theta_\ell \cdot g) \in \mathcal{A}^*$$

En particular, si consideramos $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ con la suma modulo 2 y $\theta = 01$ obtenemos el shift de Thue-Morse (reemplazando 0 por a y 1 por b para que esté escrito como en la sección anterior).

Para una palabra θ como antes, decimos que σ_θ es la *sustitución del tipo Thue-Morse engendrado por θ* .

Recordemos que $\tau : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ es permutable por la izquierda si para todo $a \neq b$ tales que $u = \tau(a)$ y $v = \tau(b)$, entonces $u_1 \neq v_1$ (es decir las primeras letras son distintas). Es fácil demostrar que para todo $\theta \in \mathcal{A}^+$, $\sigma_\theta : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ es permutable por la izquierda. Para ello, basta notar que si $\sigma_\theta(a)_1 = \sigma_\theta(b)_1$, entonces $\theta_1 \cdot a = \theta_1 \cdot b$ y por cancelabilidad $a = b$.

Así por resultados de [BSTY19] ya citados en el capítulo 1, al ser permutable por la izquierda, cuando σ_θ es primitiva, entonces es reconocible. Con ello, si la sustitución σ_θ genera un shift $\Omega(\sigma_\theta)$ infinito, este último será conjugado en medida a la BV-representación natural. Dicha representación es estacionaria y buena.

Dadas estas definiciones presentamos el siguiente lema que nos permite generalizar el resultado de la sección anterior:

Lema 4.9 *Sea $(\Omega(\sigma_\theta), \nu, S)$ como antes, con $|\theta| = \ell$. Entonces se tiene la siguiente recurrencia: para todo $n \geq 1$ e $i \in \{1, \dots, \ell\}$:*

$$\nu(C_{n\ell+i}(\cdot g)) = \frac{1}{\ell} \left(\sum_{k=1}^{\ell+1-i} \nu(C_{n+1}(\cdot \theta_{k+i-1}^{-1} \cdot \theta_k \cdot g)) + \sum_{k=1}^{i-1} \nu(C_{n+2}(\cdot \theta_k^{-1} \cdot \theta_{k-i+1} \cdot g)) \right)$$

donde

$$C_m(\cdot g) = \bigcup_{\substack{w=w_1 \cdots w_m \in \mathcal{L}(\sigma_\theta) \\ \text{tal que } w_m = w_1 \cdot g}} [w]$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos $\mathcal{W}_m(\cdot g) = \{w = w_1 \cdots w_m \in \mathcal{L}(\sigma_\theta) : w_m = w_1 \cdot g\}$ (con ello $C_m(\cdot g) = \bigcup_{w \in \mathcal{W}_m(\cdot g)} [w]$).

Para $g \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$ e $i \in \{1, \dots, \ell\}$ fijos, sea $w \in \mathcal{W}_{\ell n+i}(\cdot g)$ y supongamos que w al tener largo al menos $\ell+1$, tiene una única interpretación y, por lo tanto, un único ancestro $v = a(w)$ (esta hipótesis no juega ningún rol más allá de simplificar la notación ver observación 4.10).

Notar que v , al ser ancestro de w , sólo puede tener largo $n+1$ o $n+2$.

Si $|v| = n+1$ y $(\sigma_\theta)_{j,j'} = w$ se tiene necesariamente que $|\sigma_\theta(v_1)| - j + |\sigma(v_{n+1})| - j' + |\sigma_\theta(v_2 \cdots v_n)| = (n+1)\ell - j - j' = |w| = n\ell + i$ por lo tanto $\ell - i = j + j'$, es decir $j \in \{0, \dots, \ell - i\}$. Luego, si $k = j+1$ queda que $\ell - j' = k + i - 1$. Juntando las siguiente tres

igualdades

$$\begin{aligned}
w_1 &= \sigma_\theta(v_1)_k = \theta_k \cdot v_1 \\
w_{n\ell+i} &= \sigma_\theta(v_{n+1})_{k+i-1} = \theta_{k+i-1} \cdot v_{n+1} \\
w_{n\ell+i} &= w_1 \cdot g \quad (\text{pues } w \in \mathcal{W}_{\ell n+i}(\cdot g))
\end{aligned}$$

