UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTUDIO DEL SUBDIFERENCIAL DE FUNCIONES INTEGRALES CONVEXAS SOBRE ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

FELIPE IGNACIO LÓPEZ ROCABADO

PROFESOR GUÍA:
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES
PROFESOR CO-GUÍA:
ABDERRAHIM HANTOUTE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
HÉCTOR RAMÍREZ CABRERA
JAIME ORTEGA PALMA
RAFAEL CORREA FONTECILLA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por proyecto Fondecyt Regular 1151003 y CMM ANID BASAL FB210005

SANTIAGO DE CHILE
2023

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: FELIPE IGNACIO LÓPEZ ROCABADO
FECHA: 2023
PROF. GUÍA: ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES
PROF. CO-GUÍA: ABDERRAHIM HANTOUTE

ESTUDIO DEL SUBDIFERENCIAL DE FUNCIONES INTEGRALES CONVEXAS SOBRE ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

Las funciones integrales aparecen en diversas áreas de las matemáticas, principalmente en el área de optimización y equilibrio, donde generalmente las funciones objetivos de los problemas de cálculo de variaciones y de control óptimo son funciones integrales definidas sobre espacios de funciones continuas, y, en el caso convexo no diferenciable, se suele trabajar con los subdiferenciales para buscar los óptimos. Considerando esto, en este trabajo se estudiará el subdiferencial de las funciones integrales, en el caso convexo y sobre el espacio de las funciones continuas. En específico, se estudiarán dos métodos, un primer método basado en el uso de conjugadas de Fenchel, donde se estudiarán tres casos dependiendo del espacio sobre el que actúan las funciones integrales, primero el caso de espacios descomponibles, en segundo lugar el caso del espacio L^∞ y se finaliza con el caso del espacio de funciones continuas; y un segundo método basado en una fórmula del tipo Hiriart-Urruty-Phelps para el subdiferencial de la suma, donde se estudiará primero el caso en que las funciones integrales actúan sobre espacios constantes de dimensión finita, lo cual luego se generaliza a espacios de dimensiones infinitas a partir de un teorema de extensiones de Hahn-Banach medibles que se propone, y se finaliza al aplicar los resultados anteriores al caso del espacio de funciones continuas. Finalmente, se realiza un análisis de resultados, revisando las hipótesis, resultados y las distintas técnicas usadas en cada método, además de comparar ambos métodos, y luego se exponen los tres puntos principales del trabajo, que corresponden en primer lugar a la recopilación de todos los antecedentes sobre el tema tratado en un único documento, en segundo lugar a la presentación y desarrollo de los dos métodos mencionados, y como tercer y último punto, que las técnicas y resultados intermedios presentados quedarán disponibles para trabajos futuros.

Este trabajo está dedicado a mi madre, pues a ella le debo mucho poder haber llegado hasta acá.

Agradecimientos

Partir agradeciendo a mi madre Claudia, quien ha sido la jefa del hogar en el que he vivido y gracias a ella me he podido mantener sin problemas en esta carrera y en mi vida.

También agradecer al resto de mi familia, en especial a mi tata Pedro que siempre se preocupa de mí, y también a mi abuela Guille, que aunque no la vea tanto siempre es un gusto pasar tiempo con ella. Agradecimientos también a esas dos personas especiales que ya no pueden acompañarme en esta vida, "Mami" Sole se te extraña mucho, Lole, aunque no te conocí sé que eres muy importante para mi existencia, siempre los recordaremos en la familia.

Agradecimientos especiales a todos los funcionarios del DIM, que siempre estuvieron dispuestos a ayudar ante los problemas que tuve, como por ejemplo Eterin, Karen, Natacha, Silvia, y los demás que haya olvidado mencionar.

Agradecimientos especiales también a todos los acádemicos que me ayudaron a desarrollar mi trabajo, sobre todo a la paciencia y aportes que tuvieron conmigo. Agradecimientos a mi profesor guía Abderrahim Hantoute, con quien inicié el trabajo y me ayudó a encontrar mi camino dentro de la ingeniería matemática, agradecimientos al profesor Alejandro Jofré por apoyarme en mi proceso de reincorporación y tomarme como guía cuando el profesor Abderrahim tuvo que dejar el departamento, agradecimientos a la profesora Hanne por ayudarme en toda la tramitación de la reincorporación, pues me ayudó mucho en resolver ciertos problemas no triviales que tuve en este proceso.

Y finalmente, agradecimientos a todos los académicos que desarrollaron los temas presentados en este trabajo, en especial agradecimientos a don R. Tyrrell Rockafellar, porque gracias a sus trabajos, que están a libre disposición, logre comprender muchos de los conceptos que no conocía y así levantar y terminar este trabajo.

Tabla de Contenido

Introducción

Dado un espacio medible $(T, \mathcal{A})$, una medida μ sobre $\mathcal{A}$, un espacio vectorial X, un espacio L de funciones $x : T \to X$, y una función $f : T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$, se define la función integral asociada a f como la función $I_f : L \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$I_f(x) = \int_T f(t, x(t)) \mathrm{d}\mu(t), x \in L.$$

Las funciones integrales son un objeto de gran interés dentro de las matemáticas, dado que aparecen en una gran diversidad de problemas, por ejemplo en el área de probabilidades y procesos estocásticos las integrales sirven para calcular esperanzas, en las áreas de análisis funcional y ecuaciones en derivadas parciales las integrales aparecen en el trabajo sobre los espacios L^p, y en el área de optimización y equilibrio las integrales aparecen en las funciones objetivos de los problemas de cálculo de variaciones y de control óptimo. Estas aplicaciones a problemas de cálculo de variaciones y control óptimo motivan a estudiar las funciones integrales sobre el espacio de las funciones continuas, y además, considerando que muchas veces estas funciones no son diferenciables, esto incentiva a que se haga un estudio sobre sus subdiferenciales en el caso convexo, dado que así pueden aplicarse en la búsqueda de las soluciones óptimas de dichos problemas.

De este modo, el objetivo principal de este trabajo es estudiar el subdiferencial de las funciones integrales en el caso convexo y sobre el espacio de las funciones continuas. De manera más precisa, se busca recopilar toda la información necesaria sobre el tema de funciones integrales, y luego se busca desarrollar dos métodos para obtener el subdiferencial de una función integral convexa definida sobre el espacio de las funciones continuas, para finalmente comparar ambos métodos en una discusión de resultados.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En primer lugar, se presenta, en el capítulo 1, todos los antecedentes preliminares necesarios para trabajar, centrándose en los resultados de topología y análisis convexo para trabajar con subdiferenciales, en los resultados sobre teoría de la medida y teoría de multiaplicaciones medibles para poder asegurar que las integrales estén bien definidas y tengan las propiedades adecuadas, y ciertos resultados de espacios de funciones dado que las funciones integrales están definidas sobre este tipo de espacios. Luego, se iniciará con el estudio sobre las funciones integrales en el capítulo 2, donde se siguen los trabajos de Rockafellar ([12], [14], [17]) para definir las funciones integrales y ver algunas de sus propiedades. A continuación se presenta el primer método para calcular el subdiferencial buscado en el capítulo 3, el cual sigue los trabajos de Rockafellar ([12], [15]) y Perkkiö ([11]), y se basa en primero encontrar una fórmula para la conjugada de Fenchel de la función integral, y, a partir de dicha fórmula, deducir una expresión para el subdiferencial. El trabajo de este método se subdivide en tres partes, primero se estudia el caso en que las funciones integrales actúan sobre un espacio de funciones el cual es descomponible, cuya definición se presenta, y que además está en dualidad con otro espacio que también es descomponible, a continuación se estudia el caso en que las funciones integrales actuán sobre el espacio L^∞, y finalmente se pasa al caso en que la función integral está definida sobre el espacio de funciones continuas, terminando así este método. El segundo método se estudia en el capítulo 4, el cual surge de un trabajo de Hantoute y Jourani ([7]), y se basa en dar una fórmula directa para el subdiferencial de las funciones integrales sobre espacios de funciones constantes, la cual es similar a la fórmula del subdiferencial de la suma presentada por Hiriart-Urruty y Phelps en [8]. El trabajo de este método se subdivide en cinco partes, primero, se hace un breve repaso sobre el estudio de multiaplicaciones que actúan sobre espacios de Suslin generales (de dimensiones infinitas), luego se presenta el subdiferencial en el caso en que la función integral actúa sobre un espacio de funciones constantes de dimensión finita, a continuación se presentan ciertos teoremas de extensión, con el fin de aplicar el resultado anterior a espacios de dimensiones infinitas, donde destaca un resultado totalmente novedoso llamado *teorema de extensiones de Hahn-Banach medibles* que se propone, con el cual, en la siguiente parte, se puede obtener el subdiferencial en el caso de espacios constantes de dimensión infinita, para así finalmente obtener el resultado buscado sobre el espacio de funciones continuas al verlo como espacio constante. Para cerrar el trabajo, en el capítulo 5, se hace una discusión de los resultados obtenidos, comparando ambos métodos en cuanto a hipótesis, resultados y técnicas usadas, y a partir de esta discusión se concluye que los tres puntos principales del trabajo corresponden, en primer lugar, a que este trabajo sirve como recopilación de diferentes resultados de funciones integrales en un solo documento, en segundo lugar a la presentación y el desarrollo de los dos métodos para obtener el subdiferencial de las funciones integrales convexas sobre el espacio de las funciones continuas, además de su análisis y comparación antes discutidos, y en tercer lugar a que las distintas técnicas usadas, en conjunto con los resultados intermedios expuestos en este estudio, como el teorema de extensiones de Hahn-Banach medibles, quedan a disposición de futuros trabajos.

Capítulo 1

Resultados preliminares y notaciones

Para efectos del trabajo que se presentará, se considerarán conocidos los resultados básicos de topología y análisis funcional, como los teoremas de extensión de Hahn-Banach, los teoremas de separación de Hahn-Banach, el lema de Urysohn, entre otros, y también resultados de teoría de la medida, como el teorema de convergencia monótona (TCM), el teorema de convergencia dominada (TCD), el teorema de Radon-Nikodym, el teorema de representación de Riesz, entre otros. Algunos resultados específicos de estas áreas se enunciarán en este capítulo, además de una serie de definiciones y resultados conocidos que serán usados más adelante, de diversas áreas como el análisis convexo, la teoría de multiaplicaciones y los espacios de funciones. En general llamaremos ev a un espacio vectorial, evn a un espacio vectorial normado, evt a un espacio vectorial topológico y evtlc a un evt localmente convexo. También denotaremos τ^{w^*} a la topología débil-$*$ del dual de un evt, en tanto a la topología inducida por la norma de un evn la denotaremos $\tau^{\|\cdot\|}$. También se llamará igualdad ctp a la igualdad casi en todas partes con respecto a una medida (es decir, salvo en un conjunto de medida nula).

Para un espacio topológico X y un conjunto $A \subseteq X$, denotaremos $\operatorname{cl} A$ a la clausura de A, en tanto denotaremos $\operatorname{int} A$ al interior de A. En el caso en que X sea un evt y $A \neq \emptyset$, denotaremos $\operatorname{aff} A$ a la envoltura afín de A, la cual corresponde a la intersección de todos los sev afines de X (es decir, conjuntos de la forma $x + V$, con V sev de X y $x \in X$ arbitrarios) que contienen a A, y también denotaremos $\operatorname{ri} A$ al interior relativo de A, es decir, al interior de A con respecto al espacio topológico $\operatorname{aff} A$ (con la topología traza). Si X, Y son dos evt, denotaremos $\mathcal{L}(X, Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales continuos de X a Y. Si X es normado, para cualquier $x \in X$ y $r > 0$ denotaremos $B_X(x, r)$ a la bola cerrada centrada en x y de radio r.

También trabajaremos con el conjunto de los reales extendidos, el cual se define como $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, y usaremos las convenciones del análisis convexo, es decir, consideraremos que $+\infty + (-\infty) = +\infty$, $0 \cdot [\pm\infty] = 0$, sin embargo, por lo general consideraremos hipótesis suficientes que garanticen no tener que recurrir a estas convenciones. En $\overline{\mathbb{R}}$ usaremos la topología dada por la compactificación por dos puntos, es decir, para cada valor en $\mathbb{R}$ las vecindades corresponden a las usuales, en tanto para $+\infty$ (resp. $-\infty$) las vecindades son de la forma $(a, +\infty) \cup \{+\infty\}$ (resp. $(-\infty, a) \cup \{-\infty\}$), para todo $a \in \mathbb{R}$.

Dado dos espacios medibles $(T_1, \mathcal{A}_1)$, $(T_2, \mathcal{A}_2)$, denotaremos $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ a la $\sigma-$álgebra producto en $T_1 \times T_2$. Para una función $f : T_1 \to T_2$, denotaremos su medibilidad diciendo que f es $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$-medible, o simplemente medible en caso que no haya confusión. Para un espacio topológico X, denotaremos $\mathcal{B}(X)$ a la $\sigma-$álgebra de sus borelianos, y para funciones de la forma $f : T_1 \to X$, muchas veces diremos simplemente que f es medible si f es $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}(X))-$medible, incluyendo el caso $X = \overline{\mathbb{R}}$.

1.1. Topología y análisis convexo

En esta sección presentaremos los principales conceptos y resultados relativos a topología y análisis convexo que consideramos importantes de recalcar, pues serán usados en los siguientes capítulos.

Recordemos que para una función $h : X \to Y$, donde X, Y son conjuntos arbitrarios, su grafo está dado por

$$\text{graph } h = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = h(x)\}.$$

Sea X un ev. En lo que sigue trabajaremos con funciones a valores reales extendidos, esto es, funciones de la forma $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, por lo que usaremos el concepto de dominio efectivo de una función a valores reales extendidos, el cual se define como

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}.$$

Si $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ y $f(x) > -\infty \; \forall x \in X$, la función f se dirá propia.
Como también trabajaremos con funciones convexas, también vale recordar su definición. Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dirá convexa si para cualquier $\lambda \in [0, 1]$ y cualquier $x, y \in X$, se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Usualmente en el análisis convexo se trabaja con el epígrafo, el cual está definido como

$$\operatorname{epi} f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\} \subseteq X \times \mathbb{R},$$

lo cual permite asegurar la siguiente propiedad clásica (por ejemplo en [21]).

Proposición 1.1 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces tenemos que f es convexa si y solo si $\operatorname{epi} f$ es convexo.*

En lo que sigue trabajaremos en espacios topológicos y sus duales, por lo que presentaremos la siguiente definición que generaliza el caso en que el dual de un espacio se identifica con otro espacio, lo cual se puede encontrar en el capítulo 3 de [16].

Definición 1.2 *Sean X, V dos espacios vectoriales. Un emparejamiento de X y V es una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times X \to \mathbb{R}$.*
Una topología en X se dice compatible con el emparejamiento si es una topología que convierte a X en un evtlc y se cumple que para cada $v \in V$ se tiene que los funcionales lineales:

$$L_v : X \to \mathbb{R} \text{ dado por } L_v(x) = \langle v, x \rangle \; \forall x \in X,$$

son continuos, y además para cada funcional lineal continuo $L : X \to \mathbb{R}$ *existe algún* $v \in V$ *tal que* $L = L_v$.
Similarmente, una topología en V *se dice compatible con el emparejamiento si es una topología que convierte al espacio en un evtlc y para cada* $x \in V$ *se tiene que los funcionales lineales:*

$$\mathrm{e}_x : V \to \mathbb{R} \text{ dado por } \mathrm{e}_x(v) = \langle v, x\rangle \; \forall v \in V,$$

son continuos, y además para cada funcional lineal continuo $\mathrm{e} : V \to \mathbb{R}$ *existe algún* $x \in X$ *tal que* $\mathrm{e} = \mathrm{e}_x$.
Diremos que X *y* V *están en dualidad si cada uno de ellos ha sido dotado de una topología y además existe un emparejamiento con el cual estas topologías son compatibles.*

Para X evn y $V = X^*$, el dual de X, tenemos que X con la topología inducida por la norma y X^* dotado de la topología τ^{w^*} son espacios en dualidad. La topología inducida por la norma en X^* solo es compatible en espacios reflexivos.

Para un evt X en dualidad con un evt $\tilde{X}$ mediante el emparejamiento $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\tilde{X}\times X}$, y otro evt Y en dualidad con un evt $\tilde{Y}$ mediante el emparejamiento $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\tilde{Y}\times Y}$, dado cualquier $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, denotaremos L^* al operador adjunto de L, es decir, $L^* \in \mathcal{L}(\tilde{Y}, \tilde{X})$ corresponderá al funcional dado por $\langle L^*(y^*), x\rangle_{\tilde{X}\times X} = \langle y^*, L(x)\rangle_{\tilde{Y}\times Y} \; \forall y^* \in \tilde{Y}, \forall x \in X$.

Consideremos entonces, de ahora en adelante, que X es un evtlc Hausdorff, el cual está en dualidad con otro evtlc Hausdorff V, y denotaremos $\langle \cdot, \cdot\rangle$ al emparejamiento.

Además de funciones convexas, también trabajaremos con funciones semicontinuas inferiores. Recordemos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dirá semicontinua inferior (sci para abreviar) si

$$\liminf_{x\to\bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x}) \text{ para cualquier } \bar{x} \in X,$$

donde

$$\liminf_{x\to\bar{x}} f(x) = \sup_{V\in\mathcal{N}(\bar{x})} \inf_{x\in V} f(x),$$

con $\mathcal{N}(\bar{x})$ la familia de vecindades de $\bar{x}$. Las funciones sci tienen la siguiente caracterización clásica (por ejemplo en [21]).

Proposición 1.3 *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) f *es sci.*
(ii) $\operatorname{epi} f$ *es cerrado (en* $X \times \mathbb{R}$*).*
(iii) $[f \leq \alpha] = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ *es cerrado (en* X*)* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Algunas propiedades de las funciones convexas y sci que se ocupan usualmente son las siguientes (por ejemplo en [17], donde solo se trabaja para $X = \mathbb{R}^n$, pero estos resultados se pueden adaptar fácilmente al caso evtlc Hausdorff general).

Proposición 1.4 *Sean* $f, f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *funciones.*

(a) *Si f_1 y f_2 son propias y sci, entonces $f_1 + f_2$ es sci.*

(b) *Si f es sci y $\lambda \geq 0$, entonces λf es sci.*

Proposición 1.5

(a) *Sea Y otro evtlc Hausdorff. Sean $F : X \to Y$ continua y $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sci, entonces $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $f(x) = g(F(x))$ es sci.*

(b) *Sean $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sci y $\theta : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ sci y creciente, con la convención de extender la función θ a valores infinitos por $\theta(+\infty) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \theta(x)$ y $\theta(-\infty) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \theta(x)$. Entonces $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $f(x) = \theta(g(x))$ es sci.*

Dado que no toda función es sci, es buena idea buscar una función sci lo más parecida posible, lo que se tiene en la siguiente definición.

Definición 1.6 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Definimos $cl\, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, la regularización sci de f, como la función dada por*

$$(cl\, f)(x) = \liminf_{x' \to x} f(x'), \ \forall x \in X.$$

Esta función cumple que es la más grande de todas las funciones sci g tales que $g \leq f$, y, por lo tanto, $cl\, f \leq f$. Además cumple que

$$epi\,(cl\, f) = cl\,(epi\, f),$$

lo cual recalca que $cl\, f$ es sci.

A continuación, una propiedad sobre la continuidad de las funciones convexas sobre $\mathbb{R}^n$

Proposición 1.7 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa. Entonces se tiene que f es continua en $int\,(dom\, f)$, por lo que coincide con $cl\, f$ en $int\,(dom\, f)$ (y este conjunto es igual a $int\,(dom\,(cl\, f))$, además f coincide con $cl\, f$ en el valor $+\infty$ fuera de $dom\,(cl\, f)$, en particular fuera de $cl\,(dom\, f)$). Más aún, se tiene que*

$$(cl\, f)(x) = \lim_{\tau \nearrow 1} f((1-\tau)x_0 + \tau x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \textit{si} \ x_0 \in int\,(dom\, f).$$

Si f es sci, entonces en adición es continua relativo a la envoltura convexa de cualquier subconjunto finito de $dom\, f$, en particular cualquier segmento de línea de $dom\, f$.

Recordemos que si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo y no vacío, entonces $\operatorname{ri} C \neq \emptyset$, por lo que si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexa, propia y sci, entonces se obtiene que f es continua en $\operatorname{ri}(\operatorname{dom} f)$ al aplicar la proposición anterior a $f - f(x)$ sobre $\operatorname{aff}(\operatorname{dom} f - x)$, para algún $x \in \operatorname{dom} f$.

La propiedad de la continuidad en el interior del dominio también se tiene en el caso X general, como se puede apreciar en el siguiente resultado (que se puede encontrar en la sección 2.2 de [21]).

Proposición 1.8 *Sea X un evtlc Hausdorff. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa. Si existe una vecindad de un punto de $\operatorname{dom} f$ tal que f está acotada superiormente en dicha vecindad, entonces f es continua en $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.*

También será útil trabajar con las conjugadas de Fenchel de una función, lo cual se encuentra en el capítulo 3 de [16].

Definición 1.9 *Definimos la conjugada de Fenchel de una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ como la función $f^* : V \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por:*

$$f^*(v) = \sup_{x \in X} \langle v, x \rangle - f(x), \ \forall v \in V.$$

En tanto, definimos la conjugada de Fenchel de una función $h : V \to \overline{\mathbb{R}}$ como la función $h^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por:

$$h^*(x) = \sup_{v \in V} \langle v, x \rangle - h(v), \ \forall x \in X.$$

Finalmente, definimos la biconjugada de Fenchel de una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, denotada como $f^{**} : X \to \overline{\mathbb{R}}$, como la conjugada de su conjugada, es decir, $f^{**} = (f^*)^*$. De la misma manera, definimos la biconjugada de Fenchel de una función $h : V \to \overline{\mathbb{R}}$, denotada como $h^{**} : V \to \overline{\mathbb{R}}$, como la conjugada de su conjugada, $h^{**} = (h^*)^*$.
A la operación $f \to f^*$ se le llama transformada de Fenchel.

Generalmente llamaremos simplemente conjugada (resp. biconjugada) a la conjugada (resp. biconjugada) de Fenchel, dado que en este trabajo no se hace uso de otro tipo de conjugadas.

Un resultado muy importante que cumplen las conjugadas es el siguiente.

Teorema 1.10 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Entonces f^* es una función convexa sci en V. Si f es convexa y propia, entonces $f^{**} = \operatorname{cl} f$. Si f es convexa, propia y sci, entonces f^* es propia y $f^{**} = f$. Un resultado análogo se tiene para una función $h : V \to \overline{\mathbb{R}}$. Es decir, la transformada de Fenchel induce una correspondencia biyectiva entre las funciones convexas propias sci en X y las funciones convexas propias sci en V, dada por $f \to h$, donde $h = f^*$ y $f = h^*$.*

Presentamos además las definiciones de las funciones indicadoras y las funciones soporte. Para $C \subseteq X$ no vacío, definimos la función indicadora de C como la función $\mathrm{i}_C : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por:

$$\mathrm{i}_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C, \\ +\infty & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

Definimos además la función soporte de C como la función $\sigma_C : V \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por:

$$\sigma_C(v) = \sup_{x \in C} \langle v, x \rangle, \ \forall v \in V.$$

Claramente, $\mathrm{i}_C^* = \sigma_C$. Si además C es un conjunto convexo cerrado, entonces i_C es una función convexa sci, de modo que i_C y σ_C son conjugadas entre sí.

Otro resultado interesante es la conjugada de una suma de funciones. Este resultado se encuentra en el teorema 20 de [16].

Definición 1.11 *Sean* $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}, i \in \{1, \ldots, N\}$ *una familia de funciones. Definimos la inf-convolución de estas funciones como la función* $(f_1 \square \ldots \square f_N) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *dada por:*

$$(f_1 \square \ldots \square f_N)(x) = \inf_{x_1+\ldots+x_N=x} f_1(x_1) + \ldots + f_N(x_N),\ \forall x \in X.$$

Teorema 1.12 *Sean* $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}, i \in \{1, \ldots, N\}$ *una familia de funciones convexas propias. Definamos las funciones* $h_X, g_X : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $h_V, g_V : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *por:*

$$\begin{aligned} h_X = f_1 + \ldots + f_N, &\quad h_V = f_1^* + \ldots + f_N^*, \\ g_X = f_1 \square \ldots \square f_N, &\quad g_V = f_1^* \square \ldots \square f_N^*. \end{aligned}$$

Entonces:

(i) $g_X^* = h_V$.

(ii) Si existe algún $x \in \operatorname{dom} f_1$ *tal que existe una vecindad de* x *sobre la cual las funciones* $f_2, \ldots, f_N$ *son acotadas superiormente, entonces* $g_V = h_X^*$. *Además, bajo estas hipótesis el ínfimo que define a* g_V *se alcanza para cualquier* $v \in V$.

Por lo tanto, si las funciones f_i *son sci y además se cumplen las condiciones del punto (ii), entonces* h_X *y* g_V *son conjugadas entre sí, por lo que en particular* h_X *y* g_V *son funciones convexas propias sci.*

Observación 1.13 *En [21], teorema 2.13 (ix), bajo las hipótesis y notación del teorema anterior y para* $N = 2$, *se tiene que* $\operatorname{dom} g_X = \operatorname{dom} f_1 + \operatorname{dom} f_2$, $\operatorname{dom} g_V = \operatorname{dom} f_1^* + \operatorname{dom} f_2^*$.

Ahora presentaremos la noción de función de recesión. Las siguientes definiciones y resultados se pueden encontrar en las secciones 8 y 13 de [13], para el caso $X = \mathbb{R}^n$, en tanto para el caso general se pueden encontrar en la sección 2.2 y el ejercicio 2.23 de [21].

Definición 1.14 *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función convexa propia. Definimos la función de recesión de* f *como la función* $f^\infty : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *dada por:*

$$f^\infty(y) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} f(x+y) - f(x),\ \forall y \in X.$$

Una caracterización más sencilla se da a continuación.

Teorema 1.15 *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función convexa propia. Entonces* f^∞ *es una función convexa propia y positivamente homogénea. Además, si* f *es sci, entonces* f^∞ *también es sci, y en este caso se cumple que, para cualquier* $x \in \operatorname{dom} f$, f^∞ *está también dada por las* *siguientes fórmulas:*

$$f^{\infty}(y) = \sup_{\lambda > 0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}, \, \forall y \in X.$$

Observación 1.16 *La caracterización dada en el teorema está bien definida debido a que, para $x, y \in X$ fijos, la función $\varphi_{x,y} : (0, +\infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por*

$$\varphi_{x,y}(\lambda) = \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}, \lambda \in (0, +\infty),$$

es creciente (teorema 23.1 de [13] para caso $\mathbb{R}^n$, teorema 2.1.5 de [21] para caso general).

Tenemos la siguiente proposición que entrega la relación entre las conjugadas y las funciones de recesión.

Proposición 1.17 *Sea $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa propia. Entonces se tiene que:*

$$\sigma_{dom\, g}(v) = (g^*)^{\infty}(v) \, \forall v \in V.$$

Si g es sci, también se tiene que:

$$\sigma_{dom\, g^*}(x) = g^{\infty}(x) \, \forall x \in X.$$

A continuación presentamos una definición que será muy importante, la de subdiferencial, y posteriormente algunas propiedades que serán útiles. Para facilitar la escritura, de ahora en adelante consideraremos que X es un espacio de Banach y que X^* es su dual, aunque los resultados también son válidos para otro espacio de Banach V en dualidad con X (es decir, si X^* se puede identificar con V).

Definición 1.18 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ propia. Diremos que $x^* \in X^*$ es subgradiente de f en $x \in dom\, f$ si:*

$$f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle \, \forall y \in X.$$

Definimos entonces $\partial f(x)$ como el conjunto de todos los subgradientes de f en x, y lo llamamos subdiferencial de f en x. Si $x \notin dom\, f$, decimos que $\partial f(x) = \emptyset$.

Claramente se desprende de la definición que $x^* \in \partial f(x) \iff f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle$.

En el caso en que no se pueda trabajar con el subdiferencial exacto, también será útil tener la siguiente aproximación.

Definición 1.19 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función propia, y sea $\varepsilon > 0$. Para cualquier $x \in dom\, f$, definimos el $\varepsilon-$subdiferencial de f en x como el conjunto $\partial_{\varepsilon} f(x) \subseteq X^*$ dado por*

$$\partial_{\varepsilon} f(x) = \{x^* \in X^* \mid f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle - \varepsilon \, \forall y \in X\}.$$

Si $x \notin dom\, f$, decimos que $\partial_{\varepsilon} f(x) = \emptyset$.

Los subdiferenciales cumplen una gran cantidad de propiedades. En primer lugar, presentamos el teorema 23.4 de [13] sobre la estructura de los subdiferenciales en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.20 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa propia. Para $x \notin \operatorname{dom} f$, tenemos que $\partial f(x) = \emptyset$. Para $x \in ri(\operatorname{dom} f)$, tenemos que $\partial f(x) \neq \emptyset$. Finalmente, tenemos que $\partial f(x)$ es un conjunto acotado y no vacío si y solo si $x \in int(\operatorname{dom} f)$.*

Los $\varepsilon-$subdiferenciales pueden ser descritos a través de una función sublineal, como se ve en el teorema 2.1.14 de [21] a continuación.

Teorema 1.21 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa, propia y sci, y sea $x \in \operatorname{dom} f$. Para $\varepsilon \geq 0$, consideremos la función $f'_\varepsilon(x, \cdot) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por*

$$f'_\varepsilon(x, u) = \inf_{s>0} \frac{f(x + s \cdot u) - f(x) + \varepsilon}{s}.$$

Entonces:

(i) $\operatorname{dom} f'_\varepsilon(x, \cdot) = \{\alpha z \mid z \in (\operatorname{dom} f - x), \alpha \geq 0\} = \mathbb{R}_+(\operatorname{dom} f - x)$.

(ii) $f'_\varepsilon(x, \cdot)$ *es sublineal, es decir, para todo* $u, v \in X$ *y* $\lambda \geq 0$*:* $f'_\varepsilon(x, \lambda u) = \lambda f'_\varepsilon(x, u)$, $f'_\varepsilon(x, u + v) \leq f'_\varepsilon(x, u) + f'_\varepsilon(x, v)$.

(iii) $f'_\varepsilon(x, u) \leq f(x + u) - f(x) + \varepsilon \; \forall u \in X$.

(iv) Se tiene que $x^* \in \partial_\varepsilon f(x) \iff \langle x^*, u\rangle \leq f'_\varepsilon(x, u) \; \forall u \in X$.

Sobre la regla de la cadena subdiferencial, tenemos los siguientes resultados. Primero, el teorema 2.4.2 (vii) de [21].

Proposición 1.22 *Sea Y un espacio de Banach. Sea $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una función propia y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Para $y \in \operatorname{dom} h$ y $\varepsilon > 0$, y considerando $x \in X$ tal que $y = Ax$, tenemos que $A^*(\partial_\varepsilon h(y)) \subseteq \partial_\varepsilon(h \circ A)(x)$.*

Además, tenemos el siguiente resultado que mezcla el teorema 2.1.3 y el corolario 2.4.6 de [21].

Proposición 1.23 *Sea Y un espacio de Banach. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa propia, y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se define la aplicación $Af : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $(Af)(y) = \inf\{f(x) \mid Ax = y\}$. Entonces Af es convexa y $\operatorname{dom}(Af) = A(\operatorname{dom} f)$. Además, para cada $y \in A(\operatorname{dom} f)$ tal que existe $x \in \operatorname{dom} f$ que cumpla $(Af)(y) = f(x)$, se tiene que para cada $\varepsilon \geq 0$:*

$$\partial_\varepsilon(Af)(y) = (A^*)^{-1}(\partial_\varepsilon f(x)).$$

También se tiene que la función sublineal que describe al $\varepsilon-$subdiferencial puede ser descrita, de manera recíproca, por este conjunto, como se ve en el teorema 2.4.11 de [21].

Teorema 1.24 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa propia sci, $\bar{x} \in dom\, f$ y $\varepsilon > 0$. Entonces se tiene que*

$$\forall u \in X : f'_\varepsilon(\bar{x}, u) = \sup_{x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})} \langle x^*, u \rangle = \sigma_{\partial_\varepsilon f(\bar{x})}(u).$$

También haremos uso del cono normal, que si bien se pueden definir para casos no convexos, solo haremos uso de la definición del caso convexo.

Definición 1.25 *Para un conjunto convexo $C \subseteq X$ y $\bar{x} \in C$, definimos el cono normal de C en $\bar{x}$ como*

$$N_C(\bar{x}) = \{v^* \in X^* \mid \langle v^*, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \, \forall x \in C\},$$

el cual es un cono convexo y cerrado.

En el caso $X = \mathbb{R}^n$, el cono normal tiene ciertas caracterizaciones dadas en el teorema 6.9 y el ejemplo 6.24 de [17].

Proposición 1.26 *Para un conjunto convexo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\bar{x} \in C$ definimos el cono tangente de C en $\bar{x}$ como*

$$T_C(\bar{x}) = cl\{w \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda > 0 \text{ tal que } \bar{x} + \lambda w \in C\} = cl(\mathbb{R}_+(C - \bar{x})),$$

el cual es un cono convexo y cerrado.
Si C es además un cono, definimos su polar como

$$C^\circ = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle \leq 0 \, \forall w \in C\}.$$

Así, para cualquier conjunto convexo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\bar{x} \in C$ se tiene que

$$(N_C(\bar{x}))^\circ = T_C(\bar{x}), (T_C(\bar{x}))^\circ = N_C(\bar{x}).$$

A continuación, presentamos una noción de espacio topológico que será importante más adelante.

Definición 1.27 *Sea (T, τ) un espacio topológico. Diremos que T es un espacio lcH si es localmente compacto y Hausdorff. Además, diremos que T es un espacio $\sigma-$lcH si es un espacio lcH y además es $\sigma-$compacto (es decir, unión numerable de conjuntos compactos).*

Los espacios $\sigma-$lcH serán útiles cuando trabajemos en el espacio dual de las funciones continuas, para así identificarlo con el espacio de medidas de Radon, y que además las medidas de Radon sean regulares, como se verá en la la sección 1.3. A continuación presentaremos una propiedad de los espacios localmente compactos que se puede encontrar en el teorema 6.2 de la sección XI de [5].

Proposición 1.28 *Sea E un espacio localmente compacto. Entonces, para cada $K \subseteq E$ compacto y cada $U \supseteq K$ abierto, existe un conjunto $V \subseteq E$ abierto precompacto tal que*

$K \subseteq V \subseteq cl(V) \subseteq U$. En particular, considerando $U = E$, tenemos que, para cada $K \subseteq E$ compacto, existe un $V \subseteq E$ abierto precompacto tal que $K \subseteq V$.

Necesitaremos además la noción de espacio perfectamente normal, dado que el teorema de selección de Michael de la sección 1.2 lo requiere. Para esto usaremos las definiciones y resultados de [5]. A continuación presentamos las definiciones del capítulo VII, secciones 2, 3 y 7, en [5].

Definición 1.29 *Un espacio Hausdorff E es regular si cada punto $p \in X$ y cada conjunto cerrado $F \subseteq E$ tal que $p \notin F$ tienen vecindades disjuntas. Además, diremos que el espacio E es completamente regular si existe una función continua $\varphi : E \to [0,1]$ tal que $\varphi(p) = 1$ y $\varphi(a) = 0 \; \forall a \in F$.*

Se prueba fácilmente que todo espacio completamente regular es en particular regular.

Definición 1.30 *Un espacio de Hausdorff E es normal si cada par de conjuntos cerrados disjuntos de E tiene vecindades disjuntas. Además, el espacio E será perfectamente normal si además de ser normal, se tiene que cada conjunto cerrado es un G_δ, es decir, intersección de a lo más una cantidad numerable de conjuntos abiertos.*

Para encontrar la relación entre estas definiciones y los espacios $\sigma-$lcH, usaremos los resultados del teorema 6.4 del capítulo XI y del problema 6.7 del capítulo VIII de [5].

Proposición 1.31 *Sea E un espacio lcH. Entonces E es completamente regular.*

Proposición 1.32 *Si cada abierto U de un espacio regular E es Lindelöf (es decir, todo recubrimiento de abiertos de U tiene subrecubrimiento numerable), entonces E es perfectamente normal.*

Como un espacio $\sigma-$compacto es Lindelöf, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.33 *Si T es un espacio $\sigma-$lcH, entonces T es perfectamente normal.*

Una propiedad útil de los espacios normales es la existencia de particiones de la unidad. El siguiente resultado se encuentra en el teorema 36.1 de [10].

Definición 1.34 *Sea $\{U_1, \dots, U_N\}$ un recubrimiento abierto finito de un espacio topológico E. Diremos que una familia indexada de funciones continuas $\phi_{\mathrm{i}} : E \to [0,1]$, $\mathrm{i} \in \{1, \dots, N\}$ es una partición de la unidad dominada por $\{U_{\mathrm{i}}\}_{\mathrm{i}=1}^N$ si:*

1. *$sop\,\phi_{\mathrm{i}} = cl\{x \in E \mid \phi_{\mathrm{i}}(x) \neq 0\} \subseteq U_{\mathrm{i}}$ para cada $\mathrm{i} \in \{1, \dots, N\}$.*
2. *$\sum_{\mathrm{i}=1}^N \phi_{\mathrm{i}}(x) = 1$ para cada $x \in E$.*

Teorema 1.35 *Sea E un espacio normal, y $\{U_1, \dots, U_N\}$ un recubrimiento abierto finito de E. Entonces existe una partición de la unidad dominada por $\{U_{\mathrm{i}}\}_{\mathrm{i}=1}^N$.*

1.2. Multiaplicaciones

Sean X, Y dos conjuntos no vacíos. Denotaremos $\mathcal{P}(Y)$ a la familia de subconjuntos de Y. Llamaremos multiaplicación de X en Y a una función $S : X \to \mathcal{P}(Y)$, y la denotaremos $S : X \rightrightarrows Y$.

Sean X un conjunto no vacío, Y un evt, y $S : X \rightrightarrows Y$ una multiaplicación. Diremos que:

- La multiaplicación es a valores no vacíos si $S(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$.
- La multiaplicación es a valores convexos si $S(x)$ es convexo para cada $x \in X$.
- La multiaplicación es a valores cerrados si $S(x)$ es cerrado para cada $x \in X$.

Al igual que las funciones a valores extendidos, el concepto de dominio se puede aplicar a las multiaplicaciones para los valores que no son vacíos. Definimos el dominio de la multiaplicación S como el conjunto

$$\operatorname{dom} S = \{x \in X \mid S(x) \neq \emptyset\}.$$

De este modo, S es a valores no vacíos si y solo si $\operatorname{dom} S = X$.

Para $O \subseteq Y$, definimos su preimagen sobre la multiaplicación S como el conjunto

$$S^{-1}(O) = \{x \in X \mid S(x) \cap O \neq \emptyset\}.$$

Definimos también la clausura de S como la multiaplicación $\operatorname{cl} S : X \to Y$ dada por $\operatorname{cl} S(x) = \operatorname{cl}(S(x))$. De este modo, $\operatorname{cl} S$ siempre será una multiaplicación a valores cerrados.

Al igual que las funciones univaluadas, se puede definir el grafo de una multiaplicación. Aunque en estricto rigor el grafo debiera ser un conjunto en $X \times \mathcal{P}(Y)$, es más útil ver y trabajar su grafo simplemente como un conjunto de $X \times Y$. De este modo el grafo de S está dado por

$$\text{graph } S = \{(x, u) \in X \times Y \mid u \in S(x)\} \subseteq X \times Y.$$

Observando que $S(x) = \{u \in Y \mid (x, u) \in \text{graph } S\}$, tenemos que S está completamente descrito por la proyección de su grafo.

Además, diremos que una función (univaluada) $u : X \to Y$ es una selección de S si $u(x) \in S(x)\, \forall x \in X$.

Partiremos dando las nociones de continuidad de una multiaplicación. Si bien estas nociones se pueden definir a través de límites de sucesiones de conjuntos, para este trabajo solo se hará uso de las siguientes caracterizaciones, que se encuentra en [9], y que presentaremos como definición.

Definición 1.36 *Sea X un espacio topológico Hausdorff, Y un espacio de Banach, y sea $S : X \rightrightarrows Y$ una multiaplicación. Diremos que S es una multiaplicación* inner-semicontinua, *lo cual abreviaremos isc, si $S^{-1}(O) \subseteq X$ es abierto para cualquier $O \subseteq Y$ abierto.*

Definición 1.37 *Sea X un espacio topológico Hausdorff, Y un espacio de Banach, y sea $S : X \rightrightarrows Y$ una multiaplicación. Diremos que S es una multiaplicación* outer-semicontinua, *lo cual abreviaremos osc, si para cualquier $V \subseteq Y$ abierto se tiene que el conjunto $\{x \in X \mid S(x) \subseteq V\}$ es abierto (en X).*

En algunos textos en inglés, la propiedad de ser inner-semicontinua también es conocida como lower-semicontinuous o lower-hemicontinuous (para evitar confusión con la semicontinuidad inferior de funciones univaluadas), sin embargo en este trabajo usaremos la notación isc para que no se confunda con las funciones sci.

Ahora procederemos a ver la noción de medibilidad de multiaplicaciones.

Definición 1.38 *Sea $(T, \mathcal{A})$ un espacio medible y X un evt. Diremos que una multiaplicación $S : T \rightrightarrows X$ es medible si para cualquier abierto $O \subseteq X$ se tiene que $S^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ (es decir, $S^{-1}(O)$ es medible).*

Observemos que, en particular, $\operatorname{dom} S = S^{-1}(X)$, por lo que es medible si S es medible.

En lo que sigue trabajaremos solamente con multiaplicaciones a valores en $\mathbb{R}^n$. Esto es debido a que en la mayoría del trabajo solo necesitaremos hacer uso del caso finito-dimensional, en el cual contamos con una gran gama de resultados que no son válidos en el caso de dimensiones infinitas. El caso más general, es decir, cuando el espacio vectorial pueda ser de dimensión infinita, se presentará en la sección 4.1, cuando será necesario esta generalización para trabajar. Así, seguiremos los conceptos dados en los capítulos 5 y 14 de [17].

Antes de seguir estudiando la medibilidad, tenemos que en el caso de multiaplicaciones definidas sobre espacios de dimensión finita, la propiedad de ser osc tiene la siguiente caracterización más sencilla.

Proposición 1.39 *Sea $S : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ una multiaplicación. S es osc si y solo si graph S es cerrado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, más aún, S es osc si y solo si S^{-1} es osc.*

Los siguientes resultados sobre multiaplicaciones medibles vienen del capítulo 14 de [17]. En lo que sigue, consideraremos $(T, \mathcal{A})$ un espacio medible y $X = \mathbb{R}^n$.

El primer resultado básico es la medibilidad de la clausura de una multiaplicación medible.

Proposición 1.40 *Sea $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multiaplicación. Tenemos que si S es medible, entonces la multiaplicación $\operatorname{cl} S$ es medible.*

Otros criterios para determinar si una multiaplicación es medible se presentan a a continuación.

Proposición 1.41 *Sea $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multiaplicación a valores cerrados. Entonces cada una de las siguientes afirmaciones son equivalentes a que S sea medible:*

(a) $S^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ *para todos los conjuntos abiertos* $O \subseteq \mathbb{R}^n$ *(la definición).*
(b) $S^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ *para todos los conjuntos cerrados* $C \subseteq \mathbb{R}^n$*.*
(c) $S^{-1}(K) \in \mathcal{A}$ *para todos los conjuntos compactos* $K \subseteq \mathbb{R}^n$*.*
(d) $S^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *para todas las bolas cerradas* $B \subseteq \mathbb{R}^n$*.*
(e) $S^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ *para todas las bolas abiertas* $O \subseteq \mathbb{R}^n$*.*
(f) $\{t \in T \mid S(t) \subseteq O\} \in \mathcal{A}$ *para todos los conjuntos abiertos* $O \in \mathbb{R}^n$*.*
(g) $\{t \in T \mid S(t) \subseteq C\} \in \mathcal{A}$ *para todos los conjuntos cerrados* $C \in \mathbb{R}^n$*.*
(h) La función $t \in T \to \mathrm{d}(x, S(t)) \in \overline{\mathbb{R}}$ *es medible para cada* $x \in \mathbb{R}^n$*, donde* d *es la función distancia* $\mathrm{d}(x, C) = \mathrm{ínf}_{z\in C} \|x - z\| \; \forall x \in \mathbb{R}^n, C \subseteq \mathbb{R}^n$*.*

Uno de los resultados más importantes de las multiaplicaciones medibles fue descubierta por Castaing, la cual está relacionada con la existencia de selecciones medibles, e incluso una secuencia de selecciones con una propiedad de densidad, la cual se encuentra en el teorema 14.5 de [17] y presentamos a continuación.

Teorema 1.42 *Sea $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multiaplicación a valores cerrados. La medibilidad de S es equivalente a cada una de las siguientes condiciones, en combinación con la medibilidad de $dom\, S$:*

(a) S admite una representación de Castaing: existe una familia numerable $\{x^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles $x^\nu : dom\, S \to \mathbb{R}^n$ tales que $\{x^\nu(t)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ es denso en $S(t)$ para cada $t \in dom\, S$, es decir

$$S(t) = cl\{x^\nu(t) \mid \nu \in \mathbb{N}\} \text{ para cada } t \in dom\, S.$$

En particular, x^ν es una selección de S para cada $\nu \in \mathbb{N}$.

(b) Existe una familia numerable $\{y^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles $y^\nu : dom\, S \to \mathbb{R}^n$ tales que:
  (i) para cada $\nu \in \mathbb{N}$, el conjunto $T^\nu = \{t \in T \mid y^\nu(t) \in S(t)\}$ es medible.
  (ii) para cada $t \in T$, el conjunto $S(t) \cap \{y^\nu(t) \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ es denso en $S(t)$.

El teorema anterior tiene como corolario el siguiente resultado, que muchas veces se ocupa por sí solo, por lo que aún así lo llamaremos teorema.

Teorema 1.43 *(*Teorema de las selecciones medibles*). Si $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multiaplicación medible a valores cerrados, entonces existe una selección medible, es decir, una función medible $x : dom\, S \to \mathbb{R}^n$ tal que $x(t) \in S(t) \; \forall t \in dom\, S$.*

Las multiaplicaciones medibles tienen grafo medible.

Teorema 1.44 *Sea $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multiaplicación a valores cerrados. Si S es medible, entonces graph S es un conjunto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-medible de $T \times \mathbb{R}^n$.*

La medibilidad de las selecciones se mantiene bajo ciertas operaciones como se verá en las siguientes proposiciones.

Proposición 1.45 *Sea J un conjunto de índices, y para cada $j \in J$ consideremos una multiaplicación medible $S_j : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Entonces:*

(a) si S_j es a valores cerrados $\forall j \in J$ y J es numerable, la multiaplicación $S(t) = \bigcap_{j \in J} S_j(t)$ es medible.

(b) si J es numerable, la multiaplicación $S(t) = \bigcup_{j \in J} S_j(t)$ es medible.

(c) si J es finito, y considerando para cada $j \in J$ un $\lambda_j \in \mathbb{R}$ arbitrario, la multiaplicación $S(t) = \sum_{j \in J} \lambda_j S_j(t)$ es medible.

