



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

**PROGRAMAS DE REDUCCIÓN TARIFARIA: CONTEXTO, EFECTOS Y  
APROXIMACIONES DE CÁLCULO**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCIÓN TRANSPORTE

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

**FELIPE IGNACIO TAPIA MUÑOZ**

PROFESOR GUÍA:

SERGIO JARA DÍAZ

PROFESOR CO-GUÍA:

DIEGO CRUZ PADILLA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

ANTONIO GSCHWENDER KRAUSE

SEBASTIÁN ASTROZA TAGLE

SANTIAGO DE CHILE

2023

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL  
TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA, MENCIÓN TRANSPORTE Y  
MEMORIA PARA OPTAR EL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL

POR: FELIPE TAPIA MUÑOZ

FECHA: 2023

PROFESOR GUÍA: SERGIO JARA DÍAZ

PROFESOR CO-GUÍA: DIEGO CRUZ PADILLA

**PROGRAMAS DE REDUCCIÓN TARIFARIA: CONTEXTO, EFECTOS Y  
APROXIMACIONES DE CÁLCULO**

Los Programas de Reducción Tarifaria suelen ofrecerse en distintas ciudades del mundo, con el objetivo de beneficiar a grupos diferenciados por alguna característica (edad, condición física, ingreso u otra). La variación de los grupos beneficiados y del nivel de descuento ofrecido motivan las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las justificaciones para entregar descuentos y, en algunos lugares, a ciertos grupos por sobre otros? y luego, ¿Cuál es la forma (si es que la hay) para decidir el nivel de descuento ofrecido a cada uno de los grupos? En esta tesis intentaremos dar respuesta a estas preguntas, centrándonos en cuatro grupos que reciben con mayor frecuencia estos descuentos: jóvenes o estudiantes, adultos mayores, personas de bajos ingresos y personas con algún grado de discapacidad.

En primer lugar, se analiza una selección de 68 ciudades en el mundo, repartidas en los cinco continentes. Notamos que en la mayoría de ellas hay presencia de al menos un PRT, y que, en mayor medida son ofrecidos a estudiantes y adultos mayores. Las justificaciones que se dan para otorgar los descuentos generalmente responden a temas de preocupación social por los grupos beneficiados.

Con tal de buscar una fuente alternativa para las justificaciones otorgadas, revisamos la bibliografía relacionada a los descuentos en transporte público, enfocándose en los cuatro grupos mencionados. En general, se nota interés por estudiar cambios en variables específicas para cada grupo, siendo los más estudiados: cantidad de viajes realizados, mejoras en salud e inclusión social.

Por último, al no encontrar metodologías de cálculo para los niveles de descuento, desarrollamos dos enfoques analíticos para dar luz en esta materia. La consistencia entre los resultados de ambos modelos, nos permite decir que, al menos para el caso de Santiago de Chile, los descuentos en transporte público pueden ser justificados mediante la eficiencia y optimalidad del sistema y no necesariamente por una mirada “benefactora” hacia estos grupos. Si tal mirada se aplicase las tarifas resultarían aún menores.

# Agradecimientos

Se me está haciendo más difícil de lo que pensaba empezar a escribir esto.. Partiré agradeciendo a mi familia, Jeannette, Jorge y Nikolas. Gracias por entregarme, cada uno con su manera particular, amor, risas y la ayuda necesaria para haber llegado hasta acá. También a mis abuelos, tías y primos por el apoyo incondicional.

En segundo lugar, a los que me guiaron en esta Tesis, Profe Sergio y Diego. Profe, gracias por la paciencia, por enseñarme un sinfín de cosas, y por las conversaciones de distintos temas que hacían más agradables las reuniones sagradas de los viernes; mirando hacia atrás me doy cuenta de que es cierto cuando dice “siempre voy a querer lo mejor para mis alumnos”, y eso siempre se va a agradecer. Diego, gracias por hacer más llevadero este proceso, por siempre escucharme y darme una palabra de apoyo. Fue un gusto haber sido tu primer tesista y ojalá, si así lo quieres, no ser el último. También agradecer a los profesores integrantes de la comisión, Antonio y Sebastián, por darse el tiempo para ser un aporte en este trabajo.

A todos mis amigos que me acompañaron durante mi época universitaria, en especial a: Tomás, Matías, Benjamín, Enzo, Cata, Nachi, Carla, Pao, Alan, Ace y Xavi. Gracias por compartir momentos bacanes, alegrías y todo tipo de emociones; siempre les tendré un espacio guardado en mi corazón. Por último, al equipo de basquetbol de la facultad, en especial a Julio que siempre demostró un amor y dedicación inigualable por el deporte que practiqué durante tanto tiempo.

A todos los que nombré en este pequeño texto, y a todos los que me faltó nombrar, espero algún día poder retribuirles lo que significan para mí.

# Tabla de contenido

<b>1. Introducción.....</b>	<b>1</b>
<b>2. Programas de Reducción Tarifaria en el mundo.....</b>	<b>3</b>
2.1. Introducción .....	3
2.2. Caracterización de ciudades .....	4
2.3. Programas de Reducción tarifaria en la selección de ciudades .....	5
2.4. Motivos para otorgar PRT's.....	16
2.5. Síntesis y conclusiones .....	18
<b>3. Programas de Reducción Tarifaria en la literatura .....</b>	<b>20</b>
3.1. Introducción .....	20
3.2. Adultos Mayores .....	20
3.2.1. Visión general .....	20
3.2.2. Variables relacionadas a transporte .....	21
3.2.3. Variables relacionadas con salud .....	23
3.2.4. Inclusión social .....	24
3.2.5. Síntesis Adultos Mayores.....	25
3.3. Jóvenes y/o Estudiantes .....	26
3.3.1. Visión general .....	26
3.3.2. Variables de transporte: Partición modal y Gestión del espacio .....	26
3.3.3. Aspectos de salud .....	28
3.3.4. Asistencia a escuela y actividades extracurriculares .....	29
3.3.5. Síntesis Jóvenes y/o Estudiantes .....	29
3.4. Bajos Ingresos.....	30
3.5. Síntesis.....	31
<b>4. Aproximaciones al cálculo de tarifas diferenciadas .....</b>	<b>33</b>
4.1. Introducción .....	33
4.2. Modelo de Jara-Díaz y Gschwender (2003).....	34
4.3. Modelo extendido a N tipos de usuarios .....	37
4.3.1. Desarrollo del modelo .....	37
4.3.2. Simulación .....	41
4.3.3. Sensibilidad.....	46
4.3.4. Conclusiones extensión modelo Jara-Díaz & Gschwender .....	51
4.4. Pesos monetarios relativos.....	53
4.4.1. Introducción y definición del modelo.....	53
4.4.2. Desarrollo del modelo .....	53
4.4.3. Simulación .....	56
4.4.4. Conclusiones modelo pesos monetarios relativos .....	59
4.5. Síntesis.....	60
<b>5. Síntesis y conclusiones .....</b>	<b>63</b>

<b>6. Bibliografía.....</b>	<b>67</b>
<b>Anexo A. Modelo Jara-Díaz &amp; Gschwender (2003).....</b>	<b>72</b>
<b>Anexo B. Extensión a modelo de 3 usuarios .....</b>	<b>80</b>
<b>Anexo C. Tabla resumen de PRT's en la literatura .....</b>	<b>88</b>

## **Capítulo 1. Introducción**

La tarificación de transporte público es un problema complejo de resolver, donde se deben tomar distintas decisiones apuntando a los objetivos que se quieren lograr, siempre teniendo en cuenta las restricciones presupuestarias. Por ejemplo, se debe decidir si se cobra una tarifa plana o por kilómetros recorridos en el viaje (tarificación por distancia), ofrecer descuentos o abonos por cantidad de viajes, o cobrar según el horario del día. Si bien, las estructuras tarifarias antes mencionadas se diferencian según características del viaje, también se puede tarificar en base a características de los usuarios; por ejemplo, existen descuentos para grupos que cumplan con ciertos requisitos, tales como estudiantes (o jóvenes), adultos mayores, personas con algún grado de discapacidad o personas de bajos ingresos, existiendo casos en que es necesario cumplir con más de uno de estos requisitos (por ejemplo, ser estudiante y de bajos ingresos). A lo largo de esta tesis se estudiarán las tarifas diferenciadas para grupos especiales (enfocándose en los 4 grupos antes mencionados), fenómeno que es conocido como Programas de Reducción Tarifaria (PRT) en transporte público.

Los PRT están presentes en una gran cantidad de ciudades en el mundo. En una primera exploración, se nota que se ofrecen distintos niveles de descuentos a diversos grupos. Las diferencias antes mencionadas sugieren dos interrogantes fundamentales: en primer lugar, dada la existencia de ciudades en las que se ofrecen programas a ciertos grupos por sobre otros, ¿Cuáles son los fundamentos (si es que existen) de los programas de reducción tarifaria? y, de existir descuento ¿En qué forma(s) se enfrentan y deciden los niveles de descuento en los grupos mencionados? A modo de motivación, utilicemos como ejemplo a Santiago de Chile, ciudad en la que se da descuento para dos de los cuatro grupos que se estudiarán en esta tesis. En particular, los estudiantes pagan un 33% de la tarifa normal; está escrito en la Ley chilena que este grupo pagará un tercio de la tarifa de adultos sin ninguna razón que lo justifique (Decreto 45 Ministerio de transportes y telecomunicaciones, 1989). Caso similar ocurre con la tarifa reducida para adultos mayores, ya que según la Resolución en la ley chilena (Resolución 1196 exenta del Ministerio de Transportes y Telecomunicaciones, 2020), se entregará un descuento del 50% en transporte público a este grupo, sin otorgar justificativos para el nivel de descuento.

Debido a lo anterior es que esta tesis tiene como objetivo general entender los fundamentos de los PRT en transporte público y las aproximaciones de cálculo para los niveles de descuentos que existen para los programas. A continuación, se detalla la metodología que se seguirá con tal de poder cumplir el objetivo antes mencionado.

En primer lugar, con el propósito de tener un contexto global de los programas, se analizará, desde distintos enfoques, una selección de ciudades en el mundo. Con tal de representar de la mejor forma posible a los 5 continentes, se espera que en la selección estén presentes capitales o ciudades importantes de todos ellos. De cada ciudad se recopilarán datos que ayudarán a la caracterización socioeconómica y del sistema de transporte de cada una de ellas. Además, se buscarán posibles

justificaciones para otorgar descuentos a cada grupo, información que puede estar disponible en distintos tipos de fuentes para cada ciudad, tales como leyes, páginas oficiales del gobierno, documentos oficiales de las entidades de transporte, declaraciones públicas de autoridades, entre otros.

Luego, con el fin de contar con otro enfoque que permita explorar las motivaciones de los programas de reducción tarifaria, se revisará la literatura que analice los efectos que tienen estos sobre los distintos grupos. Se espera que lo anterior ayude a entender, desde el punto de vista de diferentes autores, cuáles son las variables que se consideran más importantes al momento de evaluar el éxito en la implementación de este tipo de políticas. Por último, el estudio de estos impactos es relevante debido a que se pueden entender de mejor forma distintos aspectos de los PRT, como la sensibilidad que tiene el sistema y los usuarios a este tipo de programas, su impacto sobre las poblaciones diferenciadas y la relación que tiene con el ingreso de los usuarios.

Para finalizar, con el propósito de explorar formas de cálculo para el nivel de descuento ofrecido a diferentes grupos, se propondrán dos metodologías para el cálculo de tarifas óptimas en un sistema que considera múltiples tipos de usuarios en transporte público. El primer enfoque, permite calcular tarifas basándose en el diseño óptimo de un sistema de transporte, el cual, considera tanto recursos invertidos por usuarios como por operadores; el análisis de este enfoque surge de la necesidad de tener una primera aproximación al comportamiento de tarifas óptimas considerando más de un tipo de usuario. Por otro lado, el segundo enfoque se enfoca en medir los cambios de bienestar debido a las reducciones tarifarias, revelando los pesos implícitos que los tomadores de decisión le dan a descuentos ofrecidos a los grupos especiales.

En el siguiente capítulo se revisará información socioeconómica, del sistema de transporte y de las motivaciones entregadas para los programas de reducción tarifaria en una selección de ciudades alrededor del mundo. Luego, en el capítulo 3, se analizará literatura dirigida a al menos uno de los cuatro grupos considerados en esta tesis, en la que se estudian impactos que los descuentos en transporte público generan en ellos. En el cuarto capítulo, se desarrollarán dos metodologías de cálculo para tarifas óptimas en un sistema de transporte público en el que coexisten múltiples tipos de usuarios; con el objetivo de comparar los resultados analíticos de ambos modelos con lo observado empíricamente, es que se simularán los resultados con datos tipo Santiago de Chile. Finalmente, en el último capítulo (quinto) se realizará una síntesis, en donde además se incluirán conclusiones generales y líneas futuras de investigación.

## **Capítulo 2. Programas de Reducción Tarifaria en el mundo**

### **2.1. Introducción**

Con el objetivo de entender el contexto de los PRT en el mundo, es que en esta sección se presenta información de una selección de 68 ciudades en el mundo. La intención de lo anterior es tener una idea ilustrativa (más que representativa) sobre diversos aspectos de ciudades en las que fue posible identificar de manera clara su estructura tarifaria. En el mismo sentido, la selección de ciudades pretende ser más que anecdótica pero menos que exhaustiva, puesto que lo primero no es de gran utilidad, mientras que lo segundo no es factible (habría que revisar todas las ciudades del mundo).

Dicha selección intentó cubrir los 5 continentes, incluyendo tanto ciudades capitales como otras ciudades que se consideran importantes dentro de una región; la mayoría de estas ciudades son capitales de países (o Estados) situados en América y en Europa. No se consideraron ciudades en las que la información sobre el transporte público no está sistematizada o dónde la información disponible no permite identificar la presencia o ausencia de Programas de Reducción Tarifaria para algunos de los grupos a estudiar<sup>1</sup>. El resumen del número de ciudades y presencia de PRT por continente se muestra en la Tabla 2.1.

**Tabla 2.1. Resumen de Selección de ciudades y PRT's otorgados por continente.**

Ciudades		Programas de reducción tarifaria			
Continente	N° Ciudades (Capitales)	Estudiantes	Adultos Mayores	Personas con discapacidad	Bajos ingresos
África	3 (2)	1	2	1	0
Asia	6 (4)	5	4	4	2
Europa	23 (18)	23	21	11	8
Norteamérica	24 (9)	24	24	23	7
Oceanía	5 (2)	5	5	5	1
Sudamérica	7 (6)	5	5	3	2
Total	68 (41)	63	61	47	20

Con el objetivo de entender el tipo de ciudades que son parte de la selección, se espera dar un contexto general de algunas variables socioeconómicas relacionadas a los PRT. Por ejemplo, si en una ciudad se toma la decisión de implementar algún tipo de descuento para jóvenes, puede ser de interés conocer la proporción de la población

<sup>1</sup> Por ejemplo, Dacca (Bangladesh), Adis Abeba (Etiopía), Nueva Delhi (India), Yakarta (Indonesia), Abuja (Nigeria), Lagos (Nigeria), Puerto Moresby (Nueva Guinea), Islamabad (Pakistán) o Kinshasa (R.D. Congo) fueron investigadas, pero no incluidas en la selección final.



objetivo y el porcentaje de esta población objetivo que se encuentra bajo niveles de pobreza. También se mostrará información relacionada a los niveles de uso de transporte y a los niveles de descuento de los programas de reducción tarifaria. Por último, con el fin de entender la idea detrás del ofrecimiento de tarifas reducidas es que se resumen los objetivos declarados que se dan con mayor frecuencia por parte de los tomadores de decisión para cada grupo objetivo. La información fue recopilada de variadas fuentes, entre las que se encuentran: Páginas de entidades de transporte, sitio web Statista, páginas de gobiernos, Wikipedia, sitio web citytransit, entre otros.

Este capítulo se ordena de la siguiente forma, en la sección 2.2 se caracteriza socioeconómica y demográficamente a las ciudades, en la siguiente sección se muestra información del nivel de uso de transporte público y de los niveles de descuento. Finalmente, en la sección 2.4 se muestran los motivos declarados para dar PRT's a los distintos grupos.

## **2.2. Caracterización de ciudades**

La información demográfica y socioeconómica de las ciudades incluye: Número de habitantes, porcentaje de habitantes jóvenes, porcentaje de habitantes Adultos Mayores, porcentaje de habitantes bajo la línea de la pobreza, porcentaje de la población menor de 18 años que está en situación de pobreza y porcentaje de la población mayor de 65 años que está en situación de pobreza. Adicionalmente, para el conjunto de datos se calculan medidas estadísticas con tal de tener un contexto global y particular de cada ciudad sobre variables socioeconómicas y demográficas (e.g. nivel económico y porcentaje de habitantes) de los grupos que son de interés en relación a los PRT. Cabe destacar que las edades de corte para definir jóvenes y adultos mayores, así como las líneas de pobreza son definidas por cada país.

**Tabla 2.2. Estadísticas de la población en la selección de ciudades.**

N=68 ciudades	Habitantes	Jóvenes	Adultos Mayores	Pobres	Disc	pobres <18/<18	pobres >65/>65
Promedio	3,760,683	18.9%	15.51%	19.81%	11.73%	24.09%	13.36%
Mín.	212,700	6.5%	6.09%	0.6%	1.5%	9.4%	4%
Máx	26,320,000	34.2%	28.79%	60%	22%	42.2%	47.1%
Coef. Var.	1.32	0.28	0.31	0.54	0.42	0.34	0.51

A partir de los datos de la Tabla 2.2 se puede decir que la selección de ciudades, en promedio, tienen un mayor porcentaje de habitantes jóvenes que adultos mayores y ambos grupos representan aproximadamente un tercio de la población. Además, tanto la desviación estándar del porcentaje habitantes jóvenes como la de adultos mayores

son bajas en comparación a su promedio (coeficientes de variación de 0.28 y 0.31 respectivamente), lo que indica que en general la relación de orden y el nivel total de ambos grupos se mantendrá en la selección.

Por otro lado, al observar los valores estadísticos del porcentaje de población en pobreza se observa un coeficiente de variación de 0.54, evidenciando que en la selección hay ciudades con bajos y altos porcentajes de población con escasos recursos. Conclusiones similares pueden extraerse al observar tanto los valores de la población de mayores de 65 en situación de pobreza como los de la población con alguna discapacidad; sus coeficientes de variación son 0.51 y 0.42 respectivamente, por lo que se encuentran ciudades con alta y baja porcentaje de estas características. En promedio, la proporción de personas menores de 18 años en pobreza es de 24% y con un menor coeficiente de variación (0.34) que las personas mayores de 65 años en esta condición, por lo que en general y para la selección de ciudades, habrá un mayor porcentaje de jóvenes que de adultos mayores en pobreza.

### **2.3. Programas de Reducción Tarifaria en la selección de ciudades**

En esta sección se presenta información en la selección de ciudades con respecto a uso de transporte público y niveles de descuento ofrecidos para estudiantes, adultos mayores, personas con discapacidad y personas con bajos ingresos.

Como primera observación, se nota que hay presencia de PRT para al menos uno de los 4 grupos en un 95.5% de las ciudades seleccionadas.

Se observa que en un 92.7% de las ciudades seleccionadas hay presencia de PRT para estudiantes y/o Jóvenes (63 de 68). Resultado similar se observa para adultos mayores, a quienes se les ofrece descuento en un 89.7% de las ciudades estudiadas (61 de 68). Estos valores bajan considerablemente al hablar de personas con discapacidad y personas de bajos ingresos; para el primer grupo, hay descuento en un 69.1% de la selección (47 de 68), mientras que para bajos ingresos se da algún tipo de descuento en un 29.4% de las ciudades (20 de 68).

Es posible detectar ciertas regularidades dentro de la información, por ejemplo, en las ciudades que se otorga un descuento para Adultos Mayores, en un 97% de los casos también hay presencia de un PRT para estudiantes y/o jóvenes. Por otro lado, al observar la información para personas con discapacidad se nota que cuando hay presencia de descuento para este grupo en un 96% (45 de 47) de los casos también lo hay para Adultos Mayores, más aún, en un 83% (39 de 47) de estas ciudades se otorga exactamente el mismo descuento que para los Adultos Mayores.

Respecto a la intensidad de uso de transporte público, representado por la cantidad de viajes diarios por habitante, se observa que el rango de esta variable tiene extremos bastante marcados. Por un lado, en las ciudades que se usa menos el transporte público, la cantidad de viajes se acercan a los 0.02 diarios por habitante, lo cual se da en las ciudades de Johannesburgo y Jacksonville. Mientras que los máximos valores

se encuentran en las ciudades de Helsinki y Montevideo, con 2.6 y 2.78 respectivamente. Cabe destacar que las ciudades de Johannesburgo y Jacksonville (menores viajes [ $TP/hab \cdot día$ ]) presentan programas de reducción tarifaria para 3 y 4 de los grupos respectivamente, mientras que en el caso de Helsinki y Montevideo (mayores viajes [ $TP/hab \cdot día$ ]) hay presencia de descuento para 3 y 2 grupos respectivamente. El promedio de la muestra con respecto a esta variable se encuentra en 0.85 viajes y presenta un coeficiente de variación de 0.83, lo que indica una alta variación respecto a la intensidad de uso de transporte público a lo largo de la muestra de ciudades.

**ESTA PÁGINA ES DEJADA EN BLANCO A PROPÓSITO**

**Tabla 2.3. Caracterización socioeconómica de las ciudades seleccionadas**

Continente	País	Ciudad	Habitantes	Caracterización de la población					
				Jóvenes	Adultos M	Pobres	Disc	<18 pobres/<18	>65 pobres/>65
AFC	Egipto	El Cairo	8,259,461	19%	10%	24.30%	12%	-	-
AFC	Sudáfrica	Johannesburgo	6,610,890	28.50%	6.09%	55.50%	7.5%	-	-
AFC	Sudáfrica	Ciudad del Cabo	7,481,156	28.50%	6.09%	55.50%	7.5%	-	-
ASIA	China	Hong Kong	7,482,000	13.01%	18.9%	23.6%	6.3%	-	-
ASIA	China	Pekín	21,710,000	17.70%	11.97%	0.60%	6.3%	-	-
ASIA	China	Shanghái	26,320,000	9.8%	16.3%	27%	6.3%	-	-
ASIA	Corea del Sur	Seúl	9,776,000	10%	17.5%	2%	4.9%	-	-
ASIA	Japón	Tokio	13,185,502	12.00%	28.79%	15.70%	5%	-	-
ASIA	Singapur	Singapur	5,686,000	12.33%	12.39%	12%	17%	-	-
EU	Alemania	Berlín	3,664,088	13.70%	21.86%	19.30%	13%	15%	18.70%
EU	Austria	Viena	1,920,949	14.40%	19.15%	27.50%	1.5%	19.50%	14.50%
EU	Bélgica	Bruselas	179,277	16.80%	19.26%	19.50%	6%	22.30%	16.50%
EU	Bulgaria	Sofía	1,291,591	14.40%	21.69%	20.90%	-	33.90%	47.10%
EU	Dinamarca	Copenhague	569,557	16.30%	20.04%	17.30%	15.1%	13.20%	10%
EU	Escocia	Glasgow	598,830	17.90%	18.65%	15%	22%	17%	15%
EU	Eslovaquia	Bratislava	462,603	15.90%	16.83%	7.90%	-	22%	14.20%
EU	España	Barcelona	1,664,182	14.40%	19.65%	22.80%	8.5%	30.30%	15.70%
EU	España	Madrid	3,334,730	14.40%	19.65%	20.90%	4.47%	30.30%	15.70%

Continentes	País	Ciudad	Habitantes	Caracterización de la población					
				Jóvenes	Adultos M	Pobres	Disc	<18 pobres/<18	>65 pobres/>65
EU	Finlandia	Helsinki	620,982	15.70%	22.49%	11.50%	-	14.30%	15.30%
EU	Francia	Paris	2,240,621	17.80%	20.56%	17.90%	12%	22.50%	11.20%
EU	Gales	Sudeste de Gales	1,430,000	17.90%	18.65%	25%	21.2%	-	-
EU	Grecia	Grecia	3,158,400	14.20%	22.40%	24.10%	18.2%	30.50%	21.10%
EU	Hungría	Budapest	1,741,041	14.60%	20.10%	11.20%	-	22.40%	14.40%
EU	Irlanda	Dublín	527,612	20.20%	14.47%	19%	13.5%	-	-
EU	Italia	Milán	1,396,522	12.90%	23.37%	16.20%	4.8%	-	-
EU	Países bajos	Ámsterdam	813,000	15.60%	19.64%	18.10%	12%	15.50%	12.60%
EU	Polonia	Varsovia	1,793,579	15.30%	18.40%	13.40%	10%	16%	19.20%
EU	Portugal	Porto	297,559	13.50%	22.29%	22%	10%	22.30%	20%
EU	Rep. Checa	Praga	1,262,106	16%	20.05%	7.90%	10%	13%	17.70%
EU	Rumania	Bucarest	2,400,000	15.60%	19.19%	12.60%	3.5%	35.80%	33.90%
EU	Suecia	Estocolmo	1,515,017	17.70%	20.06%	13%	16%	23.10%	15.40%
EU	UK	Londres	8,961,989	17.90%	18.65%	28%	20.9%	-	-
NA	Canadá	Vancouver	1,083,391	15.90%	17.99%	10.10%	20.5%	-	-
NA	Canadá	Ottawa	603,502	15.90%	17.99%	9.40%	13.2%	-	-
NA	EEUU	Austin (TX)	930,143	27.70%	9.70%	21.80%	7.7%	29.00%	15.40%
NA	EEUU	Charlotte (NC)	903,072	22.90%	13.40%	18.30%	9.2%	26.40%	10.70%
NA	EEUU	Chicago (IL)	769,019	15%	12.40%	14.80%	10.3%	15.40%	4.90%

Continente	País	Ciudad	Habitantes	Caracterización de la población					
				Jóvenes	Adultos M	Pobres	Disc	<18 pobres/<18	>65 pobres/>65
NA	EEUU	Columbus (OH)	772,575	19.80%	11.50%	15.40%	11.5%	15.80%	11.10%
NA	EEUU	Dallas (TX)	935,521	23.70%	10.20%	18.50%	9.6%	32.20%	14.10%
NA	EEUU	Denver (CO)	1,681,687	26.10%	10.60%	22.90%	8.9%	35.20%	13.10%
NA	EEUU	Filadelfia (PA)	2,472,370	19.80%	22.50%	23.80%	16.7%	32.80%	15.60%
NA	EEUU	Fort Worth (TX)	912,284	22.50%	10.20%	23.20%	10.9%	27.90%	9.80%
NA	EEUU	Houston (TX)	4,142,401	20.70%	12.40%	22.60%	9%	29.90%	9.90%
NA	EEUU	Indianápolis (IN)	928,635	13.40%	15.40%	13.80%	14%	9.40%	4.00%
NA	EEUU	Jacksonville (FL)	1,617,461	25%	12%	19.90%	14.7%	24.50%	7.30%
NA	EEUU	Los Angeles (CA)	1,613,184	21.90%	13.40%	28.34%	9.8%	42.20%	16.30%
NA	EEUU	Massachusetts	1,509,425	19.90%	12.60%	16%	11.7%	14.4%	11.8%
NA	EEUU	New York (NY)	1,118,577	22.40%	12.50%	12.20%	9.8%	12.40%	5.10%
NA	EEUU	Phoenix (AZ)	717,666	19.60%	17%	23.20%	10.7%	34.30%	11.80%
NA	EEUU	San Antonio (TX)	8,988,326	20.80%	14.50%	20.90%	14.1%	29.00%	10.50%
NA	EEUU	San Diego (CA)	754,909	17.90%	12.10%	18.70%	9.4%	24.60%	11.30%
NA	EEUU	San Francisco (CA)	141,694	25%	10.30%	25.30%	10.7%	37.40%	11.10%
NA	EEUU	San José (CA)	2,763,076	20.90%	12.40%	23.70%	8.4%	28.70%	11.50%
NA	EEUU	Seattle (WA)	893,155	24.70%	12.20%	21.40%	9.8%	26.90%	11.40%
NA	EEUU	Washington (DC)	1,089,004	20.40%	8.90%	20.30%	11.5%	23.80%	9.30%
NA	México	CDMX	9,209,944	25.8%	7.64%	28.9%	16%		

Continente	País	Ciudad	Habitantes	Caracterización de la población					
				Jóvenes	Adultos M	Pobres	Disc	<18 pobres/<18	>65 pobres/>65
OC	Australia	Melbourne	395,803	18.60%	16.32%	13.60%	18%	-	-
OC	Australia	Canberra	4,485,211	18.60%	16.32%	13.60%	18%	-	-
OC	Australia	Sídney	5,312,000	6.5%	12.3%	13.4%	16.9%	-	-
OC	Nueva Zelanda	Auckland	1,657,000	34.2%	12%	13%	19%	-	-
OC	Nueva Zelanda	Wellington	212,100	19%	15.56%	15%	22%	-	-
SA	Argentina	Buenos Aires	3,075,646	23.7%	15.2%	37%	10.2%		
SA	Brasil	Sao Paulo	33,652,991	20.90%	9.83%	27.20%	14.5%	-	-
SA	Chile	Santiago	7,123,189	19.20%	12.12%	10.70%	16.7%	-	-
SA	Colombia	Bogotá	9,793,193	25.40%	8.50%	31.70%	6.4%	-	-
SA	Perú	Lima	10,161,038	27%	12.70%	15.40%	8.2%	-	-
SA	Uruguay	Montevideo	1,318,755	23.90%	19.10%	3%	15.8%	-	-
SA	Venezuela	Caracas	3,127,612	26.44%	9.71%	-		-	

**Fuentes:** Wikipedia (cantidad de habitantes), sitio web Statista (en su versión gratuita), páginas de gobiernos u otro tipo de páginas con información demográfica de ciudades. Información recopilada durante el año 2022.

AFC = África, EU = Europa, NA = Norte América, OC = Oceanía y SA = Sudamérica.



**Tabla 2.4. Características de transporte y PRT de ciudades seleccionadas.**

Continente	País	Ciudad	¿TM?	% Descuento				Viajes [ <i>TP/hab · día</i> ]	modal TP
				Est	AM	Disc	BI		
AFC	Egipto	El Cairo	SI	-	17%	-	-	1.44	40%
AFC	Sudáfrica	Johannesburgo	NO	25%	86%	50%	-	0.02	32%
AFC	Sudáfrica	Ciudad del Cabo	SI	-	-	-	-	0.12	43.70%
ASIA	China	Hong Kong	SI	63%	80%	80%	-	1.66	88%
ASIA	China	Pekín	SI	100%	100%	100%	-	0.71	26%
ASIA	China	Shanghái	NO	-	-	-	-	0.61	33%
ASIA	Corea del Sur	Seúl	NO	20-50%	100%	100%	-	0.86	29%
ASIA	Japón	Tokio	SI	50%	-	-	-	0.53	51%
ASIA	Singapur	Singapur	SI	54-100%	37-58%	37-58%	25%	0.93	44%
EU	Alemania	Berlín	SI	100%	40%	-	70%	1.21	27%
EU	Austria	Viena	SI	60%	33%	-	-	1.39	39%
EU	Bélgica	Bruselas	SI	90%	90%	-	100%	1.03	28%
EU	Bulgaria	Sofía	SI	60%	85%	90%	-	0.28	73%
EU	Dinamarca	Copenhague	NO	50%	-	-	-	1.51	36%
EU	Escocia	Glasgow	SI	50%	100%	100%	-	2.25	9.30%
EU	Eslovaquia	Bratislava	SI	50%	50%	-	-	-	70%
EU	España	Barcelona	SI	100%	100%	100%	-	1.79	39%
EU	España	Madrid	SI	75%	95%	95%	-	1.36	25%

Continentes	País	Ciudad	¿TM?	% Descuento				Viajes [ <i>TP/hab · día</i> ]	modal TP
				Est	AM	Disc	BI		
EU	Finlandia	Helsinki	SI	45%	45%	50%	-	2.6	22%
EU	Francia	Paris	SI	50%	50%	50%	100%	0.99	59%
EU	Gales	Sudeste de Gales	SI	33%	100%	100%	-	-	10%
EU	Grecia	Atenas	SI	50%	50%	-	100%	0.43	37%
EU	Hungría	Budapest	SI	65%	100%	-	-	2.4	47%
EU	Irlanda	Dublín	SI	30%	-	-	-	1.64	21.50%
EU	Italia	Milán	SI	25%	25%	-	-	1.57	41%
EU	Países bajos	Ámsterdam	NO	100%	33%	-	85%	1.14	29%
EU	Polonia	Varsovia	SI	50%	100%	100%	100%	1.7	47%
EU	Portugal	Porto	SI	100%	25%	-	50%	1.38	11.10%
EU	Rep. Checa	Praga	SI	100%	100%	100%	-	1.35	52%
EU	Rumania	Bucarest	SI	50%	100%	100%	-	0.93	25%
EU	Suecia	Estocolmo	NO	75%	25%	-	-	1.61	43%
EU	UK	Londres	SI	100%	100%	100%	50%	1.54	37%
NA	Canadá	Vancouver	SI	70%	70%	70%	-	2.23	20%
NA	Canadá	Ottawa	SI	23%	62%	-	52%	0.27	18%
NA	EEUU	Austin (TX)	SI	100%	50%	50%	-	0.56	16%
NA	EEUU	Charlotte (NC)	SI	50%	50%	50%	-	0.06	16%
NA	EEUU	Chicago (IL)	SI	25%	100%	100%	-	0.46	20%
NA	EEUU	Columbus (OH)	SI	50%	50%	50%	-	0.06	16%

Continentes	País	Ciudad	¿TM?	% Descuento				Viajes [TP/hab · día]	modal TP
				Est	AM	Disc	BI		
NA	EEUU	Dallas (TX)	SI	75%	75%	75%	75%	0.13	16%
NA	EEUU	Denver (CO)	SI	70%	50%	50%	40%	0.44	2%
NA	EEUU	Filadelfia (PA)	SI	10%	100%	50%	-	0.39	2%
NA	EEUU	Fort Worth (TX)	SI	60%	50%	50%	-	0.04	16%
NA	EEUU	Houston (TX)	NO	50%	100%	50%	-	0.47	11%
NA	EEUU	Indianápolis (IN)	SI	50%	50%	50%	-	0.03	33%
NA	EEUU	Jacksonville (FL)	SI	50%	100%	55%	55%	0.02	3%
NA	EEUU	Los Angeles (CA)	SI	75%	80%	80%	70%	0.26	26%
NA	EEUU	Boston (MA)	SI	100%	50%	50%	70%	1.39	3%
NA	EEUU	New York (NY)	SI	100%	50%	50%	-	0.74	5%
NA	EEUU	Phoenix (AZ)	SI	50%	50%	50%	-	0.11	34%
NA	EEUU	San Antonio (TX)	SI	50%	50%	50%	-	0.06	57%
NA	EEUU	San Diego (CA)	SI	70%	70%	70%	-	0.17	16%
NA	EEUU	San Francisco (CA)	SI	100%	50%	50%	-	0.7	2%
NA	EEUU	San José (CA)	SI	60%	67%	67%	-	0.12	28%
NA	EEUU	Seattle (WA)	SI	40%	65%	65%	100%	0.18	1%
NA	EEUU	Washington (DC)	SI	100%	50%	50%	-	1.54	16%
NA	México	CDMX	NO	40%	100%	100%	-	0.76	77.90%
OCE	Australia	Melbourne	NO	100%	50%	50%	-	0.3	8%
OCE	Australia	Canberra	NO	50%	100%	100%	-	0.1	19%

Continente	País	Ciudad	¿TM?	% Descuento				Viajes [ <i>TP/hab · día</i> ]	modal TP
				Est	AM	Disc	BI		
OCE	Nueva Zelanda	Auckland	SI	20-50%	100%	50%	-	0.17	12%
OCE	Australia	Sídney	NO	50%	85%	100%	50%	0.39	25%
OCE	Nueva Zelanda	Wellington	SI	50%	100%	50%	-	0.5	23%
SA	Argentina	Buenos Aires	NO	63-100%	100%	100%	10-45%	1.11	78%
SA	Brasil	Sao Paulo	NO	100%	100%	100%	-	0.83	36%
SA	Chile	Santiago	NO	70%	50%	-	-	0.48	25.90%
SA	Colombia	Bogotá	NO	-	15%	-	40%	0.34	64%
SA	Perú	Lima	NO	50%	-	100%	-	0.08	62%
SA	Uruguay	Montevideo	NO	50%	67%	-	-	2.78	45%
SA	Venezuela	Caracas	-	-	-	-	-	1.2	56.90%

**Fuentes:** Páginas de entidades de transporte (para porcentajes de descuento y cantidad de viajes), Wikipedia (cantidad de habitantes, cantidad de viajes en Transporte público y partición modal), <https://citytransit.uitp.org/> (cantidad de viajes y partición modal), entre otras. Información recopilada durante el año 2022.

#### **2.4. Motivos para otorgar PRT's**

A partir de diversas fuentes, tales como: leyes, constituciones, diarios, declaraciones de mandatarios, páginas web e informes de agencias de transporte, documentos gubernamentales o de municipios, entre otros, se encuentran múltiples justificaciones para la creación de los programas de reducción tarifaria. El resumen de las justificaciones encontradas para cada grupo se muestra en la Tabla 2.5; en ella se hizo un esfuerzo por juntar las que pertenecían a un mismo tipo de justificación.

Dentro de las razones, se destaca la coincidencia para los 3 grupos en cuanto a la intención de reducir los costos de transporte, aumentar el uso de este modo y de mejorar la inclusión social. Esta última, se pretende alcanzar mediante el incentivo a la participación en actividades extracurriculares (estudiantes), aumentar la conectividad con familiares y amigos (adultos mayores) y promoviendo la búsqueda de trabajo (personas de bajos ingresos).

Dar un descuento a los estudiantes también está justificado como una medida para asegurar el acceso a la educación y para generar usuarios del transporte público en el largo plazo. Por otro lado, para adultos mayores también se menciona la mejora en el acceso a viajes de compras y de ocio, facilitar la movilidad independiente y mejorar la salud y calidad de vida. Por último, para personas de bajos ingresos la entrega del descuento también se da como incentivo para reducir la evasión dentro de este grupo.

