



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE DIFUSIÓN DE AGUA PARA RIEGO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS
APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERA CIVIL MATEMÁTICA

EVELYN CATALINA LORCA MARDONES

PROFESOR GUÍA:
DAVID SALAS VIDELA

PROFESOR CO-GUÍA:
SEBASTIAN DONOSO FUENTES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JORGE AMAYA ARRIAGADA
DIEGO MUÑOZ CARPINTERO

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por FONDECYT iniciación 11220586
ANID-Chile, y Proyecto Interdisciplinario UOH MSM2021003, Universidad de O'Higgins.
CMM ANID BASAL FB210005.

SANTIAGO DE CHILE
2023

Resumen

Debido al contexto global de escasez hídrica y en particular en la Región de O’Higgins de Chile, es necesario reducir el consumo de agua, especialmente en actividades de alta demanda, como es el sector agrícola, implementando políticas de riego eficientes. Para ello se necesita tener descrita la dinámica de difusión del agua en suelos en un software de libre manipulación.

La ecuación de Richards, describe la dinámica del agua en suelos no saturados en 1D. Posteriormente esta formulación se extendió a 3D, teniendo una escritura compacta:

$$\frac{\partial\theta(h)}{\partial t} = \nabla \cdot K(h)(\nabla h + \nabla z) - S$$

Donde θ es el contenido de agua volumétrico; h el cabezal hidráulico; K es el tensor de conductividad hidráulica; S representa la extracción de agua por la planta; t el tiempo; z el eje espacial vertical.

Se considera un volumen de suelo, este es subdividido en pequeños volúmenes, en los cuales es medido el cambios de contenido de agua empleando la ecuación de Richards. Se hace un corte transversal a este volumen, quedando una sección rectangular de suelo, formada de pequeños cubos, obteniendo el Modelo 2D. Con otro corte transversal, se obtiene una columna de suelo, formada de pequeños cubos, dando origen al Modelo 1D.

El Modelo 2D en revolución es una solución al Modelo 3D. Por lo que los esfuerzos de este trabajo van dirigidos a una buena implementación del Modelo 2D.

Para dar solución a la EDP descrita, se plantea su solución mediante Diferencias Finitas.

Inicialmente se resuelve el problema 1D, planteando distintas alternativas: Método explícito; Método Implícito en 2 enfoques, llamándolos “Modelo Implícito Enfoque Newton” y “Modelo Implícito Enfoque Quasi-Newton”; y llevar la ecuación del Método Implícito a una ecuación lineal con 2 esquemas distintos, llamándolos “Modelo Linealizados”. Estas son implementadas numéricamente y simuladas con parámetros obtenidos del trabajo de Celia [2].

Con los resultados de la implementación 1D, se concluye que los modelos a implementar en 2D son: Implícito Enfoque Newton, por su coherencia con los resultados esperados; y el Linealizado Esquema 1, por concordar con el primero, con *performance* bastante menor.

Se obtiene resultados similares a los obtenidos en 1D, concluyendo que el Modelo Linealizado 2D es un muy buen método para modelar la difusión de agua en suelos para riego, siendo escogido para ser llevado a una etapa de producción futura. Su eficiencia en *performance* permite vislumbrar la posibilidad de integrar modelos de aprendizajes como perspectiva futura.

Dedico este trabajo a mi queridísima hija Eluney, quien me dió las energías de reanudar mis sueños y luchar por ellos.

“Y cuando el cuento casi esté por terminar, nos inventamos un final con más colores” (La vida está por empezar, Marta Gómez).

Agradecimientos

En este hito tan importante de mi vida, quiero agradecer a todas las personas que han estado en mi vida en el transcurso de estos años de aprendizajes universitarios y mi paso obligado por aprendizajes personales.

Doy gracias a mi familia por estar a mi lado, en especial a mis hermanas y madre que han invertido tiempo personal en apoyarme en el cuidado de mi hija en oportunidades de apuros.

Agradezco la ayuda de Camila Dinamarca en tiempos de pandemia, en los cuales me encontré desprovista de redes de apoyo, y ella me extendió su apoyo en el cuidado de mi hija y en otras labores fundamentales para la continuación de mis estudios, sin su ayuda hubiera sido imposible.

Doy gracias a mis amigas y amigos, en especial a Claudia Reyes por ser mi amiga más leal, que con el transcurso de los años sigue siendo un punto de parada necesario cada vez que necesito descansar mis aguas. También agradezco especialmente a mi querida amiga Eloisa Soto, con quien encuentro una complicidad única, y con quien puedo contar cada vez que necesito una distensión o hablar de las profundidades de la Selva Subterránea.

También, quiero agradecer profundamente a mis compañeros de la generación del “hippie”, quienes con su simpatía y simplicidad lograron que por primera vez me sintiera cómoda en el departamento. En especial a mis compañeros que más admiré y me sirvieron de inspiración, el “hippie” y la Tabita, quién además ha sido una gran amiga y mi “angelito” en el DIM.

Además, doy mis agradecimientos a todas aquellas personas que fueron de ayuda en este proceso, cómo olvidar la gran ayuda de Natacha Astromujoff, quién ha sido la persona con mayor empatía que he encontrado, siempre solucionando problemas administrativos y ofreciendo su ayuda en todo momento. Y a mis queridísimas secretarías del “cuarto”, Silvia y Karen, quienes siempre tenían un saludo diario lleno de simpatía hacia mi persona, regalándome un ambiente tan grato; y siempre dispuestas a ayudar con suma eficiencia.

Quiero agradecer cariñosamente a mi querida hija Eluney por ser “suficientemente buena”, siempre intentando entregar comprensión en aquellas situaciones extremas en que debía enviar trabajos y ella debía entretenerse sin mi mayor atención.

Agradezco además a Duvan Henao, quién prestó su asesoría en un momento de estancamiento en este trabajo, siendo de gran utilidad.

Finalmente quiero agradecer a los profesores miembros de la comisión, en especial a David Salas, por su apoyo, paciencia y comprensión en todos estos meses de trabajo. Y a FONDECYT iniciación 11220586 ANID-Chile, y Proyecto Interdisciplinario UOH MSM2021003.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
2. Marco Teórico	2
2.1. Modelo de difusión del agua en suelos	2
2.1.1. Perfil de Suelo	4
2.1.2. Definiciones y conceptos previos	5
2.1.3. Ecuaciones de Difusión del agua	6
2.1.4. Relación entre Cabezal Hidráulico y Contenido de Agua Volumétrico	7
2.2. Método de Diferencias Finitas	9
3. Modelo 1D	10
3.1. Ecuación 1D	11
3.2. Esquema Explícito	11
3.3. Esquema Implícito	19
3.3.1. Enfoque Newton	20
3.3.2. Enfoque Quasi-Newton	23
3.3.3. Modelo Linealizado	25
3.4. Resultados Modelos 1D	31
3.5. Discusión y análisis de Resultados	37
3.5.1. Simulación 1	37
3.5.2. Simulación 2	38
3.5.3. Simulación 3	39

3.5.4.	Simulación 4	39
3.5.5.	Simulación 5	40
3.5.6.	Simulación 6	41
3.5.7.	Análisis General	41
4.	Modelo 2D	43
4.1.	Ecuación 2D	43
4.2.	Discretización 2D	44
4.3.	Condiciones de borde	44
4.4.	Modelos de Implementación	46
4.4.1.	Enfoque Newton	47
4.4.2.	Modelo Linealizado	51
4.5.	Casos de estudio y simulación	58
4.6.	Discusión y análisis de Resultados	79
4.6.1.	Simulación Pequeña 1	79
4.6.2.	Simulación Pequeña 2	79
4.6.3.	Simulación Pequeña 3	80
4.6.4.	Simulación Mediana 1	81
4.6.5.	Simulación Mediana 2	81
4.6.6.	Simulación Mediana 3	82
4.6.7.	Simulación Mediana 4	82
5.	Conclusión	84
	Bibliografía	87

Capítulo 1

Introducción

Uno de los problemas fundamentales de la agricultura es establecer políticas de riego eficientes [15]. Debido al estrés hídrico en que se encuentra Chile [6] desde los últimos 10 años, este problema se ha vuelto aún más relevante, sobre todo en la zona central del país.

Una política de riego es el problema de decisión de cuándo y cuánto regar. Para medir cuán compatible es la política de riego con la plantación que se está regando, se mide indirectamente la humedad del suelo. Dependiendo de estos niveles de humedad la plantación tiene, o no, éxito en su cultivo. Si es muy baja, las raíces de las plantas son incapaces de extraer agua. Por el contrario, si es muy alta, esto puede ahogar la plantación. Esto traduce el problema de riego eficiente en un problema de control óptimo: mantener los niveles de humedad del suelo dentro de los niveles admisibles utilizando la menor cantidad de agua posible.

Para poder enfrentar el problema de riego eficiente antes mencionado, es necesario poder describir de manera correcta la dinámica con la cual el agua se difunde en el suelo y la dinámica de absorción inducida por las raíces de las plantas. Este trabajo de tesis se enmarca en la primera componente, es decir, en la tarea de describir la dinámica con que se difunde el agua en suelos.

Para el cumplimiento de la tarea antes mencionada, esta tesis extrae y expone los modelos físicos de la difusión de agua en el suelo presentes en la literatura. Estos se constituyen en ecuaciones diferenciales parciales, que no cuentan con solución analítica explícita. En base a estos modelos físicos, se implementan varios métodos de resolución numérica a través de diferencias finitas, los cuales son comparados, tanto en resultados, como en *performance*, para posteriormente concluir cuál método cumple con buenos resultados numéricos y buenos tiempos de ejecución. El trabajo concluye con un *software* abierto de difusión de agua en suelos, manipulable por el equipo del proyecto interdisciplinario UOH MSM2021002 de la Universidad de O'Higgins, que busca en el largo plazo, contribuir a resolver el problema de la política de riego.

Es importante destacar que hoy en día existen *softwares* pagos que describen la dinámica del agua en suelos. Por tanto el objetivo principal de esta tesis es encontrar un modelo confiable y eficiente, que cuyo *software* resultante sea de libre acceso para los investigadores de la Universidad de O'Higgins, para su uso en optimización de agua de riego.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Modelo de difusión del agua en suelos

El objetivo general de este trabajo es modelar numéricamente el comportamiento del movimiento de agua en el suelo a través del tiempo. En lo que sigue se describirá brevemente el modelo de suelo ocupado en el área de agronomía, principalmente descrito en [11].

El suelo, como medio poroso, tiene la capacidad de dejar pasar agua en su interior. El agua no permanece estática dentro del suelo, sino que se mueve en respuesta a cambios de potenciales energéticos en el suelo, los cuales dependen a su vez de las propiedades del suelo donde se esté llevando a cabo la infiltración de agua.

Para llevar a cabo este modelamiento se considera un volumen de control en estudio; una región del plano o del espacio a través de la cual circula o se infiltra el fluido. Matemáticamente, un volumen de control es un conjunto no vacío de \mathbb{R}^3 , limitado por una superficie cerrada llamada superficie de control. El fluido, en este caso agua, puede entrar y salir del volumen de control debido a diferentes fenómenos. Las principales componentes del balance hídrico consideradas en la agricultura son, P: precipitación; I: riego; E: evapotranspiración; R: escorrentía; D: percolación profunda o drenaje. Estas componentes son entonces las responsables del cambio en la cantidad o contenido de agua, dentro del volumen de control, y cada una tiene asociadas ecuaciones físicas que explican la dinámica del agua a partir de estos fenómenos. Este trabajo se concentra en las componentes de riego y percolación o drenaje.

Para llevar a cabo el estudio del balance hídrico en el suelo, se parcela el Volumen de control en pequeños volúmenes llamados *volumen representativo elemental* (VPR), definido en mas detalle posteriormente en este capítulo, en los cuales se implementan las ecuaciones físicas que explican la dinámica del agua en el suelo. El modelo de VPR se ilustra en la figura 2.1.

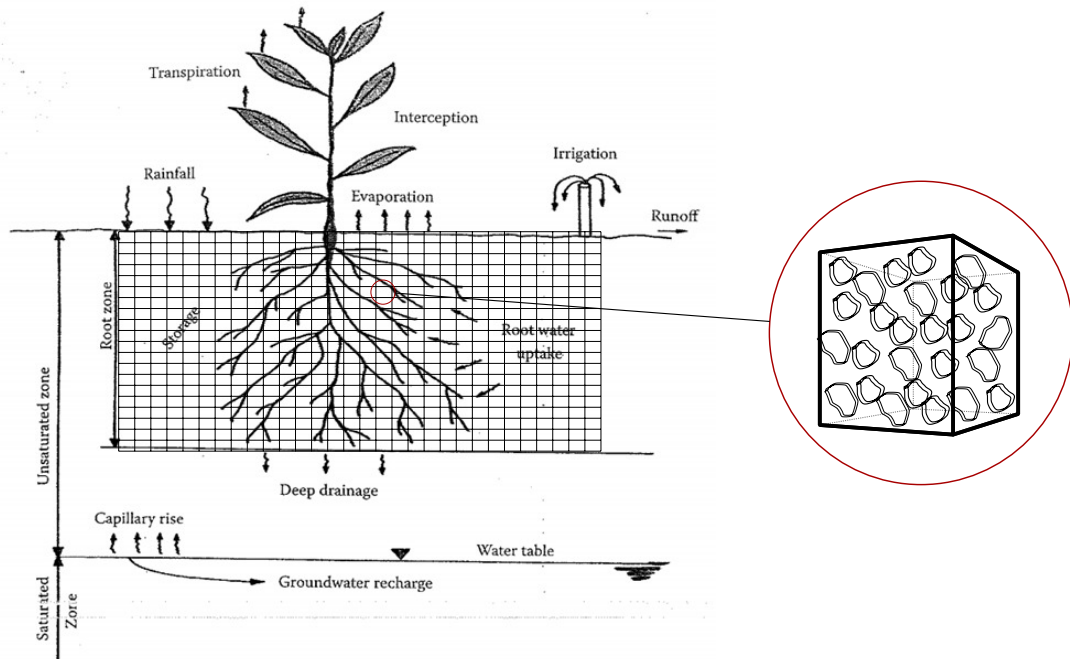


Figura 2.1: Representación gráfica de la subdivisión del Volumen de control en VPR's (imagen de [11] modificada). Además se aprecia un acercamiento a uno de los VPR's, para ilustrar la existencia de partículas sólidas, de aire y de agua en su interior.

El suelo es un material poroso compuesto de sólidos, aire y agua. Tanto el aire como el agua están presentes en distintas medidas en los espacios interiores o poros. Describir la difusión de agua en el suelo corresponde a describir la evolución del contenido de agua en los VPR a través del tiempo. Consistentemente, se dice que una parte del suelo está saturada si la proporción de agua que contienen los VPR es máxima. Formalmente:

Definición 2.1 (Volumen Representativo Elemental VRP) *Se define el volumen representativo elemental como el volumen inicial (el más pequeño) en que una de las propiedades físicas de densidad de suelo, comienza a ser relativamente constante al ir incrementando este volumen, o área, de muestreo.*

Definición 2.2 (Suelo (no) saturado:) *Se dice que el suelo está saturado, si los poros de este están completamente llenados de agua.*

Contrariamente, se dice que el suelo está no saturado, si los poros están llenados parcialmente con agua, y el resto con aire.

Además, si el agua en el suelo está a una presión mayor que la del aire que lo rodea, entonces se dice que el suelo está efectivamente saturado, aunque haya aire o gas atrapado en el sistema.

2.1.1. Perfil de Suelo

El suelo se define como la capa exterior degradada y fragmentada de la superficie de la tierra. El Perfil de Suelo consiste en una sucesión de horizontes que se pueden (más o menos) diferenciar por distintas propiedades. La composición del Perfil de Suelo depende de: el clima que existió durante el proceso de formación de suelo, el material parental, la vegetación, la topografía y el tiempo.

El suelo puede entonces ser estudiado tanto desde su composición geológica, como desde el régimen de agua (ver Figura 2.2).

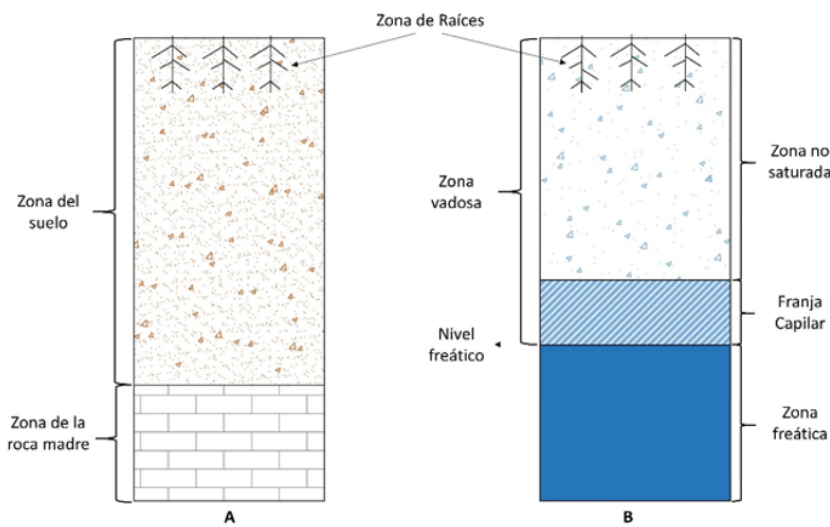


Figura 2.2: Perfil de Suelo. En A se muestra la composición geológica del perfil de suelo. En B se muestra los regímenes hídricos del perfil de suelo. (imagen extraída de [14])

Un Perfil Hidrológico está compuesto de la zona Vadosa y la zona Freática. La zona Vadosa comprende desde la superficie terrestre hasta el nivel Freático, por lo que incluye la zona de las raíces de las plantas, la zona no saturada y la franja capilar. La franja capilar es una zona saturada bajo tensión que bordea la napa freática. La napa freática se define como aguas subterráneas que pueden tener cientos de metros de profundidad.

Algo importante de mencionar para el entendimiento de la diferencia de las zonas en el perfil hidrológico, es que el agua se encuentra a presión atmosférica en la interfaz entre la franja capilar y la napa Freática. Por lo tanto, sobre el nivel Freático el agua está bajo tensión (las fuerzas que se ejercen sobre la partícula de agua apuntan hacia afuera de ella) y bajo el nivel Freático el agua está bajo presión (las fuerzas que se ejercen sobre la partícula de agua apuntan hacia su interior). Para ilustrarlo mejor, se observa la Figura 2.3.

Sobre el contorno de la franja capilar el suelo está no saturada. En la napa freática el agua se encuentra saturada, lo que quiere decir que el sistema poroso o suelo se encuentra sólo con agua (sin aire) y bajo presión. El modelo de riego, se ubica principalmente en la zona Vadosa del perfil de suelo.

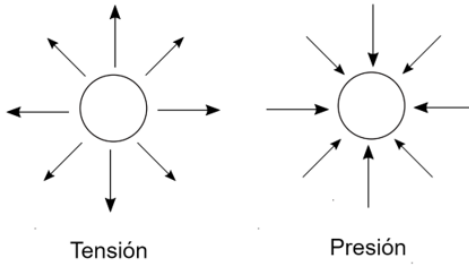


Figura 2.3: Ilustración diferencia entre Tensión y Presión sobre una partícula de agua, donde los círculos representan partículas de agua y las flechas representan la dirección de las fuerzas ejercidas a dicha partícula en cada caso.

2.1.2. Definiciones y conceptos previos

Se definen las siguientes nociones de densidad de suelos para ser utilizadas en conceptos posteriores.

Definición 2.3 (Densidad de partículas:) *Mide la densidad de las partículas sólidas con respecto al volumen que ocupan estas. Se define mediante la siguiente expresión:*

$$\rho_p = \frac{\text{Masa de los sólidos [g]}}{\text{Volumen de los sólidos [cm}^3\text{]}}$$

Definición 2.4 (Densidad Aparente:) *Mide la densidad de las partículas sólidas en el suelo. Se calcula mediante la siguiente expresión:*

$$\rho_b = \frac{\text{Masa de los sólidos [g]}}{\text{Volumen de los sólidos + espacio poroso [cm}^3\text{]}}$$

Definición 2.5 (Contenido de agua Volumétrico:) *Mide la cantidad de agua por volumen de suelo, es a-dimensional y se calcula mediante la siguiente expresión:*

$$\theta = \frac{\text{Volumen de agua [cm}^3\text{]}}{\text{Volumen total [cm}^3\text{]}}$$

Atendiendo a la última definición, es posible introducir una medida o proporción de qué “tan saturado o no” se encuentra una porción de suelo.

Definición 2.6 (Saturación Efectiva (S_e):) *La saturación efectiva o reducción del contenido de agua, se define (según el modelo van Genuchten [16] [7]) como:*

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$$

Donde θ_s es el contenido volumétrico de agua en saturación (el mayor contenido de agua que podría alcanzar el tipo de suelo en el que se están realizando las mediciones), y θ_r es el contenido de agua residual (el contenido de agua que se tiene al extraer la mayor cantidad posible de agua a través de ciertos procesos, que no son de real relevancia para este trabajo de tesis).

2.1.3. Ecuaciones de Difusión del agua

Los modelos de difusión de agua se plantean como ecuaciones diferenciales en términos del estado energético del suelo. Para esto se utiliza lo que se conoce como cabezal de presión, que mide el efecto de las fuerzas de atracción del agua por la superficie de las partículas sólidas del suelo, y a las fuerzas de atracción molecular entre las propias moléculas de agua.

Definición 2.7 (Cabezal de presión o Potencial Mátrico (h):) *Se define como el trabajo que habría que suministrar a una unidad de masa de agua “ligada” a partículas de suelo o a los tejidos de una planta, para llevarla de este estado de unión a un estado de referencia, considerando sólo las interacciones entre partículas, sin considerar la gravedad.*

El estado energético del agua se mide finalmente considerando el cabezal de presión y el efecto de la gravedad simultáneamente.

Definición 2.8 (Cabezal Hidráulico (H):) *Es el estado energético del agua en el suelo, se define por su equivalente, la energía potencial. Por tanto, se obtiene el Cabezal Hidráulico sumando el potencial Mátrico (h) y el potencial gravitacional (z):*

$$H = h + z$$

Las ecuaciones físicas principales que estudian la evolución del cabezal hidráulico en el perfil de suelo son:

- **Ecuación de Darcy:**

La ecuación de Darcy es una expresión construida de manera empírica por Henry Darcy, 1856 [4], posteriormente demostrada de manera teórica por S. P. Neuman (Acta mechanica, 1977 [8]).

La ecuación de Darcy modela el flujo de agua unidimensional (velocidad por unidad de tiempo), q , que atraviesa una sección de área A , y largo L de suelo saturado de agua, mediante la siguiente expresión:

$$q = \frac{Q}{A} = -K_s \frac{\Delta H}{L} \quad (2.1)$$

Donde K_s es una constante empírica llamada conductividad hidráulica y H es el cabezal hidráulico.

De manera más general, considerando una evolución 3-dimensional, la ecuación de Darcy puede ser escrita como:

$$q = -K_s \nabla H \quad (2.2)$$

Donde: q es el vector de flujo, $H = h + z \in \mathbb{R}^3$, y K es el tensor de conductividad hidráulica.

- **Ecuación de Buckingham-Darcy:**

La ecuación de Buckingham-Darcy es una generalización de la ecuación de Darcy para suelos no saturados. En el caso unidimensional, se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$q = -K(h) \frac{\Delta H}{L} \quad (2.3)$$

$K(h)$ es la conductividad hidráulica para suelos no saturados (dependiente del cabezal de presión); $q = Q/A$ [(cm^3/s)/ $cm^2 = cm/s$].

- **Ecuación de Richards:**

La ecuación de Richards estudia la variación del contenido de agua volumétrico (θ) en el tiempo en suelos no saturados.

Se deduce a partir de la ecuación de continuidad o conservación de masas y la ecuación de B-D 2.3. La ecuación de conservación de masas dice que el flujo que entra en un volumen en un pequeño intervalo de tiempo Δt , debe ser igual al volumen que sale más el cambio de almacenamiento dentro y cualquier fuente o sumidero (extracción de agua por la planta):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} + S = 0 \quad (2.4)$$

Empleando la ecuación de Buckingham-Darcy 3-dimensional en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación de Richards:

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \nabla \cdot K(h)(\nabla h + \nabla z) - S. \quad (2.5)$$

Vale la pena notar que $\nabla z = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, pues el efecto de la gravedad sólo depende de la altura.

2.1.4. Relación entre Cabezal Hidráulico y Contenido de Agua Volumétrico

Para recuperar el contenido de agua volumétrico a partir de las ecuaciones diferenciales recién presentadas, se ocupa la *curva característica del suelo*.

Definición 2.9 (Curva Característica del suelo:) *La curva característica del suelo relaciona empíricamente el cabezal de presión h , con el contenido de agua volumétrico del suelo θ .*

La Figura 2.4 expone una representación gráfica de la relación entre cabezal de presión y contenido de agua volumétrico en escala logarítmica.

La curva característica se puede expresar de manera analítica, ajustando modelos paramétricos que relacionan el cabezal de presión h , la conductividad hidráulica K y el contenido de agua volumétrico θ . En el desarrollo de los modelos planteados a lo largo de este trabajo de tesis, se considera el modelo de van Genuchten [16] [7], por el gran reconocimiento que se le

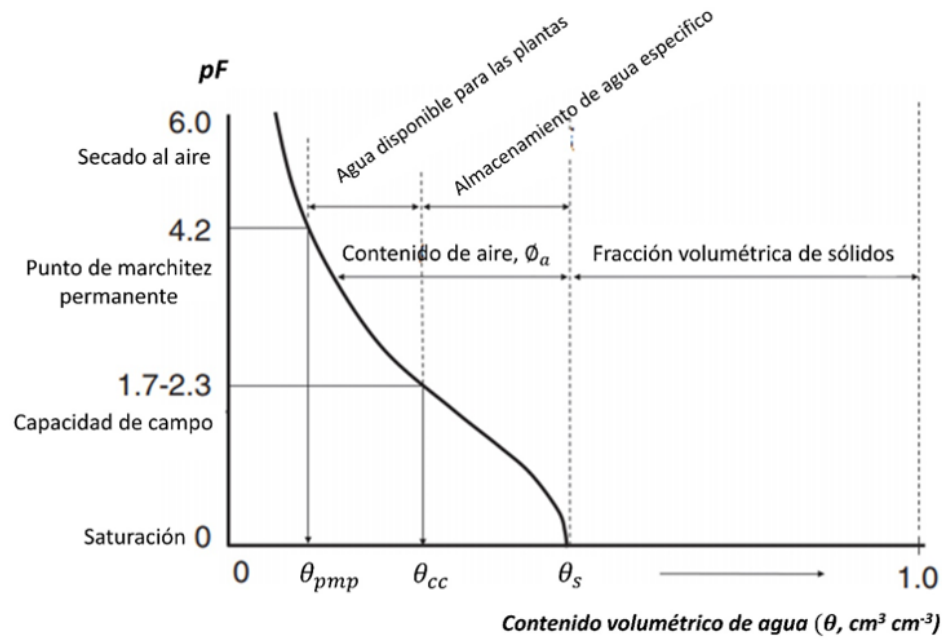


Figura 2.4: θ_{pmp} : punto de marchites permanente. θ_{cc} : capacidad de campo. θ_s : contenido de agua en saturación. (imagen extraída de [14]).

tiene a este modelo en la literatura. Este consiste en la siguiente expresión que relaciona h y θ :

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_r + \left(\frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + |\alpha h|^n)^{(n-1)/n}} \right) & , h < 0 \\ \theta_s & , h \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Donde: θ_r es el contenido de agua residual, θ_s es el contenido de agua en saturación, n es un parámetro propio del tipo de suelo asociado a la distribución de tamaño de poros, α es también un parámetro propio del suelo, relacionado al tipo de partículas primarias.

Por último, para la implementación es necesario conocer cómo calcular la conductividad hidráulica, La cual está dada en el modelo de Van Genuchten:

$$K(h) = \begin{cases} K_s (S_e)^l \left[1 - (1 - S_e^{n/(n-1)})^{\frac{n-1}{n}} \right]^2 & , h < 0 \\ K_s & , h \geq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

S_e la saturación efectiva de la Definición 2.6. Aquí, $m = 1 - \frac{1}{n}$, $n > 1$ y l parámetros dependientes de las características del tipo de suelo.

2.2. Método de Diferencias Finitas

Para la resolución numérica de la EDP (ecuación 2.5), se utiliza el método de diferencias finitas.

El método de diferencias finitas consiste, a grandes rasgos (si se desea profundizar más consultar [5]), en la aproximación de la derivada a través de la expansión en serie de Taylor:

$$u(x \pm \xi) = u(x) \pm \xi u'(x) + o(\xi)$$

Con lo que la derivada se puede aproximar de las siguientes maneras mediante diferencias finitas:

- Forward: $\frac{u(x+\xi)-u(x)}{\xi}$
- Backward: $\frac{u(x)-u(x-\xi)}{\xi}$
- Centrada: $\frac{u(x+\xi)-u(x-\xi)}{2\xi}$

Además si u es dependiente tanto del espacio como del tiempo $u(x, t)$, entonces al hacer la derivada en el espacio se puede hacer la aproximación dejando el tiempo en el nivel actual de tiempo, llamado esquema explícito, o en el nivel siguiente de tiempo, llamado esquema implícito.

En el caso de la ecuación de Richards, la variable incógnita es el cabezal de presión h . Dada una coordenada espacial x y un tiempo t , habrá una medición diferente del cabezal de presión, es decir, $h(x, t)$.

Capítulo 3

Modelo 1D

Para el modelamiento unidimensional, se considera la coordenada espacial vertical z , es decir, el cabezal de presión h , depende espacialmente de la profundidad z de suelo en que se haga la medición y del tiempo t , $h(z, t)$.

Dada una profundidad L del volumen de control a medir (ver Figura 2.1) y un tiempo T de estudio, se discretiza el modelo considerando un espaciado uniforme $z_{i+1} - z_i = \Delta z$ entre nodos, y $t_{j+1} - t_j = \Delta t$:

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 & t_0 &= 0 \\ z_i &= -i\Delta z & t_j &= j\Delta t \\ z_N &= -L & t_M &= T \end{aligned} \tag{3.1}$$

Denotamos $N := L/\Delta z$, la cantidad de VPR's en que se subdivide el Volumen de control en la coordenada z . Similarmente $M := T/\Delta t$ denota la cantidad de intervalos de tiempo en que se subdivide el tiempo total T . Notar que se podría parcelar el volumen de control de manera no uniforme, al igual que el tiempo. Para efectos de este trabajo, se consideran uniformes.

