



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

DESARROLLO Y MODELACIÓN DE UN SISTEMA DE CONVERSIÓN DE ENERGÍA A PARTIR DE VIBRACIONES PARA UN RANGO AMPLIO DE FRECUENCIAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MENCIÓN MECÁNICA
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

KARIM RICARDO PICHARA CARTES

PROFESOR GUÍA

VIVIANA MERUANE NARANJO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN

ALEJANDO ORTIZ BERNARDIN

RAFAEL RUIZ GARCIA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por
CONICYT-PCHA/Magíster Nacional/2014 - 22140641

SANTIAGO DE CHILE

2016

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO Y AL GRADO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MECÁNICA
POR: KARIM RICARDO PICHARA CARTES
FECHA: 2016
PROFESOR GUÍA: VIVIANA ISABEL MERUANE NARANJO

DESARROLLO Y MODELACIÓN DE UN SISTEMA DE CONVERSIÓN DE ENERGÍA A PARTIR DE VIBRACIONES PARA UN RANGO AMPLIO DE FRECUENCIAS

Energy harvesting es el proceso por el cual se “cosecha” energía desde fuentes externas, para alimentar dispositivos autónomos e inalámbricos. En particular se enfatiza la energía a partir de vibraciones. Los piezoeléctricos son dispositivos claves para convertir energía mecánica en energía eléctrica. Éstos han recibido la mayor atención en la literatura, debido a su gran densidad de potencia.

El objetivo principal de este trabajo es diseñar un sistema que utilice vigas piezoeléctricas unidas por resortes para convertir energía mecánica en eléctrica, y que sea capaz de operar en un rango amplio de frecuencias.

Se desarrolló un modelo analítico del sistema, el cual consiste en múltiples vigas piezoeléctricas con masas en la punta, unidas por resortes. El modelo realizado se basa en la teoría de Euler-Bernoulli para vigas, donde además se incluye el efecto piezoeléctrico del material. En primer lugar se estudia la parte mecánica y los modos de vibración, posteriormente se estudian el acoplamiento electromecánico del sistema y finalmente el voltaje y potencia que este sistema puede entregar.

Posteriormente, se desarrolló un montaje experimental que permitiese validar el modelo analítico. El experimento consiste en tres vigas piezoeléctricas unidas por resortes, las que son excitadas con un movimiento sinusoidal mediante un agitador electrodinámico. Se registra el voltaje generado por el sistema, el que es comparado posteriormente con las predicciones analíticas.

Los resultados experimentales son cercanos a lo predicho por el modelo analítico, validando así el modelo propuesto. El modelo analítico muestra que se puede convertir más energía al conectar las vigas por resortes. Sin embargo, esto no se ve reflejado en los resultados experimentales, debido a pérdidas de energía asociadas a los resortes, las que inicialmente no son consideradas en el análisis. Sin embargo, para reducir estas pérdidas se puede mejorar el montaje experimental, lo cual queda propuesto para un trabajo futuro.

A mis padres y abuelos

Agradecimientos

Quiero agradecer a toda mi familia, por darme todo el apoyo necesario para seguir adelante y completar este trabajo. A todos aquellos que siempre me preguntaban cómo me estaba yendo y me daban una palabra de ánimo.

Agradezco también a todas las personas que conocí durante mi estadía en la universidad, tanto compañeros como alumnos de mis clases auxiliares, de quienes aprendí más de lo que piensan, en particular gracias a mis amigos Javier Sánchez y Daniel Espinosa, siempre compartiendo conmigo y dándome apoyo.

Gracias a los profesores que me guiaron y respaldaron en este proceso, Alejandro Ortiz, Rafael Ruiz y en especial a Viviana Meruane, una gran profesora y más importante una gran persona, siempre dispuesta a ayudar a alumnos y darles un poco de su tiempo. Gracias también a los profesores del departamento de Física, que me dieron la oportunidad de ser profesor auxiliar en sus cursos, Nicolás Mujica, Nelson Zamorano, Álvaro Núñez, Néstor Sepúlveda, entre otros.

A mis amigos del colegio, Claudio Lucero, Gabriel Contreras, Daniel Martínez y Nicolás Pérez. Gracias en especial a Nicolás y su familia, por todo el apoyo y los deseos sinceros de éxito que siempre recibí de ellos.

A los funcionarios del departamento de Ing. Mecánica, en especial a Maricarmen y María Eugenia, siempre recibiéndonos con una sonrisa y una pequeña conversación que a más de alguno de nosotros nos alegraba el día. Gracias a Soledad por su simpatía y su eficiencia para resolver todos los problemas administrativos que pude tener como alumno.

Gracias a los cabros de Infested INC., Zora, Shari, P130, Silent, Soul, por todas las risas y alegrarme después de un día de trabajo.

Agradezco también a la Universidad de Chile por la beca de equidad que me permitió estudiar el pregrado y a CONICYT por la beca de magíster nacional que me permitió estudiar el postgrado.

Tabla de contenido

1. Introducción y objetivos.....	1
1.1 Introducción	1
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivo general.....	2
1.2.2 Objetivos específicos.....	2
2. Antecedentes	3
2.1 Vibraciones en sistemas con uno o más grados de libertad	3
2.1.1 Un grado de libertad.....	3
2.1.2 Dos o más grados de libertad	6
2.2 Piezoeléctricos y conversión de energía.....	10
2.2.1 Conceptos básicos.....	10
2.2.2 Sistemas con rangos de frecuencia amplios.....	11
3. Modelo analítico.....	15
3.1 Modos de vibración	15
3.2 Modelo electromecánico de un piezoeléctrico	19
3.3 Voltaje y potencia del sistema	23
3.4 Resultados analíticos.....	27
4. Desarrollo experimental.....	33
4.1 Montaje.....	33
4.2 Resultados experimentales	39
4.3 Comparación analítico-experimental	41
5. Conclusiones.....	45
Bibliografía.....	46
Anexos	47
Anexo A: Códigos MATLAB.....	47

Índice de tablas

Tabla 1. Masas puntuales para cada viga de las figuras 20 y 21	29
Tabla 2. Área bajo la curva de distintos casos	31
Tabla 3. Características del agitador.....	35
Tabla 4. Características del sistema de adquisición de datos	35
Tabla 5. Parámetros de los piezoeléctricos.....	36
Tabla 6. Parámetros del software de adquisición de datos	37
Tabla 7. Área bajo la curva de datos experimentales	43

Índice de figuras

Figura 1. Masa adherida a un resorte	3
Figura 2. Amplitud, periodo y fase de un movimiento sinusoidal	4
Figura 3. Respuesta forzada de un sistema masa-resorte sin roce, excitado en su frecuencia de resonancia	5
Figura 4. Rigidez asociada a vibración transversal	5
Figura 5. Gráfico logarítmico de la amplitud normalizada en función de la razón de frecuencias para distintos valores de amortiguamiento	6
Figura 6. Sistemas de dos grados de libertad. a) Dos masas que pueden oscilar independientes una de la otra. b) Una masa con dos direcciones posibles para moverse	7
Figura 7. Movimiento transversal de una viga	7
Figura 8. Esquema de una viga piezoeléctrica	10
Figura 9. Sistema de vigas con masas en la punta	11
Figura 10. Diagrama de Bode	12
Figura 11. Sistema de conversión de energía con absorbedor de vibraciones	12
Figura 12. Sistema multi-modo compuesto por vigas (W. Zhou, G. R. Penamalli y L. Zuo)	13
Figura 13. Sistema de dos grados de libertad (Y. Yang y L. Tang)	13
Figura 14. Sistema de n grados de libertad (Y. Yang y L. Tang)	14
Figura 15. Arreglo de piezoeléctricos con masas en la punta conectados por resortes	15
Figura 16. Esquema de la viga i.....	17
Figura 17. Conexión eléctrica en paralelo de las vigas.....	23
Figura 18. Potencia FRF para distinto número de vigas idénticas con masas en la punta, sin unir las por resorte.....	27
Figura 19. Potencia FRF para distinto número de vigas idénticas unidas por resortes con masas en la punta.....	28
Figura 20. Potencia FRF para distinta cantidad de vigas idénticas, masas distintas y resortes idénticos, conectadas por resortes.....	28
Figura 21. Potencia FRF para distinta cantidad de vigas idénticas, masas distintas, sin resortes	29
Figura 22. Comparación de potencia con y sin resortes, 2 vigas	30
Figura 23. Comparación de potencia con y sin resortes, 4 vigas	30
Figura 24. Comparación de potencia con y sin resortes, 6 vigas	31
Figura 25. Potencia FRF para dos vigas con masas distintas, variando la constante del resorte	32
Figura 26. Diseño de la estructura, vista isométrica	33
Figura 27. Montaje de los piezoeléctricos.....	34
Figura 28. a) Agitador electrodinámico. b) Hardware de adquisición de datos.....	34
Figura 29. Masas ubicadas en la punta.....	35
Figura 30. Sistema con resortes en la punta	36
Figura 31. Configuración del sistema	37
Figura 32. Potencia FRF del caso 1	39
Figura 33. Potencia FRF del caso 2.....	40
Figura 34. Potencia FRF del caso 3	40

Figura 35. Potencia FRF del caso 4.....	41
Figura 36. Comparación casos analítico y experimental, PZT 1	41
Figura 37. Comparación casos analítico y experimental, PZT 2	42
Figura 38. Comparación casos analítico y experimental, PZT 3.....	42
Figura 39. Potencia FRF caso 2, analítico y experimental	43

1. Introducción y objetivos

Dentro de esta sección se presentan la introducción y los objetivos de este trabajo.

1.1 Introducción

La recolección de energía a base de vibraciones ha sido investigada por varios científicos en la última década [1 – 9]. El objetivo final de este campo de investigación es alimentar pequeños componentes electrónicos (tales como sensores inalámbricos) mediante el uso de las vibraciones disponibles en su entorno. Entre los mecanismos básicos que se pueden utilizar para la conversión de vibraciones a energía eléctrica, los piezoeléctricos han recibido la mayor atención en la literatura.

Los materiales piezoeléctricos son los preferidos en la recolección de energía debido a sus grandes densidades de potencia y facilidad de aplicación. Típicamente, recolectores de energía piezoeléctricos son estructuras empotradas con capas piezocerámicas que generan salida de tensión alterna debido a la excitación de la base. Como una primera aproximación, se tiene que una viga piezoeléctrica empotrada posee solamente una frecuencia de resonancia y, por lo tanto, una sola frecuencia que produce gran amplitud. Si se aumenta la banda de frecuencia del sistema se obtiene una conversión de energía mucho más favorable.

Este trabajo presenta el análisis de un modelo que utiliza piezoeléctricos unidos por resortes para poder aumentar los grados de libertad del sistema y, de esta forma, aumentar la banda de frecuencias en las cuales el sistema es útil para la conversión de energía.

Se comienza estudiando los modos de vibración de un sistema de vigas empotradas con masas en la punta y unidas por resortes. Este análisis luego se integra con el modelo electromecánico de un piezoeléctrico y se obtiene la ecuación que define el voltaje y la potencia del sistema. Los resultados de lo anterior se visualizan en Matlab y se comparan varios casos.

Finalmente se realiza un montaje experimental para comprobar los resultados analíticos del sistema propuesto y verificar si efectivamente hay un aumento en la banda de frecuencias.

1.2 Objetivos

A continuación se presentan los objetivos de este trabajo.

1.2.1 Objetivo general

El objetivo general es desarrollar y modelar un sistema de conversión de energía a partir de vibraciones, que utilice materiales piezoeléctricos y que pueda funcionar en un rango amplio de frecuencias de operación.

1.2.2 Objetivos específicos

Los objetivos específicos son los siguientes:

- Diseñar un sistema de conversión de energía utilizando vigas piezoeléctricas que contenga múltiples frecuencias de resonancia en un rango de frecuencias.
- Construir un modelo analítico del sistema antes descrito, utilizando la teoría de Euler-Bernoulli.
- Desarrollar un montaje experimental que permita validar los resultados analíticos.
- Comparar los resultados experimentales con los analíticos y proponer posibles mejoras al modelo.

2. Antecedentes

La siguiente sección contiene los antecedentes necesarios para conocer el contexto dentro del cual se trabaja. Se abarcan temas básicos de vibraciones y de los materiales utilizados para la conversión de energía.

2.1 Vibraciones en sistemas con uno o más grados de libertad

2.1.1 Un grado de libertad

Una vibración se puede considerar como la oscilación o el movimiento repetitivo de un objeto alrededor de una posición de equilibrio. Un modelo simple para estudiar vibraciones es un resorte con un extremo fijo y una masa adherida en el otro extremo, como se muestra en la figura 1.

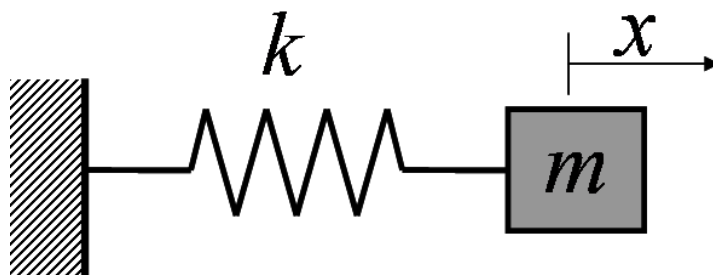


Figura 1. Masa adherida a un resorte

Donde m representa la masa, x la posición de ésta a partir del largo natural del resorte y k es la constante elástica. Esta constante representa qué tan difícil es estirar o comprimir el resorte, es decir, si la constante elástica tiene un valor muy grande, se requiere una gran fuerza para estirar el resorte una corta distancia.

Realizando una suma de fuerzas sobre la masa, considerando que solamente existe la fuerza elástica del resorte, se obtiene la ecuación de movimiento en la dirección x :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1)$$

En la ecuación (1) $\ddot{x}(t)$ representa la aceleración de la masa, k es la constante de rigidez del resorte ya mencionada anteriormente y $x(t)$ es la posición de la masa. La solución para esta ecuación se puede escribir como:

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi) \quad (2)$$

Esto describe un movimiento oscilatorio de frecuencia ω_n y amplitud A . La constante ω_n se denomina frecuencia natural y determina el intervalo de tiempo en el cual la función se repite. El periodo T y la frecuencia se relacionan mediante la relación $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$. La fase, representada por ϕ , determina el valor inicial de la función sinusoidal. En la figura 2 se tiene una interpretación gráfica de estos valores.

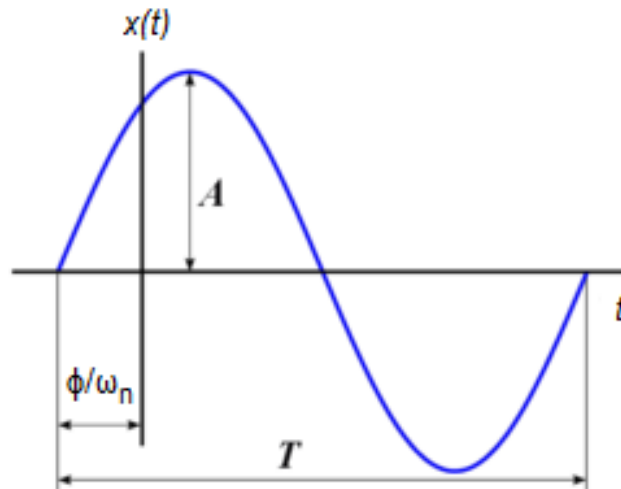


Figura 2. Amplitud, periodo y fase de un movimiento sinusoidal

Cuando al sistema en estudio se le añade amortiguamiento cambia la frecuencia de oscilación (denominada también ‘frecuencia natural amortiguada’) y por lo tanto también cambia la frecuencia de resonancia.

