



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

**INCORPORACIÓN DE CONTROL GEOLÓGICO EN LA ESTIMACIÓN DE LEYES DE
COBRE Y ORO EN UN YACIMIENTO PORFÍDICO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

CARLOS ELÍAS LARA ALVARADO

**PROFESOR GUÍA:
XAVIER EMERY**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN
ALEJANDRO CÁCERES SAAVEDRA
FABIÁN SOTO FERNÁNDEZ**

Este trabajo ha sido financiado por ANID Fondecyt 1210050.

**SANTIAGO DE CHILE
2023**

Resumen

Un modelo geológico que logre interpretar de una manera robusta la naturaleza y calidad de un yacimiento e identificar los distintos dominios o unidades geológicas presentes en este, es un elemento fundamental para obtener un modelo de recursos idóneo para una buena planificación de mina, y en etapa de explotación, para una correcta extracción de las reservas minerales.

El trabajo de título plantea la siguiente problemática: ¿cómo mejorar la estimación de las leyes incorporando información geológica? Se sabe que, al haber cambios de dominios geológicos, se suele haber cambios graduales en la distribución de las leyes de elementos de interés.

Se plantean tres métodos para comparar si mejora o no la estimación de las leyes al incorporar un control geológico. El primer método utiliza la práctica común de la estimación de las leyes de un yacimiento con diferentes dominios geológicos, donde cada dominio es estimado de forma separada; el segundo método agrega una covariable en donde se toma en cuenta la no estacionaridad en términos de la correlación espacial mediante el uso de una covarianza cruzada entre dominios, y el tercer método toma en cuenta no solamente la no estacionaridad en términos de la correlación espacial, sino que también el hecho de que la ley media (localmente) es la misma en ambos lados de la frontera entre dominios. Los tres métodos se ponen a prueba en un caso de estudio de un yacimiento de tipo pórfido cuprífero-aurífero explotado a cielo abierto, en el cual se dispone de una base de datos de pozos de tronadura.

Si bien el tercer método no logró mejorar significativamente la precisión de la estimación de las leyes en comparación al primer método, obteniendo recursos totales y recuperables similares, se observan algunas diferencias en los modelos de bloques en la cercanía de la frontera entre dominios geológicos, logrando una mejor reproducción del carácter suave de dicha frontera. El segundo método quedó descartado en la etapa de validación cruzada porque se estimó un porcentaje muy inferior al total de los datos, sobre todo en el primer dominio.

Se deja propuesto establecer otro modelo de covarianza ajustada para probar nuevamente el tercer método; puesto que, con los modelos de covarianza tradicionales no se logra ajustar de una manera adecuada la covarianza cruzada en la dirección principal del caso de estudio.

Abstract

A geological model that manages to interpret in a robust way the nature and quality of an ore deposit and identify the different domains or geological units present in this, It is a fundamental element to obtain an ideal resources model for good mine planning, and in the exploitation stage, for a correct extraction of mineral reserves.

The title work raises the following problem: how to improve the estimation of the grades by incorporating geological information? It is known that, when there are changes of geological domains, there are usually gradual changes in the distribution of the grades of elements of interest.

Three methods are proposed to compare whether or not the estimation of the grades improves by incorporating a geological control. The first method uses the common practice of estimating the grades of an ore deposit with different geological domains, where each domain is estimated separately. The second method adds a covariate where non-stationarity is taken into account in terms of spatial correlation by using a cross-covariance between domains, and the third method takes into account not only non-stationarity in terms of spatial correlation, but also the fact that the mean grade (locally) is the same on both sides of the boundary between domains. All three methods are tested in a case study of an open-pit porphyry copper-gold ore deposit, where a blasting well database is available.

Although the third method failed to significantly improve the accuracy of the estimation of the grades compared to the first method, obtaining similar total and recoverable resources, some differences are observed in the block models in the proximity of the boundary between geological domains, achieving a better reproduction of the soft character of said boundary. The second method was discarded at the cross-validation stage because a lower percentage of the total data was estimated, especially in the first domain.

It is proposed to establish another model of fitted covariance to test again the third method; since, with traditional covariance models it is not possible to adjust in an adequate way the cross covariance in the main direction of the case study.

Agradecimientos

Primero que todo quisiera agradecer a mi familia, por todo su apoyo a lo largo de mis años de estudiante, han sido un gran soporte para que logre finalizar esta etapa de mi vida, y, comenzar otra, en la cual pueda emplear todos los conocimientos que he recibido de todos mis formadores, desde kínder a nivel universitario, con toda la responsabilidad ética y moral con la cual he sido formado.

