Universidad de Chile

Facultad de Filosofía y Humanidades

Escuela de Postgrado

Contribución epistémica de los modelos matemáticos aplicados en ciencias físicas

Tesis para optar al grado de Magíster en Filosofía

Nibaldo Patricio Lorca Améstica

Profesor guía: Dr. Cristian Soto

Santiago de Chile

Agosto 2021

Contribución epistémica de los modelos matemáticos aplicados en ciencias físicas

Nibaldo Patricio Lorca Améstica

Agradecimientos:

Quisiera agradecer, en primer lugar, a mi familia por su apoyo durante estos años de estudios. En especial a mi madre, gracias a quien puedo dedicarme al estudio y a la vida académica. También le agradezco al profesor Dr. Cristian Soto por guiarme durante el desarrollo de mi investigación y la escritura de mi tesis. Por último, le agradezco a mi pareja por ayudarme a distraerme y a relajarme cuando el trabajo se volvió agobiador. Tomarse un tiempo para descansar contribuye de forma positiva a la labor de la escritura.

ÍNDICE

Resumen

Un modelo matemático es una representación matemática de un sistema objetivo. Por medio de la estructura formal matemática se representan las interrelaciones y dinámicas internas del sistema representado. En las ciencias físicas, los modelos matemáticos son empleados para representar los fenómenos físicos bajo investigación, además de ser una parte íntegra de la práctica científica. Corresponde preguntar: ¿qué rol cumplen los modelos matemáticos aplicados? Los modelos matemáticos aplicados cumplen distintos roles y contribuyen de distintos modos en la investigación científica. El interés particular de mi trabajo refiere al rol epistémico que cumplen los modelos aplicados. Es decir, la contribución epistémica de los modelos matemáticos en la práctica científica.

Sostengo la tesis que los modelos matemáticos aplicados representan una contribución epistémica al desarrollo de la práctica científica. El objetivo de mi trabajo es demostrar esta afirmación. Cabe señalar que los modelos matemáticos son una contribución epistémica en tanto estos ayudan al proceso de obtención de conocimiento y/o entendimiento acerca del fenómeno físico en estudio. En último término, mi objetivo particular es defender y argumentar a favor de la contribución de los modelos matemáticos a la comprensión de los fenómenos físicos y sus comportamientos.

El propósito de la tesis que sostengo es demostrar que los modelos matemáticos aplicados no son meras representaciones formales de los fenómenos (que resultan útiles por motivos pragmáticos), sino que dichos modelos también son una contribución en los procesos cognitivos del agente epistémico en su estudio de los fenómenos; permitiéndose así un refinamiento y mejora en el conocimiento y comprensión del fenómeno de interés. Así, los

modelos contribuyen (*e.g.*) en el proceso de derivación de una inferencia empírica (que cumpla con los criterios epistemológicos para considerarla conocimiento); o bien contribuyen heurísticamente en la comprensión del comportamiento de un fenómeno (o de aspectos de este). Téngase presente que los modelos matemáticos representan un patrón de dependencias contrafácticas y las ratios internas de las relaciones del fenómeno, por lo que esto permite al agente comprender acerca de los comportamientos posibles del fenómeno. Esto da lugar a una comprensión de las dinámicas posibles del fenómeno en estudio.

De este modo, se busca estudiar un fenómeno físico complejo por medio de una representación matemática de este. La naturaleza abstracta del modelo matemático favorece su contribución a la hora de estudiar el fenómeno, puesto que mediante la abstracción se remarcan los factores que se consideran relevantes para el caso, evitándose así el exceso de información de la situación real. Esto genera una representación *más simple* del fenómeno, pero que constriñe la modalidad de este, lo que permite una mejor comprensión del caso físico. Finalmente, mediante el estudio del modelo matemático, el agente puede predecir ciertos comportamientos, establecer explicaciones de un caso o simplemente derivar inferencias acerca del fenómeno; y en cada caso el modelo matemático aplicado contribuye en estos procesos cognitivos.

Introducción

Hasta donde llegan nuestros registros, las matemáticas son una de las disciplinas del pensamiento humano que data de más antigüedad, seguramente junto a la astronomía, estando presente desde los albores de la civilización (Kline [1967] 2009: 33). Las matemáticas pueden definirse como un sistema de conclusiones derivadas formalmente a partir de definiciones y postulados. Pero son más que esto: son una actividad de la mente humana que refleja un razonamiento contemplativo y ciertas consideraciones estéticas (Courant & Robbins [1941] 1996). Aunque como disciplina se remarca su carácter contemplativo teórico (matemáticas puras), ellas también tienen un correlato aplicado fuertemente enlazado con requerimientos pragmáticos dentro del marco de la práctica de las matemáticas aplicadas (*ibídem*). Las matemáticas aplicadas son empleadas en muchas de las actividades que realizamos: desde comprar en la tienda y construir edificios (Kline [1967] 2009: 26), hasta los estudios más abstractos de las ciencias físicas. Las matemáticas se encuentran notablemente presente en la práctica y desarrollo de estas últimas. La aplicabilidad de los modelos matemáticos es una parte íntegra de las ciencias, en especial de las ciencias físicas. Por ello corresponde preguntar: ¿cuál es la relación entre las ciencias físicas y los modelos matemáticos aplicados? Además, para lo que compete al presente trabajo, es de particular interés investigar cuál es la contribución epistémica de los modelos matemáticos aplicados en ciencias físicas.

Un modelo matemático es una representación matemática, en el caso de las matemáticas aplicadas en ciencias físicas, ésta es una representación matemática de un fenómeno físico. Por medio de la aplicación de un modelo matemático, se establece una relación entre la estructura matemática y el sistema físico, lo que ulteriormente permite que el modelo represente el fenómeno[1] (o ciertos aspectos de este). Ante esto, un antecedente relevante en la literatura es la tesis del mapeo (*mapping account*) que sostiene que la aplicabilidad matemática se establece por medio de la relación de correspondencia estructural entre el modelo matemático y el fenómeno físico (Pincock 2004: 146). Sin embargo, los modelos matemáticos no son meros instrumentos representativos que describen formalmente el fenómeno, sino que la aplicabilidad de estos implica un mayor aporte al desarrollo de la investigación científica (Gelfert 2014: 1003). Por lo tanto, corresponde preguntar: ¿cuál es el rol de los modelos matemáticos aplicados y cómo estos contribuyen a la empresa científica?

El tema central de este trabajo refiere al rol que cumplen los modelos matemáticos aplicados en ciencias. Un dominio importante de las matemáticas aplicadas también cumple el rol de colaborar en la generación de inferencias a partir de las deducciones matemáticas (Bueno & French 2018: 52). Por consiguiente, en este trabajo me interesa estudiar el rol epistémico que cumplen los modelos matemáticos aplicados; es decir, la contribución epistémica de estos. La tesis que sostengo es que los modelos matemáticos aplicados representan una contribución epistémica al desarrollo de la práctica científica en las ciencias físicas. Principalmente, defiendo y argumento a favor de la contribución que entregan los modelos matemáticos en la comprensión de los fenómenos físicos (y el comportamiento de estos) en la investigación científica.

Los modelos matemáticos aplicados son una contribución epistémica en tanto que estos ayudan al proceso de obtención exitosa de un logro epistémico (*epistemic achievement*), como lo son el conocimiento y el entendimiento. Estos son *logros* en tanto son obtenidos o

[1] Véase 1.1 y 1.4.

completados de forma exitosa y premeditada de parte del agente, y su carácter epistémico se debe a que son relativos a un modo o aspecto del conocimiento[2]. Es decir, los modelos matemáticos son una contribución epistémica al ayudar al agente en el proceso cognitivo de derivación y formulación de una inferencia (por ejemplo) que cumpla con los criterios establecidos (por el marco epistemológico que se sostenga) para considerar a ésta conocimiento. O también son una contribución epistémica al ayudar a la comprensión general de un cuerpo sistemático e interrelacionado de información (que hace referencia a aspectos o comportamientos de un fenómeno) que permiten al agente obtener un mejor entendimiento de un caso determinado.

De este modo, se sostiene que los modelos matemáticos aplicados en ciencias físicas son un recurso epistémico del que se puede obtener conocimiento o entendimiento acerca de los fenómenos físicos que representan. Es de mi interés particular argumentar a favor de la contribución que estos representan a la comprensión del fenómeno (es decir, al entendimiento de este). Ante la pregunta acerca de la relación entre las ciencias físicas y los modelos matemáticos aplicados, defiendo la contribución epistémica que estos últimos brindan al desarrollo de la investigación científica. El objetivo de esta tesis es demostrar y argumentar

[2] En este trabajo me refiero al conocimiento (*knowledge*) y al entendimiento (*understanding*) como logros epistémicos, pero dejo abierto el debate a que puedan considerarse más logros epistémicos que pueden ser obtenidos por el agente. Por ejemplo, podría sostenerse que la explicación es un logro epistémico, aunque habría que evaluar si su valor epistémico es relativo a ella *per se* o si se debe a que ayuda y contribuye a la obtención y refinamiento de otros logros epistémicos (como el conocimiento). Una investigación relativa a este tema implicaría un estudio respecto al valor epistémico. Este punto se escapa al objetivo y área de mi tesis, por ello no ahondo en estos cuestionamientos.

que los modelos matemáticos ayudan al agente en la comprensión de la dinámica de los fenómenos físicos.

En el primer capítulo de mi tesis expongo cómo se derivan inferencias (acerca de los fenómenos físicos) a partir de los modelos matemáticos. Para esto se aborda, en primer lugar, el cuestionamiento acerca de cómo los modelos matemáticos pueden ser aplicados a los fenómenos físicos. Por ello, los objetivos centrales del capítulo son 1) dar cuenta de cómo los modelos matemáticos son aplicados en el estudio de fenómenos físicos, exponiendo el proceso de aplicación del modelo. Dicho proceso se estipula desde el establecimiento de una relación representacional entre la estructura matemática del modelo y la estructura del sistema empírico. Así se establece la relación entre el modelo y el fenómeno. Luego 2) compete explicar cómo se derivan inferencias acerca del fenómeno a partir de la representación matemática del modelo aplicado. De este modo, el capítulo busca establecer un marco de trabajo respecto de la aplicabilidad de las matemáticas.

El tópico central del capítulo dos es exponer y explicar uno de los modos en los cuales los modelos contribuyen epistémicamente al estudio del fenómeno, este es el rol explicativo[3] de los modelos matemáticos aplicados. Esta investigación no se centra en las explicaciones matemáticas de los fenómenos físicos, sino en los modelos matemáticos *involucrados* en las explicaciones físicas. Esto es con el objetivo de ahondar en cómo el modelo contribuye en el proceso de formulación de las explicaciones de fenómenos físicos. Los modelos matemáticos pueden jugar un rol explicativo figurando en el *explanans* en calidad de enunciado

[3] Véase la segunda nota al pie.

matemático, o bien ayudando a la comprensión del agente para que este formule la explicación (Bokulich 2011: 38).

Finalmente, en el tercer capítulo ahondo en cuestionamiento epistemológicos respecto de los modelos aplicados. El propósito del capítulo es argumentar que los modelos matemáticos representan un aporte para la comprensión del fenómeno por parte del agente, esto mediante al rol heurístico de estos. Los modelos (por medio de las analogías que representan o por medio de la formalidad de su nomenclatura matemática) ayudan al agente en la comprensión de ciertos aspectos del fenómeno o bien del comportamiento de este. Esto, en último término, da lugar a un progreso en el aprendizaje del agente acerca del sistema físico en investigación. De este modo, se demuestra la tesis que defiendo, puesto que los modelos aplicados contribuyen en la obtención de un logro epistémico como lo es el entendimiento de la dinámica de un fenómeno en estudio.

Capítulo 1

Aplicabilidad de las matemáticas en ciencias físicas

Dentro del debate acerca de la aplicabilidad de las matemáticas, Wigner (1960) plantea el siguiente problema: ¿por qué y cómo las matemáticas, que fueron desarrolladas sin tener en consideración los hechos fácticos y empíricos, resultan tan útiles para dar cuenta del mundo natural y sus fenómenos? (Wigner 1960: 2). Se sugiere una sensación de asombro ante la utilidad de las matemáticas aplicadas. Parafraseando a Hilbert, pareciera ser que los hechos físicos se complementan realmente bien con el formalismo matemático (Gelfert 2014: 999[4]). De este modo, se establece la relación entre las ciencias y las matemáticas como el punto central que aborda el problema de Wigner, enfatizando el uso fructífero de los modelos matemáticos en la práctica científica (*ibídem*: 997-998).

La pregunta acerca de las matemáticas aplicadas conduce a cuestionar la relación entre el mundo físico y el dominio matemático (Colyvan 2012: 114), y esta interrogante puede tener una connotación metafísica. La connotación resulta notoria si se considera la pregunta en términos de cuál es la relación existente entre los objetos físico y los objetos matemáticos (Pincock 2004: 139). Esta connotación lleva a un debate metafísico que se escapa del enfoque de mi trabajo, el cual tiene una orientación declaradamente pragmática y epistémica. Considero que el problema de la aplicabilidad es un problema de carácter epistémico respecto de la aplicación matemática en la teorización física (Colyvan 2012: 116).

[4] Gelfert cita a Hilbert [1919] 1992: 69.

Por ello, comparto la sugerencia de Colyvan (2012) de dejar de lado problemas metafísicos por mor de ahondar más en un mejor entendimiento de cómo las matemáticas son aplicadas en la práctica científica (*ibídem*: 120). En consecuencia, no abordo la aproximación metafísica del debate y restrinjo mi trabajo a propuestas de enfoque epistémico.

La utilidad de las matemáticas aplicadas se observa primeramente en la capacidad representativa de estas que permite describir los fenómenos físicos. Sin embargo, hay quienes rechazan la idea de que las matemáticas sean meros instrumentos descriptivos, defendiendo que estas también implican un aporte mayor al desarrollo de la investigación científica (Gelfert 2014: 1003[5]). Un dominio importante de las matemáticas aplicadas también cumple el rol de colaborar en la generación de inferencias a partir de las deducciones matemáticas (Bueno & French 2018: 52). La postura que defiendo sigue esta misma línea: sostengo que los modelos matemáticos no cumplen un rol exclusivamente descriptivo (no son mera nomenclatura formal), sino que tienen una contribución epistémica de mayor significancia[6]. Concretamente, en ese capítulo expongo cómo se derivan inferencias (respecto de los fenómenos físicos) a partir de los modelos matemáticos aplicados.

Abordo el cuestionamiento acerca de la aplicabilidad matemática dividiendo el tema en las dos siguientes preguntas: 1) ¿cómo los modelos matemáticos son aplicados en las

[5] Gelfert cita a Dieks 2005: 128.

[6] Cabe aclarar que los autores Bueno y French tienen distintas posturas metafísicas respecto de las matemáticas. Por ejemplo, Bueno sostiene un anti realismo acerca de las entidades matemáticas, teniendo un enfoque principalmente pragmático respecto de la aplicabilidad matemática (véase Bueno 2016); mientras que la postura de French es otra (véase French 2014). Sin embargo, trabajan juntos en el libro del 2018 para establecer su concepción inferencial respecto de la aplicabilidad de las matemáticas, la cual sería, según los autores, neutral respecto de cuestiones metafísicas.

ciencias físicas? Y 2) ¿cómo aquello conlleva una contribución epistémica del modelo aplicado respecto del fenómeno físico que representa? A partir de esto, el objetivo principal del presente capítulo es dar cuenta de cómo las matemáticas son aplicadas en el estudio de los fenómenos físicos, y exponer cómo se derivan inferencias a partir de la representación matemática de los modelos aplicados. De este modo, el capítulo busca establecer un marco teórico de trabajo respecto de la aplicabilidad de las matemáticas.

Se inicia el capítulo (sección 1.1) presentando la tesis del mapeo (*mapping account*), tomando como marco de inicio la postura de Pincock (2004). Dicha tesis es complementada con la implementación del morfismo parcial en la sección 1.2, para caracterizar la relación (que se establece en la aplicación) entre modelos y fenómenos. Este complemento se mantiene de modo transversal a lo largo del capítulo al considerarse concordante con cualquier tesis de la aplicabilidad con enfoque pragmático. Luego, se analizan ciertas limitaciones que se consideran pertinentes a la tesis del mapeo (Pincock 2004), para, desde ahí, avanzar en la literatura para desarrollar otras posturas que aportan en el debate respecto de la aplicabilidad. Por ello, en la sección 1.3 se expone la concepción inferencial acerca de la aplicabilidad matemática. Con esta concepción se busca caracterizar (de modo cabal) el proceso de aplicación de un modelo matemático, mediante su esquema de tres pasos: *inmersión – manipulación – interpretación*. Cuando el modelo matemático es aplicado, se obtiene una representación matemática del fenómeno físico al cual el modelo fue aplicado (esto en el paso de *inmersión*, acorde con el esquema de la sección 1.3). Por consiguiente, el capítulo termina con la concepción inferencial acerca de la representación matemática, que se expone en la sección 1.4. El propósito de esta sección es argumentar cómo a partir de la representación matemática (obtenida mediante la aplicación del modelo matemático) se derivan inferencias acerca del fenómeno representado.

El capítulo uno concluye dando cuenta de cómo un modelo matemático es aplicado y cómo un agente epistémico deriva inferencias a partir de este. También se esboza cuál es la relación entre los fenómenos y los modelos matemáticos aplicados en la práctica científica. Con esta relación estipulada, en el capítulo dos se ahonda en cómo esta aplicación matemática es una contribución epistémica en ciertos aspectos de la investigación de un fenómeno físico.

1.1. Tesis del mapeo: caracterización de la propuesta

El problema central de la filosofía de las matemáticas aplicadas, que aborda mi trabajo, consiste en la relación entre las matemáticas y el mundo físico. Mi revisión literaria comienza con el artículo *A new perspective on the problem of applying mathematics* de Pincock (2004). La razón para iniciar *aquí* se debe a que considero que este artículo marca un nuevo inicio del debate contemporáneo (*post* 2000[7]) respecto de las matemáticas aplicadas[8]. En especial,

[7] Cabe remarcar el trabajo de Steiner 1998 donde trata de responder cómo las matemáticas, presentes en las ciencias naturales, son aplicables al mundo empírico (Steiner [1998] 2002: 1). Steiner sigue la línea literaria de la concepción semántica trabajada por Frege (*ibídem*: 1), argumentando que los elementos matemáticos no están relacionados con los objetos empíricos sino con los conceptos empírico (*ibídem*: 2). No obstante, en mi trabajo no sigo dicha línea, sino que mi trabajo se encuentra en el marco del debate en torno al mapeo como respuesta a la aplicabilidad de los modelos matemáticos. Por ello, no refiero ni ahondo en el trabajo de Steiner 1998 más allá de la presente mención.

[8] Pincock hace referencia a la teoría de la medición de Suppes y Krantz (Pincock 2004: 147). Sin embargo, ambas teorías son diferentes y responden a distintos debates (*ibídem*: 147). Además, la tesis del mapeo no es consecuencia ni se sigue de la teoría de la medición, por lo que corresponde tomarlas

en lo que concierne al debate en torno a la aplicabilidad de los modelos matemáticos en la práctica científica.

Pincock comienza su artículo preguntando cómo las matemáticas son empleadas para representar un dominio físico[9] (*Ibídem*: 137). La respuesta es postulada en términos de mapas entre el sistema físico y el dominio matemático (*Ibídem*: 135). Esta es la tesis del mapeo (*mapping account*), cuya idea central es que la conservación de la estructura es el aspecto relevante y esencial en la aplicabilidad de las matemáticas (Räz 2013: viii). Acorde con esto, la aplicabilidad matemática se funda en la correspondencia estructural entre el modelo matemático y el sistema físico.

La tesis del mapeo corresponde a una aproximación estructuralista (Pincock 2004: 146) al momento de establecer la relación entre el modelo matemático y el fenómeno físico. El mapa establece una relación isomórfica entre la estructura presente en el modelo matemático y la estructura del sistema físico (*Ibídem*: 149). Lo crucial radica en que el mapa conserva la estructura del sistema que es mapeado (*ibídem*: 145). Es decir, el modelo matemático representa el sistema físico debido a que el modelo *instancia* la estructura del sistema físico. Hay un vínculo entre la representación y la aplicación de un modelo, puesto que, cuando un modelo matemático modela un fenómeno (al aplicársele), el modelo pasa a

---

como tesis separadas. Por ello, la teoría de la medición no está presente en el desarrollo de mi trabajo (más allá de la actual mención tangencial).

[9] Más concretamente, Pincock plantea esta interrogante en términos de condiciones de verdad para que los enunciados mixtos (enunciados que incorporan de forma íntegra términos matemáticos y físico) sean válidos (Pincock 2004: 137). No obstante, el problema de las condiciones de verdad de estos enunciados es uno que no abordo en mi trabajo e implicaría su propia investigación correspondiente.

representar ciertos aspectos del fenómeno. Acorde con la tesis del mapeo, la representación por parte del modelo matemático se da mediante el mapa que se establece entre el fenómeno y el modelo. El mapa es el enlace entre ambos dominios.

El ejemplo empleado por Pincock es el de enumerar manzanas (*ibídem*: 145): se asocia el número natural 1 con una determinada manzana, luego se procede de modo ascendente a través de la estructura lineal de los números naturales, donde cada número es asociado con una determinada manzana diferente a las anteriores. Las manzanas están siendo enumeradas por medio del establecimiento de un determinado *mapa* desde las manzanas hacia un segmento de la estructura lineal de números naturales. No obstante, el ejemplo de las manzanas no refleja las complejidades del modelamiento matemático en ciencias. Por ello, serán necesarios mapas más complejos según el caso particular de aplicabilidad (*ibídem*: 146); es decir, el mapa requerido dependerá de la estructura física que se deba representar. Este punto es importante pues introduce el rol de las consideraciones pragmáticas durante el proceso de aplicabilidad matemática. En la sección siguiente (1.2.), retomo este punto al abordar el concepto de morfismo parcial en la representación estructural.

Un aspecto interesante de la tesis de Pincock es que la relación entre el modelo matemático y el fenómeno físico es una relación externa (*ibídem*: 145). Una relación externa es una relación que no involucra un criterio de identidad respecto de los objetos matemáticos para con los objetos físicos (*ibídem*: 145). Lo importante de esto es que por medio de la relación externa no se compromete la necesidad formal de las matemáticas, sino que, por el contrario, gracias a que se establece una relación externa, ambos dominios permanecen separados sin que la veracidad de un dominio afecte al otro. De este modo, la tesis del mapeo separa categóricamente el dominio matemático del dominio físico, mientras que se da cuenta de la aplicabilidad al sostener su relación en términos de representación estructural.

Un caso histórico que ejemplifica la aplicabilidad matemática acorde a la tesis del mapeo, es la resolución de Euler del problema de los puentes de Königsberg. El problema en cuestión consistía en determinar si es posible cruzar todos los siete puentes que unen las cuatro secciones de la ciudad de Königsberg (figura 1) sin repetir ningún trayecto (un circuito euleriano). Euler resolvió el problema demostrando que matemáticamente no existe una ruta que cumpla con lo requerido (Räz 2013: 25).

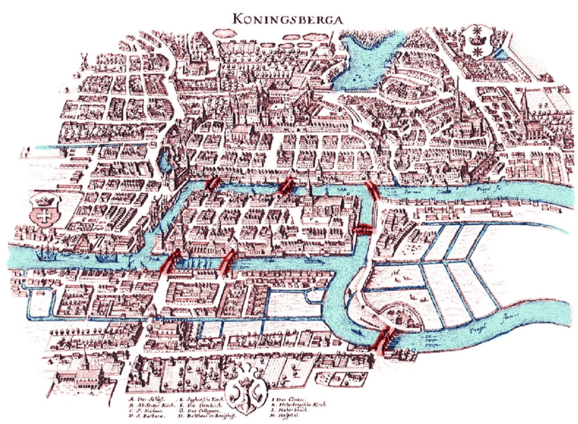

Figura 1

Un poco de contexto histórico es necesario para comprender este caso. Ehler[10] le comunica a Euler[11] acerca de este problema por medio de una carta, y Euler publica su solución al problema en su ensayo de 1736 *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (*ibídem*: 26). Euler toma el caso como un ejemplo de una nueva geometría introducida por Leibniz: *Geometria situs* (*ibídem*: 28). Este tipo de geometría (actualmente llamada topología) se

[10] Carl Gottlieb Ehler (1685 – 1753), matemático polaco del siglo XVIII oriundo de Gdansk.