La resonancia es un fenómeno en el cual el cuerpo oscila con una amplitud muy grande. Esto está dado por estímulos externos, ya sea mediante una fuerza externa o un movimiento en la base, por mencionar un par de ejemplos. Si la frecuencia de este estímulo produce resonancia, se le denomina frecuencia de resonancia. En el caso particular de sistemas que contienen roce despreciable, o mejor dicho disipación de energía despreciable, se encuentra que la frecuencia

natural coincide con la frecuencia de resonancia. En la figura 3 se aprecia un movimiento en resonancia, se observa que su amplitud va creciendo a medida que el tiempo avanza.

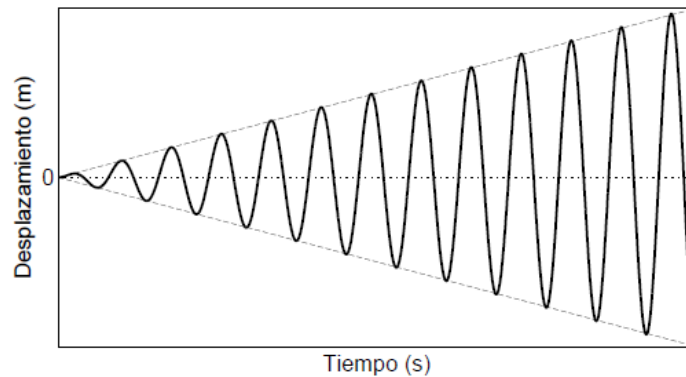


Figura 3. Respuesta forzada de un sistema masa-resorte sin roce, excitado en su frecuencia de resonancia

Si se reemplaza el resorte de la figura 1 por una viga de largo l , sección de área A y módulo de Young E , el sistema puede oscilar como si estuviera unido a un resorte con una rigidez equivalente de $k = \frac{3EI}{l^3}$, tal como se observa en la figura 4.

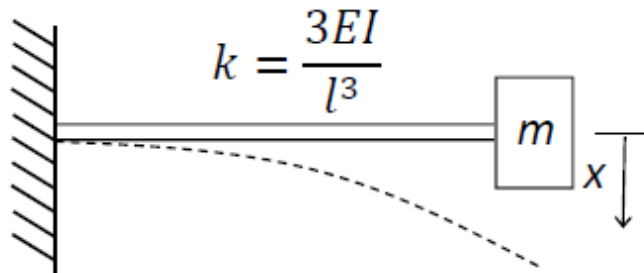


Figura 4. Rigidez asociada a vibración transversal

Como último comentario con respecto a los sistemas de un grado de libertad, vale la pena mencionar que la frecuencia de resonancia es única y la amplitud máxima que el sistema alcanza depende directamente del roce al cual está sometido éste. Si el roce es despreciable, la frecuencia de resonancia será igual a la frecuencia natural, pero cuando el roce es mayor que cero, estas frecuencias son distintas entre sí.

En la figura 5 se puede apreciar el efecto del roce sobre la amplitud que se alcanza para los distintos casos. Se define r como la razón de frecuencias, dado por $r = \frac{\omega}{\omega_n}$, donde ω es la frecuencia de excitación y ω_n es la frecuencia natural. La letra ζ representa la razón de amortiguamiento, la cual tiene directa relación con el roce del sistema.

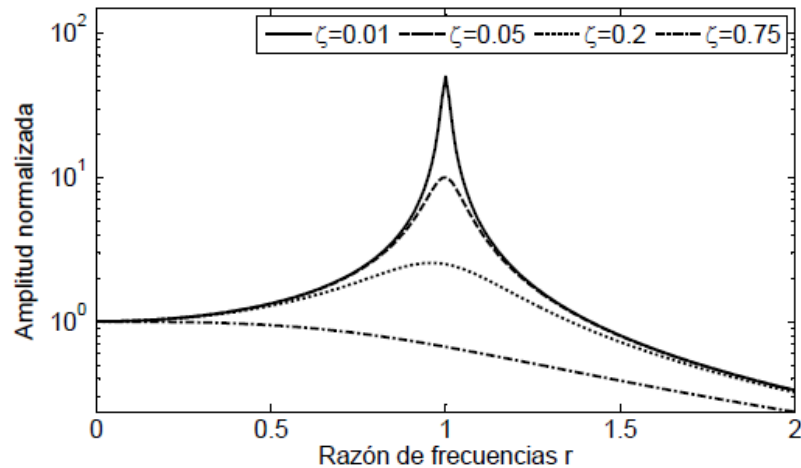


Figura 5. Gráfico logarítmico de la amplitud normalizada en función de la razón de frecuencias para distintos valores de amortiguamiento

2.1.2 Dos o más grados de libertad

En la sección anterior se tenía una sola masa en estudio, la cual puede oscilar en una única dirección, por eso se dice que tiene un solo grado de libertad. Si esa masa se pudiera mover en dos direcciones, se dice que tiene dos grados libertad. Equivalentemente, si se tiene un sistema compuesto por dos masas que pueden moverse en dos direcciones independientes entre sí, también se dice que posee dos grados de libertad. Este concepto se puede expandir a más de dos grados de libertad de forma análoga. La figura 6 representa lo mencionado anteriormente.

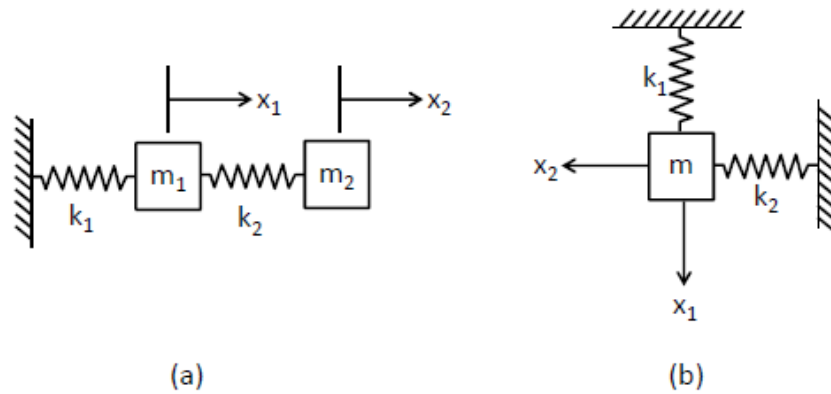


Figura 6. Sistemas de dos grados de libertad. a) Dos masas que pueden oscilar independientes una de la otra. b) Una masa con dos direcciones posibles para moverse

De estos sistemas se deben mencionar dos puntos importantes:

1. Un sistema de dos grados de libertad posee dos frecuencias naturales (por supuesto que se extrapola a sistemas con más grados de libertad)
2. Existen vectores llamados “modos normales”, los cuales representan la forma en la cual ocurre la vibración

Existen sistemas denominados sistemas continuos, los cuales consisten en un conjunto de masas infinitesimales. Al poseer infinitas masas, poseen infinitos grados de libertad y, por lo tanto, infinitas frecuencias naturales. Se puede mencionar a modo de ejemplo una barra vibrando longitudinalmente o una viga vibrando transversalmente. Particularmente se estudiará este caso, ya que se asemeja a la forma en la cual vibran los piezoeléctricos en estudio (esto se puede observar en la figura 7).

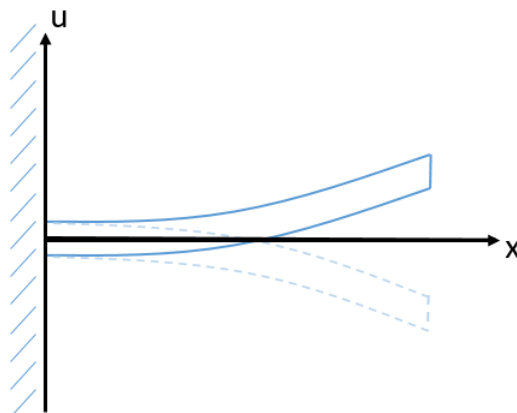


Figura 7. Movimiento transversal de una viga

Para poder describir aquel movimiento transversal de forma analítica, se utiliza el modelo de Euler-Bernouilli, el cual considera los siguientes supuestos para la viga:

- Es uniforme a su largo
- Está compuesta de un material lineal, isotrópico y elástico sin cargas axiales
- Las secciones planas se mantienen planas
- El plano de simetría de la viga es también el plano de vibración, de manera que la rotación y traslación están desacopladas
- La inercia rotacional y la deformación por corte se pueden despreciar

Asumiendo sección constante y sin fuerzas externas, la ecuación que describe el movimiento para una viga es:

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (3)$$

Donde $w(x, t)$ representa la deflexión vertical de la viga y la constante $c^2 = \frac{EI}{A\rho}$.

La ecuación (3) se resuelve usando métodos de separación de variables. La deflexión se puede separar en una parte espacial $X(x)$ y en una parte temporal $T(t)$. La solución espacial viene dada por:

$$X(x) = a_1 \sin \beta x + a_2 \cos \beta x + a_3 \sinh \beta x + a_4 \cosh \beta x \quad (4)$$

Donde $\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2}$. El valor de β y tres de las cuatro constantes se pueden determinar mediante cuatro condiciones de borde. El valor de la otra constante se combina con las constantes de la ecuación temporal, las cuales se determinan con condiciones iniciales. Esta ecuación también representa los modos de vibración.

Usando lo anterior y añadiendo los efectos de amortiguamiento, la ecuación de movimiento puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} \\ = -m \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (5)$$

En la ecuación (5) hay que considerar que si la base de la viga se mueve, el movimiento de esta se puede ver como una superposición entre el movimiento de la base y el movimiento relativo entre la viga y la base; $w_{rel}(x, t)$ es la deflexión transversal de la viga relativa a la base, $M(x, t)$ es el momento interno, $c_s I$ es el amortiguamiento equivalente de la sección transversal debido a la viscoelasticidad estructural, c_a es el coeficiente de roce viscoso del aire, m es la masa por unidad de largo de la viga y $w_b(x, t)$ es el desplazamiento vertical de la base.

Esta descripción del modelo continuo, que muestra resultados coherentes [5], se utiliza como base para el trabajo desarrollado.

2.2 Piezoeléctricos y conversión de energía

2.2.1 Conceptos básicos

La obtención de energía eléctrica a partir de vibraciones (denominado en inglés como “*vibration-based energy harvesting*”) ha sido estudiado por muchos investigadores en la última década [1] [2]. El objetivo final en este campo es poder alimentar de energía eléctrica pequeños dispositivos electrónicos usando vibraciones encontradas en su entorno.

Dentro de todos los mecanismos que hacen posible esto, se ha puesto mucha atención en los dispositivos piezoeléctricos [3]. Los materiales piezoeléctricos son preferidos en esta área debido a su gran densidad de potencia y simplicidad de uso. Típicamente, para recolección de energía se utilizan estructuras empotradas con capas piezoeléctricas como la mostrada en la figura 8, esta estructura genera un voltaje alterno debido a la vibración de la viga.

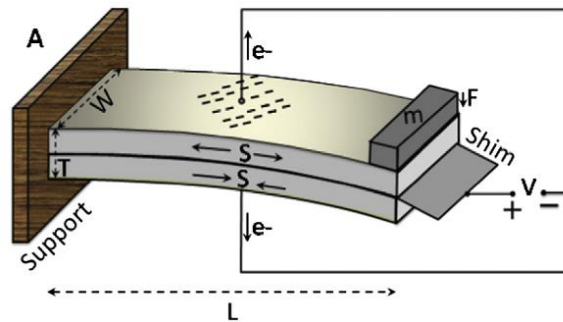


Figura 8. Esquema de una viga piezoeléctrica

Cuando un material piezoeléctrico es deformado, las moléculas centrales en el cristal se polarizan y forman un dipolo. Si los dipolos se ordenan, las dos superficies del material se cargan de forma positiva y negativa. Esta propiedad puede ser usada para transformar esfuerzo mecánico en energía eléctrica. Las ecuaciones constitutivas del material piezoeléctrico están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^E & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\epsilon}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Donde D , E , S y T son el desplazamiento eléctrico, el campo eléctrico, la deformación y el esfuerzo, respectivamente; ϵ es la permitividad del elemento piezoeléctrico y e es la constante piezoeléctrica que relaciona la carga y la deformación. Los superíndices E y S indican que el parámetro está bajo campo eléctrico constante o deformación constante, mientras que el superíndice T indica la transpuesta de la matriz. Se observa de lo anterior que las ecuaciones mecánicas y eléctricas se encuentran acopladas. Esto hace complejo establecer un modelo, lo que ha derivado en la propuesta de distintos modelos para el mismo problema. Estos modelos van desde sistemas de un grado de libertad [4] a sistemas continuos utilizando la teoría de una viga de Euler-Bernoulli [5]. Este último ha mostrado resultados coherentes (comparando los estudios experimentales y teóricos) al predecir el comportamiento de este tipo de vigas.

2.2.2 Sistemas con rangos de frecuencia amplios

Para una estructura con un solo piezoeléctrico se tendrá que la mayor amplitud de vibración (y por ende la máxima potencia a extraer) ocurre con frecuencias de excitación cercanas a la frecuencia de resonancia. No obstante, las vibraciones de las cuales se quiere extraer vibración están usualmente compuestas por más de una frecuencia. Lo anterior genera la motivación de estudiar sistemas más complejos, con más grados de libertad, que permitan cosechar energía en un rango de frecuencias de operación más amplio. Esto se puede lograr, por ejemplo, con un arreglo de vigas donde cada una tiene una frecuencia de resonancia distinta o con sistemas con múltiples grados de libertad como los mostrados en la figura 9.

La figura 9 representa un modelo estudiado por S. M. Shahriz [7], en el cual se hace un arreglo de vigas con masas en la punta, sin unirlas entre ellas. Cada viga tiene una frecuencia de resonancia distinta y gracias a esto se tiene que al menos una viga oscilará con gran amplitud dada cierta frecuencia. La figura 10 muestra el diagrama de Bode de la función transferencia correspondiente a este sistema. Se puede observar una banda de frecuencia para el sistema.

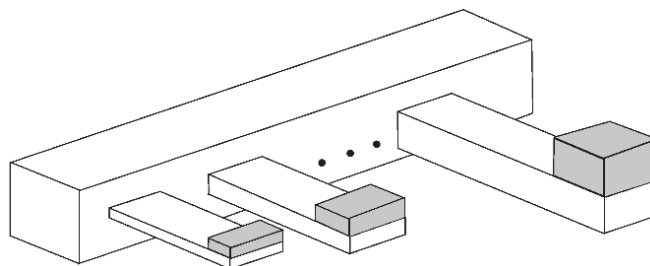


Figura 9. Sistema de vigas con masas en la punta

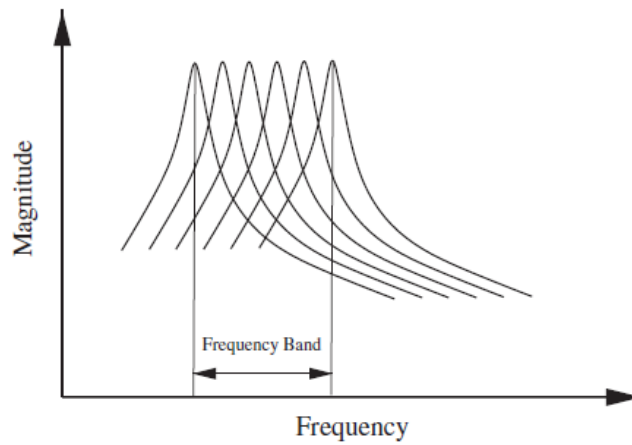


Figura 10. Diagrama de Bode

W. Zhou, G. R. Penamalli y L. Zuo estudiaron un arreglo distinto [8] para poder convertir energía. Consiste en diseñar un sistema como el de la figura 12, el cual se basa en dos estructuras (una viga de apoyo y un piezoeléctrico) que se comportan similar a un sistema con una masa principal y un absorbedor de vibraciones (figura 11)

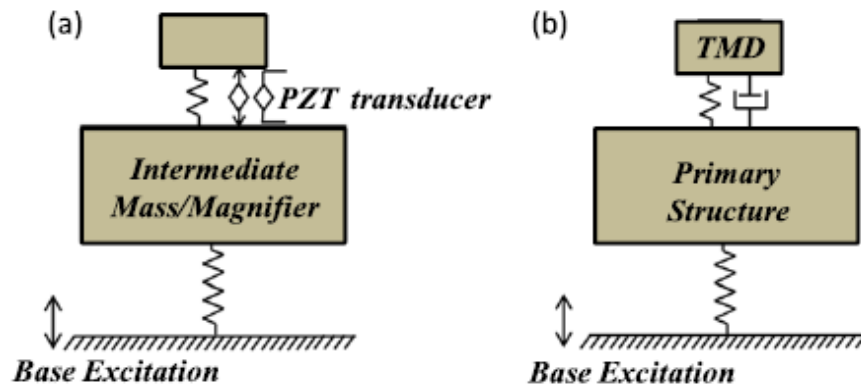


Figura 11. Sistema de conversión de energía con absorbedor de vibraciones

La diferencia fundamental entre ambos sistemas es que en la figura 11 solamente se tienen 2 grados de libertad, en cambio en la figura 12 existen infinitos grados de libertad por el hecho de ser cuerpos continuos.

