



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

**NUEVAS HEURÍSTICAS PARA EL DISEÑO ESTRATÉGICO DE UNA RED
DE LÍNEAS DE TRANSPORTE PÚBLICO**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL MATEMÁTICA

VALENTINA CECILIA GÓMEZ ZÚÑIGA

PROFESOR GUÍA:
SERGIO JARA DÍAZ

PROFESOR CO-GUÍA:
ANDRÉS FIELBAUM SCHNITZLER

COMISIÓN:
JOSÉ SOTO SAN MARTÍN

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:
CMM ANID BASAL FB210005

SANTIAGO DE CHILE
2023

NUEVAS HEURÍSTICAS PARA EL DISEÑO ESTRATÉGICO DE UNA RED DE LÍNEAS DE TRANSPORTE PÚBLICO

En este trabajo se aborda el Problema de Diseño de Redes de Transporte Público y Determinación de la Frecuencia (que consiste en diseñar simultáneamente una estructura de líneas óptima y sus frecuencias óptimas para una red subyacente de ciudad con demanda dada) usando el modelo de costos y asignación de pasajeros desarrollado por Fielbaum, Jara-Díaz, y Gschwender (2016). Gran parte de las heurísticas anteriores han abordado este problema basándose en procedimientos que enfatizan las líneas directas independientemente del tipo de demanda, a pesar de que resultados más recientes indican que para algunos tipos de demanda las estructuras con transbordos pueden ser superiores. El objetivo de este trabajo ha sido desarrollar nuevas heurísticas flexibles que no impongan estructuras a priori, permitiendo que las líneas se adapten a todo tipo de distribución de viajes.

Se han estudiado las condiciones que favorecen la introducción intencional de transbordos en el diseño por medio de la división de líneas en una ciudad tipo corredor. A través del desarrollo analítico de los costos y frecuencias óptimas, se obtuvo que las condiciones son: baja cantidad relativa de usuarios que deben transbordar, alta diferencia de flujos a cada lado de la división y mayor largo de la línea resultante de menor flujo máximo. A partir de esto, fue posible definir un índice de divisibilidad para cuantificar la idoneidad de la división de una línea en algún nodo en particular. El índice de divisibilidad se integró a un algoritmo genético mediante dos estrategias: umbral y fórmula. La primera corresponde a establecer una cota máxima a partir de la cual la línea se divide, mientras que la segunda es usar el nodo de mayor índice como candidato a la división y calcular los costos respectivos para decidir.

Basándose en trabajos anteriores, se escogieron cuatro escenarios para las simulaciones en una ciudad paramétrica de seis zonas. Cada uno representa una demanda favorecedora a las estructuras estratégicas de hub-and-spoke, troncal alimentador, directa o exclusiva. Las dos primeras se basan en transbordos, mientras que las dos últimas en líneas directas. En todos los casos, el algoritmo con divisiones tipo umbral fue capaz de mejorar los resultados en comparación con el mismo algoritmo genético sin etapa de división, y disminuir la cantidad de iteraciones necesarias para la convergencia a la mitad. El algoritmo con divisiones tipo fórmula supera al tipo umbral en calidad de los resultados, pero necesita un mayor tiempo de ejecución. Además, al comparar los indicadores de directitud en cada caso, se aprecia que efectivamente los resultados orientaron su directitud en torno a la estructura estratégica dominante, evidenciando que el algoritmo genético modificado es capaz de adaptarse a la demanda y generar líneas directas o con transbordos según sea propicio.

Con mucho amor a mi madre.

Agradecimientos

Agradezco la felicidad que me han brindado todas y todos con quienes me encontré. Gracias a Cecilia Pilar, mi amiga que me acompañó desde primer año. A Juan Pablo, Francisco, Catherine, Sebastián y Tomás, amigos de especialidad. A *Les otros c.s.* -quienes sería demasiado largo nombrar uno a uno-. Les agradezco su compañía, soporte, preocupación y risas. Desde luego fueron la mejor parte de esta experiencia. Agradezco en especial a mi pareja Antonio López por siempre haber creído en mí. Tu amor me abraza y me impulsa, te amo. Por supuesto que también agradezco a mi mamá por todo su esfuerzo para brindarme esta educación. Confío en que todos nuestros sacrificios serán recompensados. Gracias también a Sergio Jara Díaz y Andrés Fielbaum Schnitzler por su guía.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Formulación del problema	2
1.3. Definición ciudad paramétrica	4
1.4. Síntesis y estructura de la tesis	6
2. Antecedentes de estudio	7
2.1. Problema de Diseño de Líneas	7
2.2. Problema de Diseño de la Red de Transporte Público y Determinación de la Frecuencia	8
2.2.1. Heurísticas	8
2.2.2. Metaheurísticas	9
2.3. Ciudades simplificadas	10
2.3.1. Corredor	11
2.3.2. Grilla	11
2.3.3. Concéntrica	12
2.3.4. Ciudad paramétrica	13
2.4. Síntesis	14
3. Ciudad lineal	15
3.1. Ciudad lineal Generalizada	15
3.1.1. Fórmula división de línea	25
3.1.2. Heurística en la ciudad lineal generalizada	28
3.1.2.1. Índice de divisibilidad	28
3.1.2.2. Algoritmos de división	29
3.2. Ciudad lineal Paramétrica	30
3.2.1. Simulaciones computacionales	32
3.2.1.1. Espacio (α, β)	34
3.2.1.2. Espacio (α, Y)	37
3.2.2. Resultados Algoritmo de división con umbral	39
3.2.3. Resultados Algoritmo de división con fórmula	43
3.3. Síntesis	47
4. Ciudad paramétrica	49
4.1. Algoritmo genético con divisiones	50
4.1.1. Creación piscina de genes	51
4.1.2. Calibración índice divisibilidad	53
4.1.3. División	56

4.1.4. Selección	56
4.1.5. Cruce	57
4.1.6. Mutación	57
4.2. Resultados algoritmo genético con divisiones	57
4.2.1. Implementación	57
4.2.2. Resultados	58
5. Conclusiones	69
Bibliografía	71
Anexo	73
Cálculos ciudad lineal paramétrica	73

Índice de Tablas

3.1.	Matriz origen-destino ciudad lineal.	31
4.1.	Valor de las constantes de costos operadores y usuarios.	59
4.2.	Parámetros de la demanda usados para testear.	59
4.3.	Tiempos de ejecución algoritmo con división tipo fórmula y umbral escenarios HS y FT.	62
4.4.	Comparación índices de directitud, MVRC y cantidad de líneas.	67

Índice de Ilustraciones

1.1.	Ciudad paramétrica. CBD es el centro, SC un subcentro y P su periferia. <i>Nota.</i> Imagen adaptada de “Beyond the Mohring effect: Scale economies induced by transit lines structures design” (p. 6), por Fielbaum, A., Jara-Díaz, S. y Gschwender, A., 2020, <i>Economics of Transportation</i> , 22.	5
1.2.	Distribución de la demanda en cada zona de la ciudad paramétrica. <i>Nota.</i> Imagen adaptada de “A Parametric Description of Cities for the Normative Analysis of Transport Systems” (p. 355), por Fielbaum, A., Jara-Díaz, S. y Gschwender, A., 2017, <i>Networks and Spatial Economics</i> , 17.	5
3.1.	Esquema ciudad lineal generalizada.	15
3.2.	Estructuras de línea en la ciudad lineal generalizada (en negro los nodos iniciales de alguna línea).	16
3.3.	Distribución de la demanda en la ciudad lineal paramétrica.	31
3.4.	Estructuras de línea en la ciudad lineal paramétrica. Con negro los nodos iniciales o finales de alguna línea y en blanco los intermedios.	32
3.5.	EDL óptima en el espacio (α, β) para distintos valores de a	34
3.6.	EDL óptima en el espacio (α, β) para distintos valores de a	35
3.7.	EDL óptima en el espacio (α, β) para $a = 0.5$	36
3.8.	EDL óptima en el espacio (α, β) para distintos valores de a	36
3.9.	EDL óptima en el espacio (α, Y) para $a = 0.1$ y distintos valores de β	37
3.10.	EDL óptima en el espacio (α, Y) para $a = 0.3$ y distintos valores de β	38
3.11.	EDL óptima en el espacio (α, Y) para $a = 0.5$ y distintos valores de β	38
3.12.	EDL óptima en el espacio (α, Y) para $a = 0.7$ y distintos valores de β	39
3.13.	Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.1$	40
3.14.	Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.2$	40
3.15.	Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.3$	40
3.16.	Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.4$	41
3.17.	Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.5$	41
3.18.	Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.6$	41
3.19.	Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.7$	42
3.20.	Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.8$	42
3.21.	Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.9$	43
3.22.	Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.1$	43
3.23.	Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.2$	44
3.24.	Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.3$	44
3.25.	Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.4$	45
3.26.	Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.5$	45
3.27.	Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.6$	46
3.28.	Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.7$	46

3.29.	Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.8$	47
3.30.	Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.9$	47
4.1.	Diagrama de flujo algoritmo genético general. <i>Nota.</i> Adaptado de “Controlador PID con algoritmos genéticos de número reales” (p.214), por G. Tajada, 2019, Revista Industrial Data 22(2).	50
4.2.	Cantidad total de líneas sin ciclos según cantidad de zonas.	52
4.3.	Cantidad de líneas sin paradas intermedias en la periferia según cantidad de zonas.	53
4.4.	EDL completa vista desde una sola zona en una CP de 6 zonas. Marcadas con color naranja las aristas de la ciudad y con celeste las aristas de la línea. . . .	54
4.5.	EDL dividida SC vista desde una sola zona en una CP de 6 zonas. Marcadas con color naranja las aristas de la ciudad y con celeste las aristas de la línea. .	54
4.6.	Ejemplo entrecruzamiento.	57
4.7.	Ejemplo enumeración identificadores nodos en una ciudad de 6 zonas.	58
4.8.	Ubicación de los escenarios en las áreas de dominancia de estructuras estratégicas. Modificación de la figura original adaptada de “Optimal public transport networks for a general urban structure” (p. 306), por Fielbaum, A., Jara-Díaz, S. & Gschwender, A., 2016, Transportation Research Part B, 94.	60
4.9.	Resultados divisiones tipo fórmula escenario HS.	61
4.10.	Resultados divisiones tipo fórmula escenario FT.	62
4.11.	Resultados escenario DIR.	63
4.12.	Resultados escenario EXC.	64
4.13.	Estructuras ganadoras del escenario HS.	65
4.14.	Estructuras ganadoras del escenario FT.	65
4.15.	Estructuras ganadoras del escenario DIR.	66
4.16.	Estructuras ganadoras del escenario EXC.	66

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Las redes de transporte público son cruciales en las ciudades modernas, ya que permiten a sus habitantes movilizarse de una manera rápida, sostenible y económica. Además, generan múltiples externalidades positivas, como reducción de la congestión vehicular, disminución de la contaminación atmosférica y acústica, reducción de los accidentes de tránsito y permiten un mejor uso del espacio urbano. En suma, influyen en la calidad de vida de los habitantes. Por lo tanto, es primordial desarrollar métodos para diseñar redes eficientes que incentiven su uso. No obstante, su planificación enfrenta objetivos conflictivos: por un lado, maximizar la calidad del servicio ofrecido a los pasajeros y, por el otro, minimizar los costos asociados a su operación.

Para efectos de este trabajo, una red de transporte público está definida por una estructura de líneas (que corresponde a un conjunto de líneas) y sus frecuencias. Cada línea se define como una secuencia de paradas en la ciudad. En este trabajo, se abordará el Problema de Diseño de la Red de Transporte Público y Determinación de la Frecuencia (TNDFSP por sus siglas en inglés), que consiste en diseñar simultáneamente una estructura de líneas óptima y sus frecuencias óptimas para una red subyacente de ciudad con demanda dada. Típicamente la optimalidad consiste en disminuir los costos de operadores (medidos en tamaño de la flota) y usuarios (medidos en tiempo de espera, tiempo a bordo del vehículo y penalización por transbordos).

La mayoría de los trabajos anteriores han abordado este problema buscando maximizar la cantidad de líneas directas en sus estructuras (es decir, minimizando los transbordos) y han evitado tratar con algoritmos que entiendan los transbordos como algo intencional en el diseño. No obstante, avances recientes en ciudades simplificadas, en familias muy específicas de estructuras de líneas, han dado indicios de que determinados tipos de demandas y ciudades pueden ser favorables a las estructuras basadas en transbordos, superando incluso a aquellas que priorizan los viajes directos, desmintiendo el paradigma anterior. Por lo tanto, es necesario el desarrollo de nuevas heurísticas que permitan diseñar estructuras de líneas flexibles que adapten la cantidad de transbordos a la demanda observada y no estén limitadas a familias específicas.

Para continuar, es necesario establecer que en este trabajo se usará el enfoque de costos y asignación de pasajeros (que corresponde a la manera en que los pasajeros se distribuyen en la estructura de líneas para llegar a sus destinos) adoptado por Fielbaum et al. (2016) con la ciudad paramétrica. Debido a que, según se revisará más adelante, es un modelo que se encarga de los aspectos principales del diseño de estructuras de líneas mediante una representación compacta de la ciudad. A continuación se presentará la formulación del problema y de la ciudad paramétrica.

1.2. Formulación del problema

Sea T una estructura de líneas compuesta por el conjunto de líneas L con frecuencias $f = \{f_l : l \in L\}$. Se plantea que la función de costos asociada a dicha estructura y frecuencias es la suma de los costos de los operadores (operación de la flota) y usuarios (tiempo de espera, tiempo de viaje en el vehículo y penalización por transferencias). Modelado de la siguiente forma:

$$\text{VRC}(T, f) = \sum_{l \in L} B_l(T, f) \cdot (c_0 + c_1 K_l(T, f)) + Y(p_{\text{tr}} \bar{t}_{\text{tr}}(T, f) + p_w \bar{t}_w(T, f)) + p_R R(T, f)$$

donde

$B_l(T, f)$: Flota total mínima de la línea l .

$K_l(T, f)$: Capacidad mínima de los vehículos de la línea l .

c_0 : Costo fijo por cada unidad de la flota.

c_1 : Costo adicional proporcional al tamaño del vehículo.

$\bar{t}_{\text{tr}}(T, f)$: Tiempo promedio de viaje de los usuarios.

$\bar{t}_w(T, f)$: Tiempo promedio de espera de los usuarios.

$R(T, f)$: Cantidad total de transferencias en la red.

p_{tr} : Valorización del tiempo de viaje.

p_w : Penalización al tiempo de espera.

p_R : Penalización a las transferencias.

Notar que el cálculo de $B_l(T, f)$, $K_l(T, f)$, $\bar{t}_{\text{tr}}(T, f)$, $\bar{t}_w(T, f)$ y $R(T, f)$ necesita las rutas específicas que usan los pasajeros para desplazarse en la estructura de línea, debido a que los tiempos de viaje t_{tr} y espera t_w de un pasajero dependen del trazado y frecuencias de las líneas que pretende abordar. $R(T, f)$ es un cálculo directo de la observación de la ruta y $B_l(T, f)$ junto a $K_l(T, f)$, gracias a que no se considera hacinamiento, se obtienen de

$$K_l(T, f) = \frac{\text{Flujo máximo en } l}{f_l}$$

$$B_l(T, f) = f_l \cdot t_{cl,l}$$

dónde el flujo máximo en una línea es la cantidad máxima de pasajeros a bordo a la vez (que por supuesto depende de las rutas que individualmente elijan seguir), mientras que $t_{cl,l}$ es el tiempo que demora un vehículo en recorrer todas las paradas de la línea l (que se ve afectado por la cantidad de pasajeros que aborden o desciendan en cada una).

Por lo tanto, es indispensable resolver el problema de asignación de usuarios a la red. Es decir, encontrar la asignación de pasajeros dada T y f . Se asume que cada usuario sigue la ruta que minimiza su costo generalizado; que en este contexto para una ruta r sería:

$$GC(T, f, r) = p_{tr}t_{tr}(T, f, r) + p_w t_w(T, f, r) + p_R R_g(T, f, r)$$

dónde p_{tr}, p_w, p_R son constantes con la misma interpretación anterior y $t_{tr}(T, f, r), t_w(T, f, r), R_g(T, f, r)$: tiempo en el vehículo, tiempo de espera y cantidad de transferencias de la ruta r en la red T con frecuencias f , respectivamente.

Considerando todos estos antecedentes, el problema a resolver es:

$$\min_{T \in \mathcal{T}} \min_{f \in \mathbb{R}^{|T|}} VRC(T, f) = \sum_{l \in L} B_l(T, f) \cdot (c_0 + c_1 K_l(T, f)) + Y(p_{tr} \bar{t}_{tr}(T, f) + p_w \bar{t}_w(T, f)) + p_R R(T, f)$$

dónde para cada T y f , $VRC(T, f)$ se obtiene a través de

$$\min_{r \in \mathcal{R}_{\mathcal{T}}(u,v)} GC(T, f, r) = p_{tr}t_{tr}(T, f, r) + p_w t_w(T, f, r) + p_R R_g(T, f, r), \quad \forall u, v \in (V \times V) |_{M>0}$$

usando que \mathcal{T} es el conjunto de redes de transporte en la ciudad paramétrica y $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}(u, v)$ las rutas factibles en T que empiezan en u y terminan en v .

Es importante señalar que el problema anterior siempre es factible, pues se puede considerar, por ejemplo, una estructura exclusiva que conecte mediante una línea sin transferencias ni detenciones cada par origen-destino. Por otra parte, como resultado de la optimización se pueden obtener (T^*, f^*) con líneas de frecuencia cero, en cuyo caso, se interpretará que la solución es equivalente a considerar (T^*, f^*) sin las líneas de frecuencia nula.

Por otra parte, considerando el problema más de cerca, es fácil notar que para una estructura de línea propuesta $T \in \mathcal{T}$, resolver

$$\min_{f \in \mathbb{R}^{|T|}} VRC(T, f) = \sum_{l \in L} B_l(c_0 + c_1 K_l) + Y(p_{tr} \bar{t}_{tr} + p_w \bar{t}_w) + p_R R$$

se trata de un problema de equilibrio. Ya que, dada una frecuencia f para la estructura, los pasajeros elegirán una asignación ρ en las rutas, y dada una asignación ρ de los pasajeros, se puede proponer una frecuencia f que minimice costos. Por lo tanto, en la solución se debe entregar la frecuencia óptima en términos de costos tal que ningún pasajero desee cambiar su ruta.

Numéricamente se puede tener una aproximación de la frecuencia óptima iterando entre redes equivalentes para líneas de frecuencias muy bajas. Esto quiere decir:

Algoritmo 1: Algoritmo asignación de pasajeros y frecuencia óptima.

Data: Frecuencia \bar{f} inicial, red de transporte \bar{T} inicial, ϵ_1 tolerancia para la frecuencia mínima y ϵ_2 tolerancia para la variación de la frecuencia.

Result: Asignación de pasajeros y frecuencia óptima.

- 1 Calcular la asignación de pasajeros ρ que minimiza el costo generalizado para cada par origen-destino con frecuencia \bar{f} fija;
 - 2 Calcular la frecuencia f que minimiza $VRC(\bar{T}, f)$ con ρ asignación de pasajeros fija;
 - 3 Si existen líneas con frecuencia menor a ϵ_1 , eliminarlas (redefinir \bar{T}) y volver a 1;
 - 4 Si en cada línea l de \bar{T} , $|\bar{f}_l - f_l| < \epsilon_2$, entonces parar. De lo contrario, volver a 1 con $\bar{f} = f$;
-

El algoritmo 1 no tiene una garantía teórica de convergencia, pero en la práctica suele alcanzar un equilibrio. Esto se debe a que los pasajeros eligen las rutas más convenientes y refuerzan el uso de ciertas líneas sobre otras. Sin embargo, el equilibrio no es único y depende de las frecuencias iniciales que se asignen a las líneas. Si se cambian estas frecuencias, se pueden obtener resultados diferentes.

1.3. Definición ciudad paramétrica

La ciudad paramétrica es la representación abstracta de una ciudad. Es un grafo (figura 1.1) compuesto de un anillo exterior de nodos llamados *periferias*, un anillo interior de *subcentros* y un nodo central, denominado *CBD*. Cada periferia está conectada a un subcentro y los subcentros conectan con el centro y sus subcentros vecinos. Cada par de subcentro y periferia conectados, se denomina zona, por lo tanto se dice que la ciudad paramétrica está dividida en n zonas. Formalmente se define como un grafo $G = (V, E)$ con

$$V = \{c, s_1, \dots, s_n, p_1, \dots, p_n\}$$
$$E = \left\{ \bigcup_{i \in [n]} cs_i \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i \in [n]} s_i p_i \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i \in [n-1]} s_i s_{i+1} \right\} \cup \{s_n s_1\}$$

1.4. Síntesis y estructura de la tesis

En este trabajo se exploran nuevas heurísticas que permitan diseñar estructuras flexibles con la cantidad óptima de transbordos. En el capítulo 2 se revisa a fondo la bibliografía relacionada, haciendo énfasis en el rol de los transbordos en los algoritmos y heurísticas. Luego, en el capítulo 3 se estudia en detalle el problema de división de líneas (equivalente a la introducción de transbordos) en una ciudad tipo corredor, para desarrollar un criterio extrapolable a ciudades más complejas. Surgen los primeros algoritmos de división de líneas. En el capítulo 4, los algoritmos del capítulo 3 se integran a un algoritmo genético y se aplican a la ciudad paramétrica de seis zonas. Se obtienen resultados para distintos tipos de ciudades (monocéntrica, policéntrica y dispersa) y niveles de demanda. Finalmente, en el capítulos 5 se encuentran las conclusiones y trabajo futuro.

Capítulo 2

Antecedentes de estudio

2.1. Problema de Diseño de Líneas

La implementación de una red de transporte público enfrenta problemas que pueden ser clasificados, según Ceder y Wilson (1986), en estratégicos, tácticos y operacionales. En el nivel estratégico se encuentra el Problema de Diseño de Redes de Transporte público (TNDP por sus siglas en inglés) y el Problema de Determinación de la Frecuencia. El primero, también llamado problema de diseño de líneas, consiste en el diseño de las líneas que conformarán la red de transporte público. Típicamente la red de la ciudad y la demanda son dadas, así que el objetivo es determinar la secuencia de paradas visitadas por cada línea, considerando los tiempos de viaje entre paradas y la demanda. No existe una única formulación, así que distintas funciones objetivo, restricciones y supuestos pueden ser considerados. Por otra parte, el problema de determinación de la frecuencia, como su nombre lo indica, consiste en determinar la frecuencia de cada línea que conforma la red de transporte público.

Para disminuir la complejidad, muchos autores han optado por abordar ambos problemas por separado, primero diseñando las líneas y luego determinando las frecuencias. Entre ellos; Lampkin y Saalmans (1967) y Dubois, Bel, y Llibre (1979) usan algoritmos glotones basados en esqueletos para resolver el diseño de líneas. Los algoritmos glotones se caracterizan por tomar iterativamente decisiones de optimización local, con la esperanza de alcanzar el óptimo global. En el caso específico de estos autores, definen esqueletos consistentes en una sucesión de nodos que marcan paradas intermedias y terminales obligatorios para una futura línea. Luego, iterativamente agregan a la solución en curso el esqueleto que aporte la mayor ganancia marginal y luego, usando otros criterios locales, agregan paradas al esqueleto hasta considerarlo una línea completa. Se detienen cuando las ganancias marginales se agotan, o la estructura alcanza determinado número de líneas. Son algoritmos concebidos bajo los supuestos de que las líneas óptimas deben ser directas, pero a la vez captar la mayor cantidad de pasajeros y las estructuras no contener demasiadas líneas, aunque no existen resultados formales que los justifiquen. También tienen en común que su objetivo final es minimizar el tiempo total de viaje bajo restricciones en los costos a los operadores. Lampkin y Saalmans (1967) restringen los costos de los operadores al tamaño total de la flota y consideran en el tiempo total de viaje tiempo de espera, en el vehículo y de acceso. Mientras que Dubois et al. (1979) definen como costos del operador como la suma de los costos de infraestructura, largo de las líneas y tamaño de la flota y solamente toman en consideración el tiempo de espera

en los transbordos y en el vehículo para el tiempo total de viaje.

2.2. Problema de Diseño de la Red de Transporte Público y Determinación de la Frecuencia

Es evidente que separar las etapas de diseño de las líneas y determinación de las frecuencias óptimas trae dificultades a los autores para evaluar la función objetivo, pues el tiempo de espera y el tamaño de la flota dependen de las frecuencias de las líneas; que no determinan hasta que tienen una estructura de línea final. Esto implica que en la etapa de diseño se comparan las estructuras bajo parámetros distintos a los que intentan minimizar y pueden sesgar el resultado. Para evitar tales problemas, otros autores han integrado ambas etapas en el que se denomina el Problema de Diseño de la Red de Transporte público y Determinación de la Frecuencia (TNDFSP por sus siglas en inglés), aunque para hacerlo -en consecuencia a la complejidad del problema- han tenido que adoptar otras simplificaciones.

2.2.1. Heurísticas

En un primer enfoque, Silman, Barzily, y Passy (1974) y Ceder y Wilson (1986) usaron algoritmos glotonos para definir un conjunto acotado de líneas candidatas sobre las cuales iterar distintas estructuras de líneas evaluadas en sus respectivas frecuencias óptimas. Silman et al. (1974) usan un algoritmo que sigue la lógica de los esqueletos anteriormente explicados para generar las líneas candidatas, mientras que Ceder y Wilson (1986) desde distintos nodos origen usan una búsqueda en profundidad para llenar de líneas directas entre los pares O-D de mayor demanda, limitando el largo de las líneas obtenidas al compararlo con el de la línea más directa. Ambos trabajos consideran los costos de usuarios como el tiempo en el vehículo, espera y penalización por transbordo, y el costo de los operadores proporcional al tamaño de la flota. Esta metodología, si bien tiene una mirada más completa que la anterior, de todas maneras introduce un sesgo al limitar las líneas elegibles a un conjunto que fue generado con algoritmos glotonos que favorecen las líneas directas y son construidas con una mirada local.

Trabajos posteriores se han orientado aún más hacia las líneas directas. Van Nes, Hamerslag, y Immers (1988) y Bussieck, Kreuzer, y Zimmermann (1996) usan como función objetivo maximizar el número de viajes directos, asumiendo que los pasajeros siempre usarán el camino que minimice la distancia, independientemente de las frecuencias. Van Nes et al. (1988) con la distribución de pasajeros dada y un conjunto de líneas predefinidas, desarrollan un algoritmo que trabaja con todas ellas simultáneamente. Cada línea inicia con frecuencia cero y se aumenta iterativamente la frecuencia de la línea que ofrezca las mejores ganancias marginales. Los autores usan el algoritmo de Ceder y Wilson (1986) para crear un conjunto de líneas predefinidas. Tanto el objetivo de optimización, como la distribución de pasajeros, la creación de las líneas y la optimización de las frecuencias, se basan en favorecer las líneas directas glotonamente. Bussieck et al. (1996) lo modelan como un problema lineal mixto. Para mantener controladas las variables de la formulación, y reforzando la orientación a los viajes directos, usan como líneas elegibles a los caminos que minimizan la distancia entre los pares O-D.

En respuesta al enfoque revisado anteriormente, Claessens, Van Dijk, y Zwaneveld (1998) proponen, en el contexto de ferrocarriles, cambiar el foco hacia los costos de los operadores y quitar de la función objetivo los viajes directos. Modelan un problema de programación lineal entera y lo resuelven con un algoritmo de desarrollo propio basado en Branch and Bound. Contrastan sus resultados en una red pequeña con los obtenidos usando un modelo como el de Bussieck et al. (1996). Obtienen que se puede lograr una disminución considerable en los costos de los operadores, con una disminución moderada de los viajes directos. No obstante, para el análisis se compara la cantidad de viajes directos, y no costos detallados de los pasajeros, además de que el modelo sólo puede ser aplicado a redes pequeñas con pocas líneas candidatas para mantener controlado el número de variables.

También usando un problema de programación lineal entera, Borndörfer, Grötschel, y Pfetsch (2005) abarcan tanto los costos del operador como de los pasajeros en una función objetivo que suma ambos. Para no aumentar la complejidad de las restricciones, se ven obligados a realizar la asignación de pasajeros según el óptimo del sistema, aun cuando es más realista considerar que los pasajeros operan egoístamente. No obstante, la ventaja es que este tipo de asignación no limita la cantidad de transbordos, ni sesga hacia líneas directas, así que ofrece una flexibilidad que los métodos anteriores no tenían. Con todo, la formulación sigue siendo computacionalmente costosa y debe complementarse con un método para seleccionar líneas candidatas que los autores no detallan claramente. En sus resultados experimentales lograron disminuir sustancialmente los costos del operador, sin aumentar significativamente los costos de los pasajeros, lo que empuja a creer que una cantidad óptima e intencional de transbordos puede disminuir los costos totales del sistema.

Claessens et al. (1998) y Borndörfer et al. (2005) tienen en común que incorporan por primera vez activamente el rol de los transbordos en el diseño de las estructuras de líneas, y pese a que sólo pueden trabajar con una cantidad limitada de líneas predefinidas, ambos obtuvieron que una disminución moderada de los viajes directos, podría disminuir los costos totales de la estructura.

2.2.2. Metaheurísticas

En una corriente de trabajo totalmente distinta, según se evidencia en la revisión realizada por Durán-Micco y Vansteenwegen (2022), el aumento de la potencia de los computadores ha volcado la literatura reciente al desarrollo de metaheurísticas.

Nikolic y Teodorovic (2014) y Blum y Mathew (2010) desarrollan metaheurísticas basadas en agentes. Los primeros usan el método Bee Colony Optimization (BCO), que se basa en replicar la inteligencia colectiva de las abejas, mientras que los segundos lo que denominan un sistema de agentes inteligentes. Ambos consideran los costos de los usuarios como el tiempo total de viaje (tiempo de espera, viaje en el vehículo y penalización por transbordos), costos del operador proporcionales al tamaño de la flota y la asignación de pasajeros que minimiza los transbordos. A grandes rasgos, tienen en común que su estrategia se basa en una búsqueda estocástica de mejores soluciones aplicando perturbaciones al conjunto de soluciones en curso.

Luego, una cantidad significativa de trabajos, con prolíficos resultados, se han centrado en la aplicación de algoritmos genéticos. Entre ellos, Chai y Liang (2020), Liang, Wang, Dong,

y Zhao (2020), Oliveira y Barbieri (2015) tienen en común que plantean el TNDSP como un problema de optimización multiobjetivo; por un lado buscan minimizar el tamaño de la flota (costos operador) y por el otro minimizar el tiempo total de los usuarios (considerando tiempo de espera, viaje en el vehículo y penalización por transbordos). Chai y Liang (2020) además consideran que el tiempo de viaje en el vehículo incluye el tiempo de detención, que corresponde al tiempo que los pasajeros tardan en abordar/descender en las paradas intermedias. Todos los autores realizan la asignación de pasajeros que minimiza los trasbordos, independientemente de las frecuencias. Oliveira y Barbieri (2015) y Chai y Liang (2020) ajustan las frecuencias para cumplir con una tasa de ocupación máxima dada en cada línea, mientras que Liang et al. (2020) propone evolucionar las frecuencias como una población independiente, que se enlaza con la población de estructuras de líneas al final de cada iteración. Además, cada trabajo propone su propia manera de representar líneas y estructuras de líneas en cromosomas. No obstante, todos destacan en haber mejorado ampliamente los resultados de heurísticas previas con las que fueron comparados.