[11] Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático y físico suizo del siglo XVIII oriundo de Basilea.

centra no en cantidades y medidas, sino en posiciones. De este modo, el problema de Königsberg se toma como un caso de aplicabilidad matemática (geometría).

Un primer método intuitivo para resolver el problema es el de tabular todas las rutas posibles y ver si alguna cumple con lo requerido. Sin embargo, Euler reformula el problema de modo más general: establecer si dicho recorrido es posible, sin especificar la ruta en acto (*ibídem*: 29). Esto se debe a que hay una distinción entre la pregunta particular relativa al caso de Königsberg (si hay una ruta para este caso particular) y la pregunta general sobre cuáles son las condiciones necesarias para que un circuito euleriano sea posible; el segundo problema es el abordado por Euler (*ibídem*: 33). Por ello, es necesario el proceso de aplicación de un modelo matemático, puesto que la formulación general de la pregunta requiere un mayor grado de abstracción y análisis formal propio de las matemáticas.

El análisis formal (topológico) comienza con la asignación de una nomenclatura formal para los elementos en juego; es decir, para las regiones y conexiones. La nomenclatura formal del esquema es la siguiente (*ibídem*: 28): se asignan las letras capitales A, B, C (así sucesivamente) a las regiones; mientras se asignan las minúsculas *a*, *b*, *c* (así sucesivamente) a las conexiones entre las regiones. A partir de estos dos modos de referencia (para regiones y conexiones), se establece el método de notación particular para las rutas del circuito: la ruta que cruza la conexión *a* entre A y B se denomina AB; de igual modo, la ruta de A D pasando por B se denomina ABD[12] (*ibídem*: 29). Por medio de esta notación, las conexiones son

[12] Actualmente, este tipo de nomenclatura es común en geometría para referir a los vértices y líneas de las figuras geométricas (véase por ejemplo Stillwell 2016, capítulo 5).

descritas como pares de regiones. Por ello, se puede representar una ruta en un sistema de *n* conexiones por *n+1* letras capitales[13] (*ibídem*: 30); retomaré esta idea al final del análisis.

A partir del método de notación para las rutas del circuito, Euler concluye cuántas reiteraciones de una letra capital son necesarias (en la notación de la ruta) acorde al número de conexiones que dicha región posea (*ibídem*: 30). Hay tres casos respecto de las conexiones que una región tenga, y con ello presente se establecen las siguientes formulas (respecto de cada caso) para calcular la cantidad de reiteraciones necesarias en la notación de la ruta (*ibídem*: 30-31): 1) si el número de conexiones de una región X es impar, entonces la cantidad de reiteraciones de X será igual a *n*, donde *n* se obtiene de la ecuación "($2n - 1$) = n° de conexiones". Por ejemplo, una región X con 5 conexiones, tendrá 3 reiteraciones en la notación de la ruta[14]. 2) si una región X tiene un número par de conexiones (n° de conexiones = $2n$) y es el punto de inicio de la ruta, entonces la cantidad de reiteraciones de X será igual a n +1. En cambio, 3) si la región X tiene un número par de conexiones ($2n$), pero no es el punto de inicio, entonces la cantidad de reiteraciones de X será igual a *n* simplemente. Por medio de estas fórmulas (para cada región acorde a su número de conexiones), Euler establece la suma total de cuántas letras capitales va a componer la notación de la ruta en dicho circuito (*ibídem*: 30). Huelga recordar que una ruta en un sistema de *n* conexiones se puede representar por una notación de *n +1* letras capitales. Por ello, Euler (*ibídem*: 30-31) concluye que, si el total de letras capitales en la notación de la ruta es igual al número de

[13] Recuérdese que las letras capitales representan regiones; por tanto, la cantidad de veces que una letra capital es reiterada en la notación de la ruta hace referencia a la cantidad de veces que se pasa por dicha región a lo largo del circuito. Por ejemplo, en la ruta ABCADA se reitera 3 veces la región A, lo que significa que se pasa 3 veces por A a lo largo del circuito.

[14] $2n - 1 = 5 \rightarrow 2(3) - 1 = 5 \rightarrow n = 3$.

conexiones más 1 (n +1), entonces la ruta es posible si se comienza en una región impar. Ahora bien, si el total es menor a n +1, entonces la ruta puede comenzar en cualquier región del sistema. No obstante, si el total es mayor a n +1, entonces la ruta es imposible de realizar[15].

Las conclusiones obtenidas por medio del análisis formal topológico se pueden resumir, de forma más intuitiva, del siguiente modo (*ibídem*: 31): 1) si todas las regiones tienen una cantidad par de conexiones, entonces se puede realizar un circuito euleriano independientemente del punto de inicio; 2) si hay dos (o menos) regiones con una cantidad impar de conexiones, es posible completar el circuito euleriano, pero se debe iniciar y/o terminar en una región de conexión impar; 3) si hay más de dos regiones con conexiones impares, pues entonces el circuito euleriano es imposible de realizar.

Estas son las conclusiones relativas al problema general, por lo que toca aplicarlas al caso particular de Königsberg. Primero hay que observar la estructura del problema presente en el modelo topológico (figura 2), el cual representa la estructura de su correlato físico.

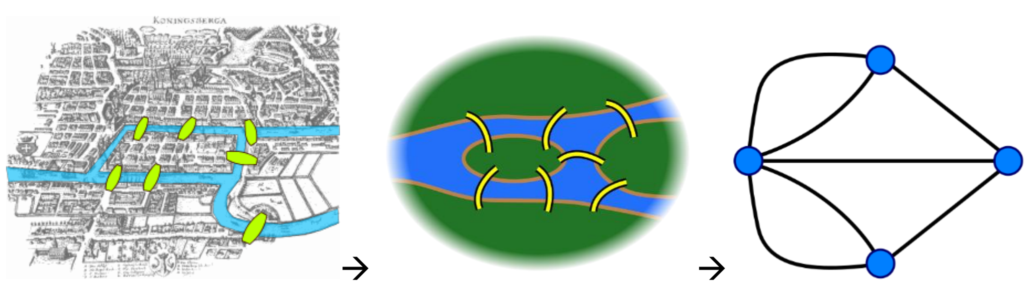

Figura 2

[15] Nótese que estas conclusiones formales son respecto del problema general sobre los requerimientos para realizar un circuito euleriano en un sistema cualquiera. De momento no se han aplicado las conclusiones del análisis al caso particular de Königsberg.

La imagen de la derecha de la figura 2 es el modelo topológico que representa la estructura de los puentes de la ciudad (figura 1). Si se aplican las conclusiones obtenidas por Euler, nos daremos cuenta que en el caso de Königsberg, acorde a la tercera conclusión, es imposible realizar un circuito euleriano. Cada región de la ciudad tiene una cantidad impar de conexiones, superando el máximo de 2 regiones impares para que sea posible el circuito; *ergo*, no hay solución posible para el problema. Además, si se aplica el análisis formal previamente desarrollado, sucede que el total de letras capitales para la ruta de Königsberg (acorde al resultado de la fórmula para cada región) es igual a 9[16], el cual supera la cantidad de conexiones +1 (8). Por lo tanto, se demuestra nuevamente la imposibilidad de un circuito euleriano en el caso de Königsberg.

Esta respuesta es obtenida a través del análisis de los constreñimientos formales que impelen a la estructura del modelo matemático. Dicha estructura es isomórfica respecto de la estructura del caso físico (los puentes de la ciudad de Königsberg). Por ello, se pueden proyectar las conclusiones obtenidas del análisis formal del modelo matemático, ya que dicho modelo preserva la estructura del sistema físico gracias a la relación establecida entre ambas estructuras, acorde a la tesis del mapeo (*ibídem*: 48-49). De este modo, la tesis del mapeo da cuenta de la relación establecida (en el proceso de aplicación matemática) entre el modelo matemático y el caso físico, permitiendo la resolución del problema en cuestión.

[16] Una primera región de Königsberg posee 5 conexiones (n = 3), y las demás regiones poseen 3 conexiones (n = 2); por tanto 3 + 2 + 2 + 2 = 9.

1.2. Morfismo parcial

Previo a ahondar en cómo se derivan inferencias físicas desde los modelos matemáticos, estimo que es pertinente caracterizar de mejor modo la relación que se establece entre el modelo matemático y el fenómeno. Esto se logra mediante la implementación del morfismo parcial respecto a dicha relación estructural. Este complemento atañe a la tesis del mapeo de Pincock (2004); pero, también compete en general a cualquier tesis de la aplicabilidad matemática que haga énfasis en la representación del fenómeno por medio del modelo. El morfismo parcial da cuenta de la parcialidad en la representación. Un modelo aplicado no representa estructuralmente *todos* los elementos del fenómeno, sino que hay una discriminación respecto de qué se representa y qué se omite (por mor de consideraciones pragmáticas). La implementación del morfismo parcial permite explicar la parcialidad de la representación matemática por medio del modelo aplicado.

Una idea central de la tesis del mapeo es que los modelos matemáticos preservan la estructura del sistema físico. Sin embargo, dichos modelos no preservan de modo cabal la estructura del fenómeno, sino solo *ciertas* características estructurales del sistema objetivo que representan (Colyvan 2012: 124). De este modo, los modelos matemáticos solo representan los aspectos de interés investigativo (consideración pragmática) del sistema físico bajo estudio científico. Así, ciertas características estructurales del sistema físico (relevantes de acuerdo al propósito investigativo) son representadas (por medio del mapeo) en el modelo matemático (*ibídem*: 125). Por ello, la parcialidad de la representación matemática, por mor de consideraciones pragmáticas, da lugar a la postulación de un morfismo parcial.

Las relaciones mórficas parciales se caracterizan por conservar parcialmente la estructura representada; es decir, no todos los elementos presentes del dominio de interés están presentes en el modelo. Las interrelaciones entre el modelo matemático y el sistema físico pueden ser aprehendidas en términos de morfismo parcial por medio de la representación de una estructura parcial del sistema en el modelo (Bueno, French & Ladyman 2002: 499). Una definición formal de estructura parcial es la siguiente (*ibídem*: 498): una estructura parcial es un conjunto teorético del tipo $A=< D, R_i >_{i\in I}$ donde D es un conjunto no vacío y cada R_i es una relación parcial. Una relación parcial R_i respecto de D es una relación la cual no está necesariamente definida por todos los elementos de D. Cada relación parcial R_i puede ser vista como una tripleta ordenada <R_1, R_2, R_3>. R_1 es el conjunto de elementos que pertenecen a D; R_2 es el conjunto de elementos que no pertenece a D; y R_3 es el conjunto de elementos que no están definidos si pertenecen o no a D.

De modo más intuitivo, el conjunto D representa los elementos pertenecientes al dominio que se está investigando (Bueno & French 2018: 41). Respecto de este dominio se establece un modelo que representa a dicho dominio D. Por medio de la representación, acorde a la tesis del mapeo, se establece una relación entre la estructura del modelo matemático y la estructura del dominio físico. Tales relaciones son relaciones parciales R_i de los tres tipos recién mencionados. Parafraseando, R_1 refiere a los elementos del modelo que sabemos que están presentes en el fenómeno físico. R_2 refiere a los elementos del modelo que sabemos que no están presentes en el fenómeno físico. Y R_3 refiere a los elementos inciertos del modelo, los cuales se desconoce si están presentes o no en el fenómeno. Por medio de estos tres tipos de relaciones se da cuenta del morfismo parcial presente en la representación del modelo respecto del sistema físico.

Téngase en consideración que el morfismo cabal (en contraposición al parcial recién expuesto) es demasiado fuerte, pues no ocurre que todas las estructuras del modelo matemático estén presentes en el dominio físico, ni todas las estructuras del dominio físico están presentes en el modelo matemático (Bueno, French & Ladyman 2002: 504). En vistas de una aproximación más naturalista a la aplicabilidad matemática en ciencias físicas, se necesita un concepto menos vago que instanciación, a la vez que menos fuerte que algún morfismo cabal; ahí yace el beneficio del morfismo parcial (*ibídem*: 505). En las investigaciones científicas, escenario en el cual se da el proceso de aplicabilidad matemática, normalmente no se tiene información completa del dominio que se investiga (Bueno & French 2018: 43). En el marco del morfismo parcial se puede dar cuenta de la apertura e incompletitud de la información con la cual se trabaja en la práctica científica (*ibídem*: 41). Por consiguiente, un morfismo parcial resulta más próximo a la aplicación de modelos matemáticos en la práctica científica, puesto que puede acomodar la parcialidad de la información que se maneja en la investigación científica.

Un punto más interesante a favor del morfismo parcial dice relación con las consideraciones pragmáticas que permean la práctica científica. La principal razón de la parcialidad en la representación del modelo radica en los propósitos investigativos y no así en las limitaciones de la información. Mediante la aplicación de un modelo, se busca remarcar solo los aspectos que se consideran relevantes para la investigación en cuestión. Vuélvase al ejemplo de Königsberg: Euler omitió una serie de informaciones respecto del caso (como la dirección e intensidad del cauce del rio o el material de los puentes) puesto que no la consideró relevante para la resolución del problema (Räz 2013: 29). Cuando el modelo se aplica, este representa los aspectos que se consideran relevantes para el propósito en cuestión (consideraciones pragmáticas). De igual modo, Euler consideró el problema de carácter estructural, por lo que el modelo topológico remarca exclusivamente las regiones y los puentes, ignorando los demás aspectos del caso físico. Un morfismo cabal no puede dar cuenta de la selección de aspectos que tienen lugar cuando un modelo es aplicado (Bueno, French & Ladyman 2002: 506). En cambio, el morfismo parcial si logra aprehender esta característica de la práctica científica. Por tanto, la selección de información relevante para ser representada por el modelo es un factor a favor del morfismo parcial.

El traspaso parcial de estructuras (entre el modelo y el sistema) es un aspecto importante de la aplicabilidad matemática, y es un aspecto central del proceso de selección de elementos relevantes para ser mapeados (Bueno & French 2018: 37). La relación entre los modelos matemáticos y los sistemas físicos se plantea en términos de mapeo parcial entre ambos dominios, el cual tiene lugar por medio de un morfismo parcial entre ambas estructuras (Bueno, French & Ladyman 2002: 505), la estructura del modelo matemático y la estructura del sistema físico.

1.3. Concepción inferencial de las matemáticas aplicadas

La concepción inferencial respecto de la aplicabilidad de los modelos matemáticos en ciencias se encuentra principalmente caracterizada en los trabajos de Bueno & Colyvan 2011 y Bueno & French 2018. La propuesta de la concepción inferencial no es meramente estructural – representacional, sino que tiene un enfoque más pragmático y con mayor énfasis en los factores contextuales que influyen en el proceso general de aplicación matemática (Bueno & Colyvan 2011: 352). Por ello, se puede notar un mayor énfasis en la labor y competencias de parte del agente en la generación de inferencias a partir del modelo[17]. El objetivo de esto es hacer hincapié en cómo el modelo matemático aplicado facilita la generación de inferencias acerca del fenómeno bajo investigación (Räz 2013: 195). La concepción inferencial busca remarcar el rol del razonamiento matemático en las inferencias científicas, por medio del proceso de aplicación de modelos matemáticos que representan el fenómeno en estudio.

De este modo, la característica esencial de la concepción inferencial es el énfasis que realiza en la inferencia por medio del modelo matemático (*ibídem*: 194). Los distintos roles de las matemáticas aplicadas en ciencias se encuentran, ulteriormente, ligados con la capacidad inferencial del modelo aplicado (Bueno & Colyvan 2011: 352). El rol fundamental de las matemáticas aplicadas es facilitar al agente (informado y competente) la generación de inferencias apropiadas acerca del fenómeno. Esto se da por medio de la adecuada interpretación empírica del modelo matemático, que captura (representacionalmente) ciertas características relevantes del sistema físico (Bueno & French 2018: 51-52). Por medio de esta caracterización se busca señalar cuál es el enfoque y objetivo particular de la concepción inferencial respecto de las matemáticas aplicadas.

La concepción inferencial caracteriza el proceso de aplicación matemática en tres pasos: *inmersión*, *derivación* e *interpretación* (*ibídem*: 52-53). Primero se tiene la *inmersión*, este paso se caracteriza por establecer una representación parcial del fenómeno físico por parte de una estructura matemática apropiada (Bueno & Colyvan 2011: 353). Se relacionan los aspectos relevantes de la situación empírica (donde tiene lugar el fenómeno) con la

[17] Véase 1.4.

estructura del modelo matemático que represente de mejor manera dichos aspectos relevantes (*ibídem*: 353). Es decir, se realiza la aplicación del modelo, esto mediante el establecimiento de relaciones parciales entre los elementos (que se consideran relevantes) del fenómeno a la estructura del modelo (de modo que se da la representación). La decisión acerca de qué modelo es apropiado y cuáles son los aspectos relevantes del fenómeno se encuentra supeditada por consideraciones contexto dependientes y de carácter pragmático[18] (*ibídem*: 354-355). Las consideraciones pragmáticas que tienen incidencia son, generalmente, relativas a las preguntas que se buscan responder por medio de la investigación científica. En el paso de inmersión se traducen los elementos relevantes del fenómeno al lenguaje formal del modelo matemático, con el propósito de obtener una representación del patrón de dependencias[19] y la ratio adecuada para el fenómeno en cuestión. En términos simples, este paso estipula la representación matemática por parte del modelo.

El siguiente paso del proceso de aplicabilidad matemática es la *derivación*. La *derivación* consiste en derivar conclusiones y consecuencias a partir del formalismo matemático manipulando el modelo matemático que se estipuló en la *inmersión* (*ibídem*: 353). El objetivo es poder llegar a conclusiones y derivar consecuencias por medio del razonamiento formal matemático (manipulando los parámetros del modelo aplicado). Se genera una deducción desde la manipulación de la estructura matemática, pero manteniéndose en el dominio matemático (Räz 2013: 204). Dicha manipulación formal del modelo matemático es un proceso el cual permite la realización de un análisis contrafáctico del fenómeno (Morgan 1999: 386). En la sección 1.4 expongo cómo la manipulación de los

[18] Véase 3.2.

[19] Véase 2.4.

parámetros del modelo matemático y la derivación formal de consecuencias (a partir de dicha manipulación) permite la generación de inferencias[20] acerca del fenómeno físico.

Finalmente se tiene el paso de *interpretación*, el cual se caracteriza por interpretar (en términos del sistema físico) las conclusiones y consecuencias que se derivaron en la *derivación* por medio del razonamiento matemático (Bueno & Colyvan 2011: 353-354). Téngase en consideración que cuando se deriva un modelo matemático y se obtienen resultados, dichos resultados deben ser interpretados para así poder generar conclusiones acerca de la situación empírica donde acontece el fenómeno. Por ejemplo, si el resultado de la manipulación del modelo matemático es una suma determinada, dicha suma debe ser interpretada con respecto al sistema físico, puesto que, si se dejase sin interpretar, entonces el resultado de la manipulación sería solo un número sin significancia empírica (*ibídem*: 355). De este modo, el rol principal de la interpretación (acorde con la concepción inferencial) radica en interpretar (en términos físicos) las consecuencias obtenidas en la derivación matemática, para obtener así conclusiones acerca del fenómeno.

Con respecto a esta caracterización de la interpretación, cabe observar lo siguiente: en efecto, hay casos donde se realiza la derivación y, una vez obtenidos los resultados, estos son interpretados. No obstante, considero que este no es siempre el caso, pues la presencia de la interpretación resulta constante en el proceso de aplicación matemática. No son solo los resultados que entrega el modelo matemático los que son interpretados. Considero que el rol de la interpretación es transversal en el proceso de aplicación del modelo matemático.

---

[20] En las secciones 3.3 y 3.5 expongo cómo la manipulación de los parámetros del modelo y la derivación de inferencias pueden ayudar al agente epistémico en obtener una mejor comprensión de la dinámica (comportamiento) del fenómeno físico.

En el proceso de inmersión, la interpretación también juega un rol fundamental. La interpretación e inmersión del modelo son pasos que se encuentran bastante enlazados, pues generalmente, desde un inicio, el formalismo matemático del modelo aplicado se encuentra acompañado de cierta interpretación física (*ibídem*: 354). Cuando el modelo matemático es aplicado, el fenómeno debe ser interpretado de modo tal que se puedan adecuar los elementos relevantes de este (y sus interrelaciones) a la estructura del modelo para poder establecer la representación matemática. Cuando un modelo matemático es generado para representar un fenómeno, es trabajo del agente idear la configuración más pertinente para poder representar de modo adecuado los aspectos relevantes del sistema físico (Morrison & Morgan 1999: 30-31). La construcción y aplicación de un modelo matemático implica ciertas traslaciones necesarias de la estructura del fenómeno a la del molde formal del modelo (Morgan 1999: 356). Mediante este proceso de interpretación e integración el modelo matemático es generado y aplicado[21]. Por lo tanto, la interpretación es indispensable en el paso de inmersión del modelo.

Un ejemplo que puede ilustrar el rol de la interpretación en la generación del modelo matemático es el caso del modelo del éter de Maxwell[22]. En su trabajo de 1856, Maxwell buscaba realizar una caracterización matemática de la idea de líneas de fuerzas de Faraday (Morrison 2015: 99). Para poder establecer un modelo matemático del caso, Maxwell primeramente realizó una analogía física e interpretó el comportamiento del fenómeno en términos hidromecánicos en un sistema de vórtices de éter. Luego, propuso una analogía entre la estructura de dicho modelo mecánico y una estructura matemática, para así realizar

[21] Véase 3.2.

[22] Véase Morrison 2015, capítulo 3.

la *matematización* de la idea de Faraday (*ibídem*: 99-100). A partir de este modelo matemático (obtenido mediante el modelo del éter) se pudieron derivar conclusiones e inferencias que permitieron una mejor comprensión[23] de la dinámica de los fenómenos electromagnéticos (Morrison 2005: 159-160). Por consiguiente, ahora compete explicar cómo se pueden derivar inferencias empíricas a partir de la representación matemática del modelo aplicado.

1.4. Derivación de inferencias a partir de la representación

Cuando el modelo matemático es aplicado a un sistema físico (donde tiene lugar el fenómeno bajo investigación), se establece una representación matemática de dicho fenómeno por medio del modelo aplicado. Por ello, compete en primer lugar caracterizar la relación representacional que se establece entre el modelo matemático y el fenómeno, puesto que la representación matemática cumple un rol fundamental en la contribución epistémica del modelo. Precisamente, la representación matemática es un recurso epistémico por medio del cual se pueden derivar inferencias acerca del fenómeno. Por lo tanto, es menester explicar cómo se derivan inferencias empíricas a partir de la representación matemática, y que rol desempeña esta como recurso epistémico. Para, finalmente, concluir con un esquema general que comience con la aplicabilidad matemática y que caracterice la capacidad inferencial de los modelos matemáticos aplicados.

Para cumplir con el objetivo estipulado, empelaré la tesis de Suárez (2004) de la concepción inferencial de la representación científica, pero aplicada al caso particular de la

[23] Véase 3.4.

representación matemática en ciencias. Esta tesis es una noción deflacionaria de la representación, que caracteriza mínimamente este concepto apelando a su direccionalidad y a su capacidad de permitir e inducir inferencias (Suárez 2004: 767). El objetivo de esta concepción es establecer las condiciones mínimas generales de la representación, en función de las cuales se puede estipular que A es una representación de B (*ibídem*: 768). Obviamente, en el marco de mi tesis, estas condiciones y características son adecuadas y aplicadas a la representación matemática por parte de los modelos aplicados.

A modo de definición general: en la representación se tiene un sistema fuente (*source*) A que representa a un sistema objetivo (*target*) B (*ibídem*: 767); es decir, A es lo que representa y B es lo representado (y la representación se da en esta dirección). Una condición necesaria para la representación es la direccionalidad de ésta: A representa B si y sólo si la *fuerza* representacional de A dirige a B (*ibídem*: 771). Suárez define la *fuerza* representacional del sistema fuente A como la capacidad de la fuente para dirigir (a un agente competente e informado[24]) a ciertas consideraciones respecto del sistema objeto B (*ibídem*: 768). Las propiedades lógicas de la relación representacional entre A y B son las siguientes (*ibídem*: 775): 1) no es reflexiva: que A represente a B no implica que A se señale a sí misma. 2) no es simétrica: que A represente a B no implica que B represente a A. 3) no es transitiva: si A representa a B y B representa a C, no se sigue que A represente a C. Estas es la caracterización general que estipula y concretiza una primera aproximación a la relación representacional entre A y B.

[24] El rol del agente en la derivación de inferencias es fundamental e indispensable en esta concepción inferencial de la representación.