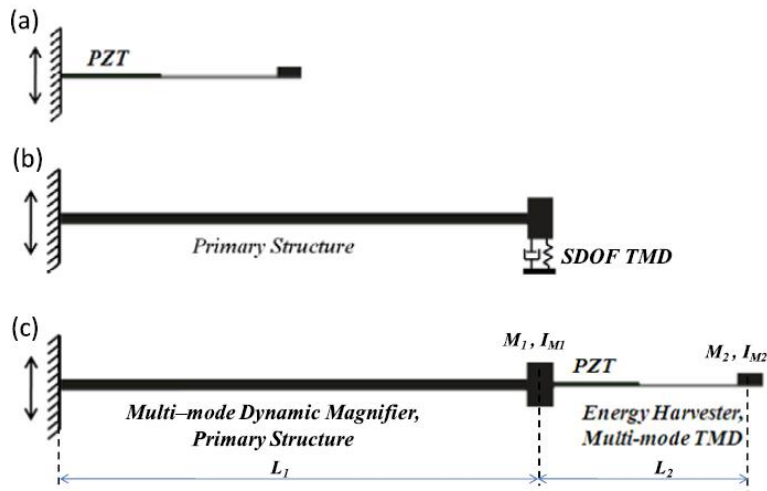


Figura 12. Sistema multi-modo compuesto por vigas (W. Zhou, G. R. Penamalli y L. Zuo)

Otro modelo desarrollado es el de Y. Yang y L. Tang, el cual es muy similar al caso anterior, hay una masa principal a la cual se le añaden otras masas para aumentar la cantidad de grados de libertad; la diferencia radica en la posición del piezoeléctrico. La figura 13 representa el sistema mencionado considerando dos grados de libertad y la figura 14 considera n grados de libertad.

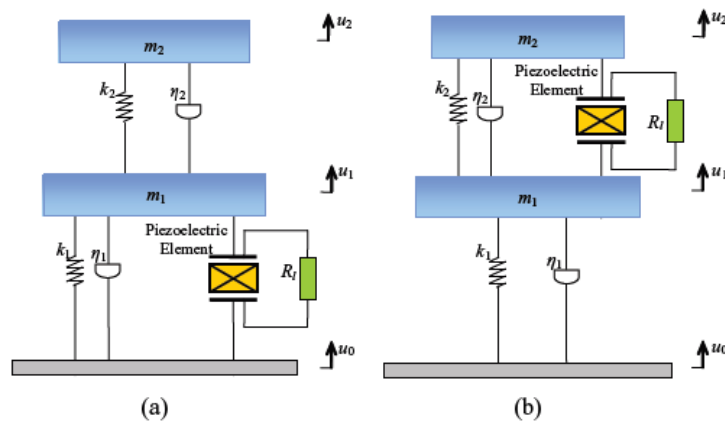


Figura 13. Sistema de dos grados de libertad (Y. Yang y L. Tang)

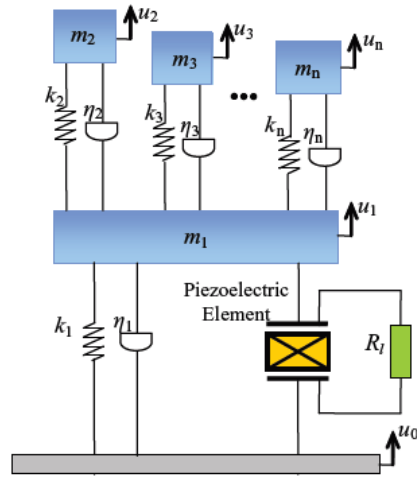


Figura 14. Sistema de n grados de libertad (Y. Yang y L. Tang)

En este trabajo de tesis se desarrollará un modelo similar al mostrado en la figura 9. Se estudiará un sistema de vigas con masas en la punta, salvo que ahora se incluye una conexión mecánica entre las vigas mediante resortes, lo que permite modificar los modos de vibración y aumentar la banda de frecuencia efectiva.

3. Modelo analítico

El modelo analítico desarrollado en este trabajo de tesis se presenta por partes, comenzando por un análisis puramente mecánico, luego se muestra el análisis electromecánico, ya que ambos están acoplados. Finalmente se hace un estudio de la conversión eléctrica, analizando la potencia que es posible de extraer de este sistema.

3.1 Modos de vibración

Dada la necesidad de desarrollar sistemas con rangos amplios de frecuencias de operación, se propone utilizar una configuración de múltiples vigas unidas por resortes, tal como se muestra en la figura 15. Esto equivale a un sistema con múltiples frecuencias de resonancias en una banda de frecuencias. Este sistema se espera sea más eficiente que el sistema actual de vigas independientes, ya que a diferencia del caso anterior, permite la resonancia de varias vigas las mismo tiempo.

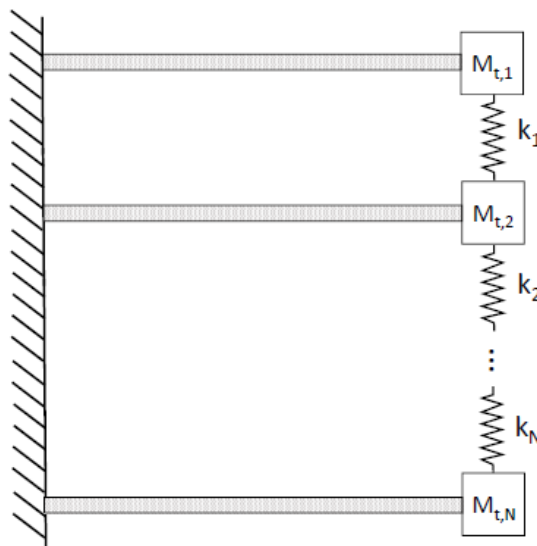


Figura 15. Arreglo de piezoeléctricos con masas en la punta conectados por resortes

Se desarrollará un modelo continuo basado en la teoría de Euler-Bernoulli que es el que ha demostrado una mejor aproximación a la realidad. Este modelo será validado con mediciones experimentales.

Al considerar una viga arbitraria dentro del sistema (a la cual se le llamará viga i), se tiene la siguiente ecuación para el modo de vibración, la cual se obtiene a partir de la ecuación (4):

$$X_i(x) = a_1^i \sin \beta x + a_2^i \cos \beta x + a_3^i \sinh \beta x + a_4^i \cosh \beta x \quad (7)$$

El superíndice i representa que se está describiendo la viga i .

Las condiciones de borde para esta viga se enuncian a continuación. Todas las vigas cumplen las mismas condiciones.

Para el extremo izquierdo se cumplen condiciones de desplazamiento y rotación nula:

$$X_i(0) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial x}(0) = 0 \quad (9)$$

Para el extremo derecho se cumple momento de flexión nulo y equilibrio de fuerzas considerando la fuerza de corte:

$$YI \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(YI \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right) = -M_{t,i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - k_i(w_i - w_{i+1}) - k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) \quad (11)$$

Donde $M_{t,i}$ es la masa en la punta de la viga i , k_i es la rigidez del resorte i , Y es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal.

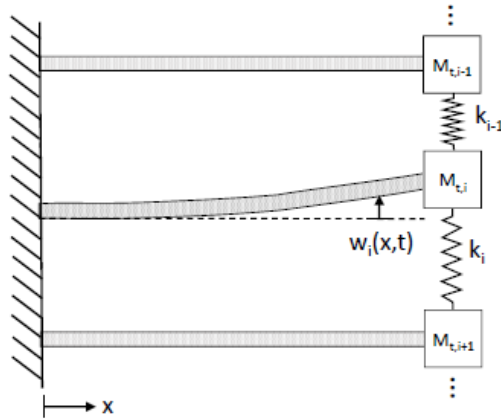


Figura 16. Esquema de la viga i

Recordando que con separación de variables se tiene que $w_i(x, t) = X(x)T(t)$ y notando que $\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -\omega_n^2 T(t)$, es posible reescribir las ecuaciones (10) y (11) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 X_i(L)}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

$$YI \frac{\partial^3 X_i(L)}{\partial x^3} = \omega_n^2 M_{t,i} X_i(L) - k_i (X_i(L) - X_{i+1}(L)) - k_{i-1} (X_i(L) - X_{i-1}(L)) \quad (13)$$

Finalmente, si las ecuaciones (12) y (13) se reemplazan en la ecuación (7) se obtiene:

$$X_i(x) = a_1^i (\sin \beta x - \sinh \beta x) + a_2^i (\cos \beta x - \cosh \beta x) \quad (14)$$

Haciendo los reemplazos correspondientes, se puede escribir la ecuación de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3(k_{i-1}) & \alpha_4(k_{i-1}) & \alpha_5(M_{t,i}, k_i, k_{i-1}) & \alpha_6(M_{t,i}, k_i, k_{i-1}) & \alpha_3(k_i) & \alpha_4(k_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{i-1} \\ a_2^{i-1} \\ a_1^i \\ a_2^i \\ a_1^{i+1} \\ a_2^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Donde:

$$\alpha_1 = \sin \beta L + \sinh \beta L$$

$$\alpha_2 = \cos \beta L + \cosh \beta L$$

$$\alpha_3(k_i) = k_i(\sinh \beta L - \sin \beta L)$$

$$\alpha_4(k_i) = k_i(\cosh \beta L - \cos \beta L)$$

$$\alpha_5(M_{t,i}, k_i, k_{i-1}) = (k_i + k_{i-1} - \omega_n^2 M_{t,i})(\sin \beta L - \sinh \beta L) + YI \beta^3 (\cos \beta L + \cosh \beta L)$$

$$\alpha_6(M_{t,i}, k_i, k_{i-1}) = (k_i + k_{i-1} - \omega_n^2 M_{t,i})(\cos \beta L - \cosh \beta L) + YI \beta^3 (\sin \beta L + \sinh \beta L)$$

La ecuación (15) sirve para las N vigas del sistema, excepto para la primera y la última, ya que están conectadas a un resorte y no dos. La ecuación para la primera viga es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_5(M_{t,1}, k_1, 0) & \alpha_6(M_{t,1}, k_1, 0) & \alpha_3(k_1) & \alpha_4(k_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_1^2 \\ a_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Para la última viga se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3(k_{N-1}) & \alpha_4(k_{N-1}) & \alpha_5(M_{t,N}, 0, k_{N-1}) & \alpha_6(M_{t,N}, 0, k_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{N-1} \\ a_2^{N-1} \\ a_1^N \\ a_2^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Acoplando todas las ecuaciones, se llega a un sistema de $2 \times N$ ecuaciones, las cuales se pueden escribir como una ecuación matricial, de la forma

$$\mathbf{C} \vec{a} = \vec{0} \quad (18)$$

donde \mathbf{C} es la matriz de coeficientes, \vec{a} es el vector que contiene las incógnitas. Esta ecuación tiene solución no nula solamente si el determinante de la matriz \mathbf{C} es cero, es decir, la matriz es singular. Al realizar la operación mencionada anteriormente se obtiene la ecuación característica, la cual es satisfecha por infinitos valores de β , los cuales se denotarán β_r . El

vector \vec{a} se calcula reemplazando β_r en la matriz \mathbf{C} y calculando el núcleo de la matriz. Para cada valor de β_r se obtiene un vector \vec{a}_r diferente.

Dado β_r y \vec{a}_r , los modos de vibración están dados por:

$$X_{r,i}(x) = a_{r,1}^i (\sin \beta_r x - \sinh \beta_r x) + a_{r,2}^i (\cos \beta_r x - \cosh \beta_r x) \quad (19)$$

La frecuencia natural asociada al r -ésimo modo de vibración está dado por:

$$\omega_{n,r} = \beta_r^2 \sqrt{\frac{YI}{m}} \quad (20)$$

3.2 Modelo electromecánico de un piezoeléctrico

Tal como se menciona en la sección 2.1.2, se utiliza un modelo de Euler-Bernoulli para describir a los piezoeléctricos. Se toma la ecuación (5) y se le agrega una masa puntual en el extremo derecho. Con ese cambio, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial t^2} \\ = -(m + M_t \delta(x-L)) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (21)$$

Donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac.

El momento interno está dado por la integral de la distribución de esfuerzos a través de la sección transversal de la viga

$$M(x,t) = - \int_{h_a}^{h_b} T^s b y \, dy - \int_{h_b}^{h_c} T^p b y \, dy \quad (22)$$

Donde b es el ancho de la viga, h_a es la posición de la parte inferior de la subestructura desde el eje neutro, h_b es la posición de la parte inferior del piezoeléctrico desde el eje neutro y h_c es la posición de la parte superior del piezoeléctrico desde el eje neutro. Los superíndices p y s representan ‘piezoeléctrico’ y ‘subestructura’ respectivamente. La distribución de esfuerzo a través de la sección está dada por las relaciones esfuerzo-deformación

$$T^s = Y^s S^s \quad (23)$$

$$T^p = Y^p S^p - d_{31} E \quad (24)$$

Donde T es el esfuerzo, S es la deformación, Y es el módulo de Young, d es la constante piezoeléctrica y E es el campo eléctrico. La deformación por flexión puede ser expresada en términos del radio de curvatura como:

$$S(x, y, t) = -y \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} \quad (25)$$

Donde y es la posición vertical de un punto de la viga medido a partir de su eje neutro.