(d) si $J = \{1, \ldots, r\}$, y considerando para cada $j \in J$ que $S_j : T \rightrightarrows \mathbb{R}^{n_j}$, para $n_j \in \mathbb{N}$, en vez de $S_j : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, la multiaplicación producto $S(t) = S_1(t) \times \ldots \times S_r(t)$ es medible.

Proposición 1.46

(a) Sea $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multiaplicación medible, y sea $M : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ una multiaplicación isc. Entonces la multiaplicación $M \circ S$, dada por $M \circ S(t) = M(S(t)) \forall t \in T$ es medible.

(b) Sea $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multiaplicación medible a valores cerrados, y para cada $t \in T$ consideremos una multiaplicación osc $M(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$. Supongamos que la multiaplicación del grafo de M,es decir, la multiaplicación $t \in T \rightarrow$ graph $M(t, \cdot) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es medible (lo cual es cierto en particular si $M(t, \cdot)$ es el mismo para cada t). Entonces la multiaplicación $t \in T \rightarrow M(t, S(t))$ es medible.

Un caso particular interesante es el de las funciones de Carathéodory, cuya definición y propiedades se enuncian a continuación.

Definición 1.47 *Una función $F : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice una función de Carathéodory cuando $F(t, x)$ es medible en t para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fijo y continua en x para cada $t \in T$ fijo.*

Proposición 1.48 *Sea $F : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de Carathéodory y $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ una multiaplicación medible a valores cerrados, con k a definir. Se tiene que:*

(a) La multiaplicación $t \in T \rightarrow F(t, S(t)) \subseteq \mathbb{R}^m$ es medible para $k = n$.

(b) La multiaplicación $t \in T \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(t, x) \in S(t)\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible para $k = m$.

Para finalizar esta sección, dado que en ocasiones se requiere que las selecciones sean continuas, se presenta el teorema de selecciones continuas de Michael, dado en [9] (teorema 3.1'''), donde se requiere la definición de perfectamente normal (definición 1.30).

Teorema 1.49 *(*Teorema de selección de Michael*). Sea X un espacio topológico Hausdorff. Los siguientes son equivalentes:*

a) X es perfectamente normal.

b) Cada multiaplicación isc $\Phi : X \rightrightarrows \mathbb{R}$ a valores convexos y no vacíos admite una selección continua.

c) Si Y es un espacio de Banach separable, entonces cada multiaplicación isc $\Phi : X \rightrightarrows Y$ a valores convexos y no vacíos admite una selección continua ($\exists \varphi : X \to Y$ continua tal que $\varphi(x) \in \Phi(x)\ \forall x \in X$).

Esto será útil cuando trabajemos en espacios $\sigma-$lcH, pues por el corolario 1.33 estos espacios son perfectamente normales.

1.3. Espacios de funciones y sus duales

En esta sección nos dedicaremos a explicitar los espacios de funciones en los que trabajaremos, junto a sus duales. Durante toda esta sección consideraremos un espacio medible $(T, \mathcal{A})$ y un evt X.
Denotaremos $\mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; X)$ al espacio de las funciones que son $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$-medibles. Si además tenemos una medida μ en $(T, \mathcal{A})$, denotaremos $L^0(T, \mathcal{A}, \mu; X)$ al espacio dado por el cuociente de $\mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; X)$ con la relación de equivalencia de la igualdad $\mu-$ctp.
Como es usual, para $1 \leq p < +\infty$ denotaremos $\mathcal{L}^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ al espacio dado por las funciones $u \in \mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; \mathbb{R})$ que además cumplen que su módulo elevado a la potencia p es integrable, y denotaremos $L^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ a su espacio cuociente dado por la relación de equivalencia de la igualdad $\mu-$ctp, el cual sabemos que es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_T |u(t)|^p \mathrm{d}\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \ \forall u \in L^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}).$$

De manera similar, denotaremos $\mathcal{L}^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ al espacio dado por todas las funciones $u \in \mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; \mathbb{R})$ que cumplen que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $|u(t)| < a\ \forall t \in T\ \mu-$ctp, y denotaremos $L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ a su espacio cuociente dado por la relación de equivalencia de la igualdad $\mu-$ctp, el cual sabemos que es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \text{ínf}\{a \in \mathbb{R} \mid |u(t)| < a\ \forall t \in T\ \mu - \text{ctp}\}\ \forall u \in L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu).$$

Muchas veces denotaremos $\mathcal{L}^p(T, \mathcal{A}, \mu; (0, +\infty))$, para $p \in \{0\} \cup [1, +\infty) \cup \{+\infty\}$, al conjunto de las funciones φ tales que $\varphi \in \mathcal{L}^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ y $\varphi(t) > 0\ \forall t \in T$.
En el caso de funciones a valores en $\mathbb{R}^n$, para $1 \leq p \leq +\infty$ denotaremos $\mathcal{L}^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ al espacio que consiste en las funciones $u \in \mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; \mathbb{R}^n)$ tales que la función dada por su norma euclidiana $g(t) = |u(t)|$ cumple que $g \in \mathcal{L}^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$, en tanto denotaremos $L^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ a su espacio cuociente dado por la relación de equivalencia de la igualdad $\mu-$ctp.
Observemos que, para cualquier p tal que $1 \leq p \leq +\infty$ se tiene que

$$\mathcal{L}^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n) \text{ puede identificarse con } \mathcal{L}^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})^n.$$

En efecto, si $u \in \mathcal{L}^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, por equivalencia de normas en $\mathbb{R}^n$, $\exists c > 0$ tal que para cualquier $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{cases} \int_T |u_\mathrm{i}(t)|^p \mathrm{d}\mu(t) \leq \int_T \|u(t)\|_\infty^p \leq c^p \int_T |u(t)|^p \mathrm{d}\mu(t) < +\infty & \text{si } p < +\infty, \\ |u_\mathrm{i}(t)| \leq \|u(t)\|_\infty \leq c|u(t)| < a \; \forall t \in T \; \mu - \mathrm{ctp}, a \in \mathbb{R} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

de modo que $(u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathcal{L}^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})^n$. De manera recíproca, si consideramos cualquier $(u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathcal{L}^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})^n$, por equivalencia de normas en $\mathbb{R}^n$ existe $c > 0$ tal que:

$$\begin{cases} \int_T |u(t)|^p \mathrm{d}\mu(t) \leq c^p \int_T \|u\|_\infty^p \leq c^p \sum_{\mathrm{i}=1}^n \int_T |u_\mathrm{i}(t)|^p \mathrm{d}\mu(t) < +\infty & \text{si } p < +\infty, \\ \|u(t)\| \leq c\|u(t)\|_\infty \leq c \sum_{\mathrm{i}=1}^n |u_\mathrm{i}(t)| < a \; \forall t \in T \; \mu - \mathrm{ctp}, a \in \mathbb{R} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

de modo que u dado por $(u(t))_\mathrm{i} = u_\mathrm{i}(t)$ está en $\mathcal{L}^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$. Lo mismo se tiene para los espacios de clases, es decir:

$$L^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n) \text{ puede identificarse con } L^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})^n,$$

y así $L^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach, usando la norma

$$\|u\|_{L^p} = \|g_u\|_{L^p} \; \forall u \in L^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n), \text{ donde } g_u(t) = |u(t)| \; \forall t \in T, g_u \in L^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}).$$

De esta manera, podemos también identificar fácilmente los duales, pues observemos que si $E_1, \ldots, E_n$ son evns, entonces el dual de $E = \prod_{\mathrm{i}=1}^n E_\mathrm{i}$ está dado por $E^* = \prod_{\mathrm{i}=1}^n E_\mathrm{i}^*$, mediante la fórmula

$$\langle x^*, x \rangle = \sum_{\mathrm{i}=1}^n \langle x_\mathrm{i}^*, x_\mathrm{i} \rangle \text{ con } x_\mathrm{i}^* \in E_\mathrm{i}^*, x_\mathrm{i} \in E_\mathrm{i} \; \forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\},$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ y $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in E^*$.

Para el caso $1 < p < +\infty$, recordemos que según [6] (teorema 6.15) y usando lo anterior, podemos identificar los duales de los espacios $L^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, con los espacios $L^q(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, para $q \in (1, +\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, con la fórmula:

$$\langle v, u \rangle = \int_T \langle u(t), v(t) \rangle \mathrm{d}\mu(t) \; \forall u \in L^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n), v \in L^q(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n).$$

Además, si μ es $\sigma-$finita, lo mismo pasa para $p = 1$ y $q = \infty$.

Para el caso de espacios de funciones continuas, necesitaremos una topología en T. Sea T un espacio topológico Hausdorff. Consideremos los siguientes espacios.

- $C(T; \mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones continuas de T a $\mathbb{R}^n$. Trivialmente este espacio se puede identificar con $C(T; \mathbb{R})^n$.
- $C_c(T; \mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones continuas de T a $\mathbb{R}^n$ a soporte compacto. Igual que en el caso L^p, este espacio se identifica con $C_c(T; \mathbb{R})^n$. Para ver esto, recordemos que para cada $f \in C_c(T; \mathbb{R})$ se cumple que:

$$\mathrm{sop}\, f = \mathrm{cl}\left(\{t \in T \,|\, f(t) \neq 0\}\right) \subseteq T \text{ es compacto},$$

en tanto para cada $u \in C_c(T;\mathbb{R}^n)$ se tiene que:

$$\operatorname{sop} u = \operatorname{cl}\left(\{t \in T \,|u(t) \neq 0\}\right) \subseteq T \text{ es compacto.}$$

De este modo, como para cualquier $u \in C(T;\mathbb{R}^n)$ se tiene que $u = (f_1, \ldots, f_n)$, con $f_{\mathrm{i}} \in C(T;\mathbb{R}) \forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$, basta observar que

$$\{t \in T \,|u(t) \neq 0\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{t \in T \,|f_j(t) \neq 0\},$$

por lo que se tiene que

$$\operatorname{sop} f_{\mathrm{i}} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{sop} f_j = \operatorname{sop} u \; \forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\},$$

de donde se concluye que $C_c(T;\mathbb{R}^n)$ se puede identificar con $C_c(T;\mathbb{R})^n$.

- $C_0(T;\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones continuas de T a $\mathbb{R}^n$ que se desvanecen en el infinito, es decir, para cada $f \in C_0(T;\mathbb{R})$, se tiene que:

  $$\forall \varepsilon > 0 : \operatorname{cl}\left(\{t \in T \mid |f(t)| \geq \varepsilon\}\right) \subseteq T \text{ es compacto,}$$

  en tanto para cada $u \in C_0(T;\mathbb{R}^n)$, se tiene que:

  $$\forall \varepsilon > 0 : \operatorname{cl}\left(\{t \in T \mid |u(t)| \geq \varepsilon\}\right) \subseteq T \text{ es compacto,}$$

  donde $|\cdot|$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^n$ pues todas son equivalentes. Por un argumento análogo al anterior, se comprueba que $C_0(T;\mathbb{R}^n)$ se identifica con $C_0(T;\mathbb{R})^n$. Para esto, basta ver que para cualquier $u \in C(T;\mathbb{R}^n)$ tal que $u = (f_1, \ldots, f_n)$, con $f_{\mathrm{i}} \in C(T;\mathbb{R}) \forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$ y cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que:

  $$\{t \in T \,|\|u(t)\|_\infty \geq \varepsilon\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{t \in T \mid |f_j(t)| \geq \varepsilon\},$$

  por lo que se cumple que, $\forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$:

  $$\operatorname{cl}\left(\{t \in T \mid |f_{\mathrm{i}}(t)| \geq \varepsilon\}\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{cl}\left(\{t \in T \mid |f_j(t)| \geq \varepsilon\}\right) = \operatorname{cl}\left(\{t \in T \mid \|u(t)\|_\infty \geq \varepsilon\}\right).$$

Claramente $C_c(T;\mathbb{R}^n) \subseteq C_0(T;\mathbb{R}^n) \subseteq C(T;\mathbb{R}^n)$. Observando que tanto $C_c(T;\mathbb{R}^n)$ como $C_0(T;\mathbb{R}^n)$ son subespacios del espacio de las funciones acotadas, entonces estos espacios se pueden dotar de la norma uniforme, es decir, considerando $|\cdot|$ como la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$, se tiene que la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ está dada para cualquier función $u : T \to \mathbb{R}^n$ acotada por

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in T} |u(t)|.$$

De este modo, tenemos la siguiente relación entre $C_c(T;\mathbb{R}^n)$ y $C_0(T;\mathbb{R}^n)$, según la proposición 4.35 de [6].

Proposición 1.50 *Sea T un espacio lcH. Entonces $C_0(T;\mathbb{R}^n)$ es la clausura de $C_c(T;\mathbb{R}^n)$ con la norma uniforme.*

Como el espacio de funciones acotadas es Banach, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.51 *Sea T un espacio lcH. Entonces $C_0(T;\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach con la norma uniforme.*

En lo que sigue, consideraremos que T es un espacio lcH, y denotaremos C al espacio de Banach $C = C_0(T;\mathbb{R}^n)$ con la norma uniforme. La idea ahora es representar el dual de C con medidas de Radon. Para eso, trabajaremos en los espacios de medidas regulares. Consideremos las siguientes definiciones de la sección 7.1 de [6].

Definición 1.52 *Definimos $\mathcal{M}(T,\mathcal{B}(T))$ como el espacio de medidas $\theta : \mathcal{B}(T) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Sea $\theta \in \mathcal{M}(T,\mathcal{B}(T))$. Para $E \in \mathcal{B}(T)$, diremos que:*

- *θ es regular exterior en E si:*
$$\theta(E) = \inf_{\substack{U \supseteq E \\ U \text{ abierto}}} \theta(U).$$
- *θ es regular interior en E si:*
$$\theta(E) = \sup_{\substack{K \subseteq E \\ K \text{ compacto}}} \theta(K).$$
- *θ es regular si es finita en todos los conjuntos compactos, y además es regular exterior e interior en todos los borelianos de T.*
- *θ es una medida de Radon en T si es finita en todos los conjuntos compactos, regular exterior en todos los borelianos, y regular interior en todos los abiertos.*

En el caso $\sigma-$lcH, tenemos la siguiente propiedad dada en el corolario 7.6 de [6].

Proposición 1.53 *Si T es un espacio $\sigma-$lcH, entonces toda medida de Radon en T es regular.*

Ahora procederemos a enunciar el dual de $C = C_0(T;\mathbb{R}^n)$. Para esto, primero enunciaremos el caso $n = 1$, según el capítulo 7 de [6]. Se define primero el espacio de medidas de Radon.

Definición 1.54 *Sea una medida con signo $\theta : \mathcal{B}(T) \to \overline{\mathbb{R}}$. Diremos que θ es una medida de Radon con signo si sus partes positiva y negativa son de Radon. Así, definimos el espacio:*

$$M(T) = \{\theta : \mathcal{B}(T) \to \mathbb{R} \mid \theta \text{ es medida de Radon con signo de variación finita}\}.$$

Tenemos que $M(T)$ es un espacio vectorial con respecto a la norma:

$$\|\theta\| = |\theta|(T),$$

donde $|\theta|$ corresponde a la variación total de θ. Con esta norma, de hecho, $M(T)$ es un espacio de Banach, y lo llamaremos espacio de medidas de Radon con signo.

Con esta definición, tenemos el teorema de Riesz.

Teorema 1.55 *Se tiene que C^* se puede identificar con $M(T)$, mediante el isomorfismo $\Phi : M(T) \to C^*$ dado por:*

$$\Phi(\theta) = L_\theta, \text{ donde } L_\theta(f) = \int_T f(t)\mathrm{d}\theta(t) = \int_T f(t)\mathrm{d}\theta_+ - \int_T f(t)\mathrm{d}\theta_- \;\forall f \in C,$$

donde θ_+, θ_- corresponden a las partes positiva y negativa de θ, respectivamente.
De este modo, tenemos que $\langle\cdot,\cdot\rangle : M(T) \times C \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\langle \theta, u\rangle = L_\theta(u) \;\forall u \in C,\; \theta \in M(T),$$

es un emparejamiento de C y $M(T)$, por lo que estos espacios están en dualidad al dotar a C de la topología inducida por la norma uniforme y a $M(T)$ de la topología τ^{w^*}.

Ya con esto podemos pasar al caso general, es decir, $n \geq 1$ arbitrario, y $C = C_0(T; \mathbb{R}^n)$.

Corolario 1.56 *Considereremos el espacio $M = M(T)^n$. Este espacio se puede identificar con el dual de C mediante la forma bilineal:*

$$\langle \theta, u\rangle = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \langle \theta_\mathrm{i}, u_\mathrm{i}\rangle \;\forall \theta \in M,\; \forall u \in C,$$

donde $\langle \theta_\mathrm{i}, u_\mathrm{i}\rangle$ son según el teorema 1.55. Así, en este caso también se cumple que C con la topología inducida por la norma uniforme y M con la topología τ^{w^*} son espacios en dualidad.

En algunos textos definen el espacio $M(T, \mathbb{R}^n)$, al cual se refieren como el espacio de medidas de Radon con signo finitas en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, en la práctica simplemente se usa que $M(T, \mathbb{R}^n) = M(T)^n$, y es por esto que acá se definió M directamente de esa forma.

Sea $\theta \in M$. Si $\lambda \in \mathcal{M}(T, \mathcal{B}(T))$, $\lambda \neq 0$, es $\sigma-$finita y tal que $\theta_\mathrm{i} \ll \lambda \;\forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$, entonces las derivadas de Radon-Nikodym $\frac{\mathrm{d}\theta_\mathrm{i}}{\mathrm{d}\lambda}$ están bien definidas, por lo que definimos la derivada de Radon-Nikodym de θ con respecto a λ como:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}(t) \in \mathbb{R}^n,\; \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}(t)\right)_\mathrm{i} = \frac{\mathrm{d}\theta_\mathrm{i}}{\mathrm{d}\lambda}(t) \;\forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}, \forall t \in T.$$

En M, consideraremos la variación dada por:

$$|\theta| = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} |\theta_\mathrm{i}|,\; \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in M.$$

Observemos que si $\theta \neq 0$, entonces $|\theta| \in \mathcal{M}(T, \mathcal{B}(T)) \setminus \{0\}$, y además $\theta_{\mathrm{i}} \ll |\theta|$ para todo $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$, por lo que $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}$ está bien definido, en tanto si $\theta = 0$ consideraremos $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|} = 0$, de modo que para cualquier $\theta \in M$ se cumple que

$$\langle \theta, y \rangle = \int_T \left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \right\rangle \mathrm{d}|\theta|(t) \; \forall y \in C.$$

De este modo, para cualquier medida $\sigma-$finita $\lambda \in \mathcal{M}(T, \mathcal{B}(T))$ sabemos que podemos descomponer cada θ_{i} mediante su descomposición de Lebesgue de la forma $\theta_{\mathrm{i}} = \theta_{\mathrm{i}}^a + \theta_{\mathrm{i}}^s$, donde θ_{i}^a corresponde a la parte absolutamente continua con respecto a λ de θ_{i}, y θ_{i}^s corresponde a su parte singular. Así, definimos:

$$\theta^a, \theta^s \in M : (\theta^a)_{\mathrm{i}} = \theta_{\mathrm{i}}^a, (\theta^s)_{\mathrm{i}} = \theta_{\mathrm{i}}^s \; \forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}.$$

Con todo lo anterior, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.57 *Sea $\theta \in M$ y $\lambda \in \mathcal{M}(T, \mathcal{B}(T))$ una medida $\sigma-$finita. Tenemos entonces que si $\lambda \neq 0$:*

$$\langle \theta, y \rangle = \int_T \left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\lambda}(t) \right\rangle \mathrm{d}\lambda(t) + \int_T \left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t) \right\rangle \mathrm{d}|\theta^s|(t) \; \forall y \in C.$$

Terminamos el estudio del espacio de funciones continuas con el siguiente resultado, que permite encontrar una función continua suficientemente cercana a cualquier función medible, el cual corresponde al teorema 7.10 de [6].

Teorema 1.58 *(Teorema de Lusin). Sea θ una medida de Radon en $\mathcal{B}(T)$. Sea $f : T \to \mathbb{R}$ una función $(\mathcal{B}(T), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-medible cuyo soporte es de medida θ finita. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\phi \in C_c(T; \mathbb{R})$ tal que $\phi = f$ excepto en un conjunto de medida θ menor a ε. Si f es acotado, entonces ϕ puede ser tomado para satisfacer $\|\phi\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.*

Sea $(T, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, donde μ es una medida $\sigma-$finita. Terminaremos esta sección con el poco conocido dual de $L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$. Para esto usaremos los resultados de los capítulos 3 y 4 de [19], de donde se deduce el siguiente resultado sobre la representación del dual, usualmente conocido como teorema de representación de Yosida-Hewitt.

Teorema 1.59 *Sea $v \in (L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n))^*$. Entonces v se puede descomponer de manera única como*

$$v(u) = \int_T \langle u(t), \varphi^a(t) \rangle \mathrm{d}\mu(t) + v^s(u) \; \forall u \in L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n),$$

donde $\varphi^a \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, el cual recibe el nombre de parte absolutamente continua de v, en tanto v^s recibe el nombre de parte singular de v, y corresponde a un funcional con la siguiente propiedad: dada cualquier medida finita τ equivalente a μ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $S \in \mathcal{A}$ tal que $\tau(T \setminus S) < \varepsilon$, y $v^s(u) = 0 \, \forall u \in L^\infty(S)$ (donde $L^\infty(S)$ corresponde al subespacio de $L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ que consiste de las funciones u tales que $u(t) = 0 \, \forall t \in T \setminus S$ $\mu-$ctp).

Este resultado viene del hecho de que cuando un espacio de medida $(T, \mathcal{F}, \lambda)$ es completo, con λ medida $\sigma-$finita, el dual de $L^\infty(T, \mathcal{F}, \lambda; \mathbb{R})$ está relacionado con un espacio llamado *espacio de medidas finitamente aditivas*, al cual se le denota como $\mathrm{ba}\,(\mathcal{F})$, cuyos elementos son similares a las medidas, pero no cumplen la $\sigma-$aditividad, solo la aditividad para colecciones finitas de conjuntos. Se tiene entonces que el dual de $L^\infty(T, \mathcal{F}, \lambda; \mathbb{R})$ corresponde a los elementos $\nu \in \mathrm{ba}\,(\mathcal{F})$ tales que para todo $A \in \mathcal{F}$ tal que $\lambda(A) = 0$, entonces $\nu(A) = 0$. Se tiene además que los elementos de $\mathrm{ba}\,(\mathcal{F})$ se pueden descomponer en una parte $\sigma-$aditiva y una parte puramente finitamente aditiva. Así, aplicando esta identificación para $(T, \mathcal{F}, \lambda)$ igual a la completación de $(T, \mathcal{A}, \mu)$, y observando que $L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ es un sev de $L^\infty(T, \mathcal{F}, \lambda; \mathbb{R})$, que gracias al teorema de Hahn-Banach sabemos que el dual de un sev con la norma traza corresponde a la restricción sobre dicho sev del dual del evn que lo contiene, y que la norma traza de $L^\infty(T, \mathcal{F}, \lambda; \mathbb{R})$ es igual a la norma usual en $L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ dado que $(T, \mathcal{F}, \lambda)$ es la completación de $(T, \mathcal{A}, \mu)$, entonces a la parte $\sigma-$aditiva restringida sobre $\mathcal{A}$ se le puede aplicar el teorema de Radon-Nikodym, obteniendo así el elemento de $L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ del teorema anterior, en tanto la parte puramente finitamente aditiva cumple dicha propiedad de singularidad con respecto a cualquier medida σ-aditiva. Para facilitar referenciar la singularidad de v^s del teorema anterior, consideremos la siguiente definición y notación.

Observación 1.60 *Bajo la notación del teorema 1.59, diremos que* $v^s \in (L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n))^*$ *es singular si, para cualquier medida finita (estrictamente positiva)* γ *en* $(T, \mathcal{A})$ *cumple que, para cualquier* $\varepsilon > 0$*, existe* $F \in \mathcal{A}$ *tal que* $\gamma(F) < \varepsilon$ *y* $\nu(T \setminus F) = 0$*. Notaremos* $\Pi(\mathcal{A})^n$ *al espacio de todos los elementos singulares de* $(L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n))^*$*.*

Capítulo 2

Resultados previos de funciones integrales

Las integrales aparecen en muchas áreas de las matemáticas, por ejemplo en el área de probabilidades y procesos estocásticos las integrales sirven para calcular esperanzas, en el área de optimización y equilibrio, las integrales aparecen en las funciones objetivos de los problemas de cálculo de variaciones y de control óptimo, y además en las áreas de análisis funcional y ecuaciones en derivadas parciales las integrales aparecen puesto que requieren mucho trabajo en espacios L^p.

En este trabajo se estudiarán las integrales como funciones, es decir, funciones que contienen integrales en su expresión. Para esto, seguiremos la estructura dada por Rockafellar desde 1968 (ver [12], [14], [15]), la cual plantea lo siguiente: sea $(T, \mathcal{A})$ un espacio medible, μ una medida en $\mathcal{A}$, X un espacio vectorial real y L un espacio de funciones $x : T \to X$. Para una función $f : T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$, se define la función integral $I_f : L \to \overline{\mathbb{R}}$ de la forma

$$I_f(x) = \int_T f(t, x(t)) \mathrm{d}\mu(t), \; \forall x \in L. \tag{2.1}$$

Antes de revisar las hipótesis necesarias para que I_f esté bien definida, presentaremos algunos ejemplos de funciones integrales. Como primer ejemplo tenemos las normas de los espacios $L = L^p(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$, para $1 \leq p < +\infty$, donde las integrales aparecen como el funcional

$$I_f(x) = \|x\|_{L^p}^p = \int_T |x(t)|^p \mathrm{d}\mu(t), \; x \in L,$$

caso en el que claramente $X = \mathbb{R}$ y $f(t, x) = |x|^p$. También tenemos las funciones lineales, para $y \in L^q(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ fijo, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dadas por

$$I_f(x) = \int_T x(t) y(t), \; x \in L,$$

donde $f(t, x) = xy(t)$.
Como segundo ejemplo, tenemos el caso simple de una familia de funciones $f_t = f(t, \cdot)$ en X,

que pueden definir otra función

$$F(x) = \int_T f(t,x)\mathrm{d}\mu(t), x \in X,$$

donde la integral se puede ver como la "suma continua" de las funciones f_t (con respecto a μ). En este caso se puede apreciar que $L = X$, que se puede ver como el espacio de funciones constantes. Este ejemplo, al presentar la integral como la "suma continua" de una familia de funciones, motiva a centrar nuestro estudio en funciones convexas, dado que lo que nos interesa en este trabajo son los subdiferenciales de las funciones integrales, lo cual puede ser visto como la generalización de los subdiferenciales de sumas de funciones convexas al hacer esta "suma continua". Además, este ejemplo nos permite observar que, si bien esta función se puede ver como una función a dos variables, también puede ser visto como una familia de funciones donde la primera variable solo funcionaría como indexación, es decir, la función f puede verse como la familia $\{f(t,\cdot)\}_{t\in T}$, con $f(t,\cdot) : X \to \mathbb{R}$. Para facilitar la lectura, se suele usar la notación f_t para referirse a los elementos de esta familia, de modo que $f_t = f(t,\cdot)$. De esta manera, tenemos que la función integral se ve de la forma:

$$I_f(x) = \int_T f_t(x)\mathrm{d}\mu(t),$$

donde se aprecia que f_t se puede ver como el sumando de esta "suma continua" a la que corresponde la integral. Esta dualidad de ver a f tanto como una función a dos variables que se integrará sobre la primera, y también como una familia de funciones a la que se le aplicará una suma continua, motiva a darle algún nombre a las funciones que cumplen este rol, y es por esto que en lo que sigue llamaremos *integrand* a las funciones $f : T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$, debido a su naturaleza de ser el elemento a integrar, de manera similar a los sumandos de una sumatoria.
Como último ejemplo están los casos de dos de los temas más usuales en la teoría de la optimización, que son el cálculo de variaciones y el control óptimo, en donde muchos problemas involucran funcionales de la forma

$$I_f(z) = \int_a^b F(t, z(t), \dot{z}(t))\mathrm{d}t,$$

donde $z : [a,b] \to Z$ es una curva en el espacio vectorial Z, con derivada $\dot{z}$, y $F : [a,b] \times Z \times Z \to \mathbb{R}$ es una función dada. Este funcional puede verse como una función integral de la forma de la ecuación (2.1) al considerar $T = [a,b]$, μ como la medida usual de $\mathbb{R}$, $X = Z \times Z$, $f = F$, y L como el espacio de funciones continuas $(z,w) : T \to X$ tales que $w = \dot{z}$. Por supuesto el estudio también sirve en el caso de una función z fija, que puede considerarse un control dado, para el funcional

$$I_f(w) = \int_a^b F(t, z(t), w(t)),$$

donde ahora $X = Z$, L es el espacio de funciones continuas de T a X y $f(t,x) = F(t, z(t), x)$. Estos últimos ejemplos motivan a centrar nuestro trabajo al caso de funciones integrales sobre el espacio de funciones continuas.

Sea entonces $(T, \mathcal{A})$ un espacio medible, y X un espacio vectorial topológico.

Como se mencionó antes, a una función de la forma $f : T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ la llamaremos integrand, en las cuales podemos denotar como f_t a las funciones $f(t, \cdot)$ para cada $t \in T$ fijo. De este modo, se pueden definir rápidamente algunas cosas, por ejemplo:

- Diremos que el integrand f es convexo si f_t es convexo para cada $t \in T$.
- Diremos que el integrand f es sci si f_t es sci para cada $t \in T$.
- Diremos que el integrand f es propio si f_t es propio, es decir, $f_t > -\infty$ y $f_t \not\equiv +\infty$ para todo $t \in T$.

lo cual será muy útil pues más adelante usaremos propiedades del análisis convexo que requieren funciones convexas, propias y sci.

Lo que sigue es precisar cuáles serán las hipótesis sobre el integrand, el espacio medible, la medida, el espacio vectorial y el espacio de funciones que permiten que su función integral I_f esté bien definida. Para esto, en este capítulo nos limitaremos a trabajar el caso en que X es de dimensión finita, es decir, de ahora en adelante consideraremos $X = \mathbb{R}^n$, puesto que en la mayoría del trabajo se usarán las propiedades de multiaplicaciones medibles a valores en $\mathbb{R}^n$ vistas en la sección 1.2.

Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un integrand. Antiguamente se pedían requisitos exigentes, como considerar al integrand $f(t, x)$ continuo en t y en x conjuntamente, o incluso diferenciable en algún grado conveniente. Posteriormente Carathéodory logró relajar un poco las condiciones al pedir solo la continuidad en x y la medibilidad en t (conocidas como las condiciones de Carathéodory), pero aún así esto era insuficiente para resolver problemas de optimización que involucraban restricciones, por ejemplo de desigualdad, lo que se representaba a través de penalizaciones con valores infinitos. El hecho de tener que considerar funciones que puedan tomar valores infinitos dificultaba pedir hipótesis de continuidad al integrand, hasta que Rockafellar en el año 1966 en [12] logró introducir el concepto de normal integrand que presentaremos a continuación, aunque en dicho trabajo la definición era diferente, así que presentaremos la definición que logró conseguir posteriormente en 1969, lo cual se puede ver en el capítulo 14 de [17].

Definición 2.1 *Una función $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ se dirá* normal integrand *si la multiaplicación epigráfica $epi\, f : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dada por*

$$epi\, f(t) = epi\, f(t, \cdot) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(t, x) \leq \alpha\}$$

es medible y a valores cerrados.

Los normal integrand cumplen una muy buena propiedad, la cual es la siguiente.

Proposición 2.2 *Para cualquier normal integrand $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, la multiaplicación de dominio $D_f : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada por*

$$D_f(t) = dom\, f(t, \cdot) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(t, x) < +\infty\}$$

es medible. Además, $f(t, x)$ es sci en x para cada t fijo y es medible en t para cada x fijo. Adicionalmente, $f(t, x(t))$ es medible en t cuando x depende mediblemente en t.

Demostración. Sea $O \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces

$$\begin{aligned} D_f^{-1}(O) &= \{t \in T \mid D_f(t) \cap O \neq \emptyset\} = \{t \in T \mid \exists x \in O, \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(t,x) \leq \alpha\} \\ &= \{t \in T \mid \operatorname{epi} f(t) \cap (O \times \mathbb{R}) \neq \emptyset\} = (\operatorname{epi} f)^{-1}(O \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Así, $D_f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ pues $\operatorname{epi} f$ es medible, por lo que D_f es también medible.
Por otra parte, como $\operatorname{epi} f$ es a valores cerrados, entonces f es sci en x para cada t fijo (proposición 1.3). Para el resto, consideremos una función medible arbitraria $x(\cdot) : T \to \mathbb{R}^n$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$\{t \mid f(t, x(t)) \leq \alpha\} = \{t \mid \operatorname{epi} f(t) \cap R(t) \neq \emptyset\} = \operatorname{dom}(\operatorname{epi} f \cap R),$$

donde R es la multiaplicación a valores cerrados $R : t \in T \to \{x(t)\} \times (-\infty, \alpha]$, la cual es medible por la proposición 1.45 (d). La multiaplicación $\operatorname{epi} f \cap R$ es medible por la proposición 1.45 (a), por lo que $\operatorname{dom}(\operatorname{epi} f \cap R)$ también es medible por el teorema 1.42. De este modo $\{t \mid f(t, x(t)) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$, y así la función $t \to f(t, x(t))$ es medible. Tomando el caso especial de $x(t)$ constante, obtenemos la medibilidad de f con respecto a su primer argumento. $\square$

Para definir formalmente las funciones integrales, consideremos de ahora en adelante μ una medida en $\mathcal{A}$. Recordemos que, para valores infinitos, estamos siguiendo la convención vista al principio del capítulo 1. Siguiendo esta convención, entonces para cualquier $\alpha : T \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, y definiendo su parte positiva $\alpha_+ = \max\{\alpha, 0\}$ y su parte negativa $\alpha_- = \max\{-\alpha, 0\}$, consideraremos

$$\int_T \alpha(t) \mathrm{d}\mu(t) = \int_T \alpha_+(t) \mathrm{d}\mu(t) - \int_T \alpha_-(t) \mathrm{d}\mu(t),$$

de modo que $\int_T \alpha(t)\mathrm{d}\mu(t) < +\infty$ cuando $\int_T \alpha_+(t)\mathrm{d}\mu(t) < +\infty$, en tanto $\int_T \alpha(t)\mathrm{d}\mu(t) = +\infty$ cuando $\int_T \alpha_+(t)\mathrm{d}\mu(t) = +\infty$. Aunque esta convención sirve para el caso en que las integrales de α_+ y α_- valen $+\infty$ al mismo tiempo, por lo general siempre consideraremos hipótesis que aseguren que $\int_T \alpha_-(t)\mathrm{d}\mu(t) < +\infty$.

Con esta convención ya podemos dar el resultado más importante que cumple un normal integrand, el cual se encuentra en la proposición 14.58 de [17].

Proposición 2.3 *(Funciones integrales). Para cualquier normal integrand $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ y cualquier espacio $\mathcal{X}$ de funciones medibles $x : T \to \mathbb{R}^n$, el funcional $I_f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ dado por:*

$$I_f(x) = \int_T f(t, x(t)) \mathrm{d}\mu(t),\ x \in \mathcal{X},$$

está bien definido. Es más, se tiene que:

$$I_f(x) < +\infty \Rightarrow x(t) \in \operatorname{dom} f(t, \cdot)\ \forall t \in T\ \mu - ctp.$$

Además, si f es un integrand convexo entonces I_f es convexa.

Demostración. Como para cualquier $x \in \mathcal{X}$ se tiene que $x(t)$ es medible en $t \in T$, entonces $\alpha(t) = f(t, x(t))$ también lo es por la proposición 2.2. De este modo I_f está bien definido bajo la convención antes descrita, y además tenemos que $I_f(x) < +\infty \iff \int_T \alpha_+(t)\mathrm{d}\mu(t) < +\infty$, lo que implica que $\mu(\{t \mid f(t, x(t)) = +\infty\}) = 0$. Para ver que I_f es convexa cuando f es convexo basta integrar sobre $t \in T$ la desigualdad $f(t, \lambda u(t) + (1-\lambda)v(t)) \leq \lambda f(t, u(t)) + (1-\lambda)f(t, v(t))$ pues se cumple para todo $t \in T$, para todo $u, v \in \mathcal{X}$, y para todo $\lambda \in [0, 1]$. $\square$

Con todo esto, ya podemos dar la definición formal de las funciones integrales dado que podemos asegurar que están bien definidas.

Definición 2.4 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand, y sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; \mathbb{R}^n)$. Definimos la función integral asociada a f como la función $I_f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por:*

$$I_f(u) = \int_T f(t, u(t))\mathrm{d}\mu(t) \; \forall u \in \mathcal{X}.$$

Si bien esta definición solo se presenta para $\mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; \mathbb{R}^n)$, también aplica para los conjuntos $\mathcal{X} \subseteq L^0(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, gracias a que la integral sobre μ permite que las diferencias en conjuntos de medida nula no sean relevantes. En efecto, para $[u] \in L^0(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, consideremos $x, y \in [u]$, de modo que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$ y $x(t) = y(t) \; \forall t \in T \setminus A$. Así, definimos

$$\begin{aligned} \int_T f(t, [u](t))\mathrm{d}\mu(t) &= \int_T f(t, x(t))\mathrm{d}\mu(t) = \int_{T \setminus A} f(t, x(t))\mathrm{d}\mu(t) \\ &= \int_{T \setminus A} f(t, y(t))\mathrm{d}\mu(t) = \int_T f(t, y(t))\mathrm{d}\mu(t), \end{aligned}$$

de modo que basta elegir un representante de la clase para definir la integral.

Un asunto que resulta muchas veces complicado al trabajar con integrales es el valor $-\infty$, puesto que este valor dificulta el trabajo en el análisis convexo debido a su efecto sobre las desigualdades y, por ende, problemas de optimización. Ante esto, vale preguntarse, ¿qué condiciones se pueden pedir para que I_f sea una función propia? Si bien estas condiciones serán dadas en cada caso que se estudiará, por lo general serán dos hipótesis extra las que se pedirán:

- El hecho de que $\mathrm{dom}\, I_f \neq \emptyset$ se pedirá directamente, es decir, se pedirá que exista algún $u_0 \in \mathcal{X}$ tal que $I_f(u_0) < +\infty$.
- Para asegurar que $I_f > -\infty$, se pedirá como condición que el integrand esté acotado inferiormente por un funcional lineal integrable. Para ser más explícito, se pedirá una condición del siguiente estilo: existe una función $\beta \in \mathcal{L}^1(T, \mathcal{A}; \mathbb{R})$ y un funcional $\gamma : T \to \mathbb{R}^n$ que cumpla la propiedad de que, para todo $u \in \mathcal{X}$, la función $\phi_u(t) = \langle \gamma(t), u(t) \rangle$ cumple que $\phi_u \in \mathcal{L}^1(T, \mathcal{A}; \mathbb{R})$, y estas funciones cumplen la siguiente desigualdad

$$f(t, x) \geq \langle \gamma(t), x \rangle + \beta(t), \forall t \in T \; \mu - \mathrm{ctp}, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

  Esto asegura que $I_f > -\infty$.

Con la definición clara de funciones integrales, ya se puede proceder con el estudio de sus subdiferenciales, pero antes revisaremos algunos ejemplos y propiedades de los normal integrand que serán útiles más adelante. Partiremos con algunos ejemplos típicos de normal integrand.

Ejemplo 2.5 *(Integrand de Carathéodory). Antes de que se estableciera el concepto de normal integrand, se trabajó mucho tiempo con los integrands de Carathéodory, que, como se definió en la definición 1.47, corresponden a funciones* $f : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *(es decir, a valores finitos) tales que* $f(t, x)$ *es medible en* t *para cada* x *fijo y continuo en* x *para cada* t *fijo. Un integrand de Carathéodory es un normal integrand, lo que se puede ver fácilmente dado que su multiaplicación epigráfica tiene la siguiente representación*

$$\textit{epi}\, f(t) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid F(t, x, \alpha) \leq 0\}, \ \textit{para } F(t, x, \alpha) = f(t, x) - \alpha.$$

Acá $F : T \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *también es una función de Carathéodory, así que* $\textit{epi}\, f$ *es medible por la proposición 1.48 (b), al considerar* $S = (-\infty, 0]$*, y además es a valores cerrados por la continuidad de* F *en su segunda variable. Además, como una función* $f(t, \cdot)$ *es finita y continua en* $\mathbb{R}^n$ *si y solo si tanto* $f(t, \cdot)$ *como* $-f(t, \cdot)$ *son propias y sci, podemos deducir que una función* $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *es un integrand de Carathéodory si y solo si* f *y -*f *son ambos normal integrands propios.*

Ejemplo 2.6 *(Integrand autónomo). Si* $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *es tal que* $f(t, x) = g(x)$ *para* $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *sci, entonces* f *es un normal integrand, dado que* $\textit{epi}\, f$ *es constante.*

Ejemplo 2.7 *(Integrand indicador). La función indicadora* $\mathrm{i}_C : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *de una multiaplicación* $C : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$*, con*

$$\mathrm{i}_C(t, x) = \mathrm{i}_{C(t)}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \in C(t), \\ +\infty & \textit{si } x \notin C(t), \end{cases}$$

es un normal integrand si y solo si C *es medible y a valores cerrados, puesto que* $\textit{epi}\, f(t) = C(t) \times \mathbb{R}_+$*. Además, para un normal integrand* $f_0 : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$*, el funcional* $f = f_0 + \mathrm{i}_C$ *es también un normal integrand, puesto que* $\textit{epi}\, f(t) = \textit{epi}\, f_0 \cap (C(t) \times \mathbb{R}_+)$*, con* $\textit{epi}\, f_0$ *siendo medible y a valores cerrados, al igual que* C*.*

Una propiedad muy importante de los normal integrand es que se relaciona muy bien con los conjuntos de nivel, gracias a que comparten propiedades similares con el epígrafo. La importancia de este teorema se explicará en una observación posterior a su demostración.

Proposición 2.8 *Sea* $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *un integrand. Tenemos que* f *es un normal integrand si y solo si, para cada* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$*, la multiaplicación de conjuntos de nivel*

$$t \to [f(t, \cdot) \leq \alpha] = \{x \mid f(t, x) \leq \alpha\},$$

es medible y a valores cerrados. Más aún, si f *es un normal integrand, entonces para cualquier función* $\alpha : T \to \overline{\mathbb{R}}$ *medible, se tiene que la multiaplicación* $t \to [f(t, \cdot) \leq \alpha(t)] = \{x | f(t, x) \leq \alpha(t)\}$ *es medible y a valores cerrados.*

Demostración. Primero probaremos la última afirmación. Consideremos que f es un normal integrand y que $\alpha : T \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible. Definamos la multiaplicación $L : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ mediante $L(t) = [f(t, \cdot) \leq \alpha(t)]$. Como $f(t,x)$ es sci en x, tenemos que L es a valores cerrados, por lo que solo falta la medibilidad. Para esto, usaremos la propiedad de la proposición 1.41 (b). Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado, y consideremos la multiaplicación $R : t \to C \times (-\infty, \alpha(t)]$. Tenemos que R es a valores cerrados y también es medible, debido a que α es medible y por la proposición 1.45 (d), además tenemos que

$$L^{-1}(C) = \{t \mid \exists x \in C \text{ tal que } f(t,x) \leq \alpha(t)\} = \{t \mid \operatorname{epi} f(t) \cap R(t) \neq \emptyset\} = \operatorname{dom}(\operatorname{epi} f \cap R).$$

Por normalidad, $\operatorname{epi} f$ es medible y a valores cerrados, de modo que por la proposición 1.45 (a) tenemos que $\operatorname{epi} f \cap R$ es una multiaplicación medible, por lo que $\operatorname{dom}(\operatorname{epi} f \cap R) \in \mathcal{A}$. De este modo $L^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, confirmando así la medibilidad de L.
Ahora probaremos la equivalencia de la proposición. De lo recién demostrado se deduce la primera implicancia, pues si f es normal, basta considerar $\alpha(t)$ constante para obtener que sus conjuntos de nivel son medibles y cerrados.
Para la otra implicancia, como las multiaplicaciones $t \to [f_t \leq \alpha]$ son a valores cerrados, tenemos que $f(t, \cdot)$ es sci por la proposición 1.3, y así también $\operatorname{epi} f$ es a valores cerrados. Para la medibilidad, consideremos la multiaplicación $R : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dada por

$$R(t) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} [f(t, \cdot) \leq \alpha] \times \{\alpha\}.$$

Tenemos que R es medible por la proposición 1.45 (b) y (d), por lo que por la proposición 1.40 también se tiene que $\operatorname{cl} R$ es medible. Tenemos que $\operatorname{epi} f = \operatorname{cl} R$, puesto que

$$(x, \alpha) \in R(t) \iff f(t,x) \leq \alpha \wedge \alpha \in \mathbb{Q} \iff (x, \alpha) \in \operatorname{epi} f(t) \cap [\mathbb{R}^n \times \mathbb{Q}],$$

es decir, $\operatorname{epi} f(t) = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f(t) \cap [\mathbb{R}^n \times \mathbb{Q}]) = \operatorname{cl} R(t)$, de donde se concluye que $\operatorname{epi} f$ es medible, por lo que f es un normal integrand. $\square$

Observación 2.9 *Esta propiedad es muy importante, dado que, en conjunto con el teorema de las selecciones medibles (teorema 1.43), será una técnica que servirá como herramienta muchas veces en el desarrollo de este trabajo. Esto es porque muchas veces se requerirá de una función medible que cumpla cierta desigualdad, por lo que, para construirla, se escribirá la multiaplicación asociada a dicha desigualdad, se verá esta multiaplicación como los conjuntos de nivel de un normal integrand, lo que asegurará su medibilidad, y a partir de esto se le podrá extraer una función medible.*

La propiedad anterior permite asegurar la medibilidad de las funciones que buscan los valores óptimos y las soluciones de un problema de optimización de un normal integrand.

Proposición 2.10 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand. Entonces, si definimos la función $p : T \to \overline{\mathbb{R}}$ y la multiaplicación $P : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ mediante*

$$p(t) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(t,x), \;\; P(t) = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{argmin}\, f(t,x) \; \forall t \in T,$$

tenemos que p es una función medible y P es una multiaplicación medible y a valores cerrados. En particular, el conjunto $A = \{t \in T \mid argmin_x f(t,x) \neq \emptyset\} \subseteq T$ es medible, y así es posible encontrar una función $x : A \to \mathbb{R}^n$ medible tal que, para cada $t \in A$, $x(t)$ es un punto minimizante de $f(t,\cdot)$.