Agradecer a todos mis compañeros de la universidad, con algunos tuve más cercanía, por todos los momentos vividos: en las aulas, partidos de fútbol, fondas mineras. Recordaría el bautizo minero; pero, no me acuerdo.

Quisiera agradecer a las comunidades religiosas en las que he participado: parroquia San Juan Pablo II, parroquia San Diego de Alcalá. En especial quisiera agradecer a los hermanos peruanos del señor de los milagros por su calidez y cercanía.

También quisiera agradecer al profesor Xavier Emery, por todo su apoyo a lo largo de estos n años, él es un profesional que no solamente destaca por su trabajo, sino también, por su calidad humana y simpatía.

Finalmente quisiera agradecer a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo, a través del proyecto ANID Fondecyt 1210050.

Tabla de contenido

1. Introducción.....	1
1.1. Motivación.....	1
1.2. Problema planteado	1
1.3. Hipótesis	1
1.4. Objetivos y alcance	2
1.4.1. Objetivo general	2
1.4.2. Objetivos específicos	2
1.4.3. Alcance.....	2
2. Antecedentes.....	3
2.1. Evaluación de recursos y reservas minerales	3
2.2. Modelamiento geológico	4
2.2.1. Definición, identificación y modelamiento.....	4
2.2.2. Naturaleza de las fronteras entre unidades geológicas.....	6
2.3. Modelamiento de leyes y otras variables cuantitativas.....	7
2.3.1. Análisis estructural	7
2.3.2. Kriging.....	12
2.3.3. Cokriging	14
2.3.4. Kriging de bloques.....	15
2.3.5. Plan de kriging	15
2.3.6. Validación cruzada.....	16
2.4. Anisotropía.....	17
2.5. Práctica del modelamiento.....	18
3. Metodología.....	20
3.1. Método 1	20
3.2. Método 2.....	21
3.3. Método 3.....	26
4. Caso de estudio: Datos de pozos de tronadura de un banco (2D) de un yacimiento pórfido cuprífero-aurífero explotado a cielo abierto.	29
4.1. Presentación de la geología del yacimiento.	29
4.1.1. Geología local	29
4.1.2. Alteración hidrotermal	29
4.1.3. Mineralización.....	31

4.2. Análisis exploratorio de los datos.....	32
4.3. Análisis de contacto.....	35
4.4. Modelamiento geoestadístico.....	37
4.4.1. Determinación de direcciones de anisotropía.....	37
4.4.2. Modelamiento variográfico.....	38
4.4.3. Validación cruzada.....	40
4.5. Modelo de bloques.....	41
4.5.1. Recursos in situ.....	42
4.5.2. Recursos recuperables.....	43
4.6. Análisis de resultados.....	44
5. Conclusiones.....	48
6. Bibliografía.....	49
Anexo.....	50

Índice de figuras

Figura 1: Diagrama modificado del código JORC. [1].....	4
Figura 2: Ejemplo de construcción de un modelo geológico. [6].....	6
Figura 3: Características de un variograma.[14].....	8
Figura 4: Ejemplo de anisotropía geométrica.[15].....	17
Figura 5: Diagrama método 1.....	21
Figura 6: Diagrama método 2.....	26
Figura 7: Diagrama método 3.....	28
Figura 8: Histogramas de las leyes de oro [g/t] y cobre [%] respectivamente.....	33
Figura 9: Diagramas de caja para leyes de oro [g/t] y leyes de cobre [%] respectivamente.	33
Figura 10: Disposición espacial de las leyes de oro [g/t].	34
Figura 11: Disposición espacial de las leyes de cobre [%].....	34
Figura 12: Diagramas de correlación diferida omnidireccional a menos de 40 [m], para leyes de oro [g/t] y cobre [%] en dos dominios diferentes 1 y 2. Los puntos rojos son los centros de gravedad de los diagramas. La línea de identidad está representada en negro, y el coeficiente de correlación ρ está indicado para cada elemento en dos dominios diferentes 1 y 2.	35
Figura 13: Promedio de las leyes de oro [g/t] y cobre [%] como función del signo de la distancia a la frontera del dominio.....	36
Figura 14: Mapas variográficos de leyes de oro y cobre en el dominio 1.....	37
Figura 15: Mapas variográficos de leyes de oro y cobre en el dominio 2.....	37
Figura 16: Covarianzas experimentales y ajustadas para las leyes de oro.	38
Figura 17: Covarianzas experimentales y ajustadas para las leyes de cobre.	39
Figura 18: Modelo de bloques con leyes de oro [g/t] en una grilla de 2 [m] x 2 [m], usando el método 1.	42
Figura 19: Modelo de bloques con leyes de cobre [%] en una grilla de 2 [m] x 2 [m], usando el método 1.	42