El campo eléctrico puede ser escrito en términos del voltaje a través del piezoeléctrico, $v(t)$, y el espesor del piezoeléctrico, h_p

$$E(t) = -\frac{v(t)}{h_p} \quad (26)$$

Haciendo el reemplazo de las ecuaciones anteriores en la ecuación (22), se obtiene:

$$M(x, t) = Y^s b \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} \int_{h_a}^{h_b} y^2 dy + Y^p b \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} \int_{h_b}^{h_c} y^2 dy - d_{31} \frac{v(t)b}{h_p} \int_{h_b}^{h_c} y dy \quad (27)$$

Resolviendo las integrales de la ecuación (27) se obtiene:

$$(x, t) = \left(Y^s \left(\frac{h_b^3}{3} - \frac{h_a^3}{3} \right) + Y^p \left(\frac{h_c^3}{3} - \frac{h_b^3}{3} \right) \right) b \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} - d_{31} \frac{Y^p b}{h_p} \left(\frac{h_c^2}{2} - \frac{h_b^2}{2} \right) v(t) \quad (28)$$

La ecuación (28) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$M(x, t) = YI \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} + \vartheta v(t)(\Phi(x) - \Phi(x - L)) \quad (29)$$

Donde L es el largo del piezoeléctrico y $\Phi(x)$ es la función escalón. Se ha asumido que la capa de material piezoeléctrico cubre toda la estructura. La constante YI representa la rigidez de flexión de la viga, dada por:

$$YI = \left(Y^s \left(\frac{h_b^3}{3} - \frac{h_a^3}{3} \right) + Y^p \left(\frac{h_c^3}{3} - \frac{h_b^3}{3} \right) \right) b \quad (30)$$

El término ϑ representa el acoplamiento entre la deformación y el voltaje

$$\vartheta = -d_{31} \frac{Y^p b}{h_p} \left(\frac{h_c^2}{2} - \frac{h_b^2}{2} \right) \quad (31)$$

Finalmente, reemplazando todo lo anterior en la ecuación (21) se obtiene:

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} + \vartheta v(t) \left[\frac{\partial \delta(x)}{\partial x} - \frac{\partial \delta(x - L)}{\partial x} \right] = -(m + M_t \delta(x - L)) \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial t} \quad (32)$$

La ecuación (32) es la ecuación de movimiento, que considera el acoplamiento mecánico y eléctrico. Para obtener la ecuación eléctrica, se debe comenzar con la relación constitutiva de los piezoeléctricos:

$$D = d_{31} T^p + \epsilon_{33}^T E \quad (33)$$

Donde D es el desplazamiento eléctrico, ϵ_{33}^T es la permitividad a esfuerzo constante. Reemplazando la definición de T^p de la ecuación (33) se obtiene:

$$D(x, t) = d_{31}(Y^p S^p - d_{31} E) + \epsilon_{33}^T E = d_{31} Y^p S^p - \epsilon_{33}^S \frac{v(t)}{h_p} \quad (34)$$

Donde $\epsilon_{33}^S = d_{31}^2 Y^p - \epsilon_{33}^T$. La deformación S^p evaluada en el medio de la capa piezoeléctrica está dada por

$$S^p = -h_{pc} \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} \quad (35)$$

Donde h_{pc} es la distancia del centro de la capa piezoeléctrica al eje neutro. Entonces se tiene:

$$D(x, t) = -d_{31}Y^p h_{pc} \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} - \epsilon_{33}^S \frac{v(t)}{h_p} \quad (36)$$

La carga eléctrica se obtiene al integrar el desplazamiento eléctrico en el área de la viga. Su expresión queda de la siguiente manera:

$$q(t) = - \int_0^L \left(d_{31}Y^p h_{pc} \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} - \epsilon_{33}^S \frac{v(t)}{h_p} \right) b \, dx \quad (37)$$

Se sabe que la intensidad de corriente $i(t)$ es la derivada temporal de la carga, por lo tanto la expresión para $i(t)$ es:

$$i(t) = -2 \frac{\epsilon_{33}^S b L}{h_p} \frac{\partial v(t)}{\partial t} - 2 \int_0^L \left(d_{31}Y^p h_{pc} \frac{\partial^3 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) b \, dx \quad (38)$$

El factor 2 que se observa en la ecuación (38) es debido a que las dos capas del piezoeléctrico están conectadas en paralelo, por lo tanto $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

Si la viga está conectada directamente a una resistencia, el voltaje está dado por la relación $v(t) = R_l i(t)$

$$v(t) = -2R_l \left[\frac{\epsilon_{33}^S b L}{h_p} \frac{\partial v(t)}{\partial t} - \int_0^L \left(d_{31}Y^p h_{pc} \frac{\partial^3 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) b \, dx \right] \quad (39)$$

Reordenando la ecuación anterior se obtiene la ecuación eléctrica con acoplamiento mecánico:

$$\frac{v(t)}{2R_l} + \frac{\epsilon_{33}^S b L}{h_p} \frac{\partial v(t)}{\partial t} = - \int_0^L \left(d_{31}Y^p h_{pc} \frac{\partial^3 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) b \, dx \quad (40)$$

3.3 Voltaje y potencia del sistema

Las ecuaciones (32) y (40) son las ecuaciones electromecánicas para una viga piezoeléctrica bajo vibraciones transversales. Se considerará ahora el caso de múltiples vigas conectadas por resortes con una conexión eléctrica en paralelo. En este caso, las ecuaciones descritas anteriormente muestran un cambio, lo cual se puede ver a continuación:

$$\begin{aligned}
 YI \frac{\partial^4 w_{rel}(x,t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial t^2} + \vartheta \sum_{i=1}^N v_i(t) \left[\frac{\partial \delta(x - (i-1)L)}{\partial x} - \frac{\partial \delta(x - iL)}{\partial x} \right] \\
 = - \left(m + \sum_{i=1}^N M_{t,i} \delta(x - iL) \right) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{41}$$

Donde $v_i(t)$ es el voltaje de la i -ésima viga. Dado que las vigas están conectadas en paralelo, se tiene que $v_1(t) = v_2(t) = \dots = v_N(t) = v(t)$. Se asume que todas las vigas son idénticas excepto por la masa en la punta. Se debe notar que los resortes están incluidos en las condiciones de borde, por lo tanto afectan los modos de vibración, pero no la ecuación de movimiento.

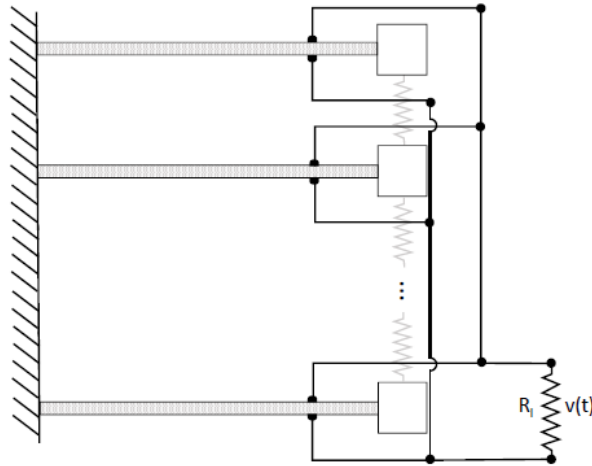


Figura 17. Conexión eléctrica en paralelo de las vigas

La solución para el movimiento relativo del sistema puede ser representada como una suma de sus modos de vibración:

$$w_{rel}(x,t) = \sum_r X_r(x) \eta_r(t) \tag{42}$$

Donde $X_r(x)$ y $\eta_r(t)$ son los modos de vibración y la coordenada modal respectivamente. El modo r-ésimo puede ser definido por segmentos, de la siguiente manera:

$$X_r(x) = \begin{cases} X_{r,1}(x), & 0 \leq x \leq L \\ X_{r,2}(x - L), & 0 \leq x \leq L \\ \vdots & \vdots \\ X_{r,2}(x - (N - 1)L), & (N - 1)L \leq x \leq NL \end{cases} \quad (43)$$

Donde $X_{r,i}$ es el r-ésimo modo normal de la i-ésima viga, L es el largo de una viga y N es el número de vigas.

Con la ecuación (42) se puede escribir la ecuación mecánica de movimiento como:

$$\begin{aligned} & (\omega^2 \eta_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r(t) + \ddot{\eta}(t)) \alpha_r + \sum_{i=1}^N \chi_{r,i} v(t) \\ & = \left(-m \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial t} \right) \gamma_r - \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \sum_{i=1}^N M_{t,i} X_r(iL) \end{aligned} \quad (44)$$

Donde:

$$\chi_{r,i} = \vartheta \left(-X_{r,i}(L) + \frac{\partial X_{r,i}(L)}{\partial x} \right)$$

$$\xi_r = \frac{c_s I \omega_r}{2YI} + \frac{c_a}{2m\omega_r}$$

$$\alpha_r = \int_0^{NL} m X_r^2(x) dx$$

$$\gamma_r = \int_0^{NL} X_r(x) dx$$

Usando un movimiento armónico en la base, $w_b(x, t) = Y_0 e^{j\omega t}$ y una respuesta armónica $\eta_r(t) = N_r e^{j\omega t}$ y $v_i(t) = V e^{j\omega t}$ se tiene

$$(\omega_{n,r}^2 N_r + 2j\xi_r \omega_{n,r} \omega N_r + \omega^2 N_r) \alpha_r + V \sum_{i=1}^N \chi_{r,i} = (m\omega^2 - j\omega c_a) Y_0 \gamma_r + \omega^2 Y_0 \sum_{i=1}^N M_{t,i} X_r(iL) \quad (45)$$

Reordenando la ecuación (45) se tiene

$$N_r = \frac{(m\omega^2 - j\omega c_a) Y_0 \gamma_r + \omega^2 Y_0 \sum_{i=1}^N M_{t,i} X_r(iL) - V \sum_{i=1}^N \chi_{r,i}}{(\omega_{n,r}^2 + 2j\xi_r \omega_{n,r} \omega + \omega^2) \alpha_r} \quad (46)$$

Por simplicidad, la ecuación anterior puede ser expresada como

$$N_r = a_r - V \sum_{i=1}^N b_{r,i} \quad (47)$$

Donde:

$$a_r = \frac{(m\omega^2 - j\omega c_a) Y_0 \gamma_r + \omega^2 Y_0 \sum_{i=1}^N M_{t,i} X_r(iL)}{(\omega_{n,r}^2 + 2j\xi_r \omega_{n,r} \omega + \omega^2) \alpha_r}$$

$$b_{r,i} = \frac{\chi_{r,i}}{(\omega_{n,r}^2 + 2j\xi_r \omega_{n,r} \omega + \omega^2) \alpha_r}$$

La ecuación de la parte eléctrica necesita ser desarrollada para cada viga. El movimiento relativo para la i -ésima viga está dado por:

$$w_{rel,i}(x, t) = \sum_r X_{r,i}(x) \eta_r(t) \quad (48)$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación (38) se obtiene lo siguiente:

$$i_i(t) = -2 \frac{\epsilon_{33}^s b L}{h_p} \frac{\partial v(t)}{\partial t} - \left(2d_{31} Y^p h_{pc} b \sum_r \frac{\partial X_{r,i}(x)}{\partial x} \Big|_0^L \dot{\eta}_r(t) \right) \quad (49)$$

Si las vigas se conectan directamente a una resistencia, el voltaje está dado por $v(t) = R_l i(t) = R_l \sum_i i_i(t)$

$$\frac{v(t)}{2R_l} = -\frac{\epsilon_{33}^S bLN}{h_p} \frac{\partial v(t)}{\partial t} - \left(d_{31} Y^p h_{pc} b \sum_r \sum_i \frac{\partial X_{r,i}(x)}{\partial x} \Big|_0^L \dot{\eta}_r(t) \right) \quad (50)$$

Reemplazando la condición de respuesta armónica, se tiene

$$\frac{V}{2R_l} = -j\omega \frac{\epsilon_{33}^S bLN}{h_p} V - \left(d_{31} Y^p h_{pc} b \sum_r \sum_i \frac{\partial X_{r,i}(x)}{\partial x} \Big|_0^L j\omega N_r \right) \quad (51)$$

Reordenando la ecuación anterior

$$V\kappa_c = \sum_r \sum_i \varphi_{r,i} j\omega N_r \quad (52)$$

Donde

$$\varphi_{r,i} = -\frac{d_{31} Y^p h_{pc} h_p}{\epsilon_{33}^S LN} \frac{\partial X_{r,i}(x)}{\partial x} \Big|_0^L$$

$$\kappa_c = j\omega + \frac{h_p}{2\epsilon_{33}^S bLNR_l}$$

Usando la ecuación (47) se tiene

$$V\kappa_c = \sum_r \sum_i \varphi_{r,i} j\omega \left(a_r - V \sum_{i=1}^N b_{r,i} \right) \quad (53)$$

Reordenando esta última ecuación se obtiene

$$V = \frac{\sum_r \sum_i \varphi_{r,i} j\omega a_r}{\kappa_c + \sum_r \sum_i \varphi_{r,i} j\omega \sum_{k=1}^N b_{r,k}} \quad (54)$$

El voltaje FRF¹ se define como el cociente entre la salida de voltaje y la aceleración de la base, es decir, $V/-\omega Y_0$. La potencia instantánea de salida se puede obtener de la relación $P(t) =$

¹ FRF significa ‘función de respuesta en frecuencia’

$v^2(t)/R_l$. Por lo tanto, la potencia FRF es simplemente el voltaje FRF al cuadrado, dividido por la resistencia.

3.4 Resultados analíticos

Para estudiar la potencia que el sistema propuesto puede entregar, se evaluaron varios casos, como vigas unidas por resortes, masas en la punta con valores distintos, resortes con constantes iguales, entre otros.

Las figuras 18 y 19 muestran el caso de vigas idénticas, con una masa en la punta (cada una con un valor igual al 30% de la masa total de la viga, o sea, $0.3mL$). En esta configuración las vigas se mueven todas en fase, es decir, los resortes nunca se deforman y, por lo tanto, no hay diferencia entre los resultados de las vigas con y sin acoplamiento mecánico. La figura 18 representa el caso de las vigas sin acoplamiento y la figura 19 muestra el caso de las vigas con acoplamiento; se puede observar que no hay ninguna diferencia entre ambos casos.

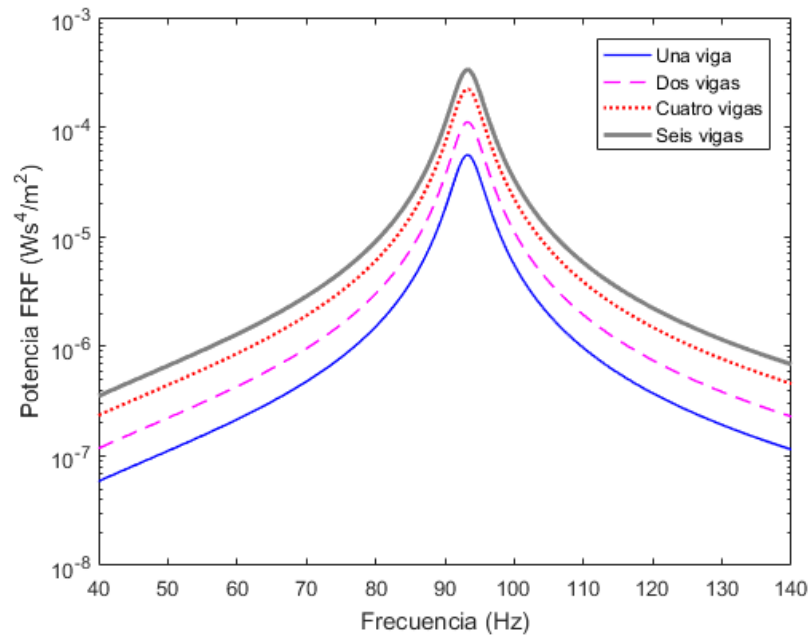


Figura 18. Potencia FRF para distinto número de vigas idénticas con masas en la punta, sin unir las por resorte

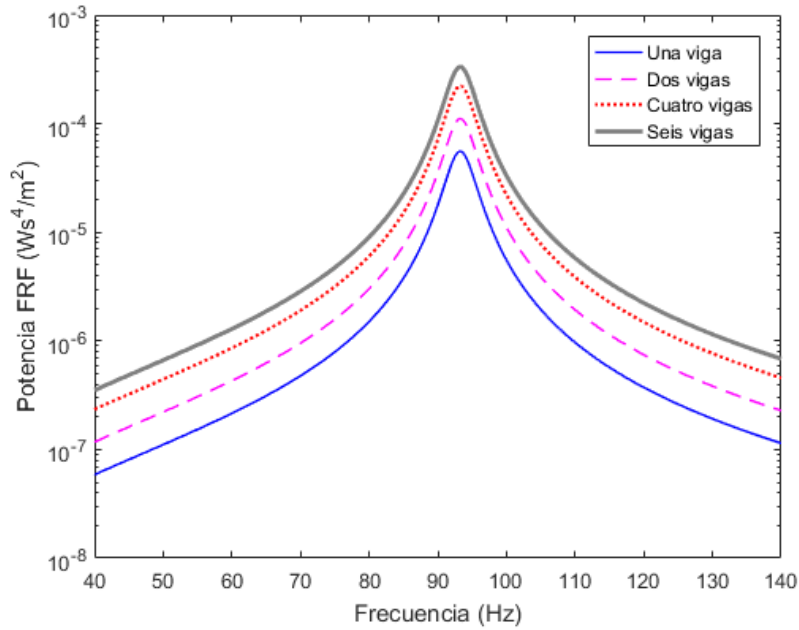


Figura 19. Potencia FRF para distinto número de vigas idénticas unidas por resortes con masas en la punta

La figura 20 muestra la potencia para distinta cantidad de vigas y distintos valores de masas en la punta, incluyendo el acoplamiento mecánico. El detalle de las masas se puede ver en la tabla 1. La constante del resorte es $k = 0.3 \frac{YI}{L^3}$, todos los resortes son idénticos.