Demostración. Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección sobre $\mathbb{R}$ (es decir, $F(x,\alpha) = \alpha$), la cual es continua y por lo tanto Carathéodory. Definiendo la aplicación $R : T \to F(\text{epi } f(t))$, tenemos que R es medible por la proposición 1.48 (a), y además $\text{cl } R$ es medible por la proposición 1.40. Observando que $\text{cl } R(t) = \{\alpha \in \mathbb{R} | p(t) \leq \alpha\}$, se tiene que $p^{-1}((-\infty,\alpha]) = (\text{cl } R)^{-1}(\{\alpha\}) \forall \alpha \in \mathbb{R}$, por lo que se concluye que p es una función medible por la proposición 1.41 (b). Dado que $P(t) = \{x \mid f(t,x) \leq p(t)\}$, tenemos que P es medible y a valores cerrados por la proposición 2.8. La medibilidad de A se tiene directamente dado que $A = \text{dom } P$, en tanto la afirmación sobre la existencia de una función minimizante viene de aplicar el teorema 1.43 (selecciones medibles) sobre P. $\square$

Ahora procederemos a indicar algunas de las propiedades de los normal integrand. La primera pregunta que surge sobre los normal integrand es su relación con la medibilidad de f como función a dos variables. Esto se verá a continuación.

Proposición 2.11 *Si $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es un normal integrand, entonces $f(t,x)$ es $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-medible como función de (t,x), en adición de ser sci en la variable de x.*

Demostración. Claramente si f es un normal integrand, entonces f es sci en la variable x. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Por la proposición 2.8, tenemos que las multiaplicaciones $t \to [f(t,\cdot) \leq \alpha]$ son medibles y a valores cerrados, por lo que, por el teorema 1.44, sus grafos son medibles, es decir,

$$G_\alpha = \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid f(t,x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Como tenemos que $f^{-1}((-\infty,\alpha]) = G_\alpha$, se concluye que f es $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-medible. $\square$

La implicancia recíproca no se tiene en el caso general, es decir, no toda función $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-medible que es sci en la segunda variable es un normal integrand. Para asegurar esta recíproca, se requiere la completitud del espacio medible con respecto a alguna medida $\sigma-$finita, debido a la teoría que se verá en la sección 4.1, en particular el teorema de la proyección. Dado que en este trabajo no haremos uso de dicha implicancia, para más detalles referimos al capítulo VII de [4].

Como comentamos antes de presentar la definición de normal integrand, en un principio Rockafellar lo definió de otra manera,, y fue más adelante que cambió dicha definición por la escrita acá. Esto se debe a que ambas definiciones son equivalentes, lo cual Rockafellar descubrió gracias al trabajo de Castaing de 1967 ([3]), pero esta equivalencia solo es válida en el caso en que f es convexa en la segunda variable. La definición más antigua es más difícil de verificar, y a continuación la presentamos como una propiedad de los normal integrand.

Proposición 2.12 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que, para cada $t \in T$, la función $f(t,\cdot)$ es sci y convexa. Entonces f es un normal integrand si y solo si existe una familia numerable $\{x^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles $x^\nu : T \to \mathbb{R}^n$ tales que:*

(a) Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, $t \to f(t, x^\nu(t))$ es medible.

(b) Para cada $t \in T$, $\{x^\nu(t) \mid \nu \in \mathbb{N}\} \cap D_f(t)$ es denso en $D_f(t)$.

Demostración. Supongamos primero que f es un normal integrand. Como $\operatorname{epi} f$ es una multiaplicación medible y a valores cerrados, entonces por el teorema 1.42 admite una representación de Castaing $\{(x^\nu, \alpha^\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, con $(x^\nu, \alpha^\nu) : \operatorname{dom}\operatorname{epi} f \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ medible y $\operatorname{epi} f(t) = \operatorname{cl}\{(x^\nu(t), \alpha^\nu(t)) \mid \nu \in \mathbb{N}\}\, \forall t \in \operatorname{dom}\operatorname{epi} f$. Extendiendo mediblemente cada x^ν fuera del dominio, tomando por ejemplo $x^\nu(t) = 0$ cuando $t \notin \operatorname{dom}\operatorname{epi} f$, obtenemos que la familia $\{x^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ satisface (b). Esta familia también satisface (a) en virtud de la proposición 2.2.
Para la otra implicancia, consideremos una familia que satisface (a) y (b). Primero, es evidente que $\operatorname{epi} f$ es a valores cerrados dado que $f(t,\cdot)$ es sci para cada $t \in T$. Para ver que $\operatorname{epi} f$ es medible, usaremos el teorema 1.42 (b). Consideremos la familia numerable $\{y^{\nu,\beta}\}_{(\nu,\beta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Q}}$ con $y^{\nu,\beta}(t) = (x^\nu(t), \beta)$, la cual consiste de funciones medibles. Esta familia tiene la propiedad de que, para cada $t \in T$, el conjunto $\{y^{\nu,\beta}(t) \mid (\nu,\beta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Q}\} \cap \operatorname{epi} f(t)$ es denso en $\operatorname{epi} f(t)$. En efecto, por la densidad dada en (b) y dado que $f(t,\cdot)$ es convexa y sci, la proposición 1.7 (que puede ser invocada para $\operatorname{ri} D_f(t)$ si $\operatorname{int} D_f(t) = \emptyset$) nos asegura que $f(t,\cdot) = \operatorname{cl} g_t$, para $g_t : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $g_t(x) = f(t,x)$ si $x = x^\nu(t)$ para algún ν, en tanto $g_t(x) = +\infty$ en otro caso, asegurando entonces la propiedad mencionada. Además, si para cada $(\nu,\beta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Q}$ definimos $T^{\nu,\beta} = \{t \in T \mid y^{\nu,\beta}(t) \in \operatorname{epi} f(t)\} = \{t \in T \mid f(t, x^\nu(t)) \leq \beta\}$, tenemos que $T^{\nu,\beta}$ es medible por (a). Como $\operatorname{dom}\operatorname{epi} f = \bigcup_{\nu,\beta} T^{\nu,\beta}$, entonces este conjunto es medible, con lo cual podemos concluir dado que se cumplen las hipótesis del teorema 1.42 (b). □

Vale señalar que no se puede descartar la hipótesis de convexidad en la segunda variable en el resultado anterior, dado que se hizo uso de la proposición 1.7 que lo requiere para asegurar la densidad sobre el epígrafo. Un ejemplo de que no siempre se tiene esta propiedad en el caso no convexo es el siguiente: Consideremos $h \equiv 1$ en $(0,1]$, $h(0) = 0$ y $h \equiv +\infty$ en otro caso. Entonces h es sci, pero para cualquier conjunto D denso numerable de $(0,1)$, se tiene que $(0,0)$ pertenece a $\operatorname{epi} h$, pero no es punto de acumulación de ninguna sucesión en $[D \times \mathbb{R}] \cap \operatorname{epi} h$, haciendo imposible pasar la densidad de D al epígrafo.

A continuación presentaremos una serie de resultados para saber rápidamente si un integrand es normal, a través de operaciones sobre integrands.

Proposición 2.13 *(Adición, máximos y mínimos puntuales de normal integrands). Para cada $j \in J$, sea $f_j : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand, con J un conjunto de índices. Entonces los siguientes integrands f son normales:*

(a) $f(t,x) = \sup_{j\in J} f_j(t,x)$ si J es numerable.

(b) $f(t,x) = \operatorname{ínf}_{j\in J} f_j(t,x)$ si J es finita, en tanto para el caso J numerable general se tiene el resultado al aplicar cl_x (regularización sci) a esta expresión.

(c) $f(t,x) = \sum_{j\in J} \lambda_j f_j(t,x)$, para J finito y $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ (con la convención $0 \cdot [\pm\infty] = 0$).

(d) Para $f_j : T \times \mathbb{R}^{n_j} \to \overline{\mathbb{R}}$, se tiene para $f(t, x_1, \ldots, x_r) = f_1(t, x_1) + \ldots + f_r(t, x_r)$ cuando $J = \{1, \ldots, r\}$ y las funciones $f_j(t, \cdot)$ son propias.

Demostración. Para la parte (a), recordemos que $\operatorname{epi} f(t) = \bigcap_{j \in J} \operatorname{epi} f_j(t)$, por lo que claramente este conjunto es cerrado, en tanto es medible por la proposición 1.45 (a). Para la parte (b), similarmente tenemos que $\operatorname{epi} f(t) = \bigcup_{j \in J} \operatorname{epi} f_j(t)$, por lo que este conjunto es medible por la proposición 1.45 (b), en tanto es cerrado cuando J es finito, y cuando J no es finito hay que tomar regularización sci para asegurar que sea cerrado dicho epígrafo.
Para la parte (d), definamos la multiaplicación $E : T \rightrightarrows \prod_{j=1}^{r} (\mathbb{R}^{n_j} \times \mathbb{R})$ y la aplicación $L : \prod_{j=1}^{r} (\mathbb{R}^{n_j} \times \mathbb{R}) \to \left(\prod_{j=1}^{r} \mathbb{R}^{n_j} \right) \times \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} E(t) &= \operatorname{epi} f_1(t) \times \ldots \times \operatorname{epi} f_r(t), \\ L(x_1, \alpha_1, \ldots, x_r, \alpha_r) &= (x_1, \ldots, x_r, \alpha_1 + \ldots + \alpha_r). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que E es a valores cerrados dado que cada $\operatorname{epi} f_j$ es a valores cerrados, y además es medible por la proposición 1.45 (d), en tanto L es continua, por lo que en particular es Carathéodory. Así, la multiaplicación S definida por $S(t) = L(E(t))$ para cada $t \in T$ es medible por la proposición 1.48 (a). Pero se tiene que $S = \operatorname{epi} f$, pues por definición tenemos que:

$$(x_1, \ldots, x_r, \alpha) \in S(t) \iff \exists \{\alpha_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}=1}^{r} \text{ tal que } \alpha_j \geq f(t, x_j) \, \forall j \in \{1, \ldots, r\}, \alpha = \sum_{\mathrm{i}=1}^{r} \alpha_\mathrm{i}.$$

De esta definición es directo que $S(t) \subseteq \operatorname{epi} f(t)$, en tanto para la otra inclusión, para $(x_1, \ldots, x_r, \alpha) \in \operatorname{epi} f(t)$ basta considerar $\alpha_\mathrm{i} = f(t, x_\mathrm{i})$ para $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, r-1\}$, en tanto $\alpha_r = \alpha - \sum_{\mathrm{i}=1}^{r-1} f(t, x_\mathrm{i})$ con lo que se asegura que $\operatorname{epi} f(t) \subseteq S(t)$. Así, $\operatorname{epi} f$ es medible, y además es a valores cerrados (pues la adición preserva la semicontinuidad inferior, por la proposición 1.4), por lo que f es un normal integrand.
Para (c) usaremos un argumento similar al anterior, considerando $n_j = n$ para cada j y la multiaplicación $M : \prod_{j=1}^{r} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, donde $r = |J|$, dada por:

$$M(x_1, \alpha_1, \ldots, x_r, \alpha_r) = \begin{cases} \{(x, \lambda_1 \alpha_1 + \ldots + \lambda_r \alpha_r)\} & \text{si } x_1 = \ldots = x_r = x, \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta multiaplicación es osc, dado que su grafo está determinado por el subespacio de dimensión finita $V = \{(x_1, \alpha_1, \ldots, x_r, \alpha_r) \mid x_1 = \ldots = x_r\}$, por lo que es cerrado, y además en términos de t es medible (pues M es constante para este argumento). Considerando entonces $S(t) = M(E(t))$, con E el funcional de la parte (c), podemos usar la proposición 1.46 (b) para concluir que S es medible. Concluimos viendo que $\operatorname{epi} f = S$, puesto que:

$$(x, \alpha) \in S(t) \iff \exists \{\alpha_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}=1}^{r} \text{ tal que } \alpha_\mathrm{i} \geq f(t, x_\mathrm{i}) \wedge \alpha = \sum_{\mathrm{i}=1}^{r} \lambda_\mathrm{i} \alpha_\mathrm{i}.$$

De esta caracterización es inmediato que $S(t) \subseteq \operatorname{epi} f(t)$. Para la otra inclusión, supongamos sin pérdida de generalidad que $\lambda_r \neq 0$ (pues si todos los λ_j son cero entonces f es igual a cero, en tanto si alguno es distinto a cero, reordenando podemos considerar que es la coordenada r), y así, para $(x, \alpha) \in \operatorname{epi} f(t)$ basta considerar $\alpha_\mathrm{i} = f(t, x_\mathrm{i})$ para $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, r-1\}$, $\alpha_r = \lambda_r^{-1} \left(\alpha - \sum_{\mathrm{i}=1}^{r-1} \lambda_j f(t, x_\mathrm{i}) \right)$, con lo cual se tiene que $\operatorname{epi} f(t) \subseteq S(t)$. De este modo $\operatorname{epi} f$ es medible, además es cerrado (por proposición 1.4). $\square$

Proposición 2.14 *(Composición con normal integrands).*

(a) Sea $g : T \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand y $F : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función de Carathéodory. Entonces $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dado por $f(t,x) = g(t, F(t,x))$ es un normal integrand.

(b) Sea $g : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand, y sea $\theta : T \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand tal que $\theta(t,\alpha)$ es creciente sobre α. Asumiendo la convención de que

$$\theta(t,+\infty) = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \theta(t,\alpha), \quad \theta(t,-\infty) = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \theta(t,\alpha),$$

se tiene que $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dado por $f(t,x) = \theta(t, g(t,x))$ es un normal integrand.

(c) Sea $g : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand y $u : T \to \mathbb{R}^m$ medible. Entonces $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dado por $f(t,x) = g(t,x,u(t))$ es un normal integrand.

Demostración. En primer lugar, en los tres casos tenemos que $f(t,x)$ es sci con respecto a x por la proposición 1.5, así que basta ver la medibilidad del epígrafo para concluir.
En la parte (a), definamos $G : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ dado por $G(t,x,\alpha) = (F(t,x), \alpha)$, el cual es un funcional de Carathéodory (pues F lo es). Tenemos entonces, por la definición de f y de G, que

$$\operatorname{epi} f(t) = \{(x,\alpha) \mid G(t,x,\alpha) \in \operatorname{epi} g(t)\}.$$

Así, por la proposición 1.48 (b) tenemos que $\operatorname{epi} f$ es medible.
Para la parte (c), basta considerar $F(t,x) = (x, u(t))$ en la parte (a) para concluir.
Para la parte (b), para cada $t \in T$ definamos la multiaplicación $M(t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dada por:

$$M(t,x,\alpha) = \{(x,\beta) \mid \theta(t,\alpha) \leq \beta\}.$$

Tenemos entonces que $\operatorname{epi} f(t) = M(t, \operatorname{epi} g(t))$. En efecto, si $(x,\beta) \in \operatorname{epi} f(t)$, entonces, en términos de M, tenemos que $(x,\beta) \in M(t,x,g(t,x))$, y como $(x, g(t,x)) \in \operatorname{epi} g(t)$ se concluye que $\operatorname{epi} f(t) \subseteq M(t, \operatorname{epi} g(t))$. Para la otra inclusión, consideremos $(x,\beta) \in M(t, \operatorname{epi} g(t))$, entonces por definición tenemos que $\exists (y,\alpha) \in \operatorname{epi} g(t)$ tales que $y = x$, $\theta(t,\alpha) \leq \beta$, y como θ es creciente en el segundo argumento y $\alpha \geq g(t,x)$, esto implica que $f(t,x) = \theta(t, g(t,x)) \leq \beta$, es decir, $(x,\beta) \in \operatorname{epi} f(t)$. Observando además que la multiaplicación del grafo de M está dada para cada $t \in T$ por

$$\text{graph } M(t,\cdot,\cdot) = \{(x,\alpha,y,\beta) \mid (\alpha,\beta) \in \operatorname{epi} \theta(t), x = y\},$$

tenemos que este conjunto es cerrado, con lo cual se tiene que $M(t,\cdot,\cdot)$ es osc, y además el grafo depende mediblemente de t por la proposición 1.45 (d), de modo que se puede concluir que $\operatorname{epi} f$ es medible por la proposición 1.46(b). □

Corolario 2.15 . *Sea $g : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand y $\lambda : T \to \mathbb{R}_+$ una función medible. Entonces $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dado por $f(t,x) = \lambda(t) g(t,x)$ es un normal integrand.*

Demostración. Basta considerar $\theta(t,\alpha) = \lambda(t)\alpha$ en la parte (b) de la proposición anterior. □

Proposición 2.16 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand, y consideremos el integrand p dado por $p(t,u) = \operatorname{ínf}_x f(t,x,u)$. Si $p(t,u)$ es sci en u, entonces p es un normal integrand. De este modo, la función $\bar{p}(t,u) = cl_u\, p(t,u)$ es siempre un normal integrand.*

Demostración. Sea $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ la aplicación proyección (lineal continua) tal que $L(x,u,\alpha) = (u,\alpha)$, y definamos $S = \operatorname{cl}(L \circ \operatorname{epi} f)$, la cual es una multiaplicación medible y a valores cerrados por las proposiciones 1.46 (a) y 1.40. Tenemos entonces que $S = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} p)$. En efecto, sea $t \in T$. Por una parte, si $(u,\alpha) \in L \circ \operatorname{epi} f(t)$, entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(t,x,u) \leq \alpha$, y como $p(t,u) \leq f(t,x,u)$ se concluye que $(u,\alpha) \in \operatorname{epi} p(t)$, de modo que $L(\operatorname{epi} f(t)) \subseteq \operatorname{epi} p(t)$, que tomando clausura nos lleva a que $S(t) \subseteq \operatorname{cl}(\operatorname{epi} p(t))$. Para la otra inclusión, consideremos $(u,\alpha) \in \operatorname{epi} p(t)$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ tenemos que $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha + \varepsilon \geq f(t,x,u)$, es decir, $(u, \alpha+\varepsilon) \in L(\operatorname{epi} f(t))$, con lo cual, al hacer que $\varepsilon \searrow 0$, nos lleva a que $(u,\alpha) \in S(t)$, concluyendo así la otra inclusión que nos lleva a $S(t) = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} p(t))$. Con esto, en el caso que p es sci se asegura que $\operatorname{epi} p = S$, el cual es medible y a valores cerrados, en tanto en el caso general se tiene que $\operatorname{epi} \bar{p} = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} p) = S$, por lo que también es medible y a valores cerrados. $\square$

Un resultado importante es que la normalidad es preservada mediante las conjugadas de Fenchel. Para definir las conjugadas sobre un integrand, lo haremos al dejar el primer argumento fijo, es decir, para $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrand, su conjugada f^* estará definida como el integrand $f^* : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f^*(t,\cdot)$ es la conjugada de $f(t,\cdot)$, y para definir la biconjugada $f^{**} : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ se procede de la misma manera. De manera más explícita:

$$\begin{aligned} f^*(t,v) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle v, x\rangle - f(t,x)\}, \\ f^{**}(t,x) &= \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \{\langle v, x\rangle - f^*(t,v)\}. \end{aligned}$$

Proposición 2.17 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand. Entonces su conjugada f^* y su biconjugada f^{**} son normal integrands.*

Demostración. Sea $T_0 = \{t \in T | f(t,\cdot) \not\equiv +\infty\} = \operatorname{dom} \operatorname{epi} f$, el cual es medible, y supongamos sin pérdida de generalidad que $T_0 \neq \emptyset$ (pues en caso contrario $f \equiv +\infty$, por lo que $f^* \equiv -\infty$, $f^{**} \equiv +\infty$ con lo que se tiene el resultado). Consideremos la representación de Castaing de $\operatorname{epi} f$ dada por el teorema 1.42, es decir, una familia numerable $(x^\nu, \alpha^\nu) : T_0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ que cumple la propiedad de densidad $\operatorname{epi} f(t) = \operatorname{cl}\{(x^\nu(t), \alpha^\nu(t)) \mid \nu \in \mathbb{N}\} \forall t \in T_0$. Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, definamos $g^\nu : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dado por:

$$g^\nu(t,v) = \begin{cases} \langle x^\nu(t), v\rangle - \alpha^\nu(t) & \text{si } t \in T_0, \\ -\infty & \text{si } t \in T \setminus T_0. \end{cases}$$

Tenemos que g^ν es un normal integrand, puesto que la restricción de g^ν a $T_0 \times \mathbb{R}^n$ es un integrand de Carathéodory, el cual es normal por el ejemplo 2.5, por lo que la restricción de $\operatorname{epi} g^\nu$ a T_0 es medible y a valores cerrados, en tanto $\operatorname{epi} g^\nu(t) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ para $t \in T \setminus T_0$, lo que hace que $\operatorname{epi} g^\nu$ sea también medible y a valores cerrados en $T \setminus T_0$, con lo cual $\operatorname{epi} g^\nu$ es medible y a valores cerrados en todo T.

Observemos que, por la definición de g^v y la propiedad de densidad de la representación de Castaing se tiene que:

$$f^*(t,v) = \sup_{\nu \in \mathbb{N}} g^\nu(t,v),$$

por lo que, por la proposición 2.13 (a), se tiene que f^* es un normal integrand. Como f^{**} es la conjugada de f^*, que ya sabemos que es normal, por lo recién probado se implica que también f^{**} es normal. □

Ejemplo 2.18 *(Integrands soporte). Sea $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multiaplicación. Consideremos la función soporte de S dada por $\sigma_S : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mediante*

$$\sigma_S(t,v) = \sigma_{S(t)}(v) = \sup_{x \in S(t)} \langle v, x \rangle \ \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Si S es medible, entonces σ_S es un normal integrand convexo, dado que $\sigma_S = \mathrm{i}^*_{clS}$. Además, se tiene de manera recíproca que si σ_S es un normal integrand y S es a valores cerrados y convexos, entonces S es medible.

Relacionado a las conjugadas están también los subdiferenciales y $\varepsilon-$subdiferenciales, y se tiene que también son medibles al verlos como multiaplicaciones.

Proposición 2.19 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand propio. Entonces para cada función medible $x : T \to \mathbb{R}^n$ tal que $x(t) \in dom\, f_t \ \forall t \in T$ se tiene que la multiaplicación subdiferencial $t \to \partial f(t, x(t))$ es medible y a valores cerrados.*

Demostración. Sea $x : T \to \mathbb{R}^n$ una función medible tal que $x(t) \in \operatorname{dom} f_t \ \forall t \in T$. Sea $\alpha(t) = -f(t, x(t))$, la cual es una función medible por la proposición 2.2. Como se tiene que el subdiferencial se puede expresar como

$$\partial f(t, x(t)) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid f^*(t, x^*) - \langle x^*, x(t) \rangle \leq \alpha(t)\},$$

entonces se tiene que la multiaplicación $t \to \partial f(t, x(t))$ es medible por la proposición 2.8, puesto que $(t, x^*) \to f^*(t, x^*) - \langle x^*, x(t) \rangle$ es un normal integrand (proposición 2.17, ejemplo 2.5, proposición 2.13) y α es medible. Además, se tiene trivialmente que es a valores cerrados. □

Proposición 2.20 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand propio. Entonces para cada función medible $x : T \to \mathbb{R}^n$ tal que $x(t) \in dom\, f_t \ \forall t \in T$, para cada $\varepsilon > 0$ y cada función $g \in \mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; (0, +\infty))$ tenemos que la multiaplicación $t \to \partial_{\varepsilon g(t)} f(t, x(t))$ es medible y a valores cerrados y convexos.*

Demostración. Sea $x : T \to \mathbb{R}^n$ una función medible tal que $x(t) \in \operatorname{dom} f_t \ \forall t \in T$, y sean además $\varepsilon > 0$ y $g \in \mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; (0, +\infty))$. Como se tiene que el $\varepsilon-$subdiferencial se puede expresar como

$$\partial_{\varepsilon g(t)} f(t, x(t)) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid f^*(t, x^*) - \langle x^*, x(t) \rangle \leq \varepsilon g(t) - f(t, x(t))\},$$

entonces se tiene que la multiaplicación $t \to \partial_{\varepsilon g(t)} f(t, x(t))$ es medible por la proposición 2.8, puesto que $(t, x^*) \to f^*(t, x^*) - \langle x^*, x(t) \rangle$ es un normal integrand (proposición 2.17, ejemplo 2.5, proposición 2.13) y $\varepsilon g(t) - f(t, x(t))$ es medible (proposición 2.3). Además, se tiene trivialmente que es a valores cerrados y convexos. $\square$

Teniendo ya estas definiciones y propiedades establecidas, podemos proceder al estudio del subdiferencial de las funciones integrales sobre el espacio de las funciones continuas. Para esto, presentaremos dos métodos, el primer método consiste en calcular el subdiferencial usando conjugadas de Fenchel, y el segundo método consiste en calcular el subdiferencial usando una fórmula del tipo Hiriart-Urruty-Phelps para el subdiferencial de la suma.

Capítulo 3

Método 1: Subdiferencial a partir de conjugadas de Fenchel

El primer método que presentaremos para calcular el subdiferencial de funciones integrales sobre el espacio de las funciones continuas se basará en calcular primero la conjugada de Fenchel de la función integral, y a partir de esta expresión se deducirá una formulación para el subdiferencial. Para esto, se seguirá primero el trabajo de Rockafellar ([12], [15]), donde se parte estudiando un caso sencillo, que corresponde al caso en que el espacio de funciones es descomponible y está en dualidad con otro espacio descomponible, dado que en este caso se puede aplicar un resultado conocido como la regla de intercambiabilidad, luego se estudiará el caso L^∞, dado que es descomponible, y, aunque su dual no lo sea, es más cercano el espacio de las continuas, y a partir de esto se deducirá un resultado para el caso del espacio de funciones continuas, estudio que finalmente se refinará gracias al trabajo de Perkkiö ([11]), con lo cual se desarrollará en mayor detalle el caso del espacio de funciones continuas y obtener así el resultado buscado.

3.1. Caso espacio descomponible en dualidad con otro espacio descomponible

Sea $(T, \mathcal{A})$ un espacio medible y consideremos $X = \mathbb{R}^n$.

Existe una clase de espacios en los cuales el cálculo del subdiferencial de funciones integrales resulta muy sencillo gracias a un teorema muy importante, la regla de intercambiabilidad. A continuación enunciaremos la definición de dichos espacios, cuyo nombre en inglés es “decomposable spaces”, y los llamaremos espacios descomponibles en este trabajo.

Definición 3.1 *(Espacios descomponibles). Un espacio $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; \mathbb{R}^n)$ se dirá descomponible en asociación con una medida (no negativa) μ en $\mathcal{A}$, si para cada función $x_0 \in \mathcal{X}$, cada conjunto $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < +\infty$ y cada función acotada y medible $x_1 : A \to \mathbb{R}^n$, se tiene* *que $\mathcal{X}$ también contiene a la función $x : T \to \mathbb{R}^n$ definida por:*

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{si } t \in T \setminus A, \\ x_1(t) & \text{si } t \in A. \end{cases}$$

Es conocido que los espacios $\mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; \mathbb{R}^n)$ y $L^p(T, A, \mu; \mathbb{R}^n)$ son descomponibles para cada $p \in [1, +\infty]$, en tanto $C(T; \mathbb{R}^n)$ (si T es espacio topológico) y los espacios de funciones constantes no lo son (salvo elecciones muy extremas de T). En los espacios descomponibles se cumple el siguiente resultado, el cual está dado en el teorema 14.60 de [17] y lo enunciamos a continuación.

Teorema 3.2 *(Regla de intercambiabilidad). Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; \mathbb{R}^n)$ un espacio de funciones medibles que es descomponible con respecto a μ, la cual es una medida (estrictamente positiva) $\sigma-$finita en $\mathcal{A}$. Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand. Entonces, la minimización de I_f sobre $\mathcal{X}$ puede ser reducida a minimización punto a punto, es decir, siempre que $I_f \not\equiv +\infty$ en $\mathcal{X}$, se tiene que:*

$$\inf_{u \in \mathcal{X}} \int_T f(t, u(t)) \mathrm{d}\mu(t) = \int_T \left(\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(t, x) \right) \mathrm{d}\mu(t).$$

Demostración. Consideremos $\operatorname{dom} I_f \neq \emptyset$. Definamos $p(t) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(t, x)$. Por la proposición 2.10 esta función depende mediblemente de t.
Observemos que para cualquier $u \in \mathcal{X}$ tenemos que $f(t, u(t)) \geq p(t) \forall t \in T$, de modo que, integrando sobre T, es directo que

$$\inf_{u \in \mathcal{X}} I_f(u) \geq \int_T p(t) \mathrm{d}\mu(t),$$

con lo cual ya se tiene una de las desigualdades. Además, el caso $\inf_{\mathcal{X}} I_f = -\infty$ es trivial debido a esta desigualdad.
Supondremos de ahora en adelante que $\inf_{u \in \mathcal{X}} I_f(u) > -\infty$. Para probar la otra desigualdad, consideremos $\beta > \int_T p(t) \mathrm{d}\mu(t)$. Si encontramos $u \in \mathcal{X}$ tal que $I_f(u) < \beta$, entonces se concluye la igualdad buscada. Para construir esta función u, recordemos que $\operatorname{dom} I_f \neq \emptyset$, por lo que existe $u_0 \in \mathcal{X}$, tal que $I_f(u_0) < +\infty$. Observemos que

$$\int_T p(t) \mathrm{d}\mu(t) \leq \int_T f(t, u_0(t)) \mathrm{d}\mu(t) < +\infty,$$

por lo que $\int_T \max\{p(t), 0\} < +\infty$. Ahora, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede definir la función medible $p_\varepsilon(t) = \max\{p(t), -\varepsilon^{-1}\}$, de modo que $p_\varepsilon(t) \leq \max\{p(t), 0\}$ y $p_\varepsilon \to p$ puntualmente cuando $\varepsilon \searrow 0$. Así, por TCD, tenemos que $\int_T p_\varepsilon(t) \mathrm{d}\mu(t) \to \int_T p(t) \mathrm{d}\mu(t)$ cuando $\varepsilon \searrow 0$.
Observemos que $p_\varepsilon(t) \geq p(t) \forall t \in T$. Como μ es $\sigma-$finita, existe $\psi : T \to \mathbb{R}$ medible tal que $\psi > 0$ y $\int_T \psi(t) \mathrm{d}\mu(t) < +\infty$. Con todo lo anterior, se define la familia de funciones medibles $\{\alpha_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ dada por $\alpha_\varepsilon(t) = \varepsilon \psi(t) + p_\varepsilon(t)$, las cuales cumplen que $\alpha_\varepsilon(t) > p(t) \forall t \in T$ y además:

$$\int_T \alpha_\varepsilon(t) \mathrm{d}\mu(t) = \varepsilon \int_T \psi(t) \mathrm{d}\mu(t) + \int_T p_\varepsilon(t) \mathrm{d}\mu(t) \underset{\varepsilon \searrow 0}{\longrightarrow} \int_T p(t) \mathrm{d}\mu(t) < \beta.$$

Sea ε suficientemente pequeño para que $\int_T \alpha_\varepsilon(t)\mathrm{d}\mu(t) < \beta$. Entonces. si definimos la multiaplicación $S_\varepsilon : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada por $S_\varepsilon(t) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(t,x) \leq \alpha_\varepsilon(t)\}$, tenemos que S_ε es medible por la proposición 2.8 y $S_\varepsilon(t)$ es no vacío para todo $t \in T$, puesto que $\alpha_\varepsilon(t) > p(t)\ \forall t \in T$. Así, por el teorema 1.43 (selecciones medibles), tenemos que existe una función medible $u_1 : T \to \mathbb{R}^n$ tal que $u_1(t) \in S_\varepsilon(t)$ para cada $t \in T$. De este modo:

$$\int_T f(t, u_1(t))\mathrm{d}\mu(t) \leq \int_T \alpha_\varepsilon(t)\mathrm{d}\mu(t) < \beta.$$

Ahora, dado que μ es $\sigma-$finita, sabemos que existe una sucesión creciente de conjuntos medibles T_k tales que $\mu(T_k) < +\infty$ para todo k y T_k crece a T, es decir, $T = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k$, $T_k \subseteq T_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$. Definimos la famila de conjuntos $A_k = \{t \in T_k \mid |u_1(t)| \leq k\}$, con lo cual cada A_k es medible (pues u_1 es una función medible) y además A_k crece a T, con $\mu(A_k) < +\infty$. Con todo lo anterior, tenemos que las funciones u_0 y u_1 cumplen que, cuando $k \to +\infty$:

$$\int_{T\setminus A_k} f(t, u_0(t))\mathrm{d}\mu(t) \to 0, \int_{A_k} f(t, u_1(t))\mathrm{d}\mu(t) \to \int_T f(t, u_1(t))\mathrm{d}\mu(t).$$

Definiendo la sucesión de funciones $y_k : T \to \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$y_k(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{si } t \in A_k, \\ u_0(t) & \text{si } t \in T \setminus A_k, \end{cases}$$

tenemos entonces que para todo $k \in \mathbb{N}$, $y_k \in \mathcal{X}$ pues $\mathcal{X}$ es descomponible relativo a μ, u_1 es medible y acotada en A_k y $\mu(A_k) < +\infty$. Más aún, cuando $k \to +\infty$:

$$I_f(y_k) = \int_{T\setminus A_k} f(t, u_0(t))\mathrm{d}\mu(t) + \int_{A_k} f(t, u_1(t))\mathrm{d}\mu(t) \to \int_T f(t, u_1(t))\mathrm{d}\mu(t) < \beta,$$

con lo que podemos concluir que $I_f(y_k) < \beta$ para k suficientemente grande, obteniendo así el resultado buscado al considerar $u = y_k$. $\square$

Lo interesante de este resultado es que transforma un problema de minimización sobre un espacio de funciones, a un problema de minimización sobre $\mathbb{R}^n$.

Consideremos de ahora en adelante μ una medida (estrictamente positiva) $\sigma-$finita en $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; \mathbb{R}^n)$ un espacio descomponible con respecto a μ, y supongamos que existe $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; \mathbb{R}^n)$ el cual es también un espacio descomponible con respecto a μ, y es tal que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ están en dualidad según el emparejamiento dado por:

$$\langle v, u\rangle = \int_T \langle u(t), v(t)\rangle \mathrm{d}\mu(t)\ \forall u \in \mathcal{X}, v \in \mathcal{Y}.$$

Si bien este caso fue estudiado por Rockafellar en [12], la demostración era diferente a la que se presentará a continuación, debido a que en ese entonces su definición de normal integrand era diferente, y no fue hasta trabajos posteriores (por ejemplo [14]) que simplificó el desarrollo del resultado llegando al que presentaremos. Para encontrar el subdiferencial de I_f, trabajaremos con su conjugada f^*, por lo que antes de pasar al resultado principal, presentamos la siguiente propiedad de acotamiento.

Proposición 3.3 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand. Si existe $v \in \mathcal{Y}$ tal que $I_{f^*}(v) < +\infty$, entonces $I_f(u) > -\infty \, \forall u \in \mathcal{X}$.*

Demostración. Observemos que, como $I_{f^*}(v) < +\infty$, se tiene que $-I_{f^*}(v) > -\infty$. Sea $u \in \mathcal{X}$ arbitrario. Entonces, para cualquier $t \in T$ tenemos que

$$f(t, u(t)) \geq \langle v(t), u(t) \rangle - f^*(t, v(t)),$$

de modo que, integrando sobre T, se tiene que

$$I_f(u) \geq \langle v, u \rangle - I_{f^*}(v) > -\infty.$$

Como u era arbitrario, se concluye. $\square$

Con esta configuración, podemos presentar el resultado principal sobre el subdiferencial de la función integral para este caso, en el cual es muy importante recordar que μ es $\sigma-$finita pues su demostración hace uso de la regla de intercambiabilidad.

Teorema 3.4 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand propio. Si existe $u_0 \in \mathcal{X}$ tal que $I_f(u_0) < +\infty$, entonces $I_f^* = I_{f^*}$. Si adicionalmente f es convexo y existe $v_0 \in \mathcal{Y}$ tal que $I_{f^*}(v_0) < +\infty$, entonces tanto $I_f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como $I_{f^*} : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ están bien definidas, son convexas, propias y son conjugadas entre sí. Además, en este último caso, para $u \in \operatorname{dom} I_f$ se tiene que $v \in \partial I_f(u)$ si y solo si $v(t) \in \partial f(t, u(t)) \, \forall t \in T \; \mu-$ ctp.*

Demostración. Dado que f es un normal integrand, por la proposición 2.17 tenemos que f^* también es un normal integrand, por lo que por la proposición 2.3 tenemos que I_f, I_{f^*} están bien definidas. Suponiendo que existe $u_0 \in \operatorname{dom} I_f$, dado que $\mathcal{X}$ es descomponible, podemos calcular directamente la conjugada de I_f a continuación. Sea $v \in \mathcal{Y}$.

$$\begin{aligned}
(I_f)^*(v) &= \sup_{u \in \mathcal{X}} \langle v, u \rangle - I_f(u) \\
&= \sup_{u \in \mathcal{X}} \int_T (\langle u(t), v(t) \rangle - f(t, u(t))) \mathrm{d}\mu(t) \\
&= -\inf_{u \in \mathcal{X}} \int_T (f(t, u(t)) - \langle u(t), v(t) \rangle) \mathrm{d}\mu(t) \\
&= -\int_T \inf_{x \in \mathbb{R}^n} (f(t, x) - \langle x, v(t) \rangle) \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_T \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle x, v(t) \rangle - f(t, x)) \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_T f^*(t, v(t)) = I_{f^*}(v),
\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se tiene por la regla de intercambiabilidad (teorema 3.2), dado que $g(t, x) = f(t, x) + \langle x, -v(t) \rangle$ es un normal integrand al ser suma de normal integrands (por proposición 2.13, y $\langle x, -v(t) \rangle$ es integrand de Carathéodory, que es normal por el ejemplo 2.5), y además $I_g \not\equiv +\infty$ pues $I_g(u_0) < +\infty$. Así se tiene que $I_{f^*} = (I_f)^*$.

Suponiendo ahora que f es convexo y existe $v_0 \in \operatorname{dom} I_{f^*}$, tenemos que tanto I_f como I_{f^*} son funciones convexas, y además son propias pues, por hipótesis $\operatorname{dom} I_f \neq \emptyset$, $\operatorname{dom} I_{f^*} \neq \emptyset$, lo cual, por la proposición 3.3 anterior nos asegura que $I_f > -\infty$, y como $f = f^{**}$ por ser un integrand convexo, propio y sci, tenemos que $I_{f^*} > -\infty$ al aplicar este mismo resultado a f^* con conjugada f^{**}.
Para ver que son conjugadas entre sí, como ya tenemos que $I_{f^*} = (I_f)^*$, basta revisar la otra igualdad, la cual se obtiene directamente aplicando lo ya demostrado a f^*, obteniendo entonces que $(I_{f^*})^* = I_{f^{**}} = I_f$.
Finalmente, para el resultado sobre el subdiferencial tenemos que, para $u \in \operatorname{dom} I_f$:

$$\begin{aligned} v \in \partial I_f(u) &\iff I_f(u) + (I_f)^*(v) = \langle v, u \rangle \\ &\iff \int_T \underbrace{(f(t,u(t)) + f^*(t,v(t)) - \langle u(t), v(t) \rangle)}_{\geq 0} = 0 \\ &\iff f(t,u(t)) + f^*(t,v(t)) - \langle u(t), v(t) \rangle = 0, \forall t \in T \ \mu - \text{ctp} \\ &\iff v(t) \in \partial f(t,u(t)), \forall t \in T \ \mu - \text{ctp}, \end{aligned}$$

con lo que se concluye lo buscado. $\square$

Una observación interesante sobre este resultado es que I_f, aparte de ser convexa y propia, es sci, dado que es la conjugada de una función.

Un problema del teorema anterior es que pide que $\exists v \in \mathcal{Y}$ tal que $I_{f^*}(v) < +\infty$, lo cual puede ser difícil de verificar si solo se quiere usar el resultado sobre el subdiferencial y no se conoce f^* de antemano. Ante esto, podemos pedir una condición del estilo de la ecuación (2.2) como se verá en la siguiente proposición.

Proposición 3.5 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand. Si $\exists v \in \mathcal{Y}$ y $\beta \in \mathcal{L}^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ tales que*

$$f(t,x) \geq \langle v(t), x \rangle + \beta(t), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in T \ \mu - ctp,$$

entonces $I_{f^*}(v) < +\infty$.

Demostración. En efecto, como $-f(t,x) \leq -\beta(t) - \langle v(t), x \rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in T \, \mu-$ctp, tenemos que

$$f^*(t, v(t)) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle v(t), x \rangle - f(t,x) \leq -\beta(t), \forall t \in T \ \mu - \text{ctp},$$

por lo que por integrando sobre T tenemos que $I_{f^*}(v) < +\infty$. $\square$

3.2. Caso espacio L^∞

Sea $(T, \mathcal{A})$ un espacio medible, y sea μ una medida (estrictamente positiva) $\sigma-$finita en $\mathcal{A}$. Consideremos ahora $\mathcal{X} = L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$. Si bien este espacio es descomponible, en este caso su dual no lo es, pues a lo más se identifica con un subespacio del espacio de las medidas finitamente aditivas (mencionado al final de la sección 1.3) y solo se tiene la descomposición dada en el teorema 1.59. Así, este caso requiere un estudio especial para saber cuál es el subdiferencial de la función integral. Considerando la descomposición dada en el teorema 1.59, podríamos considerar que la conjugada de I_f tiene una parte absolutamente continua y una parte singular. Esto es justamente lo que sucede, pues Rockafellar desarrolló en [15] el estudio de este caso, donde, para un normal integrand $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, consideró el funcional $J_{f^*} : \mathcal{X}^* \to \overline{\mathbb{R}}$ dado para cada $v \in \mathcal{X}^*$ por

$$J_{f^*}(v) = I_{f^*}(\varphi^a) + \sigma_{\operatorname{dom} I_f}(v^s), \tag{3.1}$$

donde $\varphi^a \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ representa a la parte absolutamente continua de v, en tanto $v^s \in (\Pi(\mathcal{A}))^n$ corresponde a la parte singular de v, con $(\Pi(\mathcal{A}))^n$ el conjunto dado en la observación 1.60. En lo que sigue consideraremos la topología τ^{w^*} en $\mathcal{X}^*$ para así contar con su dualidad respecto a $\mathcal{X}$.

Lo que vamos a ver entonces es que J_{f^*} corresponde justamente a la conjugada de I_f. Para esto, consideremos el siguiente lema, donde supondremos que las funciones integrales están bien definidas (pues dejaremos este detalle para la demostración del teorema principal de esta sección).

Lema 3.6 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo propio tal que existe $y_0 \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ tal que $I_{f^*}(y_0) < +\infty$. Consideremos $J_{f^*} : \mathcal{X}^* \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por la forma de la ecuación (3.1). Entonces $(J_{f^*})^* = I_f$.*

Demostración. Sea $u \in \mathcal{X}$. Por definición, tenemos que:

$$\begin{aligned}
J_{f^*}^*(u) &= \sup_{v \in \mathcal{X}^*} \langle v, u\rangle - J_{f^*}(v) \\
&= \sup_{\substack{\varphi^a \in L^1(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}^n) \\ v^s \in (\Pi(\mathcal{A}))^n}} \int_T \left[\langle u(t), \varphi^a(t)\rangle - f^*\left(t, \varphi^a(t)\right)\right] \mathrm{d}\mu(t) + \langle v^s, u\rangle - \sigma_{\operatorname{dom} I_f}(v^s) \\
&= \sup_{\varphi \in L^1(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}^n)} \int_T \left[\langle u(t), \varphi(t)\rangle - f^*\left(t, \varphi(t)\right)\right] \mathrm{d}\mu(t) + \sup_{v \in (\Pi(\mathcal{A}))^n} \left(\langle v, u\rangle - \sigma_{\operatorname{dom} I_f}(v)\right),
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos la descomposición del teorema 1.59, lo cual permitió separar el supremo en dos sumas por el lema 3.20 en la tercera igualdad. Así, podemos estudiar estos dos supremos por separado. Definamos entonces

$$\begin{aligned}
R_1(u) &= \sup_{\varphi \in L^1(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}^n)} \int_T \left[\langle u(t), \varphi(t)\rangle - f^*\left(t, \varphi(t)\right)\right] \mathrm{d}\mu(t), \\
R_2(u) &= \sup_{v \in (\Pi(\mathcal{A}))^n} \left(\langle v, u\rangle - \sigma_{\operatorname{dom} I_f}(v)\right).
\end{aligned}$$

Para $R_1(u)$, como $L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ es un espacio descomponible, podemos aplicar la regla de intercambiabilidad (teorema 3.2) como se hizo en la demostración del teorema 3.4:

$$\begin{aligned}
R_1(u) &= \int_T \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left[\langle u(t), y\rangle - f^*(t, y)\right] \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_T f^{**}(t, u(t))\mathrm{d}\mu(t) = \int_T f(t, u(t))\mathrm{d}\mu(t) = I_f(u),
\end{aligned}$$

pues $g(t,y) = f^*(t,y) - \langle u(t), y\rangle$ es un normal integrand, $I_g(y_0) < +\infty$ y $f = f^{**}$ al ser convexa propia sci.
Para $R_2(u)$, observemos que, como $0 \in (\Pi(\mathcal{A}))^n$, entonces

$$R_2(u) = \sup_{v\in(\Pi(\mathcal{A}))^n} \langle v, u\rangle - \sigma_{\mathrm{dom}\, I_f}(v) \geq 0.$$

Así, si $u \in \mathrm{dom}\, I_f$, entonces $\langle v, u\rangle - \sigma_{\mathrm{dom}\, I_f}(v) \leq 0$ para cualquier $v \in (\Pi(\mathcal{A}))^n$, de modo que en este caso se cumple que

$$R_2(u) = 0.$$

En cambio, si $u \notin \mathrm{dom}\, I_f$, simplemente basta darse cuenta que lo único que necesitamos saber de $R_2(u)$ es que no vale $-\infty$, pues su valor exacto es irrelevante dado que el primer supremo ya calculado, que era igual a $I_f(u)$, es igual a $+\infty$.
Con todo esto se concluye que $J^*_{f^*} = I_f$. □

Diremos que $u \in L^\infty(S)$ si $u \in \mathcal{X}$, y además $u(t) = 0$ para $t \in T \setminus S$ $\mu-$ctp. Observemos que, si $v \in (\Pi(\mathcal{A}))^n$, la observación 1.60 dice que para cada medida finita τ equivalente a μ y cada $\varepsilon > 0$, existe $S \in \mathcal{A}$ tal que $\tau(T \setminus S) < \varepsilon$ y $v(u) = 0$ para cada $u \in L^\infty(S)$. Con esta notación podemos enunciar y demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.7 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo propio tal que existen $u_0 \in L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, $\varphi_0 \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ tales que $I_f(u_0) < +\infty$, $I_{f^*}(\varphi_0) < +\infty$. Entonces tanto $I_f : L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como $I_{f^*} : L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ están bien definidas, son convexas y propias. Así, el funcional $J_{f^*} : (L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n))^* \to \overline{\mathbb{R}}$ definido en la ecuación (3.1), es decir,*

$$J_{f^*}(v) = I_{f^*}(\varphi^a) + \sigma_{dom\, I_f}(v^s),$$

donde $\varphi^a \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ representa a la parte absolutamente continua de v, en tanto $v^s \in (\Pi(\mathcal{A}))^n$ corresponde a la parte singular de v, también está bien definido, es propio, y se tiene que I_f y J_{f^*} son conjugadas entre sí. Además, bajo esta notación, para cualquier $u \in dom\, I_f$, tenemos que $v \in \partial I_f(u)$ si y solo si $\varphi^a(t) \in \partial f(t, u(t))\ \forall t \in T\ \mu - ctp$, $v^s \in N_{dom\, I_f}(u)$.