Figura 20: Modelo de bloques con leyes de oro [g/t] en una grilla de 10 [m] x 10 [m], usando el método 1.	43
Figura 21: Modelo de bloques con leyes de cobre [%] en una grilla de 10 [m] x 10 [m], usando el método 1.	43
Figura 22: Diagramas de correlación entre leyes de oro [g/t] estimadas y verdaderas en el dominio 2, método 1 y 3 respectivamente.	45
Figura 23: Diagramas de correlación entre leyes de cobre [%] estimadas y verdaderas en el dominio 2, método 1 y 3 respectivamente.	45
Figura 24: Visualización del banco con leyes de oro [g/t], método 1 y 3 respectivamente, usando una grilla de 2 [m] x 2 [m].	46
Figura 25: Visualización del banco con leyes de cobre [%], método 1 y 3 respectivamente, usando una grilla de 2 [m] x 2 [m].	47

Índice de tablas

Tabla 1: Datos duplicados.	32
Tabla 2: Codificación de dominios.	32
Tabla 3: Estadísticas básicas de leyes de oro [g/t] y cobre [%] respectivamente.	33
Tabla 4: Parámetros del modelo de covarianzas esféricas ajustadas para las leyes de oro.	39
Tabla 5: Parámetros del modelo de covarianzas exponenciales ajustadas para las leyes de cobre.	39
Tabla 6: Validación cruzada para las leyes de oro [g/t] en los dominios 1 y 2.	40
Tabla 7: Validación cruzada para las leyes de cobre [%] en los dominios 1 y 2.	41
Tabla 8: Recursos in situ del banco para el oro.	42
Tabla 9: Recursos in situ del banco para el cobre.	43
Tabla 10: Recursos recuperables del banco para el oro.	44
Tabla 11: Recursos recuperables del banco para el cobre.	44

Índice de ecuaciones

Ecuación 1: Función de distribución n-variada.	7
Ecuación 2: Función aleatoria estacionaria.	7
Ecuación 3: Variograma.	8
Ecuación 4: Relación variograma y covarianza para una función aleatoria estacionaria.	9
Ecuación 5: Media y función covarianza.	9
Ecuación 6: Restricción de la función covarianza.	9
Ecuación 7: Función covarianza semidefinida positiva.	9
Ecuación 8: Función covarianza efecto pepita.	9
Ecuación 9: Función covarianza exponencial.	10
Ecuación 10: Función covarianza esférica.	10
Ecuación 11: Función covarianza cruzada.	10
Ecuación 12: Función covarianza cruzada semidefinida positiva.	11
Ecuación 13: Restricción de la función covarianza cruzada.	11
Ecuación 14: Función variograma cruzado.	11
Ecuación 15: Restricción de la función variograma cruzado.	11
Ecuación 16: Estimación de kriging ordinario, donde u es la ubicación a estimar y u_1, \dots, u_n son las ubicaciones de datos vecinos.	12

Ecuación 17: Varianza de kriging ordinario.	13
Ecuación 18: Formalismo para determinar los ponderadores óptimos.	13
Ecuación 19: Sistema de kriging ordinario.....	13
Ecuación 20: Varianza del error del kriging ordinario.	13
Ecuación 21: Estimación por cokriging ordinario.	14
Ecuación 22: Estimación del promedio de un bloque.	15
Ecuación 23: Promedio del error, validación cruzada.	16
Ecuación 24: Promedio del valor absoluto del error, validación cruzada.	16
Ecuación 25: Promedio de la varianza de kriging, validación cruzada.	16
Ecuación 26: Promedio del cuadrado del error de la estimación, validación cruzada.	16
Ecuación 27: Estimación de leyes.....	21
Ecuación 28: Esperanza del error de la estimación.....	22
Ecuación 29: Esperanza de error de la estimación con dos dominios.....	22
Ecuación 30: Esperanza del error de la estimación con dos dominios.....	22
Ecuación 31: Esperanza del error de estimación con dos dominios, con $Z(u) \in D1$	22
Ecuación 32: Esperanza del error de la estimación con dos dominios ordenada.....	22
Ecuación 33: Condición de insesgo.	22
Ecuación 34: Condiciones de insesgo.	23
Ecuación 35: Varianza del error.	23
Ecuación 36: Varianza del error con la integración de ponderadores de Lagrange.	23
Ecuación 37: Derivadas parciales de la varianza del error con respecto a los ponderadores y con respecto a los multiplicadores de Lagrange.	24
Ecuación 38: Sistema de cokriging ordinario tradicional para dos dominios.....	24
Ecuación 39: Varianza de cokriging ordinario tradicional para dos dominios.	25
Ecuación 40: Sistema de cokriging ordinario estandarizado para dos dominios.	27
Ecuación 41: Varianza de cokriging ordinario estandarizado para dos dominios.....	27