**Tabla 2.5. Justificaciones encontradas por grupo, se incluye país-ciudad y link a fuente.**

Grupo	Justificaciones	País-Ciudad y Fuente
Estudiantes	<p>(1) Disminuir costos en transporte y ahorrar dinero a las familias                      (2) Promover movilidad sustentable                      (3) Asegurar asistencia a escuelas                      (4) Cubrir costos de acceso a estudios                      (5) Aumentar asistencia a escuelas                      (6) Aumentar participación en actividades extracurriculares y oportunidades de empleo                      (7) Desarrollar usuarios de largo plazo de transporte público                      (8) Aumentar uso de transporte público                      (9) Mejorar calidad de vida de los jóvenes                      (10) Apoyar a jóvenes en situación de vulnerabilidad social                      (11) Universalidad del acceso al transporte público</p>	<p>(1) <a href="#">Berlín</a>, <a href="#">California</a>, <a href="#">Los Angeles</a>, <a href="#">Washington</a>, <a href="#">Madrid</a> (Pág 85), Porto<sup>2</sup> (**), <a href="#">Johannesburgo</a> (Pág 4).                      (2) <a href="#">Berlín</a>, <a href="#">París</a> (Pág 1), Porto.                      (3) <a href="#">Massachusetts</a> (Pág 72), <a href="#">Montevideo</a>, <a href="#">Washington</a>.                      (4) <a href="#">Vancouver</a>, <a href="#">Tokio</a>.                      (5) <a href="#">California</a>, <a href="#">Los Angeles</a>.                      (6) <a href="#">California</a>, <a href="#">Los Angeles</a>, <a href="#">Seattle</a>, <a href="#">Tokio</a>, <a href="#">Washington</a>.                      (7) <a href="#">California</a>, <a href="#">París</a>.                      (8) <a href="#">California</a>, <a href="#">Madrid</a>, <a href="#">París</a>.                      (9) <a href="#">Barcelona</a>.                      (10) <a href="#">CDMX</a>, Porto.                      (11) <a href="#">Seattle</a>.</p>
Adultos mayores (y discapacitados*)	<p>(1) Promover viajes de ocio                      (2) Mejorar salud                      (3) Promover participación en comunidad. Integración social                      (4) Garantizar derecho a la vida                      (5) Ayudar a alcanzar potencial económico y social                      (6) Retribución por trabajo                      (7) Promover cambio modal                      (8) Otorgar mayor accesibilidad                      (9) Reducir costos de transporte                      (10) Mejorar calidad de vida y bienestar</p>	<p>(1) <a href="#">Berlín</a>, <a href="#">Bruselas</a>, Londres<sup>3</sup>(*).                      (2) <a href="#">Bruselas</a>, Bogotá<sup>4</sup> (**), <a href="#">Glasgow</a>(*), <a href="#">Madrid</a>(*)(Pág 34).                      (3) <a href="#">São Paulo</a> (Art. 230), <a href="#">Santiago</a>, Bogotá, <a href="#">Glasgow</a>, <a href="#">Madrid</a>, <a href="#">París</a>, <a href="#">Gales</a>, Londres.                      (4) <a href="#">São Paulo</a>.                      (5) <a href="#">Vancouver</a>(*).                      (6) Bogotá.                      (7) <a href="#">Glasgow</a>.                      (8) <a href="#">Glasgow</a>, <a href="#">CDMX</a>(*)(Pág. 50).                      (9) <a href="#">Santiago</a>.                      (10) <a href="#">Santiago</a>, <a href="#">Gales</a></p>
Bajos ingresos	<p>(1) Asegurar inclusión social y participación en la sociedad                      (2) Facilitar la participación en la vida económica, política, administrativa y cultural.                      (3) Reducir inequidad económica                      (4) Mitigar costos de transporte                      (5) Aumentar uso de transporte público                      (6) Promover búsqueda de trabajo</p>	<p>(1) <a href="#">Bruselas</a>, <a href="#">París</a>, Porto.                      (2) <a href="#">Bogotá</a>, <a href="#">California</a>.                      (3) <a href="#">Seattle</a> (Pág 1).                      (4) <a href="#">Massachusetts</a> (Pág 122), Porto.                      (5) Porto.                      (6) <a href="#">Londres</a> (Pág 1).</p>

(\*) En estos casos se da la misma justificación para adultos mayores y discapacitados.

(\*\*) En Porto y Bogotá, la fuente dada es para todos los grupos y justificaciones.

<sup>2</sup> Pedro Perista (2019). Portugal: Reducing the costs of daily commuting to protect the environment and reduce inequalities, ESPN Flash Report 2019/21, European Social Policy Network (ESPN), Brussels: European Commission.

<sup>3</sup> Department for Transport (2016). *Evaluation of concessionary bus travel: The impacts of the free bus pass*. Department for Transport, London. Página 9.

<sup>4</sup> Informe Subsidios en el SITP Colombia 2017. <https://www.transmilenio.gov.co/publicaciones/151221/informes-elaborados-por-organos-de-control-externo-2019/descargar.php?idFile=4123>. Página 15. Accedido en Marzo de 2023.

## **2.5. Síntesis y conclusiones**

La información exhibida en este capítulo nos da una clara imagen de que los descuentos en transporte público (para al menos uno de los 4 grupos estudiados) están presentes en ciudades de los 5 continentes. Además, como se muestra en la Tabla 2.1, las reducciones tarifarias se dan con mayor frecuencia en dos grupos: jóvenes o estudiantes y adultos mayores. En un caso ideal se hubiera preferido tener una muestra de ciudades lo más amplia posible, sin embargo, problemas de disposición de la información e inexistencia de esta, forzaron a acotar el largo de la selección; esto no quita que la muestra final cumple su propósito de ser una muestra ilustrativa del panorama global de los programas de reducción tarifaria.

Como se muestra en la Tabla 2.2, en promedio las ciudades de la muestra tienen un 19.3% y 15.6% de población joven y adulta mayor respectivamente; por tanto, en la selección de ciudades, en promedio estos grupos componen un 35% de la población. Por otro lado, en la sección 2.3, queda claro que estos grupos son los focos más reiterados para otorgar programas de reducción tarifaria (al menos en la selección presentada). Lo anterior nos lleva a inferir que los descuentos en transporte público para grupos específicos (visto desde un punto de vista general respecto de la muestra de ciudades) afecta a un alto nivel de personas y por lo tanto, también tendrá impactos en el sistema de transporte de cada ciudad.

Como fue dicho en el contenido de este capítulo, las ciudades de la muestra presentan porcentajes de población en pobreza que varían notablemente, recorriendo desde un 0.6% (Shanghái) hasta un 55.5% (Sudáfrica); lo anterior sumado al promedio y coeficiente de variación (19.32% y 0.54) indican que la selección de ciudades ilustra un amplio espectro de niveles de pobreza en el mundo. A su vez, la presencia de los programas de reducción tarifaria en la mayoría de estas ciudades nos lleva a concluir que otorgar descuentos en transporte público es una política implementada independiente del nivel de pobreza de la población. Sin embargo, uno de los motivos declarados por los tomadores de decisión que es común a 3 de los grupos (adultos mayores, estudiantes y personas en niveles de pobreza) es el de ayudar a reducir costos de transporte, lo que, siguiendo la lógica anterior, pareciera ser deseable independiente del nivel socioeconómico de la población en las ciudades.

Algo similar ocurre con la intensidad de uso del transporte público (medida según los viajes en  $[TP/hab \cdot día]$ ), la muestra presenta valores distribuidos entre dos rangos opuestos, uno que representa bajo nivel de uso (0.02 viajes  $[TP/hab \cdot día]$ ) y otro un nivel de uso muy alto (2.78 viajes  $[TP/hab \cdot día]$ ). El hecho de que el resto de las ciudades están distribuidas entre este rango y, que no se pueda observar una tendencia clara entre el nivel de uso y la decisión de otorgar de descuentos (similar cantidad de ciudades con descuento con bajo y alto nivel de uso) nos lleva a inferir que la decisión de implementar programas de reducción tarifaria (en las ciudades seleccionadas) también puede ser independiente del nivel de uso de transporte público.

Hasta el momento y al menos en la selección de 68 ciudades del mundo no hay una relación clara entre la decisión de otorgar programas de reducción tarifaria y aspectos socioeconómicos ni de uso de transporte público. Debido a lo anterior, es que toma relevancia lo analizado en la sección 2.4, en donde se esclarecen las motivaciones de los tomadores de decisión para implementar algún tipo de programa. Aquí surgen distintos objetivos declarados que, en general, reflejan una preocupación social: mejorar inclusión social, promover movilidad independiente, mejorar salud, aumentar viajes de compras y de ocio, aumentar asistencia a escuelas, son algunos de los más destacados.

En el capítulo 3 de esta tesis se revisará literatura que analiza y discute efectos provocados por los programas de reducción tarifaria en diferentes ciudades del globo; esto se realiza con el objetivo de tener otro punto de vista de los fundamentos que se dan para otorgar descuentos en transporte público. A diferencia de las motivaciones exhibidas en el capítulo 2 (declaradas por los tomadores de decisión), el capítulo que sigue nos mostrará objetivos implícitos tras los distintos tipos de análisis realizados por investigadores y/o evaluadores de políticas, añadiendo un enfoque distinto que permita avanzar en la aclaración de este tema. También resultará de interés indagar si en la literatura encontrada existen metodologías de cálculo para el nivel de descuento ofrecido a cada grupo.



## **Capítulo 3. Programas de Reducción Tarifaria en la literatura**

### **3.1. Introducción**

Como se mostró en la sección anterior, los PRT están implementados en prácticamente todas las ciudades pertenecientes a nuestra selección (al menos para Estudiantes y Adultos Mayores). A pesar de lo anterior, las justificaciones que dan los tomadores de decisión para entregar estos descuentos son enunciadas en una proporción bastante baja de las mismas ciudades.

En esta sección se busca otra fuente que ayude a detectar los objetivos y los motivos de la existencia de los programas de reducción tarifaria. Para lograrlo, se revisan artículos que analizan aspectos y efectos de los descuentos en diversas variables; se cree que lo anterior puede dar luz para interpretar las preferencias reveladas de lo que se busca cambiar con estas medidas según los analistas e investigadores afines a la materia (los que pueden o no pertenecer al grupo de tomadores de decisión en cada ciudad). La literatura fue seleccionada tras una extensa revisión que consideró estudios que cumplieran dos condiciones: estudiar impactos en al menos una variable debido a un descuento en transporte público y que estuviera enfocado en al menos uno de los grupos en los que se concentra esta tesis. La búsqueda cumplió con estos dos criterios en mayor o menor medida para 3 de los 4 grupos; para personas con discapacidad no fueron encontrados artículos que cumplieran los requisitos previamente mencionados. La totalidad de los documentos que se revisaron están en la Tabla C, del Anexo C.

El estudio de los efectos provocados por los programas de reducción tarifaria dará luces sobre información relevante en el sistema de transporte de cada ciudad. Por ejemplo, al inspeccionar el efecto de la cantidad de viajes es posible tener estimaciones de las elasticidades precio-demanda por transporte público. Información que será útil en el capítulo 4, donde se buscarán aproximaciones al cálculo de tarifas óptimas desde distintos enfoques.

En esta sección se realizará la revisión por separado para cada grupo, ordenados por aquellos que son estudiados con mayor énfasis en la literatura: Adultos Mayores, Estudiantes (y/o Jóvenes), y personas de Bajos Ingresos. Por último, la búsqueda en la literatura para personas con algún tipo de discapacidad no reveló mayores esfuerzos por estudiar este segmento de la población.

### **3.2. Adultos Mayores**

#### **3.2.1. Visión general**

Adultos Mayores es el grupo más presente en la literatura revisada, donde las variables y efectos más estudiados son: cantidad de viajes, motivos de viaje, posesión de la concesión (cuándo existe), aspectos de la salud e inclusión social. Esto parece

indicar cuáles son los objetivos de interés para los analistas cuando se ofrece un descuento a este grupo.

Sin embargo, también existen otros aspectos que, pese a no ser tan estudiados, merecen ser mencionados. Por ejemplo, Rye y Carreno (2008) exponen una forma de cálculo para el pago a los operadores cuando se da descuento a adultos mayores, esta se basa en un factor de pago que depende de: los viajes realizados con la concesión y la estimación de los viajes que se realizarían sin ella; como conclusión, se cree que se le está sobre-pagando a los operadores por los viajes, es decir, están ganando dinero al ofrecer un descuento para adultos mayores. Por otro lado, Department of Transport (2016), Kelly (2011) y Shin (2021), estiman costos y beneficios de la medida. Si bien pareciera haber consenso en que los costos de la medida se atribuyen a aumentos en el nivel de servicio y costos administrativos para implementar los descuentos, no existe tal acuerdo en los beneficios que genera la medida. Si bien Kelly (2011) y Department of Transport (2016) consideran como beneficio el cambio en el Excedente del Consumidor (viajes a un menor costo y nuevos viajes), éste último artículo agrega otro tipo de beneficios que deben ser considerados al evaluar la política, tales son cambios en: congestión, emisiones, salud, tiempos de viaje y de espera. Por otro lado, en Shin (2021) se le da mayor énfasis al beneficio generado por reducir la contaminación del aire.

A continuación, se discutirán los temas más reiterados en la literatura y se entregarán las principales conclusiones obtenidas de la revisión realizada.

### **3.2.2. Variables relacionadas a transporte**

Son variados los artículos que estudian el impacto de los PRT para adultos mayores en variables relacionadas a transporte. Los más reiterados en las discusiones y análisis son: Cantidad de viajes, posesión de concesión para aplicar el descuento y propósitos de viajes.

#### **- Cantidad de viajes**

La cantidad de viajes es una de las variables que ha sido estudiada desde hace más tiempo, esto lo muestra el estudio realizado por Caruolo y Roess (1974) para el Department of Transportation de Estados Unidos, donde analizan los cambios empíricos en la demanda debido a los distintos programas de reducción tarifaria en 10 ciudades de dicho país. En él, se muestra que en todas las ciudades existió un aumento de la demanda (del grupo afectado) por Transporte Público, que en promedio fue de 34% ante un descuento promedio del 55%; complementariamente, se calcula que la elasticidad promedio entre las ciudades revisadas es de -0.491. Cabe destacar que, en Metaxatos (2013) se menciona que la American Transportation Association (APTA) realiza una estimación de la elasticidad por Transporte público (para el público general) y sus valores rondan entre -0.18 y -0.43, indicando que la elasticidad para los adultos mayores podría considerarse mayor que para el público general.

Caso similar es lo ocurrido en el distrito de Salisbury en el Reino Unido, estudiado por Baker & White (2010) donde, ante un aumento del descuento desde un 50% a 100%, existió un aumento del 72.5% en los viajes, provenientes de una mayor cantidad de viajes de usuarios que ya viajaban con el 50% de descuento y los nuevos usuarios que empezaron a usar el transporte público cuando se hizo gratis. Al estimar la elasticidad considerando lo antes mencionado se llega a un valor de -0.31.

Al revisar estudios que fueron desarrollados en ciudades orientales se observan resultados parecidos, pues tanto en Zhang et al. (2019) (realizado en Beijing) como en Jin et al. (2018) y Shin (2021) (realizados en Seúl) se calculan aumentos en la demanda en transporte público debido a reducciones tarifarias del 100% para adultos mayores, dando como resultado aumentos del 5%, 2% y 16% en la cantidad de viajes, respectivamente.

Con lo anterior, queda claro que ofrecer el descuento para adultos mayores induce una mayor cantidad de viajes en Transporte Público por parte de dicho segmento; la magnitud del aumento ciertamente dependerá de variables propias de cada lugar y sistema de transporte. Como se verá más adelante, una mayor cantidad de viajes en transporte público implica, sobre todo para este grupo, una vida más activa e independiente.

#### - **Posesión de Concesión**

La posesión de la concesión hace referencia a aquellas ciudades que otorgan un pase o tarjeta para que el grupo objetivo pueda hacer efectivo el descuento cada vez que utilizan el modo de transporte. La diferencia principal que existe entre posesión de la concesión y cantidad de viajes es que la primera representa los usuarios que potencialmente tienen como opción pagar una tarifa reducida pero no necesariamente representa un aumento en la cantidad de viajes.

Dicho esto, existen estudios que analizan el cambio de porcentaje de la población objetivo que accede a poseer la concesión en determinados lugares donde se ha aplicado este tipo de medidas. Es el caso de Baker & White (2010), Department of Transport (2016) y Whitley et al. (2020), estudios concentrados en distintas regiones del Reino Unido y que muestran un aumento en la posesión de la concesión al aumentar el porcentaje de descuento. En el primer caso, al aumentar el descuento de 50% a 100% se evidencia un aumento de la posesión del 70%, asimismo, en el segundo estudio mencionado el cambio fue controlado entre los años 2002 y 2012, mostrando un aumento del 53% al 76% de poseedores entre la población objetivo (mayores de 60 años); por último, en el último estudio no sólo se reafirma que una disminución en la tarifa viene acompañado de un aumento en la posesión de la concesión, sino que también se muestra el efecto del aumento en la edad de elegibilidad para acceder al beneficio, afirmando que al aumentar la edad de aplicabilidad, no solo se reduce la población objetivo sino que también hay un impacto negativo en la posesión de la concesión en personas que siguen siendo beneficiadas.

En conclusión, los estudios que analizan cambios en la posesión de la concesión se concentran en Inglaterra y todos concluyen que ha existido un aumento del porcentaje de posesión frente a un aumento del descuento (en este caso particular, aumentando el descuento a 100%). Sin embargo, como muestra Whitley et al. (2020) reducir el rango mínimo de elegibilidad puede disminuir el porcentaje de posesión aún en los grupos que no se ven afectados por el cambio.

- **Propósito de viajes**

Como fue visto en la sección 2.4 en documentos que justifican la existencia de los PRT para adultos mayores se menciona que se busca incentivar los viajes con ciertos propósitos ó facilitar el acceso a distintas actividades. En esta misma línea, en Department of Transport (2016) se declara explícitamente que el descuento a los adultos mayores se hace con el objetivo de mejorar el acceso a: servicios esenciales (compras, horas médicas, etc.), amigos, familia y actividades de ocio. En esta sección se inspecciona la relación entre los descuentos en transporte público y el propósito de viaje, lo que tiene directa incidencia en los objetivos que se buscan con estos programas.

Al revisar la literatura se encuentra que el propósito que más se ve afectado con el descuento es el de realizar compras. Así lo confirman los estudios de Rye & Mykura (2009) y Kelly (2011) (realizados en Escocia e Inglaterra respectivamente). Para el primero, al pasar de un descuento de 0% a 100% aumentaron en un 34% los viajes con este propósito, mientras que en el segundo al pasar de un 50% a 100% de descuento los viajes de compras aumentaron en un 3% (siendo el que más se vió afectado).

Por otro lado, Millar et al. (1977), Department of Transport (2016) y Zhang et al. (2019) muestran que los viajes de compras y de ocio son los propósitos más reiterados entre los viajes de adultos mayores, conformando más del 50% del total en los 3 estudios. Lo anterior es coherente con lo declarado en Department for Transport (2016), donde también se insinúa que el objetivo detrás de incentivar los viajes con los motivos mencionados es reducir la exclusión social y mantener el bienestar de este grupo. La relación entre el uso de los PRT por adultos mayores e inclusión social será explorada en la sección 3.2.4.

### **3.2.3. Variables relacionadas con salud**

Generalmente, existe una relación negativa entre la edad y la movilidad de las personas, especialmente en aquellas consideradas como adultos mayores. La falta de movilidad y “en consecuencia” la falta de actividad física trae consigo diferentes impactos negativos en la salud de las personas, tales como aumentos en la probabilidad de presentar obesidad, sufrir paro cardíaco y/o tener diabetes. Debido a lo anterior y con tal de no sufrir las consecuencias antes mencionadas, es importante que este grupo etario tenga incentivos para aumentar su movilidad y actividad física, objetivo que se puede lograr mediante descuentos en transporte público.

Generalmente los estudios miden el efecto de los programas en cambios en la actividad física de los usuarios, pero también hay estudios que revisan el impacto en variables relacionadas a la salud (IMC, ancho de cintura, enfermedades crónicas, entre otras). Siguiendo la primera línea mencionada, Coronini-Cronberg et al. (2012) y Kamada et al. (2018) concluyen que tener acceso al descuento está relacionado con una alta probabilidad de aumentar la caminata.

Por otro lado, Lavery et al. (2018) se enfoca en analizar cómo el aumento del uso de transporte público (en periodos cuando fue implementado el PRT en Inglaterra) afecta el IMC y ancho de cintura, ambas variables relacionadas directamente con la salud de los adultos mayores. El estudio demuestra que aumentar el uso del modo antes mencionado induce una mayor probabilidad de realizar actividad física, lo que para ciertos grupos (específicamente mujeres que ya eran usuarias de transporte público) viene acompañado de reducciones en el Índice de Masa Corporal y en el ancho de cintura.

Es destacable lo mencionado por Coronini-Cronberg et al. (2012) y Lavery & Millet (2014), autores que en el contexto de la medición de impactos de los PRT en la salud y actividad física de los adultos mayores consideran que se debe avanzar en una forma de monetizar los beneficios generados por la medida, con tal de poder compararlos con sus costos. Un esfuerzo para ayudar a solucionar este problema es el realizado por Kelly (2011), donde se utiliza la única estimación encontrada que monetiza el beneficio de salud debido a caminar más, realizada por New Zealand Transport Agency (NZTA, 2010) y que entrega un valor de 1 libra esterlina (1000 CLP aproximadamente) por kilómetro. A pesar de lo mencionado anteriormente, es claro que existen otros beneficios de salud derivados de los PRT que a nuestro entender no se han podido monetizar y por lo tanto, no es posible realizar una correcta evaluación de los beneficios buscados.

Se ha mostrado que incentivar el uso de transporte público en Adultos Mayores trae consigo mejoras tanto en la frecuencia como en la cantidad de actividad física realizada, lo cual ayuda a que este grupo tenga una vida más saludable y con menos riesgos de presentar enfermedades crónicas, ver por ejemplo Musich et al. (2017). Lo anteriormente mencionado y sumado a la variedad de artículos mostrados en este capítulo, indica la relevancia de este aspecto al evaluar la medida.

#### **3.2.4. Inclusión social**

Generalmente, los adultos mayores son vistos como un grupo de la sociedad que potencialmente se vería afectado por la exclusión social, la que según Jiménez (2008) es definida como "(...) Un proceso multidimensional, que tiende a menudo a acumular, combinar y separar, tanto a individuos como a colectivos, de una serie de derechos sociales tales como el trabajo, la educación, la salud, la cultura, la economía y la política (...)". En este mismo documento, se señala que la edad puede ser una circunstancia que intensifica o agrava este fenómeno, en particular en las etapas de mayor vulnerabilidad como la vejez.

En variados estudios se analiza la influencia que tienen los PRT en el sentido de pertenencia a la sociedad, el cual es analizado de distintas formas según cada artículo. Generalmente se incluyen aspectos relacionados a la participación activa de los adultos mayores en actividades sociales, sus relaciones interpersonales con familiares y amigos, y la facilitación de acceso a bienes y servicios esenciales, lo que según la definición expuesta en el párrafo anterior, ayudaría a disminuir la exclusión social.

Los estudios cualitativos realizados por Green et al. (2014) y Mackett (2014) muestran que los Adultos Mayores perciben los PRT como una mejora en su calidad de vida y como retribución a su contribución a la sociedad, generando un sentido de pertenencia a la sociedad. Además, en el segundo artículo mencionado, se señala que el descuento permite la visita a amigos y familiares.

Por otro lado, Rye & Mykura (2009) concluye que la evidencia que sugiere la reducción en exclusión social (o mejora en inclusión social) debido a los PRT es limitada. En este mismo sentido, Shin (2021) no encuentra influencia del programa sobre la cantidad y el tiempo invertido en viajes sociales/ocio, no afectando esta dimensión de la inclusión social.

Por lo tanto, la evidencia que sugiere que los PRT tienen un impacto en reducir la exclusión social está dividida en artículos que apoyan la idea y algunos que afirman que la relación entre esta variable y los descuentos para adultos mayores no es clara. Lo que sí se puede concluir es que la exclusión social parece ser un tema considerado en la literatura cuando se quiere hablar de los impactos generados por los PRT para Adultos Mayores.

### **3.2.5. Síntesis Adultos Mayores**

En la literatura se estudia desde distintos puntos de vista el impacto que tiene un programa de reducción tarifaria en los adultos mayores. Los impactos que más se analizan son: cantidad de viajes, posesión de concesión, propósito de viajes, salud y exclusión social.

Al observar los estudios que analizan cambios en la cantidad de viajes, se nota que en todos los casos existió un aumento cuando se entregaba un descuento. Si bien las magnitudes de los cambios varían, se pueden establecer rangos para la elasticidad precio-demanda de las tarifas en transporte público para este grupo, los cuales están entre -0.02 y -0.491.

Los propósitos de viajes que se incentivan en mayor medida son de compras y ocio. Ambos hacen referencia a actividades que los adultos mayores podrán realizar por sí solos, incentivando la vida independiente de este grupo. Además, como fue dicho en la sección 3.2.2 el aumento en viajes con estos propósitos van en línea con los objetivos declarados por las autoridades de transporte en Inglaterra, lo que ciertamente da luces de una de las motivaciones detrás de ofrecer el descuento para adultos mayores.

Se muestra en diversos estudios que el aumento en la cantidad de viajes trae consigo un aumento en la actividad física, a través de aumentos en la caminata para acceder al sistema de transporte o a través de la realización de otro tipo de actividades. Para adultos mayores, es de vital importancia mantener un estilo de vida activo, con tal de reducir la posibilidad de sufrir distintos tipos de enfermedades. Los programas de reducción tarifaria contribuyen en este aspecto, lo que es consecuente con algunos de los objetivos declarados en la sección 2.4.

Si bien en la revisión de impactos sobre la exclusión social se concluye que no hay claridad en cuanto a si los cambios son positivos o negativos, se cree que el aumento en la cantidad de viajes con los distintos propósitos previamente mencionados ayudan a que los adultos mayores tengan un estilo de vida más activo, independiente y a la vez en comunidad, factores que contribuyen a reducir su exclusión social.

Es de interés recalcar que en la revisión de la literatura no se encontraron metodologías de cálculo para el nivel de descuento ofrecido para este grupo. Sin embargo, los esfuerzos por calcular los cambios en el EMC de los grupos afectados pueden servir como guía para desarrollar un enfoque que se aproxime al cálculo de tarifas para distintos grupos, tema que será abordado en el capítulo 4.

### **3.3. Jóvenes y/o Estudiantes**

#### **3.3.1. Visión General**

El segundo grupo más estudiado es el de los Jóvenes y/o Estudiantes. Como era previsto, el enfoque que se le da a este tipo de investigaciones coincide con el de los adultos mayores en estudiar cambios en variables relacionadas a transporte y salud. Sin embargo, presenta novedades en gestión del espacio en establecimientos educacionales (mayoritariamente Universidades) y en la asistencia tanto a la escuela como a actividades extracurriculares.

Sin embargo, hay estudios que analizan y concluyen sobre impactos en otro tipo de aspectos, la reducción del gasto mensual en pases al aumentar la edad de elegibilidad e.g. Arranz et. al (2019), la cantidad de estudiantes que ahorran dinero al hacer uso del descuento e.g. Butler & Sweet (2020) y la Willingness To Pay (Disposición a pagar, WTP) de los estudiantes por un pase mensual (considerando beneficios como la reducción en la contaminación) e.g. Myers et al. (2006). Por último, en Toronto Transit Commission (2018) calculan el valor del pase mensual para estudiantes universitarios a partir de la política “revenue and cost neutral” para los operadores.

A continuación, se desarrollarán las principales conclusiones obtenidas sobre los temas que más se reiteraron en la literatura, tales como: variables relacionadas a transporte, aspectos de salud, asistencia a escuela, asistencia a actividades extracurriculares y gestión de espacio en establecimientos educacionales.

### **3.3.2. Variables de transporte: Partición modal y Gestión del espacio**

Se cree que es conveniente separar los impactos en variables de transporte en aquellos artículos que se enfocan en estudiantes secundarios y aquellos que lo hacen en universitarios. El principal motivo de esto es que estos últimos tienen la posibilidad, debido a su edad, de realizar viajes en automóvil y, por tanto, gana relevancia analizar la partición modal (específicamente entre automóvil y transporte público) y la gestión de espacio dentro de Universidades. Por otro lado, para estudiantes secundarios toma relevancia la participación en actividades extracurriculares.

#### **- Estudiantes secundarios**

Para estudiantes secundarios fueron dos los estudios que hablan sobre cambios en la cantidad de viajes y en la partición modal para ir a la escuela. Coincidentemente, ambos estudios son realizados en Estados Unidos y analizan descuentos otorgados a estudiantes secundarios de bajos ingresos, McDonald et al. (2004) realizan el estudio en San Francisco, mientras que Thistle & Paget-Seekins (2017), en Massachusetts. Ambos estudios mostraron un aumento en el uso de transporte público de parte de los participantes en los programas, lo que se reflejó en un cambio en la partición modal para ir a la escuela sin necesariamente aumentar los viajes totales a ésta.

Otros objetivos expresados en estos artículos son: reducir brecha financiera para familias con bajos ingresos, acceso asequible al transporte público para estudiantes, mejorar participación en actividades extracurriculares, testear el impacto en las finanzas de la agencia de transporte.

#### **- Estudiantes Universitarios**

Como fue mencionado, se encontró un grupo de estudios que presentan similitudes en cuanto a las variables analizadas, tanto en Brown et al. (2003), Meyer & Beimborn (1998), Williams & Petrait (1993) y en Wu et al. (2004) se analiza el impacto de un pase para estudiantes universitarios en partición modal de los estudiantes y gestión de estacionamientos en el establecimiento. Coincidentemente todos los estudios son realizados en Universidades de Norteamericanas.

Brown et al. (2003) muestra que estudiantes de la UCLA se ven beneficiados por un 100% de descuento en líneas de buses que se dirigen a esta Universidad, este descuento consiguió un aumento de un 17% a 24% en la partición modal de buses y una disminución de un 17% a 12% en el uso de auto para ir al establecimiento. Respecto a los estacionamientos dentro de UCLA, el uso bajó de 6.400 a 5.100 plazas y la lista de espera por un puesto bajó de 4.000 a 2.600. Adicionalmente, se menciona que el uso del convenio es realizado con otros fines, entre ellos se destaca el participar en actividades culturales, ir a trabajos y recorrer la ciudad.

Del mismo modo, en Meyer & Beimborn (1998) se estudia el impacto del programa que ofrece la Universidad de Milwaukee, el cual otorga un 100% de descuento previo pago de un monto (no especificado) con la matrícula. Los efectos en la partición modal



que se presentan en el estudio corresponden a un aumento del uso de transporte público de 12% a 26% y una reducción del uso de automóvil de 54% a 41%. Además, se cree que se dejaron de hacer 220.000 viajes por año en automóvil y, a través de focus groups, se concluyó que la percepción de la dificultad de encontrar estacionamiento en la Universidad disminuyó.

Resultados similares se observan en Williams & Petrait (1993), que analizan el impacto del programa en la Universidad de Washington, donde se les entregaba un 85% de descuento para transporte público. Los cambios en partición modal constan de una reducción del 33% al 23% en automóvil y un aumento del 21% al 33% en transporte público. Si bien no se mostraron resultados en cuanto a la capacidad de estacionamientos, para financiar la entrega de descuentos se aumentó el costo del derecho a ocupar una plaza, además de entregar un pase de descuento en transporte público a quienes adquirieron el derecho.

Por último, en Wu et al. (2004) analizan el impacto de entregar un pase de descuento del 100% a estudiantes de la Universidad British Columbia, el cual tenía como objetivos principales aumentar el uso de transporte público en un 20% y reducir en la misma cantidad el uso de Single Occupancy Vehicles (SOV). El estudio muestra que estos objetivos no fueron alcanzados en su totalidad, sin embargo, la partición modal de transporte público aumentó en un 21%, mientras que la reducción de viajes realizados en SOV fue de un 9%. La sustitución de viajes hacia transporte público viene principalmente de la reducción de viajes realizados en High Occupancy Vehicles (HOV).

Es claro que los estudios enfocados en estudiantes universitarios analizan el impacto en variables específicas, como lo son cambio en la partición modal de viajes a los establecimientos (principalmente cambios entre transporte público y automóvil) y gestión de los espacios de estacionamiento dentro de estos recintos. En todos los estudios descritos anteriormente, se observa que la política ha afectado positivamente a la partición modal en transporte público y, en consecuencia, de forma negativa a la de automóvil. Además, en los estudios que analizan impactos en la gestión de plazas de estacionamiento, el impacto en todos se relaciona con una disminución en los estacionamientos utilizados, lo que conlleva una mejora en la percepción del uso del espacio.

### **3.3.3. Aspectos de Salud**

Al igual que los adultos mayores, analizar el impacto de los descuentos en la salud de los jóvenes también aparece como una variable importante a estudiar, sin embargo, el enfoque que se le da a jóvenes es distinto al mostrado para adultos mayores.

Se encontraron 3 estudios que discuten los impactos en la salud, estos son Edwards et al. (2013), Jones et al. (2012) y Ly & Irwin (2017), en los cuales existe consenso que los jóvenes y estudiantes aumentan la cantidad de viajes que realizan, especialmente reemplazando viajes de caminatas cortas por viajes en transporte

público. Sin embargo, como es expresado en Jones et al. (2012), nuevas instancias de caminatas son generadas al existir nuevos viajes que sin el descuento no hubieran sido realizados, además de otro tipo de actividades que se puedan desarrollar debido a la existencia del descuento. Por tanto, como es expresado por los autores, es necesaria una investigación empírica para cuantificar qué efecto “pesa” más en la cantidad de actividad física realizada en jóvenes, si la reducción de caminata debido al aumento de viajes cortos, o el aumento en actividad física derivada de los nuevos viajes generados y posibles oportunidades de realizar otro tipo de actividades.

Otras observaciones que se destacan en los estudios mencionados son, por ejemplo, que la percepción de los estudiantes de realizar una mayor cantidad de actividad física debido al uso de transporte público está fuertemente ligada a su actividad física actual (Ly & Irwin, 2017). Por otro lado, Edwards et al. (2013) destaca otros aspectos de salud que se pueden ver afectados por la medida, de forma positiva se destaca la reducción en la cantidad de accidentes de tránsito protagonizados por estudiantes. Sin embargo, un aspecto negativo es que se observa un aumento en la cantidad de asaltos en jóvenes.

De lo mostrado anteriormente se puede deducir que el efecto que tienen los PRT en la salud de los jóvenes es incierto, puesto que, al contrario de los adultos mayores, representan un grupo (en general) más activo físicamente, el cual frente a un aumento en la cantidad de viajes no es tan beneficiado por la actividad física derivada de usar transporte público.

#### **3.3.4. Asistencia a escuela y actividades extracurriculares**

Como fue mencionado en la sección 3.3.2, el estudio realizado por McDonald et. al. (2004) destaca el impacto que tiene el descuento en la asistencia a actividades extracurriculares por sobre el que tiene en las tasas de asistencia a la escuela. En este estudio, se reportan aumentos en la cantidad de participantes de actividades extracurriculares en el año que se implementó el programa de descuentos.

Sullivan (2017) es otro estudio que muestra que el descuento no tiene como principal uso el asistir a la escuela, sino que es en viajes con propósito de compra y ocio. Sin embargo, al comparar la asistencia a actividades extracurriculares en estudiantes de noveno grado cuando no existía y cuando ya estaba presente el descuento se encuentra un aumento significativo en esta variable.

Por tanto, ambos estudios coinciden en dos conclusiones relevantes: no se nota una relación significativa entre otorgar un PRT a estudiantes secundarios y la tasa de asistencia a las escuelas, y sí se percibe un aumento en la participación de actividades extracurriculares.

#### **3.3.5. Síntesis jóvenes y/o Estudiantes**

La literatura muestra que los impactos causados por ofrecer descuentos en transporte público a estudiantes son variados. Se destaca el aumento en dos variables, la

partición modal de transporte público para viajes a la escuela y en la participación en actividades extracurriculares.

El impacto en salud es incierto, ya que, a diferencia de los adultos mayores, los estudiantes son un grupo que generalmente es más activo. Por lo tanto, si existiese un aumento en la actividad física producto de viajar más en transporte público, no necesariamente se ve reflejado cómo una mejora en salud; aquí toma relevancia la cantidad de actividad física no relacionada a viajes realizada por el individuo.

Por último, se destaca haber encontrado una metodología de cálculo para el nivel de descuento otorgado a estudiantes en la ciudad de Toronto. En el informe de Toronto Transit Commission (2018) muestran que el valor asignado a la tarjeta semestral para universitarios es “revenue and cost neutral” y es posible debido a que el pago por el pase es obligatorio para todos los estudiantes. El precio del pase está compuesto en un 93% para cubrir la recaudación generada actualmente por estudiantes universitarios, y en un 7% por el aumento en el servicio inducido por la nueva demanda estimada.

### **3.4. Bajos Ingresos**

Se encontraron solamente 3 estudios sobre programas de reducción tarifaria para personas de bajos ingresos. Darling et al. (2021) es una comparación cualitativa de varios programas de reducción tarifaria para personas de bajos ingresos en Estados Unidos; donde se compara: cantidad de viajes en transporte público, modos disponibles, tarifa, proceso de postulación y elegibilidad de programas en 11 sistemas de transporte. Sin embargo, a nuestro entender, tal vez una de las conclusiones más destacables de este análisis es la propuesta de los autores para investigaciones futuras, en donde mencionan: “... Entrevistas y discusiones con administradores de las agencias pueden mostrar cómo es el proceso interno de escoger el porcentaje de descuento...”, esto muestra el poco conocimiento que hay sobre las metodologías de cálculo (si es que existen) para el nivel de descuento de los programas.

Los otros dos estudios tienen lugar en Bogotá, por un lado, Guzmán & Oviedo (2018) muestra el impacto del programa en medidas de accesibilidad, capacidad de pago y equidad; mientras que Rodríguez et al. (2016) estudia los motivos que tienen los usuarios para decidir su participación en este tipo de programas y el impacto que estos tienen sobre variables del mercado laboral.