Los algoritmos genéticos, gracias a que evolucionan con una fuerte aleatoriedad, exploran todo tipo de estructuras de líneas, incluso aquellas basadas en transbordos. Así que pueden superar fácilmente a las heurísticas glotonas que se evalúan sobre un universo de soluciones más acotado. Sin embargo, los autores revisados han introducido un fuerte sesgo hacia los viajes directos en la asignación de pasajeros. Owais y Osman (2018) también plantean un algoritmo genético con función objetivo que suma los costos de operadores y usuarios, considerados de forma similar a la revisada, pero planean la asignación de pasajeros y optimización de la frecuencia como un problema integrado que se debe resolver iterativamente: asignar pasajeros para frecuencias dadas, luego optimizar las frecuencias para la asignación de pasajeros dada, y repetir hasta que converja. No obstante, apuntan a que su algoritmo sea usado en redes de ciudades grandes, así que diseñan otro algoritmo genético para acotar el conjunto de líneas posibles del algoritmo genético principal. En este proceso, priorizan que las líneas sean directas, así que de todas maneras inducen un sesgo razonable hacia las estructuras de líneas directas.

En conclusión, las metaheurísticas, entre las que destacan los algoritmos genéticos, han supuesto un salto importante en el mejoramiento de las soluciones al Problema de Diseño de la Red de Transporte Público y Determinación de la Frecuencia, pero sus implementaciones han sido demasiado ambiciosas, así que no se han librado del todo del sesgo de las líneas directas. Además, no se observan trabajos en que hayan sido aplicadas a redes de complejidad intermedia que permitan complementar sus resultados con desarrollos analíticos.

2.3. Ciudades simplificadas

La intratabilidad de considerar todas las líneas posibles en una red ha sido un problema constante en la literatura. En la mayoría de los trabajos que se han revisado hasta ahora, los autores lo abordan usando heurísticas glotonas para crear líneas directas con las que trabajar. No obstante, hay otra corriente de investigación que se ha centrado en buscar redes que, en pocos nodos y arcos, puedan representar las dinámicas más importantes de los flujos de pasajeros en las ciudades reales, para así hacer factible considerar una variedad más amplia de líneas y estructuras.

2.3.1. Corredor

Aunque no corresponde a una ciudad en sí, el modelo de corredor aísla los fenómenos esenciales del flujo de pasajeros, así que ha sido de gran interés en la literatura. Puede ser visto como modelar una sola línea de transporte público; la red conforma un solo camino y los pasajeros desean desplazarse en ambas direcciones. Principalmente se ha usado para estudiar casos en que la demanda es marcadamente desbalanceada en alguna dirección o se concentra en alguna zona.

Según exponen Tirachini, Cortés, y Jara-Díaz (2010) las estrategias de diseño más estudiadas son: exprés, deadheading y vuelta corta. En la primera, los vehículos tienen paradas sólo en alguna zona del corredor y luego se dirigen sin detenciones hasta el terminal, u otra zona predefinida dónde el servicio es restablecido. La segunda, por lo general se aplica en corredores que presentan alta demanda en una dirección, pero baja en la otra. Consiste en incrementar la frecuencia en la dirección punta haciendo que algunos vehículos vuelvan inmediatamente al terminal inicial pasando fuera de servicio por la dirección de baja demanda. Por último, para vuelta corta, la estrategia es seleccionar una parte de la flota para que realice ciclos cortos en aquellos segmentos que tengan demanda más alta.

Es importante destacar que ninguna de estas estrategias permite los transbordos, y en general son una variable que no se ha explorado en este tipo de modelos, ya que la premisa de los corredores ha sido representar una sola línea. No obstante, el reciente trabajo de Jara-Díaz y Muñoz-Paulsen (2022) introduce una nueva perspectiva en el contexto del diseño bimodal: consideran estructuras de líneas con dos tecnologías en una ciudad tipo corredor de tres nodos. Debido a la simplicidad de su modelo, son capaces de evaluar todas las combinaciones de líneas entre ambas tecnologías, incluyendo líneas directas, exclusivas, troncal alimentador y estructuras mixtas entre las anteriores. Sin importar la tecnología, encontraron que las líneas directas dominan en todos los tipos de demanda, excepto cuando hay un desbalance en la cantidad de pasajeros de ambos tramos o la geometría de la ciudad es asimétrica, casos que benefician estructuras con líneas tipo troncal alimentador.

Por lo tanto, aunque históricamente no ha sido la línea de investigación principal, se reúne evidencia de que incluso cuando la ciudad adopta un modelo extremadamente simplificado, con determinadas demandas emergen estructuras basadas en transbordos. Sería un antecedente fundamental extender los resultados a ciudades tipo corredor con más nodos, continuando con el enfoque de Jara-Díaz y Muñoz-Paulsen (2022), aunque con una sola tecnología, que es el interés en este trabajo.

2.3.2. Grilla

Dentro de la representación de ciudades propiamente tal, la más intuitiva es representar la ciudad como una grilla cuadrada, presentada primero por Holroyd (1965). El autor propone una familia de estructuras de líneas que forman una grilla rectangular, al solamente permitir líneas rectas que recorren toda la ciudad en sentido este-oeste o norte-sur con retorno. Considera que los orígenes y destinos de los viajes están uniformemente distribuidos dentro de la ciudad, así que los pasajeros deben realizar una caminata desde sus respectivos orígenes hacia

la parada, y desde la última parada a su destino. Los pasajeros eligen la ruta que minimiza su tiempo de caminata, espera y viaje en el vehículo. La función objetivo es minimizar el tiempo de caminata, espera y viaje en el vehículo de los pasajeros más el costo de los operadores (proporcional a la cantidad de distancia total recorrida por los buses), usando como variables la frecuencia (igual para todas las líneas) y el espaciamiento de las líneas. En este contexto, el espaciamiento corresponde a la distancia perpendicular entre dos líneas paralelas adyacentes. Con este modelo, la mayoría de los pasajeros deben transbordar una, dos o incluso tres veces, a pesar de esto, no penaliza los transbordos.

Newell (1979) extiende el trabajo de Holroyd (1965) al agregar penalizaciones por transbordos. Propone una estructura tipo hub-and-spoke en que todas líneas inician en dirección norte o sur, hasta que alcanzan el centro de la ciudad, se desplazan en dirección E-O y continúan por otra ruta en dirección norte o sur, por el extremo de la ciudad que aún no han recorrido. Las variables de decisión son el espaciamiento N-S de las líneas y su frecuencia (idéntica para todas). Newell (1979) concluye que la estrategia basada en hub-and-spoke supera a la estructura tipo grilla, incluso bajo condiciones idealizadas que deberían favorecer a esta última. Además de que su estructura puede aprovechar mejor la demanda de ciudades reales, en que algunas avenidas atraen más viajes que otras.

Daganzo (2010) también representa una ciudad como una grilla cuadrada, con funciones objetivo y asignación de pasajeros similar a la anterior, pero propone una nueva familia de estructuras tipo hub-and-spoke -argumentando limitaciones en la considerada por Newell (1979)- y agrega costos de infraestructura. Como resultado, obtiene líneas tipo hub-and-spoke que zigzaguean por la grilla para condensar los transbordos en el centro de la ciudad, que también se pueden combinar con líneas rectas para crear una estructura híbrida entre hub-and-spoke y grilla. Concluye que entre más altos son los costos de la infraestructura, más se acerca la estructura dominante al concepto hub-and-spoke.

En suma, la ciudad tipo grilla introducida por Holroyd (1965), al considerar una demanda uniformemente distribuida imposibilita el uso de algoritmos glotones, por lo que ha motivado la búsqueda y el mejoramiento de las estructuras basadas en transbordos, principalmente a través de desarrollos analíticos, gracias a que su regularidad lo permite. No obstante, la evaluación de estructuras solamente se ha hecho a través de familias muy específicas.

2.3.3. Concéntrica

Otro tipo de ciudad es la concéntrica presentada por Byrne (1975). La ciudad concéntrica corresponde a un arco de circunferencia definido en coordenadas polares, donde todos los viajes tienen como destino el dentro de la circunferencia, con origen dado por alguna función de densidad. Además, los pasajeros escogen la ruta que minimiza su tiempo de acceso, espera y en el vehículo. Byrne (1975) considera una familia de estructuras de líneas radiales, y minimiza la suma de los costos de operadores y usuarios con variable de decisión las frecuencias (no necesariamente iguales) y el espaciamiento de las líneas.

Originalmente, la demanda y estructuras de líneas propuestas por Byrne (1975) no permiten los transbordos. No obstante, Badia, Estrada, y Robusté (2014) presenta una reformulación de la familia de estructuras híbridas de Daganzo (2010) adaptadas a la ciudad

concéntrica. Las estructuras tienen líneas radiales y concéntricas (una grilla en coordenadas polares) en el centro y tipo hub-and-spoke en la periferia. Considera costos de operadores, infraestructura y pasajeros (tiempo de acceso, espera, en el vehículo y penalización por transbordos). A pesar de que es un supuesto fuerte, asume que los pasajeros toman la ruta que minimiza la distancia, sin importar la frecuencia ni los transbordos, y justifica que, gracias a la geometría de la ciudad y la estructura de líneas, de todas maneras, es una simplificación que no difiere demasiado de la ruta que tomarían si minimizaran el costo total. Badia et al. (2014) defiende que la principal bondad de la estructura de red que propone es su robustez, pues se adapta bien incluso en ciudades cuyo patrón de calles difícilmente pueda ser catalogado como radial.

Nuevamente, en el desarrollo de la ciudad concéntrica, se puede observar cómo los autores mejoraron las estructuras y la representatividad de las ciudades, al introducir intencionalmente transbordos en el diseño. Sin embargo, la evaluación aún ha sido sólo a través de familias de estructuras bien definidas.

2.3.4. Ciudad paramétrica

La coherencia con la realidad en los modelos de ciudades simplificadas ha sido una constante preocupación en la investigación. Fielbaum, Jara-Díaz, y Gschwender (2017) compararon las propiedades topológicas de los modelos de grillas y concéntricos -entre otros- con más de 200 ciudades reales. Obtuvieron que ninguno de los modelos fue satisfactorio. En particular, la desventaja del modelo de grilla es que todas las calles presentan la misma conectividad e importancia, por lo que no hay centros que actúen como polos de atracción de viajes. Mientras que en el modelo concéntrico la conectividad entre calles es demasiado alta. No obstante, proponen una nueva representación que preserva mejor las propiedades topológicas de las ciudades: la ciudad paramétrica.

La ciudad paramétrica se define como un CBD rodeado de n zonas. Cada zona es representada como un nodo subcentro y una periferia. El CBD conecta con los subcentros, y cada subcentro con su periferia respectiva y los subcentros de las zonas vecinas; formando una ciudad compacta de $2n+1$ nodos y $3n$ aristas. El CBD es el principal atractor de viajes, mientras que las periferias los generadores, no obstante, mediante distintos parámetros para controlar la demanda, también se admiten viajes hasta y desde los subcentros.

Según Fielbaum et al. (2017), la principal ventaja de la ciudad paramétrica es que es lo suficientemente flexible como para representar ciudades monocéntricas, policéntricas y dispersas, a la vez que permite análisis analíticos de costos. Tiene mejores indicadores topológicos que los modelos con grillas o concéntricos, y además se pudo adaptar bien a los ejemplos de ciudades reales usados. También, compararon cuatro diferentes estructuras en la ciudad paramétrica, basadas en: directas, troncal alimentador, hub-and-spoke y exclusivas. Consideraron costos del operador asociados al tamaño de la flota y capacidad de los buses, costos de los usuarios por tiempo de espera y viaje en el vehículo, más penalizaciones por transbordo. Obtuvieron que hub-and-spoke domina cuando la ciudad es monocéntrica con pocos pasajeros, mientras que troncal alimentador cuando la ciudad es dispersa. En cualquier caso, evidenciaron que, en determinado tipo de ciudades, bajo condiciones razonables de demanda, los modelos basados en transbordos tienen ventaja.

Luego, Fielbaum, Jara-Díaz, y Gschwender (2018) implementaron heurísticas glotonas - entre ellas Dubois et al. (1979) y Ceder y Wilson (1986)-, en la ciudad paramétrica. Las heurísticas lograron mejorar los resultados basados en estructuras estratégicas de Fielbaum et al. (2017), no obstante, cómo ya se ha revisado en detalle, se encuentran sesgadas hacia las líneas directas. Sería interesante hacer un análogo usando heurísticas basadas en transbordos, para comprobar cuál domina en el tipo de ciudad en que originalmente predominaban las estructuras estratégicas con transbordos. Lamentablemente, no se observa en la literatura desarrollo de tales heurísticas. Las estructuras basadas en transbordos más bien emergen en familias particulares en casos ad-oc.

Un poco alejado del TNDP que es el interés principal en este trabajo, pero muy relacionado con el rol de los transbordos en redes de transporte público, Jara-Díaz y Muñoz-Paulsen (2019) desarrollan un algoritmo para el diseño de estructuras de líneas bimodales (i.e. con dos tecnologías). Para ello, inicia con una estructura propuesta (idealmente densa) e iterativamente la optimiza y elimina las líneas de baja frecuencia, o los tramos en una línea que tienen bajo factor de carga, hasta que obtiene una estructura final de líneas con frecuencia y factor de carga aceptables. Al eliminar los tramos con bajo factor de carga, en realidad, lo que se está haciendo es eliminar una ruta directa de la estructura. Esto evidencia, que realizar divisiones estratégicas de líneas directas pueden conducir a un VRC más bajo, además de el rol de los factores de carga en el proceso.

En conclusión, la ciudad paramétrica se perfila como la mejor ciudad simplificada, pues posee los mejores indicadores topológicos comparados con ciudades reales, permite la representación de ciudades monocéntricas, policéntricas y dispersas, y su baja cantidad de nodos y arcos posibilita realizar cálculos analíticos en ella. Por lo mismo, ha permitido acercamientos más flexibles, gracias a los cuales ha sido posible observar que determinadas condiciones de demanda favorecen a las estructuras basadas en transbordos. Además, hay evidencia contundente para sospechar que los factores de carga también juegan un rol en la directitud de las líneas óptimas.

2.4. Síntesis

De acuerdo a lo revisado en la literatura, tradicionalmente se ha abordado el diseño de estructuras de líneas de transporte público usando heurísticas basadas en líneas directas; la mayoría construye líneas entre los orígenes y destinos más demandados, y luego acepta pequeños desvíos para lograr abarcar toda la red. No obstante, trabajos más recientes que incorporan mayor flexibilidad, han obtenido que una disminución moderada de los viajes directos podría disminuir los costos totales. En particular, en la Ciudad Paramétrica, se han descrito zonas específicas de demanda en que estructuras basadas en transbordos superan a las basadas en viajes directos. Sin embargo, ningún modelo ha estado totalmente libre de la influencia de las líneas directas, ya sea en la construcción de las líneas o la asignación de pasajeros. Por lo tanto, resulta clave avanzar hacia el diseño de una heurística que permita obtener estructuras de líneas que incorporen intencionalmente la cantidad de transbordos adecuada para la demanda, sin estar sesgada hacia los viajes directos.

Capítulo 3

Ciudad lineal

Para desarrollar una heurística que adapte la cantidad de transbordos a la demanda observada, es necesario entender bajo qué condiciones los transbordos son beneficiosos. Esto es equivalente a estudiar los casos en que la introducción forzada de transbordos disminuye el valor de los recursos consumidos totales. Dado que la manera más intuitiva de forzar transbordos es dividir una línea directa, resulta natural realizar el estudio en una ciudad tipo corredor que capture el comportamiento de los pasajeros en lo que potencialmente podría ser una sola línea. En particular, se define la Ciudad Lineal Generalizada, cuya formulación permite comparar analíticamente los costos entre usar una sola línea directa o sus posibles divisiones.

3.1. Ciudad lineal Generalizada

Definimos la ciudad lineal generalizada como un camino de k nodos n_1, \dots, n_k T-equidistantes (figura 3.1), donde la distribución de pasajeros está dada por una matriz de origen-destino $OD \in \mathcal{M}_{[1, \dots, k]^2}(\mathbb{R}^+)$ triangular superior y la distancia se mide en tiempo de viaje. Notemos que al definir la matriz de origen-destino de esta manera se está imponiendo que el flujo de pasajeros es en dirección ascendente en los subíndices de los nodos (hacia la derecha en la imagen).

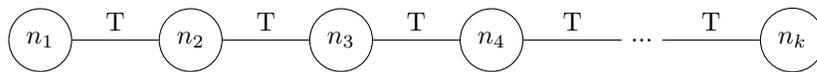


Figura 3.1: Esquema ciudad lineal generalizada.

Acorde a los objetivos planteados, definimos las EDL N_0 y N_i . La primera está compuesta por la línea completa, mientras que la segunda es su división en el i -ésimo nodo (figura 3.2). Para comprender en qué condiciones es mejor una o la otra, buscaremos una expresión para la diferencia entre el mínimo valor de los recursos consumidos (MVRC) de cada una (ecuación 3.1). Será necesario calcular los costos del operador, los usuarios y minimizar la suma de ambos.

$$\min_{f_0} VRC^{N_1}(f_0) - \min_{\vec{f}_i} VRC^{N_i}(\vec{f}_i) \quad (3.1)$$

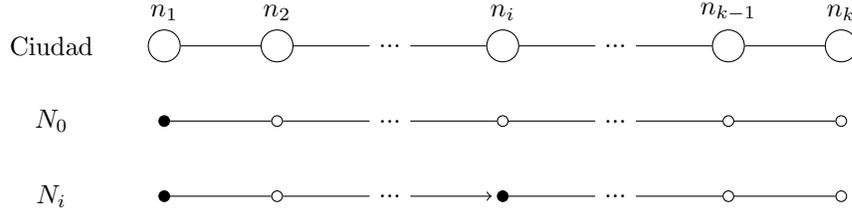


Figura 3.2: Estructuras de línea en la ciudad lineal generalizada (en negro los nodos iniciales de alguna línea).

En primer lugar, definimos formalmente las líneas

$$\begin{aligned} l_0 &= [n_1, n_2, \dots, n_k] \\ l_{(i,1)} &= [n_1, n_2, \dots, n_i] \\ l_{(i,2)} &= [n_i, n_{i+1}, \dots, n_k] \end{aligned}$$

y luego las EDL

$$\begin{aligned} N_0 &= \{l_0\} \\ N_i &= \{l_{(i,1)}, l_{(i,2)}\} \end{aligned}$$

Entonces, para calcular los costos de los operadores, recordamos que:

$$c_{\text{op}}^N(f) = \sum_{l \in L} B_l(N, f)(c_0 + c_1 K_l(N, f)) \quad (3.2)$$

con

$$K_l(T, f) = \frac{\text{Flujo máximo en } l}{f_l} \quad (3.3)$$

$$B_l(T, f) = f_l \cdot t_{cl,l} \quad (3.4)$$

En particular, al flujo entre dos nodos adyacentes n_u, n_{u+1} lo denotaremos $F(u)$ y se puede calcular como

$$F(u) = \sum_{\substack{g \leq u \\ h \geq u+1}} OD(g, h). \quad (3.5)$$

Desde ahora en adelante $F(u)$ será una expresión conocida $\forall u \in [k-1]$.

Entonces obtenemos que

$$K_0(f_0) = \frac{\max_{u \in [k-1]} F(u)}{f_0} \quad (3.6)$$

El tiempo de ciclo $t_{cl,0}$ es igual a la suma del tiempo del vehículo en movimiento y el tiempo detenido en las paradas. El primero, debido a que todos los nodos están a la misma distancia T de sus vecinos, se puede calcular como T multiplicado por el largo de la línea. Mientras que para el segundo, hay que considerar los tiempos de ascenso y descenso de cada pasajero que usa el vehículo. Si usamos t el tiempo de abordaje o descenso individual, el tiempo detenido sería dos veces t por la cantidad total de pasajeros dividido en la frecuencia de la línea (que determina cuántos pasajeros suben a cada vehículo). Entonces,

$$\begin{aligned} t_{cl,0} &= t_{\text{movimiento}}(f_0) + t_{\text{detenido}}(f_0) \\ &= 2T(k-1) + \frac{2Yt}{f_0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\implies B_0(f_0) = 2T(k-1)f_0 + 2Yt \quad (3.8)$$

$$\therefore c_{\text{op}}^{N_0}(f_0) = (2T(k-1)f_0 + 2Yt) \left(c_0 + c_1 \frac{\max_{u \in [k-1]} F(u)}{f_0} \right) \quad (3.9)$$

Luego, para la EDL N_i , repetimos lo anterior con las líneas $l_{(i,1)}$ y $l_{(i,2)}$:

$$K_{(i,1)}(f_{(i,1)}) = \frac{\max_{u \in [i-1]} F(u)}{f_{(i,1)}} \quad (3.10)$$

$$K_{(i,2)}(f_{(i,2)}) = \frac{\max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u)}{f_{(i,2)}} \quad (3.11)$$

La línea $l_{(i,1)}$ tiene largo $T(i-1)$ y la usan todos los pasajeros con origen antes de i (independientemente de su destino). La línea $l_{(i,2)}$ tiene largo $T(k-i)$ y la usan los pasajeros con destino después de i (sin importar el origen). Así que,

$$\begin{aligned} t_{cl,(i,1)} &= t_{\text{movimiento}}(f_{(i,1)}) + t_{\text{detenido}}(f_{(i,1)}) \\ &= 2T(i-1) + \frac{2t}{f_{(i,1)}} \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\implies B_{(i,1)} = 2T(i-1)f_{(i,1)} + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} t_{cl,(i,2)} &= t_{\text{movimiento}}(f_{(i,2)}) + t_{\text{detenido}}(f_{(i,2)}) \\ &= 2T(k-i) + \frac{2t}{f_{(i,2)}} \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\implies B_{(i,2)} = 2T(k-i)f_{(i,2)} + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \quad (3.15)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
c_{\text{op}}^{N_i}(\vec{f}) &= \sum_{l \in \{(i,1), (i,2)\}} B_l(f)(c_0 + c_1 K_l(f)) \\
&= \left(2T(i-1)f_{(i,1)} + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) \right) \left(c_0 + \frac{c_1}{f_{(i,1)}} \max_{u \in [i-1]} F(u) \right) \\
&\quad + \left(2T(k-i)f_{(i,2)} + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \right) \left(c_0 + \frac{c_1}{f_{(i,2)}} \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \right) \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Ahora, para calcular el costo de los usuarios; usando \bar{t}_{tr} el tiempo de viaje promedio, \bar{t}_w tiempo de espera promedio, R total de transbordos y p_{tr}, p_w, p_R los penalizadores o costos equivalentes respectivos,

$$c_{\text{usu}}^N(f) = Y(p_{\text{tr}}\bar{t}_{\text{tr}}(N, f) + p_w\bar{t}_w(N, f)) + p_R R(N, f). \quad (3.17)$$

En la EDL N_0 , como todos los pasajeros esperan la misma línea, el tiempo de espera es el mismo para todos y no hay transferencias. Entonces

$$\bar{t}_{w,0}(f_0) = \frac{1}{2f_0} \quad (3.18)$$

$$R_0(f_0) = 0. \quad (3.19)$$

Luego, el tiempo de viaje de los pasajeros $t_{\text{tr},0}(f_0)$ se puede descomponer en la suma del tiempo en que el vehículo está en movimiento y el tiempo detenido en las paradas.

$$\therefore t_{\text{tr},0}(f_0) = t_{\text{veh. mov.},0}(f_0) + t_{\text{veh. det.},0}(f_0) \quad (3.20)$$

El tiempo $t_{\text{veh. mov.},0}(f_0)$ se puede calcular fácilmente al sumar sobre todos los pares de origen-destino válidos,

$$t_{\text{veh. mov.},0}(f_0) = \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h - g)T \quad (3.21)$$

Para el tiempo detenido, hay que considerar que para un pasajero que viaja de g hasta h paradas no consecutivas, el tiempo que pasa en el vehículo detenido en cada parada intermedia es igual a t veces la cantidad de pasajeros que abordan y descienden en esa parada, más el tiempo que espera para descender en la última parada. Ya que es un tiempo promedio, el pasajero que baja primero se demora 0 segundos en hacerlo, mientras que el último debe esperar t veces la cantidad de pasajeros con destino esa parada en el vehículo, por lo que en promedio un pasajero se demora en descender $t/2$ veces la cantidad de pasajeros que bajan.

En resumen,

$$\begin{aligned}
t_{\text{veh. det.,0}}(f_0) &= \frac{t}{f_0} \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)}_{\text{Todos los pares OD}} \left(\underbrace{\sum_{g < j < h}}_{\text{Paradas intermedias}} \left(\underbrace{\sum_{1 \leq j < \bar{h}} OD(j, \bar{h})}_{\text{Pasajeros que suben en j}} + \underbrace{\sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j)}_{\text{Pasajeros que bajan en j}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{1 \leq \bar{g} < h} OD(\bar{g}, h)}_{\text{Pasajeros que bajan en h}} \right) \\
&= \frac{At}{f_0} \tag{3.22}
\end{aligned}$$

donde se ha usado la variable A para compactar la escritura de la expresión.

Por lo tanto, al reemplazar 3.18, 3.19, 3.21 y 3.22 en 3.17, los costos de los usuarios en la EDL N_0 son:

$$c_{\text{usu}}^{N_0}(f_0) = p_{tr} \left(\sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h - g)T + \frac{At}{f_0} \right) + \frac{Yp_w}{2f_0} \tag{3.23}$$

En cuanto a la EDL N_i , dado que son dos líneas, el cálculo del tiempo de espera de cada pasajero depende de las líneas que haya usado. Si dividimos según origen g y destino h , los tiempos de espera respectivos son:

- Si $h \leq i$: $t_{w,i}(\vec{f}_i) = \frac{1}{2f_{(i,1)}}$
- Si $g < i$ y $h > i$: $t_{w,i}(\vec{f}_i) = \frac{1}{2f_{(i,1)}} + \frac{1}{2f_{(i,2)}}$
- Si $g > i$: $t_{w,i}(\vec{f}_i) = \frac{1}{2f_{(i,2)}}$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{w,i}(\vec{f}_i) &= \frac{1}{Y} \left(\sum_{\substack{1 < h \leq i \\ 1 \leq g < h}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,1)}} + \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \left(\frac{1}{2f_{(i,1)}} + \frac{1}{2f_{(i,2)}} \right) + \sum_{\substack{i < g < k \\ g < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,2)}} \right) \\
&= \frac{1}{Y} \left(\sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,1)}} + \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,2)}} \right) \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Luego, N_i solo admite transbordos en el nodo i , así que la cantidad de transbordos totales $R_i(\vec{f}_i)$ es la cantidad de transbordos en i , a los cuales se denotará τ_i para aligerar la notación.