Se denota la ubicación espacial en el eje z por subíndice y la ubicación temporal por superíndices. Así, el cabezal de presión, el contenido de agua volumétrico y la conductividad hidráulica quedan dadas por:

$$\begin{aligned} h_i^j &:= h(z_i, t_j) \\ \theta_i^j &:= \theta(z_i, t_j) \\ K_i^j &:= K(h_i^j) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para el calculo de la conductividad, esta se expresa en función del contenido de agua volumétrico, siguiendo el modelo de Van Genuchten.

$$K(\theta_i^j) = K_s(S_e)^l \left[1 - (1 - S_e^{n/(n-1)})^{\frac{n-1}{n}} \right]^2 \tag{3.3}$$

$$S_e = \frac{\theta_i^j - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \tag{3.4}$$

Similarmente para el cálculo de contenido de agua volumétrico, se expresa en función del cabezal de presión:

$$\theta(h_i^j) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + |\alpha h_i^j|^n)^m} \quad (3.5)$$

Además, para la implementación se deben considerar las condiciones de borde a utilizar (condición superficial, condición de borde inferior) y la condición inicial (tiempo $t=0$). Para la condición de borde superficial se consideran 2 modalidades: condición de presión (se fija el valor del cabezal de presión superficial); condición de flujo (se fija el valor del flujo entrante).

Notar que en condición de borde inferior se puede considerar: 1) que el suelo continúa con las mismas condiciones de suelo en la capa siguiente de suelo, llamado drenaje libre; 2) introducir una napa de agua (en cuyo caso se debe imponer saturación de agua en el nivel $L + \Delta z$); 3) introducir un sumidero; o bien 4) imponer que desde ahí el suelo tiene unas condiciones totalmente diferentes.

3.1. Ecuación 1D

Al considerar sólo la dimensión espacial z en la ecuación de Richards (2.5), y dado que se particiona el volumen de control en pequeños VPR (se aproximan las variaciones por derivadas parciales), se tiene la expresión unidimensional de la ecuación de Richards [12]:

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(h)}{\partial z} - S \quad (3.6)$$

En este trabajo, se considera $S = 0$, dejando fuera el efecto de consumo de agua por plantaciones.

3.2. Esquema Explícito

Como se menciona anteriormente, en el esquema explícito de D-F, la aproximación de la derivada en el espacio se hace en el nivel actual de tiempo, es decir, si se deriva $h(z, t)$ con respecto a z queda como sigue:

$$\frac{\partial h}{\partial z}(z_i, t_j) = \frac{h_{i+1}^j - h_i^j}{z_{i+1} - z_i} = \frac{h_{i+1}^j - h_i^j}{\Delta z} \quad (3.7)$$

Discretización

La ecuación (3.6) en su forma discretizada, centrada e incluyendo puntos internodales, para el espacio, en la conductividad se expresa:

$$\frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta z} \left[K_{i+1/2}^j \left(\frac{h_{i+1}^j - h_i^j}{\Delta z} \right) - K_{i-1/2}^j \left(\frac{h_i^j - h_{i-1}^j}{\Delta z} \right) \right] + \left(\frac{K_{i+1}^j - K_{i-1}^j}{\Delta z} \right) \quad (3.8)$$

Aquí, $K_{i\pm 1/2}$ es la conductividad internodal, que puede ser calculada con media aritmética o media geométrica.

Media Aritmética:

$$K_{i\pm 1/2}^j = \frac{1}{2}(K_i^j + K_{i\pm 1}^j) \quad (3.9)$$

Media geométrica:

$$K_{i\pm 1/2}^j = (K_i^j)^{1/2}(K_{i\pm 1}^j)^{1/2} \quad (3.10)$$

Método de resolución por Propagación y pseudo-código

Para la resolución numérica de la ecuación (3.8) basta con despejar θ_i^{j+1} , obteniendo así un modelo de propagación para la obtención del contenido de agua volumétrico en todo tiempo a partir de los valores de la conductividad hidráulica y el cabezal de presión en el tiempo anterior:

$$\theta_i^{j+1} = \Delta t \left(\frac{1}{\Delta z} \left[K_{i+1/2}^j \left(\frac{h_{i+1}^j - h_i^j}{\Delta z} \right) - K_{i-1/2}^j \left(\frac{h_i^j - h_{i-1}^j}{\Delta z} \right) \right] + \left(\frac{K_{i+1}^j - K_{i-1}^j}{\Delta z} \right) \right) - \theta_i^j \quad (3.11)$$

Se definen las funciones: `conductividad`($\theta_i^j, \theta_r, \theta_s, ks, \alpha, l, n$); `conduct_internodal`($k0, k1, dz0, dz1, cualpromedio$); `cont_agua_vol`($h, \theta_s, \theta_r, \alpha, n$) tal como se especifica en las ecuaciones (3.3), (3.9), (3.5) respectivamente; con el fin de ser utilizadas en el algoritmo y en todos los algoritmos posteriores de este trabajo.

Para la implementación del esquema explícito con condición de borde superficial de presión, función llamada `explicita_presion`, se impone valor de cabezal de presión en la superficie de la tierra de saturación, desde el segundo tiempo en adelante $h(0, t) = 0, \forall t > 0$. Para así simular encharcamiento sin almacenamiento superficial.

A continuación el pseudo-código utilizado para la implementación de la función `explicita_presion` que contiene la implementación del esquema implícito 1D:

Entrada: `prof`=profundidad a medir en centímetros;
`dz`= espaciado en profundidad;
`tiempo_total`=tiempo a simular;
`dt`= intervalos de tiempo en que se discretiza;
`ks`= conductividad en saturación del suelo;
`hi`= cabezal de presión del perfil completo en el tiempo 0;
 α, n, l de la ecuación de contenido de agua volumétrico (2.5);
 θ_s = contenido de agua en saturación para el suelo en que se quiera simular la difusión;
 θ_r = Contenido de agua residual para el suelo en que se quiera simular la difusión;
`hbottom`= valor del cabezal de presión en el contorno inferior (nivel $L + \Delta z$)

Salida: Matriz θ : en cada columna j tiene el contenido de agua volumétrico del perfil de suelo completo correspondiente al tiempo t_j .

Algoritmo 1: Cálculo 1D Explícita, condición de presión

```

1 Definir  $M = \lfloor T/dt \rfloor$  cantidad de discretizaciones en el tiempo;
2 Definir el vector de tiempos  $t = (t_j)_{j=1}^{(M+1)} = 0 : dt : (M + 1) * dt$ ;
3  $N = \lfloor Prof/dz \rfloor$  Definir el vector perfil de suelo  $z = (z_i)_{i=1}^{N+1} = 0 : -dz : -N * dz$ ;
4  $p \leftarrow \text{length}(z)$ ;
5  $q \leftarrow \text{length}(t)$ ;
6 Definir la matriz  $\theta \leftarrow$  matriz vacía de  $(N + 1)$  por  $(M + 1)$ ;
7 Definir la matriz  $h \leftarrow$  matriz vacía de  $(N + 1)$  por  $M + 1$ );
8 Definir que h en la superficie es 0;
9 si  $hbottom==1$  entonces
10 |  $h(:,1) = [hi, hi(\text{end})]$ ;
11 fin
12 si no, si  $hbottom \leq 0$  entonces
13 |  $h(:,1) = [hi, hbottom]$ ;
14 fin
15 para todo  $i = 1 : p$  hacer
16 | Definir  $\theta(i, 1) \leftarrow \text{cont\_agua\_vol}(hi(i))$ ;
17 fin
18 para todo  $j = 1 : q - 1$  hacer
19 | Definir  $\theta(1, j + 1) \leftarrow \text{cont\_agua\_vol}(h(1, j + 1))$ ;
20 | para todo  $i = 2 : p$  hacer
21 | | Calcular  $k_{i-1,j}$  (la conductividad en  $(i - 1, j)$ ) por medio de la ecuación
22 | | (3.3) con  $\theta(i - 1, j)$ ;
23 | |  $k_{i,j} \leftarrow \text{conductividad}(\theta(i, j))$ ;  $k_{i+1,j} \leftarrow \text{conductividad}(\theta(i + 1, j))$ ;
24 | | Calcular  $\theta(i, j + 1)$  a través de la ecuación (3.11);
25 | | si  $hbottom==1$  entonces
26 | | |  $\theta(p, j + 1) \leftarrow \theta(p - 1, j + 1)$ ;
27 | | | fin
28 | | | si no, si  $hbottom \leq 0$  entonces
29 | | | | Se calcula  $\theta(p, j + 1) \leftarrow \text{cont\_agua\_vol}(hbottom)$ ;
30 | | | | fin
31 | | | en otro caso
32 | | | | “valor hbottom no válido”
33 | | | | fin
34 | fin

```

Resultados y Discusión del esquema explícito

Para la simulación se entregan los valores hi , siendo los valores de cabezal de presión en el tiempo inicial cero, instantáneamente en el segundo tiempo de simulación se cambia el valor superficial del valor del cabezal de presión y del contenido de agua volumétrico, a los valores 0

y θ_s respectivamente, correspondiendo a valores de saturación de agua debido a que comienza el riego.

1. Condición superficial de Presión, y drenaje libre:

Se evalúa la función `explicita_presion` con los parámetros siguientes:

```
%perfil de medio metro de profundidad espaciado cada 1 cm  
prof= 50  
hi=np.linspace(-500, -10, 50) %cabezales de presión desde -500 a -10  
ks=0.2/60 %ks en cm/s  
tiempo_total=1*60 % segundos  
dt=1e-4  
alpha=0.036  
n= 1.56  
l= 0.5  
theta_sat= 0.43  
theta_res= 0.078
```

La condición inicial impuesta quiere decir que el suelo está más seco en la superficie y se hace más húmedo a medida que avanza en profundidad.

Se obtiene la matriz θ , la cual se muestra gráficamente en la Figura 3.1:

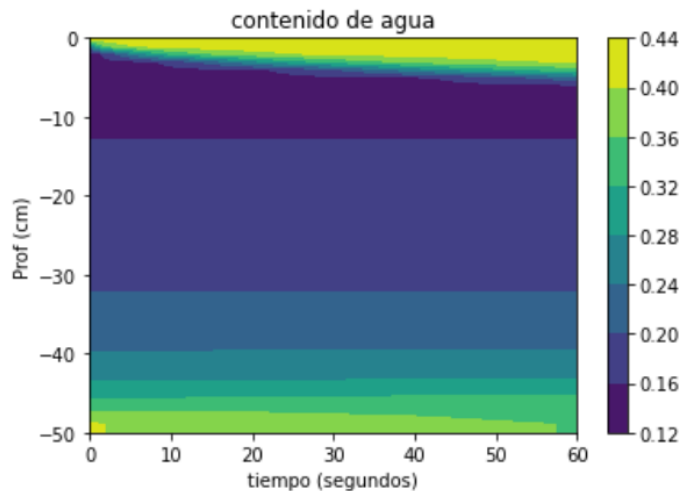


Figura 3.1

El color amarillo representa un contenido de agua volumétrico cercano a 0.43, que es el valor de contenido de agua volumétrico en saturación (mayor cantidad de agua), mientras que, el color azul oscuro mayor sequedad (aunque el nivel máximo de sequedad es 0.078 y en el gráfico el valor menor es de 0.12). Luego en la figura se puede apreciar claramente como entra agua desde la superficie en el tiempo, y como esta va saturando la superficie. También se puede observar que al estar el nivel inferior más saturado de agua, esta agua comienza a subir lentamente por capilaridad.

Lo siguiente interesante de hacer es aumentar el tiempo de experimentación. La siguiente ejecución del programa, es con 3 minutos y un Δt mayor (de 10^{-3} en este caso):

```
%perfil de medio metro de profundidad espaciado cada 1 cm
hi=np.linspace(-500, -10, 50)
ks=0.2/60 %ks en cm/s
prof= 50
tiempo_total=3*60 %3 minutos
dt=1e-3
alpha=0.036
n= 1.56
l= 0.5
theta_sat= 0.43
theta_res= 0.078
```

Se obtiene la gráfica 3.2:

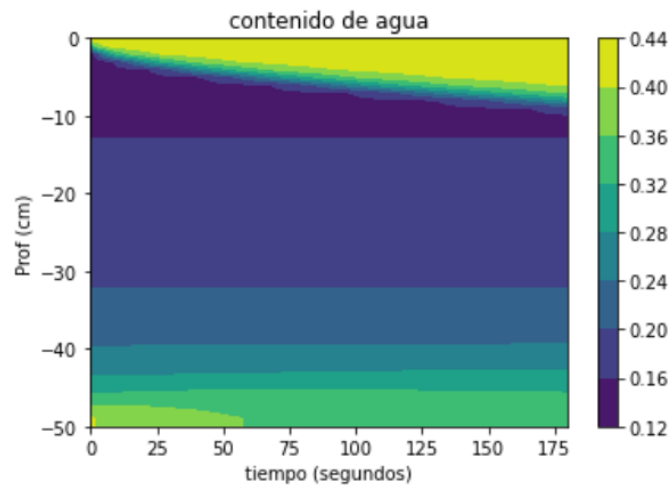


Figura 3.2

Se puede apreciar en la Figura 3.2, que la tendencia de la solución es la misma, pero que el agua aún no baja más allá de los 10 cm para este tiempo de simulación.

La siguiente ejecución del programa es para 4 minutos, con un Δt de 10^{-2} :

```
%perfil de medio metro de profundidad espaciado cada 1 cm
hi=np.linspace(-500, -10, 50)
ks=0.2/60 %ks en cm/s
prof= 50
tiempo_total=4*60 %4 minutos
dt=1e-2
alpha=0.036
n= 1.56
l= 0.5
theta_sat= 0.43
theta_res= 0.078
```

Obteniendo resultados que se grafican en la Figura 3.3.

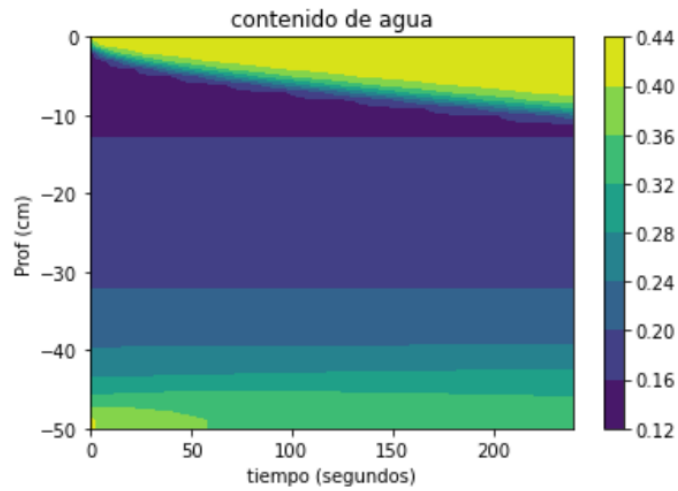


Figura 3.3

Se hace la simulación con un tiempo total de 6 minutos y con un Δt de 10^{-3} , manteniendo el valor de los demás parámetros como en las simulaciones anteriores:

```
%perfil de medio metro de profundidad espaciado cada 1 cm
hi=np.linspace(-500, -10, 50)
ks=0.2/60 %ks en cm/s
prof= 50
tiempo_total=6*60 %segundos
dt=1e-3
alpha=0.036
n= 1.56
l= 0.5
theta_sat= 0.43
theta_res= 0.078
```

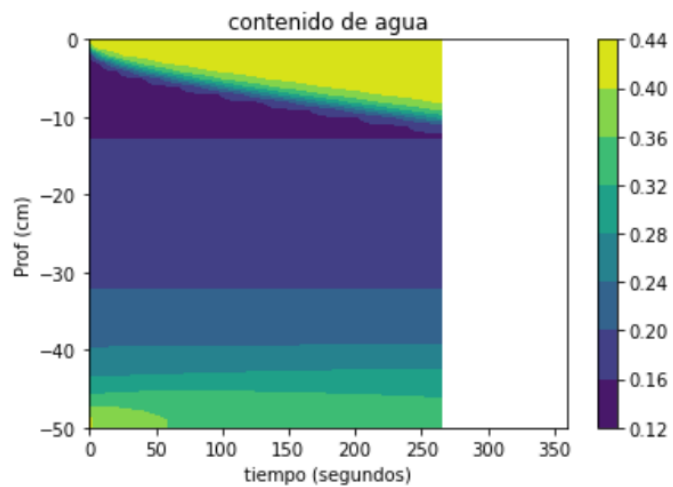


Figura 3.4

Se observa en la Figura 3.4 que el agua avanza en profundidad a medida que pasa el tiempo. Desde un punto en adelante el *software* ya no es capaz de hacer cálculos, pues los valores de θ se indefinen. Observando las iteraciones del programa, se aprecia que debido a que en la superficie entra más y más agua, los nodos de la superficie llegan a la saturación y los cálculos terminan colapsando (restas de θ_s y θ). Esto podría ser corregido incorporando en el código que si alguno de los valores de θ de algún nodo son muy cercanos al θ_s desde ese momento en adelante se considere ese nodo con el valor de θ_s y no se siga calculando.

Ahora resta cambiar otros parámetros. Para esto se utilizó las parámetros en Celia 1990 [2], con un tiempo total de 6 minutos y $\Delta t = 10^{-3}$

```
% perfil de 60 cm de profundidad espaciado cada 1 cm
hi=-1000*np.ones(60)
ks=0.00922 %ks en cm/s
prof= 60
tiempo_total=6*60 %segundos
dt=1e-3
alpha=0.0335
n= 2
l= 0.5
theta_sat= 0.368
theta_res= 0.102
```

Los datos de la condición inicial se interpretan como un perfil de suelo seco de manera uniforme, además los valores de θ_s y θ_r son más cercanos que en los datos de las simulaciones anteriores.

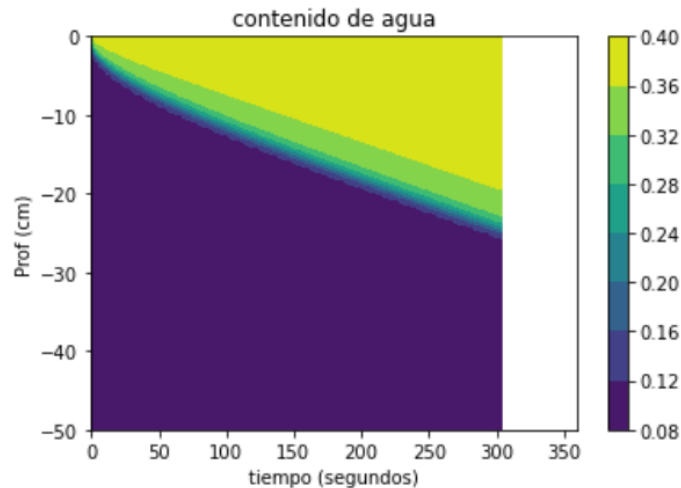


Figura 3.5

En la Figura 3.5, se aprecia que el color en el primer tiempo es único para todo el perfil, es decir, como se ingresó un cabezal de presión único para todo el perfil en $t = 0$, el contenido de agua es el mismo en todo el perfil. A medida que avanza el tiempo, el agua ingresa a mayor profundidad. Y poco después de los 300 segundos los valores del contenido de agua se indefinen, lo que sugiere que el modelo explícito no puede simular en tiempos muy grandes. Esto condice con la literatura, que expone inestabilidades del método explícito.

2. Condición superficial de Presión, y condición constante para el nivel inferior:

Se agrega un parámetro extra la función `explicita_presion`, el cual da la opción de hacer la simulación con drenaje libre o poner un valor específico al cabezal de presión de la capa inferior.

```
%perfil de 60 cm de profundidad espaciado cada 1 cm
hi=-1000*np.ones(60)
ks=0.00922 %ks en cm/s
prof= 60
tiempo_total=5*60 %segundos
dt=1e-3
alpha=0.0335
n= 2
l= 0.5
theta_sat= 0.368
theta_res= 0.102
bottom=-75 %h_bottom
```

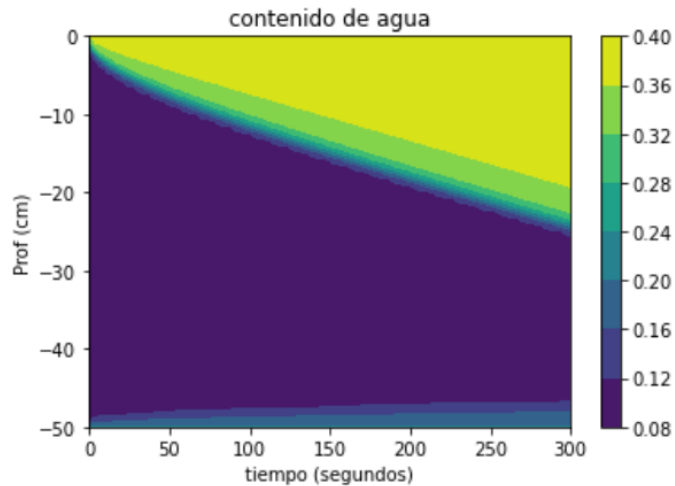


Figura 3.6

En la Figura 3.6 se aprecia que ahora hay capilaridad desde el fondo del volumen de control, ya que el parámetro `h_bottom` dado es cercano a cero y por lo tanto habla de mayor presencia de agua en ese nivel.

A continuación se hace una simulación con una condición inferior muy seca. Se podría hablar de un cambio en la composición del piso muy abrupta, como por ejemplo, la presencia de una roca. Los parámetros dados son los mismos de la simulación anterior, pero con el valor de `h_bottom` de -7500.

```

%perfil de 60 cm de profundidad espaciado cada 1 cm
hi=-1000*np.ones(60)
ks=0.00922 #ks en cm/s
prof= 60
tiempo_total=5*60 # segundos
dt=1e-3
alpha=0.0335
n= 2
l= 0.5
theta_sat= 0.368
theta_res= 0.102
hbottom=-7500 %h_bottom==1 drenaje libre

```

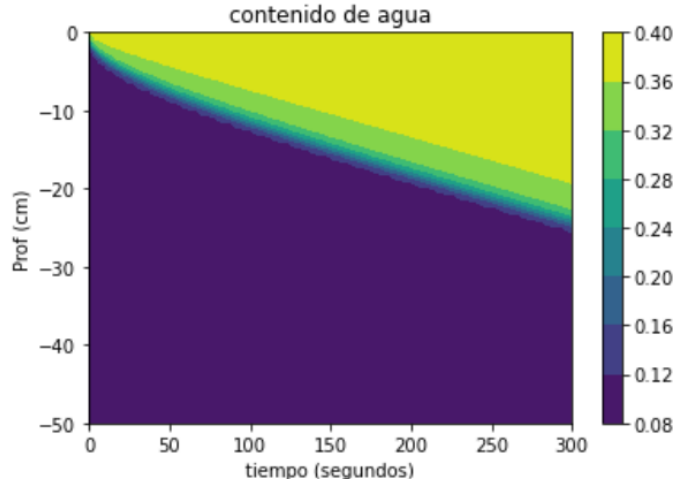


Figura 3.7

Aquí se puede apreciar que el agua baja con mayor rapidez con respecto a la Figura 3.7, dado que el fondo atrae el agua por su cabezal de presión pequeño.

3.3. Esquema Implícito

Como se menciona anteriormente, en el esquema implícito la aproximación de la derivada en el espacio para diferencias finitas, se hace en el nivel siguiente de tiempo, es decir, si se deriva $h(z, t)$ con respecto a z queda como sigue:

$$\frac{\partial h}{\partial z}(z_i, t_j) = \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{z_{i+1} - z_i} = \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{\Delta z} \quad (3.12)$$

La ecuación de Richards (3.6) centrada e incluyendo puntos internodales, para el espacio en la conductividad, en esquema implícito se expresa:

$$\frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta z} \left[K_{i+1/2}^j \left(\frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{\Delta z} \right) - K_{i-1/2}^j \left(\frac{h_i^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{\Delta z} \right) \right] + \left(\frac{K_{i+1/2}^j - K_{i-1/2}^j}{\Delta z} \right) \quad (3.13)$$

Dado el valor del cabezal de presión para un perfil $h^j = (h_1^j, h_2^j, \dots, h_{N+1}^j)$, se quiere calcular el valor del cabezal de presión para el perfil de suelo, en el siguiente tiempo t_{j+1} , es decir, se busca $h^{j+1} := (h_i^{j+1})_{i=1}^N$.

Asumiendo que ya conocemos $h^j = (h_i^j)_{i=1}^N$ y $\theta^j = (\theta_i^j)_{i=1}^N$ se desea usar la ecuación anterior para encontrar los nuevos valores de h_i^{j+1} y θ_i^{j+1} . Notar que $K_{i-1/2}^j$ y $K_{i+1/2}^j$ dependen sólo de h^j (ver ecuaciones (3.2) y (3.9)), por lo que son constantes para h^{j+1} y θ^{j+1} . Más aún, despejando θ^{j+1} en función de h^{j+1} (ver ecuación (3.5)), se considera la ecuación (3.13) sólo para h^{j+1} . No obstante, esto resulta en una ecuación no lineal en h^{j+1} .

3.3.1. Enfoque Newton

Dejando todos los términos de la ecuación (3.8) a un sólo lado de la ecuación, se obtiene:

$$0 = \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta z} \left[K_{i+1/2}^{j+k} \left(\frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{\Delta z} \right) - K_{i-1/2}^{j+k} \left(\frac{h_i^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{\Delta z} \right) \right] - \left(\frac{K_{i+1/2}^{j+k} - K_{i-1/2}^{j+k}}{\Delta z} \right) \quad (3.14)$$

Se definen:

$$F_i(h^{j+1}, \theta^j) = \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta z} \left[K_{i+1/2}^{j+k} \left(\frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{\Delta z} \right) - K_{i-1/2}^{j+k} \left(\frac{h_i^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{\Delta z} \right) \right] - \left(\frac{K_{i+1/2}^{j+k} - K_{i-1/2}^{j+k}}{\Delta z} \right) \quad (3.15)$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1(h^{j+1}, \theta^j) \\ F_2(h^{j+1}, \theta^j) \\ \vdots \\ F_N(h^{j+1}, \theta^j) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Por lo que el problema es transformado en un problema de búsqueda de raíces. Actualmente existen diversos métodos de resolución de problemas de búsqueda de raíces de funciones y funciones solver's implementados. En este caso se utiliza el solver `fsolve` de `Matlab`, el cual emplea la resolución del problema de búsqueda de raíces mediante optimización no-lineal, específicamente emplea el método de Newton [3] y [9].

Descripción del método de Newton

Dada una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se quiere encontrar x tal que $F(x) = 0$. Para este objetivo se emplea, el algoritmo de Newton, el cual define una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ que converge a una raíz x de F . Dado el término n -ésimo de la sucesión, mediante la expansión de serie de Taylor de orden 1, y denotando JF el Jacobiano de F , se tiene que:

$$F(x) \approx F(x_n) + JF(x_n)(x - x_n) \quad (3.17)$$

Para x en cierto radio de convergencia. Reemplazando x por x_{n+1} en la ecuación (3.17):

$$F(x_{n+1}) = F(x_n) + JF(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad (3.18)$$

Se asume que $F(x_{n+1}) = 0$, puesto que se busca resolver $F(x) = 0$; y además se supone que el Jacobiano es invertible. Con esto, se despeja x_{n+1} , y se obtiene, la expresión de la sucesión que da a lugar al algoritmo de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - (JF(x_n))^{-1}F(x_n) \quad (3.19)$$

Dadas las suposiciones que se hacen para llegar a la expresión anterior, es de suma importancia que el término x_0 con el que se parte el algoritmo sea lo suficientemente cercano a la raíz a encontrar, para asegurar el correcto funcionamiento del algoritmo. En la implementación del esquema implícito mediante el esquema de Newton, se escoge x_0 como el valor del cabezal de presión del tiempo anterior.

Cálculo del Jacobiano

Es importante mencionar, que para que fsolve en el método de Newton funcione de manera eficiente es necesario introducir el cálculo del gradiente de la función a optimizar. A continuación se detalla el cálculo gradiente de la función F .

$$F(h^{j+1}, h^j, \theta^j) = \begin{pmatrix} F_1(h^{j+1}, h^j, \theta^j) \\ F_2(h^{j+1}, h^j, \theta^j) \\ \vdots \\ F_N(h^{j+1}, h^j, \theta^j) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Denotando $\mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j) = \frac{K(h_{i+1}^j) + K(h_i^j)}{2}$, F se calcula:

$$\begin{aligned} F_i(h^{j+1}, h^j, \theta^j) &= \frac{\theta(h^{j+1}) - \theta(h^j)}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta z} (\mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j) + \mathcal{K}(h_i^j, h_{i-1}^j)) \\ &+ \frac{h_i^{j+1}}{(\Delta z)^2} (\mathcal{K}(h_{i-1}^j, h_i^j) + \mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j)) - \frac{h_{i+1}^{j+1}}{(\Delta z)^2} (\mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j)) \\ &- \frac{h_{i-1}^{j+1}}{(\Delta z)^2} (\mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

El Jacobiano de F se calcula usando la siguiente ecuación:

$$JF = \begin{pmatrix} \nabla F_1(h^{j+1}, h^j, \theta^j)^\top \\ \nabla F_2(h^{j+1}, h^j, \theta^j)^\top \\ \vdots \\ \nabla F_N(h^{j+1}, h^j, \theta^j)^\top \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Notar que todos los términos del vector anterior son cero, excepto las índices $i - 1$, i , $i + 1$.
De (2.6):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial h}(h) &= \frac{n \cdot m \cdot \alpha(-\alpha h)^{n-1}(\theta_s - \theta_r)(1 + \alpha(-h))^{m-1}}{(1 + (\alpha(-h))^n)^{2m}} \\ &= \frac{\alpha^n(\theta_s - \theta_r)mn(-h)^{n-1}}{[1 + (-\alpha h)^n]^{m+1}}\end{aligned}\quad (3.23)$$

La derivada anterior aparece sólo en el índice i de la derivada de F con respecto a h^{j+1} .

$$\nabla F_i[i] = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \theta}{\partial h}(h^{j+1}) + \frac{1}{(\Delta z)^2} (\mathcal{K}(h_{i-1}^j, h_i^j) + \mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j)) \quad (3.24)$$

$$\nabla F_i[i - 1] = -\frac{\mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j)}{(\Delta z)^2} \quad (3.25)$$

$$\nabla F_i[i + 1] = -\frac{\mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j)}{(\Delta z)^2} \quad (3.26)$$

Pseudo-código:

A continuación se presenta el pseudo-código del modelo Implícito con Enfoque Newton.

Entrada: prof=profundidad a medir en centímetros;
dz= espaciado a considerar en profundidad;
tiempo_total=tiempo en el que se quiere modelar;
dt= intervalos de tiempo en que se discretiza;
ks= conductividad en saturación del suelo;
hi= cabezal de presión del perfil completo en el tiempo 0;
alpha, n, l: α , n, l de la ecuación de contenido de agua volumétrico (2.5);
theta_sat= θ_s ;
theta_res= θ_r ;
hbottom= valor del cabezal de presión en el contorno inferior (nivel $L + \Delta z$)

Salida: Matriz θ : en cada columna j tiene el contenido de agua volumétrico del perfil de suelo completo correspondiente al tiempo t_j .