podemos ver que $\theta_k \cdot v_1 \cdot g = \theta_{k+i-1} \cdot v_{n+1}$ y, con ello, (aquí es el único momento en que la abelianidad de (\mathcal{A}, \cdot) juega un rol) queda que $v_{n+1} = (\theta_{k+i-1}^{-1} \cdot \theta_k \cdot g) \cdot v_1$, es decir $v \in \mathcal{W}_{n+1}(\theta_{k+i-1}^{-1} \cdot \theta_k \cdot g)$.

Se usa un razonamiento similar para el caso $|v| = n+2$ en el que se llega a que $\theta_{k-i+1} \cdot v_1 \cdot g = \theta_k \cdot v_{n+1}$ y así $v \in \mathcal{W}_{n+2}(\theta_k^{-1} \cdot \theta_{k-i+1} \cdot g)$ para $k \in \{1, \dots, i-1\}$.

Por último es claro que toda palabra $v \in \mathcal{W}_{n+1}(\theta_{k+i-1}^{-1} \cdot \theta_k \cdot g) \cup \mathcal{W}_{n+2}(\theta_k^{-1} \cdot \theta_{k-i+1} \cdot g)$ es ancestro de una palabra $w \in \mathcal{W}_{\ell n+i}(\cdot g)$. Así, al usar el Lema 4.7 queda que:

$$\begin{aligned}
\nu(C_{n\ell+i}(\cdot g)) &= \sum_{w \in \mathcal{W}_{\ell n+i}(\cdot g)} \nu([w]) \\
&= \sum_{w \in \mathcal{W}_{\ell n+i}(\cdot g)} \frac{1}{\ell} \nu([a(w)]) \\
&= \frac{1}{\ell} \left(\sum_{v \in \mathcal{W}_{n+1}(\theta_{k+i-1}^{-1} \cdot \theta_k \cdot g)} \nu([v]) + \sum_{v \in \mathcal{W}_{n+2}(\theta_k^{-1} \cdot \theta_{k-i+1} \cdot g)} \nu([v]) \right) \\
&= \frac{1}{\ell} \left(\sum_{k=1}^{\ell+1-i} \nu(C_{n+1}(\theta_{k+i-1}^{-1} \cdot \theta_k \cdot g)) + \sum_{k=1}^{i-1} \nu(C_{n+2}(\theta_k^{-1} \cdot \theta_{k-i+1} \cdot g)) \right)
\end{aligned}$$

□

Observación 4.10 En la demostración se supone de manera artificial que si $w \in \mathcal{W}_{\ell n+i}(\cdot g)$, entonces tiene un único ancestro, sin embargo, es posible hacer la misma demostración sin esa hipótesis. Esto se debe a que si tuviera más de una interpretación, estas aparecerían cada una por sí sola en la última sumatoria de la demostración. En rigor, la última sumatoria de la demostración corresponde exactamente a la siguiente expresión

$$\frac{1}{\ell} \sum_{w \in \mathcal{W}_{\ell n+i}(\cdot g)} \left(\sum_{s \in I(w)} \nu([a(s)]) \right)$$

Que no es más que la medida de $C_{\ell n+i}(\cdot g)$ (ver Lema 4.7).