El primero de los estudios mencionados concluye que las zonas socialmente más vulnerables son las más beneficiadas en términos de accesibilidad. Adicionalmente, el descuento ofrecido de 50% en transporte público les provoca un ahorro mensual (promedio) de 5.2% en este tipo de gastos, cumpliendo con uno de los objetivos declarados en este mismo artículo, “... alivianar la brecha financiera de los hogares más pobres para acceder al sistema de transporte público de la ciudad”. Respecto a temas de equidad, la medida redujo en un 13% las diferencias de accesibilidad entre el 10% más rico y el 40% más pobre de la ciudad.

Por último, Rodríguez et al. (2016) indica que las variables que más afectan la decisión de acceder al descuento son: género, empleabilidad y uso del descuento entre personas del vecindario. A su vez, las personas del quintil de ingresos más bajo son un 7% más probables de acceder a algún programa con respecto a todos los otros quintiles. Respecto a las variables del mercado laboral, los autores concluyen que el programa otorga mejor movilidad y accesibilidad a oportunidades económicas; sin embargo, el impacto mayor del descuento recae en el ingreso por hora de las personas que tienen un trabajo informal.

En el capítulo 2 de esta tesis se mostró que los programas, así como los motivos para implementarlos se dan en menor medida para personas de bajos ingresos en relación a estudiantes y adultos mayores, lo que es consecuente en relación a la literatura que se preocupa de analizar cómo impactan estas medidas en este grupo. Idea que es reforzada por Guzmán & Oviedo (2018), en donde los autores concluyen que por muy “obvios” que parezcan los resultados de su estudio, análisis semejantes al presentado no son recurrentes ni discutidos abiertamente en la academia.

### **3.5. Síntesis**

Se ha revisado la literatura que analiza los diferentes impactos que los programas de reducción tarifaria han tenido en el mundo. A través de esta literatura fue posible detectar las dimensiones que cada autor supone están detrás de los objetivos de los programas. Lo anterior, entrega una mirada complementaria a los motivos encontrados en el capítulo 2.

Se encontró interés por parte de los autores de estudiar impactos en al menos 3 de los 4 grupos en los que se enfoca esta tesis; del análisis se evidenciaron elementos comunes y otros diferenciadores entre los grupos. Para adultos mayores se destacan variables de transporte, salud y exclusión social. Para estudiantes se repiten las dos primeras variables y se añade la participación en actividades extracurriculares; por último, para personas de bajos ingresos toman fuerza temas de accesibilidad, capacidad de pago, equidad y oportunidades laborales. Los principales efectos encontrados se sintetizan en la sección perteneciente a cada uno de los grupos.

De los objetivos anteriores, la cantidad de uso de transporte público asoma como uno de los más estudiados, lo cual se hace a través de la cantidad total de viajes o cambios en la partición modal. El estudio del objetivo mencionado anteriormente es útil para medir beneficios monetarios generados en los usuarios; como es observado en Department of Transport (2016), donde se analiza el excedente del consumidor, y logran medir el beneficio en dinero debido a los viajes generados por la política. Lo anterior nos sirve para explorar enfoques que se aproximen a la metodología de cálculo del nivel de descuento ofrecido.

A raíz de lo anterior, se destaca la metodología de cálculo encontrada para el precio de un pase semestral de estudiantes universitarios en Toronto. La idea principal de la metodología es asegurar que los operadores no pierdan dinero, ni por lo recaudado

previo al descuento, ni por los gastos extras asociados a mejorar el nivel de servicio. Esto también se considerará al momento de desarrollar nuevos enfoques dirigidos a calcular los descuentos óptimos para múltiples usuarios.

En el capítulo siguiente se explorarán metodologías de cálculo para el sistema tarifario donde coexisten distintos grupos. Como primera aproximación se desarrollará un enfoque basado en diseñar de manera eficiente una línea de transporte público, para luego contrastar los resultados obtenidos con un enfoque motivado en las principales conclusiones extraídas de los capítulos 2 y 3 de esta tesis.

## **Capítulo 4. Aproximaciones al cálculo de tarifas diferenciadas**

### **4.1. Introducción**

En el capítulo 2 de esta tesis se revisaron los motivos que se otorgan para dar descuentos en transporte público. Para cada grupo estudiado se encontraron preferencias declaradas que se reiteran a lo largo de la selección de ciudades. Por ejemplo, para adultos mayores, estudiantes y personas de bajos ingresos se justifica la entrega de descuentos bajo los siguientes motivos: ayudar en la reducción de los costos de transporte, inducir un aumento del uso de transporte público o mejorar dimensiones de la inclusión social. Además, existen otras justificaciones particulares para cada uno de los grupos, por ejemplo, para estudiantes se busca asegurar el acceso a la educación; para adultos mayores se busca (entre otros) mejorar la salud y calidad de vida y para personas de bajos ingresos se busca reducir la evasión en transporte público.

Por otro lado, en el capítulo 3 notamos que la literatura publicada se centra en evaluar el impacto de los programas en distintas variables asociadas a cada uno de los grupos. Por ejemplo, para adultos mayores se miden cambios en la cantidad de viajes, propósitos de viajes, variables de salud y en inclusión social (entre otros); para estudiantes los estudios se enfocan en medir el cambio en: partición modal, variables de salud y asistencia a actividades extracurriculares. Por último, los pocos estudios encontrados para personas de bajos ingresos están enfocados en observar cambios en accesibilidad, capacidad de pago, equidad y en variables relacionadas al mercado laboral.

A pesar de que la literatura revisada nos permitiera reconocer los impactos y objetivos buscados, hay escasas muestras, salvo en Toronto Transit Commission (2018), en cuanto a la forma de cálculo del nivel de descuento en los programas de reducción tarifaria. A nuestro entender, para una política que está implementada en un número considerable de ciudades importantes en el mundo, es necesario explorar este tema. El objetivo de esta sección es acercarse desde distintos enfoques a una metodología de cálculo para el nivel de descuentos en los programas de reducción tarifaria. Para lo anterior, se desarrollan dos modelos que permiten obtener tarifas para distintos grupos.

En primer lugar, se extenderá el modelo de Jara-Díaz & Gschwender (2003), el cual se basa en diseñar y tarifificar de manera óptima una línea de transporte público para un único tipo de usuario. Nuestro enfoque estará en incorporar al modelo un sistema en el que participan simultáneamente N tipos de usuarios de diferentes características. Las tarifas obtenidas bajo este modelo sirven como punto de referencia para comparar con lo observado empíricamente en un sistema de transporte.

Por otro lado, las conclusiones de los capítulos 2 y 3 sugieren que los grupos que reciben programas de reducción tarifaria son vistos de manera especial en comparación al resto de los usuarios. Esto motiva un segundo enfoque basado en

revelar la importancia implícita que los tomadores de decisión le dan a los beneficios grupales derivados de los programas de reducción tarifaria.

#### **4.2. Modelo de Jara-Díaz & Gschwender (2003)**

En esta sección se muestra el modelo desarrollado por Jara-Díaz & Gschwender (2003), el cual busca el diseño óptimo de una línea de transporte público, esto es, la frecuencia  $f^*$  con la que se debe servir y el tamaño de los vehículos  $K^*$ . La modelación considera la minimización de recursos aportados por operadores (costos fijos y variables según el tamaño de los buses) y usuarios del sistema (tiempo de espera y de viaje en vehículo). Este es una extensión al modelo de Jansson (1984), ya que, entre otros, se añade el efecto provocado sobre el valor del tiempo de viaje debido al hacinamiento en los buses, efecto que se ha demostrado tiene un fuerte impacto en la obtención de tarifas (e.g. Tirachini et. al 2013).

En este problema, las tarifas son derivadas de la minimización de recursos, los que a su vez dependen del diseño óptimo del sistema. Debido a lo anterior, se puede decir que las tarifas responden a una mirada de eficiencia del sistema.

Primero se plantea el problema, luego se optimizan las variables de diseño, y finalmente se derivan las tarifas eficientes que responden a este diseño óptimo.

El problema se centra en calcular la minimización de recursos para operadores y usuarios para una ruta de largo  $L$  y largo de viaje promedio  $l$ , donde se asume que el costo por bus de los operadores es una función lineal del tamaño de éste ( $K$ ) como se observa en (1). Asimismo, el tiempo de ciclo ( $t_c$ ) de un bus es el descrito en (2).

$$c(K) = c_0 + c_1K \quad (1)$$

$$t_c(f) = \frac{tY}{f} + T \quad (2)$$

Donde se tiene que  $t$  es el tiempo de abordaje y bajada de pasajeros,  $T$  es el tiempo de viaje en ruta del vehículo,  $Y$  representa la cantidad de usuarios en el sistema y, por último,  $f$  es la frecuencia con la que se opera el sistema.

Por otro lado, el valor del tiempo de viaje  $P_v$  (de parámetros  $P_{v0}$  y  $P_{v1}$ ) de los usuarios es una función lineal del hacinamiento en el bus y queda dado por (3) y (4):

$$P_v(\phi) = P_{v0} + P_{v1}\phi \quad (3)$$

Dónde  $\phi$  es la tasa de ocupación del bus:

$$\phi \equiv \frac{k(f)}{K} \quad (4)$$

La relación  $k(f)$  representa la cantidad de pasajeros promedio arriba del bus en cada tramo y está dada por (5).

$$k(f) = \frac{Yl}{fL} \quad (5)$$

Luego, el problema de optimización es el descrito por las ecuaciones (6) y (7):

$$\min VRC = ft_c(f)c(K) + P_w \frac{1}{2f} Y + \frac{P_v(\phi)lt_c(f)Y}{L} \quad (6)$$

s. t

$$k(f) \leq K \quad (7)$$

Recordando que la flota total de buses utilizados puede calcularse como  $ft_c(f)$ , se nota que el primer término corresponde al gasto de los operadores. Mientras que el segundo corresponde a los recursos invertidos por los usuarios en tiempo de espera (considerando que los usuarios llegan de manera uniforme y esperan, en promedio,  $\frac{1}{2f}$  horas), transformados en dinero mediante el valor del tiempo correspondiente  $P_w$ . Por último, el tercer término corresponde a los recursos invertidos por los usuarios debido a tiempos de viaje en el vehículo. Por tanto, la minimización de recursos dependerá de la frecuencia  $f$  y del tamaño de flota  $K$ , variables que determinarán cómo es operado el sistema.

La relación entre  $VRC$  y  $K$  determina si (7) se cumple de manera activa o no. Por ejemplo, si  $VRC$  crece estrictamente con  $K$ , esta última variable se pegaría al mínimo valor posible (i.e. el tamaño de la flota se iguala con la cantidad de pasajeros en un ciclo en el bus y, por lo tanto,  $k(f) = K$ ). Cómo no es directa la relación, las condiciones que se deben cumplir para que la restricción sea activa o inactiva vendrán dadas por el signo de  $\frac{\partial VRC}{\partial K}$ .

$$\frac{\partial VRC}{\partial K} = ft_c(f)c_1 - \frac{P_{v1}Yt_c(f)k(f)}{LK^2} \quad (8)$$

**Proposición 1.** El efecto del tamaño de los vehículos sobre el valor de los recursos consumidos depende de la relación entre  $c_1$  y  $P_{v1}$ ; específicamente<sup>5</sup>:

$$\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0 \Leftrightarrow c_1 > P_{v1} \quad (9)$$

Según (9), si la restricción es activa o inactiva depende de la relación entre  $c_1$  y  $P_{v1}$ . Si la relación entre  $VRC$  y  $K$  es creciente, ésta última variable se pega al menor valor posible, y por tanto  $K = k(f)$ , donde los buses irían llenos. Por otro lado, si  $c_1 \leq P_{v1}$ , entonces  $K > k(f)$  y:

$$K = k(f) \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \quad (10)$$

Para ambos casos es claro que  $VRC$  se puede escribir solamente como función de  $f$ ; por tanto, el problema solamente depende de una variable de diseño. Se obtiene el diseño óptimo  $(f^*, K^*)$  en cada caso:

<sup>5</sup> Demostración en el Anexo, ecuaciones (A.1) hasta (A.19).



i. Caso de restricción activa<sup>6</sup>,  $c_1 > P_{v1}$ :

$$f^* = \sqrt{\frac{Y}{Tc_0} \left( \frac{P_w}{2} + \frac{tYl(c_1 + P_{v0} + P_{v1})}{L} \right)} \quad (11)$$

$$K^* = k(f^*) \quad (12)$$

ii. Caso de restricción inactiva<sup>7</sup>,  $c_1 \leq P_{v1}$

$$f^* = \sqrt{\frac{Y}{Tc_0} \left( \frac{P_w}{2} + \frac{tYl(P_{v0} + 2\sqrt{P_{v1}c_1})}{L} \right)} \quad (13)$$

$$K^* = k(f^*) \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \quad (14)$$

Con lo anterior, es posible determinar el mínimo  $VRC$ , reemplazando  $f^*$  y  $K^*$  (según el caso que corresponda) en (6).

$$VRC^* = ft_c(f^*)c(K^*) + P_w \frac{1}{2f^*} Y + \frac{P_v(\phi)lt_c(f^*)Y}{L} \quad (15)$$

Con este resultado es posible calcular la tarifa óptima social, la cual es definida como el Costo marginal total menos el tiempo invertido de los usuarios, representado por el Costo medio de los usuarios (Jansson, 1984); lo anterior es descrito por la ecuación (16):

$$P = CMg_{Total} - CM e_{US} \quad (16)$$

Dónde cada término se define de la siguiente forma:

$$CMg_{Total} = \frac{\partial VRC}{\partial Y} \quad (17)$$

$$CM e_{US} = \frac{VRC_{US}}{Y} \quad (18)$$

$$VRC_{US} = \frac{P_w Y}{2f^*} + P_v(\phi) \frac{lY}{L} t_c(f^*) \quad (19)$$

Por lo tanto, reemplazando (17) y (18) en (16) se obtiene la tarifa óptima social:

$$P = t \left[ c_0 + \frac{lY}{Lf^*} (P_{v0} + 3\sqrt{P_{v1}c_1}) \right] + l \frac{T}{L} \sqrt{P_{v1}c_1} \quad (20)$$

Como fue dicho en la introducción de este capítulo, este modelo responde a un único tipo de usuario. Lo que se busca a continuación es extender este modelo a uno que incorpore la coexistencia de múltiples usuarios, los cuales se diferencian por todos los parámetros que definen su participación en el sistema (demandas, valores del tiempo, largos medios de viaje y tiempos medios de subida y bajada).

<sup>6</sup> Desarrollo entre las ecuaciones (A.20) y (A.28) del Anexo.

<sup>7</sup> Desarrollo entre las ecuaciones (A.29) y (A.36) del Anexo.

### 4.3. Modelo extendido a N tipos de usuarios

#### 4.3.1. Desarrollo del modelo

El modelo de Jara-Díaz & Gschwender (2003) es replanteado diferenciando a N tipos de usuarios en el sistema de transporte, los cuales, al coexistir en un mismo sistema, enfrentan una única frecuencia y tamaño de bus. Se diferencia a cada tipo de usuario  $i$  por 6 características: Demanda ( $Y^i$ ), valor del tiempo de viaje (que incluye  $P_{v0}^i$  y  $P_{v1}^i$ ), valor del tiempo de espera ( $P_w^i$ ), largo de viaje ( $l^i$ ) y tiempo de subida y bajada ( $t^i$ ). Notemos que las dos últimas tienen relación a cómo el usuario  $i$  hace uso del sistema de transporte público, mientras que las demás son propias del grupo en sí.

Considerando lo anterior, el tiempo de ciclo y la carga del bus, antes descritas por (1) y (2), quedan dadas por (21) y (22) respectivamente:

$$t_c = \frac{\sum_i^N t^i Y^i}{f} + T \quad (21)$$

El primer término en la ecuación (21) indica el tiempo detenido (personas que suben y bajan) y el segundo el tiempo en movimiento (en un ciclo).

$$k(f) = \frac{\sum_i^N l^i Y^i}{fL} \quad (22)$$

El numerador de la expresión (22) dividido por el largo total indica la cantidad total de pasajeros de cada tipo en cada tramo; al dividir por la frecuencia es la carga en cada vehículo.

Luego, el problema de optimización queda definido por (23) y (24):

$$\min VRC = f \cdot t_c(f) \cdot (c_0 + c_1 K) + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f} + \frac{\sum_i^N P_v^i(\phi) l^i Y^i t_c(f)}{L} \quad (23)$$

s. t.

$$k(f) \leq K \quad (24)$$

En (23) se observa que los recursos consumidos por los operadores mantienen la misma forma que en el modelo original. Por otro lado, el consumo de recursos en tiempo de viaje y de espera es específico para cada tipo de usuario. En particular, el valor del tiempo de viaje para el usuario tipo  $i$ , viene dado por:

$$P_v^i(\phi) = P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi \quad (25)$$

Donde (25) es análoga a la del modelo Jara-Díaz & Gschwender (2003). La tasa de ocupación  $\phi$  es única para todos los tipos de usuarios y está definida por (4) y (22).

A continuación, se resolverá el problema propuesto por las expresiones (23) y (24). Se hace notar que, en esta especificación, tanto el costo marginal total como el costo medio para cada tipo de usuario serán distintos. A partir de lo anterior, es intuitivo encontrar tarifas óptimas sociales propias para cada uno de ellos.

Notemos que en este modelo se repite lo visto en la especificación para un usuario, puesto que no es trivial que la restricción de capacidad sea activa o no. El paso siguiente es calcular la derivada de (23) respecto a  $K$ , con tal de mostrar en qué casos la restricción (24) es o no activa.

$$\frac{\partial VRC}{\partial K} = f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k(f) t_c(f)}{LK^2} \quad (26)$$

**Proposición 2.** El efecto del tamaño de los vehículos sobre el valor de los recursos consumidos depende de la relación entre  $c_1$ ,  $P_{v1}^i$ ,  $Y^i$  y  $l^i$ ; específicamente<sup>8</sup>:

$$\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0 \Leftrightarrow c_1 > \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i} \equiv \overline{P_{v1}} \quad (27)$$

En el caso de que los parámetros del problema sean tales que se cumple (27), la restricción (24) se cumplirá de forma activa, i.e.  $k(f) = K$  y los buses irán a capacidad. En caso contrario,  $k(f) < K$  y valdrá:

$$K = k(f) \sqrt{\frac{\overline{P_{v1}}}{c_1}} \quad (28)$$

Dicho lo anterior, se calcula la frecuencia y tamaño de flota óptimos para ambos casos.

i. Caso restricción activa<sup>9</sup>,  $c_1 > \overline{P_{v1}}$ :

$$f^* = \sqrt{\frac{1}{Tc_0} \left( \frac{(\sum_i^N t^i Y^i)(\sum_i^N (c_1 + P_{v0}^i + P_{v1}^i) l^i Y^i)}{L} + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2} \right)} \quad (29)$$

$$K^* = \frac{\sum_i^N l^i Y^i}{L f^*} \quad (30)$$

ii. Caso restricción inactiva<sup>10</sup>,  $c_1 \leq \overline{P_{v1}}$ :

$$f^* = \sqrt{\frac{1}{Tc_0} \left( \frac{(\sum_i^N t^i Y^i)(\sum_i^N (\frac{c_1}{\phi} + P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i)}{L} + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2} \right)} \quad (31)$$

$$K^* = k(f^*) \sqrt{\frac{\overline{P_{v1}}}{c_1}} \quad (32)$$

Reemplazando  $f^*$  y  $K^*$  (según el caso que corresponda) en (23) se obtiene el mínimo  $VRC$ , y es posible calcular la tarifa óptima para cada tipo de usuario, la que vendrá dada por las ecuaciones (33), (34), (35) y (36).

$$P^i = CMg^i - CM e_{US}^i \quad (33)$$

$$CMg^i = \frac{\partial VRC}{\partial Y^i} \quad (34)$$

<sup>8</sup> Demostración entre las ecuaciones (B.1) y (B.20) del Anexo.

<sup>9</sup> Desarrollo entre las ecuaciones (B.21) y (B.26) del Anexo.

<sup>10</sup> Desarrollo entre las ecuaciones (B.27) y (B.32) del Anexo.

$$CMe_{US}^i = \frac{VRC_{US}^i}{Y^i} \quad (35)$$

$$VRC_{US}^i = \frac{P_w^i Y^i}{2f^*} + \frac{P_v(\phi) l^i t_c(f^*) Y^i}{L} \quad (36)$$

El cálculo de las expresiones (34) y (35) resulta en (36) y (37) respectivamente. El cálculo de (37) se detalla entre las ecuaciones (B.38) y (B.52) del Anexo, mientras que el cálculo de (38) se detalla entre (B.53) y (B.54)

$$CM_g^j = t^j(c_0 + c_1 K^*) + \frac{l^j t_c(f^*)}{L} \left( P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi + \frac{c_1}{\phi} \right) + \frac{P_w^j}{2f^*} + \frac{t^j}{L f^*} \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \quad (37)$$

$$CMe_{US}^j = \frac{P_w^j}{2f^*} + \frac{1}{L} (P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi) l^j t_c(f^*) \quad (38)$$

Luego, siguiendo (33), la tarifa óptima para cada tipo de usuario j está dada por (39). El detalle se muestra entre las ecuaciones (B.55) y (B.56).

$$P^j = t^j \left( c_0 + c_1 K^* + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i}{L f^*} \right) + l^j \frac{t_c(f^*) c_1}{L \phi} \quad (39)$$

De (39) resulta de forma clara que si dos tipos de usuario tienen mismo  $t^j$  y  $l^j$  entonces tendrán la misma tarifa óptima. Los efectos provocados por estas características de los usuarios en la tarifa son capturados por lo que definiremos como “factores ponderadores”, especificados en (40) y (41) respectivamente. Se destaca que tanto el factor ponderador del tiempo de subida y bajada “ $F_t$ ”, como el factor ponderador del largo de viaje “ $F_l$ ” son iguales para cualquier tipo de usuario.

$$F_t \equiv \left( c_0 + c_1 K^* + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i}{L f^*} \right) \quad (40)$$

$$F_l \equiv \frac{t_c(f^*) c_1}{L \phi} \quad (41)$$

Saber qué es lo que hay detrás de cada factor será útil para entender el motivo de las tarifas resultantes para cada tipo de usuario. En esta línea, se destaca que los términos que componen a los factores son provenientes del costo marginal de los operadores o del costo marginal de los usuarios, capturando las externalidades provocadas por un usuario extra en el sistema.

En particular, los términos que componen  $F_t$  capturan la variación en el tiempo de ciclo, específicamente en el tiempo de detención. Los primeros dos términos claramente corresponden al costo de los operadores: debido a que los usuarios se suben más lento, el bus demora más en completar un ciclo, induciendo un aumento en la flota necesaria para cumplir con la frecuencia. Por otro lado, el tercer término se asocia al gasto en tiempo en el vehículo de los usuarios: el tiempo que cada usuario

está en el vehículo aumenta con el tiempo que pasa el bus detenido por efecto de subidas y bajadas, lo que implica mayores costos para todos los usuarios del sistema.

$F_l$  también tiene efectos sobre ambos agentes, operadores y usuarios. Al observar los costos marginales de estos agentes en las ecuaciones (B.42) y (B.44) respectivamente, se ve que cada uno de ellos aporta exactamente la mitad a la composición de este factor ponderador. Los demás términos del costo marginal total (suma de las 2 ecuaciones mencionadas previamente) se simplifican, son internalizados por los usuarios a través del costo medio (38), o son parte de  $F_t$ .

La interpretación que se hace de las externalidades generadas por mayores largos de viaje ( $l^j$ ) son 2, una sobre cada agente. Si los usuarios tienen viajes más largos, se hacen necesarios vehículos más grandes (están mayor parte de la ruta en el bus), lo que aumenta el costo por kilómetro a través de  $c_1$ . Por otro lado, un usuario extra en una distancia más larga aumentará la tasa de ocupación durante más tiempo, empeorando las condiciones de viaje de los demás usuarios. Ambas externalidades negativas son capturadas por  $F_l$ .

Aclarado lo anterior, es de interés entender la relación de orden existente entre las tarifas resultantes. Esto se conseguirá mediante la resta de las tarifas correspondientes a dos grupos, los cuáles llamaremos “j” y “m”, como se muestra en las ecuaciones (42) y (43).

$$P^j = t^j(c_0 + c_1K^* + \frac{\sum_i^N(P_{v0}^i + P_{v1}^i\phi)l^iY^i}{Lf^*}) + lj \frac{t_c(f^*)c_1}{L\phi} \quad (42)$$

$$P^m = t^m(c_0 + c_1K^* + \frac{\sum_i^N(P_{v0}^i + P_{v1}^i\phi)l^iY^i}{Lf^*}) + lm \frac{t_c(f^*)c_1}{L\phi} \quad (43)$$

$$P^j - P^m = (t^j - t^m)(c_0 + c_1K^* + \frac{\sum_i^N(P_{v0}^i + P_{v1}^i\phi)l^iY^i}{Lf^*}) + (lj - lm) \frac{t_c(f^*)c_1}{L\phi} \quad (44)$$

De la ecuación (44) se hace aún más claro que la diferencia de tarifas entre dos grupos tendrá un término que depende de la resta entre los tiempos de subida y bajada y otro que depende de la diferencia entre los largos promedios de viaje.

De las seis características que definen a un tipo de usuario, todas influyen en el diseño óptimo del sistema, afectando tanto las condiciones de viaje como los gastos incurridos por operadores (a través de  $f^*$  y  $\phi$ ). Sin embargo,  $t^j$  y  $l^j$  son las únicas características que reflejan cómo el usuario  $j$  hace uso del sistema, vale decir, independiente de cómo se opere, de los valores del tiempo, o de la cantidad de usuarios, él siempre sube al bus en  $t^j$  y viaja  $l^j$ . Es por ello, que son sólo estas dos características las que influyen directamente en la percepción del viaje de todos los demás usuarios, lo que finalmente hace que se produzcan diferencias tarifarias solamente debido a  $t^j$  y  $l^j$ .

Las demás características del tipo de usuario  $j$ ,  $P_{v0}^j$ ,  $P_{v1}^j$ ,  $P_w^j$  e  $Y^j$  no son percibidas de esta forma, sino que, producen externalidades de forma indirecta a través de las

condiciones de operación del sistema  $f^*$  y  $\phi$ , influyendo así en las diferencias tarifarias. Por ejemplo, un aumento en el valor del tiempo de espera impacta negativamente en las tarifas, esto ocurre debido a que se induce una mayor frecuencia en el sistema, lo que a su vez causa una disminución en el tiempo de viaje de los usuarios, reduciendo la tarifa a pagar por cada uno de ellos. El impacto de todas las características de los usuarios será revisado en la sección 4.3.3.

Volviendo a la ecuación (44), es posible explorar el comportamiento de las tarifas al asignar grupos de usuarios específicos. Por ejemplo, si se analiza en conjunto a adultos y adultos mayores probablemente el segundo grupo tenga mayores tiempos de subida y bajada al bus y viajes más cortos (en promedio), por lo que el primer término tendría signo negativo (reduce la diferencia tarifaria entre estos grupos) y el segundo sería positivo (aumenta la diferencia tarifaria).

A pesar de lo mencionado en el párrafo anterior, no es posible determinar analíticamente una relación de orden entre grupos. Sin embargo, al simular la ecuación (39) para los distintos grupos, se podrá ilustrar para un caso de estudio cómo resultan las tarifas óptimas sociales bajo este modelo. En la sección que sigue, se simula usando parámetros obtenidos para la ciudad de Santiago de Chile.

#### 4.3.2. Simulación

En esta sección se simulan las tarifas óptimas sociales para adultos, adultos mayores y estudiantes utilizando parámetros (Tablas 4.1 y 4.2) obtenidos de distintas fuentes para la ciudad de Santiago de Chile. La variable independiente es la demanda total de pasajeros por hora en una línea de buses, la cual se reparte entre los grupos estudiados según parámetros  $\gamma^j$ , los cuales representan el porcentaje de los viajes totales que realiza cada grupo  $j$ ; en el caso de Santiago, para los viajes en un periodo de punta mañana extendido, se estima  $\gamma^{AM} = 0.07$  y  $\gamma^{EST} = 0.16$ .

**Tabla 4.1. Características específicas para cada tipo de usuario.**

Grupo	$l^i$ [Km]	$t^i$ [s/pax]	$P_w^i$ [US\$/hr]	$P_{v0}^i$ [US\$/hr]	$P_{v1}^i$ [US\$/hr]	$\gamma^i$
Adultos (A)	10	2.5	5.48	0.9	5	0.77
Estudiantes (E)	3	2.5	2.79	0.45	2.5	0.16
Adultos mayores (AM)	3	5	2.79	0.45	2.5	0.07

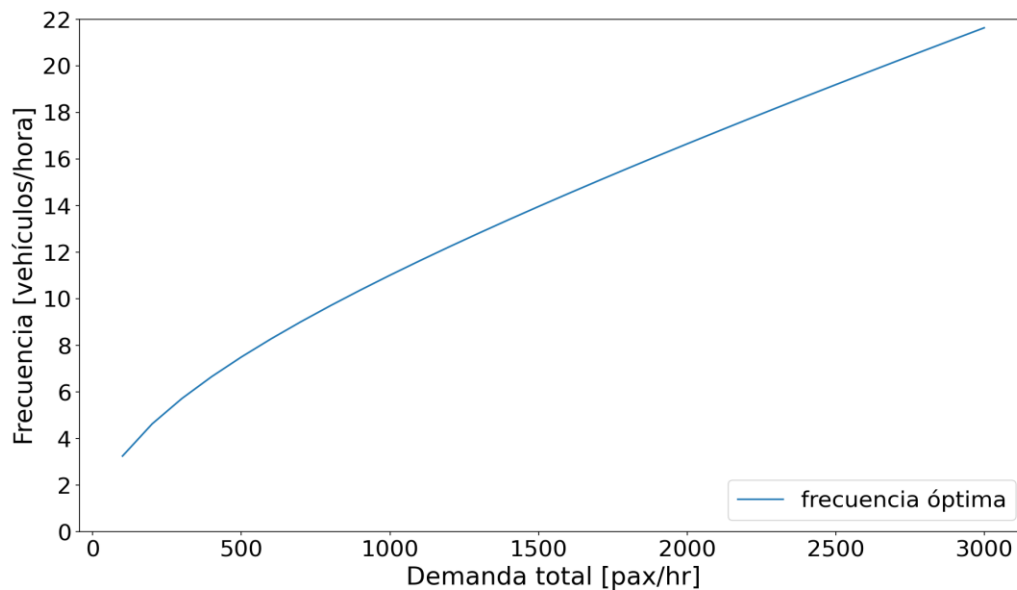
**Tabla 4.2. Características generales del sistema**

Parámetro	$L$ [Km]	$T$ [hr]	$c_0$ [US\$/hr]	$c_1$ [US\$/hr]
Valor	50	2.72	8.61	0.3

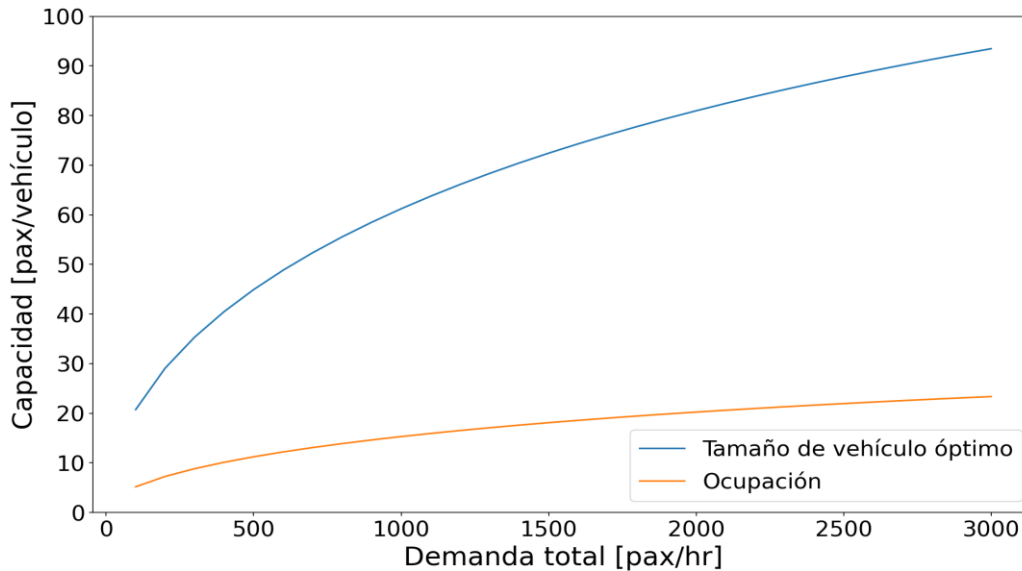
Tanto  $l^A$ ,  $t^A$ ,  $P_w^A$ ,  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $L$  y  $T$  son inspirados en artículos en los que se simulan modelos similares para un tipo de usuario, e.g. Jara-Díaz & Gschwender (2003). Además, para (25) se usa una especificación que le dé una alta importancia a la tasa de ocupación en los buses; en este sentido, se utiliza  $P_{v0}^A = 0.9$  y  $P_{v1}^A = 5$ , valores que de igual manera están inspirados en el segundo artículo mencionado. Para los otros tipos de usuarios, los valores del tiempo (de viaje y espera) son ponderados con respecto al de los adultos según un parámetro  $\alpha^j$ ; para la simulación se utiliza  $\alpha^{AM} = \alpha^{EST} = 0.5$ .

Por otro lado, Aydin et al. (2016) analiza los tiempos de subida y bajada promedio para usuarios adultos y adultos mayores, a partir de las mediciones realizadas en distintas ciudades y para distintos modos. Los resultados nos permiten considerar el tiempo de subida y bajada para adultos mayores el doble que para los adultos y estudiantes.

Dicho lo anterior, se simula en función de la demanda total en el sistema, la frecuencia óptima, tamaño de vehículo óptimo y tarifas óptimas para los 3 tipos de usuarios; las simulaciones se muestran en las figuras 1, 2 y 3 respectivamente.



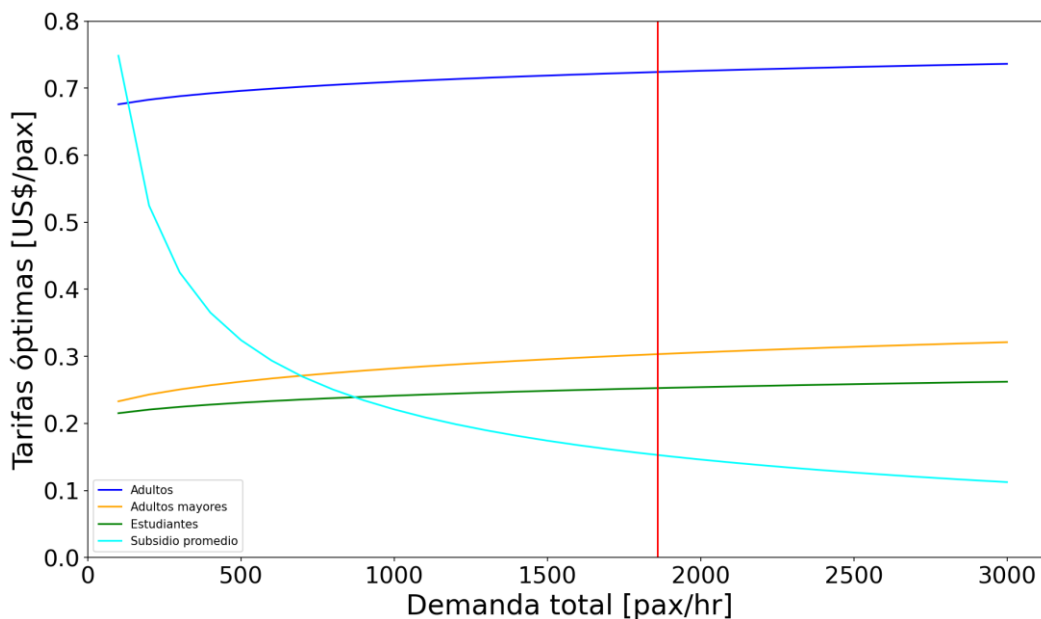
**Figura 1. Frecuencia óptima.**



**Figura 2. Tamaño de vehículo óptimo y ocupación.**

De las figuras 2 y 3 se nota que tanto  $f^*$  como  $K^*$  siguen la misma forma que en el modelo original de Jansson (1984). Vale decir, la frecuencia crece a tasas decrecientes y el tamaño de los buses crece asintóticamente.

Además, en la figura 2 se incluye la ocupación de los buses, valor que permite calcular la tasa de ocupación; para los valores utilizados,  $\phi = 0.25$ . En Santiago, un bus articulado con una capacidad de 90 pasajeros, ocupado a una tasa de 0.25, significa que todos los pasajeros viajan sentados.



**Figura 3. Precios simulados en [US\$] para adultos, adultos mayores, estudiantes, y modelo de un usuario con características ponderadas.**

Se asume que un flujo representativo de una línea periferia-centro en Santiago sería del orden de 1860 [pax/hr]. Para esta demanda (y los demás parámetros) las tarifas



óptimas son aproximadamente de  $P^A = 0.73 \text{ US\$} = 590 \text{ CLP}$ ,  $P^{AM} = 0.3 \text{ US\$} = 260 \text{ CLP}$  y  $P^{EST} = 0.25 \text{ US\$} = 200 \text{ CLP}$ . Por otro lado, las tarifas observadas son  $P^A = 0.87 \text{ US\$} = 700 \text{ CLP}$ ,  $P^{AM} = 0.44 \text{ US\$} = 350 \text{ CLP}$  y  $P^{EST} = 0.28 \text{ US\$} = 230 \text{ CLP}$ .