Sin embargo, la fuerza representacional de A con respecto a B no puede ser estipulada por mera denotación arbitraria, al menos no en el caso de las representaciones científicas. Acorde con la concepción inferencial, la representación científica tiene dos características principales, y la primera de estas es su direccionalidad, la cual es descrita apelando principalmente a la fuerza representacional de la fuente y al grado de objetividad de la representación.

La representación científica tiene cierta objetividad respecto de las características que representa del fenómeno (*ibídem*: 771). Que una representación sea objetiva implica, en este contexto, que la representación provee de información específica respecto del fenómeno representado, en el sentido de que dicha información no hubiera podido ser conseguida (igualmente) empleado cualquier otra representación elegida arbitrariamente (*ibídem*: 772). Debe haber cierto de grado de objetividad en la representación en tanto ésta provee de información acerca del fenómeno, mediante la aprehensión de ciertas características particulares de la situación empírica.

Por ejemplo, en el caso de los puentes de Königsberg, Euler genera un modelo topológico particular de la ciudad, el cual representaba sólo los puntos (regiones) y las conexiones (puentes) entre estos. Luego, una vez establecidas las condiciones necesarias para un circuito euleriano, aplica éstas al modelo topológico particular para resolver el problema en cuestión. Esta representación topológica es objetiva en tanto que entrega cierta información (relevante para la resolución del problema) acerca de la ciudad de Königsberg, esto mediante la representación de ciertas características estructurales del caso. Cualquier otro modelo que no representase acertadamente las características estructurales del caso, no hubiera brindado la información requerida para resolver el problema. Por ello se requiere de cierto grado de objetividad en la representación científica, ya que estas representaciones son empleadas en ciencias con el propósito de obtener información y aprender acerca del fenómeno bajo investigación[25].

La segunda característica principal de la representación científica es su capacidad para permitir inferencias y razonamientos acerca del sistema físico representado (*ibídem*: 767). Esta característica tiene un requerimiento indispensable: la participación de un agente competente e informado que derive las inferencias (*ibídem*: 773). La fuerza representacional de la fuente A apunta y dirige al objetivo B, pero se necesita de la participación de un agente que tenga el nivel apropiado de competencias y que esté lo suficientemente informado para que dicho agente puede derivar e inferir conclusiones adecuadas acerca del fenómeno a partir de la representación. El nivel de competencia e información que deberá tener el agente es una consideración pragmática que depende del objeto de estudio, contexto y objetivo de la investigación (*ibídem*: 773). Por ejemplo, si se aplica un modelo matemático a un caso de mecánica cuántica (*e.g*. la ecuación de onda de Schrödinger), entonces el agente va a requerir un determinado (usualmente alto) nivel de competencias matemáticas e información (conocimiento) de mecánica cuántica para ser capaz de derivar cualquier inferencia por medio de dicha representación. Si el agente no cumple con dicho nivel de competencia e

[25] Además, la representación matemática es objetiva por naturaleza (en la mayoría de los casos), ya que los modelos matemáticos se generan con el propósito de que estos representen ciertos aspectos relevantes del fenómeno en lenguaje matemático. Un ejemplo es la creación de un modelo matemático que representase el fenómeno de inducción electromagnética, puesto que Faraday no estableció las ecuaciones correspondientes para el fenómeno que descubrió. Por lo tanto, los modelos matemáticos son objetivos desde su generación (acorde con la definición dada en este contexto). Este aspecto se desarrolla más a fondo en la sección 3.2 que trata sobre el proceso de integración de los modelos matemáticos.

información, entonces difícilmente podrá aplicar la ecuación e inferir alguna conclusión apropiada.

Si se revisa el proceso de derivación de inferencias se podrá dejar patente la importancia del agente epistémico en dicho proceso. Un modo de explicar la derivación de inferencias es por medio de la manipulación e interpretación del modelo matemático por parte del agente. Una vez generado el modelo matemático, se tiene una representación formal de una situación empírica. El modelo se emplea mediante la manipulación de sus parámetros (variables), para, de este modo, poder derivar una conclusión formal a partir de la variación de sus parámetros. Tómese como ejemplo la fórmula estándar de la velocidad: $v = \frac{d}{t}$ (velocidad igual a la distancia divida en el tiempo). Si un agente manipula esta ecuación mediante la variación de una de sus variables, conservando otra constante y la restante como incógnita, entonces puede concluir cuál será el valor de la variable incógnita al variar los parámetros; y al interpretarla, podrá llegar a una conclusión empírica. Consideremos el siguiente escenario inicial: $v = 50\ km/h\ ; d = 100\ km\ ; t = 2\ h$. Si manipulo los parámetros iniciales de este modelo matemático ($50\ km/h = {}^{100km}/_{2h}$), manteniendo el valor de *d*, pero disminuyendo *t* a la mitad, ocurre que el valor de *v* cambia (como consecuencia formal de la derivación matemática) a $v = 100\, km/h$. Interpretando en términos físicos esta manipulación matemática, puedo concluir la siguiente inferencia empírica: “si aumento la velocidad de mi vehículo al doble, me tardaré solo la mitad del tiempo en recorrer la distancia que requiero”. Este ejercicio matemático es bastante básico y simple, pero permite ilustrar cómo la manipulación e interpretación de un modelo matemático (y gracias a su rol como representación matemática del fenómeno) puede generar inferencias empíricas acerca del fenómeno que es representado.

El agente realiza esta manipulación de los parámetros para poder derivar una conclusión formal a partir de la representación matemática en cuestión, que es interpretada en términos del sistema físico, para finalmente concluir una inferencia empírica acerca del fenómeno. El rol del agente es indispensable para la derivación de inferencias a partir de la representación matemática, pues es su labor la manipulación e interpretación del modelo matemático para poder concluir con la inferencia empírica.

A su vez, la presencia del agente en la derivación de inferencias de la representación da cabida a posibles errores e imprecisiones en la conclusión alcanzada. La representación dirige al agente competente e informado a inferencias acerca del fenómeno (*ibídem*: 768), no obstante, si el agente no cumple con las competencias y conocimientos necesarios, es posible que llegue a inferencias erradas. De este modo, las inferencias erradas e imprecisas se justifican acuñando la responsabilidad al agente que realiza la inferencia (*ibídem*: 778), puesto que el agente erró en su labor inferencial. Así, la concepción inferencial de la representación puede dar cuenta de las conclusiones erradas obtenidas de representaciones apropiadas.

El esquema general de la concepción inferencial respecto de la representación científica es el siguiente: el sistema fuente A representa el sistema objetivo B si y solo si (1) la fuerza representacional de A dirige hacia B y (2) dicha fuerza representacional permite a un agente competente e informado derivar inferencias acerca de B (*ibídem*: 773). Cuando el modelo matemático es aplicado[26], se establece una representación matemática del fenómeno bajo investigación, la cual es manipulada e interpretada por parte del agente, quien, de este

[26] proceso caracterizado por la concepción inferencial respecto de la aplicabilidad matemática (1.3).

modo, puede derivar inferencias empíricas. Es necesario el rol del agente para poder generar inferencias a partir de la representación matemática. De igual modo, es su responsabilidad la labor inferencial, por lo que se da margen al error ante la falta de competencia o conocimiento adecuado de parte del agente. Además, cuando el modelo matemático es generado (3.2.), ahí radica otra labor del agente en la interpretación formal de la situación empírica para lograr la adecuada representación de las características relevantes del fenómeno por parte del modelo matemático. Así, la aplicación matemática y su rol como recurso epistémico dependen de la labor del agente epistémico en el uso de los modelos matemáticos como medios de investigación empírica.

1.5. Conclusión

En la introducción de este capítulo se plantea la tesis ulterior de mi trabajo: defender la contribución epistémica de los modelos matemáticos aplicados en ciencias físicas. Para ello, el primer capítulo ha tenido un propósito general: establecer un marco teórico que pueda ser referido en los capítulos posteriores. De este modo, este capítulo sienta las bases para poder desarrollar una investigación con mayor ahínco centrada en la contribución epistémico de los modelos matemáticos aplicados. Esta primera parte estableció ciertos conceptos base para ser referidos como marco general de trabajo.

El primer tema transversal de este capítulo es dar cuenta de cómo los modelos matemáticos son aplicados y se relacionan con los fenómenos físicos. Respecto a lo primero, la idea general de la tesis del mapeo (complementada con el morfismo parcial) resulta bastante apropiada. Acorde con la tesis, lo principal en la aplicabilidad es la conservación parcial de la estructura del sistema físico (su configuración) en la estructura formal del modelo matemático (Räz 2013: viii). Sin embargo, esta tesis tiene sus limitaciones por lo que hay que concretizar más la caracterización de la aplicabilidad para que ésta sea más próxima a la práctica científica.

Para ello se ahonda en la concepción inferencial de la aplicabilidad matemática. Con esta propuesta se aborda el segundo tema del capítulo: la capacidad de los modelos para generar inferencias. La importancia de este tópico para la tesis general radica en que la generación de inferencias empíricas a partir del modelo matemático es el primer peldaño para poder estatuir una defensa ulterior del rol de los modelos matemáticos como recursos epistémicos en la investigación científica de los fenómenos físicos. Al dar cuenta de la capacidad inferencial de las matemáticas, se da inicio a la defensa de su rol epistémico. Para argumentar su capacidad inferencial se hace referencia a dos factores esenciales: la interpretación física de los modelos matemáticos y la participación del agente epistémico en la derivación de inferencias. Ambos factores son indispensables para la generación de inferencias, por lo que su conjunción es requerida para poder argumentar el rol epistémico de las matemáticas en ciencias.

Finalmente, el último tema del capítulo es la representación matemática. Cuando el modelo matemático es aplicado a una situación empírica (proceso descrito en 1.3.), se genera una representación matemática del fenómeno. La aplicación de un modelo matemático (1.1.) implica el establecimiento de una relación representacional entre el modelo y el fenómeno (1.2. y 1.4.). A partir de dicha representación matemática, el agente competente e informado deriva inferencias empíricas acerca del fenómeno representado (1.4.). De este modo, se tiene un esquema general el cual se constituye de los tres temas que fueron abordados a lo largo de este capítulo, y el cual estipula la base para ahondar en el debate en torno a la contribución epistémicos de las matemáticas aplicadas. En el capítulo siguiente se ahonda más en la representación matemática, sin embargo, no se busca caracterizar la relación representacional sino abordar concretamente *qué* es representado por el modelo matemático. El propósito es señalar cuáles son las características del fenómeno que son representadas por el modelo matemático, y que, ulteriormente, son referidas en explicaciones acerca del fenómeno. De modo tal que se expande la capacidad epistémica de las matemáticas aplicadas en ciencias.

Capítulo 2

Representación matemática y explicación

El tema central de mi trabajo, y la tesis que me interesa defender, es la contribución epistémica de las matemáticas aplicadas en ciencias físicas. Dicha contribución puede notarse en distintos aspectos de la práctica científica, como, por ejemplo, en su rol inferencial, en la generación de predicciones o en la unificación de fenómeno físicos. El tópico principal de este capítulo es una de estas contribuciones epistémicas, a saber, el rol explicativo de los modelos matemáticos aplicados. Un problema relevante en la literatura respecto de las matemáticas aplicadas en ciencias, refiere al rol que juegan las matemáticas en la generación de explicaciones de fenómenos físicos (Batterman 2010: 1). Compete ver cómo se entiende la contribución explicativa de las matemáticas aplicadas, para, de este modo, poder dar cuenta del rol explicativo de los modelos matemáticos en ciencias físicas.

En términos generales, la explicación se compone de dos partes: el *explanans* y *explanandum* (Reutlinger 2018: 78-79). El *explanandum* es el fenómeno o evento por ser explicado; mientras que el *explanans* es el conjunto de enunciados que cumplen la función de explicar el *explanandum* (Bokulich 2017: 2). Tradicionalmente, el proceso de explicación se caracteriza por deducir el *explanandum* a partir del *explanans*, o por emplear el *explanans* para, por medio de este, rastrear la cadena causal que lleva al *explanandum* (*ibídem*: 2). Considero ilustrativo entender la relación *explanans* – *explanandum* en términos de teoría de conjunto: el *explanans* es un conjunto de enunciados compuesto por condiciones iniciales, generalizaciones y supuestos auxiliares; mientras el *explanandum* es un enunciado E

(Reutlinger 2018: 78-79). De este modo, el proceso de explicación consiste en derivar el enunciado E a partir del conjunto del *explanans*. Ésta es una caracterización básica de la relación *explanans – explanandum,* pero sirven para entender la explicación de modo general.

Respecto de la contribución explicativa de los modelos matemáticos, la literatura ha seguido una línea argumental particular que relaciona la existencia de las entidades matemáticas con su rol explicativo, mediante el argumento de la indispensabilidad[27] (Pincock 2012: 203). El argumento de la indispensabilidad sostiene que, en ciertos casos, las matemáticas aplicadas en ciencias son indispensables para estas; por tanto, dicha indispensabilidad matemática es una razón significativa para comprometernos ontológicamente con la existencia de las entidades matemáticas presentes en nuestras teorías científicas (Colyvan 2012: 47-48). La formulación actual de este argumento se centra en el poder explicativo de las matemáticas aplicadas, de este modo, se sostiene que el agente debe comprometerse con las entidades matemáticas indispensables para nuestras explicaciones de los fenómenos físicos (Pincock 2012: 203). No considero que la capacidad explicativa de las matemáticas aplicadas sea prueba de la existencia de las entidades matemáticas, por lo que cabe señalar ciertas distinciones para separar mi marco teórico de trabajo con dicha línea argumental.

Primero, hay que diferenciar entre la concepción pragmática y la concepción objetivista respecto de la explicación. La aproximación objetivista postula ciertas condiciones para aceptar una explicación, principalmente se postula que una explicación genuina debe ser verdadera (*ibídem*: 13). Por ejemplo, en el caso de una explicación causal,

---

[27] Para más información acerca de este debate, véanse los trabajos de Baker (2005) y Colyvan (2001), que son los autores referidos por Pincock (2012) al respecto.

la explicación ha de referir a la causa genuina que, en la realidad, causa el fenómeno. Se puede considerar a esta aproximación como una de carácter metafísico, puesto que sostiene la realidad de los elementos referidos en la explicación. Por otro lado, la aproximación pragmática concibe la explicación como un proceso epistémico de parte del agente en el que se emplean representaciones de la realidad, aceptadas por ciertas virtudes teóricas que estas poseen (*ibídem*: 13). Las representaciones son empleadas en la explicación, ya que estas resultan útiles para formular la relación *explanans* – *explanandum*. No obstante, la utilidad científica de los elementos que componen la explicación no implica que se deban aceptar dichos elementos como verdaderos (*ibídem*: 13[28]). En consecuencia, desde la aproximación pragmática se rechaza la derivación de un compromiso ontológico con un elemento a partir de su capacidad explicativa. Por lo tanto, secundando esta postura, la contribución explicativa de las matemáticas no es suficiente para argumentar su ontología.

Otra distinción relevante es entre "las explicaciones físicas que involucran matemáticas" y "las explicaciones *ipso facto* matemáticas de fenómenos físicos" (Baker 2005: 234). El segundo tipo de esta distinción hace referencias a las explicaciones físicas que radican en un hecho matemático que constriñe la necesidad del evento físico[29]. En este tipo de explicaciones se demuestra la ocurrencia del *explanandum* señalando que su necesidad modal radica en un hecho matemático ulterior (Lange 2018: 16). El ejemplo estándar de este tipo de explicación se encuentra en explicar la imposibilidad que experimenta una madre al querer repartir 23 frutillas en cantidades iguales entre sus 3 hijos, puesto que la explicación

[28] Pincock (2012) hace referencia a van Fraassen (1980).

[29] Véase Lange 2013 y 2018 al respecto.

se fundamenta en el hecho matemático de que 23 no es divisible por 3 (*ibídem*: 15[30]). El argumento de la indispensabilidad hace referencia al segundo tipo de explicaciones matemáticas (Pincock 2012: 207), ya que en estos casos el componente matemático juega un rol indispensable en la explicación.

En cambio, mi investigación se centra en la primera categoría: en los modelos matemáticos involucrados en explicaciones físicas. La tesis de mi trabajo consiste en defender la contribución epistémica de las matemáticas aplicadas. Por lo tanto, me interesa estudiar las distintas explicaciones en las cuales los modelos matemáticos aplicados juegan un rol; no solo las explicaciones puramente (o fundamentalmente) matemáticas. Los modelos matemáticos pueden jugar un rol explicativo figurando en el *explanans* (como un enunciado matemático) o ayudando al entendimiento del agente en el proceso de formulación y generación de la explicación (Bokulich 2011: 38). En ambos casos considero que hay una contribución epistémica de parte de las matemáticas aplicadas.

De este modo, distingo mi marco de trabajo de la línea del argumento de la indispensabilidad. No busco defender alguna implicancia ontológica de las matemáticas, sino centrarme en el trabajo epistémico. Para ello, compete investigar el rol de los modelos matemáticos (en tanto representaciones matemáticas del fenómeno) en el proceso de formulación y estipulación de la explicación de un fenómeno. En este aspecto, considero relevante la relación entre representación y explicación, puesto que, gracias a la capacidad representativa del modelo, el agente epistémico gana un mejor entendimiento del fenómeno

[30] Lange hace referencia a Braine 1972 al exponer el ejemplo.

que le permite estipular una explicación respecto de este[31] (Pincock 2012: 13), contribuyendo, así, los modelos matemáticos en la explicación científica.

El capítulo comienza con el paradigma tradicional de la explicación científica: las explicaciones causales (Woodward 2018: 117). Este tipo de explicaciones funcionan haciendo referencia a la red causal que subyace al fenómeno (Reutlinger & Saatsi 2018: 2), por lo que el *explanans* refiere al proceso, mecanismo o cadena causal de trasfondo (dependiendo de la tesis causal). En la sección 2.1 se busca revisar cómo los modelos matemáticos representan relaciones causales, y la contribución de aquello en la explicación científica. Siguiendo con la revisión literaria, compete avanzar *más allá* de las relaciones causales y abordar las relaciones no causales (2.2). Finalmente, en la segundad mitad del capítulo, ahondo en la tesis que busco defender: la teoría (*expandida*[32]) de las dependencias contrafácticas. En 2.3 expongo a cabalidad esta tesis y cómo, empleando dicho marco de trabajo, se da cuenta de las explicaciones causales y no causales. Los modelos matemáticos juegan un rol en la explicación por medio de su capacidad representativa, por ello en 2.4 ahondo en la representación de las dependencias contrafácticas de parte del modelo para, de este modo, argumentar a favor de la contribución explicativa del modelo matemático.

[31] En la sección 2.4 desarrollo este punto.

[32] Utilizo el término *expandido* como adjetivo para referirme a la teoría contrafáctica de la explicación, con el propósito de diferenciarla de la formulación inicial (Woodward 2003) de esta misma tesis. De este modo, se busca incluir a las explicaciones no causales dentro de este marco teórico (Woodward 2018). El término *expandido* lo tomo del título del artículo de Reutlinger (2018) respecto a este debate: *Expanding the counterfactual theory of explanation.*

2.1. Representación causal por parte del modelo

Las explicaciones causales son un paradigma en lo que respecta a las explicaciones científicas (Woodward 2018: 117). La explicación causal es un tipo de explicación tradicional de la literatura (Pincock 2018: 40), por lo que considero que es un punto de inicio apropiado para mi exposición. En términos generales, las tesis causales sobre la explicación sostienen que la explicación en ciencias se da mediante la identificación en el *explanans* de las causas del *explanandum* (Reutlinger & Saatsi 2018: 2). De este modo, en el *explanans* se hace referencia a la red causal que produce el *explanandum*. Tómese el siguiente ejemplo: se busca explicar por qué hay humo en un determinado lugar (*explanandum*). Para responder a esto, el *explanans* hace referencia a la presencia de una fogata en dicho lugar, la cual es la causa del *explanandum*[33]. Así se estipula, de forma básica, la relación *explanans – explanandum* en los casos de explicaciones causales.

Entonces, acorde con este esquema, ¿cuál es el rol explicativo del modelo matemático? El modelo matemático es usado para representar la red causal que subyace al sistema objetivo (Pincock 2012: 5). Así, el modelo matemático representa la dinámica causal del fenómeno. El modelo, al ser una representación matemática de la red causal del sistema, nos da información acerca de las relaciones causales que dan lugar al *explanandum*. Ahora

[33] El enunciado E *explanandum* es "hay humo en la locación X"; y los enunciados del conjunto del *explanans* son "hay una fogata en la locación X" (condición inicial de la situación), "la madera produce humo al quemarse" (generalización) y "no hay viento en la locación X" (enunciado auxiliar). Empleando el conjunto del *explanans* se puede derivar el *explanandum*. Este análisis denota cómo el *explanans* hace referencia directa a la red causal que causa el *explanandum* (se establece que la fogata causa el humo, dada la generalización), por lo que de este modo se establece la relación *explanans – explanandum* en términos causales.

bien, cómo representa el modelo matemático dicha red causal depende de la teoría causal en cuestión. En el *explanans* figura la causa del *explanandum*, pero esta causa se puede entender como mecanismo, proceso o simplemente como relación causal en sentido contrafáctico[34]. Por ello, comenzaré con la teoría mecanicista de Kaplan para, desde ahí, exponer cómo el modelo representa dicha relación causal.

Kaplan[35] postula su tesis 3M (Mecanismo – Mapeo – Modelo) para dar cuenta de cómo el modelo es aplicado y cómo este representa el mecanismo de interés (Bokulich 2017: 9). Su tesis se formula en términos de un mapeo entre el modelo y un mecanismo subyacente al fenómeno que se busca representar (Kaplan 2011: 10). De este modo, el modelo da cuenta del fenómeno al mapear los elementos del mecanismo y sus relaciones (*ibídem*: 2). Ésta es la formulación básica de la tesis de Kaplan.

La caracterización de mecanismos usada por Kaplan es la siguiente[36]: un mecanismo es una estructura que realiza una actividad o función (en virtud de sus componentes y configuración) la cual es responsable de dar lugar a un fenómeno (*ibídem*: 10). El punto principal del mecanismo es que este produce (causa) cambios y efectos regulares a partir de

---

[34] Véase Woodward 2003. En la sección 2.4 ahondo en la representación de relaciones de dependencia contrafáctica y en cómo se deriva la explicación a partir de estas.

[35] Huelga decir que la línea de trabajo de Kaplan pertenece a la filosofía de las ciencias cognitivas y neurociencia (Kaplan 2011: 2), no a la filosofía de la física. Sin embargo, la idea general y central de la tesis de la aplicabilidad de modelos de Kaplan puede ser empleada en cualquier caso donde se proyecte un mecanismo causal subyacente al fenómeno que es representado por el modelo. Esta tesis, relativa a los mecanismos causales, es atribuible a otras representaciones causales donde se sostenga la teoría de procesos (*process theory*) respecto de la causalidad, por ejemplo.

[36] Kaplan refiere a Bechtel & Abrahamsen 2005 para esta definición.

las variaciones en su configuración (*ibídem*: 11)[37]. Ya que el mecanismo se encuentra compuesto de elementos interrelacionados, el modo en el que el modelo lo representa es el siguiente: los componentes del modelo se corresponden con algunos[38] componentes presentes en la estructura del mecanismo que subyace al sistema (Bokulich 2017: 9).

El modelo matemático representa la dinámica del fenómeno al representar el mecanismo que le subyace. La configuración del mecanismo (representada de modo formal por el modelo matemático) determina un comportamiento regular dentro de los parámetros de este, por lo que el modelo exhibe el comportamiento del fenómeno (dentro de determinado rango). Las explicaciones causales por medio del modelo funcionan al dar cuenta del comportamiento del fenómeno en términos de las interacciones entre sus distintos elementos constituyentes, que son representado por el modelo (Bokulich 2011: 34). Este esquema explicativo no es exclusivo de las explicaciones mecanicista, sino que también es aplicable a otras concepciones causales (como la teoría de procesos).

El mecanismo es un tipo de red causal subyacente al sistema. El modelo representa dicha red causal de modo similar al caso mecanicista, puesto que, mediante su estructura matemática, el modelo representa los elementos del sistema y sus relaciones. De este modo, el esquema de la explicación causal (por medio de los modelos) es la siguiente: el modelo representa la red causal subyacente al sistema, y mediante dicha representación se puede dar cuenta de las dinámicas posibles del fenómeno; de modo que, utilizando el modelo, se pueden

[37] Kaplan parafrasea a Machamer *et al* 2000.