Observación 4.11 De lo anterior notamos que cuando $e \in \mathcal{A}$ es el neutro del grupo (\mathcal{A}, \cdot) queda que:

$$\nu(C_{n\ell+i}(\cdot e)) = \frac{1}{\ell} \left(\sum_{k=1}^{\ell+1-i} \nu(C_{n+1}(\theta_{k+i-1}^{-1} \cdot \theta_k)) + \sum_{k=1}^{i-1} \nu(C_{n+2}(\theta_k^{-1} \cdot \theta_{k-i+1})) \right)$$

y que para todo $g \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$\nu(C_{n\ell+1}(\cdot g)) = \nu(C_{n+1}(\cdot g))$$

Lema 4.12 *Bajo las mismas hipótesis del lema anterior, para todo $m \geq 2$ y $g \in \mathcal{A}$ se cumple que*

$$\nu(C_m(\cdot g)) < 1$$

DEMOSTRACIÓN. Se plantea el mismo razonamiento que para la demostración de la Proposición 3.5:

Si $\nu(C_m(\cdot g)) = 1$ entonces todas las palabras de tamaño m cumplirían que $w_m = w_1 \cdot g$ y, por lo tanto, toda palabra sería únicamente extensible ya que para $a \in \mathcal{A}$ si $w_1 w_2 \cdots w_m a \in \mathcal{L}(\sigma_\theta)$ entonces $w_2 \cdots w_m a \in \mathcal{L}_m(\sigma_\theta)$ y por lo tanto $a = w_2 \cdot g$. Con esto $p(m) = p(m+1)$ lo cual implicaría que el sistema es periódico y se llega así a una contradicción. \square

Gracias a la recurrencia del Lema 4.9 y al lema anterior, podemos concluir que ninguno de estos sistemas son rígidos:

Teorema 4.13 *Sea (\mathcal{A}, \cdot) un grupo abeliano, y $\theta \in \mathcal{A}^*$. Si σ_θ es primitiva, $\Omega(\sigma_\theta)$ de cardinalidad infinita y ν su única medida S -invariante, entonces el sistema $(\Omega(\sigma_\theta), \nu, S)$ no es rígido. Más aún, se tiene que*

$$\delta_\nu \leq \max_{\substack{i \in \{2, \dots, \ell\} \\ g \in \mathcal{A}}} \nu(C_i(\cdot g)) \quad (4.9)$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que si $e \in \mathcal{A}$ es el neutro del grupo (\mathcal{A}, \cdot) , entonces por el Teorema 4.5 y usando la notación del Lema 4.9 tenemos que

$$\delta_\nu = \sup_{m > 1} \nu(C_m(\cdot e))$$

Luego por inducción se tiene que para todo $m \geq 2$, $\nu(C_m(\cdot e))$ siempre será la combinación convexa de los elementos del conjunto de valores $\{\nu(C_i(\cdot g)) \in [0, 1) : 2 \leq i \leq \ell, g \in \mathcal{A}\}$ y, por lo tanto, para todo $m \geq 2$ se tiene que $\nu(C_m(\cdot e)) \leq \max\{\nu(C_i(\cdot g)) \in [0, 1) : 2 \leq i \leq \ell, g \in \mathcal{A}\}$ con lo que se concluye la desigualdad (4.9).

Usando el Lema 4.12, es claro que dicho máximo es estrictamente menor que 1 y, por lo tanto, el sistema no es rígido. \square

Ejemplo Si $\theta = 0100$ y $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ pensado como grupo con la suma módulo 3, queda que

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(0) &= 0100 \\ \sigma_\theta(1) &= 1211 \\ \sigma_\theta(2) &= 2022 \end{aligned}$$

Se tiene que todos los cilindros de palabras largo 2 miden $1/9$, es decir, $\nu([00]) = \nu([11]) = \nu([22]) = \nu([01]) = \nu([12]) = \nu([20]) = \nu([02]) = \nu([10]) = \nu([21]) = 1/9$. Con ello,

$$\nu(C_2(+0)) = \nu(C_2(+1)) = \nu(C_2(+2)) = 1/3$$

Por otro lado $\nu([000]) = \nu([020]) = \nu([101]) = \nu([111]) = \nu([212]) = \nu([222]) = 1/36$, $\nu([010]) = \nu([121]) = \nu([202]) = 1/12$, $\nu([001]) = \nu([112]) = \nu([220]) = 1/18$, $\nu([002]) = \nu([012]) = \nu([110]) = \nu([120]) = \nu([211]) = \nu([221]) = 1/36$ y $\nu([022]) = \nu([100]) = \nu([211]) = 1/12$. Con ello,