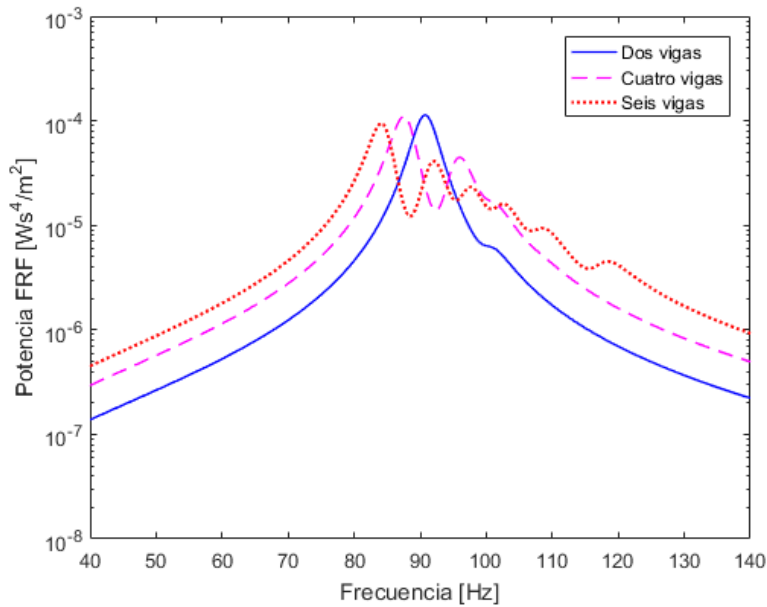


Figura 20. Potencia FRF para distinta cantidad de vigas idénticas, masas distintas y resortes idénticos, conectadas por resortes

La figura 21 muestra la potencia para distinta cantidad de vigas y distintos valores de masas en la punta, sin incluir el acoplamiento mecánico. El detalle de las masas se puede ver en la tabla 1.

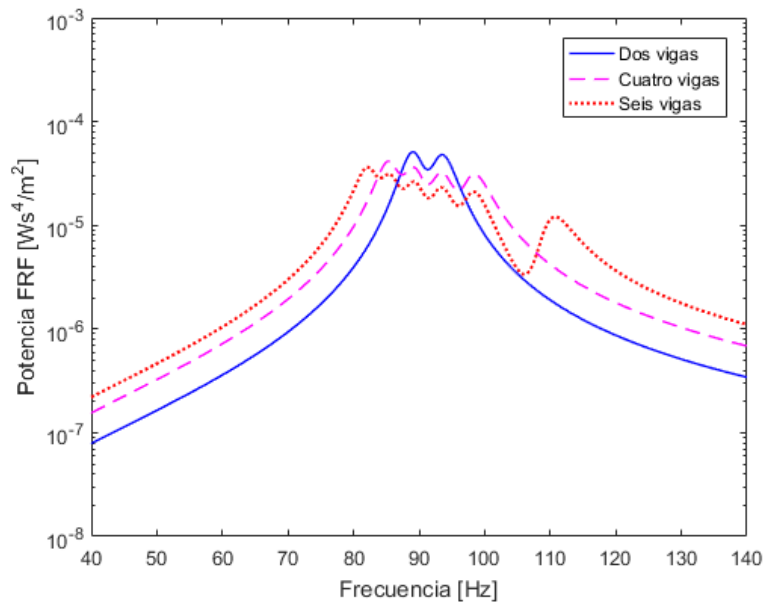


Figura 21. Potencia FRF para distinta cantidad de vigas idénticas, masas distintas, sin resortes

Tabla 1. Masas puntuales para cada viga de las figuras 20 y 21

Cantidad de vigas	Masa 1	Masa 2	Masa 3	Masa 4	Masa 5	Masa 6
2	0.3mL	0.35mL	-	-	-	-
4	0.25mL	0.3mL	0.35mL	0.4mL	-	-
6	0.15mL	0.2mL	0.3mL	0.35mL	0.4mL	0.45mL

En estas figuras se puede apreciar que añadir masas distintas al conjunto de vigas (a diferencia que las figuras 18 y 19) hace que la banda de frecuencia se amplíe. Se observa que la unión por resortes produce una amplitud mayor que el caso sin resorte, lo cual se puede observar de forma más clara en las figuras 22 a 24. Se aprecia también que el ancho de banda al comparar ambos casos es muy similar.

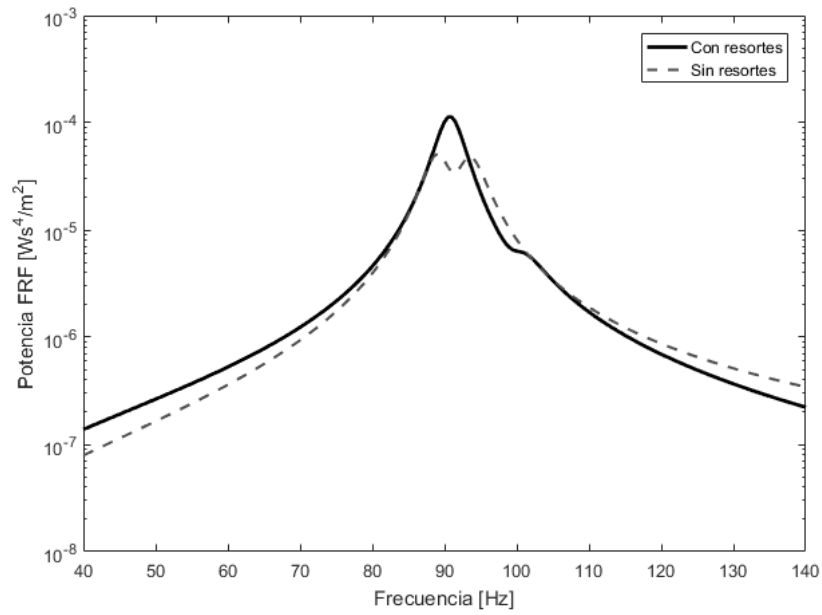


Figura 22. Comparación de potencia con y sin resortes, 2 vigas

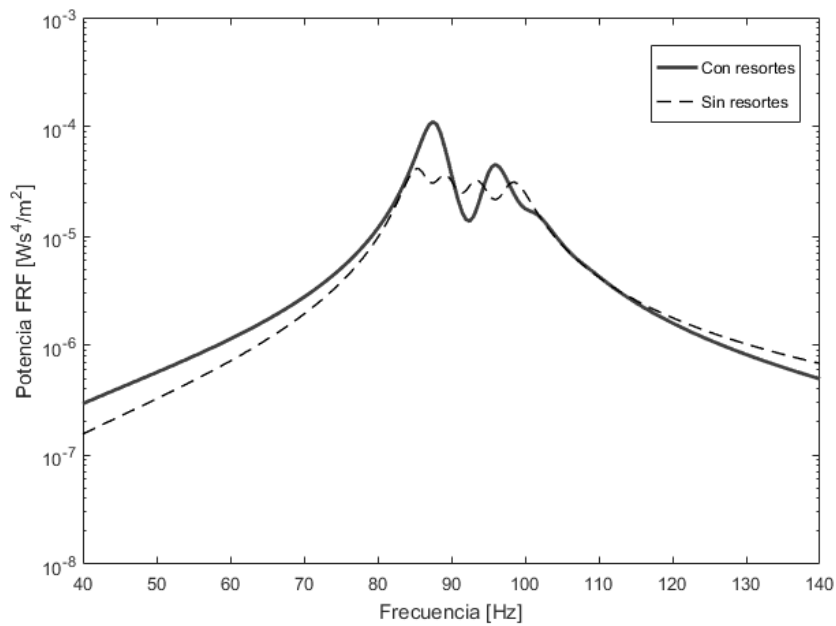


Figura 23. Comparación de potencia con y sin resortes, 4 vigas

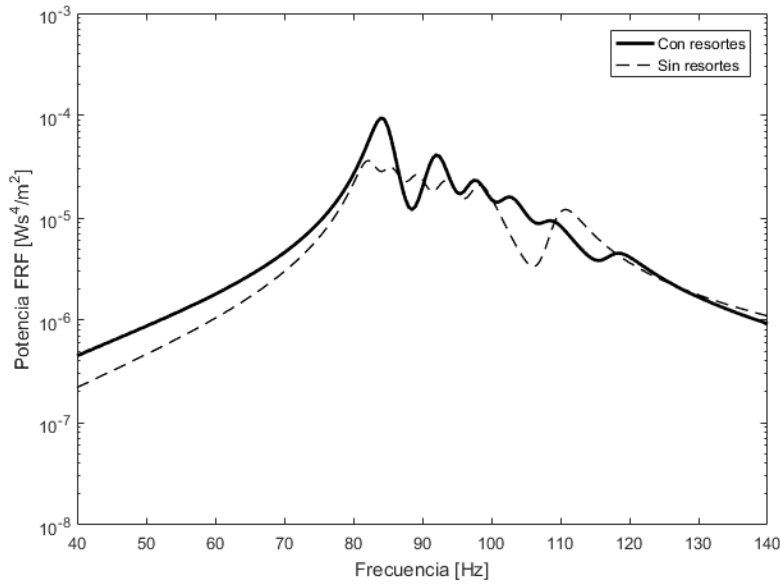


Figura 24. Comparación de potencia con y sin resortes, 6 vigas

Para comprobar qué configuración es más efectiva en términos de maximizar la potencia, se puede calcular el área bajo la curva (integral definida de la función) de los casos con resorte y sin resorte. La tabla 2 muestra los datos obtenidos para cada caso.

Tabla 2. Área bajo la curva de distintos casos

Configuración	Integral (sin resortes)	Integral (con resortes)	Unidades	Diferencia porcentual
2 vigas	0.0011949	0.0015239	[Ws ³ /m ²]	21.59%
4 vigas	0.0015595	0.0020586	[Ws ³ /m ²]	24.24%
6 vigas	0.0015752	0.0021415	[Ws ³ /m ²]	26.44%

Se aprecia que el caso con resortes resulta más efectivo que el caso sin resortes, también se observa que al aumentar la cantidad de vigas también aumenta la integral, lo cual representa un aumento en la potencia.

En la figura 25 se tiene el caso de dos vigas, con distintas masas ($M_1=0.3\text{mL}$, $M_2=0.4\text{mL}$) con constantes elásticas distintas. Acá se puede apreciar que la rigidez del resorte influye directamente en la potencia del sistema y en el ancho de banda.

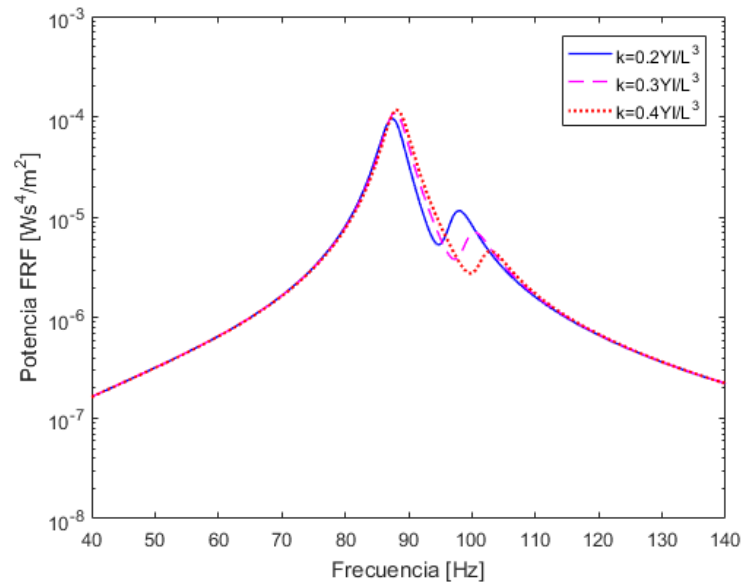


Figura 25. Potencia FRF para dos vigas con masas distintas, variando la constante del resorte

4. Desarrollo experimental

Para comprobar los resultados analíticos se necesita diseñar un montaje experimental que permita validar las suposiciones. El detalle del montaje y los resultados experimentales se encuentran en esta sección.

4.1 Montaje

El montaje experimental que se construyó para verificar el modelo analítico consiste en estructuras de acrílico que soportan a los piezoeléctricos. El detalle de esto se puede observar en la figura 26 (A: estructuras de acrílico, B: piezoeléctricos, C: masas puntuales).

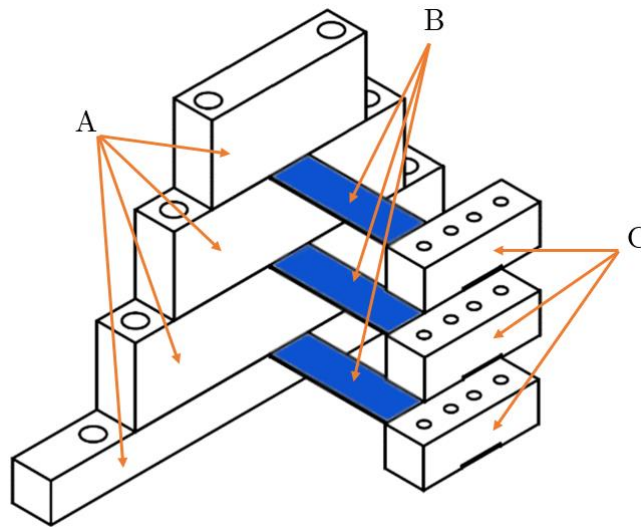


Figura 26. Diseño de la estructura, vista isométrica

Para asegurar que los piezoeléctricos permanezcan fijos y no deslicen, se unen mediante tornillos, tal como se muestra en la figura 27.

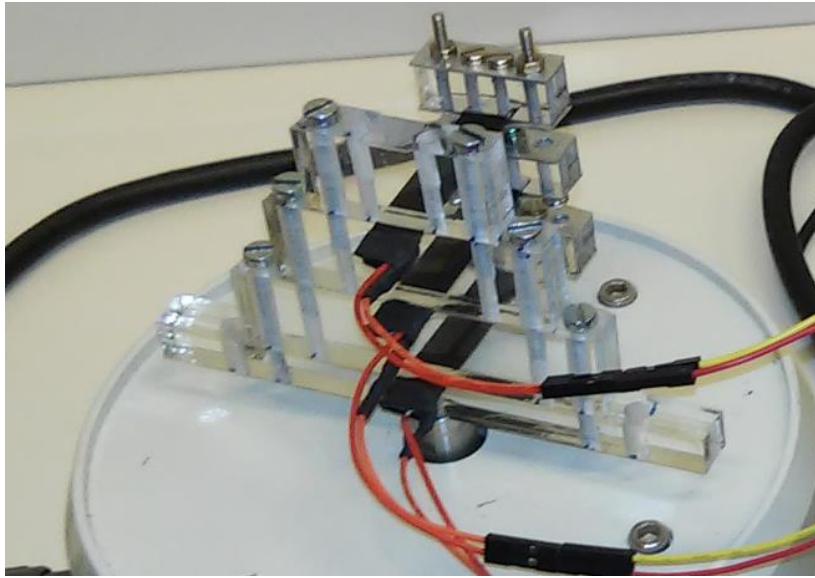


Figura 27. Montaje de los piezoeléctricos

Esta estructura se monta sobre un agitador electrodinámico (figura 28 a), el cual proporciona la vibración sinusoidal en la base, cuya frecuencia y amplitud se pueden regular mediante un software computacional y el hardware adecuado (figura 28 b).