Algoritmo 2: Cálculo 1D Implícita Enfoque Newton, condición superior de presión

```
1 Definir  $M = \lfloor T/dt \rfloor$  cantidad de discretizaciones en el tiempo;
2 Definir el vector de tiempos  $t = (t_j)_{j=1}^{(v+1)} = 0 : dt : (v + 1) * dt$ ;
3  $N = \lfloor Prof/dz \rfloor$ ;
4 Definir el vector perfil de suelo  $z = (z_i)_{i=1}^{N+1} = 0 : -dz : -N * dz$ ;
5  $p = \text{length}(z)$ ;
6  $q = \text{length}(t)$ ;
7 Definir la matriz  $theta \leftarrow$  matriz de  $(N + 1)$  por  $(M + 1)$ ;
8 Definir la matriz  $h \leftarrow$  matriz de  $(N + 1)$  por  $(M + 1)$ 
9 Imponer que  $h$  en la superficie es cero desde el segundo tiempo en adelante
10 para todo  $i = 1 : p$  hacer
11 |    $theta(i,1) \leftarrow cont\_agua\_vol(hi(i), theta_s, theta_r, alpha, n)$ ;
12 fin
13 para todo  $j = 2 : q$  hacer
14 |    $\theta(1, j + 1) \leftarrow cont\_agua\_vol(h(1, j + 1))$ ; %condición superficial de presión
15 |    $h0 \leftarrow h(1, j + 1)$  % $h0$  es el valor que se le dió a la superficie en el tiempo  $j+1$ 
16 |    $func \leftarrow$  función handle de  $F$ , con  $h^{j+1}$  como variable de acuerdo con la ecuación
17 |   (3.20);
16 |    $h(2 : end, j + 1) \leftarrow fsolve(func, h(2 : end, j))$ ;  $\theta(:, j + 1) \leftarrow cont\_agua\_vol(h(:, j + 1))$ ;
17 fin
```

3.3.2. Enfoque Quasi-Newton

Al igual que la sección anterior, se traslada el problema a uno de optimización.

Problema de optimización:

A continuación, se detalla cómo enunciar el problema de optimización a partir del problema original.

Se define F_i de igual manera que en la ecuación (3.15). Si h^{j+1} resuelve $\sum_{i=1}^{N+1} \|F_i\| = 0$, entonces también resuelve el problema. Se plantea, entonces el siguiente problema de optimización:

$$\text{mín} \sum_{i=2}^{N+1} \|F_i\|^2 \quad (3.27)$$

Notar que el h_1^{j+1} , el valor del cabezal de presión en la superficie del suelo, es condición de borde, por lo que se quiere que sea calculado, sólo se impone, en realidad lo que se quiere calcular es el vector $(h_2^{j+1}, h_3^{j+1}, \dots, h_{N+1}^j) =: h_{jp1}$.

La solución a (3.27) aproxima la solución del problema inicial. Para la resolución del problema de optimización anterior se utiliza el método de Quasi-Newton (si se quiere profundizar más consultar [9]).

Cálculo del Jacobiano

Es importante mencionar, que para que el solver de Quasi-Newton funcione de manera eficiente es necesario introducir el cálculo del gradiente de la función a optimizar. A continuación se detalla el cálculo gradiente de la función f .

$$f(h^{j+1}, h^j, \theta^j) = \sum_{i=1}^N F_i(h^{j+1}, h^j, \theta^j)^2 \quad (3.28)$$

Donde (denotando $\mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j) = \frac{K_{i+1}^j + K_i^j}{2}$):

$$\begin{aligned} F_i(h^{j+1}, h^j, \theta^j) &= \frac{\theta(h^{j+1}) - \theta(h^j)}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta z} (\mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j) + \mathcal{K}(h_i^j, h_{i-1}^j)) \\ &+ \frac{h_i^{j+1}}{(\Delta z)^2} (\mathcal{K}(h_{i-1}^j, h_i^j) + \mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j)) - \frac{h_{i+1}^{j+1}}{(\Delta z)^2} (\mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j)) \\ &- \frac{h_{i-1}^{j+1}}{(\Delta z)^2} (\mathcal{K}(h_{i+1}^j, h_i^j)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

El gradiente de f se calcula así

$$\nabla f = \sum_{i=1}^N 2F_i(h^{j+1}, h^j, \theta^j) \nabla F_i(h^{j+1}, h^j, \theta^j) \quad (3.30)$$

Donde el gradiente de los F_i se calcula al igual que en las expresiones (3.24), (3.25) y (3.26).

Pseudo-código

Para ser utilizado algún solver de Quasi-Newton provisto (en este caso `fminunc`), es necesario tener definida la función objetivo del problema de minimización (3.27), para esto, de manera análoga a lo expuesto en el enfoque anterior, se implementaron funciones previas a la función `implicita_presion`. Esta función calcula F_i y F acorde a las ecuaciones (3.15) y (3.16), respectivamente.

A continuación se presenta el pseudo-código del modelo Implícito 1D Enfoque Quasi-Newton:

Entrada: `prof`=profundidad a medir en centímetros;
`dz`= espaciado a considerar en profundidad;
`tiempo_total`=tiempo en el que se quiere modelar;
`dt`= intervalos de tiempo en que se discretiza;
`ks`= conductividad en saturación del suelo;
`hi`= cabezal de presión del perfil completo en el tiempo 0;
 α , n , l de la ecuación de contenido de agua volumétrico (2.6);

θ_s = contenido de agua en saturación;
 θ_r = contenido de agua residual;
 hbottom = valor del cabezal de presión en el contorno inferior (nivel $L + \Delta z$)

Salida: Matriz θ : en cada columna j tiene el contenido de agua volumétrico del perfil de suelo completo correspondiente al tiempo t_j .

Algoritmo 3: Cálculo 1D Implícita Enfoque Quasi-Newton, condición de presión

```

1 Definir  $M = \lfloor T/dt \rfloor$  cantidad de discretizaciones en el tiempo;
2 Definir el vector de tiempos  $t = (t_j)_{j=1}^{(M+1)} = 0 : dt : (M + 1) * dt$ ;
3  $N = \lfloor Prof/dz \rfloor$  Definir el vector perfil de suelo  $z = (z_i)_{i=1}^{N+1} = 0 : -dz : -N * dz$ ;
4 p=length(z);
5 q=length(t);
6 Definir la matriz  $theta \leftarrow$  matriz de  $(N + 1)$  por  $(M + 1)$ ;
7 Definir la matriz  $h \leftarrow$  matriz de  $(N + 1)$  por  $(M + 1)$ 
8 Imponer  $h(1, 2 : end) \leftarrow 0$  %la superficie es cero desde el segundo tiempo en adelante
9 para todo  $i = 1 : p$  hacer
10 |    $theta(i,1) \leftarrow cont\_agua\_vol(h(i), theta\_s, theta\_r, alpha, n)$ ;
11 fin
12 para todo  $j = 2 : q$  hacer
13 |    $theta(1,j+1) \leftarrow cont\_agua\_vol(h(1,j+1), theta\_s, theta\_r, alpha, n)$ ;
14 |    $h0 \leftarrow h(1, j + 1)$ ; %h0 es el valor que se le dió a la superficie en el tiempo j+1
15 |    $func \leftarrow$  funcion handle de f, con  $h^{j+1}$  como variable en la expresión (3.28);
16 |    $h(2 : end, j + 1) \leftarrow Quasi - Newton(func, h(2 : end, j))$ ; %usando fminunc de
    Matlab
17 fin
  
```

3.3.3. Modelo Linealizado

Otra opción para modelar el problema es trabajar el término del lado izquierdo de la ecuación (3.6), utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.31)$$

De esta manera se aproxima $\frac{\partial h}{\partial t}$ mediante diferencias finitas progresivas, teniendo en cuenta que los subíndices denotan el nivel espacial y los superíndices el nivel temporal:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{\Delta h}{\Delta t} \approx \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} \quad (3.32)$$

Al término $c(h) := \frac{\partial \theta(h)}{\partial h}$ se le llama concentración o almacenamiento de agua. Para esta implementación se utiliza el almacenamiento de agua en el nivel de tiempo anterior calculada mediante la expresión (3.23) y descrita en las funciones de Mualem–van Genuchten [1].

$$c(h) = mn(\alpha)^n \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + \alpha^n |h|^n)^{m+1}} |h|^{n-1} \quad (3.33)$$

Para el lado derecho de la ecuación (3.6) se utilizan 2 esquemas diferentes, con el fin de ser comparados posteriormente.

Esquema 1:

El esquema de diferencias finitas implícito basado en el método de Crank-Nicolson modificado [13] y considerando un espaciado uniforme en la profundidad z :

$$c(h_i^j) \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta z} \left[K_{i+1/2}^j \left(\frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{2\Delta z} + \frac{h_{i+1}^j - h_i^j}{2\Delta z} + 1 \right) \right] - \frac{1}{\Delta z} \left[K_{i-1/2}^j \left(\frac{h_i^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{2\Delta z} + \frac{h_i^j - h_{i-1}^j}{2\Delta z} + 1 \right) \right] \quad (3.34)$$

Reagrupando la ecuación anterior se tiene:

$$-\frac{K_{i-1/2}^j}{2\Delta z^2} h_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{c(h_i^j)}{\Delta t} + \frac{K_{i+1/2}^j}{2\Delta z^2} + \frac{K_{i-1/2}^j}{2\Delta z^2} \right) h_i^{j+1} - \frac{K_{i+1/2}^j}{2\Delta z^2} h_{i+1}^{j+1} = \frac{K_{i-1/2}^j}{2\Delta z^2} h_{i-1}^j + \left(\frac{c(h_i^j)}{\Delta t} - \frac{K_{i+1/2}^j}{2\Delta z^2} - \frac{K_{i-1/2}^j}{2\Delta z^2} \right) h_i^j + \frac{K_{i+1/2}^j}{2\Delta z^2} h_{i+1}^j + \left(\frac{K_{i+1/2}^j - K_{i-1/2}^j}{\Delta z} \right) \quad (3.35)$$

Se definen: $a_i = \frac{c(h_i^j)}{\Delta t}$; $b_i = \frac{K_{i-1/2}^j}{2\Delta z^2}$; $c_i = \frac{K_{i+1/2}^j}{2\Delta z^2}$; $d_i = 2\Delta z(c_i - b_i)$; $e_i = a_i + c_i + b_i$; $f_i = a_i - c_i - b_i$; ccs = condición de contorno superior; cci = condición de contorno inferior. Con esto, podemos reescribir (3.35) como sigue.

$$-b_i h_{i-1}^{j+1} + e_i h_i^{j+1} - c_i h_{i+1}^{j+1} = b_i h_{i-1}^j + f_i h_i^j + c_i h_{i+1}^j + d_i \quad (3.36)$$

Luego, juntando las ecuaciones correspondientes para $i = 1, \dots, N$; se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -b_2 & e_2 & -c_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -b_3 & e_3 & -c_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \dots & -b_{N-1} & e_{N-1} & -c_{N-1} & \\ 0 & & \dots & \dots & 0 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{j+1} \\ h_2^{j+1} \\ \vdots \\ h_i^{j+1} \\ \vdots \\ h_{N-1}^{j+1} \\ h_N^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ccs \\ b_2 h_1^j + f_2 h_2^j + c_2 h_3^j + d_2 \\ \vdots \\ b_i h_{i-1}^j + f_i h_i^j + c_i h_{i+1}^j + d_i \\ \vdots \\ b_{N-1} h_{N-2}^j + f_{N-1} h_{N-1}^j + c_{N-1} h_N^j + d_{N-1} \\ cci \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Para el caso en que se quiere la condición de borde inferior con drenaje libre se analiza la expresión (3.35) y se impone que $h_{N+1}^j = h_N^j$ para toda discretización de tiempo t_j . Lo que

también significa que $K_{N+1/2}^j = K_N^j$. Obteniendo la siguiente ecuación para el nodo N -ésimo en profundidad, en todo tiempo, y que por lo tanto corresponde a la última fila de la ecuación (3.37):

$$\begin{aligned}
 -\frac{K_{N-1/2}^j}{2\Delta z^2} h_{N-1}^{j+1} + \left(\frac{c(h_N^j)}{\Delta t} + \frac{K_{N-1/2}^j}{2\Delta z^2} \right) h_N^{j+1} &= \frac{K_{N-1/2}^j}{2\Delta z^2} h_{N-1}^j + \left(\frac{c(h_N^j)}{\Delta t} - \frac{K_{N-1/2}^j}{2\Delta z^2} \right) h_N^j \\
 &+ \frac{K_N^j - K_{N-1/2}^j}{\Delta z}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

A continuación se detalla el pseudo-código para la implementación del esquema 1.

- Entrada:** prof=profundidad a medir en centímetros;
dz= espaciado a considerar en profundidad;
tiempo_total=tiempo en el que se quiere modelar;
dt= intervalos de tiempo en que se discretiza;
ks= conductividad en saturación del suelo;
hi= cabezal de presión del perfil completo en el tiempo 0;
 α , n, l de la ecuación de contenido de agua volumétrico (2.5);
 θ_s = contenido de agua volumétrico en saturación;
 θ_r = contenido de agua volumétrico residual;
hbottom= valor del cabezal de presión en el contorno inferior;
- Salida:** Matriz θ : en cada columna j tiene el contenido de agua volumétrico del perfil de suelo completo correspondiente al tiempo t_j .

Algoritmo 4: Cálculo Linealización Implícita 1D Esquema 1, condición de presión

```
1 Definir  $M \leftarrow \lfloor T/dt \rfloor$  cantidad de discretizaciones en el tiempo;
2 Definir  $t \leftarrow (t_j)_{j=1}^{(M+1)} = 0 : dt : (M + 1) * dt$  vector de tiempos;
3  $N = \lfloor Prof/dz \rfloor$ ;
4 Definir  $z = (z_i)_{i=1}^{N+1} \leftarrow 0 : -dz : -N * dz$  vector de nodos en profundidad del perfil;
5  $p = \text{length}(z)$ ;
6  $q = \text{length}(t)$ ;
7 Definir la matriz  $theta \leftarrow$  matriz de  $(N + 1) \times (M + 1)$ ;
8 Definir la matriz  $h \leftarrow$  matriz de  $(N + 1) \times (M + 1)$ 
9 Imponer  $h(1, 2 : end) \leftarrow zeros(q - 1)$ ; %h es cero en la superficie desde el segundo tiempo
10  $\theta(:, 1) \leftarrow cont\_agua\_vol(hi)$ ; %valores iniciales de  $\theta$  en el tiempo 0
11 para todo  $j = 1 : q - 1$  hacer
12 |  $B \leftarrow$  vector de ceros de largo N;
13 |  $a \leftarrow \frac{1}{dt} almacenamiento\_agua(h(2 : N - 1))$ ; % ecuación (3.33)
14 |  $k \leftarrow$  conductividad del perfil completo en el tiempo anterior;
15 |  $b \leftarrow \frac{1}{2*dz*dz} * (\text{promedio conductividades hacia atrás utilizando } k)$ ;
16 |  $c \leftarrow \frac{1}{2*dz*dz} * (\text{promedio conductividades hacia adelante utilizando } k)$ ;
17 |  $d \leftarrow 2\Delta z(c - b)$ ;
18 |  $e \leftarrow a + c + b$ ;
19 |  $f \leftarrow a - c - b$ ;
20 | Definir A como matriz diagonal de los vectores -b, e, -c según (3.37);
21 | Asignar valores al vector B como el vector del lado derecho en la ecuación (3.37);
22 | si  $hbottom \leq 0$  entonces
23 | | Definir último índice de B como hbottom
24 | fin
25 | si no, si  $hbottom == 1$  entonces
26 | | Modificar la última fila de A y de B como en la ecuación (3.38);
27 | fin
28 | en otro caso
29 | | “hbottom no válido”
30 | fin
31 |  $h(:, j + 1) \leftarrow$  la solución del sistema lineal definido por (A,B)
32 |  $\theta(:, j + 1) \leftarrow cont\_agua\_vol(h(:, j + 1))$ ;
33 fin
```

Esquema 2:

Se trata del esquema utilizado en (3.13). Obteniendo así la siguiente ecuación:

$$c(h_i^j) \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} = h_{i-1}^{j+1} \frac{K_{i-1/2}^j}{\Delta z^2} + h_i^{j+1} \left(-\frac{K_{i-1/2}^j}{\Delta z^2} - \frac{K_{i+1/2}^j}{\Delta z^2} \right) + h_{i+1}^{j+1} \frac{K_{i+1/2}^j}{\Delta z^2} - \frac{1}{\Delta z} (K_{i+1/2}^j - K_{i-1/2}^j) \quad (3.39)$$

Equivalentemente

$$h_{i-1}^{j+1} \frac{K_{i-1/2}^j}{\Delta z^2} + h_i^{j+1} \left(-\frac{c(h_i^j)}{\Delta t} - \frac{K_{i-1/2}^j}{\Delta z^2} - \frac{K_{i+1/2}^j}{\Delta z^2} \right) + h_{i+1}^{j+1} \frac{K_{i+1/2}^j}{\Delta z^2} = -\frac{c(h_i^j)}{\Delta t} h_i^j + \frac{1}{\Delta z} (K_{i+1/2}^j - K_{i-1/2}^j) \quad (3.40)$$

Definiendo $a_i = \frac{c(h_i^j)}{\Delta t}$; $b_i = \frac{K_{i-1/2}^j}{\Delta z^2}$; $c_i = \frac{K_{i+1/2}^j}{\Delta z^2}$; $d_i = \Delta z(c_i - b_i)$; $e_i = -(a_i + b_i + c_i)$; La ecuación se reescribe:

$$b_i h_{i-1}^{j+1} + e_i h_i^{j+1} + c_i h_{i+1}^{j+1} = d_i - a_i h_i^j \quad (3.41)$$

Luego, juntando las ecuaciones correspondientes para $i = 1, \dots, N$, se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_2 & e_2 & c_2 & 0 & \dots & \dots & \\ 0 & b_3 & e_3 & c_3 & 0 & \dots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \dots & 0 & b_{n-1} & e_{n-1} & c_{n-1} & \\ 0 & & & \dots & 0 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{k+1} \\ h_2^{k+1} \\ \vdots \\ h_i^{k+1} \\ \vdots \\ h_{n-1}^{k+1} \\ h_n^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ccs \\ d_2 - a_2 h_2^j \\ \vdots \\ d_i - a_i h_i^j \\ \vdots \\ d_{n-1} - a_{n-1} h_{n-1}^j \\ cci \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Para el caso en que se quiere la condición de borde inferior con drenaje libre se analiza la expresión (3.40) y se impone que $h_{N+1}^j = h_N^j$ para toda discretización de tiempo t_j . Lo que también significa que $K(h_{N+1/2}^j) = K(h_N^j)$. Obteniendo la siguiente ecuación para el nodo $N - \text{esimo}$ en profundidad, en todo tiempo, y que por lo tanto corresponde a la última fila de la ecuación (3.42):

$$-\frac{c(h_N^j)}{\Delta t} h_N^j + \frac{1}{\Delta z} (K_N^j - K_{N-1/2}^j) = h_{N-1}^{j+1} \frac{K_{N-1/2}^j}{\Delta z^2} + h_N^{j+1} \left(-\frac{c(h_N^j)}{\Delta t} - \frac{K_{N-1/2}^j}{\Delta z^2} \right) \quad (3.43)$$

A continuación se detalla el pseudo-código para la implementación del esquema 2.

Entrada: prof=profundidad a medir en centímetros;
dz= espaciado a considerar en profundidad;
tiempo_total=tiempo en el que se quiere modelar;
dt= intervalos de tiempo en que se discretiza;
ks= conductividad en saturación del suelo;
hi= cabezal de presión del perfil completo en el tiempo 0;
 α , n, l de la ecuación de contenido de agua volumétrico (2.5);
 θ_s = contenido de agua volumétrico en saturación;
 θ_r = contenido de agua volumétrico residual;
hbottom= valor del cabezal de presión en el contorno inferior;

Salida: Matriz θ : en cada columna j tiene el contenido de agua volumétrico del perfil de suelo completo correspondiente al tiempo t_j .

Algoritmo 5: Cálculo Linealización Implícita 1D Esquema 2, condición de presión

```

1 Definir  $M = \lfloor T/dt \rfloor$  cantidad de discretizaciones en el tiempo;
2 Definir el vector de tiempos  $t \leftarrow (t_j)_{j=1}^M = 1 : dt : (M) * dt$ ;
3  $N = \lfloor Prof/dz \rfloor$ ;
4 Definir el vector perfil de suelo  $z = (z_i)_{i=1}^{N+1} = 0 : -dz : -N * dz$ ;
5 p=length(z);
6 q=length(t);
7 Definir la matriz  $\theta \leftarrow$  matriz de  $(N + 1) \times (M + 1)$ ;
8 Definir la matriz  $h \leftarrow$  matriz de  $(N + 1) \times (M + 1)$ 
9 Imponer  $h(1, 2 : end) \leftarrow zeros(1, M - 1)$ ; %h en la superficie es cero desde el segundo
    tiempo
10 Asignar  $h(:, 1) \leftarrow hi$ ; %valor inicial de tiempo para h
11 Asignar  $\theta(:, 1) \leftarrow cont\_agua\_vol(hi)$ ; %valor inicial de tiempo para  $\theta$ 
12 para todo  $j = 1 : M - 1$  hacer
13     B  $\leftarrow$  vector de ceros de largo N;
14     a  $\leftarrow almacenamiento\_agua(h(2 : N - 1))/dt$ ; % ecuación (3.33)
15     k  $\leftarrow$  conductividad del perfil completo en el tiempo anterior;
16     b  $\leftarrow \frac{1}{\Delta z^2} \cdot$ (promedio conductividades hacia atrás utilizando k);
17     c  $\leftarrow \frac{1}{\Delta z^2} \cdot$ (promedio conductividades hacia adelante utilizando k);
18     d  $\leftarrow \Delta z(c - b)$ ;
19     e  $\leftarrow a + c + b$ ;
20     Definir A como matriz diagonal de los vectores b, e, c según (3.42);
21     B(2:N-1)  $\leftarrow d - a \cdot h_j(2 : N - 1)$ ; %lado derecho en (3.42)
22     si  $hbottom \leq 0$  entonces
23         | Definir último índice de B como hbottom
24     si no, si  $hbottom == 1$  entonces
25         | Modificar la última fila de A y de B como en la ecuación (3.43)
26     en otro caso
27         | “hbottom no válido”
28      $h(:, j + 1) \leftarrow$  la solución del problema lineal definido por (A,b)
29      $\theta(:, j + 1) \leftarrow cont\_agua\_vol(h(:, j + 1))$ ;
30 fin

```

3.4. Resultados Modelos 1D

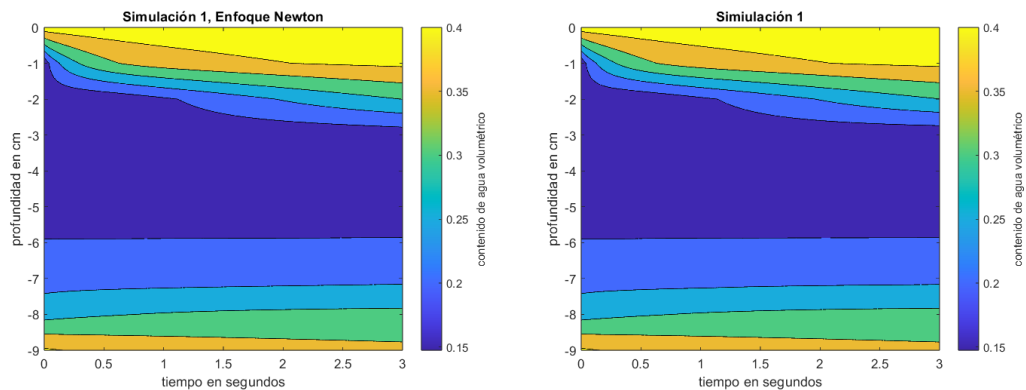
En esta sección se presentan los resultados obtenidos de los distintos modelos 1D.

La primera simulación, llamada Simulación 1, se basa en los siguientes parámetros.

```

prof= 10;
dz=1;
hi=linspace(-500,-10, 10);
ks=0.00922; %ks en cm/s
tiempo_total=3; % segundos
dt=1e-4;
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.43;
theta_r= 0.078;
hbottom=1; %h_bottom=1 ==> drenaje libre
    
```

Las gráficas de resultados de cada modelamiento para la Simulación 1 y sus respectivos tiempos de ejecución son.

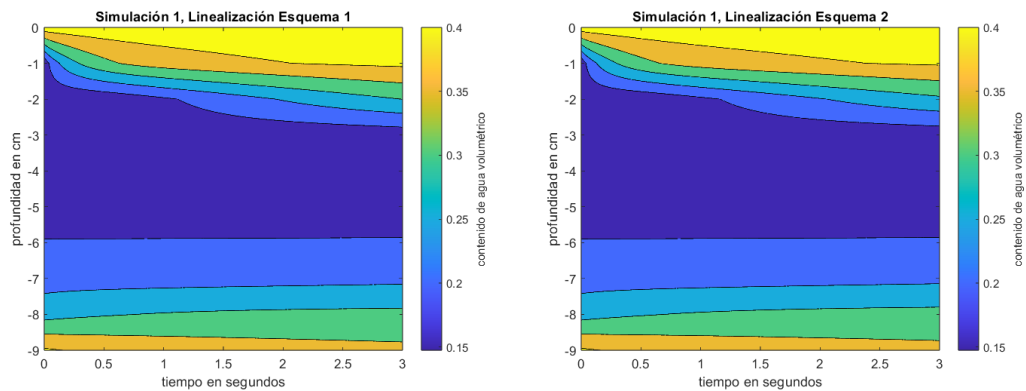


(a) Enfoque Newton.

Tiempo de ejecución: 220.672340 seconds.

(b) Enfoque Quasi-Newton.

Tiempo de ejecución: 359.180283 seconds.



(c) Linealizado Esquema 1.

Tiempo de ejecución: 2.239724 seconds.

(d) Linealizado Esquema 2.

Tiempo de ejecución: 2.186904 seconds.

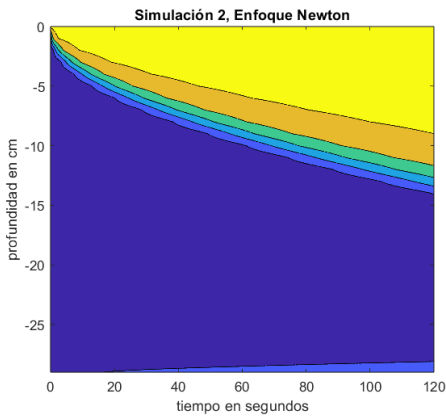
Figura 3.8: Simulación 1

La Simulación 2 se basa en los siguientes parámetros.

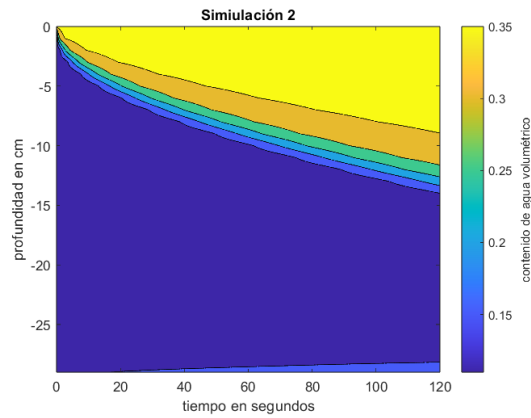
```

%perfil de 30 cm de profundidad espaciado cada 1 cm
hi=-1000*ones(30,1);
ks=0.00922; %ks en cm/s
prof= 30;
tiempo_total=2*60; % segundos
dt=1e-2;
dz=1;
alpha=0.0335;
n= 2;
l= 0.5;
theta_s= 0.368;
theta_r= 0.102;
bottom=-75; %napa subterránea
    
```

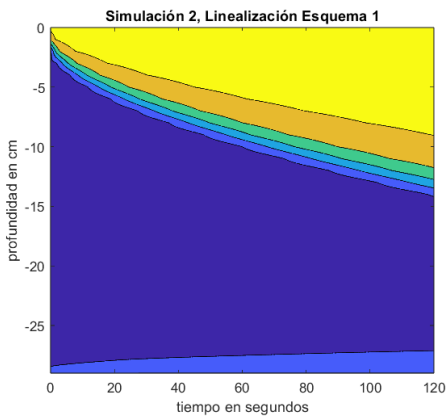
A continuación se presentan las gráficas de resultados de cada modelamiento para la Simulación 2 y sus respectivos tiempos de ejecución.



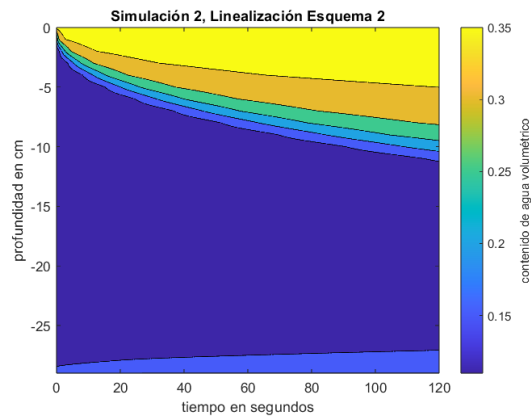
(a) Enfoque Newton
Tiempo de ejecución: 169.251612 seconds.



(b) Enfoque Quasi-Newton
Tiempo de ejecución: 371.086402 seconds.



(c) Linealización Esquema 1
Tiempo de ejecución: 1.121280 seconds.



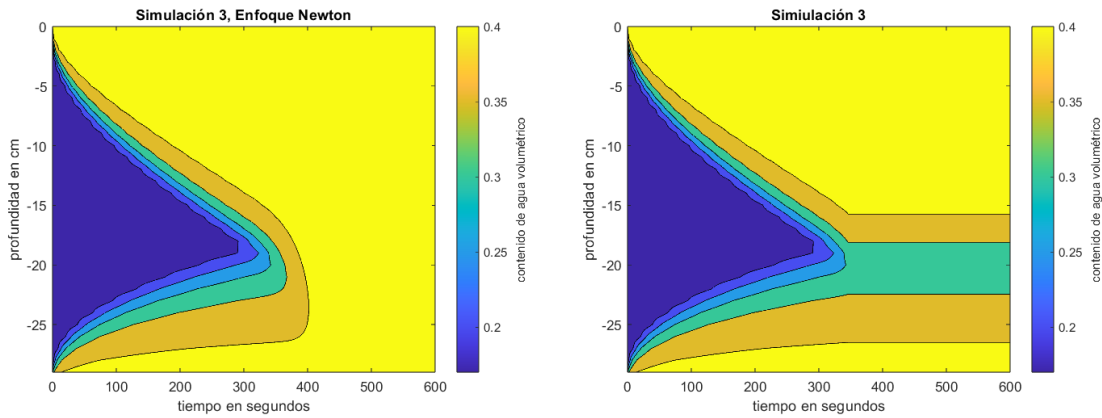
(d) Linealización Esquema 2
Tiempo de ejecución: 1.007772 seconds.

Figura 3.9: Simulación 2

La Simulación 3 se basa en los siguientes parámetros.