Demostración. Dado que f es un normal integrand, por la proposición 2.17 tenemos que f^* también es un normal integrand, por lo que por la proposición 2.3 tenemos que I_f está bien definida en $\mathcal{X} = L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, en tanto I_{f^*} está bien definida en $\mathcal{Y} = L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, y estas funciones son convexas. Además son propias pues, por hipótesis $\mathrm{dom}\, I_f \neq \emptyset$, $\mathrm{dom}\, I_{f^*} \neq \emptyset$, lo cual, por la proposición 3.3 nos asegura que $I_f > -\infty$, y como $f = f^{**}$ por ser convexa propia sci, tenemos que $I_{f^*} > -\infty$ al aplicar este mismo resultado a f^* con conjugada f^{**}.
Como I_{f^*} está bien definida, entonces J_{f^*} también está bien definida, además es propia pues, como $\mathrm{dom}\, I_f \neq \emptyset$, entonces $\sigma_{\mathrm{dom}\, I_f} > -\infty$, y como $\sigma_{\mathrm{dom}\, I_f}(0) = 0$, entonces $J^*_f(v^a_0) < +\infty$, con $v^a_0 \in \mathcal{X}^*$ definida por $v^a_0(u) = \int_T \varphi_0(t)u(t)\mathrm{d}\mu(t)$.
Veamos ahora que I_f y J_{f^*} son conjugadas entre sí. Por el lema 3.6, ya tenemos que $(J_{f^*})^* = I_f$, por lo que solo falta ver que $I^*_f = J_{f^*}$.
Observemos que, como $\mathcal{X}$ es descomponible y $\mathrm{dom}\, I_f \neq \emptyset$, entonces, para cualquier conjunto

medible $S \in \mathcal{A}$ se tiene que, por el teorema 3.2 (regla de intercambiabilidad) aplicado sobre S, para cualquier $\varphi \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$:

$$\int_S f^*(t, \varphi(t)) \mathrm{d}\mu(t) = \sup_{u \in L^\infty(S)} \int_S [\langle u(t), \varphi(t) \rangle - f(t, u(t))] \mathrm{d}\mu(t). \tag{3.2}$$

Sea $v \in \mathcal{X}^*$, y sea $\varphi^a \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ su parte absolutamente continua y $v^s \in (\Pi(\mathcal{A}))^n$ su parte singular. Tenemos que, de manera directa, usando lo anterior para $S = T$:

$$\begin{aligned}
(I_f)^*(v) &= \sup_{u \in \mathcal{X}} \langle v, u \rangle - I_f(u) \\
&= \sup_{u \in \operatorname{dom} I_f} \int_T [\langle u(t), \varphi^a(t) \rangle - f(t, u(t))] \mathrm{d}\mu(t) + v^s(u) \\
&\leq \sup_{u \in \mathcal{X}} \left(\int_T [\langle u(t), \varphi^a(t) \rangle - f(t, u(t))] \mathrm{d}\mu(t) \right) + \sup_{u \in \operatorname{dom} I_f} v^s(u) \\
&= I_{f^*}(\varphi^a) + \sigma_{\operatorname{dom} I_f}(v^s) = J_{f^*}(v).
\end{aligned}$$

Para la otra desigualdad, consideremos cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha < I_{f^*}(\varphi^a) = \int_T f^*(t, \varphi^a(t)) \mathrm{d}\mu(t).$$

Sean $\bar{u} \in \operatorname{dom} I_f$ y $\delta > 0$ arbitrarios. Sea τ una medida finita equivalente a μ. Debido a la singularidad de v^s (observación 1.60), se tiene la existencia de una secuencia creciente de conjuntos medibles $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en T tales que $v^s(u) = 0 \; \forall u \in L^\infty(S_k)$, en tanto

$$\tau(T \setminus S_k) < \frac{1}{k} \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para k suficientemente grande (tal que $\tau(T \setminus S_k)$ sea suficientemente pequeño para asegurar que $\mu(T \setminus S_k)$ sea suficientemente pequeño) se tiene que, considerando $S = S_k$ y $S' = T \setminus S$:

$$\begin{aligned}
\int_S f^*(t, \varphi^a(t)) \mathrm{d}\mu(t) &> \alpha, \\
\int_{S'} [\langle \bar{u}(t), \varphi^a(t) \rangle - f(t, u_0(t))] \mathrm{d}\mu(t) &> -\delta.
\end{aligned}$$

De este modo, calculando directamente la conjugada de I_f:

$$\begin{aligned}
I_f^*(v) = \sup_{u \in \mathcal{X}} &\int_S [\langle \varphi^a(t), u(t) \rangle - f(t, u(t))] \mathrm{d}\mu(t) + \int_{S'} [\langle \varphi^a(t), u(t) \rangle - f(t, u(t))] \mathrm{d}\mu(t) + v^s(u) \\
= &\sup_{u \in L^\infty(S)} \int_S [\langle \varphi^a(t), u(t) \rangle - f(t, u(t))] \mathrm{d}\mu(t) \\
&+ \sup_{u \in L^\infty(S')} \int_{S'} [\langle \varphi^a(t), u(t) \rangle - f(t, u(t))] \mathrm{d}\mu(t) + v^s(u) \\
= &\int_S f^*(t, \varphi^a(t)) \mathrm{d}\mu(t) + \sup_{u \in L^\infty(S')} \int_{S'} [\langle u(t), \varphi^a(t) \rangle - f(t, u(t))] \mathrm{d}\mu(t) + v^s(u),
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se separó el supremo usando el lema 3.20 y la definición de $L^\infty(S)$, en tanto la tercera igualdad viene de la ecuación (3.2). Consideremos la siguiente función u:

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}(t) & \text{si } t \in S', \\ 0 & \text{si } t \in S. \end{cases}$$

Claramente $u \in L^\infty(S')$, por lo que

$$I_f^*(v) \geq \int_S f^*(t, \varphi^a(t))\mathrm{d}\mu(t) + \int_{S'} [\langle \bar{u}(t), \varphi^a(t) \rangle - f(t, \bar{u}(t))]\mathrm{d}\mu(t) + v^s(\bar{u}),$$

de modo que

$$I_f^*(v) \geq \alpha - \delta + v^s(\bar{u}).$$

Así, como α era cualquier número menor que la integral, δ era cualquier número positivo, y como $\bar{u} \in \operatorname{dom} I_f$ era arbitrario, entonces se tiene que

$$I_f^*(v) \geq I_{f^*}(\varphi^a) + \sigma_{\operatorname{dom} I_f}(v^s) = J_{f^*}(v),$$

con lo cual se concluye que $I_f^* = J_{f^*}$, por lo que son conjugadas entre sí.
Para la fórmula del subdiferencial, tenemos que si $u \in \operatorname{dom} I_f$, entonces $v \in \partial I_f(u)$ si y solo si:

$$I_f(u) + I_f^*(v) = \langle v, u \rangle,$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= I_f(u) + J_{f^*}(v) - \int_T \langle u(t), \varphi^a(t) \rangle \mathrm{d}\mu(t) - v^s(u) \\ &= \underbrace{\left(\int_T [f(t, u(t)) + f^*(t, \varphi^a(t)) - \langle u(t), \varphi^a(t) \rangle] \mathrm{d}\mu(t) \right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\sigma_{\operatorname{dom} I_f}(v^s) - v^s(u) \right)}_{\geq 0}, \end{aligned}$$

donde, como $u \in \operatorname{dom} I_f$, ambos sumandos son positivos, y, por lo tanto, son iguales a cero. De este modo:

- Para la integral tenemos que

  $$\begin{gathered} \int_T [f(t, u(t)) + f^*(t, \varphi^a(t)) - \langle u(t), \varphi^a(t) \rangle] \mathrm{d}\mu(t) = 0 \\ \iff f(t, u(t)) + f^*(t, \varphi^a(t)) - \langle u(t), \varphi^a(t) \rangle = 0 \, \forall t \in T \; \mu - \text{ctp}, \end{gathered}$$

  lo cual se traduce en

  $$\varphi^a(t) \in \partial f(t, u(t)) \, \forall t \in T \; \mu - \text{ctp}.$$

- Para el otro sumando, se tiene que

  $$\sigma_{\operatorname{dom} I_f}(v^s) = v^s(u),$$

  lo que se traduce en

  $$v^s \in N_{\operatorname{dom} I_f}(u).$$

Con todo esto concluimos lo buscado. $\square$

Al igual que en el teorema 3.4, la hipótesis $\exists \varphi_0 \in L^1(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}^n)$ tal que $I_{f^*}(\varphi_0) < +\infty$ se puede asegurar con la condición dada en la proposición 3.5, para $\mathcal{Y} = L^1(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}^n)$, de modo de no necesitar f^* para trabajar con el subdiferencial. Además, en este caso también se tiene que I_f es sci dado que es la conjugada de una función.

Recordemos que el objetivo de este método es encontrar el subdiferencial de la función integral sobre el espacio de las funciones continuas. Tener el resultado para $L^\infty(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}^n)$ nos acerca a este caso, dado que las funciones continuas sobre conjuntos compactos son acotadas, así que se pueden ver como subespacio. Lo complicado de trabajar con funciones continuas es que necesitamos una topología en T, pero aparte este espacio no es descomponible, y el teorema de las selecciones medibles es muy difícil de acomodar para asegurar continuidad. El caso del espacio de las funciones continuas se estudiará en la siguiente sección, y para poder usar los resultados recién vistos, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.8 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo. Sea $u_0 \in L^\infty(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}^n)$, y asumamos que existe $r > 0$ tal que el funcional $t \to f(t,u_0(t)+x)$ está en $\mathcal{L}^1(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R})$ para cualquier $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ (en particular el funcional es a valores finitos). Entonces existe $\varphi_0 \in L^1(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}^n)$ tal que $I_{f^*}(\varphi_0) < +\infty$, y además I_f es continua para cualquier $u \in B_{L^\infty}(u_0,r) \subseteq L^\infty(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Para ver la existencia de φ_0, observemos que por hipótesis tenemos que $B_{\mathbb{R}^n}(u_0(t),r) \subseteq \operatorname{int}\operatorname{dom} f(t,\cdot)$, por lo que, por el teorema 1.20, se tiene que $\partial f(t,u_0(t)) \neq \emptyset$ (y este conjunto es cerrado y acotado) $\forall t \in T$. Como f es un normal integrand, por la proposición 2.19 tenemos que la multiaplicación $t \to \partial f(t,u_0(t))$ es medible, y como es a valores no vacíos y cerrados, podemos aplicar el teorema 1.43 para ver que existe una selección medible ϕ_0, es decir, $\phi_0(t) \in \partial f(t,u_0(t))\ \forall t \in T$. Veamos que $\phi_0 \in \mathcal{L}^1(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}^n)$: en efecto, por definición del subdiferencial, para cualquier $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0,r)$, tenemos que

$$\langle \phi_0(t), x\rangle \leq \underbrace{f(t,u_0(t)+x) - f(t,u_0(t))}_{\in \mathcal{L}^1(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R})}\ \forall t \in T,$$

por lo que, considerando $x = \frac{r}{2}\mathrm{e}_j$, tenemos que $(\phi_0)_j \in \mathcal{L}^1(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R})\ \forall j \in \{1,\ldots,n\}$. Considerando $\varphi_0 = [\phi_0]$, tenemos que $\varphi_0 \in L^1(T,\mathcal{A},\mu;\mathbb{R}^n)$. Además, por definición del subdiferencial:

$$f^*(t,\varphi_0(t)) = \langle u_0(t), \varphi_0(t)\rangle - f(t,u_0(t))\ \forall t \in T\ \mu-\mathrm{ctp},$$

por lo que es integrable y así $I_{f^*}(\varphi_0) < +\infty$.
Para la continuidad de I_f, observemos que por las hipótesis se tiene que $B_{L^\infty}(u_0,r) \subseteq \operatorname{int}\operatorname{dom} I_f$, por lo que, por la proposición 1.8, basta encontrar una vecindad de u_0 donde I_f esté acotada superiormente. Sea $m = 2n+1$, y consideremos, para cada $\mathrm{i} \in \{1,\ldots,n\}$ los vectores $x_\mathrm{i} = \frac{2r}{3}\mathrm{e}_\mathrm{i}$, $x_{n+\mathrm{i}} = -\frac{2r}{3}\mathrm{e}_\mathrm{i}$, y $x_{2n+1} = 0$, donde $\{\mathrm{e}_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. De este modo, si P es la envoltura convexa de estos puntos (es decir, $P = \operatorname{conv}\{x_1,\ldots,x_m\}$), tenemos que $B_{\mathbb{R}^n}(0,\frac{r}{3}) \subseteq P$, y además $x_\mathrm{i} \in B_{\mathbb{R}^n}(0,r)\ \forall \mathrm{i} \in \{1,\ldots,m\}$. Definamos entonces la función $k : T \to \mathbb{R}$ dada por:

$$k(t) = \max_{\mathrm{i}\in\{1,\ldots,m\}} f(t,u_0(t)+x_\mathrm{i})\ \forall t \in T.$$

Tenemos entonces que $k \in \mathcal{L}^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$. Para cualquier $t \in T$ se tiene que, para todo $w \in B_{\mathbb{R}^n}(u_0(t), \frac{r}{3})$, como $w - u_0(t) \in P$, entonces considerando para cada $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$ los coeficientes $\lambda_\mathrm{i} = \frac{3}{2r} \max\{\langle w - u_0(t), \mathrm{e_i}\rangle, 0\}$, $\lambda_{n+\mathrm{i}} = \frac{3}{2r} \max\{\langle w - u_0(t), -\mathrm{e_i}\rangle, 0\}$, $\lambda_{2n+1} = 1 - \sum_{\mathrm{i}=1}^{2n} \lambda_\mathrm{i}$, entonces $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in [0, 1]$, $\sum_{\mathrm{i}=1}^{m} \lambda_\mathrm{i} = 1$ y $w = \sum_{\mathrm{i}=1}^{m} \lambda_\mathrm{i}(u_0(t) + x_\mathrm{i})$, lo cual, por convexidad de f, nos lleva a que

$$f(t, w) \leq \sum_{\mathrm{i}=1}^{m} \lambda_\mathrm{i} f(t, u_0(t) + x_\mathrm{i}) \leq k(t).$$

Por lo anterior, tenemos que para cualquier $u \in B_{L^\infty}(u_0, \frac{r}{3})$, se cumple que

$$f(t, u(t)) \leq k(t)\ \forall t \in T\ \mu - \text{ctp},$$

lo cual, como k es integrable, considerando $\alpha = \int_T k(t) \mathrm{d}\mu(t)$ concluimos que

$$I_f(u) \leq \alpha\ \forall u \in B_{L^\infty}\left(u_0, \frac{r}{3}\right).$$

□

Este lema se usará en la próxima sección, pues el estudio del caso del espacio de funciones continuas es más complicado y se necesitan precisar ciertas hipótesis primero.

3.3. Caso espacio de funciones continuas

Sea (T, τ) un espacio topológico $\sigma-$lcH, y consideremos T como espacio medible respecto a sus bolerianos, es decir, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(T)$. Sea además μ una medida (estrictamente positiva) regular en $\mathcal{B}(T)$ (que en particular es $\sigma-$finita dado que el espacio es $\sigma-$compacto). Bajo la notación de la sección 1.3, consideremos $C = C_0(T; \mathbb{R}^n)$. Observemos que, bajo nuestras hipótesis, su dual puede ser identificado con $M = (M(T))^n$, y además toda medida de Radon es regular.

Para estudiar el subdiferencial de las funciones integrales en C, Rockafellar planteó, en [15] (teorema 4), que se podía usar la fórmula del subdiferencial dada en el caso $L^\infty(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, pues observó que usando la inyección canónica de C en este espacio (tomando la clase de equivalencia dada por la igualdad $\mu-$ctp de cada elemento $u \in C$) se podía obtener un resultado al usar el lema 3.22 (ver sección de anexos 3.4). Sin embargo, para esto requería una hipótesis adicional de continuidad en un punto. Este resultado se presenta a continuación.

Teorema 3.9 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo y propio. Supongamos que existe $u_0 \in C$ y $r > 0$ con la propiedad de que el funcional $t \to f(t, u_0(t) + x)$ está en $\mathcal{L}^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R})$ para cualquier $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, r)$. Entonces $I_f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es un funcional que está bien definido, es convexo, sci y propio, y además es finito y continuo para cada $u \in B_C(u_0, r)$. Además, $I_f^* : M \to \overline{\mathbb{R}}$ satisface:*

$$I_f^*(\theta) = \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} \left(I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \sigma_{dom\, I_f}(\theta - \theta') \right)\ \forall \theta \in M,$$

donde I_{f^*} es un funcional bien definido de $L^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$ a $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

DEMOSTRACIÓN. La idea de esta demostración es aplicar el lema 3.22 (ver sección de anexos 3.4) para $F = C$, $G = L^\infty(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$ y A el mapeo canónico de F en G, es decir, tal que a cada $u \in C$ le asigna su clase de equivalencia correspondiente en $L^\infty(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$. Para diferenciar los funcionales integrales en estos espacios, llamaremos I_f al funcional definido en C, en tanto llamaremos E_f al funcional definido en $L^\infty(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$, es decir, $I_f = E_f \circ A$. Además recordemos que I_{f^*} está definida en $L^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$, de modo que se escribe $I_{f^*} : L^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$.
Dadas las hipótesis, tenemos que se cumple el lema 3.8 (considerando E_f y el punto Au_0), por lo que $\operatorname{dom} I_{f^*} \neq \emptyset$, y así se cumplen las hipótesis del teorema 3.7 para E_f, de modo que E_f está bien definida, es convexa, propia y sci y es a valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, por lo que, como A es lineal continua, también se tiene que I_f está bien definida, es convexa, propia y sci. Además, I_{f^*} está bien definido de $L^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$ a valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
También el lema 3.8 nos da que E_f es finita y continua en $B_{L^\infty(T,\mathcal{B}(T),\mu;\mathbb{R}^n)}(Au_0, r)$, por lo que I_f es finita y continua en $B_C(u_0, r)$. De este modo, se cumplen las hipótesis del lema 3.22, por lo que, para $\theta \in M$:

$$I_f^*(\theta) = (E_f \circ A)^*(\theta) = A^* E_f^*(\theta) = \text{mín}\{E_f^*(v) \,|v \in (L^\infty(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n))^*, A^* v = \theta\}.$$

Usando la fórmula de E_f^* del teorema 3.7, podemos reescribir esta última espresión como:

$$I_f^*(\theta) = \text{mín}\{I_{f^*}(\varphi^a) + \sigma_{\operatorname{dom} E_f}(v^s) \mid v \in (L^\infty(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n))^*, A^* v = \theta\},$$

donde $\varphi^a \in L^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$ corresponde a la parte absolutamente continua de v, en tanto $v^s \in (\Pi(\mathcal{B}(T)))^n$ corresponde a la parte singular de v. Sea v tal que $A^* v = \theta$. Considerando $v^a \in (L^\infty(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n))^*$ el elemento representado por φ^a (es decir, $v^a(\phi) = \int_T \varphi^a(t)\phi(t)\mathrm{d}\mu(t) \forall \phi \in C$), se aprecia entonces que, definiendo $\theta' = A^* v^a$, se tiene que $\theta' \in M$ y es absolutamente continua con respecto a μ, y se cumple que $\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu} = \varphi^a$, pues:

$$\langle A^* v^a, \phi\rangle = \langle v^a, A\phi\rangle = \int_T \varphi^a(t)\phi(t)\mathrm{d}\mu(t) \forall \phi \in C.$$

Con esto se tiene que $A^* v^s = \theta - \theta'$, por lo que la expresión anterior se puede reescribir como:

$$I_f^*(\theta) = \text{mín}\left\{I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \sigma_{\operatorname{dom} E_f}(w) \mid \theta' \in M, \theta' \ll \mu, A^* w = \theta - \theta', w \in (\Pi(\mathcal{B}(T)))^n\right\} \tag{3.3}$$

$$= \text{mín}\left\{I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \tilde{K}(\theta - \theta') \mid \theta' \in M, \theta' \ll \mu\right\}, \tag{3.4}$$

donde usamos que el primer sumando es independiente de w, y definimos

$$\tilde{K}(\theta - \theta') = \text{mín}\{\sigma_{\operatorname{dom} E_f}(w) \mid w \in (\Pi(\mathcal{B}(T)))^n, A^* w = \theta - \theta'\}.$$

Observando que Au_0 es un punto interior de $\operatorname{dom} E_f$ debido a nuestras hipótesis, entonces $\mathrm{i}_{\operatorname{dom} E_f}$ es finita y continua en un punto perteneciente al rango de A y así podemos aplicar el lema 3.22 para la función indicadora $\mathrm{i}_{\operatorname{dom} E_f}$, pues $\mathrm{i}_{\operatorname{dom} I_f} = \mathrm{i}_{\operatorname{dom} E_f} \circ A$, obteniendo que, para cualquier $\theta' \in M$ tal que $\theta' \ll \mu$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\operatorname{dom} I_f}(\theta - \theta') &= (\mathrm{i}_{\operatorname{dom} I_f})^*(\theta - \theta') = (\mathrm{i}_{\operatorname{dom} E_f} \circ A)^*(\theta - \theta') \\
&= (A^* \mathrm{i}^*_{\operatorname{dom} E_f})(\theta - \theta') \\
&= \text{mín}\{\sigma_{\operatorname{dom} E_f}(w) \mid w \in (L^\infty(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n))^*, A^* w = \theta - \theta'\}.
\end{aligned}$$

Definamos

$$K(\theta-\theta') = \text{mín}\{\sigma_{\text{dom}\,E_f}(w) \mid w \in (L^\infty(T,\mathcal{B}(T),\mu;\mathbb{R}^n))^*, A^*w = \theta-\theta'\},$$

donde se aprecia que K corresponde a $\tilde{K}$ con la restricción de singularidad de w omitida. Probaremos ahora que en la fórmula (3.4) se puede cambiar $\tilde{K}$ por K sin cambiar su valor. La primera desigualdad se tiene trivialmente,

$$I_f^*(\theta) \geq \text{mín}\{I_f^*\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + K(\theta-\theta') \mid \theta' \in M, \theta' \ll \mu\}.$$

Para la otra desigualdad, considerando $u \in \text{dom}\, I_f$ arbitrario, $\theta' \in M$ tal que $\theta' \ll \mu$ y cualquier $w \in (L^\infty(T,\mathcal{B}(T),\mu;\mathbb{R}^n))^*$ tal que $A^*w = \theta-\theta'$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle \theta, u\rangle - I_f(u) &= \langle \theta', u\rangle - I_f(u) + \langle \underbrace{\theta-\theta'}_{A^*w}, u\rangle \\
&= \int_T \left(\left\langle u(t), \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}(t)\right\rangle - f(t,u(t))\right)\mathrm{d}\mu(t) + w(Au) \\
&\leq I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \sigma_{\text{dom}\,E_f}(w).
\end{aligned}$$

De modo que, tomando supremo sobre $u \in \text{dom}\, I_f$ en el lado izquierdo, y en el lado derecho mínimo sobre $\theta' \in M, \theta' \ll \mu$, y $w \in \mathcal{X}^* = (L^\infty(T,\mathcal{B}(T),\mu;\mathbb{R}^n))^*$ tal que $A^*w = \theta-\theta'$, se tiene que:

$$I_f^*(\theta) \leq \text{mín}\left\{I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \sigma_{\text{dom}\,E_f}(w) \mid \theta' \in M, \theta' \ll \mu, w \in \mathcal{X}^*, A^*w = \theta-\theta'\right\},$$

con lo cual, dado que el primer sumando es independiente de w:

$$I_f^*(\theta) \leq \text{mín}\left\{I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + K(\theta-\theta') \mid \theta' \in M, \theta' \ll \mu\right\},$$

y así se concluye que se puede reemplazar $\tilde{K}$ por K en la ecuación (3.4), lo cual también es igual a $\sigma_{\text{dom}\, I_f}$, concluyendo el resultado buscado. □

A partir del resultado anterior se puede obtener una fórmula para el subdiferencial.

Corolario 3.10 *Bajo las hipótesis del teorema 3.9, tenemos que $\theta \in M$ pertenece a $\partial I_f(u)$, donde $u \in dom\, I_f \subseteq C$, si y solo si existe $\theta' \in M$ tal que $\theta' \ll \mu$ y satisface que*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}(t) \in \partial f(t,u(t))\ \forall t \in T\ \mu - ctp,& \\
\theta-\theta' \in N_{dom\, I_f}(u).&
\end{aligned}$$

Demostración. Dado que tenemos las hipótesis para usar el teorema 3.9, podemos usar la fórmula de I_f^*, en la cual el mínimo se alcanza para cualquier $\theta \in M$ puesto que se cumplen las hipótesis del lema 3.22 (pues basta considerar su parte absolutamente continua θ^a para ver que el conjunto es no vacío). Así, para $u \in \operatorname{dom} I_f$, tenemos que $\theta \in \partial I_f(u)$ si y solo si

$$I_f(u) + I_f^*(\theta) = \langle \theta, u \rangle.$$

Considerando $\theta' \in M$ tal que $\theta' \ll \mu$ y el mínimo que define a I_f^* se alcanza en θ', lo anterior es equivalente a

$$\underbrace{\int_T \left(f(t,u(t)) + f^* \left(t, \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}(t) \right) - \left\langle \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}(t), u(t) \right\rangle \right) \mathrm{d}\mu(t)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\sigma_{\operatorname{dom} I_f}(\theta - \theta') - \langle \theta - \theta', u \rangle \right)}_{\geq 0} = 0,$$

por lo cual ambos sumandos son ceros, así que nuevamente esto es equivalente a las siguientes dos igualdades:

- Para la integral tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_T \left(f(t,u(t)) + f^* \left(t, \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}(t) \right) + \left\langle \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}(t), u(t) \right\rangle \right) \mathrm{d}\mu(t) = 0 \\
\iff & f(t,u(t)) + f^* \left(t, \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}(t) \right) + \left\langle \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}(t), u(t) \right\rangle = 0 \, \forall t \in T \; \mu - \mathrm{ctp} \\
\iff & \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}(t) \in \partial f(t,u(t)) \, \forall t \in T \; \mu - \mathrm{ctp}.
\end{aligned}$$

- Para $\theta - \theta'$ tenemos que

$$\sigma_{\operatorname{dom} I_f}(\theta - \theta') - \langle \theta - \theta', u \rangle = 0 \iff \theta - \theta' \in N_{\operatorname{dom} I_f}(u).$$

□

Con este último resultado ya tenemos una fórmula para el subdiferencial de I_f sobre el espacio C. Sin embargo, podemos apreciar que se presentan dos grandes problemas en esta formulación:

- Complejidad de las hipótesis: Las hipótesis del teorema 3.9 son bastante fuertes, es decir, pedir que el interior de la función integral sea no vacío es algo que usualmente no es fácil de verificar y además deja fuera bastantes casos interesantes de funciones de penalización.
- Complejidad de la representación del subdiferencial: La fórmula del subdiferencial del corolario 3.10 es difícil de trabajar, pues si bien es similar a la fórmula del teorema 3.7, en vez de tener θ^a, la parte absolutamente continua de θ con respecto a μ, tenemos un θ' que minimiza la fórmula de I_f^* del teorema 3.9, el cual puede resultar difícil de obtener de manera exacta.

Ante el problema de la representación del subdiferencial, Rockafellar planteó al final de su trabajo en [15] que, al agregar cierta condición al dominio del integrand, se podía mejorar dicha fórmula. Sin embargo, su trabajo solo se centró en espacios compactos y solo mostró la suficiencia de dicha condición. Muchos años más tarde, Ari-Pekka Perkkiö refinó los resultados

sobre el espacio C en [11], no solamente generalizando la formulación a espacios $\sigma-$lcH en vez de compactos, sino también demostrando la necesidad de las hipótesis sobre el dominio del integrand. Es por esto que continuaremos con los resultados demostrados por Perkkiö en [11], aunque vale señalar que hemos realizado algunas precisiones en los desarrollos que se expondrán a continuación.
En primer lugar, para un integrand convexo $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, definimos la multiaplicación convexa cerrada $D_f : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada por:

$$D_f(t) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{dom}\, f(t, \cdot)).$$

La hipótesis sobre el dominio que tomaremos será que D_f sea isc. Recordemos que la definición de multiaplicaciones isc está dada en la definición 1.36, pero de todos modos la repetiremos acá: para una multiaplicación $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, diremos que S es isc si para cualquier abierto $O \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene que $S^{-1}(O) \in \tau$. Observemos que si S es isc, entonces es medible, puesto que los abiertos son medibles en $\mathcal{B}(T)$. Además, recordemos que, como T es $\sigma-$lcH, entonces, por el corolario 1.33, el espacio T es perfectamente normal, por lo cual se podrá aplicar el teorema de selección de Michael (teorema 1.49).
Ahora, para una multiaplicación $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, denotaremos al conjunto de selecciones de S en C por $C(S)$, es decir:

$$C(S) = \{u \in C_0(T; \mathbb{R}^n) \mid u(t) \in S(t)\ \forall t \in T\}.$$

Veamos que la estructura de $C(S)$ como conjunto de C está determinado por las propiedades que tenga S.

Proposición 3.11 *Si $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multiaplicación a valores convexos y cerrados, entonces $C(S)$ es un conjunto convexo y cerrado en C.*

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in C(S)$, y sea $\lambda \in [0, 1]$. Definiendo $y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2$, claramente $y \in C$ pues $y_1, y_2 \in C$. Además, para cada $t \in T$ tenemos que $y_1(t), y_2(t) \in S(t)$ y $S(t)$ es convexa, por lo que es directo que $y(t) \in S(t)$. Así, $y \in C(S)$, por lo que $C(S)$ es convexo.
Sea $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C(S)$ tal que $y_k \to y \in C$ de manera uniforme. Entonces, en particular, para cada $t \in T$ tenemos que $y_k(t) \to y(t)$, y como $y_k(t) \in S(t)$ y $S(t)$ es cerrado, es directo que $y(t) \in S(t)$. Por lo tanto, $y \in C(S)$ y así $C(S)$ es cerrado. □

Dado que en este caso no tenemos regla de intercambiabilidad, necesitaremos un resultado similar para el caso de las funciones continuas. Esto se verá a continuación en un resultado que nos mostrará que en el caso particular de las funciones soporte existe una especie de regla de intercambiabilidad gracias al teorema de selecciones continuas de Michael. Antes de presentar estos resultados, necesitamos precisar ciertas cosas. Recordemos que en la sección 1.3 vimos que para cualquier $\theta \in M$ se tiene que $\theta \ll |\theta|$ y así $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}$ está bien definido (considerando, sin pérdida de generalidad, que para $\theta = 0$ se tiene que $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|} \equiv 0$, para no tener que asumir siempre que $\theta \neq 0$ al trabajar en M). Tenemos el siguiente resultado que nos será útil.

Lema 3.12 *Sea $u \in C$, $\theta \in M$ y $A \in \mathcal{B}(T)$. Entonces:*

$$\int_A \left\langle u(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \right\rangle \mathrm{d}|\theta|(t) \geq -\int_A |u(t)| \mathrm{d}|\theta|(t).$$

Demostración. Tenemos que

$$\int_A \left\langle u(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \right\rangle \mathrm{d}|\theta|(t) \geq -\int_A |u(t)| \cdot \left| \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \right| \mathrm{d}|\theta|(t)$$
$$\geq -\int_A |u(t)| \mathrm{d}|\theta|(t),$$

pues $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \in [-1, 1] \, \forall t \in T \, |\theta| - \text{ctp}$. □

Ahora presentamos el resultado sobre la especie de regla de intercambiabilidad sobre el caso continuo, el cual está relacionado a la propiedad de una multiaplicación de ser isc.

Teorema 3.13 *Sea $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multiaplicación a valores convexos tal que $C(S) \neq \emptyset$. Entonces:*

$$\sigma_{C(S)}(\theta) = \int_T \sigma_{S(t)} \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \right) \mathrm{d}|\theta|(t) \, \forall \theta \in M$$

si y solo si S es isc. Además tenemos que, en este caso, para $y \in C(S)$ se tiene que $\theta \in N_{C(S)}(y)$ si y solo si $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \in N_{S(t)}(y(t)) \, \forall t \in T \, |\theta| - ctp$.

Demostración. Para ver que es necesario que S sea isc, supongamos, por contradicción, que S no es isc. Entonces, existe un abierto $O \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que el conjunto $A = \{t \in T \,|\, S(t) \cap O \neq \emptyset\}$ no es abierto. Como en particular no es vacío, sabemos que existe $t_0 \in A$ que no está en el interior de A, es decir, $S(t_0) \cap O \neq \emptyset$ y $\forall U \in \tau$ tal que $t_0 \in U$, existe $t \in U$ tal que $S(t) \cap O = \emptyset$. Definamos $\Gamma(t_0) = \{u(t_0) \,|\, u \in C(S)\}$. Probemos que, para cualquier $y_0 \in S(t_0) \cap O$, se tiene que $y_0 \notin \mathrm{cl}\,(\Gamma(t_0))$. En primer lugar, para $y_0 \in S(t_0) \cap O$, si suponemos que existe $u \in C(S)$ tal que $u(t_0) = y_0$, entonces $u^{-1}(O) \in \tau$ por continuidad, y además $t_0 \in u^{-1}(O)$. Por lo tanto, existe $t \in u^{-1}(O)$ tal que $S(t) \cap O = \emptyset$. Sin embargo, por otro lado tenemos que $u(t) \in S(t) \cap O$ pues $u \in C(S)$ y $t \in u^{-1}(O)$, lo cual es una contradicción. Así, tenemos que $\emptyset = (S(t_0) \cap O) \cap \Gamma(t_0) = O \cap \Gamma(t_0)$, pues $\Gamma(t_0) \subseteq S(t_0)$. Así, $\Gamma(t_0) \subseteq T \setminus O$, con $T \setminus O$ cerrado, por lo que $\mathrm{cl}\,(\Gamma(t_0)) \subseteq T \setminus O$, es decir, $\mathrm{cl}\,(\Gamma(t_0)) \cap O = \emptyset$. Con esto, tenemos que $\forall y_0 \in S(t_0) \cap O$, $y_0 \notin \mathrm{cl}\,(\Gamma(t_0))$. Sea entonces $y_0 \in S(t_0) \cap O$ fijo. Como $y_0 \notin \mathrm{cl}\,(\Gamma(t_0))$, y este último conjunto es convexo, cerrado y no vacío dado que S es a valores convexos y $C(S) \neq \emptyset$, podemos separar $\{y_0\}$ de $\mathrm{cl}\,(\Gamma(t_0))$, obteniendo así que existen $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ tales que:

$$\langle x, y \rangle \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq \langle x, y_0 \rangle \, \forall y \in \mathrm{cl}\,(\Gamma(t_0)). \tag{3.5}$$

Así, definiendo $\theta_{\mathrm{i}} = x_{\mathrm{i}} \delta_{t_0}$, tenemos que $|\theta| = \|x\| \delta_{t_0}$ y así $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|} = \frac{x}{\|x\|}$. Con esto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle x, y_0 \rangle &= \left\langle y_0, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \|x\| \\
&\leq \sigma_{S(t_0)} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \|x\| \\
&= \int_T \sigma_{S(t)} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \|x\| \mathrm{d}\delta_{t_0}(t) \\
&= \int_T \sigma_{S(t)} \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \right) \mathrm{d}|\theta|(t),
\end{aligned}$$

pues $y_0 \in S(t_0)$. Por otra parte, para cada $y \in \Gamma(t_0)$, tenemos que $y = u(t_0)$ para algún $u \in C(S)$. Así, para cada $u \in C(S)$:

$$\langle x, u(t_0)\rangle = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \int_T (u(t))_{\mathrm{i}} \cdot x_{\mathrm{i}}\delta_{t_0}(t) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \int_T (u(t))_{\mathrm{i}} \mathrm{d}\theta_{\mathrm{i}}(t) = \langle \theta, u\rangle.$$

Así, reemplazando todo esto en la ecuación (3.5) y tomando supremo sobre $C(S)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\langle \theta, u\rangle \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq \int_T \sigma_{S(t)}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta|(t) \; \forall u \in C(S) \\ \Rightarrow \quad & \sigma_{C(S)}(\theta) \leq \alpha < \int_T \sigma_{S(t)}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta|(t), \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción pues se debería cumplir la igualdad.
Para ver ahora que es suficiente que S sea isc, de ahora en adelante lo supondremos. Sea $\theta \in M$ fijo. Observemos que, directamente, para $u \in C(S)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \theta, u\rangle &= \int_T \left\langle u(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right\rangle \mathrm{d}|\theta|(t) \\ &\leq \int_T \sigma_{S(t)}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta|(t), \end{aligned}$$

pues $u(t) \in S(t)\ \forall t \in T$ dado que $u \in C(S)$. Para probar que el supremo corresponde a esta cota, consideremos $\alpha < \int_T \sigma_{S(t)}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta|(t)$ y $\varepsilon > 0$, y probemos que en este caso existe $u \in C(S)$ tal que:

$$\langle \theta, u\rangle > \alpha - \varepsilon.$$

Sea $u_1 \in C(S) \neq \emptyset$ arbitrario. Definamos $\mathcal{L}^\infty(\theta; S) = \{w \in \mathcal{L}^\infty(|\theta|) \mid w(t) \in S(t)\ \forall t \in T\}$, donde $\mathcal{L}^\infty(|\theta|) = \mathcal{L}^\infty(T, \mathcal{B}(T), |\theta|; \mathbb{R}^n)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \sup_{w \in \mathcal{L}^\infty(\theta;S)} \langle \theta, w\rangle &= \sup_{w \in \mathcal{L}^\infty(\theta;S)} \int_T \left\langle w(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right\rangle \mathrm{d}|\theta|(t) \\ &= \sup_{w \in \mathcal{L}^\infty(|\theta|)} \int_T \left(\left\langle w(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right\rangle - \mathrm{i}_{S(t)}(w(t))\right) \mathrm{d}|\theta|(t) \\ &= -\inf_{w \in \mathcal{L}^\infty(|\theta|)} \int_T \left(\left\langle -w(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right\rangle + \mathrm{i}_{S(t)}(w(t))\right) \mathrm{d}|\theta|(t) \\ &= -\int_T \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\left\langle -x, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right\rangle + \mathrm{i}_{S(t)}(x)\right) \mathrm{d}|\theta|(t) \\ &= \int_T \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\left\langle x, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right\rangle - \mathrm{i}_{S(t)}(x)\right) \mathrm{d}|\theta|(t) \\ &= \int_T \sigma_{S(t)}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta|(t), \end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se tiene por una aplicación del teorema 3.2 (regla de intercambiabilidad), dado que $\mathcal{L}^\infty(|\theta|)$ es descomponible, $|\theta|$ es medida finita y $f(t,x) = \langle -x, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\rangle + \mathrm{i}_{S(t)}(x)$

es normal integrand (por ejemplo 2.5 al ser Carathéodory, por el ejemplo 2.7 pues S es medible, y por proposición 2.13) que cumple $I_f \not\equiv +\infty$ pues $C(S) \neq \emptyset$. Sea entonces $w \in \mathcal{L}^\infty(\theta; S)$ tal que $\langle \theta, w \rangle > \alpha$. Dado que $|\theta|$ es una medida de Radon no negativa finita en $\mathcal{B}(T)$ y w_i es medible con respecto a $\mathcal{B}(T)$, podemos aplicar el teorema de Lusin (teorema 1.58) para cada $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$, y así obtenemos que existen $\{A_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}=1}^n \subseteq \mathcal{B}(T)$ tales que w_i es continua sobre A_i y $|\theta|(T \setminus A_\mathrm{i}) \leq \frac{\varepsilon}{4n(\|w\|_{L^\infty}+\|u_1\|_\infty+1)}$ $\forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$. Así, definiendo $A = \bigcap_{\mathrm{i}=1}^n A_\mathrm{i}$, tenemos que w es continua sobre A y además $|\theta|(T \setminus A) = |\theta|(\bigcup_{\mathrm{i}=1}^n T \setminus A_\mathrm{i}) \leq \frac{\varepsilon}{4(\|w\|_{L^\infty}+\|u_1\|_\infty+1)}$. Luego, por regularidad de $|\theta|$ sabemos que existe $K \subseteq A$ compacto tal que $|\theta|(A \setminus K) \leq \frac{\varepsilon}{4(\|w\|_{L^\infty}+\|u_1\|_\infty+1)}$. Con todo esto tenemos que:

- w es continua a soporte compacto relativo a K, pues K es compacto.
- Sobre $T \setminus K$ se cumple que, dado que $T \setminus K = (T \setminus A) \cup (A \setminus K)$:

$$\begin{aligned}\int_{T\setminus K} (|w| + |u_1|)\mathrm{d}|\theta| &\leq (\|w\|_{L^\infty} + \|u_1\|_\infty) \cdot \left(\int_{A\setminus K} \mathrm{d}|\theta| + \int_{T\setminus A} \mathrm{d}|\theta| \right) \\ &= (\|w\|_{L^\infty} + \|u_1\|_\infty) \cdot (|\theta|(A \setminus K) + |\theta|(T \setminus A)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Definamos entonces la siguiente multiaplicación:

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \{w(t)\} & \text{si } t \in K, \\ S(t) & \text{si } t \in T \setminus K. \end{cases}$$

Claramente Γ es a valores convexos y no vacíos. Veamos que es isc. Sea $O \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces

$$\begin{aligned}\{t \in T \,|\Gamma(t) \cap O \neq \emptyset\} &= (w^{-1}(O) \cap K) \cup (\{t \in T \mid S(t) \cap O \neq \emptyset\} \cap (T \setminus K)) \\ &= \{t \in T \mid S(t) \cap O \neq \emptyset\} \cap ((w^{-1}(O) \cap K) \cup (T \setminus K)) \\ &= \{t \in T \mid S(t) \cap O \neq \emptyset\} \cap ((U \cap K) \cup (T \setminus K)) \\ &= \{t \in T \mid S(t) \cap O \neq \emptyset\} \cap (U \cup (T \setminus K)) \in \tau,\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se tiene porque $w^{-1}(O) \subseteq \{t \in T \mid S(t) \cap (O) \neq \emptyset\}$ dado que $w \in \mathcal{L}^\infty(\theta; S)$, en la tercera igualdad $U \in \tau$ es un abierto de T tal que $w^{-1}(O) \cap K = U \cap K$ dado que w es continua relativo a K, y la última igualdad se tiene porque $U = (U \cap K) \cup (U \cap (T \setminus K))$. Así, como S es isc concluimos que Γ es una multiaplicación isc a valores convexos no vacíos, y, como T es perfectamente normal al ser $\sigma-$lcH, podemos aplicar el teorema de selección de Michael (teorema 1.49), obteniendo que existe $u_2 \in C(T; \mathbb{R}^n)$ tal que $u_2 = w$ en K y además $u_2(t) \in S(t)$ $\forall t \in T$.
Definamos $U_1 = T \setminus K$. Sea V un abierto precompacto tal que $V \supseteq K$ (existe por proposición 1.28), y definamos:

$$\|u_2\|_V = \sup_{t \in \mathrm{cl}\,(V)} |u_2(t)|,$$

lo cual está bien definido pues $\mathrm{cl}\,(V)$ es compacto. Usando la regularidad de $|\theta|$, definimos U_2 un abierto tal que $V \supseteq U_2 \supseteq K$ y

$$|\theta|(U_2 \setminus K) \leq \frac{\varepsilon}{2(\|u_2\|_V + 1)}.$$

De esta manera, U_2 es un precompacto tal que $U_2 \supseteq K$ y además:

$$\int_{U_2\setminus K} |u_2|\mathrm{d}|\theta| \leq \|u_2\|_V |\theta|(U_2 \setminus K) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con todo lo anterior, tenemos que $\{U_1, U_2\}$ forma un recubrimiento abierto de T, por lo que por el teorema 1.35 existen particiones de la unidad $\phi_1, \phi_2 : T \to [0,1]$ asociadas a estos conjuntos. Definiendo así $u = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2$, tenemos que $u \in C(S)$, puesto que:

- Como $u_1 \in C$, ϕ_1 es continua y $\phi_1(t) \in [0,1]\ \forall t \in T$, entonces $\phi_1 u_1 \in C$, en tanto como $\operatorname{sop} \phi_2 \subseteq U_2$, U_2 es precompacto, ϕ_2 continua y u_2 es continua, entonces $\phi_2 u_2 \in C_c(T;\mathbb{R}^n) \subseteq C$. Así, $u \in C$.
- Sabemos que $u_1(t), u_2(t) \in S(t)\ \forall t \in T$, y, como $\phi_1(t) + \phi_2(t) = 1\ \forall t \in T$ y $S(t)$ es convexo, entonces $u(t) \in S(t)\ \forall t \in T$.

Para concluir, tenemos que:

$$\langle \theta, u\rangle = \int_T \left\langle u, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}\right\rangle \mathrm{d}|\theta| = \int_{T\setminus U_1} \left\langle u, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}\right\rangle \mathrm{d}|\theta| + \int_{U_1} \left\langle u, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}\right\rangle \mathrm{d}|\theta|. \tag{3.6}$$

Por una parte, como $\phi_1 \equiv 0$ en $T \setminus U_1$, entonces $u = u_2 = w$ en $T \setminus U_1 = K$. Así:

$$\begin{aligned}
\int_{T\setminus U_1} \left\langle u, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}\right\rangle \mathrm{d}|\theta| &= \int_{T\setminus U_1} \left\langle w, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}\right\rangle \mathrm{d}|\theta| \\
&= \int_T \left\langle w, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}\right\rangle \mathrm{d}|\theta| - \int_{U_1} \left\langle w, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}\right\rangle \mathrm{d}|\theta| \\
&\geq \langle w, \theta\rangle - \int_{U_1} |w|\mathrm{d}|\theta| \\
&\geq \alpha - \int_{T\setminus K} |w|\mathrm{d}|\theta|,
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad viene del lema 3.12, en tanto la segunda viene de la definición de w. Por otra parte, como $U_1 = T\setminus K$, entonces $U_1 \cap U_2 = U_2 \setminus K$, y así $U_1 = (U_2\setminus K)\cup(U_1\setminus U_2)$. Además, como $\phi_2 \equiv 0$ en $T \setminus U_2$, entonces $u = u_1$ en $U_1 \setminus U_2$. Como también se tiene que $\alpha_1(t), \alpha_2(t) \in [0,1]\ \forall t \in T$, entonces $|u| \leq |u_1| + |u_2|$. Con todo esto:

$$\begin{aligned}
\int_{U_1} \left\langle u, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}\right\rangle \mathrm{d}|\theta| &= \int_{U_2\setminus K} \left\langle u, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}\right\rangle \mathrm{d}|\theta| + \int_{U_1\setminus U_2} \left\langle u, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}\right\rangle \mathrm{d}|\theta| \\
&\geq -\int_{U_2\setminus K} |u|\mathrm{d}|\theta| + \int_{U_1\setminus U_2} \left\langle u_1, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}\right\rangle \mathrm{d}|\theta| \\
&\geq -\int_{U_2\setminus K} (|u_1| + |u_2|)\mathrm{d}|\theta| - \int_{U_1\setminus U_2} |u_1|\mathrm{d}|\theta| \\
&= -\int_{U_2\setminus K} |u_2|\mathrm{d}|\theta| - \int_{T\setminus K} |u_1|\mathrm{d}|\theta|,
\end{aligned}$$

donde nuevamente aplicamos el lema 3.12 para acotar.
Juntando todo lo anterior, en la ecuación (3.6) tenemos que:

$$\langle \theta, u\rangle \geq \alpha - \int_{T\setminus K} (|w| + |u_1|)\mathrm{d}|\theta| - \int_{U_2\setminus K} |u_2|\mathrm{d}|\theta| \geq \alpha - \varepsilon,$$

que es justamente lo que queríamos que cumpliera $u \in C(S)$, por lo que se tiene la igualdad buscada.
Finalmente, para la representación del cono normal, tenemos por definición que para $u \in C(S)$, $\theta \in N_{C(S)}(u)$ si y solo si $\sigma_{C(S)}(\theta) = \langle \theta, u \rangle$, lo cual, por lo recién probado, es equivalente a:

$$\begin{aligned} \int_T \sigma_S \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|} \right) \mathrm{d}|\theta| &= \int_T \left\langle u, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|} \right\rangle \mathrm{d}|\theta| \\ \iff \int_T \left(\sigma_{S(t)} \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \right) - \left\langle u(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \right\rangle \right) &\mathrm{d}|\theta|(t) = 0, \end{aligned}$$

y, como $\sigma_{S(t)}(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)) - \langle u(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \rangle \geq 0 \, \forall t \in T$ dado que $u \in C(S)$, lo anterior es equivalente a que:

$$\begin{aligned} &\sigma_{S(t)} \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \right) - \left\langle u(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \right\rangle = 0 \, \forall t \in T \; |\theta| - \mathrm{ctp} \\ \iff &\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \in N_{S(t)}(u(t)) \, \forall t \in T \; |\theta| - \mathrm{ctp}, \end{aligned}$$

que es a lo que queríamos llegar. $\square$

En los resultados que siguen trabajaremos con funciones de recesión. Recordemos que, para $h : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa propia sci, por la proposición 1.17, tenemos que $h^\infty = \sigma_{\operatorname{dom} h^*}$. Al igual que las conjugadas, podemos definir la función de recesión de un normal integrand al hacerlo para cada t, es decir, para $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ normal integrand convexo y propio, tenemos que su integrand de recesión está dado por

$$f^\infty(t, x) = f_t^\infty(x) = \sup_{z \in \operatorname{dom} f} f(t, z + x) - f(t, z), \; \forall t \in T, x \in \mathbb{R}^n.$$

Veamos que el integrand de recesión de un normal integrand es también un normal integrand.