$$\nu(C_3(+0)) = \nu(C_3(+2)) = 5/12; \nu(C_3(+1)) = 1/6$$

Finalmente para las palabras de largo 4, todos los cilindros miden $1/36$ salvo $\nu([0010]) = \nu([1121]) = \nu([2202]) = 1/12$. Con ello

$$\nu(C_4(+0)) = 1/2; \nu(C_4(+1)) = \nu(C_4(+2)) = 1/4$$

Así por el Teorema 4.13 queda que $\delta_\nu \leq \max\{1/6, 1/4, 1/3, 5/12, 1/2\} = 1/2$, pero también se tiene que $\nu(C_4(+0)) = 1/2$ y por lo tanto $\delta_\nu = 1/2$.

Observación 4.14 Se puede asegurar que el shift de Thue-Morse no es conjugado en medida al sistema del ejemplo anterior, puesto que sus constantes de parcial rigidez son distintas.

Para finalizar este capítulo, vamos a enunciar una consecuencia muy interesante de los Teoremas 4.5 y 4.13. El corolario que se enunciará a continuación, está muy relacionado con una serie de preguntas interesantes que quedan abiertas y que serán discutidas en el Anexo.

Corolario 4.15 *Para todo $\varepsilon > 0$ existe una substitución primitiva $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ tal que $1 - \varepsilon < \delta_\nu < 1$, donde ν es la única medida invariante para $(\Omega(\sigma), S)$.*

DEMOSTRACIÓN. En el alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ y para $j \geq 1$ definimos la substitución $\sigma_j : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ dada por

$$\begin{aligned}\sigma_j(0) &= 01^j \\ \sigma_j(1) &= 10^j\end{aligned}$$

Es claro que σ_j es primitiva y define un sistema de Cantor $(\Omega(\sigma_j), S)$ minimal. Además, σ_j es un substitución de tipo Thue-Morse engendrada por la palabra $\theta = 01^j$. Así por el Teorema 4.13 queda que $\delta_\nu < 1$. Para la segunda desigualdad veremos que para j fijo $\frac{j}{j+2} = \nu(C_2(+0))$ y por lo tanto $\frac{j}{j+2} \leq \delta_\nu$. En efecto, vamos a calcular las medidas de los cilindros de largo 2 siguiendo la metodología de introducida en la sección 1.3.1:

Definamos $\zeta_j : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$ (con $\mathcal{A}_2 = \{(00), (01), (10), (11)\}$) dado por los primeros $j+1$ subbloques de las palabras 00, 01, 10, 11 respectivamente. Por ejemplo $\sigma_j(00) = 01^j 01^j$ por lo tanto $\zeta_j((00)) = (01)(11)^{j-1}(10)$. Los otros valores son $\zeta_j((01)) = (01)(11)^j$, $\zeta_j((10)) = (10)(00)^j$ y $\zeta_j((11)) = (10)(00)^{j-1}(01)$. Construimos así la matriz

$$M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & j & j-1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ j-1 & j & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resulta que la medida de los cilindros está dada por el vector propio normalizado del valor

propio de Perron-Frobenius (que en este caso es $j + 1$). Con ello no es difícil notar que dicho vector es $(\frac{j}{2(j+2)}, \frac{1}{j+2}, \frac{1}{j+2}, \frac{j}{2(j+2)})$ y por lo tanto,

$$\nu(C_2(+0)) = \nu([00]) + \nu([11]) = \frac{j}{2(j+2)} + \frac{j}{2(j+2)} = \frac{j}{j+2}$$

Con ello $\frac{j}{j+2} \leq \delta_\nu$. Finalmente como $\frac{j}{j+2} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1$ basta tomar un j lo suficientemente grande que satisfaga $1 - \varepsilon < \frac{j}{j+2}$ y se concluye. □

Observación 4.16 Cabe destacar que otra familia de sustituciones que también servía para esta demostración eran las sustituciones en el alfabeto $\{0, \dots, d - 1\}$ (pensado como grupo con la suma módulo d) y con $\theta = 1^j 0^j$, pues por el Teorema 2.37 se tendría que $\frac{j-1}{j} \leq \delta_\nu$. Esto último es bastante interesante, pues no importa el tamaño del alfabeto. Se optó por demostrarlo de la otra forma para depender lo menos posible de resultados de capítulos anteriores.