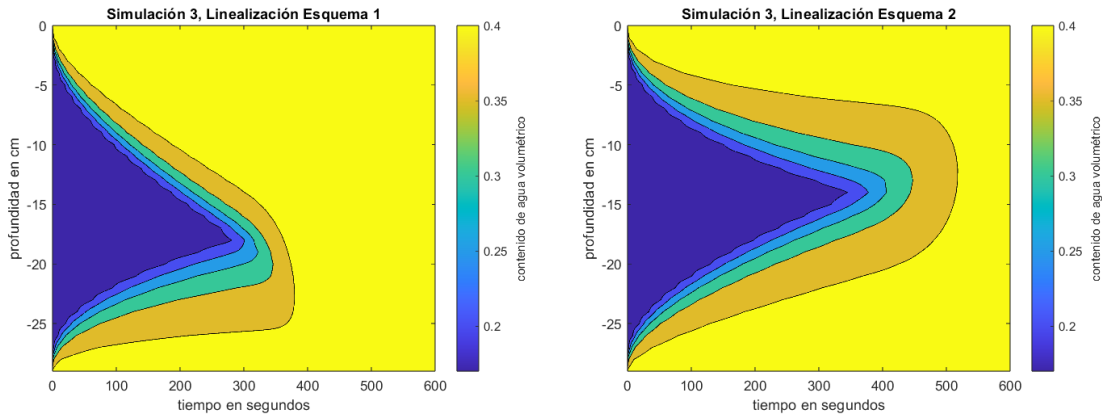
```
%perfil de 30 cm de profundidad espaciado cada 1 cm
hi=-300*ones(30,1);
ks=0.00922; %ks en cm/s
prof= 30;
tiempo_total=10*60; % segundos
dt=1e-2;
dz=1;
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.43;
theta_r= 0.078;
hbottom=-5; %h_bottom=1 ==> drenaje libre
```

A continuación se presentan las gráficas de resultados de cada modelamiento para la Simulación 3 y sus respectivos tiempos de ejecución.



(a) Enfoque Newton
Tiempo de ejecución: 1472.785585 seconds.

(b) Enfoque Quasi-Newton
Tiempo de ejecución: 1690.773994 seconds.



(c) Linealización Esquema 1
Tiempo de ejecución: 6.455001 seconds.

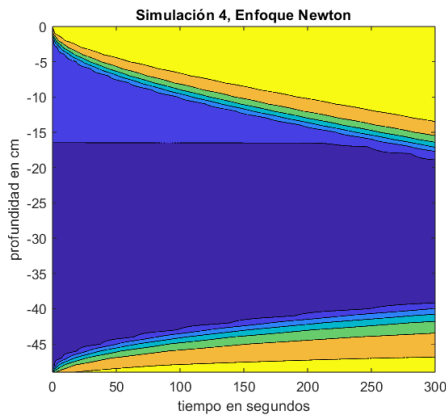
(d) Linealización Esquema 2
Tiempo de ejecución: 6.516292 seconds.

Figura 3.10: Simulación 3

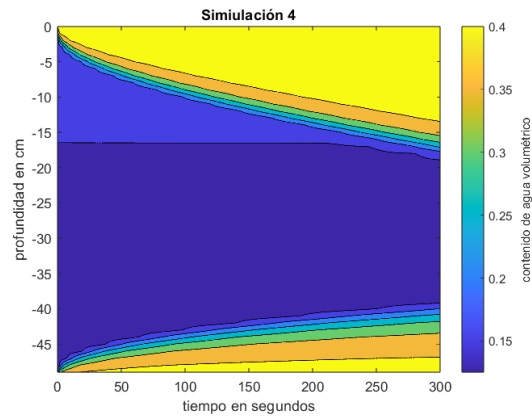
La Simulación 4 se basa en los siguientes parámetros.

```
%perfil de 50 cm de profundidad espaciado cada 1 cm
hi=linspace(-200,-1000, 50);
ks=0.00922; %ks en cm/s
prof= 50;
tiempo_total=5*60; % segundos
dz=1;
dt=1e-2;
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.43;
theta_r= 0.078;
hbottom=-5; %h_bottom=1 ==> drenaje libre
```

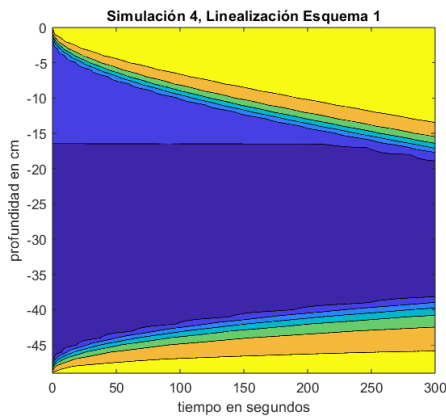
A continuación se presentan las gráficas de resultados de cada modelamiento para la Simulación 4 y sus respectivos tiempos de ejecución.



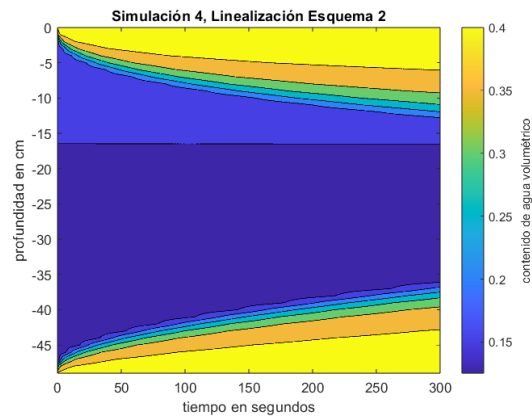
(a) Enfoque Newton
Tiempo de ejecución: 1003.701526 seconds.



(b) Enfoque Quasi-Newton
Tiempo de ejecución: 2091.869706 seconds.



(c) Linealización Esquema 1
Tiempo de ejecución: 5.088541 seconds.



(d) Linealización Esquema 2
Tiempo de ejecución: 4.970780 seconds.

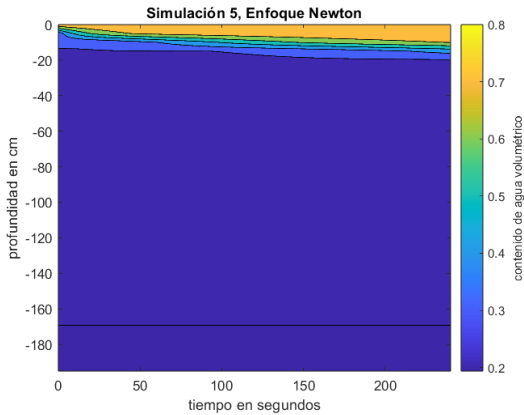
Figura 3.11: Simulación 4

La Simulación 5 se basa en los siguientes parámetros.

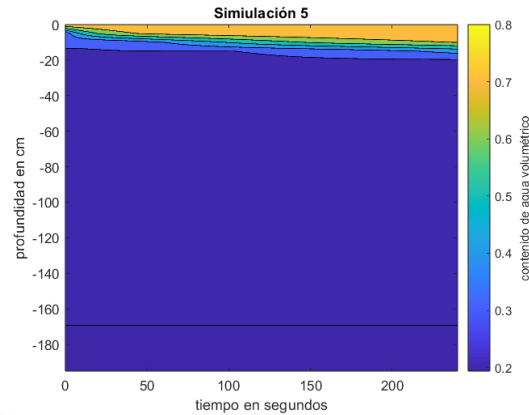
```

prof= 200;
dz= 5;
hi=linspace(-200,-1000, prof/dzi);
ks=0.00922; %ks en cm/s
tiempo_total=4*60; % segundos
dt=1e-1;
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.8;
theta_r= 0.1;
hbottom=1; %h_bottom=1 ==> drenaje libre
    
```

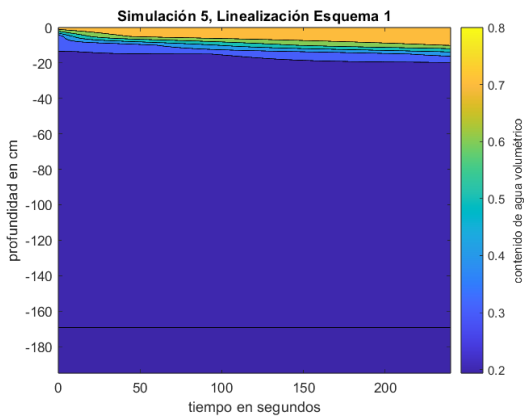
A continuación se presentan las gráficas de resultados de cada modelamiento para la Simulación 5 y sus respectivos tiempos de ejecución.



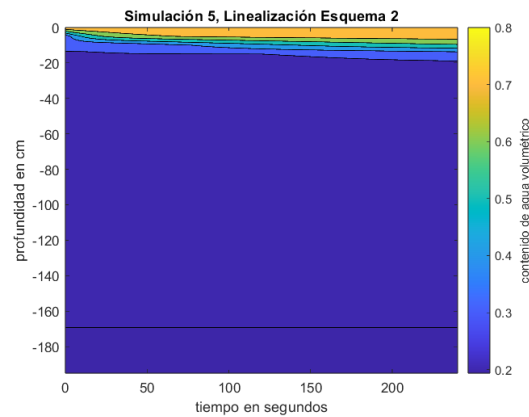
(a) Enfoque Newton
Tiempo de ejecución: 75.431478 seconds.



(b) Enfoque Quasi-Newton
Tiempo de ejecución: 31.954954 seconds.



(c) Linealización Esquema 1
Tiempo de ejecución: 0.416723 seconds.



(d) Linealización Esquema 2
Tiempo de ejecución: 0.373159 seconds.

Figura 3.12: Simulación 5

La siguiente simulación, llamada Simulación 6, se ejecuta con un tiempo total de 5 horas precisamente. Al tener una cantidad de discretizaciones tan grande en tiempo los Modelos Enfoque Newton y Quasi-Newton tardan mucho en completar la simulación. Por lo tanto sólo se analizan los resultados de Linealización en ambos esquemas para poder compararlos entre sí.

```
%Probar qué sucede sin riego y sólo con napa subterránea
hi=-500*ones(200,1); %perfil cm de profundidad
ks=0.00922; %ks en cm/s
prof= 200; %2 mt
tiempo_total=5*60*60; % segundos
dt=1e-1;
dz=1;
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.43;
theta_r= 0.078;
hbottom=0;
```

A continuación se presentan las gráficas de resultados de cada modelamiento para la Simulación 6 y sus respectivos tiempos de ejecución.

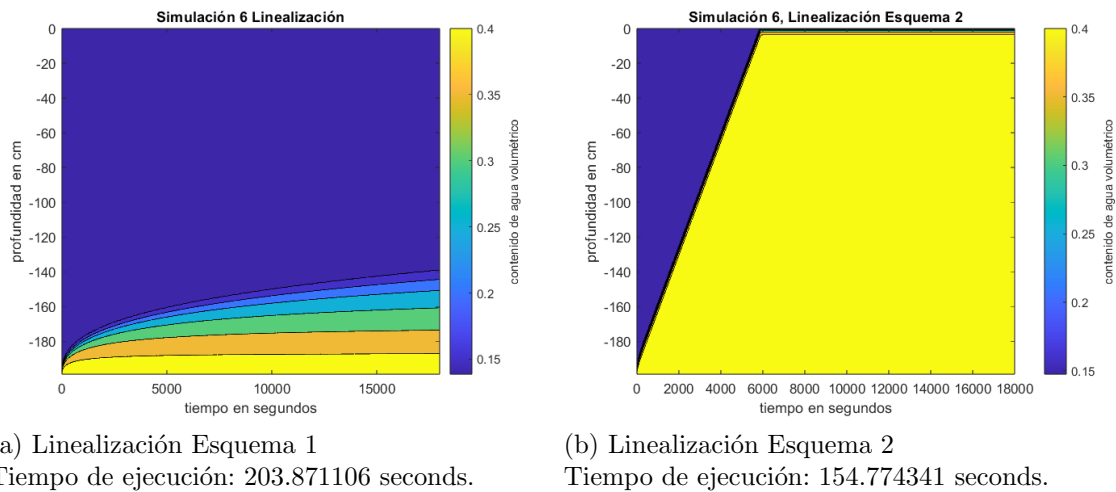
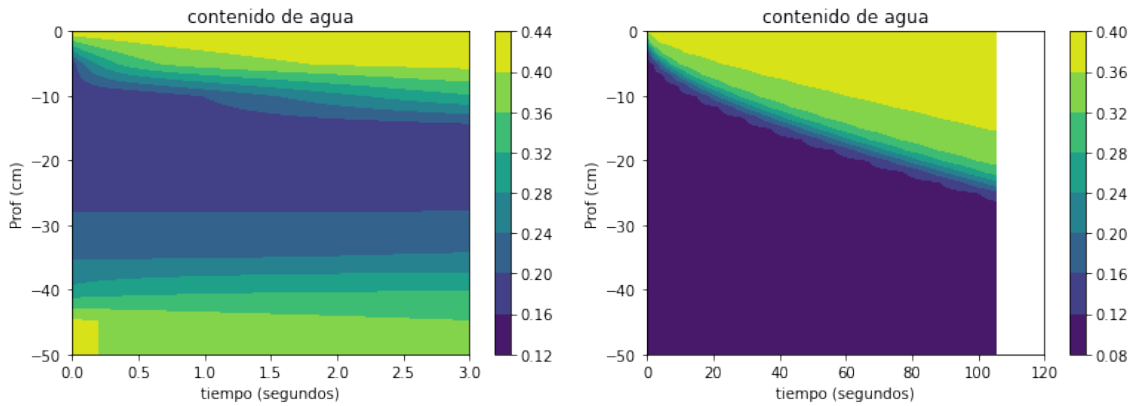


Figura 3.13: Simulación 6

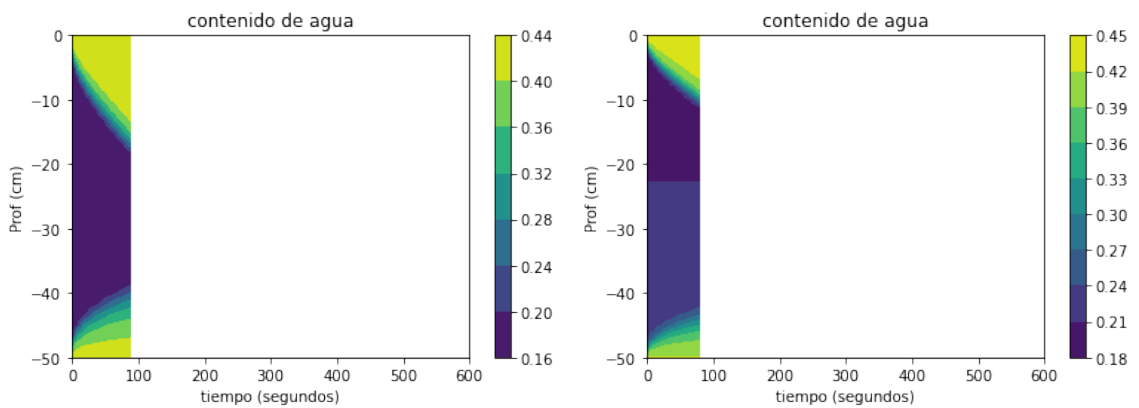
A continuación se anexan, a través de la Figura 3.14, los resultados de las simulaciones anteriores para el modelo explícito.

Se aprecia que la única simulación finalizada de manera exitosa es la Simulación 1. Lo que corrobora la inestabilidad de este modelo expresada en la literatura.



(a) Simulación 1 Modelo Explícito
Elapsed time: 12.1395819187 seconds.

(b) Simulación 2 Modelo Explícito
Elapsed time: 14.9113695621 seconds.



(c) Simulación 3 Modelo Explícito
Elapsed time: 76.6504547596 seconds.

(d) Simulación 4 Modelo Explícito
Elapsed time: 127.7162263393 seconds.

Figura 3.14: Resultados Modelo Explícito

3.5. Discusión y análisis de Resultados

A continuación se genera un pequeño análisis de los resultados presentados en la sección anterior.

3.5.1. Simulación 1

La simulación 1 se trata de una simulación de 10 cm de suelo en profundidad, con un espaciado internodal de 1 cm. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo que parte desde una superficie “seca” (con un valor de cabezal de presión de -500) y que va aumentando su humedad gradualmente en profundidad hasta llegar a la profundidad de -9 cm casi a la saturación (con un valor de cabezal de presión de -10). Además se tiene la existencia de drenaje libre, es decir se puede interpretar que no hay existencia de napa subterránea en la profundidad, sino que sólo hay agua acumulada en dicha zona. Además el tiempo total de simulación es de tan sólo 3 segundos, ya que al

tratarse de una profundidad de sólo 10 cm. Por lo tanto, en poco tiempo se puede apreciar el comportamiento que se ocasiona producto de la infiltración de agua superficial.

Al observar la Figura 3.8 se aprecia que los 4 modelos implementados tienen un comportamiento bastante similar en instancias pequeñas como esta; el agua va ingresando desde la superficie hacia el interior del suelo a medida que avanza el tiempo de la simulación, hasta llegar a los 2 cm de profundidad aproximadamente a los 3 segundos; además, en los niveles inferiores se observa que la humedad se dispersa producto de la capilaridad.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo de Quasi-Newton, con un tiempo de ejecución de 359.18 segundos; luego le sigue el modelo con enfoque Newton con un tiempo de ejecución de 220.67 segundos; y los modelos Linealizados tienen un tiempo de ejecución bastante menor, con un tiempo de 2.24 segundos el esquema 1 y 2.19 el esquema 2. Este resultado es bastante importante, dado que todos los modelos tienen resultados muy similares.

3.5.2. Simulación 2

La simulación 2 se trata de una simulación de 30 cm de suelo en profundidad, con un espaciado internodal de 1 cm. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo que parte muy seco de manera pareja (con un valor de -1000 para todos los nodos del perfil). Además se tiene la existencia de un valor fijo para la condición de borde inferior, h_{bottom} , de -75, lo que indicaría la presencia de una napa subterránea muy cercana a la profundidad máxima del perfil. Además el tiempo total de simulación es de 2 minutos, por lo que se espera que la infiltración de agua llegue a mayores profundidades que la simulación anterior.

Al observar la Figura 3.9 se aprecia que los 4 modelos implementados siguen teniendo un comportamiento bastante similar en instancias como esta, que es un poco más grande en profundidad y más grande en tiempo, que la simulación 1. El agua va ingresando desde la superficie hacia el interior del suelo a medida que avanza el tiempo de la simulación, hasta llegar aproximadamente hasta a los 13 cm de profundidad 2 minutos de tiempo; además, en los niveles inferiores se observa que la humedad sube desde la napa subterránea en niveles inferiores al perfil lentamente producto de la capilaridad, un poco más observables en los modelos Linealizados, lo que podría dar indicios de que los esquemas Linealizados podrían sobrestimar la capilaridad, o por el contrario, los modelos con enfoques de optimización, subestimarla. Cabe mencionar, que se puede observar pequeñas diferencias en los resultados obtenido por la Linealización esquema 2, lo que daría indicios de que este esquema, a pesar de obtener buenos resultados de ejecución, podría no ser del todo preciso.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo de Quasi-Newton, con un tiempo de ejecución de 371.09 segundos; luego le sigue el modelo con enfoque Newton con un tiempo de ejecución de 169.25 segundos; y los modelos Linealizados tienen un tiempo de ejecución bastante menor, con un tiempo de 1.12 segundos el esquema 1 y 1.01 segundos el esquema 2.

3.5.3. Simulación 3

La simulación 3 se trata de una simulación de 30 cm de suelo en profundidad, con un espaciado internodal de 1 cm. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo con humedad relativa de manera pareja (con un valor de -300 para todos los nodos del perfil). Además se tiene la existencia de un valor fijo para la condición de borde inferior, h_{bottom} , de -5, lo que indicaría la presencia de una napa subterránea inmediatamente posterior a la profundidad máxima del perfil. Además el tiempo total de simulación es de 10 minutos, que dada la pequeña profundidad del perfil, permite apreciar completamente el comportamiento de la dinámica del agua en este pequeño trozo de suelo.

Al observar la Figura 3.10 se aprecia que esta simulación permite notar diferencias en los resultados de los 4 modelos implementados. En los Modelos Enfoque Newton, Linealización esquema 1 y Linealización esquema 2, se observa que el agua comienza a difundirse rápidamente desde la superficie y al mismo tiempo comienza a subir por capilaridad, hasta que en un momento (cercano a los 300 segundos en Enfoque Newton y Linealización esquema 1, y 350 segundos en Linealización esquema 2) se funden y queda el perfil completamente saturado de agua en unos segundos posteriores. El comportamiento diferente obtenido por el modelo Linealizado esquema 2, con respecto al modelo enfoque Newton y Linealización 1, se aprecia en que el agua infiltrada desde la superficie ingresa de manera menos acelerada que en los otros 2 antes mencionados y además hay una sobreestimación de la capilaridad por parte de este modelo con respecto a los otros 2. En el resultado obtenido por el enfoque Quasi-Newton (Figura 3.10b) se puede apreciar que se alcanza un estado de equilibrio aproximadamente en el segundo 350 de la simulación, el cual por alguna razón no permite que el perfil completo sea saturado en su totalidad, lo cual da indicios de que este modelo podría tener imprecisiones en este tipo de instancias, ya que este resultado no es coherente con el modelo general descrito en el capítulo 2.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo de Quasi-Newton, con un tiempo de ejecución de 1690.77 segundos; luego le sigue el modelo con enfoque Newton con un tiempo de ejecución de 1472.79 segundos; y los modelos Linealizados tienen un tiempo de ejecución bastante menor, con un tiempo de 6.46 segundos el esquema 1 y 6.52 segundos el esquema 2.

3.5.4. Simulación 4

La simulación 4 se trata de una simulación de 50 cm de suelo en profundidad, con un espaciado internodal de 1 cm. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo que parte desde una superficie relativamente húmeda (con un valor de cabezal de presión de -200) y que va disminuyendo su humedad gradualmente en profundidad hasta llegar a la profundidad de -50 cm “seco” (con un valor de cabezal de presión de -1000). Además se tiene la existencia de un valor fijo para la condición de borde inferior, h_{bottom} , de -5, lo que indicaría la presencia de una napa subterránea inmediatamente posterior a la profundidad máxima del perfil. Así también, el tiempo total de simulación es de 5 minutos, que dada la pequeña profundidad del perfil, permite apreciar completamente el comportamiento de la dinámica del agua en el perfil de suelo de estudio.

Al observar la Figura 3.11 se aprecia que esta simulación permite apreciar pequeñas diferencias en los resultados de los 4 modelos implementados. En los Modelos Enfoque Newton, enfoque Quasi-Newton y Linealización esquema 1, se observa que el agua comienza a difundirse de igual manera, desde la superficie y al mismo tiempo comienza a subir desde el nivel inferior de manera mas atenuada por capilaridad. Cabe mencionar que en el modelo Linealizado Esquema 1 este último fenómeno es un poco más grande que en los otros 2 modelos. Si bien la representación de los resultados obtenidos por el modelo Linealización esquema 2 (Figura 3.11d) sigue las mismas tendencias de las representaciones de los resultados de los demás modelos, no son del todo congruentes, dado que de cierto tiempo en adelante la aceleración con la que se infiltra el agua en los niveles superiores del perfil disminuye; y también se percibe que la infiltración en los niveles inferiores producto de la capilaridad son sobrestimados en este modelo con respecto a los demás modelos, hasta tal punto que las infiltraciones de agua superiores y las inferiores son bastante similares. Este resultado no es coherente con el modelo general, descrito en el capítulo 2, puesto que la gravedad debiese generar resistencia en la capilaridad y favorecer la infiltración desde la superficie.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo de Quasi-Newton, con un tiempo de ejecución de 2091.87 segundos; luego le sigue el modelo con enfoque Newton con un tiempo de ejecución de 1003.70 segundos; y los modelos Linealizados tienen un tiempo de ejecución bastante menor, con un tiempo de 5.09 segundos el esquema 1 y 4.97 segundos el esquema 2.

3.5.5. Simulación 5

La simulación 5 se trata de una simulación de 2 metros de suelo en profundidad, con un espaciado internodal de 5 cm. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo que parte desde una superficie relativamente húmeda (con un valor de cabezal de presión de -200) y que va disminuyendo su humedad gradualmente en profundidad hasta llegar a la profundidad de -2 m “seco” (con un valor de cabezal de presión de -1000). Además se tiene la existencia de drenaje libre, es decir se puede interpretar que no hay existencia de napa subterránea en la profundidad. Así también, el tiempo total de simulación es de 4 minutos.

Al observar la Figura 3.12 se aprecia que los 4 modelos implementados tienen un comportamiento bastante similar en este tipo de instancias; el agua va ingresando desde la superficie hacia el interior del suelo a medida que avanza el tiempo de la simulación, hasta llegar a los 15 cm de profundidad aproximadamente a los 4 minutos; además, en los niveles inferiores se observa que no existe presencia mayor de humedad y que esto no cambia a medida que transcurre el tiempo de simulación.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo de Newton, con un tiempo de ejecución de 75.43 segundos; luego le sigue el modelo con enfoque Quasi-Newton con un tiempo de ejecución de 31.95 segundos; y los modelos Linealizados siguen teniendo un tiempo de ejecución bastante menor, con un tiempo de 0.42 segundos el esquema 1 y 0.37 el esquema 2. Este resultado muestra que hay instancias en que el modelo Enfoque Newton tiene tiempos mayores de ejecución que el modelo Enfoque Quasi-Newton.

3.5.6. Simulación 6

La simulación 6 se trata de una simulación de 2 m de suelo en profundidad, con un espaciado internodal de 1 cm. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo que se encuentra con una humedad relativa de manera pareja (con un valor de -500 para todos los nodos del perfil). Además se tiene la existencia de napa subterránea justo en el nivel inferior, representado por fijar h_{bottom} en el valor 0. Así también, el tiempo total de simulación es de 5 horas. Además esta simulación fue ejecutada sin riego, manteniendo un valor superficial del perfil de -500 para el cabezal de presión. La idea principal de generar esta instancia es por una parte tener una idea de cuáles serían unos buenos valores de inicialización para el valor h_i cuando hay existencia de napa subterránea cuando no ha habido riego (búsqueda de un estado estacionario); y por otra parte poner a prueba los modelos a altos tiempos de simulación.

Los modelos Newton y Quasi-Newton no fueron capaces de ejecutar la simulación en un periodo menor a 6 horas. Por lo que en la Figura 3.13 se aprecian gráficamente los resultados de tan sólo los modelos Linealizados. Se resalta enseguida que el modelo Linealización Esquema 2 no logra obtener buenos resultados en esta instancia, confirmando definitivamente que este modelo no aproxima bien los efectos de la capilaridad producto de napas subterráneas, sobrestimándola. En la gráfica de los resultados del modelo Linealizado Esquema 1 (figura 3.13a) se obtiene un comportamiento esperado, el agua sube paulatinamente desde la napa subterránea por efecto de la capilaridad y este efecto se va atenuando conforme pasa el tiempo; sin embargo, transcurridas las 5 horas del tiempo de ejecución aún no es posible considerar que se haya llegado a un estado estacionario, ya que aún se puede apreciar una pendiente positiva en algunas curvas de nivel; así también se observa ausencia de agua en la superficie del perfil en todo tiempo.

Con 180000 iteraciones en el tiempo y 200 nodos en profundidad los tiempos de ejecución fueron de 203.87 segundos para el modelo Linealizado Esquema 1 y de 154.77 segundos el modelo Linealizado Esquema 2 segundos. Además los modelos con enfoque Newton y Quasi-Newton no pudieron ejecutarse en un tiempo razonable para una computadora normal.

3.5.7. Análisis General

Los resultados en general muestran que los esquemas Linealizados tienen tiempos de ejecución mucho menor, manteniendo en particular el esquema Linealizado Esquema 1 resultados bastante consistentes con los resultados obtenidos por los modelos con enfoque Newton y con los resultados esperados.

El Modelo explícito no fue capaz de competir con el resto de los modelos, presentando inestabilidades en las simulaciones.

Entre el Esquema Newton y Quasi-Newton obtiene en general mejores resultados el modelo con enfoque Newton, tanto en resultados como en tiempos de ejecución.

Para la resolución en optimización no lineal el método estándar es Newton, que es un método bastante robusto. En los resultados mostrados en este capítulo es el método que obtiene

mejores resultados, en el sentido de ser los más coherentes. Sin embargo, dada la gran cantidad de datos e iteraciones a realizar, este obtiene tiempos de simulación bastante grandes.

El Modelo Linealizado 1 aproxima bien los resultados del Modelo Newton, pero con tiempos de ejecución mucho menores. El método Linealizado 1 es por lo tanto el mejor para modelar el problema de difusión de agua en suelos, y es el que se desea llevar a una etapa de producción en el futuro.

Por lo que para las implementaciones en 2 dimensiones se utilizan el modelo con enfoque Newton (que se ocupará como punto de referencia) y el modelo Linealizado esquema 1.

Capítulo 4

Modelo 2D

En este capítulo, se presenta la extensión del modelo de difusión 1-dimensional a 2 dimensiones. Para esto se considera un corte transversal de suelo, obteniendo así, un plano con horizonte y profundidad. Es decir, se consideran los ejes espaciales en x y z , respectivamente.

Es necesario definir la geometría del dominio, la cual depende básicamente del tipo de riego y de la topografía del terreno. En este trabajo se supone un dominio rectangular. Se definen nodos dentro de este dominio (ver Figura 4.1), en los cuales se quiere calcular el cabezal de presión y el contenido de agua volumétrico para cada instante de tiempo, de manera similar al modelado unidimensional.

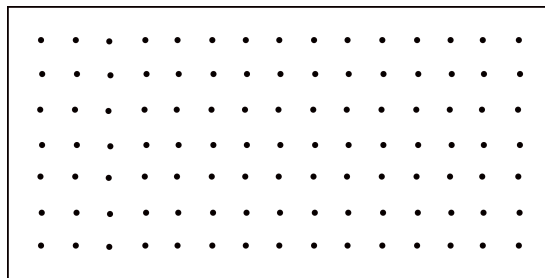


Figura 4.1: Dominio rectangular con nodos interiores

4.1. Ecuación 2D

Para el cálculo del contenido de agua en el dominio 2D, nuevamente se emplea la ecuación de Richards, ahora en su versión 2D. La ecuación de Richards (1931) [12] en su forma bidimensional es:

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(h)}{\partial z} - S \quad (4.1)$$

Donde: θ es el contenido de agua volumétrico; h el cabezal de presión; x variable espacial horizontal; z variable espacial profundidad; K la conductividad hidráulica y t es el tiempo.

4.2. Discretización 2D

Análogamente a lo efectuado en el modelo unidimensional, se quiere discretizar la ecuación (4.1) que modela el problema 2D en tiempo y espacio.

Considerando el dominio de la Figura 4.1 con dimensiones de *Ancho* y *Profundidad*, y un tiempo *Tiempototal* de estudio. Se quiere discretizar la ecuación 2D con un espaciado uniforme en ambas dimensiones espaciales, Δx en horizonte y Δz en profundidad, y en la dimensión temporal Δt . Se definen $I := \text{Ancho}/\Delta x$ la cantidad de nodos en horizontes (para cada profundidad); $N := \text{Profundidad}/\Delta z$ la cantidad de nodos en profundidad (para cada horizonte); y $T := \text{Tiempototal}/\Delta t$ la cantidad de discretizaciones en el tiempo (para cada nodo del perfil 2D).

Se nombra la tupla (r, i) para la ubicación espacial, donde la primera componente de la tupla denota la ubicación espacial en profundidad (eje z), y la segunda componente de la tupla denota la ubicación espacial en horizonte (eje x).