Es claro ver que τ_i se calcula como la suma de pasajeros con origen antes de i y destino después de i .

$$R_i(\vec{f}_i) = \tau_i = \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \quad (3.25)$$

El tiempo en movimiento de los usuarios $t_{\text{veh. mov.},i}(\vec{f}_i)$ es el mismo que en la estructura de línea anterior,

$$t_{\text{veh. mov.},i}(\vec{f}_i) = \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h - g)T. \quad (3.26)$$

No obstante, el tiempo de detención $t_{\text{veh. det.},i}(\vec{f}_i)$ varía debido a que las paradas i e $i + 1$ ya no pueden considerarse intermedias en ningún caso. Entonces, para los pasajeros que viajan en la línea $l_{(i,1)}$, el tiempo de espera total es:

$$\begin{aligned} t_{\text{veh. det.}}^{(i,1)}(\vec{f}_i) &= \frac{t}{f_{(i,1)}} \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq g < i \\ g < h < i}} OD(g, h)}_{\substack{\text{Pasajeros destino} \\ \text{antes de } i}} \left(\sum_{g < j < h} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq k} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \sum_{1 \leq \bar{g} < h} \frac{OD(\bar{g}, h)}{2} \right) \\ &+ \frac{t}{f_{(i,1)}} \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq g < i \\ i \leq h \leq k}} OD(g, h)}_{\substack{\text{Pasajeros bajan en } i \\ \text{o transbordan}}} \left(\sum_{g < j < i} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq k} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq \bar{g} < i \\ i \leq \bar{h} \leq k}} \frac{OD(\bar{g}, \bar{h})}{2}}_{\substack{\text{Todos bajan} \\ \text{obligadamente en } i}} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Luego, para los pasajeros que viajan en la línea $l_{(i,2)}$,

$$t_{\text{veh. det.}}^{(i,2)}(\vec{f}_i) = \frac{t}{f_{(i,2)}} \underbrace{\sum_{\substack{i < h \leq k \\ 1 < g < h}} OD(g, h)}_{\substack{\text{Pasajeros destino} \\ \text{después de } i}} \left(\sum_{i < j < h} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq k} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \sum_{1 \leq \bar{g} < h} \frac{OD(\bar{g}, h)}{2} \right) \quad (3.28)$$

Para compactar la escritura, diremos que

$$t_{\text{veh. det.}}^{(i,1)}(\vec{f}_i) = \frac{Ct}{f_{(i,1)}} \quad (3.29)$$

$$t_{\text{veh. det.}}^{(i,2)}(\vec{f}_i) = \frac{Dt}{f_{(i,2)}} \quad (3.30)$$

usando C y D adecuadas desde 3.27 y 3.28. Con lo que

$$t_{\text{veh. det.},i}(\vec{f}_i) = t_{\text{veh. det.}}^{(i,1)}(\vec{f}_i) + t_{\text{veh. det.}}^{(i,2)}(\vec{f}_i) = \frac{Ct}{f_{(i,1)}} + \frac{Dt}{f_{(i,2)}} \quad (3.31)$$

Entonces, juntando 3.24, 3.25, 3.26 y 3.31, se obtiene que el costo de los usuarios en la

EDL N_i es igual a:

$$\begin{aligned}
c_{\text{usu}}^{N_i}(\vec{f}_i) &= p_{tr} \left(\sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h - g)T + \frac{Ct}{f_{(i,1)}} + \frac{Dt}{f_{(i,2)}} \right) \\
&\quad + p_w \left(\sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,1)}} + \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,2)}} \right) + p_{R\tau_i} \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Con esto, se pueden expresar los recursos consumidos en ambas estructuras. Usando 3.9 y 3.23 en la EDL N_0 , y 3.16 y 3.32 para N_i ,

$$\begin{aligned}
VRC^{N_0}(f_0) &= c_{\text{op}}^{N_0}(f_0) + c_{\text{usu}}^{N_0}(f_0) \\
&= (2T(k - 1)f_1 + 2Yt) \left(c_0 + c_1 \frac{\max_{u \in [k-1]} F(u)}{f_1} \right) + \frac{Yp_w}{2f_0} \\
&\quad + p_{tr} \left(\sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h - g)T + \frac{At}{f_0} \right) \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VRC^{N_i}(\vec{f}_i) &= c_{\text{op}}^{N_i}(\vec{f}_i) + c_{\text{usu}}^{N_i}(\vec{f}_i) \\
&= \left(2T(i - 1)f_{(i,1)} + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) \right) \left(c_0 + \frac{c_1}{f_{(i,1)}} \max_{u \in [i-1]} F(u) \right) \\
&\quad + \left(2T(k - i)f_{(i,2)} + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \right) \left(c_0 + \frac{c_1}{f_{(i,2)}} \max_{n \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \right) \\
&\quad + p_{tr} \left(\sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h - g)T + \frac{Ct}{f_{(i,1)}} + \frac{Dt}{f_{(i,2)}} \right) + p_{R\tau_i} \\
&\quad + p_w \left(\sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,1)}} + \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,2)}} \right) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Ahora, se minimizará la frecuencia en las expresiones anteriores. Primero, para la EDL N_0 se reordenarán convenientemente los términos a partir de 3.33:

$$\begin{aligned}
VRC^{N_0}(f_0) &= (2T(k-1)f_0 + 2Yt) \left(c_0 + c_1 \frac{\max_{u \in [k-1]} F(u)}{f_0} \right) + \frac{Yp_w}{2f_0} \\
&\quad + p_{tr} \left(\sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h-g)T + \frac{At}{f_0} \right) \\
&= 2(k-1)Tc_0f_0 + 2Ytc_0 + 2T(k-1) \max_{u \in [k-1]} F(u)c_1 + \frac{Yp_w}{2f_0} \\
&\quad + \frac{2Ytc_1}{f_0} \max_{u \in [k-1]} F(u) + p_{tr} \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h-g)T + \frac{Atp_{tr}}{f_0} \\
&= \frac{1}{f_0} \left(2Yt \max_{u \in [k-1]} F(u)c_1 + Atp_{tr} + \frac{Yp_w}{2} \right) + 2(k-1)Tc_0f_0 + 2Ytc_0 \\
&\quad + 2T(k-1) \max_{u \in [k-1]} F(u)c_1 + p_{tr} \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h-g)T \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Notemos que lo anterior se puede interpretar como un término \hat{a} inversamente proporcional a f_0 , otro término \hat{b} directamente proporcional y un \hat{c} independiente. Entonces, es equivalente a minimizar

$$\min_{f_0} \frac{\hat{a}}{f_0} + \hat{b}f_0 + \hat{c} \quad (3.36)$$

expresión para la cual es sabido que en el óptimo f_0^* :

$$\frac{\hat{a}}{f_0^*} = \hat{b}f_0^*. \quad (3.37)$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{f_0^*} \left(2Yt \max_{u \in [k-1]} F(u)c_1 + Atp_{tr} + \frac{Yp_w}{2} \right) = 2(k-1)Tc_0f_0^* \quad (3.38)$$

Reemplazando en la ecuación 3.35:

$$\begin{aligned}
\min_{f_0} VRC^{N_0}(f_0) &= 2(k-1)Tc_0f_0^* + 2(k-1)Tc_0f_0^* + 2Ytc_0 \\
&\quad + 2T(k-1) \max_{u \in [k-1]} F(u)c_1 + p_{tr} \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h-g)T \\
&= 4(k-1)Tc_0f_0^* + 2Ytc_0 + 2T(k-1) \max_{u \in [k-1]} F(u)c_1 \\
&\quad + p_{tr} \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h-g)T \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Análogamente para la EDL N_i , se desarrolla desde 3.34:

$$\begin{aligned}
VRC^{N_i}(\vec{f}_i) &= c_{\text{op}}^{N_i}(\vec{f}_i) + c_{\text{usu}}^{N_i}(\vec{f}_i) \\
&= \left(2T(i-1)f_{(i,1)} + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) \right) \left(c_0 + \frac{c_1}{f_{(i,1)}} \max_{u \in [i-1]} F(u) \right) \\
&\quad + \left(2T(k-i)f_{(i,2)} + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \right) \left(c_0 + \frac{c_1}{f_{(i,2)}} \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \right) \\
&\quad + p_{tr} \left(\sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h-g)T + \frac{Ct}{f_{(i,1)}} + \frac{Dt}{f_{(i,2)}} \right) + p_R \tau_i \\
&\quad + p_w \left(\sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,1)}} + \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,2)}} \right) \\
&= 2T(i-1)f_{(i,1)}c_0 + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h)c_0 + 2T(i-1) \max_{u \in [i-1]} F(u)c_1 \\
&\quad + \frac{2tc_1}{f_{(i,1)}} \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) \max_{u \in [i-1]} F(u) \\
&\quad + 2T(k-i)f_{(i,2)}c_0 + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h)c_0 + 2T(k-i)c_1 \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \\
&\quad + \frac{2tc_1}{f_{(i,2)}} \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \\
&\quad + p_{tr} \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h-g)T + \frac{Ctp_{tr}}{f_{(i,1)}} + \frac{Dtp_{tr}}{f_{(i,2)}} + p_R \tau_i \\
&\quad + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,1)}} + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,2)}} \\
&= \frac{1}{f_{(i,1)}} \left(2tc_1 \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) \max_{u \in [i-1]} F(u) + p_{tr}tC + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,1)}} \right) \\
&\quad + 2T(i-1)f_{(i,1)}c_0 \\
&\quad + \frac{1}{f_{(i,2)}} \left(2tc_1 \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) + p_{tr}tD + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2} \right) \\
&\quad + 2T(k-i)f_{(i,2)}c_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h)c_0 + 2T(i-1) \max_{u \in [i-1]} F(u)c_1 \\
& + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h)c_0 + 2T(k-i)c_1 \max_{u \in [k] \setminus [i-1]} F(u) \\
& + p_{tr} \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h-g)T + p_R \tau_i
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Se concluye que en la minimización $f_{(i,1)}$ y $f_{(i,2)}$ son independientes, pues no hay ningún término que dependa simultáneamente de ambas. Esto lleva nuevamente a minimizaciones del tipo 3.36 y se obtiene que en las frecuencias $f_{(i,1)}^*$ y $f_{(i,2)}^*$ óptimas,

$$\frac{1}{f_{(i,1)}^*} \left(2tc_1 \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) \max_{u \in [i-1]} F(u) + p_{tr}tC + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2f_{(i,1)}^*} \right) = 2T(i-1)f_{(i,1)}^*c_0 \tag{3.41}$$

$$\frac{1}{f_{(i,2)}^*} \left(2tc_1 \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) + p_{tr}tD + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2} \right) = 2T(k-i)f_{(i,2)}^*c_0 \tag{3.42}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\min_{\vec{f}_i} VRC^{N_i}(\vec{f}_i) & = 4T(i-1)f_{(i,1)}^*c_0 + 4T(k-i)f_{(i,2)}^*c_0 \\
& + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h)c_0 + 2T(i-1) \max_{u \in [i-1]} F(u)c_1 \\
& + 2t \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h)c_0 + 2T(k-i)c_1 \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \\
& + p_{tr} \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h-g)T + p_R \tau_i
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Finalmente, podemos calcular la expresión buscada inicialmente (ecuación 3.1) para la diferencia de los recursos consumidos de ambas estructuras de línea:

$$\begin{aligned}
& \min_{f_0} VRC^{N_1}(f_0) - \min_{\vec{f}_i} VRC^{N_i}(\vec{f}_i) \\
& = 4T(k-1)f_0^*c_0 + 2Ytc_0 + 2T(k-1) \max_{u \in [k-1]} F(u)c_1 + p_{tr} \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h-g)T \\
& \quad - 4T(i-1)f_{(i,1)}^*c_0 - 4T(k-i)f_{(i,2)}^*c_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2t \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h)c_0 - 2T(i-1) \max_{u \in [i-1]} F(u)c_1 \\
& - 2t \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h)c_0 - 2T(k-i) \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u)c_1 \\
& - p_{tr} \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)(h-g)T - p_R \tau_i \\
& = 4Tc_0 \left((k-1)f_0^* - (i-1)f_{(i,1)}^* - (k-i)f_{(i,2)}^* \right) + 2Tc_1 \left((k-1) \max_{u \in [k-1]} F(u) \right. \\
& \quad \left. - (i-1) \max_{u \in [i-1]} F(u) - (k-i) \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \right) \\
& - 2tc_0 \left(\sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) + \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) - Y \right) - p_R \tau_i \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Notemos que $Y = \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h)$,

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) + \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) - Y &= \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) + \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) - \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq k}} OD(g, h) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) - \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ g < h \leq i}} OD(g, h) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \\
&= \tau_i \tag{3.45}
\end{aligned}$$

3.1.1. Fórmula división de línea

Con todo lo anterior, es posible concluir:

Proposición 3.1 *Sea la red de la ciudad un camino de k nodos n_1, \dots, n_k T -equidistantes, donde la distribución de pasajeros está dada por una matriz de origen-destino $OD \in \mathcal{M}_{[1, \dots, k]^2}(\mathbb{R}^+)$ triangular superior. Se definen las estructuras de línea $N_0 = \{l_0\}$ y $N_i = \{l_{(i,1)}, l_{(i,2)}\}$, con las líneas $l_0 = [n_1, n_2, \dots, n_k]$, $l_{(i,1)} = [n_1, n_2, \dots, n_i]$ y $l_{(i,2)} = [n_i, n_{i+1}, \dots, n_k]$. Entonces se tiene que*

$$\begin{aligned}
& \min_{f_0} VRC^{N_0}(f_0) - \min_{\vec{f}_i} VRC^{N_i}(\vec{f}_i) \\
& = 4Tc_0 \left((k-1)f_0^* - (i-1)f_{(i,1)}^* - (k-i)f_{(i,2)}^* \right) - \tau_i(2tc_0 + p_R) \\
& + 2Tc_1 \left((k-1) \max_{u \in [k-1]} F(u) - (i-1) \max_{u \in [i-1]} F(u) - (k-i) \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \right) \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Es más, al analizar la expresión de la propiedad 3.1 en detalle,

$$\begin{aligned}
& \min_{f_0} VRC^{N_0}(f_0) - \min_{\vec{f}_i} VRC^{N_i}(\vec{f}_i) \\
& = 4Tc_0 \underbrace{\left((k-1)f_0^* - (i-1)f_{(i,1)}^* - (k-i)f_{(i,2)}^* \right)}_{\text{Diferencia de las frec. óptimas ponderadas por largo de línea}} - \underbrace{\tau_i(2tc_0)}_{\text{Tiempo detención adicional por transbordo}} - \underbrace{\tau_i(p_R)}_{\text{Penalización por transbordo}} \\
& \quad + 2Tc_1 \underbrace{\left((k-1) \max_{u \in [k-1]} F(u) - (i-1) \max_{u \in [i-1]} F(u) - (k-i) \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \right)}_{\text{Diferencia de flujo máximo ponderado por largo de línea}} \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Se puede interpretar a partir de la ecuación 3.46 que al comparar el servicio dado por una línea única (N_0) con el entregado por su división en el nodo i -ésimo (N_i), los factores determinantes son: los largos de línea, frecuencias óptimas, flujos máximos y cantidad de pasajeros que transbordarían en la división. Por otra parte, al analizar las constantes que acompañan cada término, se observa que la única constante relacionada al costo de pasajeros involucrada es p_R . Esto se explica debido a que la frecuencia óptima internaliza los costos variables de los pasajeros asociados a tiempo de espera y tiempo de viaje (ver 3.38, 3.41 y 3.42). En la misma secuencia de ideas, se concluye que el primer término (la diferencia de las frecuencias óptimas ponderadas por largo de línea), al estar multiplicado por c_0 , está relacionado tanto a la diferencia en el tamaño de la flota, como a los costos variables de los usuarios. En cuando a los demás términos; el segundo, al estar multiplicado por tc_0 , corresponde al costo adicional en tiempo de detención causado por los pasajeros que deben bajar y volver a subir al siguiente vehículo en el transbordo. El tercero es claramente la penalización por las molestias causadas a los pasajeros por el hecho de transbordar. Finalmente, el cuarto término está relacionado a la diferencia en la capacidad de los vehículos; notar que existe una estrecha relación entre el flujo máximo de la línea y la capacidad de sus vehículos (ver 3.3).

Para enriquecer el análisis, consideremos sin pérdida de generalidad que el flujo máximo está en un tramo anterior a la división de la línea completa, es decir,

$$\max_{u \in [k-1]} F(u) = \max_{u \in [i-1]} F(u) \quad (3.48)$$

Entonces se puede resolver,

$$\begin{aligned}
& (k-1) \max_{u \in [k-1]} F(u) - (i-1) \max_{u \in [i-1]} F(u) - (k-i) \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \\
& = (k-i) \max_{u \in [k-i]} F(u) - (k-i) \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \\
& = (k-i) \left(\max_{u \in [k-i]} F(u) - \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) \right) \\
& \geq 0 \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Lo último usando que $[i-1] \setminus [i-1] \subset [k-1]$ y $[k-1] \setminus [i-1] \subset [k-1]$. Dado que el caso en que el flujo máximo está entre los nodos u_i y u_k es análogo, se concluye que una gran diferencia entre los flujos máximos de las líneas resultantes favorece la división, al igual que aumentar el largo de la línea de menor flujo máximo.

Para lo que sigue, es necesario notar que para maximizar

$$(k-1)f_0^* - (i-1)f_{(i,1)}^* - (k-i)f_{(i,2)}^*$$

la estrategia debe ser aumentar el largo de la línea en N_i de menor frecuencia sin aumentar su flujo máximo. Primero, al revisar las expresiones explícitas de las frecuencias óptimas 3.41 y 3.42:

$$f_{(i,1)}^* = \sqrt{\frac{2tc_1 \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) \max_{u \in [i-1]} F(u) + p_{tr}tC + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ 1 < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2}}{2T(i-1)c_0}} \quad (3.50)$$

$$f_{(i,2)}^* = \sqrt{\frac{2tc_1 \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} OD(g, h) \max_{u \in [k-1] \setminus [i-1]} F(u) + p_{tr}tD + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < k \\ i < h \leq k}} \frac{OD(g, h)}{2}}{2T(k-i)c_0}} \quad (3.51)$$

con C y D desde (3.27) y (3.28)

$$\begin{aligned} C = & \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ g < h < i}} OD(g, h) \left(\sum_{g < j < h} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq k} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \sum_{1 \leq \bar{g} < h} \frac{OD(\bar{g}, h)}{2} \right) \\ & + \sum_{\substack{1 \leq g < i \\ i \leq h \leq k}} OD(g, h) \left(\sum_{g < j < i} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq k} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \sum_{\substack{1 \leq \bar{g} < i \\ i \leq h \leq k}} \frac{OD(\bar{g}, \bar{h})}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$D = \sum_{\substack{i < h \leq k \\ 1 \leq g < h}} OD(g, h) \left(\sum_{i < j < h} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq k} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \sum_{1 \leq \bar{g} < h} \frac{OD(\bar{g}, h)}{2} \right) \quad (3.53)$$

Notamos que las frecuencias son proporcionales al flujo máximo que reciben las líneas e inversamente proporcionales al largo. Por lo tanto, aumentar el largo de la línea en N_i de menor frecuencia sin aumentar su flujo máximo es una estrategia doblemente ganadora para disminuir $(k-1)f_0^* - (i-1)f_{(i,1)}^* - (k-i)f_{(i,2)}^*$.

En suma, se concluye que las condiciones que favorecen la división son:

1. Baja cantidad de transbordos en i .
2. Gran diferencia en el flujo máximo entre $[0, i]$ e $[i, k]$.
3. Mayor largo de la sección ($[0, i]$ o $[i, k]$) de menor flujo máximo.

En vista de que dos de las tres condiciones anteriores están relacionadas al flujo máximo, será muy útil introducir el concepto de tasa de ocupación (ζ). La tasa de ocupación es el cociente entre la cantidad de pasajeros a bordo y la capacidad total del vehículo. Para el caso de la ciudad generalizada, vendría siendo la normalización del flujo:

$$\zeta_{N,l}(m) := \frac{F(m)/f_{N,l}}{K_{N,l}} = \frac{F(m)}{f_{N,l}K_{N,l}} = \frac{F(m)}{\max_{n,n+1 \in N} F(n)} \quad (3.54)$$

En la última desigualdad se usó la definición 3.3 de la capacidad $K_{N,l}$. Además, es importante destacar que es posible obtener una expresión independiente de la frecuencia, gracias a que no se están considerando líneas paralelas en el diseño de estructuras de líneas.

Con la definición 3.54, es posible establecer que la condición 2 equivale a observar en N_0 bajas tasas de ocupación antes de i y altas después, o viceversa. En caso de que i también fuese una variable de decisión, entonces la condición 3 equivaldría a agregar tantos nodos a la sección de menor flujo máximo como fuese posible sin aumentarlo. Considerando las tres condiciones, el mejor caso posible para la división es cuando el flujo máximo de pasajeros se concentra en algún extremo de la ciudad y luego desciende abruptamente para el resto de los nodos. En tal escenario, la línea de mayor flujo máximo sería corta (es decir, la línea con menor flujo máximo sería larga), habría una diferencia pronunciada entre los flujos máximos de cada sección y presumiblemente habría pocos pasajeros transbordando debido al descenso abrupto del flujo. Esto se puede identificar fácilmente al observar, usando N_0 como referencia, tramos consecutivos con tasas de ocupación cercanas a uno en alguno de los extremos, con tasas cercanas a cero en los demás los tramos.

3.1.2. Heurística en la ciudad lineal generalizada

3.1.2.1. Índice de divisibilidad

Al observar en detalle, si bien el factor de carga es un buen indicio para detectar la favorabilidad a la división, por sí mismo no es suficiente, ya que no involucra el largo de las líneas resultantes y solamente podría entregar una cota máxima a los transbordos. Más importante aún, la división es un proceso que actúa sobre un nodo, pero el factor de carga es una propiedad de los tramos. Por lo tanto, se propone definir un *índice de divisibilidad* para cada nodo, que resuma las características importantes para su división.

En base a las tres condiciones que favorecen la división, es claro que el índice del nodo i debe ser inversamente proporcional a los transbordos en i y directamente proporcional tanto a la diferencia entre el flujo máximo entre $[0, i]$ e $[i, k]$, como al largo de la línea resultante de menor flujo máximo. Debido a que la cantidad total de pasajeros en la red Y no tiene mayor importancia en la división, será deseable mantener controlados los valores del índice independientemente de Y . Para lograrlo, es conveniente evaluar los flujos máximos a través de los factores de carga, que son los valores normalizados. Entonces, se define el índice de divisibilidad:

Definición 3.1 (Índice de divisibilidad) *Sea N una estructura de línea, $l \in N$ una línea con nodos T -equidistantes enumerados $\{1, 2, \dots, k\}$. Si el factor de carga del tramo j -ésimo se denota $\zeta_{N,l}(j)$ y $\tau_{N,l}(j)$ la cantidad de pasajeros que atraviesan el nodo j , entonces el índice de divisibilidad del nodo i se define como*

$$I_{N,l}(i) := \left\| \max_{1 \leq n \leq i} \zeta_{N,l}(n) - \max_{k \geq n \geq i} \zeta_{N,l}(n) \right\| (1 - \tau_{N,l}(i)d_1) \left(1 + \left(\|l_i\| + \frac{\|l_i\|}{\|l\|} \right) d_2 \right) \quad (3.55)$$

$$\text{con } l_i = \begin{cases} [0, i] & \text{si } q, q + 1 \in [i, k] \\ [i, k] & \text{si } q, q + 1 \in [0, i] \end{cases}, \text{ para } q := \arg \max_{u \in [k]} F(u).$$

El primer término de 3.55 es equivalente a la diferencia de los flujos máximos a cada lado de la división en i . Luego, el segundo establece una relación inversamente proporcional con los potenciales transbordos y el tercero incentiva aumentar el largo de la línea resultante de menor flujo máximo. Los últimos dos términos están ponderados por constantes, debido a que dependiendo de los valores de las constantes c_0 , c_1 y p_R que modelan los costos de operadores y usuarios, los transbordos y la capacidad ociosa (relacionada con el largo de la línea de menor flujo máximo) podrían ser penalizados en mayor o menor magnitud.

3.1.2.2. Algoritmos de división

Para integrar este índice correctamente a un algoritmo, se podrían adoptar dos enfoques: determinar un umbral a partir del cual el nodo con mayor índice de divisibilidad se divide, o aplicarle la fórmula de división (propiedad 3.1) para decidir. El primero tiene la desventaja de requerir un proceso de calibración para encontrar el umbral preciso para la red de la ciudad y constantes de costos. Sin embargo, una vez encontrado, requiere menos cálculos que el segundo. Por otro lado, el segundo enfoque siempre es igual o más preciso que el primero. La elección del enfoque debe hacerse para cada contexto considerando las ventajas y desventajas de cada uno. No obstante, en ambos casos resulta natural generalizar la idea a la posibilidad de admitir más de una división por línea.

Se proponen los algoritmos recursivos 2 y 3 que integran la fórmula de división, las condiciones que favorecen la división y el índice de divisibilidad. El algoritmo 2 consiste en calcular el índice de divisibilidad de cada nodo y verificar si el mayor supera determinado umbral fijado con anterioridad. Si lo supera, entonces se divide la línea en ese nodo, y el proceso se repite recursivamente para las secciones de la izquierda y derecha. En caso contrario, retorna la lista de nodos a dividir actual. Mientras que el algoritmo 3, al no contar con un umbral, cuando encuentra el nodo de mayor índice de divisibilidad, calcula el valor de la fórmula de división 3.1 en dicho punto. Si el valor es positivo, entonces la división es conveniente y agrega el nodo a la lista de divisiones, justo antes de empezar la recursión para las secciones izquierda y derecha. En caso que sea negativo, retorna la lista de nodos a dividir actual.

Algoritmo 2: Algoritmo división con umbral.

Data: El umbral u , las constantes d_1 y d_2 y la matriz OD de una ciudad lineal generalizada con k nodos.

Result: Nodos en que se debe dividir la línea completa.

```
1 Divisiones  $\leftarrow \{\}$ ;
2  $k_{ini}, k_{fin} \leftarrow 1, k$ ;
3  $l \leftarrow \{k_{ini} + 1, k_{ini} + 2, \dots, k_{fin} - 1\}$ ;
4 Calcular el índice de divisibilidad  $I(k)$  para cada nodo  $k \in l$ ;
5  $I_{max} \leftarrow \max\{I(k); k \in l\}$ ;
6  $k_{max} \leftarrow \operatorname{argmax}\{I(k); k \in l\}$ ;
7 if  $I_{max} > u$  then
8   *Hay que dividir en  $k_{max}$ , pero también se añade una recursión para buscar
   nuevas divisiones en  $[k_{ini}, k_{max}]$  y  $[k_{max}, k_{fin}]$ ;
9   Divisiones  $\leftarrow$  Divisiones  $\cup \{k_{max}\}$ ;
10  Volver a (3) con  $k_{fin} = k_{max}$  e idéntico  $k_{ini}$ ;
11  Volver a (3) con  $k_{ini} = k_{max}$  e idéntico  $k_{fin}$ ;
12 end
```

Algoritmo 3: Algoritmo división con fórmula.

Data: Las constantes d_1 y d_2 y la matriz OD de una ciudad lineal generalizada de k nodos.

Result: Nodos en que se debe dividir la línea completa.

```
1 Divisiones  $\leftarrow \{\}$ ;
2  $k_{ini}, k_{fin} \leftarrow 1, k$ ;
3  $l \leftarrow \{k_{ini} + 1, k_{ini} + 2, \dots, k_{fin} - 1\}$ ;
4 Calcular el índice de divisibilidad  $I(k)$  para cada nodo  $k \in l$ ;
5  $I_{max} \leftarrow \max\{I(k); k \in l\}$ ;
6  $k_{max} \leftarrow \operatorname{argmax}\{I(k); k \in l\}$ ;
7 Calcular el valor  $FD$  de la fórmula de división con  $i = k_{max}$ ;
8 if  $FD > 0$  then
9   *Hay que dividir en  $k_{max}$ , pero también se añade una recursión para buscar
   nuevas divisiones en  $[k_{ini}, k_{max}]$  y  $[k_{max}, k_{fin}]$ ;
10  Divisiones  $\leftarrow$  Divisiones  $\cup \{k_{max}\}$ ;
11  Volver a (3) con  $k_{fin} = k_{max}$  e idéntico  $k_{ini}$ ;
12  Volver a (3) con  $k_{ini} = k_{max}$  e idéntico  $k_{fin}$ ;
13 end
```

3.2. Ciudad lineal Paramétrica

Para testear los algoritmos anteriores, es necesario definir un caso particular de ciudad lineal generalizada. Dado que ya se ha determinado que el objetivo final es una heurística para la ciudad paramétrica, resulta natural que el caso de prueba sea lo más similar posible a ella, dentro de los límites que las simplificaciones de la ciudad lineal generalizada permitan. En concreto, la ciudad paramétrica se caracteriza por su matriz origen-destino que tiene una

estructura bien definida que queda totalmente determinada a través de los parámetros Y , a , b , α , β y γ . Por lo tanto, el intermedio entre ambas ciudades, es la que llamaremos la ciudad lineal paramétrica, cuyo largo se adaptará para que su demanda pueda incorporar las mismas variables y con una interpretación análoga a la de la ciudad paramétrica original.

En la ciudad paramétrica, a es la proporción de viajes que inician desde las periferias y b en los subcentros. De los viajes que inician en la periferia de una zona cualquiera, una proporción α se dirige al CBD, β al subcentro propio y γ a otro subcentro. Respecto a los que inician en el subcentro, $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{1-\beta}$ va al CBD y $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{1-\beta}$ a otro subcentro. Por consiguiente, en la ciudad lineal paramétrica se necesita al menos una periferia, un subcentro que actúe como “propio”, el CBD y un subcentro “ajeno” para que los parámetros no pierdan su significado.

Así que se postula como ciudad lineal paramétrica a un camino de 4 nodos T-equidistantes con matriz origen-destino expuesta en la tabla 3.1. Para no perder de vista la interpretación de la ciudad, llamaremos a los nodos periferia (P), subcentro A (SA), CBD y subcentro B (SB). Tal como se aprecia en el esquema 3.3, la ciudad lineal paramétrica es análoga a una ciudad paramétrica con dos zonas donde sólo se está considerando el flujo en una dirección.

Tabla 3.1: Matriz origen-destino ciudad lineal.

	Periferia	Subcentro A	CBD	Subcentro B
Periferia	0	$a\beta Y$	$a\alpha Y$	$a\gamma Y$
Subcentro A	0	0	$b\tilde{\alpha} Y$	$b\tilde{\gamma} Y$
CBD	0	0	0	0
Subcentro B	0	0	0	0

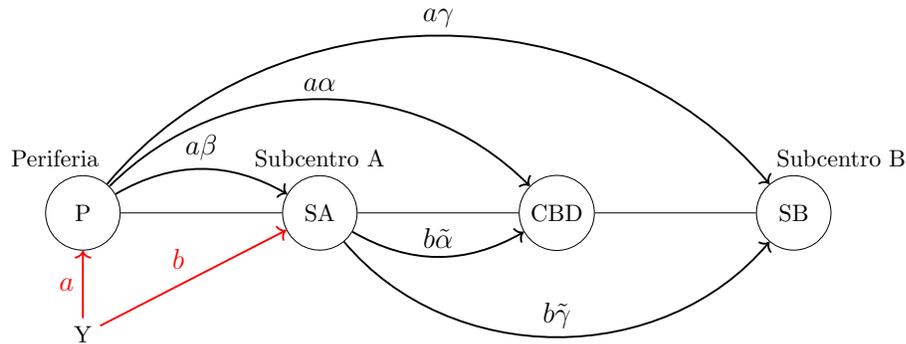


Figura 3.3: Distribución de la demanda en la ciudad lineal paramétrica.

Se definen las líneas PACB, PAC, ACB, PA, AC y CB (ecuación 3.56) y estructuras de línea M_0 , M_2 , M_3 y M_{23} (ecuación 3.57), que además se encuentran graficadas en la figura 3.4. De esta manera, se considera la EDL de línea completa y todas sus posibles divisiones.

$$\begin{aligned}
\text{PACB} &= [\text{P}, \text{SA}, \text{CBD}, \text{SB}] \\
\text{PAC} &= [\text{P}, \text{SA}, \text{CBD}] \\
\text{ACB} &= [\text{SA}, \text{CBD}, \text{SB}] \\
\text{PA} &= [\text{P}, \text{SA}] \\
\text{AC} &= [\text{SA}, \text{CBD}] \\
\text{CB} &= [\text{CBD}, \text{SB}]
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
M_0 &= \{\text{PACB}\} \\
M_2 &= \{\text{PA}, \text{ACB}\} \\
M_3 &= \{\text{PAC}, \text{CB}\} \\
M_{23} &= \{\text{PA}, \text{AC}, \text{CB}\}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

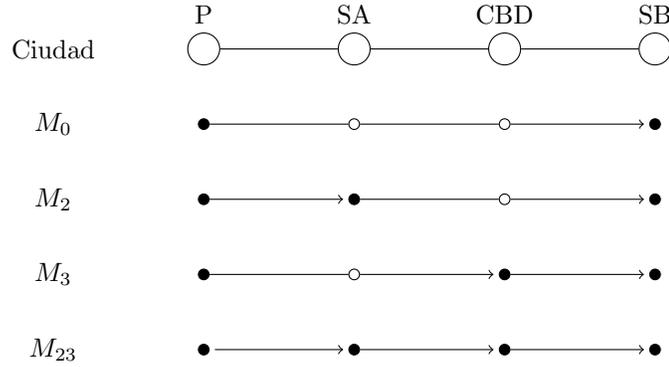


Figura 3.4: Estructuras de línea en la ciudad lineal paramétrica. Con negro los nodos iniciales o finales de alguna línea y en blanco los intermedios.