Figura 28. a) Agitador electrodinámico. b) Hardware de adquisición de datos

Las características del agitador se observan en la tabla 3 y las características del sistema de adquisición de datos en la tabla 4.

Tabla 3. Características del agitador

Fabricante	Sinocera Piezotronics, INC
Modelo	JZK-10
Fuerza máxima	100 [N]
Rango de frecuencias	10 [Hz] a 4000 [Hz]
Aceleración máxima	280 [m/s ²]
Masa de partes móviles	0.35 [kg]
Masa total	15 [kg]
Radio	158 [mm]
Altura	150 [mm]

Tabla 4. Características del sistema de adquisición de datos

Fabricante	ECON
Modelo	Avant MI-7016
Canales de entrada	16
Canales de salida	4
Resolución dinámica	24 bits

En la punta de los piezoeléctricos se instalan estructuras de acrílico, las cuales juegan el rol de masas puntuales. Su peso cambia en función del número de pernos y tuercas que se instalen en ellas.

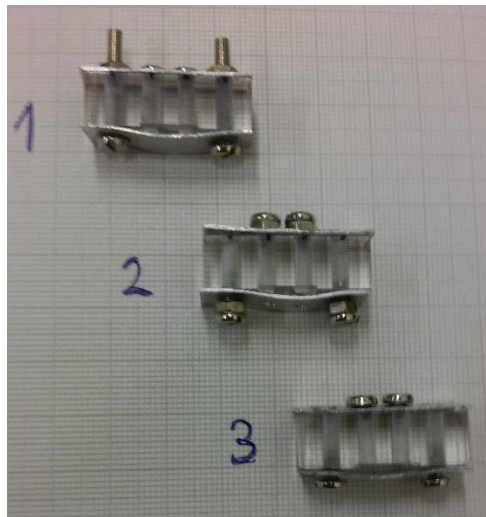


Figura 29. Masas ubicadas en la punta

En la figura 29 se observan estas masas. Sus valores son 8,34 gramos (masa 1), 7,68 gramos (masa 2) y 6,28 gramos (masa 3). Para futuras referencias (sección 4.2), se utiliza el

término PZT 1 refiriéndose al piezoelectrico que está con la masa 1, PZT 2 al piezoelectrico que está con la masa 2 y PZT 3 al piezoelectrico que está con la masa 3.

Los piezoelectricos unidos por resortes se pueden observar en la figura 30. Notar que sobre el sistema se monta un acelerómetro, del cual se mide la aceleración para normalizar la potencia.

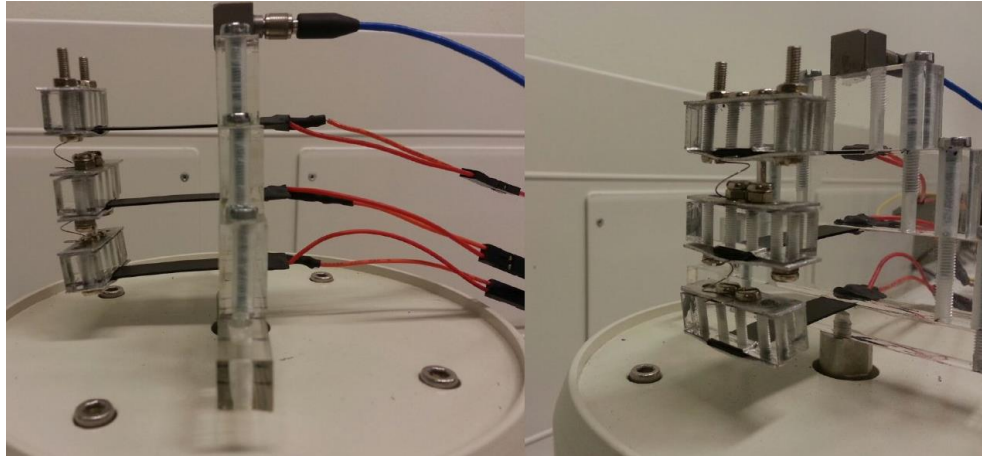


Figura 30. Sistema con resortes en la punta

A continuación se presenta una tabla con parámetros de los piezoelectricos (PZT).

Tabla 5. Parámetros de los piezoelectricos

Nombre	Letra	Valor	Unid. de medida
Largo del PZT	L	69.8	mm
Ancho del PZT	b	10	mm
Grosor subestructura	h_s	0.285	mm
Grosor PZT	h_p	0.253	mm
Módulo de Young subestructura	Y_s	20	GPa
Mód. Young PZT	Y_p	57.2	GPa
Densidad subestructura	ρ_s	1557.6	kg/m ³
Densidad PZT	ρ_p	7987.5	kg/m ³
Permitividad	ϵ_{33}^S	39.84	nF/m
Constante piezoelectrica	d_{31}	-225	pm/V
Amortiguamiento por deformación	c_{S1}	1.17	μ kg m ³ /s
Amortiguamiento viscoso del aire	c_a	0.464	kg/s

Para realizar las mediciones, se instala el sistema como se indica en la figura 31.

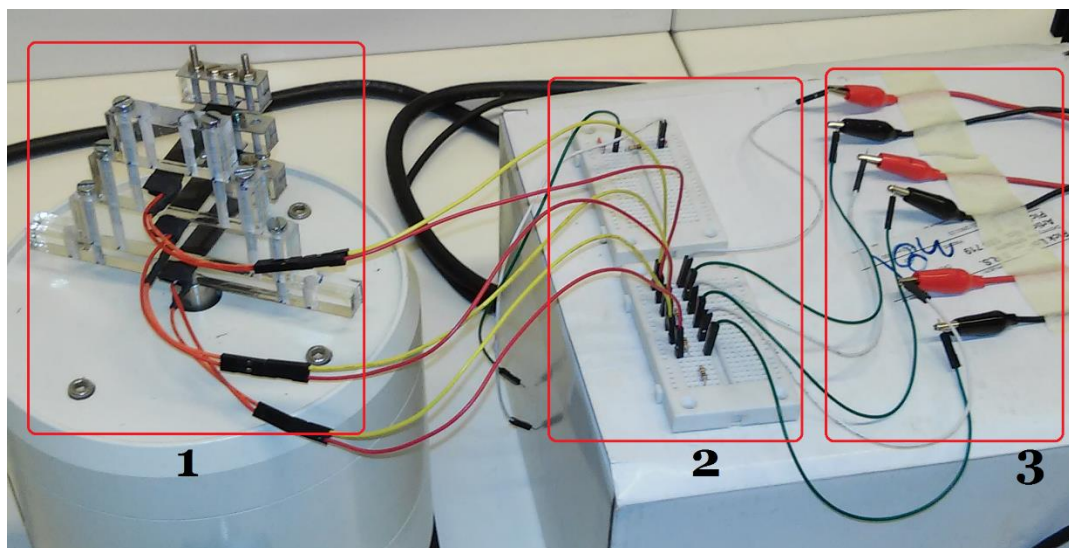


Figura 31. Configuración del sistema

La zona 1 es el sistema de piezoeléctricos montados sobre el agitador. La zona 2 son los circuitos que se usan para las pruebas (arriba conexión eléctrica en paralelo y abajo conexión eléctrica independiente). La zona 3 son los conectores que se insertan al sistema de adquisición, el cual se conecta al computador.

Los parámetros que se usan en el software de adquisición se muestran en la tabla 6.

Tabla 6. Parámetros del software de adquisición de datos

Puntos	32768
Frecuencia	3000 Hz
Líneas	12800
Rango	1172 Hz

El significado de cada uno de estos parámetros se indica a continuación.

- **Líneas:** Número de líneas espectrales utilizadas para la medición.
- **Puntos:** Cantidad de datos a adquirir. Puntos y líneas están en proporción y solo se necesita asignar uno de ellos.
- **Rango:** Rango superior de las frecuencias asociadas a la medición. La frecuencia de la señal de prueba debe estar dentro del ancho de banda de las frecuencias de prueba.
- **Frecuencia:** Indica la frecuencia de muestreo, la cual es proporcional al rango y solo se necesita asignar uno de ellos.

Dentro del programa se modifica la frecuencia de excitación del agitador, desde 15 [Hz] hasta 60 [Hz], con un intervalo de 0.5 [Hz], cabe mencionar que se excita con una onda sinusoidal. Para cada una de las frecuencias se mide la amplitud del voltaje, el cual se normaliza por la aceleración y luego se calcula la potencia. Los resultados de estas mediciones se encuentran en la sección 4.2.

4.2 Resultados experimentales

A continuación se muestran los resultados experimentales de diversas configuraciones. Se realizaron mediciones sobre 3 piezoeléctricos conectados de distintas maneras:

- Caso 1. Conexión eléctrica en paralelo, sin unirlos por resortes
- Caso 2. Conexión eléctrica en paralelo, unidos por resortes
- Caso 3. Conexión eléctrica independiente, sin unirlos por resortes
- Caso 4. Conexión eléctrica independiente, unidos por resortes

Para estos casos, se grafica la potencia FRF en función de la frecuencia de vibración, cuyos valores van desde 15[Hz] a 60[Hz]. Esto se puede apreciar en las figuras 32 a 35.

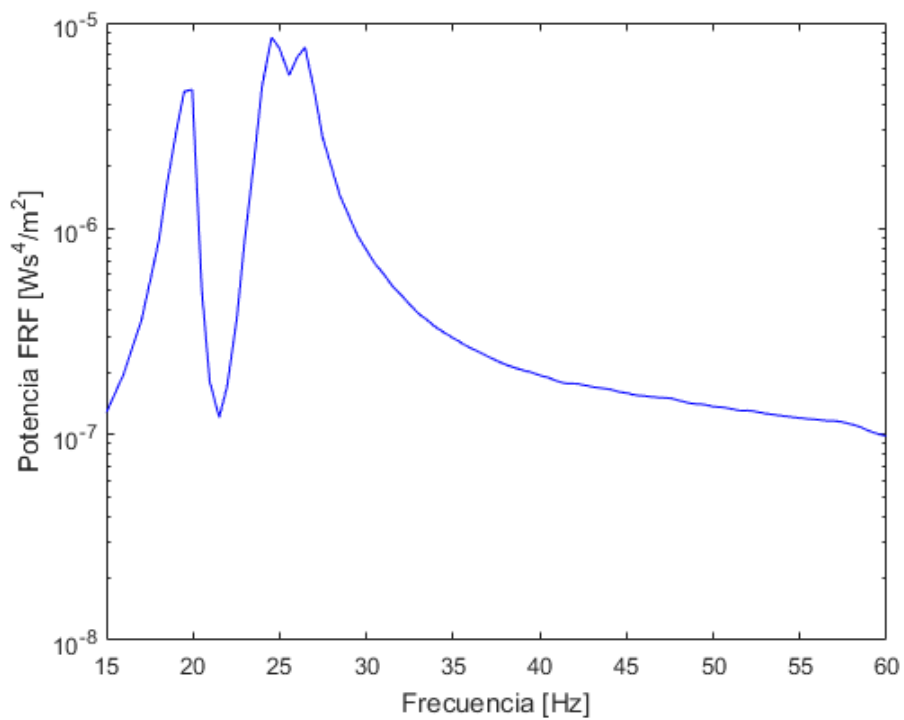


Figura 32. Potencia FRF del caso 1

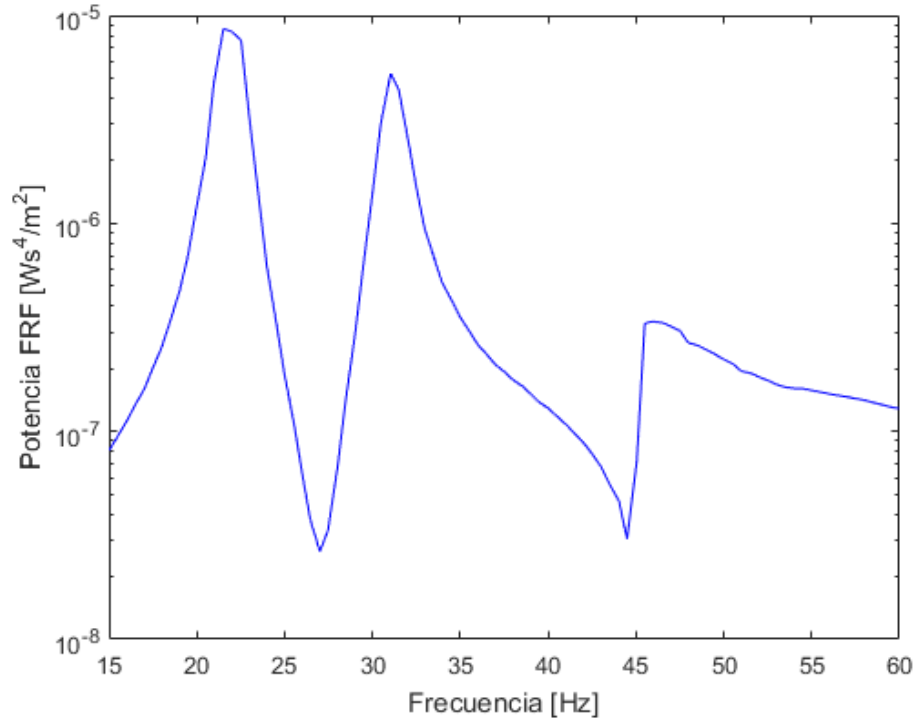


Figura 33. Potencia FRF del caso 2

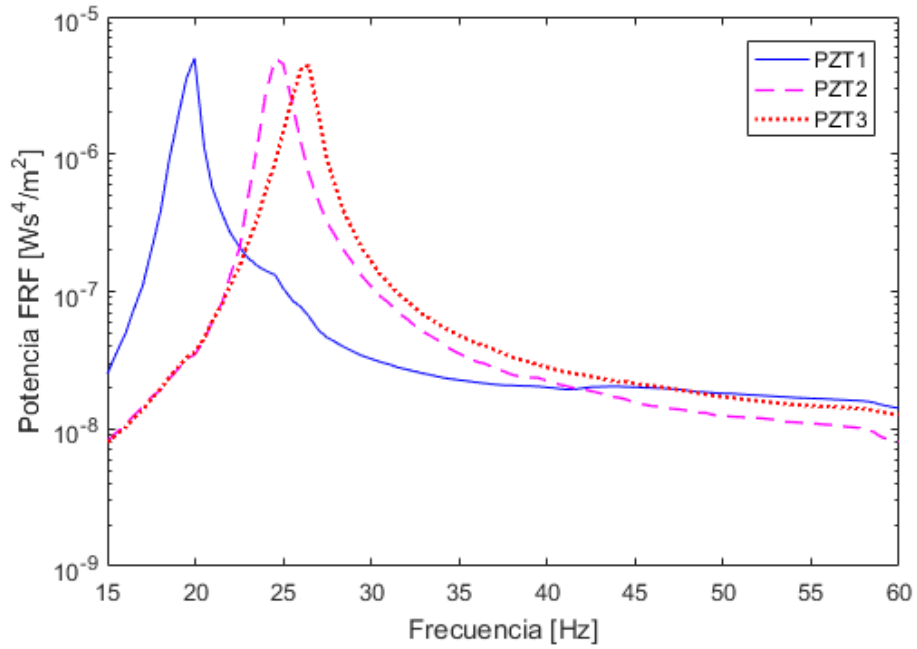


Figura 34. Potencia FRF del caso 3

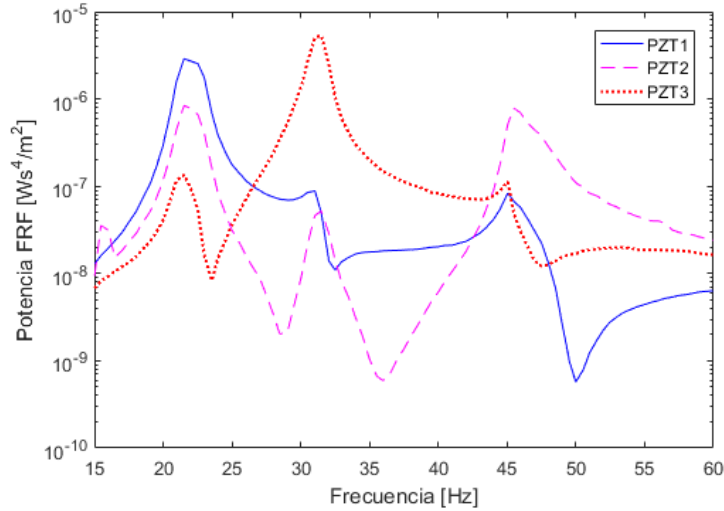


Figura 35. Potencia FRF del caso 4

4.3 Comparación analítico-experimental

Comparando los resultados obtenidos de la figura 34, que representa el caso 3 (conexión eléctrica independiente, sin unirlos por resortes) con los resultados analíticos del mismo caso (ver figuras 36 a 38) se puede observar que el modelo analítico representa una buena aproximación a los resultados experimentales; si bien no es perfecto al cien por ciento, se aprecia que los peaks se ubican en los mismos puntos para ambos gráficos, lo cual es uno de los aspectos más relevantes, ya que lo importante es la energía que se logra alrededor del peak; en frecuencias lejanas a estos peaks, los gráficos tienden a divergir.