Con todo lo anterior, se denota $h_{(r,i)}^j$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, I\}$, $r \in \{1, 2, \dots, N\}$, y $j \in \{1, 2, \dots, T\}$ al cabezal de presión en cada discretización espacial (r, i) y temporal j . Y $K_{(r,i)}^j$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, I\}$, $r \in \{1, 2, \dots, N\}$, y $j \in \{1, 2, \dots, T\}$ la conductividad hidráulica para cada discretización espacial (r, i) y temporal j . Los índices (r, i) siguen la notación matricial inducida por los nodos: El nodo (r, i) es aquel que se ubica en la fila r (de arriba hacia abajo) y en la columna i (de izquierda a derecha) en el mallado de la Figura 4.1.

Ya con toda la notación, se puede escribir la ecuación (4.1) discretizada a partir esquema de diferencias finitas implícito con conductividades internodales:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{(r,i)}^{j+1} - \theta_{(r,i)}^j}{\Delta t} = & \frac{1}{\Delta x} \left[K_{(r,i+1/2)}^j \left(\frac{h_{(r,i+1)}^{j+1} - h_{(r,i)}^{j+1}}{\Delta x} \right) - K_{(r,i-1/2)}^j \left(\frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_{(r,i-1)}^{j+1}}{\Delta x} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\Delta z} \left[K_{(r+1/2,i)}^j \left(\frac{h_{(r+1,i)}^{j+1} - h_{(r,i)}^{j+1}}{\Delta z} \right) - K_{(r-1/2,i)}^j \left(\frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_{(r-1,i)}^{j+1}}{\Delta z} \right) \right] \\ & + \left(\frac{K_{(r+1/2,i)}^j - K_{(r-1/2,i)}^j}{\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.3. Condiciones de borde

- **Condición de Borde superficial:**

Para el modelamiento de la condición de borde superficial se consideran 3 instancias diferentes, que pueden ser escogidas, como un parámetro extra de la implementación.

- Estática:

Se impone que en la primera capa completa del perfil (cuando $r = 1$), el cabezal de presión h es igual a cero.

Esta condición es útil para comprobar el buen funcionamiento de la implementación. Además es equivalente a un apozamiento superficial de agua.

- Función espacial constante en el tiempo:

Se imponen valores del cabezal de presión h para cada nodo superficial del perfil. Esta condición es útil para simular por ejemplo un goteo artificial, imponiendo $h = 0$ en el nodo central de la superficie y dejando un valor fijo de cabezal de presión para el resto de los nodos superficiales, manteniendo una implementación muy similar a la condición superficial estática.

Cabe mencionar que esta condición es más bien experimental, ya que lo que se espera realmente es que si cae una gota en el centro de la superficie del dominio los nodos colindantes también cambien su valor de cabezal de presión en el tiempo.

- Modelo evolutivo 1D:

Se hace evolucionar la condición superficial en el tiempo, haciendo subrutinas del modelo unidimensional aplicadas a la superficie del dominio 2D.

Se considera que cae una gota justo en la mitad de la superficie, como se muestra en la Figura 4.2, y se modela el movimiento del agua en la superficie con el modelo unidimensional partiendo desde ese nodo medio hacia los extremos del dominio como si fuesen 2 dominios diferentes del modelo unidimensional.

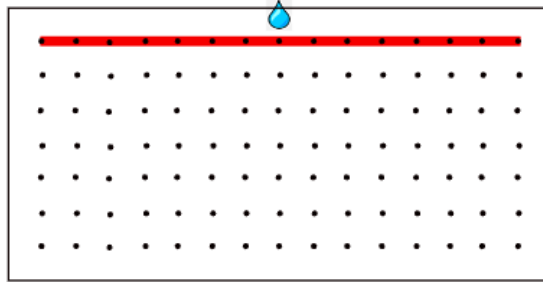


Figura 4.2

Es importante tener en cuenta que en las subrutinas del modelo unidimensional que se aplican, es necesario descartar el término correspondiente a los efectos de la gravedad sobre la partícula de agua que se tiene en la ecuación de Richards 1D (ver (3.6)) , puesto que el movimiento que se está calculando es horizontal. Es decir, la ecuación a emplear en este caso es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (4.3)$$

- **Condición de Borde Izquierda**

Para el modelamiento de las condiciones de borde izquierda, se supone que el suelo es homogéneo en horizonte. Es decir, que el valor de la conductividad hidráulica y del cabezal de presión al lado izquierdo inmediato del borde izquierdo del dominio, son iguales a los valores de la conductividad hidráulica y el cabezal de presión de los nodos del borde izquierdo del dominio.

- **Condición de Borde Derecha**

Análogamente a la condición de borde izquierda, para el modelamiento de las condiciones de borde derecha, se supone que el suelo es homogéneo en horizonte. Es decir, que el valor de la conductividad hidráulica y el cabezal de presión al lado derecho inmediato del borde derecho del dominio, son iguales a los valores de la conductividad hidráulica y el cabezal de presión de los nodos del borde izquierdo del dominio.

- **Condición de Borde Inferior**

Para el modelamiento de la condición de borde inferior se consideran 2 instancias diferentes, que pueden ser escogidas, como un parámetro extra de la implementación.

- Constante en el tiempo:

Se imponen valores del cabezal de presión h para cada nodo inferior del dominio.

Esta condición es útil para simular cambios importantes en la composición del suelo a cierta profundidad.

- Drenaje Libre:

Suponer drenaje libre es considerar que el suelo es homogéneo en profundidad. Es decir, que el valor de la conductividad hidráulica y el cabezal de presión en la profundidades inmediatamente inferior al dominio, son iguales a los valores de la conductividad hidráulica y el cabezal de presión, respectivamente, de los nodos del borde inferior del dominio.

4.4. Modelos de Implementación

Para la resolución de la ecuación anterior, se utiliza en este caso (dados los resultados unidimensionales), 2 tipos o modelos de implementación: tipo Newton y Linealización. Ambos modelos implementados a partir del esquema implícito de Diferencias Finitas y análogo a lo realizado en 1D.

4.4.1. Enfoque Newton

Discretización Implícita Presión 2D:

Reagrupando términos en la ecuación (4.2), se obtiene:

$$0 = \frac{\theta_{(r,i)}^{j+1} - \theta_{(r,i)}^j}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \left[K_{(r,i+1/2)}^j \left(\frac{h_{(r,i+1)}^{j+1} - h_{(r,i)}^{j+1}}{\Delta x} \right) - K_{(r,i-1/2)}^j \left(\frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_{(r,i-1)}^{j+1}}{\Delta x} \right) \right] - \frac{1}{\Delta z} \left[K_{(r+1/2,i)}^j \left(\frac{h_{(r+1,i)}^{j+1} - h_{(r,i)}^{j+1}}{\Delta z} \right) - K_{(r-1/2,i)}^j \left(\frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_{(r-1,i)}^{j+1}}{\Delta z} \right) \right] - \left(\frac{K_{(r+1/2,i)}^j - K_{(r-1/2,i)}^j}{\Delta z} \right) \quad (4.4)$$

Se define $F_{(r,i)}^j$ como el lado derecho de la ecuación (4.4). Luego de manera análoga a lo expuesto en la Sección 3.3.1 (Método Newton 1D), se quiere que el plano $F_{(r,i)}$ sea igual a cero para todo tiempo j . Lo cual es resuelto con la herramienta `fsolve` de `Matlab`.

Para la implementación de $F_{(r,i)}^j$, se divide el cálculo en 3 expresiones:

$$F_{(r,i)}^j = \text{DeltaTheta} - \text{AporteX} - \text{AporteZ} \quad (4.5)$$

Con:

$$\text{DeltaTheta} = \frac{\theta_{(r,i)}^{j+1} - \theta_{(r,i)}^j}{\Delta t}; \quad (4.6)$$

$$\text{AporteX} = \frac{1}{\Delta x} \left[K_{(r,i+1/2)}^j \left(\frac{h_{(r,i+1)}^{j+1} - h_{(r,i)}^{j+1}}{\Delta x} \right) - K_{(r,i-1/2)}^j \left(\frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_{(r,i-1)}^{j+1}}{\Delta x} \right) \right]; \quad (4.7)$$

$$\text{AporteZ} = \frac{1}{\Delta z} \left[K_{(r+1/2,i)}^j \left(\frac{h_{(r+1,i)}^{j+1} - h_{(r,i)}^{j+1}}{\Delta z} \right) - K_{(r-1/2,i)}^j \left(\frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_{(r-1,i)}^{j+1}}{\Delta z} \right) \right] - \left(\frac{K_{(r+1/2,i)}^j - K_{(r-1/2,i)}^j}{\Delta z} \right). \quad (4.8)$$

Pseudo-código

Primero se define la función $F_{(r,i)}$ siguiendo las consideraciones de las diferentes condiciones de borde.

Entrada: `hymas1`= variable que se quiere calcular;
`thetaj`= matriz theta que contiene los contenidos de agua volumétricos del perfil en el tiempo anterior `j`;
`i`= ubicación nodo en horizonte;
`r`= ubicación nodo en profundidad;
`dx`= espaciado a considerar entre nodos en horizonte;

dz = espaciado a considerar entre nodos en profundidad;
 dt = intervalos de tiempo en que se discretiza;
 θ_s = contenido de agua volumétrico en saturación;
 θ_r = contenido de agua volumétrico residual;
 ks = conductividad hidráulica del suelo en saturación;
 α, n, l de la ecuación de contenido de agua volumétrico (2.5);
 $hsup$ = vector cabezal de presión en la superficie del perfil;
 $hbottom$ = valor del cabezal de presión en el nivel inferior;

Salida: $F_{(r,i)}$ como el lado derecho de la ecuación (4.4)

Algoritmo 6: $F_{(r,i)}$

```

1  $\Delta\theta \leftarrow \frac{1}{dt} \frac{(\theta_r + (\theta_s - \theta_r))}{(1 + (-1 * (\alpha * h_{mas1(r-1,i)})^n)^{(n-1)/n}} - \theta_{aj}(r,i);$ 
2 si  $r_{aux} == N$  entonces
3   si  $h_{bottom} == 1$  entonces
4     Se calcula  $A_{aporteZ}$  sin el término  $K_{(r+1/2,i)}^j \left( \frac{h_{(r+1,i)}^{j+1} - h_{(r,i)}^{j+1}}{\Delta z} \right)$  de la expresión, y
       reemplazando  $\left( \frac{K_{(r+1/2,i)}^j - K_{(r-1/2,i)}^j}{\Delta z} \right) \leftarrow \left( \frac{K_{(N,i)}^j - K_{(N-1/2,i)}^j}{\Delta z} \right);$ 
5   fin
6   en otro caso
7     Se calcula  $A_{aporteZ}$  reemplazando  $K_{(r+1/2,i)}^j \left( \frac{h_{(r+1,i)}^{j+1} - h_{(r,i)}^{j+1}}{\Delta z} \right) \leftarrow K_{(N,i)}^j \left( \frac{h_{bottom}^{j+1} - h_{(N,i)}^{j+1}}{\Delta z} \right);$ 
8   fin
9 fin
10 si no, si  $r == 2$  entonces
11   Se calcula  $A_{aporteZ}$  reemplazando  $K_{(r-1/2,i)}^j \left( \frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_{(r-1,i)}^{j+1}}{\Delta z} \right) \leftarrow K_{(r-1/2,i)}^j \left( \frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_0(i)}{\Delta z} \right);$ 
12 fin
13 en otro caso
14   Se calcula  $A_{aporteZ}$  acorde a la ecuación (4.8)
15 fin
16 ;
17 si  $i == 1$  entonces
18   Se calcula  $A_{aporteX}$  eliminando el término  $K_{(r,i-1/2)}^j \left( \frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_{(r,i-1)}^{j+1}}{\Delta x} \right);$ 
19 fin
20 si no, si  $i == I$  entonces
21   Se calcula  $A_{aporteX}$  eliminando la expresión  $K_{(r,i+1/2)}^j \left( \frac{h_{(r,i+1)}^{j+1} - h_{(r,i)}^{j+1}}{\Delta x} \right);$ 
22 fin
23 en otro caso
24   Se calcula  $A_{aporteX}$  acorde a la ecuación (4.7)
25 fin
26  $F_{(r,i)} \leftarrow \Delta\theta - A_{aporteX} - A_{aporteZ}$ 

```

A continuación se presenta el pseudo-código del Modelo Implícito 2D Enfoque Newton.

Entrada: ancho= ancho del perfil 2D en centímetros;
prof=profundidad del perfil 2D en centímetros;
tiempo_total=tiempo en el que se quiere modelar;
dx= espaciado a considerar entre nodos en horizonte;
dz= espaciado a considerar entre nodos en profundidad;
dt= intervalos de tiempo en que se discretiza;
ks= conductividad en saturación del suelo;
hi= cabezal de presión del perfil completo en el tiempo 0;
 α , n, l de la ecuación de contenido de agua volumétrico (2.5);
 θ_s = contenido de agua volumétrico en saturación;
 θ_r = contenido de agua volumétrico residual;
hsup= valor del cabezal de presión en la superficie del perfil;
hbottom= valor del cabezal de presión en el nivel inferior;

Salida: Matriz cúbica θ : $\theta(\cdot, \cdot, j)$ contiene el contenido de agua volumétrico del perfil de suelo completo correspondiente a la discretización de tiempo j .

A continuación se presenta el pseudo-código de `implicita_presion_2D`.

Algoritmo 7: Cálculo Implícita 2D, condición de presión

```
1 Definir  $M = \lceil T/dt \rceil$  cantidad de discretizaciones en el tiempo;
2 Definir el vector de tiempos  $t = (t_j)_{j=1}^{(M+1)} = 0 : dt : (M + 1) * dt$ ;
3 Definir el vector de profundidades  $Z = 0 : -dz : -[prof/dz] * dz$ ;
4 Definir el vector de horizontes  $X = 1 : dx : [ancho/dx] * dx$ ;
5  $p2 \leftarrow$  largo de  $X$ , cantidad de columnas de las matrices a definir;
6  $p1 \leftarrow$  largo de  $Z$ , cantidad de filas de las matrices a definir;
7  $q \leftarrow$  largo del vector  $t$ ;
8  $h(:, :, 1) \leftarrow hi$ ;
9  $theta(:, :, 1) \leftarrow cont\_agua\_vol(hi)$ ;
10 para todo  $j = 1 : q - 1$  hacer
11     si  $hsup == 1$  entonces
12          $[h\_aux, thetasup] \leftarrow$  implicita_presion1D_modificada aplicada a la mitad de la superficie
            del perfil, con un tiempo total de  $dt$  y con  $hi$  como la medición del cabezal de
            presión de la mitad de la superficie de la superficie del perfil en el tiempo
            anterior;
13         Fijar el valor superficial del cabezal de presión en el tiempo  $j + 1$  como  $h\_aux$ 
            reflejada para cubrir la superficie completa;
14     fin
15     en otro caso
16         | Asignar el valor superficial en el tiempo  $j + 1$ ,  $h(1, :, j + 1) \leftarrow hsup$ ;
17     fin
18      $theta(1, :, j + 1) \leftarrow cont\_agua\_vol(h(1, :, j + 1))$ ;
19      $func \leftarrow$  función handle de la función  $F$  (versión 2D), con  $hjp1$  como variable y los
        demás parámetros fijos como sigue:  $theta_{j+1} = theta(:, :, j)$ ,  $dx$ ,  $dz$ ,  $dt$ ,  $theta_r$ ,  $theta_s$ ,
         $ks$ ,  $alpha$ ,  $l$ ,  $n$ ,  $h(1, :, j+1)$ ,  $hbottom$  tienen los mismos nombres de variables con
        valores ya asignados;
20      $h(2 : end, :, j + 1) \leftarrow fsolve(func, h(2 : end, :, j))$ ;
21      $theta(:, :, j + 1) \leftarrow cont\_agua\_vol(h(:, :, j + 1))$ ;
22 fin
```

4.4.2. Modelo Linealizado

Cabe recordar que para este tipo de implementación se modifica el lado izquierdo de la ecuación de Richards. Reemplazando $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial h}(h) \frac{\partial h}{\partial t}$ y asumiendo $\frac{\partial \theta}{\partial h}(h)$ constante en Δt .

Discretización Linealización 2D

En la ecuación (4.2) se trabaja el lado izquierdo empleando regla de la cadena, análogamente que en Linealizado 1D (ver Sección 3.3.3), obteniendo así la expresión:

$$\begin{aligned}
 C(h_{(r,i)}^j) \frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_{(r,i)}^j}{\Delta t} = & \frac{1}{\Delta x} \left[K_{(r,i+1/2)}^j \left(\frac{h_{(r,i+1)}^{j+1} - h_{(r,i)}^{j+1}}{2\Delta x} + \frac{h_{(r,i+1)}^j - h_{(r,i)}^j}{2\Delta x} \right) \right. \\
 & \left. - K_{(r,i-1/2)}^j \left(\frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_{(r,i-1)}^{j+1}}{2\Delta x} + \frac{h_{(r,i)}^j - h_{(r,i-1)}^j}{2\Delta x} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{\Delta z} \left[K_{(r+1/2,i)}^j \left(\frac{h_{(r+1,i)}^{j+1} - h_{(r,i)}^{j+1}}{2\Delta z} + \frac{h_{(r+1,i)}^j - h_{(r,i)}^j}{2\Delta z} \right) \right. \\
 & \left. - K_{(r-1/2,i)}^j \left(\frac{h_{(r,i)}^{j+1} - h_{(r-1,i)}^{j+1}}{2\Delta z} + \frac{h_{(r,i)}^j - h_{(r-1,i)}^j}{2\Delta z} \right) \right] \\
 & + \left(\frac{K_{(r+1,i)}^j - K_{(r-1,i)}^j}{2\Delta z} \right)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Donde $C(h_{(r,i)}^j) = \frac{\partial \theta}{\partial h}(h_{(r,i)}^j)$ es el almacenamiento de agua (ver ecuación (3.23)).

Con el objetivo de transformar la ecuación (4.9) a un sistema matricial, se reagrupan los términos de esta ecuación dejando los términos acompañados de h^{j+1} a un lado y los términos acompañados de h^j del otro lado de la igualdad,. Haciendo fácil verificar que el sistema matricial resultante corresponde con esta ecuación:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{K_{(r,i-1/2)}^j}{2\Delta x^2} h_{(r,i-1)}^{j+1} - \frac{K_{(r-1/2,i)}^j}{2\Delta z^2} h_{(r-1,i)}^{j+1} + \\
 & \left[\frac{K_{(r,i+1/2)}^j}{2\Delta x^2} + \frac{K_{(r,i-1/2)}^j}{2\Delta x^2} + \frac{C(h_{(r,i)}^j)}{\Delta t} + \frac{K_{(r+1/2,i)}^j}{2\Delta z^2} + \frac{K_{(r-1/2,i)}^j}{2\Delta z^2} \right] h_{(r,i)}^{j+1} - \frac{K_{(r+1/2,i)}^j}{2\Delta z^2} h_{(r+1,i)}^{j+1} \\
 & - \frac{K_{(r,i+1/2)}^j}{2\Delta x^2} h_{(r,i+1)}^{j+1} = \frac{K_{(r,i-1/2)}^j}{2\Delta x^2} h_{(r,i-1)}^j + \frac{K_{(r-1/2,i)}^j}{2\Delta z^2} h_{(r-1,i)}^j \\
 & + \left[\frac{C(h_{(r,i)}^j)}{\Delta t} - \frac{K_{(r,i+1/2)}^j}{2\Delta x^2} - \frac{K_{(r,i-1/2)}^j}{2\Delta x^2} - \frac{K_{(r+1/2,i)}^j}{2\Delta z^2} - \frac{K_{(r-1/2,i)}^j}{2\Delta z^2} \right] h_{(r,i)}^j \\
 & + \frac{K_{(r+1/2,i)}^j}{2\Delta z^2} h_{(r+1,i)}^j + \frac{K_{(r,i+1/2)}^j}{2\Delta x^2} h_{(r,i+1)}^j + \left(\frac{K_{(r+1,i)}^j - K_{(r-1,i)}^j}{2\Delta z} \right)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Nombrando:

$$a_z(r, i) = \frac{K_{(r-1/2,i)}^j}{2\Delta z^2}; \quad a_x(r, i) = \frac{K_{(r,i-1/2)}^j}{2\Delta x^2}; \quad b_z(r, i) = \frac{K_{(r+1/2,i)}^j}{2\Delta z^2}; \quad b_x(r, i) = \frac{K_{(r,i+1/2)}^j}{2\Delta x^2};$$

$$e(r, i) = a_z(r, i) + a_x(r, i) + \frac{C(h_{(r,i)}^j)}{\Delta t} + b_z(r, i) + b_x(r, i);$$

$$d(r, i) = \frac{C(h_{(r,i)}^j)}{\Delta t} - b_x(r, i) - a_x(r, i) - b_z(r, i) - a_z(r, i).$$

Se reescribe la ecuación quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & -a_z(r, i)h_{(r-1,i)}^{j+1} - a_x(r, i)h_{(r,i-1)}^{j+1} + e(r, i)h_{(r,i)}^{j+1} - b_x(r, i)h_{(r,i+1)}^{j+1} - b_z(r, i)h_{(r+1,i)}^{j+1} = \\ & a_z(r, i)h_{(r-1,i)}^j + a_x(r, i)h_{(r,i-1)}^j + d(r, i)h_{(r,i)}^j + b_x(r, i)h_{(r,i+1)}^j + b_z(r, i)h_{(r+1,i)}^j \\ & + \left(\frac{K_{(r+1,i)}^j - K_{(r-1,i)}^j}{2\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Se quiere nuevamente transformar estas ecuaciones en un sistema matricial. Para esto se transforma la matriz de cabezal de presión del perfil h^j en un vector, para cada tiempo j . Esto se hace añadiendo a un vector auxiliar el perfil en profundidad completo para cada horizonte, como se esquematiza en la Figura 4.3

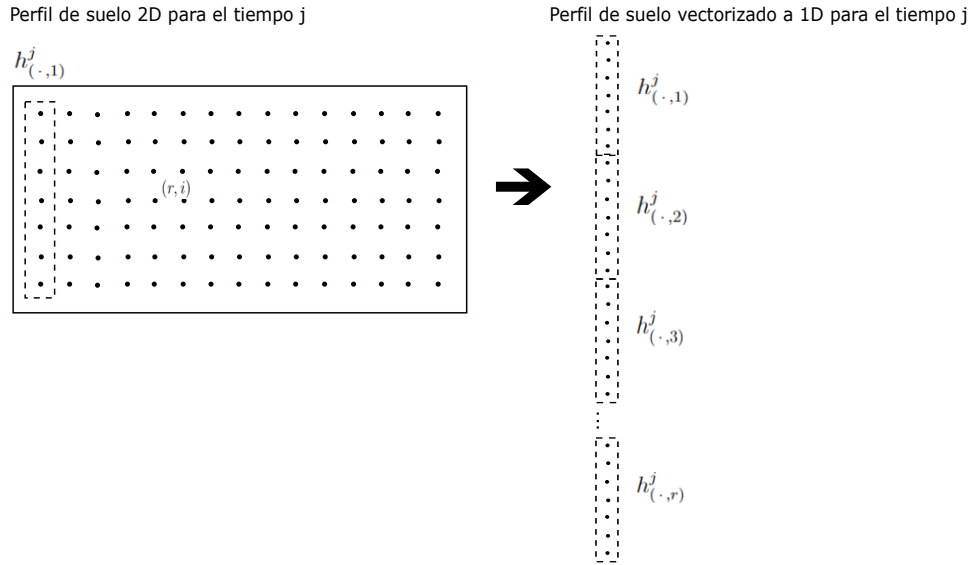


Figura 4.3: Transformación del dominio 2D para implementación “Linealizado 2D”

El vector que representa el dominio 2D en cada iteración, es obtenido mediante la transformación $(r, i) \rightarrow (i - 1)N + r$, la cual es utilizada además en la creación de la matriz del sistema lineal a resolver en este modelo.

Condiciones de Borde

- **Cuando** $i = 1$, se está situado en el borde izquierdo del dominio. Por lo tanto, por lo dicho en la sección 4.3, se impone que $h_{(r,i-1)}^j := h_{(r,i)}^j \quad \forall r > 1, \forall j > 1$, cuando $i = 1$.

Lo anterior refleja como resultado la cancelación de términos asociados a a_x en la ecuación (4.11). Obteniendo ecuaciones asociadas al lado izquierdo del dominio (para $i = 1$):

$$\begin{aligned}
 & -a_z(r, i)h_{(r-1,i)}^{j+1} + e_{Izq}(r, i)h_{(r,i)}^{j+1} - b_x(r, i)h_{(r,i+1)}^{j+1} - b_z(r, i)h_{(r+1,i)}^{j+1} = \\
 & a_z(r, i)h_{(r-1,i)}^j + d_{Izq}(r, i)h_{(r,i)}^j + b_x(r, i)h_{(r,i+1)}^j + b_z(r, i)h_{(r+1,i)}^j \\
 & + \left(\frac{K_{(r+1,i)}^j - K_{(r-1,i)}^j}{2\Delta z} \right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 e_{Izq}(r, i) &= a_z(r, i) + b_x(r, i) + b_z(r, i) + \frac{C(h_{(r,i)}^{j+1})}{\Delta t}; \\
 d_{Izq}(r, j) &= -a_z(r, i) - b_x(r, i) - b_z(r, i) + \frac{C(h_{(r,i)}^j)}{\Delta t}.
 \end{aligned}$$

- **Cuando** $i = I$, se está situado en el borde izquierdo del dominio. Por lo tanto, se impone $h_{(r,i+1)}^j := h_{(r,i)}^j \quad \forall r > 1, \forall j > 1$, cuando $i = I$. Lo anterior reflaja como resultado la cancelación de términos asociados a b_x en la ecuación (4.11). Obteniendo ecuaciones asociadas al lado derecho del dominio (para $i = I$):

$$\begin{aligned}
 & -a_z(r, i)h_{(r-1,i)}^{j+1} - a_x(r, i)h_{(r,i-1)}^{j+1} + e_{Der}(r, i)h_{(r,i)}^{j+1} - b_z(r, i)h_{(r+1,i)}^{j+1} = \\
 & a_z(r, i)h_{(r-1,i)}^j + a_x(r, i)h_{(r,i-1)}^j + d_{Der}(r, i)h_{(r,i)}^j + b_z(r, i)h_{(r+1,i)}^j \\
 & + \left(\frac{K_{(r+1,i)}^j - K_{(r-1,i)}^j}{2\Delta z} \right)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 e_{Der}(r, i) &= a_z(r, i) + a_x(r, i) + b_z(r, i) + \frac{C(h_{(r,i)}^{j+1})}{\Delta t}; \\
 d_{Der}(r, i) &= -a_z(r, i) - a_x(r, i) - b_z(r, i) + \frac{C(h_{(r,i)}^j)}{\Delta t}.
 \end{aligned}$$

- **Cuando** $r = 1$, se está situado en el borde superior del dominio. Para las 3 instancias presentadas en la sección 4.3, se debe imponer en vez de la ecuación (4.11), las ecuaciones dadas por:

$$h_{(r,i)}^{j+1} = h_{sup}(i) \tag{4.14}$$

Donde para las 2 primeras instancias es fija y para la tercera instancia debe ser calculada para ese tiempo, mediante la ecuación de Richards 1D en el eje x (sin gravedad).

- **Cuando** $r = N$, se está situado en el borde inferior del dominio.

Para la instancia en que se considera cabezal inferior constante, se debe imponer en vez de la ecuación (4.11), las ecuaciones dadas por:

$$h_{(r,i)}^{j+1} = h_{bottom}(i) \quad (4.15)$$

Para la instancia en que se considera drenaje libre, se debe imponer que $h_{(r+1,i)}^j := h_{(r,i)}^j$ $\forall i \in \{2, 3, \dots, I-1\}$, $\forall j > 1$ y que $K_{(r+1,i)}^j := K_{(r,i)}^j$ $\forall i, \forall j > 1$, cuando $r = N$. Lo anterior refleja como resultado la cancelación de términos asociados a b_z en la ecuación (4.11). Obteniendo las ecuaciones asociadas al borde inferior del dominio (para $r = N$):

$$\begin{aligned} & -a_z(r, i)h_{(r-1,i)}^{j+1} - a_x(r, i)h_{(r,i-1)}^{j+1} + e_{Prof}(r, i)h_{(r,i)}^{j+1} - b_x(r, i)h_{(r,i+1)}^{j+1} = \\ & a_z(r, i)h_{(r-1,i)}^j + a_x(r, i)h_{(r,i-1)}^j + d_{Prof}(r, i)h_{(r,i)}^j + b_x(r, i)h_{(r,i+1)}^j \\ & + \left(\frac{K_{(r,i)}^j - K_{(r-1,i)}^j}{2\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Donde:

$$\begin{aligned} e_N(r, i) &= a_z(r, i) + a_x(r, i) + b_x(r, i) + \frac{C(h_{(r,i)}^{j+1})}{\Delta t} \\ d_N(r, i) &= -a_z(r, i) - a_x(r, i) - b_x(r, i) + \frac{C(h_{(r,i)}^j)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Para los extremos $i = 1$ y $i = I$ de esta instancia, se cancelan tanto los términos asociados a la profundidad (b_z), como los asociados a los bordes (a_x y b_x respectivamente). Obteniendo la ecuación:

$$\begin{aligned} & -a_z(N, 1)h_{(N-1,1)}^{j+1} + \left(a_z(N, 1) + b_x(N, 1) + \frac{C(h_{(N,1)}^{j+1})}{\Delta t} \right) h_{(N,1)}^{j+1} - b_x(N, 1)h_{(N,2)}^{j+1} = \\ & a_z(N, 1)h_{(N-1,1)}^j + \left(-a_z(N, 1) - b_x(N, 1) + \frac{C(h_{(N,1)}^j)}{\Delta t} \right) h_{(N,1)}^j + b_x(N, 1)h_{(N,2)}^j \\ & + \left(\frac{K_{(N,1)}^j - K_{(N-1,1)}^j}{2\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

y la ecuación:

$$\begin{aligned} & -a_z(N, I)h_{(N-1,I)}^{j+1} - a_x(N, I)h_{(N,I-1)}^{j+1} + \left(a_z(N, I) + a_x(N, I) + \frac{C(h_{(N,I)}^{j+1})}{\Delta t} \right) h_{(N,I)}^{j+1} = \\ & a_z(N, I)h_{(N-1,I)}^j + a_x(N, I)h_{(N,I-1)}^j + \left(-a_z(N, I) - a_x(N, I) + \frac{C(h_{(N,I)}^j)}{\Delta t} \right) h_{(N,I)}^j \\ & + \left(\frac{K_{(N,I)}^j - K_{(I-1,I)}^j}{2\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Pseudo código

A continuación se presenta el pseudo-código del modelo Linealizado 2D.

Entrada: ancho= ancho del perfil 2D en centímetros;
prof=profundidad del perfil 2D en centímetros;
tiempo_total=tiempo en el que se quiere modelar;
dx= espaciado a considerar entre nodos en horizonte;
dz= espaciado a considerar entre nodos en profundidad;
dt= intervalos de tiempo en que se discretiza;
ks= conductividad en saturación del suelo;
hi= cabezal de presión del perfil completo en el tiempo 0;
 α , n, l parámetros de suelo utilizados en la ecuación (2.5);
 θ_s = Contenido de agua volumétrico en saturación;
 θ_r = Contenido de agua volumétrico residual;
hsup= valor del cabezal de presión en la superficie del perfil;
hbottom= valor del cabezal de presión en el nivel inferior;

Salida: Matriz cúbica θ , donde $\theta(:, :, j)$ contiene el contenido de agua volumétrico del perfil de suelo completo correspondiente al tiempo t_j .