3.2.1. Simulaciones computacionales

Para testear los algoritmos, lo primero es tener un conjunto de prueba con las EDL óptimas. Para ello, es necesario calcular su MVRC, el cuál conoceremos usando las fórmulas 3.39 y 3.43 al identificar la ciudad lineal paramétrica como una ciudad lineal generalizada con $k = 4$. Las fórmulas requieren conocer los valores de las frecuencias óptimas, así que usamos 3.38, 3.41 y 3.42 adaptando i según sea necesario. Los cálculos explícitos se han desarrollado en las ecuaciones .3, .6, .8, .10, .12, .14, .17 y .13 del anexo, respectivamente. Se obtienen las siguientes frecuencias:

$$f_{\text{PACB}}^{M_0^*} = \sqrt{\frac{4Y^2tc_1 \max(a, (\alpha + \gamma)a + b) + p_{tr}tY^2(1 + 2ab(1 - 2\beta)) + Yp_w}{12Tc_0}} \tag{3.58}$$

$$f_{\text{PA}}^{M_2^*} = \sqrt{\frac{Ya(Yta(4c_1 + p_{tr}) + p_w)}{4Tc_0}} \tag{3.59}$$

$$f_{ACB}^{M_2^*} = \sqrt{\frac{Y(1-a\beta)(p_w + tY(1-a\beta)(4c_1 + p_{tr}))}{12Tc_0}} \quad (3.60)$$

$$f_{PAC}^{M_3^*} = \sqrt{\frac{4tc_1Y \max(a, (\alpha + \gamma)a + b) + p_{tr}tY^2(1 + 2ab(1 - 2\beta)) + p_wY}{8Tc_0}} \quad (3.61)$$

$$f_{CB}^{M_3^*} = \sqrt{\frac{Y\gamma(1-a\beta)(Yt\gamma(1-a\beta)(4c_1 + p_{tr}) + p_w(1-\beta))}{4Tc_0(1-\beta)^2}} \quad (3.62)$$

$$f_{PA}^{M_{23}^*} = \sqrt{\frac{Ya(Yta(4c_1 + p_{tr}) + p_w)}{4Tc_0}} \quad (3.63)$$

$$f_{AC}^{M_{23}^*} = \sqrt{\frac{Y(a(\alpha + \gamma) + b)(Yt(a(\alpha + \gamma) + b)(4c_1 + p_{tr}) + p_w)}{4Tc_0}} \quad (3.64)$$

$$f_{CB}^{M_{23}^*} = \sqrt{\frac{Y\gamma(1-a\beta)(Yt\gamma(1-a\beta)(4c_1 + p_{tr}) + p_w(1-\beta))}{4Tc_0(1-\beta)^2}} \quad (3.65)$$

$$(3.66)$$

Es importante notar que $f_{CB}^{M_{23}^*} = f_{CB}^{M_3^*}$ y $f_{PA}^{M_{23}^*} = f_{PA}^{M_2^*}$ debido a que al no haber líneas comunes, el flujo de pasajeros es igual en los tramos de ambas líneas, y aquello implica que la frecuencia óptima será igual. Entonces, reemplazamos en las fórmulas de minimización 3.39 y 3.43 para obtener el mínimo valor de los recursos consumidos de todas las estructuras de línea, con la precaución de adaptar la demanda de M_{23} (tal como se hizo en el anexo .15), para aplicar las fórmulas desde la perspectiva en que M_{23} es una división de M_2 o M_3 . Se obtiene:

$$\min VRC^{M_0} = 12Tc_0f_{PACB}^{M_0^*} + 2Ytc_0 + 6YTc_1 \max(a, a(\alpha + \gamma) + b) + YTp_{tr}(1 + a(\alpha + 2\gamma) + b\tilde{\gamma}) \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \min VRC^{M_2} = Tc_0(4f_{PA}^{M_2^*} + 8f_{ACB}^{M_2^*}) + 2Ytc_0(1 + a(\alpha + \gamma)) + YTc_1(2 + 4a(\alpha + \gamma) + 2b) \\ + YTp_{tr}(1 + a(\alpha + 2\gamma) + b\tilde{\gamma}) + Yp_R(a(\alpha + \gamma)) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \min VRC^{M_3} = Tc_0(8f_{PAC}^{M_3^*} + 4f_{CB}^{M_3^*}) + 2Ytc_0(1 + a\gamma + b\tilde{\gamma}) + YTc_1(4 \max(a, a(\alpha + \gamma) + b) \\ + 2(a\gamma + b\tilde{\gamma})) + YTp_{tr}(1 + a(\alpha + 2\gamma) + b\tilde{\gamma}) + Yp_R(a\gamma + b\tilde{\gamma}) \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \min VRC^{M_{23}} = Tc_0(4f_{PA}^{M_{23}^*} + 4f_{AC}^{M_{23}^*} + 4f_{CB}^{M_{23}^*}) + 2Ytc_0(1 + a(\alpha + 2\gamma) + b\tilde{\gamma}) + 2YTc_1(1 + a(\alpha + 2\gamma) + b\tilde{\gamma}) \\ + YTp_{tr}(1 + a(\alpha + 2\gamma) + b\tilde{\gamma}) + Yp_R(a(\alpha + 2\gamma) + b\tilde{\gamma}) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Con esto, es posible calcular el MVRC de todas las estructuras de línea presentadas y

obtener la óptima para cualquier distribución de pasajeros con constantes dadas. En base a lo establecido en Fielbaum et. al. (2016), se ha determinado que los valores más realistas para las constantes son $c_0 = 8.61$ [US/min], $c_1 = 0.3$ [US/min], $p_{tr} = 2.74$ [US/min], $p_w = 5.48$ [US/min], $p_r = 16p_{tr}$, $t = 0.0416$ [min] y $T = 30$ [min]. Luego, para tener un conjunto de prueba robusto, se ha buscado abarcar la mayor cantidad de escenarios posibles. Así que por un lado se calculó la EDL óptima en el espacio (α, β) con $Y = 1000$ [p/hora] fijo y distintos valores de a , mientras que por otro, en (α, Y) para distintos valores de a y β . La ventaja del espacio (α, β) es que nos permitirá observar la EDL óptima para cada tipo de ciudad (monocéntrica, policéntrica y dispersa) y en las transiciones entre éstas. El espacio (α, Y) , en cambio, permite analizar el impacto directo del aumento de pasajeros sin modificar el tipo de ciudad. Notemos que en ambos casos la demanda queda totalmente determinada al recordar que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ y $a + b = 1$.

3.2.1.1. Espacio (α, β)

A continuación se mostrarán los resultados en (α, β) de las simulaciones usando las fórmulas anteriores, iniciando con la figura 3.5 que tiene los resultados para $a = 0.1$ y $a = 0.2$. Notemos que al ser a tan pequeño, la cantidad de pasajeros en el tramo PA es muy baja en relación al resto, lo que genera un bajo factor de carga en PA que contrasta con uno alto en AC. Esto explica que las EDL dominantes M_2 y M_{23} sean las divididas en el subcentro A. Por otra parte, cuando γ se acerca a cero, disminuye el factor de carga en CB y los transbordos en el CBD, lo que favorece la división en el CBD y da ventaja a la EDL M_{23} cerca de la diagonal, tal como se aprecia en la figura.

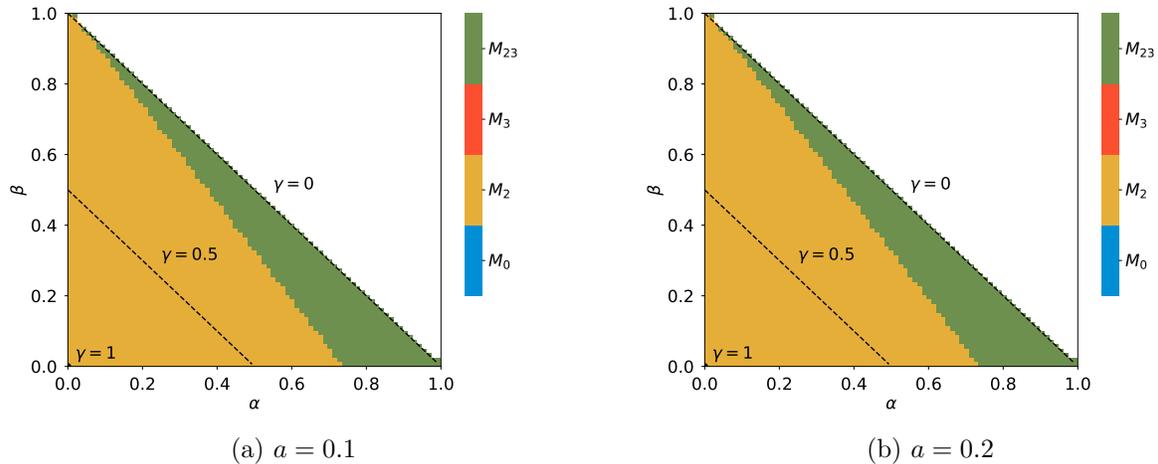


Figura 3.5: EDL óptima en el espacio (α, β) para distintos valores de a .

Luego con $a = 0.3$ y $a = 0.4$ (figura 3.6), dado que la cantidad de pasajeros originando su viaje en la periferia y el subcentro A es más balanceada, se observa que cuando γ es alto hay zonas en que domina la EDL M_0 . Luego, hay dos fenómenos importantes; en primer lugar es evidente que la división en el subcentro A depende del valor de β , ya que es la variable que determina la cantidad de transbordos en dicho nodo. En segundo, la disminución de γ justifica la división en el CBD, ya que disminuye los transbordos y el factor de carga en ese

tramo CB.

Es interesante destacar que existe una frontera entre las áreas de dominancia de la EDL M_0 y M_{23} , es decir, hay una combinación de parámetros para la cual es posible pasar de la línea completa, a tres líneas con una pequeña perturbación. En un principio puede parecer engañoso que las divisiones deban ser simultáneas, no obstante, es correcto. En la frontera, se observa que los tramos de los extremos (PA y CB) tienen un factor de ocupación muy bajo, mientras que en el central (AC) es máximo. Esto significa que el flujo en PA y CB es mucho menor al de AC. Entonces, si se divide sólo una vez, ineludiblemente volverá a haber un tramo con bajo factor de ocupación que eleve los costos del operador (el tramo que comparte línea con AC), y además los transbordos elevarán los costos de los pasajeros. Por lo que, solamente sería conveniente dividir la línea si todos los factores de ocupación resultantes son altos, para que una disminución sustancial de los costos del operador contrarreste el aumento de los costos de los usuarios, lo que dado el flujo, sólo sería posible con dos divisiones simultáneas en el subcentro A y el CBD.

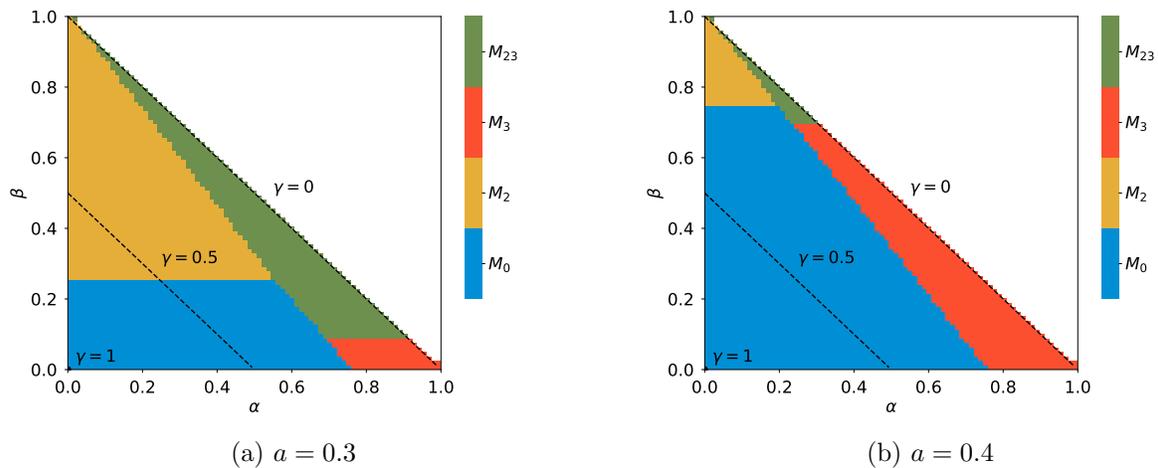


Figura 3.6: EDL óptima en el espacio (α, β) para distintos valores de a .

Para $a = 0.5$ (figura 3.7), dado que la cantidad de pasajeros que inicial su viaje en la periferia y el subcentro A es igual, los tramos PA y AC tienen un factor de carga similar para cualquier distribución de pasajeros, así que en ningún caso es conveniente dividirlos. Sin embargo, para γ pequeño, sigue siendo conveniente dividir en el CBD.

Finalmente, para los valores de a grande (figura 3.8), reaparecen las EDL M_2 y M_{23} , pero por motivos contrarios a los expuestos en los gráficos iniciales. Lo que sucede, es que cuando β es cercano a uno, la mayoría de los pasajeros que suben en la periferia bajan en el subcentro A, y como después el subcentro A no inicia los suficientes viajes porque b es bajo, los tramos AC y CB tienen un bajo factor de ocupación, generando que sea conveniente dividir en el subcentro A. Entre mayor es a , mayor es la cantidad de pasajeros que dejan la red en el subcentro A a un mismo β , en consecuencia, la división se realiza a β más pequeño. En los gráficos se observa como un crecimiento de la zona de dominancia de las EDL M_2 y M_{23} .

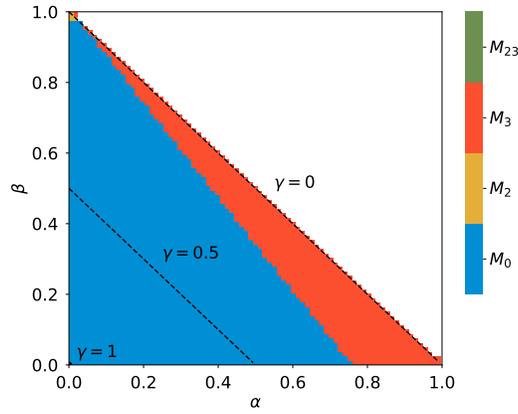
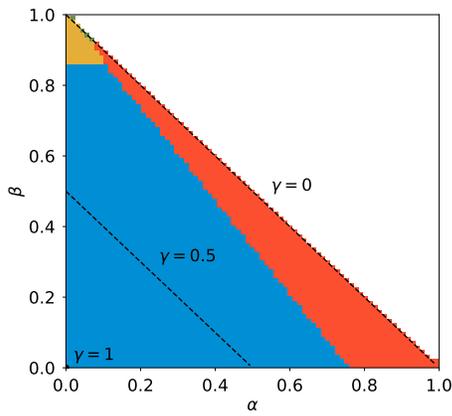
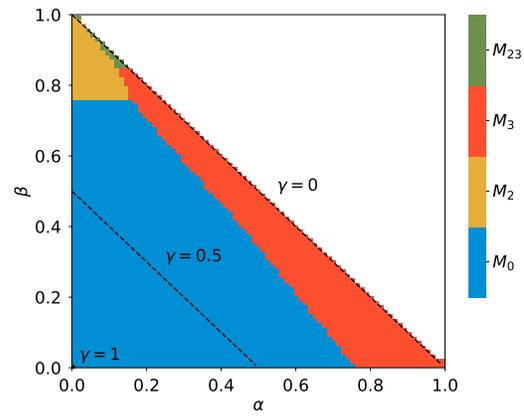


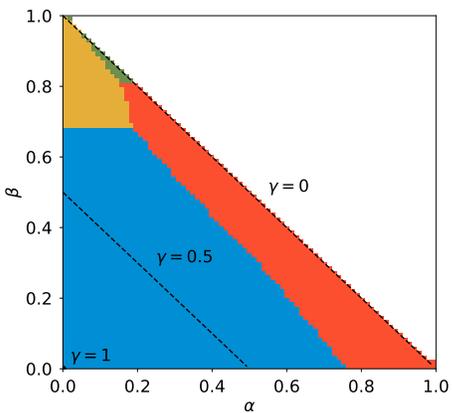
Figura 3.7: EDL óptima en el espacio (α, β) para $a = 0.5$.



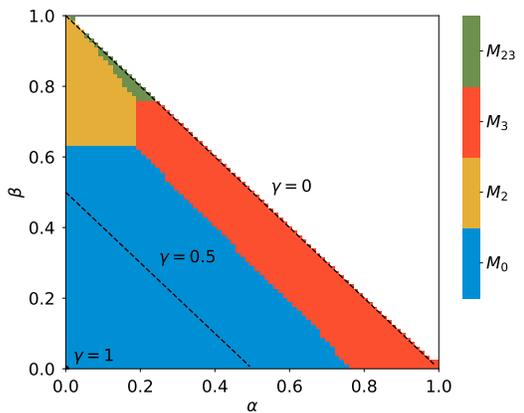
(a) $a = 0.6$



(b) $a = 0.7$



(c) $a = 0.8$



(d) $a = 0.9$

Figura 3.8: EDL óptima en el espacio (α, β) para distintos valores de a .

En conclusión, se puede decir que cuando la ciudad es monocéntrica (α grande) M_3 es

óptima, excepto si $a \leq 0.2$, caso en que domina M_{23} . Luego, para ciudades policéntricas (β grande) M_2 es la más conveniente y gana terreno entre más diferencia exista entre a y b . Finalmente, en las ciudades dispersas (γ alto) gana M_0 , salvo si $a \leq 0.2$, caso en que domina M_2 .

3.2.1.2. Espacio (α, Y)

Dado que los gráficos en (α, β) pueden agruparse en cuatro grupos de silueta similar (figuras 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 respectivamente), para ser consistentes, se tomará un a de cada grupo para seguir con el espacio (α, Y) . Se escogió usar $a \in [0.1, 0.3, 0.5, 0.7]$. Además, con el objetivo de representar cada tipo de ciudad, se usó $\beta \in [\frac{1-\alpha}{5}, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{4(1-\alpha)}{5}]$ para cada a .

En la figura 3.9 observamos que el aumento de la cantidad total de pasajeros en la red no influye mayormente en la EDL dominante, pues, aunque hay un ajuste para Y muy bajo, desde un valor de Y razonable en adelante, la frontera entre M_2 y M_{23} es horizontal. También se aprecia que cuando β aumenta, la división en el CBD ocurre para α más pequeño. Esto debido a que para un α fijo, cuando β aumenta, γ disminuye y con ello hay menos transbordos en el CBD y el factor de carga en el tramo CBD-SB también es más pequeño, ergo, la división en el CBD se vuelve más deseable.

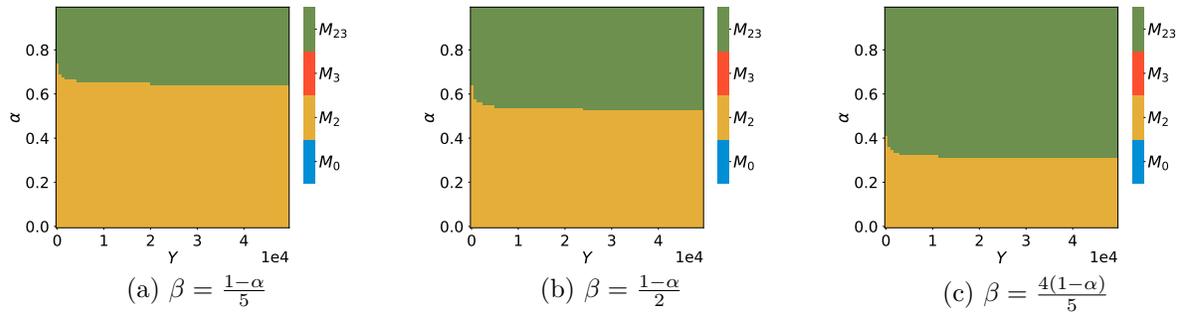


Figura 3.9: EDL óptima en el espacio (α, Y) para $a = 0.1$ y distintos valores de β .

Luego, en la figura 3.10 con $a = 0.3$, se observa el mismo comportamiento anterior: rápidamente la frontera entre M_2 y M_{23} se estabiliza y el α crítico disminuye cuando β aumenta. Aunque es importante notar que para Y muy pequeño, las EDL óptimas son M_0 y M_3 , que también representan una división en el CBD. Por lo tanto, podemos concluir que Y cumple un rol solamente cuando su valor es muy pequeño.

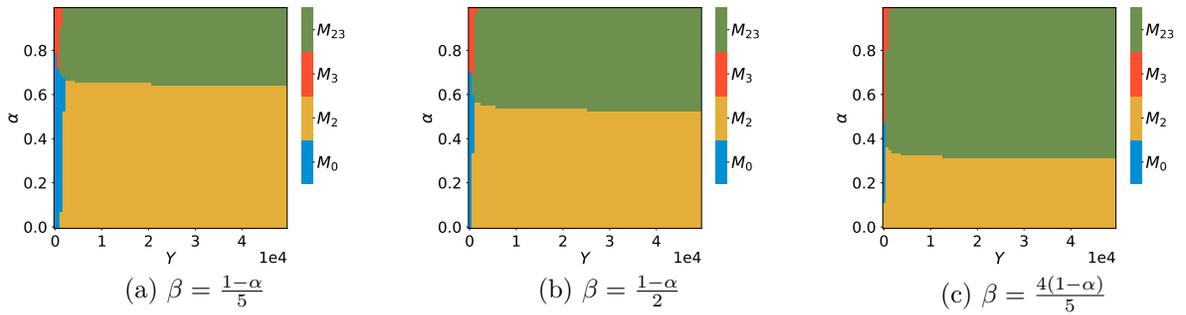


Figura 3.10: EDL óptima en el espacio (α, Y) para $a = 0.3$ y distintos valores de β .

La figura 3.11 se comporta idénticamente a la 3.9, aunque M_0 reemplaza a M_2 y M_3 a M_{23} . Para explicarlo, debemos notar que entre M_2 y M_{23} existe una división en el CBD, al igual que entre M_0 y M_3 , por lo tanto el fenómeno en cuestión es el mismo, salvo que las líneas involucradas ya no están divididas en el subcentro A.

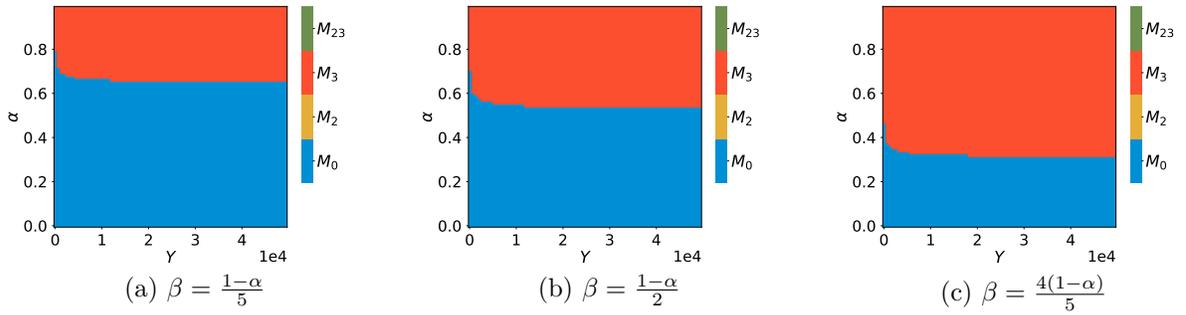


Figura 3.11: EDL óptima en el espacio (α, Y) para $a = 0.5$ y distintos valores de β .

Respecto a la figura 3.12, lo primero que notamos es que cuando β es grande, a diferencia de los otros casos, aparece M_2 para valores de α menores a 0.1. Esto se debe a que cuando β está definido como $\frac{4(1-\alpha)}{5}$ y $\alpha < 0.1$, entonces β es lo suficientemente grande como para que la cantidad de pasajeros que baja en el subcentro A sea significativa y provoque una baja tasa de ocupación en los tramos siguientes y pocos transbordos en SA. Por lo tanto, la división en el SA es conveniente. Para las otras definiciones de β , no logra alcanzar un valor tan alto para ningún α .

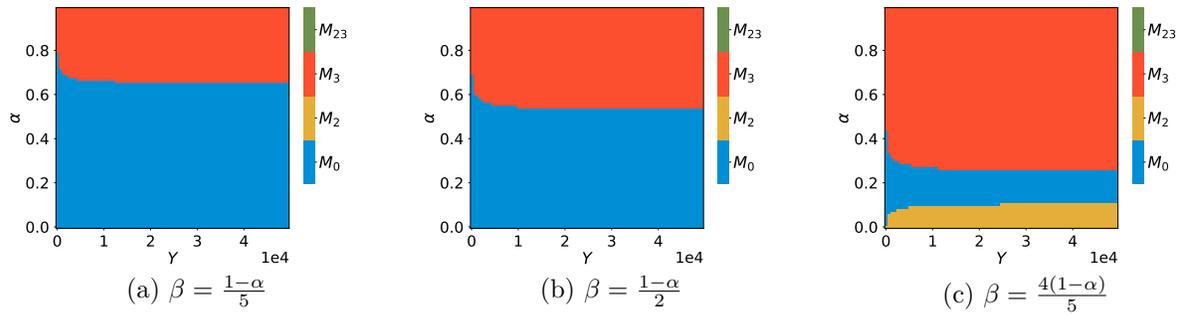


Figura 3.12: EDL óptima en el espacio (α, Y) para $a = 0.7$ y distintos valores de β .

En conclusión, en ambos espacios (α, β) y (α, Y) ha sido posible corroborar que las condiciones que favorecen la división en la ciudad lineal paramétrica son una baja cantidad de transbordos y la diferencia en el flujo máximo a cada lado, mientras que se observó que la cantidad de pasajeros totales Y no tiene mayor relevancia. Lamentablemente, la ciudad lineal paramétrica tiene solo tres tramos, por lo que será imposible observar el efecto del largo de la línea de menor flujo máximo, que es la tercera condición de división en la ciudad lineal generalizada.

3.2.2. Resultados Algoritmo de división con umbral

Dado que se ha descartado el rol de Y en las simulaciones, para testear los algoritmos no se usará el espacio (α, Y) , sino que se restringirá a (α, β) con $Y = 1000[P/hora]$ y $a \in [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9]$. Además, los resultados se compararán a través de la diferencia porcentual entre el MVRC ajustado de la EDL simulada y la dada por el algoritmo. El MVRC ajustado corresponde al MVRC menos los costos que son comunes a todas las estructuras de línea, que en este caso, sería el costo del tiempo de viaje con el vehículo en movimiento. Mediante inspección, se determinó que usar los valores de d_1 , d_2 y umbral, iguales a 0.9, 0.08 y 1.19, respectivamente.

En las figuras 3.13, 3.14 y 3.15 se pueden observar las EDL asignadas por el algoritmo 2 y su error medido en MVRC ajustado. En los tres casos, el algoritmo replica certeramente la silueta de las EDL óptimas. Al observar los gráficos de error, se notará que la única zona con error mayor a cero es cerca de la frontera entre ambas EDL. Sin embargo, incluso es esa zona, el error no supera el 3.5%.

Para $a = 0.4$, $a = 0.5$ y $a = 0.6$ (fig. 3.16, 3.17 y 3.18) el algoritmo produce tres figuras similares en las cuales M_0 domina en casi todo el espacio, excepto para valores de γ cercanos a cero, dónde lo hace M_3 . Solamente para $a = 0.5$ la asignación posee la misma silueta que la simulación. Para $a = 0.4$ y $a = 0.6$ induce al error cuando β es muy grande, ya que deberían aparecer la EDL M_2 y M_{23} , pero no lo hacen. A pesar de esto, el error se mantiene en un margen moderado menor al 6% en casos no extremos, alcanzando un 12% cuando β es cercano a uno.

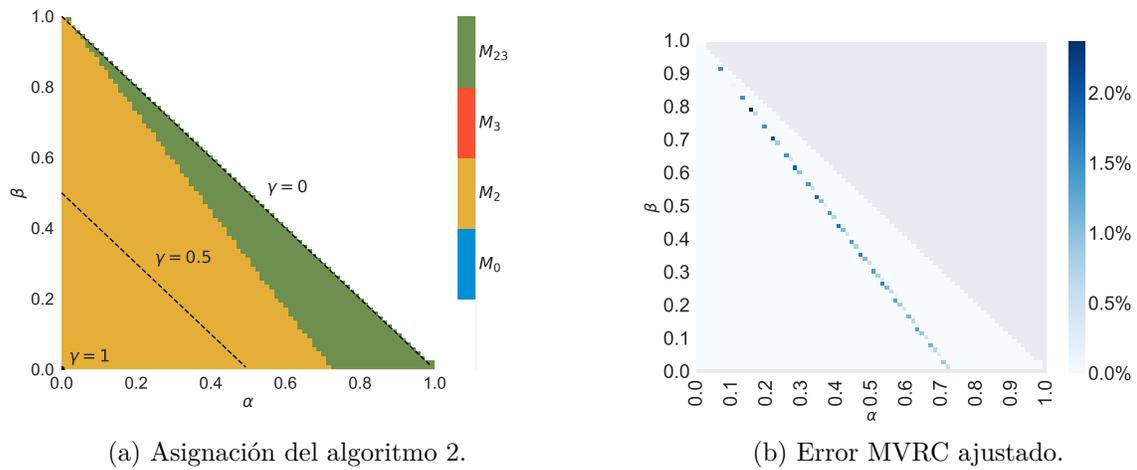


Figura 3.13: Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.1$.

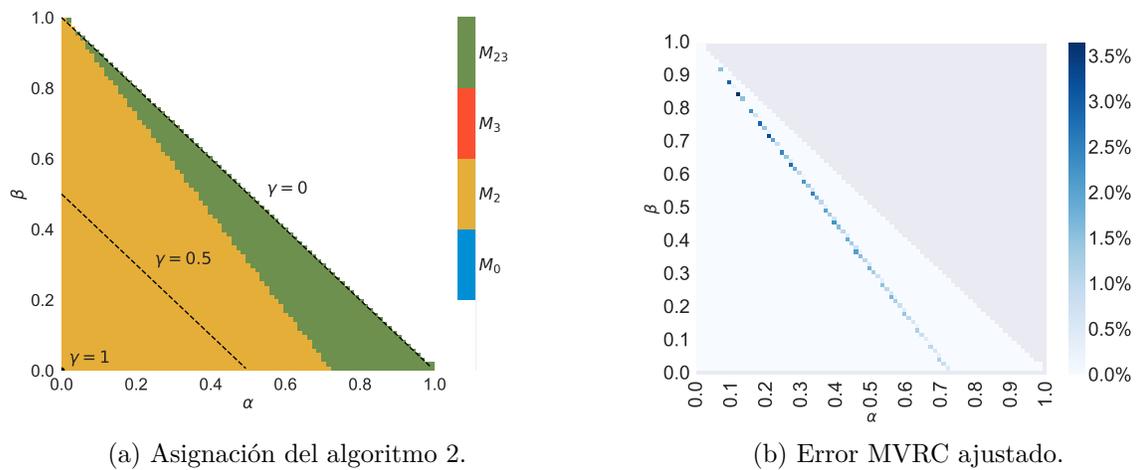


Figura 3.14: Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.2$.

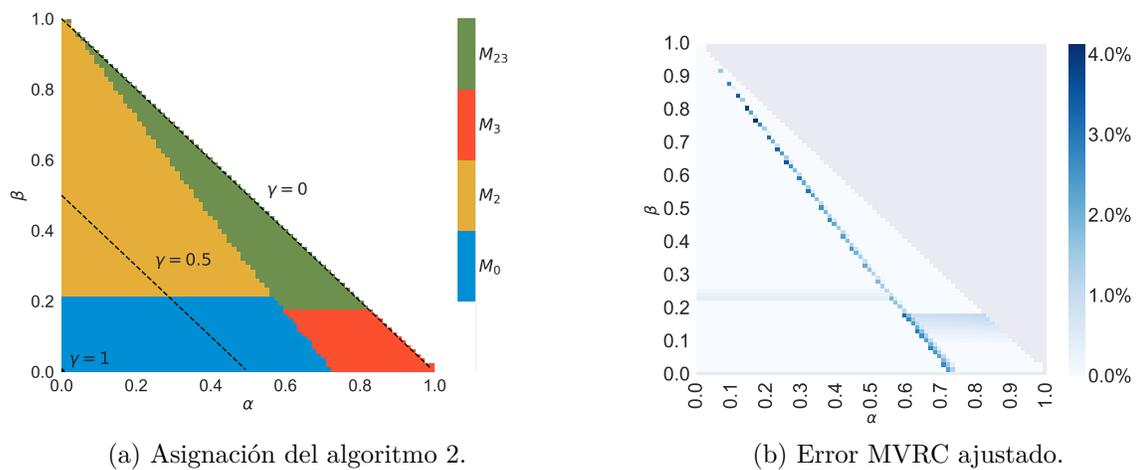
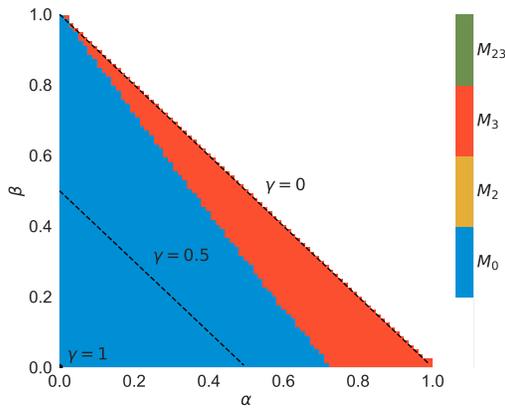
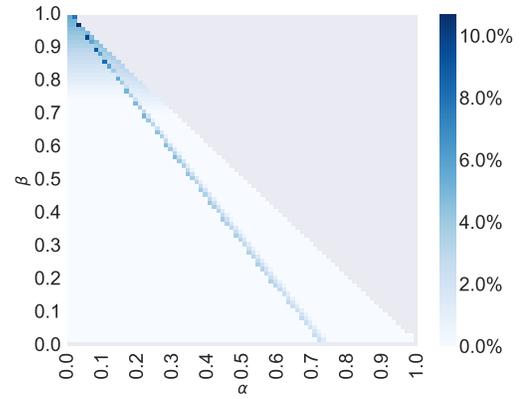


Figura 3.15: Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.3$.