[38] El que sea necesario el mapeo de solo *algunos* componentes del mecanismo (y no toda su estructura) se justifica desde el marco del morfismo parcial expuesto en 1.2.

explicar los comportamientos resultantes del fenómeno (Bokulich 2017: 9-10). El modelo representa los elementos citados por el *explanans* que figuran como causa del *explanandum*.

La representación tiene lugar puesto que el modelo matemático representa la red causal subyacente al sistema, por lo que ésta es una representación que da cuenta de la contribución explicativa *sólo* en los casos causales. Sin embargo, no todas las explicaciones en física son causales, sino que hay casos donde la descripción causal del sistema es omitida por mor de obtener un mejor entendimiento general del fenómeno (Batterman[39] 2010: 2). Además, también hay representaciones matemáticas en las cuales se encuentran ausentes las relaciones causales, representando otro tipo de estructura del sistema (Pincock 2012: 6). Un ejemplo clásico es la representación estructural del gráfico topológico de los puentes de Königsberg. Por lo tanto, compete *ir más allá* de las explicaciones causales para estudiar los casos de explicaciones no causales y así dar cuenta de cuál es la contribución explicativa de los modelos matemáticos en dichos casos.

2.2. Introducción de la representación de relaciones no causales

Limitar las explicaciones científicas a explicaciones causales no es práctico, puesto que hay una variedad de explicaciones en ciencias que no hacen referencia (ni recaen) en relaciones causales de algún tipo (Reutlinger & Saatsi 2018: 3). Por ello, es menester ampliar nuestra visión de la explicación para incluir casos no causales. Para introducir los casos no causales emplearé una aproximación pluralista respecto de la explicación (*ibídem*: 5). Una tesis

[39] Batterman hace referencia a las explicaciones por medio de grupos de renormalización en termodinámica.

pluralista respecto de X sostiene que X es concebido en una variedad de tipo X1…Xn (Pincock 2018: 39). De este modo, un pluralismo explicativo hace referencia a distintos tipos de explicaciones (acordes a la necesidad de cada caso). El pluralismo explicativo sostiene que las explicaciones causales y no causales refieren a dos (o más) tipos distintos de explicaciones, las cuales no se yuxtaponen, sino que son complementarias (Reutlinger & Saatsi 2018: 5). De este modo, los distintos tipos de explicaciones no son reemplazables ni reducibles a una teoría explicativa general. En la sección anterior (2.1) expuse las explicaciones causales, por lo que ahora corresponde incluir en la palestra a los casos no causales.

Antes de comenzar, me interesa efectuar una aclaración: a diferencia de la sección 2.1., en esta sección no voy a explicar cómo operan las explicaciones no causales. Dependiendo del autor o la línea investigativa, hay muchas concepciones distintas[40] de explicaciones no causales genuinas; como las explicaciones estructurales, matemáticas, conceptuales, constitutivas o abstractas (por mencionar algunas). Cada concepción no causal establece su propia relación *explanans – explanandum*, por lo que no se puede estatuir un estándar de relación *explanans – explanandum* para todos los casos no causales. En la sección 2.3 explico cómo operan las explicaciones no causales respecto de la teoría explicativa que

[40] Las distintas explicaciones causales (como la mecanicista, intervencionista o teoría de proceso) varían respecto de su concepción de la causalidad (o la interpretación de ésta), pero, en último término, la relación *explanans – explanandum* sigue siendo que el *explanans* refiere a una relación causal (o a una red de relaciones causales) que produce el *explanandum*. En los casos no causales, las distintas explicaciones estipulan distintas relaciones *explanans – explanandum*, lo cual imposibilita dar una caracterización general sin adscribirme a una teoría explicativa particular. Por ello, esta tarea queda para la sección 2.3.

busco defender[41], argumentado a favor de la contribución particular que cumplen los modelos matemáticos en dicho marco teórico. Por lo tanto, limito esta sección a introducir los casos no causales a la palestra y a exponer una primera aproximación a la representación no causal por parte de los modelos matemáticos (distinguiendo estas representaciones de los casos causales). Mediante la representación matemática de dichas relaciones no causales se obtiene un mejor entendimiento del comportamiento del sistema en cuestión, lo cual posteriormente conlleva en su contribución explicativa.

En una línea que se acerca a la orientación de mi investigación, Pincock destaca la importancia de la contribución epistémica que tienen las matemáticas aplicadas en la labor científica (Pinccok 2012: xv). Una de las tareas usuales de las ciencias radica en su capacidad de producir representaciones del mundo y operar con ellas (*ibídem*: 3). Dentro de este contexto, Pincock tiene como objetivo dar cuenta del rol de las matemáticas presentes en las representaciones científicas, teniendo como foco el aspecto epistémico de esta contribución (*ibídem*: 3). Pincock divide el rol representacional de las matemáticas en dos categorías[42]: las representaciones causales y acausales (*ibídem*: 5).

En primer lugar, corresponde caracterizar y distinguir las representaciones causales y acausales. Repasemos las representaciones causales: estas son representaciones matemáticas

[41] La teoría contrafáctica de la explicación.

[42] Pincock (2012) establece más categorías y distinciones en los roles que cumple las matemáticas aplicadas en ciencias. Por ejemplo: 1) distinción con respecto al tipo de abstracción en la representación; 2) las escalas de medida; y 3) el carácter constitutivo y derivativo de la representación científica. Sin embargo, estas categorías de matemáticas aplicadas no son pertinentes para mi narrativa actual. Pues, mi objetivo es responder cómo las matemáticas son aplicadas, y estas categorías competen a otros debates más allá de este problema.

de la red causal que subyace a un fenómeno (son las interrelaciones entre los elementos constituyentes del sistema). De forma resumida, una representación causal representa una relación causal. Dicha relación causal implica un enlace entre dos elementos A y B cuya relación es asimétrica, es decir, si A es causa de B, entonces B no es causa de A (Reutlinger 2018: 89). Además, la relación causal también es asimétrica temporal[43], es decir, la causa A ocurre antes del efecto B (*ibídem*: 89). De este modo, la asimetría es un factor distintivo de las relaciones causales[44]. Un ejemplo de representación causal (en un modelo matemático) se puede apreciar en la tercera ecuación diferencial de Maxwell.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$$

La tercera ecuación de Maxwell representa la Ley de inducción de Faraday que da cuenta del fenómeno de inducción eléctrica (Tagüeña & Martina 2011: 41-42). Dicho fenómeno se puede resumir del siguiente modo: la variación de un campo magnético en torno a un circuito induce un campo eléctrico (*ibídem*: 43). La relación causal en este caso es bastante explícita: la variación con respecto al tiempo del campo magnético ($\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$) es la causa y el campo eléctrico inducido ($\nabla \times \vec{E}$) es el efecto. Esta relación se representa de modo directo en el modelo

[43] En esta caracterización básica de la relación causal, la causa y el efecto no son simultaneas.

[44] Reutlinger (2018) emplea una estrategia russeliana para distinguir a las relaciones causales de las no causales. De dicha estrategia tomo ambos tipos de asimetrías para estipular una distinción básica entre ambos tipos de relación. De este modo evito caer en debates más complejos sobre la caracterización de una relación causal.

matemático por medio de la derivada ($\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$) del lado derecho y el rotor ($\nabla \times \vec{E}$) del lado izquierdo.

Lo esencial de la representación causal es que ésta tiene como contenido representacional una relación causal presente en el fenómeno representado (Pincock 2012: 47). De este modo, se establecen dos características esenciales que deben, en consecuencia, figurar en la representación causal (*ibídem*: 48): 1) toda relación causal implica un cambio con respecto al tiempo (variación temporal). Esta característica es notoria en el caso de la tercera ecuación diferencial de Maxwell gracias al uso de la derivada ($\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$) que explícitamente denota una variación temporal. La segunda característica 2) implica cierto enlace contrafáctico en la relación causal; es decir, si se interrumpe la causa, no ocurre el efecto. De este modo, la manipulación de los parámetros del modelo indica, como resultado, efectos alternos (*ibídem*: 50). En el caso de tesis como la teoría de procesos, ocurre que, si el proceso causal es interrumpido o manipulado, el efecto resultante también será alterado (*ibídem*: 48). Por lo tanto, se deja patente en la representación la relación contrafáctica entre la causa y el efecto.

Ahora bien, hay otro tipo de representación matemática que no representa causalidad. Las representaciones acausales representan relaciones no causales, las cuales suelen ser descritas de forma negativa, entendiéndose como una negación de las relaciones causales (Bokulich 2017: 26). Son relaciones que no cumplen con los requerimientos de las relaciones causales. Por consecuencia, las representaciones acausales carecen de las características claves de las representaciones causales, como el cambio con respecto al tiempo y enlace contrafáctico[45] (Pincock 2012: 51). Por esta razón no se puede estipular un estándar de relación *explanans* – *explanandum*, puesto que no se puede establecer una caracterización general para todos los casos no causales, ya que solo tienen en común *no* ser casos causales. Por ello se pueden describir distintas caracterizaciones de las representaciones y explicaciones acausales. Un tipo de representación no causal son las representaciones del sistema objetivo en torno a un punto determinado (puede ser un punto de equilibrio, por ejemplo) a modo de estatuir un estado estable del sistema en cuestión (*ibídem*: 6). Este tipo de representaciones matemáticas permiten obtener información del sistema que no se explicita por medio de una representación causal (*ibídem*: 9). De este modo, se puede obtener información sobre las ratios en las interacciones no causales entre los elementos que componen un sistema.

Otra caracterización de la representación no causal son las representaciones que exhiben la estructura subyacente de un sistema (Bokulich 2017: 4[46]). Estas representaciones acausales pueden dar cuentan de ciertas características estructurales relevantes y ciertos

---

[45] Respecto de este punto, Pincock (2012: 53) afirma que ciertas tesis y teorías pueden insistir y defender las relaciones contrafácticas en las relaciones acausales; por lo que es posible discutir este aspecto desde ciertos marcos teóricos. No obstante, esto no aplica a la representación de un cambio temporal, pues ahí sí defiende de modo más tajante el que esta es una característica propia de las relaciones causales (Pincock 2012: 53).

[46] Bokulich (2017) hace referencia a McMullin 1978. Sin embargo, Pincock (2018: 40) también hace referencia a las representaciones estructurales en cierto tipo de explicación no causal (explicación abstracta).

patrones de dependencia[47] subyacentes al fenómeno (Pincock 2012: 54). Un ejemplo de estas representaciones es el caso de los puentes de Königsberg.

El modelo matemático (topológico) de los puentes de Königsberg (sección 1.1) es una representación acausal del sistema, ya que el modelo solo representa la relación entre las regiones y sus conexiones (la representación no hace referencia a relaciones causales). El análisis formal, de hecho, solo trabaja viendo cómo estos elementos se relacionan: la cantidad de regiones, la cantidad de conexiones totales y las que cada región posee. El modelo de Königsberg refleja, en su estructura formal, características presentes en el sistema físico que tienen cierta significancia para el caso de estudio científico (*ibídem*: 53). De este modo, el modelo representa características estructurales que se consideran relevantes, pero dicha estructura representada no responde a la configuración de una relación causal[48]. Por lo tanto,

[47] Corresponde realizar la siguiente aclaración: considero que Pincock (2012) se refiere tácitamente a dos tipos de relación contrafáctica, una para las relaciones causales y otras para las acausales. El enlace contrafáctico relativo a la relación causal, impele que, si se altera o interrumpe la causa, se altera o inhibe el efecto. Es decir, sea C causa de E (cuya relación es C → E), si altero los parámetros de C, necesariamente afecto a E. Este es el enlace contrafáctico de las relaciones causales. En cambio, en el caso acausal, se puede defender un enlace contrafáctico entre A y B sosteniendo que, si se altera A, entonces B se verá afectado, sin que A sea causa de B (ni viceversa). Sin embargo, la relación contrafáctica acausal no es tan explícita como en el caso causal (es más notorio el contrafáctico presente en la relación C →E). Por esta razón Pincock (2012) afirma que el enlace contrafáctico es una característica propia de la relación causal (Pincock 2012: 51). Pero, aun así, señala que la representación acausal da cuenta de patrones de dependencia en el sistema (*ibídem*: 54), los cuales pueden interpretarse como cierto tipo de relación contrafáctica. Por ello, Pincock sostiene que se puede defender, desde ciertas tesis, que hay un enlace contrafáctico en las relaciones no causales (*ibídem*: 53), punto que yo sí considero acertado y argumento en la sección 2.3.

[48] Reutlinger (2018) ejemplifica esto apelando a que la relación entre el teorema de Euler y la estructura topológica de Königsberg no se encuentran en una relación asimétrica temporal (Reutlinger 2018: 91), además de apelar a otras características del modelo matemático.

resulta notorio que la representación es una representación acausal, puesto que no refleja una relación causal (C→E) presente en el sistema.

Si bien las distintas caracterizaciones de explicaciones no causales no comparten una misma relación *explanans* – *explanandum*, hay ciertos aspectos comunes de los casos no causales; en especial si se tienen en cuenta las explicaciones causales como punto de contraste. Las explicaciones (y representaciones) causales tienen en común que el *explanans* refiere a relaciones causales; mientras que las explicaciones (y representaciones) no causales suelen referir a relaciones no causales (Pincock 2018: 40). Se sostiene como aspecto común que el *explanans*, en estos casos, no hacen referencia a aspectos relevantes que formen parte de alguna red causal (Lange 2018: 15). De este modo, la tesis pluralista defiende distintas concepciones explicativas (complementarias) para dar cuenta de las explicaciones causales y no causales. En los distintos casos, el *explanans* hace referencia a distintos tipos de relaciones en el sistema (causales y no causales) lo cual implica que la relación *explanans* – *explanandum* sea distinta en cada caso.

Sin embargo, considero que hay una estrategia para poder unificar ambas concepciones explicativas (y representativas) en un solo marco teórico. Se pueden caracterizar (de modo general) las distintas explicaciones causales, puesto que, a pesar de las distintas concepciones de la causalidad, se mantiene como constante la misma relación *explanans* – *explanandum*. En cambio, las distintas explicaciones no causales sólo tienen en común no ser de la categoría causal (al no hacer referencia a relaciones causales), por lo que no hay una caracterización común de la relación *explanans* – *explanandum*[49]. Por lo tanto,

[49] Esto da lugar a la variedad de teorías explicativas no causales de parte de los distintos autores en la literatura.

para poder establecer una teoría explicativa que capture ambos casos, ésta debe dar una caracterización de la relación *explanans* – *explanandum* que sea común para las explicaciones causales y para los distintos casos no causales. En las secciones 2.3 y 2.4 expongo esta teoría y argumento a favor de ella, para así defender la contribución de los modelos matemáticos aplicados desde este marco teórico.

2.3. Expandiendo la teoría contrafáctica de la explicación

En el desarrollo de este capítulo he presentado distintas aproximaciones respecto de la explicación, las cuales presentan distintas formas de entender la explicación científica, y, por tanto, implican distintos modos de entender la contribución de los modelos matemáticos. En la sección 2.1 expuse una aproximación causal que reduce la explicación científica al esquema de relación *explanans* – *explanandum* propio de los casos causales (el *explanans* presenta las causas del *explanandum*). En la sección 2.2 se introducen los casos no causales, y para dar cabida a estas, se sostiene que hay distintos tipos de explicaciones científicas para los casos causales y no causales. Las distintas explicaciones exhibirán distintas relaciones *explanans* – *explanandum*. Ahora corresponde abordar la tesis que defiendo: la teoría (*expandida*) contrafáctica de la explicación.

La teoría contrafáctica (en su formulación expandida) es una concepción monista de la explicación, por lo que se sostiene que hay un solo marco teórico que puede caracterizar a las explicaciones causales y no causales, ya que hay una idea central que da cuenta de la relación *explanans* – *explanandum* para las distintas explicaciones científicas (Reutlinger & Saatsi 2018: 5). El monismo se distingue del reduccionismo causal puesto que acepta la legitimidad de las explicaciones no causales (Reutlinger 2018: 77). Dentro de este marco se establece la teoría contrafáctica de la explicación (CTE[50]), la cual sostiene que las explicaciones causales y no causales son explicativas en virtud de revelar un patrón de dependencias contrafácticas entre el *explanans* y el *explanandum* (*ibídem*: 74). De este modo, los modelos matemáticos aplicados representan las interrelaciones de los elementos constituyentes del sistema, capturando así el patrón de dependencias contrafácticas del sistema (Bokulich 2011[51]: 39) y la ratio matemática de estas relaciones[52].

La teoría contrafáctica de la explicación postula que la explicación funciona haciendo referencia al patrón de dependencias contrafácticas del fenómeno por explicar (Reutlinger 2018: 74). Acorde con la tesis contrafáctica, el *explanans* debe dar información acerca de cómo el *explanandum* hubiera sido distinto bajo determinados cambios o variaciones respecto de los elementos presentados por el *explanans* (Lange 2018: 23). De este modo, tantos las explicaciones causales y no causales responden a preguntas *what if things had been different* (*ibídem*[53]: 24). El objetivo de la CTE es revelar cómo el *explanandum* depende contrafácticamente de los cambios posibles en los parámetros citados por el *explanans* (Reutlinger 2018: 78-79). La explicación debe señalar cómo sería distinta la situación actual del fenómeno si algunos de sus parámetros fuesen distintos (Pincock 2018: 43). Por tanto, la relación *explanans – explanandum* se caracteriza de la siguiente forma: el *explanans* expone las variaciones en los parámetros del fenómeno para así derivar el *explanandum* (*ibídem*: 48).

---

[50] CTE por sus siglas en inglés: *counterfactual theory of explanation.*

[51] Bokulich hace referencia a Woodward 2003 para concretar la idea de la representación de un patrón de dependencias de parte del modelo (Bokulich 2011: 38).

[52] Este punto será expuesto en la sección siguiente (2.4.).

[53] Lange (2018) hace referencia a Woodward (2003). Cabe mencionar que Woodward (2003) es un autor canónicamente mencionado en la literatura en lo que respecta a explicaciones contrafácticas.

Es decir, el *explanandum* se deriva del *explanans* a partir de este análisis contrafáctico. Por ello, las explicaciones causales y no causales son explicativas en virtud de cumplir con esta relación *explanans – explanandum*.

La idea central de la CTE es el análisis de los aspectos explicativamente relevantes en términos de dependencias contrafáctica (Reutlinger 2018: 78). Si los parámetros citados por el *explanans* hubieran sido diferentes, entonces sería diferente el estado actual del *explanandum* (Woodward 2018: 119). Con esta caracterización básica, corresponde analizar las condiciones particulares con las que cumple este tipo de explicación; ello para, posteriormente, exponer cuál es la contribución explicativa del modelo matemático en este esquema explicativo.

Reutlinger caracteriza la CTE empleando cuatro[54] condiciones que justifican su capacidad explicativa y sintetizan el esquema de esta explicación (Reutlinger 2018: 78-79).

1. Condición estructural, ésta estipula que la explicación se compone de dos partes: *explanans* y *explanandum*. El *explanandum* se compone de enunciados E acerca de un fenómeno o evento; mientras que el *explanans* es un conjunto de enunciados C (condiciones iniciales), enunciados G (generalizaciones) y

[54] Reutlinger cita cinco condiciones (2018: 79). No obstante, segrego la condición de veracidad que pide que los enunciados del *explanans* y *explanandum* sean verdaderos (*ibídem*: 79). Ya que, desde una perspectiva pragmática, esta condición resulta difícil de cumplir (en especial si se tienen en consideración la presencia de enunciados matemáticos). Por lo mismo, Reutlinger acepta que es un problema posible la presencia de esta condición, por lo que está de acuerdo con que se rechace este criterio si se aceptan elementos de cuestionable veracidad como constituyentes de la explicación científica (*ibídem*: 80). Por ello, omito el criterio de veracidad.

enunciados A (suposiciones auxiliares); la conjunción de estos enunciados compone el *explanans* (*ibídem*: 78-79).

2. Condición inferencial, los enunciados del *explanans* (Cn, Gn y An) permiten inferir E o la probabilidad condicional de E (*ibídem*: 79).

3. Condición de dependencia, los enunciados del *explanans* sostiene al menos un contrafáctico respecto de E (*ibídem*: 79). Esta condición es esencial para la tesis, ya que ésta se fundamenta en el patrón de dependencias y es la que faculta el análisis contrafáctico. Además, la condición de dependencia es la que permite que, a partir de la manipulación de los parámetros del modelo matemático, se deriven inferencias contrafácticas acerca del fenómeno.

4. Condición mínima, esto asegura que no haya un subconjunto de enunciados del *explanans* que, por sí mismos, satisfagan las condiciones señaladas respecto de E (*ibídem*: 79). Esta condición cumple el rol de mantener un minimalismo explicativo y que no haya información irrelevante presente en la formulación de la explicación.

En el marco de la CTE, el proceso de explicación consiste en la derivación del enunciado E (y enunciados contrafácticos E') por medio del análisis contrafáctico, al demostrar cómo las variaciones en los parámetros del *explanans* (alterando los enunciados que constituye el *explanans* actual) derivan en enunciados contrafácticos respecto de E. Para, de este modo, explicar la condición actual del *explanandum* mediante el análisis contrafáctico del *explanans*.

La formulación original de la teoría contrafáctica de la explicación[55] está enfocada a una interpretación causal en términos intervencionistas (Reutlinger & Saatsi 2018: 7). No obstante, la CTE no se encuentra necesariamente ligada a una interpretación causal (Reutlinger 2018: 78), por lo que es posible expandir esta teoría para que abarque los casos no causales[56]. Para exponer cómo los casos no causales son abordados por la CTE, es pertinente analizar los casos causales en primer lugar, puesto que estos sirven como punto de contraste para las explicaciones contrafácticas no causales (Woodward 2018: 117).

Acorde con la condición estructural, las explicaciones (causales y no causales) se componen de *explanans* y *explanandum*, donde el *explanans* es un conjunto de enunciados que refieren a condiciones iniciales del caso, generalizaciones y supuestos auxiliares (Reutlinger 2018: 78-79). En el *explanans* de las explicaciones causales figura un enunciado causal que describe una relación de dependencia contrafáctica entre una variable A, que cumple el rol de causa, y una variable B, que cumple el rol de efecto (Woodward 2018: 119). Es decir, el enunciado causal (presente en el *explanans*) describe una relación A – B entre dos (o más) variables que cumple con dos características: ser una relación de dependencia contrafáctica y ser una relación causal. La relación A – B es contrafáctica ya que se puede derivar un enunciado contrafáctico a partir de ésta; y, a su vez, es causal ya que dicha relación cumple con las características estándar de las relaciones causales (2.2), de modo que A es causa de B. Sin embargo, el componente contrafáctico es distinto del componente causal

---

[55] Véase Woodward 2003.

[56] Reutlinger (2018) y Woodward (2018) sostienen que la CTE no está limitada necesariamente a una interpretación causal, por lo que es aplicable también a casos de explicaciones no causales.

(*ibídem*: 123), por lo que no es necesario que una relación contrafáctica sea interpretada en términos causales.

Para las explicaciones no causales se puede establecer un esquema *espejo* al recién expuesto para los casos causales. En el *explanans* de la explicación no causal figura un enunciado que describe una relación de dependencia entre una variable A' y una variable B'. Dicha relación A' – B' es una relación de dependencia contrafáctica (ya que se puede derivar un enunciado contrafáctico a partir de ésta), pero no es una relación causal, puesto que la relación A' – B' no cumple con las características de las relaciones causales. Así, en el *explanans* no causal se estipulan relaciones de dependencia contrafáctica que, sin embargo, no son relaciones causales. Las explicaciones no causales exhiben un patrón de dependencia contrafáctica que no cumple con los requerimientos de los casos causales (*ibídem*: 123). De este modo, la CTE puede ser expandida para abordar y dar cuenta de las explicaciones no causales.

2.4. Contribución explicativa de los modelos matemáticos

Ahora corresponde revisar cómo el modelo matemático significa una contribución en el esquema de la teoría contrafáctica *expandida* de la explicación. Nótese que lo crucial de un modelo explicativo consiste en que, por medio de la manipulación del modelo, se puede inferir qué ocurrirá si se cambiasen los parámetros del sistema que está siendo explicado (Woodward 2018: 120). La manipulación del modelo ayuda al análisis contrafáctico ya que el *explanans* apela a ciertas características representadas por el modelo (Bokulich 2017: 3). Dicha manipulación permite la generación de inferencias modales que se pueden adjudicar al *explanandum* (Woodward 2018: 134), de modo tal que se realiza un análisis contrafáctico[57] de este. Hay dos características sustanciales del modelo que permiten su contribución explicativa: la representación del patrón de dependencias contrafácticas y el hecho de que se pueda manipular para estudiar los resultados contrafácticos que entregue.