Algoritmo 8: Linealización 2D, primera parte de código

- 1 Definir $M = \lfloor T/dt \rfloor$ cantidad de discretizaciones en el tiempo;
 - 2 Definir el vector de tiempos $t = (t_j)_{j=1}^{(M+1)} = 0 : dt : (M + 1) * dt$;
 - 3 $p \leftarrow N * I$;
 - 4 $q \leftarrow \text{length}(t)$;
 - 5 $h(:, :, 1) \leftarrow hi$;
 - 6 $\theta(:, :, 1) \leftarrow \text{cont_agua_vol}(hi)$;
-

Algoritmo 9: Inicializacion

```
1 si  $hsup==1$  entonces
2    $[h_{aux}, \theta_{sup}] \leftarrow \text{implicita\_presion1D\_modificada}$  aplicada a la mitad de la
   superficie del perfil, con un tiempo total de  $dt$  y con  $h_i$  como la medición del
   cabezal de presión de la mitad de la superficie de la superficie del perfil en el
   tiempo anterior;
3   Fijar el valor superficial del cabezal de presión en el tiempo  $j + 1$  como  $h_{aux}$ 
   reflejada para cubrir la superficie completa;
4 fin
5 si no, si  $h \leq 0$  entonces
6   | Asignar el valor superficial en el tiempo  $j + 1$   $h(1, \cdot, j + 1) \leftarrow hsup$ ;
7 fin
8  $\theta(1, \cdot, j + 1) \leftarrow \text{cont\_agua\_vol}(h(1, \cdot, j + 1))$ ;
9  $h_j \leftarrow h(:, \cdot, j)$ ;
10  $\theta_j \leftarrow \theta(:, \cdot, j)$ ;
11 Se inicializan  $az$ ,  $ax$ ,  $bz$ ,  $bx$ ,  $e$ ,  $d$  como matrices de ceros de  $N \times I$ ;
12 Definir matriz de almacenamiento de agua,  $c \leftarrow \text{almacenamiento\_agua}(h_j)$ ;
13 Definir matriz de conductividades,  $K \leftarrow \text{conductividad}(\theta_j)$ ;
```

Algoritmo 10: Linealización 2D, segunda parte de código

```
12 para todo  $j = 1 : q - 1$  hacer
13   Inicializacion
14   para todo  $r=2:N-1$  hacer
15     Cuando  $i=1$   $az(r,1) \leftarrow 0$ ,  $ax$ ,  $bz$ ,  $bx$  según (4.10);
16     Cuando  $i=I$   $bx(r,I) \leftarrow 0$ ,  $az$ ,  $ax$ ,  $bz$  según (4.10);
17     Todos los demás casos se calculan los términos  $az, bz, ax, bx$  se calculan según (4.10);
18   fin
19   si  $hbottom==1$  entonces
20      $bz(N,i) \leftarrow 0$ ;
21     Cuando  $i=1$ ,  $ax(N,1) \leftarrow 0$ ;  $az, bx$  según (4.10);
22     Cuando  $i=I$ ,  $bx(N,I) \leftarrow 0$ ,  $az, ax$  según (4.10);
23     Cuando  $i \in \{2, \dots, I-1\}$ ,  $az(N,i), ax(N,i), bx(N,i)$  se calculan según (4.10);
24   fin
25    $e \leftarrow az + ax + bz + bx + c$ ;
26    $d \leftarrow 2 * c - e$ ;
27   Definir  $A \leftarrow$  matriz de ceros de  $p \times p$ ;
28   Definir  $B \leftarrow$  vector de largo  $p$ ;
29   para todo  $i \in \{2, \dots, I\}, r \in \{2, \dots, N\}$  hacer
30      $A((i-1) * N + r, (i-1) * N + r - 1) \leftarrow -az(r,i)$ ;
31      $A((i-1)N + r, (i-2)N + r) \leftarrow -ax(r,i)$ ;
32      $A((i-1)N + r, (i-1)N + r) \leftarrow e(r,i)$ ;
33      $A((i-1)N + r, (i-1)N + r + 1) \leftarrow -bz(r,i)$ ;
34      $A((i-1)N + r, i \cdot N + r) \leftarrow -bx(r,i)$ ;
35      $B((i-1)N + r) \leftarrow az(r,i)h_j(r-1,i) + ax(r,i)h_j(r,i-1) + d(r,i)h_j(r,i) + z(r,i)h_j(r+1,i) +$   

        $bx(r,i)h_j(r,i+1) + \frac{(K(r+1,i)-K(r-1,i))}{(2*dz)}$ ;
36   fin
37   Para  $r=1$ , se definen  $A((i-1)N + 1, (i-1)N + 1) = 1$ ,  $B((i-1)N + 1) = h_{sup}(i)$ ; para todo  $i$ ;
38   Cuando  $i=1$ , se omite definir  $A((i-1)N + r, (i-2)N + r)$  y se define  $B((i-1)N + r)$  sin
   el término  $ax$ ;
39   Cuando  $i=I$ , se omite definir  $A((i-1)N + r, i \cdot N + r)$  y se define  $B((i-1)N + r)$  sin el
   término  $bx$ ;
40   Para  $r=N$ , si  $hbottom==1$  entonces
41     Se definen  $A((i-1)N + r, (i-1)N + r - 1) \leftarrow -az(r,i)$ ;
        $A((i-1)N + r, (i-2)N + r) = -ax(r,i)$ ;  $A((i-1)N + r, (i-1)N + r) \leftarrow e(r,i)$ ;
        $A((i-1)N + r, iN + r) \leftarrow -bx(r,i)$ ;  $B$  sin el términos  $bz$ ; eliminando los términos
       respectivos cuando  $i=1$  y cuando  $i=I$ ;
42   fin
43   en otro caso
44     Se definen  $A((i-1)N + N, (i-1)N + N) = 1$ ;  $B((i-1)N + N) = h_{bottom}(i)$ ;
45   fin
46   Se guarda el resultado de  $linsolve(A,B)$  en  $h(:,j+1)$  y en  $theta(:,j+1)$ ;
47 fin
```

4.5. Casos de estudio y simulación

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de los distintos modelos 2D.

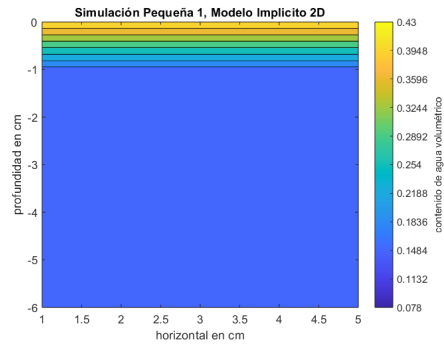
Dado que la matriz resultado de los modelos en el caso 2D es una matriz cúbica, para analizar los resultados es necesario contar con animaciones. En este informe se dividen estas animaciones en 8 frames (discretizaciones totales en el tiempo divididas en 8). Para cada modelo se presentan entonces 8 frames que muestran gráficamente la secuencia de resultados para cada simulación.

Las simulaciones se dividen en 2 tipos: pequeñas y medianas. Se generan 3 simulaciones pequeñas diferentes y 4 medianas. La limitante de tamaño de las simulaciones se debe a que se desea comparar los resultados con el método de Newton, que no logra ejecutar instancias grandes en tiempo razonable.

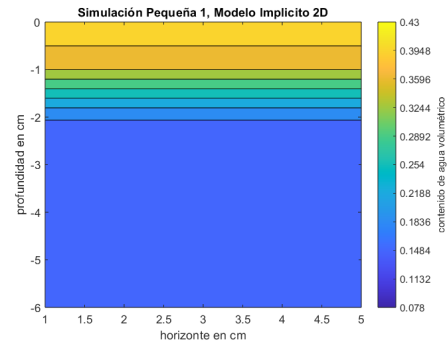
La primera simulación, es una simulación pequeña y se basa en los siguientes parámetros.

```
ancho=5;
prof= 6;
tiempo_total=5; %segundos
dx=1;
dzi=1;
dt=1e-3;
hsup=0*ones(1,ceil(ancho/dx)*dx);
hi=-300*ones(ceil(prof/dzi)*dzi+1,ceil(ancho/dx)*dx);
ks=0.00922; %ks en cm/s
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.43;
theta_r= 0.078;
hbottom=1;
```

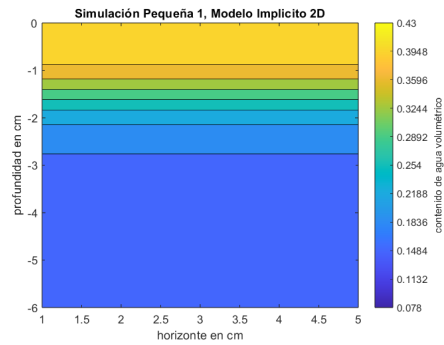
A continuación se muestran las gráficas de resultados de cada modelo para la Simulación Pequeña 1. Además se proporcionan sus respectivos tiempos de ejecución.



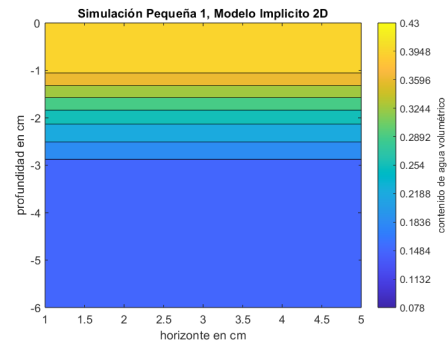
(a) Modelo Implícito 2D, frame 1



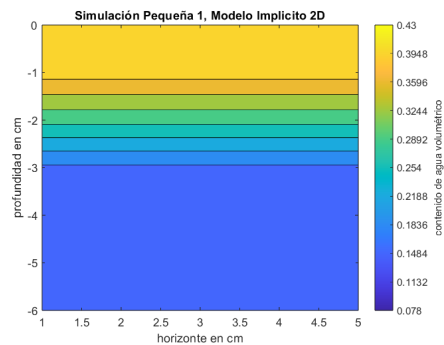
(b) Modelo Implícito 2D, frame 2



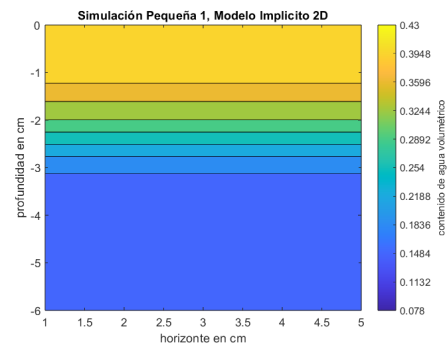
(c) Modelo Implícito 2D, frame 3



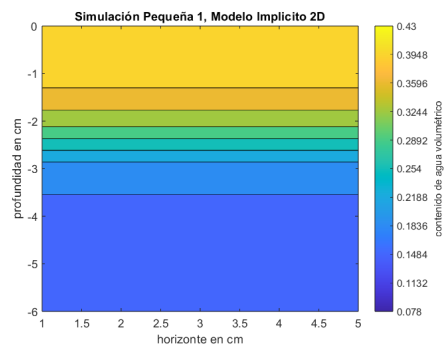
(d) Modelo Implícito 2D, frame 4



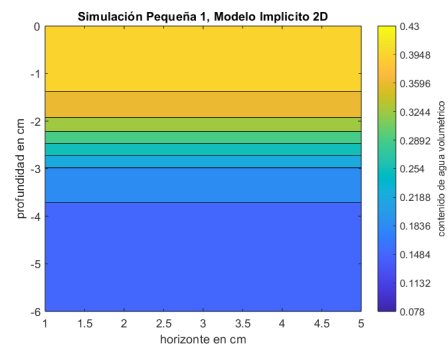
(e) Modelo Implícito 2D, frame 5



(f) Modelo Implícito 2D, frame 6

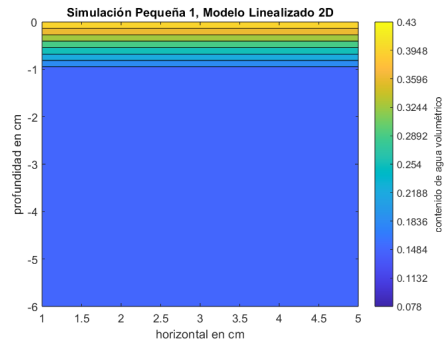


(g) Modelo Implícito 2D, frame 7

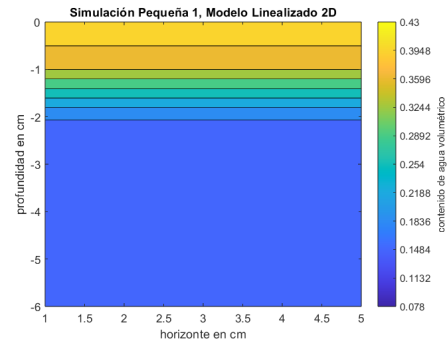


(h) Modelo Implícito 2D, frame 8

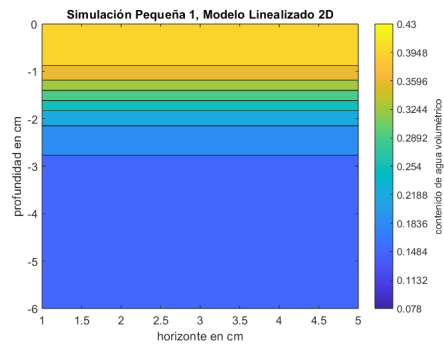
Figura 4.4: Simulación 1, Implícita Presión 2D. Tiempo ejecución: 134.916410 s.



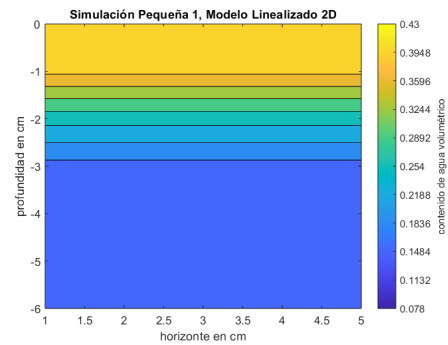
(a) Modelo Linealizado 2D, frame 1



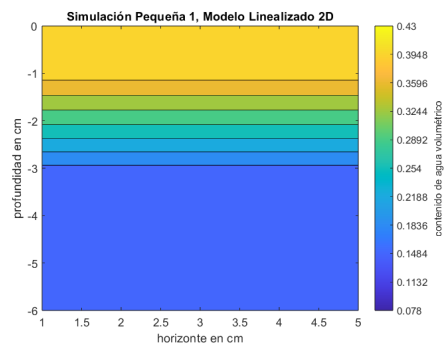
(b) Modelo Linealizado 2D, frame 2



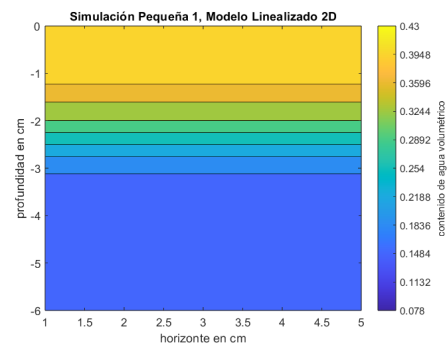
(c) Modelo Linealizado 2D, frame 3



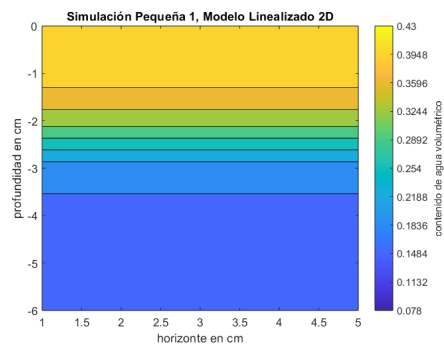
(d) Modelo Linealizado 2D, frame 4



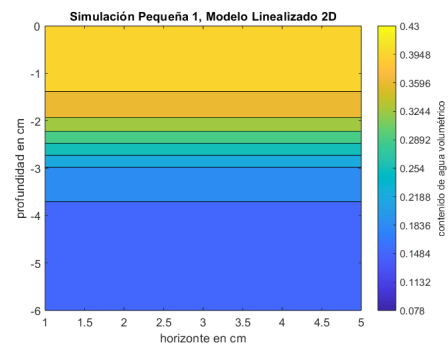
(e) Modelo Linealizado 2D, frame 5



(f) Modelo Linealizado 2D, frame 6



(g) Modelo Linealizado 2D, frame 7



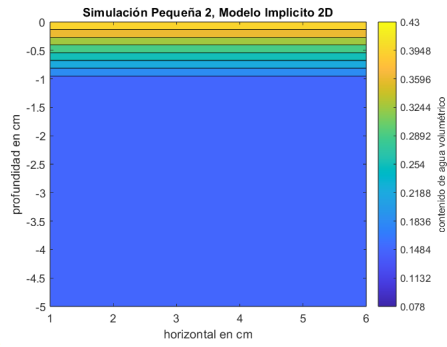
(h) Modelo Linealizado 2D, frame 8

Figura 4.5: Simulación Pequeña 1, Modelo Linealizado 2D. Tiempo ejecución: 2.412700 s.

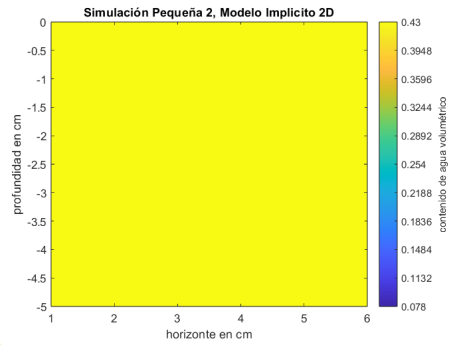
La Simulación pequeña número 2, se genera con los siguientes parámetros.

```
ancho=6;
prof= 5;
tiempo_total=3600; %segundos
dx=1;
dzi=1;
dt=1;
hi=-300*ones(ceil(prof/dzi)*dzi+1,ceil(ancho/dx)*dx);
ks=0.00922; %ks en cm/s
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.43;
theta_r= 0.078;
hsup=zeros(1,6);
hbottom=1;
```

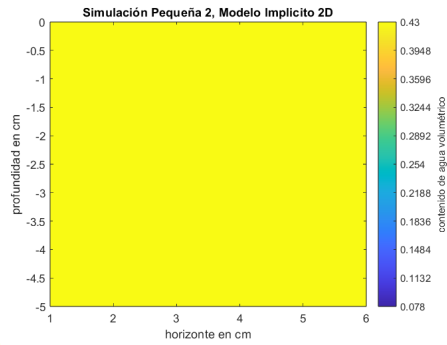
A continuación se muestran las gráficas de resultados de cada modelo para la Simulación Pequeña 1. Además se proporcionan sus respectivos tiempos de ejecución.



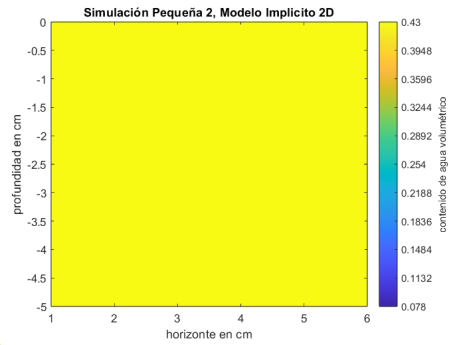
(a) Modelo Implícito 2D, frame 1



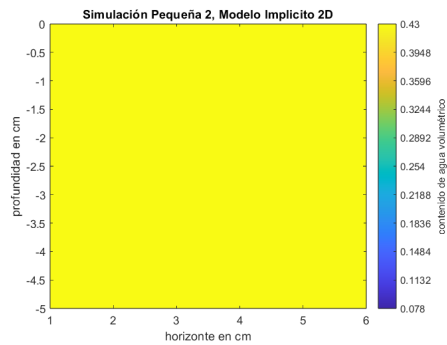
(b) Modelo Implícito 2D, frame 2



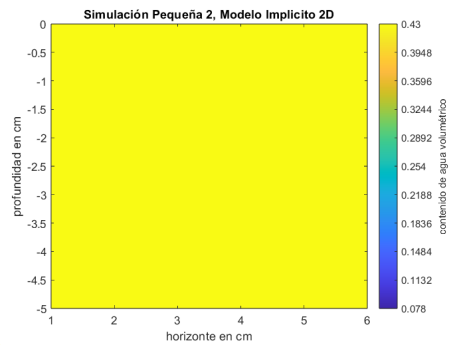
(c) Modelo Implícito 2D, frame 3



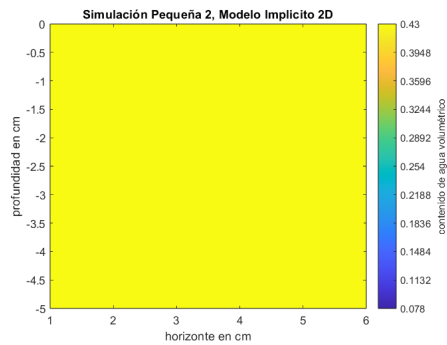
(d) Modelo Implícito 2D, frame 4



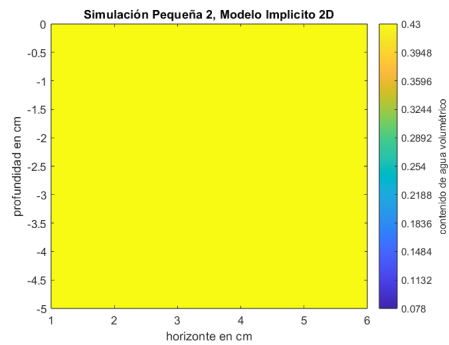
(e) Modelo Implícito 2D, frame 5



(f) Modelo Implícito 2D, frame 6

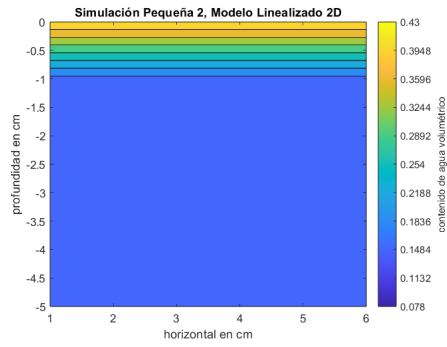


(g) Modelo Implícito 2D, frame 7

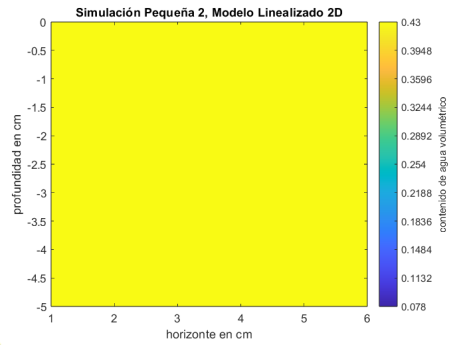


(h) Modelo Implícito 2D, frame 8

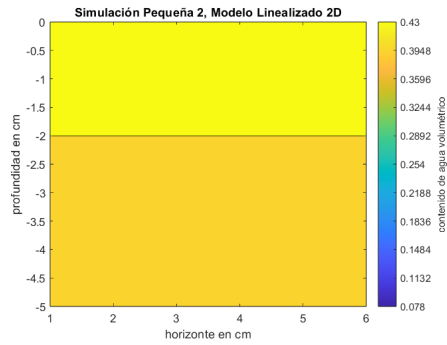
Figura 4.6: Simulación Pequeña 2, Implícita Presión 2D. Tiempo ejecución: 40.466760 s.



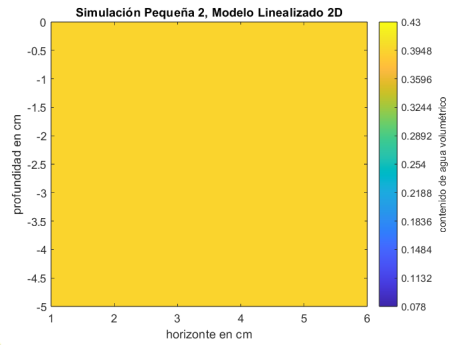
(a) Modelo Linealizado 2D, frame 1



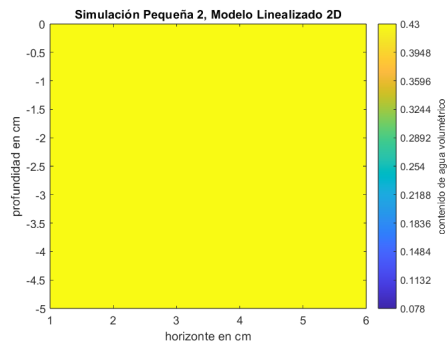
(b) Modelo Linealizado 2D, frame 2



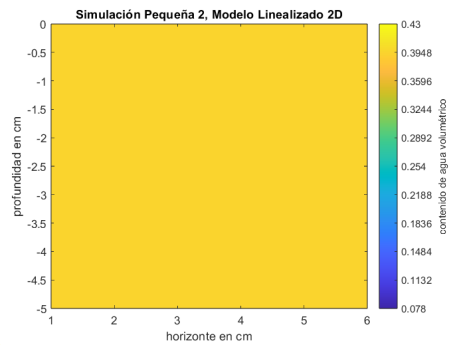
(c) Modelo Linealizado 2D, frame 3



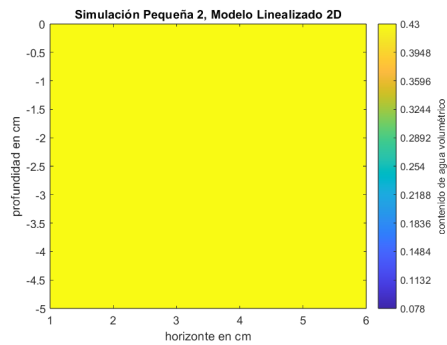
(d) Modelo Linealizado 2D, frame 4



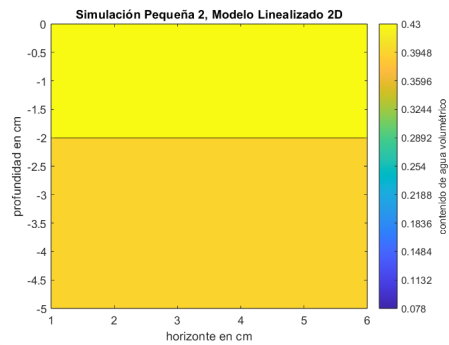
(e) Modelo Linealizado 2D, frame 5



(f) Modelo Linealizado 2D, frame 6



(g) Modelo Linealizado 2D, frame 7



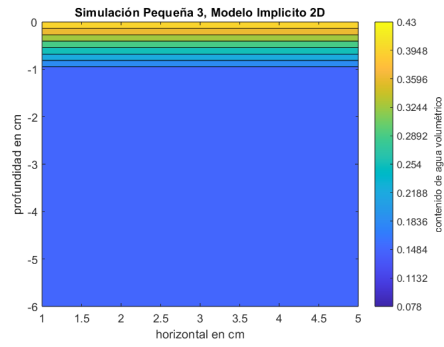
(h) Modelo Linealizado 2D, frame 8

Figura 4.7: Simulación Pequeña 2, Modelo Linealizado 2D. Tiempo ejecución: 1.513481 s.

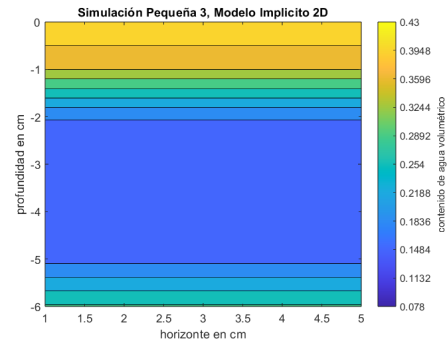
La Simulación pequeña número 3 se genera con los siguiente parámetros:

```
ancho=5;
prof= 6;
tiempo_total=5; %segundos
dx=1;
dzi=1;
dt=1e-3;
hsup=0*ones(1,ceil(ancho/dx)*dx);
hi=-300*ones(ceil(prof/dzi)*dzi+1,ceil(ancho/dx)*dx);
ks=0.00922; %ks en cm/s
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.43;
theta_r= 0.078;
hbottom=-5*ones(1,ceil(ancho/dx)*dx);
```

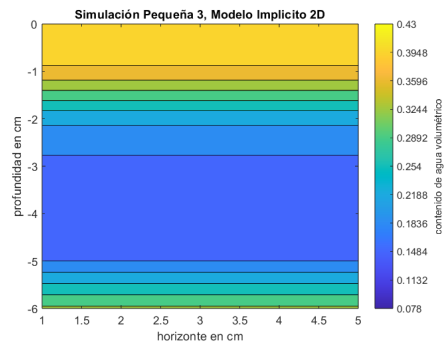
A continuación se presentan las gráficas de resultados de cada modelo para la Simulación Pequeña 3. Además, se proporcionan sus respectivos tiempos de ejecución.