Preguntas abiertas

Para concluir, vamos a mencionar algunas preguntas abiertas que pueden servir como puntos de partida para investigaciones futuras.

Primero, notamos que todavía queda sin responder la pregunta que motivó en un principio esta tesis, ¿son todos los sistemas de Cantor minimales de rango topológico finito parcialmente rígidos para cada una de sus medidas invariantes? Creo que, en un futuro, los resultados del capítulo 2 pueden servir para poder responder definitivamente esta respuesta.

En otra dirección, sería interesante utilizar alguno de los criterios del capítulo 3 para ver si todo sistema substitutivo de Pisot es rígido con respecto a su única medida invariante. Si esto se pudiera demostrar, sería una evidencia más para apoyar la conjetura de Pisot que sugiere que todas las substituciones de Pisot son conjugadas en medida a una rotación en un toro d -dimensional. Para información sobre la conjetura de Pisot ver por ejemplo [PD14, ABB⁺15].

Por otra parte, aquello que deja más preguntas abiertas es la noción de constante de parcial rigidez. En primer lugar, pensando solo en sistemas dinámicos abstractos, sería interesante saber si existe un caso en el que el supremo con el que se define la constante de parcial rigidez no se alcanza, es decir encontrar un sistema (X, \mathcal{X}, μ, T) tal que sea parcialmente γ -rígido para $\gamma \in (0, \delta_\mu)$, mas no para $\gamma = \delta_\mu$.

Ya pensando en el contexto de sistemas de Cantor de rango finito, sería interesante encontrar un algoritmo que, en una cantidad finita de pasos, sea capaz de calcular la constante de parcial rigidez. Notar que se está muy lejos de aquello, en particular lo más cercano a lo que se llegó en esta tesis fue a que, en un contexto limitado (substituciones de tipo Thue-Morse), se encontraron cotas superiores e inferiores que cuando coincidían podíamos llegar al valor exacto.

Surgen a su vez, preguntas sobre el conjunto

$$\Delta = \{\delta \in [0, 1] : \delta = \delta_\mu \text{ para } \mu \text{ medida ergódica de un sistema de Cantor de rango finito}\},$$

en particular, ¿qué elementos viven en ese conjunto? Lo mismo vale para $\Delta_s = \{\delta \in [0, 1] : \delta = \delta_\mu \text{ para } \mu \text{ la única medida invariante de un sistema substitutivo}\}$. En esa línea, gracias al Corolario 4.15 sabemos que el número 1 es un punto de acumulación para ambos conjuntos. Para demostrar un resultado del mismo estilo, pero para el número 0 en vez del número 1, esto se vuelve bastante más complejo, pues las fórmulas del capítulo 4 dependen de un supremo, por lo que es más sencillo acotar por abajo. Además, como la cantidad de substituciones posibles son numerables, sabemos que el conjunto Δ_s también lo sería, por lo que no podría ser todo $(0, 1]$, sin embargo, posiblemente sea denso en ese conjunto. En cambio, para Δ quizás sea posible demostrar la igualdad con $(0, 1]$.

Por lo demás, en el estudio particular de ciertos sistemas, especialmente de origen geomé-

trico, la pregunta por la rigidez es bastante recurrente. En particular, se sabe que *casi todos* los intercambios de intervalos son rígidos (ver [Vee82]), sin embargo, existen varios ejemplos en los que esto no se cumple. Ver, por ejemplo, [FH17, FZ11, FHZ05]. Así para estos mismos ejemplos, con alguna interpretación geométrica y técnicas de esta tesis, quizás se pueda dar una noción más cuantitativa de qué tan *poco rígidos* son y si aquello tiene alguna implicancia más profunda.