Lema 3.14 *Sea $h : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo y propio. Entonces su integrand de recesión, $h^\infty : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, es también un normal integrand convexo y propio. Además, si existe una función $u \in \mathcal{L}^0(T, \mathcal{B}(T); \mathbb{R}^n)$ acotada tal que $u(t) \in D_{h^*}(t)$ para cada $t \in T$, entonces para cualquier medida $\theta \in M$ no negativa, se tiene que $\tilde{I}_{\theta, h^\infty} : L^1(T, \mathcal{B}(T), \theta; \mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por*

$$\tilde{I}_{\theta, h^\infty}(w) = \int_T h^\infty(t, w(t)) \mathrm{d}\theta(t) \; \forall w \in L^1(T, \mathcal{B}(T), \theta; \mathbb{R}^n),$$

está bien definida y es propia.

Demostración. Como h es un normal integrand convexo propio (y sci), por el teorema 1.15 tenemos que h^∞ es un integrand convexo, propio y sci. Para ver que es normal, observemos que, por la proposición 1.17 tenemos que

$$h^\infty(t, x) = \sigma_{\operatorname{dom} h^*(t, \cdot)}(x) \; \forall t \in T, x \in \mathbb{R}^n.$$

Como h es normal, entonces h^* también es un normal integrand (proposición 2.17), por lo que la multiaplicación $t \to \operatorname{dom} h^*(t,\cdot)$ es medible (proposición 2.2), y así h^∞ es normal (ejemplo 2.18). Para la integral, como el caso $\theta = 0$ es trivial, consideraremos $\theta \neq 0$. Observemos que $h^\infty(t,0) \equiv 0$ y $(h^\infty)^*(t,u(t)) \equiv 0$ (pues, dado que $u(t) \in D_{h^*}(t)$, se tiene que $\langle y, u(t)\rangle - \sigma_{\operatorname{dom} h^*(t,\cdot)}(y) \leq 0\ \forall y \in \mathbb{R}^n\ \forall t \in T$), por lo que se cumplen las hipótesis del teorema 3.4 para $\mathcal{X} = L^1(T,\mathcal{B}(T),\theta;\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{Y} = L^\infty(T,\mathcal{B}(T),\theta;\mathbb{R}^n)$, de modo que por dicho teorema la integral $\tilde{I}_{\theta,h^\infty}$ está bien definida y es propia. $\square$

Para $h : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ normal integrand convexo y propio (y sci), definiremos el funcional $J_h : M \to \overline{\mathbb{R}}$ dado por:

$$J_h(\theta) = \int_T h\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right)\mathrm{d}\mu(t) + \int_T h^\infty\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right)\mathrm{d}|\theta^s|(t), \tag{3.7}$$

donde θ^a corresponde a la parte absolutamente continua de θ respecto a μ, en tanto θ^s corresponde a su parte singular.
Recordemos que nuestro plan es encontrar una caracterización del subdiferencial de la función convexa I_f. Para esto, estudiaremos su conjugada y veremos que está relacionada con la función J_h antes definida, para $h = f^*$. Para ver esta relación, observemos que, por el teorema 3.13, y juntándolo con el teorema 1.17, para f normal integrand convexo y propio, y $h = f^*$, tenemos que

$$(f_t^*)^\infty = \sigma_{\operatorname{dom} f_t} = \sigma_{\operatorname{cl}\operatorname{dom} f_t} = \sigma_{D_f(t)},$$

así, si D_f es isc y $C(D_f) \neq \emptyset$, entonces

$$\int_T (f_t^*)^\infty \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right)\mathrm{d}|\theta|(t) = \int_T \sigma_{D_f(t)}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right)\mathrm{d}|\theta|(t) = \sigma_{C(D_f)}(\theta),$$

con lo cual obtenemos que

$$J_{f^*} = I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}\right) + \sigma_{C(D_f)}(\theta^s),$$

lo cual es una expresión muy similar a la conjugada de I_f en el caso $L^\infty(T,\mathcal{B}(T),\mu;\mathbb{R}^n)$. Lo interesante es ver que la conjugada de J_{f^*} se relaciona con I_f, pero no es exactamente igual. En la próxima propiedad asumiremos que todos los funcionales están bien definidos, pues este detalle se demostrará en el resultado principal de esta sección.

Lema 3.15 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo y propio. Si $\operatorname{dom} J_{f^*} \neq \emptyset$, entonces $(J_{f^*})^* = I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in C$. Por definición, tenemos que:

$$\begin{aligned}
J^*_{f^*}(y) &= \sup_{\theta \in M} \langle \theta, y\rangle - J_{f^*}(\theta) \\
&= \sup_{\theta \in M} \left\{ \int_T \left(\left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t) \right\rangle - f^*\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right)\right) \mathrm{d}\mu(t) \right. \\
&\qquad \left. + \int_T \left(\left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t) \right\rangle - (f^*)^\infty\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right)\right) \mathrm{d}|\theta^s| \right\} \\
&= \sup_{\substack{\theta^a \in M \\ \theta^a \ll \mu}} \int_T \left(\left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t) \right\rangle - f^*\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right)\right) \mathrm{d}\mu(t) \\
&\quad + \sup_{\substack{\theta^s \in M \\ \theta^s \perp \mu}} \int_T \left(\left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t) \right\rangle - (f^*)^\infty\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right)\right) \mathrm{d}|\theta^s|(t),
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad pudimos separar el supremo en dos sumas por el lema 3.20. Así, podemos estudiar estos dos supremos por separado. Definamos

$$\begin{aligned}
R_1(y) &= \sup_{\substack{\theta^a \in M \\ \theta^a \ll \mu}} \int_T \left(\left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t) \right\rangle - f^*\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right)\right) \mathrm{d}\mu(t), \\
R_2(y) &= \sup_{\substack{\theta^s \in M \\ \theta^s \perp \mu}} \int_T \left(\left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t) \right\rangle - (f^*)^\infty\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right)\right) \mathrm{d}|\theta^s|(t).
\end{aligned}$$

Para $R_1(y)$, tenemos que, como $\theta \ll \mu$, entonces haciendo el cambio de variable $g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\mu}$, el supremo se convierte en uno sobre $L^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$, el cual es un espacio descomponible, por lo que podemos aplicar la regla de intercambiabilidad (teorema 3.2) dado que $\varphi(t,v) = f^*(t,v) + \langle \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\mu}(t), v\rangle$ es un normal integrand (proposición 2.17, ejemplo 2.5 y proposición 2.13), $I_\varphi \not\equiv +\infty$ dado que $\operatorname{dom} J_{f^*} \neq \emptyset$, y μ es $\sigma-$finita, de modo que

$$\begin{aligned}
R_1(y) &= \sup_{g \in L^1(T,\mathcal{B}(T),\mu;\mathbb{R}^n)} \int_T \left(\langle y(t), g(t)\rangle - f^*(t, g(t))\right) \mathrm{d}\mu(t), \\
&= \int_T \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \left(\langle y(t), v\rangle - f^*(t,v)\right) \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_T f^{**}(t, y(t)) \mathrm{d}\mu(t) = \int_T f(t, y(t)) \mathrm{d}\mu(t) \\
&= I_f(y),
\end{aligned}$$

pues $f = f^{**}$ al ser un integrand convexo, propio y sci.

Para $R_2(y)$, por el teorema 1.17, tenemos que:

$$R_2(y) = \sup_{\substack{\theta \in M \\ \theta \perp \mu}} \int_T \left(\left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) \right\rangle - \sigma_{D_f(t)}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right)\right) \mathrm{d}|\theta|(t).$$

Observemos que, si $y \in C(D_f)$, entonces $\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\rangle - \sigma_{D_f(t)}(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)) \leq 0$ para todo $t \in T$ y $\theta \in M$, y como $0 \perp \mu$, entonces $R_2(y) = 0$ en este caso. En cambio, si $y \notin C(D_f)$, entonces existe $t_0 \in T$ tal que $y(t_0) \notin D_f(t_0)$. Sea $U = \bigcup_{t \in T} y^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus (D_f(t)))$. Claramente, como D_f es a valores cerrados, y además y es continua, entonces U es abierto, y como $t_0 \in U$, también $U \neq \emptyset$. Tenemos entonces dos casos:

- $\exists t_1 \in U$ tal que $\mu(\{t_1\}) = 0$. Luego, $\theta = \alpha\delta_{t_1} \perp \mu$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$, y así:

$$R_2(y) \geq \langle y(t_1), \alpha\rangle - \sigma_{D_f(t_1)}(\alpha)\,\forall \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

  Por lo que tenemos que:

$$R_2(y) \geq \sigma^*_{D_f(t_1)}(y(t_1)) = \mathrm{i}_{D_f(t_1)}(y(t_1)) = +\infty,$$

  pues $t_1 \in U$, por lo que $y(t_1) \notin D_f(t_1)$.
- $\mu(\{t\}) > 0\,\forall t \in U$. En este caso $\theta(U) = 0\,\forall \theta \perp \mu$, por lo que, para cualquier $\theta \perp \mu$:

$$\begin{aligned}
&\int_T \left(\left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right\rangle - \sigma_{D_f(t)}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right)\right)\mathrm{d}|\theta|(t)\\
&= \int_{T\setminus U} \left(\left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right\rangle - \sigma_{D_f(t)}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right)\right)\mathrm{d}|\theta|(t)\\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

  pues $y(t) \in D_f(t)\,\forall t \in T \setminus U$. Así, como $0 \perp \mu$, tenemos que $R_2(y) = 0$ en este caso. Sin embargo, para $I_f(y)$ tenemos que:

$$I_f(y) = \int_U f(t, y(t))\mathrm{d}\mu(t) + \int_{T\setminus U} f(t, y(t))\mathrm{d}\mu(t) = +\infty,$$

  puesto que en la primera integral $f(t, y(t)) = +\infty\,\forall t \in U$, y $\mu(U) > 0$.

Así, en cualquier caso:

$$(J_{f^*})^*(y) = \begin{cases} I_f(y) & \text{si } y \in C(D_f),\\ +\infty & \text{si } y \notin C(D_f),\end{cases}$$

es decir, tenemos el resultado buscado. $\square$

Antes de continuar, observemos la siguiente descomposición de ciertas funciones integrales que usaremos en algunos desarrollos posteriores.

Observación 3.16 *Sea $\psi : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand positivamente homogéneo en la segunda variable, es decir, $\psi(t, \alpha v) = \alpha\psi(t, v)\,\forall t \in T, v \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \geq 0$. Entonces, para cualquier $\theta \in M$ y μ medida regular, sabemos del teorema de descomposición de Lebesgue que $\theta = \theta^a + \theta^s$, es decir, que existe un conjunto $A \in \mathcal{B}(T)$ tal que:*

- *$\theta = \theta^a$ en A, donde $\theta^a \ll \mu$, y $\theta^a(T \setminus A) = 0$. Así, tenemos además que $|\theta| = |\theta^a|$ en A, y que $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) = \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}|\theta^a|}(t)$ para cada $t \in A$ $|\theta|-$ctp.*
- *$\theta = \theta^s$ en $T \setminus A$, donde $\theta^s \perp \mu$, y $\theta^s(A) = 0$. Así, tenemos además que $|\theta| = |\theta^s|$ en $T \setminus A$, y que $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t) = \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)$ para cada $t \in T \setminus A$ $|\theta|-$ctp.*

Como además $|\theta^a| \ll \mu$ *y* $\frac{\mathrm{d}|\theta^a|}{\mathrm{d}\mu}(t) \geq 0\,\forall t \in T$ *$\mu-$ctp, tenemos que:*

$$\begin{aligned}
\int_T \psi\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta|(t) &= \int_A \psi\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta|(t) + \int_{T\setminus A} \psi\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta|(t) \\
&= \int_A \psi\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}|\theta^a|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta^a|(t) + \int_{T\setminus A} \psi\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta^s|(t) \\
&= \int_T \psi\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}|\theta^a|}(t)\right) \frac{\mathrm{d}|\theta^a|}{\mathrm{d}\mu}(t)\mathrm{d}\mu(t) + \int_T \psi\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta^s|(t) \\
&= \int_T \psi\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}|\theta^a|}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}|\theta^a|}{\mathrm{d}\mu}(t)\right) \mathrm{d}\mu(t) + \int_T \psi\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta^s|(t) \\
&= \int_T \psi\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right) \mathrm{d}\mu(t) + \int_T \psi\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta^s|(t).
\end{aligned}$$

Dado que ya tenemos que la conjugada de J_{f^*} es igual a $I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)}$, trataremos de encontrar una especie de recíproca. Al ver que esta última función es una suma, usaremos los resultados ya conocidos de la conjugada de una suma y el teorema 3.9, para el caso particular de dominio con interior no vacío.

Lema 3.17 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo. Supongamos que D_f es isc, $C(D_f) = cl(dom\, I_f \cap C(D_f))$ y que $\exists y \in C$ y $r > 0$ tales que la función $t \to f(t, y(t) + v)$ pertenece a $\mathcal{L}^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R})$ para cualquier $v \in B_{\mathbb{R}^n}(0, r)$. Entonces $(I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)})^* = J_{f^*}$.*

Demostración. Bajo nuestras hipótesis tenemos que $y \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} I_f \cap C(D_f))$. Como se cumplen las hipótesis del teorema 3.9, tenemos que

$$I_f^*(\theta) = \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} \left(I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \sigma_{\operatorname{dom} I_f}(\theta - \theta')\right) \ \forall \theta \in M.$$

Además, como $\operatorname{int}(\operatorname{dom} I_f \cap C(D_f)) \neq \emptyset$ y $\mathrm{i}_{C(D_f)} \equiv 0$ en este conjunto, podemos aplicar el teorema 1.12 y así obtener la conjugada de la suma:

$$
\begin{aligned}
(I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)})^*(\theta) &= I_f^* \square \mathrm{i}_{C(D_f)}^*(\theta) \\
&= \min_{\theta'' \in M} \left(\min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} \left(I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \sigma_{\mathrm{dom}\, I_f}(\theta'' - \theta') \right) \right) + \sigma_{C(D_f)}(\theta - \theta'') \\
&= \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} \min_{\theta'' \in M} I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \sigma_{\mathrm{dom}\, I_f}(\theta'' - \theta') + \sigma_{C(D_f)}(\theta - \theta'') \\
&= \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \min_{\theta'' \in M} \sigma_{\mathrm{dom}\, I_f}(\theta'' - \theta') + \sigma_{C(D_f)}(\theta - \theta'') \\
&= \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \sigma_{\mathrm{dom}\, I_f} \square \sigma_{C(D_f)}(\theta - \theta') \\
&= \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + (\mathrm{i}_{\mathrm{dom}\, I_f} + \mathrm{i}_{C(D_f)})^*(\theta - \theta') \\
&= \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + (\mathrm{i}_{\mathrm{dom}\, I_f \cap C(D_f)})^*(\theta - \theta') \\
&= \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \sigma_{\mathrm{cl}\,(\mathrm{dom}\, I_f \cap C(D_f))}(\theta - \theta') \\
&= \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \sigma_{C(D_f)}(\theta - \theta') \\
&= \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \int_T \sigma_{D_f(t)}\left(\frac{\mathrm{d}(\theta - \theta')}{\mathrm{d}|\theta - \theta'|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta - \theta'|(t) \\
&= \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} I_{f^*}\left(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}\right) + \int_T (f^*)^\infty \left(t, \frac{\mathrm{d}(\theta - \theta')}{\mathrm{d}|\theta - \theta'|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta - \theta'|(t) \\
&= \min_{\substack{\theta' \in M \\ \theta' \ll \mu}} \left\{ \int_T f^*\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}(t)\right) \mathrm{d}\mu(t) + \int_T (f^*)^\infty \left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t) - \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\mu}(t)\right) \mathrm{d}\mu(t) \right\} \\
&\qquad + \int_T (f^*)^\infty \left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta^s|(t),
\end{aligned}
$$

donde en la sexta igualdad usamos que, como $\mathrm{int}\,(\mathrm{dom}\, I_h \cap C(D_f)) \neq \emptyset$, el teorema 1.12 dice que $\sigma_{\mathrm{dom}\, I_h} \square \sigma_{C(D_f)} = (\mathrm{i}_{\mathrm{dom}\, I_h} + \mathrm{i}_{C(D_f)})^*$, en la novena igualdad usamos la hipótesis $C(D_f) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{dom}\, I_f \cap C(D_f))$, en la décima igualdad aplicamos el teorema 3.13 pues D_f es isc por hipótesis, en la undécima usamos que $\sigma_{D_f(t)} = (f_t^*)^\infty$, y en la última igualdad aplicamos la observación 3.16. Observemos que, por definición de la función de recesión, $f_t^*(x) + (f_t^*)^\infty(z - x) \geq f_t^*(z)\, \forall x, z \in \mathbb{R}^n, \forall t \in T$, por lo que el mínimo de la última igualdad se alcanza para $\theta' = \theta^a$, y así tenemos que

$$
(I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)})^*(\theta) = \int_T f^*\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right) \mathrm{d}\mu(t) + \int_T (f^*)^\infty \left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta^s|(t) = J_{f^*}(\theta),
$$

con lo que se concluye lo buscado. $\square$

Con todo lo anterior, ya casi está demostrado que las funciones antes mencionados son conjugadas entre sí. Para ver que esto se tiene en un caso más general, tendremos que ver que el lema anterior aplicado sobre una base de vecindades nos permitiría concluir lo que queremos. El enunciado y demostración del resultado principal de esta sección viene a continuación.

Teorema 3.18 *Sea $f : T\times\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo tal que existen $u_0 \in C(D_f)$ tal que $I_f(u_0) < +\infty$ y $\varphi_0 \in L^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$ tal que $I_{f^*}(\varphi_0) < +\infty$. Entonces $I_f : C \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $J_{f^*} : M \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ están bien definidas y son convexas y propias (donde J_{f^*} está dada según la ecuación (3.7)). Además, $I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)}$ y J_{f^*} son conjugadas entre sí si y solo si D_f es isc y $C(D_f) = cl(dom\, I_f \cap C(D_f))$, y de este modo, para $y \in dom\, I_f \cap C(D_f)$ tenemos que $\theta \in \partial(I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)})(y)$ si y solo si*

$$\frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t) \in \partial f(t, y(t))\, \forall t \in T\ \mu - ctp,$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t) \in N_{D_f(t)}(y(t))\, \forall t \in T\ |\theta^s| - ctp.$$

Esta última expresión sobre la parte singular es equivalente a

$$\theta^s \in N_{C(D_f)}(y) = N_{cl(dom\, I_f\cap C(D_f))}(y).$$

Demostración. Dado que f es un normal integrand convexo y propio, entonces f^* también lo es por la proposición 2.17, por lo que por el teorema 2.1 tenemos que I_f está bien definida en $L^\infty(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$, I_{f^*} está bien definida en $\mathcal{Y} = L^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$, y estas funciones son convexas. Además son propias pues, por hipótesis $\operatorname{dom} I_f \neq \emptyset, \operatorname{dom} I_{f^*} \neq \emptyset$, lo cual, por la proposición 3.3 nos asegura que $I_f > -\infty$, así que al considerar C como subconjunto de $L^\infty(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$, $I_f : C \to \overline{\mathbb{R}}$ está bien definida y es convexa y propia. Como $f = f^{**}$ por ser convexa propia sci, tenemos que $I_{f^*} > -\infty$ al aplicar este mismo resultado a f^* con conjugada f^{**}. Por otra parte, como $C(D_f) \neq \emptyset$ entonces $\mathrm{i}_{C(D_f)}$ es convexa propia, de modo que $I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)}$ es convexa propia. Finalmente, como f^* es un normal integrand propio, y en particular es convexo sci, entonces $(f^*)^\infty$ también lo es por el lema 3.14, y además, para cualquier $\theta \in M$ no negativo, $\tilde{I}_{(f^*)^\infty} : L^1(T, \mathcal{B}(T), \theta; \mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$ está bien definida y es propia, por lo que J_{f^*} está bien definida y es convexa y propia.

Veamos que las propiedades sobre D_f son necesarias. Supongamos que $I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)}$ y J_{f^*} son conjugadas entre sí, entonces, en particular son sci y además $I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)} = (J_{f^*})^*$. Así:

$$\sigma_{\mathrm{cl}\,(\mathrm{dom}\, I_f\cap C(D_f))} = \sigma_{\mathrm{dom}\, I_f\cap C(D_f)} = \sigma_{\mathrm{dom}\,(I_f+\mathrm{i}_{C(D_f)})} = \sigma_{\mathrm{dom}\,(J_{f^*})^*} = (J_{f^*})^\infty,$$

por la proposición 1.17.
Por otra parte, se tiene que $(J_{f^*})^\infty = J_{(f^*)^\infty}$. En efecto, usando TCM y el hecho de que la función que define a la función de recesión es creciente (observación 1.16), tenemos que, para

cualquier $\theta \in M$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\lambda \to +\infty} \int_T \frac{f^*\left(t, \varphi_0(t) + \lambda \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right) - f^*(t, \varphi_0(t))}{\lambda} \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_T \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{f^*\left(t, \varphi_0(t) + \lambda \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right) - f^*(t, \varphi_0(t))}{\lambda} \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_T (f^*)^\infty \left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right) \mathrm{d}\mu(t),
\end{aligned}
$$

y también, como $(f^*)^\infty(t,0) = 0$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to +\infty} \int_T \frac{(f^*)^\infty \left(t, \lambda \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right)}{\lambda} \mathrm{d}|\theta^s|(t) &= \int_T \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{(f^*)^\infty \left(t, \lambda \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right)}{\lambda} \mathrm{d}|\theta^s|(t) \\
&= \int_T ((f^*)^\infty)^\infty \left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta^s|(t),
\end{aligned}
$$

entonces, para $\eta \in M$ dada por $\eta(A) = \int_A \varphi_0(t)\mathrm{d}\mu(t)\ \forall A \in \mathcal{B}(T)$, tenemos que $\eta \in \operatorname{dom} J_{f^*}$ y así (considerando que $\frac{\mathrm{d}\eta^s}{\mathrm{d}|\eta^s|} = 0$):

$$
(J_{f^*})^\infty = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{J_{f^*}(\eta + \lambda\theta) - J_{f^*}(\eta)}{\lambda} = J_{(f^*)^\infty}.
$$

Además tenemos que, por la proposición 1.17, $(f^*)^\infty = \sigma_{\operatorname{dom} f} = \sigma_{\operatorname{cl}\operatorname{dom} f} = \sigma_{D_f}$. Luego, por el lema 3.15 aplicado a i_{D_f} (pues $0 \in \operatorname{dom} J_{\sigma_{D_f}}$ ya que D_f es a valores no vacíos), tenemos que $(J_{\sigma_{D_f}})^* = I_{\mathrm{i}_{D_f}} + \mathrm{i}_{C(D_{\mathrm{i}_{D_f}})} = \mathrm{i}_{C(D_f)}$, pues $I_{\mathrm{i}_{D_f}} = \mathrm{i}_{C(D_f)}$ y $D_{\mathrm{i}_{D_f}} = D_f$. Es decir, juntando todo lo anterior, tenemos que

$$
\sigma_{\operatorname{cl}(\operatorname{dom} I_f \cap C(D_f))} = J_{\sigma_{D_f}} \Rightarrow \mathrm{i}_{\operatorname{cl}(\operatorname{dom} I_f \cap C(D_f))} = J^*_{\sigma_{D_f}} = \mathrm{i}_{C(D_f)} \Rightarrow C(D_f) = \operatorname{cl}(\operatorname{dom}(I_f \cap C(D_f))),
$$

donde, aplicamos conjugada en la primera implicancia, obteniendo así la primera propiedad de D_f buscada. Usando entonces esto último, es decir, que $C(D_f) = \operatorname{cl}(\operatorname{dom}(I_f \cap C(D_f)))$, obtenemos que

$$
\sigma_{C(D_f)}(\theta) = J_{\sigma_{D_f}} = \int_T \sigma_{D_f(t)} \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right) \mathrm{d}|\theta|(t),
$$

por la observación 3.16 pues σ_{D_f} es positivamente homogénea y $\sigma^\infty_{D_f} = \sigma_{D_f}$, por lo que por el teorema 3.13 se tiene que D_f es isc.

Veamos ahora que considerar las propiedades sobre D_f es suficiente para que sean conjugadas. Como por el lema 3.15 tenemos que $(J_{f^*})^* = I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)}$, gracias al teorema 1.10 sabemos que es suficiente probar que J_{f^*} es w^*−sci para concluir. Para esto, usaremos el lema 3.26 (ver sección de anexos 3.4), es decir, veremos que $J_{f^*} + \sigma_O$ es w^*−sci para todo O en una base de vecindades del origen. Recordemos que $\{B_C(0,\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ define una base de vecindades del origen en C. Pero tenemos que:

$$
\begin{aligned}
B_C(0,\varepsilon) &= \{w \in C \mid \|w\|_\infty \leq \varepsilon\} \\
&= \{w \in C \mid w(t) \in B_\varepsilon\ \forall t \in T\} \\
&= C(B_\varepsilon),
\end{aligned}
$$

donde $B_\varepsilon = B_{\mathbb{R}^n}(0,\varepsilon)$. Así, $C(B_\varepsilon)$ define una base de vecindades del origen al variar $\varepsilon > 0$. Por otra parte, para $\varepsilon > 0$ fijo, observemos que, como B_ε es isc como multiaplicación al ser constante, por el teorema 3.13 tenemos que:

$$\begin{aligned}(J_{f^*} + \sigma_{C(B_\varepsilon)})(\theta) &= J_{f^*}(\theta) + \int_T \sigma_{B_\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(t)\right)\mathrm{d}|\theta|(t)\\ &= J_{f^*}(\theta) + \int_T \sigma_{B_\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right)\mathrm{d}\mu(t) + \int_T \sigma_{B_\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right)\mathrm{d}|\theta^s|(t)\\ &= \int_T (f_t^* + \sigma_{B_\varepsilon})\left(\frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right)\mathrm{d}\mu(t) + \int ((f_t^*)^\infty + \sigma_{B_\varepsilon})\left(\frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right)\mathrm{d}|\theta^s|(t),\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos la observación 3.16. Así, consideremos ${}^\varepsilon f : T\times\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, dada para cada $t \in T$ por

$${}^\varepsilon f_t(x) = f_t \Box \mathrm{i}_{B_\varepsilon}(x) = \min_{x'\in B_\varepsilon} f_t(x - x')\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

la cual está bien definida, es convexa, propia y sci gracias al teorema 1.12, y además, para cada $t \in T$

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}{}^\varepsilon f_t &= \operatorname{dom} f_t + B_\varepsilon,\\ {}^\varepsilon f_t^* &= f_t^* + \sigma_{B_\varepsilon}.\end{aligned}$$

Por otra parte, por la proposición 1.17:

$$({}^\varepsilon f_t^*)^\infty = \sigma_{\operatorname{dom}{}^\varepsilon f_t} = \sigma_{\operatorname{dom} f_t + B_\varepsilon} = \sigma_{\operatorname{dom} f_t} + \sigma_{B_\varepsilon} = (f_t^*)^\infty + \sigma_{B_\varepsilon}.$$

También tenemos que ${}^\varepsilon f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es un normal integrand, puesto que ${}^\varepsilon f(t,x) = \min_{x'\in\mathbb{R}^n} f(t, F(x,x'))$, con $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(x,x') = x + x'$ (lineal, por lo tanto Carathéodory), así que basta aplicar las proposiciones 2.14 (a) y 2.16 (pues ya sabemos que es sci). Con todo esto:

$$(J_{f^*} + \sigma_{C(B_\varepsilon)})(\theta) = \int_T {}^\varepsilon f^*\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t)\right)\mathrm{d}\mu(t) + \int_T ({}^\varepsilon f^*)^\infty\left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t)\right)\mathrm{d}|\theta^s|(t) = J_{{}^\varepsilon f^*}(\theta).$$

Por lo tanto, si probamos que $J_{{}^\varepsilon f^*}$ es w^*-sci para todo $\varepsilon > 0$, entonces tenemos lo buscado. Para probar esto, veremos que $J_{{}^\varepsilon f^*} = (I_{{}^\varepsilon f} + \mathrm{i}_{C({}^\varepsilon D_f)})^*$, donde ${}^\varepsilon D_f(t) = \operatorname{cl}\operatorname{dom}{}^\varepsilon f_t$, puesto que toda conjugada es $w^* - sc$i. Para probar esto último, veremos que ${}^\varepsilon f$ cumple las hipótesis del lema 3.17:

- ${}^\varepsilon D_f$ es isc: Como B_ε es compacto, tenemos que ${}^\varepsilon D_f(t) = \operatorname{cl}\operatorname{dom}{}^\varepsilon f_t = \operatorname{cl}(\operatorname{dom} f_t + B_\varepsilon) = D_f(t) + B_\varepsilon$, por lo que es isc por el lema 3.24.
- $\exists y \in C$ y $r > 0$ tales que la función $t \to {}^\varepsilon f(t, y(t) + v)$ pertenece a $\mathcal{L}^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R})$ para cualquier $v \in B_{\mathbb{R}^n}(0,r)$: Sabemos, por hipótesis, que existe $u_0 \in \operatorname{dom}(I_f) \cap C(D_f)$. De este modo, considerando $r = \frac{\varepsilon}{2}$, $y = u_0$, entonces para cualquier $v \in B_r$:

  $${}^\varepsilon f_t(y(t) + v) = \min_{x\in B_\varepsilon} f(t, y(t) + v - x) \leq f(t, y(t))\ \forall t \in T,$$

  por lo que, por TCD y dado que $y \in \operatorname{dom} I_f$,

  $$I_{{}^\varepsilon f}(y + v) \leq I_f(y) < +\infty,$$

de modo que $y + v \in \operatorname{dom} I_{^\varepsilon f}$. Además, como $y \in C(D_f)$, entonces para cada $t \in T$, $y(t) \in \operatorname{cl}(\operatorname{dom} f_t)$, de modo que existe $w_t \in \operatorname{dom} f_t$ tal que $|y(t) - w_t| < \varepsilon - |v|$ (donde $\varepsilon - |v| \geq r > 0$) y así $|y(t) - w_t + v| < \varepsilon$, con lo cual:

$$^\varepsilon f_t(y(t) + v) = \min_{x \in B_\varepsilon} f(t, y(t) + v - x) \leq f(t, w_t) < +\infty,$$

de modo que $t \to {}^\varepsilon f(t, y(t) + v)$ es finito, por lo que está en $\mathcal{L}^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R})$.

- $C({}^\varepsilon D_f) = \operatorname{cl}(\operatorname{dom} I_{^\varepsilon f} \cap C({}^\varepsilon D_f))$: Como trivialmente $C({}^\varepsilon D_f) \supseteq \operatorname{cl}(\operatorname{dom} I_{^\varepsilon f} \cap C({}^\varepsilon D_f))$, basta probar la otra inclusión. Sea $y \in C({}^\varepsilon D_f)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, consideremos la multiaplicación $\Gamma_k(t) = D_f(t) \cap \operatorname{int} B_{\mathbb{R}^n}\left(y(t), \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2k}\right)\right)$. Por el lema 3.23 y el lema 3.24, Γ_k es isc, y además, como ${}^\varepsilon D_f = D_f + B_\varepsilon$, entonces Γ_k es a valores convexos y no vacíos, por lo que podemos aplicar el teorema de selección de Michael (teorema 1.49) y así obtenemos que existe $u_k \in C(T, \mathbb{R}^n)$ tal que $u_k(t) \in D_f(t)$, $\|y(t) - u_k(t)\| < \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$ $\forall t \in T$. Ahora, como $C(D_f) = \operatorname{cl}(\operatorname{dom} I_f \cap C(D_f))$, entonces existe $(\tilde{u}_{k,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} I_f \cap C(D_f)$ tal que $\tilde{u}_{k,\nu} \to u_k$. Consideremos $\tilde{y}_k = \tilde{u}_{k,\nu}$ para el $\nu \in \mathbb{N}$ tal que
$$\|\tilde{u}_{k,\nu} - u_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2k}.$$
De este modo tenemos que
$$\|\tilde{y}_k - y\| \leq \|\tilde{y}_k - u_k\| + \|u_k - y\| \leq \varepsilon\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$
Definamos entonces
$$y_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) y + \frac{1}{k}\tilde{y}_k.$$
Tenemos que:
  - Como ${}^\varepsilon D_f$ es convexa, $y \in C({}^\varepsilon D_f)$, $\tilde{y}_k \in C(D_f) \subseteq C({}^\varepsilon D_f)$, entonces $y_k \in C({}^\varepsilon D_f)$.
  - Para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\|y_k - y\| = \frac{1}{k}\|\tilde{y}_k - y\| \leq \frac{\varepsilon}{k}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, por lo que $y_k \to y$ en C.
  - Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$:
  $$\|y_k - \tilde{y}_k\| = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\|y - \tilde{y}_k\| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)\varepsilon\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) < \varepsilon.$$
  Así, para cada $t \in T$ tenemos que $y_k(t) - \tilde{y}_k(t) \in B_\varepsilon$, de modo que:
  $$^\varepsilon f(y_k(t)) = \min_{x \in B_\varepsilon} f(t, y_k(t) - x) \leq f(t, \tilde{y}_k(t)).$$
  Con esto, por TCD, tenemos que
  $$I_{^\varepsilon f}(y_k) \leq I_f(\tilde{y}_k) < +\infty,$$
  pues $\tilde{y}_k \in \operatorname{dom} I_f$. Así, $y_k \in \operatorname{dom} I_{^\varepsilon f}$

  Con todo lo anterior, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C({}^\varepsilon D_f) \cap \operatorname{dom} I_{^\varepsilon f}$, $y_k \to y$, por lo que $y \in \operatorname{cl}(C({}^\varepsilon D_f) \cap \operatorname{dom} I_{^\varepsilon f})$.

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del lema 3.17, con lo que podemos concluir que $J_{\varepsilon f^*}$ es w^*-sci, y así se concluye que $I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)}$ y J_{f^*} son conjugadas entre sí al ser funciones convexas propias sci.
Para la fórmula del subdiferencial, tenemos que si $y \in \operatorname{dom} I_f \cap C(D_f)$, entonces $\theta \in \partial(I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)})(y)$ si y solo si:

$$(I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)})(y) + (I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)})^*(\theta) = \langle \theta, y \rangle,$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= I_f(y) + J_{f^*}(\theta) - \langle \theta^a, y \rangle - \langle \theta^s, y \rangle \\ &= \underbrace{\int_T \left(f(t, y(t)) + f^* \left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t) \right) - \left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t) \right\rangle \right) \mathrm{d}\mu(t)}_{\geq 0} \\ &\quad + \underbrace{\int_T \left((f^*)^\infty \left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t) \right) - \left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t) \right\rangle \right) \mathrm{d}|\theta^s|(t)}_{\geq 0}, \end{aligned}$$

donde, como $y \in C(D_f)$, ambas integrales son positivas (la segunda se tiene por la proposición 1.17), por lo que cada una es igual a cero ctp en su respectiva medida, es decir:

- Para la primera integral tenemos que:

  $$f(t, y(t)) + f^* \left(t, \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t) \right) - \left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t) \right\rangle = 0 \; \forall t \in T \; \mu - \text{ctp},$$

  lo que es equivalente a

  $$\frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t) \in \partial f(t, y(t)) \; \forall t \in T \; \mu - \text{ctp}.$$

- Para la segunda integral tenemos que, usando la proposición 1.17:

  $$\sigma_{D_f(t)} \left(\frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}\theta^s}(t) \right) - \left\langle y(t), \frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|} \right\rangle = 0 \; \forall t \in T \; |\theta^s| - \text{ctp},$$

  es decir:

  $$\frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t) \in N_{D_f(t)}(y(t)) \; \forall t \in T \; |\theta^s| - \text{ctp}.$$

  Dado que D_f es isc y $C(D_f) \neq \emptyset$, por el teorema 3.13 esta útima expresión es equivalente a

  $$\theta^s \in N_{C(D_f)}(y).$$

Con todo esto concluimos lo buscado. □

Si bien este último teorema nos da como resultado una fórmula más similar a lo visto en el teorema 3.7 para la conjugada y el subdiferencial, esto solo se aplica para $I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)}$ en vez de I_f. Sin embargo, a partir de este último resultado se puede deducir un resultado para I_f.

Corolario 3.19 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo tal que existen $u_0 \in C$ tal que $I_f(u_0) < +\infty$ y $\varphi_0 \in L^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$ tal que $I_{f^*}(\varphi_0) < +\infty$. Entonces $I_f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $J_{f^*} : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ están bien definidas y son convexas y propias (donde J_{f^*} está dada según la ecuación (3.7)). Además, I_f y J_{f^*} son conjugadas entre sí si y solo si D_f es isc y $C(D_f) = cl\, dom\, I_f$, y de este modo para $y \in dom\, I_f$ tenemos que $\theta \in \partial I_f(y)$ si y solo si*

$$\frac{\mathrm{d}\theta^a}{\mathrm{d}\mu}(t) \in \partial f(t, y(t))\ \forall t \in T\ \mu - ctp,$$
$$\frac{\mathrm{d}\theta^s}{\mathrm{d}|\theta^s|}(t) \in N_{D_f(t)} y(t)\ \forall t \in T\ |\theta^s| - ctp,$$

o bien, esta última expresión sobre la parte singular es equivalente a

$$\theta^s \in N_{dom\, I_f}(y).$$

Demostración. Por el teorema 3.18, tenemos que I_f y J_{f^*} están bien definidas, y son convexas, propias y a valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Observemos que si $C(D_f) = \mathrm{cl}\,\mathrm{dom}\, I_f$, entonces $C(D_f) \neq \emptyset$, $I_f = I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)}$ y $C(D_f) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{dom}\, I_f \cap C(D_f))$, por lo que se cumplen las hipótesis de suficiencia del teorema 3.18 y así se tiene una implicancia. Para la otra implicancia, si I_f y J_{f^*} son conjugadas entre sí, recordando el lema 3.15 tenemos que $J_{f^*}^* = I_f = I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)}$, por lo que $\mathrm{dom}\, I_f = \mathrm{dom}\, I_f \cap C(D_f)$, $C(D_f) \neq \emptyset$, y así podemos aplicar el teorema 3.18 y obtener que $C(D_f) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{dom}\, I_f \cap C(D_f)) = \mathrm{cl}\,\mathrm{dom}\, I_f$, y D_f es isc.
La fórmula del subdiferencial viene del hecho que $I_f = I_f + \mathrm{i}_{C(D_f)}$ bajo estas hipótesis, así que basta aplicar el teorema 3.18 y observar que $N_{C(D_f)} = N_{\mathrm{cl}\,\mathrm{dom}\, I_f} = N_{\mathrm{dom}\, I_f}$. □

Nuevamente, este último resultado, aparte de entregar fórmulas para la conjugada y el subdiferencial de I_f, nos dice que I_f es sci bajo las hipótesis. Además, tenemos la ya recurrente hipótesis del estilo $\mathrm{dom}\, I_{f^*} \neq \emptyset$, por lo que nuevamente podemos hacer uso de la proposición 3.5 para $\mathcal{Y} = \mathcal{L}^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$, es decir, pedir que existan $v \in \mathcal{Y}$ y $\beta \in \mathcal{L}^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R})$ tales que

$$f(t, x) \geq \langle v(t), x \rangle + \beta(t), \forall t \in T, x \in \mathbb{R}^n.$$

La discusión sobre las hipótesis, resultados obtenidos y técnicas usadas en esta sección se hará en el capítulo 5.

3.4. Resultados anexos

En esta sección presentamos algunos resultados que fueron usados en este método, cuya demostración no es trivial, por lo que, para no interrumpir el desarrollo, se enuncian y demuestran acá.

Lema 3.20 *Sea X un ev y sean $X_1, X_2 \subseteq X$ dos sev tales que $X = X_1 \oplus X_2$. Sean $f_1 : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_2 : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones, y consideremos $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, donde $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Entonces $\sup_{x \in X} f(x) = \sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1) + \sup_{x_2 \in X_2} f_2(x_2)$.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente

$$\sup_{x \in X} f(x) = \sup_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2}} f_1(x_1) + f_2(x_2) \leq \sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1) + \sup_{x_2 \in X_2} f_2(x_2).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de supremos, existen $\bar{x}_1 \in X_1$, $\bar{x}_2 \in X_2$ tales que

$$\sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1) \leq f_1(\bar{x}_1) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sup_{x_2 \in X_2} f_2(x_2) \leq f_2(\bar{x}_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así

$$\sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1) + \sup_{x_2 \in X_2} f_2(x_2) \leq f_1(\bar{x}_1) + f_2(\bar{x}_2) + \varepsilon \leq \sup_{x \in X} f(x) + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, se concluye la igualdad buscada. $\square$

Antes de presentar el siguiente lema, necesitaremos el siguiente resultado, el cual entrega la expresión conocida como la *fórmula fundamental de la dualidad del análisis convexo*, y se encuentra en el teorema 2.7.1 de [21].

Proposición 3.21 *Sean $(X, X^*), (Y, Y^*)$ dos parejas de evtlc Hausdorff en dualidad. Sea $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa propia. Si existe $x_0 \in X$ tal que $(x_0, 0) \in dom\,\Phi$ y $\Phi(x_0, \cdot)$ es continua en $0 \in Y$, entonces:*

$$\inf_{x \in X} \Phi(x, 0) = \max_{y^* \in Y^*} -\Phi^*(0, y^*),$$

donde el máximo del lado derecho se alcanza siempre que $\Phi^*(0, \cdot) \not\equiv +\infty$.

Ahora presentamos el lema.

Lema 3.22 *Sean $(F, F^*), (G, G^*)$ dos parejas de evtlc Hausdorff en dualidad. Sea $g : G \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia y sci, y sea g^* la conjugada de g en G^*. Sea $A \in \mathcal{L}(F, G)$, y sea $k = g \circ A$. Sea A^*g^* la función convexa en F^* definida por:*

$$A^*g^*(y^*) = \inf\{g^*(z^*) \mid z^* \in G^*, A^*z^* = y^*\} \; \forall y^* \in F^*, \tag{3.8}$$

donde el ínfimo es $+\infty$ por convención si $\{z^* \in G^* | \; Az^* = y^*\}$ es vacío.
Si k no es idénticamente $+\infty$, la función convexa k^* en F^*, conjugada de k, está dada por:

$$k^*(y^*) = \liminf_{y^*_\xi \to^{w^*} y^*} A^*g^*(y^*_\xi) \; \forall y^* \in F^*, \tag{3.9}$$

donde el límite es tomado considerando la topología τ^{w^*} (o cualquier otra topología en F^* compatible con la dualidad). Si existe un punto en la imagen de A en el cual g es finita y continua, entonces $k^* = A^*g^*$, y el ínfimo en la fórmula (3.8) se alcanza para cada y^* tal que el conjunto descrito en dicha fórmula es no vacío.

Demostración. Dado que g es convexa, propia y sci, se tiene que g es la conjugada de g^*, es decir:

$$g(z) = \sup_{z^* \in G^*} z^*(z) - g^*(z^*) \; \forall z \in G.$$

De este modo, para cualquier $y \in F$ se tiene que:

$$\begin{aligned} g(Ay) &= \sup_{z^* \in G^*} z^*(Ay) - g^*(z^*) = \sup_{z^* \in G^*} (A^* z^*)(y) - g^*(z^*) \\ &= \sup_{\substack{z^* \in G^* \\ y^* \in F^* \\ A^* z^* = y^*}} y^*(y) - g^*(z^*) = \sup_{y^* \in F^*} \left(y^*(y) - \inf_{\substack{z^* \in G^* \\ A^* z^* = y^*}} g^*(z^*) \right) \\ &= \sup_{y^* \in F^*} y^*(y) - A^* g^*(y^*), \end{aligned}$$

por lo que la función $k = g \circ A$ es la conjugada en F de la función $A^* g^*$ en F^* (al considerar la topología τ^{w^*} o cualquier topología compatible con la dualidad en este espacio). Así, si k no es idénticamente $+\infty$, se puede concluir por el teorema 1.10 que k^* corresponde a la envoltura sci de $A^* g^*$, de modo que k^* está dada por la fórmula (3.9). Para el caso en que g es finita y continua en un punto de la imagen de A, sea $w_0 \in F$ tal que g es finita y continua en Aw_0. Sea $y^* \in F^*$ cualquiera. Definiendo $\Phi : F \times G \to \overline{\mathbb{R}}$ dada para cada $w \in F, z \in G$ por $\Phi(w, z) = g(Aw + z) - \langle y^*, w \rangle$, tenemos que Φ es convexa y propia, $(w_0, 0) \in \operatorname{dom} \Phi$ y $\Phi(w_0, \cdot)$ es continua en $0 \in G$, por lo que podemos aplicar la proposición 3.21 antes presentada, obteniendo entonces que

$$\inf_{w \in F} \Phi(w, 0) = \max_{z^* \in G^*} -\Phi^*(0, z^*),$$

donde el máximo del lado derecho se alcanza siempre que $\Phi^*(0, \cdot) \not\equiv +\infty$. Se comprueba entonces que

$$\Phi(w, 0) = (g \circ A)(w) - \langle y^*, w \rangle \; \forall w \in F \Rightarrow \inf_{w \in F} \Phi(w, 0) = -k^*(y^*),$$

y por otra parte, para cualquier $z^* \in G^*$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi^*(0, z^*) &= \sup_{(w,z) \in F \times G} \langle z^*, z \rangle - g(Aw + z) + \langle y^*, w \rangle \\ &= \sup_{(w,z) \in F \times G} \langle z^*, Aw + z \rangle - g(Aw + z) + \langle y^* - A^* z^*, w \rangle \\ &= \begin{cases} g^*(z^*) & \text{si } A^* z^* = y^*, \\ +\infty & \text{si } A^* z^* \neq y^*, \end{cases} \end{aligned}$$

por lo que

$$\max_{z^* \in G^*} -\Phi^*(0, z^*) = -\min\{ g^*(z^*) \mid z^* \in G^*, A^* z^* = y^* \}.$$

Con lo anterior se deduce, por una parte, que $k^* = A^* g^*$, y por otra parte, que para cada $y^* \in F^*$ tal que existe $z^* \in G^*$ tal que $y^* = A^* z^*$, se tiene que $\Phi^*(0, \cdot) \not\equiv +\infty$, por lo que el mínimo de la fórmula (3.8) se alcanza. $\square$

A continuación ciertos resultados sobre multiaplicaciones isc.