La exposición y defensa de la contribución explicativa de los modelos matemáticos será dividida en dos partes: primero corresponde exponer cómo el modelo matemático representa el patrón de dependencias contrafácticas y la ratio de sus relaciones. Esto con el propósito de establecer con precisión cómo el modelo representa matemáticamente las relaciones de dependencia en el sistema físico. Posteriormente, abordo cómo (a partir de la representación matemática) el modelo matemático aplicado contribuye al proceso de generación de una explicación física. De este modo, se defiende la contribución explicativa del modelo matemático en la formulación y estipulación de la explicación de un fenómeno en estudio. Concluyendo así la contribución epistémica de los modelos matemáticos en explicaciones físicas.

El modelo representa la dinámica y comportamiento de un fenómeno por medio de la representación del patrón de dependencias contrafácticas, que subyace a las interacciones de los elementos del sistema donde tiene lugar el fenómeno. Gracias al formalismo matemático, se da cuenta, además, de la ratio de las relaciones de dependencia entre los elementos en interacción. De este modo, lo representado por el modelo matemático es el patrón de dependencias contrafácticas entre los elementos del sistema, y la razón matemática de sus relaciones. Así, la estructura de un modelo matemático M, que representa un fenómeno P,

[57] En la sección 3.3. vuelvo a este punto y ahondo en la relación entre el análisis contrafáctico (en la explicación contrafáctica) y la comprensión del comportamiento del fenómeno.

exhibe una estructura contrafáctica que resulta parcialmente mórfica a las relaciones contrafácticas relevantes entre los elementos presentes en el fenómeno P (Bokulich 2011: 39). El modelo representa ya que exhibe la estructura de dependencias del fenómeno, en lenguaje formal matemático (Bokulich 2017[58]: 107). Finalmente, esta representación matemática y las conclusiones obtenidas de ella son físicamente interpretadas, lo cual permite interpretaciones causales y no causales de las relaciones de dependencias representadas por el modelo.

Acorde a la tesis recién expuesta, hay dos factores relevantes que son representados por el modelo matemático: el patrón de dependencias contrafácticas y la ratio de estas relaciones. La ratio refiere a la razón matemática establecida en la relación entre dos elementos. La razón matemática es una relación entre dos magnitudes que se suele expresar de la forma *A es a B*; por ejemplo, *2 es a 3*. En el caso de los modelos matemáticos aplicados, se representan dos elementos respecto de los cuales se establece la razón matemática de su relación.

Tómense como ejemplo los siguientes dos casos de la física: la ley de Coulomb y la tercera ley de Kepler. En el primer caso, la ley de Coulomb asevera que la fuerza de atracción o repulsión entre dos cargas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas (Tagüeña & Martina 2011: 37). Se establece la razón matemática entre la fuerza de dos cargas y la distancia entre ambas; resultando en una ratio equivalente al cuadrado de la distancia entre ambas cargas. En el segundo caso, la tercera ley de Kepler estipula que la razón matemática del periodo al cuadrado sobre el cubo de la distancia es la misma para todos

[58] Bokulich (2017: 107) hace referencia a Morrison (1999).

los planetas (Voelkel 1999: 91). Kepler, en sus cálculos, explícitamente establece la razón de $P^2/_{D^3}$ (*ibídem*: 92-93) para señalar la proporción de la relación entre la distancia de un planeta con respecto al sol y el periodo de su desplazamiento orbital. En ambos casos la ratio es la razón matemática establecida para expresar formalmente la proporción en la relación entre dos elementos. Esto, sumando con el patrón contrafáctico del sistema, permite analizar cómo variará (y en qué proporción) un elemento con respecto a otro al manipularse los parámetros.

El otro factor presente en la representación son las dependencias contrafácticas. Estas refieren a las relaciones condicionales que se pueden establecer entre los elementos de un sistema. En el modelo matemático se establecen las relaciones presentes entre los elementos del sistema físico con el objetivo de remarcar las interacciones relevantes, para, así, poder determinar (mediante la manipulación del modelo) cuál será el caso si los parámetros son alterados de distintas maneras. Tómese el ejemplo anteriormente presentado (1.4) donde se emplea la fórmula básica de la velocidad $v = \frac{d}{t}$ para calcular la velocidad de un cuerpo. Si se toma un caso donde se aplique esta ecuación, se podrá saber cómo variarán alguna de las variables si manipulo las demás (análisis contrafáctico). Si mantengo la distancia y disminuyo el tiempo, entonces matemáticamente ocurre que aumenta la velocidad. Se llega a este resultado pues el modelo matemático representa las relaciones contrafácticas entre los distintos elementos del sistema. Así, el modelo representa las interacciones entre los elementos constituyentes del fenómeno.

En efecto, todas las relaciones causales tienen una relación condicional, entre la causa y el efecto (C → E), que implica una dependencia contrafáctica. Sin embargo, las relaciones no causales también sostienen cierta relación contrafáctica que da cuenta de sus interacciones y cómo un elemento (*acausalmente*) afecta a otro en un sistema. La representación por parte del modelo matemático exhibe las interacciones entre los elementos y la proporción de estas. Este también es el caso para la representación de interacciones no causales por parte del modelo matemático. Es decir, se representa una interacción entre dos elementos y, a pesar de que no tenga la estructura causal C → E, igualmente se establece una relación contrafáctica (en su interacción) por mor de la cual la manipulación de uno de los elementos afectará al otro. No todas las relaciones de dependencia son relaciones de carácter causal (Pincock 2018: 44), también hay relaciones no causales de dependencia.

Véase el ejemplo de la velocidad de un cuerpo ($v = \frac{d}{t}$), la estructura matemática representa el patrón de dependencias contrafácticas no causales establecido entre estos tres elementos. En el modelo figura cierta relación contrafáctica (acorde a la ratio), donde la relación entre distancia y tiempo (*e.g.*) no es una relación causal. Lo mismo ocurre con la ratio establecida por la tercera ley de Kepler. La relación entre el periodo de una órbita y su distancia del sol no es una relación causal, pero su relación igualmente establece una relación contrafáctica. Pues, si un dios primigenio imaginario moviera un planeta, alterando su distancia respecto del sol, entonces también se alteraría el periodo de dicho planeta (acorde a la proporción establecida por la tercera ley de Kepler).

Respecto de la contribución del modelo matemático en el proceso de generación y formulación de una explicación, sostengo que hay modos principales en los cuales esto se da. El primer modo refiere a cuando el modelo matemático ayuda a un agente epistémico (competente e informado) en su entendimiento del sistema físico. Por medio del modelo matemático (gracias a su representación y su carácter manipulable), el agente obtiene un mejor entendimiento de la dinámica y las relaciones del sistema, lo que le permite estipular el conjunto de enunciados constituyentes del *explanans*.

Tómese como ejemplo la tercera ecuación diferencial de Maxwell sobre la ley de Faraday (sección 2.2). Si el *explanandum* fuera respecto de la dirección particular de la corriente eléctrica en el circuito[59], el agente podría formular su explicación por medio del estudio de la ecuación, refiriéndose a la ley de Lenz presente en ésta. La ley de Lenz se basa en el principio de conservación de la energía y sostiene que un sistema físico tiende a oponerse a cambiar del estado en el que se encuentra (Tagüeña & Martina 2011: 41). De esta manera, la corriente eléctrica del circuito va en dirección opuesta al flujo del campo magnético (*ibídem*: 42). Esta ley se puede apreciar en la 3ra ecuación en el símbolo negativo, a saber, –, que se antepone a la derivada del campo magnético[60]. De este modo, el agente puede estudiar la ecuación y llegar a entender las razones de la dirección de la corriente eléctrica. Por consiguiente, el conjunto del *explanans* se constituiría de enunciados no matemáticos, que refieren a factores físicos como la fuerza electromotriz, el flujo del campo magnético y la ley de Lenz. No obstante, el modelo matemático ayudó al agente en su entendimiento del sistema para estipular dicho conjunto del *explanans*, y así generar la explicación del fenómeno. Por consiguiente, la contribución del modelo matemático es relativa al entendimiento del agente epistémico, para que este pueda que este pueda establecer la relación *explanans* – *explanandum* (pertinente para el caso).

[59] En términos de *why question* (van Fraassen 1989): *¿por qué la corriente eléctrica de este circuito va en determinada dirección?*, de este modo el *explanandum* es la dirección de la corriente eléctrica.

[60] Véase la ecuación en la sección 2.2.

El otro modo en el cual contribuye el modelo matemático es cuando, a partir de este, se deriva un enunciado matemático que figura en el conjunto del *explanans*. Cabe mencionar que no se está argumentando por explicaciones *ipso facto* matemáticas de un fenómeno físico (Baker 2005: 234), pero sí corresponde mencionar que hay casos de explicaciones físicas que emplean enunciados matemáticos en la composición de su *explanans*. Este tipo de explicaciones suelen constituirse de una serie de condiciones iniciales y suposiciones auxiliares (en su mayoría enunciados empíricos), además de alguna generalización de carácter matemático respecto de la situación física. Para explicar de mejor modo este tipo de casos (y además exponer un caso de explicación no causal), emplearé el ejemplo de Königsberg.

En el caso de Königsberg, el *explanandum* es la imposibilidad de completar el circuito euleriano referido en la tarea. El *explanans* se compone del teorema de Euler y el hecho contingente de la condición inicial del caso (la configuración estructural del sistema físico). La explicación del *explanandum* radica en que la estructura del sistema no cumple con las condiciones necesarias para un circuito euleriano (que son estipuladas por el teorema de Euler). Se deriva el *explanandum* del *explanans* ya que la conjunción de la estructura del caso y el teorema de Euler explican la imposibilidad de completar el circuito euleriano. En efecto, la condición inferencial de la explicación se cumple, puesto que el teorema de Euler + las condiciones iniciales del caso permiten inferir el enunciado E del *explanandum* (Reutlinger 2018: 84). Ahora bien, la condición de dependencia también se cumple, ya que si las condiciones iniciales hubieran sido distintas (si hubiera solo 1 puente más en la ciudad), entonces, dado el teorema de Euler, se hubiera podido completar el circuito euleriano[61] (*ibídem*: 84). Es decir, no es el teorema la causa del *explanandum*, sino la estructura del sistema (condición inicial). Si se realiza un análisis contrafáctico y se cambia la cantidad de puentes (1 más), entonces se obtiene un contrafáctico del *explanandum* que sí cumple con el circuito.

Los puntos de este ejemplo fueron dos: 1) exponer cómo, por medio del modelo matemático, se deriva un enunciado matemático que forma parte del *explanans* de una explicación física. Y 2) explicar cómo el modelo matemático contribuye a la formulación de una explicación contrafáctica (no causal, en este caso) de un fenómeno físico. La explicación de Königsberg cumple con las condiciones necesarias para considerarse una explicación contrafáctica. Y ésta, además, permite entender cómo el modelo matemático aplicado puede ser una contribución explicativa para dar cuenta de los fenómenos físicos.

A modo de conclusión, esta sección establece qué es lo representado por el modelo matemático aplicado acorde con la CTE. La contribución representativa del modelo yace en su representación matemática del patrón de dependencias contrafácticas (Woodward 2018: 123) y la ratio matemática de las relaciones de dependencia de los elementos. Dicha representación es un aporte al entendimiento del caso de parte del agente epistémico, lo cual significa una contribución en el proceso de formulación de la explicación física. Es decir, el modelo contribuye a la comprensión necesaria del fenómeno, para poder establecer la relación *explanans* – *explanandum* pertinente al caso explicativo en cuestión.

[61] Véase la exposición de la sección 1.1 sobre la solución de Euler al estipular las condiciones necesarias para un circuito euleriano.

2.5. Conclusión

La formulación de explicaciones de los fenómenos físicos es una labor insignia de la práctica científica. La estructura básica de la explicación radica en la relación *explanans* – *explanandum*: el enunciado del *explanandum* es derivado a partir del conjunto de enunciados que compone el *explanans*. A lo largo del capítulo expuse distintas aproximaciones respecto de la explicación científica. Estas aproximaciones diferían en cómo estipulaban la relación *explanans* – *explanandum*, y esto define sus concepciones respecto de una genuina explicación científica. Las explicaciones causales tienen una estructura *explanans* – *explanandum* común a sus distintas concepciones de la causalidad. Mientras, por otro lado, las explicaciones no causales difieren presentando distintas relaciones *explanans* – *explanandum* según la teoría no causal que se defienda (esto debido a la vaguedad de la definición negativa del concepto *no causal*). Sin embargo, mi defensa radicó en presentar una teoría monista que estipula una relación *explanans* – *explanandum* común para los casos causales y no causales: la teoría *expandida* de las dependencias contrafácticas.

Ahora bien, el objetivo de mi trabajo es acerca de la contribución epistémica de los modelos matemáticos aplicados. Por lo tanto, en la última sección se argumentó a favor de la contribución explicativa de las matemáticas aplicadas. A lo largo del capítulo se presentaron distintas aproximaciones de la explicación, y dependiendo de la aproximación, resulta ligeramente diferente la contribución del modelo matemático. No obstante, la capacidad representativa del modelo es una constante en lo que refiere a la contribución matemática. Los modelos matemáticos presentes en las explicaciones científicas comparten la característica de hacer referencia a patrones, regularidades o constantes (Batterman 2010:

23). Por lo tanto, en el marco de la CTE, el modelo matemático contribuye exhibiendo el patrón de dependencias contrafáctica del sistema.

Los modelos matemáticos representan el patrón de dependencias y la ratio matemática de las interrelaciones entre los elementos del sistema físico donde tiene lugar el fenómeno a explicar. La contribución epistémica de las matemáticas (en el análisis contrafáctico) consiste en hacer manejable información acerca del fenómeno que, de otro modo, sería difícil de entender (Pincock 2012: 8). El modelo ayuda al agente epistémico (competente e informado) en su comprensión del fenómeno, lo que le permite formular el conjunto del *explanans* para derivar el *explanandum.* Del modelo se puede derivar un enunciado matemático que forme parte del conjunto *explanans*, o solo ayudar en el entendimiento del fenómeno para poder derivar enunciados no matemáticos acerca del sistema físico, para, así, constituir el conjunto *explanans*. Por consiguiente, la capacidad representativa y el carácter manipulable del modelo matemático le permite remarcar aspectos no matemáticos relevantes del sistema físico (*ibídem*: 208). Esto permite que el modelo contribuya explicativamente a la formulación de análisis contrafácticos, que desemboca en la estipulación de la relación *explanans* – *explanandum* pertinente para el caso.

Capítulo 3

Investigación científica basada en modelos matemáticos aplicados

Los modelos matemáticos aplicados cumplen distintas funciones en la práctica científica, con el objetivo de facilitar el estudio de los fenómenos por parte del agente (Morgan & Morrison 1999: 10). En este tercer capítulo examinaré cómo los modelos matemáticos representan un aporte para la comprensión del fenómeno por parte del agente. Los modelos aplicados permiten un mejor entendimiento del fenómeno, lo que da lugar a un progreso en el aprendizaje del agente acerca del sistema empírico bajo investigación. Uno de los objetivos de las ciencias es proveernos de conocimiento y entendimiento acerca del mundo empírico (de Regt 2017: 1), por lo que el rol de los modelos aplicados resulta crucial, pues ayudan al desarrollo de la práctica científica.

Para explicar a qué me refiero con una investigación científica basada en modelos, corresponde, en primer lugar, establecer los conceptos de modelo y teoría, y cómo estos se relacionan tanto entre sí como con el fenómeno en estudio. La teoría consiste de principios generales que estipulan el comportamiento (dinámica) de un grupo o conjunto de fenómenos (Morgan & Morrison 1999: 12). En la literatura, la tesis semántica respecto de las teorías[62] sostiene que el lenguaje de estas se compone de términos observables y términos teóricos; la

[62] Morgan y Morrison (1999: 3) hacen referencia a Suppes (1961 y 1967); Suppe (1977); van Fraassen (1980); y Giere (1988).

teoría es aplicada al fenómeno por medio de la correspondencia entre estos términos (*Ibídem:* 2-3). Sin embargo, no siempre se puede aplicar la teoría al fenómeno por medio de esta correspondencia semántica. En estos casos se requiere de un modelo para poder aplicar la teoría a un fenómeno (*Ibídem*: 20). Por su parte, el modelo es una estructura que se usa para representar un fenómeno mediante relaciones de semejanza con el sistema empírico de interés (Godfrey-Smith[63] 2006: 725-726). Dicho modelo funciona como una estructura interpretativa respecto de los principios generales que componen a la teoría (*Ibídem*: 727). Es decir, representa cómo se asume que se encuentra constituido el fenómeno, a partir de la teoría de trasfondo que se sostenga.

El modelo representa el sistema empírico con el propósito de que, por medio de este, se puedan aplicar los principios generales de la teoría al caso particular (de Regt 2017: 32). Dicho modelo funciona como mediador epistémico entre la teoría y el fenómeno, dado que exhibe la adecuada proporción entre la particularidad del fenómeno en investigación y la generalidad de los principios teóricos (David-rus 2012: 101). Esto le permite funcionar como un enlace epistémico, propiciando una aproximación al fenómeno que no hubiera sido posible de otro modo. La capacidad representativa del modelo, sumado al hecho de que este (en su composición) involucra elementos de la teoría y del sistema físico, le confiere al modelo su estatus de mediador epistémico (Morgan & Morrison 1999: 11). De modo que se le considera un instrumento epistémico que contribuye al estudio del fenómeno.

Cuando un agente epistémico realiza una investigación científica de un sistema complejo y desconocido, hay distintas estrategias que puede emplear para abordar dicha

[63] Godfrey-Smith (2006) hace referencia a Giere (1988) respecto de esta definición.

tarea. Una de estas es estudiar deliberadamente un sistema hipotético más simple que represente al sistema complejo de interés, para así comprender su comportamiento (Godfrey-Smith 2006: 734). Dicha estrategia investigativa refiere a un estudio científico basado en modelos, que consiste en aprender acerca de un sistema complejo mediante el uso de un sistema hipotético-teórico (más simple) que representa ciertos aspectos relevantes del caso empírico (*ibídem:* 726); es decir, mediante el uso de modelos aplicados. Una gran parte de esta investigación científica implica la *reconstrucción* de un fenómeno por medio de un modelo que le represente, para, de este modo, investigar el comportamiento del fenómeno bajo determinadas circunstancias (Morrison 2015: 2). Por ello, resultan cruciales los procesos de construcción del modelo (para *reconstruir* el fenómeno en lenguaje formal y acorde con el trasfondo teórico) y el análisis contrafáctico de este, para estudiar escenarios posibles del sistema físico (representados en el modelo). En síntesis, el modelo es estudiado con el propósito de aumentar nuestra comprensión teórica del fenómeno, ya que dicho modelo (en tanto mediador epistémico) permite un refinamiento de nuestro entendimiento del caso de estudio (de Regt 2017: 46).

Comienzo la sección 3.1 enfocándome en la comprensión que se obtiene por medio de la aplicación del modelo. De este modo se busca exponer cómo, mediante el modelo aplicado, se genera una comprensión del fenómeno representado. El modelo cumple un rol ilustrativo para el agente, propiciando su aprendizaje. Dicho aprendizaje se da mediante la construcción y manipulación del modelo matemático (Morgan & Morrison 1999: 11-12). Es decir, se puede obtener un mayor entendimiento respecto del fenómeno gracias al proceso de integración que constituye la construcción del modelo. En 3.2. me centro en exponer cómo se desarrolla este proceso de integración, por medio del cual se construye un modelo matemático del sistema empírico de interés. Analizo el caso histórico del modelo mecánico del éter de Maxwell con el propósito de caracterizar de mejor modo el proceso de construcción de un modelo. El otro modo mediante el cual el modelo contribuye epistémicamente, es a través del proceso de manipulación de este. El tema central de 3.3. es la manipulación del modelo y el análisis contrafáctico. Se establece la relación entre el análisis contrafáctico con la contribución explicativa del modelo (en el marco de la teoría contrafáctica de la explicación expuesta en 2.4). Luego, en la sección 3.4. se aborda el problema de las idealizaciones, abstracciones y ficciones presentes en el modelo matemático, y qué implicancias tienen estas en el rol epistémico del modelo. Este es un debate bastante complejo, que no podrá ser abordado a cabalidad en este trabajo, por lo que el objetivo de la sección será simplemente plantear la postura de mi trabajo ante esta problemática. Finalmente, en la sección 3.5 se analiza la relación entre el entendimiento y el conocimiento en epistemología. El objetivo de la sección es revisar la posibilidad de obtener conocimiento a partir de la comprensión del modelo, además de una revisión conceptual de la contribución epistémica que otorga la aplicabilidad del modelo.

3.1. Entendimiento científico basado en modelos matemáticos

El modelo matemático es un instrumento epistémico que es empleado en ciencias con el objetivo de obtener información del fenómeno, a partir de cálculos que se desarrollan con la estructura del modelo (Morgan & Morrison 1999: 33). Además, este también funciona como un instrumento para conceptualizar y exponer ciertos escenarios y dinámicas posibles del fenómeno. Antes de comenzar, cabe distinguir los instrumentos meramente instrumentales (como un barómetro, por ejemplo), de los instrumentos epistémicos que cumplen un rol mayor en el proceso de aprendizaje del caso de estudio (*ibídem*: 11). Los modelos matemáticos son de esta segunda categoría, ya que su capacidad representativa implica una contribución a la comprensión del agente acerca del fenómeno.

El aprendizaje por medio del modelo es el resultado de un proceso especifico de integración, manipulación, investigación e interpretación de este (David-rus 2012: 151). Dicho proceso es un tipo de razonamiento científico que se compone de los siguientes pasos (*ibídem*: 157[64]): 1) Primero, la construcción del modelo matemático adecuado para el caso[65]; 2) luego se formulan los cuestionamientos de interés investigativo acerca del caso; 3) entonces se manipula el modelo para obtener respuestas ante dichos cuestionamientos; 4) finalmente, se adjudican los resultados obtenidos al caso empírico mediante la interpretación de dichos resultados. El cuarto paso solo es posible debido al rol de mediador epistémico que cumple el modelo, ya que la capacidad representativa del modelo permite que las conclusiones obtenidas sean proyectadas al caso real como inferencias de este. Dichas inferencias pueden considerarse como conocimiento acerca del fenómeno, siempre y cuando estas cumplan con las condiciones necesarias establecidas por la teoría epistemológica de trasfondo[66].

Las funciones que cumplen los modelos aplicados son variadas, y el propósito específico de la aplicación de un modelo matemático dependen del contexto de la investigación. En tanto instrumentos epistémicos, los modelos se pueden emplear para

---

[64] David-rus (2012: 157) hace referencia al artículo de Morgan (2002) *Model experiments and models in experiments*.

[65] Véase sección 3.2.

[66] Véase sección 3.4.

aumentar el alcance de la teoría, permitiendo aplicar ésta a casos *más allá* de su alcance original (Morgan & Morrison 1999: 18-20). También, dentro del alcance de la teoría, el modelo se puede usar para estudiar las implicaciones que tendría ésta en un caso particular en concreto. Además, los modelos también sirven como objetos directos de estudio, cuando el fenómeno de interés no es accesible para investigación directa[67]. Estos son distintos ejemplos de las funciones que pueden cumplir los modelos matemáticos aplicados. Sin embargo, todos estos casos tienen en común el hecho de que la aplicación del modelo cumple el propósito de contribuir a la comprensión y estudio del fenómeno. Sea esto con el objetivo específico de expandir o de refinar la comprensión del agente, la función principal de los modelos es ayudar a un mejor entendimiento del sistema en estudio. Además, ulteriormente, dicho aporte heurístico del modelo también puede ayudar a la derivación de conocimiento acerca del fenómeno.

El entendimiento teórico es un logro epistémico (*epistemic achievement*) que refiere a un estado de contacto cognitivo (similar al conocimiento) del agente con un cuerpo comprensivo de información (Kvanvig 2003: 192). Este se caracteriza por la aprehensión de relaciones internas entre las piezas de información que constituyen el cuerpo informacional respecto de algún tema. Por consiguiente, el entendimiento teórico tiene como objeto estándar de aprehensión un cuerpo o red de información (*ibídem*: 195). Esta aprehensión le permite al agente organizar de modo sistemático las ideas y creencias que posea acerca de un tema, por lo que el logro epistémico de la comprensión se obtiene al ordenar estas *piezas* en

[67] Un ejemplo puede ser los modelos matemáticos empleado en astronomía, pues estos describen fenómeno macroscópicos imposibles de investigar directamente. Respecto de este punto, también es notable las funcionen que cumplen las simulaciones de los fenómenos (véase Morrison 2015).

un sistema informacional interrelacionado y consistente (*ibídem*: 202). De este modo, la comprensión conlleva un mayor sentido de completitud y organización epistémica en lo que respecta a la aprehensión de un tema. Lo que permite que el agente tenga un entendimiento general de un tema.