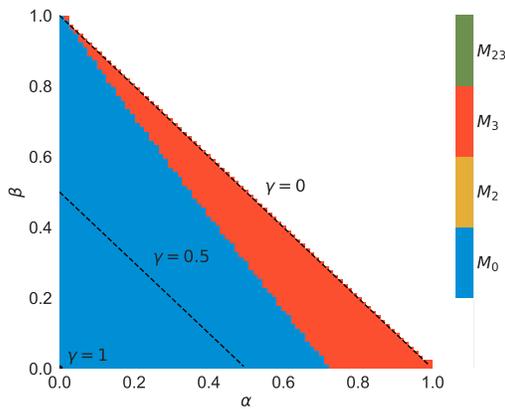


(a) Asignación del algoritmo 2.

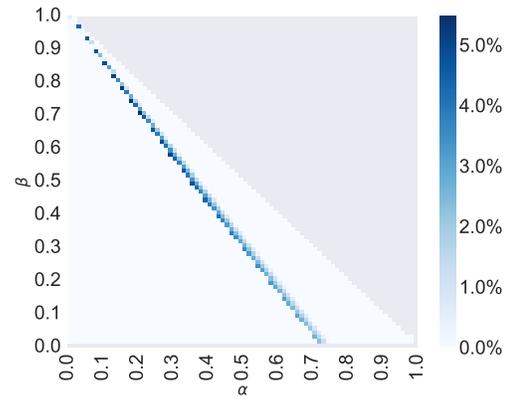


(b) Error MVRC ajustado.

Figura 3.16: Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.4$.

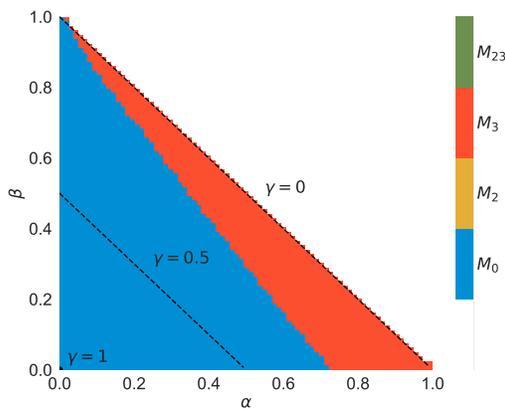


(a) Asignación del algoritmo 2.

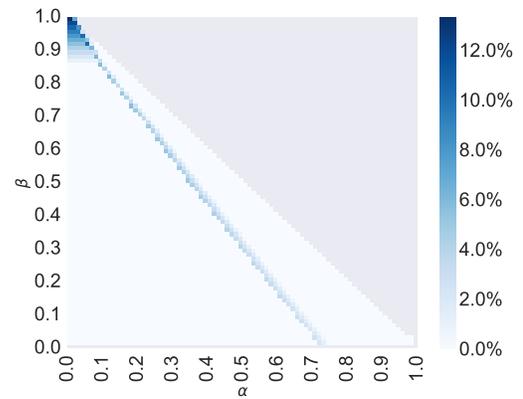


(b) Error MVRC ajustado.

Figura 3.17: Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.5$.



(a) Asignación del algoritmo 2.



(b) Error MVRC ajustado.

Figura 3.18: Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.6$.

Finalmente, tal como se aprecia en las figuras 3.19, 3.20 y 3.21, para valores de a mayores o iguales a 0.7 reaparecen las estructuras de línea M_2 y M_{23} en los valores altos de β . Con esto, el error máximo disminuye a 10% en $a = 0.7$, 6% en $a = 0.8$ y 5% en $a = 0.9$. De manera general, al considerar simultáneamente todos los valores de a , la precisión del algoritmo 2 es de un 93%.

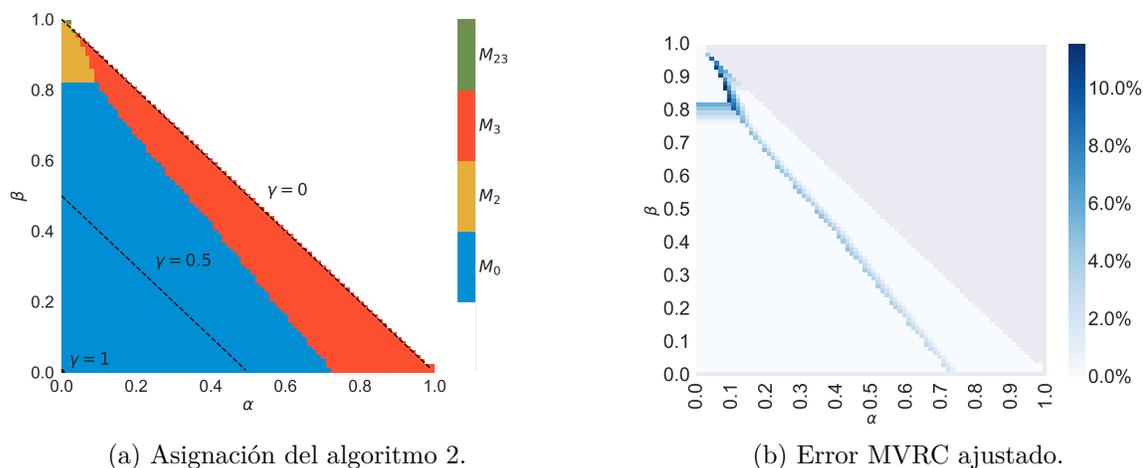


Figura 3.19: Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.7$.

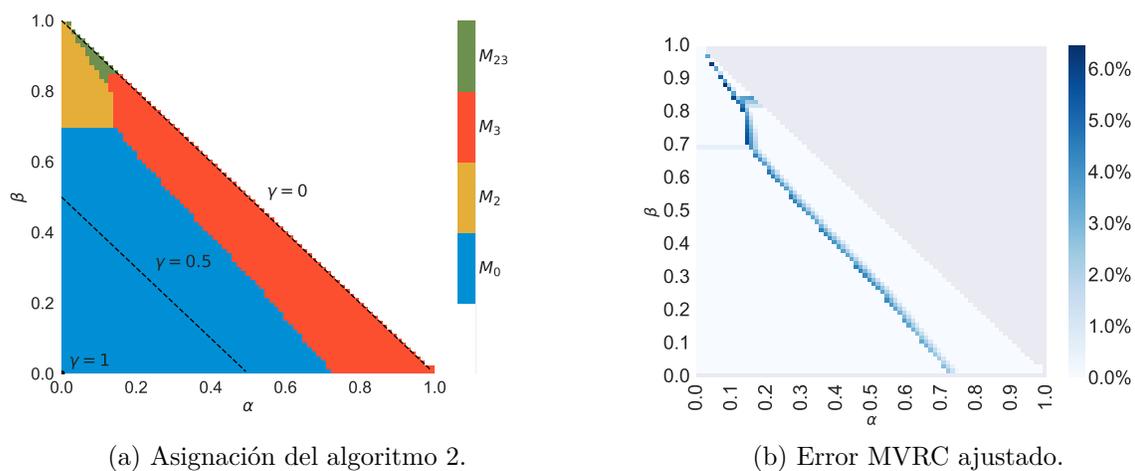


Figura 3.20: Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.8$.

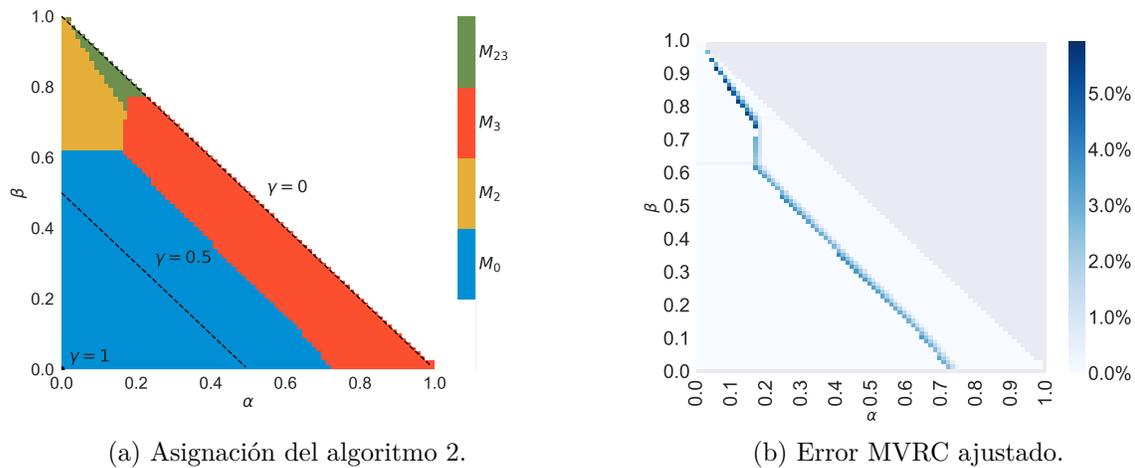


Figura 3.21: Resultado Algoritmo 2 (con umbral) usando $a=0.9$.

3.2.3. Resultados Algoritmo de división con fórmula

Análogamente a la sección anterior, se ha aplicado el algoritmo 3 (con fórmula) a la ciudad linear paramétrica en el espacio (α, β) con $Y = 1000[P/hora]$ y $a \in [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9]$. Para comparar los resultados dados por el algoritmo con las simulaciones, también se ha usado el error porcentual del MVRC ajustado. Se mantuvieron los valores de las constantes d_1 y d_2 encontrados mediante inspección para el algoritmo con umbral; 0.9 y 0.08, respectivamente.

Los resultados expuestos en las figuras 3.22 y 3.23, indican que para $a = 0.1$ y $a = 0.2$ el error es del 0%, lo cual significa que el algoritmo asignó la EDL correcta en cada punto. Esto representa una mejora con respecto al algoritmo anterior, aunque también implica un costo extra en tiempo de cálculo, ya que debe evaluar la fórmula 3.1 al menos una vez en cada ejecución.

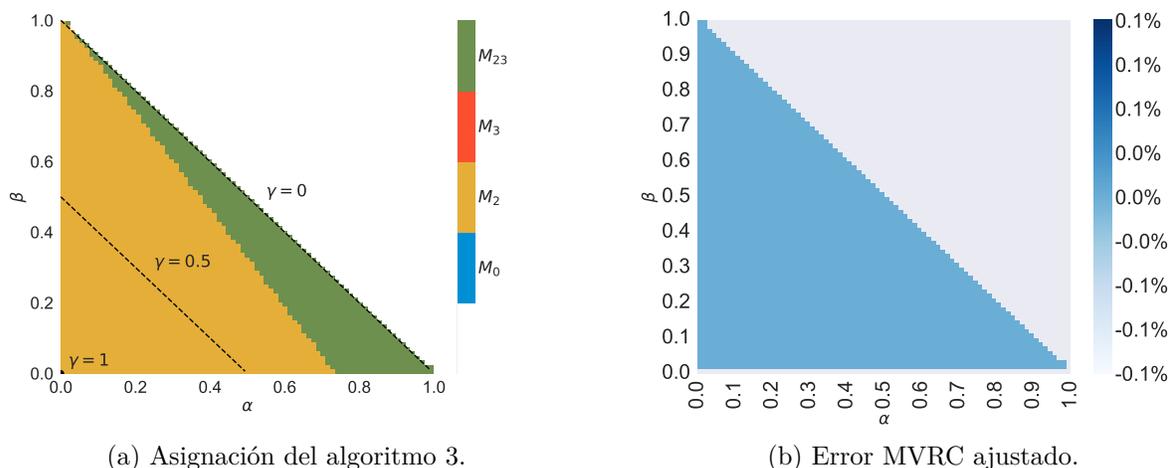


Figura 3.22: Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.1$.

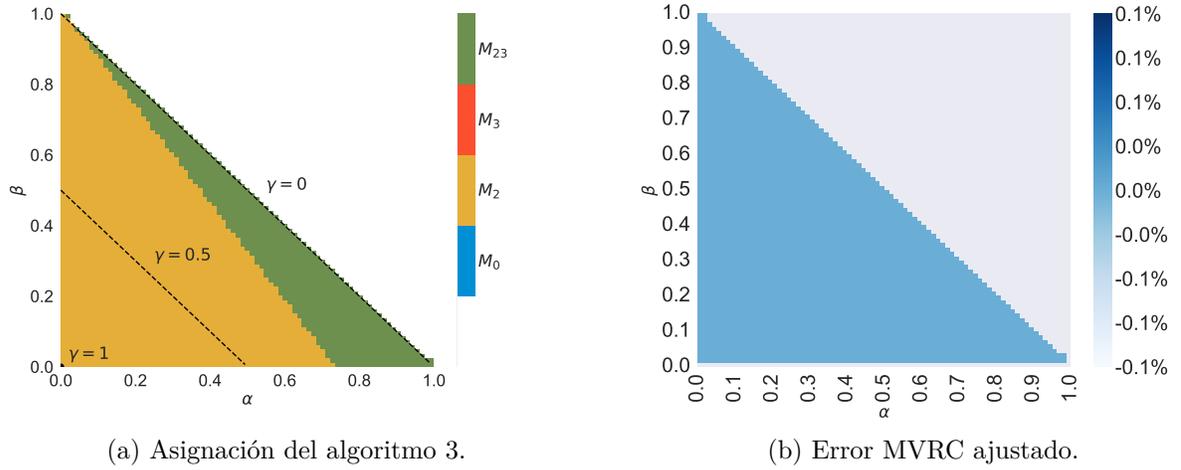


Figura 3.23: Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.2$.

Para $a = 0.3$ y $a = 0.4$ se observa un error bastante moderado menor al 9% (figuras 3.24 y 3.25) en la frontera que separa las EDL M_2 y M_{23} . Sucede que el algoritmo tiene dificultades para realizar las divisiones oportunamente y extiende innecesariamente la franja de dominancia de M_0 . No obstante, es una mejora al algoritmo con umbral, pues en $a = 0.4$ no aparece M_2 ni M_{23} (fig. 3.16).

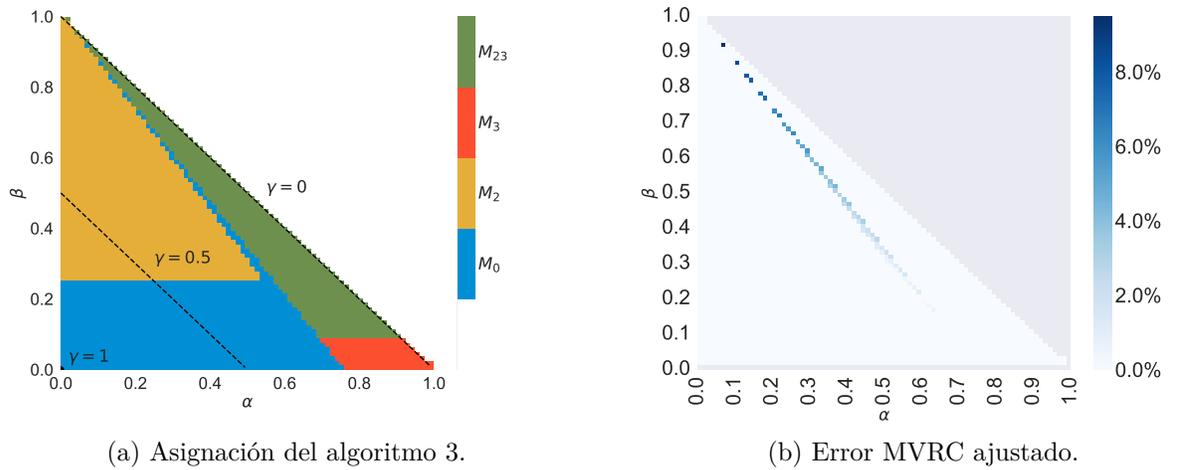


Figura 3.24: Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.3$.

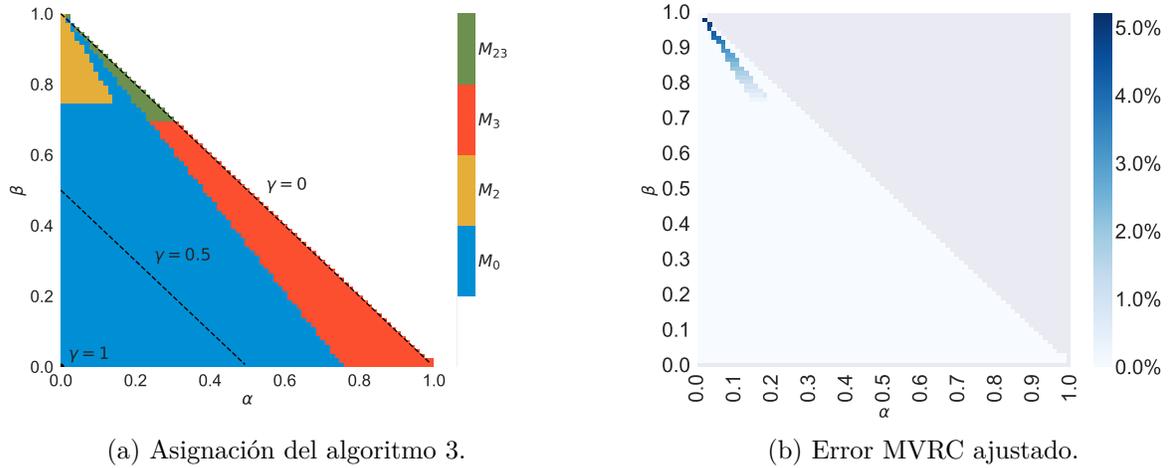


Figura 3.25: Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.4$.

En la figura 3.26 se observa que para $a = 0.5$ el error es 0%. Luego, en los a sucesivos (figuras 3.27, 3.28, 3.29 y 3.30) el algoritmo demuestra ser muy exitoso, incluso en los casos que el algoritmo con umbral no tuvo la sensibilidad suficiente para hacer las divisiones en valores de β altos. En consecuencia, solo una región acotada tiene error, y éste no supera el 10%. Agrupando todos los valores de a revisados, la asignación dada por el algoritmo 3 coincide con la EDL óptima en un 99.2% casos, lo cual constituye una muy buena precisión que además supera a la obtenida con el algoritmo 2 (con umbral).

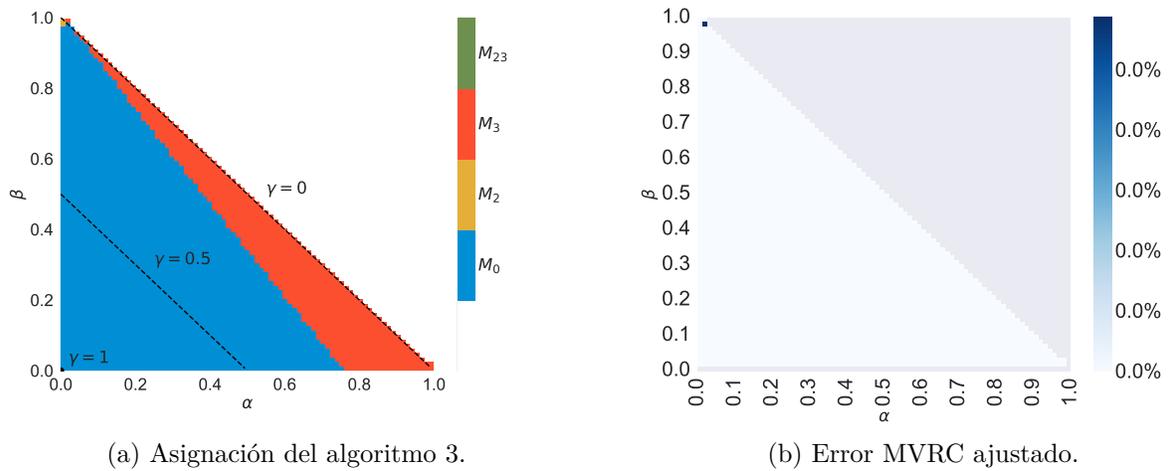
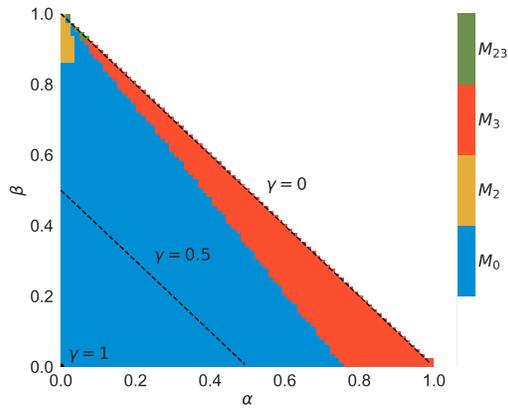
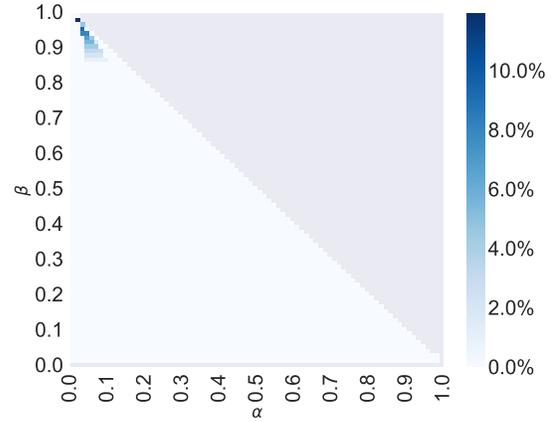


Figura 3.26: Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.5$.

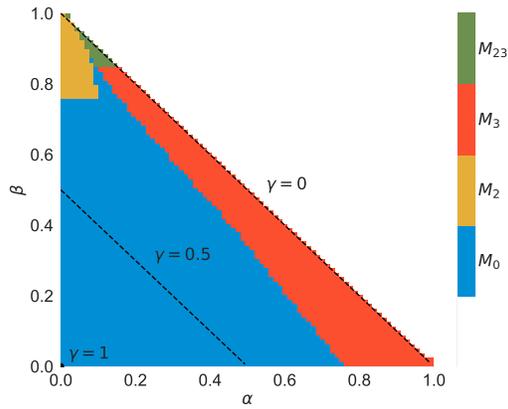


(a) Asignación del algoritmo 3.

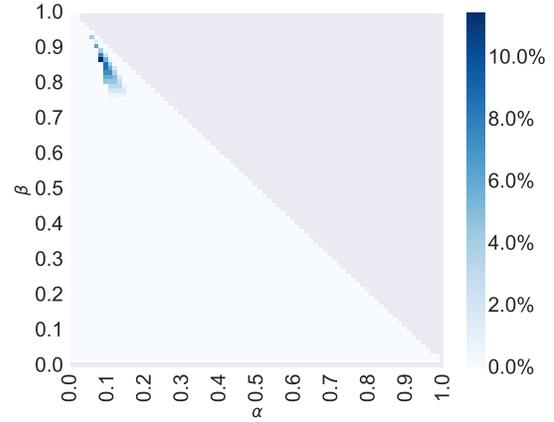


(b) Error MVRC ajustado.

Figura 3.27: Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.6$.



(a) Asignación del algoritmo 3.



(b) Error MVRC ajustado.

Figura 3.28: Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.7$.

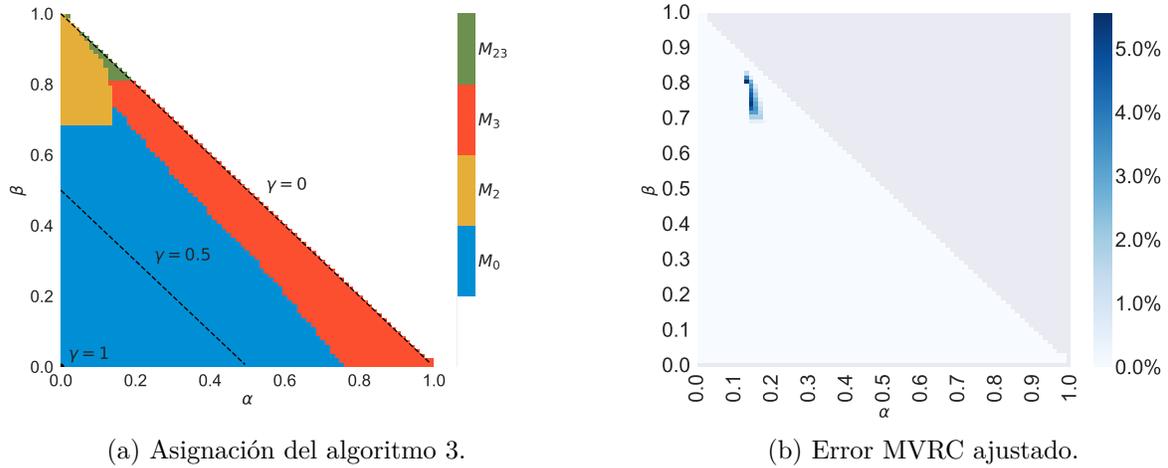


Figura 3.29: Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.8$.

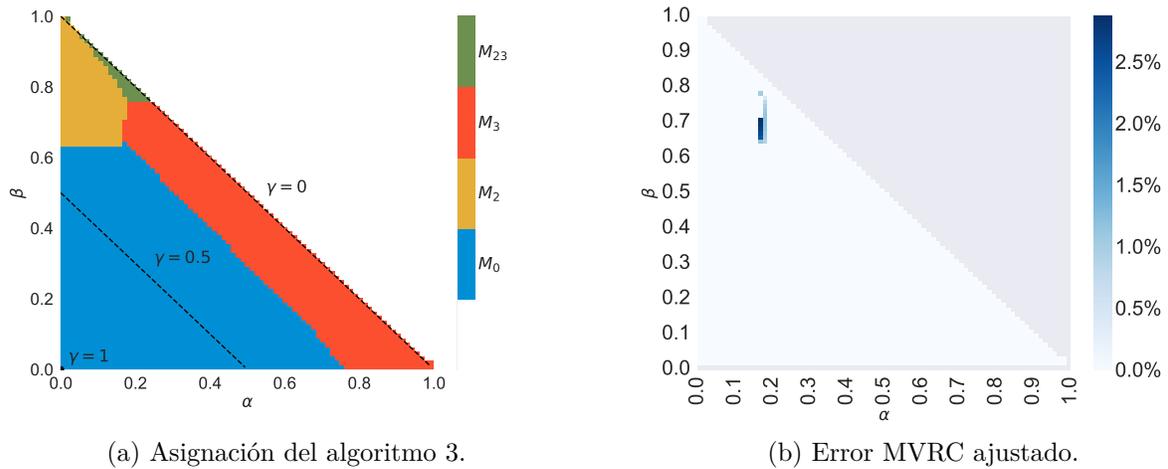


Figura 3.30: Resultado Algoritmo 3 (con fórmula) usando $a=0.9$.

En base a lo observado para el algoritmo con umbral (algoritmo 2) y el algoritmo con fórmula (algoritmo 3), se concluye que ambos son capaces de asignar las EDL exitosamente en la ciudad lineal paramétrica, con una precisión del 93% y 99.2% (respectivamente) y error máximo ajustado 12% y 10% (resp.). Por lo tanto, se ratifican los algoritmos propuestos para la división en la ciudad lineal, que ahora deberán ser generalizados a la ciudad paramétrica.

3.3. Síntesis

En resumen, la Ciudad Lineal Generalizada fue una simplificación útil para comprender mejor la división de líneas. Su estudio analítico permitió identificar las condiciones fundamentales que favorecen la división y establecer que están relacionadas a la cantidad de transbordos, los flujos máximos en cada lado y la longitud de las secciones resultantes. Además,

para encaminar la heurística, estas condiciones se cuantificaron en el índice de divisibilidad. Simulaciones realizadas en una ciudad intermedia entre la Ciudad Lineal Generalizada y la Ciudad Paramétrica (denominada Ciudad Lineal Paramétrica) mostraron que, con una precisión bastante alta, basta con consultar el índice de divisibilidad para identificar las divisiones óptimas. Por lo tanto, el resultado principal de este capítulo es la definición de un índice que condensa los aspectos más importantes para la división y es fácilmente calculable en estructuras de líneas más complejas.

Capítulo 4

Ciudad paramétrica

En el capítulo anterior se definió el índice de divisibilidad y se validó su uso en algoritmos para la división de la línea completa en una ciudad tipo corredor. En este capítulo, se escalarán los resultados a la Ciudad Paramétrica. Para ello, será necesario definir nuevos algoritmos que actúen sobre estructuras de líneas más generales que las anteriores. Debido a que el índice de divisibilidad está diseñado para modificar estructuras de líneas dadas, en lugar de construirlas por sí mismo, será necesario complementarlo con alguna heurística que permita proponer EDL para ser potencialmente mejoradas mediante divisiones.

Una técnica para resolver problemas de diseños de líneas que se destaca en artículos recientes, es el uso de algoritmos genéticos. Estos algoritmos (figura 4.1) simulan la evolución natural: crean una población inicial de soluciones aleatorias (individuos) y en cada iteración los combinan y modifican para obtener una nueva generación mejorada. Cada individuo o solución se modela como una secuencia de *genes* (llamada *cromosoma*) y se evalúa en la función objetivo. Las operaciones que se aplican a los mejores individuos son: selección, cruce y mutación. La selección envía directamente individuos a la generación siguiente, el cruce crea una solución nueva a partir de elementos de dos soluciones anteriores y la mutación altera aleatoriamente algunos genes de las soluciones nuevas.

Su ventaja es que, al no ser un método basado en el gradiente, permite optimizar funciones no convexas, discontinuas o no derivables. Además, dado que la representación del espacio se hace mediante una cantidad acotada de cromosomas (porque el tamaño de las poblaciones es fijo), es idóneo para dominios discretos en que no se pueden explorar todos los puntos. Gracias a ello, resulta tan eficaz en el diseño de estructuras de líneas, pues la función objetivo es discontinua con dominio discreto de tamaño factorial en el número de nodos. Sumado a lo anterior, es un acercamiento particularmente bueno para el uso del índice de divisibilidad, ya que el algoritmo genético trabaja simultáneamente con las distintas soluciones que componen la población, así que el índice se podría aplicar como etapa previa a la evaluación. Dado que la división disminuiría el MVRC de las estructuras, el resultado esperado es que el índice acelere la convergencia del algoritmo al proveer de EDL mejoradas en cada generación.