Por último, hay dos direcciones más alejadas del foco de esta tesis, pero que podrían ser exploradas. La primera sería caracterizar la constante de parcial rigidez en otras familias de sistemas dinámicos, en particular, en aquellos casos en los que se sabe que la respuesta es no trivial. Vale decir, evitar los sistemas rígidos ($\delta_\mu = 1$) o mixing ($\delta_\mu = 0$). La segunda sería definir una noción de parcial rigidez topológica (ya existen nociones de rigidez topológica, ver por ejemplo [GM89]), que permita definir una constante de parcial rigidez topológica y que ojalá cumpla alguna propiedad similar al principio variacional de la entropía (de existir, como la constante de parcial rigidez crece vía factor, dicho principio variacional probablemente debería estar dado por un ínfimo en vez de un supremo).

Índice de símbolos

\mathcal{A} , 15	$M_B^{(n)}$, 9	τ^B , 19
\mathcal{A}^* , \mathcal{A}^+ , 15	$M(\sigma)$, 16	T_B , 10
$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, 15	$\mathcal{M}(X, T)$, 5	WW' , ωW , 15
a^{-1} , ω^{-1} , 59	$n_U(x)$, 14	X_B , 10
$B = (V, E, \leq)$, 10	$N(x, U)$, 5	X_B^{max}, X_B^{min} , 10
$B_v(n), B(n)$, 14	Ω , 15	x_{max}, x_{min} , 10
$B_\omega(n)$, 26	$\Omega(x)$, 16	$[x]_{\sim}$, 11
$(B(m), T_m)$, 15	$\Omega_B, \Omega_B^{(m)}$, 19	$X_v^{(n)}$, 14
$\mathcal{B}(X)$, 5	$\Omega(\sigma), \Omega_\sigma^{(n)}$, 17	$X_\omega^{(n)}$, 26
B^m , 15	$\Omega(\sigma)$, 16	$X_{[\omega]}^{(n)}$, 32
\mathcal{CL} , 31	\mathcal{O}_{max} , 11	$[\omega \cdot \vartheta]_\Omega, [\vartheta]_\Omega$, 15
$E(n, m)$, 9	$\mathcal{O}_T(x), \mathcal{O}(x)$, 4	$[\bar{e}]_{X_B}$, 10
$\mathcal{E}(X, T)$, 5	$(\mathcal{P}_B(n))$, 13	$[\omega]_n$, 32
$h_v^{(n)}$, 14	ϕ_0, ϕ_n , 19	\sim , 10
\mathcal{L}_a , 31	$q_\Omega(n)$, 62	\cong , 5
$\mathcal{L}^{(m)}(B), \mathcal{L}^{(m)}$, 32	$\mathcal{R}_\Omega(\omega), \mathcal{R}'_\Omega(\omega)$, 46	\simeq , 18
$\mathcal{L}^{(n)}(\sigma)$, 17	$\mathcal{R}_B^{(n)}(\omega), \mathcal{R}^{(n)}(\omega)$, 46	\sim_n , 32
$\mathcal{L}(x), \mathcal{L}_m(x)$, 15	σ , 17	$ \omega $, 15
$\mathcal{L}(\Omega), \mathcal{L}_m(\Omega)$, 15	$\sigma_{[i,j]}, \sigma_{[i,j-1]}$, 17	$ \omega _a$, 15
$\mathcal{L}(\sigma)$, 16	σ_ℓ , 25	$ \sigma , \langle \sigma \rangle$, 16
		\sqsubseteq , 15