**Tabla 4.3. Comparación tarifas óptimas y observadas**

Grupo	Tarifa óptima	Tarifa Observada	Diferencia	Comparación usual
Adulto	0.73	0.87	+16%	0
Adulto Mayor	0.3	0.44	+32%	-50%
Estudiante	0.25	0.28	+10%	-66%

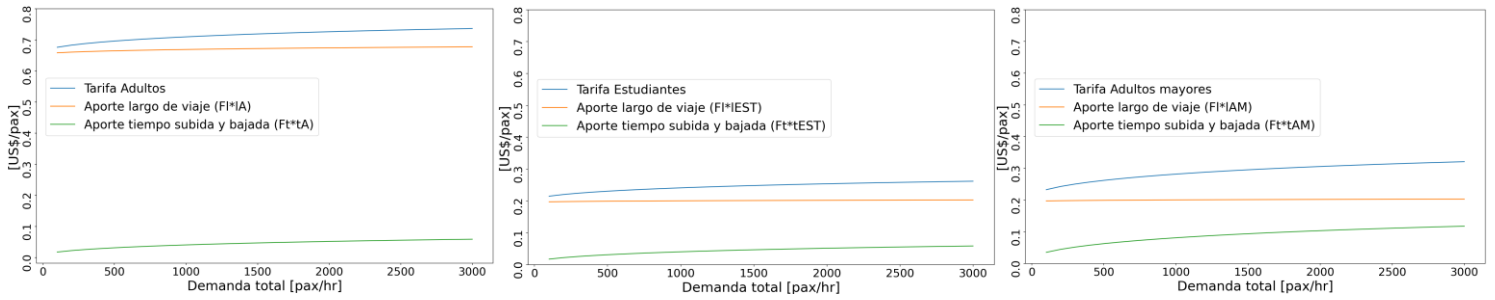
Mientras que la comparación usual muestra que hay un descuento (con respecto a la tarifa de adultos) de 50% y 66% para adultos mayores y estudiantes respectivamente, en verdad, la diferencia con respecto a la tarifa observada indica que a estos grupos se les está cobrando por sobre la tarifa que les correspondería (tarifa óptima). Por lo tanto, la comparación que debiera realizarse es entre la tarifa óptima y la observada dentro de un mismo grupo.

#### Diferencias tarifarias en el caso de Santiago de Chile

En esta sección intentaremos dar explicación analítica a las diferencias tarifarias encontradas entre los diferentes tipos de usuarios. Para ello, se revisará la ecuación (44) entre cada par de tipos de usuarios.

Como fue mencionado en la sección anterior, las diferencias tarifarias entre dos tipos de usuarios se deben a la suma de dos términos, uno que depende de la diferencia entre los tiempos de subida y bajada y otro que depende de la diferencia entre los largos promedios de viaje (ambos términos son multiplicados por sus respectivos factores ponderadores). Por lo tanto, al comparar dos grupos, en algunos casos se tendrán diferencias producidas por distintos  $l^j$ ,  $t^j$  o por ambos parámetros.

En el caso particular de esta simulación, hay presencia de los 3 casos mencionados. Adultos y estudiantes se diferencian solamente por  $l^j$ , adultos mayores y estudiantes lo hacen solamente por  $t^j$ , mientras que adultos y adultos mayores se diferencian en ambos valores. El desglose de los distintos aportes de las características para cada grupo se observa en la Figura 4.

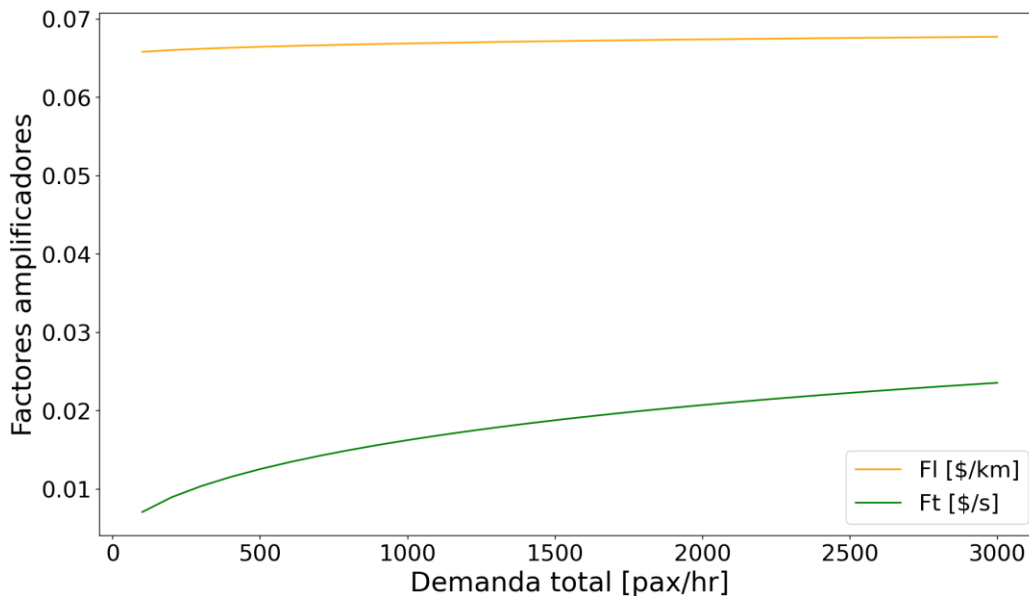


**Figura 4. Aportes de cada parámetro a la tarifa de cada tipo de usuario.**

Las magnitudes de las diferencias tarifarias se explican por los factores ponderadores. Tanto adultos mayores como estudiantes realizan viajes más cortos que los adultos, lo que implica un impacto menor en el costo asociado al tamaño del vehículo, explicando una parte de la reducción tarifaria.

Sin embargo, como los adultos mayores provocan tiempos de ciclo más altos, al demorarse más en abordar al bus, generan un aumento en la flota necesaria (mayor costo para operadores) y en el tiempo que todos los usuarios permanecen en el vehículo; ambas razones contribuyen a que la tarifa de este grupo resulte más alta que la de los estudiantes.

En la Figura 4 se nota que el efecto del largo de viaje de cada grupo “gana” entre las dos componentes de la tarifa. Esto se debe principalmente a que la externalidad marginal de un segundo extra de subida y bajada ( $F_t$ ), es mucho menor que las externalidades por kilómetro extra sobre las condiciones de viaje y el tamaño del bus ( $F_l$ ), como se puede apreciar en la Figura 5.



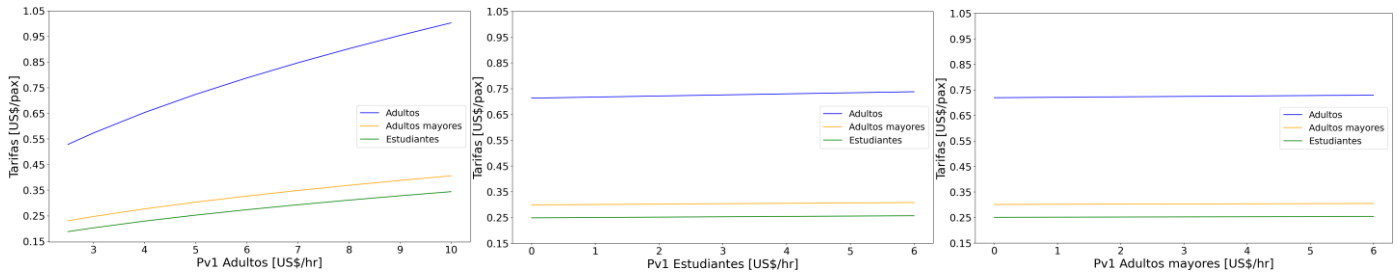
**Figura 5. Factores ponderadores**

En la siguiente sección se realiza el análisis de sensibilidad de las tarifas con respecto a las 6 características de cada grupo: adultos, estudiantes y adultos mayores.

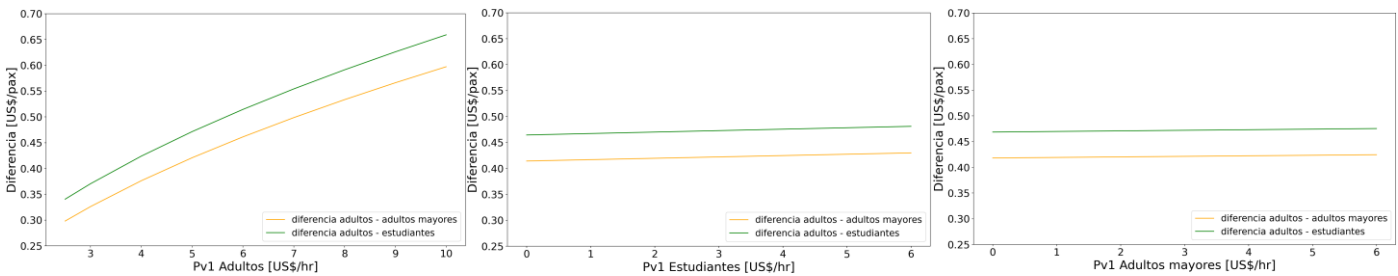
### 4.3.3. Sensibilidad

El análisis de sensibilidad se realiza sobre las tarifas óptimas, variando separadamente las características de cada tipo de usuario. Se considera una demanda total fija de 1860 [pax/hr].

Además del análisis cuantitativo que se hace sobre la variación en las tarifas óptimas, se hace un análisis cualitativo sobre el efecto que tiene cada característica de los usuarios en las condiciones de operación del sistema  $f^*$  y  $\phi$  y su impacto en los factores ponderadores  $F_t$  y  $F_l$ .



**Figura 6. Sensibilidad de tarifas c/r a  $P_{v1}^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**



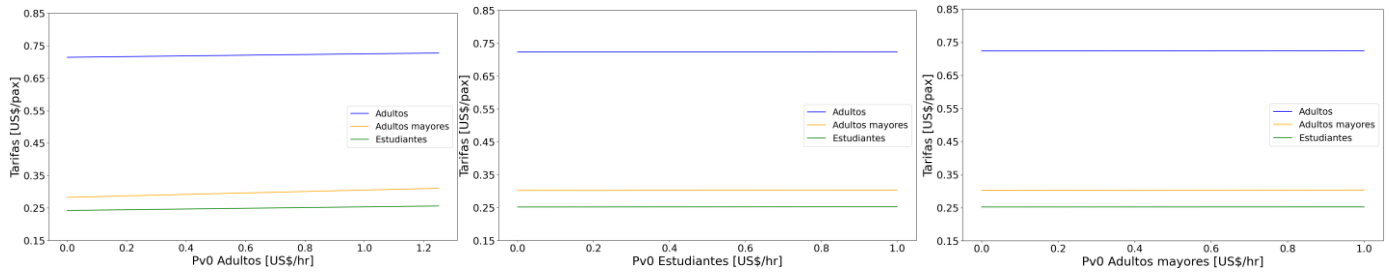
**Figura 7. Sensibilidad de diferencias tarifarias c/r a  $P_{v1}^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**

El incremento de  $P_{v1}^i$  hace que los usuarios estén dispuestos a pagar más por pasar menos tiempo en el vehículo y además por mejorar las condiciones del viaje, lo anterior provoca:

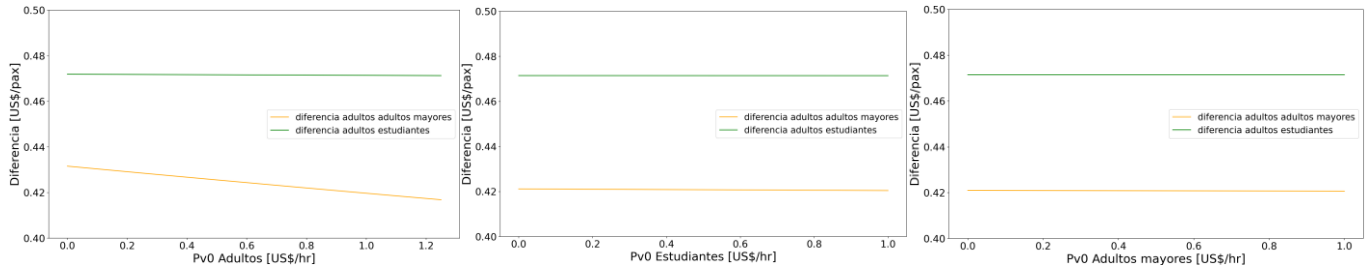
- aumento en la frecuencia, reduciendo el tiempo en el vehículo (menos subidas y bajadas por ciclo).
- disminución en la tasa de ocupación, mejorando las condiciones de viaje.

Como consecuencia de lo anterior, el tiempo de ciclo es menor y la flota es más grande con vehículos de mayor tamaño. Todos los efectos descritos anteriormente provocan un aumento tanto en  $F_t$  como de  $F_l$ , lo que finalmente induce el incremento en las tarifas óptimas de cada grupo.

En particular, el aumento en la tarifa de adultos es mayor que en la de los demás grupos, debido a que su valor del tiempo es mayor (y además pasan más tiempo en el vehículo). Esto provoca que las diferencias aumenten con  $P_{v1}^i$ , como es mostrado en la Figura 7.



**Figura 8. Sensibilidad de tarifas  $c/r$  a  $P_{v0}^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**

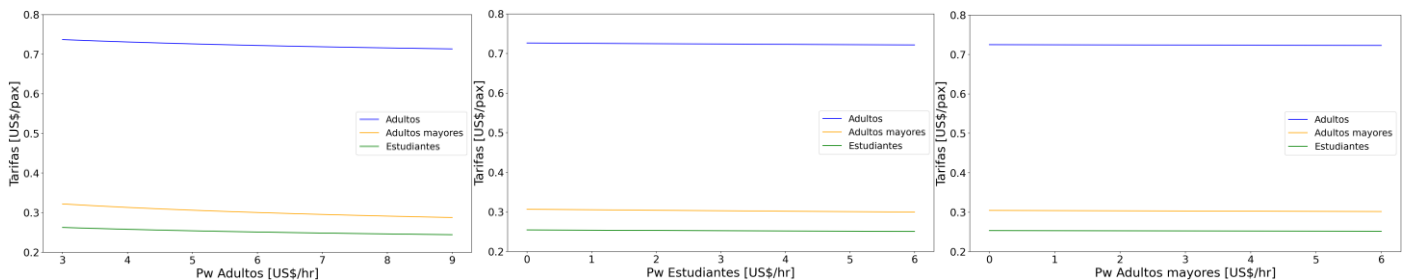


**Figura 9. Sensibilidad de diferencias tarifarias  $c/r$  a  $P_{v0}^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**

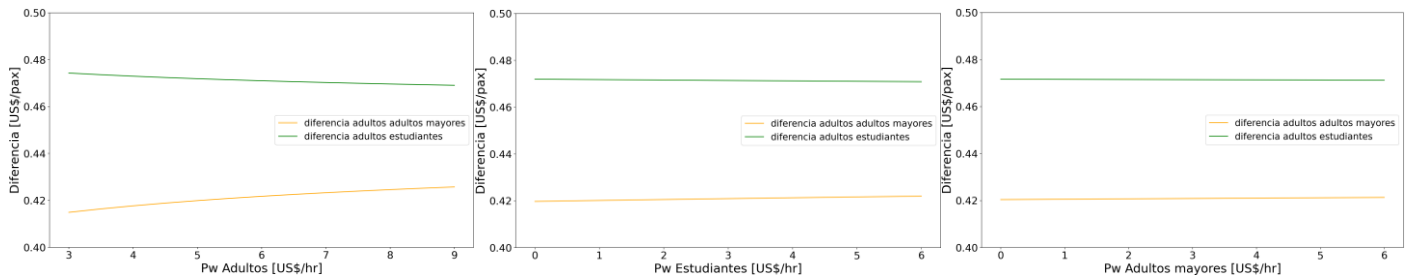
Las tarifas igualmente crecen con  $P_{v0}^i$  pero son menos sensibles que en el caso visto anteriormente. La razón, es que a diferencia de  $P_{v1}^i$ , esta característica sólo tiene relación con la valoración del tiempo de viaje y no con las condiciones de éste. Esto a su vez induce, por ejemplo, buses más pequeños que en el caso anterior.

En base a esto, se produce un aumento en la frecuencia del sistema, provocando que los usuarios estén menos tiempo en los vehículos (se reduce el tiempo de ciclo), sin embargo, el hecho de que valoren más este tiempo provoca dos efectos contrarios en las tarifas: en primer lugar, las externalidades provocadas por el tiempo de subida y bajada ( $F_t$ ) aumentan y, por otro lado, el impacto del largo de viaje ( $F_l$ ) disminuye debido a que los usuarios viajan menos tiempo a una tasa de ocupación constante.

Por lo tanto, como se observa en las Figuras 8 y 9 la tarifa de adultos mayores (color amarillo) es la más sensible al cambio de  $P_{v0}^A$  (para  $P_{v0}^{AM}$  y  $P_{v0}^{EST}$ , el cambio es casi imperceptible). Al ser el grupo que más demora en subir y bajar, y  $F_t$  aumenta con  $P_{v0}^i$ , la tarifa de este grupo es la que más aumenta.



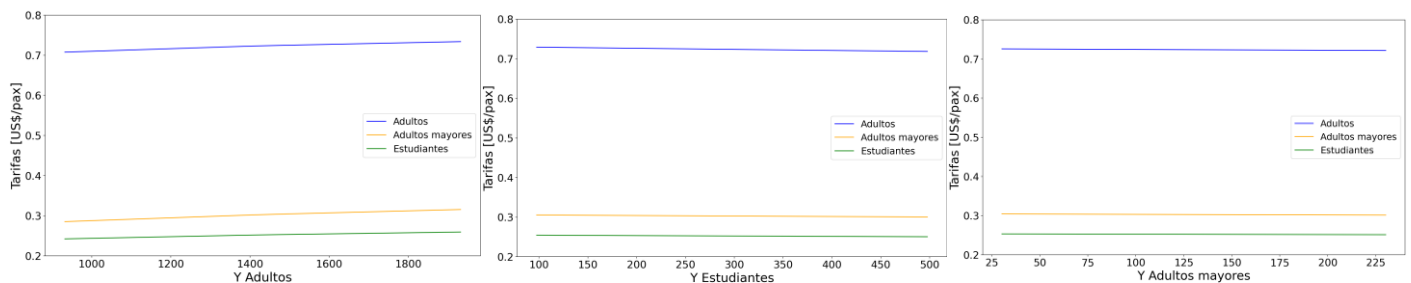
**Figura 10. Sensibilidad de tarifas  $c/r$  a  $P_w^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**



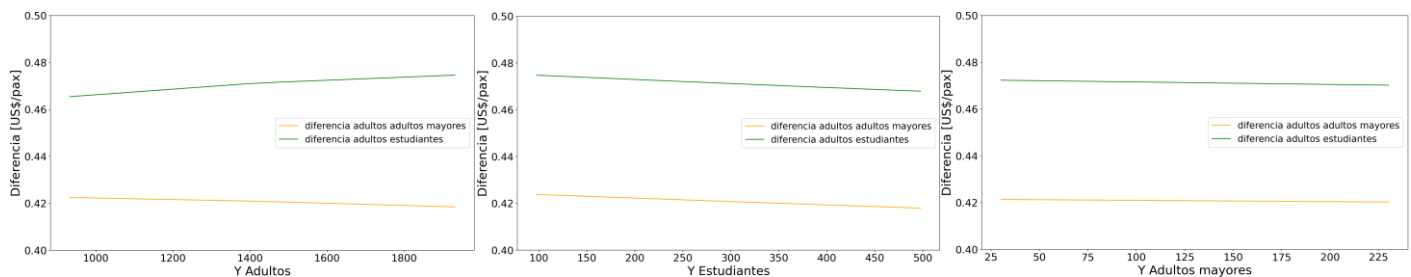
**Figura 11. Sensibilidad de diferencias tarifarias  $c/r$  a  $P_w^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**

Por otro lado, como se observa en la Figura 10, las tarifas se relacionan inversamente con  $P_w^i$ . El aumento en la disposición a pagar por reducir el tiempo de espera tiene como consecuencia frecuencias mayores, lo que a su vez implica dos cosas: que haya buses más pequeños (manteniendo constante la tasa de ocupación) y que los usuarios pasen menos tiempo arriba de los buses. Lo anterior provoca una reducción en las externalidades generadas por un usuario extra, es decir, tanto  $F_t$  como  $F_l$  disminuyen, por ende, la tarifa de los 3 grupos también disminuye. Este cambio es perceptible ante cambios en  $P_w^A$  pero no ante cambios en  $P_w^{EST}$  o  $P_w^{AM}$ .

Como se muestra en la Figura 11, la magnitud del aumento (o reducción) en las diferencias tarifarias dependerá de, entre otros factores, de los valores de  $t^j$  y  $l^j$ .



**Figura 12. Sensibilidad de tarifas  $c/r$  a  $Y^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**



**Figura 13. Sensibilidad de diferencias tarifarias  $c/r$  a  $Y^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**

A diferencia de las características revisadas previamente, un cambio marginal en  $Y^i$  afecta la proporción de usuarios en el sistema de los otros grupos.

En este caso, el aumento o reducción de las tarifas dependerá del grupo que se esté analizando. Como se observa en la Figura 12, un aumento de la demanda de adultos induce un aumento de las tarifas de los 3 grupos. A pesar de que el efecto es prácticamente imperceptible, lo contrario ocurre para los otros dos grupos; el aumento

en estudiantes hace que disminuyan las tarifas más que en el caso de adultos mayores.

Lo descrito en el párrafo anterior tiene dos causales:

- Como los adultos tienen  $P_{v1}$  mayor, un aumento en la proporción de este grupo inducirá un aumento en  $\overline{P_{v1}}$ , reduciendo la tasa de ocupación. Caso contrario al de los otros dos grupos (adultos mayores y estudiantes); dado que su  $P_{v1}$  es menor que  $\overline{P_{v1}}$ , un aumento en la proporción de cualquiera de los grupos provoca una disminución en este último, y por ende, un aumento en la tasa de ocupación.
- La frecuencia crece con el aumento de la demanda de cualquiera de los 3 grupos.

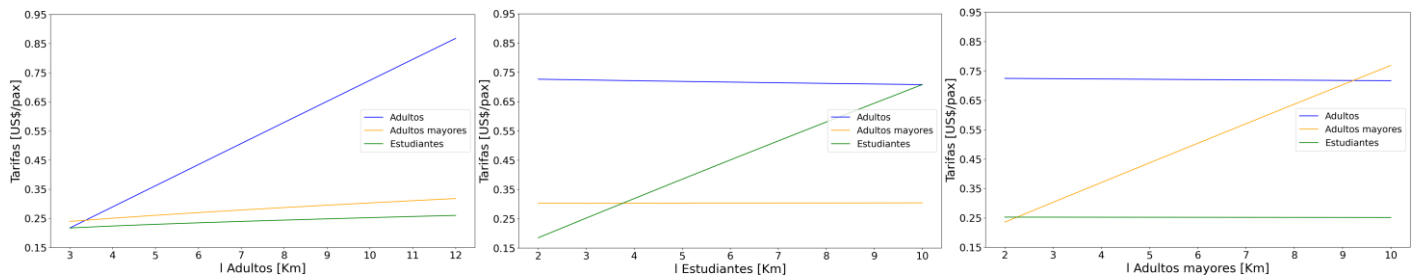
El resultado neto de los dos puntos anteriores es que, para adultos, hay un aumento en  $F_t$  y  $F_l$ , aumentando las tarifas. Por otro lado, ante un aumento en la cantidad de adultos mayores o estudiantes, ambos factores decrecen y por ende las tarifas óptimas también.

Debido a que solamente hay diferencia entre sus largos de viaje, la diferencia entre adultos y estudiantes crece proporcionalmente con  $F_l$ . Es por lo anterior, que cuando aumenta  $Y^A$  (y por ende  $F_l$ ) la diferencia entre estos grupos también aumenta; caso contrario ocurre cuando aumenta  $Y^{EST}$  o  $Y^{AM}$ , la reducción en  $F_l$  hace que también reduzca la diferencia entre adultos y estudiantes.

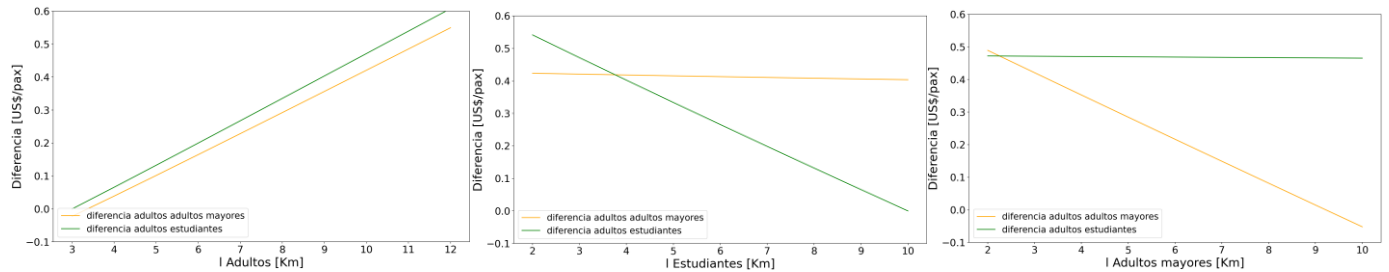
Por otro lado, en la diferencia entre adultos y adultos mayores importan ambos factores amplificadores;  $F_t$  aporta negativamente, mientras que  $F_l$  lo hace positivamente. Lo anterior provoca que los efectos sean variados y dependan del caso analizado y de los valores  $t^j$  y  $l^j$ . Exceptuando el caso en que aumenta  $Y^{AM}$ , la diferencia entre estos dos grupos tiende a disminuir.

Finalmente, a partir de las Figuras 6-13, es seguro decir que, a excepción de  $P_{v1}^A$  las tarifas y diferencias tarifarias son poco sensibles a los cambios en  $P_{v0}^j$ ,  $P_{v1}^j$ ,  $P_w^j$  e  $Y^j$ .

Dado que las dos características restantes cumplen (además) el rol de características diferenciadoras, estas requieren un análisis diferente al realizado hasta ahora. A partir de la ecuación (39), es claro que al variar  $t^j$  o  $l^j$  es el grupo  $j$  el que verá más afectada su tarifa, mientras que el resto sólo se ven afectados a través de los factores ponderadores.



**Figura 14. Sensibilidad de tarifas  $c/r$  a  $l^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**



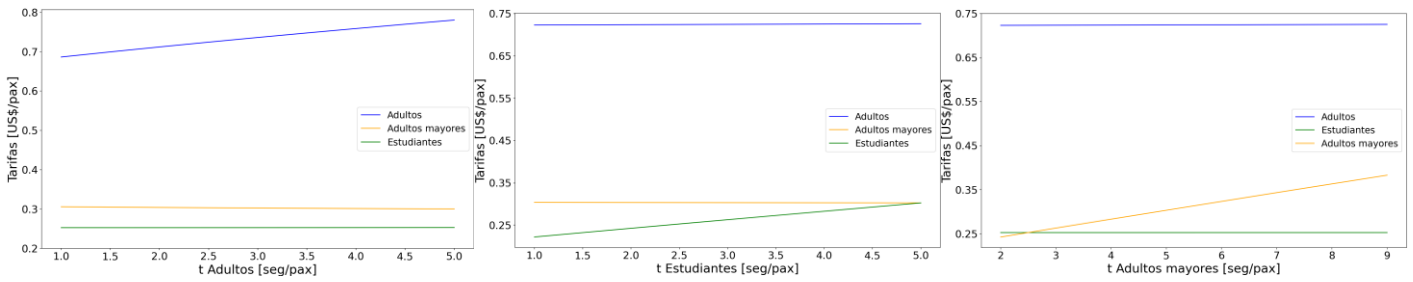
**Figura 15. Sensibilidad de diferencias tarifarias  $c/r$  a  $l^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**

Al igual que para el caso de  $Y^i$ , un aumento del largo de viaje de adultos provoca una reducción en la tasa de ocupación y ocurre lo contrario cuando aumenta el largo de viaje de los otros dos grupos. La frecuencia aumenta con los largos de viaje de todos los tipos de usuario.

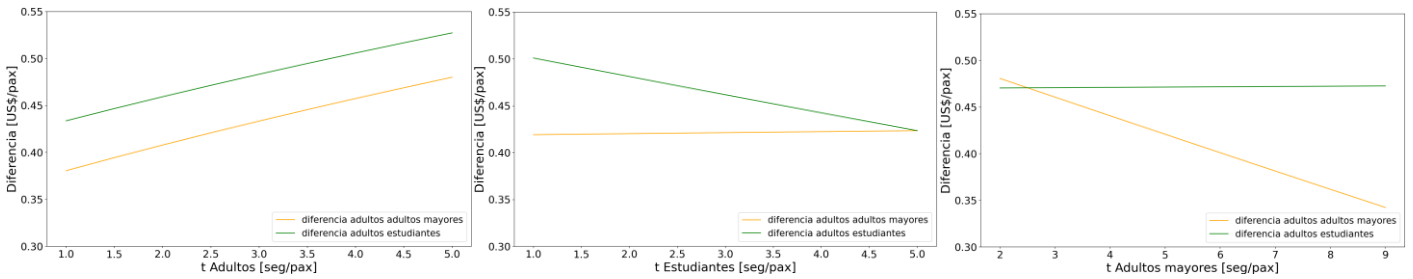
Al ser característica diferenciadora, el largo de viaje impacta positivamente en la tarifa del propio grupo. Por otro lado, si se aísla el efecto de factores ponderadores, las tarifas de todos aumentan con el largo de viaje de adultos y disminuyen con el largo de viaje de estudiantes y adultos mayores. En general, todas las tarifas aumentan con el largo de viaje de adultos. Sin embargo, cuando aumenta el largo de viaje de los otros dos grupos aumenta la tarifa del grupo analizado y disminuyen las otras dos.

Además, notemos que en la Figura 15, cuando  $l^E = 10 [Km]$ , entonces su tarifa es igual a la de adultos, puesto que también tienen el mismo tiempo de subida y bajada. Sin embargo, cuando  $l^{AM} = 10 [Km]$  esto no ocurre debido a que  $t^A < t^{AM}$ .

Como la tarifa de adultos es la que más crece con su largo de viaje, las diferencias tarifarias con los otros grupos también aumentan. Al analizar las diferencias cuando cambia el largo de viaje de los otros dos grupos, se reduce la diferencia tarifaria entre adultos y el grupo que aumenta su largo de viaje y, entre adultos y el tercer grupo se mantiene prácticamente constante. Lo anterior puede observarse en la Figura 15.



**Figura 16. Sensibilidad de tarifas  $c/r$  a  $t^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**



**Figura 17. Sensibilidad de diferencias tarifarias  $c/r$  a  $t^i$  con  $i = A, EST, AM$ .**

Un aumento en los tiempos de subida y bajada de cualquier grupo inducirá aumentos en la frecuencia, pero a la vez, en el tiempo de ciclo, siendo este último efecto el que domina (ver ecuación 21). La combinación de ambos efectos produce que  $F_t$  decrezca y que  $F_l$  crezca. Esto hace que las tarifas crezcan o decrezcan dependiendo netamente de la magnitud de  $t^j$  y  $l^j$ . Por ejemplo, ante un aumento de los tiempos de subida y bajada de cualquier grupo, la tarifa de adulto aumenta, lo que se debe a que el aumento en  $F_l$  supera la reducción de  $F_t$ , esto es debido a la magnitud de su largo de viaje. Por otro lado, para estudiantes o adultos mayores, cuando aumenta el tiempo de subida y bajada de un grupo distinto a ellos, sus tarifas disminuyen (el efecto de largo de viaje no supera al de  $F_t$ ). Por lo tanto, en general, ante un aumento de  $t^j$  la tarifa de adultos aumenta. Por otro lado, la tarifa de estudiantes aumenta con  $t^{EST}$  y disminuye con  $t^A$  y  $t^{AM}$ , caso similar al de adultos mayores, grupo cuya tarifa aumenta con su tiempo de subida y bajada, y disminuye con el  $t^j$  de los otros dos grupos.

El comportamiento de las diferencias tarifarias es similar al del largo de viaje. Cuando aumenta el tiempo de subida y bajada de adultos, las diferencias tarifarias con respecto a este grupo aumentan. Por otro lado, cuando crece el tiempo de subida y bajada de estudiantes o adultos mayores, su diferencia tarifaria con respecto a adultos disminuye y la diferencia entre los dos grupos (que no cambian su tiempo de subida y bajada) se mantiene prácticamente constante.

#### **4.3.4. Conclusiones extensión modelo Jara-Díaz & Gschwender**

El modelo de Jara-Díaz & Gschwender (2003) extendido a N tipos de usuarios permite calcular las tarifas eficientes dentro de un sistema de transporte público, siendo una primera aproximación al conjunto de tarifas que se observa empíricamente. Al



distinguir a los usuarios según:  $P_v^i$ ,  $P_w^i$ ,  $Y^i$ ,  $t^i$  y  $l^i$ , se obtienen diferencias tarifarias, provocadas solamente por los dos últimos parámetros.

Sabiendo que las diferencias tarifarias son producidas solamente por  $t^i$  y  $l^i$ , se hace necesario entender la forma en la que impactan estos parámetros en la operación del sistema y su influencia en las tarifas eficientes; el efecto de cada parámetro es capturado por su factor ponderador correspondiente, los que no dependen del tipo de usuario analizado. Al interpretar qué hay detrás de los factores ponderadores notamos que a los usuarios se les cobra por externalidades negativas generadas en: la cantidad de buses necesarios para cumplir con la frecuencia, tamaño del vehículo y en el costo de los usuarios en el vehículo. Por tanto, debido a que cada tipo de usuario genera estas externalidades en distintas magnitudes (debido a las diferencias en  $t^i$  y  $l^i$ ) es que, bajo este modelo, se obtiene una primera aproximación a tarifas óptimas diferenciadas para cada grupo.

Se simuló los resultados analíticos utilizando parámetros que representan el caso de Santiago de Chile, obteniendo diseño y tarifas óptimas en un sistema en el que coexisten 3 tipos de usuarios: adultos, adultos mayores y estudiantes. Al comparar las tarifas resultantes con las observadas actualmente en la ciudad se observa la misma relación de orden entre las tarifas, vale decir, la tarifa para adultos resulta mayor que para adultos mayores y ambas son mayores que la tarifa de estudiantes. Sin embargo, las tarifas observadas de todos los grupos son mayores a las óptimas. Lo anterior, indica que el descuento observado o comparación usual de tarifas no muestra un beneficio como tal a los grupos que usualmente reciben descuentos; para beneficiarlos, su tarifa observada debe ser menor que la tarifa eficiente obtenida.

Al realizar el análisis de sensibilidad con respecto a las características de los 3 tipos de usuario, notamos que las tarifas son poco sensibles a la mayoría de los análisis, exceptuando a la variación de:  $P_{v1}^A$  y, a la tarifa  $P^j$  cuando cambia  $t^j$  ó  $l^j$ . Por tanto, y como era de esperar, las características diferenciadoras son las que más efecto causan en la tarifa de cada grupo. Que la sensibilidad sea baja en la mayoría de los casos, abre la posibilidad de extender estos resultados a otros sistemas de transporte público, en donde la forma que tengan los distintos grupos de usar el modo (largo de viaje y tiempo de subida y bajada) serán las características fundamentales para definir la estructura tarifaria óptima en cada uno de ellos.

A pesar de los resultados obtenidos en este modelo, las conclusiones obtenidas en los capítulos 2 y 3, motivan la exploración de otro tipo de enfoque. Las preferencias declaradas de otorgar los programas muestran la intención de incentivar beneficios en los usuarios, indicando que existe preocupación especial para ciertos grupos de la población. Lo anterior puede ser explicado a través del concepto de pesos sociales, en donde se verá si existe relación entre asignar importancias relativas a los beneficios de cada grupo y los descuentos observados.

## **4.4. Pesos monetarios relativos**

### **4.4.1. Introducción y definición del modelo**

El objetivo principal de esta sección es encontrar un modelo que logre representar la naturaleza y características de los programas de reducción tarifaria mostrados a lo largo de los Capítulos 2 y 3.

En el capítulo 2 se mostró que hay tarifas diferenciadas en un número importante de ciudades. Además, a través de documentos ligados a legislatura, informes de autoridades en transporte, páginas oficiales de gobierno y declaraciones de autoridades municipales (entre otros) se justifica la existencia de los programas de reducción tarifaria. En estos documentos se nota preocupación especial de parte de los tomadores de decisión hacia los grupos que reciben descuentos; preocupación que, en la mayoría de los casos, se traduce en deseos de inducir distintos tipos de beneficios, los que generalmente son derivados de viajar en transporte público o de la reducción en el dinero gastado en dicha actividad.

A su vez, en el capítulo 3 se analizó literatura relacionada a descuentos en transporte público. Al sistematizar los impactos encontrados se destaca la cantidad de viajes como una de las variables más estudiada por los distintos autores; en relación a lo anterior, hay estudios que utilizan esta variable para estimar cambios en el bienestar de los usuarios que reciben descuento. Por otro lado, en este capítulo se encontró una única metodología de cálculo para el nivel de descuento para estudiantes universitarios; la metodología indica que los descuentos son tales que se logren cubrir los costos incrementales de los operadores.

Lo expuesto en los párrafos anteriores nos entrega distintos elementos que apoyan la formulación y desarrollo de un nuevo enfoque para el cálculo de tarifas, el cual es pensado para un sistema en el que coexisten múltiples usuarios. Como fue mostrado, este nuevo enfoque descansará tanto en la preocupación mostrada de parte de los tomadores de decisión hacia los distintos grupos, como en diversos tipos de análisis encontrados en la literatura.

El modelo que recoge lo planteado anteriormente se centra en optimizar los beneficios ponderados para los distintos tipos de usuarios, sujeto a que los operadores no pierdan dinero. Como medida de bienestar se utiliza el Excedente Marshalliano del Consumidor, el cual es ponderado por un peso monetario relativo para cada tipo de usuario; la maximización del bienestar total (suma ponderada de peso monetario por EMC) estará sujeta a cubrir los costos de largo plazo de los operadores.

### **4.4.2. Desarrollo del modelo**

El problema para  $N$  tipos de usuarios es el descrito por las ecuaciones (45) y (46). La equivalencia presentada en (45) es útil para encontrar pesos monetarios  $\lambda_j$  relativos a  $\lambda_A$  (grupo que no recibe descuentos).

$$\text{Max } \sum_i^N \Lambda_i EMC_i \Leftrightarrow \text{Max } \sum_i^N \frac{\Lambda_i}{\Lambda_A} EMC_i \quad (45)$$

s. t.

$$\sum_i^N P^i Y^i - \sum_i^N m_i Y^i + s \geq 0 \quad (46)$$

La restricción (46) muestra que si el costo marginal de los operadores generado por un usuario tipo "i" se define como  $m_i$ , la suma total  $\sum_i^N m_i Y^i$  es el costo de los operadores en el largo plazo, por lo tanto, la de entre los ingresos totales  $\sum_i^N P^i Y^i$  mas el subsidio observado ( $s$ ), debe ser mayor a aquel costo.