Índice de matrices

Matriz 1: Sistema de cokriging ordinario tradicional para dos dominios.....	25
Matriz 2: Sistema de cokriging ordinario estandarizado para dos dominios.	27

1. Introducción

1.1. Motivación

La evaluación de recursos y reservas minerales a partir de información de muestreo requiere de un trabajo entre distintos especialistas enfocados en determinar, primero que todo, el área donde se realiza la exploración, a través de técnicas geofísicas y geometalúrgicas; posteriormente se hace la exploración a través de sondajes de perforación para obtener una base de datos con variables cuantitativas, por ejemplo: leyes de elementos de interés, ya sean productos, subproductos o contaminantes, densidad de la roca, variables geotécnicas, variables geometalúrgicas como work index o recuperación, y variables categóricas (datos geológicos). De esta manera se puede llegar a un modelo geológico que logre interpretar de una manera robusta la naturaleza y calidad del yacimiento.

Es imperativo tener un modelo geológico representativo, en donde se pueda determinar los distintos dominios o unidades geológicas presentes en este; de esta manera se puede obtener un modelo de bloques a través de técnicas de interpolación de las leyes y otras variables cuantitativas, que pueda llevar a cabo una buena planificación de la mina. Las mismas problemáticas se plantean en la etapa de explotación, en donde interesa estimar lo más certeramente posible las reservas minerales, en particular, para determinar los destinos óptimos del material que se está extrayendo.

1.2. Problema planteado

El trabajo de título aborda la siguiente pregunta: ¿cómo mejorar la estimación de las leyes incorporando información geológica?

1.3. Hipótesis

En la mayoría de los yacimientos se tienen buenos modelos geológicos, por lo tanto, existe un control geológico de las variables cuantitativas como las leyes de elementos de interés. Estas variables cuantitativas pueden variar en cuanto a su distribución como en su comportamiento espacial en los distintos dominios geológicos que pueda presentar el yacimiento. Por consiguiente, la estimación de dichas variables puede verse beneficiada (en términos de precisión o exactitud) al incorporar la información de covariables referentes a dominios geológicos.

1.4. Objetivos y alcance

1.4.1. Objetivo general

Comparar el desempeño de técnicas de kriging y cokriging para estimar leyes incorporando un control geológico.

1.4.2. Objetivos específicos

1. Realizar un análisis de contacto para diagnosticar la naturaleza de la frontera entre dominios geológicos.
2. Modelar la distribución de leyes en relación a una variable categórica, en términos de media y de estructura espacial.
3. Aplicar técnicas de estimación de geoestadística multivariable.

1.4.3. Alcance

El trabajo se aplicará a una base de datos de producción de un yacimiento de tipo pórfido cuprífero-aurífero explotado a cielo abierto.

2. Antecedentes

2.1. Evaluación de recursos y reservas minerales

El proceso de estimación de recursos y reservas minerales puede tomar lugar una vez que el evaluador está convencido de la solidez de los fundamentos subyacentes del proceso de estimación. Tanto la base de datos, la densidad y otras cualidades de los datos, además de la interpretación geológica, deben tener integridad y robustez. Los datos geológicos deben ser lo suficientemente completos para la definición del modelo geológico. El modelo geológico debe tener por sí mismo una consistencia interna, debería explicar los dominios litológicos y mineralógicos que son observados, y debería representar de la mejor manera el conocimiento de la génesis del depósito mineral según el evaluador; el modelo geológico debería soportar la distribución de la mineralización vista en la muestra.

El proceso de estimación de recursos y reservas envuelve las restricciones de mineralizaciones o dominios geológicos, los análisis estadísticos y/o geoestadísticos de una muestra de datos, y la aplicación de una adecuada técnica de interpolación de las leyes. [8]

El escenario final del proceso de estimación de recursos y reservas minerales es su clasificación de acuerdo al código JORC [8][1], u otro código según la legislación del país.