Bibliografía

- [ABB⁺15] Shigeki Akiyama, Marcy Barge, Valérie Berthé, J-Y Lee, and Anne Siegel. On the pisot substitution conjecture. *Mathematics of aperiodic order*, pages 33–72, 2015.
- [ACFH21] Pierre Arnoux, Julien Cassaigne, Sébastien Ferenczi, and Pascal Hubert. Arnoux-rauzy interval exchanges. *Annali scuola normale superiore-classe di scienze*, 2021.
- [Aus88] J. Auslander. *Minimal flows and their extensions*, volume 153 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 122.
- [Bal11] Lubomira Balkova. Factor frequencies in generalized thue-morse words. *arXiv preprint arXiv:1107.5033*, 2011.
- [BBY22] Valérie Berthé, Paulina Cecchi Bernales, and Reem Yassawi. Coboundaries and eigenvalues of finitary s-adic systems. *arXiv preprint arXiv:2202.07270*, 2022.
- [BDD⁺17] Valérie Berthé, Vincent Delecroix, Francesco Dolce, Dominique Perrin, Christophe Reutenauer, and Giuseppina Rindone. Return words of linear involutions and fundamental groups. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 37(3):693–715, 2017.
- [BDM05] X. Bressaud, F. Durand, and A. Maass. Necessary and sufficient conditions to be an eigenvalue for linearly recurrent dynamical Cantor systems. *J. London Math. Soc. (2)*, 72:799–816, 2005.
- [BDM10] X. Bressaud, F. Durand, and A. Maass. On the eigenvalues of finite rank Bratteli-Vershik dynamical systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 30:639–664, 2010.
- [BHZ06] Valérie Berthé, Charles Holton, and Luca Q Zamboni. Initial powers of sturmian sequences. *Acta arithmetica*, 122:315–347, 2006.
- [BKM08] S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, and K. Medynets. Aperiodic substitutional systems and their bratteli diagrams. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 29:37–72, 2008.
- [BKMS13] S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, K. Medynets, and B. Solomyak. Finite rank Bratteli diagrams: structure of invariant measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365:2637–2679, 2013.
- [Bra72] O. Bratteli. Inductive limits of finite-dimensional c^* -algebras. *TAMS*, 171:195–234, 1972.
- [BST20] Valérie Berthé, Wolfgang Steiner, and Jörg M Thuswaldner. Multidimensional continued fractions and symbolic codings of toral translations. *arXiv preprint arXiv:2005.13038*, 2020.

- [BSTY19] V. Berthé, W. Steiner, J. Thuswaldner, and R. Yassawi. Recognizability for sequences of morphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 39:2896–2931, 2019.
- [CDHM03] M. I. Cortez, F. Durand, B. Host, and A. Maass. Continuous and measurable eigenfunctions of linearly recurrent dynamical Cantor systems. *J. Lond. Math. Soc.*, 67:790–804, 2003.
- [Cre22] Darren Creutz. Measure-theoretically mixing subshifts of minimal word complexity. *arXiv preprint arXiv:2206.10047*, 2022.
- [Dan16] Alexandre I. Danilenko. Actions of finite rank: weak rational ergodicity and partial rigidity. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 36(7):2138–2171, 2016.
- [DDMP21] Sebastián Donoso, Fabien Durand, Alejandro Maass, and Samuel Petite. Interplay between finite topological rank minimal cantor systems, S -adic subshifts and their complexity. *Transactions of the American Mathematical Society*, 374(5):3453–3489, 2021.
- [Dek92] Frederik Michel Dekking. On the thue-morse measure. *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica*, 33(2):35–40, 1992.
- [DHS99] F. Durand, B. Host, and C. Skau. Substitutive dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19:953–993, 1999.
- [DK78] Frederik Michel Dekking and Michael Keane. Mixing properties of substitutions. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 42(1):23–33, 1978.
- [DM08] T. Downarowicz and A. Maass. Finite-rank Bratteli-Vershik diagrams are expansive. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28:739–747, 2008.
- [DP22] Fabien Durand and Dominique Perrin. *Dimension Groups and Dynamical Systems: Substitutions, Bratteli Diagrams and Cantor Systems*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2022.
- [Dur10] F. Durand. *Combinatorics on Bratteli diagrams and dynamical systems*, page 324–372. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2010.
- [EFHN15] Tanja Eisner, Bálint Farkas, Markus Haase, and Rainer Nagel. *Operator theoretic aspects of ergodic theory*, volume 272. Springer, 2015.
- [EM22] Bastián Espinoza and Alejandro Maass. On the automorphism group of minimal-adic subshifts of finite alphabet rank. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 42(9):2800–2822, 2022.
- [Esp20] Bastián Espinoza. On symbolic factors of S -adic subshifts of finite topological rank. *arXiv preprint arXiv:2012.00715*, 2020.
- [Esp22] Bastian Espinoza. Symbolic factors of S -adic subshifts of finite alphabet rank. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, pages 1–37, 2022.
- [Fer96] S. Ferenczi. Rank and symbolic complexity. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16:663–682, 1996.
- [FH17] Sébastien Ferenczi and Pascal Hubert. Rigidity of square-tiled interval exchange transformations. *arXiv preprint arXiv:1702.05989*, 2017.