En lo que refiere al modelo, este es una representación de un sistema físico. Por lo tanto, logra instanciar mediante la configuración formal de su estructura los elementos (y relaciones) relevantes de la dinámica del fenómeno físico. El estudio de este modelo implica una comprensión general del comportamiento del fenómeno, y esto incluye a las interrelaciones de los elementos que constituyen el sistema. De modo tal que el uso del modelo matemático en la investigación científica da lugar a un aumento en el entendimiento del agente acerca del fenómeno.

Se pueden reconocer distintos modos en los cuales el modelo *ilustra* al agente epistémico (Morgan 1999: 353), proporcionándole una mejor comprensión del caso. Uno de estos modos de ilustración corresponde a un entendimiento aritmético: por medio de la estructura matemática del modelo se pueden estudiar y calcular las relaciones entre las variables, infiriendo qué derivaran los cambios en los valores de estas (*ibídem*: 355). Gracias a la manipulación del modelo resulta notorio este factor, pues su estructura formal señala los resultados posibles (y necesarios en algunos casos) al cambiar los parámetros sus variables. No obstante, este entendimiento también es aprehendido por medio de la construcción del modelo. En el proceso de construcción del modelo, se involucra un proceso de traslación de las descripciones teóricas del fenómeno a conceptos y relaciones matemáticas (*ibídem*: 356), por lo que es necesaria una reinterpretación del modelo. Al reinterpretase en estos términos, se debe decidir el molde[68] del modelo, lo que implica una primera comprensión del fenómeno en términos del entendimiento aritmético de este. La aplicación de la estructura matemática implica un método de razonamiento abstracto (*ibídem*: 361-362), que contribuye a una nueva comprensión del caso en estudio.

Un ejemplo histórico que señala la importancia del entendimiento y la comprensión que otorga el modelo matemático, es el caso del debate entre Schrödinger y Heisenberg[69]. La narración del caso comienza con la teoría de la estructura atómica de Bohr (1913 y 1918), y con ciertos cuestionamientos en torno a aspectos empíricos y conceptuales de su tesis (de Regt 2017: 3). En la década de 1920, a partir del estudio y refinamiento del modelo de la teoría de Bohr, se postularon dos interpretaciones respecto de la teoría cuántica del átomo: la mecánica de matrices de Heisenberg (1925) y la mecánica de ondas de Schrödinger (1926), que se presentaba como una alternativa de la primera (*ibídem*: 3). La tesis de Heisenberg buscaba describir las relaciones entre cantidades observable (medibles), como la frecuencia e intensidad del espectro de línea (*spectral lines*) emitido por el átomo. Su modelo matemático era altamente abstracto y, además, empleaba un tipo de molde matemático que resultaba poco familiar e intuitivo: la teoría de matrices (*ibídem*: 3-4). Por otro lado, la mecánica de ondas de Schrödinger presentaba un modelo más comprensible, cuyo molde matemático (la ecuación de onda) resultaba más simple y entendible (*ibídem*: 4). De este modo, Schrödinger defendió su tesis ante la de Heisenberg sosteniendo que la mecánica de onda proporcionaba una mejor comprensión de los fenómenos atómicos (*ibídem*; 4). La mecánica de ondas de Schrödinger era más fácil de aplicar a casos particulares de estudio, ya

[68] Véase 3.2.

[69] Para una exposición cabal del caso, véase de Regt 2017, capítulo 7.

que su modelo matemático resultaba más comprensible a la hora de *reconstruir* el fenómeno en dicha estructura.

Al final, los dos modelos (interpretativos de la teoría atómica de Bohr) terminaron en una síntesis aceptada por la comunidad científica (*ibídem*: 5). La importancia de este ejemplo es la caracterización de la relevancia que tiene el rol heurístico de un modelo matemático particular. El propósito de la aplicación de un modelo en la investigación científica es que este contribuya epistémicamente al estudio del fenómeno. Por lo tanto, la capacidad del modelo para entregar una mejor comprensión del fenómeno es fundamental. Un factor relevante del caso histórico era que la teoría atómica resultaba más comprensible en términos de la ecuación de ondas de Schrödinger. No obstante, Pauli apoyó la tesis de Heisenberg sosteniendo que, a pesar de lo inusual de la mecánica de matrices, el entendimiento de la tesis era relativo a la familiaridad del agente con respecto al sistema conceptual (*ibídem*: 5). Por consiguiente, una vez que el agente se familiarizase con el molde matemático de las matrices, el modelo de Heisenberg resultaría más comprensible.

A pesar de esto, en ambos casos resultaba relevante la contribución heurística del modelo, puesto que ésta facilitaba la comprensión del agente acerca del fenómeno. El apoyo de Pauli a la tesis de Heisenberg apuntaba se familiarizase con la mecánica de matrices, de modo que ésta resulte *fácil* de emplear y permita una comprensión más precisa del fenómeno. En último término, resulta relevante la contribución del modelo en la generación de un mejor entendimiento teórico de los aspectos de interés en el sistema en estudio.

3.2. Proceso de construcción del modelo matemático

Los modelos son un recurso epistémico que contribuye (normalmente de manera heurística) a la comprensión del fenómeno que representan. La contribución epistémica del modelo resulta notoria particularmente en los procesos de construcción del modelo y la manipulación de este (Morgan & Morrison 1999: 8). Mediante la construcción del modelo matemático se estipula una representación formal del fenómeno de interés, a partir de la interpretación de este que otorgue la teoría. Sin embargo, dicha interpretación y modelamiento no se encuentran determinados por la teoría (*ibídem*: 15). El modelo matemático es construido a partir de una serie de factores y decisiones que debe tomar el agente al momento de trasladar el fenómeno al lenguaje formal. No hay reglas pre-establecidas para la construcción del modelo, por lo que este proceso impele cierto entendimiento de parte del agente para poder adecuar el fenómeno a la forma del modelo. Por consiguiente, el proceso de construcción del modelo implica una comprensión acerca de la dinámica del fenómeno.

La construcción de un modelo matemático implica un proceso de conceptualización matemática de la evidencia empírica observable, en términos de la teoría de trasfondo que se esté empleando (Morgan & Morrison 1999: 31). De este modo, se integra la información empírica con su correspondiente descripción teórica en la forma de una estructura matemática. Este es un proceso de interpretación, conceptualización e integración que permite un aprendizaje acerca del fenómeno a partir de la teoría (*ibídem*: 31). Asimismo, en el proceso de construcción del modelo, el agente debe realizar una serie de decisiones y selecciones acerca de las características que tendrá el modelo y cómo este representará los aspectos de interés del fenómeno (Morgan 1999: 352). Estas decisiones de diseño son deliberadas, pues tienen presente ciertos propósitos investigativos como objetivos del modelo. Esto conlleva que en el proceso de integración del modelo se vean involucrados una serie de factores relativos al contexto de la investigación. Allí radica la necesidad de un entendimiento previo del agente acerca de la teoría y de la dinámica del fenómeno. Esta comprensión previa es relevante para que el agente pueda *reconstruir* y adecuar la dinámica del fenómeno en la forma del modelo.

El entendimiento cualitativo de la teoría provee una base para que se pueda reinterpretar el fenómeno en términos formales. En el proceso de construcción de un modelo matemático, se realiza un traslado de las descripciones del fenómeno a la estructura del modelo. Para ello, es necesario una comprensión inicial de la dinámica del fenómeno y la caracterización cualitativa de la teoría, para así poder construir un modelo matemático apropiado del sistema. Por ejemplo, para poder expresar la aceleración en términos de una derivada, se necesita una comprensión física de la aceleración para interpretarla en términos de una variación de la velocidad (Morrison 2015: 2). Además, también se necesita una comprensión de los tecnicismos y conceptos matemáticos, de modo que se pueda interpretar la derivada como una variación *de algo*. La conjunción de ambas comprensiones (matemática y empírica), permite que se lleve a cabo el proceso de integración de un modelo matemático, estipulándose así la formula diferencial de la aceleración.

Como se ha sostenido arriba, una investigación basada en modelos consiste en estudiar un fenómeno complejo por medio de un modelo de este. El modelo es caracterizado en términos de un sistema hipotético que representa un sistema empírico (Godfrey-Smith 2006: 726), y dicho sistema hipotético funciona como un objeto de estudio, intermediario epistémicamente con respecto al fenómeno de interés. Por ello, el primer paso en el esquema investigativo es la construcción y especificación de un modelo matemático para ser estudiado (*ibídem*: 730). El proceso de construcción del modelo matemático comienza, por tanto, con el establecimiento de un molde matemático (Boumans 1999: 90). Una vez que se ha obtenido la comprensión apropiada del fenómeno, corresponde establecer cuál es la estructura apropiada (acorde a los propósitos investigativos) para que el sistema hipotético (modelo) represente los aspectos de interés del sistema empírico. Es decir, la estipulación de un molde matemático apropiado.

El proceso de construcción de un modelo es un proceso de integración de distintos elementos tales como nociones teóricas, conceptos matemáticos, metáforas y datos empíricos (*ibídem*: 67), por mencionar algunos. El molde matemático es uno de los elementos matemáticos fundamentales que integra el modelo. El molde es la forma matemática en la que los elementos del sistema son estructurados (*ibídem*: 90) con el propósito de representar la dinámica del fenómeno en estudio. Establecido el molde matemático apropiado, corresponde *reconstruir* el fenómeno acorde con este, asimilando la estructura del sistema empírico en la estructura del modelo matemático. Luego, el modelo es calibrado para estipular así los parámetros de los valores de las variables en la estructura matemática (*ibídem*: 90), de modo que la interrelación entre los elementos integrados es la apropiada, acorde con el propósito investigativo y el trasfondo teórico.

La selección adecuada del molde matemático es relevante, ya que la estructura matemática del modelo estipula las relaciones del patrón de dependencias y sus ratios; por lo que dicha estructura debe ser una representación *idónea* del sistema físico. De no ser este el caso, el modelo no podrá funcionar como un mediador epistémico ni contribuirá su estudio a la comprensión del fenómeno, pues la representación matemática no dará *buena* cuenta del caso empírico bajo investigación científica.

Ante el esquema recién expuesto, cabe cuestionar lo siguiente: ¿qué determina que el modelo construido sea *adecuado* para representar[70] las características de interés del fenómeno en estudio? Para que el proceso de construcción del modelo se considere *exitoso*, este debe resultar en la obtención de un modelo matemático que cumpla con los requerimientos teóricos y propósitos previamente establecidos (*ibídem*: 94). Por ello, la construcción de un modelo matemático es un proceso contexto-dependiente. Por ejemplo, una tesis que sostenga un isomorfismo respecto de la representación matemática, considerará como *apropiada* la representación del modelo siempre y cuando la estructura matemática del modelo sea isomórfica con respecto a la estructura del sistema empírico. Además, la caracterización del isomorfismo será distinta en los casos de un isomorfismo cabal o uno parcial[71]. Por otro lado, otras tesis acerca de la representación científica (como la tesis de Suarez 2004[72]) establecerán otros criterios de objetividad en la relación representacional entre el modelo y el fenómeno. De este modo, las distintas concepciones acerca de la representación (o de la relación representacional entre el modelo matemático y el fenómeno) proponen distintos criterios para poder establecer que una determinada representación es la *adecuada* para con el fenómeno de interés[73] investigativo. Por consiguiente, los parámetros

---

[70] En los capítulos anteriores ahondé en cuestionamientos acerca de la relación representacional entre el modelo y el fenómeno (sección 1.5), y también acerca de la representación del patrón de dependencias contrafácticas de parte del modelo matemático (2.4); por lo que en este capítulo no tocaré estos temas.

[71] Véase 1.2.

[72] Véase 1.4.

[73] Cabe mencionar que no solo los requerimientos para establecer una relación representacional *adecuada* son contexto-dependientes; sino que también son contexto-dependientes los aspectos del fenómeno que se buscan representar (acorde al interés investigativo) y cómo son concebidos dichos aspectos (acorde con el paradigma científico de trasfondo). Respecto del primer caso, véase el

y criterios para considerar a un modelo matemático como *apropiado* son contexto-dependientes.

La construcción del modelo matemático se da a través de un proceso de selección e integración de un conjunto de elementos que se consideran relevantes ante un propósito investigativo particular (Morgan & Morrison 1999[74]: 13). Ahí radica parte de la contexto-dependencia del proceso, pues los elementos y el modo en el cuál se integran dependen del contexto particular de la investigación científica que se lleva a cabo. La teoría no determina *necesariamente*[75] cómo será integrado el modelo (de Regt 2017: 34), por lo que hay una serie de factores *más allá* de la teoría que influyen en la construcción del modelo matemático. El proceso es dependiente del contexto ya que hay una incidencia considerable de factores pragmáticos. Es decir, las decisiones tomadas por el agente epistémico en el proceso de construcción del modelo (como la selección de los elementos relevantes del fenómeno, o el molde apropiado para la estructura matemática) dependen de factores relativos al marco de investigación científica (*ibídem*: 34). Por ello, el proceso de construcción es un proceso de

ejemplo de Königsberg: Euler considera al problema como uno estructural que se puede resolver por medio de la *geometría situs* (topología), por lo que lo relevante de representar en este caso son los puntos del espacio (lugares) y sus conexiones (puentes). Respecto del segundo caso, vuélvase al ejemplo recién señalado acerca de la aceleración: para representar a la aceleración como una derivada, es menester interpretar este fenómeno físico como una variación de la velocidad. En ambos casos, el contexto determina el *qué* y *cómo* de la representación matemática.

[74] Las autoras hacen referencia a Boumans (1999).

[75] Si bien los modelos matemáticos son estructuras matemáticas derivadas formalmente (dado su carácter matemático), estos (en tanto representaciones de fenómenos físicos) no están necesariamente determinados. Pues el *qué* y *cómo* de la representación, al igual que la concepción de ésta, son relativos al marco de la investigación científica.

integración, pues el modelo es el resultado de la integración de una serie de elementos distintos.

Los factores pragmáticos que inciden en la construcción del modelo ya han sido mencionados. Por ejemplo: en el agente influyen su comprensión de la teoría de trasfondo que esté empleando, al igual que la comprensión de la comunidad científica en dicho momento histórico (Boumans 1999: 93); el propósito de la investigación que se plantee desarrollar; los datos empíricos que logre recolectar (junto a la interpretación teórica de estos); los conceptos y técnicas matemáticas con las que cuente; las analogías y metáforas que el agente considere ilustrativas (para el propósito planteado); y perspectivas sociales y políticas que incidan en el estudio científico (como la administración de los recursos económicos). Estos son algunos de los factores que influencian a la construcción del modelo. Cabe notar que son elementos que *van más allá* de la teoría y el fenómeno, por lo que el modelo no se constituye solo de elementos de estos dos componentes.

Un caso histórico que considero apropiado exponer es el modelo del éter de Maxwell, ya que es un ejemplo que permite para señalar cómo el agente obtiene un entendimiento del fenómeno por medio del proceso de construcción de un modelo. Además, también permite señalar la importancia de las metáforas en la comprensión del fenómeno y en la construcción de una representación matemática de este[76].

Una idea prominente durante el siglo XIX fue que el entendimiento científico (la comprensión de un fenómeno) podía concretarse por medio del diseño de modelos mecánicos

[76] Este punto tiene incidencia con lo expuesto en la sección 3.4. acerca de las idealizaciones y abstracciones presentes en el modelo matemático.

(de Regt[77] 2017: 184). Dentro de este contexto, Maxwell propone su modelo mecánico del éter. Previo al trabajo de Maxwell, en 1845, Faraday introduce el concepto de campo eléctrico como una tesis alternativa a la idea de acción a distancia, presente en otras teorías de la electricidad (*ibídem*: 184). Siguiendo la idea de Faraday, Maxwell sostuvo que los fenómenos electromagnéticos tienen lugar en el espacio entre los elementos (y no en los elementos *per se*), por lo que se empleó la idea de un éter como medio en el que se propagaba el campo eléctrico (Morrison 2015:99). A partir de esta idea, Maxwell formuló una interpretación mecánica del éter con el propósito de dar cuenta de la dinámica de los fenómenos electromagnéticos (de Regt 2017: 186). No era necesario un compromiso ontológico con la idea del éter mediador (Morrison 2015: 85), ya que ésta idea servía como una metáfora que permitía comprender cualitativamente la mecánica de trasfondo a los fenómenos electromagnéticos. La metáfora tiene un rol heurístico, y ayuda al agente a interpretar y modelar los fenómenos complejos de modos más intuitivos[78]. De este modo, Maxwell[79] emplea una analogía matemática respecto de la teoría del flujo del calor como molde matemático para formular su modelo (*ibídem:* 99). Se establece una analogía entre la idea de líneas de fuerza de Faraday con el flujo de corriente en el fluido del éter. Y así se establece una interpretación de la dinámica electromagnética en términos de mecánica hidrodinámica. Esto conlleva a la construcción de un modelo mecánico del éter que representa el comportamiento de los fenómenos electromagnéticos.

---

[77] De Regt hace referencia a Lord Kelvin.

[78] En la sección 3.5 ahondo en los casos de los modelos idealizados, como el modelo del éter de Maxwell que aquí se presenta.

[79] De Regt (2017: 194) hace referencia a los siguientes trabajos de Maxwell: *On Faraday's lines of force* (1856); y *On physical lines of force* (1862).

Sobre la base de este modelo matemático, Maxwell pudo derivar una serie de conclusiones respecto de las dinámicas y la naturaleza de los fenómenos electromagnéticos (De Regt 2017: 195). El modelo contribuyó al desarrollo de ideas matemáticas y físicas que fueron cruciales para obtener una mejor comprensión conceptual de la teoría electromagnética (Morrison 2015: 98-99), lo que implicó una contribución epistémica de parte del modelo. De este modo, se estipula la contribución al entendimiento del fenómeno empírico por medio del proceso de integración de un modelo matemático acerca del sistema físico bajo investigación científica.

3.3. Análisis contrafáctico en la manipulación del modelo matemático

El tema central del capítulo dos fue la contribución de los modelos matemáticos a la explicación científica de fenómenos empíricos. Para ello, se empleó el marco de la teoría contrafáctica de la explicación, que postula que la explicación opera haciendo referencia a un patrón de dependencias contrafácticas entre el *explanans* y *explanandum* (Reutlinger 2018: 74). Ahora bien, por medio del análisis contrafáctico del modelo se pueden inferir enunciados contrafácticos respecto del *explanandum*, los cuales son empleados como elementos constituyentes del *explanans* para formular una explicación. El análisis contrafáctico del modelo permite una comprensión del *explanandum*, dada la relación entre la explicación de un fenómeno y el entendimiento científico de este. El objetivo de esta sección es argumentar a favor de la contribución epistémica de la manipulación del modelo matemático. Este punto se expone mediante la relación entre el análisis contrafáctico presente en la explicación empírica y la obtención de una mejor comprensión del fenómeno explicado.

De este modo, se explica cómo la manipulación del modelo deriva en el entendimiento del fenómeno.

El entendimiento y la explicación se encuentran relacionados en un sentido intuitivo, pues si un agente es capaz de formular una explicación respecto de un fenómeno, esto significa que el agente posee cierto entendimiento acerca del aspecto del fenómeno que es explicado (Morrison 2015: 19). En la literatura, es tradicional relacionar el entendimiento de un fenómeno con la formulación de una explicación de este (de Regt 2017[80]: ix-x). De este modo, el entendimiento explicativo de un fenómeno es un entendimiento que se puede categorizar como *understanding-why* (*entendimiento por qué*) (Khalifa 2017: 2). Esto también va enlazado con una concepción causal de la explicación, ya que un entendimiento explicativo es una comprensión de las causas que dan cuenta del fenómeno. Así, el agente *entiende por qué* ocurre un fenómeno de tal modo, pues conoce las causas de esta situación y, por tanto, puede estipular una explicación causal de dicha situación. Entender *por qué* X es el caso es caracterizado en términos de la explicación acerca del estado actual de dicho caso (Kvanvig 2003: 189-190). Ahora bien, empleando una caracterización más amplia de la explicación, el *entendimiento por qué* respecta a la comprensión de cómo se relacionan internamente los elementos del *explanans* y cómo esto deriva en el *explanandum*.

La explicación del fenómeno provee un entendimiento respecto de este, ya que permite conectar el fenómeno *explanandum* con la teoría de trasfondo que describe el fenómeno y estipula su *explanans* correspondiente (de Regt 2017: 45-46). Al establecerse la relación entre *explanans* y *explanandum*, se implica cierta comprensión mínima de la teoría

[80] De Regt hace referencia a los trabajos de Salmon (1984 y 1998).

y del fenómeno. El agente comprende (al menos) lo suficiente estos ámbitos (teoría y fenómeno) como para poder establecer la relación entre el conjunto del *explanans* y el *explanandum* (también es necesario el entendimiento de las relaciones internas del conjunto *explanans*). Por ejemplo, la explicación acerca de la dirección de una corriente eléctrica inducida en un circuito se formula refiriendo a la ley de Lenz y a la dirección del campo magnético[81]. En este caso, el *explanandum* es la dirección particular de la corriente eléctrica, mientras el *explanans* se compone de la ley de Lenz y la dirección del campo magnético (que realiza la inducción de la fuerza electromotriz). Para que el agente pueda derivar el *explanandum* del *explanans* (es decir, formular la explicación) necesita tener cierta comprensión mínima del trasfondo teórico del fenómeno de inducción electromagnética.

La relación entre entendimiento y explicación es relevante en el proceso de formulación de una explicación. Formular una explicación es establecer una relación *explanans* – *explanandum*, por lo que poseer epistémicamente los enunciados del conjunto del *explanans* no es suficiente para estipular la explicación (*ibídem*: 25). No basta con *tener* el conjunto del *explanans*, sino que es necesario comprender dicho conjunto para poder derivar el *explanandum*. Derivar el *explanandum* del *explanans* requiere que el agente sea competente e informado (como en la derivación de una inferencia[82]).

La manipulación del modelo matemático provee de una contribución epistémica al proceso de formulación de una explicación[83]. Acorde con la CTE que sostengo, el

[81] Véase la sección 2.4. para una exposición más detallada de este ejemplo.

[82] Véase 1.4.

[83] En las secciones 2.3 y 2.4 se expone a cabalidad la contribución explicativa de los modelos matemáticos aplicados. Este punto no será desarrollado en esta sección, sino solo repasado.

explanandum se deriva del *explanans* a partir del análisis contrafáctico, pues, por este medio, se expone cómo hubiera sido diferente el estado actual del *explanandum* si los parámetros del *explanans* hubieran sido distintos. El análisis contrafáctico se puede realizar al estudiar y manipular el modelo, gracias a la capacidad representativa de este respecto del fenómeno. El modelo matemático exhibe el patrón de dependencias contrafácticas del sistema empírico, por lo que su manipulación permite derivar escenarios contrafácticos respecto del fenómeno. De este modo, se relaciona la manipulación del modelo con la formulación de una explicación contrafáctica del fenómeno.

Gracias a la capacidad representativa del modelo matemático, se puede entender cómo determinadas variaciones en la situación empírica afectarán a la dinámica del fenómeno (Morgan & Morrison 1999: 12). Por consiguiente, se adquiere un determinado entendimiento científico de las dinámicas posibles del fenómeno y de su estructura interna, lo que permite explicar aspectos particulares del fenómeno. El entendimiento de la explicación aumenta a medida que el agente consigue una mejor aprehensión de los factores explicativos (Khalifa 2017: 6). A su vez, la explicación otorga una mejor comprensión del fenómeno, puesto que permite una mayor comprensión de las causas y mecanismos subyacentes (desde un enfoque causal de la explicación) del fenómeno que se busca explicar (*ibídem*[84]: 16). De modo bidireccional, el agente obtiene un mejor entendimiento explicativo del caso.