Para resolver el problema, se plantea el Lagrangiano asociado:

$$L = \sum_i^N \frac{\Lambda_i}{\Lambda_A} EMC_i + \lambda (\sum_i^N P^i Y^i - \sum_i^N m_i Y^i + s) \quad (47)$$

Luego, como se quieren encontrar las tarifas que resuelven el problema (45), se deriva el Lagrangiano con respecto a la tarifa del grupo j-ésimo:

$$\frac{\partial L}{\partial P^j} = -\frac{\Lambda_j}{\Lambda_A} Y^j + \lambda (Y^j + P^j \frac{\partial Y^j}{\partial P^j} - m_j \frac{\partial Y^j}{\partial P^j}) = 0 \quad (48)$$

Definiendo el módulo de la elasticidad-precio de la demanda para el grupo j-ésimo según la ecuación (49) y reordenando términos, se obtiene la tarifa óptima para cada grupo según la ecuación (50):

$$|\eta_j| = -\frac{\partial Y^j}{\partial P^j} \frac{P^j}{Y^j} \quad (49)$$

$$P^j = \frac{m_j}{1 - \frac{1}{|\eta_j|} + \frac{\Lambda_j}{\Lambda_A \lambda |\eta_j|}} \quad (50)$$

Al considerar N tipos de usuarios, el problema tiene 2N incógnitas: N tarifas  $P^j$ , N-1 pesos monetarios relativos  $\Lambda_j$  y el multiplicador de la restricción (46):

$P^j$  (N incógnitas)

$\Lambda_j$  (N-1 incógnitas)

$\lambda$  (1 incógnita)

Por otro lado, la ecuación (49) entrega N ecuaciones, a lo que se suma el cumplimiento de la restricción (46). Sin embargo, hacen falta N-1 ecuaciones adicionales para que el problema se pueda resolver.

$$P^j = \frac{m_j}{1 - \frac{1}{|\eta_j|} + \frac{\Lambda_j}{\Lambda_A \lambda |\eta_j|}} \quad (\text{N ecuaciones})$$

$$\sum_i^N P^i Y^i - \sum_i^N m_i Y^i + s = 0 \quad (1 \text{ ecuación})$$

Del capítulo 2 (específicamente de la Tabla 2.2) se observan relaciones entre las tarifas de un grupo que no recibe descuentos y los distintos grupos que sí. Estas

relaciones se pueden expresar en ecuaciones que vinculan dos tarifas, siendo la menor una fracción  $\theta_j$  de la tarifa normal. Lo anterior aporta N-1 ecuaciones al sistema.

$$P^j = \theta_j P^A \quad (N-1 \text{ ecuaciones}) \quad \text{con} \quad 0 < \theta_j \leq 1 \quad (\theta_A = 1)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones se parte reemplazando las primeras N ecuaciones (tarifas) en la ecuación que las relaciona con la tarifa del grupo que no recibe descuento. Con esto, la tarifa del grupo j queda en función de la fracción  $\theta_j$  que pagan con respecto a la tarifa normal y de la tarifa  $P^A$ .

$$P^j = \frac{\theta_j m_A}{1 - \frac{1}{|\eta_A|} + \lambda \frac{1}{|\eta_A|}} \quad (51)$$

Luego, (51) puede reemplazarse en  $\sum_i^N P^i Y^i - \sum_i^N m_i Y^i + s = 0$ , resultando lo siguiente:

$$\frac{m_A Y^A}{1 - \frac{1}{|\eta_A|} + \lambda \frac{1}{|\eta_A|}} + \frac{m_A \sum_{i \neq A}^N \theta_i Y^i}{1 - \frac{1}{|\eta_A|} + \lambda \frac{1}{|\eta_A|}} - \sum_i^N m_i Y^i + s = 0 \quad (52)$$

Despejando  $\lambda$  de (52):

$$\lambda = \frac{\sum_i^N m_i Y^i - s}{|\eta_A| \left[ m_A \sum_i^N \theta_i Y^i - (\sum_i^N m_i Y^i - s) \left( 1 - \frac{1}{|\eta_A|} \right) \right]} \quad (53)$$

Reemplazando (53) en la expresión (50) para  $P^A$  se obtiene:

$$P^A = \frac{\sum_i^N m_i Y^i - s}{\sum_i^N \theta_i Y^i} \quad (54)$$

Reemplazando (53) y (54) en la expresión (50) para cualquier grupo j se obtiene el peso monetario relativo  $\Lambda_j$ :

$$\Lambda_j = \frac{(\sum_i^N m_i Y^i - s) + |\eta_j| \left[ \frac{m_j}{\theta_j} \sum_i^N \theta_i Y^i - (\sum_i^N m_i Y^i - s) \right]}{(\sum_i^N m_i Y^i - s) + |\eta_A| \left[ m_A \sum_i^N \theta_i Y^i - (\sum_i^N m_i Y^i - s) \right]} \quad (55)$$

En (55) se observa el peso monetario relativo para un grupo j, revelado por las diferencias tarifarias observadas. Claramente el valor de  $\Lambda_j$  para el grupo que no recibe descuentos es 1, lo que es consistente con el planteamiento inicial del problema. Para facilitar el análisis y la interpretación de (55) se reemplazarán las relaciones  $\theta_i$  en función de  $P^i$  y  $P^A$ .

$$\Lambda_j = \frac{(\sum_i^N m_i Y^i - s) + |\eta_j| \left[ \frac{m_j}{P^j} \sum_i^N P^i Y^i - (\sum_i^N m_i Y^i - s) \right]}{(\sum_i^N m_i Y^i - s) + |\eta_A| \left[ \frac{m_A}{P^A} \sum_i^N P^i Y^i - (\sum_i^N m_i Y^i - s) \right]} \quad (56)$$

Reordenando términos y utilizando la relación (N+1) obtenemos la siguiente expresión final para el peso monetario relativo del grupo j:

$$\Lambda_j = \frac{1 - |\eta_j| \left( \frac{P^j - m_j}{P^j} \right)}{1 - |\eta_A| \left( \frac{P^A - m_A}{P^A} \right)} \quad (57)$$

Para los grupos que sí reciben descuento,  $\lambda_j$  dependerá de  $|n_j|$ ,  $m_j$  y  $P^j$ . De los valores anteriores, solamente el último puede ser elegido por los tomadores de decisión; los otros dos son características que dependen de la relación entre el tipo de usuario y el sistema.

Notamos que tanto el denominador como el primer término del numerador son idénticos para todos los grupos. Por lo tanto, la variación en el peso monetario relativo depende solamente del segundo término del numerador. Para un grupo particular, es claro que una tarifa menor y mayor costo marginal de los operadores (producido por el mismo grupo) contribuyen a un aumento en su peso monetario relativo. Sin embargo, el efecto provocado por la elasticidad-precio de la demanda quedará determinado por el signo del factor que la acompaña; según varios autores, al tarifificar de forma óptima en transporte público, las tarifas resultantes son menores que los costos marginales de los operadores, haciendo necesario un subsidio. Si ese fuera el caso, si un grupo tiene mayor elasticidad-precio de la demanda se verá un aumento en su peso monetario relativo.

Notamos que, además de la elasticidad-precio de la demanda, el segundo factor que marca la diferencia entre los pesos monetarios de los distintos grupos es la desviación de la tarifa respecto al costo marginal de los operadores generados por cada uno de ellos (los grupos). Además, la decisión de que la tarifa esté por debajo o por sobre el costo marginal influirá en si la desviación aporta en aumentar o disminuir (respectivamente) el peso monetario de cada grupo.

#### 4.4.3. Simulación

sección se utilizarán valores tipo Santiago de Chile con tal de evaluar numéricamente la expresión de  $\lambda_j$  para el caso que coexisten 3 tipos de usuarios: adultos, adultos mayores y estudiantes. Los valores utilizados se muestran en la tabla 4.4.

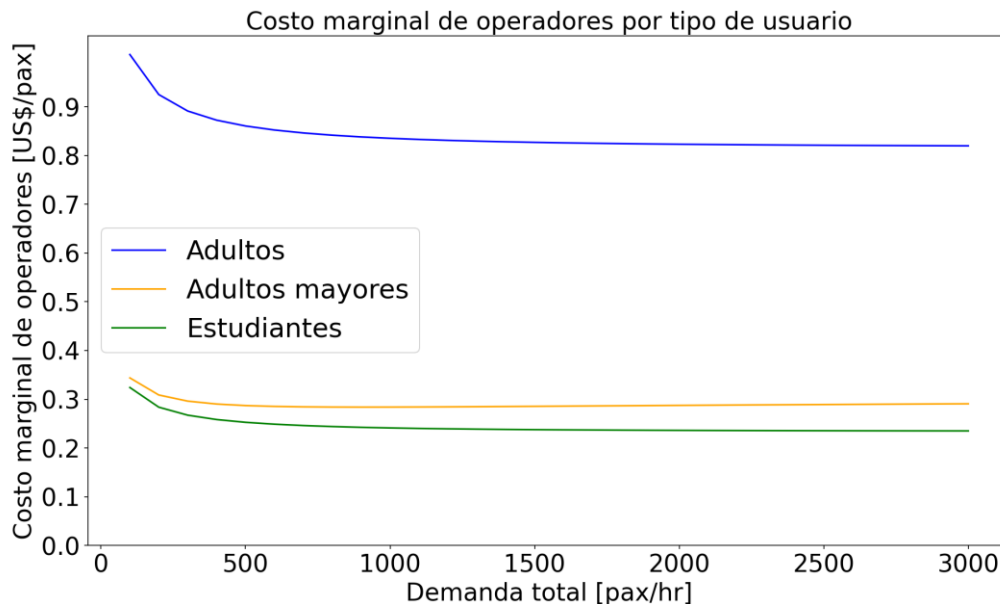
**Tabla 4.4. Parámetros utilizados para la simulación de pesos relativos monetarios**

Grupo	$P^i$ [\$US]	$ \eta_i $
Adultos	0.87	0.2
Adultos mayores	0.44	0.4
Estudiantes	0.28	0.4

Los valores que se usan para  $P^i$  son los observados empíricamente en la ciudad de Santiago de Chile. Por otro lado, la elasticidad para adultos proviene de Litman (2022), valor que representa la situación en horario punta; para los otros dos grupos, momentáneamente se utilizará el doble del valor utilizado para adultos, puesto que son grupos más sensibles a cambios en la tarifa. Sin embargo, al ser un supuesto más

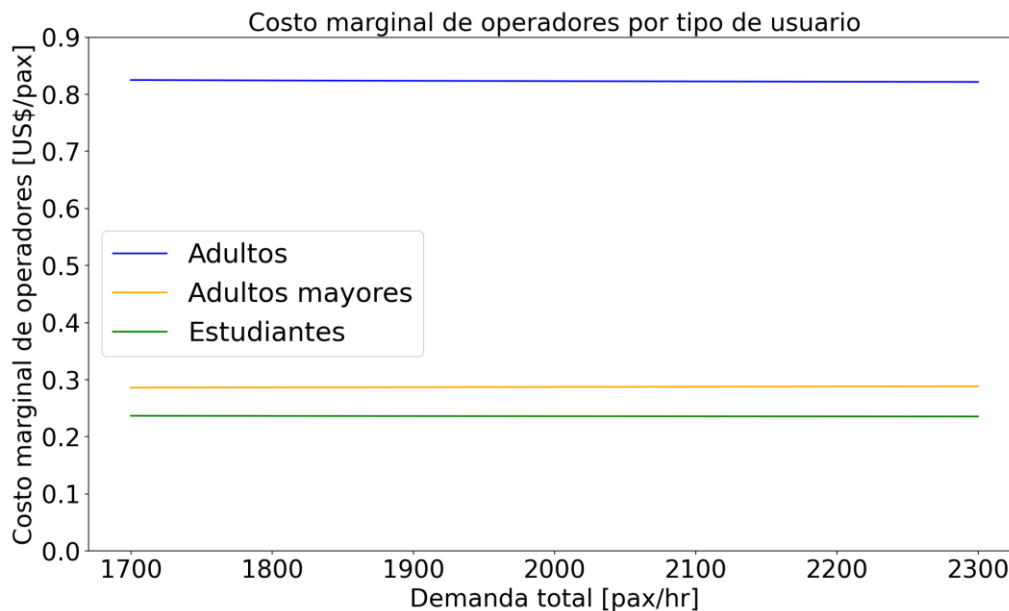
adelante es necesario realizar sensibilidad de los resultados obtenidos haciendo variar este valor.

El costo marginal de operadores provocado por cada grupo se muestra en la figura 18, la cual fue realizada basándose en la ecuación (B.42) derivada del modelo de Jara-Díaz & Gschwender (2003). Según la ecuación (57),  $m_i$  es el único valor que varía con  $Y$ , por lo cuál, se simularán los pesos monetarios relativos variables en la demanda total de usuarios del sistema.

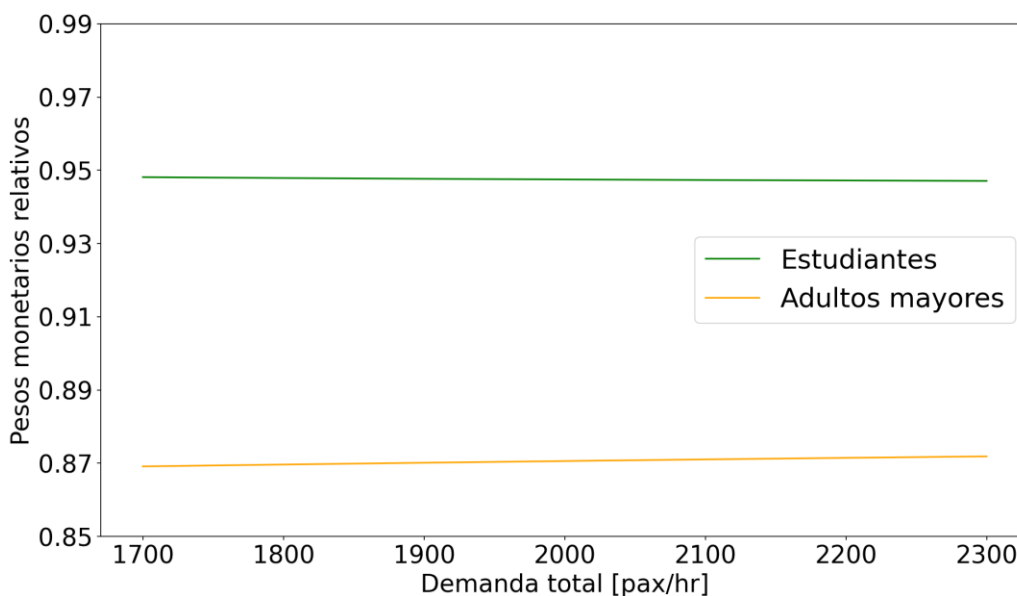


**Figura 18. Costo marginal de operadores provocado por cada tipo de usuario, según extensión de modelo Jara-Díaz & Gschwender (2003).**

Se considerarán valores razonables de demanda entre  $1700 \leq Y \leq 2300$ . Al simular para este rango, los costos marginales de operadores, y en consecuencia, los pesos monetarios relativos resultan prácticamente constantes.



**Figura 19. Costo marginal de operadores por tipo de usuario dentro del rango 1700 [pax/hr] < Y < 2300 [pax/hr].**

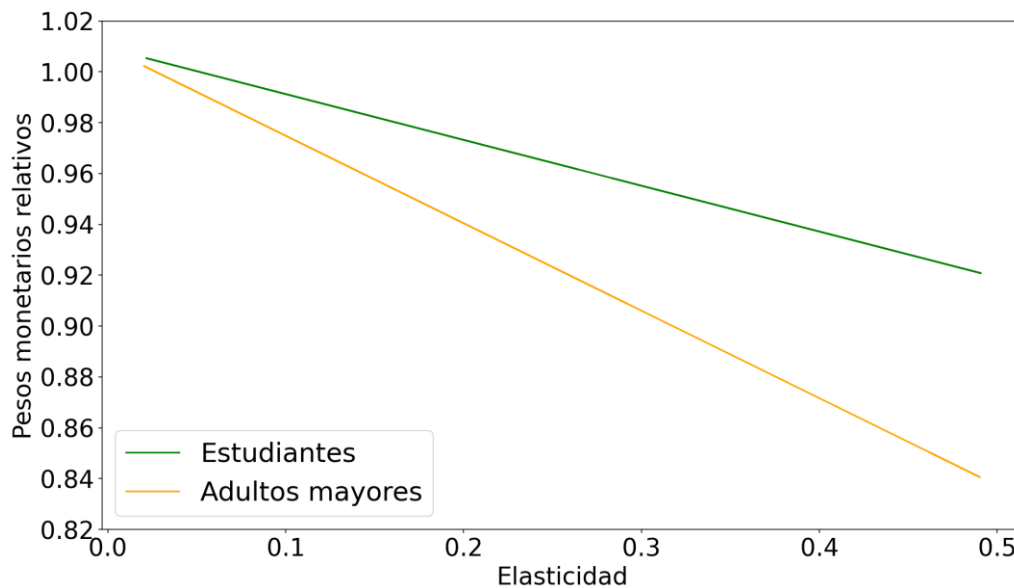


**Figura 20. Pesos monetarios relativos.**

En la figura 20, se observa que los pesos relativos para los dos grupos que reciben descuento son menores a 1. Recordando que el grupo que no recibe descuento tiene peso monetario relativo unitario, se puede decir que los pesos de los 3 grupos son cercanos entre sí. Por otro lado, el peso monetario relativo de los adultos mayores es menor que el de estudiantes, puesto que, la diferencia entre el costo marginal de operadores (generada por cada grupo) y la tarifa observada, es mayor en el caso del primer grupo mencionado.

Para medir la sensibilidad de los pesos monetarios frente al valor de la elasticidad asumido para adultos mayores y estudiantes, se simularon 1000 valores distintos de

esta variable entre los rangos [0.02, 0.491], extremos que se tomaron basándose en la revisión de la literatura del capítulo 3. Los resultados, considerando una demanda de 1860 [pax/hr] se muestran en la figura 21.



**Figura 21. Sensibilidad de pesos monetarios de adultos mayores y estudiantes respecto a su elasticidad-precio de la demanda.**

En este caso, la variable independiente es la elasticidad de cada grupo, mientras que su peso monetario relativo es la variable dependiente. Por lo tanto, la diferencia entre las pendientes es explicada por el término que acompaña a  $|\eta_j|$  en la ecuación (57). Lo anterior indica que mientras más alejados estén el costo marginal y la tarifa de cierto grupo, más sensible a la elasticidad será su peso monetario relativo.

Independiente de lo expresado anteriormente, el análisis de sensibilidad no refleja grandes variaciones en el peso monetario relativo producto de cambios en la elasticidad de cada grupo.

#### **4.4.4. Conclusiones modelo pesos monetarios relativos**

Se logró plantear y desarrollar un modelo que busca revelar los pesos implícitos que hay detrás de otorgar programas de reducción tarifaria a ciertos grupos de la población. Lo anterior se realizó en base a lo estudiado y analizado en los capítulos 2 y 3 de esta tesis. Es destacable el rol que cumplen en la formulación del problema los niveles de descuentos observados en las ciudades y la metodología de cálculo de descuento encontrada en la literatura.

De (57), notamos que el único mecanismo que tienen los tomadores de decisión, para pesar más los beneficios monetarios de un grupo específico es a través de una reducción en la tarifa de este mismo. En este sentido, bajo este enfoque es posible explicar las tarifas reducidas como esfuerzos de los tomadores de decisión por considerar en un mayor grado los beneficios monetarios de los grupos que reciben descuentos en transporte público.



En Jara-Díaz (2007) se obtiene una relación entre, el peso monetario  $\Lambda_j$  de cada tipo de usuario, su ingreso (a través de la utilidad marginal del ingreso  $\lambda_j$ ) y su peso social  $\Omega_j$ , i.e. con la importancia que la sociedad le da a sus cambios en bienestar; la relación se puede observar en (58). Debido a lo anterior, es que los pesos sociales relativos pueden diferir de los pesos monetarios relativos.

$$\Omega_j = \frac{\Lambda_j \lambda_s}{\lambda_j} \quad (58)$$

En (58)  $\lambda_s$  es una constante para todos los tipos de usuario y representa la utilidad marginal del ingreso de la sociedad. Por lo tanto, para un grupo específico, mayores pesos monetarios y menores utilidades marginales del ingreso contribuyen a un peso social mayor. En el caso particular de Santiago de Chile, los pesos monetarios relativos de todos los grupos usados en la simulación (adultos, adultos mayores y estudiantes) son cercanos a 1, de lo cual se puede inferir que, los grupos con menor UMI tendrán un mayor peso social  $\Omega_j$ ; en general, los adultos tienen una UMI menor que adultos mayores y estudiantes. En consecuencia, bajo este enfoque y en el caso particular de Santiago de Chile, se le da igual importancia al beneficio monetario de todos los grupos, y se le está dando una mayor importancia relativa a los cambios en la utilidad del grupo que no recibe descuento en transporte público.

Debido a los resultados provenientes de las simulaciones se puede establecer cierta compatibilidad entre los dos enfoques presentados. En primer lugar, recordemos que las tarifas obtenidas en la simulación de la extensión al modelo de Jara-Díaz & Gschwender (2003) reproducen de manera cercana las tarifas observadas empíricamente para los 3 grupos, y que, para estos mismos grupos la simulación del segundo enfoque nos entrega pesos monetarios cercanos entre sí. Basándose en estos resultados es posible decir que, para realmente beneficiar a los grupos que reciben descuentos, sus tarifas observadas debiesen ser menores que las obtenidas bajo un enfoque de eficiencia del sistema; y que, para reflejar la preocupación por los grupos que reciben descuentos, sus pesos sociales debiesen ser mayores que los que se obtienen a partir de las tarifas observadas, lo que induciría también, tarifas menores que las actuales

#### **4.5. Síntesis**

La revisión realizada tanto en la literatura como en otro tipo de fuentes de información (por ejemplo, reportes o páginas de entidades de transporte), reveló que existe una escasez en cuánto a metodologías de cálculo para el nivel de descuento otorgado en los programas de reducción tarifaria. Con el objetivo de explorar en el área antes mencionada, se desarrollaron 2 metodologías que involucran el cálculo de tarifas óptimas en un sistema de transporte público en el que coexisten múltiples usuarios.

En primer lugar, con el objetivo de tener una primera aproximación a las tarifas óptimas (basadas en el diseño eficiente de un sistema), se modificó el modelo presentado en Jara-Díaz & Gschwender (2003). Se extendió el modelo antes

mencionado a uno dónde es posible diferenciar a múltiples usuarios dentro de una línea de transporte público; la diferenciación proviene de asignar a cada grupo sus propios: valores del tiempo, demanda, largos de viaje y tiempos de subida y bajada.

El resultado analítico muestra que bajo este modelo se obtienen tarifas diferenciadas para distintos grupos, las que son provocadas únicamente por distintos largos de viaje y distintos tiempos de subida y bajada, características que tienen relación con la forma de uso del sistema. Los cambios en estos parámetros provocan externalidades negativas, cuya magnitud se refleja en lo que se definió como “factores ponderadores”. Estas tarifas son las eficientes (u óptimas) del sistema, por lo que las tarifas observadas deberían ser comparadas contra estas.

Los resultados de este modelo fueron simulados utilizando valores tipo Santiago de Chile y considerando 3 tipos de usuarios: adultos (no reciben descuento), estudiantes y adultos mayores. La simulación, muestra que las tarifas eficientes son menores a las observadas empíricamente para los 3 grupos. Por lo tanto, si bien es cierto que tanto a estudiantes como a adultos mayores se les ofrece un descuento con respecto a la tarifa normal, ambos grupos son tarifados por sobre su tarifa eficiente, haciendo que el descuento no necesariamente sea un beneficio para ellos. Para beneficiarlos, la tarifa debería disminuir aún más, siendo menor que la tarifa eficiente.

Por otro lado, se desarrolló un segundo modelo centrado en revelar la importancia relativa que los tomadores de decisión, le asignan a diferentes grupos (de forma implícita) al otorgar descuentos en transporte público. Lo anterior, surge a partir de las principales conclusiones obtenidas en los capítulos 2 y 3 de esta tesis, las cuales son: mostrar preocupación social por los grupos que reciben descuentos, énfasis en estudiar los cambios en la cantidad de viajes y no afectar la recaudación de los operadores al implementar un PRT.

El modelo realizado consta de la maximización ponderada de los beneficios monetarios (derivados de cambios en la cantidad de viajes), sujeto a cubrir los costos de operadores en el largo plazo. El objetivo es revelar cuánto “pesan” los tomadores de decisión a los distintos grupos, a partir de los cambios en el beneficio monetario de cada uno de ellos. El resultado analítico muestra que el peso relativo de cada grupo depende de su elasticidad-precio de la demanda, tarifa y costo marginal generado a los operadores.

Al simular este resultado bajo las mismas condiciones del primer modelo (usando los mismos costos marginales) y utilizando las tarifas observadas empíricamente, se observa que los 3 grupos presentan pesos monetarios relativos similares y cercanos a la unidad. Resultado que se mantiene al hacer un análisis de sensibilidad con respecto a las elasticidades-precio de la demanda de cada tipo de usuario, única característica sobre la cual se realizaron supuestos. Lo anterior indica que los descuentos observados en transporte público (para el caso de Santiago de Chile) no necesariamente tienen una preocupación especial implícita para los grupos beneficiados, sino más bien responderían al diseño óptimo del sistema.

Finalmente, es importante destacar que las conclusiones obtenidas para ambos modelos son compatibles. Vale decir, basta que la tarificación para distintos tipos de usuarios provenga del diseño óptimo del sistema, y se obtendrá una estructura tarifaria con tarifas diferenciadas. Si por motivos sociales (u otros) es deseable ofrecer otros niveles de tarifa a los grupos diferenciados, se hace necesario otorgarles una importancia implícita a los beneficios percibidos por los grupos objetivos o bien, si se quisiera dar una mayor importancia a ciertos grupos, se hace necesario cambiar la estructura tarifaria.

## **Capítulo 5. Síntesis y conclusiones**

En esta tesis se revisaron, analizaron y desarrollaron diferentes aspectos de lo que se conoce como Programas de Reducción Tarifaria (PRT). Estos hacen referencia a una estructura tarifaria de transporte público que ofrece descuentos a grupos específicos de la sociedad. En esta oportunidad nos centramos en estudiar 4 grupos: jóvenes o estudiantes, adultos mayores, personas con discapacidad y personas de bajos ingresos.

Los objetivos que nos planteamos en un comienzo tenían relación con dos ideas principales: entender los fundamentos de los PRT en transporte público y las aproximaciones de cálculo para los niveles de descuento que existen para los programas. A continuación, se expone lo realizado en esta tesis con tal de cumplir con lo antes mencionado.

Primeramente, con el objetivo de entender el contexto de los PRT en el mundo, se estudiaron numerosas ciudades importantes y la presencia de descuentos en transporte público para los distintos grupos. El criterio de selección de estas ciudades fue tal que existiera información disponible que permitiera reconocer de manera clara la estructura tarifaria existente; la selección final quedó compuesta por 68 ciudades (las que incluyen 41 capitales) distribuidas en los 5 continentes.

Para la selección de ciudades, se revisaron características socioeconómicas y del sistema de transporte, donde, dentro de las últimas se incluyeron (de existir) los niveles de descuento otorgados para cada uno de los 4 grupos. Gracias a lo anterior, se pudo determinar que, dentro de la selección, los grupos que reciben descuentos con mayor frecuencia son los estudiantes y adultos mayores. Además, fue posible notar la presencia de ciertas regularidades; por ejemplo, se nota que en un 98% de los casos en los que se otorga descuento para personas con discapacidad, también se da para adultos mayores. Sin embargo, no fue posible encontrar relación entre la decisión de otorgar descuentos y el nivel de pobreza de las ciudades ni el nivel de uso de transporte público; lo anterior, sugiere que la decisión de dar descuentos en transporte público va más allá de estos factores.

Además, para ayudar a entender los fundamentos de los descuentos en transporte público, se estudiaron las justificaciones declaradas por los tomadores de decisión al entregar los PRT. La información fue encontrada en distintas fuentes (leyes, diarios, informes de autoridades de transporte, etc..) y a pesar de ser escasa, revela que, de existir justificaciones, estas parecieran estar relacionadas a la preocupación social. Cabe destacar que esta preocupación se adecúa a las características particulares de cada grupo.

La necesidad de buscar una alternativa a los escasos motivos enunciados por los tomadores de decisión nos llevó a revisar la literatura centrada en descuentos en transporte público para al menos uno de los 4 grupos. De parte de los distintos autores, se notó una particular preocupación por estudiar los impactos *a posteriori* en

diversas variables debido a la implementación de un programa de reducción tarifaria. Lo anterior, revela los objetivos que los autores creen están detrás de los programas.

A través de los grupos, el impacto más estudiado es en la cantidad de viajes; además, cada grupo tiene sus propios elementos destacables, por ejemplo, para adultos mayores toman relevancia temas como impactos en propósitos de viaje, salud o en la exclusión social. Por otro lado, para estudiantes pareciera ser importante evaluar el impacto en la partición modal de viajes a la escuela y los cambios en la asistencia a actividades extracurriculares. Por último, para personas de bajos ingresos, la literatura encontrada no es tan extensa como para los grupos mencionados anteriormente, sin embargo, en este caso se ha estudiado cómo cambian las siguientes variables: ingreso promedio, la capacidad de pago en transporte público, la equidad y accesibilidad.

A pesar de encontrar numerosos artículos que analizan impactos en las variables antes mencionadas, no fue posible encontrar (de forma sistemática) metodologías de cálculo para el nivel de descuento otorgado a los diferentes grupos, sin embargo, hay documentos que dan luces en este tema. Por ejemplo, en Toronto Transit Commission (2018) se calcula el valor de una tarjeta semestral para estudiantes universitarios, la cual tiene carácter obligatorio y además permite realizar la cantidad de viajes que el estudiante quiera; la metodología utilizada consiste en que el precio cubra los costos de los operadores asociados a la reducción tarifaria y al aumento en el nivel de servicio. También, se detectaron intentos por realizar análisis costo-beneficio, e.g. Department of Transport (2016), Kelly (2011) y Shin (2021), en estos estudios destacamos el uso del Excedente Marshalliano del Consumidor (EMC) como medida de beneficio monetario ante los cambios en la cantidad de viajes.

Bajo este contexto, quisimos aproximarnos a una metodología de cálculo para las tarifas de distintos grupos desde 2 diferentes enfoques. En primer lugar, desarrollamos un modelo que permite calcular las tarifas eficientes a partir del diseño óptimo de una línea, en un sistema de transporte donde coexisten múltiples usuarios. Con este objetivo, se extendió el modelo Jara-Díaz & Gschwender (2003), diferenciando los distintos tipos de usuario según: cantidad de usuarios, valores del tiempo, largos de viaje y tiempos de subida y bajada. El segundo enfoque representa (según nuestra interpretación) las metodologías de cálculo encontradas en el capítulo 3 y los objetivos o fundamentos implícitos presentados en los capítulos 2 y 3; este enfoque se centra en revelar la importancia relativa que se le da al dinero de los diferentes usuarios, lo anterior se realiza a través de la maximización del beneficio monetario (representado por el EMC) ponderado para distintos usuarios, sujeto a cubrir los costos de largo plazo de los operadores.

La extensión al modelo de Jara-Díaz & Gschwender (2003) entrega como resultado tarifas diferenciadas para cada tipo de usuario. Los elementos que producen estas diferencias son los distintos largos de viaje y tiempos de subida y bajada. Los que a su vez son multiplicados por los “factores ponderadores”, factores que capturan el impacto provocado por cada tipo de usuario en el sistema (externalidades negativas).

Al simular los resultados analíticos utilizando datos tipo Santiago de Chile, y en un sistema en el que participan simultáneamente 3 tipos de usuarios, (adultos, adultos mayores y estudiantes) las tarifas resultantes para los 3 grupos reproducen aproximadamente las tarifas observadas en la ciudad. Finalmente, el análisis de sensibilidad muestra que la mayoría de las características ( $P_{v0}^i$ ,  $P_{v1}^i$ ,  $P_w^i$  e  $Y^i$ ), tienen un bajo impacto en las tarifas, caso contrario a cuando varía la característica diferenciadora de cada grupo.

Como fue mencionado anteriormente, el segundo modelo tiene como objetivo revelar la importancia monetaria que se le da a los grupos que reciben descuentos en un sistema de transporte público. Los resultados muestran que el peso monetario relativo de cada tipo de usuario depende de: el costo marginal que provoca en los operadores, su elasticidad-precio de la demanda y su tarifa; por lo tanto, el único mecanismo que tienen los tomadores de decisión (en el corto plazo) para mostrar un cambio en la importancia que le dan al dinero de los distintos grupos es a través de cambios en la estructura tarifaria. Nuevamente se simuló el resultado analítico usando tarifas de Santiago de Chile, obteniendo pesos monetarios relativos para 3 tipos de usuarios; independientemente de que estudiantes y adultos mayores tengan una tarifa menor que los adultos (empíricamente), los pesos monetarios relativos de los 3 grupos resultan cercanos a la unidad. La conclusión anterior se mantiene al realizar un análisis de sensibilidad de las elasticidades utilizadas para los dos grupos con descuento. Lo anterior indica que los pesos monetarios parecieran ser poco sensibles a la elasticidad (manteniendo los demás parámetros).

La interpretación de los resultados, en conjunto a las conclusiones de ambos modelos sugieren que, al menos en el caso de Santiago de Chile, los descuentos (respecto a la tarifa de adultos) en transporte público pueden ser justificados mediante la eficiencia y optimalidad del sistema y no necesariamente por una mirada “benefactora” hacia los grupos que reciben estos beneficios. Por lo tanto, cuando se busque beneficiar socialmente mediante programas de reducción tarifaria, las tarifas deberían ser aún menores que las óptimas sociales.

En síntesis, se logró establecer la presencia sistemática de los PRT en una selección ilustrativa de ciudades en el mundo. A pesar de lo anterior, las justificaciones para otorgar los programas no son igualmente conocidas ni sistemáticas; sin embargo, nuestra investigación nos permite decir que, de existir fundamentos, tienen relación con la preocupación social de los usuarios que reciben descuento. Por otro lado, al revisar la literatura y otro tipo de documentos (e.g. documentos de agencias de transporte), notamos que no hay presencia de metodologías de cálculo para el nivel de descuento otorgado a los diferentes grupos; para resolver lo anterior, desarrollamos dos enfoques para el cálculo de tarifas en un sistema donde coexisten múltiples usuarios. Los resultados, nos indican que los descuentos en transporte público pueden ser justificados mediante la eficiencia y optimalidad en el diseño del sistema.

Existen diversas líneas de investigación en las que se puede extender y mejorar las metodologías desarrolladas en esta tesis. Por ejemplo, en el modelo de pesos monetarios relativos, solamente se consideraron cambios provocados por variaciones en la cantidad de viajes. Creemos que se podrían incluir variables adicionales como: tiempo de viaje, comodidad, salud, inclusión social, entre otros. Además, cabe destacar que bajo este modelo es posible incluir a las personas de bajos ingresos, considerando el mismo costo marginal que los adultos, mayor elasticidad y, en el caso de Santiago, igual tarifa.

El modelo de pesos monetarios relativos permitió establecer (ante las tarifas observadas) la importancia que otorgan los tomadores de decisión a los distintos grupos. Sin embargo, este modelo también puede ser visto de manera inversa, es decir, se pueden determinar las tarifas necesarias para mostrar una preocupación mayor (o menor) hacia ciertos grupos. En este caso, creemos que, para poder realizar este tipo de interpretaciones, se debe incluir en este modelo el efecto provocado por el subsidio entregado a cada tipo de usuario, puesto que la acción de, por ejemplo, forzar tarifas menores a las óptimas, necesariamente va acompañada de un aumento en el subsidio correspondiente.

Por otro lado, la extensión al modelo de Jara-Díaz & Gschwender (2003) sigue presentando ciertas limitaciones. Por ejemplo, en este modelo solamente se considera una línea de un modo de transporte. Sin embargo, la coexistencia de diferentes modos (y cada uno con múltiples líneas) en los sistemas de transporte público, sugieren como una extensión natural, el considerar al menos dos modos en el modelo (buses y metro). Observar si los resultados obtenidos en esta tesis se mantienen bajo un sistema bimodal, ayudaría a llevar a un escenario más realista la discusión.

La forma de incluir a personas con discapacidad en este modelo suma otro desafío. Debido a que este grupo tiene un alto tiempo de subida y bajada, naturalmente su tarifa óptima debiera ser más alta que la de los demás grupos; lo que, ante las tarifas observadas, y al menos en el caso de Santiago de Chile, serían el grupo que recibe los mayores beneficios (perteneciendo a cualquiera de los grupos considerados). Idear una metodología que permita nivelar las características de las personas con discapacidad a las de los otros grupos, con tal de evaluar correctamente los resultados, está dentro de futuras líneas de investigación.

También puede ser de interés observar cómo se comportan las tarifas óptimas de múltiples tipos de usuarios al considerar una estructura tarifaria con tarjetas de abono. En Jara-Díaz & Cruz (2016), se muestra que los precios óptimos de este tipo de estructura dependen fuertemente de los niveles de ingreso de los usuarios (y por ende de la tasa de motorización); la característica previamente mencionada toma relevancia al analizar distintos tipos de usuario, puesto que es probable que estudiantes, adultos mayores y personas de bajos ingresos tengan menor ingreso disponible que los adultos (grupo que no recibe descuentos).

## Capítulo 6. Bibliografía

Arranz, J., Burguillo, M. & Rubio, J. (2018). Subsidisation of public transport fares for the young: An impact evaluation analysis for the Madrid Metropolitan Area. *Transport Policy*. **74**. 84-92. <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2018.11.008>

Aydın, M., Yıldırım, M., Aydın, R. & Arslan, Y. (2016). Effect of different passenger characteristics and bus types on boarding times at bus-stops. *Journal of Engineering Research and Applied Science*. **5**. 499-599.

Baker, S. & White, P. (2010). Impacts of free concessionary travel: Case study of an English rural region. *Transport Policy*. **17**. 20-26. <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2009.09.002>

Brown, J., Hess, D. & Shoup, D. (2003). Fare-free public transit at universities: An evaluation. *Journal of Planning Education and Research*. **23**. 69-82. <https://doi.org/10.1177/0739456X0325543>

Butler, A., & Sweet, M.N. (2020). No free rides: Winners and losers of the proposed Toronto Transit Commission U-Pass program. *Transport Policy*. **96**. 15-28. <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2020.05.019>

Caurolo, J. & Roess, R. (1974). The effect of fare reductions on public transit ridership. *Project Report UMTA-74-6-1*, U.S. Department of Transportation, Urban Mass Transportation Division.