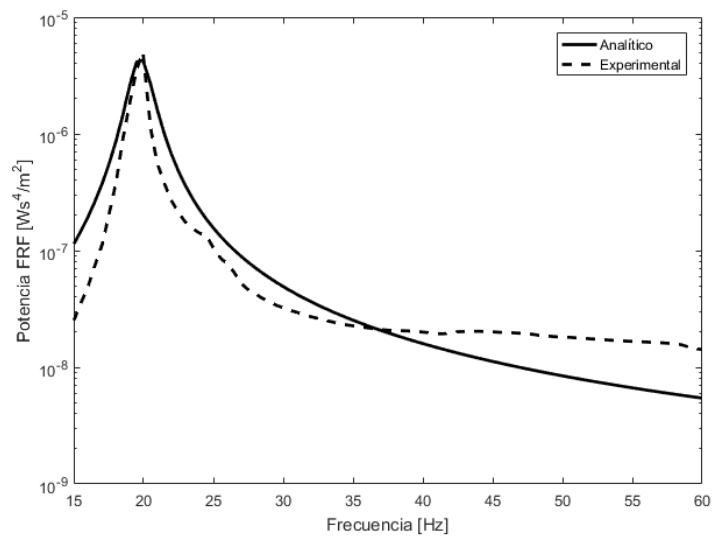


Figura 36. Comparación casos analítico y experimental, PZT 1

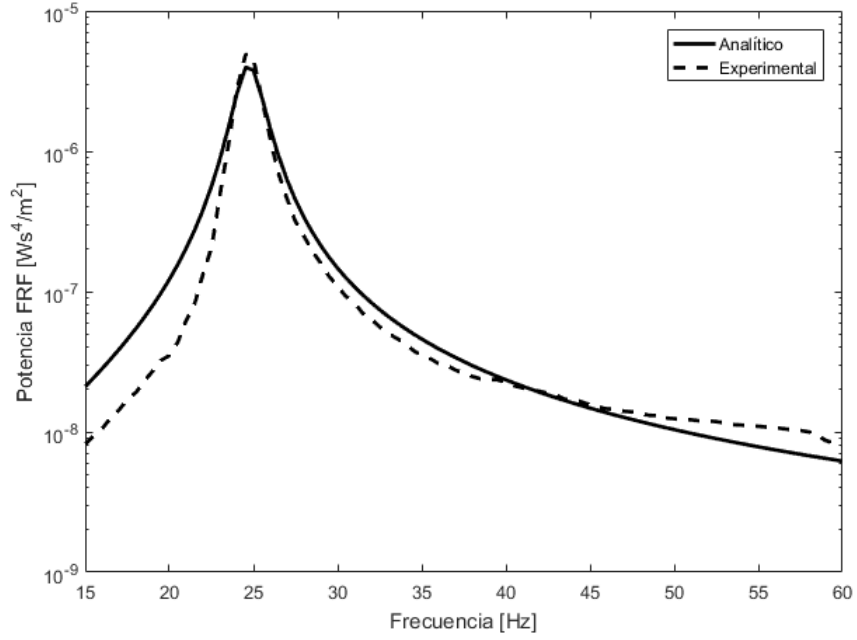


Figura 37. Comparación casos analítico y experimental, PZT 2

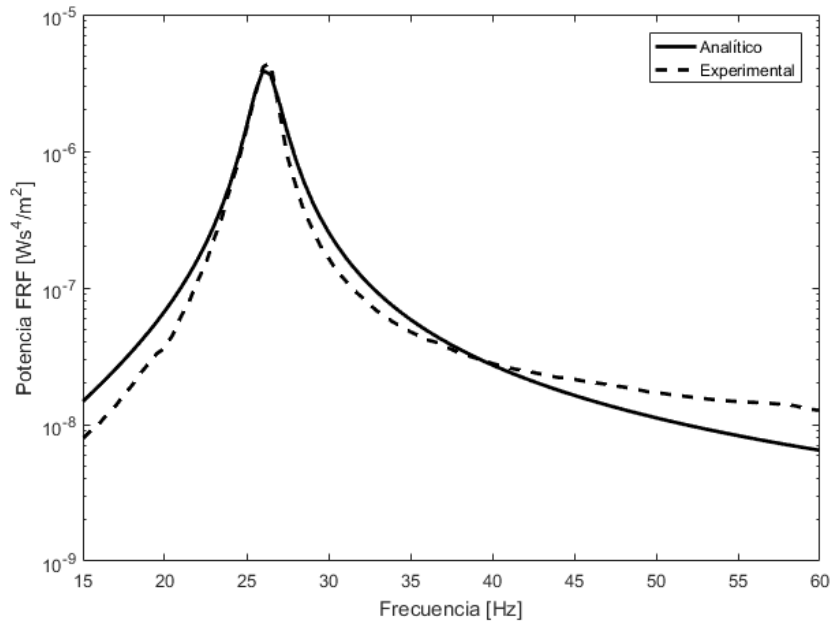


Figura 38. Comparación casos analítico y experimental, PZT 3

También se comparan los resultados experimentales del caso 2 (conexión eléctrica en paralelo, unidos por resortes) con los analíticos. La figura 39 muestra la comparación de los resultados analíticos y experimentales; se aprecia que el modelo analítico predice de manera aceptable los datos experimentales.

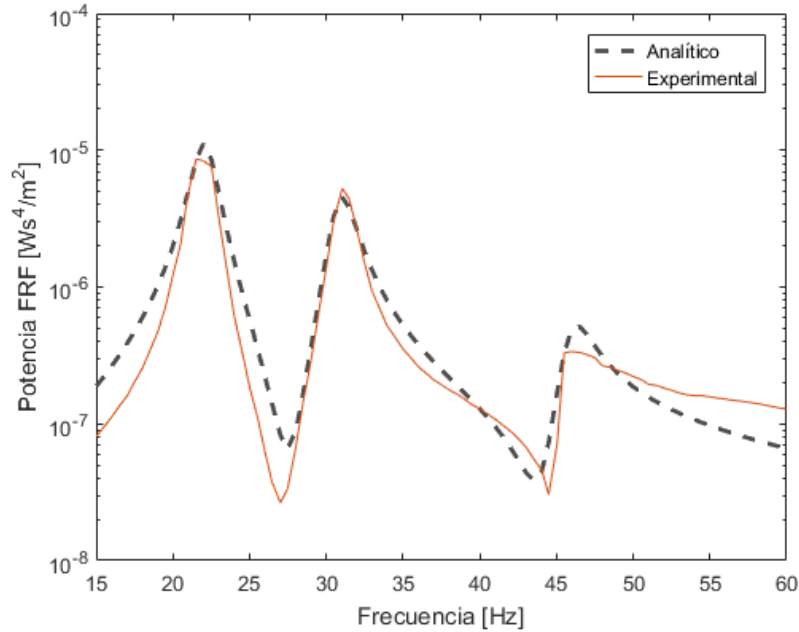


Figura 39. Potencia FRF caso 2, analítico y experimental

Finalmente, en la tabla 7 se muestra el área bajo la curva de las configuraciones con resortes y sin resortes.

Tabla 7. Área bajo la curva de datos experimentales

Configuración	Integral (sin resortes)	Integral (con resortes)	Unidades	Diferencia porcentual
3 vigas	8.7501×10^{-5}	7.1959×10^{-5}	$[Ws^3/m^2]$	17.76%

Se puede apreciar que el área del caso sin resortes es mayor que el caso con resortes, al contrario de lo que se predice teóricamente. Esto puede ser debido a una serie de factores que pueden ser mejorados en trabajos futuros, como por ejemplo:

- Las masas se consideraron puntuales y en estricto rigor no lo son: esto se puede corregir mejorando el modelo analítico para incluir masas distribuidas o hacer masas más pequeñas para el experimento.

- El empotramiento perfecto es muy difícil de lograr: para tratar esto, se puede crear una configuración que incluya resortes torsionales y lineales en la base de los piezoeléctricos para así modelar un empotramiento no perfecto, cosa que también afectaría en la parte analítica y experimental.
- Los resortes tienen una pérdida de energía asociada: en la teoría se consideraron resortes perfectos sin pérdida de energía; para solucionar esto se podría cuantificar mediante otros experimentos cuánta energía podría disipar un resorte y, de esta forma, incluirlo en los cálculos.

5. Conclusiones

Analíticamente se puede apreciar que el modelo con resortes funciona mejor que el modelo sin resortes, ya que el área bajo la curva es mayor en el primer caso. Este es un buen indicador ya que muestra en cierta forma la cantidad de energía posible de convertir. Experimentalmente se ve lo contrario, el caso sin resortes posee una integral mayor que el caso con resortes; esto puede deberse a diversos factores, tanto experimentales como teóricos. El factor principal son las pérdidas de energía asociadas a los resortes.

A pesar de lo anterior, se ve que el modelo analítico representa muy bien los datos experimentales, predice bien la posición de los peaks y muestra de forma muy aceptable la forma de la curva.

Lo más importante de todo es que el sistema efectivamente amplía el rango de frecuencias en el cual se puede convertir energía, aunque claramente hay espacio a mejoras tanto teóricas como experimentales, como por ejemplo, modelar el empotramiento con resortes torsionales y lineales en la base de las vigas, tratar las masas como elementos no puntuales (masas distribuidas) o instalar masas más pequeñas.

Finalmente y a modo de resumen se puede decir que:

- Se diseñó un sistema que utiliza vigas piezoeléctricas para convertir energía mecánica en eléctrica a partir de la teoría de Euler-Bernouilli.
- El sistema opera en un rango amplio de frecuencias, lo cual cumple el objetivo principal.
- El montaje experimental sirve para comprobar la propuesta analítica pero hay mucho espacio para mejora en este aspecto.
- Los resultados generales son satisfactorios y los resultados analíticos predicen de buena forma los resultados experimentales.
- Como trabajo futuro se pueden incluir mejoras analíticas y experimentales al modelo, como cambiar el tipo de empotramiento y la forma de las masas en la punta.

Bibliografia

- [1] S. R. Anton, H. A. Sodano, 2007, “A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006),” *Smart Mater. Struct.* 16 (2007) R1–R21.
- [2] R. J. M. Vullers, R. van Schaijk, I. Doms, C. Van Hoof, R. Mertens, 2009, “Micropower energy harvesting”, *Solid-State Electronics* 53 (2009) 684–693
- [3] S. Saadom, O. Sidek, 2011, “A review of vibration-based MEMS piezoelectric energy harvesters”, *Energy Conversion and Management* 52 (2011) 500–504
- [4] C.B. Williams, R. B. Yates, 1996, “Analysis of a Micro-Electric Generator for Microsystems,” *Sens. Actuators, A*, 52, pp. 8–11.
- [5] A. Erturk, D. J. Inman, 2008, “A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters”, *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 130 041002
- [6] A. Erturk, D. J. Inman, 2008, “An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations”, *Smart Mater. Struct.* 18 025009 (18pp)
- [7] S. M. Shahruz, 2005, “Limits of performance of mechanical band-pass filters used in energy scavenging”, *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006) 449–461
- [8] W. Zhou, G. R. Penamalli, L. Zuo “An efficient vibration energy harvester with a multi-mode dynamic magnifier”, *Smart Mater. Struct.* 21 (2012) 015014 (9pp)
- [9] L. Tang, Y. Yang, 2012, “A multiple-degree-of-freedom piezoelectric energy harvesting model”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 2012, 1631–1647

Anexos

Anexo A: Códigos MATLAB

Programa para procesar datos experimentales:

```
clear all;
clc

ff=15:0.5:60;
N=length(ff);

for j=[2]
    for i=1:N

        if mod(ff(i),1)==0
            name1=[num2str(ff(i)) '.000000\Auto\Input1(t).txt']; %acelerometro
            name2=[num2str(ff(i)) '.000000\Auto\Input' num2str(j) '(t).txt']; %dato
            display([num2str(ff(i)) '.000000\Auto\Input1(t).txt']);
        elseif mod(ff(i),.5)==0
            name1=[num2str(ff(i)) '00000\Auto\Input1(t).txt']; %acelerometro
            name2=[num2str(ff(i)) '00000\Auto\Input' num2str(j) '(t).txt']; %dato
            display([num2str(ff(i)) '00000\Auto\Input1(t).txt']);
        end

        fid1 = fopen(name1);
        C1=textscan(fid1,'%f %f','headerlines',14);
        fclose(fid1);

        fid2 = fopen(name2);
        C2=textscan(fid2,'%f %f','headerlines',14);
        fclose(fid2);

        [fa,Aa]=fftt(C1{1,2},C1{1,1});
        [fv,Av]=fftt(C2{1,2},C2{1,1});

        [pks,locs] = findpeaks(abs(Aa),'sortstr','descend');
        fai(i)=fa(locs(1));
        Aai(i)=abs(Aa(locs(1)));

        [pks,locs] = findpeaks(abs(Av),'sortstr','descend');
        fvi(i)=fv(locs(1));
        Avi(i)=abs(Av(locs(1)));
    end

    Vfvi(1:length(fvi),j)=fvi;
    VAai(1:length(fvi),j)=Aai;
    VAvi(1:length(fvi),j)=Avi;

end
```