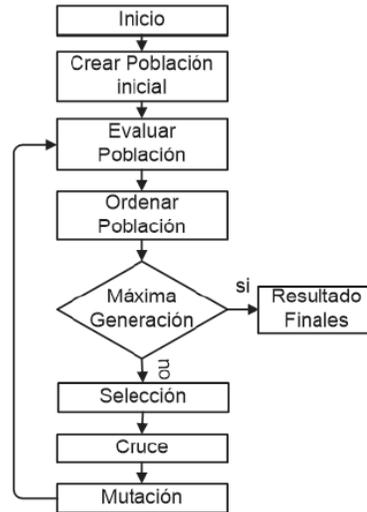


Figura 4.1: Diagrama de flujo algoritmo genético general. *Nota.* Adaptado de “Controlador PID con algoritmos genéticos de número reales” (p.214), por G. Tajada, 2019, Revista Industrial Data 22(2).

4.1. Algoritmo genético con divisiones

La heurística propuesta consiste en un algoritmo genético adaptado a la ciudad paramétrica, con asignación de pasajeros mediante equilibrio de la frecuencia y una etapa de división de líneas que integra el índice de divisibilidad. El objetivo es encontrar la estructura de líneas que minimiza el consumo de recursos en dicha ciudad. Dado que la solución al problema de optimización corresponde a una EDL, que a su vez es un conjunto de líneas, resulta natural definir un gen como una línea y un cromosoma como un conjunto de líneas. También es fácil ver que la función de evaluación debe ser mínimo valor de los recursos consumidos. Luego, las etapas de la heurística son las siguientes:

1. Inicialización:

- a) **Creación piscina de genes:** Crear una piscina de genes, sobre la cual iterar para construir los cromosomas en las etapas sucesivas.
- b) **Calibración parámetros del índice de divisibilidad:** Encontrar el valor óptimo de las constantes d_1 , d_2 y umbral del índice de divisibilidad aplicado a la red de la ciudad, considerando los parámetros de la demanda y constantes de costos a operadores y usuarios.

2. **Creación población inicial:** Crear aleatoriamente la población inicial, a partir de los genes definidos en la piscina de genes, guardando criterios de factibilidad. Si alguna EDL no es factible, reemplazar por otra aleatoria hasta que lo sea.

3. Iteración:

- a) **División:** Evaluar la aplicación de divisiones en cada individuo de la población, mediante el índice de divisibilidad calibrado.

- b) **Evaluación y orden:** Evaluar el MVRC en cada individuo de la población y ordenarlos consistentemente.
- c) **Condición de término:** Si ya se ha alcanzado la generación máxima, terminar. En caso contrario, continuar.
- d) **Selección:** Copiar directamente a la siguiente generación un porcentaje dado de los mejores individuos.
- e) **Cruce:** Generar los individuos faltantes para la siguiente generación entrecruzando aleatoriamente dos individuos de la población en curso que estén entre un porcentaje dado de las mejores soluciones generacionales.
- f) **Mutación:** Seleccionar aleatoriamente individuos del conjunto mejorado y cambiar un gen por otro aleatorio de la piscina de genes.

Algunas de las etapas anteriores, como la creación de la piscina de genes o la calibración de los parámetros del índice de divisibilidad, son lo suficientemente complejas para ameritar ser un algoritmo por sí mismas. Además, es importante destacar que sin el paso 3.a, se recupera el algoritmo genético original. A continuación, se revisarán las etapas más relevantes en detalle.

4.1.1. Creación piscina de genes

El objetivo de crear una piscina de genes, es lograr asignar a cada gen un identificador único que se pueda usar para construir los cromosomas. En este caso en particular, los genes son líneas, así que el problema en realidad consiste en crear una tabla (o lista) que contenga todas las líneas posibles en la Ciudad Paramétrica. No obstante, la cantidad de variaciones de los $2n + 1$ nodos de una ciudad de n zonas, en líneas de tamaño 2 a $2n + 1$ asciende a (el primer término es para las líneas sin ciclos y el segundo para las cíclicas):

$$\sum_{l=2}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(2n+1-l)!} + \sum_{l=2}^{2n} \frac{(2n+1)!}{(2n+1-l)!} \quad (4.1)$$

Según lo graficado en la figura 4.2, es evidente que la cantidad total de líneas aumenta factorialmente con la cantidad de zonas n , lo cual sería una gran dificultad si se pretendiera trabajar con el conjunto de todas las líneas posibles. Afortunadamente, existe una cantidad considerable de líneas redundantes en la Ciudad Paramétrica. En particular, ya es sabido que un tramo sin pasajeros siempre será un fuerte candidato para la división de la línea, pues una línea que contiene un tramo vacío es siempre igual o inferior a su homóloga dividida y sin ese tramo, que potencialmente podría disminuir la flota sin inducir transbordos. Por lo tanto, asumir que las líneas con una parada intermedia en una periferia no pueden pertenecer a una EDL óptima, resulta un supuesto razonable. Pues, ningún pasajero tiene cómo destino una periferia, y tal desvío introduce un tiempo de viaje adicional considerable que sería penalizado por los pasajeros.

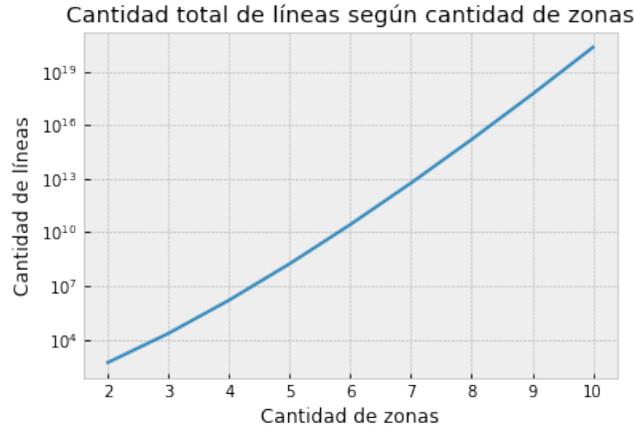


Figura 4.2: Cantidad total de líneas sin ciclos según cantidad de zonas.

En definitiva, se excluirán las líneas con paradas intermedias en la periferia de la piscina de genes, aunque sigue siendo necesario hacer los cálculos respectivos para asegurarse de que esta medida es suficiente para controlar el tamaño del conjunto. A continuación, por comodidad, se trabajarán las expresiones para las líneas con y sin ciclos por separado. En primer lugar, para calcular la cantidad total de líneas sin ciclos y sin paradas intermedias en la periferia, se pueden enumerar los nodos de la CP de tal manera que el CBD es el nodo cero, las periferias los impares y los subcentros los pares mayores que cero. Así, los nodos de la ciudad quedan únicamente identificados usando la secuencia $[0, 1, 2, \dots, 2n]$. Con esto, lo requerido es calcular la cantidad de variaciones de largo l de un conjunto de números desde 0 a $2n$, dónde sólo el primero y último valor pueden ser impares. Equivale a:

$$\frac{n(n+1)(n+1)!}{(n-l+3)!} + \frac{2n(n+1)!}{(n-l+2)!} + \frac{(n+1)!}{(n-l+1)!} \quad (4.2)$$

El primer término es la cantidad de líneas que empiezan y terminan impar (es decir periferia), luego las que empiezan o terminan impar, y finalmente las que no tienen impares. Es importante notar que al contabilizar las líneas de esta manera, si se asume que las líneas en el regreso recorren en orden inverso los mismos nodos que en la ida, se estaría contando dos veces cada línea, pues la línea $[n_1, n_2, \dots, n_l]$ con regreso $[n_l, \dots, n_2, n_1]$ es idéntica a $[n_l, \dots, n_2, n_1]$ con regreso $[n_1, n_2, \dots, n_l]$. Así que la ecuación 4.2 debería dividirse en dos, obteniéndose,

$$\frac{n(n+1)(n+1)!}{(n-l+3)!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{n(n+1)!}{(n-l+2)!} + \frac{(n+1)!}{(n-l+1)!} \cdot \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

Por otra parte, la cantidad de líneas con ciclos que no pasan por la periferia, son:

$$\sum_{l=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{l(n-l+1)!} \quad (4.4)$$

La división en l surge de que las líneas cíclicas, si se escriben como secuencia, tienen más de una notación. Por ejemplo, la línea $[n_1, n_2, n_3, n_4]$ es igual a las $[n_2, n_3, n_4, n_1]$, $[n_3, n_4, n_1, n_2]$ y $[n_4, n_1, n_2, n_3]$. En particular, un ciclo de largo l se puede escribir de l maneras distintas,

así que la cantidad de combinaciones totales se divide en l según se observa en 4.4.

En la figura 4.3 se encuentra graficada la cantidad de líneas con y sin ciclos que no pasan por la periferia. Al comparar con la figura 1, se obtiene que este criterio disminuye significativamente el universo de líneas y presenta cantidades abordables en perspectiva de que las ciudades reales revisadas por Fielbaum et. al. (2017) tuvieron siete o menos zonas. Además, aunque la ciudad tuviese más de siete zonas, la creación de la piscina de genes solamente se debe realizar una vez y luego su información se puede almacenar externamente para usarse en otras ejecuciones con igual cantidad de zonas. Por lo tanto, si se excluyen las líneas sin paradas intermedias, el subproblema es computacionalmente abordable. Se concluye que la piscina de genes se definirá de esta forma.

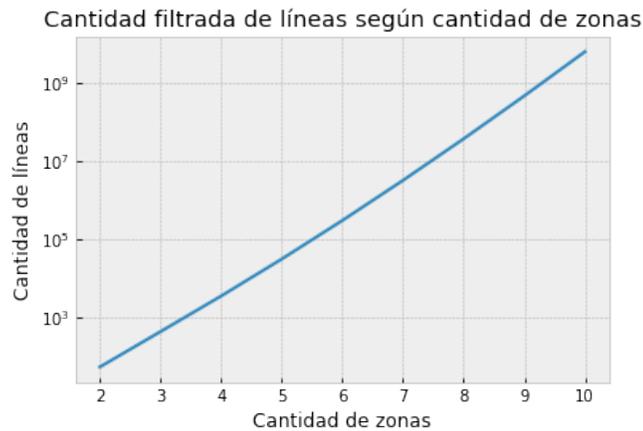


Figura 4.3: Cantidad de líneas sin paradas intermedias en la periferia según cantidad de zonas.

4.1.2. Calibración índice divisibilidad

Antes de aplicar el índice de divisibilidad a la Ciudad Paramétrica, es necesario calibrar las constantes d_1 , d_2 y umbral. Para ello, se debe escoger una EDL de referencia y encontrar numéricamente (mediante la comparación del MVRC) las divisiones óptimas para distintas condiciones de demanda. El objetivo, es hallar el valor de las constantes con las cuales se podrían obtener las divisiones óptimas en la EDL de referencia al usar una división tipo umbral. Es importante mencionar, que independientemente de que se desee implementar divisiones tipo fórmula o umbral en los pasos siguientes, incluir el umbral en la calibración permite escalar las otras constantes con mayor facilidad y no interfiere con el tipo de división posterior.

La principal dificultad es que la flexibilidad de la ciudad paramétrica admite distinta cantidad de zonas, distancia geométrica de los nodos y tipo de demanda (monocéntrica, policéntrica y dispersa). Por lo tanto, se debe desarrollar una metodología lo suficientemente robusta que sea independientemente de la descripción específica de la ciudad. Se recurre entonces a las líneas diametrales y circulares que se observan ejemplificadas en una ciudad de 6 zonas en la figura 4.4, que compondrán la que se llamará EDL completa. Su ventaja es

que es simétrica, así que su análisis acepta un grado de intuición, y a la vez la línea circular proveerá a los pasajeros de rutas alternativas a sus destinos, para no sobre simplificar el proceso de asignación de pasajeros y frecuencia óptima.

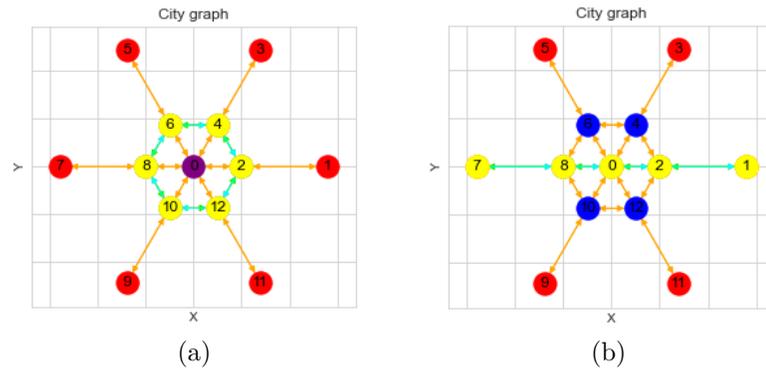


Figura 4.4: EDL completa vista desde una sola zona en una CP de 6 zonas. Marcadas con color naranja las aristas de la ciudad y con celeste las aristas de la línea.

En la estructura de línea completa, la única división significativa es dividir las líneas diametrales en los subcentros simultáneamente; pues, ya sabemos que una condición básica para la división es lograr una diferencia considerable de flujos máximos a cada lado, lo cual, por simetría de la demanda, nunca se podrá alcanzar dividiendo la línea completa en el CBD o la línea circular en cualquiera de sus nodos. En el primer caso, la simetría condiciona que la línea tenga la misma distribución de pasajeros de ida y vuelta, así que hay dos flujos máximos separados por el CBD. En el segundo, explicado también por la simetría de la EDL, cada tramo de la línea circular tiene exactamente el mismo flujo, así que todos los flujos son máximos y no hay división posible. Además, por la misma simetría, si se divide la línea diametral en un subcentro, la división en el otro es análoga y también debería hacerse.

Por lo tanto, la estructura de línea completa se comparará con su contraparte “dividida SC”, que corresponde a las líneas diametrales divididas en los subcentros respectivos, como se muestra en la figura 4.5.

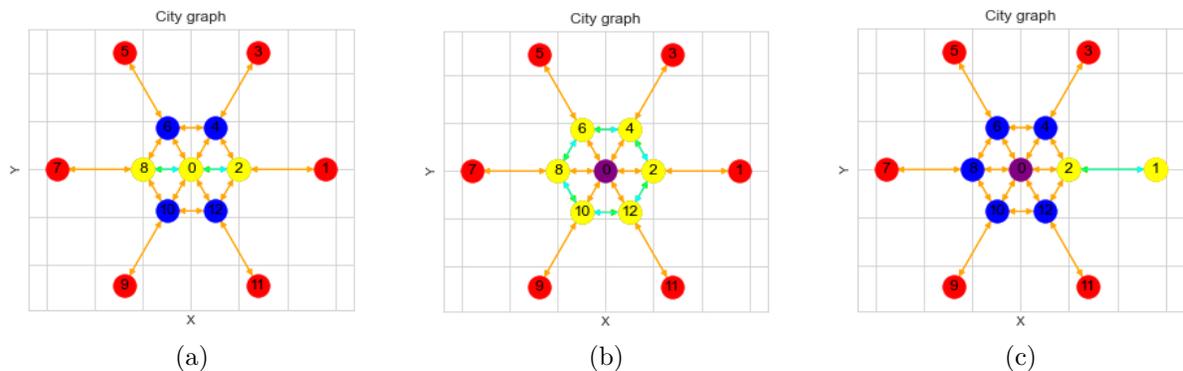


Figura 4.5: EDL dividida SC vista desde una sola zona en una CP de 6 zonas. Marcadas con color naranja las aristas de la ciudad y con celeste las aristas de la línea.

En este escenario simplificado, el objetivo es encontrar los parámetros d_1 , d_2 y umbral del índice de divisibilidad que marcan el paso de la EDL completa a la EDL dividida SC, o viceversa. Entonces, los pasos del algoritmo de calibración del índice de divisibilidad son:

1. Simular las estructuras de línea completa y dividida SC para $a = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ en el espacio (α, β) usando una grilla de espesor 0.1 (recordar que α y β son adimensionales entre 0 y 1.). Determinar la EDL óptima en cada punto.
2. Construir el conjunto *frontera*, constituido por los puntos tales que su EDL óptima es distinta a la de alguno de sus vecinos en la grilla.
3. Obtener el valor de los términos del índice de divisibilidad en los subcentros de la línea diametral para cada punto de la frontera. Por la simetría, estos valores deberían ser iguales para cada subcentro, así sólo se considerará uno cualquiera. Por otra parte, recordemos que el índice de divisibilidad se calcula:

$$\begin{aligned} I_{N,l}(i) &:= \left\| \max_{1 \leq n \leq i} \zeta_{N,l}(n) - \max_{k \geq n \geq i} \zeta_{N,l}(n) \right\| (1 - \tau_{N,l}(i)d_1) \left(1 + \left(\|l_i\| + \frac{\|l_i\|}{\|l\|} \right) d_2 \right) \\ &= \zeta_{N,l}^i (1 - \tau_{N,l}(i)d_1) \left(1 + \left(\|l_i\| + \frac{\|l_i\|}{\|l\|} \right) d_2 \right) \end{aligned}$$

$$\text{con } l_i = \begin{cases} [0, i] & \text{si } q, q+1 \in [i, k] \\ [i, k] & \text{si } q, q+1 \in [0, i] \end{cases}, \text{ para } q := \arg \max_{u \in [k]} F(u).$$

Entonces los términos asociados son $\zeta_{N,l}^i$, $\tau_{N,l}(i)$ y $\|l_i\| + \frac{\|l_i\|}{\|l\|}$, que corresponden al valor absoluto de la diferencia de los factores de carga a cada lado de la división, la cantidad de transbordos y el largo de la línea de menor flujo máximo corregido por el largo total, respectivamente.

4. Si $F(a)$ es la frontera para un valor de a dado, luego N_0 el subconjunto de puntos en que la EDL completa es óptima y N_1 el subconjunto con EDL dividida SC óptima. Entonces, minimizar (haciendo abuso de notación al denotar $I_{N_0}^f(SC|d1, d2)$ al valor de índice de divisibilidad de la línea diagonal de N_0 en el subcentro usando los parámetros d_1 y d_2):

$$\begin{aligned} e(d_1, d_2, u) &= \sum_a \sum_{f \in F(a)} \delta_{f \in N_0} \delta_{I_{N_0}^f(SC|d1, d2) > u} \sqrt{|I_{N_0}^f(SC|d1, d2) - u|} + \\ &\quad \delta_{f \in N_1} \delta_{I_{N_0}^f(SC|d1, d2) < u} \sqrt{|I_{N_0}^f(SC|d1, d2) - u|} \quad (4.5) \end{aligned}$$

Que corresponde a la suma de la raíz cuadrada de la diferencia entre el índice y el umbral en los puntos dónde la predicción se equivoca.

El espíritu del algoritmo es crear una función de error que permita calibrar los parámetros d_1 , d_2 y umbral. Lo ideal sería tomar como error la cantidad de puntos en que la división falla con esos parámetros. Sin embargo, esto daría valores discretos que pueden ser difíciles de minimizar con los métodos tradicionales que evalúan el gradiente mediante variaciones infinitesimales. Por lo tanto, para usar una función que se asemeje a lo anterior con valores continuos, se minimiza la suma de la raíz de la distancia del índice al umbral en los puntos de la frontera en que la predicción falla.

4.1.3. División

Esta etapa es análoga a los algoritmos 2 y 3 de la Ciudad Lineal Paramétrica, salvo que en la Ciudad Paramétrica los nodos pueden pertenecer a más de una línea y los pasajeros poseen más de una ruta para llegar a su destino, así que la asignación no es trivial. Lo primero provoca que la búsqueda del mayor índice debe hacerse para cada línea y nodo, mientras que lo segundo repercute en que la asignación de pasajeros sea parte de los algoritmos. El algoritmo 4 usa divisiones tipo umbral y el algoritmo 5 tipo fórmula.

Algoritmo 4: Algoritmo general división con umbral.

Data: El umbral u , las constantes d_1 y d_2 y EDL_{ini} estructura de línea inicial.

Result: Estructura de línea dividida.

```
1 EDL  $\leftarrow$  {EDLini};
2 Calcular la asignación de pasajeros y frecuencias óptimas ;
3 Calcular el índice de divisibilidad I(n, l) para cada nodo  $n \in l$ , de cada línea  $l \in EDL$ ;
4  $I_{max} \leftarrow \max\{I(n, l); l \in EDL, n \in l\}$ ;
5 if  $I_{max} > u$  then
6   Sean  $n_{max}$  y  $l_{max}$  tales que  $I_{max} = I(n_{max}, l_{max})$ , entonces dividir  $l_{max}$  en  $n_{max}$ .
   Diremos que las líneas divididas son  $l_{izq}$  y  $l_{der}$  ;
7   EDL  $\leftarrow$  EDL  $\setminus$  { $l_{max}$ };
8   EDL  $\leftarrow$  EDL  $\cup$  { $l_{izq}, l_{der}$ };
9   Volver a (2);
10 end
```

Algoritmo 5: Algoritmo general división con formula.

Data: El umbral u , las constantes d_1 y d_2 y EDL_{ini} estructura de línea inicial.

Result: Estructura de línea dividida.

```
1 EDL  $\leftarrow$  {EDLini};
2 Calcular la asignación de pasajeros y frecuencias óptimas ;
3 Calcular el índice de divisibilidad I(n, l) para cada nodo  $n \in l$ , de cada línea  $l \in EDL$ ;
4  $I_{max} \leftarrow \max\{I(n, l); l \in EDL, n \in l\}$ ;
5 Sean  $n_{max}$  y  $l_{max}$  tales que  $I_{max} = I(n_{max}, l_{max})$ , entonces calcular el MVRC de la
   EDL actual ( $MVRC_{act}$ ) y el de la EDL dividida en  $n_{max}$  de la línea  $l_{max}$  ( $MVRC_{div}$ );
6 if  $MVRC_{act} > MVRC_{div}$  then
7   Dividir  $l_{max}$  en  $n_{max}$ . Diremos que las líneas divididas son  $l_{izq}$  y  $l_{der}$  ;
8   EDL  $\leftarrow$  EDL  $\setminus$  { $l_{max}$ };
9   EDL  $\leftarrow$  EDL  $\cup$  { $l_{izq}, l_{der}$ };
10 Volver a (2);
11 end
```

4.1.4. Selección

De las etapas anteriores, los individuos ya están ordenados según su MVRC, así que se escoge a un porcentaje predefinido de los mejores, y se copian directamente a la siguiente generación, sin realizarles ningún cambio.

4.1.5. Cruce

El cruce consiste en generar nuevos individuos a partir de los mejores de la generación en curso, hasta que se haya completado el tamaño de la población deseado. Para ello, a dos individuos, que se denominarán predecesores, se les aplica un entrecruzamiento. La operación consiste en recorrer los cromosomas de los predecesores decidiendo en cada posición, con igual probabilidad, si tomar el gen de uno u otro. Es importante notar, que los cromosomas podrían ser de distinto largo, pues, el tamaño de las EDL varía según las divisiones que se realicen en la etapa previa. Así que, cuando se esté intentando tomar un gen de una posición vacía, simplemente se pasará a la siguiente sin copiar nada. En la figura 4.6 se observa un ejemplo.

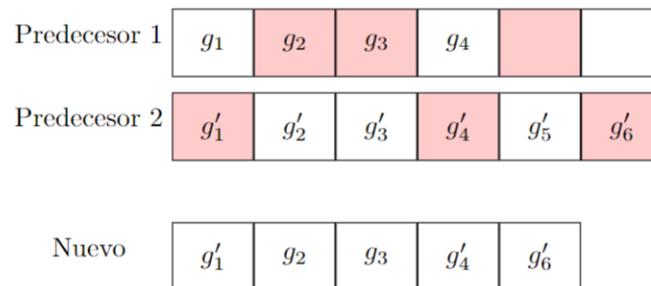


Figura 4.6: Ejemplo entrecruzamiento.

4.1.6. Mutación

A cada gen de cada individuo obtenido por entrecruzamiento, aplicar con determinada probabilidad una mutación. La mutación es cambiar el gen por otro aleatorio de la piscina de genes.

4.2. Resultados algoritmo genético con divisiones

En esta sección se compararán los resultados obtenidos mediante el algoritmo descrito en la sección anterior con aquellos que se obtienen con un algoritmo análogo, pero sin la etapa de división. El objetivo es comparar el impacto de la introducción del índice de divisibilidad en la calidad de los resultados. Para ello, será necesario usar distintos escenarios de demanda que modelen ciudades monocéntricas, policéntricas y dispersas. No obstante, antes es necesario revisar ciertos aspectos clave de la implementación que introducen limitantes a la generación de la piscina de genes (líneas).

4.2.1. Implementación

Para la implementación computacional se usó la librería Sidermit (Jara-Díaz, Muñoz-Paulsen, Fielbaum, y Gschwender, 2020) creada especialmente para la Ciudad Paramétrica.

La ventaja es que la asignación de pasajeros y optimización de las frecuencias es muy eficiente. No obstante, su uso también introducirá algunas restricciones en el diseño de estructuras de líneas. En primer lugar, la única línea con ciclos que admite Sidermit es la línea circular que recorre los subcentros en orden y sus desarrolladores desaconsejan usarla porque podría alterar la convergencia de la optimización. Por lo tanto, la implementación se hará solamente con líneas sin ciclos.

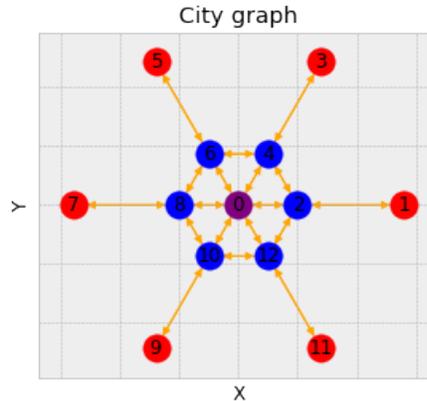


Figura 4.7: Ejemplo enumeración identificadores nodos en una ciudad de 6 zonas.

Por otra parte, el grafo interno que representa a la ciudad tiene aristas fijas (que son las que conectan cada periferia con su subcentro, los subcentros adyacentes y los subcentros con el CBD, para un ejemplo ver 4.7). En consecuencia, las líneas con paradas entre nodos no adyacentes, necesariamente deben transitar sin detenciones por otros nodos intermedios para completar su viaje. Por ejemplo, una línea que pasa por la periferia y luego por el subcentro vecino, necesariamente debe pasar sin detenciones por el subcentro propio para alcanzar su destino. Si esto se suma a que no pueden haber líneas cíclicas, significa que algunas líneas son inesperadamente intratables, pues, aunque no tengan ciclos en sus paradas, sí pueden tenerlos en los nodos intermedios que transitan e igualmente serán excluidas.

Por último, Sidermit solo acepta demandas simétricas, así que la ejecución de los algoritmos estará limitada a este tipo de demanda, aunque el diseño de los mismos es más general.

4.2.2. Resultados

Para tener referencias claras con las que comparar los resultados, se han usado las mismas constantes que trabajos anteriores con modelos similares. Las constantes de costos (al igual que en el capítulo 3) fueron extraídas de Fielbaum et. al. (2016) (tabla 4.1). Luego, para la velocidad de los vehículos, se ha adoptado la velocidad media para buses descrita en Muñoz (2020), que corresponde a 20 [km/h]. En cuanto a la geometría de la ciudad, se usó una ciudad de 6 zonas con 10 [km] de distancia entre los subcentros y el CBD y, para que no todos los tramos fueran del mismo largo, se fijó la distancia entre los subcentros y sus respectivas periferias en 18 [km]. Tanto para el algoritmo genético con o sin divisiones, se consideró

elitismo al 20 % de la generación, cruce entre el mejor 50 % y probabilidad de mutación del 10 %.

Tabla 4.1: Valor de las constantes de costos operadores y usuarios.

c_0 [US/min]	c_1 [US/min]	p_{tr} [US/min]	p_w [US/min]	p_r [US/min]	t
8.61	0.3	2.74	5.48	$16p_{tr}$	0.0416

Ahora, es necesario fijar la demanda de las simulaciones. Para abarcar una gran variedad de ciudades, se han escogido cuatro escenarios (tabla 4.2) que representan ciudades de distinto tamaño (medido en cantidad total de pasajeros) y tipo (monocéntrica, policéntrica y dispersa). Además, tienen la ventaja de que se encuentran en distintas áreas de dominancia de estructuras estratégicas según el trabajo de Fielbaum et. al. (2016). Recordar que las estructuras estratégicas son hub-and-spoke, troncal alimentador, directa y exclusiva. Las primeras dos están basadas en transbordos, mientras que las últimas dos en viajes directos. En la figura 4.8 se encuentra la ubicación de los escenarios en el mapa de área de dominancia de estructuras estratégicas, tomando en consideración que la cantidad total de pasajeros se reescaló porque el mapa original fue obtenido para una ciudad de 8 zonas, mientras que la ciudad usada es de 6 zonas. El primer escenario está en el área de dominancia de hub-and-spoke, el segundo en troncal alimentador (FT por sus siglas en inglés), el tercero en directa y el último en exclusiva, a lo que se atribuye sus nombres.

Tabla 4.2: Parámetros de la demanda usados para testear.

Escenario	Y	a	α	β
HS	1500	0.8	0.3	0.35
FT	3750	0.8	0.08	0.46
DIR	15000	0.8	0.5	0.25
EXC	45000	0.8	0.1	0.45

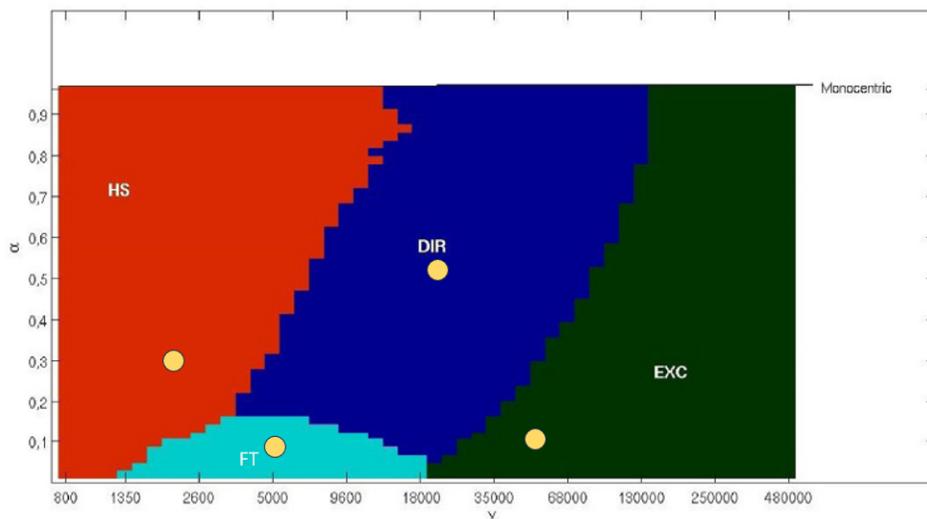


Figura 4.8: Ubicación de los escenarios en las áreas de dominancia de estructuras estratégicas. Modificación de la figura original adaptada de “Optimal public transport networks for a general urban structure” (p. 306), por Fielbaum, A., Jara-Díaz, S. & Gschwender, A., 2016, Transportation Research Part B, 94.

Para dar consistencia a los resultados, se fijó que todos los escenarios comenzarían con la misma población inicial de 200 individuos factibles generados al azar. En las figuras 4.9 y 4.10 se muestra la evolución de los escenarios HS y FT (respectivamente) a lo largo de 14 generaciones usando el algoritmo genético sin divisiones (algoritmo original), con divisiones tipo umbral (algoritmo umbral) y con divisiones tipo fórmula (algoritmo fórmula). En ambos casos es evidente que los algoritmos con divisiones tienen mejores resultados que el algoritmo original sin divisiones. No sólo convergen más rápido, sino que también a una mejor solución, con una leve ventaja al algoritmo con divisiones tipo fórmula.