Coronini-Cronberg, S., Millett, C., Lavery, A.A., & Webb, E. (2012). The impact of a free older persons' bus pass on active travel and regular walking in England. *American journal of public health*, **102(11)**. 2141–2148. <https://doi.org/10.2105/AJPH.2012.300946>

Darling, W., Carpenter, E., Johnson-Praino, T., Brakewood, C. & Voulgaris, C. (2021). Comparison of Reduced-Fare Programs for Low-Income transit riders. *Transportation Research Record*. **2675(7)**. 335-349. <https://doi.org/10.1177/03611981211017900>

Decreto 45 de 1989 [Ministerio de transportes y telecomunicaciones]. Fija el porcentaje del valor de los servicios de locomoción colectiva que indica para los fines que expresa. 20 de Febrero de 1989.

Department for Transport (2016). *Evaluation of concessionary bus travel: The impacts of the free bus pass*. Department for Transport, London.

Edwards, P., Steinbach, R., Green, J., Petticrew, M., Goodman, A., Jones, A., Roberts, H., Kelly, C., Nellthorp, J. & Wilkinson, P. (2013). Health impacts of free bus travel for



young people: Evaluation of a natural experiment in London. *Journal of Epidemiology and Community Health*. **67(8)**. 641-647. <https://doi.org/10.3390/ijerph111111384>

Green, J., Jones, A., & Roberts, H. (2014). More than A to B: The role of free bus travel for the mobility and wellbeing of older citizens in London. *Ageing and Society*. **34(3)**. 472-494. <https://doi.org/10.1017/S0144686X12001110>

Guzmán, L.A., & Oviedo, D. (2018). Accessibility, affordability and equity: Assessing 'pro-poor' public transport subsidies in Bogotá. *Transport Policy*. Elsevier. **68(C)**. 37-51. <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2018.04.012>

Jansson, J.O. (1984). *Transport system optimization and pricing*. Chichester: Wiley.

Jara-Díaz, S. (2007). *Transport Economic Theory*. Amsterdam: Elsevier.

Jara-Díaz, S. & Gschwender, A. (2003). Towards a general microeconomic model for the operation of public transport. *Transport Reviews*. **23**. 453-469. <https://doi.org/10.1080/0144164032000048922>

Jiménez Ramírez, M. (2008). Aproximación teórica de la exclusión social: Complejidad e imprecisión del término. Consecuencias para el ámbito educativo. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*. **34(1)**. 173-186. <https://doi.org/10.4067/S0718-07052008000100010>

Jones, A., Steinbach, R., Roberts, H., Goodman, A. & Green, J. (2012). Rethinking passive transport: Bus fare exemptions and young people's health. *Health and Place*. **18(3)**. 605-612. <https://doi.org/10.1016/j.healthplace.2012.01.003>

Kamada, Y., Matsunaka, R., Oba, T., Goto, M., Tsujido, F., Suzuki, Y. & Nakagawa, D. (2019). Analysis of step counts and city center visiting behaviour in older citizens utilizing GPS data. *Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. D3 (Infrastructure Planning and Management)*. **75**. 545-554. [https://doi.org/10.2208/jscejpm.75.I\\_545](https://doi.org/10.2208/jscejpm.75.I_545)

Kelly, E. (2011). A ticket to ride: Does free bus travel promote active ageing? Job Market Paper, available from: [https://home.gwu.edu/~lfbrooks/leahweb/teaching/pppa6022/2014/papers\\_for\\_class/kelly\\_elaine\\_bus\\_travel.pdf](https://home.gwu.edu/~lfbrooks/leahweb/teaching/pppa6022/2014/papers_for_class/kelly_elaine_bus_travel.pdf)

Laverty, A.A & Millett, C. (2015). Potential impacts of subsidised bus travel for older people. *Journal of Transport & Health*. **2**. 32-34. <https://doi.org/10.1016/j.jth.2014.08.004>.

Laverty, A.A., Webb, E., Vamos, E.P. & Millett, C. (2018). Associations of increases in public transport use with physical activity and adiposity in older adults. *International Journal Behavioral Nutrition and Physical Activity*. **15**. 31. <https://doi.org/10.1186/s12966-018-0660-x>

Litman, T. (2022). Transit Price Elasticities and Cross-Elasticities. *Victoria Transport Policy Institute*, Victoria, BC, Canada. <https://www.vtpi.org/tranelas.pdf> accessed January 2023.

Ly, H., & Irwin, J.D. (2017). The relationship between perceptions of discounted public transit and physical activity: Cross-sectional online survey in Canada. *Case studies on transport policy*. **5**. 279-285. <https://doi.org/10.1016/j.cstp.2017.01.002>

Mackett, R. (2014). Has the policy of concessionary bus travel for older people in Britain been successful?. *Case Studies on Transport Policy*. **2**. 81-88. <https://doi.org/10.1016/j.cstp.2014.05.001>

McDonald, N., Librera, S., & Deakin, E. (2004). Free transit for Low-Income youth: Experience in San Francisco Bay area, California. *Transportation Research Record*. **1887(1)**. 153–160. <https://doi.org/10.3141/1887-18>

Metaxatos, P. (2013). Ridership and revenue implications of free fares for seniors in Northeastern Illinois. *The Journal of Public Transportation*. **16**. 131-150. <https://doi.org/10.5038/2375-0901.16.4.7>

Meyer, J., & Beimborn, E.A. (1998). Usage, impacts, and benefits of innovative transit pass program. *Transportation Research Record*. **1618**. 131 - 138. <https://doi.org/10.3141/1618-16>

Millar, W.W., Hoel, L.A., & Roszner, E.S. (1977). Evaluation of Pennsylvania's free transit program for senior citizens. *Transportation Research Record*. **660**. 11-18.

Musich, S., Wang, S.S., Hawkins, K. & Greame, C. (2017). "The Frequency and Health benefits of physical activity for older adults". *Population Health Management*. **20(3)**. 199– 207. <https://doi.org/10.1089/pop.2016.0071>.

Myers, G., Hagen, D.A., Russo, T., McMullin, C., Lembrick, A., Silbaugh, B., & Parker, K. (2006). Benefits of Campus Transit Pass: Study of Students' Willingness to Pay for Proposed Mandatory Transit Pass Program. *Transportation Research Record*. **1971**. 133-139. <https://doi.org/10.1177/0361198106197100116>

Myung-Jin, J., Ji-eun, J., & Hyun-Ju, A. (2018). The welfare effects of the free subway fare scheme for seniors: A discrete choice approach with the case of Seoul. *Case Studies on Transport Policy*. **6**. 642-650. <https://doi.org/10.1016/j.cstp.2018.08.003>

Resolución 1196 de 2020 [Ministerio de transporte y telecomunicaciones; subsecretaría de transportes] Resuelve lo que indica. 17 de junio de 2020.

Rodríguez, C., Gallego, J.M., Martínez, D., Montoya, S., & Peralta-Quiros, T. (2016). Examining implementation and labor market outcomes of targeted transit subsidies:

Subsidy by sistema nacional de selección de beneficiarios for urban poor in Bogotá, Colombia. *Transportation Research Record*, **2581(1)**. 9-17. <https://doi.org/10.3141/2581-02>

Rye, T. & Carreno, M. (2008). Concessionary fares and bus operator reimbursement in Scotland and Wales: No better or no worse off?. *Transport Policy*. **15**. 242-250. <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2008.06.003>

Rye, T. & Mykura, W. (2009). Concessionary bus fares for older people in Scotland – are they achieving their objectives?. *Journal of Transport Geography*. Elsevier. **17(6)**. 451-456. <https://doi.org/10.1016/j.jtrangeo.2008.08.003>

Shin, E.J. (2021). Exploring the causal impact of transit fare exemptions on older adults' travel behavior: Evidence from the Seoul metropolitan area. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*. **149**. 319-338. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2021.05.007>

Sullivan, V.L. (2017). *Impact of free transit passes on youth travel behaviour*. UWSpace. <http://hdl.handle.net/10012/12199>

Thistle, I. & Paget-Seekins, L. (2017). The youth pass: A study of the conflicts between ideal and practical research design in a pilot social program. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*. **2652**. 116-123. <https://doi.org/10.3141/2652-13>

Tirachini, A., Hensher, D. & Rose, J. (2013). Crowding in public transport systems: Effects on users, operation and implications for the estimation of demand. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*. **53**. 36-52. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2013.06.005>

Watson, K. (2018). *U-Pass Policy Framework*. Report for Action, Toronto Transit Commission, March 20.

Whitley, E., Craig, P., & Popham, F. (2020). Impact of the statutory concessionary travel scheme on bus travel among older people: A natural experiment from England. *Ageing and Society*. **40(11)**. 2480-2494. <https://doi.org/10.1017/S0144686X19000692>

Williams, M.E., & Petrait, K.L. (1993). U-PASS: A model transportation management program that works. *Transportation Research Record*. **1404**. 73-81.

Wu, S.A., Breeman, E., Mark, B., & Martin, I. (2004). Transportation demand management - UBC U-Pass - A case study. UBC Social Ecological Economic Development Studies (SEEDS) Student Reports (Undergraduate). R, . Retrieved December 28, 2022, from

<https://open.library.ubc.ca/collections/undergraduateresearch/18861/items/1.0108156>

Zhang, Y., Yao, E., Zhang, R. & Xu, H. (2019). Analysis of elderly people's travel behaviors during the morning peak hours in the context of the free bus programme in Beijing, China. *Journal of Transport Geography*. **76**. 191-199. <https://doi.org/10.1016/j.jtrangeo.2019.04.00>

# Anexos

## Anexo A. Modelo Jara-Díaz & Gschwender (2003)

**Proposición 1.**  $\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0 \Leftrightarrow c_1 > P_{v1}$ :

Demostración de  $\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0 \Rightarrow c_1 > P_{v1}$ :

$$VRC = ft_c(f)c(K) + P_w \frac{1}{2f} Y + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \frac{k(f)}{K})lt_c(f)Y}{L} \quad (A.1)$$

Derivando c/r a K y utilizando la hipótesis  $\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0$ :

$$\frac{\partial VRC}{\partial K} = ft_c(f)c_1 - \frac{P_{v1}lyt_c(f)k(f)}{LK^2} > 0 \quad (A.2)$$

Dividiendo a ambos lados de la desigualdad por  $ft_c(f)$ .

$$c_1 - \frac{P_{v1}lyk(f)}{LfK^2} > 0 \quad (A.3)$$

$$\text{Como } k(f) = \frac{yL}{fL},$$

$$c_1 - \frac{P_{v1}k^2(f)}{K^2} > 0 \quad (A.4)$$

Sabemos que cuando se cumple la hipótesis, la restricción (7) se cumple de forma activa, vale decir, si  $\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0 \Rightarrow k(f) = K$ :

$$c_1 - P_{v1} > 0 \quad (A.5)$$

$$c_1 > P_{v1} \quad (A.6)$$

Demostración de  $c_1 > P_{v1} \Rightarrow \frac{\partial VRC}{\partial K} > 0$

Utilizando la hipótesis:

$$c_1 > P_{v1} \Rightarrow c_1 - P_{v1} > 0 \quad (A.7)$$

Multiplicando a ambos lados de la desigualdad por  $ft_c(f)$ :

$$ft_c(f)c_1 - P_{v1}ft_c(f) > 0 \quad (A.8)$$

Multiplicando y dividiendo por  $\frac{ly}{L}$  el segundo término del lado izquierdo de la inecuación:

$$ft_c(f)c_1 - P_{v1}ft_c(f)\frac{ly}{L} > 0 \quad (A.9)$$

Recordando que  $k(f) = \frac{yL}{fL}$ :

$$ft_c(f)c_1 - \frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)} > 0 \quad (\text{A.10})$$

Nuevamente multiplicando y dividiendo por  $k^2(f)$  el segundo término del lado izquierdo:

$$ft_c(f)c_1 - \frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)} \frac{k^2(f)}{k^2(f)} > 0 \quad (\text{A.11})$$

No sabemos si la restricción es activa o no, pero lo que siempre se debe cumplir que  $k(f) \leq K$ , entonces:

$$\frac{k^2(f)}{k^2(f)} \geq \frac{k^2(f)}{K^2} \quad (\text{A.12})$$

Intentaremos recuperar (A.11) al lado izquierdo de la inecuación (A.12). Para ello, multiplicamos a ambos lados por  $\frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)}$ :

$$\frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)} \frac{k^2(f)}{k^2(f)} \geq \frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)} \frac{k^2(f)}{K^2} \quad (\text{A.13})$$

El paso siguiente es multiplicar por  $-1$  a ambos lados, cambiando también la relación de orden:

$$-\frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)} \frac{k^2(f)}{k^2(f)} \leq -\frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)} \frac{k^2(f)}{K^2} \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, sumamos a ambos lados el término  $ft_c(f)c_1$ :

$$ft_c(f)c_1 - \frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)} \frac{k^2(f)}{k^2(f)} \leq ft_c(f)c_1 - \frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)} \frac{k^2(f)}{K^2} \quad (\text{A.15})$$

Luego, sabemos por (A.11) que el lado izquierdo de (A.15) es mayor que 0, por lo tanto, el lado derecho también lo es:

$$ft_c(f)c_1 - \frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)} \frac{k^2(f)}{K^2} \geq ft_c(f)c_1 - \frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)} \frac{k^2(f)}{k^2(f)} > 0 \quad (\text{A.16})$$

$$ft_c(f)c_1 - \frac{P_{v1}t_c(f)LY}{Lk(f)} \frac{k^2(f)}{K^2} > 0 \quad (\text{A.17})$$

Simplificando  $k(f)$ :

$$ft_c(f)c_1 - \frac{P_{v1}t_c(f)LY}{L} \frac{k(f)}{K^2} > 0 \quad (\text{A.18})$$

Notamos que el lado izquierdo de (A.18) es igual a  $\frac{\partial VRC}{\partial K}$ , por lo tanto:

$$\frac{\partial VRC}{\partial K} = ft_c(f)c_1 - \frac{P_{v1}LYt_c(f)k(f)}{LK^2} > 0 \quad (\text{A.19})$$

Con el resultado de (A.19) se concluye la demostración de b) y también de la Proposición 1.

### Cálculo de variables óptimas de diseño:

Restricción activa,  $c_1 > P_{v1}$ :

$$VRC = f t_c(f) c(K) + P_w \frac{1}{2f} Y + \frac{P_v(\phi) l t_c(f) Y}{L} \quad (6)$$

Reemplazando (1), (2) y (3) en (6)

$$VRC = f \left( \frac{tY}{f} + T \right) (c_0 + c_1 K) + P_w \frac{1}{2f} Y + \frac{(P_{v0} + P_{v1}) \phi l \left( \frac{tY}{f} + T \right) Y}{L} \quad (A.20)$$

Como estamos en el caso que  $\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0$ , por lo tanto,  $K = k(f)$  y  $\phi = 1$ , y (A.20) queda de la siguiente forma:

$$VRC = f \left( \frac{tY}{f} + T \right) \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{Lf} \right) + P_w \frac{1}{2f} Y + \frac{(P_{v0} + P_{v1}) l Y \left( \frac{tY}{f} + T \right)}{L} \quad (A.21)$$

Notemos que (A.21) solamente depende de  $f$  y no de  $K$ , por lo que para obtener el diseño óptimo basta con derivar (A.21) con respecto a  $f$  e igualar a 0:

$$\frac{\partial VRC}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} \left[ \left( tY + Tf \right) \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{Lf} \right) + P_w \frac{1}{2f} Y + \frac{(P_{v0} + P_{v1}) l Y \left( \frac{tY}{f} + T \right)}{L} \right] = 0 \quad (A.22)$$

$$\frac{\partial VRC}{\partial f} = T \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{Lf} \right) + (tY + Tf) \left( -c_1 \frac{Yl}{Lf^2} \right) - \frac{P_w Y}{2f^2} - \frac{(P_{v0} + P_{v1}) l t Y^2}{L f^2} = 0 \quad (A.23)$$

$$\frac{\partial VRC}{\partial f} = T c_0 - c_1 \frac{t Y^2 l}{L f^2} - \frac{P_w Y}{2 f^2} - \frac{(P_{v0} + P_{v1}) l t Y^2}{L f^2} = 0 \quad (A.24)$$

$$T c_0 = c_1 \frac{t Y^2 l}{L f^2} + \frac{P_w Y}{2 f^2} + \frac{(P_{v0} + P_{v1}) l t Y^2}{L f^2} \quad (A.25)$$

$$T c_0 f^2 = c_1 \frac{t Y^2 l}{L} + \frac{P_w Y}{2} + \frac{(P_{v0} + P_{v1}) l t Y^2}{L} \quad (A.26)$$

$$f^* = \sqrt{\frac{1}{T c_0} \left( \frac{t Y^2 c_1 l}{L} + \frac{P_w Y}{2} + \frac{(P_{v0} + P_{v1}) l t Y^2}{L} \right)} \quad (A.27)$$

$$f^* = \sqrt{\frac{Y}{T c_0} \left( \frac{P_w}{2} + \frac{(c_1 + P_{v0} + P_{v1}) l t Y}{L} \right)} \quad (A.28)$$

Restricción inactiva,  $c_1 \leq P_{v1}$ :

Partiendo desde (A.20):

$$VRC = f \left( \frac{tY}{f} + T \right) (c_0 + c_1 K) + P_w \frac{1}{2f} Y + \frac{(P_{v0} + P_{v1}) \phi l \left( \frac{tY}{f} + T \right) Y}{L} \quad (A.20)$$

Al estar en el caso que  $\frac{\partial VRC}{\partial K} \leq 0$ ,  $K = k(f) \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}}$  y  $\phi = \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}$ , por lo tanto, (A.20) queda de la siguiente forma:

$$VRC = f \left( \frac{tY}{f} + T \right) \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{Lf} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + P_w \frac{1}{2f} Y + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l Y \left( \frac{tY}{f} + T \right)}{L} \quad (A.29)$$

Notemos que (A.31) nuevamente depende solo de  $f$  y no de  $K$ , por lo que para obtener el diseño óptimo basta con derivar (A.31) con respecto a  $f$  e igualar a 0:

$$\frac{\partial VRC}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} \left[ (tY + Tf) \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{Lf} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + P_w \frac{1}{2f} Y + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l Y \left( \frac{tY}{f} + T \right)}{L} \right] = 0 \quad (A.30)$$

$$\frac{\partial VRC}{\partial f} = T \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{Lf} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + (tY + Tf) \left( -c_1 \frac{Yl}{Lf^2} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) - \frac{P_w Y}{2f^2} - \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y^2}{L f^2} = 0 \quad (A.31)$$

$$\frac{\partial VRC}{\partial f} = T c_0 - c_1 \frac{tY^2 l}{Lf^2} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} - \frac{P_w Y}{2f^2} - \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y^2}{L f^2} = 0 \quad (A.32)$$

$$T c_0 = c_1 \frac{tY^2 l}{Lf^2} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{P_w Y}{2f^2} + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y^2}{L f^2} \quad (A.33)$$

$$T c_0 f^2 = c_1 \frac{tY^2 l}{L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{P_w Y}{2} + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y^2}{L} \quad (A.34)$$

$$f^* = \sqrt{\frac{1}{T c_0} \left( \frac{tY^2 l \sqrt{P_{v1} c_1}}{L} + \frac{P_w Y}{2} + \frac{(P_{v0} + \sqrt{P_{v1} c_1}) l t Y^2}{L} \right)} \quad (A.35)$$

$$f^* = \sqrt{\frac{Y}{T c_0} \left( \frac{P_w}{2} + \frac{(P_{v0} + 2\sqrt{P_{v1} c_1}) l t Y}{L} \right)} \quad (A.36)$$

Cálculo de costo marginal, costo medio de los usuarios y tarifa óptima social:

Notemos que la función de costos es  $VRC(f^*, K^*) = C(Y)$ , dada por la ecuación (15):

$$VRC^* = C(Y) = f^* t_c(f^*) c(K^*) + P_w \frac{1}{2f^*} Y + \frac{P_v(\phi) l t_c(f^*) Y}{L} \quad (15)$$

Reemplazando  $t_c(f^*)$  y  $c(K^*)$ :

$$C(Y) = (tY + T f^*) \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{f^* L \phi} \right) + P_w \frac{1}{2f^*} Y + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \phi) l Y}{L} \left( \frac{tY}{f^*} + T \right) \quad (A.37)$$

Distribuyendo y agrupando términos:

$$C(Y) = t c_0 Y + \frac{1}{f^*} \left( T f^{*2} c_0 + \frac{t l c_1 Y^2}{L \phi} + \frac{P_w Y}{2} + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \phi) t l Y^2}{L} \right) + \frac{T Y l}{L} \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0} + P_{v1} \phi \right) \quad (A.38)$$

Reemplazando  $f^*$



$$C(Y) = tc_0Y + \left[ 2 \frac{Y \left( \frac{P_w}{2} + \frac{tY \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0} + P_{v1}\phi \right)}{L} \right)}{\sqrt{\frac{Y}{Tc_0} \left( \frac{P_w}{2} + \frac{tY \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0} + P_{v1}\phi \right)}{L} \right)}} \right] + \frac{TYL}{L} \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0} + P_{v1}\phi \right) \quad (\text{A.39})$$

Finalmente se obtiene:

$$C(Y) = tc_0Y + 2 \sqrt{c_0TY \left( \frac{P_w}{2} + \frac{tY \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0} + P_{v1}\phi \right)}{L} \right)} + \frac{TYL}{L} \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0} + P_{v1}\phi \right) \quad (\text{A.40})$$

Luego, el costo marginal puede ser calculado tanto de (15) como de (A.40). En ambos casos queda descrito por:

$$CMg_{Total} = \frac{\partial VRC}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[ ft_c(f^*)c(K^*) + P_w \frac{1}{2f^*} Y + \frac{P_v(\phi)lt_c(f^*)Y}{L} \right] \quad (\text{A.41})$$

Reemplazando (1), (2) y (3):

$$CMg_{Total} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[ (tY + Tf^*)(c_0 + c_1K^*) + P_w \frac{1}{2f^*} Y + \frac{(P_{v0} + P_{v1}\sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) \left( \frac{tY}{f^*} + T \right) lY}{L} \right] \quad (\text{A.42})$$

Reemplazando (14) y (5) en (A.38):

$$CMg_{Total} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[ (tY + Tf^*) \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{f^*L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + P_w \frac{1}{2f^*} Y + \frac{(P_{v0} + P_{v1}\sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) \left( \frac{tY}{f^*} + T \right) lY}{L} \right] \quad (\text{A.43})$$

Luego, derivando con respecto a la demanda  $Y$ , considerando que  $f^*(Y)$ :

$$CMg_{Total} = (t + Tf') \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{f^*L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + (tY + Tf^*) \frac{c_1 l}{Lf^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \left( 1 - Y \frac{f'}{f^*} \right) + \frac{P_w}{2f^*} \left( 1 - Y \frac{f'}{f^*} \right) + \frac{(P_{v0} + P_{v1}\sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l}{L} \left( T + \frac{tY}{f^*} \left( 2 - \frac{f'Y}{f^*} \right) \right) \quad (\text{A.44})$$

En dónde  $f' = \frac{df^*}{dY}$ . Agrupando términos:

$$CMg_{Total} = f' \left[ Tc_0 + Tc_1 \frac{Yl}{f^*L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} - \frac{c_1 tY^2 l}{Lf^{*2}} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} - \frac{c_1 Y l T}{Lf^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} - \frac{P_w Y}{2f^{*2}} - \frac{(P_{v0} + P_{v1}\sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y^2}{Lf^{*2}} \right] + t \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{f^*L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + (tY + Tf^*) \frac{c_1 l}{Lf^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{P_w}{2f^*} + \frac{(P_{v0} + P_{v1}\sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l T}{L} + \frac{2(P_{v0} + P_{v1}\sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y}{Lf^*} \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned}
CMg_{Total} = f' & \left[ Tc_0 - \frac{c_1 t Y^2 l}{L f^{*2}} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} - \frac{P_w Y}{2 f^{*2}} - \frac{\left( P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}} \right) l t Y^2}{L f^{*2}} \right] \\
& + t \left( c_0 + c_1 \frac{Y l}{f^* L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + (t Y + T f^*) \frac{c_1 l}{L f^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{P_w}{2 f^*} + \\
& \frac{\left( P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}} \right) l T}{L} + \frac{2 \left( P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}} \right) l t Y}{L f^*}
\end{aligned} \tag{A.46}$$

$$\begin{aligned}
CMg_{Total} = f' & \left[ Tc_0 - \left( \frac{\frac{c_1 t Y^2 l}{L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{P_w Y}{2} + \frac{\left( P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}} \right) l t Y^2}{L}}{f^{*2}} \right) \right] \\
& + t \left( c_0 + c_1 \frac{Y l}{f^* L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + (t Y + T f^*) \frac{c_1 l}{L f^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \\
& \frac{P_w}{2 f^*} + \frac{\left( P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}} \right) l T}{L} + \frac{2 \left( P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}} \right) l t Y}{L f^*}
\end{aligned} \tag{A.47}$$

$$\begin{aligned}
CMg_{Total} = f' & \left[ Tc_0 - \frac{1}{f^{*2}} \left( \frac{c_1 t Y^2 l}{L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{P_w Y}{2} + \frac{\left( P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}} \right) l t Y^2}{L} \right) \right] \\
& + t \left( c_0 + c_1 \frac{Y l}{f^* L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + (t Y + T f^*) \frac{c_1 l}{L f^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \\
& \frac{P_w}{2 f^*} + \frac{\left( P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}} \right) l T}{L} + \frac{2 \left( P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}} \right) l t Y}{L f^*}
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Reemplazando  $f^{*2}$ , que viene dado por (14):

$$\begin{aligned}
CMg_{Total} = f' & \left[ Tc_0 - \left( \frac{\frac{c_1 t Y^2 l}{L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{P_w Y}{2} + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y^2}{L}}{\frac{Y}{Tc_0} \left( \frac{P_w}{2} + \frac{(P_{v0} + 2\sqrt{P_{v1}c_1}) l t Y}{L} \right)} \right) \right] \\
& + t \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{f^* L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + (tY + Tf^*) \frac{c_1 l}{Lf^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \\
& \frac{P_w}{2f^*} + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l T}{L} + \frac{2(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y}{Lf^*} \quad (A.49)
\end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned}
CMg_{Total} = f' & \left[ Tc_0 - \left( \frac{\frac{P_w Y}{2} + \frac{(P_{v0} + 2\sqrt{P_{v1}c_1}) l t Y^2}{L}}{\frac{1}{Tc_0} \left( \frac{P_w Y}{2} + \frac{(P_{v0} + 2\sqrt{P_{v1}c_1}) l t Y^2}{L} \right)} \right) \right] + t \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{f^* L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + \\
& (tY + Tf^*) \frac{c_1 l}{Lf^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{P_w}{2f^*} + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l T}{L} + \frac{2(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y}{Lf^*} \quad (A.50)
\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
CMg_{Total} = f' [Tc_0 - Tc_0] & + t \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{f^* L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + (tY + Tf^*) \frac{c_1 l}{Lf^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \\
& \frac{P_w}{2f^*} + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l T}{L} + \frac{2(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y}{Lf^*} \quad (A.51)
\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado es:

$$\begin{aligned}
CMg_{Total} = t & \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{f^* L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + (tY + Tf^*) \frac{c_1 l}{Lf^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{P_w}{2f^*} + \\
& \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l (tY + T)}{L} + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y}{Lf^*} \quad (A.52)
\end{aligned}$$

$$CMg_{Total} = t \left( c_0 + \frac{lY}{Lf^*} P_{v0} + 3 \frac{lY}{Lf^*} \sqrt{P_{v1}c_1} \right) + T \frac{c_1 l}{L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{P_w}{2f^*} + \frac{P_v(\phi) l t c(f^*)}{L} \quad (A.53)$$

Cabe destacar que de (A.45) es posible diferenciar el costo marginal correspondiente a operadores (A.54) y a usuarios (A.58):

$$CMg_{OP} = (t + T f') \left( c_0 + c_1 \frac{Yl}{f^* L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + (tY + T f^*) \frac{c_1 l}{L f^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \left( 1 - Y \frac{f'}{f^*} \right) \quad (A.54)$$

Reordenando términos (A.53) se puede escribir cómo (A.56):

$$CMg_{OP} = c_0(t + T f') + t \left( c_1 \frac{Yl}{f^* L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + T f' \left( c_1 \frac{Yl}{f^* L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + \frac{c_1 l t Y}{L f^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{c_1 l T}{L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} - \frac{c_1 l t Y^2 f'}{L f^{*2}} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} - \frac{c_1 l Y T f'}{L f^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \quad (A.55)$$

$$CMg_{OP} = c_0(t + T f') + \frac{2c_1 l t Y}{L f^*} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{c_1 l T}{L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} - \frac{c_1 l t Y^2 f'}{L f^{*2}} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \quad (A.56)$$

$$CMg_{OP} = t \left( c_0 + \frac{2c_1 l Y \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}}}{L f^*} \right) + f' \left( T c_0 - \frac{c_1 l t Y^2}{L f^{*2}} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \right) + \frac{c_1 l T}{L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \quad (A.57)$$

Y el costo marginal para usuarios es:

$$CMg_{US} = \frac{P_w}{2} \left( 1 - Y \frac{f'}{f^*} \right) + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l T}{L} + \frac{(P_{v0} + P_{v1} \sqrt{\frac{c_1}{P_{v1}}}) l t Y \left( 2 - \frac{Y f'}{f^*} \right)}{L f^*} \quad (A.58)$$

Ahora se calcula el costo medio de los usuarios, para lo cual recordamos las ecuaciones (18) y (19):

$$CMe_{US} = \frac{VRC_{US}}{Y} \quad (18)$$

$$VRC_{US} = \frac{P_w Y}{2 f^*} + P_v(\phi) \frac{l Y}{L} t_c(f^*) \quad (19)$$

$$CMe_{US} = \frac{\frac{P_w Y}{2 f^*} + P_v(\phi) \frac{l Y}{L} t_c(f^*)}{Y} \quad (A.59)$$

$$CMe_{US} = \frac{P_w}{2 f^*} + P_v(\phi) \frac{l}{L} t_c(f^*) \quad (A.60)$$

Por lo tanto, según la ecuación (16), la tarifa óptima viene dada por la diferencia entre (A.53) y (A.60):

$$P = t \left( c_0 + \frac{l Y}{L f^*} P_{v0} + 3 \frac{l Y}{L f^*} \sqrt{P_{v1} c_1} \right) + T \frac{c_1 l}{L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} + \frac{P_w}{2 f^*} + \frac{P_v(\phi) l t_c(f^*)}{L} - \frac{P_w}{2 f^*} - P_v(\phi) \frac{l}{L} t_c(f^*) \quad (A.61)$$

$$P = t \left( c_0 + \frac{l Y}{L f^*} P_{v0} + 3 \frac{l Y}{L f^*} \sqrt{P_{v1} c_1} \right) + T \frac{c_1 l}{L} \sqrt{\frac{P_{v1}}{c_1}} \quad (A.62)$$

$$P = t \left[ c_0 + \frac{l Y}{L f^*} (P_{v0} + 3 \sqrt{P_{v1} c_1}) \right] + l \frac{T}{L} \sqrt{P_{v1} c_1} \quad (A.63)$$

## Anexo B. Extensión a modelo de 3 usuarios

Proposición 2.  $\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0 \Leftrightarrow c_1 > \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}$

a) Demostración de  $\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0 \Rightarrow c_1 > \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}$ :

$$VRC = f \cdot t_c(f) \cdot (c_0 + c_1 K) + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f} + \frac{\sum_i^N P_v^i(\phi) l^i Y^i t_c(f)}{L} \quad (B.1)$$

Derivando c/r a  $K$  y utilizando la hipótesis  $\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0$ :

$$\frac{\partial VRC}{\partial K} = f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i t_c(f) k(f)}{L K^2} > 0 \quad (B.2)$$

Dividiendo a ambos lados de la desigualdad por  $f t_c(f)$ :

$$c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k(f)}{L f K^2} > 0 \quad (B.3)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término por  $\sum_i^N l^i Y^i$ :

$$c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k(f) \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i K^2 L f} > 0 \quad (B.4)$$

Recordando que  $k(f) = \frac{\sum_i^N l^i Y^i}{f L}$ :

$$c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{\sum_i^N l^i Y^i K^2} > 0 \quad (B.5)$$

Sabemos que cuando se cumple la hipótesis, la restricción (24) se cumple de forma activa, vale decir, si  $\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0 \Rightarrow k(f) = K$ :

$$c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i} > 0 \quad (B.6)$$

$$\Rightarrow c_1 > \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i} \quad (B.7)$$

b) Demostración de  $c_1 > \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i} \Rightarrow \frac{\partial VRC}{\partial K} > 0$ :

Partiendo de la hipótesis:

$$c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i} > 0 \quad (B.8)$$

Multiplicando a ambos lados por  $f t_c(f)$ :

$$f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i} f t_c(f) > 0 \quad (B.9)$$

Luego, multiplicando y dividiendo el segundo término por  $L$ :

$$f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{L} \frac{fL}{\sum_i^N l^i Y^i} t_c(f) > 0 \quad (\text{B.10})$$

Recordando la definición de  $k(f)$ :

$$f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{Lk(f)} t_c(f) > 0 \quad (\text{B.11})$$

Luego, multiplicando y dividiendo el segundo término por  $k^2(f)$ :

$$f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{Lk(f) k^2(f)} t_c(f) > 0 \quad (\text{B.12})$$

Por otro lado, sabemos que debido a la restricción del problema, necesariamente  $k(f) \leq K$ :

$$\frac{k^2(f)}{k^2(f)} \geq \frac{k^2(f)}{K^2} \quad (\text{B.13})$$

Multiplicando a ambos lados de (B.13) por  $\frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{Lk(f)} t_c(f)$ :

$$\frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{Lk(f) k^2(f)} t_c(f) \geq \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{Lk(f) K^2} t_c(f) \quad (\text{B.14})$$

Luego, multiplicando por  $-1$  a ambos lados:

$$-\frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{Lk(f) k^2(f)} t_c(f) \leq -\frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{Lk(f) K^2} t_c(f) \quad (\text{B.15})$$

Sumando  $f t_c(f) c_1$ :

$$f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{Lk(f) k^2(f)} t_c(f) \leq f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{Lk(f) K^2} t_c(f) \quad (\text{B.16})$$

Gracias a la inecuación (B.12) sabemos que la parte izquierda de (B.16) es mayor que 0, entonces:

$$f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{Lk(f) K^2} t_c(f) \geq f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{Lk(f) k^2(f)} t_c(f) > 0 \quad (\text{B.17})$$

Por lo tanto, ambas expresiones son positivas:

$$f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k^2(f)}{Lk(f) K^2} t_c(f) > 0 \quad (\text{B.18})$$

$$f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k(f)}{L K^2} t_c(f) > 0 \quad (\text{B.19})$$

Recordando la expresión para  $\frac{\partial VRC}{\partial K}$ , y utilizando (B.19):

$$\frac{\partial VRC}{\partial K} = f t_c(f) c_1 - \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i k(f) t_c(f)}{L K^2} > 0 \quad (\text{B.20})$$

Con el resultado de (B.20) se concluye la demostración de b) y también de la Proposición 2.