Cuando se manipula un modelo matemático (o se realizan cálculos por medio de este), el agente aprende acerca del fenómeno en los términos que emplea la teoría para describir el

[84] Khalifa (2017: 16) hace referencia a Salmon.

caso empírico (Morgan & Morrison 1999: 33). El modelo es construido empleando una determinada interpretación de la teoría, por lo que la manipulación de este modelo matemático nos otorga cierta comprensión modal de las posibles dinámicas del fenómeno (dentro del marco de la interpretación teórica en cuestión). Los escenarios contrafácticos del fenómeno que se derivan del modelo son considerados como válidos, ya que estos son los escenarios posibles que admite la teoría. De este modo, el análisis contrafáctico del modelo permite entender los comportamientos posibles de la dinámica del fenómeno. Esto conlleva que se puedan explicar los aspectos actuales de una situación empírica en términos contrafácticos, lo que a su vez genera una comprensión más cabal de las dinámicas del fenómeno. Por consiguiente, la manipulación exitosa[85] del modelo matemático implica una contribución epistémica, gracias a la conjunción de la contribución explicativa del modelo matemático con la relación entre el entendimiento y la explicación.

3.4. El problema de las idealizaciones y abstracciones presentes en el modelo

Ahora corresponde revisar un problema recurrente y latente en la literatura de filosofía de las ciencias: el problema de las idealizaciones. Lo modelos matemáticos son representaciones de un sistema empírico, dicha representación se establece en términos de estructuras matemáticas que son formales y abstractas (Morrison 2005: 145). El modelamiento matemático en ciencias involucra un proceso de abstracción matemática, además de la

[85] En efecto, puede haber casos de manipulaciones erradas del modelo, donde el proceso de derivación formal o los valores de las variables fueron incorrectos. No obstante, en mi trabajo solo tengo en consideración las manipulaciones exitosas del modelo matemático.

incorporación de suposiciones cualitativas que no están presentes en el sistema físico (*ibídem*: 146). Un ejemplo de esto son las idealizaciones como los planos sin fricción en mecánica clásica. Por consiguiente, los modelos matemáticos contienen distintos tipos de abstracciones e idealizaciones, incluyendo omisiones, simplificaciones, y derechamente ficciones (Bokulich 2017: 14). El problema es el siguiente: no hay ningún elemento o estructura que se corresponda con dichas idealizaciones[86] (Batterman 2010: 11-12). De este modo, el problema de las idealizaciones refiere a dar cuenta de la presencia de estas en los modelos matemáticos. A su vez, compete analizar cuál es el rol de estas en el estudio por medio del modelo aplicado.

Cabe mencionar que el objetivo de la presente sección no es resolver este problema ni dar una solución al debate. La literatura respecto de las idealizaciones es bastante extensa[87] y exceden a este trabajo. Por lo tanto, el objetivo de esta sección es posicionar mi trabajo frente a este problema. Es decir, presentar cuál es la postura de mi tesis ante el problema de las idealizaciones. A lo largo de este trabajo he defendido el rol epistémico de los modelos matemáticos aplicados, por lo que corresponde que dé algún punto de vista respecto del papel que juegan las idealizaciones matemáticas en el estudio por medio del modelo. Concluyo esta sección secundando el rol heurístico que cumplen las idealizaciones en proceso de entendimiento científico.

---

[86] Con el objetivo de ser más conciso, me referiré como *idealizaciones* a los distintos tipos de falsedades que involucran algunos modelos, esto incluye idealizaciones, abstracciones, omisiones, simplificaciones y ficciones.

[87] Véase (e.g.) Potochnik (2017), o Jones & Cartwright (2005).

Una respuesta clásica de posturas realistas[88] acerca del problema de las idealizaciones radica en señalar que la distancia entre el modelo y el fenómeno (producto de la naturaleza abstracta del modelo) puede acortarse gradualmente mediante un proceso de de-idealización (Morrison 2005: 146). El proceso de de-idealización es agregar *de vuelta* los elementos, parámetros y características del fenómeno en el modelo (*ibídem*: 157). Es decir, incorporar los elementos del fenómeno que originalmente fueron omitidos en el modelo idealizado. Esto con el propósito de representar de modo más concreto y preciso el fenómeno. Por medio de este proceso gradual, el modelo se va volviendo más concreto, dejando así de ser abstracto (en comparación a su estado inicial). Por ejemplo, en los planos sin fricción, se incorpora el factor de la fricción en el modelo. De este modo, el modelo se de-idealiza y se vuelve una representación *correcta* del fenómeno.

Sin embargo, un problema de esta propuesta es que hay casos donde no se puede de-idealizar el modelo (Bokulich 2017:15). Hay idealizaciones (como los planos sin fricción) que pueden ser de-idealizadas con una caracterización cabal y detallada del tema; no obstante, hay otras idealizaciones que no pueden ser de-idealizadas (Batterman 2010: 27), como ciertos modelos matemático que emplean límites con tendencia al infinito. En estos casos, las idealizaciones no tienen un correlato exacto que pueda reemplazarlas por medio de una caracterización más concreta y detallada del fenómeno. Por consiguiente, un primer problema refiere a las idealizaciones que no puede ser de-idealizadas.

Además, esta solución también requiere que se deba distinguir con claridad y precisión los elementos del modelo que son meras idealizaciones (junto con el grado de

[88] Morrison (2005: 146) hace referencia al trabajo de McMullin (1985).

idealización de ésta) de los elementos que representan aspectos reales del fenómeno. En la sección 1.2, expuse tres tipos de relaciones parciales en lo que respecta a la estructura parcial que es representada por el modelo acerca del sistema físico (Bueno, French & Ladyman 2002: 499): estas son las relaciones R_1, R_2 y R_3. La relaciones del tipo R_1 refieren a los elementos del modelo que sabemos que están presentes en el fenómeno físico. Las R_2 refieren a los elementos del modelo que sabemos que no están presentes en el fenómeno físico. Y las R_3 refieren a los elementos inciertos del modelo, los cuales se desconoce si están presentes o no en el fenómeno. El problema de la propuesta de de-idealización es que requiere que las idealizaciones sean del tipo R_2. Estos elementos R_2 se reconocen como idealizaciones y también se conoce el grado de distanciamiento de estos elementos con la realidad del fenómeno. Por lo tanto, se puede estipular un modelo más complejo y detallado que reemplace los elementos R_2 por elementos R_1[89]. No obstante, las relaciones R_3dificultan esta estrategia. No se sabe si los elementos R_3 son mera idealizaciones heurísticas o si representan algún aspecto de la realidad del que aún no nos damos cuenta. Los elementos R_3caen en una especie de *valle inquietante*[90] respecto de su relación con la realidad. Por consiguiente, no

[89] Los elementos R_2 sería de-idealizados para volverse elementos R_1. O bien, en los casos no de-idealizables, el modelo sería reestructurado de modo que los elementos R_2 sean de cuajo eliminados y cambiados por otros elementos R_1.

[90] En robótica y animación, *valle inquietante* (*uncanny valley* en inglés) refiere al fenómeno que ocurre cuando una réplica antropomórfica se aproxima en exceso a la apariencia y comportamiento humano (sin llegar a ser una copia exacta), lo que genera un sentimiento de rechazo y confusión en el observador humano. De modo más coloquial, uso esta expresión para referirme a un X^0 que se aproxima demasiado a un estado X^1 sin llegar a X^1. Pero, no se puede separar categóricamente X^0 de X^1, por lo que queda en un estado ambiguo. En este sentido uso la metáfora del valle inquietante para referirme a las relaciones R_3que no se saben ni falsas ni verdaderas en tanto representación del fenómeno físico.

pueden ser simplemente reemplazados por elementos R_1, pues se desconoce qué pueden implicar estos elementos. De este modo, la estrategia de de-idealización encuentra dificultades al abordar casos de idealizaciones no eliminables y casos de elementos del modelo no distinguidos como idealizaciones o no.

Otra dificultad que implican posturas similares (que dan una connotación negativa a las idealizaciones, y las supone como eliminables en casos ideales), es que estas pasan por alto el rol heurístico que tienen las idealizaciones en la comprensión del fenómeno. Muchas veces estas idealizaciones tienen una utilidad práctica (facilitando cálculos) y heurística (facilitando el entendimiento teórico del sistema empírico). No solo los componentes reales R_1del modelo cumplen un rol epistémico, sino que, en algunos casos, las idealizaciones también pueden capturar una dinámica de dependencias reales del fenómeno a través de los elementos idealizados en la representación (Bokulich 2017: 16). El agente puede comprender el fenómeno, aprehendiendo su dinámica (y las relaciones internas de su sistema), por medio de analogías idealizadas respecto del fenómeno. El modelo puede representar un comportamiento particular del fenómeno mediante analogías que son simplificaciones del fenómeno, que resultan más fáciles de comprender y visualizar. Un ejemplo, es el modelo de las bolas de billar para caracterizar el comportamiento de las moléculas de gas acorde con la ley de los gases ideales (Morrison 2005: 146). Este modelo no busca establecer la analogía como verdadera, sino emplearla de modo heurístico para facilitar la comprensión general del fenómeno.

El modelo del éter de Maxwell también es un ejemplo de este rol de las idealizaciones. Metodológicamente, Maxwell se apoyó en una serie de ficciones para elaborar su teoría, incluyendo el modelo del éter a modo de analogía mecánica para ilustrar la dinámica de los campos electromagnéticos (*ibídem*: 159-160). A pesar de ser ficciones, estas analogías jugaron un rol en el desarrollo de ideas matemáticas y fueron cruciales para el entendimiento de los campos electromagnéticos (*ibídem*: 160). Un aporte significativo de estas analogías radica en su capacidad de brindar una visualización mecánica del fenómeno. De este modo, las idealizaciones del modelo no representan aspectos reales del fenómeno, sino que denotan las consecuencias mecánicas que se derivan del comportamiento del fenómeno, lo que otorga una comprensión general de este.

Un último punto del debate que corresponde abordar refiere a la distinción entre la utilidad heurística de una idealización y el compromiso ontológico con ésta. En el caso del modelo de Maxwell, la analogía permite entender el comportamiento del fenómeno por medio de una visualización mecánica de este. No obstante, dichas idealizaciones tenían un propósito heurístico y no buscaban representar la realidad del sistema (*ibídem*: 151). Se distingue la utilidad de las idealizaciones para la comprensión del fenómeno con respecto a su supuesta implicación real. En el caso de los elementos R_2, esta distinción es clara ya que se sabe que son idealizaciones (y el grado de idealización que tienen). Pero, los elementos R_3 son problemáticos dada su ambigüedad. Sin embargo, estos pueden seguir cumpliendo un rol heurístico en la comprensión del fenómeno, a su vez que no resulta necesario un compromiso ontológico con estos. Dada su ambigüedad, se abstiene el juicio respecto de su implicancia metafísica, manteniéndose así una actitud agnóstica acerca de los elementos R_3.

A lo largo de este capítulo he sostenido que el modelo ayuda al agente a comprender el fenómeno que representa. El modelo es ilustrativo para el agente en tanto le permite generar un mejor entendimiento del sistema físico, esto en la medida en que aumenta el rango del entendimiento o bien precisión de este. Las idealizaciones presentes en el modelo no imposibilitan la obtención de entendimiento por medio de este. Es más, el agente puede emplear las idealizaciones para integrar de mejor modo el cuerpo de información que se busca aprehender para entender el sistema (Kvanvig 2003: 202). En tanto el agente es consciente de los elementos idealizados R_2, puede omitir el compromiso ontológico con este y emplearlos solo de modo heurístico para la comprensión del sistema. En el caso de los elementos R_3, se debe abstener el juicio hasta que se tenga una interpretación física apropiada y relevante acorde al contexto de la investigación científica. En ambos casos, estos modelos idealizados juegan un rol en el desarrollo del estudio científico, pues facilitan la representación visual y comprensión teórica del fenómeno (Morrison 2005: 167). Por lo tanto, no se puede descartar la utilidad práctica y teórica (en la comprensión) de los elementos idealizados en el modelo. De igual modo, no considero que las idealizaciones sean un elemento negativo en los modelos y que se deban eliminar por medio de modelos más detallados y complejos. Sino, por el contrario, considero que hay idealizaciones en ciencias que tienen una contribución *per se* al momento de ayudar al agente en la comprensión del fenómeno en estudio.

3.5. Entendimiento y conocimiento respecto del modelo

Para finalizar, considero apropiado ahondar en la relación entre el entendimiento y el conocimiento, a su vez que se aplica dicha relación a los casos de modelos aplicados. De modo intuitivo, el entendimiento se encuentra estrechamente ligado con el conocimiento.

Ambos son logros epistémicos[91] alcanzados por el agente epistémico, por lo que naturalmente se suelen relacionar ambos conceptos. Se suele asumir que el entendimiento teórico es un tipo particular de conocimiento (Kvanvig 2003: 188). No obstante, a pesar de que el entendimiento también es un logro epistémico como el conocimiento (*ibídem*: xvi), es un logro epistémico distinto de este. Ambos logros epistémicos no se encuentran separados ni son independientes uno del otro, pero tampoco son sinónimos ni se subsume uno en la categoría del otro. Por ello, considero relevante distinguir ambos conceptos, a su vez que se caracteriza la estrecha relación entre ambos. Esto con el propósito de aplicar este esquema al caso de los modelos matemáticos aplicados. De este modo, se busca explicar cómo se da el entendimiento por medio del modelo, y cómo, a partir de este, se puede derivar conocimiento respecto del fenómeno.

Una primera distinción digna de mencionar radica en la conexión del entendimiento con la verdad de una premisa (en contraposición con la relación del conocimiento con ésta). En efecto, hay casos donde el entendimiento requiere la veracidad de aquello que se entiende (*ibídem*: 190). Si un agente S afirma entender que P (donde P es una proposición cualquiera respecto de un fenómeno), P debe ser verdadera. Sin embargo, hay otros usos no facticos del entendimiento donde no se implica la veracidad de las premisas (*ibídem*: 190). Por ejemplo, puedo ocupar la analogía de las bolas de billar para entender, de modo aproximado, la dinámica de las partículas en un tanque de gas. El entendimiento de esta analogía, no requiere

[91] El término original en inglés es *achievement*. Además, Kvanvig (2003) se refiere indiscriminadamente a estos conceptos (conocimiento y entendimiento) como *epistemic achievement, cognitive achievement* y *theoretical achievement*, sin distinguir entre estos adjetivos acuñados a *achievement*. Por lo tanto, me referiré a este término solo como *logro epistémico*, con el objetivo de ser más conciso.

la veracidad de la analogía[92]. Dentro de este marco, cabe el uso heurístico que cumplen algunas idealizaciones y abstracciones en ciencias físicas[93]. No obstante, este no es el caso con el conocimiento, puesto que este requiere la veracidad de lo conocido. Si un agente S conoce que P, P necesariamente debe ser verdad. Por lo tanto, dentro del marco estándar de la epistemología, la conexión del conocimiento con la veracidad es necesaria; mientras que dicha necesidad modal no aplica a la conexión del entendimiento con la veracidad.

Otro aspecto distintivo refiere a que el entendimiento puede tener grados. El entendimiento se caracteriza por la aprehensión de las relaciones entre las *piezas* de información que constituyen un cuerpo sistemático de información (*ibídem*: 192). El agente puede conocer varias de estas *piezas* de información, pero el entendimiento requiere una comprensión conjunta de los distintos elementos interrelacionados que componen el cuerpo de información respecto de un tema. Es decir, el entendimiento es la aprehensión del cuerpo sistemático de información (red de información). Se pueden conocer distintas inferencias y enunciados respecto de un fenómeno, pero el entendimiento implica la comprensión de las relaciones internas de estas *piezas* de información. Por ejemplo, es distinto conocer ciertas propiedades de un fenómeno, a comprender el comportamiento teórico de dicho fenómeno. Puedo conocer una serie de premisas P^n respecto de un elemento F (como su color, peso, dimensiones, magnitudes, *etc*), pero aquello no implica que entienda dicho F. Siendo más tajante con la distinción, el conocimiento respecta a proposiciones acerca de F, mientras el entendimiento refiere a un conjunto interrelacionado de información acerca de F, y no acerca de un número N de proposiciones singulares (*ibídem*: 192). De este modo, se puede

[92] Ocurre lo mismo en el entendimiento de fábulas o metáforas.

[93] Véase 3.4.

caracterizar al conocimiento como la posesión cognitiva de información concreta y al entendimiento como la comprensión general de un cuerpo de información.

Teniendo presente esta caracterización del entendimiento, se pueden atribuir graduaciones al entendimiento de un tema, afirmando que puede haber una comprensión mejor o peor con respecto a un tópico (*ibídem*: 196). Es característico del entendimiento el que este admita grados, lo que conlleva a que un agente S^1 pueda entender un tema X de mejor modo (o a mayor cabalidad) que otro agente S^2 (Khalifa 2017: 3). Dos comprensiones respecto de un mismo cuerpo de información pueden diferir en términos de la cantidad de información abarcada o en la minuciosidad o precisión de las piezas de información. Es decir, puede haber una diferencia cualitativa o cuantitativa en lo que refiere a la comprensión de un cuerpo de información. Por ello, se pueden atribuir grados al entendimiento de un tema.

En efecto, también se pueden atribuir grados al conocimiento, afirmando que una agente sabe más o menos respecto de un tema. Sin embargo, en su formulación más simple, el conocimiento que P (siendo P una proposición cualquiera) es discreto en tanto que no hay parcialidad respecto de si un agente S sabe que P o no. Esto se debe a que el conocimiento refiere a información concreta y el entendimiento a una comprensión más general. Cuando se afirma un mayor conocimiento de un tema, también juega un rol sustancial el entendimiento de dicho tema, esto gracias a la estrecha relación cognitiva entre el entendimiento y el conocimiento.

Antes de ahondar más en la relación entre conocimiento y entendimiento, compete revisar una caracterización estándar del concepto de conocimiento. Tradicionalmente, cuestionamientos sobre el conocimiento refieren acerca de la relación de nuestras mentes (estados cognitivos) con el mundo, y la posibilidad de distinguir creencias verdaderas de las falsas (Kvanvig 2003: ix). El conocimiento se establece como el contacto cognitivo con la realidad por medio del actuar epistémico del agente (Zagzebski 1996: xv). La definición más clásica del conocimiento lo estipula como una creencia verdadera justifica (*ibídem*: 267), sin embargo, esta definición ya no es apropiada debido al problema de Gettier. En efecto, aún se puede considerar a la creencia verdadera y su justificación como elementos necesarios para sostener que se tiene un conocimiento de algo; no obstante, estos elementos no son suficientes (dado el problema de Gettier). Es decir, que la creencia que P sea verdadera y esté justificada no es suficiente para considerarse conocimiento, sino que se requiere alguna condición anti-Gettier adicional. Por consiguiente, los elementos requeridos para que haya conocimientos son: creencia, veracidad, justificación[94] y alguna condición anti-Gettier adicional (Bonjour 2010: 33); esta última depende del marco epistemológico que haya de trasfondo[95]. De este modo, se estipula una caracterización general de la noción (*post* Gettier) de conocimiento[96].

[94] Algunas tesis postulan la necesidad de una garantía epistémica en lugar de la justificación, que viene siendo cualquier elemento adicional a la creencia verdadera que permite que a ésta se le considera como conocimiento (Bonjour 2010: 33). El autor hace referencia a Plantinga 1993 respecto del concepto de garantía.

[95] Por ejemplo, una postura fiabilista (*reliabilism* en inglés) establece la necesidad de un proceso confiable en la formación de la creencia para considerar a ésta conocimiento (véase Goldman 1979 o 1986, *e.g.*). Mientras, otras posturas pueden establecer la necesidad de virtudes intelectuales de parte del agente, las cuales permiten que este pueda derivar una creencia verdadera que se considera como conocimiento (véase Zagzebski 1996, *e.g.*).

[96] Si se quisiera establecer una caracterización más precisa y concreta, sería necesario adherirse a un marco epistemológico en particular. Pues, las distintas posturas en la literatura establecen distintas condiciones anti-Gettier, a su vez que distintas apreciaciones respecto de la justificación y el valor del conocimiento (entre otros debates epistemológicos).

El entendimiento y el conocimiento son logros epistémicos que respectan a la relación cognitiva del agente con el mundo (o un tema particular). Ambos logros se encuentran estrechamente ligados, pero no son ni equivalentes ni sinónimos (Kvanvig 2003: 191-192). El entendimiento es la comprensión de un cuerpo de información, por lo que conocer correctamente una proposición verdadera respecto de un fenómeno, no implica un entendimiento de este (*ibídem*: 198). Es decir, que un agente conozca *que P* (siendo P una proposición en un tema T), no implica que dicho agente entienda T.

Téngase en consideración el siguiente ejemplo de historia: un agente A conoce correctamente que la primera guerra mundial comenzó en 1914 con el asesinato del archiduque de Austria-Hungría (proposición P). Que A conozca que P no implica que A entienda la complejidad de las relaciones internacionales en aquel entonces, que conllevaron el inicio de la guerra. A conoce una de las causas de la primera guerra mundial, pero no entiende la situación en Europa previa al comienzo de la guerra. Ahora bien, en efecto, se puede estipular un caso donde se afirme que A conoce correctamente *las causas* de la primera guerra mundial, o bien, conoce correctamente la situación previa que conllevó a la primera guerra. En este nuevo caso, dicho conocimiento de A sí implicaría un entendimiento del evento (a diferencia del primer caso). Es más, dicho entendimiento resulta necesario para que el conocimiento de A sea completo y cabal. En el primer caso, el conocimiento que P no implica un entendimiento del tema; pero, en el segundo caso, el conocimiento completo de la situación previa a la primera guerra mundial sí implica un entendimiento del tema[97]. Este

[97] Por *conocimiento completo* no me refiero a una posesión cognitiva del agente del conjunto G de premisas (P^{1}, P^{2}, P^{3}… P^{N}) que constituye al conjunto de las causas de la primera guerra; sino un conocimiento acabado donde se conocen las premisas, las interrelaciones de estas y su contexto.

ejemplo no busca separar el entendimiento del conocimiento, sino denotar la estrecha relación entre ambos logros epistémicos. Para tener un conocimiento acabado de un tema, es necesario el entendimiento de este; y, para tener un entendimiento preciso de un tema, es necesario conocer cierta información relevante de este[98]. Ambos logros epistémicos son distintos, pero no independientes, puesto que ambos logros se requieren mutuamente. De este modo, la relación entre ambos es una especia de codependencia simbiótica en los niveles más *altos* de aprendizaje y estudio de un tema.

En lo que respecta al modelo matemático aplicado, el agente puede comprender ciertas dinámicas de un fenómeno por medio del estudio del modelo gracias a la capacidad representativa de este (3.1). El modelo matemático representa en términos formales la dinámica del fenómeno, ya que el modelo exhibe la estructura de dependencias del sistema empírico en lenguaje matemático (Bokulich 2017: 107). El modelo representa el patrón de dependencias contrafácticas que subyace a las interacciones de los elementos presentes en el sistema (2.4). Gracias al formalismo matemático del modelo, se puede dar cuenta de la ratio de las relaciones de dependencias en cuestión. La capacidad representativa del modelo permite que el agente comprenda la dinámica del fenómeno, al igual que la configuración de las relaciones de dependencia del fenómeno. Los modelos mecánicos, que presentan una analogía del fenómeno (como el modelo del éter de Maxwell), permiten visualizar en términos generales el comportamiento del fenómeno, lo que conlleva un entendimiento de

[98] Esta conclusión está sometida a debate y otras posturas epistemológicas pueden tener otras observaciones al respecto, por lo que esta idea es la conclusión que yo derivo de la relación entre conocimiento y entendimiento.

este. Además, el lenguaje matemático permite aprender con precisión la razón matemática de las magnitudes en juego.

De este modo, el estudio del modelo permite un entendimiento del fenómeno que representa. Esta relación del modelo con el entendimiento se desarrolló en 3.1, pero ahora compete exponer cuál es la relación del modelo con el conocimiento, acorde con el esquema descrito en esta sección. El modelo, al ser manipulado e interpretado en términos físicos, permite la derivación de inferencias acerca del fenómeno (1.4). La derivación de inferencias tiene lugar gracias a que el agente (competente e informado) genera un entendimiento del fenómeno por medio de la representación del modelo. El agente manipula e interpreta el modelo, lo que conlleva a una comprensión teórica del fenómeno que da lugar a la derivación de inferencias respecto de este. Ahora bien, estas inferencias pueden considerarse como conocimiento respecto del fenómeno, siempre y cuando dichas inferencias cumplan con las condiciones necesarias para que haya conocimiento. Estas condiciones dependen del marco epistemológico en cuestión, pero, ateniéndome a una caracterización estándar, si dichas inferencias son creencias verdaderas justificadas y cumplen la condición anti-Gettier establecida, pues entonces son conocimiento del fenómeno.