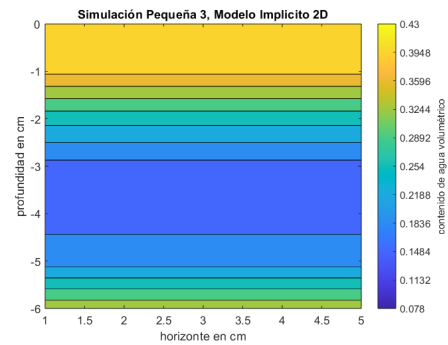
(a) Modelo Implícito 2D, frame 1



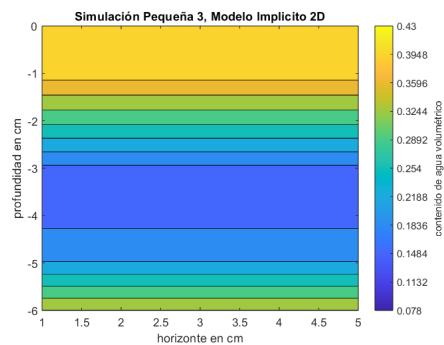
(b) Modelo Implícito 2D, frame 2



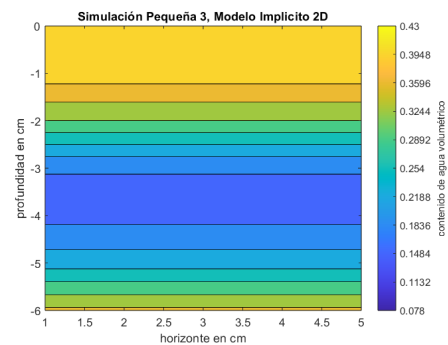
(c) Modelo Implícito 2D, frame 3



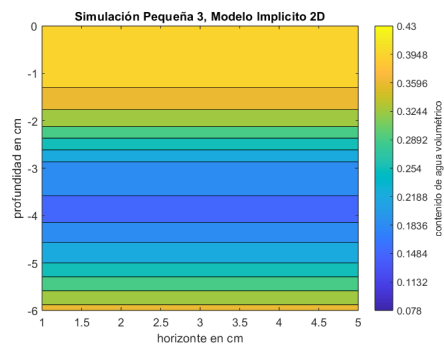
(d) Modelo Implícito 2D, frame 4



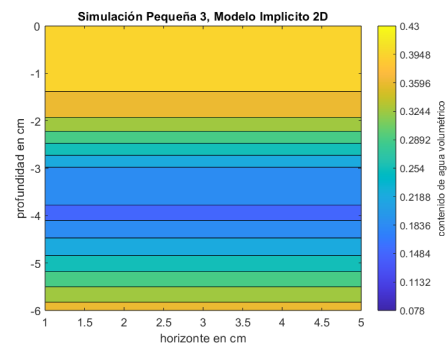
(e) Modelo Implícito 2D, frame 5



(f) Modelo Implícito 2D, frame 6

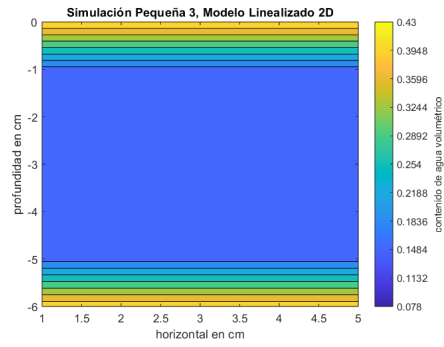


(g) Modelo Implícito 2D, frame 7

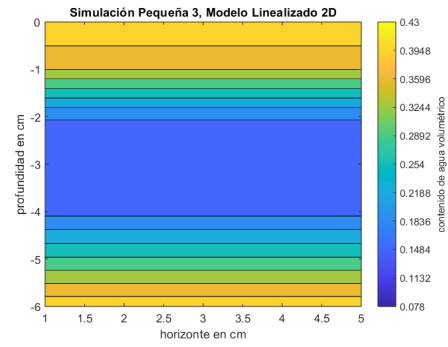


(h) Modelo Implícito 2D, frame 8

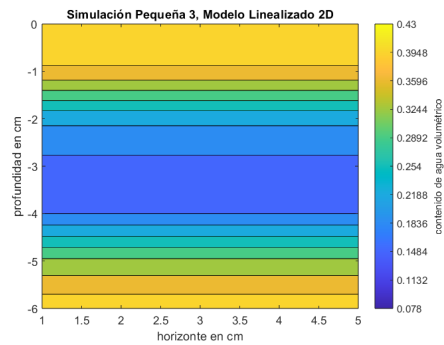
Figura 4.8: Simulación Pequeña 3, Implícita Presión 2D. Tiempo ejecución: 142.081474 s.



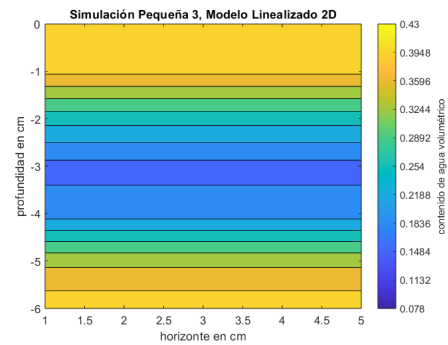
(a) Modelo Linealizado 2D, frame 1



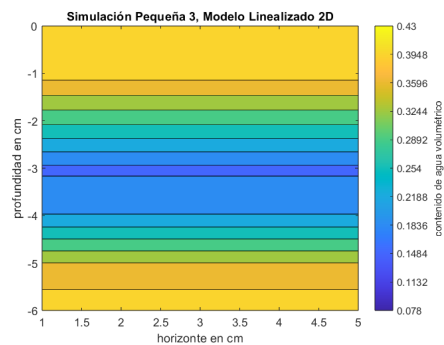
(b) Modelo Linealizado 2D, frame 2



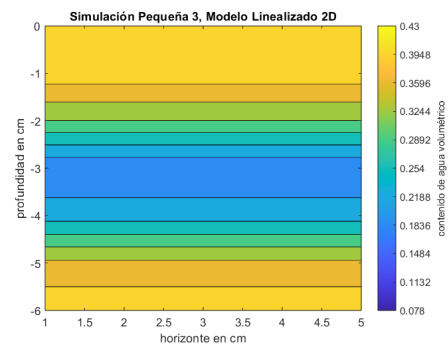
(c) Modelo Linealizado 2D, frame 3



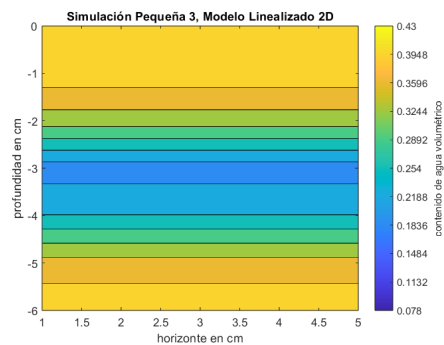
(d) Modelo Linealizado 2D, frame 4



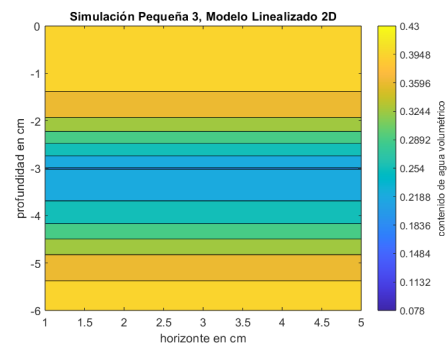
(e) Modelo Linealizado 2D, frame 5



(f) Modelo Linealizado 2D, frame 6



(g) Modelo Linealizado 2D, frame 7



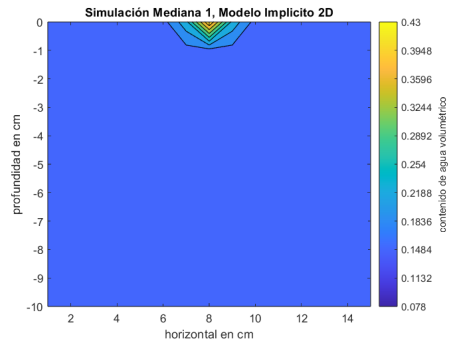
(h) Modelo Linealizado 2D, frame 8

Figura 4.9: Simulación Pequeña 3, Modelo Linealizado 2D. Tiempo ejecución: 1.960327 s.

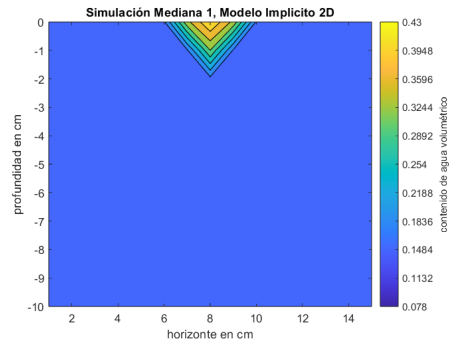
La Simulación Mediana número 1 se genera con los siguientes parámetros:

```
ancho=15;
prof= 10;
tiempo_total=5; %segundos
dx=1;
dzi=1;
dt=1e-1;
hsup=1;
hi=-300*ones(ceil(prof/dzi)*dzi+1,ceil(ancho/dx)*dx);
ks=0.00922; %ks en cm/s
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.43;
theta_r= 0.078;
hbottom=1;
```

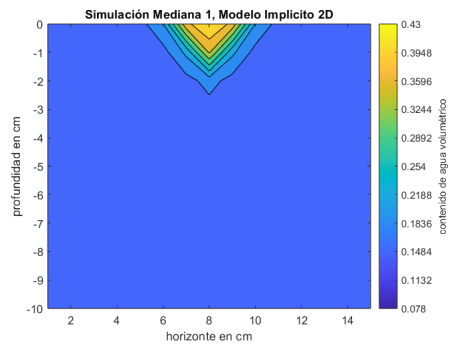
A continuación se presentan las gráficas de resultados de cada modelo para la Simulación Mediana 1. Además, de proporcionan sus respectivos tiempos de ejecución.



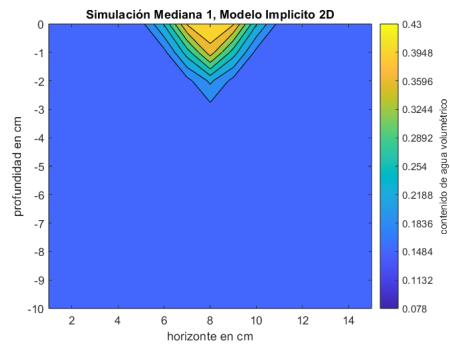
(a) Modelo Implícito 2D, frame 1



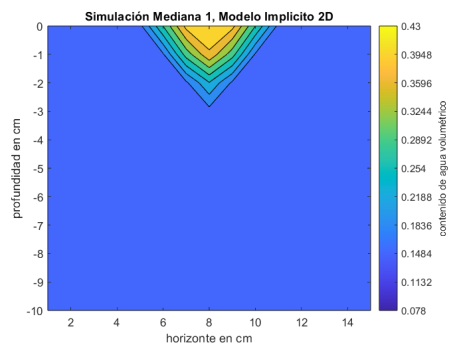
(b) Modelo Implícito 2D, frame 2



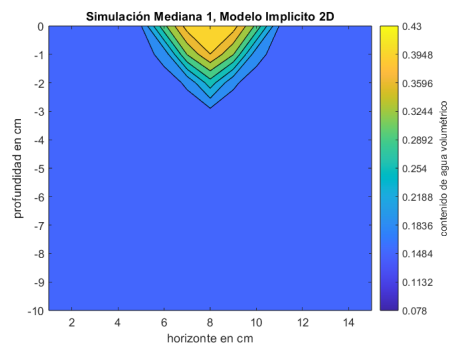
(c) Modelo Implícito 2D, frame 3



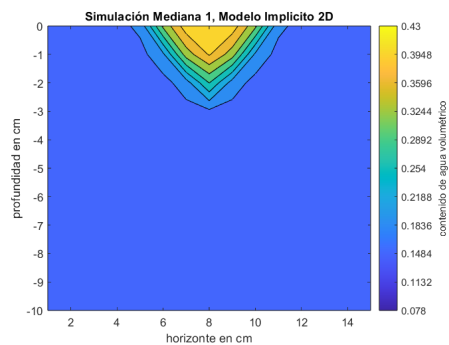
(d) Modelo Implícito 2D, frame 4



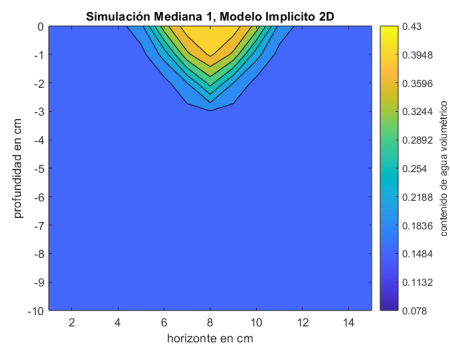
(e) Modelo Implícito 2D, frame 5



(f) Modelo Implícito 2D, frame 6

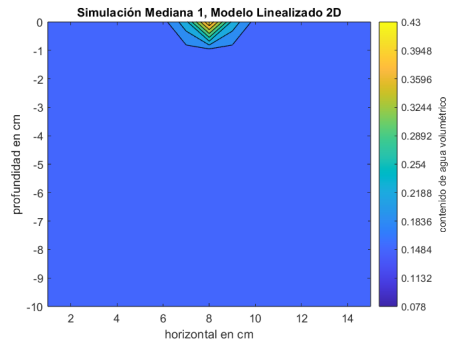


(g) Modelo Implícito 2D, frame 7

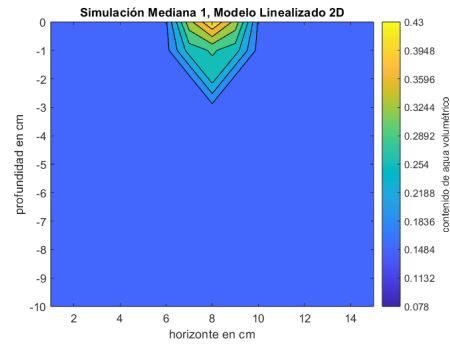


(h) Modelo Implícito 2D, frame 8

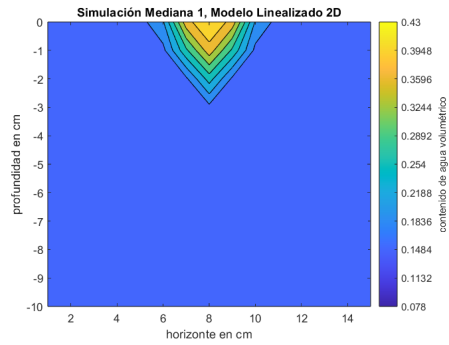
Figura 4.10: Simulación Mediana 1, Implícita Presión 2D. Tiempo ejecución: 50.779203 s.



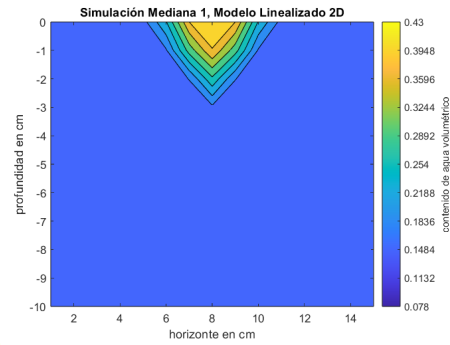
(a) Modelo Linealizado 2D, frame 1



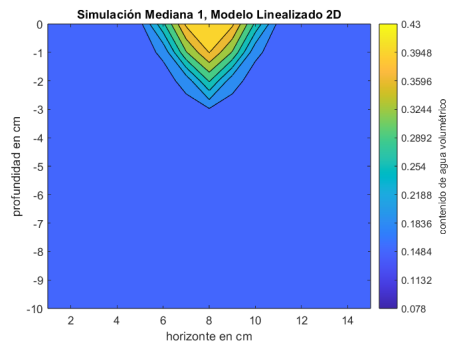
(b) Modelo Linealizado 2D, frame 2



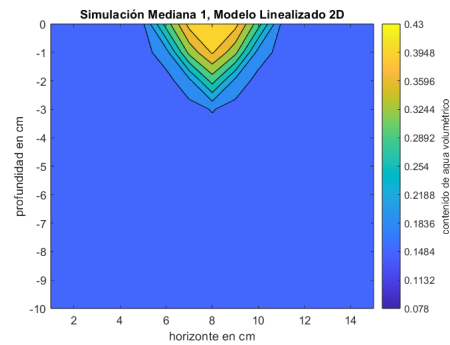
(c) Modelo Linealizado 2D, frame 3



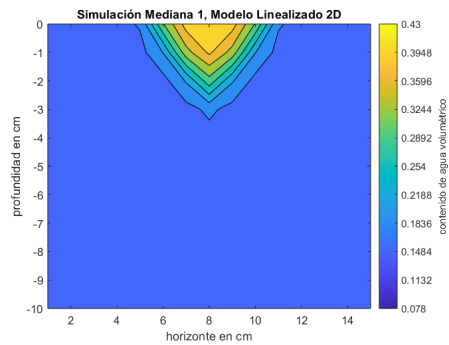
(d) Modelo Linealizado 2D, frame 4



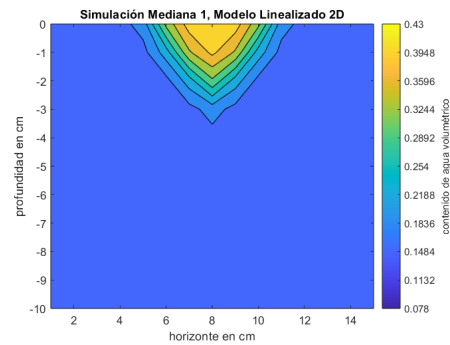
(e) Modelo Linealizado 2D, frame 5



(f) Modelo Linealizado 2D, frame 6



(g) Modelo Linealizado 2D, frame 7



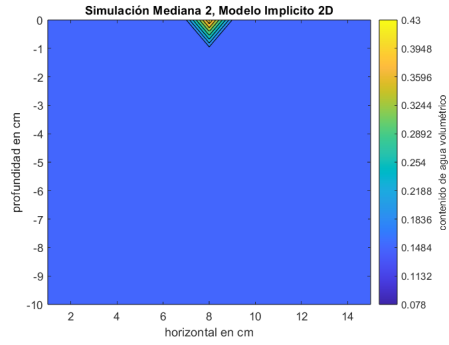
(h) Modelo Linealizado 2D, frame 8

Figura 4.11: Simulación Mediana 1, Modelo Linealizado 2D. Tiempo ejecución: 0.524156 s.

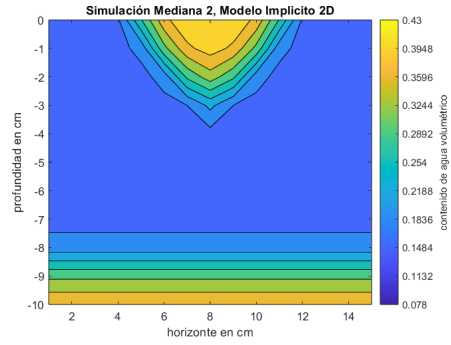
La Simulación Mediana número 2 se genera con los siguientes parámetros:

```
ancho=15;
prof= 10;
tiempo_total=60; %segundos
dx=1;
dzi=1; %ojo siempre lo ingresamos positivo y en los cálculos se pone un signo menos por esto (en
dt=1e-2;
hsup=1; %0*ones(1,ceil(ancho/dx)*dx);
hi=-300*ones(ceil(prof/dzi)*dzi+1,ceil(ancho/dx)*dx);
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.43;
theta_r= 0.078;
hbottom=-5*ones(1,ceil(ancho/dx)*dx);
```

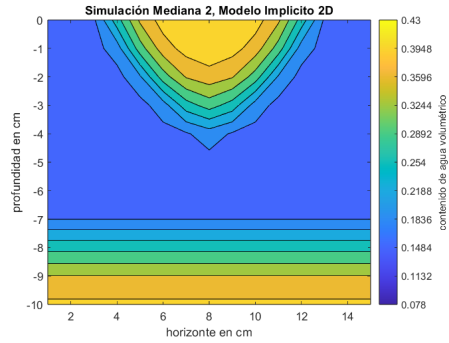
A continuación se presentan las gráficas de resultados de cada modelo para la Simulación Mediana 2. Además se proporcionan sus respectivos tiempos de ejecución.



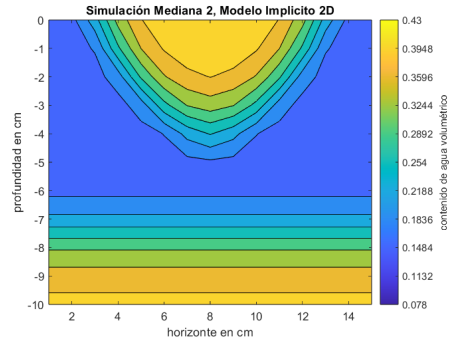
(a) Modelo Implícito 2D, frame 1



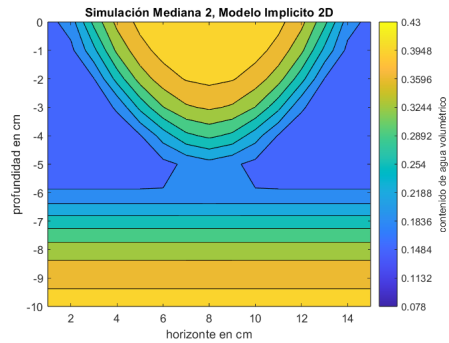
(b) Modelo Implícito 2D, frame 2



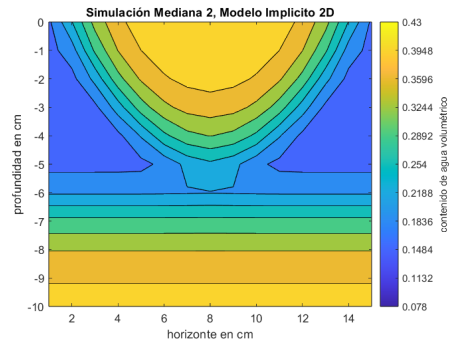
(c) Modelo Implícito 2D, frame 3



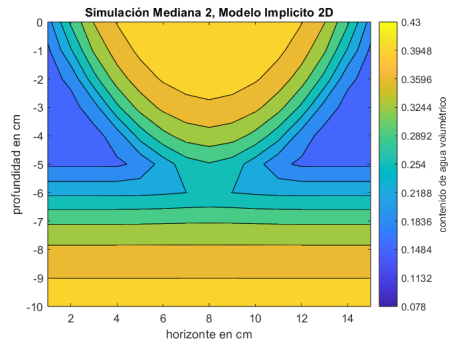
(d) Modelo Implícito 2D, frame 4



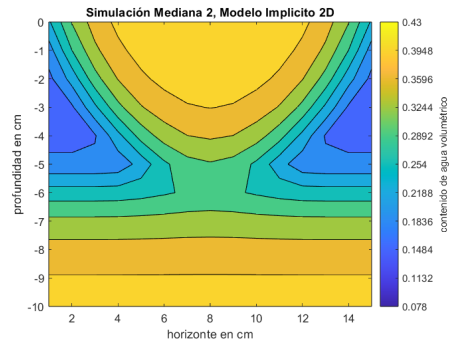
(e) Modelo Implícito 2D, frame 5



(f) Modelo Implícito 2D, frame 6

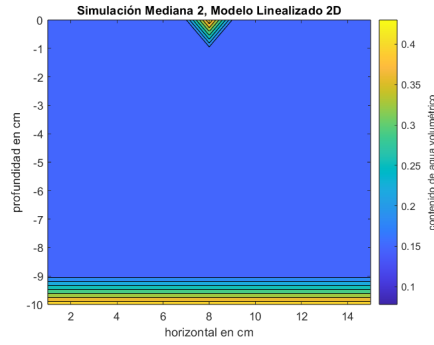


(g) Modelo Implícito 2D, frame 7

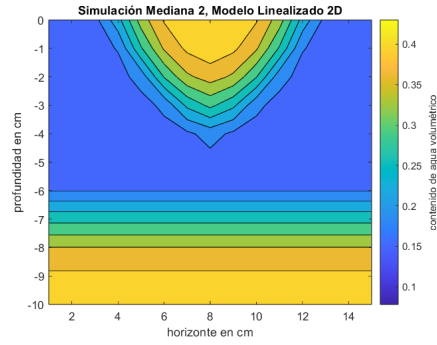


(h) Modelo Implícito 2D, frame 8

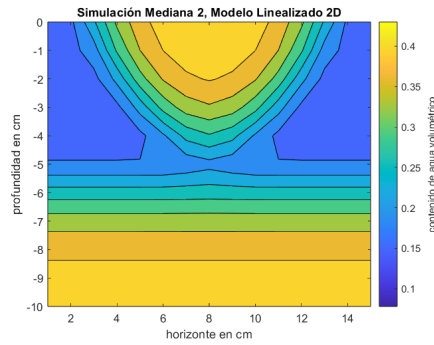
Figura 4.12: Simulación Mediana 2, Implícita 2D. Tiempo ejecución: 4419.723483 s.



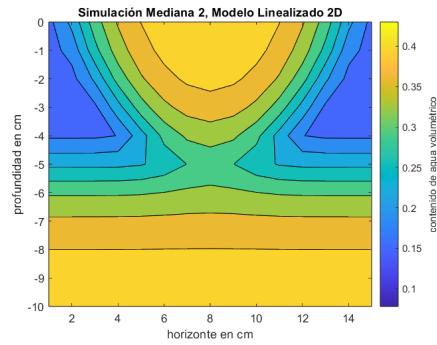
(a) Modelo Linealizado 2D, frame 1



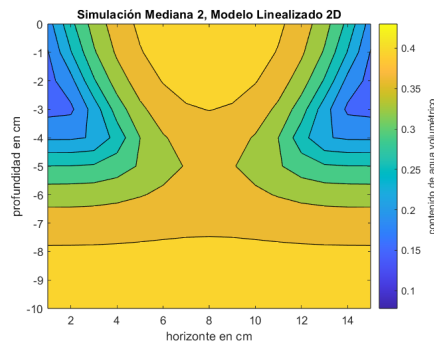
(b) Modelo Linealizado 2D, frame 2



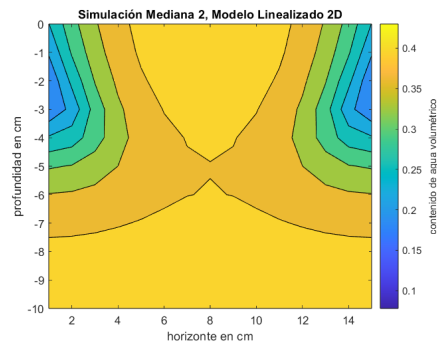
(c) Modelo Linealizado 2D, frame 3



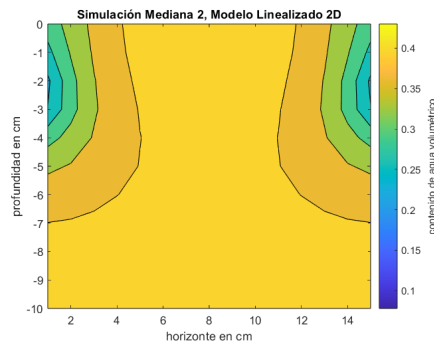
(d) Modelo Linealizado 2D, frame 4



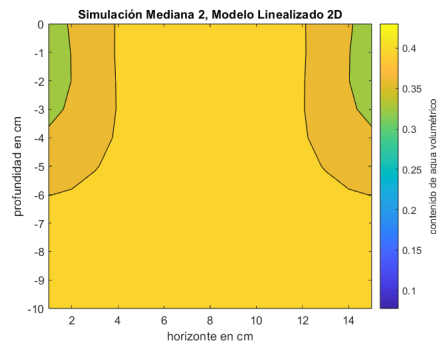
(e) Modelo Linealizado 2D, frame 5



(f) Modelo Linealizado 2D, frame 6



(g) Modelo Linealizado 2D, frame 7



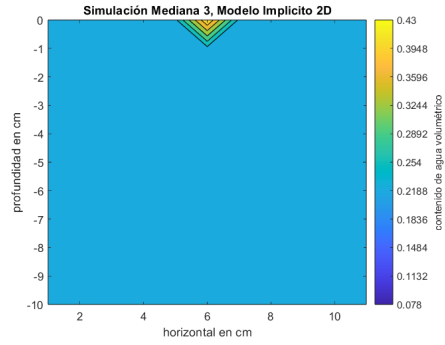
(h) Modelo Linealizado 2D, frame 8

Figura 4.13: Simulación Mediana 2, Modelo Linealizado 2D. Tiempo ejecución: 85.730383 s.

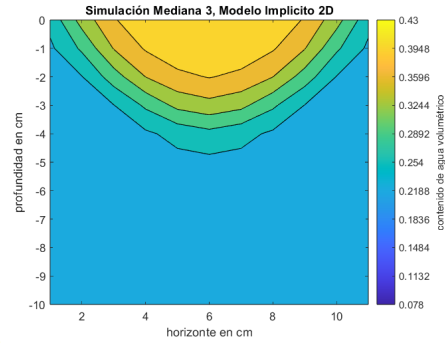
La Simulación Mediana 3 se genera con los siguientes parámetros:

```
ancho=11;
prof= 10;
tiempo_total=2*60; %segundos
dx=1;
dzi=1;
dt=1e-2;
hi=-100*ones(ceil(prof/dzi)*dzi+1,ceil(ancho/dx)*dx);
ks=0.00922; %ks en cm/s
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.43;
theta_r= 0.078;
hsup=1; % hsup=1 ==> "riego por goteo" en el centro del dominio
hbottom=1; % hbottom= 1 ==> drenaje libre
```

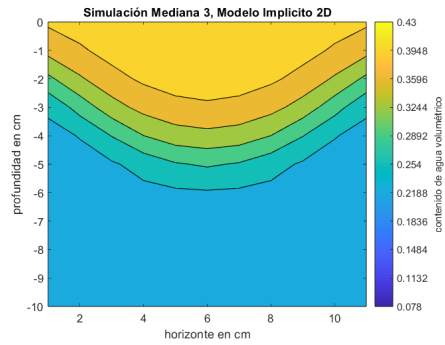
A continuación se presentan las gráficas de resultados de cada modelo para la Simulación Mediana 3. Además, se proporcionan sus respectivos tiempos de ejecución.



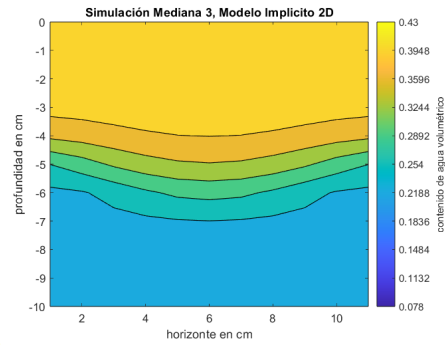
(a) Modelo Implícito 2D, frame 1



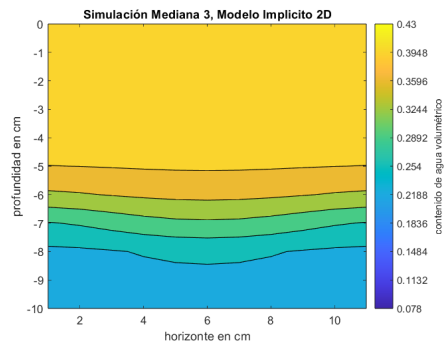
(b) Modelo Implícito 2D, frame 2



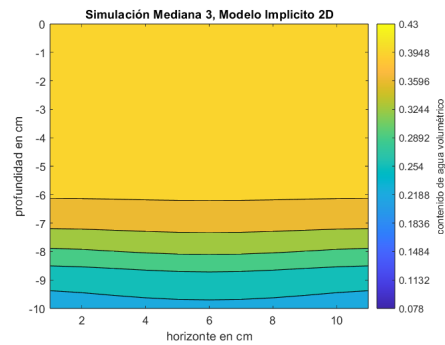
(c) Modelo Implícito 2D, frame 3



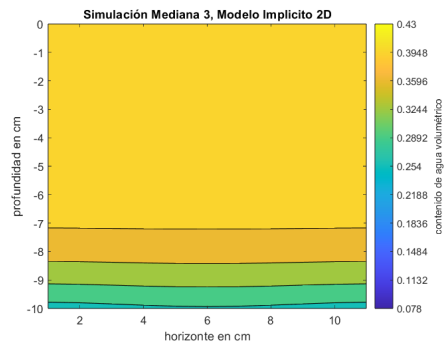
(d) Modelo Implícito 2D, frame 4



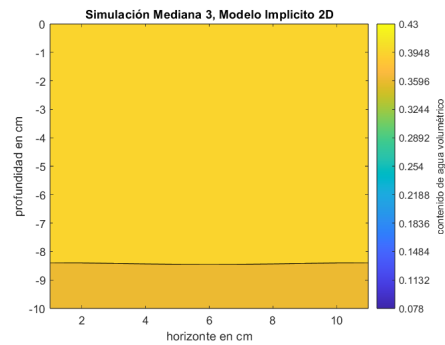
(e) Modelo Implícito 2D, frame 5



(f) Modelo Implícito 2D, frame 6

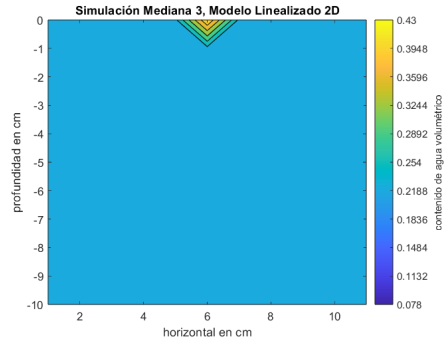


(g) Modelo Implícito 2D, frame 7

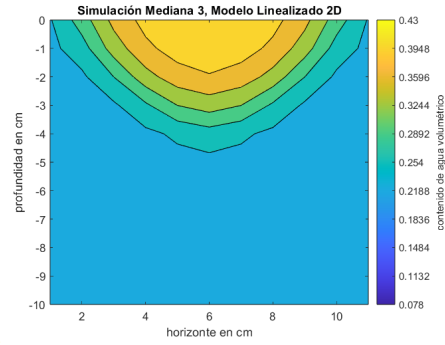


(h) Modelo Implícito 2D, frame 8

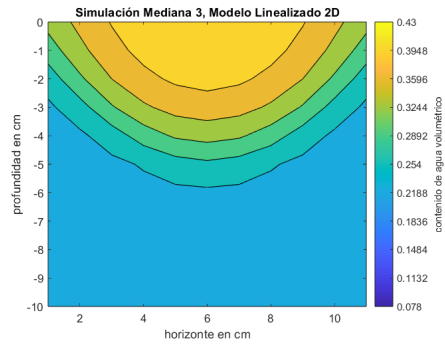
Figura 4.14: Simulación Mediana 3, Implícita Presión 2D. Tiempo ejecución: 4525.001677 s.