En el escenario HS, los recursos consumidos por la mejor solución del algoritmo con divisiones umbral son un 4.6% más bajos que en el algoritmo original, además convergen en la sexta generación, mientras que el original aún no ha convergido para la décimo cuarta. Para el algoritmo con divisiones fórmula la mejor solución es un 5.7% más baja que la original. En este punto, es importante destacar que una reducción de $\sim 5\%$ es significativa. Para verlo, basta notar que la reducción total efectuada por el algoritmo sin divisiones desde el conjunto inicial generado aleatoriamente hasta la mejor solución de la última generación, es aproximadamente del 5.9%. Para complementar, si se compara con el conjunto inicial, el algoritmo con divisiones umbral lo mejoró un 10.2% y el algoritmo con divisiones fórmula un 11.15%. También destaca que el mayor salto ocurre en la primera generación, no así con el original, pues la primera generación con divisiones ya tiene una mejoría del 7.9% (umbral) y 8.11% (fórmula). Además, al comparar ambos tipos de divisiones, con fórmula es un 1.2% más bajo que umbral.

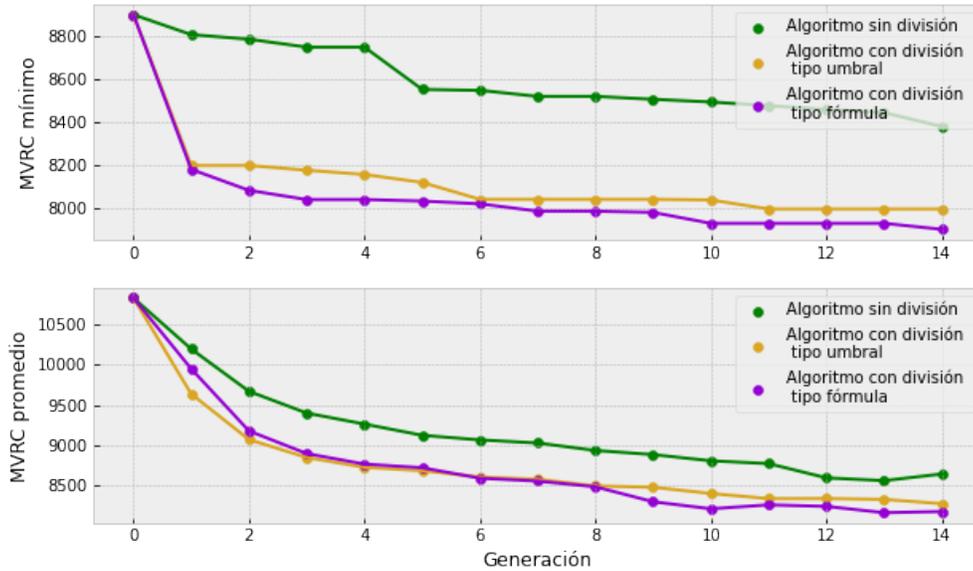


Figura 4.9: Resultados divisiones tipo fórmula escenario HS.

En el escenario FT, el algoritmo original disminuye un 5.4% el MVRC de la población inicial, mientras que las divisiones umbral lo hacen un 6.9% y las tipo fórmula un 7.14%. Esto implica que los resultados con divisiones son un 1.5% y 1.8% más bajos que el original, para divisiones tipo umbral y fórmula respectivamente. Al igual que en el escenario anterior, destaca que la principal disminución del MVRC se produce en la primera generación, siendo de un 4.6% (fórmula) y 5.6% (umbral). Además, la diferencia entre los resultados de ambos tipos de divisiones es de apenas un 0.3%.

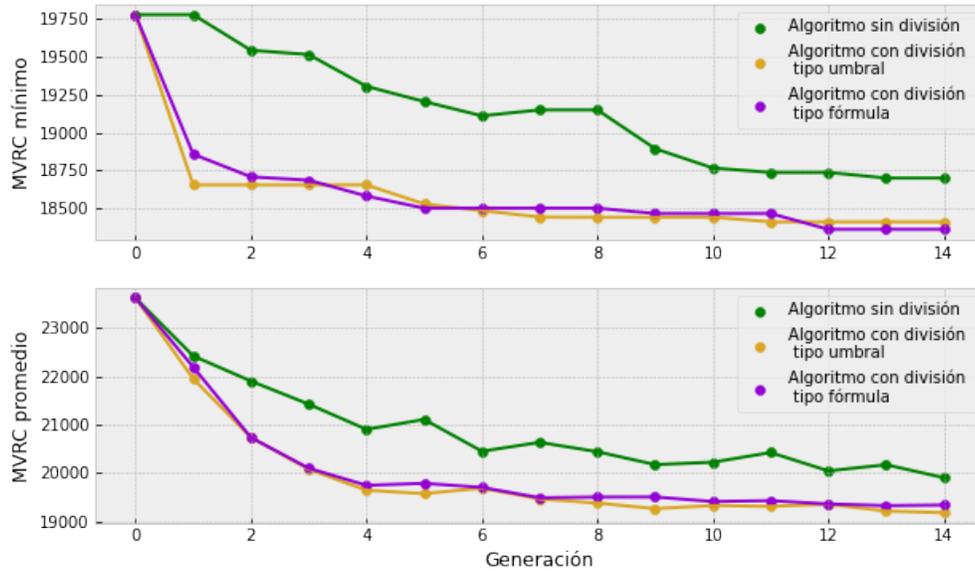


Figura 4.10: Resultados divisiones tipo fórmula escenario FT.

Por lo tanto, es posible concluir que, en calidad de los resultados, el algoritmo con divisiones tipo umbral es sumamente competitivo con el tipo fórmula. Lo cual, si se toma en consideración que por definición de los algoritmos, el algoritmo con divisiones tipo umbral a lo más puede ser tan bueno como el tipo fórmula, significa que la heurística tipo umbral es una buena aproximación que no sacrifica demasiada precisión. Además, si se comparan los tiempos de ejecución (tabla 4.3), se observa que los tiempos del algoritmo con divisiones tipo fórmula son, respectivamente, un 68 % y 106 % más altos que su contraparte. Por lo tanto, el algoritmo tipo umbral demuestra ser tan bueno como el tipo fórmula, con la ventaja de que es mucho más rápido en tiempo de ejecución. De hecho, si el algoritmo tipo umbral itera por más generaciones, ya en la 17^o generación, en menos tiempo del que le toma al algoritmo con fórmula llegar a la 14^o generación, el resultado HS es un 0.9 % mayor y FT un 0.04 % menor (es decir, mejor en términos de VRC) al mejor de las figuras 4.9 y 4.10, para cada caso. Gracias a lo anterior, para los escenarios restantes, solamente se usará el algoritmo tipo umbral.

Tabla 4.3: Tiempos de ejecución algoritmo con división tipo fórmula y umbral escenarios HS y FT.

Escenario	Algoritmo	Tiempo ejecución [h]
1	AG umbral	4.45
	AG fórmula	7.5
2	AG umbral	7.06
	AG fórmula	14.6

En la figura 4.11 se encuentran los resultados del escenario DIR. Allí se observa que la

diferencia entre el algoritmo con divisiones umbral y original no es tan alta como en los casos anteriores, pero de todas maneras domina el algoritmo con umbral por un 1.9%. Incluso se puede observar que los promedios finales son bastante similares. En términos generales, el algoritmo original mejora un 7.7% a la mejor solución inicial (el porcentaje más alto hasta ahora) y el con divisiones umbral un 9.4%. Aunque no es tan pronunciada como en los escenarios HS y FT, igualmente se observa que la mayor disminución del algoritmo con división umbral en la primera generación, con un 4.2%. Cabe recalcar que desde la sexta generación, las disminuciones en el MVRC del algoritmo con división umbral son bastante moderadas y tienden a estancarse. Mientras que en el original, hasta la novena el descenso es continuado.

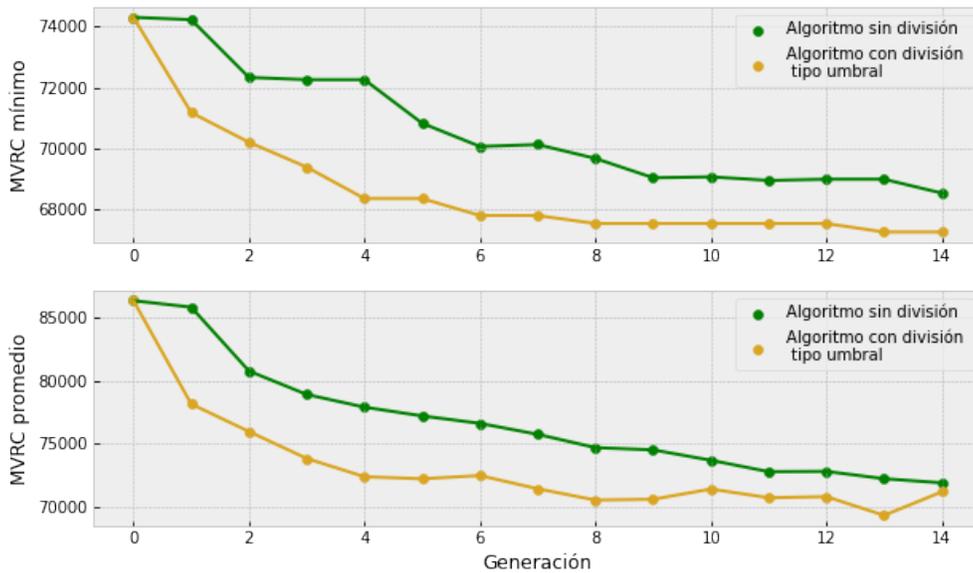


Figura 4.11: Resultados escenario DIR.

Por último, en el escenario EXC (figura 4.12), nuevamente la diferencia entre ambos resultados no es tan pronunciado como en los escenarios iniciales. Se aprecia que la solución final con divisiones umbral es un 1.7% más baja que sin ellas. El algoritmo original mejora la solución inicial en un 4.5% y el con divisiones umbral en un 6.1%. Ahora más que nunca, la primera generación presenta la disminución principal de todas las iteraciones con división umbral: 5.3%. Además, ambas son bastante competitivas y no tienen mucha diferencia en términos de MVRC promedio. Incluso el algoritmo original es escuetamente mayor al con divisiones en la segunda generación (aunque en la siguiente el algoritmo con divisiones vuelve a tener la ventaja).

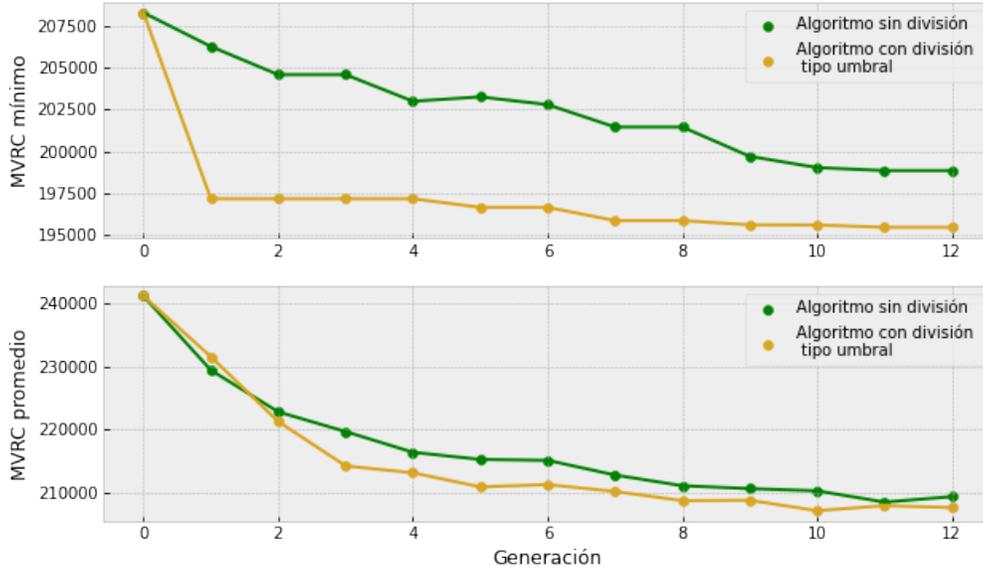


Figura 4.12: Resultados escenario EXC.

En términos generales, en todos los casos revisados el algoritmo con divisiones tipo umbral ha sido consistentemente mejor al algoritmo original, tanto en calidad de la solución final, como en iteraciones necesarias para la convergencia. No obstante, en los dos primeros escenarios su ventaja es más pronunciada. Aquello se explica gracias a que, según la figura 4.8, los escenarios HS y FT coinciden en zonas de demanda donde las estructuras estratégicas con transbordos tienen ventaja, mientras que los escenarios DIR y EXC se encuentran en demandas que benefician a los viajes directos. Por lo tanto, presumiblemente introducir divisiones tiene su mayor potencial en los escenarios HS y FT.

Por otra parte, se observa que para los algoritmos con divisiones (tanto umbral como fórmula) el principal descenso de la función objetivo se concentra en la primera generación. Lo cual, es una clara señal de que modificar una estructura de línea sólo introduciendo divisiones, tiene, en efecto, un gran potencial para mejorarla. Pues, en la primera generación es cuando se realizan las divisiones de las soluciones iniciales. Luego, en las siguientes generaciones, aunque puede haber alguna división espontánea, principalmente se itera sobre estructuras ya divididas. Se concluye entonces que, en términos generales, el primer descenso es mayoritariamente gracias a las divisiones, y los sucesivos gracias al diseño del algoritmo genético en sí. Presumiblemente, por este mismo motivo los algoritmos con divisiones convergen tan rápido; agotan el potencial del conjunto inicial con mayor velocidad desde la primera generación.

Para continuar, es sumamente interesante observar las estructuras de líneas que resultaron ganadoras con el algoritmo original y el algoritmo con divisiones umbral. En la figura 4.13 se encuentran dibujadas las estructuras del escenario HS. Es evidente que el resultado del algoritmo con división tipo umbral es una estructura tipo hub-and-spoke, a pesar de que el original sí está basado en líneas directas. Además, resulta llamativo que otras líneas, no HS, intentaron imitar la línea circular que no fue posible incluir en la implementación. Luego,

en la figura 4.14 se pueden observar los resultados del escenario FT. De igual forma, hay líneas que imitan el anillo circular y además hay otras que son características de troncal alimentador. En los resultados de los escenarios DIR y EXC (figuras 4.15 y 4.16), aunque las estructuras obtenidas con divisiones no siguen un patrón claro, se evidencia un aumento en la cantidad de líneas y la aparición de líneas exclusivas que unen nodos no adyacentes. Con lo cual, se puede concluir que en los escenarios HS y FT las estructuras con divisiones se adaptaron a la estructura estratégica dominante a su demanda, mientras que en DIR y EXC, aunque la relación no es tan clara, de todas maneras se obtuvieron estructuras basadas en líneas directas.

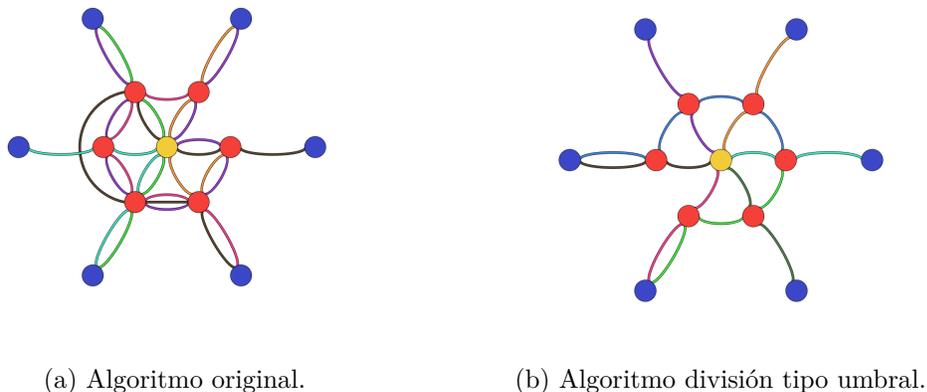


Figura 4.13: Estructuras ganadoras del escenario HS.

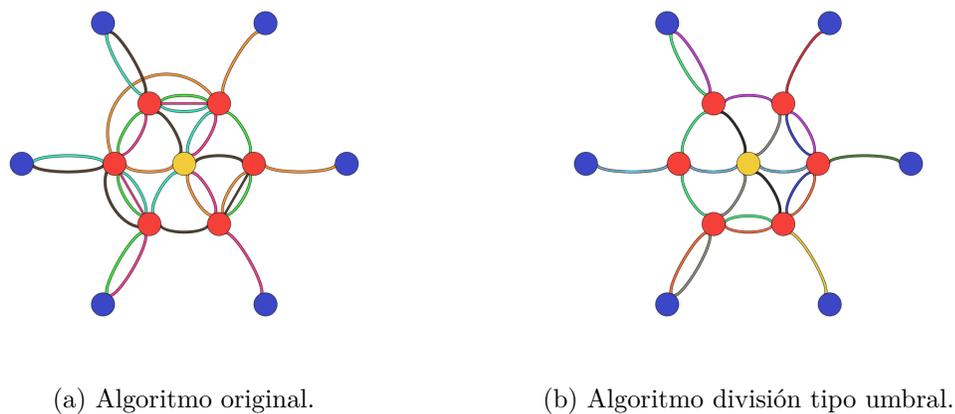
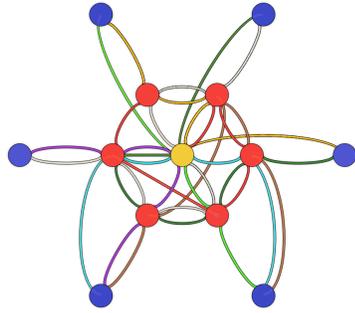
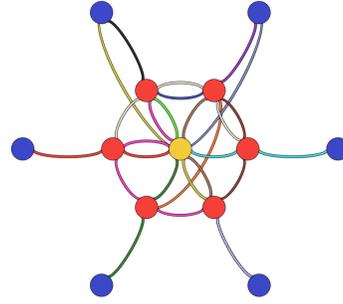


Figura 4.14: Estructuras ganadoras del escenario FT.

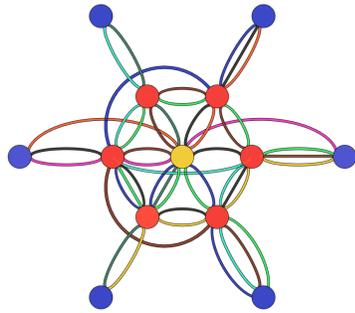


(a) Algoritmo original.

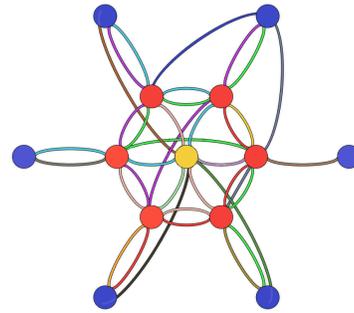


(b) Algoritmo división tipo umbral.

Figura 4.15: Estructuras ganadoras del escenario DIR.



(a) Algoritmo original.



(b) Algoritmo división tipo umbral.

Figura 4.16: Estructuras ganadoras del escenario EXC.

Para analizar las estructuras obtenidas en más profundidad, se introducirán al análisis los indicadores de directitud desarrollados por Fielbaum, Jara-Díaz, y Gschwender (2020), que son: transbordos por pasajero, paradas por pasajero y el cociente entre la distancia recorrida por el pasajero y el camino minimal. Según los mismos autores, estos indicadores corresponden a una manera eficaz de comparar la adaptación de las estructuras a distintas demandas. En la tabla 4.4 se encuentran comparados los índices de directitud de los resultados del algoritmo original y el algoritmo con divisiones umbral. Además, se agregaron como referencia las estructuras estratégicas dominantes en cada escenario, junto a sus mínimos valores consumidos y cantidad de líneas.

Al comparar entre el algoritmo original y con divisiones umbral en cada escenario, es evidente, mas no sorprendente, que las divisiones aumentan los transbordos por pasajero. Por otro lado, la ciudad paramétrica al ser tan compacta (pocos nodos y arcos) de forma natural condiciona a que el cociente entre las distancias y las paradas por pasajeros tenga poca variación, así que sólo en el escenario DIR se observan cambios significativos, que son provocados por la disminución de líneas exclusivas provoca un aumento de las paradas intermedias. No

Tabla 4.4: Comparación índices de directitud, MVRC y cantidad de líneas.

Esc.	Estrategia	Transbordos pp.	Paradas pp.	Cociente distancias pp.	MVRC [US/h]	Cantidad de líneas
HS	AG original	0.26	3.09	1.05	8342	6
	AG umbral	0.29	3.07	1.03	7973	8
	HS	0.21	2.865	1.012	7740	31
	HS sin cir	0.31	3.06	1.08	7965	29
FT	AG original	0.21	2.98	1.05	19373	5
	AG umbral	0.34	3.09	1.02	18357	10
	FT	0.43	3.18	1.017	18262	25
	FT sin cir	0.65	3.61	1.11	20250	24
DIR	AG original	0.13	2.61	1.026	68548	8
	AG umbral	0.28	2.86	1.027	66865	15
	DIR	0	2.76	1.028	63600	41
	DIR sin cir	0	2.76	1.026	63600	39
EXC	AG original	0.2	2.85	1.04	196247	9
	AG umbral	0.27	2.85	1.03	195482	17
	EXC	0	2	1	191250	63

obstante, si se comparan los otros indicadores para AG umbral entre distintos escenarios, es evidente que los escenarios con estructuras estratégicas basadas en transbordos tienen mayor cantidad de transbordos y paradas por pasajeros, que aquellos con estratégicas basadas en viajes directos. Por lo tanto, se aprecia una adaptación de la estructura según la demanda, que provoca resultados con mayor o menor directitud según corresponda. De hecho, la cantidad de líneas también refuerza lo anterior, pues los escenarios DIR y EXC obtienen estructuras con más cantidad de líneas que los escenarios HS y FT.

Por otra parte, se ha agregado el MVRC para comparar si el resultados del algoritmo genético con divisiones umbral logra superar a la mejor estratégica para su tipo de demanda. Sin embargo, no hay que olvidar que el algoritmo genético no puede usar la línea circular que las estratégicas tienen, así que también se agregaron las estructuras estratégicas sin línea circular de referencia. En el escenario HS, el resultado con umbral fue un 3% más alto que hub-and-spoke, pero tan sólo 0.1% mayor a hub-and-spoke sin línea circular. Es decir, el la estructura obtenida es muy competitiva con la estructura de referencia corregida. Luego, en el escenario FT el MVRC con umbral es un 0.5% mayor a troncal alimentador (FT) y 9.3% menor a troncal alimentador sin circular, lo cual significa que el resultado es mucho mejor al de referencia corregida. Para el escenario DIR, el MVRC con umbral es 5.1% mayor a la estructura directa con y sin circular (ya que, en la asignación de pasajeros la línea circular desaparece con frecuencia cero). Finalmente, para el escenario EXC lo obtenido fue un 2% mayor a la estructura exclusiva.

En síntesis, en los casos con estructura de referencia basada en transbordos, el resultado

del algoritmo genético con divisiones umbral fue sumamente competitivo, e incluso en FT igualó a la estructura estratégica y superó ampliamente al caso sin línea circular. En el otro extremo, para los escenarios con referencia estructuras basadas en viajes directos, los resultados mejoraron respecto al caso sin divisiones, pero no fueron tan buenos al compararlo a la estratégicas con o sin divisiones. Sin embargo, es imposible continuar el análisis sin mencionar la simetría. Según el diseño de la ciudad paramétrica, la demanda es simétrica y la ubicación de los nodos también, por lo tanto cabría esperar que las estructuras simétricas sean mejores. Es así como las estructuras estratégicas que ya son simétricas por diseño tienen ventaja sobre las aleatorias iniciales del algoritmo genético que muy probablemente son asimétricas. De hecho, es destacable que en el escenario FT, el algoritmo haya podido igualar a troncal alimentador usando estructuras asimétricas. No obstante, la situación sería la contraria si la red o la demanda fuesen asimétricas; el algoritmo genético con divisiones tendría la ventaja.

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido desarrollar nuevas heurísticas flexibles que adapten la cantidad de transbordos a la demanda dada. Se comienza observando que la investigación previa se ha caracterizado por evitar la introducción de transbordos en favor de las líneas directas, llegando incluso a prohibirlos en la asignación de pasajeros, a pesar de que esfuerzos más recientes, pero aislados, han demostrado que la introducción de transbordos pueden mejorar familias de estructuras en ciudades simplificadas y que determinados tipos de demandas serían favorables a estructuras de líneas basadas en transbordos. Por lo tanto, se observa la necesidad de encontrar resultados de este tipo en ciudades y estructuras más generales.

Es entonces, que se han estudiando las condiciones que favorecen la introducción intencional de transbordos en el diseño por medio de la división de líneas en una ciudad tipo corredor, que permite aislar el comportamiento de una sola línea. Se obtuvo que las condiciones son: baja cantidad de transbordos, alta diferencia de flujos a cada lado de la división y mayor largo de la línea resultante de menor flujo máximo. A partir de esto, fue posible definir un índice de divisibilidad para cuantificar la idoneidad de la división de una línea en algún nodo en particular. El índice de divisibilidad se integró a un algoritmo de división de líneas mediante dos estrategias: umbral y fórmula. La primera corresponde a establecer una cota máxima a partir de la cual la línea se divide, mientras que la segunda es usar el nodo de mayor índice como nodo candidato a la división y calcular los costos respectivos para decidir. Al testear en una ciudad lineal de cuatro nodos con demanda paramétrica, ambas estrategias se validaron como exitosas alcanzando una precisión del 93 % y 99 %, respectivamente, para distintos niveles y distribución de la demanda. Además, es destacable que los errores se concentran en las zonas con parámetros extremos, o en que la diferencia de los costos de dividir o no hacerlo, no es tan significativa.

Por lo tanto, se comprueba que el índice de divisibilidad es una medida útil para optimizar el diseño de estructuras de líneas, con tiene potencial sobre ciudades más complejas. En particular, se trabajó con la Ciudad Paramétrica debido a su flexibilidad que le permite representar todo tipo de ciudades reales con mayor precisión que otros modelos revisados. Sobre ella se aplicó un algoritmo genético modificado para incluir una etapa de revisión y división de las estructuras según el índice de divisibilidad, ya sea tipo umbral o tipo fórmula. En base a trabajos anteriores, se escogieron cuatro escenarios para las pruebas, cada uno representante de una demanda favorecedora a las estructuras estratégicas hub-and-spoke,

troncal alimentador, directa o exclusiva. En todos los casos, los algoritmos con divisiones tuvieron mejor rendimiento y una convergencia más rápida que el algoritmo sin división, especialmente en los escenarios con estructuras estratégicas basadas en transbordos. Además, se observó que el algoritmo con divisiones tipo umbral se adaptó a la demanda y generó líneas más directas o con más transbordos según fuera conveniente. Por otro lado, al comparar entre los algoritmos con divisiones tipo umbral o tipo fórmula, se obtuvo que los resultados con este último fueron ligeramente mayores a los tipo umbral, aunque con un tiempo de ejecución aproximadamente un 87% mayor.

Se concluye entonces, que como heurística, el algoritmo genético con divisiones tipo umbral es muy exitoso, ya que mejora los resultados del algoritmo genérico original al adaptar la directitud al tipo de demanda y sus resultados son muy cercanos a la precisión máxima que podría alcanzar (divisiones tipo fórmula), pero en un tiempo de ejecución comparable al algoritmo original.

No obstante, al comparar los resultados con las estructuras estratégicas de referencia en cada escenario, se obtuvo que las estratégicas siguen siendo dominantes. Aquello se puede explicar debido a limitaciones en la implementación, pues no se consideraron líneas cíclicas (cómo la línea circular) ni demanda asimétrica. Respecto a la líneas cíclicas, en particular la línea circular es sumamente coherente con la red de la ciudad, así que sin duda sería una extensión valiosa a este trabajo que podría mejorar la calidad de las soluciones encontradas. Mientras que la asimetría, es en realidad una ventaja del algoritmo diseñado que no se exploró. El algoritmo en su diseño no está de ninguna forma limitado a demandas o ciudades simétricas, y de hecho la inmensa mayoría de las soluciones que exploran son asimétricas, así que quitar la simetría podría ser el punto de inflexión para superar a las estructuras estratégicas que recaen fuertemente en este supuesto, a pesar de que las ciudades reales no suelen serlo.

No obstante, ninguna de las limitaciones anteriores opacan las bondades de la heurística presentada, que ha demostrado lograr resultados competitivos frente a estructuras cuidadosamente diseñadas en cada caso, a partir de un conjunto inicial aleatorio y evolución no supervisada. Para el caso del algoritmo genético, la introducción de una etapa de divisiones significó una mejora inmediata y significativa al conjunto inicial, que le permitió alcanzar mejores resultados en menos iteraciones. Finalmente, se plantea como línea de trabajo futuro, aplicar el algoritmo con divisiones tipo umbral a otras redes de ciudades asimétricas más complejas que la ciudad paramétrica, pues el diseño del algoritmo, no está limitado al diseño de la red de la ciudad. Además, el índice de divisibilidad es absolutamente general y podría complementarse con otras heurísticas distintas a los algoritmos genéticos, para explorar otro tipo de resultados menos aleatorios.

Bibliografía

- Badia, H., Estrada, M., y Robusté, F. (2014). Competitive transit network design in cities with radial street patterns. *Transportation Research Part B*, 59, 161–181.
- Blum, J., y Mathew, T. (2010). Intelligent agent optimization of urban bus transit system design. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 357–369.
- Borndörfer, R., Grötschel, M., y Pfetsch, M. (2005). A path-based model for line planning in public transport. *Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin*.
- Bussieck, M., Kreuzer, P., y Zimmermann, U. (1996). Optimal lines for railway systems. *European Journal of Operational Research*, 96, 54–63.
- Byrne, B. (1975). Public transportation line positions and headways for minimum useas and system cost in a radial case. *Transportatio research*, 9, 97–102.
- Ceder, A., y Wilson, N. (1986). Bus network design. *Transportation Research Part B: Methodological*, 331–344.
- Chai, S., y Liang, Q. (2020). An improved nsga-ii algorithm for transit network design and frequency setting problem. *Journal of Advanced Transportation*.
- Claessens, M., Van Dijk, N., y Zwaneveld, P. (1998). Cost optimal allocation of rail passenger lines. *European Journal of Operational Research*, 110, 474–489.
- Daganzo, C. (2010). Structure of competitive transit networks. *Transportation Research Part B*, 44, 434–446.
- Dubois, D., Bel, G., y Llibre, M. (1979). A set of methods in transportation network synthesis and analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 797–808.
- Durán-Micco, J., y Vansteenwegen, P. (2022). A survey on the transit network design and frequency setting problem. *Public transport*, 14, 155–190.
- Fielbaum, A., Jara-Díaz, S., y Gschwender, A. (2016). Optimal public transport networks for a general urban structure. *Transportation Res. Part B: Methodological*, 94, 298–313.
- Fielbaum, A., Jara-Díaz, S., y Gschwender, A. (2017). A parametric description of cities for the normative analysis of transport systems. *Networks Spatial Econom*, 17, 343–365.
- Fielbaum, A., Jara-Díaz, S., y Gschwender, A. (2018). *Transit line structures in a general parametric city: The role of heuristics*.
- Fielbaum, A., Jara-Díaz, S., y Gschwender, A. (2020). Beyond the mohring effect: Scale economies induced by transit lines structures design. *Economics of Transportation*, 22, 100163.
- Holroyd, E. (1965). The optimal bus service: A theoretical model for a large uniform urban area. *Proceedings of the Third International Symposium on the Theory of Traffic Flow*.