Solución analítica del caso sin resortes y comparación con datos experimentales (se omite la parte del programa que grafica):

```
function e=diferencia(u)

close all
clear all
clc

load u3;
u=u3;
N=1;

load fvi;
load P32;

w=fvi*2*pi;

%Constantes a usar
L=60e-3*u(1); %largo de la viga
b=10e-3; %ancho de la viga
hs=0.3e-3*u(2); %grosor de la substruct
hp=0.2e-3*u(3); %grosor piezo
Ys=20e9*u(4); %mod young substruc
Yp=61e9*u(5); %mod young

hpc=hs/2+hp/2;

YI=(2*b/3)*(Ys*hs^3/12+Yp*((hp+hs/2)^3-hs^3/8)); %bending stiffness

e0=8.85418782e-12; %permittivity of free space

rhos=1500*u(6); %densidad substruc
rhop=7400*u(7); %densidad piezo
e33S=4500*e0; %permitividad
d31=-320e-12*u(8); %constante piezoelectica
ca=0.66*u(9);
CsI=1.22e-6*u(10);

Cou=Yp*d31*b/hp*(hs^2/4-(hp+hs/2)^2); %coupling term

mv=b*(rhos*hs+2*rhop*hp); %masa por unidad de largo kg/m

%% masa l
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ki=0;
% mi=10*mv*L*u(11);
mi=8.34e-3*1.5*u(11); %valor medido con balanza

[WR,XR,PHI,dPHI,x]=vibration_modes(YI,mv,L,N,ki,mi);
```



```

[chir,xir]=chipaper(Cou,PHI,dPHI,WR,N,ca,CsI,YI,mv);

[gamma, alphas]=gammaalpha(PHI,x,mv);

sz=size(PHI);
for rr=1:sz(1)
    for asd=1:N
        phi2(rr,asd) = -((d31*Yp*hpc*hp)/(e33S*L*N))*dPHI(rr,asd*sz(2)/N);
    end
end

[AR,BR]=ayb(mv,ca,gamma,w,mi,PHI,alphas,WR,xir,chir,N);

clear i

num=0;
for r=1:length(XR)
    for ii=1:N
        num=num+(li*phi2(r,ii)*AR(r,:));
    end
end

num=num.*w;
alpha1=num;

den=0;
sumaB=0;
for bb=1:N
    sumaB=sumaB+BR(:,bb,:);
end

for r=1:length(XR)
    for ww=1:length(w)
        sumaB2(r,ww)=sumaB(r,1,ww);
    end
end

for r=1:length(XR)
    for ii=1:N
        den=den+((phi2(r,ii)*li*sumaB2(r,:)));
    end
end

alpha2=w.*den;
alpha4=hp/(2*e33S*b*L*N)*ones(size(alpha1));
alpha3=li*w;

R1=100;

P11=1/R1*(alpha1./(alpha2+alpha3+alpha4/R1)).^2;

ei(1)=norm(abs(P11)./(w).^4-P3(:,1)');

```

```

%% masa 2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ki=0;
% mi=3.5*mv*L*u(12);
mi=7.68e-3*u(12); %valor medido con balanza

[WR,XR,PHI,dPHI,x]=vibration_modes(YI,mv,L,N,ki,mi);

[chir,xir]=chipaper(Cou,PHI,dPHI,WR,N,ca,CsI,YI,mv);

[gamma, alphas]=gamma_alpha(PHI,x,mv);

sz=size(PHI);
for rr=1:sz(1)
    for asd=1:N
        phi2(rr,asd) = -((d31*Yp*hpc*hp)/(e33S*L*N))*dPHI(rr,asd*sz(2)/N);
    end
end

[AR,BR]=ayb(mv,ca,gamma,w,mi,PHI,alphas,WR,xir,chir,N);

clear i

num=0;
for r=1:length(XR)
    for ii=1:N
        num=num+(1i*phi2(r,ii)*AR(r,:));
    end
end

num=num.*w;
alpha1=num;

den=0;
sumaB=0;
for bb=1:N
    sumaB=sumaB+BR(:,bb,:);
end

for r=1:length(XR)
    for ww=1:length(w)
        sumaB2(r,ww)=sumaB(r,1,ww);
    end
end

for r=1:length(XR)
    for ii=1:N
        den=den+((phi2(r,ii)*1i*sumaB2(r,:)));
    end
end

alpha2=w.*den;
alpha4=hp/(2*e33S*b*L*N)*ones(size(alpha1));

```

```

alpha3=1i*w;

Rl=100;

P22=1/Rl*(alpha1./(alpha2+alpha3+alpha4/Rl)).^2;

ei(2)=norm(abs(P22)./(w).^4-P3(:,2)');
%% masa 3
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ki=0;
% mi=1.9*mv*L*u(13);
mi=6.28e-3*1.05*u(13); %valor medido con balanza

[WR,XR,PHI,dPHI,x]=vibration_modes(YI,mv,L,N,ki,mi);

[chir,xir]=chipaper(Cou,PHI,dPHI,WR,N,ca,CsI,YI,mv);

[gammar, alphas]=gammalpha(PHI,x,mv);

sz=size(PHI);
for rr=1:sz(1)
    for asd=1:N
        phi2(rr,asd) = -((d31*Yp*hpc*hp)/(e33S*L*N))*dPHI(rr,asd*sz(2)/N);
    end
end

[AR,BR]=ayb(mv,ca,gammar,w,mi,PHI,alphas,WR,xir,chir,N);

clear i

num=0;
for r=1:length(XR)
    for ii=1:N
        num=num+(1i*phi2(r,ii)*AR(r,:));
    end
end

num=num.*w;
alpha1=num;

den=0;
sumaB=0;
for bb=1:N
    sumaB=sumaB+BR(:,bb,:);
end

for r=1:length(XR)
    for ww=1:length(w)
        sumaB2(r,ww)=sumaB(r,1,ww);
    end
end

for r=1:length(XR)

```

```

    for ii=1:N
        den=den+((phi2(r,ii)*1i*sumaB2(r,:)));
    end
end

alpha2=w.*den;
alpha4=hp/(2*e33S*b*L*N)*ones(size(alpha1));
alpha3=1i*w;

R1=100;

P33=1/R1*(alpha1./(alpha2+alpha3+alpha4/R1)).^2;
ei(3)=norm(abs(P33)./(w).^4-P3(:,3)');

e=norm(ei)

```

Solución analítica del caso con resortes y comparación con datos experimentales (se omite la parte del programa que grafica):

```
function e=diferencia_resortes(u2)
load u;
% u2=ones(2,1);
load u2;
% u=ones(15,1);
N=3;

load fer;
load Per;

w=fer*2*pi;

%Constantes a usar

L=46e-3*u(1); %largo de la viga 100mm
b=10e-3; %ancho de la viga 20mm
hs=0.3e-3*u(2); %grosor de la substruc 0.3mm
hp=0.2e-3*u(3); %grosor piezo 0.2mm
Ys=40e9*u(4); %mod young substruc 20GPa
Yp=61e9*u(5); %mod young 61GPa

hpc=hs/2+hp/2;

YI=(2*b/3)*(Ys*hs^3/12+Yp*((hp+hs/2)^3-hs^3/8)); %bending stiffness EQ(23)

rhos=1500*u(6); %densidad substruc
rhop=7400*u(7); %densidad piezo
e33S=13.28e-9; %permitividad
d31=-150e-12*u(8); %constante piezoelectica -
ca=0.66*u(9);
CsI=1.22e-6*u(10);

Cou=Yp*d31*b/hp*(hs^2/4-(hp+hs/2)^2); %coupling term EQ(24)

mv=b*(rhos*hs+2*rhop*hp); %masa por unidad de largo kg/m

mi=[10 3.5 1.9]*mv*L.*u([11:13]);
ki=(YI/L^3)*[3*u2(1) 3*u2(1)];

[WR,XR,PHI,dPHI,x]=vibration_modes(YI,mv,L,N,ki,mi);

[i,j]=sort(WR);
WR=WR(j);
XR=XR(j);
PHI=PHI(j,:);
dPHI=dPHI(j,:);

[chir,xir]=chipaper(Cou,PHI,dPHI,WR,N,ca,CsI,YI,mv);
```

```

[gamma, alphas]=gammalpha (PHI, x, mv);

sz=size (PHI);
for rr=1:sz (1)
    for asd=1:N
        phi2 (rr, asd) = - ((d31*Yp*hpc*hp) / (e33S*L*N)) *dPHI (rr, asd*sz (2) /N);
    end
end

[AR, BR]=ayb (mv, ca, gamma, w, mi, PHI, alphas, WR, xir, chir, N);

clear i

num=0;
for r=1:length (XR)
    for ii=1:N
        num=num+(li*phi2 (r, ii) *AR (r, :));
    end
end

num=num.*w;
alpha1=num;

den=0;
sumaB=0;
for bb=1:N
    sumaB=sumaB+BR (:, bb, :);
end

for r=1:length (XR)
    for ww=1:length (w)
        sumaB2 (r, ww)=sumaB (r, 1, ww);
    end
end

for r=1:length (XR)
    for ii=1:N
        den=den+ ((phi2 (r, ii) *li*sumaB2 (r, :)));
    end
end

alpha2=w.*den;
alpha4=hp/ (2*e33S*b*L*N) *ones (size (alpha1));
alpha3=li*w;

Rl=1000;

P=1/Rl* (alpha1./ (alpha2+alpha3+alpha4/Rl)).^2;

e=norm (Per-abs (P) ./ (w).^4);

trapz (Per)

```

Funciones que estos programas utilizan:

```
function [AR,BR]=ayb(mv,ca,gammar,w,m,PHI,alphan,WR,xir,chir,N)

sz=size(PHI);
suma=0;

for r=1:sz(1)
    for i=1:N
        suma=suma+m(i)*PHI(r,i*sz(2)/N);
    end
    AR(r,:)=(gammar(r)*(mv*w.^2-li*w*ca)+
w.^2*suma)./( (WR(r)^2+2*li*xir(r)*WR(r)*w-w.^2).*alphan(r));

end

for r=1:sz(1)
    for i=1:N
        BR(r,i,:)=chir(r,i)./( (WR(r)^2+2*li*xir(r)*WR(r)*w-w.^2).*alphan(r)); % (29)
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [a,M]=build_matrix(k,m,c,YI,L,beta,n)
wn=beta^2*c;
%n=number of beams
alpha1=sin(beta*L)+sinh(beta*L);
alpha2=cos(beta*L)+cosh(beta*L);

%% Programa para una sola viga
if n==1
    M=[alpha1 alpha2;
        alpha3(0,0,m,YI,L,beta,wn) alpha4(0,0,m,YI,L,beta,wn)];

    a=det(M);
end

%% Aca va para numeros distintos de 1
if n>1
    M=zeros(2*n,2*n);
    wn=beta^2*c;
    if n==2
        M1=[alpha1 alpha2 0 0;
            alpha3(k(1),0,m(1),YI,L,beta,wn) alpha4(k(1),0,m(1),YI,L,beta,wn)
            alpha5(k(1),YI,L,beta) alpha6(k(1),YI,L,beta);
            0 0 alpha1 alpha2;
            alpha5(k(1),YI,L,beta) alpha6(k(1),YI,L,beta)
            alpha3(k(1),0,m(2),YI,L,beta,wn) alpha4(k(1),0,m(2),YI,L,beta,wn)];
        M=M1;
    end
    if n>2
```

```

Mfirst=[alpha1 alpha2 0      0;
        alpha3(0,k(1),m(1),YI,L,beta,wn) alpha4(0,k(1),m(1),YI,L,beta,wn)
alpha5(k(1),YI,L,beta) alpha6(k(1),YI,L,beta)];
Mi=zeros(2,2*n);
Mi(:,1:4)=Mfirst;
M=Mi;

for ii=2:n-1
    Mmid=[0      0      alpha1 alpha2 0      0;
          alpha5(k(ii-1),YI,L,beta) alpha6(k(ii-1),YI,L,beta) alpha3(k(ii-1),k(ii),m(ii),YI,L,beta,wn) alpha4(k(ii-1),k(ii),m(ii),YI,L,beta,wn)
alpha5(k(ii),YI,L,beta) alpha6(k(ii),YI,L,beta)];
    Mi=zeros(2,2*n);
    Mi(:,(2*(ii-1)-1):(2*ii+2))=Mmid;
    M=[M;Mi];
end
Mlast=[0 0 0      0      alpha1 alpha2;
        0 0 alpha5(k(n-1),YI,L,beta) alpha6(k(n-1),YI,L,beta) alpha3(0,k(n-1),m(n),YI,L,beta,wn) alpha4(0,k(n-1),m(n),YI,L,beta,wn)];
Mi=zeros(2,2*n);
Mi(:,(2*n-5):2*n)=Mlast;
M=[M;Mi];
end
a=det(M);
end
end

```

```

function alpha=alpha3(k1,k2,mi,YI,L,beta,wn)
alpha=(k1+k2-mi*wn^2)*(sin(beta*L)-sinh(beta*L))+YI*beta^3*(cos(beta*L)+cosh(beta*L));
end

```

```

function alpha=alpha4(k1,k2,mi,YI,L,beta,wn)
alpha=(k1+k2-mi*wn^2)*(cos(beta*L)-cosh(beta*L))+YI*beta^3*(sinh(beta*L)-sin(beta*L));
end

```

```

function alpha=alpha5(k,YI,L,beta)
alpha = k*(sinh(beta*L)-sin(beta*L));
end

```

```

function alpha=alpha6(k,YI,L,beta)
alpha = k*(cosh(beta*L)-cos(beta*L));
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

function [chir,xir]=chipaper(Cou,phir,dphir,WR,N,ca,CsI,YI,mv)

sz=size(dphir);

```



```

for r=1:sz(1)
    xir(r)=(CsI*WR(r))/(2*YI) + ca/(2*mv*WR(r));
end

for r=1:sz(1)
    for i=1:N
        chir(r,i)=Cou*(-phir(r,i*sz(2)/N) + dphir(r,i*sz(2)/N));
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [WR,XR,PHI,dPHI,x]=vibration_modes(YI,mv,L,n,k,m)

c=sqrt(YI/mv);

for i=1:80000
    % i=10000;
    betaL=0.0001*i;
    [a(i),M]=build_matrix(k,m,c,YI,L,betaL/L,n);
    bb(i)=betaL/L;
end

a2=[];
bb2=[];
for i=1:length(a)-1
    if (a(i)*a(i+1)<0)
        a2=[a2;a(i) a(i+1)];
        bb2=[bb2;bb(i) bb(i+1)];
    end
end

for kk=1:50
    for i=1:length(bb2(:,1))
        bb3(i,1)=bb2(i,1)-a2(i,1).*(bb2(i,2)-bb2(i,1))./(a2(i,2)-
a2(i,1));% (bb1+bb2)/2;
        a3(i,1)=build_matrix(k,m,c,YI,L,bb3(i),n);
        if sign(a3(i))*sign(a2(i,1))<0
            a2(i,2)=a3(i);
            bb2(i,2)=bb3(i);
        else
            a2(i,1)=a3(i);
            bb2(i,1)=bb3(i);
        end
    end
end

bb0=bb3;

%modos de vibración

```

```

for i=1:length(bb0)
    beta=bb0(i);
    [a,M]=build_matrix(k,m,c,YI,L,beta,n);
    modos{i}= null(M);
end

%graficar modos
x=0:L/1000:L;
PHI=[];
dPHI=[];
WR=[];
XR=[];
for i=1:length(bb0)
    [a nm]=size(modos{i}); %numero de modos para un beta
    for k=1:nm
        X0=[];
        dX0=[];
        for kk=1:n
            X0=[X0,modos{i}(2*kk-1,k)*(sin(bb0(i).*x)-
sinh(bb0(i).*x))+modos{i}(2*kk,k)*(cos(bb0(i).*x)-cosh(bb0(i).*x))];
            dX0=[dX0,bb0(i)*(modos{i}(2*kk-1,k)*(cos(bb0(i).*x)-
cosh(bb0(i).*x))+modos{i}(2*kk,k)*(-sin(bb0(i).*x)-sinh(bb0(i).*x)))];
        end
        PHI=[PHI;X0];
        dPHI=[dPHI;dX0];
        WR=[WR;bb0(i)^2*c];
        XR=[XR;bb0(i)*L];
    end
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

function [gammar, alphas]=gammalphi(phir,x,mv)

sz=size(phir);

clear r

% dx=x(2)-x(1);
dx=1;
for r=1:sz(1)
    alphas(r)=trapz(mv*phir(r,:).^2); %integral con metodo de trapecio
    gammar(r)=trapz(phir(r,:));
end

```