- [FHZ05] Sébastien Ferenczi, Charles Holton, and Luca Q Zamboni. Joinings of three-interval exchange transformations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25(2):483–502, 2005.
- [FM14] Alexander Leberecht Frank Marambio. *Contribución al estudio de valores propios en sistemas de Bratteli-Vershik de rango finito*. PhD thesis, Universidad de Chile, 2014.
- [Fri98] Anna E. Frid. On the frequency of factors in a d0l word. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 3(1):29–42, 1998.
- [FZ11] S. Ferenczi and L. Q. Zamboni. Eigenvalues and simplicity of interval exchange transformations. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 44:361–392, 2011.
- [GH22] Nasser Golestani and Maryam Hosseini. On topological rank of factors of cantor minimal systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 42(9):2866–2889, 2022.
- [GHH18] T. Giordano, D. Handelman, and M. Hosseini. Orbit equivalence of Cantor minimal systems and their continuous spectra. *Math. Z.*, 289:1199–1218, 2018.
- [GJ00] R. Gjerde and Ø. Johansen. Bratteli-Vershik models for Cantor minimal systems: applications to Toeplitz flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 20:1687–1710, 2000.
- [GM89] S Glasner and David Maon. Rigidity in topological dynamics. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 9(2):309–320, 1989.
- [GPS95] T. Giordano, I. F. Putnam, and C. F. Skau. Topological orbit equivalence and C^* -crossed products. *J. Reine Angew. Math.*, 469:51–111, 1995.
- [GPS04] Thierry Giordano, Ian Putnam, and Christian Skau. Affable equivalence relations and orbit structure of cantor dynamical systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 24(2):441–475, 2004.
- [HPS92] R. Herman, I. Putnam, and C. Skau. Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics. *Internat. J. Math.*, 3:827–864, 1992.
- [Kat80] Anatole Katok. Interval exchange transformations and some special flows are not mixing. *Israel Journal of Mathematics*, 35(4):301–310, 1980.
- [KT64] A Ya Khinchin and T Teichmann. Continued fractions. *Physics Today*, 17(11):70, 1964.
- [Liv88] Alexander Nakhimovich Livshits. A sufficient condition for weak mixing of substitutions and stationary adic transformations. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 44(6):920–925, 1988.
- [MH40] M. Morse and G. A. Hedlund. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62:1–42, 1940.
- [PD14] Samuel Petite and Fabien Durand. Conjugacy of unimodular pisot substitutions subshifts to domain exchanges. *arXiv preprint arXiv:1408.2110*, 2014.
- [Que87] M. Queffélec. *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, volume 1294 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Vee78] William A Veech. Interval exchange transformations. *Journal d’Analyse Mathématique*, 33(1):222–272, 1978.

- [Vee82] William A Veech. A criterion for a process to be prime. *Monatshefte für Mathematik*, 94(4):335–341, 1982.
- [Ver85] A. M. Vershik. A theorem on the markov periodical approximation in ergodic theory. *JSM*, 28:667–674, 1985.