Lema 3.23 *Sea (T,τ) un espacio topológico $\sigma-$lcH. Sea $y : T \to \mathbb{R}^n$ una función continua y $\alpha > 0$. Entonces la multiaplicación $G : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada por $G(t) = int\, B_{\mathbb{R}^n}(y(t), \alpha)$ es isc.*

Demostración. Sea $O \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Calculando directamente tenemos que

$$\begin{aligned} G^{-1}(O) &= \{t \in T \mid \exists w \in O \text{ tal que } w \in \operatorname{int} B_{\mathbb{R}^n}(y(t), \alpha)\} \\ &= \{t \in T \mid \exists w \in O \text{ tal que } y(t) \in \operatorname{int} B_{\mathbb{R}^n}(w, \alpha)\} \\ &= \{t \in T \mid y(t) \in \bigcup_{w \in O} \operatorname{int} B_{\mathbb{R}^n}(w, \alpha)\} \\ &= y^{-1}\left(\bigcup_{w \in O} \operatorname{int} B_{\mathbb{R}^n}(w, \alpha) \right) \in \tau, \end{aligned}$$

pues y es continua. Por lo tanto G es isc. □

Lema 3.24 *Sea T un espacio σ-lcH, y sean $S, S_1, S_2 : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ multiaplicaciones isc. Entonces*

1. *$cl(S)$ es isc.*
2. *Para cualquier función $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua se tiene que AS es isc.*
3. *$S_1 \times S_2$ es isc.*
4. *$S_1 + S_2$ es isc.*

Demostración. Para probar el punto 1, basta observar que, si O es abierto, entonces $S^{-1}(O) = (\operatorname{cl}(S))^{-1}(O)$.
Para probar el punto 2, basta observar que para cualquier conjunto $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $(AS)^{-1}(O) = S^{-1}(A^{-1}(O))$, y como A es continua, entonces $A^{-1}(O)$ es abierto si O es abierto.
Para probar el punto 3, basta observar que cualquier conjunto abierto $O \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ puede ser expresado como $O = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} O_1^\nu \times O_2^\nu$, donde O_1^ν, O_2^ν son abiertos en $\mathbb{R}^n$ para cada $\nu \in \mathbb{N}$, de modo que $(S_1 \times S_2)^{-1}(O) = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} S_1^{-1}(O_1^\nu) \cap S_2^{-1}(O_2^\nu)$, con lo que se concluye que es isc.
Finalmente, el punto 4 se concluye de los puntos 2 y 3, al considerar $A(v^1, v^2) = v^1 + v^2$ y $S = S_1 \times S_2$. □

Finalmente, se presenta un resultado sobre funciones w^*-sci. Antes de enunciar y demostrar el siguiente lema, necesitaremos el siguiente resultado, el cual se encuentra en el teorema 3.33 de [2].

Teorema 3.25 *Sea E un espacio de Banach y $C \subseteq E^*$ convexo. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $C \cap B_{E^*}(0, n)$ es w^*-cerrado, entonces C es un conjunto w^*-cerrado.*

Ahora presentamos el lema que necesita este resultado.

Lema 3.26 *Sea V un espacio de Banach. Sea $f : V^* \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa. Entonces, los siguientes son equivalentes:*

(i) f *es* w^*-*sci.*

(ii) f *es* w^*-*sci relativo a cada* w^*-*compacto* $K \subseteq V^*$*.*

(iii) Existe una base de vecindades τ_0 *de* $0 \in V$ *tal que* $f + \sigma_O$ *es* w^*-*sci* $\forall O \in \tau_0$*.*

Demostración. Las implicancias (i) $\Rightarrow$ (ii) y (i) $\Rightarrow$ (iii) son evidentes.
Para ver que (ii) $\Rightarrow$ (i), consideremos $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario. Entonces el conjunto $[f \leq \alpha]$ es convexo y además, como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $B_{E^*}(0,n)$ es w^*-compacto, entonces $[f \leq \alpha] \cap B_{E^*}(0,n)$ es w^*-cerrado, por lo que, por el teorema 3.25, tenemos que $[f \leq \alpha]$ es w^*-cerrado. Como $\alpha \in \mathbb{R}$ era arbitrario, por la proposición 1.3 se concluye que f es w^*-sci.
Finalmente, para la implicancia (iii) $\Rightarrow$ (ii), supongamos que existe un conjunto $K \subseteq V^*$ tal que K es w^*-compacto y f no es w^*-sci relativo a K. Entonces, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $[f \leq \alpha] \cap K$ no es w^*-cerrado, es decir, existe una red convergente $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq K$ y un $\varepsilon > 0$ tales que $x_\lambda \to^{w^*} x \in K$, pero

$$f(x_\lambda) \leq \alpha \, \forall \lambda \in \Lambda \wedge f(x) \geq \alpha + \varepsilon.$$

Consideremos entonces el conjunto:

$$K^\circ = \{v \in V \mid \langle v^*, v \rangle \leq 1 \, \forall v^* \in K\}.$$

Como K es w^*-compacto, en particular es acotado. Sea C tal que $\|v^*\| \leq C \, \forall v^* \in K$. Sea entonces $O = B(0, \frac{\varepsilon}{2C})$. Así:

$$\langle v^*, v \rangle \leq C\|v\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, \forall v \in O, \; v^* \in K.$$

Con esto, tenemos que $0 \in O$, $O \subseteq \frac{\varepsilon}{2} K^\circ$, y así:

$$0 \leq \sigma_O(z) \leq \sigma_{\frac{\varepsilon}{2}K^\circ}(z) \leq \frac{\varepsilon}{2} \, \forall z \in K.$$

Con todo lo anterior, como $f + \sigma_O$ es w^*-sci y $x_\lambda \to^{w^*} x$, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq K$, se tiene que:

$$\alpha + \varepsilon \leq f(x) \leq (f + \sigma_O)(x) \leq \liminf_{\lambda \in \Lambda} (f + \sigma_O)(x_\lambda) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Capítulo 4

Método 2: Subdiferencial usando una fórmula del tipo Hiriart-Urruty-Phelps

El segundo método que presentaremos para calcular el subdiferencial de funciones integrales sobre el espacio de las funciones continuas se basará en expresar dicho subdiferencial con una fórmula del tipo Hiriart-Urruty-Phelps para el subdiferencial de la suma. La fórmula de Hirart-Urruty-Phelps, que se encuentra en [8], corresponde a la siguiente: dado un evtlc Hausdorff E y dos funciones convexas, propias y sci $f_1, f_2 : E \to \overline{\mathbb{R}}$, entonces para cualquier $x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$ se tiene que

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname{cl}^{w^*} \left(\partial_\varepsilon f_1(x) + \partial_\varepsilon f_2(x)\right),$$

donde la clausura es considerando la topología τ^{w^*}, y esta expresión también se puede generalizar a una familia finita de funciones convexas, propias y sci $f_1, \ldots, f_N : E \to \overline{\mathbb{R}}$, de modo que para cualquier $x \in \bigcap_{\mathrm{i}=1}^N \operatorname{dom} f_\mathrm{i}$ se tiene que

$$\partial\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^N f_\mathrm{i}\right)(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname{cl}^{w^*} \left(\sum_{\mathrm{i}=1}^N \partial_\varepsilon f_\mathrm{i}(x)\right).$$

Dado que una integral se puede pensar como una suma continua, esta fórmula se puede adaptar al caso de las funciones integrales, como fue ilustrado por Hantoute y Jourani en [7]. Considerando esto, en este capítulo primero se encontrará una fórmula del subdiferencial de una función integral para el caso de un espacio de funciones constantes, y luego se aplicará esta fórmula al espacio de funciones continuas al considerarlo como espacio constante. Para esto será necesario precisar dos cosas: primero, la noción de multiaplicaciones cuando el conjunto de llegada es un espacio vectorial de dimensión infinita, puesto que la teoría antes presentada solo se aplica en el caso de dimensión finita, y en segundo lugar, necesitaremos un resultado de extensiones medibles, debido a que primero se demostrará el resultado buscado sobre dimensiones finitas con las herramientas vistas en la sección 2, y después este resultado se generalizará a dimensiones infinitas.

4.1. Medibilidad de multiaplicaciones a valores en espacios de Suslin

Sea $(T, \mathcal{A})$ un espacio medible. En la sección 1.2 se presentó la teoría sobre las multiaplicaciones a valores en $\mathbb{R}^n$, lo cual se encuenta en mayor extensión en el capítulo 14 de [17]. Una pregunta que surge de esto es saber si estos resultados siguen siendo válidos para espacios más generales. Hay que tener en cuenta que la teoría de multiaplicaciones se empezó a desarrollar gracias al trabajo de Castaing en [3], sin embargo en este trabajo los resultados solo se tienen en el caso en que T es un espacio localmente compacto y $\mathcal{A}$ sus borelianos, y usualmente se requieren hipótesis más fuertes, como que la multiaplicación sea a valores compactos.

Al trabajar en espacios de dimensiones infinitas surgen varias complicaciones. Una de ellas es la multiplicidad de topologías, de espacios duales, y de topologías de los espacios duales, lo cual no se tiene en dimensión finita. Para ilustrar esto, consideremos una multiaplicación $S : T \rightrightarrows X$, y además una familia de conjuntos de X, que denominaremos τ, y estudiemos la familia

$$\{S^{-1}(O)\}_{O\in\tau}, S^{-1}(A) = \{t \in T \mid S(t) \cap O \neq \emptyset\} \forall A \subseteq X. \tag{4.1}$$

Si $X = \mathbb{R}^n$ y τ su topología usual, como la estructura de τ es conocida, esto permite desarrollar toda la teoría vista en la sección 1.2. En cambio, en el caso en que X es un espacio de dimensión infinita, dependiendo de la topología que se considere como τ, la familia de la fórmula (4.1) cambiará, por lo que no se pueden asegurar la mayoría de las propiedades. Vale señalar que, a diferencia del caso de funciones univaluadas, no se puede asegurar que la familia de la fórmula (4.1) es una $\sigma-$álgebra.

Ante lo anterior, Castaing y Valadier desarrollaron un estudio sobre multiaplicaciones a valores en espacios más generales, y a continuación se presentarán los resultados de dicho trabajo que serán necesarios en esta sección, aunque sin ninguna demostración (pues para este trabajo consideramos como punto de partida la teoría de multiaplicaciones, como la vista en la sección 1.2). De todos modos, los resultados se encuentran en el capítulo 3 de [4].

Recordemos que el grafo de una multiaplicación $S : X \rightrightarrows Y$, con X, Y conjuntos arbitrarios, está dado por

$$\text{graph } S = \{(x, u) \mid u \in S(x)\}.$$

Para ilustrar las distintas propiedades que se le pueden adjudicar a una multiaplicación, consideremos las seis propiedades del teorema a continuación, el cual se encuentra en el capítulo 3 de [4].

Teorema 4.1 *Sean $(T, \mathcal{A})$ un espacio medible, (X, d) un espacio métrico y $S : T \rightrightarrows X$ una multiaplicación a valores no vacíos. Considere las siguientes afirmaciones.*

(i) $\forall B \in \mathcal{B}(X)$, $S^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

(ii) $\forall F \subseteq X$ *cerrado,* $S^{-1}(F) \in \mathcal{A}$.

(iii) $\forall U \subseteq X$ *abierto,* $S^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

(iv) *S tiene una representación de Castaing, es decir, existe una sucesión* $(\phi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *de funciones medibles* $\phi_\nu : T \to X$ *tales que, para cada* $t \in T$, $S(t) = cl\{\phi_\nu(t) \mid \nu \in \mathbb{N}\}$.

(v) $\forall x \in X$, $t \to \mathrm{d}(x, S(t))$ *es medible, donde* $\mathrm{d}(x, C)$ *corresponde a la distancia a un conjunto dada por* $\mathrm{d}(x, C) = \text{ínf}_{z\in C}\, \mathrm{d}(x, z)\ \forall x \in X, C \subseteq X$.

(vi) *graph* $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$.

Si X *es completo y separable, y* S *es a valores cerrados, entonces* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\iff$ (iv) $\iff$ (*v*) $\Rightarrow$ (*v*i)*, en tanto, para cerrar las equivalencias, se requerirá adicionalmente que* $\mathcal{A}$ *sea completa con respecto a alguna medida* $\sigma-$*finita.*

Se puede apreciar que para la implicancia de (*v*i) a (i) del teorema anterior se requiere una hipótesis adicional, que es la completitud del espacio $(T, \mathcal{A})$ respecto a alguna medida. Esta hipótesis, que parece extraña, se debe a un teorema conocido como el teorema de la proyección, el cual dice que las proyecciones de conjuntos medibles de un espacio producto no necesariamente son medibles, sino que se encuentran en otra $\sigma-$álgebra. Este teorema se encuentra en el teorema III.23 de [4], el cual es válido en espacios de Suslin, definición que presentamos a continuación.

Definición 4.2 *Un espacio topológico* P *se dice polaco si es separable, completo y metrizable. Un espacio* E *se dice espacio de Suslin (o simplemente Suslin) si* E *es un espacio topológico Hausdorff que es imagen continua de un espacio polaco, es decir, existe un espacio polaco* P *y una función continua* $h : P \to E$ *tales que* $h(P) = E$.

Para enunciar el teorema de la proyección necesitaremos también la siguiente definición y el siguiente lema.

Definición 4.3 *Sea* $(T, \mathcal{A})$ *un espacio medible. Para una medida (no negativa)* μ *en* $(T, \mathcal{A})$, *definimos* $\mathcal{A}_\mu$ *como la* $\mu-$*completación de* $\mathcal{A}$. *Definimos además la* $\sigma-$*álgebra de los conjuntos universalmente medibles para* $(T, \mathcal{A})$, *la cual se denota* $\hat{\mathcal{A}}$ *y está dada por*

$$\hat{\mathcal{A}} = \bigcap_{\mu\in M(T,\mathcal{A})} \mathcal{A}_\mu,$$

donde $M(T, \mathcal{A})$ *es el conjunto de todas las medidas (no negativas) acotadas sobre* $(T, \mathcal{A})$.

Lema 4.4 *Sea* $(T, \mathcal{A})$ *un espacio medible. Si* μ *es una medida estrictamente positiva* $\sigma-$*finita sobre* $\mathcal{A}$, *entonces* $\hat{\mathcal{A}}_\mu = \mathcal{A}_\mu$. *Por lo tanto, si* μ *además es tal que* $\mathcal{A}$ *es* $\mu-$*completa, entonces* $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

Con lo anterior ya podemos presentar el teorema de la proyección.

Teorema 4.5 *(Teorema de la proyección). Sea* $(T, \mathcal{A})$ *un espacio medible y* S *un espacio de Suslin. Si* $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S)$, *entonces su proyección* $pr_T(G)$, *dada por*

$$pr_T(G) = \{t \in T \mid \exists x \in S \text{ tal que } (t, x) \in G\},$$

pertenece a $\hat{\mathcal{A}}$.

Observemos que, bajo las hipótesis dadas, podemos definir la medibilidad de una multiaplicación como cualquiera de los seis puntos del teorema 4.1. Usualmente el punto más sencillo de verificar es el punto (vi), sin embargo, antes de definir formalmente una multiaplicación medible en este caso, veremos que el resultado anterior no se tiene solo para espacios métricos completos y separables, sino que, gracias al teorema de la proyección, se puede aplicar a espacios de Suslin, lo cual será útil para los casos en que el dual de un espacio polaco no sea polaco, lo cual se tiene, por ejemplo, en el lema 4.26 (demostrado en la sección de anexos 4.6), que dice que si X es un espacio de Banach separable, entonces (X^*, τ^{w^*}) es un espacio de Suslin, y sabemos que este espacio no es metrizable si no es de dimensión finita. El caso Suslin fue desarollado por Valadier en [20], lo cual será la mayor generalización que presentaremos y mostraremos a continuación.

Sea de ahora en adelante $(T, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida donde la medida μ es $\sigma-$finita y $\mathcal{A}$ es $\mu-$completa. Cuando se trabaje en espacios de Suslin, bajo la hipótesis de completitud del espacio medida, consideraremos la siguiente definición de multiaplicación medible.

Definición 4.6 *Sea E un espacio de Suslin y $\Gamma : T \to E$ una multiaplicación a valores cerrados y no vacíos. Diremos que Γ es medible si graph Γ pertenece a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)$.*

Esta última definición marcará una gran diferencia con el caso $X = \mathbb{R}^n$, puesto que, para verificar que una multiaplicación era medible en el capítulo 3, por lo general se trató de ver la multiaplicación como los conjuntos de nivel de un normal integrand y aplicar la proposición 2.8, además de hacer uso de las propiedades de la sección 1.2, las cuales, como ya se mencionó, no se tienen en el caso de dimensiones infinitas. En cambio, en dimensiones infinitas resulta mucho más sencillo trabajar con el grafo de la multiaplicación, siempre y cuando se cuente con la hipótesis de completitud del espacio de medida.

Procederemos a ver que, bajo las hipótesis dadas, las multiaplicaciones medibles a valores en un espacio de Suslin tienen también representación de Castaing (en el sentido del teorema 1.42) y, por ende, selecciones medibles en caso de ser a valores cerrados. Este resultado se encuentra en el lema 1 de [20].

Teorema 4.7 *Sea E un espacio de Suslin, P un espacio polaco y $h : P \to E$ una aplicación continua sobreyectiva. Sea $\Gamma : T \rightrightarrows E$ una multiaplicación a valores cerrados y no vacíos de E, la cual es medible. Entonces Γ admite una secuencia de selecciones $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, tales que, para cada $\nu \in \mathbb{N}$, u_ν es $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$-medible, y además, para cada $t \in T$, $\Gamma(t) = cl\{u_\nu(t) \mid \nu \in \mathbb{N}\}$. Adicionalmente existen funciones $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(P))$-medibles $\gamma_\nu : T \to P$ tales que $u_\nu = h \circ \gamma_\nu \forall \nu \in \mathbb{N}$.*

Consideremos de ahora en adelante E un evtlc real, y consideremos que E es un espacio de Suslin.

Ahora definiremos cómo serán los espacios de funciones a valores en un espacio de Suslin y cómo se definirá la medibilidad. Para esto, se tiene el siguiente resultado (lema 2 de [20]), el cual será demostrado.

Lema 4.8 *Sea $u : T \to E$ una función. Consideremos E^*, el dual de E. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) u es $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))-$medible

(2) u es escalarmente medible, es decir, para cada $x^* \in E^*$, se tiene que $t \to \langle x^*, u(t)\rangle \in \mathbb{R}$ es medible.

(3) graph u pertenece a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)$.

Demostración. Para la implicancia (3) $\Rightarrow$ (1), basta aplicar el teorema 4.7 para la multiaplicación a valores cerrados $\Gamma : T \rightrightarrows E$ dada por $\Gamma(t) = \{u(t)\}$.
La implicancia (1) $\Rightarrow$ (2) es directa.
Para la implicancia (2) $\Rightarrow$ (3), aplicaremos el lema 4.27 (ver sección de anexos 4.6) al considerar E^* como una familia de funciones de E a $\mathbb{R}$, de modo que existe una sucesión $(x_k^*)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E^*$ que separa puntos de E, es decir, si $x, y \in E$ cumplen que $\langle x_k^*, x\rangle = \langle x_k^*, y\rangle\ \forall k \in \mathbb{N}$, entonces $x = y$. De este modo, el grafo de u puede ser descrito de la siguiente manera:

$$\text{graph } u = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{(t, x) \in T \times E \mid \langle x_k^*, x\rangle = \langle x_k^*, u(t)\rangle\}.$$

Con esto se ve claramente que si u es escalarmente medible, entonces graph $u \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(E)$. $\square$

Ahora presentaremos ciertas definiciones y notaciones que serán útiles para el desarrollo del resto de este capítulo. Recordemos que estamos considerando que E es un evtlc que es un espacio de Suslin, y de ahora en adelante también consideraremos que su dual E^* es un espacio de Suslin para cierta topología compatible con la dualidad con respecto al emparejamiento $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Recordemos además que $(T, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida, con μ una medida (estrictamente positiva) $\sigma-$finita tal que $\mathcal{A}$ es $\mu-$completa, de modo de poder usar los resultados vistos previamente.

Definición 4.9 *Llamaremos $\theta-$vecindad a cada vecindad simétrica, balanceada y convexa del origen, tanto en E como en E^*.*

Definición 4.10 *Una función $g : T \to E^*$ se dirá (Bochner) integrable si es $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E^*))$-medible y*

$$\int_T \sigma_V(g(t))\mathrm{d}\mu(t) < +\infty$$

para alguna $\theta-$vecindad $V \subseteq X$. Denotaremos $L^1(T, \mathcal{A}, \mu; E^*)$ al espacio de clases de equivalencia de las funciones (Bochner) integrables (respecto a la igualdad $\mu-$ctp).

Observemos que si $g : T \to E^*$ es integrable entonces, por el lema 4.8 se tiene que para cada $x \in E$ las funciones $\phi_x : T \to \mathbb{R}$ dadas por $\phi_x(t) = \langle g(t), x\rangle$ son medibles, y además

$$|\phi_x(t)| \leq \lambda_x \sigma_V(g(t))\ \forall t \in T,\ \int_T \sigma_V(g(t))\mathrm{d}\mu(t) < +\infty,$$

para alguna $\theta-$vecindad V y algún $\lambda_x > 0$ tal que $x \in \lambda_x V$, por lo que por TCD se tiene que ϕ_x es integrable. Observemos además que, para todo $x \in V$,

$$\left| \int_T \langle g(t), x \rangle \mathrm{d}\mu(t) \right| \leq \int_T |\phi_x(t)| \mathrm{d}\mu(t) \leq \int_T \lambda_x \sigma_V(g(t)) \mathrm{d}\mu(t) < +\infty,$$

por lo que si se define x^* tal que $x^*(x) = \int_T \langle g(t), x \rangle \mathrm{d}\mu(t) \, \forall x \in X$, se tiene que $x^* \in X^*$. Con esto se puede definir la integral de una función Bochner integrable.

Definición 4.11 *Sea $g \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; E^*)$. Definimos la integral de g, denotada $\int_T g(x) \mathrm{d}\mu(t)$, como el elemento de X^* dado por*

$$\left\langle \int_T g(x) \mathrm{d}\mu(t), x \right\rangle = \int_T \langle g(t), x \rangle \mathrm{d}\mu(t) \; \forall x \in X.$$

Para una multiaplicación, usaremos las siguientes notaciones.

Definición 4.12 *Sea $S : T \rightrightarrows E^*$ una multiaplicación a valores no vacíos. Denotaremos entonces*

$$\begin{aligned} E_S &= \{x \in L^0(T, \mathcal{A}, \mu; E^*) \mid x(t) \in S(t) \; \forall t \in T \; \mu - ctp\}, \\ E_S^1 &= \{x \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; E^*) \mid x(t) \in S(t) \; \forall t \in T \; \mu - ctp\}, \\ \int_T S(t) \mathrm{d}\mu(t) &= \left\{ \int_T x(t) \mathrm{d}\mu(t) \mid x \in E_S^1 \right\}, \end{aligned}$$

el conjunto de selecciones medibles, de selecciones integrables y la integral de S, respectivamente.

Si bien en la notación anterior E_S y E_S^1 deberían hacer referencia a las selecciones a valores en el espacio E, ocuparemos esta notación cualquiera sea el espacio de llegada, dado que este espacio está determinado completamente por la multiaplicación S, de modo de tener una notación uniforme durante el resto del capítulo.

Finalmente usaremos la siguiente notación.

Definición 4.13 *Para $x \in E$, denotaremos $\mathcal{F}(x)$ como el conjunto de todos los subespacios de dimensión finita que contienen a x, es decir,*

$$\mathcal{F}(x) = \{\textit{subespacios de dimensión finita } L \subseteq E, \; \textit{con } x \in L\}.$$

Para terminar esta sección presentaremos, sin demostración, el resultado obtenido por Hantoute y Jourani en [7]. La razón por la que se verá este resultado sin demostración es porque no usaremos este resultado directamente, sino que solamente será usado como inspiración para el desarrollo posterior.

Teorema 4.14 *Sea $f : T \times E \to \overline{\mathbb{R}}$ un integrand convexo y propio tal que $f(t, \cdot)$ es sci $\forall t \in T$, f es $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-medible y $\exists \gamma \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; E^*)$ y $\beta \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ tales que*

$$f_t(u) \geq \langle \gamma(t), u \rangle + \beta(t)\ \forall t \in T\ \mu - ctp \text{ y } \forall u \in E.$$

Dada una función $g \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; (0, +\infty))$, entonces para cada $x \in E$ tenemos que:

$$\partial I_f(x) = \bigcap_{\substack{\varepsilon>0 \\ L \in \mathcal{F}(x)}} cl^{w^*} \left(\int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{L \cap \mathrm{dom} I_f}(x)) \mathrm{d}\mu(t) \right).$$

En la fórmula del teorema anterior, la clausura es con respecto a la topología τ^{w^*}. Además, las primeras dos propiedades que cumple el integrand f se pueden considerar como la definición de normal integrand en el caso Suslin, sin embargo en el resto de este capítulo no necesitaremos esta definición.

A partir de este teorema se desarrolló un resultado similar pero aplicado a dimensiones finitas, lo cual se verá en la siguiente sección.

4.2. Caso espacio constante de dimensión finita

En esta sección estudiaremos las funciones integrales sobre espacios de funciones constantes de dimensión finita.
Sea $(T, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, donde μ es una medida (estrictamente positiva) $\sigma-$finita. Sea además $X = \mathbb{R}^n$, y consideremos $\| \cdot \|$ alguna norma de $\mathbb{R}^n$ (puede ser cualquiera dado que todas son equivalentes). Como $X^* = X = \mathbb{R}^n$, las definiciones y precisiones de la sección anterior se simplifican. Además, no ocuparemos la hipótesis de completitud del espacio de medida, por lo que debemos verificar que todo esté bien definido.

Para $h \in \mathcal{L}^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, se tiene que h es escalarmente integrable, pues para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, los funcionales $\phi_x : T \to \mathbb{R}$ dados por $\phi_x(t) = \langle h(t), x \rangle$ también son integrables, pues son medibles al ser h medible y

$$|\phi_x(t)| \leq \|h(t)\| \cdot \|x\|\ \forall t \in T,\ \int_T \|h(t)\| \mathrm{d}\mu(t) < +\infty.$$

Recíprocamente, tenemos que si $h : T \to \mathbb{R}^n$ es escalarmente integrable (si h es medible y tal que los funcionales $t \to \langle h(t), x \rangle$ son integrables para cada $x \in \mathbb{R}^n$), entonces $h \in \mathcal{L}^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, puesto que basta usar $x = \mathrm{e_i} \forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$, donde $\{\mathrm{e_i}\}_{\mathrm{i}=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.
Para $h \in \mathcal{L}^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, denotaremos $\int_T h(t) \mathrm{d}\mu(t) \in \mathbb{R}^n$ al vector donde cada componente es la integral de la componente de h respectiva, es decir

$$\left(\int_T h(t) \mathrm{d}\mu(t) \right)_j = \int_T h_j(t) \mathrm{d}\mu(t)\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Observemos que en este caso, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\left\langle \int_T h(t) \mathrm{d}\mu(t), x \right\rangle = \int_T \langle h(t), x \rangle \mathrm{d}\mu(t).$$

Sea $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multiaplicación a valores no vacíos. Las notaciones dadas en la definición 4.12 en este caso toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_S &= \{y \in L^0(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n) \mid y(t) \in S(t)\ \forall t \in T\ \mu - \text{ctp}\}, \\ E_S^1 &= \{y \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n) \mid y(t) \in S(t)\ \forall t \in T\ \mu - \text{ctp}\}, \\ \int_T S(t)\mathrm{d}\mu(t) &= \left\{ \int_T y(t)\mathrm{d}\mu(t) \mid y \in E_S^1 \right\}. \end{aligned}$$

Observemos que $y \in \int_T S(t)\mathrm{d}\mu(t)$ si y solo si $\exists x \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ tal que $x(t) \in S(t)\ \forall t \in T\ \mu-$ctp, y además $y = \int_T x(t)\mathrm{d}\mu(t)$.

Los espacios constantes no son descomponibles, sin embargo de todos modos se puede aplicar la regla de intercambiabilidad sobre los conjuntos E_S y E_S^1 antes definidos. A continuación se presenta dicha aplicación.

Proposición 4.15 *Sea $S : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multiaplicación medible a valores no vacíos y cerrados. Entonces para cada $x \in L^0(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$\int_T \sigma_{S(t)}(x(t)) = \sup_{x^* \in E_S} \int_T \langle x^*(t), x(t) \rangle \mathrm{d}\mu(t).$$

Más aún, si $E_S^1 \neq \emptyset$, entonces también tenemos que

$$\int_T \sigma_{S(t)}(x(t)) = \sup_{x^* \in E_S^1} \int_T \langle x^*(t), x(t) \rangle \mathrm{d}\mu(t).$$

Demostración. Sea $x \in L^0(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$. Observemos que, por una parte tenemos que

$$\int_T \sigma_{S(t)}(x(t)) = -\int_T \inf_{v^* \in \mathbb{R}^n} (\mathrm{i}_{S(t)}(v^*) - \langle v^*, x(t) \rangle)\mathrm{d}\mu(t),$$

en tanto por otra parte tenemos que

$$\sup_{x^* \in E_S} \int_T \langle x^*(t), x(t) \rangle \mathrm{d}\mu(t) = -\inf_{x^* \in L^0(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)} \int_T (\mathrm{i}_{S(t)}(x^*(t)) - \langle x^*(t), x(t) \rangle)\mathrm{d}\mu(t).$$

Si definimos $g(t, v^*) = \mathrm{i}_{S(t)}(v^*) + \langle v^*, -x(t) \rangle$, tenemos que g es un normal integrand por ser suma de una función indicadora y una función Carathéodory (ejemplo 2.7, ejemplo 2.5 y proposición 2.13), y además $I_g \not\equiv +\infty$ en $L^0(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ dado que, como S es medible y a valores cerrados y no vacíos, entonces $E_S \neq \emptyset$ (teorema 1.43). Así, como μ es $\sigma-$finita y $L^0(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ es descomponible, podemos aplicar la regla de intercambiabilidad (teorema 3.2) y así concluir la primera igualdad.
En el caso $E_S^1 \neq \emptyset$, como también se tiene que

$$\sup_{x^* \in E_S^1} \int_T \langle x^*(t), x(t) \rangle \mathrm{d}\mu(t) = -\inf_{x^* \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)} \int_T (\mathrm{i}_{S(t)}(x^*(t)) - \langle x^*(t), x(t) \rangle)\mathrm{d}\mu(t),$$

y en este caso $I_g \not\equiv +\infty$ en $L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ dado que $E_S^1 \neq \emptyset$, también se puede aplicar el teorema 3.2 dado que $L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ es descomponible y así concluir la segunda igualdad. $\square$

Este resultado será útil pues servirá para aplicar la regla de intercambiabilidad en el caso que estudiaremos a continuación. Seguiremos un procedimiento similar a lo hecho por Hantoute y Jourani en [7], aunque en dicho trabajo los resultados fueron hechos en espacios más generales, en cambio en lo que sigue nos reduciremos únicamente a espacios de dimensión finita.

En las siguientes propiedades que se mostrarán se puede asumir que $\mu(T) = 1$, lo cual no quita generalidad por una renormalización, pues, dado que μ es $\sigma-$finita, existe $\psi \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; (0, +\infty))$, es decir, tal que $\psi(t) > 0\, \forall t \in T$, con la cual podemos considerar la medida finita $\tilde{\mu}$ en $\mathcal{A}$ dada por

$$\tilde{\mu}(A) = C_\psi^{-1} \int_A \psi(t) \mathrm{d}\mu(t)\ \forall A \in \mathcal{A},\ \text{donde } C_\psi = \int_T \psi(t) \mathrm{d}\mu(t).$$

Con esto tenemos que $\tilde{\mu} \ll \mu$, con $\frac{\mathrm{d}\tilde{\mu}}{\mathrm{d}\mu} = C_\psi^{-1}\psi$. Además, si $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es un normal integrand convexo y propio, entonces, para recuperar el resultado general también consideraremos el integrand normalizado $\tilde{f}$ dado por:

$$\tilde{f} = C_\psi \frac{f}{\psi},$$

donde tenemos que $\tilde{f}$ sigue siendo un normal integrand convexo por el corolario 2.15, puesto que $\frac{1}{\psi}$ es medible (lema 4.30). De este modo, primero se demostrarán las propiedades para el caso $\mu(T) = 1$, y despúes se explicará por qué se mantiene su validez en el caso μ general, bajo esta renormalización.
Asumiremos que nuestro normal integrand f satisface la siguiente condición de acotamiento para cierta función $\gamma \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ y $\beta \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$:

$$f_t(u) \geq \langle \gamma(t), u \rangle + \beta(t) \quad \forall t \in T\ \mu - \text{ctp},\ \forall u \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

Esta desigualdad garantiza que $I_f > -\infty$.

Para un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos $C^\perp = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, y \rangle = 0\ \forall y \in C\}$. Tenemos entonces que, para cualquier $x \in C$, se cumple que $(C - x)^\perp \subseteq N_C(x)$.
Antes de presentar el resultado principal, necesitamos demostrar que la integral de una multiaplicación relacionada al subdiferencial del integrand es no vacía, pues de lo contrario no tiene sentido querer representar el subdiferencial de la función integral a través de integrales de multiaplicaciones.

Proposición 4.16 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo y propio que cumple la desigualdad (4.2). Sea $x \in dom\, I_f$ tal que $\partial I_f(x) \neq \emptyset$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y $g \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; (0, +\infty))$ tenemos que:*

$$\int_T \mathfrak{L}^* \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) \mathrm{d}\mu(t) \neq \emptyset$$

y

$$\int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{dom\, I_f}(x)) \mathrm{d}\mu(t) \neq \emptyset,$$

donde $\mathfrak{L}^*$ es el operador adjunto del funcional lineal continuo $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que da la proyección sobre el subespacio aff$(dom\, I_f - x)$.

Demostración. Sea $\mu(T) = 1$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y $g \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; (0, +\infty))$.
Primero veamos que basta demostrar que el primer conjunto es no vacío, puesto que el segundo conjunto lo contiene. Sea $x^* \in \mathbb{R}^n$. Para cualquier $y \in \operatorname{dom} I_f$, tenemos que:

$$\langle \mathfrak{L}^* x^* - x^*, y - x \rangle = \langle x^*, \mathfrak{L}(y - x) \rangle - \langle x^*, y - x \rangle = 0,$$

pues $y - x \in \operatorname{aff}(\operatorname{dom} I_f - x)$, de modo que $\mathfrak{L}^* x^* - x^* \in (\operatorname{dom} I_f - x)^\perp \subseteq N_{\operatorname{dom} I_f}(x)$.
Con esto, si tenemos una función $x_\varepsilon^* : T \to \mathbb{R}^n$ tal que $x_\varepsilon^*(t) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x)\ \forall t \in T\ \mu - \text{ctp}$, y $\mathfrak{L}^* x_\varepsilon^* \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, entonces

$$\mathfrak{L}^* x_\varepsilon^*(t) = x_\varepsilon^*(t) + (\mathfrak{L}^* x_\varepsilon^*(t) - x_\varepsilon^*(t)) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{\operatorname{dom} I_f}(x)\ \forall t \in T\ \mu - \text{ctp},$$

de donde se deduce que $\int_T \mathfrak{L}^* \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) \mathrm{d}\mu(t) \subseteq \int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{\operatorname{dom} I_f}(x)) \mathrm{d}\mu(t)$, de modo que si el primer conjunto es no vacío, el segundo también. Procederemos entonces a construir $u_\varepsilon^* \in \int_T \mathfrak{L}^* \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) \mathrm{d}\mu(t)$.
Sea $T_0 = \{t \in T \mid f(t, x) < +\infty\}$. Consideremos la multiaplicación $A_\varepsilon : T_0 \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$A_\varepsilon(t) = \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x).$$

Tenemos que A_ε es una multiaplicación medible, a valores cerrados, convexos y no vacíos por la proposición 2.20. Como $\operatorname{dom} I_f \neq \emptyset$, por continuidad (proposición 1.7 aplicado sobre $\operatorname{aff}(\operatorname{dom} I_f - x)$) sabemos que $\exists x_0 \in \operatorname{ri}(\operatorname{dom} I_f), r > 0$ y $a > 0$ tales que:

$$I_f(x_0 + u) \leq r\ \forall u \in U \cap \operatorname{aff}(\operatorname{dom} I_f - x), \tag{4.3}$$

donde $U = B_{\mathbb{R}^n}(0, a)$. Definimos la multiaplicación $F : T_0 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada para cada $t \in T_0$ por:

$$\begin{aligned} F(t) &= \{u^* \in A_\varepsilon(t) \mid \langle u^*, x_0 - x \rangle \geq \sigma_{A_\varepsilon(t)}(x_0 - x) - \varepsilon\} \\ &= A_\varepsilon(t) \cap \{u^* \in X^* \mid \langle u^*, x - x_0 \rangle \leq \varepsilon - \sigma_{A_\varepsilon(t)}(x_0 - x)\}. \end{aligned}$$

Observemos que, como A_ε es medible, $\sigma_{A_\varepsilon(\cdot)}(x_0 - x)$ es medible (ejemplo 2.18 y proposición 2.3), y $\langle u^*, x - x_0 \rangle$ es un normal integrand autónomo (ejemplo 2.6), entonces F es medible por la proposición 2.8 y la proposición 1.45, además de ser a valores cerrados y no vacíos. Así, podemos aplicar el teorema 1.43 (selecciones medibles) y obtener que $\exists x_\varepsilon^* \in \mathcal{L}^0(T_0, \mathcal{A}; \mathbb{R}^n)$ tal que $x_\varepsilon^*(t) \in F(t) \subseteq A_\varepsilon(t)\ \forall t \in T_0$, es decir:

$$\langle x_\varepsilon^*(t), x_0 - x \rangle \geq \sigma_{A_\varepsilon(t)}(x_0 - x) - \varepsilon\ \forall t \in T_0.$$

Observemos que, por el teorema 1.24 y como $g(t) > 0$, entonces:

$$\sigma_{A_\varepsilon(t)}(y) = (f_t)'_{\varepsilon g(t)}(x, y) = \inf_{s>0} \frac{f_t(x + sy) - f_t(x) + \varepsilon g(t)}{s} \geq \inf_{s>0} \frac{f_t(x + sy) - f_t(x)}{s},$$

por lo que, como f es convexa, y por la observación 1.16 que dice que la función dentro del ínfimo es creciente, tenemos que:

$$\langle x_\varepsilon^*(t), x_0 - x \rangle \geq \inf_{s>0} \frac{f_t(x + s(x_0 - x)) - f_t(x)}{s} - \varepsilon = \lim_{s \searrow 0} \frac{f_t(x + s(x_0 - x)) - f_t(x)}{s} - \varepsilon.$$

Extendiendo x_ε mediblemente a todo T (pues $\mu(T \setminus T_0) = 0$), y manteniendo la notación, tenemos que $x_\varepsilon^* \in \mathcal{L}^0(T, \mathcal{A}; \mathbb{R}^n)$ y $x_\varepsilon^*(t) \in A_\varepsilon(t)\ \forall t \in T\ \mu-$ctp. Así, integrando, y aplicando TCM, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_T \langle x_\varepsilon^*(t), x - x_0\rangle \mathrm{d}\mu(t) &\leq - \int_T \lim_{s \searrow 0} \frac{f_t(x + s(x_0 - x)) - f_t(x)}{s} \mathrm{d}\mu(t) + \varepsilon \\
&= - \lim_{s \searrow 0} \int_T \frac{f_t(x + s(x_0 - x)) - f_t(x)}{s} \mathrm{d}\mu(t) + \varepsilon \\
&= - \inf_{s > 0} \frac{I_f(x + s(x_0 - x)) - I_f(x)}{s} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

De este modo, considerando $x^* \in \partial I_f(x)$ (que es no vacío por hipótesis), como $I_f(x + s(x_0 - x)) - I_f(x) \geq s\langle x^*, x_0 - x\rangle\ \forall s > 0$, tenemos que

$$\int_T \langle x_\varepsilon^*(t), x - x_0\rangle \mathrm{d}\mu(t) \leq \langle x^*, x - x_0\rangle + \varepsilon.$$

Entonces, como $x_\varepsilon^*(t) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x)\ \forall t \in T\ \mu-$ ctp:

$$\begin{aligned}
I_f(x) - I_f(x_0) - \varepsilon \int_T g(t) \mathrm{d}\mu(t) &= \int_T (f_t(x) - f_t(x_0) - \varepsilon g(t)) \mathrm{d}\mu(t) \\
&\leq \int_T \langle x_\varepsilon^*(t), x - x_0\rangle \mathrm{d}\mu(t) \\
&\leq \langle x^*, x - x_0\rangle + \varepsilon,
\end{aligned}$$

de modo que la función medible $\langle x_\varepsilon^*(\cdot), x - x_0\rangle$ está en $L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$.
Sea $\{b_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}=1}^k$ una base ortonormal de $\mathrm{aff}\,(\mathrm{dom}\, I_f - x)$, con $k \in \mathbb{N}$ su dimensión, y sea $\{b_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}=k+1}^n$ una completación ortonormal de dicha base a todo $\mathbb{R}^n$. Por la continuidad del funcional $\mathfrak{L}$ sobre $\mathrm{aff}\,(\mathrm{dom}\, I_f - x)$, existe $r_W > 0$ tal que el conjunto $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{\mathrm{i}=1}^n |\langle x, b_\mathrm{i}\rangle| \leq r_W\}$ cumple que $\mathfrak{L}(W) = \{x \in \mathrm{aff}\,(\mathrm{dom}\, I_f - x) \mid \sum_{\mathrm{i}=1}^k |\langle x, b_\mathrm{i}\rangle| \leq r_W\} \subseteq U \cap \mathrm{aff}\,(\mathrm{dom}\, I_f - x)$. Dado que W es un conjunto no vacío, cerrado, simétrico y balanceado, entonces podemos considerar la norma $\|\cdot\|_W$ dada por $\|x\|_W = \frac{1}{r_W} \sup_{u \in W} \langle x, u\rangle\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, con lo cual, al ver W como multiaplicación constante, tenemos que, por la proposición 4.15:

$$\int_T \|\mathfrak{L}^* x_\varepsilon^*(t)\|_W \mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{r_W} \int_T \sup_{u \in W} \langle \mathfrak{L}^* x_\varepsilon^*(t), u\rangle \mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{r_W} \sup_{w \in E_W} \int_T \langle \mathfrak{L}^* x_\varepsilon^*(t), w(t)\rangle \mathrm{d}\mu(t).$$

Observando además que, para cualquier $w \in W$ y $\forall t \in T\ \mu-$ctp, se tiene que

$$\langle \mathfrak{L}^* x_\varepsilon^*(t), w\rangle - \langle x_\varepsilon^*(t), x - x_0\rangle = \langle x_\varepsilon^*(t), x_0 + \mathfrak{L}w - x\rangle \leq f_t(x_0 + \mathfrak{L}w) - f_t(x) + \varepsilon g(t),$$

entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sup_{w \in E_W} \int_T \langle \mathfrak{L}^* x_\varepsilon^*(t), w(t)\rangle \mathrm{d}\mu(t) \leq &\sup_{w \in E_W} \int_T f_t(x_0 + \mathfrak{L}w(t)) \mathrm{d}\mu(t) - I_f(x) \\
&+ \int_T \langle x_\varepsilon^*(t), x - x_0\rangle \mathrm{d}\mu(t) + \varepsilon \int_T g(t) \mathrm{d}\mu(t).
\end{aligned}$$

Para el lado derecho de esta última desigualdad, ya sabemos que el segundo, tercer y cuarto sumando son finitos, por lo que tenemos que verificar que el primero lo es también. Sea una función medible $w(\cdot) \in E_W$ cualquiera. Definimos para cada $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, k\}$ y $t \in T$ los vectores $v_\mathrm{i} = r_W b_\mathrm{i}, v_{k+\mathrm{i}} = -r_W b_\mathrm{i}, v_{2k+1} = 0$ y las funciones $\alpha_\mathrm{i}(t) = \frac{1}{r_W} \text{máx}\{\langle \mathfrak{L} w(t), b_\mathrm{i}\rangle, 0\}, \alpha_{k+\mathrm{i}}(t) = \frac{1}{r_W} \text{máx}\{\langle \mathfrak{L} w(t), -b_\mathrm{i}\rangle, 0\}, \alpha_{2k+1}(t) = 1 - \sum_{\mathrm{i}=1}^{2k} \alpha_\mathrm{i}(t)$. Entonces, los vectores $v_1, \ldots, v_{2k+1}$ están en $U \cap \operatorname{aff}(\operatorname{dom} I_f - x)$, las funciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k+1} : T \to [0, 1]$ son medibles y a valores en $[0, 1]$, y además se cumple que $\mathfrak{L} w(t) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2k+1} \alpha_\mathrm{i}(t) v_\mathrm{i}$ y $\sum_{\mathrm{i}=1}^{2k+1} \alpha_\mathrm{i}(t) = 1 \, \forall t \in T$ μ-ctp. Entonces, por convexidad de f_t y la desigualdad (4.3),tenemos que:

$$\int_T f_t(x_0 + \mathfrak{L} w(t)) \mathrm{d}\mu(t) \leq \int_T \left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{2k+1} \alpha_\mathrm{i}(t) f_t(x_0 + v_\mathrm{i}) \right) \mathrm{d}\mu(t) \leq (2k+1)r.$$

Juntando todo lo anterior y por equivalencia de normas, obtenemos que $\exists C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}\int_T \|\mathfrak{L}^* x_\varepsilon^*(t)\| \mathrm{d}\mu(t) &\leq \frac{C}{r_W} \left((2k+1)r - I_f(x) + \int_T \langle x_\varepsilon^*(t), x - x_0\rangle \mathrm{d}\mu(t) + \varepsilon \int_T g(t) \mathrm{d}\mu(t) \right) \\ &\leq \frac{C}{r_W} \left((2k+1)r - I_f(x) + \langle x^*, x - x_0\rangle + \varepsilon \int_T g(t) \mathrm{d}\mu(t) + \varepsilon \right) < +\infty,\end{aligned}$$

de modo que $\mathfrak{L}^* x_\varepsilon^* \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$, y así $\int_T \mathfrak{L}^* \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) \mathrm{d}\mu(t) \neq \emptyset$.
Para el caso μ general, basta observar que

$$\int_T \mathfrak{L}^* \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) \mathrm{d}\mu(t) = \int_T \mathfrak{L}^* \partial_{\varepsilon C_\psi \frac{g(t)}{\psi(t)}} \tilde{f}_t(x) \mathrm{d}\tilde{\mu}(t) \neq \emptyset,$$

donde aplicamos el resultado anterior para la medida $\tilde{\mu}$, el integrand $\tilde{f}$ y la función $C_\psi \frac{g}{\psi} \in L^1(T, \mathcal{A}, \tilde{\mu}; (0, +\infty))$ (observar que esta última función es integrable con respecto a $\tilde{\mu}$). $\square$

Recordemos que para $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene que $\operatorname{cl}(A) = \bigcap_{r>0} (A + B_{\mathbb{R}^n}(0, r))$.