## Cálculo de variables óptimas de diseño

El cálculo de las variables de diseño óptimas dependerá de si la restricción (24) se cumple de forma activa o no. Se calcularán ambos casos, siendo el caso 1 cuando la restricción se cumple de forma activa y el segundo cuando la restricción es inactiva. Independiente de lo anterior, para ambos casos se debe derivar la expresión (23) c/r a  $f$ :

$$VRC = f \cdot t_c(f) \cdot (c_0 + c_1 K) + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f} + \frac{\sum_i^N P_v^i(\phi) l^i Y^i t_c(f)}{L} \quad (23)$$

Restricción activa, i.e.  $c_1 > \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}$  y  $K = k(f)$ :

$$\frac{\partial VRC}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} \left[ f \left( \frac{\sum_i^N t^i Y^i}{f} + T \right) \left( c_0 + c_1 \frac{\sum_i^N l^i Y^i}{fL} \right) + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f} + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i) l^i Y^i}{L} \left( \frac{\sum_i^N t^i Y^i}{f} + T \right) \right] \quad (B.21)$$

Reagrupando términos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial VRC}{\partial f} = & T \left( c_0 + c_1 \frac{\sum_i^N l^i Y^i}{fL} \right) - \left( \sum_i^N t^i Y^i + Tf \right) c_1 \frac{\sum_i^N l^i Y^i}{f^2 L} - \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f^2} - \\ & \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i) l^i Y^i}{Lf^2} \left( \sum_i^N t^i Y^i \right) \end{aligned} \quad (B.22)$$

Simplificando:

$$\frac{\partial VRC}{\partial f} = T c_0 - c_1 \frac{(\sum_i^N l^i Y^i)(\sum_i^N t^i Y^i)}{f^2 L} - \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f^2} - \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i) l^i Y^i (\sum_i^N t^i Y^i)}{Lf^2} \quad (B.23)$$

Imponiendo  $\frac{\partial VRC}{\partial f} = 0$ :

$$\frac{\partial VRC}{\partial f} = T c_0 - c_1 \frac{(\sum_i^N l^i Y^i)(\sum_i^N t^i Y^i)}{f^2 L} - \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f^2} - \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i) l^i Y^i (\sum_i^N t^i Y^i)}{Lf^2} = 0 \quad (B.24)$$

Despejando  $f$ :

$$T c_0 f^2 = c_1 \frac{(\sum_i^N l^i Y^i)(\sum_i^N t^i Y^i)}{L} + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2} + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i) l^i Y^i \sum_i^N t^i Y^i}{L} \quad (B.25)$$

Finalmente se obtiene  $f^*$  para el primer caso (restricción activa). El valor de  $K^*$  viene dado por reemplazar (B.26) en (22).

$$f^* = \sqrt{\frac{1}{T c_0} \left( c_1 \frac{(\sum_i^N l^i Y^i)(\sum_i^N t^i Y^i)}{L} + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2} + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i) l^i Y^i (\sum_i^N t^i Y^i)}{L} \right)} \quad (B.26)$$

Caso 2, restricción inactiva, i.e.  $c_1 \leq \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}$  y  $K = k(f) \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial VRC}{\partial f} = & \frac{\partial}{\partial f} \left[ f \left( \frac{\sum_i^N t^i Y^i}{f} + T \right) \left( c_0 + c_1 \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}} \frac{\sum_i^N l^i Y^i}{fL} \right) + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f} + \right. \\ & \left. \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i}{L} \left( \frac{\sum_i^N t^i Y^i}{f} + T \right) \right] \end{aligned} \quad (B.27)$$

Derivando, reordenando y simplificando términos:

$$\frac{\partial VRC}{\partial f} = Tc_0 - c_1 \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}} \frac{(\sum_i^N l^i Y^i)(\sum_i^N t^i Y^i)}{f^2 L} - \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f^2} - \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i (\sum_i^N t^i Y^i)}{L f^2} \quad (B.28)$$

Imponiendo  $\frac{\partial VRC}{\partial f} = 0$ :

$$Tc_0 - c_1 \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}} \frac{(\sum_i^N l^i Y^i)(\sum_i^N t^i Y^i)}{f^2 L} - \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f^2} - \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i (\sum_i^N t^i Y^i)}{L f^2} = 0 \quad (B.29)$$

Reordenando para despejar  $f$ :

$$Tc_0 f^2 = c_1 \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}} \frac{(\sum_i^N l^i Y^i)(\sum_i^N t^i Y^i)}{L} + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2} + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i (\sum_i^N t^i Y^i)}{L} \quad (B.30)$$

Despejando  $f^*$ :

$$f^* = \sqrt{\frac{1}{Tc_0} \left( c_1 \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}} \frac{(\sum_i^N l^i Y^i)(\sum_i^N t^i Y^i)}{L} + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2} + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i (\sum_i^N t^i Y^i)}{L} \right)} \quad (B.31)$$

Reemplazando (B.30) en (22) y luego en (28) se obtiene  $K^*$ :

$$K^* = \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i} \frac{\sum_i^N l^i Y^i}{L f^*}} \quad (B.32)$$

### **Cálculo de costo marginal, costo medio de los usuarios y tarifa óptima social:**

El cálculo de la tarifa óptima es a partir de la función de costos del sistema, mostrada en (B.33)

$$VRC^* = C(Y) = f^* \cdot t_c(f^*) \cdot (c_0 + c_1 K^*) + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f^*} + \frac{\sum_i^N \left( P_{v0}^i + P_{v1}^i \sqrt{\frac{c_1 \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}} \right) l^i Y^i t_c(f^*)}{L} \quad (B.33)$$

Reemplazando  $t_c(f^*)$  y  $K^*$ :

$$C(Y) = \left( \sum_i^N t^i Y^i + T f^* \right) \cdot \left( c_0 + \frac{c_1 \sum_i^N l^i Y^i}{\phi L f^*} \right) + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f^*} + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \left( \frac{\sum_i^N t^i Y^i}{f^*} + T \right)}{L} \quad (B.34)$$

Distribuyendo y reagrupando términos:

$$C(Y) = c_0 \sum_i^N t^i Y^i + \frac{T}{L} \sum_i^N \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi \right) l^i Y^i + \frac{1}{f^*} \left( T c_0 f^{*2} + \frac{(\sum_i^N t^i Y^i)}{L} \left( \sum_i^N \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi \right) l^i Y^i \right) + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2} \right) \quad (B.35)$$

Reemplazando  $f^*$



$$C(Y) = (c_0 \sum_i^N t^i Y^i) + \left( \frac{T}{L} \sum_i^N \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi \right) l^i Y^i \right) + \frac{\left( \frac{\sum_i^N t^i Y^i}{L} \left( \sum_i^N \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi \right) l^i Y^i \right) + \sum_i^N \frac{P_{wY}^i}{2} \right)}{\sqrt{\frac{1}{Tc_0} \left( \frac{\sum_i^N t^i Y^i}{L} \left( \sum_i^N \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi \right) l^i Y^i \right) + \sum_i^N \frac{P_{wY}^i}{2} \right)}} \quad (\text{B.36})$$

Finalmente, la función de costos es:

$$C(Y) = (c_0 \sum_i^N t^i Y^i) + 2 \sqrt{Tc_0 \left( \frac{\sum_i^N t^i Y^i}{L} \left( \sum_i^N \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi \right) l^i Y^i \right) + \sum_i^N \frac{P_{wY}^i}{2} \right) + \left( \frac{T}{L} \sum_i^N \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi \right) l^i Y^i \right)} \quad (\text{B.37})$$

Notemos que (B.33) y (B.37) son equivalentes, por lo que el costo marginal de cada tipo de usuario puede ser obtenido a partir de cualquiera de las dos expresiones.

En este caso se derivará el costo marginal provocado por un usuario tipo  $j$  ( $CM_g^j$ ) desde (B.33):

$$CM_g^j = \frac{\partial VRC^*}{\partial Y^j} = \frac{\partial}{\partial Y^j} \left( f^* \cdot t_c(f^*) \cdot (c_0 + c_1 K^*) + \sum_i^N \frac{P_{wY}^i}{2f^*} + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i t_c(f^*)}{L} \right) \quad (\text{B.38})$$

Reemplazando las expresiones (31) y (32):

$$CM_g^j = \frac{\partial}{\partial Y^j} \left[ \left( \sum_i^N t^i Y^i + T f^* \right) \cdot \left( c_0 + c_1 \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i} \frac{\sum_i^N l^i Y^i}{L f^*}} \right) + \sum_i^N \frac{P_{wY}^i}{2f^*} + \frac{\sum_i^N \left( P_{v0}^i + P_{v1}^i \sqrt{\frac{c_1 \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}} \right) l^i Y^i \left( \frac{\sum_i^N t^i Y^i}{f^*} + T \right)}{L} \right] \quad (\text{B.39})$$

Derivando con respecto a  $Y^j$ :

$$CM_g^j = (t^j + T f_j) \left( c_0 + c_1 \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i} \frac{\sum_i^N l^i Y^i}{L f^*}} \right) + \left( \sum_i^N t^i Y^i + T f^* \right) \left( \frac{1}{L f^{*2}} \left( \frac{c_1 (P_{v1}^j l^j \sum_i^N l^i Y^i + l^j \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i)}{2 \sqrt{c_1 (\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i) (\sum_i^N l^i Y^i)}} f^* - \sqrt{c_1 \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \sum_i^N l^i Y^i} f_j \right) \right) + \frac{P_{wY}^j}{2f^*} - \sum_i^N \frac{P_{wY}^i}{2f^*} \frac{f_j}{f^*} + \frac{1}{L f^*} \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \left( t^j - \sum_i^N t^i Y^i \frac{f_j}{f^*} \right) + \frac{t_c(f^*)}{L} \left( P_{v0}^j l^j + P_{v1}^j l^j \sqrt{\frac{\sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}} + \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \frac{c_1 \sqrt{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i} (l^j \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i - P_{v1}^j l^j \sum_i^N l^i Y^i)}{2 \sqrt{c_1 \sum_i^N l^i Y^i (\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i)}} \right) \quad (\text{B.40})$$

Reordenando y simplificando términos:

$$\begin{aligned}
CM_g^j &= (t^j + Tf_j) \left( c_0 + c_1 \sqrt{\frac{1 \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \sum_i^N l^i Y^i}{c_1 \sum_i^N l^i Y^i L f^*}} \right) + \\
&\left( \sum_i^N t^i Y^i + Tf^* \right) \left( \frac{\sqrt{c_1}}{L f^*} \left( \frac{l^j (P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i + \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i)}{2 \sqrt{c_1 (\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i) (\sum_i^N l^i Y^i)}} - \sqrt{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \sum_i^N l^i Y^i} \frac{f_j}{f^*} \right) \right) + \\
&\frac{P_w^j}{2f^*} - \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2f^*} \frac{f_j}{f^*} + \frac{l^j t_c(f^*)}{L} \left( P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi + \frac{c_1}{2\phi} \left( 1 - \frac{P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i} \right) \right) + \\
&\frac{1}{L f^*} \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \left( t^j - \sum_i^N t^i Y^i \frac{f_j}{f^*} \right) \tag{B.41}
\end{aligned}$$

La expresión para la derivada de la frecuencia c/r al grupo j-ésimo viene dada por (B.42).

$$f_j = \frac{\frac{1}{L} \left[ t^j \left( \frac{c_1}{\phi} \sum_i^N l^i Y^i + \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \right) + l^j \sum_i^N t^i Y^i \left( \frac{c_1}{\phi} + P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi \right) \right] + \frac{P_w^j}{2}}{2 f^* T c_0} \tag{B.42}$$

De (B.41) es posible obtener el costo marginal de operadores y de usuarios, mostrados en (B.43) y (B.44) respectivamente:

$$CM g_{OP}^j = t^j (c_0 + c_1 K^*) + \frac{t_c(f^*)}{L} l^j \left( \frac{P_{v1}^j \phi}{2} + \frac{c_1}{2\phi} \right) + f_j \left( T c_0 - \frac{\sum_i^N t^i Y^i}{f^*} c_1 K^* \right) \tag{B.43}$$

$$\begin{aligned}
CM g_{US}^j &= \frac{P_w^j}{2f^*} + \frac{l^j t_c(f^*)}{L} \left( P_{v0}^j + \frac{P_{v1}^j}{2} \phi + \frac{c_1}{2\phi} \right) + \frac{t^j}{L f^*} \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i - \\
&\frac{f_j}{f^{*2}} \left[ \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2} + \frac{1}{L} \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i (\sum_i^N t^i Y^i) \right] \tag{B.44}
\end{aligned}$$

Volviendo a (B.41), agrupamos y simplificamos los términos dependientes de  $f_j$ :

$$\begin{aligned}
CM_g^j &= f_j \left[ T c_0 - \frac{\sqrt{c_1}}{L f^{*2}} \sum_i^N t^i Y^i \sqrt{c_1 \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \sum_i^N l^i Y^i} - \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2 f^{*2}} - \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \sum_i^N t^i Y^i}{L f^{*2}} \right] + \\
&t^j \left( c_0 + c_1 \sqrt{\frac{1 \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \sum_i^N l^i Y^i}{c_1 \sum_i^N l^i Y^i L f^*}} \right) + \left( \sum_i^N t^i Y^i + Tf^* \right) \frac{\sqrt{c_1}}{L f^*} \frac{l^j (P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i + \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i)}{2 \sqrt{(\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i) (\sum_i^N l^i Y^i)}} + \frac{P_w^j}{2f^*} + \\
&\frac{l^j}{L} \left( P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi + \frac{c_1}{2\phi} \left( 1 - \frac{P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i} \right) \right) t_c(f^*) + \frac{t^j}{L f^*} \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \tag{B.45}
\end{aligned}$$

Agrupando aquellos divididos por  $f^{*2}$ :

$$\begin{aligned}
CM_g^j = f_j & \left[ Tc_0 - \frac{\frac{\sqrt{c_1}}{L} \sum_i^N t^i Y^i \sqrt{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \sum_i^N l^i Y^i} + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2} + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i (\sum_i^N t^i Y^i)}{L}}{f^{*2}} \right] + \\
& t^j \left( c_0 + c_1 \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}} \right) + (\sum_i^N t^i Y^i + T f^*) \frac{\sqrt{c_1}}{L f^*} \frac{l^j (P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i + \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i)}{2 \sqrt{(\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i) (\sum_i^N l^i Y^i)}} + \frac{P_w^j}{2 f^*} + \\
& \frac{l^j}{L} \left( P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi + \frac{c_1}{2\phi} \left( 1 - \frac{P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i} \right) \right) t_c(f^*) + \frac{t^j}{L f^*} \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \quad (B.46)
\end{aligned}$$

Reemplazando  $f^{*2}$ :

$$\begin{aligned}
CM_g^j = f_j & \left[ Tc_0 - \frac{\frac{\sqrt{c_1}}{L} \sum_i^N t^i Y^i \sqrt{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \sum_i^N l^i Y^i} + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2} + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i (\sum_i^N t^i Y^i)}{L}}{\frac{1}{Tc_0} \left( c_1 \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}} \frac{(\sum_i^N l^i Y^i) (\sum_i^N t^i Y^i)}{L} + \sum_i^N \frac{P_w^i Y^i}{2} + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i (\sum_i^N t^i Y^i)}{L} \right)} \right] + \\
& t^j \left( c_0 + c_1 \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}} \right) + (\sum_i^N t^i Y^i + T f^*) \frac{\sqrt{c_1}}{L f^*} \frac{l^j (P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i + \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i)}{2 \sqrt{(\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i) (\sum_i^N l^i Y^i)}} + \frac{P_w^j}{2 f^*} + \\
& \frac{l^j}{L} \left( P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi + \frac{c_1}{2\phi} \left( 1 - \frac{P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i} \right) \right) t_c(f^*) + \frac{t^j}{L f^*} \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \quad (B.47)
\end{aligned}$$

Notando que en el segundo término del paréntesis que acompaña a  $f_j$ , se tiene tanto en el numerador como en el denominador los mismos términos, es posible simplificar y obtener la expresión (B.48):

$$\begin{aligned}
CM_g^j = f_j & [Tc_0 - Tc_0] + t^j \left( c_0 + c_1 \sqrt{\frac{1}{c_1} \frac{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N l^i Y^i}} \right) + \\
& (\sum_i^N t^i Y^i + T f^*) \frac{\sqrt{c_1}}{L f^*} \frac{l^j (P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i + \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i)}{2 \sqrt{(\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i) (\sum_i^N l^i Y^i)}} + \frac{P_w^j}{2 f^*} + \\
& \frac{l^j}{L} \left( P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi + \frac{c_1}{2\phi} \left( 1 - \frac{P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i} \right) \right) t_c(f^*) + \frac{t^j}{L f^*} \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \quad (B.48)
\end{aligned}$$

Eliminando los términos dependientes de  $f_j$ , y reemplazando las expresiones (21) y (32) en (B.48):

$$\begin{aligned}
CM_g^j = t^j & (c_0 + c_1 K^*) + \frac{\sqrt{c_1} t_c(f^*)}{L} \frac{l^j (P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i + \sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i)}{2 \sqrt{(\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i) (\sum_i^N l^i Y^i)}} + \frac{P_w^j}{2 f^*} + \\
& \frac{l^j t_c(f^*)}{L} \left( P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi + \frac{c_1}{2\phi} \left( 1 - \frac{P_{v1}^j \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i} \right) \right) + \frac{t^j}{L f^*} \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \quad (B.49)
\end{aligned}$$

Además, notando que de (32) se obtiene una expresión para  $\phi$ , y reemplazando (B.50) en (B.49):

$$\phi = \frac{k(f^*)}{K^*} = \sqrt{\frac{c_1 \sum_i^N l^i Y^i}{\sum_i^N P_{v1}^i l^i Y^i}} \quad (\text{B.50})$$

$$CM_g^j = t^j (c_0 + c_1 K^*) + \frac{l^j t_c(f^*)}{L} \left( \frac{P_{v1}^j \phi}{2} + \frac{c_1}{2\phi} \right) + \frac{P_w^j}{2f^*} + \frac{l^j t_c(f^*)}{L} \left( P_{v0}^j + \frac{P_{v1}^j \phi}{2} + \frac{c_1}{2\phi} \right) + \frac{t^j}{L f^*} \sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i \quad (\text{B.51})$$

Juntado términos se obtiene la expresión para  $CM_g^j$ , mostrada en (B.52):

$$CM_g^j = t^j \left( c_0 + c_1 K^* + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i}{L f^*} \right) + l^j \frac{t_c(f^*)}{L} \left( P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi + \frac{c_1}{\phi} \right) + \frac{P_w^j}{2f^*} \quad (\text{B.52})$$

Luego, siguiendo la expresión (35) para el costo medio de los usuarios, en dónde  $VRC_{US}^j$  es el mostrado en (B.53), se obtiene  $CM_{e_{US}}^j$  mostrado en (B.54):

$$VRC_{US}^{j*} = \frac{P_w^j Y^j}{2f^*} + \frac{(P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi) l^j Y^j t_c(f^*)}{L} \quad (\text{B.53})$$

$$CM_{e_{US}}^{j*} = \frac{VRC_{US}^{j*}}{Y^j} = \frac{P_w^j}{2f^*} + \frac{(P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi) l^j t_c(f^*)}{L} \quad (\text{B.54})$$

Finalmente, se obtiene la tarifa para el grupo j según la ecuación (33). Esto lo calcularemos restando (B.52) y (B.54):

$$P^j = t^j \left( c_0 + c_1 K^* + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i}{L f^*} \right) + l^j \frac{t_c(f^*)}{L} \left( P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi + \frac{c_1}{\phi} \right) + \frac{P_w^j}{2f^*} - \frac{P_w^j}{2f^*} - \frac{(P_{v0}^j + P_{v1}^j \phi) l^j t_c(f^*)}{L} \quad (\text{B.55})$$

Simplificando y reordenando términos se muestra la expresión final para la tarifa del grupo j en (B.56):

$$P^j = t^j \left( c_0 + c_1 K^* + \frac{\sum_i^N (P_{v0}^i + P_{v1}^i \phi) l^i Y^i}{L f^*} \right) + l^j \frac{t_c(f^*) c_1}{L \phi} \quad (\text{B.56})$$

## Anexo C. Tabla resumen de PRT's en la literatura

**Tabla C. Tabla resumen de los documentos leídos en la revisión bibliográfica del capítulo 3. En la tabla se mencionan las siguientes iniciales que hacen referencia a: AM = Adultos Mayores, FP = Fuera de Punta (Periodo), TP = Transporte Público.**

Nombre, autores y año	Grupo y Lugar de estudio	Descuento analizado	Objetivo-método del estudio	Variables analizadas	Principales conclusiones	Otras observaciones del estudio
1. Impacts of free concessionary travel: Case study of an English rural region, <b>Baker and White (2010)</b>	Adultos Mayores en Salisbury District Council	De 50% a 100%	Se analiza el impacto de un aumento de un descuento de 50% a 100%, se comparan los grupos que tenían la concesión antes y después. Se comparan datos del departamento de transporte y se hacen encuestas a usuarios que renovaron su pase <b>(N = 796)</b>	-Poseedores de la concesión. -Viajes hechos con la concesión	-Los poseedores de la concesión aumentaron en un 70%, principalmente en aquellos menores de 70 años. -Los viajes hechos con la concesión aumentaron en un 72.5% -Alrededor de un 80% del aumento de viajes totales en la red se deben a nuevos usuarios de la concesión. -Los antiguos usuarios de la concesión en general tienen menor ingreso y menor tasa de motorización. -Los de menor ingreso aumentan su tasa de viajes, mientras que los usuarios nuevos viajan más en TP pero a una menor tasa que la de los usuarios antiguos de la concesión	-Distrito pequeño de 114.000 personas. Los resultados son similares a lo que se ve en ciudades más grandes del mismo país. -El aumento del descuento se puede asociar con otros objetivos distintos a disminuir la exclusión social, por ejemplo lograr un cambio modal de auto a bus.
2. The effect of fare reductions on public transit ridership, <b>Caruolo y Roess (1974) for Department of Transportation.</b>	Adultos Mayores en EEUU	Entre 30% y 100%	Análisis de cambios empíricos en la demanda por transporte debido a los programas de reducción tarifaria.	-Viajes realizados en transporte público	-Todos los programas mostraron un aumento en la cantidad de viajes. En promedio es de 34% -La elasticidad promedio es de -0.38	-A pesar de que la mayoría de los programas no ha sido exitoso financieramente, si han cumplido sus objetivos sociales: reducir congestión, reducción de emisiones, incentivar economía en los focos comerciales de

						las ciudades, mejorar la movilidad de los pobres.
3. The impact of a Free Older Persons' Bus Pass on Active Travel and Regular Walking in England, <b>Coronini et al. (2012).</b>	Adultos Mayores en Inglaterra	De 50% a 100%	Se trata de determinar el potencial beneficio en salud de la medida a través de: Regresión binomial negativa y modelo logístico simple a partir de los datos de la UK National Travel Survey, <b>N = 16911</b> (mayores de 60).	-Uso de transporte activo (caminar, bicicleta y TP. No activos: auto, taxis, motos, buses privados). (var. dep) -Uso de buses (var. dep) -Frecuencia semanal de caminata (var. dep) -Edad, Género, Ingreso, acceso a auto, población del área de residencia, tener pase de concesión (var. ind)	-Los usuarios que poseen concesión tienden a usar modos de transporte activos en mayor medida que los que no han adquirido la concesión. -Los usuarios que poseen concesión tienden a viajar 10 veces más en bus que los que no tienen concesión. -Los usuarios que poseen la concesión tienden a caminar al menos 3 veces a la semana en mayor medida que los que no tienen la concesión.	A pesar del gran costo* de la política, el beneficio de promover la actividad física en los adultos mayores puede ofrecer valor monetario, ya que ayuda a reducir la inactividad, y por ende, la tasa de mortalidad y obesidad (Boyle et al. (2007) y Wen et al. (2011)).  *Subsidio de un millón Libras/año (pago a operadores).
4. Evaluation of Concessionary Bus Travel: The impacts of the free bus pass, <b>Department for Transport (2016).</b> (Ver en conjunto con 20).	Adultos Mayores (Mayores de 60) en Inglaterra	De 0% a 50% (2002-2006) 100% (2006-2016)	Estudio que analiza el cambio de el número de viajes y de viajes promedio en los años que lleva funcionando la concesión (2002-2012), cabe destacar que en el año 2002 se empezó a dar un 50% de dcto, luego en el año 2006	-En el año 2002 un 53% de los elegibles adquirió la concesión, mientras que en el 2012 este número aumentó hasta 76% (salto de 8% en el año que empezó a ser gratis, 2006). -El grupo etario que mayor porcentaje de adquisición tiene son los mayores de 70 años. - Durante todos los años estudiados, los viajes promedios anuales con la	-La relación Costo-Beneficio, considerando beneficios derivados de salud y mejoras en el servicio es un 18% más grande (al pasar de 50% a 100% de dcto). -Esta relación Costo-Beneficio es de 1.4 considerando todos los beneficios que pudieron ser monetizados. -Según la curva estimada de Excedentes del Consumidor si no existiera descuento habrían 370 millones de viajes anuales. Al ser gratis los viajes estos subieron a 1000 millones de viajes.	Objetivo: "Reducir el costo de viajar en autobús para AM y discapacitados y contribuir a: mejor acceso a servicios esenciales, mejor acceso a familiares y amigos, mejor acceso a actividades de ocio y facilitar la vida independiente por el mayor tiempo posible. Otros beneficios

			<p>pasó a ser un 100%. Además, a partir de datos del año 2014, se calculan costos y beneficios del programa a través del beneficio del consumidor y un análisis de sensibilidad para otro tipo de beneficios (salud y mejora de servicio).</p>	<p>concesión son cercanos a 100 viajes/año*persona (aprox. 2 viajes por semana).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Los beneficios considerados son: Excedente del Consumidor (por tarifa), beneficios por externalidades (reducción en congestión y emisiones) y beneficios derivados de salud (eg. caminata) y mejoras en el servicio (valoración de espera y tiempo de viaje).</li> <li>- Los costos (por rediseño) considerados son: reembolso a operadores y costos administrativos.</li> <li>- Los costos totales son 1140 Millones de libras (98% en reembolso y 2% administrativos)</li> <li>- Beneficios son 1564 Millones de libras (77% Excedente del Consumidor, 10% beneficios externalidades y 13% beneficios derivados (caminata, te y tv))</li> <li>- Los viajes más frecuentes son con propósito de compras (más de la mitad).</li> </ul>		<p>indirectos son: descongestión vial, beneficios a la economía local debido a mayor cantidad de viajes con motivos de compra”.</p>
--	--	--	--	--	--	---

<p>5. More than A to B: the role of free bus travel for the mobility and wellbeing of older citizens in London, <b>Green et al. (2014)</b>.</p>	<p>Adultos Mayores en Londres</p>	<p>De 50% a 100%</p>	<p>Estudio cualitativo que explora el significado de la existencia de viajes gratis en bus para adultos mayores, este se explora desde un punto de vista de salud y otros beneficios menos tangibles. El estudio consta de <b>47</b> participantes, <b>14</b> de ellos entrevistados individualmente, <b>21</b> colectivamente (Focus Groups) y <b>12</b> participantes en entrevistas a dúo.</p>	<p>Se discutieron temas como:          -El rol del pase de buses en facilitar el acceso a bienes esenciales.          -La importancia del pase de buses en el estilo de vida.          -El bus como un lugar para interactuar.</p>	<p>El pase muestra tener relevancia para acceder a distintos lugares esenciales, pero también en mejorar el bienestar de los usuarios; mejora el acceso a: salud, comida de mejor calidad, a una mejor vida social y oportunidades de ejercitarse.          El pase abre un espacio público para relacionarse, el cual sirve para socializar, mitigar la soledad y para sentirse parte de una Sociedad.</p>	
<p>6. The welfare effects of the free subway fare scheme for seniors: A discrete choice approach with the case of Seoul, <b>Jin et al. (2018)</b> (ver en conjunto con 40)</p>	<p>Adultos Mayores en Seúl</p>	<p>De 0% a 100% en Metro.</p>	<p>Predecir y analizar el efecto que tendría el descuento en la elección modal y en el bienestar social. Se utiliza un logit multinomial (costo, tiempo viaje y atributos hogar) para evaluar los casos cuando existe y si no existiera el descuento. Se</p>	<p>-Se observa que la hora en que viajan los AM es más marcada en el horario Fuera Punta.          -Aquellos AM que poseen familias más numerosas tienden a usar más TP.          -La distancia a las estaciones de Metro influye de gran manera.          -Al simular con tarifa normal para AM, se cambiarían aprox 54.000 viajes diarios (23.000 a bus, 20.000 a auto y 11.000 a caminata)</p>	<p>-Los grupos de bajos ingresos son los que ven mayor cambio en su partición modal, dirigiéndose principalmente a bus.          -A medida que aumenta el ingreso los cambios modales son menores y los que existen son principalmente a automóvil.          -El 80% de los beneficios netos se concentran en los estratos de menores ingresos (\$55.8 millones aprox).</p>	<p>Principales objetivos de la medida: aumentar la cantidad de viajes en TP, reducir congestión, emisiones y construcción de caminos. Dentro de otros objetivos: alcanzar justicia social mediante el aumento de movilidad de grupos desprivilegiados: AM, estudiantes, bajos ingresos, entre otros.</p>



			utilizan datos de la tarjeta inteligente y de la Household Travel Survey. Día de semana 21.6 mill. Fin de semana 12.9 mill	-El Consumer Surplus calculado a partir del logit entrega un beneficio total de \$202.1 millones/año, mientras que el costo es de \$144.8 millones/año. Generando un beneficio neto de \$57.3 millones/año.		
7. Impact Analysis of Reduced Fare Programme for Older People on Step Counts per Day and Travel Behaviour, <b>Kamada et al. (2018).</b>	Adultos Mayores en Toyama, Japón	El pasaje cuesta 100 Yenes por viaje, se da como ejemplo un viaje que con tarifa normal costaría 1160 yenes (Dcto. de aprox. 92%)	Estudio cuantitativo comparativo mediante datos de GPS en <b>1268</b> celulares y smartwatches entregados a ancianos.	-Conteo de pasos -Lugares Visitados -Modo de transporte	-Los que tienen tarjeta caminan más que los que no tienen (tienen más usuarios en el estrato que más camina y en el que menos camina predomina los que no tienen pase) -La cantidad de lugares visitados/día son similares, pero los que tienen pase visitan más lugares en el centro. -Mayor uso de TP los que tienen pase -Mayor uso de auto, moto o bicicleta los que no tienen pase	-Los pases contribuyen a tener una vida más activa para los adultos mayores.
8. A ticket to Ride: Does Free Bus Travel Promote Active Ageing?, <b>Kelly (2011).</b>	Adultos Mayores en Inglaterra	de 0% a 100% (Implementado)	Estudio que busca mostrar cómo afectó la medida a variables como: cantidad y propósito de viajes. Además es el primer estudio (a nuestro entender) que intenta calcular el bienestar generado por la medida. Se utiliza la National Travel	-En el año de la implementación hubo un aumento del 15% en la posesión del pase. -Los viajes aumentaron en un 33%, lo que es consistente con la literatura que indica una elasticidad entre 0.2 y 0.4 (Balcombe et al. 2004). -Los viajes con propósito de compras y visitas a amigos son los que más aumentaron en comparación a otros propósitos.	-El uso de supuestos y una básica forma de calcular el bienestar permiten mostrar que la medida genera una ganancia neta para la sociedad. -Se estima que los días de "caminata moderada" aumentaron, lo que puede ayudar a prevenir enfermedades crónicas y a mejorar la relación con la comunidad local. -La reforma no tiene efectos significativos en la participación social.	El motivo es: "Al promover el uso de autobús, se aporta a estilos de vida activos, atacar exclusión social y mantener el bienestar de los AM".

			Survey (N = 29112)	-Los beneficios vienen del ahorro de los antiguos viajes al cambiar la tarifa (34 libras/persona*año), de los nuevos viajes generados (aprox 5.6 libras/persona*año) y de los beneficios externos considerados (caminata y mejoras en el servicio) evaluados en aproximadamente 3.6 libras/año*persona -El costo es el gasto asociado en concesiones por parte del estado, es de 24 libras/persona*año		
9. Potential impacts of subsidised bus travel for older people, <b>Laverty and Millet (2015)</b> .	Adultos Mayores en Inglaterra	De 50% a 100%	Viewpoint de cómo el pase afecta la salud y el bienestar de los adultos mayores.	-Frecuencia de caminata -Posibilidad de obesidad -Viajes extras	-Personas que adquieren el pase tienen 15% más de probabilidad de caminar al menos 3 veces a la semana. -25% menos de ser obesos y ganan peso más lento que no tienen el pase -Se realizan viajes que sin el pase no se hubieran hecho.	-Se expone que se deben buscar formas de monetizar los beneficios de la medida con tal de poder compararla con los altos costos de la implementación. Existe preocupación de si la medida vale la pena el costo.
10. Associations of increases in public transport use with physical activity and adiposity in older adults, <b>Laverty et al. (2018)</b>	Adultos Mayores en Inglaterra	De 0% a 100% (Implementado) (desde 2006)	Estudio que analiza la relación entre el aumento del uso de TP y variables relacionadas a la salud: actividad física, IMC y ancho de cintura. Se	-Entre los años 2008 y 2012 un 33% de la muestra aumentó su uso de TP. -Un 50% de la muestra que pasó a ser elegible se inició en el TP. -Las personas que aumentaron su uso de y las que se iniciaron en TP	El inicio en el uso de TP y el aumento del uso de éste fueron asociados con un aumento en la frecuencia de actividad física. La relación con una disminución de la grasa corporal es clara para mujeres que aumentaron el uso de TP pero no para los demás grupos (hombres en general y mujeres nuevas en TP).	

			<p>utilizan datos de dos cortes temporales (2008 y 2012) de una encuesta para adultos (incluyendo AM) en dónde se pregunta frecuencia de uso de TP y se miden variables de salud. La idea es separar el análisis entre aquellos que aumentaron su uso de TP y aquellos nuevos usuarios debido al descuento.</p>	<p>tuvieron un aumento en la frecuencia de actividad física en el segundo corte temporal. -Sólo para mujeres que aumentaron el uso de TP, el IMC promedio se redujo en comparación a las que no aumentaron el uso de TP.</p>	<p>-“Estos hallazgos fortalecen la causa de considerar TP como un medio efectivo para promover el envejecimiento saludable”.</p>	
<p>11. Has the policy of concessionary bus travel for older people in Britain been successful?, <b>Mackett (2014).</b></p>	<p>Adultos mayores en Gran Bretaña</p>	<p>De 50% a 100%</p>	<p>Paper que revisa la evidencia que muestra si los objetivos de la política se han cumplido. Siendo estos: 1. Aumentar el uso del TP en AM, especialmente en aquellos de bajos ingresos y sin acceso a automóvil. 2. Mejorar acceso a servicios de necesidad básica (health care and shops)</p>	<p>-Uso del TP -Acceso a servicios de salud y de compras -Exclusión social y bienestar (Visitas a lugares, mejoras en salud, estilo de vida activo, entre otros) -Posesión de la concesión (var. ind)</p>	<p>-Bajos ingresos usan más el TP. -No es claro si el pase ha mejorado el acceso a servicios de salud y compras -Mejoras en salud para personas con pase. -Reducción en uso del automóvil</p>	<p>¿Cuál es la medida de éxito?  “Overall, it does seem that the objectives implicit in the statements announcing the initiatives have been met to some extent at least”.</p>

			3. Reducir aislamiento social, reducir exclusión social y mantener el bienestar para adultos mayores.			
12. The effects of a free bus program on older adults' travel behavior: A case study of a Canadian suburban municipality, <b>Mah and Mitra (2017).</b>	Adultos Mayores en Oakville, Canadá	De 0% a 100%	-Investigar el comportamiento de viajes y la percepción de la medida. -Encuestas (regresión binomial) <b>(N=131)</b> -Entrevistas semi-estructuradas <b>(N=16)</b>	-Género (var. ind) -Edad (var. ind) -Nivel de Educación (var. ind) -Ingreso (var. ind) -Acceso a vehículo (var. ind) -¿Conocimiento de la existencia del programa? -¿Se vería impactado si dejara de existir el programa?	-La mayoría de los encuestados usa el automóvil a pesar de conocer la existencia del descuento. -No se vería un impacto si el programa dejase de existir (al controlar por ingreso, los de bajo ingreso se verían 5 veces más afectados que los de mayor ingreso).	
13. Ridership and Revenue Implications of Free Fares for Seniors in Northeastern Illinois, <b>Metaxatos (2013).</b>	Adultos Mayores en Illinois	De 50% a 100%	Sobre la base de lo observado se estiman los aumentos de cantidad de viajes y de costos debido a la implementación de un nuevo programa de viajes gratis, el que reemplaza un programa de 50% de descuento.	-Se estima que en el periodo de transición (de 50% a 100%) hubo un aumento del 1.9% del total de viajes. (aumento del 75% c/r a viajes de AM). -Los costos se estiman con dos enfoques: calcular la tarifa normal de los nuevos viajes y realizando una encuesta para estimar la frecuencia de viaje de AM con cada concesión y lograr un nuevo estimado. -Con la primera estimación los costos aumentaron aproximadamente \$38.5 millones en el año 2009.	-Se debe poner atención en la sustentabilidad financiera del programa debido a los grandes costos y a la proyección del crecimiento de la población AM.	-Se financió aumentando en 0.25% los impuestos a la venta.  -Se menciona que la American Public Transportation Association ha analizado que la elasticidad ante un aumento del precio para AM va desde -0.18 a -0.43 dependiendo de si es punta o FP y del tamaño de la ciudad.

				-Con el segundo enfoque los costos fueron aproximadamente \$35 millones en el año 2009.		
14. Evaluation of Pennsylvania's Free Transit Program for Senior Citizens, <b>Millar et al. (1977)</b>	Adultos Mayores en Pennsylvania	De 0% a 100% en Fuera de Punta	A través de encuestas con AM (N = 2100) y entrevistas con Operadores de tránsito (N = 5) se analizan los impactos del programa en estos agentes	-Caracterización de AM encuestados -Caracterización de viajes -Frecuencia de viaje Para Operadores: -Efecto en cantidad de viajes de TP y ganancias -Costos administrativos	- De los encuestados, un 56.6% de los nuevos usuarios dice que lo hizo por la implementación del programa. Un 23.4% porque no tiene el auto disponible actualmente y un 20% por cambio de localización de hogar y/o trabajo. -55% de los encuestados son usuarios cautivos de TP. -El 43.8% de los viajes es con propósito de compras y más del 50% de los nuevos viajes con el mismo propósito -En FP aumentó en un 49% el nivel de viajes mensuales por usuario (28.6 viajes/mes) -Un 75% de los operadores piensa que se les está sub compensando. -El programa no ha causado efectos en costos administrativos para los operadores.	
15. Reduced Fare Programs for Older Adults and Persons with Disabilities: A Peer Review of Policies, <b>Newmark (2014).</b>	Adultos Mayores en EEUU		Realizar comparación de políticas(a través de encuestas a managers e investigación de sitios webs) de descuentos con tal de hacer una guía que permita definir similitudes y diferencias entre	-Todas las agencias ofrecen el descuento durante todo el día. 2 ofrecen mayores beneficios durante el período FP. -Todas las ciudades de la muestra tienen como restricción ser residentes para entregar el beneficio. -Solamente en Philadelphia el estado reembolsa el total	-El aumento constante de la proporción de la población de AM, hace que sea necesario revisar las políticas de los programas de reducción tarifaria, asimismo la implementación y administración de estas.	-La ley de Estados Unidos desde 1976 requiere que todas las agencias de transporte que reciban aporte federal otorguen al menos un descuento del 50% en horario no punta a adultos mayores y discapacitados.

			los programas de las 10 empresas de transporte más grandes de Estados Unidos. La información se organiza en 3 áreas: características principales, administración y prevención de fraude.	de la tarifa. En Chicago se reembolsa parcialmente.		
16. Exploring the impact of public transport including free and subsidised on the physical, mental and social well-being of older adults: a literature review, <b>Rambaldini-Gooding et al. (2021)</b>	Adultos Mayores	Hasta 100%	Review de la literatura que busca investigar el impacto de TP gratis y subsidiado en la salud y el bienestar de los Adultos Mayores	Los papers analizados incluyen artículos de revistas, que incluyen personas mayores de 55 y que investigan el rol del TP gratis o subsidiado en la salud física, mental y/o en el bienestar social.	Los estudios revisados sostienen lo siguiente: - La promoción de TP tiene relación con el aumento de actividad física, reduce el impacto de condiciones crónicas - Acceso a TP gratis o subsidiado permite a AM conectarse con actividades de la comunidad y permite tener más ingreso disponible para gastar en actividades - TP gratis promueve la participación social y mejora la salud mental en conjunto a indicadores de bienestar.	“Existe literatura limitada sobre los impactos de TP gratis y subsidiado en el bienestar físico y mental de AM. Por lo tanto, sigue siendo difícil tener un entendimiento de los efectos del TP gratis para los AM de alrededor del mundo”.
17. The Redistributive effects of reduced transit fares for the elderly, <b>Rock (1979)</b>	Adultos Mayores en Chicago	De 0% a 50% en Fuera de Punta	Realiza una aproximación de los cambios en la recaudación del sistema. Si estos no son cubiertos, se discuten distintos tipos de financiamiento y se analiza	Para ver si el sistema tiene pérdidas las variables a analizar son: - Viajes de AM previos a la medida en FP - Nuevos viajes de AM atraídos debido a la medida (FP)	- Si la política es viable económicamente para las empresas depende fuertemente de la elasticidad de la demanda para AM - En Illinois, el dinero otorgado a las empresas es de 12 millones provenientes de “road fund”, principalmente pagado por usuarios de automóvil. - Debido a las diferencias de ingreso promedio entre los AM que usan el TP y	

			empíricamente el caso de Chicago, Illinois.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Viajes de AM que son cambiados de Hora punta a FP</li> <li>- Tarifas en Horario Punta y FP</li> <li>- Costos reducidos debido al cambio de demanda en Hora Punta</li> </ul>	los usuarios de automóvil, se determina que la medida es “pro-pobres” (progresiva).	
18. Concessionary fares and bus operator reimbursement in Scotland and Wales: No better or no worse off?, <b>Rye and Carreno (2008).</b>	Adultos Mayores en Escocia y Gales	De 0% a 100%	Entender cómo es el cálculo del pago a los operadores debido a la concesión. Cuánto le cuesta al Estado la concesión y establecer si el pago termina siendo un subsidio. Esto se realiza analizando datos de la NTS, Scottish Bus Statistics y Transport Statistics Scotland.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Número de viajes realizados por concesiones.</li> <li>- Número de viajes que hubieran sido realizados en ausencia de la concesión.</li> <li>- Tarifa normal.</li> <li>- Pago a los operadores (var. dependiente)</li> </ul>	Se concluye que se está sobre-pagando a los operadores: 1. Se usa un mismo factor de pago para todas las regiones, el cuál es bastante bajo en comparación al calculado 2. No se considera el efecto de la elasticidad a largo plazo ni el aumento en la tarifa normal. 3. Se acordó cubrir otro tipo de costos a los operadores.	Cálculo de Factor de pago: Total de viajes con concesión/Total de viajes en ausencia del esquema. Por ejemplo, un factor de 1.5 a una tarifa de \$1 resultaría en un pago de \$0.66 por viaje.
19. Concessionary bus fares for older people in Scotland – are they achieving their objectives?, <b>Rye and Mykura (2009).</b>	Adultos Mayores en Escocia	De 50% a 100%	-Viewpoint de como la medida ha afectado al público objetivo. Se trata de responder si ha cumplido sus objetivos. Revisa estudios de: -Scottish executive (2004), Encuestas <b>N=2300</b>	-Cambios en la caracterización (Edad, Ingreso y Tasa de motorización) de los usuarios de la tarjeta debido a un aumento del descuento. -Frecuencia de uso del descuento y propósito -Impacto en la calidad de vida como medida de inclusión social	-Debido a la reducción, el grupo con concesión aumenta el ingreso, baja la edad y aumenta el acceso a auto. -La concesión es más usada por los pobres. -El motivo principal son los viajes de compras. -La evidencia de aumento de la inclusión social es poco confiable (pocas entrevistas)	-Citan a Balcombe et al (1998), quienes afirman que las variables independientes que afectan la cantidad de viajes con concesiones son: 1.La calidad de servicio y congestión del lugar del residente.