- Jara-Díaz, S., y Muñoz-Paulsen, E. (2019). *Diseño estratégico de redes de transporte público bimodal*. Presentación en el 19° Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago.
- Jara-Díaz, S., y Muñoz-Paulsen, E. (2022). Lessons from the strategic design of a bimodal public transport system on a linear city. *Research in Transportation Economics*, 94, 1010167.
- Jara-Díaz, S., Muñoz-Paulsen, E., Fielbaum, A., y Gschwender, A. (2020). *Sidermit (system for the strategic design of integrated multimodal public transport networks) (version 1.0.1)*. (Github. <https://github.com/SIDERMIT>)
- Lampkin, W., y Saalmans, P. (1967). The design of routes, service frequencies, and schedules for a municipal bus undertaking: A case study. *Journal of the Operational Research Society*, 375–397.
- Liang, M., Wang, W., Dong, C., y Zhao, D. (2020). A cooperative coevolutionary optimization design of urban transit network and operating frequencies. *Expert Systems with Applications*, 1–12.
- Newell, G. (1979). Some issues relating to the optimal design of bus. *Transportation Science*, 13(1), 20–35.
- Nikolic, M., y Teodorovic, D. (2014). A simultaneous transit network design and frequency setting: Computing with bees. *Expert Systems with Applications*, 7200–7209.
- Oliveira, R., y Barbieri, C. (2015). Efficient transit network design and frequencies setting multi-objective optimization by alternating objective genetic algorithm. *Transportation Research Part B*, 355–376.
- Owais, M., y Osman, M. (2018). Complete hierarchical multi-objective genetic algorithm for transit network design problem. *Expert Systems With Applications*, 143–154.
- Silman, L., Barzily, Z., y Passy, U. (1974). Planning the route system for urban buses. *Computers & Operations Research*, 201–211.
- Tirachini, A., Cortés, C., y Jara-Díaz, S. (2010). Optimal design and benefits of a short turning strategy for a bus corridor. *Transportation*, 38, 169–189.
- Van Nes, R., Hamerslag, R., y Immers, B. (1988). Design of public transport network. *Transportation Research Record*, 1202, 74–83.

Anexo

Cálculos ciudad lineal paramétrica

Para calcular la frecuencia óptima de la estructura de línea M_0 , basta con usar 3.38 y 3.22 con $k=4$. Con el objetivo de aligerar la notación, en vez de las siglas P , SA , CBD y SB , se usará la enumeración de los nodos $(1,2,3,4)$ para identificarlos.

$$\begin{aligned}
 A_{M_0} &= t \sum_{\substack{1 \leq g < 4 \\ g < h \leq 4}} OD(g, h) \left(\sum_{g < j < h} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq 4} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq \bar{g} < h} OD(\bar{g}, h) \right) \\
 &= t \quad OD(1, 2) \left(\frac{OD(1, 2)}{2} \right) \\
 &\quad + t \quad OD(1, 3) \left(OD(2, 3) + OD(2, 4) + OD(1, 2) + \frac{OD(1, 3) + OD(2, 3)}{2} \right) \\
 &\quad + t \quad OD(1, 4) \left(\{OD(2, 3) + OD(2, 4) + OD(1, 2)\} \right. \\
 &\quad \quad \left. + \{OD(1, 3) + OD(2, 3)\} + \frac{OD(1, 4) + OD(2, 4)}{2} \right) \\
 &\quad + t \quad OD(2, 3) \left(\frac{OD(1, 3) + OD(2, 3)}{2} \right) \\
 &\quad + t \quad OD(2, 4) \left(OD(1, 3) + OD(2, 3) + \frac{OD(1, 4) + OD(2, 4)}{2} \right) \\
 &= t \quad a\beta Y \left(\frac{a\beta Y}{2} \right) \\
 &\quad + t \quad a\alpha Y \left(b\tilde{\alpha}Y + b\tilde{\gamma}Y + a\beta Y + \frac{a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y}{2} \right) \\
 &\quad + t \quad a\gamma Y \left(\{b\tilde{\alpha}Y + b\tilde{\gamma}Y + a\beta Y\} + \{a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y\} + \frac{a\gamma Y + b\tilde{\gamma}Y}{2} \right) \\
 &\quad + t \quad b\tilde{\alpha}Y \left(\frac{a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y}{2} \right) \\
 &\quad + t \quad b\tilde{\gamma}Y \left(a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y + \frac{a\gamma Y + b\tilde{\gamma}Y}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= tY^2 \left(\frac{a^2\beta^2}{2} + a\alpha \left(b + a\beta + \frac{a\alpha + b\tilde{\alpha}}{2} \right) + a\gamma \left(b + a\beta + a\alpha + b\tilde{\alpha} + \frac{a\gamma + b\tilde{\gamma}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + b\tilde{\alpha} \left(\frac{a\alpha + b\tilde{\alpha}}{2} \right) + b\tilde{\gamma} \left(a\alpha + b\tilde{\alpha} + \frac{a\gamma + b\tilde{\gamma}}{2} \right) \right) \\
&= tY^2 \left(\frac{a^2\beta^2}{2} + a\alpha b + a^2\alpha\beta + \frac{a^2\alpha^2 + aab\tilde{\alpha}}{2} + a\gamma b + a^2\gamma\beta + a^2\gamma\alpha + a\gamma b\tilde{\alpha} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^2\gamma^2 + a\gamma b\tilde{\gamma}}{2} + \frac{ab\tilde{\alpha}\alpha + b^2\tilde{\alpha}^2}{2} + b\tilde{\gamma}a\alpha + b^2\tilde{\gamma}\tilde{\alpha} + \frac{b\tilde{\gamma}a\gamma + b^2\tilde{\gamma}^2}{2} \right) \\
&= tY^2 \left(a^2 \left(\frac{\beta^2}{2} + \alpha\beta + \frac{\alpha^2}{2} + \gamma\beta + \gamma\alpha + \frac{\gamma^2}{2} \right) + b^2 \left(\frac{\tilde{\alpha}^2}{2} + \tilde{\gamma}\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\gamma}^2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + ab \left(\alpha + \frac{\alpha\tilde{\alpha}}{2} + \gamma + \gamma\tilde{\alpha} + \frac{\gamma\tilde{\gamma}}{2} + \frac{\tilde{\alpha}\alpha}{2} + \tilde{\gamma}\alpha + \frac{\tilde{\gamma}\gamma}{2} \right) \right) \\
&= tY^2 \left(\frac{a^2}{2} (\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2 + 2\gamma\beta + 2\gamma\alpha + \gamma^2) + \frac{b^2}{2} (\tilde{\alpha}^2 + 2\tilde{\gamma}\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}^2) \right. \\
&\quad \left. + ab(\alpha + \alpha\tilde{\alpha} + \gamma + \gamma\tilde{\alpha} + \gamma\tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}\alpha) \right) \\
&= tY^2 \left(\frac{a^2}{2} (\alpha + \beta + \gamma)^2 + \frac{b^2}{2} (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})^2 + ab(\alpha + \alpha(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}) + \gamma + \gamma(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})) \right) \\
&= tY^2 \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab(2\alpha + 2\gamma) \right) \\
&= tY^2 \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 2ab(\alpha + \gamma) \right) \\
&= tY^2 \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 2ab(1 - \beta) \right) \\
&= \frac{tY^2}{2} (1 + 2ab(1 - 2\beta)) \tag{.1}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
f_{PACB}^{M_0^*} &= \sqrt{\frac{2Y^2tc_1 \max_{u \in [3]} F(u) + \frac{tp_{tr}Y^2}{2} (1 + 2ab(1 - 2\beta)) + \frac{Yp_w}{2}}{6Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{4Y^2tc_1 \max_{u \in [3]} F(u) + tp_{tr}Y^2(1 + 2ab(1 - 2\beta)) + Yp_w}{12Tc_0}} \tag{.2}
\end{aligned}$$

Además, se calcula el flujo (.4). Notemos que $a\gamma \leq (\alpha + \gamma)a$ y $b\tilde{\gamma} \leq b$, por lo tanto al

reemplazar el máximo, se obtiene:

$$f_{PACB}^{M_0^*} = \sqrt{\frac{4Y^2tc_1 \max(a, (\alpha + \gamma)a + b) + tp_{tr}Y^2(1 + 2ab(1 - 2\beta)) + Yp_w}{12Tc_0}} \quad (.3)$$

$$\begin{aligned} F(1) &= aY \\ F(2) &= ((\alpha + \gamma)a + b)Y \\ F(3) &= (a\gamma + b\tilde{\gamma})Y \end{aligned} \quad (.4)$$

De la misma forma, para M_2 se usan las fórmulas 3.50, 3.51, 3.52 y 3.53 con $k = 4$ e $i = 2$.

$$\begin{aligned} C_{M_2} &= t \sum_{\substack{1 \leq g < 2 \\ g < h < 2}} OD(g, h) \left(\sum_{g < j < h} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq 4} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \sum_{1 \leq \bar{g} < h} \frac{OD(\bar{g}, h)}{2} \right) \\ &\quad + t \sum_{\substack{1 \leq g < 2 \\ 2 \leq h \leq 4}} OD(g, h) \left(\sum_{g < j < 2} \left(\sum_{1 \leq j < \bar{h}} OD(j, \bar{h}) + \sum_{\bar{g} < jm \leq 4} OD(\bar{g}, j) \right) + \sum_{\substack{1 \leq \bar{g} < 2 \\ 2 \leq \bar{h} \leq 4}} \frac{OD(\bar{g}, \bar{h})}{2} \right) \\ &= t \sum_{2 \leq h \leq 4} OD(1, h) \left(\sum_{\substack{1 \leq \bar{g} < 2 \\ 2 \leq \bar{h} \leq 4}} \frac{OD(\bar{g}, \bar{h})}{2} \right) \\ &= t \quad OD(1, 2) \left(\frac{OD(1, 2) + OD(1, 3) + OD(1, 4)}{2} \right) \\ &\quad + t \quad OD(1, 3) \left(\frac{OD(1, 2) + OD(1, 3) + OD(1, 4)}{2} \right) \\ &\quad + t \quad OD(1, 4) \left(\frac{OD(1, 2) + OD(1, 3) + OD(1, 4)}{2} \right) \\ &= \frac{t}{2} (a\beta Y + a\alpha Y + a\gamma Y)^2 \\ &= \frac{tY^2a^2}{2} \end{aligned} \quad (.5)$$

Con lo cual se calcula,

$$\begin{aligned} f_{PA}^{M_2^*} &= \sqrt{\frac{2tc_1 \sum_{\substack{1 \leq g < 2 \\ 1 < h \leq 4}} OD(g, h) \max_{u \in [1]} F(u) + p_{tr}C + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < 2 \\ 1 < h \leq 4}} \frac{OD(g, h)}{2}}{2Tc_0}} \\ &= \sqrt{\frac{2tc_1(OD(1, 2) + OD(1, 3) + OD(1, 4))F(1) + \frac{Y^2ta^2p_{tr}}{2} + \frac{(OD(1, 2) + OD(1, 3) + OD(1, 4))p_w}{2}}{2Tc_0}} \\ &= \sqrt{\frac{2Y^2ta^2c_1 + \frac{Y^2ta^2p_{tr}}{2} + \frac{Yap_w}{2}}{2Tc_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{4Y^2ta^2c_1 + Y^2ta^2p_{tr} + Yap_w}{4Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{Ya(Yta(4c_1 + p_{tr}) + p_w)}{4Tc_0}} \tag{.6}
\end{aligned}$$

Para la otra línea,

$$\begin{aligned}
D_{M_2} &= t \sum_{\substack{2 < h \leq 4 \\ 1 \leq g < h}} OD(g, h) \left(\sum_{2 < j < h} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq 4} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \sum_{1 \leq \bar{g} < h} \frac{OD(\bar{g}, h)}{2} \right) \\
&= t \quad OD(1, 3) \left(\frac{OD(1, 3) + OD(2, 3)}{2} \right) \\
&\quad + t \quad OD(2, 3) \left(\frac{OD(1, 3) + OD(2, 3)}{2} \right) \\
&\quad + t \quad OD(1, 4) \left(OD(1, 3) + OD(2, 3) + \frac{OD(1, 4) + OD(2, 4)}{2} \right) \\
&\quad + t \quad OD(2, 4) \left(OD(1, 3) + OD(2, 3) + \frac{OD(1, 4) + OD(2, 4)}{2} \right) \\
&= t \quad a\alpha Y \left(\frac{a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y}{2} \right) + t \quad b\tilde{\alpha}Y \left(\frac{a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y}{2} \right) \\
&\quad + t \quad a\gamma Y \left(a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y + \frac{a\gamma Y + b\tilde{\gamma}Y}{2} \right) \\
&\quad + t \quad b\tilde{\gamma}Y \left(a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y + \frac{a\gamma Y + b\tilde{\gamma}Y}{2} \right) \\
&= \frac{Y^2t}{2} \left((a\alpha + b\tilde{\alpha})^2 + a\gamma(2a\alpha + 2b\tilde{\alpha} + a\gamma + b\tilde{\gamma}) + b\tilde{\gamma}(2a\alpha + 2b\tilde{\alpha} + a\gamma + b\tilde{\gamma}) \right) \\
&= \frac{Y^2t}{2} \left(a^2\alpha^2 + 2aba\tilde{\alpha} + b^2\tilde{\alpha}^2 + 2a^2\gamma\alpha + 2ba\gamma\tilde{\alpha} + a^2\gamma^2 + ba\gamma\tilde{\gamma} + 2ab\tilde{\gamma}\alpha + 2b^2\tilde{\gamma}\tilde{\alpha} \right. \\
&\quad \left. + ab\tilde{\gamma}\gamma + b^2\tilde{\gamma}^2 \right) \\
&= \frac{Y^2t}{2} \left(a^2(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \gamma^2) + b^2(\tilde{\alpha}^2 + 2\tilde{\gamma}\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}^2) + ab(2\alpha\tilde{\alpha} + 2\gamma\tilde{\alpha} + \gamma\tilde{\gamma} + 2\tilde{\gamma}\alpha + \tilde{\gamma}\gamma) \right) \\
&= \frac{Y^2t}{2} \left(a^2(\alpha + \gamma)^2 + b^2(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})^2 + ab(2\alpha\tilde{\alpha} + 2\gamma\tilde{\alpha} + 2\tilde{\gamma}\alpha + 2\tilde{\gamma}\gamma) \right) \\
&= \frac{Y^2t}{2} \left(a^2(1 - \beta)^2 + b^2 + ab(2\alpha + 2\gamma) \right) \\
&= \frac{Y^2t}{2} \left(a^2(1 - \beta)^2 + b^2 + 2ab(1 - \beta) \right) \\
&= \frac{Y^2t}{2} (a(1 - \beta) + b)^2 \\
&= \frac{Y^2t}{2} (1 - a\beta)^2 \tag{.7}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\sum_{\substack{1 \leq g < 4 \\ 2 < h \leq 4}} OD(g, h) = OD(1, 3) + OD(1, 4) + OD(2, 3) + OD(2, 4) = Y(a(\alpha + \gamma) + b)$ y que $\max_{u \in [3] \setminus [1]} F(u) = \max\{F(2), F(3)\} = F(2) = Y(a(\alpha + \gamma) + b)$, gracias a que $F(2) > F(3)$. Es posible calcular,

$$\begin{aligned}
f_{ACB}^{M_2^*} &= \sqrt{\frac{2tc_1 \sum_{\substack{1 \leq g < 4 \\ 2 < h \leq 4}} OD(g, h) \max_{u \in [3] \setminus [1]} F(u) + p_{tr}D + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < 4 \\ 2 < h \leq 4}} \frac{OD(g, h)}{2}}{6Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{2tc_1 Y(a(\alpha + \gamma) + b)F(2) + p_{tr} \frac{Y^2 t(1-a\beta)^2}{2} + p_w \frac{Y(a(\alpha + \gamma) + b)}{2}}{6Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{4tc_1 Y^2(a(\alpha + \gamma) + b)^2 + p_{tr} Y^2 t(1 - a\beta)^2 + p_w Y(a(\alpha + \gamma) + b)}{12Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{4tc_1 Y^2(a(1 - \beta) + b)^2 + p_{tr} Y^2 t(1 - a\beta)^2 + p_w Y(a(1 - \beta) + b)}{12Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{4tc_1 Y^2(1 - a\beta)^2 + p_{tr} Y^2 t(1 - a\beta)^2 + p_w Y(1 - a\beta)}{12Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{Y(1 - a\beta)(4tc_1 Y(1 - a\beta) + p_{tr} Y t(1 - a\beta) + p_w)}{12Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{Y(1 - a\beta)(p_w + tY(1 - a\beta)(4c_1 + p_{tr}))}{12Tc_0}}
\end{aligned} \tag{.8}$$

Luego, para M_3 basta con usar las fórmulas 3.50, 3.51, 3.52 y 3.53 con $k = 4$ e $i = 3$.

$$\begin{aligned}
C_{M_3} &= t \sum_{\substack{1 \leq g < 3 \\ g < h < 3}} OD(g, h) \left(\sum_{g < j < h} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq 4} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \sum_{1 \leq \bar{g} < h} \frac{OD(\bar{g}, h)}{2} \right) \\
&\quad + t \sum_{\substack{1 \leq g < 3 \\ 3 < h \leq 4}} OD(g, h) \left(\sum_{g < j < 3} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq 4} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \sum_{\substack{1 \leq \bar{g} < 3 \\ 3 \leq \bar{h} \leq 4}} \frac{OD(\bar{g}, \bar{h})}{2} \right) \\
&= t \quad OD(1, 2) \left(\frac{OD(1, 2)}{2} \right) \\
&\quad + t \quad OD(1, 3) \left(OD(2, 3) + OD(2, 4) + OD(1, 2) \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{OD(1, 3) + OD(2, 3) + OD(1, 4) + OD(2, 4)}{2} \right) \\
&\quad + t \quad OD(2, 3) \left(\frac{OD(1, 3) + OD(2, 3) + OD(1, 4) + OD(2, 4)}{2} \right) \\
&\quad + t \quad OD(1, 4) \left(OD(2, 3) + OD(2, 4) + OD(1, 2) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{OD(1,3) + OD(2,3) + OD(1,4) + OD(2,4)}{2} \\
& + t \quad OD(2,4) \left(\frac{OD(1,3) + OD(2,3) + OD(1,4) + OD(2,4)}{2} \right) \\
= t & \quad a\beta Y \left(\frac{a\beta Y}{2} \right) \\
& + t \quad a\alpha Y \left(b\tilde{\alpha}Y + b\tilde{\gamma}Y + a\beta Y + \frac{a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y + a\gamma Y + b\tilde{\gamma}Y}{2} \right) \\
& + t \quad b\tilde{\alpha}Y \left(\frac{a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y + a\gamma Y + b\tilde{\gamma}Y}{2} \right) \\
& + t \quad a\gamma Y \left(b\tilde{\alpha}Y + b\tilde{\gamma}Y + a\beta Y + \frac{a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y + a\gamma Y + b\tilde{\gamma}Y}{2} \right) \\
& + t \quad b\tilde{\gamma}Y \left(\frac{a\alpha Y + b\tilde{\alpha}Y + a\gamma Y + b\tilde{\gamma}Y}{2} \right) \\
= tY^2 & \left(\frac{a^2\beta^2}{2} + a\alpha \left(b(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}) + a\beta + \frac{a\alpha + a\gamma + b(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})}{2} \right) + b\tilde{\alpha} \left(\frac{a\alpha + a\gamma + b(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})}{2} \right) \right. \\
& \left. + a\gamma \left(b(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}) + a\beta + \frac{a\alpha + a\gamma + b(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})}{2} \right) + b\tilde{\gamma} \left(\frac{a\alpha + a\gamma + b(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma})}{2} \right) \right) \\
= tY^2 & \left(\frac{a^2\beta^2}{2} + a\alpha \left(b + a\beta + \frac{a\alpha + a\gamma + b}{2} \right) + b\tilde{\alpha} \left(\frac{a\alpha + a\gamma + b}{2} \right) \right. \\
& \left. + a\gamma \left(b + a\beta + \frac{a\alpha + a\gamma + b}{2} \right) + b\tilde{\gamma} \left(\frac{a\alpha + a\gamma + b}{2} \right) \right) \\
= tY^2 & \left(\frac{a^2\beta^2}{2} + ba\alpha + a^2\alpha\beta + \frac{a^2\alpha^2 + a^2\alpha\gamma + ab\alpha}{2} + \frac{ab\tilde{\alpha}\alpha + ab\tilde{\alpha}\gamma + b^2\tilde{\alpha}}{2} \right. \\
& \left. + ba\gamma + a^2\gamma\beta + \frac{a^2\gamma\alpha + a^2\gamma^2 + ab\gamma}{2} + \frac{ab\tilde{\gamma}\alpha + ab\tilde{\gamma}\gamma + b^2\tilde{\gamma}}{2} \right) \\
= tY^2 & \left(a^2 \left(\frac{\beta^2}{2} + \alpha\beta + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha\gamma}{2} + \gamma\beta + \frac{\gamma\alpha}{2} + \frac{\gamma^2}{2} \right) + b^2 \left(\frac{\tilde{\alpha}}{2} + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \right) \right. \\
& \left. + ab \left(\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\tilde{\alpha}\alpha}{2} + \frac{\tilde{\alpha}\gamma}{2} + \gamma + \frac{\gamma}{2} + \frac{\tilde{\gamma}\alpha}{2} + \frac{\tilde{\gamma}\gamma}{2} \right) \right) \\
= tY^2 & \left(\frac{a^2}{2} (\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2 + \alpha\gamma + 2\gamma\beta + \gamma\alpha + \gamma^2) + \frac{b^2}{2} (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}) \right. \\
& \left. + \frac{ab}{2} (2\alpha + \alpha + \tilde{\alpha}\alpha + \tilde{\alpha}\gamma + 2\gamma + \gamma + \tilde{\gamma}\alpha + \tilde{\gamma}\gamma) \right) \\
= tY^2 & \left(\frac{a^2}{2} (\alpha + \beta + \gamma)^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2} (3\alpha + \alpha(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}) + \gamma(\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}) + 3\gamma) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= tY^2 \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 2ab(\alpha + \gamma) \right) \\
&= tY^2 \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 2ab(1 - \beta) \right) \\
&= \frac{tY^2}{2} (1 + 2ab(1 - 2\beta))
\end{aligned} \tag{.9}$$

Usando el flujo .4 -que es el mismo para todas las estructuras de línea presentadas en la ciudad lineal paramétrica-, se obtiene la frecuencia de la línea PAC.

$$\begin{aligned}
f_{PAC}^{M_3^*} &= \sqrt{\frac{2tc_1 \sum_{\substack{1 \leq g < 3 \\ 1 < h \leq k}} OD(g, h) \max_{u \in [2]} F(u) + p_{tr} C_{M_2} + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < 3 \\ 1 < h \leq 4}} \frac{OD(g, h)}{2}}{4Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{2tc_1 Y \max(a, (\alpha + \gamma)a + b) + p_{tr} \frac{tY^2}{2} (1 + 2ab(1 - 2\beta)) + p_w \frac{Y}{2}}{4Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{4tc_1 Y \max(a, (\alpha + \gamma)a + b) + p_{tr} tY^2 (1 + 2ab(1 - 2\beta)) + p_w Y}{8Tc_0}}
\end{aligned} \tag{.10}$$

Siguen los cálculos para la frecuencia de la línea CB.

$$\begin{aligned}
D_{M_3} &= t \sum_{\substack{3 < h \leq 4 \\ 1 \leq g < h}} OD(g, h) \left(\sum_{i < j < h} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq 4} OD(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} OD(\bar{g}, j) \right) + \sum_{1 \leq \bar{g} < h} \frac{OD(\bar{g}, h)}{2} \right) \\
&= t \quad OD(1, 4) \left(\frac{OD(1, 4) + OD(2, 4)}{2} \right) + t \quad OD(2, 4) \left(\frac{OD(1, 4) + OD(2, 4)}{2} \right) \\
&= t \quad \frac{(OD(1, 4) + OD(2, 4))^2}{2} \\
&= t \quad \frac{(a\gamma Y + b\tilde{\gamma} Y)^2}{2} \\
&= tY^2 \quad \frac{(a\gamma + b\tilde{\gamma})^2}{2} \\
&= \frac{tY^2}{2} \quad \left(a\gamma + \frac{b\gamma}{1 - \beta} \right)^2 \\
&= \frac{tY^2 \gamma^2}{2} \quad \left(\frac{1 - a\beta}{1 - \beta} \right)^2
\end{aligned} \tag{.11}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
f_{CB}^{M_3^*} &= \sqrt{\frac{2tc_1 \sum_{\substack{1 \leq g < 4 \\ 3 < h \leq 4}} OD(g, h) \max_{u \in [3] \setminus [2]} F(u) + p_{tr} D_{M_2} + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < 4 \\ 3 < h \leq 4}} \frac{OD(g, h)}{2}}{2Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{2tc_1 (OD(1, 4) + OD(2, 4) + OD(3, 4)) F(3) + p_{tr} D_{M_2} + p_w \frac{OD(1, 4) + OD(2, 4) + OD(3, 4)}{2}}{2Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{2Y^2 tc_1 (a\gamma + b\tilde{\gamma})^2 + p_{tr} D_{M_2} + Y p_w \frac{a\gamma + b\tilde{\gamma}}{2}}{2Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{2Y^2 tc_1 \gamma^2 \left(\frac{1-a\beta}{1-\beta}\right)^2 + p_{tr} \frac{tY^2 \gamma^2}{2} \left(\frac{1-a\beta}{1-\beta}\right)^2 + \frac{Y p_w \gamma}{2} \left(\frac{1-a\beta}{1-\beta}\right)}{2Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{4Y^2 tc_1 \gamma^2 (1-a\beta)^2 + p_{tr} tY^2 \gamma^2 (1-a\beta)^2 + Y p_w \gamma (1-a\beta)(1-\beta)}{4Tc_0(1-\beta)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{Y(1-a\beta) (4Ytc_1 \gamma^2 (1-a\beta) + p_{tr} tY \gamma^2 (1-a\beta) + p_w \gamma (1-\beta))}{4Tc_0(1-\beta)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{Y\gamma(1-a\beta) (Yt\gamma(1-a\beta)(4c_1 + p_{tr}) + p_w(1-\beta))}{4Tc_0(1-\beta)^2}} \tag{.12}
\end{aligned}$$

Para la estructura de línea M_{23} , es primordial notar que al no haber líneas paralelas, el flujo de pasajeros por tramo es el mismo que en M_0 , M_3 y M_2 . En particular la línea PA de M_{23} tendrá exactamente la misma cantidad de pasajeros que PA de M_2 , a la vez que CB de M_{23} con CB de M_3 . Dado que la frecuencia óptima de una estructura fija solamente depende de la demanda, lo anterior implica que las líneas PA y CB en M_{23} tiene la misma frecuencia óptima que sus análogos en M_2 y M_3 . Por lo que de .12 y .6 se obtiene que:

$$f_{CB}^{M_{23}^*} = \sqrt{\frac{Y\gamma(1-a\beta) (Yt\gamma(1-a\beta)(4c_1 + p_{tr}) + p_w(1-\beta))}{4Tc_0(1-\beta)^2}} \tag{.13}$$

$$f_{PA}^{M_{23}^*} = \sqrt{\frac{Ya(Yta(4c_1 + p_{tr}) + p_w)}{4Tc_0}} \tag{.14}$$

Luego, para obtener la frecuencia óptima de AC, usamos que es la división de PAC. Esto requiere adaptar las fórmulas 3.51 y 3.53 al caso en que el nodo k no es terminal, pero sí un punto fijo de división de líneas. Notemos que esto último, implica que todos los pasajeros con destinos posteriores a k obligatoriamente descenderán en k , y nuevamente gracias a que no hay líneas paralelas, en realidad, basta con aumentar la demanda hacia k para considerar a este grupo de pasajeros y se pueden mantener las fórmulas originales.

Por lo tanto, se definen la siguiente función de demanda auxiliar:

$$\begin{aligned}
\tilde{OD}(1, 3) &= OD(1, 3) + OD(1, 4) = a(\alpha + \gamma) \\
\tilde{OD}(2, 3) &= OD(2, 3) + OD(2, 4) = b \\
\tilde{OD}(1, 2) &= OD(1, 2)
\end{aligned} \tag{.15}$$

Entonces se calcula,

$$\begin{aligned}
D_{M_{23}} &= t \sum_{\substack{2 < h \leq 3 \\ 1 \leq g < h}} \tilde{O}D(g, h) \left(\sum_{2 < j < h} \left(\sum_{j < \bar{h} \leq 3} \tilde{O}D(j, \bar{h}) + \sum_{1 \leq \bar{g} < j} \tilde{O}D(\bar{g}, j) \right) + \sum_{1 \leq \bar{g} < h} \frac{OD(\bar{g}, h)}{2} \right) \\
&= t \tilde{O}D(1, 3) \left(\frac{\tilde{O}D(1, 3) + \tilde{O}D(2, 3)}{2} \right) + t \tilde{O}D(2, 3) \left(\frac{\tilde{O}D(1, 3) + \tilde{O}D(2, 3)}{2} \right) \\
&= t \left(\frac{(\tilde{O}D(1, 3) + \tilde{O}D(2, 3))^2}{2} \right) \\
&= t \left(\frac{(a(\alpha + \gamma)Y + bY)^2}{2} \right) \\
&= \frac{Y^2(a(\alpha + \gamma) + b)^2 t}{2}
\end{aligned} \tag{.16}$$

$$\begin{aligned}
f_{AC}^{M_{23}^*} &= \sqrt{\frac{2tc_1 \sum_{\substack{1 \leq g < 3 \\ 2 < h \leq 3}} \tilde{O}D(g, h) \max_{n \in [2] \setminus [1]} F(u) + p_{tr} D + p_w \sum_{\substack{1 \leq g < 3 \\ 2 < h \leq 3}} \frac{\tilde{O}D(g, h)}{2}}{2Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{2Y^2tc_1(a(\alpha + \gamma) + b)F(2) + p_{tr} \frac{Y^2(a(\alpha + \gamma) + b)^2 t}{2} + Yp_w \frac{a(\alpha + \gamma) + b}{2}}{2Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{2Y^2tc_1(a(\alpha + \gamma) + b)^2 + p_{tr} \frac{Y^2(a(\alpha + \gamma) + b)^2 t}{2} + Yp_w \frac{a(\alpha + \gamma) + b}{2}}{2Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{4Y^2tc_1(a(\alpha + \gamma) + b)^2 + p_{tr} Y^2(a(\alpha + \gamma) + b)^2 t + Yp_w(a(\alpha + \gamma) + b)}{4Tc_0}} \\
&= \sqrt{\frac{Y(a(\alpha + \gamma) + b)(Yt(a(\alpha + \gamma) + b)(4c_1 + p_{tr}) + p_w)}{4Tc_0}}
\end{aligned} \tag{.17}$$