Con los resultados anteriores ya podemos dar la fórmula del resultado principal de esta sección, la cual es una fórmula del estilo Hiriart-Urruty-Phelps para el subdiferencial de una suma.

Teorema 4.17 *Sea $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo y propio que cumple la desigualdad (4.2). Dada una función $g \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; (0, +\infty))$, entonces la función $I_f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ está bien definida, es convexa, y para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que:*

$$\partial I_f(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} cl \left(\int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{dom\, I_f}(x)) \mathrm{d}\mu(t) \right).$$

Demostración. Claramente I_f está bien definida por la proposición 2.3, es convexa, y además $I_f > -\infty$ en virtud de la desigualdad (4.2).
Sea $\mu(T) = 1$. Sea $g_0 = \int_T g(t) \mathrm{d}\mu(t) \in (0, +\infty)$.
Si $x \notin \operatorname{dom} I_f$, la igualdad se tiene trivialmente, dado que:

$$\emptyset = N_{\operatorname{dom} I_f}(x) = \partial I_f(x).$$

Consideraremos entonces $x \in \operatorname{dom} I_f$ de ahora en adelante (en particular, $\operatorname{dom} I_f \neq \emptyset$).
Para facilitar la escritura, notaremos, para $\varepsilon > 0$:

$$A_\varepsilon = \int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{\operatorname{dom} I_f}(x)) \mathrm{d}\mu(t), \quad A = \bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname{cl} A_\varepsilon.$$

Probaremos que $A \subseteq \partial I_f(x)$. Sea $x^* \in A$. Sean $y \in \operatorname{dom} I_f$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Consideremos la bola $V = B_{\mathbb{R}^n}(0, r_V)$, con $r_V = \frac{\varepsilon}{\|y-x\|+1}$, de modo que

$$|\langle v^*, y - x \rangle| \leq \varepsilon \, \forall v^* \in V.$$

Entonces tenemos que $x^* \in A_\varepsilon + V$, es decir, $x^* = \int_T (h_1(t) + h_2(t)) \mathrm{d}\mu(t) + v^*$, donde $h_1(t) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x)$ y $h_2(t) \in N_{\operatorname{dom} I_f}(x) \, \forall t \in T \, \mu - \text{ctp}, v^* \in V$. Así:

$$\begin{aligned} \langle h_1(t), y - x \rangle \leq f_t(y) - f_t(x) + \varepsilon g(t) \, \forall t \in T \, \mu - \text{ctp}, \\ \langle h_2(t), y - x \rangle \leq 0 \, \forall t \in T \, \mu - \text{ctp}, \\ \langle v^*, y - x \rangle \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

de manera que, sumando:

$$\langle h_1(t) + h_2(t), y - x \rangle \leq f_t(y) - f_t(x) + \varepsilon g(t) \, \forall t \in T \, \mu - \text{ctp}.$$

Entonces, integrando sobre T, obtenemos:

$$\int_T \langle h_1(t) + h_2(t), y - x \rangle \leq I_f(y) - I_f(x) + \varepsilon g_0,$$

y, sumando la desigualdad sobre v^*, se llega a que

$$\langle x^*, y - x \rangle \leq I_f(y) - I_f(x) + \varepsilon g_0 + \varepsilon.$$

Como $y \in \operatorname{dom} I_f$ y $\varepsilon > 0$ eran arbitrarios, se concluye que $x^* \in \partial I_f(x)$.
Para probar la otra inclusión, como el caso $\partial I_f(x) = \emptyset$ es trivial debido a la inclusión recién probada, consideraremos $\partial I_f(x) \neq \emptyset$. Sea x^* en el complemento de A. Probaremos entonces que $x^* \notin \partial I_f(x)$. Por definición, para algún $\varepsilon > 0$ se cumple que

$$x^* \notin \operatorname{cl} A_\varepsilon.$$

Como $\operatorname{cl} A_\varepsilon$ es un conjunto cerrado y convexo de $\mathbb{R}^n$, y además es no vacío por la proposición 4.16, entonces el teorema de separación de Hahn-Banach produce los elementos $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\langle x^*, u \rangle > \beta \geq \langle u^*, u \rangle \, \forall u^* \in A_\varepsilon,$$

o, equivalentemente

$$\langle x^*, u \rangle > \beta \geq \sigma_{A_\varepsilon}(u).$$

Observemos que, como $N_{\operatorname{dom} I_f}(x) + A_\varepsilon \subseteq A_\varepsilon$, entonces, considerando $z^* \in A_\varepsilon$ fijo, tenemos que, para cualquier $u^* \in N_{\operatorname{dom} I_f}(x)$:

$$\langle u^*, u \rangle = \langle \underbrace{u^* + z^*}_{\in A_\varepsilon}, u \rangle - \langle z^*, u \rangle \leq \underbrace{\beta - \langle z^*, u \rangle}_{\geq 0},$$

lo cual, como $N_{\operatorname{dom} I_f}(x)$ es un cono convexo, implica que $u \in (N_{\operatorname{dom} I_f}(x))^\circ = T_{\operatorname{dom} I_f}(x) = \operatorname{cl}(\mathbb{R}_+(\operatorname{dom} I_f - x))$ (proposición 1.26). Como $\operatorname{dom} I_f \neq \emptyset$, existe $u_0 \in \operatorname{ri}(\mathbb{R}_+(\operatorname{dom} I_f - x))$, el cual se puede expresar de la forma $u_0 = \gamma(y_0 - x)$ para ciertos $\gamma \geq 0$, $y_0 \in \operatorname{dom} I_f$. De este modo, $u+\lambda(u_0-u) \in \mathbb{R}_+(\operatorname{dom} I_f - x)$ para cada $\lambda \in (0,1]$. Observando que $A_\varepsilon \subseteq \partial_{\varepsilon g_0+\varepsilon} I_f(x)$ (esto se deduce del desarrollo de la otra inclusión), obtenemos que, por el teorema 1.24:

$$\sigma_{A_\varepsilon}(u_0) \leq \sigma_{\partial_{\varepsilon g_0+\varepsilon} I_f(x)}(\gamma(y_0 - x)) \leq \gamma(I_f(y_0) - I_f(x) + \varepsilon g_0 + \varepsilon) < +\infty.$$

De este modo, para cualquier $\lambda \in [0,1]$:

$$\sigma_{A_\varepsilon}(u + \lambda(u_0 - u)) \leq \lambda \sigma_{A_\varepsilon}(u_0) + (1-\lambda)\sigma_{A_\varepsilon}(u) < +\infty.$$

En otras palabras, la función convexa sci $\lambda \to \sigma_{A_\varepsilon}(u+\lambda(u_0-u))$ es a valores finitos, por lo que es continua en $[0,1]$ (proposición 1.7). De este modo, por continuidad existen $\beta_0, \lambda_0 \in (0,1)$ tales que:

$$\sigma_{A_\varepsilon}(u + \lambda(u_0 - u)) \leq \beta + \beta_0 < \langle x^*, u + \lambda(u_0 - u)\rangle \; \forall \lambda \in [0, \lambda_0).$$

Fijemos ahora $\lambda \in (0, \lambda_0)$, y, dado que $u + \lambda(u_0 - u) \in \mathbb{R}_+(\operatorname{dom} I_f - x)$, tomemos $y \in \operatorname{dom} I_f$ y $\eta > 0$ tales que $u + \lambda(u_0 - u) = \eta(y - x)$. De este modo, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle x^*, y - x\rangle > \eta^{-1}(\beta + \beta_0) &\geq \sigma_{A_\varepsilon}(y - x) \\
&= \sup_{x^* \in E^1_{\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{\operatorname{dom} I_f}(x)}} \int_T \langle x^*(t), y - x\rangle \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_T \sigma_{\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{\operatorname{dom} I_f}(x)}(y - x)\mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_T \left(\sigma_{\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x)} + \sigma_{N_{\operatorname{dom} I_f}(x)}\right)(y - x)\mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_T \sigma_{\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x)}(y - x)\mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_T \inf_{s>0} \frac{f_t(x + s(y - x)) - f_t(x) + \varepsilon g(t)}{s}\mathrm{d}\mu(t) \\
&\geq \int_T \inf_{s>0} \frac{f_t(x + s(y - x)) - f_t(x)}{s}\mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_T \lim_{s\searrow 0} \frac{f_t(x + s(y - x)) - f_t(x)}{s}\mathrm{d}\mu(t) \\
&= \lim_{s\searrow 0} \int_T \frac{f_t(x + s(y - x)) - f_t(x)}{s}\mathrm{d}\mu(t) \\
&\geq \langle y^*, y - x\rangle \; \forall y^* \in \partial I_f(x),
\end{aligned}$$

donde la tercera línea viene de la proposición 4.15 (pues $A_\varepsilon \neq \emptyset$), la quinta se tiene pues $y \in \operatorname{dom} I_f$ (de modo que $\sigma_{N_{\operatorname{dom} I_f}}(y-x) = 0$), la sexta del teorema 1.24, en tanto la penúltima línea viene del TCM. Así, se concluye que $x^* \notin \partial I_f(x)$, con lo que se tiene la otra inclusión, terminando así la demostración del teorema.
Para el caso μ general, si definimos $\tilde{I}_{\tilde{f}}$ como $\tilde{I}_{\tilde{f}}(x) = \int_T \tilde{f}(t,x)\tilde{\mu}(t)$, tenemos que $I_f = \tilde{I}_{\tilde{f}}$ y

así, para cualquier $\tilde{g} \in L^1(T, \mathcal{A}, \tilde{\mu}; (0, +\infty))$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial I_f(x) &= \partial \tilde{I}_{\tilde{f}}(x) \\
&= \bigcap_{\varepsilon>0} \mathrm{cl} \left(\int_T (\partial_{\varepsilon \tilde{g}(t)} \tilde{f}_t(x) + N_{\mathrm{dom}\, \tilde{I}_{\tilde{f}}}(x)) \mathrm{d}\tilde{\mu}(t) \right) \\
&= \bigcap_{\varepsilon>0} \mathrm{cl} \left(\int_T (\partial_{\varepsilon C_\psi^{-1} \tilde{g}(t)\psi(t)} f_t(x) + N_{\mathrm{dom}\, I_f}(x)) \mathrm{d}\mu(t) \right),
\end{aligned}$$

por lo que el resultado se mantiene al considerar $\tilde{g} = C_\psi \frac{g}{\psi} \in L^1(T, \mathcal{A}, \tilde{\mu}; (0, +\infty))$ para cualquier $g \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; (0, +\infty))$. $\square$

Estos resultados dados en $\mathbb{R}^n$ pueden ser generalizados fácilmente a cualquier espacio de dimensión finita, lo cual revisaremos ahora de manera rápida. Sea L un espacio vectorial de dimensión finita. Gracias a la existencia de un isomorfismo $A \in \mathcal{L}(L, \mathbb{R}^n)$, se pueden convertir los elementos de L en elementos en $\mathbb{R}^n$, para así aplicar los resultados conocidos en $\mathbb{R}^n$, y después volver a L, en tanto para los elementos de L^*, tenemos que el operador adjunto de A, $A^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, L^*)$, es un isomorfismo entre L^* y $\mathbb{R}^n$, con $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Esto permite hacer uso de la proposición 1.23, obteniendo así el resultado que enunciaremos y demostraremos a continuación.

En lo que sigue, para espacios de dimensión finita, consideraremos las mismas definiciones dadas en $\mathbb{R}^n$, es decir, para el espacio L de dimensión finita tenemos que:

- Una multiaplicación $S : T \rightrightarrows L$ es medible si $S^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ es medible para cada abierto $O \subseteq L$.
- Un integrand $f : T \times L \to \overline{\mathbb{R}}$ se dirá normal si la multiaplicación $\mathrm{epi}\, f : T \rightrightarrows L \times \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{epi}\, f(t) = \{(x, \alpha) \in L \times \mathbb{R} \mid f(t, x) \leq \alpha\}$ es medible y a valores cerrados.
- Para un normal integrand $f : T \times L \to \overline{\mathbb{R}}$ tenemos que la función integral $I_f : L \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $I_f(x) = \int_T f(t, x) \mathrm{d}\mu(t)$ está bien definida bajo la típica convención de que $I_f(x) = +\infty$ si $\int_T f^+(t, x) \mathrm{d}\mu(t) = +\infty$, puesto que la función $t \to f(t, x)$ es medible para cada $x \in L$.
- Nuevamente consideraremos la siguiente condición de acotamiento del integrand f, para cierta función $\gamma \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; L^*)$ y $\beta \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$:

$$f_t(u) \geq \langle \gamma(t), u \rangle + \beta(t) \; \forall t \in T \; \mu - \mathrm{ctp} \text{ y } \forall u \in L. \tag{4.4}$$

Corolario 4.18 *Sea L un ev de dimensión finita. Sea $f : T \times L \to \overline{\mathbb{R}}$ un normal integrand convexo y propio que cumple la desigualdad (4.4). Si una función $g \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; (0, +\infty))$ es dada, entonces la función $I_f : L \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ está bien definida, es convexa, y para cada $x \in L$ tenemos que:*

$$\partial I_f(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} cl \left(\int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{dom\, I_f}(x)) \mathrm{d}\mu(t) \right) \subseteq L^*.$$

Demostración. Claramente I_f está bien definida por lo mencionado antes del lema, es convexa, y además $I_f > -\infty$ en virtud de la desigualdad (4.4).

Como el resultado es trivial para $x \notin \operatorname{dom} I_f$ (pues ambos lados de la igualdad son vacíos), consideraremos $x \in \operatorname{dom} I_f$, es decir, en particular consideraremos I_f propia.
Sea $T_0 = \{t \in T \mid x \in \operatorname{dom} f(t,\cdot)\} = (\operatorname{epi} f)^{-1}(L \times \mathbb{R}) \in \mathcal{A}$, el cual es tal que $\mu(T \setminus T_0) = 0$. En lo que sigue trabajaremos en el espacio de medida $(T_0, \mathcal{A}, \mu)$.
Sea $A \in \mathcal{L}(L, \mathbb{R}^n)$ un isomorfismo, con $n = \dim L$. Haciendo uso de la notación de la proposición 1.23, tenemos que para cada $t \in T_0$ podemos definir $(Af_t)(y) = f_t(A^{-1}y)\ \forall y \in \mathbb{R}^n$, de modo que también se puede definir $Af : T_0 \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ como integrand. Definiendo $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to L \times \mathbb{R}$ por $E(y, \alpha) = (A^{-1}y, \alpha)$, se tiene que E es un isomorfismo entre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y $L \times \mathbb{R}$, y así se tiene que el epígrafo de Af cumple que

$$\operatorname{epi} Af(t) = E^{-1}(\operatorname{epi} f(t))\ \forall t \in T_0, (\operatorname{epi} Af)^{-1}(O) = \operatorname{epi} f^{-1}(E(O))\ \forall O \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

de modo que Af es un normal integrand convexo y propio, que además cumple la desigualdad (4.2). Observemos también que podemos definir AI_f, y se tiene que

$$(AI_f)(y) = I_f(A^{-1}y) = \int_{T_0} f_t(A^{-1}y)\mathrm{d}\mu(t) = I_{Af}(y)\ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Así, aplicando la proposición 1.23 para $y = Ax$, tenemos que:

$$(A^*)^{-1}(\partial I_f(x)) = \partial(AI_f)(y).$$

Como $Af : T_0 \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ cumple las hipótesis del teorema 4.17, podemos aplicar dicho resultado para $AI_f = I_{Af} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ y así obtener que

$$\partial(AI_f)(y) = \bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname{cl}\left(\int_{T_0} (\partial_{\varepsilon g(t)}(Af_t)(y) + N_{\operatorname{dom} AI_f}(y))\mathrm{d}\mu(t)\right) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Para cada $t \in T_0$, como $x \in \operatorname{dom} f_t$, tenemos que $\partial_{\varepsilon g(t)}(Af_t)(y) = (A^*)^{-1}\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x)$ por la proposición 1.23, en tanto para el cono normal, se tiene que, como $\operatorname{dom} AI_f = A^{-1}\operatorname{dom} I_f$:

$$N_{\operatorname{dom} AI_f}(y) = \partial \mathrm{i}_{A^{-1}\operatorname{dom} I_f}(y) = \partial(A\mathrm{i}_{\operatorname{dom} I_f})(y) = (A^*)^{-1}N_{\operatorname{dom} I_f}(x),$$

donde en la última igualdad aplicamos la proposición 1.23 nuevamente. Así, juntando todo lo anterior, obtenemos que

$$(A^*)^{-1}(\partial I_f(x)) = \bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname{cl}\left(\int_{T_0} (A^*)^{-1}(\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{\operatorname{dom} I_f}(x))\mathrm{d}\mu(t)\right).$$

Como $(A^*)^{-1}$ es un isomorfismo, es directo que $\operatorname{cl}((A^*)^{-1}C) = (A^*)^{-1}\operatorname{cl}(C)$ para cualquier conjunto $C \subseteq L^*$, también es directo que $\bigcap_{\mathrm{i}\in I}(A^*)^{-1}(C_\mathrm{i}) = (A^*)^{-1}\bigcap_{\mathrm{i}\in I} C_\mathrm{i}$ para cualquier familia $\{C_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}\in I} \subseteq L^*$ con I conjunto de índices arbitrario, y como $\mu(T \setminus T_0) = 0$, la integral se puede convertir a una en todo T mediante la igualdad $\mu-$ctp. Así, para concluir el resultado solo falta demostrar que $(A^*)^{-1}$ se puede sacar de la integral, pues dado que es un isomorfismo implicaría la igualdad buscada.
Sea $C_1 = \int_T (A^*)^{-1}(\partial_{\varepsilon g(t)} f(t,x) + N_{\operatorname{dom} I_f}(x))\mathrm{d}\mu(t)$ y $C_2 = \int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f(t,x) + N_{\operatorname{dom} I_f}(x))\mathrm{d}\mu(t)$. Queremos probar que $C_1 = (A^*)^{-1}C_2$. Tenemos que $x^* \in C_1$ si y solo si existe $w : T \to L^*$ tal que $w(t) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f(t,x) + N_{\operatorname{dom} I_f}(x)\ \forall t \in T\ \mu-$ctp, $(A^*)^{-1}w \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}^n)$ (y por ende $w \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; L^*)$), y además

$$\langle x^*, y\rangle = \int_T \langle (A^*)^{-1}w(t), y\rangle \mathrm{d}\mu(t) = \int_T \langle w(t), A^{-1}y\rangle \mathrm{d}\mu(t)\ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Haciendo el cambio de variable $z = A^{-1}y$, obtenemos que lo anterior es equivalente a

$$\langle A^*x^*, z\rangle = \int_T \langle w(t), z\rangle \mathrm{d}\mu(t) \, \forall z \in L.$$

En resumen, tenemos que $x^* \in C_1 \iff A^*x^* \in C_2$, lo que a su vez es equivalente a $x^* \in (A^*)^{-1}C_2$, concluyendo así lo buscado. □

Lo que sigue es generalizar este resultado a espacios de dimensión infinita, para llegar a un resultado similar al del teorema 4.14.

4.3. Teorema de extensiones de Hahn-Banach medibles

Sea $(T, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, y sea X un espacio de Banach.

Recordemos que, dados dos conjuntos A y B, para una función $h : A \to B$ y un conjunto $K \subseteq A$, se define la restricción de h a K como la aplicación $h|_K : K \to B$ tal que $h|_K(x) = h(x) \, \forall x \in K$. Del mismo modo, para $K \subseteq X$ sev y un integrand $f : T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$, definimos la restricción del integrand f a K como el integrand $f|_K : T \times K \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $(f|_K)_t = (f_t)|_K \, \forall t \in T$.

Sea $x \in X$ y sea $f : T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ un integrand convexo y propio tal que I_f está bien definida en X. Observemos que, si un subespacio de dimensión finita $L \subseteq X$ es tal que $f|_L$ es un normal integrand que cumple la desigualdad (4.4), entonces para cualquier función $g \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; (0, +\infty))$ tenemos que, como $I_f|_L = I_{f|_L}$, por el corolario 4.18:

$$\partial I_f|_L(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathrm{cl} \left(\int_T (\partial_{\varepsilon g(t)}(f_t)|_L(x) + N_{\mathrm{dom}\, I_f|_L}(x)) \mathrm{d}\mu(t) \right) \subseteq L^*. \tag{4.5}$$

Por lo tanto, como se tiene que para cualquier $x^* \in \partial I_f(x)$ se cumple que $x^*|_L \in \partial I_f|_L(x)$, entonces se puede hacer uso de la fórmula (4.5). El problema a resolver entonces es buscar la forma de traspasar propiedades de $x^*|_L$, el cual está en L^*, a x^*, el cual está en X^*.

Analicemos cuáles propiedades necesitamos extender. Notemos que para cualquier $y^* \in \partial I_f|_L(x)$ se tiene que, para cualquier $\varepsilon > 0$ y $U \subseteq L^*$ vecindad abierta del origen, existen las aplicaciones escalarmente integrables $h_\varepsilon, n_\varepsilon : T \to L^*$ tales que $h_\varepsilon(t) \in \partial_{\varepsilon g(t)}(f_t)|_L(x)$, $n_\varepsilon(t) \in N_{\mathrm{dom}\, I_f|_L}(x) \forall t \in T \, \mu-$ctp, y además existe $u^* \in U$ que, en conjunto con las funciones antes mencionadas, cumplen que

$$\langle y^*, y\rangle = \int_T \langle h_\varepsilon(t) + n_\varepsilon(t), y\rangle \mathrm{d}\mu(t) + \langle u^*, y\rangle \, \forall y \in L.$$

De este modo, si queremos mantener la expresión integral de y^* al extenderlo a todo X, es necesario extender las funciones h_ε y n_ε. Estas extensiones tienen que mantener dos propiedades: primero, que la extensión de h_ε siga perteneciendo al $\varepsilon-$ subdiferencial y la extensión de n_ε siga perteneciendo al cono normal, y segundo, que la extensión de $h_\varepsilon + n_\varepsilon$ siga siendo escalarmente integrable.

Para ver el primer punto, es decir, que existe una extensión que sigue cumpliendo la desigualdad que define a un $\varepsilon-$subdiferencial en todo X en vez de solo L, presentamos el siguiente resultado.

Proposición 4.19 *Sea X un espacio de Banach. Sea $L \subseteq X$ un sev y $\varepsilon > 0$. Sea $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa, propia, sci y tal que está acotada por un funcional lineal afín, es decir, existen $\gamma \in X^*, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $h(z) \geq \langle \gamma, z\rangle + \beta \forall z \in X$. Consideremos $x \in dom\, h$ y $x^* \in L^*$ tales que $\langle x^*, y - x\rangle \leq h(y) - h(x) + \varepsilon \forall y \in L$. Entonces x^* tiene una extensión a todo X que mantiene esta última propiedad, es decir, existe $\tilde{x}^* \in X^*$ tal que $\tilde{x}^*|_L = x^*$ y $\tilde{x}^* \in \partial_\varepsilon h(x)$.*

Demostración. Consideremos la aplicación $h'_\varepsilon(x, \cdot) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada en el teorema 1.21. Como h es convexa, propia y sci, tenemos que $h'_\varepsilon(x, \cdot)$ es una aplicación sublineal y positivamente homogénea, y por estar acotado por un funcional lineal afín tenemos que $h'_\varepsilon(x, \cdot) > -\infty$. Así, por el teorema 1.21, la desigualdad que cumple x^* es equivalente a

$$\langle x^*, z\rangle \leq h'_\varepsilon(x, z)\, \forall z \in L.$$

De este modo, podemos aplicar el teorema de extensión de Hahn-Banach analítico, para así obtener que existe $\tilde{x}^* \in X^*$ tal que $\tilde{x}^*|_L = x^*$ y además

$$\langle \tilde{x}^*, z\rangle \leq h'_\varepsilon(x, z)\, \forall z \in X,$$

lo cual es equivalente a $\tilde{x}^* \in \partial_\varepsilon h(x)$ por el teorema 1.21, concluyendo así la demostración. $\square$

Si bien la forma usual del teorema de extensión de Hahn-Banach analítico pide que la función sublineal y positivamente homogénea sea a valores en $\mathbb{R}$, no hay problemas en ajustarlo para que dicha aplicación pueda tomar el valor $+\infty$. Lo problemático sería que dicha función tomara el valor $-\infty$, por lo que, para evitar este caso resulta necesario pedir la condición de acotamiento para la función h en la proposición anterior.

Sobre el segundo punto, es decir, que la extensión de una función escalarmente medible en L^* sea escalarmente medible en X^*, tenemos un problema, el cual consiste en saber cuál topología considerar en X^* para la medibilidad, puesto que sus borelianos cambiarán. Además, se puede apreciar que, para que la extensión siga siendo escalarmente integrable, basta que sea medible y que mantenga la norma. Esto último, es decir, mantener la norma, se tiene en un resultado conocido, el teorema de extensiones de Hahn-Banach, pero este resultado solo es conocido sobre funcionales lineales, no sobre funciones medibles.

Ante lo anterior, presentamos el siguiente resultado que resuelve estos problemas recién descritos, y que por su naturaleza podemos denominar como el teorema de extensiones de Hahn-Banach medibles.

Teorema 4.20 *(*Teorema de extensiones de Hahn-Banach medibles*). Sea X un espacio de Banach separable, y sea $(T, \mathcal{A})$ un espacio medible, el cual es completo para alguna medida $\sigma-$finita en $\mathcal{A}$. Consideremos X^*, el dual de X, como espacio topológico con respecto a la topología τ^{w^*}. Sea $h : T \to L^*$ una función $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(L^*))$-medible. Entonces, existe una* *extensión de Hahn-Banach de h a todo X^* que es $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(X^*, \tau^{w^*}))$-medible, es decir, existe $\tilde{h} : T \to X^*$ tal que $\tilde{h}^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ para cada w^*-abierto de X^*, y además $(\tilde{h}(t))|_L = h(t)$ y $\|\tilde{h}(t)\|_{X^*} = \|h(t)\|_{L^*}$ $\forall t \in T$.*

Demostración. Consideremos la multiaplicación $G : T \rightrightarrows X^*$ dada por

$$G(t) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y\rangle = \langle h(t), y\rangle \; \forall y \in L, \|x^*\|_{X^*} = \|h(t)\|_{L^*}\}.$$

Claramente $G(t) \neq \emptyset$ $\forall t \in T$ por el teorema de Hahn-Banach. La idea es demostrar que esta multiaplicación tiene una selección medible para concluir.
Observemos que G es a valores convexos: sean $x_1^*, x_2^* \in G(t)$ y $\lambda \in [0, 1]$, y sea $y^* = \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*$, entonces tenemos que $\langle y^*, y\rangle = \lambda\langle x_1^*, y\rangle + (1-\lambda)\langle x_2^*, y\rangle = \langle h(t), y\rangle \forall y \in L$, y esto implica que $\|y^*\|_{X^*} \geq \|h(t)\|_{L^*}$. Por otra parte, $\|y^*\|_{X^*} \leq \lambda\|x_1^*\|_{X^*} + (1-\lambda)\|x_2^*\|_{X^*} = \|h(t)\|_{L^*}$, lo cual implica finalmente que $y^* \in G(t)$. Claramente G es a valores $\|\cdot\|_{X^*}$-cerrados, entonces, como G es a valores convexos, se tiene que G es a valores w^*-cerrados.
Veamos ahora que graph $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X^*, \tau^{w^*})$. Consideremos el conjunto $R^* \subseteq X^*$ dado por

$$R^* = \{x^* \in X^* \mid \sup_{x \in B_X(0,1)} \langle x^*, x\rangle = \sup_{x \in B_L(0,1)} \langle x^*, x\rangle\}.$$

Consideremos también la aplicación $P : T \times X^* \to T \times L^*$ dada por

$$P(t, x^*) = (t, x^*|_L).$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\text{graph } G &= \{(t, x^*) \in T \times X^* \mid x^*|_L = h(t), \|x^*\|_{x^*} = \|h(t)\|_{L^*}\} \\
&= \{(t, x^*) \in T \times X^* \mid (t, x^*|_L) \in \text{graph } h, x^* \in R^*\} \\
&= P^{-1}(\text{graph } h) \cap (T \times R^*).
\end{aligned}$$

Como h es medible y L^* es de dimensión finita, por el lema 4.31 (ver sección de anexos 4.6) tenemos que graph $h \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(L^*)$. Veamos que R^* es un conjunto w^*-cerrado. Sea una red $(x_\lambda^*)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq R^*$ tal que $x_\lambda^* \to x^* \in X^*$ en la topología τ^{w^*}. Tenemos entonces que, como $x_\lambda^* \in R^*$:

$$\|x_\lambda^*\|_{X^*} = \sup_{x \in B_L(0,1)} \langle x_\lambda^*, x\rangle = \langle x_\lambda^*, x_\lambda\rangle,$$

donde $x_\lambda \in B_L(0, 1)$ es el elemento donde se alcanza el supremo dado que L es de dimensión finita. Así, tenemos que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq B_L(0, 1)$, y este conjunto es $\|\cdot\|-$compacto pues L es de dimensión finita, por lo que existe una subred $(x_{\lambda_\xi})_{\xi \in \Xi}$ tal que $x_{\lambda_\xi} \to z \in B_L(0, 1)$ en norma. Por lo anterior, tenemos que $\langle x_{\lambda_\xi}^*, x_{\lambda_\xi}\rangle \to \langle x^*, z\rangle$, de modo que

$$\|x^*\|_{X^*} \leq \liminf_{\lambda \in \Lambda} \|x_\lambda^*\|_{X^*} \leq \lim_{\xi \in \Xi} \|x_{\lambda_\xi}^*\|_{X^*} = \lim_{\xi \in \Xi} \langle x_{\lambda_\xi}^*, x_{\lambda_\xi}\rangle = \langle x^*, z\rangle \leq \sup_{x \in B_L(0,1)} \langle x^*, x\rangle.$$

Como la otra desigualdad es trivial, se tiene que $x^* \in R^*$.
Veamos que P es $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X^*, \tau^{w^*}), \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(L^*))$-medible. Consideremos entonces $A \in \mathcal{A}$ y $F \subseteq L^*$ cerrado, con lo que se puede ver que

$$\begin{aligned}
P^{-1}(A \times F) &= \{(t, x^*) \in T \times X^* \mid t \in A, x^*|_{L^*} \in F\} \\
&= A \times \Pi_{L^*}^{-1}(F),
\end{aligned}$$

donde $\Pi_{L^*}^{-1}(F) = \{x^* \in X^* \mid x^*|_L \in F\}$. Veamos que este conjunto es w^*-cerrado. Sea una red $(x^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \Pi_{L^*}^{-1}(F)$ tal que $x^*_\lambda \to x^* \in X^*$ en la topología τ^{w^*}. Entonces para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $y^*_\lambda \in F$ tal que

$$\langle x^*_\lambda, x\rangle = \langle y^*_\lambda, x\rangle \ \forall x \in L. \tag{4.6}$$

Como existe $M > 0$ tal que $\|y^*_\lambda\|_{L^*} \leq \|x^*_\lambda\|_{X^*} \leq M \ \forall\lambda \in \Lambda$ (pues las redes w^*-convergentes son acotadas), tenemos que $(y^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red acotada en el conjunto cerrado F del espacio de dimensión finita L^*, por lo que existe una subred convergente (en las topologías de la norma y τ^{w^*} al ser de dimensión finita) a algún $y^* \in F$, con lo cual, tomando límite a la subred en la ecuación (4.6), obtenemos que

$$\langle x^*, x\rangle = \langle y^*, x\rangle \ \forall x \in L,$$

por lo cual $\Pi_{L^*}^{-1}(F)$ es w^*-cerrado en X^*. Así, se tiene que $P^{-1}(A\times F) \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(X^*, \tau^{w^*})$, por lo que P es $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(X^*, \tau^{w^*}), \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(L^*))$-medible. Con todo lo anterior graph $G \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(X^*, \tau^{w^*})$, por lo que se puede aplicar el teorema 4.7 dado que X^* es un espacio de Suslin respecto a la topología τ^{w^*} (lema 4.26), de modo que se obtiene una función $\tilde{h} : T \to X^*$ que es $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(X^*, \tau^{w^*}))$-medible, y tal que $\tilde{h}(t) \in G(t)$, con lo cual se cumple lo buscado. □

4.4. Caso espacio constante general

Con el resultado final de la sección anterior ya podemos presentar uno de los resultados principales de este capítulo. En esta sección usaremos muchas definiciones de la sección 4.1, en particular usaremos las definiciones 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13.

Teorema 4.21 *Sea X un espacio de Banach separable, y $(T, \mathcal{A})$ un espacio medible. Sea μ una medida $\sigma-$finita en $\mathcal{A}$ tal que el espacio $(T, \mathcal{A}, \mu)$ es completo. Consideremos X^*, el dual de X, como espacio topológico con respecto a la topología τ^{w^*}. Sea $f : T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ un integrand convexo, propio y sci que cumple la siguiente condición de acotamiento, para cierta función $\gamma \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; X^*)$ y $\beta \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$:*

$$f_t(u) \geq \langle\gamma(t), u\rangle + \beta(t) \ \forall t \in T \ \mu - ctp \ y \ \forall u \in X. \tag{4.7}$$

Supongamos además que f es tal que $f|_L : T \times L \to \overline{\mathbb{R}}$ es un normal integrand para cada subespacio de dimensión finita $L \subseteq X$. Supongamos que $I_f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ está bien definida. Dada una función $g \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; (0, +\infty))$, entonces para cada $x \in X$ tenemos que:

$$\partial I_f(x) = \bigcap_{\substack{\varepsilon>0 \\ L\in\mathcal{F}(x)}} cl^{\|\cdot\|}\left(\int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{L\cap dom\, I_f}(x))\mathrm{d}\mu(t)\right),$$

donde las selecciones de la integral son $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(X^*, \tau^{w^*}))-$medibles, en tanto la clausura es con respecto a la norma de X^*.

Demostración. Sea $\mu(T) = 1$. Si $x \notin \operatorname{dom} I_f$, la igualdad se tiene trivialmente, dado que:

$$\emptyset = N_{L\cap \operatorname{dom} I_f}(x) = \partial I_f(x) \ \forall L \in \mathcal{F}(x).$$

Consideraremos entonces $x \in \operatorname{dom} I_f$ de ahora en adelante (por lo que $\operatorname{dom} I_f \neq \emptyset$).
Para probar la primera inclusión, haremos un procedimiento similar al del teorema 4.17. Sea x^* en el lado derecho de la igualdad. Sea $y \in \operatorname{dom} I_f$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Escojamos $L \in \mathcal{F}(x)$ tal que $y \in L$, y una bola $V \subseteq X^*$ tal que:

$$|\langle v^*, y - x\rangle| \leq \varepsilon \, \forall v^* \in V.$$

Entonces tenemos que $x^* \in \int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{L \cap \operatorname{dom} I_f}(x)) \mathrm{d}\mu(t) + V$, de modo que $x^* = \int_T (h_1(t) + h_2(t)) \mathrm{d}\mu(t) + v^*$, donde $h_1(t) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x)$ y $h_2(t) \in N_{L \cap \operatorname{dom} I_f}(x) \, \forall t \in T \; \mu$−ctp, $v^* \in V$. Así, como $x, y \in L \cap \operatorname{dom} I_f$ y $v^* \in V$:

$$\langle h_1(t), y - x\rangle \leq f_t(y) - f_t(x) + \varepsilon g(t), \langle h_2(t), y - x\rangle \leq 0 \, \forall t \in T \; \mu - \text{ctp}, \langle v^*, y - x\rangle \leq \varepsilon,$$

de modo que:

$$\langle h_1(t) + h_2(t), y - x\rangle \leq f_t(y) - f_t(x) + \varepsilon g(t) \, \forall t \in T \; \mu - \text{ctp}, \langle v^*, y - x\rangle \leq \varepsilon.$$

Entonces, integrando sobre T, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\int_T \langle h_1(t) + h_2(t), y - x\rangle \mathrm{d}\mu(t) \leq I_f(y) - I_f(x) + \varepsilon g_0, \langle v^*, y - x\rangle \leq \varepsilon \\ \Rightarrow\ &\langle x^*, y - x\rangle \leq I_f(y) - I_f(x) + \varepsilon g_0 + \varepsilon, \end{aligned}$$

donde $g_0 = \int_T g(t) \mathrm{d}\mu(t)$. Por lo tanto, como $y \in \operatorname{dom} I_f$ y $\varepsilon > 0$ eran arbitrarios, se concluye que $x^* \in \partial I_f(x)$.

Para la otra inclusión, consideremos $x^* \in \partial I_f(x)$. Sea $L \in \mathcal{F}(x)$ arbitrario. Observemos que entonces tenemos que $f|_L$ es un normal integrand convexo y propio que cumple la desigualdad (4.4) y $x^*|_L \in \partial(I_f|_L)(x)$. Llamando $y^* = x^*|_L \in L^*$, y observando que $I_f|_L = I_{f|_L}$, podemos aplicar el corolario 4.18 y así obtener que

$$y^* \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname{cl} \left(\int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f|_L(t, x) + N_{\operatorname{dom} I_{f|_L}}(x)) \mathrm{d}\mu(t) \right),$$

donde la clausura es en L^*.
Como tenemos que $\operatorname{dom} I_{f|_L} = L \cap \operatorname{dom} I_f$, entonces lo anterior puede ser reescrito como

$$y^* \in \bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ r > 0}} \left(\int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f|_L(t, x) + N_{L \cap \operatorname{dom} I_f}(x)) \mathrm{d}\mu(t) + B_{L^*}(0, r) \right).$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $r > 0$ arbitrarios. Entonces existen $y_\varepsilon^* : T \to L^*$, $n_\varepsilon^* : T \to L^*$ y $v \in L^*$ tales que $y_\varepsilon^*(t) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f|_L(t, x)$ y $n_\varepsilon^*(t) \in N_{L \cap \operatorname{dom} I_f}(x) \, \forall t \in T \; \mu - \text{ctp}$, $(y_\varepsilon^* + n_\varepsilon^*) \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; L^*)$ y $v \in B_{L^*}(0, r)$, de modo que

$$\langle y^*, y\rangle = \int_T \left(\langle y_\varepsilon^*(t), y\rangle + \langle n_\varepsilon^*(t), y\rangle\right) \mathrm{d}\mu(t) + \langle v, y\rangle \, \forall y \in L.$$

Gracias a nuestras hipótesis, se puede aplicar el teorema 4.20 a la función $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(L^*))$-medible $y_\varepsilon^* + n_\varepsilon^* : T \to L^*$, de modo que existe una extensión $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(X^*, \tau^{w^*}))$-medible $z_\varepsilon^* : T \to X^*$ tal

que $z_\varepsilon^*|_L = y_\varepsilon^* + n_\varepsilon^*$ y $\|z_\varepsilon^*\|_{X^*} = \|y_\varepsilon^* + n_\varepsilon^*\|_{L^*} \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$, de modo que $z_\varepsilon^* \in L^1(T, \mathcal{A}, \mu; X^*)$. Observemos que $y_\varepsilon^*(t) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f|_L(t,x) \forall t \in T \mu-\text{ctp} \iff \langle y_\varepsilon^*(t), y\rangle \leq f_t(y) - f_t(x) + \varepsilon g(t) \forall y \in L, \forall t \in T_0$, para $T_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(T \setminus T_0) = 0$. Así, para cada $t \in T_0$ podemos aplicar el teorema 4.19 para $y_\varepsilon^*(t) \in L^*$, pues f_t es convexa, propia y sci, obteniendo entonces una extensión $\tilde{y}_\varepsilon^*(t) \in X^*$ tal que $\tilde{y}_\varepsilon^*(t) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f(t,x)$ y $\tilde{y}_\varepsilon^*(t)|_L = y_\varepsilon^*(t)$.
Observemos entonces que

$$z_\varepsilon^*(t) = \tilde{y}_\varepsilon^*(t) + z_\varepsilon^*(t) - \tilde{y}_\varepsilon^*(t) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f(t,x) + N_{L \cap \operatorname{dom} I_f}(x)\, \forall t \in T\ \mu - \text{ctp},$$

puesto que para cada $t \in T_0$ y cualquier $y \in L \cap \operatorname{dom} I_f$ tenemos que $y - x \in L$ y así

$$\langle z_\varepsilon^*(t) - \tilde{y}_\varepsilon^*(t), y - x\rangle = \langle y_\varepsilon^*(t) + n_\varepsilon^*(t) - y_\varepsilon^*(t), y - x\rangle \geq 0.$$

Considerando $\tilde{v} \in X^*$ la extensión de Hahn-Banach de v tal que $\|\tilde{v}\|_{X^*} = \|v\|_{L^*}$, podemos definir la extensión $\tilde{y}^* \in X^*$ de y^* mediante

$$\langle \tilde{y}^*, y\rangle = \int_T \langle z_\varepsilon^*(t), y\rangle \mathrm{d}\mu(t) + \langle \tilde{v}, y\rangle\ \forall y \in X,$$

de modo que $\tilde{y}^*|_L = y^*$ y $\tilde{y}^* \in \int_T \left(\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{L \cap \operatorname{dom} I_f}(x)\right) \mathrm{d}\mu(t) + B_{X^*}(0,r)$.
Volviendo a x^*, tenemos que $x^* - \tilde{y}^* \in L^\perp$, por lo que tenemos que, como $\mu(T) = 1$ y $L^\perp + N_{L \cap \operatorname{dom} I_f} \subseteq N_{L \cap \operatorname{dom} I_f}$:

$$x^* = \tilde{y}^* + x^* - \tilde{y}^* \in \int_T \left(\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{L \cap \operatorname{dom} I_f}(x)\right) \mathrm{d}\mu(t) + B_{X^*}(0,r).$$

Como $\varepsilon > 0$ y $r > 0$ eran arbitrarios, lo anterior implica que

$$x^* \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname{cl}^{\|\cdot\|} \left(\int_T \left(\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{L \cap \operatorname{dom} I_f}(x)\right) \mathrm{d}\mu(t) \right),$$

y como $L \in \mathcal{F}(x)$ era arbitrario, se concluye finalmente la otra implicancia, es decir,

$$x^* \in \bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ L \in \mathcal{F}(x)}} \operatorname{cl}^{\|\cdot\|} \left(\int_T \left(\partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x) + N_{L \cap \operatorname{dom} I_f}(x)\right) \mathrm{d}\mu(t) \right).$$

Para pasar al resultado para una medida μ $\sigma-$finita general, basta hacer el mismo procedimiento hecho al final de la demostración del teorema 4.17. □

En la fórmula del subdiferencial recién probada, la clausura sobre la norma puede ser cambiada sin problema por la clausura sobre la topología τ^{w^*}, dado que una base de vecindades del origen de esta última topología se puede describir como $\{L^\perp + B_{X^*}(0,r)\}_{(r,L) \in (0,+\infty) \times \mathcal{F}(0)}$, por lo que el cono normal $N_{L \cap \operatorname{dom} I_f}(x)$ absorbe el término $L^\perp$.

Si bien las hipótesis sobre el integrand f en el teorema 4.21 pueden parecer extrañas, la razón de esto es para poder aplicar este resultado al espacio de las funciones continuas, como se verá en la siguiente sección.

4.5. Caso espacio de funciones continuas

Sea (T, τ) un espacio $\sigma-$lcH tal que existe una sucesión de conjuntos compactos $(K_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ tales que $T = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} K_\nu$ y para cada $\nu \in \mathbb{N}$ se tiene que K_ν es metrizable y $K_\nu \subseteq \operatorname{int} K_{\nu+1}$. Sea $C = C_0(T; \mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones continuas que se desvanecen en el infinito y $M = (M(T, \mathcal{B}(T)))^n$ el espacio de medidas de Radon con signo de variación acotada (ver sección 1.3). Se tiene entonces que T es normal por el corolario 1.33, por lo que podemos hacer uso del lema de Urysohn y de particiones de la unidad, y además C es un espacio separable por el lema 4.29 (ver sección de anexos 4.6), por lo que se cumple una de las hipótesis de los resultados de la sección anterior. Sin embargo, como el dual de C se puede identificar con M, esto nos lleva a considerar C como un espacio medible sobre $\mathcal{B}(T)$, y así trabajar con una medida en esta $\sigma-$álgebra. Esto produce problemas, pues esta configuración suele no ser un espacio de medida completo: si consideramos, por ejemplo, $T = \mathbb{R}$ y la medida de Lebesgue, tenemos que es necesario completar los borelianos a los conjuntos Lebesgue-medibles para que el espacio de medida sea completo. Así, para conservar lo desarrollado en la sección 3.3 y poder comparar los resultados, consideraremos la completación del espacio de medida de los borelianos, y los diferenciaremos en la notación.

Sea μ una medida (estrictamente positiva) $\sigma-$finita sobre $\mathcal{B}(T)$, y sea $(T, \mathcal{A}, \hat{\mu})$ la completación del espacio de medida $(T, \mathcal{B}(T), \mu)$. Tendremos entonces que los resultados sobre C^* (que puede ser identificado con M) dependerán de si queremos trabajar con selecciones integrables o con la estructura de M, puesto que en el caso de las selecciones integrables se tendrá que trabajar sobre el espacio de medida $(T, \mathcal{A}, \hat{\mu})$ para hacer uso del teorema 4.20, en tanto cuando se quiera trabajar con los elementos de M como medidas de Radon, entonces se usará el espacio medible $(T, \mathcal{B}(T))$, dado que las medidas de Radon y sus propiedades se dan sobre este espacio.