			<p>-Mykura (2003), encuestas cara a cara, <b>N=144</b></p> <p>-Scottish executive (2006), encuesta a personas discapacitadas, <b>N=850.</b></p>			<p>2.# Adultos mayores/#personas menores de edad AM.</p> <p>3.Tasa de Motorización de AM</p> <p>4.% de la población elegible que tiene concesión.</p> <p>5.Capacidad física de las personas elegibles para la concesión.</p>
<p>20. The factors influencing future concessionary bus patronage in Scotland and their implications for elsewhere, <b>Rye and Scotney (2004).</b></p>	<p>Adultos Mayores en Escocia</p>	<p>De 0% a 100%</p>	<p>Examinar los factores que determinan la demanda de los elegibles para la concesión y analizar cómo se verán afectados estos factores a través del tiempo.</p>	<p>VARIABLES QUE AFECTAN LA CANTIDAD DE VIAJES:</p> <p>1. El área dónde vive el usuario (características de servicio y congestión)</p> <p>2. N° de adultos mayores (clasificados como mayores y menores de 80),</p> <p>3. Posesión de automóvil</p> <p>4. El descuento otorgado en relación a otros modos.</p> <p>5. Porcentaje de AM elegibles que realmente adquiere la concesión.</p>	<p>1. En Rye (2002) se muestra una fuerte relación entre N° de viajes por persona al año y el nivel de servicio medido en km operados por año.</p> <p>2. No se puede establecer una relación, solo se proyecta cuánto aumenta el N° de AM en el tiempo y si todo sigue igual, la cantidad de viajes debería aumentar en la misma proporción.</p> <p>3. La NTS (National Travel Survey) muestra una clara relación negativa entre posesión de automóvil y viajes hechos en bus para AM.</p>	<p>La variable que pareciera mandar en el número de viajes hechos por la concesión es la posesión de automóvil.</p>
<p>21. Exploring the causal impact of transit fare exemptions on older adults' travel behavior: Evidence from the Seoul metropolitan area, <b>Shin (2021)</b></p>	<p>Adultos Mayores en Corea del Sur</p>	<p>De 0 a 100% en metro desde mediados de los 80s.</p>	<p>Se investiga el efecto del descuento en varios tipos de variables relacionadas a transporte y salud pública tales como: n° de viajes en distintos modos, tiempo en viaje</p>	<p>-A la edad de 65 años se ve un aumento del 16% de viajes realizados en metro por AM. Lo que viene acompañado de una disminución de viajes de bus y auto.</p> <p>-No se ven cambios significativos en la frecuencia y en el tiempo</p>	<p>-La edad legal de retiro es a los 60 años y el descuento empieza desde los 65, por lo que cualquier discontinuidad en las variables analizadas para personas de esta edad probablemente sea causada por el descuento.</p> <p>-Los beneficios estimados en términos de reducción de contaminación del aire son 184.3 USD mill/año. Mientras que los costos son aproximadamente 10.4 USD mill/año.</p>	<p>-“Dentro de los esfuerzos de cumplir con los desafíos de movilidad de los AM y mejorar su bienestar se ofrecen los viajes gratis..”</p> <p>-Estudios muestran que participar en actividades sociales/ocio ayudan a mejorar bienestar y salud mental, disminuyendo,</p>



<p>(ver en conjunto con 36)</p>			<p>activo, frecuencia de viajes sociales/ocio, tiempo gastado en actividades sociales/ocio. Esto se realiza usando un enfoque de Regresión Discontinuity (RD)</p>	<p>gastado en actividades sociales/ocio. -Los AM viajan menos en hora punta en comparación a adultos de menor edad. -Los impactos en viajes por metro son mucho más marcados en bajos ingresos que en altos ingresos.</p>	<p>-Se propone estudiar el rol del contexto socio-cultural del área para determinar por qué no se vio significancia en los viajes y tiempo gastado en actividades de ocio. (puesto que en estudios de otras ciudades se muestra que si hay relación).</p>	<p>por ejemplo, síntomas depresivos. Los descuentos en TP tienden a mejorar la participación en actividades sociales/ocio lo que mejoraría la salud mental de AM. -El análisis RD tiene el supuesto básico de que la distribución de características observables y no observables de los usuarios cercanos a la edad límite (en este caso 65 años) están distribuidas continuamente a ambos lados de la edad límite. -Revisar con atención el gráfico viajes/edad debido a la observación de edad de retiro.</p>
<p>22. Impact of the statutory concessionary travel scheme on bus travel among older people: a natural experiment from England, <b>Whitley et al. (2020).</b></p>	<p>Adultos Mayores en Inglaterra</p>	<p>50% y luego a 100%</p>	<p>Enfoque Difference-in-difference-in-difference para comparar los cambios en 3 etapas de la concesión: Cuando se daba 50% a mayores de 60, luego fue gratis para mayores de 60 y finalmente se</p>	<p>-Posesión del pase o concesión. -Uso, al menos, semanal de bus. - Posesión de automóvil</p>	<p>-Al hacerse gratis la concesión (2006) los AM entre 60-64 y 65-74 aumentaron el %de personas con pases. -Al aumentar la edad de elegibilidad, hay una pequeña caída en el grupo de 65-74 y el grupo de 60-64 cae desde un 60% a un 20% de posesión de pases en un plazo de 5 años. -El uso semanal era mayor para los de 60-64 al ser mitad de precio, luego al ser gratis aumentó considerablemente para este grupo pero en mayor medida para el grupo de 65-74.</p>	<p>-La posesión de automóvil sigue siendo un gran factor al momento de analizar el uso semanal de bus, puesto que los que no tienen auto incrementan el promedio de uso semanal. -La gran disminución en ambas variables (uso y posesión de pases) debido al aumento de la</p>

			<p>aumentó la edad de elegibilidad de 60 a 63 años. <b>N=78.645</b></p>		<p>-Al aumentar la edad de elegibilidad ambos grupos bajaron el uso semanal, pero para el grupo más joven disminuyó en mayor medida.</p>	<p>edad de elegibilidad se puede deber a un efecto de "arrastre" (si no lo pedía antes, no lo pide después).</p>
<p>23. Public Transport Policy Measures for Improving Elderly Mobility, <b>Wong et al. (2018)</b></p>	<p>Adultos Mayores en Hong Kong</p>	<p>Actualmente se ofrece un 50% de descuento. En el estudio se pregunta cómo afectaría a distintos comportamientos el tener una tarifa nula o no tener descuento.</p>	<p>Se realizan encuestas de preferencias declaradas para determinar cómo afectan distintos factores a la decisión de hacer un viaje. Un total de <b>613 entrevistados con 2452 observaciones.</b> Se realizan regresiones binomiales.</p>	<p>-En la encuesta se presentaban distintos escenarios en dónde cambiaba: 1. Modo de transporte, 2. Tarifa del modo, 3. Tiempos de espera y caminata, 4. Disponibilidad de asiento. -Se presentan combinaciones de 3 opciones para cada modo en las otras 3 variables. El encuestado debe declarar qué opción prefiere.</p>	<p>-Los usuarios mayores de 60 pero que no reciben descuento manifiestan que aumentar la edad en la que se recibe el descuento mejoraría su movilidad. -La disponibilidad de asiento y la tarifa son los factores que más influyen en la elección. -Aumentar el descuento a aquellos mayores de 80 años ayudaría a potenciar su participación en actividades sociales.</p>	<p>-Las encuestas fueron realizadas a adultos mayores de 60 años, aún cuando la concesión se empieza a dar desde los 65. Esto muestra cómo afecta el precio a aquellos que no pueden acceder a la tarifa rebajada.</p>

<p>24. Analysis of elderly people's travel behaviors during the morning peak hours in the context of the free bus programme in Beijing, China, <b>Zhang et al. (2019)</b></p>	<p>Adultos Mayores en Beijing</p>	<p>De 0% a 100%</p>	<p>Utilizando datos de Encuesta de hogares se hace un análisis estadístico para entender el comportamiento de viajes de AM. Además, a través de un modelo logit anidado se interpretan los patrones de viajes de AM en el periodo punta mañana. El número de viajes tomados como muestra es <b>N=46,396</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Género</li> <li>-Elegibilidad para la concesión</li> <li>-Nivel de educación</li> <li>-Acceso a automóvil y bicicleta</li> <li>-Tamaño e Ingreso del hogar</li> <li>-Lugar de residencia</li> <li>-Distancia del viaje</li> <li>-Propósito del viaje</li> <li>-Costo y tiempo del viaje</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-La cantidad de viajes en hora punta para AM en la mañana (26.64%) es más marcada que en la tarde (7.63%), mientras que para la población general son similares ambos periodos.</li> <li>-La introducción del programa ha inducido cerca de un 5% de los viajes producidos.</li> <li>-Para viajes cortos se prefiere caminata y bici. Para media-larga distancia se prefiere bus.</li> <li>-Los propósitos más mencionados son compras y ocio.</li> <li>-17% de los viajes de AM hechos en punta mañana son en bus.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Es necesario implementar otro tipo de medidas para que la congestión en los buses no sea un impedimento para realizar los viajes. Por ejemplo: Expandir la capacidad del sistema (mayor frecuencia, líneas express, etc), o un vehículo especial para AM.</li> <li>- Al existir una inducción del 5% en los viajes, se concluye que los AM deben viajar independiente de si el programa es gratis o no existiese.</li> </ul>
<p>25. Subsidisation of public transport fares for the Young: An impact evaluation analysis for the Madrid Metropolitan Area, <b>Arranz et al. (2019)</b>.</p>	<p>Jóvenes en Madrid, España</p>	<p>De 0 a 57% en promedio (Para el público general se tarifica por zonas)</p>	<p>-Estudio econométrico que busca medir los efectos distributivos e individuales en el bienestar de los hogares (gasto en TP) a través de un método de Diferencias en Diferencias (DID). <b>-Aprox. 1600 hogares.</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Gasto en pases de TP (var. dependiente)</li> <li>-Elegibilidad (var. ind)</li> <li>-Ubicación del hogar (var. ind)</li> <li>-Número de estudiantes en el hogar (var. ind)</li> <li>-Edad y nacionalidad del jefe de hogar (var. ind)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Disminución en promedio del 18% del gasto en pases de TP.</li> <li>-Aumento del gasto en pases de TP en el quintil más pobre (Q1)</li> <li>-Q3 y Q4 redujeron en un 42% en promedio su gasto en pases de TP</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Impacto positivo equitativamente hablando.</li> <li>-No hay impacto en el quintil más alto.</li> </ul>

<p>26. Fare-Free Public Transit at Universities: An Evaluation, <b>Brown et al. (2003)</b></p>	<p>Estudiantes universitarios en Los Angeles, California.</p> <p>El programa también era aplicable a otros miembros de la comunidad: profesores y staff.</p>	<p>De 0% a 100%</p>	<p>La Universidad UCLA hace convenio con una línea de buses para que sus estudiantes y staff tengan acceso gratis a sus líneas (de las cuales 5 de las 14 pasan por el campus). Se estiman los cambios que provoca la medida para aquellos usuarios que viven dentro del área donde operan las líneas de buses.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Cantidad de viajes en transporte público hacia el campus</li> <li>-Viajes en auto hacia el campus</li> <li>-Demanda por estacionamientos en el campus</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Para el staff el uso de buses aumentó de un 8.6% a un 20.1%. Para estudiantes aumentó de 17% a 24%.</li> <li>-Para estudiantes el uso de automóvil bajó de 17% a 12%. En total el cambio fue de un 20% menor.</li> <li>-El uso de estacionamientos bajó de 6400 a 5100 plazas. También bajó la lista de espera por estos espacios de aproximadamente 4000 a 2600.</li> </ul>	<p>-Encuestas del uso del convenio muestran que también se usa para otros fines: Viajar a través del campus (para moverse entre facultades). Ir a actividades culturales, prácticas y a conocer la ciudad (estudiantes de intercambio).</p>
<p>27. No free rides: Winners and losers of the proposed Toronto Transit Commission U-Pass program, <b>Butler and Sweet (2020)</b>.</p>	<p>Estudiantes en Toronto</p>	<p>De 0% a 100%. Previo pago de \$280 (por cuatrimestre).</p>	<p>Usar datos empíricos de una encuesta para estimar que estudiantes son beneficiados por la medida. La definición de beneficio viene dada por quienes pagan menos o más de lo que lo hacían antes de la medida. Se utiliza una submuestra de <b>7298</b> respuestas de una encuesta de</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Características socioeconómicas</li> <li>-Modo de viaje</li> <li>-Ambiente del vecindario</li> <li>-Comportamiento de viajes reciente</li> <li>-A partir de lo anterior se estiman viajes a la escuela y viajes que no van a la escuela.</li> <li>-Los viajes a la escuela se determinan a través de las respuestas de la escuela</li> <li>-Los viajes que no van a la escuela se estiman a través de un modelo de regresión binomial</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Un estudiante debiera realizar 94 viajes en 4 meses para cubrir los \$280 que cuesta el pase.</li> <li>-Cerca de un 37% cumple el mínimo solamente con viajes a la escuela.</li> <li>-En total, 45% de los estudiantes se ven beneficiados (viajan más de 94 veces en 4 meses).</li> <li>-Se ve que el beneficio monetario promedio de un estudiante es cercano a 0, esto va de la mano con que la tarifa es definida como "revenue and cost neutral".</li> <li>-Aprox. 15% Estudiantes fuera de la Ciudad de Toronto se ven beneficiados, mientras que los de la ciudad serían aprox. 50%</li> </ul>	<p>-“Nuworsoo (2005) further argues that if prices and programs are set appropriately, U-passes can lead to aggregate welfare increases among transit operators and students - implying a theory of justice based on utilitarianism”.</p> <p>-En Toronto Transit Commission (TTC), 2018 se discuten ámbitos financieros del U-Pass. Incluyendo el cálculo de</p>

			movilidad a estudiantes de Toronto (N=15000).			la tarifa, estimación de nuevos viajes.  -“The geography of redistributed resources appears to have played a prominent role in both the proposal and cancellation of this program - bringing into question what the fundamental objective of the U-Pass program is”.
28. Health impacts of free bus travel for young people: evaluation of a natural experiment in London, <b>Edwards et al. (2013)</b>	Jóvenes en Londres (12 a 17 años)	De 0% a 100%	Análisis de Antes y Después debido a la introducción de la tarifa gratis para jóvenes con tal de descubrir el impacto en “active travel”, uso de automóvil, accidentes de tráfico, asaltos y total de viajes realizados. Se analizan los valores antes y después de la medida usando como grupo de control a los adultos entre 25 y 29.	- Viajes por día, distancia recorrida y porcentaje de viajes de corta distancia para bus, auto, caminata y bicicleta. - Tasa de accidentes de tráfico por modo. - Número de asaltos sufridos por jóvenes.	-Incremento en viajes de corta distancia realizados en bus (2% a 5%). En el grupo de control permanecen igual. -Baja en viajes de caminata en términos absolutos y en comparación a adultos. -Disminución de la tasa de accidentes de tráfico en jóvenes. En gran medida debido a una baja en accidentes de copiloto y en bicicleta. -Aumento en asaltos sufridos por jóvenes. -Reducción del número de viajes en auto por día.	Una evaluación de la política sólo es posible si se logra asignar un valor al cambio de cada una de las variables analizadas (u objetivos)

<p>29. Estimating the Costs and Benefits of Providing Free Public Transit Passes to Students in Los Angeles County: Lessons Learned in Applying a Health Lens to Decision Making, <b>Gase et al. (2014).</b></p>	<p>Estudiantes en Los Angeles County, EEUU.</p>	<p>Hipotético caso de entrega de Pases gratis a estudiantes.</p>	<p>Estudio de caso que describe las potenciales beneficios y costos de aplicar pases mensuales gratis a estudiantes. Utilizando datos de elasticidad, asistencias a escuela y a través de conversaciones con distintos actores involucrados.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Asistencia a escuela.</li> <li>-Evasión</li> <li>-Congestión.</li> <li>-Lesiones</li> <li>-Oportunidades de realizar actividad física.</li> <li>-Fondos de las escuelas</li> <li>-Ingreso disp. para familias.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Usando elasticidades estimadas se cree que la cantidad de viajes en TP aumentaría entre 6% y 14% en el corto plazo y en el largo plazo 26%.</li> <li>-Aumento de ingreso para escuelas (Ganan por asistencia) y dejarían de pagar por transporte de alumnos.</li> </ul>	
<p>30. Elements of Successful Universal Student Transit Pass Programs from Planning to Implementation: A Benchmark Study, <b>Han et al. (2019)</b></p>	<p>Estudiantes en EEUU</p>	<p>No se analiza un descuento</p>	<p>Estudio que a través de encuestas, estudios de casos y literatura busca generalizar el procedimiento de implementación de los U-pass desde el punto de vista de los estudiantes, agencia de transporte y administrativo de la universidad.</p>	<p>Se cree que los programas son exitosos cuando tienen las siguientes características:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Fuente de recursos estable (e.g. pago semestral de estudiantes)</li> <li>-Apoyo de distintos agentes (Agencia de Transporte, administradores de la universidad, centros estudiantiles).</li> <li>-Claridad en beneficios del programa: impactos en cantidad de viajes de TP, demanda de estacionamientos, entre otros.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Los programas generalmente están financiados por estudiantes mediante la matrícula y el pago de estacionamientos.</li> <li>-Por lo general el costo del pase se decide mediante "revenue neutral" para la empresa de transporte. (Costo Incremental Medio)</li> <li>-Beneficios: <ul style="list-style-type: none"> <li>-Para Empresa: aumento de demanda, creación de hábitos de uso de TP.</li> <li>-Para Universidades: Mejor uso de estacionamientos, mejores relaciones en vecindario.</li> <li>-Para estudiantes: Reducción de costos en ir a la universidad, evitar problemas de estacionamiento y mejora en movilidad.</li> </ul> </li> </ul>	

<p>31. Rethinking passive transport: Bus fare exemptions and young people's health, <b>Jones et al. (2012)</b> (Ver en conjunto con 35).</p>	<p>Jóvenes en Londres</p>	<p>De 0 a 100% (Implementado en 2007)</p>	<p>Se realizan entrevistas y Focus Groups a <b>118</b> jóvenes con tal de revisar las influencias en la elección del modo de transporte y sus consecuencias relacionadas a ámbitos de la salud y de la inclusión social.</p>	<p>-Se reporta que el descuento incentiva a usar bus para distancias cortas.          -Se generan nuevas instancias de caminata al realizar viajes que no se hubieran realizado sin el descuento.          -Se deduce de las declaraciones que la misma experiencia de usar buses es una fuente de ejercicio para los jóvenes.          -El descuento ayuda a mejorar el acceso a actividades deportivas y de ocio.          -Se destaca el bus como un espacio social entre jóvenes y con personas de otras edades.</p>	<p>-Se requiere investigación empírica para cuantificar qué pesa más: si los viajes cortos que se hacen en bus (reemplazando la caminata) ó la actividad física generada por los nuevos viajes y el viaje en bus como tal.          -El descuento ayuda a generar la habilidad de crear y mantener relaciones con amigos y familiares de distintas partes de la ciudad.</p>	<p>Motivo: "Ayudar a gente joven continuar estudiando, mejorar proyecciones de empleo y promocionar uso de TP. Además, formar hábitos de movilidad sustentable".</p>
<p>32. The relationship between perceptions of discounted public transit and physical activity: Cross-sectional online survey in Canada, <b>Ly &amp; Irwin (2017)</b>. (Ver en conjunto con 39).</p>	<p>Estudiantes en Canadá</p>	<p>De 0% a 100%. Previo pago de Matrícula. No especifican el monto extra de la matrícula a pagar por el pase.</p>	<p>Estudio que busca captar las percepciones que tienen los estudiantes de pregrado sobre la relación de TP y actividad física. Se enviaron cuestionarios a <b>538 estudiantes de pregrado</b>.</p>	<p>-El estudio indica que una variación del 19% de la actividad física relacionada al transporte público es explicada por la existencia del descuento.          -Algunos estudiantes indican que para viajes cortos (por ej. dentro del campus) reemplazan la caminata por bus. Disminuyendo su actividad física.</p>	<p>-Estudiantes que realizan actividad física constantemente no perciben grandes cambios en su actividad física debido al descuento.          -Estudiantes que presentan problemas para mantener actividad física constante y al nivel deseado pueden verse beneficiados por la actividad física inducida.</p>	

<p>33. Usage, Impacts, and Benefits of Innovative Transit Pass Program, <b>Meyer &amp; Beimborn (1998).</b></p>	<p>Estudiantes en Milwaukee</p>	<p>De 0% a 100% pero pagando un extra con la matrícula de la universidad</p>	<p>Reportar evaluación del impacto del programa mediante encuestas a los estudiantes de la Universidad</p>	<p>-Elección modal -Externalidades (Emisiones, ahorro en combustible) -Espacio de estacionamientos</p>	<p>-El uso de automóvil bajó de 54% a 41% -El uso de TP aumentó de 12% a 26% -Se cree que se dejaron de hacer 220.000 viajes en auto por año -Se redujeron en un 20% las emisiones realizadas por viajes a la Universidad -Ahorro de 4.000.000 USD en gasto de combustible (aprox) -Focus groups revelaron que la sensación de encontrar estacionamiento es más fácil después de la medida</p>	<p>-Nuevamente se destaca que la efectividad de esta medida en gran parte a la tarifa cobrada por los estacionamientos.</p>
<p>34. Free transit for Low Income Youth, <b>McDonald et al. (2004).</b></p>	<p>Estudiantes con bajos ingresos en San Francisco, California, EEUU</p>	<p>Pases gratis a estudiantes de bajos ingresos. Anteriormente no se daba ningún descuento.</p>	<p>Evaluación de la medida a través de :Encuestas, entrevistas, FG, datos de asistencia a escuela. <b>Aproximadamente 20% escuelas del área analizada y 1200 encuestas.</b></p>	<p>-Asistencia a escuela. -Asistencia de actividades después de escuela. -Patrón de viajes</p>	<p>-Pequeño cambio en participación modal a escuela. -Estudiantes con pase si aumentan su uso de TP -Aumento en uso de TP los fines de semana. -Aumento en participación actividades extracurriculares -No hay cambio significativo en asistencia.</p>	<p>-Las variables analizadas son dependientes de otras variables demográficas y culturales. -Los cambios pueden demorarse años en verse reflejados.</p>
<p>35. Benefits of Campus Transit Pass: Study of Students' Willingness to Pay for Proposed Mandatory Transit Pass Program, <b>Myers et al. (2006)</b></p>	<p>Estudiantes en Western Washington University</p>	<p>De 0% a pagar una cuota semestral de 20 USD junto a la matrícula</p>	<p>Estudio que a través de cuestionarios busca revelar la disposición a pagar (WTP) por el pase mensual, la que es calculada mediante regresiones. Luego, se pueden estimar los beneficios netos de la medida (WTP - Costo).</p>	<p>Beneficios considerados (no se cuantifican en el estudio): - Reducción de congestión en estacionamientos y caminos locales. - Reducción en emisión de gases invernaderos y en contaminación del aire Otras variables demográficas: -Distancia al campus -Elección de transporte previa a la implementación</p>	<p>-Se estima un WTP promedio de 33.62 USD, por tanto un beneficio neto de 13.62 USD por alumno. -Los que previamente viajan en auto tienen menor WTP que los que viajan en bus o bicicleta. -WTP para estudiantes que viven en el campus es mayor, puesto que se les abren posibilidades de recreación, compras, trabajo, etc.</p>	



<p>36. "More Than a Free Bus Ride"— Exploring Young Adults' Perceptions of Free Bus Services Using a Qualitative Approach: A Case Study of Penang, Malaysia, <b>Sukor et al. (2021)</b></p>	<p>Jóvenes en Penang, Malasia</p>	<p>De 0% a 100% (Implementado)</p>	<p>Estudio de Focus Groups (<b>N = 48</b>) que busca identificar las percepciones de los jóvenes respecto al servicio de los buses y aquellos factores que los restringen de usarlos a pesar de ser gratis. Este es realizado debido a que a pesar de ser gratis, no se logra aumentar la cantidad de viajes en TP en la meta deseada por los tomadores de decisión.</p>	<p>-Todos los encuestados creen que el servicio tiene aspectos positivos, pero algunos también creen que tiene negativos.          -Entre los aspectos positivos está: gratuidad, seguridad y reducción en la congestión.          -Entre los aspectos negativos: manejo del tiempo, falta de información, incomodidad y riesgo de asaltos.          -Las razones del bajo nivel de cantidad de viajes en TP tienen que ver con: impuntualidad, mal diseño de rutas y falta de información.</p>	<p>-A pesar de ofrecer un servicio gratis a un estrato que no posee una fuente de ingresos (Jóvenes) se necesitan una serie de medidas para que cumpla a cabalidad con sus objetivos (aumento de cantidad de viajes en TP). La puntualidad, forma de entregar la información y el buen diseño son factores que parecen ser necesarios para que la reducción tarifaria tenga el efecto esperado.</p>	
<p>37. Impact of Free Transit Passes on Youth Travel Behaviour, <b>Sullivan (2017)</b></p>	<p>Estudiantes de 9° a 12° en Kingston, Canadá. Extensión por un año a los que no entraron a la Universidad.</p>	<p>De 0% a 100% (Implementado)</p>	<p>Tesis que busca mostrar cómo la implementación del programa ha afectado a la movilidad de los estudiantes. Los efectos a considerar son: motivos de viajes, beneficios derivados del programa, movilidad independiente y cambio modal.</p>	<p>-Análisis geoespacial de las transacciones indica que los estudiantes usan TP para ir a lugares importantes de la ciudad, y en menor cantidad para ir a la escuela.          -En promedio, un estudiante de 12° viaja 3 veces más que un estudiante de 9°.          -Viajes con distintos propósitos se verían afectados sin el descuento: 84% de viajes sociales, 75% recreacionales y 60% de compras.</p>	<p>-El descuento se usa primordialmente con propósitos de compra y ocio, no es tan directa la relación con la asistencia a escuela.          -El descuento mejora la movilidad independiente, aumentando la participación de estudiantes de noveno grado en actividades extracurriculares. (No habla de las otras cohortes)</p>	<p>-Creado principalmente para complementar el acceso a actividades extracurriculares impulsadas por el municipio. Además se vio como una oportunidad para dar acceso a transporte para otros motivos: ir a escuela (cambio de modo), acceder a puestos de trabajo y/o razones personales.</p>

				-Los viajes de los graduados en el último año que no siguieron estudiando siguen siendo similares a los de los de 12°.		-Hay información para calcular elasticidad.
38. Toronto Transit Commission: U-Pass Policy Framework (2018).	Estudiantes en Toronto, Canadá	De 0% a 100%. Previo pago de \$280 (por cuatrimestre).	Se propone la introducción del U-Pass para estudiantes de post-secundaria. Se define el nuevo enfoque de la política de tarifas del U-Pass y se recomienda su aprobación e implementación.	-El pase es diseñado para ser revenue y cost neutral. -Lo anterior es posible debido a que el pago del pase es obligatorio para todos los estudiantes. -Anualmente los estudiantes de las Universidades asociadas generan \$61.7M en ganancias. Se considera una generación de 30 viajes por mes por estudiante. -El costo adicional por los nuevos viajes inducidos se estima en \$4.2M	-Se espera un aumento de demanda del 15%, lo que induce 4.5 viajes extras por mes por estudiantes. Lo anterior resulta en un costo adicional de \$5 por estudiante por mes. -Para mantener el revenue neutral se necesita un valor de \$65 por mes. -Se estima que un aumento del 20% en la demanda aumentaría la tarifa mensual en \$1. Esto indica que el costo del pase no es tan sensible a cambios marginales con respecto al supuesto inicial.	"A U-Pass will make transportation more affordable for post-secondary students and could potentially unlock additional economic, educational and cultural opportunities".
39. The youth pass: A study of the conflicts between ideal and practical research design in a pilot social program,	Jóvenes de bajos ingresos en Massachusetts, EEUU	De 0 a 65% descuento.	Evaluar los efectos de un Programa piloto a través de encuestas que preguntaban: 1. propósito de viaje el día previo y 2. cómo hubieran	-Viajes en TP -Motivos de viaje	-Aumento de viajes alrededor de un 30% en los meses escolares. -Aumento de viajes alrededor de un 60% en los meses no escolares. -Alrededor del 13% de los viajes no se hubieran realizado bajo ningún otro modo.	

<p><b>Thistle and Paget-Seekins (2017).</b></p>			<p>hecho el viaje sin el programa a <b>962 participantes del piloto.</b></p>			
<p>40. U-PASS: A Model Transportation Management Program That Works, <b>Williams &amp; Petrait (1993).</b></p>	<p>Estudiantes Universidad de Washington</p>	<p>De 0% a 85% para estudiantes y staff de la facultad. Cabe destacar que para los usuarios que pagaban derecho a estacionar en la facultad el pase también era entregado</p>	<p>El paper busca mostrar los resultados del primer año de implementación del proyecto (pase para Transporte público gratis). El cual buscaba reducir el tráfico privado en los alrededores de la Facultad, reducir y/o mantener los estacionamientos utilizados en y alrededor de la facultad.</p>	<p>-Participación en el programa -Cantidad de viajes en auto -Cambios en elección modal</p>	<p>-Alrededor de un 72% de la facultad adquirió el pase. Para estudiantes un 97% lo adquirió directamente mientras que para el staff este valor fue de 57%. El resto fue entregado en conjunto al derecho a estacionar. -Los viajes en PM a la facultad se redujeron en un 15%, mientras que en PT un 9%. -Antes de la medida 33% del total de usuarios viajaba en auto (sin acompañante) y 21% en TP. Luego de la medida cambió a 23% y 33%. Este cambio fue primordialmente en los estudiantes. -15% de los viajes no fueron con el propósito de ir al campus.</p>	<p>-El aumento en las cuotas de derecho a estacionamiento cumplen la función de desincentivar el uso del auto sino que también son un método de financiar las medidas de reducción tarifaria en TP (en este caso financian cerca del 30%).</p>
<p>41. Transportation Demand Management - University of British Columbia (UBC) U-Pass - A Case Study, <b>Wu et al. (2004)</b></p>	<p>Estudiantes en la Universidad British Columbia.</p>	<p>De 0% a 100% previo pago de un monto en conjunto a la matrícula (monto no especificado) (No es opcional).</p>	<p>Tesis que busca revisar los efectos del descuento en partición modal, uso de SOV y ocupación de estacionamientos 5 años después de su implementación. Además se comparan estos efectos con estudios similares</p>	<p>-Los viajes totales aumentan y hay sustitución entre TP y los demás modos. En el caso de SOV la reducción fue de un 9%. -La partición modal del TP ha aumentado en un 21%. -La comparación (realizada con los efectos 1 año después de la implementación) muestra: -Todas las Universidades de la muestra aumentan el uso</p>	<p>-La reducida disminución en el uso de SOV se debe a que la mayoría de los que usan este modo requerían en promedio dos transbordos para llegar en TP a la Universidad. -El aumento de la partición modal en TP viene acompañado de una reducción del uso de HOV.</p>	<p>La medida tenía como objetivos principales: -Aumentar el uso de TP en un 20% -Reducir el uso de SOV en un 20%.  -Single Occupancy Vehicle (SOV) -High Occupancy Vehicle (HOV)</p>

			en otras Universidades.	de TP en al menos un 43% y un máximo de 180%. -Todas las Universidades reducen el uso de SOV, en un rango de 9% a 60%.		-No hay información sobre el monto del pago adicional en la matrícula ("Precio de la tarjeta").
42. Comparison of Reduced-Fare Programs for Low-Income Transit Riders, <b>Darling et al. (2021).</b>	Bajos ingresos EEUU	Entre 20% y 100%	Review: Comparación cualitativa de <b>11 programas en EEUU.</b>	-Cantidad de viajes en TP -Modos disponibles -Tarifa -Proceso de postulación -Elegibilidad: ingreso u otro medio.	-17 de las 50 agencias más grandes de EEUU tienen programas para bajos ingresos. -Proporción de gasto en transporte típicamente va entre 2% y 10%. Sin embargo, en algunos hogares de "very-low-income" este gasto puede ser aún mayor.	-Proposiciones de investigaciones futuras: "Entrevistas y discusiones con administradores de las agencias pueden mostrar como es el proceso interno de escoger el % de descuento" -Estudio publicado en 2021.
43. Accessibility, affordability and equity: Assessing 'pro-poor' public transport subsidies in Bogotá, <b>Guzmán &amp; Oviedo (2018).</b>	Bajos ingresos en Bogotá	De 0% a 50%	Estudio que analiza el impacto del programa en medidas de accesibilidad, "affordability" y equidad. Para la primera se usa un modelo Gravitacional con respecto al foco comercial de las ciudades, para affordability se utiliza el porcentaje del ingreso mensual gastado en transporte. Finalmente para	-Tiempo de Viaje -Costo del viaje -Gasto en transporte por zona. -Ingreso mensual promedio por zona. -Viajes promedios diarios por zona.	-Las zonas socialmente vulnerables son las más beneficiadas en términos de accesibilidad. -La población de bajos ingresos gasta 5 veces más que los de mayor ingreso. -La medida genera un ahorro de un 5% en gastos de transporte -Antes de la medida el 10% más rico tenía 1.4 veces más accesibilidad que el 40% más pobre. Luego de la medida esto se redujo un 13%.	-"Aims at alleviating the financial burden of poor households for accessing the city's public transport system". -"Although the results are to be expected given the nature of the policy under examination, exercises like the one presented are not often carried out nor are discussed openly in academia or practice".

			equidad se analiza la distribución de la accesibilidad por ingreso.			
44. Examining Implementation and Labor Market Outcomes of Targeted Transit Subsidies: Subsidy by Sistema Nacional de Selección de Beneficiarios for Urban Poor in Bogotá, Colombia, <b>Rodríguez et al. (2016)</b>	Bajos Ingresos en Bogotá	De 0% a 50%-60%	Estudio que busca determinar cuales son las variables al momento de elegir si tomar la concesión y cuáles son los impactos de esta en los outcomes del mercado laboral. Esto se realiza a través de regresiones lineales y probabilísticas para el primer objetivo y para el segundo se utiliza un método de diferencias en diferencias.	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Variables socioeconómicas (edad, sexo, estado civil, nivel educacional, ingreso, score SISBÉN)</li> <li>-Variables del hogar (tamaño, rol del hogar, N° de estudiantes)</li> <li>-Actividad realizada (buscando trabajo, estudiante, otras)</li> <li>-Variables de acceso (proximidad a entrega de tarjeta, uso en el vecindario, distancia a paradas, etc..)</li> <li>-Elección de acceder al descuento (variable dependiente)</li> <li>-Variables del mercado laboral (ingreso por hora, ingreso por hora de trabajo informal, ingreso familiar per cápita, desempleo, horas trabajadas, etc)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Tres variables parecieran influenciar más la elección de acceder al descuento: Género, empleabilidad y uso en el vecindario (boca en boca).</li> <li>-Los del quintil más bajo son 7% más probables de acceder al descuento. que los otros quintiles elegibles.</li> <li>-El impacto más grande de la concesión es en el ingreso por hora del trabajo informal. Otorga mejor movilidad y accesibilidad a oportunidades económicas.</li> </ul>	