A modo de ejemplo, la tesis de Zagzebski en epistemología de las virtudes puede emplearse como una estrategia posible para afirmar la derivación de conocimiento desde la comprensión del modelo. La tesis de la autora realiza un giro epistemológico al cambiar el foco de la creencia al agente en lo que respecta a la atribución de conocimiento (Zagzebski 1996: 267). El foco central de su tesis es el concepto de las virtudes intelectuales, que se caracterizan por ser conductoras de conocimiento (*ibídem*: 269), es decir, dichas virtudes *guían* al agente a una obtención de conocimiento. Por consiguiente, el conocimiento es definido como un estado de contacto cognitivo con la realidad, que implica una aprehensión de una creencia verdadera justificada de parte del agente, gracias a la manifestación de una virtud intelectual en el acto epistémico del agente (*ibídem*: 270-272). En el caso del modelo, para que un agente pueda derivar una inferencia a partir de este, se requiere que el agente sea competente e informado (Suárez 2004: 773). Ahora, empleando la estrategia de Zagzebski, para que dicha inferencia sea conocimiento, el agente no solo debe ser competente e informado, sino también intelectualmente virtuoso. De ser este el caso, la inferencia acerca del fenómeno será un conocimiento de este, acorde a este marco epistemológico. De este modo, el agente puede obtener conocimiento a partir de la comprensión del fenómeno que se obtuvo por medio del modelo matemático aplicado.

El uso de este ejemplo no es defender la aplicación de esta tesis al caso de los modelos matemáticos aplicados, sino que se busca presentar una estrategia *posible* en epistemología desde la cual defender la obtención de conocimiento a partir del modelo. Por medio del estudio del modelo, se puede obtener una comprensión teórica del fenómeno, al aprehender la dinámica interna del sistema representada por el modelo. Gracias a dicha comprensión, el agente puede derivar inferencias que, si cumplen con las condiciones requeridas, son conocimiento del fenómeno. La tesis de Zagzebski es un posible marco epistemológico, pero cada tesis particular tendrá sus propias condiciones necesarias. Dependiendo de la postura epistemológica que se elija, se deberá analizar si la inferencia derivada del modelo se puede considerar como conocimiento (y bajo qué condiciones). En lo que respecta a mi trabajo, se expuso la obtención de entendimiento por medio del modelo, y se mantiene latente la posibilidad de obtener conocimiento de este.

3.6. Conclusión

En términos generales, el rol principal que cumplen los modelos aplicados es el de ayudar al desarrollo de la práctica científica. Los modelos matemáticos representan en su estructura formal el patrón de dependencias y la ratio de estas relaciones. Gracias a esto, la comprensión del agente acerca del modelo le permite generar un entendimiento acerca del comportamiento del fenómeno. Pues, mediante la manipulación del modelo, se pueden derivar los escenarios posibles del fenómeno, si los parámetros de sus variables fuesen distintos (Pincock 2012: 50). La estructura matemática permite comprender cómo y en qué medida cambiará necesariamente el sistema si la situación fuese distinta.

En el caso de la tercera ecuación de Maxwell (2.2), alterar los valores de la intensidad del campo magnético o la velocidad de la variación del campo, permite concluir cómo y en qué medida estos cambios afectarán al campo eléctrico inducido. Al aumentar la velocidad de variación del campo magnético o la intensidad de este, ocurre como resultado un aumento del campo eléctrico inducido. Así, por medio de la manipulación del modelo, se obtiene una comprensión del comportamiento electrodinámico del fenómeno. Si se busca ser más preciso respecto de esta comprensión, la razón matemática entre estas variables (presente en el modelo matemático) nos entrega un entendimiento más exacto acerca de la relación entre estos elementos.

El modelo cumple un rol heurístico clave en la comprensión del fenómeno que representa. El agente puede aprender por medio de este modelo mediante el proceso de construcción y manipulación de este (Morgan & Morrison 1999: 8). Además, esta contribución epistémica es posible incluso en los casos de modelos altamente idealizados o ficticios, ya que las analogías o metáforas que emplean algunos modelos cumplen un rol heurístico al ayudar a la visualización del comportamiento del fenómeno. Esta ayuda, permite al agente comprender el comportamiento del fenómeno a través de la analogía exhibida por el modelo.

Conclusión

El presente trabajo orbitó en torno a un cuestionamiento central: el rol epistémico de los modelos matemáticos aplicados en ciencias físicas. Los modelos matemáticos cumplen distintos roles en las ciencias y contribuyen a la práctica de ésta de distintos modos. Ha sido tema de debate el rol predictivo de los modelos matemáticos; a saber, los descubrimientos científicos por medios matemáticos[99]. Por ejemplo, se tiene el caso del descubrimiento de Neptuno por parte de Le Verrier o la predicción del positrón de parte de Dirac[100]. Otros roles de los modelos matemáticos son su rol unificador (que permite conectar distintos dominios de estudios por medios matemáticos), al igual que el rol explicativo (capítulo dos) y el rol inferencial (1.4.), que fueron estudiados en este trabajo. A pesar de los distintos roles que cumplen los modelos aplicados, estos suelen tener en común un matiz epistémico y/o pragmático, en términos generales. Por ello, los modelos cumplen un determinado rol epistémico en la investigación científica al contribuir a la formación de conocimiento o entendimiento acerca del fenómeno en estudio. Argumentar este punto fue el propósito principal del trabajo.

La tesis que sostengo es que los modelos matemáticos aplicados representan una contribución epistémica en la investigación científica en ciencias físicas, pues estos ayudan al agente en la obtención de conocimiento y/o entendimiento acerca del fenómeno en estudio. Sostengo esta tesis con el objetivo de demostrar que los modelos matemáticos no son meras

[99] Véase Steiner 1998.

[100] Véase Bueno 2005.

representaciones formales del fenómeno que resultan útiles por motivos pragmáticos, sino que estos también contribuyen epistémicamente en los procesos cognitivos del agente para obtener un logro epistémico. Es decir, los modelos contribuyen en el proceso de derivación de una inferencia (creencia que P) que cumpla con los criterios de conocimiento, o bien los modelos contribuyen heurísticamente en la comprensión del comportamiento de un fenómeno o ciertos aspectos de este. El objetivo ulterior de esta defensa es remarcar el rol epistémico que cumplen los modelos aplicados.

El tercer capítulo tuvo como propósito casi exclusivo el análisis epistemológico de la contribución de los modelos aplicados. En el primer capítulo se ahonda en la aplicabilidad matemática y en la relación entre modelo y fenómeno (1.1). A partir de la representación matemática del fenómeno, el agente competente e informado puede derivar inferencias (1.4). En el capítulo tres se señala la posibilidad de que dichas inferencias puedan establecerse como conocimiento acerca del fenómeno (3.5). de este modo se establece una primera contribución epistémica del modelo al jugar un rol en el proceso de obtención de conocimiento.

No obstante, el logro epistémico de interés en el tercer capítulo (y en el trabajo) es el entendimiento. Los modelos matemáticos representan un patrón de dependencias contrafácticas del fenómeno y las ratios internas del fenómeno (2.4), lo que permite al agente obtener comprender el comportamiento del fenómeno, pues un análisis contrafáctico de este (3.3) permite que se estudien los casos posibles del fenómeno. Esto termina en una comprensión de las dinámicas posibles que el fenómeno puede tener. A su vez, esto es denotado en el uso de modelos matemáticos en las explicaciones científicas (capítulo dos). A través del estudio de estos escenarios contrafácticos, se puede estipular una explicación contrafáctica del caso particular del *explanandum* (2.3). De este modo, el agente puede emplear la representación matemática para estudiar la modalidad del fenómeno.

Una investigación científica basada en modelos (capítulo tres) es una estrategia de estudio en el cual se busca estudiar un fenómeno empírico complejo por medio de un modelo *más simple* (en comparación con el fenómeno empírico) que representa los aspectos relevantes del fenómeno en estudio (Godfrey-Smith 2006: 726). En el caso de los modelos matemáticos, se busca estudiar un fenómeno físico particular apelando a una representación matemática de este. Esto se puede notar en los distintos ejemplos dentro de mi trabajo, pero el más emblemático es el de los puentes de Königsberg (1.1), puesto que en el modelo matemático (topológico) se remarcan solo las posiciones y conexiones, pues estos fueron los elementos que Euler considero relevantes para resolver el problema en cuestión (Räz 2013: 28). Si uno considera la ciudad de Königsberg a cabalidad para resolver el problema, ésta resultará ser un sistema complejo con un exceso de factores irrelevantes para el problema. Este exceso de información no ayuda a resolver el caso. Por ello es importante el modelo de Euler, pues se toman los elementos relevantes y se aíslan para poder trabajar con ellos y llegar al objetivo del estudio en cuestión. En general esto es lo que ocurre al construirse un modelo (3.2), se elige un molde apropiado para el caso que represente (acorde con la teoría de trasfondo) los elementos que se consideran relevantes para la investigación. Precisamente, la naturaleza abstracta del modelo es un factor a favor suyo.

La abstracción es un proceso en el cual se estipula una representación (o descripción) de una situación real (fenómeno) en el que solo algunos de los muchos elementos presentes en la realidad son conservados en la representación (Chakravartty 2007: 190). Es decir, de forma deliberada se omiten en la representación elementos o factores que se encuentran presentes en el sistema físico. Este es un factor común en el proceso de integración de un modelo, pues es intrínseco del modelo su naturaleza abstracta. Los modelos son estructuras abstractas que representan un sistema físico particular (Godfrey-Smith 2006[101]: 725-726). Los modelos son abstractos por naturaleza (en mayor o menor medida), y esto es más notorio en los casos de los modelos matemáticos, puesto que el sistema es representado por medio de una estructura formal matemática y las matemáticas *per se* son abstractas. La abstracción es un factor relevante en la representación de fenómenos ya que un fenómeno real se encuentra constituido de muchísimos factores y elementos distintos e interrelaciones, por lo que un modelo muy refinado y realista no sería práctico (Chakravartty 2007: 190-191). Vuélvase al caso de Königsberg, el exceso de información no es una virtud en la solución del problema. En cambio, la representación topológica abstracta de Euler sí resultó útil para resolver el problema, pues ésta remarcaba un aspecto particular del caso (la estructura de sus posiciones) lo que contribuyó a la formulación de la solución.

El modelo matemático funciona puesto que representa los elementos relevantes del caso (omitiendo el exceso de información del caso real) a su vez que constriñe esta representación dentro de los parámetros de su formalidad matemática. En el proceso de integración del modelo se debe elegir un molde matemático apropiado (3.2), por lo que, acorde con la teoría de trasfondo, se establece una estructura matemática cuya formalidad representa la necesidad teórica que se predica del fenómeno. Esto permite que el modelo matemático no sea solo una representación útil de un caso, sino un recurso epistémico relevante. Por medio de la estructura matemática se representa un patrón de dependencias contrafácticas, lo que permite que la representación del modelo matemático represente la

[101] El autor hace referencia a Giere 1988.

modalidad del fenómeno representado. Por medio de la manipulación del modelo, se pueden estudiar ciertos comportamientos posibles de un fenómeno.

De este modo, el modelo aplicado puede ser estudiado para derivar ciertas inferencias a partir de la modalidad que permea la estructura. Mediante el estudio del modelo, el agente puede predecir ciertos comportamientos, establecer ciertas explicaciones contrafácticas de un caso o simplemente derivar inferencias acerca del fenómeno. Esto, en último término, ayuda al agente en el refinamiento de su comprensión del caso y de su conocimiento acerca de este. Por consiguiente, el modelo matemática aplicado contribuye a la obtención y refinamiento del conocimiento y del entendimiento. Como señalo en la sección 3.5, la posibilidad de obtener conocimiento por medio del modelo es dejada abierta, puesto que la respuesta depende del marco epistemológico que se esté secundando. Así, si las inferencias que se derivan del modelo cumplen con los requerimientos establecidos (acorde al marco), pues se obtiene conocimiento del modelo. Sin embargo, el logro epistémico que sí defiendo es el entendimiento, pues el modelo ilustra al agente en ciertos aspectos del fenómeno, lo que da lugar a una mejor comprensión de estos aspectos. De igual modo, el carácter abstracto del modelo matemático facilita la comprensión del agente acerca de un fenómeno complejo que esté investigando. Por lo tanto, el modelo contribuye epistémicamente en el estudio del fenómeno físico.

Bibliografía

Baker, A. (2005) "Are there genuine mathematical explanations of physical phenomena?". *Mind*, 114: 223-238. https://doi.org/bdf59c

Batterman, R. (2010) "On the explanatory role of mathematics in empirical science". *British journal for the philosophy of science*, 61 (1): 1-25. https://doi.org/dfv86f

Bechtel, W. & Abrahamsen, A. (2005) "Explanation: a mechanistic alternative". *Studies in history and philosophy of biological and biomedical sciences*, 36: 427-446. https://doi.org/bm6ph8

Bokulich, A. (2011) "How scientific models can explain". *Synthese*, 180: 33-45. https://doi.org/br8vd2

Bokulich, A. (2017) "Models and explanations". En Magnani, L. & Bertolotti, T. (ed) *Springer handbook of model-based science*, Cham: Springer: 103-118. https://doi.org/gck9

Bonjour, L. (2010) "Recent work on the internalism – externalism controversy". En Sosa, E; Dancy, J. & Steup, M. (ed.) *A companion to epistemology (2nd ed.)*, M. Oxford/Malden: Blackwell: 33-43.

Boumans, M. (1999) "Built-up justification". En Morrison, M & Morgan, M. (ed.) *Models as mediators: Perspectives on natural and social science*. New York: Cambridge University press: 66-96.

Braine, D. (1972) "Varities of necessity". *Supplementary proceeding of the Aristotelian society*, 46: 139-170. https://doi.org/gcmb

Bueno, O. (2005) "Dirac and the dispensability of mathematics". *Studies in history and philosophy of modern physics,* 36 (3): 465-490. https://doi.org/dx3s9g

Bueno, O. (2016) "An anti-realist account of the application of mathematics". *Philosophical studies*, 173 (10): 2591-2604. https://doi.org/gqjq

Bueno, O. & Colyvan, M. (2011) "An inferential conception of the application of mathematics". *Nous,* 45 (2): 345-374. https://doi.org/bqvmph

Bueno, O. & French, S. (2018) *Applying mathematics: Immersion, inference, interpretation*. Oxford: Oxford University press.

Bueno, O; French, S. & Ladyman, J. (2002) "On representing the relationship between the mathematical and the empirical". *Philosophy of science*, Volume 69 (3): 497-518. https://doi.org/fk9sqd

Chakravartty, A. (2007) *A metaphysics for scientific realism: knowing the unobservable*. Cambridge: Cambridge University press.

Colyvan, M. (2001) *Indispensability of mathematics.* Oxford: Oxford University press. https://doi.org/d9hxds

Colyvan, M. (2012) *An introduction to the philosophy of mathematics.* Cambridge: Cambridge University press. https://doi.org/gqjz

Courant, R. & Robbins, H. ([1941] 1996) *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods.* New York: Oxford University press.

David-Rus, R. (2012) *Explanation and understanding through scientific models*. Iași: Academia Române – Filiala Iași.

De Regt, H. (2017) *Understanding scientific understanding*. New York: Oxford University press. https://doi.org/gqj2

Dieks, D. (2005) "The flexibility of mathematics". En Boniolo, G; Budimich, P. & Trobok, M. (ed.) *The role of mathematics in physical science: interdisciplinary and philosophical aspect*. Dordrecht: Springer: 115-129. https://doi.org/b4shjf

Flesich, D. (2008) *A student's guide to Maxwell's equations*. New York: Cambridge University press. https://doi.org/gfvd26

French, S. (2014) *The structure of the world: Metaphysics and representation*. Oxford: Oxford University press. https://doi.org/gqj3

Gelfert, A. (2014) "Applicability, indispensability and underdetermination: Puzzling over Wigner's unreasonable effectiveness of mathematics". *Science and education*, 23 (5): 997-1009. https://doi.org/f52fxs

Giere, R. N. (1988) *Explaining science: A cognitive approach.* Chicago: University of Chicago press. https://doi.org/gqj4

Godfrey-Smith, P. (2006) "The strategy of model-based science". *Biology and philosophy*, 21: 725-740. https://doi.org/b4pf9s

Goldman, A. & Beddor, B. "Reliabilist Epistemology" *The Stanford Encyclopedia of philosophy* (Summer 2021 edition), Edward N. Zalta (ed.). URL: <https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entries/reliabilism/>

Goldman, A. "Reliabilism". En Sosa, E; Dancy, J. & Steup, M. (ed.) *A companion to epistemology (2nd ed.)*, M. Oxford/Malden: Blackwell: 681-691

Goldman, A. (1986) *Epistemology and Cognition.* Massachusetts: Harvard University press.

Goldman, A. (1979) "What is justified belief". En Pappas G. S. (ed.) *Justification and Knowledge. Philosophical studies series in philosophy*, Vol 17. Springer: Dordrecht. https://doi.org/d3gbhn

Hilbert, D. (1992) *Natur und mathematische Erkennen: Vorlesungen, gehalten 1919-1920 in Göttingen*, ed. Rowe, D. E. Basel: Birkhäuser.

Jones, M. & Cartwright, N. (ed.) (2005) *Idealization XII: Correcting the model: Idealization and abstraction in the sciences*. New York: Editions Rodopi. https://doi.org/gqj5

Kaplan, D. (2011) "Explanation and description in computational neuroscience". *Synthese*, 183: 339-373. https://doi.org/bpbnft

Khalifa, K. (2017) *Understanding, explanation and scientific knowledge*. Cambridge: Cambridge University press. https://doi.org/gqjs

Kline, M. ([1967] 2009) *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. México D.F: Fondo de cultura económica.

Kvanvig, J. (2003) *The value of knowledge and the pursuit of understanding.* Cambridge: Cambridge University press. https://doi.org/fs2px6

Lange, M. (2013) "What makes a scientific explanation distinctively mathematical?". *British Journal for the philosophy of science,* 64 (3): 485-511. https://doi.org/gftk2c

Lange, M. (2018), “Because without cause: scientific explanations by constraint” En Reutlinger, A. & Saatsi, J. (ed.) *Explanation beyond causation: philosophical perspectives on non-causal explanations*. Oxford: Oxford University press: 15-38.

Machamer, P; Darden, L. & Craver, C. F. (2000) “Thinking about mechanism”. *Philosophy of science*, 67: 1-25. https://doi.org/fprxc8

McMullin, E. (1978) “Structural explanation”. *American philosophy quarterly* 15 (2): 139-147.

McMullin, E. (1985) “Galilean idealization”. *Studies in history and philosophy of science*, 16 (3): 247-273. https://doi.org/b6fm57

Morgan, M. (1999) “Learning from models”. En Morrison, M. & Morgan, M. (ed.) *Models as mediators: Perspectives on natural and social science*. New York: Cambridge University press: 347-389.

Morgan, M. (2002) “Model experiments and models in experiments”. En Magnani, L. & Nersessian, N. (ed.) *Model-based reasoning*. Springer, Boston, MA. https://doi.org/b4j2wr

Morrison, M. (1999) “Models as autonomous agents”. En Morrison, M. & Morgan, M. (ed.) *Models as mediators: Perspectives on natural and social science*. New York: Cambridge University press: 38-65.

Morrison, M. (2005) “Approximating the real: The role of idealizations in physical theory”. En Jones, M & Cartwright, N. (ed.) *Idealization XII: Correcting the model: Idealization and abstraction in the sciences*. New York: Editions Rodopi: 145-172.

Morrison, M. (2015) *Reconstructing reality: Models, mathematics and simulations.* New York: Oxford University press. https://doi.org/gqj6

Morrison, M & Morgan, M. (1999) "Introduction". En Morrison, M. & Morgan, M. (ed.) *Models as mediators: Perspectives on natural and social science*. New York: Cambridge University press: 1-10.

Morrison, M & Morgan, M. (1999) "Models as mediating instrument". En Morrison, M. & Morgan, M. (ed.) *Models as mediators: Perspectives on natural and social science*. New York: Cambridge University press: 10-38.

Pincock, C. (2004) "A new perspective on the problem of applying mathematics". *Philosophia mathematica*, 12 (3): 135-161. https://doi.org/cnt36w

Pincock, C. (2012) *Mathematics and scientific representation*. New York: Oxford Univestity press. https://doi.org/gqjt

Pincock, C. (2018) "Accommodating explanatory pluralism" En Reutlinger, A. & Saatsi, J. (ed.) *Explanation beyond causation: philosophical perspectives on non-causal explanations*. Oxford: Oxford University press: 39-56.

Plantinga, A. (1993) *Warrant: the current debate*. Oxford: Oxford University press. https://doi.org/bz7425

Potochnik, A. (2017) *Idealization and the aims of science*. Chicago: The University of Chicago press. https://doi.org/gpnw

Räz, T. (2013) *On the applicability of mathematics – Philosophical and historical perspective* (Tesis doctoral). Faculté des lettres, Université de Lausanne. Lausana, Suiza.

Reutlinger, A. (2018) "Extending the counterfactual theory of explanation". En Reutlinger, A. & Saatsi, J. (ed.) *Explanation beyond causation: philosophical perspectives on non-causal explanations*. Oxford: Oxford University press: 74-95.

Reutlinger, A. & Saatsi, J. (2018) "Introduction: Scientific explanations beyond causation". En Reutlinger, A. & Saatsi, J. (ed.) *Explanation beyond causation: philosophical perspectives on non-causal explanations*. Oxford: Oxford University press: 1-11.

Salmon, W. (1984) *Scientific explanation and causal structure of the world.* Princeton: Princeton University press.

Salmon, W. (1998) *Causality and explanation*. New York: Oxford University press. https://doi.org/bjbr6t

Steiner, M. (1998) *The applicability of mathematics as a philosophical problem.* Cambridge: Harvard University press.

Stillwell, J. (2016) *Elements of mathematics: From Euclid to Gödel*. New Jersey: Princeton University press. https://doi.org/gqj7

Suárez, M. (2004) "An inferential conception of scientific representation". *Philosophy of science*, Volume 71 (5): 767-779. https://doi.org/csm3sd

Suárez, M. (1999) "The role of models in the application of scientific theories: epistemological implications". En Morrison, M. & Morgan, M. (ed.) *Models as* *mediators: Perspectives on natural and social science*. New York: Cambridge University press: 168-196.

Suppe, F. (1977) *The structure of scientific theories.* Chicago: University of Illinois press.

Suppes, P. (1961) "A comparison of the meaning and use of models in the mathematical and empirical sciences". En Freudenthal, H. (ed.) *The concept and role of the model in mathematics and natural and social sciences*. Dordrecht: Reidel. 163-177.

Suppes, P. (1967) "What is a scientific theory". En Morgenbesser, S. (ed.) *Philosophy of science today*. New York: Basic Books. 55-67.

Suppes, P; Krantz, D. H; Luce, R. D. & Tversky, A. (1971) *Foundations of measurements: Additive and polynomial representation.* Vol 1. New York: Academic press.

Suppes, P; Krantz, D. H; Luce, R. D. & Tversky, A. (1989) *Foundations of measurements: Geometrical, threshold and probabilistic representations.* Vol 2. New York: Academic press.

Suppes, P; Krantz, D. H; Luce, R. D. & Tversky, A. (1990) *Foundations of measurements: Representation, axiomatization and invariance.* Vol 3. New York: Academic press.

Tagüeña, J. & Martina, E. (2011) *De la brújula al espín: el magnetismo*. México D.F: Fondo de cultura económica.

Van Fraassen, B. (1980) *The scientific image*. Oxford: Oxford University press. https://doi.org/cjr6gp

Van Fraassen, B. (1989) *Law and symmetry*. Oxford: Calderon press.

Voelkel, J. (1999) *Johannes Kepler and the New Astronomy* (Gingerich, O. ed.) Oxford: Oxford University press.

Wigner, E. P. (1960) The unreasonable effectiveness of mathematics in natural science. *Communications on pure and applied mathematics*, 13 (1): 1-14. https://doi.org/gqj8

Woodward, J. (2003) *Making things happen: A theory of causal explanation*. Oxford: Oxford University press.

Woodward, J. (2018) "Some varieties of non-causal explanation". En Reutlinger, A. & Saatsi, J. (ed.) *Explanation beyond causation: philosophical perspectives on non-causal explanations*. Oxford: Oxford University press: 117-137.

Zagzebski, L. (1996) *Virtues of the mind: an inquiry into the nature of virtue and the ethical foundations of knowledge*. Edinburgh: Cambridge University press. https://doi.org/gqj9