Consideremos, para cada $t \in T$, los funcionales lineales continuos $\mathrm{ev}_t : C \to \mathbb{R}^n$ dados por $\mathrm{ev}_t(u) = u(t)\ \forall u \in C$. Observemos que, si $v \in \mathbb{R}^n$, entonces la aplicación $u \in C \to \langle v, \mathrm{ev}_t(u)\rangle = \langle v, u(t)\rangle \in \mathbb{R}$ está en C^* para cada $t \in T$. Así, para una multiaplicación $A : T \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, denotaremos la multiaplicación $t \to A(t)\mathrm{ev}_t \subseteq C^*$, a la multiaplicación dada para cada $t \in T$ por

$$A(t)\mathrm{ev}_t = \{\theta \in C^* \mid \exists v_t \in A(t) \text{ tal que } \langle \theta, u\rangle = \langle v_t, u(t)\rangle\ \forall u \in C\}.$$

La idea es aplicar el teorema principal de la sección anterior al caso estudiado en la sección 3.3. Un gran problema que surge entonces es que, en dicho caso, el integrand $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ está definido sobre $\mathbb{R}^n$, en tanto la función integral $I_f : C \to \overline{\mathbb{R}}$ está definida sobre C, y en el teorema 4.21 recién visto se tiene que el integrand y su función integral deben estar definidos sobre el mismo espacio. Ante esto, una posible solución es considerar el integrand $\hat{f} : T \times C \to \overline{\mathbb{R}}$ dado por $\hat{f}(t, u) = f(t, u(t)) = f_t \circ \mathrm{ev}_t(u) \forall (t, u) \in T \times C$, sin embargo es difícil verificar que este funcional es un normal integrand sobre C (es decir, que sea $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(C), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-medible). Para evitar el problema de verificar esto es que en el teorema 4.21 no se consideró la hipótesis de que el integrand fuera normal, sino que cumpliera ciertas propiedades, pues estas propiedades serán más fáciles de verificar para $\hat{f}$, como se verá en la demostración del resultado a continuación.

Teorema 4.22 *Sea* $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *un normal integrand convexo y propio que cumple la siguiente condición de acotamiento, para cierta función* $\gamma \in L^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R}^n)$ *y* $\beta \in L^1(T, \mathcal{B}(T), \mu; \mathbb{R})$*:*

$$f_t(u) \geq \langle \gamma(t), u \rangle + \beta(t) \; \forall t \in T \; \mu - ctp \text{ y } \forall u \in \mathbb{R}^n. \tag{4.8}$$

Entonces la función $I_f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *está bien definida, es convexa, y se tiene que, dada una función* $g \in L^1(T, \mathcal{A}, \hat{\mu}; (0, +\infty))$*, para cualquier* $x \in C$ *se cumple la siguiente fórmula*

$$\partial I_f(x) = \bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ L \in \mathcal{F}(x)}} cl^{\|\cdot\|} \left(\int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} f(t, x(t)) ev_t + N_{L \cap dom\, I_f}(x)) \mathrm{d}\hat{\mu}(t) \right),$$

donde la multiaplicación dentro de la integral está dada por aplicaciones $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(M, \tau^{w^*}))$*-medibles, y la clausura es con respecto a la norma de* M*.*

Demostración. Si $\operatorname{dom} I_f = \emptyset$, entonces $I_f \equiv +\infty$, por lo que I_f está bien definida, es convexa y se cumple la igualdad pues ambos lados son vacíos. Si $\operatorname{dom} I_f \neq \emptyset$, por el teorema 3.18 (que se puede aplicar dado que la desigualdad 4.8 garantiza que $\operatorname{dom} I_{f^*} \neq \emptyset$) se tiene que I_f está bien definida, es convexa y es propia.
En lo que sigue consideraremos $x \in \operatorname{dom} I_f$, pues de lo contrario ambos lados de la igualdad son vacíos. Consideremos $\hat{f} : T \times C \to \overline{\mathbb{R}}$ dado por $\hat{f}(t, u) = f(t, u(t)) = f_t \circ \mathrm{ev}_t(u) \forall t \in T, u \in C$. Como la aplicación ev_t es lineal continua, tenemos que $\hat{f}$ es un integrand convexo y sci, y como f es un integrand propio, entonces $\hat{f}$ también es propio (basta considerar, para cada $t \in T$ y $v_t \in \operatorname{dom} f_t$, la función $v_t \phi \in C_c(T; \mathbb{R}^n)$, donde $\phi \in C_c(T; \mathbb{R})$ está dada por $\phi \equiv 1$ si T es compacto, en tanto si T no lo es entonces ϕ es la función continua que entrega el lema de Urysohn entre $\{t\}$ y $T \setminus U$ para $U \neq T$ una vecindad abierta precompacta de t, tal que $\phi(t) = 1$). Además, $\hat{f}$ cumple la desigualdad (4.7), dado que basta definir $\hat{\gamma} \in L^1(T, \mathcal{A}, \hat{\mu}; C^*)$ tal que $\hat{\gamma}(t) = \langle \gamma(t), \mathrm{ev}_t(\cdot) \rangle \; \forall t \in T$ y $\hat{\beta} = \beta \in L^1(T, \mathcal{A}, \hat{\mu}; \mathbb{R})$, y por (4.8) se obtiene dicha desigualdad. Veamos que es un normal integrand para todos los subespacios de dimensión finita. Sea $L \subseteq C$ un subespacio de dimensión finita, con $\mathrm{d} = \dim L$. Consideremos una base $\{\phi_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{d}}$ de L, es decir, para cualquier $u \in L$ existe $\{\lambda_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{d}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $u = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{d}} \lambda_\mathrm{i} \phi_\mathrm{i}$, y sea $A \in \mathcal{L}(L, \mathbb{R}^\mathrm{d})$ el isomorfismo asociado a esta base, es decir, $(A(u))_\mathrm{i} = \lambda_\mathrm{i} \; \forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, \mathrm{d}\}$. Consideremos también $E \in \mathcal{L}(L \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^\mathrm{d} \times \mathbb{R})$ el isomorfismo dado por $E(u, \alpha) = (A(u), \alpha)$. Definamos el integrand $h : T \times \mathbb{R}^\mathrm{d} \to \overline{\mathbb{R}}$ dado por $h(t, \lambda) = f(t, \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{d}} \lambda_\mathrm{i} \phi_\mathrm{i}(t))$. Entonces, para $\hat{f}|_L$, el epígrafo cumple que, para todo $t \in T$,

$$\begin{aligned} \operatorname{epi} \hat{f}|_L(t) &= \{(u, \alpha) \in L \times \mathbb{R} \mid f(t, u(t)) \leq \alpha\} \\ &= \{(u, \alpha) \in L \times \mathbb{R} \mid h(t, A(u)) \leq \alpha\} \\ &= \{(u, \alpha) \in L \times \mathbb{R} \mid E(u, \alpha) \in \operatorname{epi} h(t)\} \\ &= E^{-1}(\operatorname{epi} h(t)), \end{aligned}$$

en tanto para cada $O \subseteq L \times \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} (\operatorname{epi} \hat{f}|_L)^{-1}(O) &= \{t \in T \mid \exists (u, \alpha) \in O \text{ tal que } f(t, u(t)) \leq \alpha\} \\ &= \{t \in T \mid \exists (u, \alpha) \in O \text{ tal que } h(t, \lambda) \leq \alpha, \lambda = A(u)\} \\ &= \{t \in T \mid \exists (\lambda, \alpha) \in E(O) \text{ tal que } (\lambda, \alpha) \in \operatorname{epi} h_t\} \\ &= (\operatorname{epi} h)^{-1}(E(O)). \end{aligned}$$

Como la aplicación $(t, \lambda) \in T \times \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \to \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{d}} \lambda_{\mathrm{i}} \phi(t) \in \mathbb{R}^n$ es un integrand de Carathéodory, tenemos por la proposición 2.14 que h es un normal integrand, por lo que, como además E es un isomorfismo, se tiene que $\hat{f}|_L$ es un normal integrand.
Así, se cumplen las hipótesis del teorema 4.21 para el espacio de medida $(T, \mathcal{A}, \hat{\mu})$, por lo que tenemos que

$$\partial I_{\hat{f}}(x) = \bigcap_{\substack{\varepsilon>0 \\ L\in\mathcal{F}(x)}} \mathrm{cl}^{\|\cdot\|}\left(\int_T (\partial_{\varepsilon g(t)} \hat{f}(t, x) + N_{L\cap \operatorname{dom} I_{\hat{f}}(x)}) \mathrm{d}\hat{\mu}(t)\right),$$

donde la multiaplicación dentro de la integral está dada por aplicaciones $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(M, \tau^{w^*}))$-medibles.
Como $I_{\hat{f}} = I_f$, se puede reemplazar $\partial I_{\hat{f}}(x)$ por $\partial I_f(x)$ y $N_{L\cap \operatorname{dom} I_{\hat{f}}(x)}$ por $N_{L\cap \operatorname{dom} I_f(x)}$, por lo que para concluir solo falta verificar que $\partial_{\varepsilon g(t)} \hat{f}(t, x)$ es igual a $\partial_{\varepsilon g(t)} f(t, x(t))\mathrm{ev}_t \forall t \in T\, \mu-$ctp.
Consideremos $T_0 = \{t \in T \mid f(t, x(t)) < +\infty\}$, y sea $t \in T_0$. Por una parte, como $\hat{f}_t = f_t \circ \mathrm{ev}_t$, entonces, por la proposición 1.22, tenemos que $\mathrm{ev}_t^* \circ \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(\mathrm{ev}_t(x)) \subseteq \partial_{\varepsilon g(t)} \hat{f}_t(x)$, y observando que para cada $v \in \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x(t))$ y $u \in C$ se cumple que

$$(\mathrm{ev}_t^* \circ v)(u) = \langle v, \mathrm{ev}_t(u)\rangle = \langle v, u(t)\rangle,$$

entonces tenemos que $\mathrm{ev}_t^* \circ \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(\mathrm{ev}_t(x)) = \partial_{\varepsilon g(t)} f_t(x(t))\mathrm{ev}_t$, con lo que tenemos una inclusión. Para la otra inclusión, sea $\theta \in \partial_{\varepsilon g(t)} \hat{f}(t, x) \subseteq C^*$. Se cumple entonces que

$$f(t, \phi(t)) - f(t, x(t)) \geq \langle \theta, \phi - x\rangle - \varepsilon g(t)\ \forall \phi \in C. \tag{4.9}$$

De ahora en adelante, consideremos θ como un elemento de M (una medida de Radon con signo finita). Sea $v \in \operatorname{dom} f_t \subseteq \mathbb{R}^n$ fijo. Para $\alpha \in \mathbb{R}^n$, podemos considerar la función $\varphi_\alpha : T \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi_\alpha(s) = \begin{cases} v - x(t) & \text{si } s = t, \\ \alpha & \text{si } s \neq t. \end{cases}$$

Se tiene que se puede aplicar la desigualdad 4.9 para $\phi_\alpha = \varphi_\alpha + x$, a pesar de no estar en C. En efecto, claramente se tiene que $\phi_\alpha(t) = v$, que $\phi_\alpha \in \mathcal{L}^0(T, \mathcal{B}(T); \mathbb{R}^n)$ y que es acotada, por lo que, considerando que $|\theta|$ es una medida de Radon no negativa y finita, por la proposición 4.32 (ver sección de anexos 4.6), para cada $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$ existe una sucesión $(\phi_\nu^{\mathrm{i}})_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq C_0(T; \mathbb{R})$ tal que $\phi_\nu^{\mathrm{i}}(t) = v_{\mathrm{i}}\ \forall \nu \in \mathbb{N}$ y $\langle |\theta|, \phi_\nu^{\mathrm{i}}\rangle \to \int_T (\varphi_\alpha + x)_{\mathrm{i}}(s)\mathrm{d}|\theta|(s)$. Entonces, definiendo ϕ_ν como $(\phi_\nu)_{\mathrm{i}} = \phi_\nu^{\mathrm{i}}\ \forall \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $\phi_\nu \in C\ \forall \nu \in \mathbb{N}$, y además $\langle \theta, \phi_\nu - x\rangle \to \int_T \varphi_\alpha(s)\mathrm{d}\theta(s)$, dado que

$$\begin{aligned} |\langle \theta, \phi_\nu - x\rangle - \int_T \varphi_\alpha(s)\mathrm{d}\theta(s)| &= \left|\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \int_T (\phi_\nu^{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{i}} - (\varphi_\alpha)_{\mathrm{i}})(s) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}|\theta|}(s)\right) \mathrm{d}|\theta|(s)\right| \\ &\leq \left|\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \left(\langle |\theta|, \phi_\nu^{\mathrm{i}}\rangle - \int_T (\varphi_\alpha + x)_{\mathrm{i}}(s)\mathrm{d}|\theta|(s)\right)\right|, \end{aligned}$$

pues $\|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}|\theta|}(s)\|_\infty \leq 1\ \forall s \in T\ |\theta| -$ ctp. Así, tomando límite en ν, se concluye que:

$$f(t, v) - f(t, x(t)) \geq \langle \theta, \phi_\nu - x\rangle - \varepsilon g(t)\ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow f(t, v) - f(t, x(t)) \geq \int_T \varphi_\alpha(s)\mathrm{d}\theta(s) - \varepsilon g(t),$$

es decir,
$$f(t,v) - f(t,x(t)) \geq \langle \theta(\{t\}), v - x(t)\rangle + \langle \theta(T \setminus \{t\}), \alpha\rangle - \varepsilon g(t).$$
Como esta desigualdad es válida para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}^n$, entonces $\theta(T \setminus \{t\}) = 0$, pues de lo contrario esto implicaría que $f(t,v) = +\infty$, y como $v \in \operatorname{dom} f_t$ esto es una contradicción. De esta manera, se tiene entonces que

$$f(t,v) - f(t,x(t)) \geq \langle \theta(\{t\}), v - x(t)\rangle - \varepsilon g(t),$$

lo cual, como $v \in \operatorname{dom} f_t$ era arbitrario, implica que $\theta(\{t\}) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f(t,x(t))$. Por lo tanto

$$\theta(\phi) = \int_T \phi(s) \mathrm{d}\theta(s) = \langle \theta(\{t\}), \phi(t)\rangle \; \forall \phi \in C,$$

lo cual, como $\theta(\{t\}) \in \partial_{\varepsilon g(t)} f(t,x(t))$, implica que $\theta \in \partial_{\varepsilon g(t)} f(t,x(t))\mathrm{ev}_t$. Como $t \in T_0$ era arbitrario y $\mu(T \setminus T_0) = 0$, se tiene que $\partial_{\varepsilon g(t)} \hat{f}(t,x) = \partial_{\varepsilon g(t)} f(t,x(t))\mathrm{ev}_t \; \forall t \in T \; \mu-$ctp, con lo cual se concluye el resultado buscado dada la definición de integral de multiaplicaciones. □

Con esto concluye este capítulo, dado que la discusión sobre las hipótesis, resultados obtenidos y técnicas que se usaron en esta sección, además de la comparación con el otro método, se hará en el capítulo 5.

4.6. Resultados anexos

En esta sección presentamos algunos resultados que fueron usados en este método, cuya demostración no es trivial, por lo que, para no interrumpir el desarrollo, se enuncian y demuestran acá.

Para la demostración del siguiente lema necesitaremos los siguientes resultados. Primero, el teorema 3.28 de [2].

Proposición 4.23 *Sea X un espacio de Banach separable, y sea X^* su dual. Entonces, se tiene que $B_{X^*}(0,1)$ es metrizable para la topología τ^{w^*}.*

Además, necesitaremos las siguientes propiedades de los espacios de Suslin, que pueden ser encontrados en las proposiciones 7 y 8 de la sección 6 del capítulo IX de [1].

Proposición 4.24 *El producto de una familia numerable de espacios de Suslin, con la topología producto, es también un espacio de Suslin.*

Proposición 4.25 *Sea X un espacio topológico Hausdorff y $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión de subespacios topológicos Suslin de X. Entonces la unión y la intersección de los A_k son espacios de Suslin.*

De este modo podemos presentar y demostrar el siguiente lema.

Lema 4.26 *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces (X^*, τ^{w^*}) es un espacio de Suslin.*

Demostración. Tenemos que

$$X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{X^*}(0, n).$$

Con respecto a la topología τ^{w^*}, sabemos que $B_{X^*}(0,1)$ es un conjunto compacto y, por la proposición 4.23, también es metrizable, por lo que se deduce que es completo y separable, y así es un espacio polaco. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_{X^*}(0,n)$ es un espacio polaco, pues es homeomorfa a $B_{X^*}(0,1)$, así que en particular es Suslin. Así, como (X^*, τ^{w^*}) es Hausdorff, por el lema 4.25 se concluye que (X^*, τ^{w^*}) es también Suslin. □

Adicionalmente se puede presentar y demostrar este otro lema, el cual puede ser encontrado en el lema 3 de [20].

Lema 4.27 *Sea E un espacio de Suslin. Sea $(f_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in I}$ una familia de funciones continuas $f_{\mathrm{i}} : E \to \mathbb{R}\ \forall \mathrm{i} \in I$, la cual separa puntos de E, es decir, si $x \neq y$, entonces existe $\mathrm{i} \in I$ tal que $f_{\mathrm{i}}(x) \neq f_{\mathrm{i}}(y)$. Entonces, existe un conjunto numerable $D \subseteq I$ tal que la familia $(f_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in D}$ separa puntos de E.*

Demostración. Para un conjunto A, definamos $\Delta_A = \{(x,x) \,|\, x \in A\} \subseteq A \times A$. Consideremos para cada $\mathrm{i} \in I$ la función $f_{\mathrm{i}} \times f_{\mathrm{i}} : E \times E \to \mathbb{R}^2$ dada por $(f_{\mathrm{i}} \times f_{\mathrm{i}})(x,y) = (f_{\mathrm{i}}(x), f_{\mathrm{i}}(y)) \forall x, y \in E$. Como la familia separa puntos, entonces tenemos que, bajo esta notación:

$$(E \times E) \setminus \Delta_E = \bigcup_{\mathrm{i} \in I} (f_{\mathrm{i}} \times f_{\mathrm{i}})^{-1} (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_{\mathbb{R}}).$$

Por la proposición 4.24 tenemos que $E \times E$ es Suslin, por lo que existe un espacio polaco P y una función continua $k : P \to E \times E$ sobreyectiva. Para cada $\mathrm{i} \in I$, definamos

$$U_{\mathrm{i}} = (f_{\mathrm{i}} \times f_{\mathrm{i}})^{-1} (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_{\mathbb{R}}),$$

el cual claramente es un conjunto abierto, de modo que $k^{-1}(U_{\mathrm{i}})$ también es abierto. De este modo, como P es separable, existe un conjunto numerable $D \subseteq I$ tal que

$$\bigcup_{\mathrm{i} \in D} k^{-1}(U_{\mathrm{i}}) = \bigcup_{\mathrm{i} \in I} k^{-1}(U_{\mathrm{i}}).$$

Como k es sobreyectiva, esto implica que

$$\bigcup_{\mathrm{i} \in D} U_{\mathrm{i}} = \bigcup_{\mathrm{i} \in I} U_{\mathrm{i}},$$

con lo cual se obtiene que la familia $(f_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in D}$ separa puntos de E. □

Probaremos ahora que el espacio $C_0(T; \mathbb{R}^n)$ es separable. Primero, tenemos el siguiente resultado, que se puede encontrar en la sección 12.3 de [18], bajo el nombre de teorema de Riesz, y resulta como consecuencia del teorema de Stone-Weierstrass y el lema de Urysohn.

Teorema 4.28 *Sea T un espacio topológico compacto Hausdorff. Entonces $C(T;\mathbb{R})$ es separable (con la norma uniforme) si y solo si T es metrizable.*

Con lo anterior se puede demostrar el siguiente resultado de separabilidad de $C_0(T;\mathbb{R}^n)$.

Lema 4.29 *Sea T un espacio lcH tal que existe una sucesión de conjuntos compactos $(K_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ tales que $T = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} K_\nu$ y para cada $\nu \in \mathbb{N}$ se tiene que K_ν es metrizable y $K_\nu \subseteq \operatorname{int} K_{\nu+1}$. Entonces $C_0(T;\mathbb{R}^n)$ es un espacio separable (con la norma uniforme).*

Demostración. Observando que $C_0(T;\mathbb{R}^n) = C_0(T;\mathbb{R})^n$, entonces basta probar que $C_0(T;\mathbb{R})$ es separable para concluir. Además, como $C_c(T;\mathbb{R})$ es denso en $C_0(T;\mathbb{R})$ dado que T es lcH (proposición 1.50), entonces basta ver que $C_c(T;\mathbb{R})$ es separable para concluir. Observemos que para todo conjunto compacto $F \subseteq T$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $F \subseteq K_\nu$, puesto que, como $F \subseteq \bigcup_{\nu\in N} \operatorname{int} K_\nu$, entonces existe un conjunto finito I de $\mathbb{N}$ tal que $F \subseteq \bigcup_{\nu\in I} \operatorname{int} K_\nu$, de modo que considerando $\nu = \max I$ se cumple lo buscado. Veamos ahora que $C_c(T;\mathbb{R})$ es separable. Sea $\nu \in \mathbb{N}$. Como $K_{\nu+1}$ es compacto y metrizable, entonces $C(K_{\nu+1};\mathbb{R})$ es separable por el teorema 4.28. Sea entonces D_ν un conjunto denso numerable de $C(K_{\nu+1};\mathbb{R})$. Como T es $\sigma-$lcH, sabemos por el corolario 1.33 que T es normal, por lo que, por el lema de Urysohn, existe $\varphi_\nu : T \to [0,1]$ continua tal que $\varphi_\nu(t) = 1\, \forall t \in K_\nu$, $\varphi_\nu(t) = 0\, \forall t \in \operatorname{cl}(T \setminus K_{\nu+1})$ y $\varphi_\nu(t) \in [0,1]\, \forall t \in T$. Definimos entonces el conjunto de funciones $\tilde{D}_\nu$, donde $\phi \in \tilde{D}_\nu$ si y solo si existe $\psi \in D_\nu$ tal que

$$\phi(t) = \begin{cases} \varphi_\nu(t)\psi(t) & \text{si } t \in K_{\nu+1}, \\ 0 & \text{si } t \in T \setminus K_{\nu+1}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Se verifica que $\tilde{D}_\nu \subseteq C_c(T;\mathbb{R})$ y es numerable. Definiendo así $D = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \tilde{D}_\nu$, tenemos claramente que D es numerable. Veamos entonces que D es denso en $C_c(T;\mathbb{R})$. Sea $u \in C_c(T;\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, como $\operatorname{sop} u$ es compacto, por lo antes probado existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{sop} u \subseteq K_\nu \subseteq K_{\nu+1}$, de modo que $u|_{K_{\nu+1}} \in C(K_{\nu+1};\mathbb{R})$, por lo que existe $\psi \in D_\nu$ tal que $\sup_{x\in K_{\nu+1}} |u(t) - \psi(t)| \leq \varepsilon$. Entonces, para $\phi : T \to \mathbb{R}$ dado por la fórmula (4.10), se tiene que

$$|u(t) - \phi(t)| \leq \begin{cases} \varepsilon & \text{si } t \in K_\nu, \\ |\varphi_\nu(t)||0 - \psi(t)| \leq \varepsilon & \text{si } t \in K_{\nu+1} \setminus K_\nu, \\ 0 & \text{si } t \in T \setminus K_{\nu+1}, \end{cases}$$

lo que verifica la densidad de D sobre $C_c(T;\mathbb{R})$. □

Finalmente unos resultados de medibilidad usados durante este capítulo.

Lema 4.30 *Sea $(T,\mathcal{A})$ un espacio medible y $\psi : T \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $\psi(t) > 0\, \forall t \in T$. Entonces $\frac{1}{\psi}$ es medible.*

Demostración. Basta probar que $\left(\frac{1}{\psi}\right)^{-1}(-\infty, a) \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ para concluir. Sea

$a \in \mathbb{R}$ y $C_a = \left(\frac{1}{\psi}\right)^{-1}(-\infty, a)$. Si $a \leq 0$ entonces $C_a = \emptyset \in \mathcal{A}$, en tanto si $a > 0$, tenemos que $C_a = \phi^{-1}(\frac{1}{a}, +\infty) \in \mathcal{A}$ pues ψ es medible, por lo tanto, $\frac{1}{\psi}$ es medible. $\square$

Lema 4.31 *Sea $(T, \mathcal{A})$ un espacio medible y L un ev de dimensión finita. Sea $h : T \to L$ una función $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(L))$-medible. Entonces graph $h \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(L)$.*

Demostración. Primero veremos el caso $L = \mathbb{R}^n$. Observemos que, si definimos la función $F : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(t, u) = u - h(t)$, entonces se tiene que

$$\text{graph } h = F^{-1}(\{0\}).$$

Con lo anterior, si F es $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$-medible se tiene lo buscado. Para ver que F es medible, veremos que cada una de sus coordenadas es $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-medible. Tenemos que, para cada $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, n\}$, si definimos $F_\mathrm{i}^1, F_\mathrm{i}^2 : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$F_\mathrm{i}^1(t, u) = u_\mathrm{i}, F_\mathrm{i}^2(t, u) = -h_\mathrm{i}(t)\ \forall t \in T, u \in \mathbb{R}^n,$$

entonces se tiene que

$$F_\mathrm{i}(t, u) = F_\mathrm{i}^1(t, u) + F_\mathrm{i}^2(t, u)\ \forall t \in T, u \in \mathbb{R}^n.$$

De este modo, si F_i^1 y F_i^2 son medibles se tendrá que F es medible por suma de funciones medibles. Tenemos entonces que, para cualquier $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$(F_\mathrm{i}^1)^{-1}(A) = T \times \pi_\mathrm{i}^{-1}(A), (F_\mathrm{i}^2)^{-1}(A) = h_\mathrm{i}^{-1}(-A) \times \mathbb{R}^n,$$

donde π_i es la función proyección $\pi(u) = u_\mathrm{i}$. Como π_i es continua y h_i medible, se concluye lo buscado. Para el caso L ev de dimensión finita general, considerando $A \in \mathcal{L}(L, \mathbb{R}^n)$ un isomorfismo, con $n = \dim L$, basta definir las aplicaciones $\tilde{h} : T \to \mathbb{R}^n$ y $P : T \times L \to T \times \mathbb{R}^n$ dadas por $\tilde{h}(t) = A(h(t))$, $P(t, y) = (t, A(y))\,\forall t \in T, y \in \mathbb{R}^n$, de modo que graph $h = P^{-1}(\text{graph } \tilde{h})$, con graph $\tilde{h} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ por lo recién probado dado que $\tilde{h}$ es $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))-$medible, y además P es trivialmente una función $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(L), \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))-$medible. $\square$

Proposición 4.32 *Sea T un espacio $\sigma-$lcH. Sea θ una medida (no negativa) de Radon finita sobre $\mathcal{B}(T)$ y sea $t \in T$ fijo. Entonces, para cualquier función $\psi \in \mathcal{L}^0(T, \mathcal{B}(T); \mathbb{R})$ acotada, existe una sucesión de funciones continuas $\{\phi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq C_0(T; \mathbb{R})$ tal que $\phi_\nu(t) = \psi(t)\ \forall \nu \in \mathbb{N}$ y $\langle \theta, \phi_\nu \rangle \to \int_T \psi(s) \mathrm{d}\theta(s)$.*

Demostración. Sea $\psi \in \mathcal{L}^0(T, \mathcal{B}(T); \mathbb{R})$ acotada. Como θ es finita, entonces $\int_T \psi(s)\mathrm{d}\theta(s) \in \mathbb{R}$ (es decir, $\psi \in \mathcal{L}^1(T, \mathcal{B}(T), \theta; \mathbb{R})$). Para $\nu \in \mathbb{N}$, por el teorema de Lusin (teorema 1.58) tenemos que existen $\phi \in C_c(T; \mathbb{R})$ y $A \in \mathcal{B}(T)$ tales que $\theta(T \setminus A) \leq \frac{1}{\nu}$, $\phi(s) = \psi(s) \forall s \in A$, y $\|\phi\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty$. Tenemos entonces dos casos:

- Caso 1: $t \in A$. En este caso basta considerar $\phi_\nu = \phi$, de modo que $\phi_\nu(t) = \psi(t)$, y además:

$$|\langle \theta, \phi_\nu \rangle - \int_T \psi(s)\mathrm{d}\theta(s)| = \left| \int_{T \setminus A} (\phi(s) - \psi(s))\mathrm{d}\theta(s) \right| \leq \frac{2}{\nu} \|\psi\|_\infty.$$

- Caso 2: $t \in T \setminus A$. Sea $U_1 = T \setminus \{t\}$ y U_2 una vecindad abierta precompacta de t tal que, por regularidad de θ, cumple que $\theta(U_2 \setminus \{t\}) \leq \frac{1}{\nu}$. Como (U_1, U_2) es un recubrimiento abierto de T, entonces, por el teorema 1.35 (pues T es normal al ser $\sigma-$lcH), existen funciones continuas $g_1, g_2 : T \to [0,1]$ tales que $g_1(s) + g_2(s) = 1 \, \forall s \in T$, y $\operatorname{sop} g_1 \subseteq U_1$, $\operatorname{sop} g_2 \subseteq U_2$. De este modo, definiendo $\phi_\nu = g_1 \phi + g_2 \psi(t)$, tenemos que $\phi_\nu \subseteq C_0(T; \mathbb{R})$, por álgebra de funciones continuas y porque ϕ y g_2 tienen soporte compacto. Además, como $t \notin U_1$, entonces $\phi_\nu(t) = \psi(t)$, en tanto para θ se cumple que:

$$\begin{aligned}
|\langle \theta, \phi_\nu \rangle - \int_T \psi(s) \mathrm{d}\theta(s)| &= \left| \int_T g_1(s)(\phi(s) - \psi(s)) \mathrm{d}\theta(s) + \int_T g_2(s)(\psi(t) - \psi(s)) \mathrm{d}\theta(s) \right| \\
&\leq \|\phi - \psi\|_\infty \theta(T \setminus A) + 2\|\psi\|_\infty \theta(U_2 \setminus \{t\}) \\
&\leq \frac{4}{\nu} \|\psi\|_\infty.
\end{aligned}$$

En cualquiera de los dos casos se cumple que existe $M > 0$ tal que $|\langle \theta, \phi_\nu \rangle - \int_T \psi(s) \mathrm{d}\theta(s)| \leq M \frac{1}{\nu}$, que $\phi_\nu \in C_0(T; \mathbb{R})$ y también que $\phi_\nu(t) = \psi(t)$, por lo que se concluye lo buscado. $\square$

Capítulo 5

Discusión de resultados

En este capítulo se discutirán los principales puntos presentados en este trabajo. Para esto, llamaremos método 1 al método “Subdiferencial a partir de conjugadas de Fenchel”, sobre todo al teorema principal del capítulo 3, el teorema 3.18 y el corolario 3.19, en tanto llamaremos método 2 al método “Subdiferencial usando una fórmula del tipo Hiriart-Urruty-Phelps”, en especial al teorema principal del capítulo 4, el teorema 4.22.

Primero revisaremos las hipótesis. Por una parte, ambos métodos tienen en común que trabajan en el espacio $C_0(T;\mathbb{R}^n)$ cuando T es un espacio $\sigma-$lcH, considerando una medida μ regular estrictamente positiva y f un normal integrand que es convexo, propio y que está acotado inferiormente por un funcional lineal afín integrable (en el caso del método 1 la hipótesis $\operatorname{dom} I_{f^*} \neq \emptyset$ entrega esto). El método 1 pide la hipótesis adicional de que $\operatorname{dom} I_f \neq \emptyset$, lo cual es para no trabajar con la función idénticamente igual a $+\infty$, pero además pide otras hipótesis bastante fuertes, que pueden ser difíciles de verificar. Más detalladamente, la hipótesis de considerar que la multiaplicación $t \to \operatorname{cl}\operatorname{dom} f_t$ sea isc viene de dos hechos, el primero es para poder aplicar el teorema de selecciones continuas de Michael (teorema 1.49) y así usar el teorema 3.13, pero en segundo lugar también queremos que f tenga una estructura compatible con las funciones continuas, es decir, que su dominio tenga alguna especie de propiedad continua (la que entrega ser isc) y así permita que uno se pueda mover dentro de este dominio sin salirse del espacio $C_0(T;\mathbb{R}^n)$ y quedarse sin ninguna dirección de movimiento. También son bastante fuertes las hipótesis sobre el dominio de la función integral, es decir, las hipótesis $C(D_f) = \operatorname{cl}(\operatorname{dom} I_f \cap C(D_f))$ y $C(D_f) = \operatorname{cl}\operatorname{dom} I_f$, las cuales vienen tanto de lo antes descrito de poder moverse dentro de la estructura de f manteniéndose en $C_0(T;\mathbb{R}^n)$, como también del hecho de que si $y \in \operatorname{dom} I_f$, entonces $y(t) \in \operatorname{dom} f_t \forall t \in T\, \mu-$ctp, lo cual, como los conjuntos de medida nula suelen tener interior vacío cuando la medida es regular, esto podría implicar que $y(t) \in \operatorname{cl}\operatorname{dom} f_t = D_f(t)\ \forall t \in T$, por lo que $y \in C(D_f)$, motivando así a considerar la relación entre $C(D_f)$ y $\operatorname{dom} I_f$. Un estudio más acabado de estas últimas hipótesis, $C(D_f) = \operatorname{cl}(\operatorname{dom} I_f \cap C(D_f))$ y $C(D_f) = \operatorname{dom} I_f$, se pueden ver en la sección 4 de [11]. Por otra parte, el método 2 no pide ninguna hipótesis extra sobre el integrand o la función integral, ni siquiera pide que $\operatorname{dom} I_f$ sea no vacío para trabajar. Sin embargo, para poder aplicar los resultados de multiaplicaciones en espacios de Suslin se requiere una hipótesis adicional sobre el espacio T, que es la metrizabilidad sobre conjuntos compactos, puesto que de lo contrario no se puede asegurar que el conjunto $C_0(T;\mathbb{R}^n)$ sea separable. La hipótesis de la existencia de una sucesión de conjuntos compactos $(K_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ tales que $T = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} K_\nu$, y para cada $\nu \in \mathbb{N}$ se cumpla que $K_\nu \subseteq \operatorname{int} K_{\nu+1}$, está asegurada para un espacio $\sigma-$lcH, la hipótesis adicional viene del hecho de pedir que esta familia sea metrizable, lo cual se tiene directamente si T es metrizable, pero también hay casos en que esta hipótesis se cumple sin que T sea metrizable, por ejemplo para la topología τ^{w^*} del dual de un espacio de Banach.

Ahora revisaremos los resultados dados por cada método. Ambos métodos dan una fórmula explícita para los elementos de ∂I_f con la que se puede trabajar, pero tienen claras diferencias en su expresión. El método 1 da resultados muy explícitos y manejables, puesto que da una forma muy clara de los elementos del subdiferencial de la función integral, expresando claramente tanto su parte absolutamente continua como su parte singular a través de conjuntos dados por el normal integrand (el subdiferencial y el cono normal del dominio), los cuales se pueden conocer de manera previa en cada caso particular de integrand. Un problema es que la fórmula de la parte singular en términos del cono normal del dominio del integrand depende en medida de la misma parte singular, por lo que tal vez sea más cómoda la fórmula en términos del cono normal de la función integral, aunque esto requeriría trabajar de antemano este conjunto. Por otra parte, el método 2, si bien da resultados explícitos, estos pueden resultar muy difíciles de manejar, puesto que la fórmula del subdiferencial de la función integral entrega exactamente que los elementos serán selecciones de cierta multiaplicación, sin embargo esta multiaplicación puede ser muy difícil de manejar a priori. Primero, de manera similar al otro método, los elementos del subdiferencial de la función integral se expresan en términos del subdiferencial del integrand, lo cual no es problemático, pero también se expresan en términos del cono normal de la función integral intersectado con cualquier subespacio de dimensión finita, lo cual es algo que puede resultar un poco más difícil de calcular. Otras dificultades que se pueden apreciar para los elementos de ∂I_f son que, en primer lugar, estos se expresan a través de cualquier valor $\varepsilon > 0$ y cualquier sev de dimensión finita debido a la intersección, lo cual ya hace fijar ciertos parámetros previos al trabajar; en segundo lugar, estos elementos están en una clausura, por lo que se deben expresar a través de alguna caracterización de la clausura (sucesiones, redes o intersección de suma con una base de abiertos, por ejemplo); y finalmente, la que puede ser considerada la mayor dificultad, es que las selecciones que definen a estos elementos son integrables con respecto a la completación de la tribu boreliana (o tribu de Lebesgue) y no con respecto a la tribu boreliana en sí, dado que la teoría de multiaplicaciones en dimensión infinita requiere la completitud del espacio de medida, por lo que la selección podría no ser medible con respecto a los borelianos.

Lo último será revisar las técnicas usadas en cada método. En ambos métodos se requiere mucho manejo de la teoría de multiaplicaciones y selecciones, además de hacer uso de muchos resultados de medibilidad para trabajar en el espacio de medidas de Radon $M(T)^n$. Por una parte, para obtener el resultado del método 1 se trabaja con las conjugadas de Fenchel, pues se calcula la conjugada de la función integral, y a partir de dicha expresión se deduce una fórmula para el subdiferencial, y antes de llegar al espacio de las funciones continuas se estudian ciertos espacios descomponibles. Esto último significa que la estructura de los espacios de funciones y sus duales son cruciales para el desarrollo, dado que en el primer caso, de un espacio de funciones descomponible en dualidad con otro espacio de funciones descomponible, el hecho de que estos espacios sean descomponibles habla mucho de su estructura, la cual permite directamente aplicar el teorema de las selecciones medibles a través de la regla de intercambiabilidad. Ya en el caso L^∞, como es descomponible pero su dual no, se hace uso de la estructura específica que tiene el dual para así poder aplicar la regla de intercambiabilidad sobre la parte absolutamente continua, en tanto trabajar la parte singular aparte debido a la propiedad que la define. Finalmente, ya en el caso del espacio de funciones continuas, se hace uso de las propiedades pedidas en la hipótesis (dominio isc y las igualdades sobre $\operatorname{dom} I_f$) para demostrar directamente que el funcional J_{f^*} ahí definido tiene como conjugada a $I_f + \mathrm{i}_{C(D)}$, para lo cual se hace uso de la estructura que tiene $M(T)^n$ y del teorema de selecciones continuas de Michael (al hacer uso del teorema 3.13), en tanto para llegar a la fórmula de la conjugada buscada, se demuestra que J_{f^*} es sci (respecto a la topología τ^{w^*}), para lo cual se hace uso de resultados sobre funciones integrales con dominio de interior no vacío, los cuales permiten llegar a lo buscado dado que las hipótesis permiten definir ciertas perturbaciones ${}^{\varepsilon}f$ que cumplen dichas propiedades, de modo que la semicontinuidad inferior de sus funcionales $J_{{}^{\varepsilon}f^*}$ implican que J_{f^*} también es sci. En resumen, se hace mucho uso de la estructura de los espacios, de los teoremas de selecciones y de las fuertes hipótesis extra para obtener lo buscado. Por otra parte, para el método 2, se parte de una fórmula del tipo Hiriart-Urruty-Phelps para espacios de funciones constantes de dimensión finita, se aplican teoremas de extensión para generalizarlo a espacios de dimensión infinita y después se aplica al espacio de funciones continuas. Para el caso de dimensión finita se aplican directamente los teoremas de selecciones medibles, y luego se hacen ajustes necesarios para que las selecciones sean integrables y así el subdiferencial se pueda definir a través de integrales de multiaplicaciones, ajustes que solo se pueden aplicar gracias a la finito-dimensionalidad del espacio. Ya para extender estos resultados a un caso más general, el manejo de la teoría de multiaplicaciones sobre espacios de dimensión infinita es muy importante, además del manejo sobre la topología τ^{w^*} (con la cual el dual es Suslin), dado que el teorema de selecciones medibles en el caso Suslin permite demostrar el teorema de extensiones de Hahn-Banach medibles, y así generalizar el resultado a espacios de Banach constantes separables. Ya para aplicar el resultado al espacio de las funciones continuas, se requiere, al igual que el otro método, manejo sobre $M(T)^n$ y propiedades de las medidas para así obtener la expresión buscada. En resumen, la técnica principal que se usa es la teoría de multiaplicaciones en espacios de Suslin, para así traspasar las propiedades de dimensión finita a dimensiones infinitas, donde se requiere manejo de la topología τ^{w^*} y de la estructura de $M(T)^n$.

Dado lo dicho anteriormente, finalizaremos este capítulo con un resumen de la comparación entre ambos métodos. Primero, los dos métodos tienen similitudes en cuanto a que se hace uso de multiaplicaciones y de teoremas de selecciones para trabajar, por lo que tener un manejo en este tema y distintas variantes de teoremas de selecciones resulta ser muy necesario. Por otra parte, ambos métodos tienen diferencias notorias, tanto en las complejidades como en las técnicas usadas. Más específicamente, el método 1 pide hipótesis más fuertes y da resultados más explícitos y manejables, donde observamos que se trabaja con los borelianos, en tanto en las técnicas usadas se requiere mucha teoría de conjugadas y conocimiento de las estructuras del espacio de funciones continuas y su dual. Por otra parte, el método 2 pide hipótesis menos fuertes y da resultados explícitos pero más difíciles de manejar, donde observamos que se trabaja con la tribu de Lebesgue, en tanto sobre las técnicas usadas se requiere conocimiento de teoría de multiaplicaciones en dimensión infinita (lo cual explica la necesidad de la completitud del espacio de medida), pero también cierto manejo en extensiones de funcionales, lo cual se refleja en el teorema de extensiones de Hahn-Banach medibles.

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo consistía en desarrollar dos métodos para obtener el subdiferencial de las funciones integrales convexas definidas sobre espacios de funciones continuas. Se puede apreciar entonces que dicho objetivo se cumplió, dado que en el capítulo 3 se presentó y desarrolló el primer método, basado en el uso de conjugadas de Fenchel, en el capítulo 4 se presentó y desarrolló el segundo método, basado en la fórmula de Hiriart-Urruty-Phelps para el subdiferencial de la suma, y finalmente en el capítulo 5 se analizó y discutió sobre las hipótesis requeridas, resultados obtenidos y técnicas usadas en cada método, además de hacer una comparativa entre ambos métodos.

De este modo, las principales conclusiones de este trabajo se pueden resumir en tres puntos.

El primer punto es que este texto sirve como recopilación de los diferentes resultados sobre las funciones integrales en un solo documento, dado que todos ellos se encuentran dispersos en diferentes trabajos. Con esto, este trabajo puede servir como punto de partida para cualquier refinamiento o mayor desarrollo de los contenidos presentados en el área de las funciones integrales.

El segundo punto es el tema principal del trabajo, que es haber efectivamente presentado y desarrollado dos métodos para calcular el subdiferencial de las funciones integrales convexas sobre el espacio de las funciones continuas, además de haber analizado cada método y haberlos comparado con respecto a sus hipótesis, resultados y técnicas usadas, teniendo así la posibilidad de elegir un método con resultados muy manejables pero con hipótesis muy fuertes, o bien otro método con resultados más difíciles de manejar pero con hipótesis mucho más débiles.

El tercer y último punto es que todas las técnicas y resultados intermedios presentados en este trabajo quedan a disposición de futuros estudios, los cuales podrían ser trabajados en mayor detalle, o bien ser aplicados a trabajos específicos que los requieran. Entre las técnicas usadas destacan, en primer lugar, el uso de la teoría de multiaplicaciones y selecciones para obtener funciones que cumplan cierta propiedad requerida, por ejemplo al definir la multiaplicación de los conjuntos de nivel de un normal integrand y luego aplicar el teorema de selecciones medibles en espacios de dimensión finita, o bien trabajar con los grafos de una multiaplicación para obtener selecciones medibles en el caso Suslin con espacios de medida completos; en segundo lugar, el uso de la estructura de los espacios para calcular conjugadas de Fenchel; y en tercer lugar el uso de teoremas de extensiones medibles para generalizar resultados de dimensión finita a dimensiones infinitas con la topología τ^{w^*}. Por otra parte, entre los resultados intermedios presentados, destacan por una parte las fórmulas del subdiferencial de las funciones integrales sobre los espacios descomponibles, sobre el espacio L^∞ y sobre espacios de funciones constantes, y por otra parte destaca el nuevo resultado presentado, el teorema de extensiones de Hahn-Banach medibles, puesto que en el proceso de elaboración de este trabajo no se logró encontrar otros trabajos que hagan uso de un resultado de este tipo, por lo que es muy posible que pueda ser aplicado a otros trabajos que así lo requieran.

Para finalizar el trabajo, se puede pensar en proyecciones que se puedan generar a partir de este estudio. En primer lugar está la aplicación de las dos fórmulas principales presentadas a problemas de cálculo de variaciones o de control óptimo, lo cual no se hizo en este trabajo pues requiere tiempo, dado que hay que realizar ciertos ajustes para revisar que se cumplan las hipótesis necesarias, y además, una vez aplicadas estas fórmulas, hay que verificar si los resultados que se obtienen concuerdan con los resultados conocidos de dichas áreas. Por otra parte están las posibles generalizaciones de los resultados acá expuestos, por ejemplo al caso no convexo, lo cual resulta más complicado pues requiere usar alguna otra noción de subdiferencial menos manejable que el subdiferencial convexo (por ejemplo, el subdiferencial de Clarke). Y, como última proyección, tenemos lo dicho en el tercer punto antes expuesto, que es la posible aplicación de algunos de estos resultados a otros trabajos, por ejemplo encontrar alguna posible aplicación del teorema de extensiones de Hahn-Banach medibles a algún problema de teoría de la medida o de otra área, incluso si no está relacionado a las funciones integrales.

Bibliografía

[1] N. Bourbaki. *Topologie Générale, Chapitres 5 à 10*. Éléments de Mathématique. Springer, Paris, réimpression inchangée de l'édition originale de 1974 edition, 2007.

[2] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[3] C. Castaing. Sur les multi-applications measurables. *Revue française d'informatique et de recherche opérationelle, tome 1, n° 1*, pages 91 – 126, 1967.

[4] C. Castaing and M. Valadier. *Convex analysis and measurable multifunctions*, volume 580 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[5] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[6] G. B. Folland. *Real analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wilev-Inlerscience Series 01 Texts, Monographs, and Tracts. John Wiley & Sons Inc., New York, 2nd edition, 1999.

[7] A. Hantoute and A. Jourani. Hiriart-Urruty–Phelps-like formula for the subdifferential of integral sums. *Vietnam J. Math.*, 2018.

[8] J.-B. Hiriart-Urruty and R.R. Phelps. Subdifferential calculus using ε-subdifferentials. *Journal of Functional Analysis*, 118:154 – 166, 1993.

[9] E. Michael. Continuous selections. *Ann. of Math.*, 63(2):361 – 382, 1956.

[10] J. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., 2nd edition, 2000.

[11] A.-P. Perkkiö. Conjugates of integral functionals on continuous functions. *arXiv:1701.03745*, 2017.

[12] R. T. Rockafellar. Integrals which are convex functionals. *Pacific J. Math.*, 24:525 – 539, 1968.

[13] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*, volume 28 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[14] R. T. Rockafellar. Convex integral functionals and duality. In E. H. Zarantonello, editor, *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, pages 215 – 236. Academic Press, Inc., New York, 1971.

[15] R. T. Rockafellar. Integrals which are convex functionals. II. *Pacific J. Math.*, 39:439 – 469, 1971.

[16] R. T. Rockafellar. *Conjugate duality and optimization.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1974.

[17] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. *Variational analysis*, volume 317 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[18] Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real Analysis.* Prentice Hall, 4th edition, 2010.

[19] John Toland. *The dual of $L_\infty(X, \mathcal{L}, \lambda)$, finitely additive measures and weak convergence.* SpringerBriefs in Mathematics. Springer, 2010.

[20] M. Valadier. Convex integrands on Souslin locally convex spaces. *Pacific J. Math.*, 59(1):267 – 276, 1975.

[21] C. Zalinescu. *Convex Analysis in General Vector Spaces.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2002.