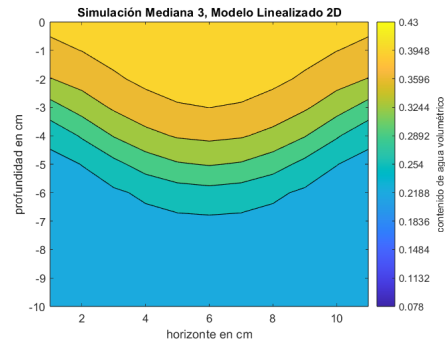
(a) Modelo Linealizado 2D, frame 1



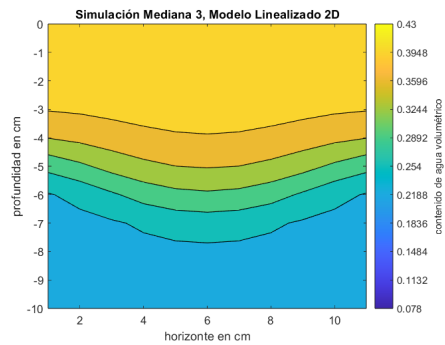
(b) Modelo Linealizado 2D, frame 2



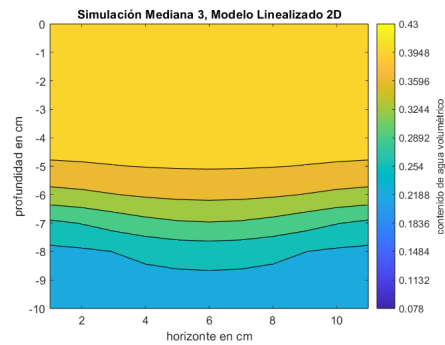
(c) Modelo Linealizado 2D, frame 3



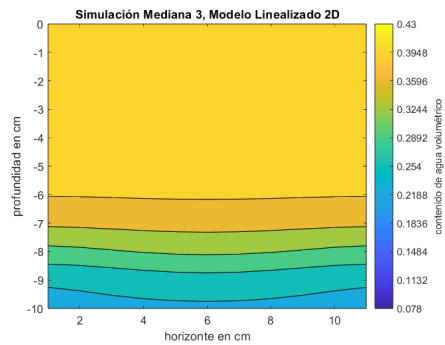
(d) Modelo Linealizado 2D, frame 4



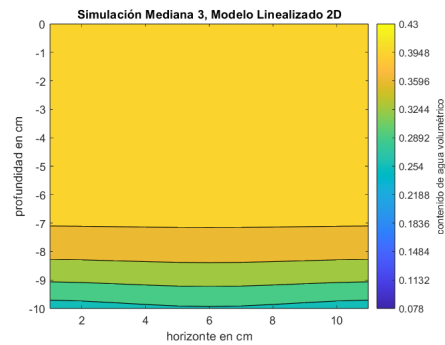
(e) Modelo Linealizado 2D, frame 5



(f) Modelo Linealizado 2D, frame 6



(g) Modelo Linealizado 2D, frame 7



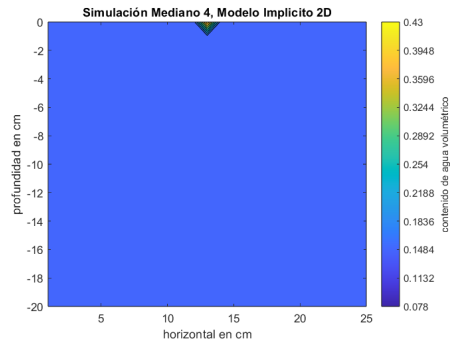
(h) Modelo Linealizado 2D, frame 8

Figura 4.15: Simulación Mediana 3, Modelo Linealizado 2D. Tiempo ejecución: 140.093919 s.

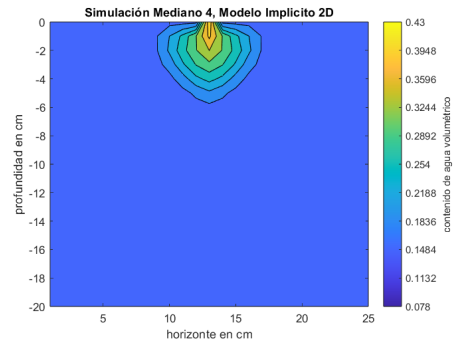
La Simulación Mediana 4 se genera con los siguientes parámetros:

```
ancho=25;
prof= 20;
tiempo_total=10*60; %segundos
dx=1;
dzi=1; %siempre positivo
dt=1e-1;
hsup=[ones(1,22), 0, ones(1,22)];
hi=-300*ones(ceil(prof/dzi)*dzi+1,ceil(ancho/dx)*dx);
ks=0.00922; %ks en cm/s
alpha=0.036;
n= 1.56;
l= 0.5;
theta_s= 0.43;
theta_r= 0.078;
hbottom=1; %hbottom=1 ==> drenaje libre
```

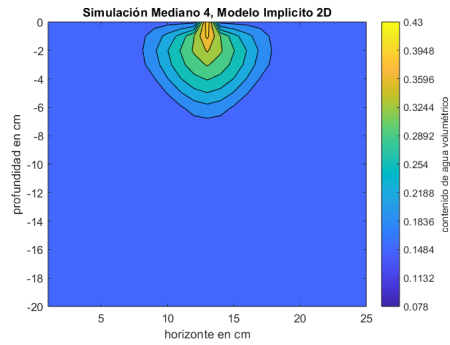
A continuación se presentan las gráficas de resultados de cada modelo para la Simulación Mediana 4. Además, se proporcionan sus respectivos tiempos de ejecución.



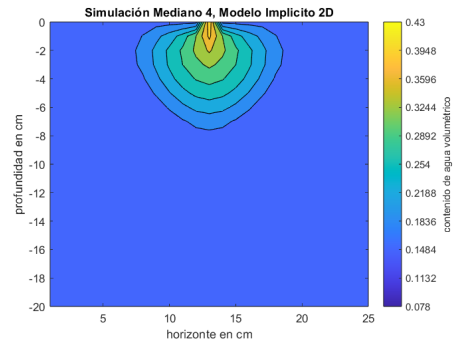
(a) Modelo Implícito 2D, frame 1



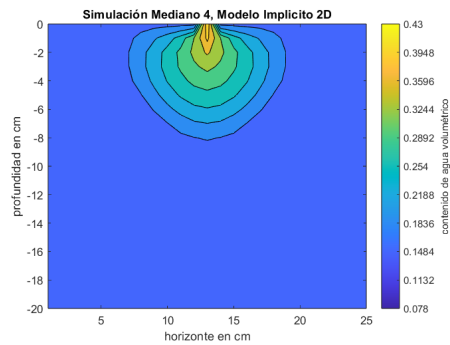
(b) Modelo Implícito 2D, frame 2



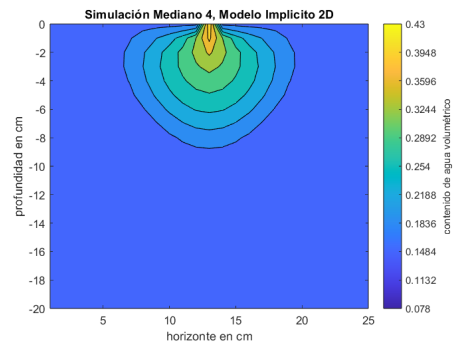
(c) Modelo Implícito 2D, frame 3



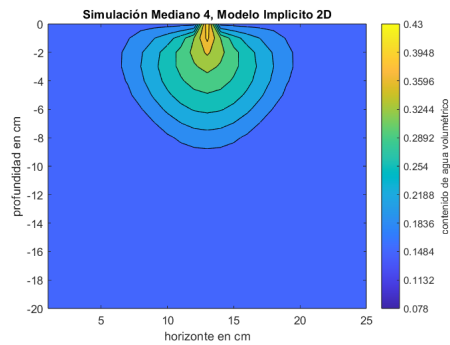
(d) Modelo Implícito 2D, frame 4



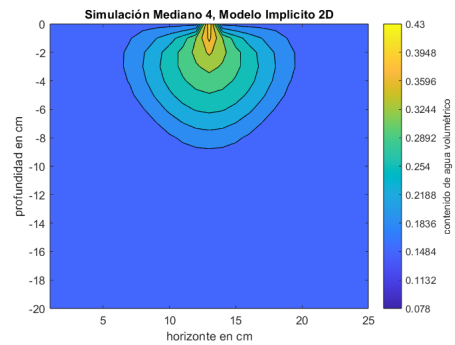
(e) Modelo Implícito 2D, frame 5



(f) Modelo Implícito 2D, frame 6

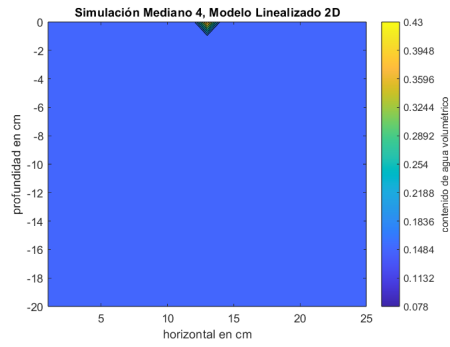


(g) Modelo Implícito 2D, frame 7

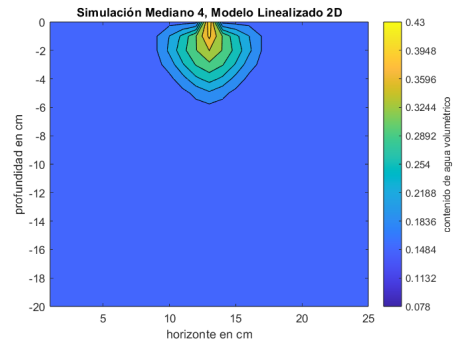


(h) Modelo Implícito 2D, frame 8

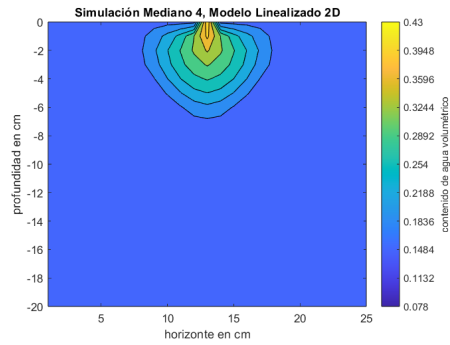
Figura 4.16: Simulación Mediano 4, Implícita 2D. Tiempo ejecución: 20994.136425 s.



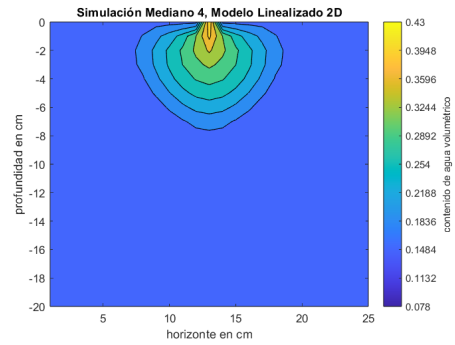
(a) Modelo Linealizado 2D, frame 1



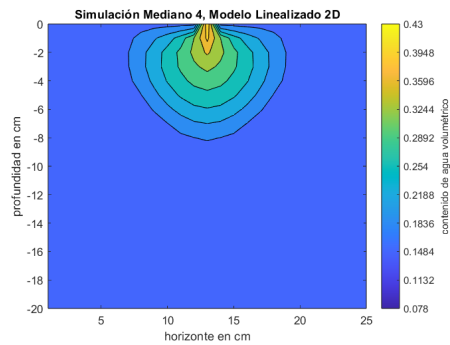
(b) Modelo Linealizado 2D, frame 2



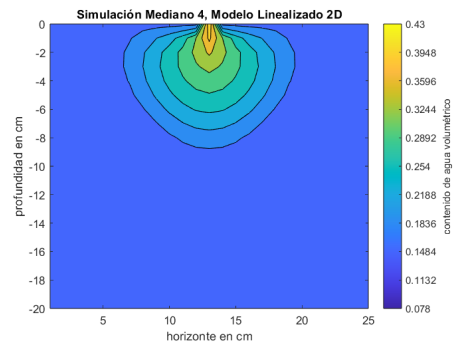
(c) Modelo Linealizado 2D, frame 3



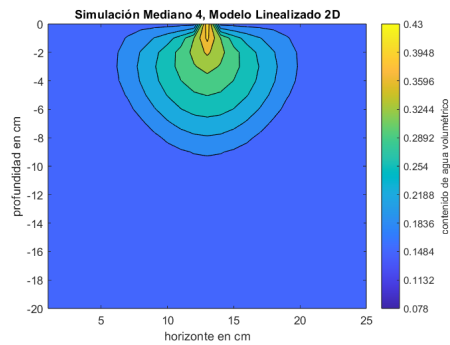
(d) Modelo Linealizado 2D, frame 4



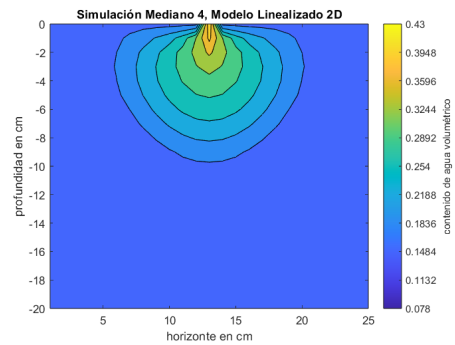
(e) Modelo Linealizado 2D, frame 5



(f) Modelo Linealizado 2D, frame 6



(g) Modelo Linealizado 2D, frame 7



(h) Modelo Linealizado 2D, frame 8

Figura 4.17: Simulación Mediana 4, Linealizado 2D. Tiempo ejecución: 83.633733 s.

4.6. Discusión y análisis de Resultados

A continuación se desarrolla el análisis de los resultados presentados en la sección anterior.

4.6.1. Simulación Pequeña 1

La simulación pequeña 1 se trata de una simulación de 5 cm de ancho y 6 cm de profundidad de suelo, con un espaciado internodal de 1 cm para ambas dimensiones. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo con una humedad relativa pareja en todo el perfil (con un valor de cabezal de presión de -300). Además se tiene la existencia de drenaje libre, es decir se puede interpretar que no hay napa subterránea en la profundidad. Así también se introduce un cabezal de presión superficial h_{sup} constante en todo el horizonte (con un valor de 0), esto se interpreta como una superficie uniformemente inundada. Además el tiempo total de simulación es de tan sólo 5 segundos, ya que al tratarse de un volumen de control pequeño, se puede apreciar el comportamiento que se ocasiona producto de la infiltración de agua superficial en pequeños tiempos de simulación.

Al observar las Figuras 4.4 y 4.5 se aprecia que ambos modelos implementados tienen un comportamiento bastante similar en instancias pequeñas como esta; el agua va ingresando desde la superficie hacia el interior del suelo, de manera pareja en horizonte, a medida que avanza el tiempo de la simulación, hasta llegar a los 2 cm de profundidad aproximadamente a los 5 segundos; además, en los niveles inferiores se observa que no hay cambios en cuanto a la cantidad de humedad.

Las condiciones uniformes en el eje horizontal producen un comportamiento equivalente a un modelo 1D replicado. Esto es el resultado esperado, lo que muestra consistencia de las extensiones 2D.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo Implícito 2D, con un tiempo de ejecución de 134.92 segundos; con un tiempo bastante menor le sigue el modelo Linealizado 2D con un tiempo de ejecución de 2.41 segundos.

4.6.2. Simulación Pequeña 2

La simulación pequeña 2 se trata de una simulación bastante similar a la simulación anterior, pero dejando que el tiempo de riego sea bastante mayor; con 6 cm de ancho y 5 cm de profundidad de suelo, con un espaciado internodal de 1 cm para ambas dimensiones. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo con una humedad relativa pareja para todo el perfil 2D (con un valor de cabezal de presión de -300 para todos los nodos). Además, se tiene la existencia de drenaje libre, es decir, se interpreta que no hay napa subterránea en la condición de borde inferior. Así también se introduce un cabezal de presión superficial h_{sup} constante en todo el horizonte (con un valor de 0), esto se interpreta como algo parecido al fondo marino. Además el tiempo total de simulación es de 1 hora, con un Δt de 1 segundos.

Al observar la Figura 4.6 se aprecia que el modelo Implícito 2D se satura en el primer frame. Esto ocurre ya que el tiempo total de ejecución es de 3600 segundos y dt es de 1, por lo que el total de discretizaciones en el tiempo es de 3600, luego entre el primer frame y el segundo pasan aproximadamente 450 segundos. De la simulación anterior se puede concluir que mucho antes de los 100 segundos de riego ya está todo el perfil llenado de agua, con lo que todo el perfil tiene el mismo valor de contenido de agua volumétrico con un valor de 0.43. Al no tener cambios de valor en contenido de agua volumétrico, existe sólo una curva de nivel y el perfil completo se pinta de un mismo color. Al observar la Figura 4.7 se aprecia un fenómeno bastante similar a los resultados del modelo Implícito, con la salvedad de que no se mantiene estable el color amarillo en todos los frames posteriores a la saturación completa del perfil; el color amarillo intenso corresponde a la cantidad de 0.43 de contenido de agua, cuando el programa calcula cantidades inferiores a esto se tiñe del color amarillo oscuro que le sigue. Esto muestra que el modelo Linealizado 2D, al tratarse de un modelo que aproxima el almacenamiento de agua actual con el del tiempo anterior, presenta inestabilidades en el caso de borde de saturación. Sin embargo, las variaciones observadas son menores.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo Implícito 2D, con un tiempo de ejecución de 40.47 segundos; con un tiempo bastante menor le sigue el modelo Linealizado 2D, obteniendo un tiempo de ejecución de 1.51 segundos.

4.6.3. Simulación Pequeña 3

La simulación pequeña 3 se trata de una simulación bastante similar a la simulación Pequeña 1, pero con napa subterránea; con 5 cm de ancho y 6 cm de profundidad de suelo, y un espaciado internodal de 1 cm para ambas dimensiones. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo con una humedad relativa pareja en todo el perfil 2D (con un valor de cabezal de presión de -300 para todos los nodos). Además se tiene la existencia de una napa subterránea inferior al volumen de control (condición de borde inferior h_{bottom} de -5 en todo el horizonte inferior). Así también, se introduce un cabezal de presión superficial h_{sup} constante en todo el horizonte (con un valor de 0), esto se interpreta como superficie uniformemente inundada. Además el tiempo total de simulación es de 5 segundos.

Al observar las Figuras 4.8 y 4.9 se aprecia que ambos modelos obtienen comportamientos bastante similar; el agua superior se difunde progresivamente desde la superficie, uniformemente en horizonte hasta llegar a los 2.5 cm de profundidad aproximadamente a los 5 segundos en ambos modelos. Así también, se aprecia sube agua desde el nivel inferior, por capilaridad, para ambos modelos. Sin embargo, se observa que este efecto es sobrestimado por el modelo Linealizado o subestimado en el modelo Implícito 2D. Mas, por lo expuesto en el análisis de resultados del capítulo 3, se puede concluir que el modelo Linealizado 2D sobrestimaría la capilaridad.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo Implícito 2D, con un tiempo de ejecución de 142.08 segundos; obteniendo un tiempo bastante menor le sigue el modelo Linealizado 2D con un tiempo de ejecución de 1.96 segundos.

4.6.4. Simulación Mediana 1

La simulación mediana 1 se trata de un perfil de suelo de 15 cm de ancho y 10 cm de profundidad, con un espaciado internodal de 1 cm para ambas dimensiones. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo con una humedad relativa pareja en todo el perfil 2D (con un valor de cabezal de presión de -300 para todos los nodos). Además cuenta con condición inferior de drenaje libre. Así también, se introduce la opción de cabezal de presión superficial, $h_{sup} = 1$, que se interpreta como un goteo constante de agua que cae justo en el centro de la superficie. Además el tiempo total de simulación es de 5 segundos.

Al observar las Figuras 4.10 y 4.11 se aprecia que ambos modelos obtienen comportamientos bastante similares; el agua del centro de la superficie se difunde lentamente, formando un bulbo pequeño de aproximadamente 2 cm de radio en el tiempo final de la simulación para ambos modelos.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo Implícito 2D, con un tiempo de ejecución de 50.78 segundos; y con un tiempo bastante menor le sigue el modelo Linealizado 2D con un tiempo de ejecución de 0.52 segundos.

4.6.5. Simulación Mediana 2

La simulación mediana 2 utiliza datos similares a los de la simulación mediana 1, con distinto tiempo total y distinta condición de borde inferior; es un perfil de suelo de 15 cm de ancho y 10 cm de profundidad, con un espaciado internodal de 1 cm para ambas dimensiones. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo con una humedad relativa pareja en todo el perfil 2D, con un valor de cabezal de presión de -300 para todos los nodos. Además se inserta un valor de cabezal de presión inferior, h_{bottom} , de -5 para todos los nodos inferiores en horizonte, simulando una napa subterránea inmediatamente posterior al perfil en profundidad. Así también se introduce la opción de cabezal de presión superficial, $h_{sup} = 1$, que se interpreta como un goteo constante de agua que cae justo en el centro de la superficie. Y además el tiempo total de simulación es de 1 minuto.

Al observar las Figuras 4.12 y 4.13 se aprecia que ambos modelos obtienen comportamientos bastante similares; el agua del centro de la superficie se difunde lentamente, formando un casquete en el centro superior del perfil, mientras que sube el agua inferior desde la napa subterránea por capilaridad; posteriormente se aprecia como ambos efectos se fusionan para ambos modelos (en el tercer frame para el Modelo Linealizado y en el quinto para el modelo Implícito), y luego se difumina más aún en los siguientes cuadros. Es importante mencionar que las diferencias que se divisan en las gráficas de los resultados, se condicen con la sobreestimación de la capilaridad por parte del modelo Linealizado 2D, mencionada anteriormente, que genera que la fusión del fenómeno superficial y el inferior ocurra más tempranamente.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo Implícito 2D, con un tiempo de ejecución de 4419.72 segundos; y con un tiempo bastante menor le sigue el modelo Linealizado 2D con un tiempo de ejecución de 85.73 segundos.

4.6.6. Simulación Mediana 3

La simulación mediana 3 se trata de un perfil de suelo de 11 cm de ancho y 10 cm de profundidad, con un espaciado internodal de 1 cm para ambas dimensiones. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo con una humedad relativa pareja en todo el perfil 2D, con un valor de cabezal de presión de -100 para todos los nodos. Además se inserta un valor de cabezal de presión inferior, $h_{bottom} = 1$, correspondiente a la opción de drenaje libre. Así también se introduce la opción de cabezal de presión superficial, $h_{sup} = 1$, que se interpreta como un goteo constante de agua que cae justo en el centro del dominio. Y además el tiempo total de simulación es de 2 minutos.

Al observar las Figuras 4.14 y 4.15 se aprecia que ambos modelos obtienen comportamientos bastante similares; en los primeros cuadros el agua del centro de la superficie se difunde lentamente, formando un casquete en el centro superior del perfil, el cual se difumina tanto en horizonte como en profundidad, generando que lentamente se suavice las diferencias en profundidad del ingreso de agua en horizonte. Se aprecia que para el modelo Linealizado 2D, el agua desciende levemente más rápido que para el Modelo Implícito.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo Implícito 2D, con un tiempo de ejecución de 4525.00 segundos; y con un tiempo bastante menor le sigue el modelo Linealizado 2D con un tiempo de ejecución de 140.09 segundos. Destacar que ambos tiempos de ejecución son bastante grandes, debido a que ocupan la opción de riego por goteo, superficie dinámica que genera subrutinas de ambos modelos 1D, respectivamente.

4.6.7. Simulación Mediana 4

La simulación mediana 4 se trata de un perfil de suelo de 25 cm de ancho y 20 cm de profundidad, con un espaciado internodal de 1 cm para ambas dimensiones. La condición inicial de cabezal de presión, h_i , en el tiempo $t = 0$, se interpreta como un suelo con una humedad relativa pareja en todo el perfil 2D, con un valor de cabezal de presión de -300 para todos los nodos. Además se inserta un valor de cabezal de presión inferior, $h_{bottom} = 1$, correspondiente a la opción de drenaje libre. Así también se introduce la opción de cabezal de presión superficial constante, con un valor de -300 para todos los nodos superficiales en horizonte, excepto el nodo central con un valor de 0, que se interpreta como un goteo constante de agua que cae justo en el centro del dominio, pero de manera forzada. Y además el tiempo total de simulación es de 5 minutos.

Al observar las Figuras 4.16 y 4.17 se aprecia que ambos modelos obtienen comportamientos bastante similares; en los primeros cuadros el agua del centro de la superficie se difunde lentamente, formando un bulbo en el centro superior del perfil, el cual se difumina tanto en horizonte como en profundidad lentamente.

El tiempo de ejecución más alto fue obtenido por el modelo Implícito 2D, con un tiempo de ejecución de 20994.14 segundos; y con un tiempo bastante menor le sigue el modelo Linealizado 2D con un tiempo de ejecución de 83.63 segundos. Destacar que a pesar de que esta simulación tiene más discretizaciones en espacio y en tiempo, que la Simulación Mediana

1, esta simulación tiene menor tiempo de ejecución que la simulación 1, debido a que no ocupa la condición superficial dinámica en el tiempo. Por esta razón sería interesante mezclar ambas condiciones cuando se quiera simular riego por goteo, de manera que se puedan acotar los tiempos de ejecución al utilizar la condición superficial dinámica.

Capítulo 5

Conclusión

Tras la construcción de diferentes modelos a lo largo de este trabajo de tesis, se puede concluir que el método aquí llamado “Modelo Linealizado” cumple tanto con los objetivos de entregar buenos resultados numéricos y obtención de buenos tiempos de ejecución. Es razonable pensar que en tiempos pequeños de Δt el término $\frac{\partial \theta}{\partial h}$ no obtiene grandes variaciones, por lo que la aproximación hecha en este modelo es buena, lo cual se condice con los resultados obtenidos. Sólo es importante tener siempre presente que Δt debe ser lo suficientemente pequeño para hacer esta aproximación sin corromper los resultados numéricos.

Las perspectivas posteriores a este trabajo de tesis son:

1. La generación de un buen modelo de extracción de agua producto de raíces de las plantas para ser integrado a este *software*.
2. Resolver el estado inicial a ser entregado como input de este *software*, a de la búsqueda de un estado inicial estacionario, mediante el estudio de la solución de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right) = 0$$

3. Ocupar este modelo con casos de estudio reales y generar una comparación con *software* privados.
4. Mejorar la condición de superficial Dinámica, integrando esta con la condición constante con el objetivo de acortar los tiempos de ejecución. Además, se puede hacer menos iteraciones de la condición superficial Dinámica con el mismo objetivo.
5. Generar la integración de modelos más complejos en superficie, de manera de poder simular riego por surcos, que es uno de los métodos que más se utilizan en agricultura en la actualidad.

Es importante destacar que la eficiencia en cuanto a tiempos de ejecución que se obtiene a partir del modelo Linealizado, abre las perspectivas hacia la optimización: es posible introducir el modelo Linealizado como subrutina para evaluar diferentes políticas de riego. También permitiría en teoría la integración de modelos de aprendizajes para la simulación

de la dinámica que sigue el agua en los suelos. Este proceso demanda grandes cantidades de simulaciones (y por lo tanto un gran gasto computacional), sobrellevable únicamente con el Modelo Linealizado. Cualquier otra alternativa sería impracticable, como se ha mostrado en este trabajo.

Bibliografía

- [1] Daniel Caviedes-Voullième, Pilar Garci, Javier Murillo, et al. Verification, conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1d richards equation. *Journal of hydrology*, 480:69–84, 2013.
- [2] Michael A Celia, Efthimios T Bouloutas, and Rebecca L Zarba. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water resources research*, 26(7):1483–1496, 1990.
- [3] Thomas F Coleman and Yuying Li. An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on optimization*, 6(2):418–445, 1996.
- [4] Henry Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau... un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes au filtrage des eaux*, volume 1. Victor Dalmont, éditeur, 1856.
- [5] G Golub, A Greenbaum, A Stuart, and E Suli. Numerical mathematics and scientific computation, 2007.
- [6] Rutger Willem Hofste, Paul Reig, and Leah Schleifer. 17 countries, home to one-quarter of the world’s population, face extremely high water stress. 2019.
- [7] Yechezkel Mualem. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water resources research*, 12(3):513–522, 1976.
- [8] Shlomo P Neuman. Theoretical derivation of darcy’s law. *Acta mechanica*, 25(3-4):153–170, 1977.
- [9] Jorge Nocedal and Stephen J Wright. *Numerical optimization*. Springer, 1999.
- [10] Soledad Parada, César Morales Estupiñán, et al. *Pobreza, desertificación y degradación de los recursos naturales*. CEPAL, 2005.
- [11] David E Radcliffe and Jiri Simunek. *Soil physics with HYDRUS: Modeling and applications*. CRC press, 2018.
- [12] Lorenzo Adolph Richards. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1(5):318–333, 1931.

- [13] Nunzio Romano, Bruno Brunone, and Alessandro Santini. Numerical analysis of one-dimensional unsaturated flow in layered soils. *Advances in Water Resources*, 21(4):315–324, 1998.
- [14] Carlos Alberto Faúndez Urbina. “apuntes teóricos de física de suelos”, lecture notes, Noviembre 2020.
- [15] Anahí Urquiza, Catalina Amigo, Marco Billi, Julián Cortés, and Julio Labraña. Gobernanza policéntrica y problemas ambientales en el siglo xxi: desafíos de coordinación social para la distribución de recursos hídricos en chile. *Persona y sociedad*, 33(1):133–160, 2019.
- [16] M Th Van Genuchten. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil science society of America journal*, 44(5):892–898, 1980.