Algunas técnicas conocidas de estimación de recursos y reservas son: el más cercano vecino y el inverso de la distancia. También se tienen las técnicas geoestadísticas, las cuales están basadas en la teoría de las variables regionalizadas, introducidas por el matemático francés Georges Matheron, y buscan utilizar la relación espacial de los datos, cuantificados por el variograma, para determinar los ponderadores necesarios para estimar un punto o bloque desconocido. La técnica estándar de la geoestadística es el kriging ordinario.[8]

La figura 1, muestra un diagrama modificado del código JORC [1], en donde se tiene todo el proceso para la evaluación de recursos minerales y reservas minerales, se puede observar que un recurso mineral indicado solo puede pasar a una reserva probable y un recurso mineral medido puede ser una reserva probable o probada, lo anterior, es de acuerdo a reglas específicas del código JORC.

El desarrollo de un modelo geológico fuerza a los(as) geólogos(as) a pensar en la explicación de las rocas, minerales, alteraciones y otras relaciones descritas en el proceso de mapeo y registro.

Los problemas fundamentales asociados con la caracterización del recurso para la evaluación y estimación están en tomar una cantidad muy limitada de datos geológicos, analizar e interpretar correctamente los datos, extender estas interpretaciones a áreas desconocidas y luego hacer un resumen de la calidad, cantidad y límites sobre esta área.

Los típicos pasos en la construcción y la interpretación de un modelo geológico son los siguientes:

1. Comienza con el conocimiento fundamental y el entendimiento de varios tipos de depósitos y sus modelos.
2. Localizar la superficie exacta y precisa y las muestras de sondajes, además se debe compilar los datos geológicos apropiados.
3. Se debe graficar cuidadosamente las ubicaciones de los sondajes y las trazas de los datos de los sondajes sobre un conjunto de secciones cruzadas.
4. Identificar los límites interpretados, unidades geológicas, mineralización u otras características de las trazas de los sondajes.
5. Correlacionar los límites interpretados de las características geológicas de la base de datos de un sondaje a otro sondaje en una sección cruzada individual.
6. Graficar los datos, transferir información y correlacionar los límites interpretados de las características geológicas de la base de datos de un sondaje a otro sondaje sobre un segundo conjunto de secciones cruzadas en un ángulo correcto sobre el primero.
7. Construir un conjunto de mapas de planta a elevaciones deseadas, usando intersecciones de los sondajes sobre los mapas de planta y los límites interpretados de las unidades desarrolladas sobre conjuntos de secciones cruzadas.
8. Construir ilustraciones simples para discusión y comparación.

Los(as) geólogos(as) usualmente comienzan con la recolección de datos en los afloramientos de la superficie y los registros de los sondajes, estos deben ser de alta calidad y haber sido recopilados usando una metodología estandarizada de medidas de aseguramiento y control de calidad (QA/QC).

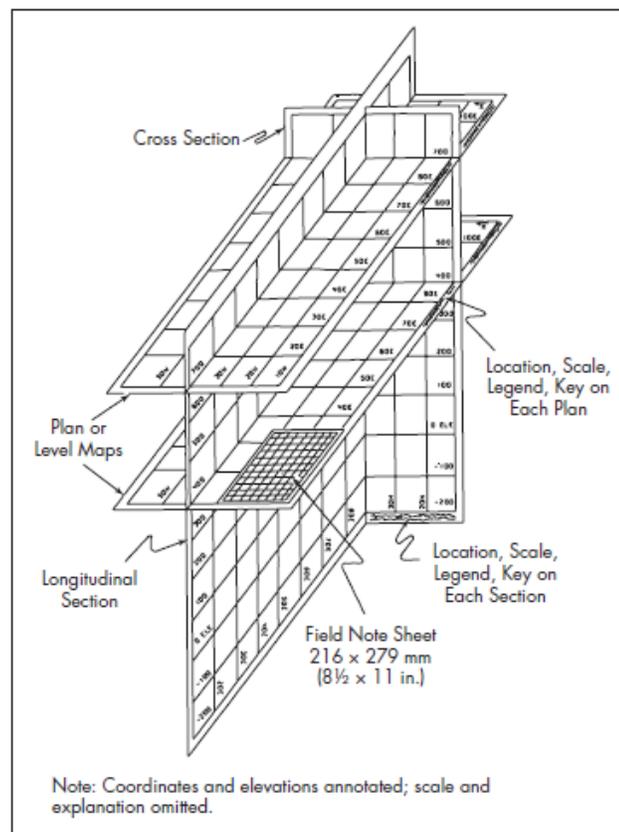
Los parámetros importantes son la litología, mineralogía, estructura, alteración (si presenta). Los parámetros particulares dependen de los recursos que están siendo evaluados. Al tener una gran cantidad de parámetros permite tener determinaciones de relaciones críticas que son usadas en una guía de interpretación y de proyección. Una interpretación riesgosa es una simple correlación de leyes en compósitos de sondaje a sondaje sin ninguna consideración de las características geológicas asociadas. Lo anterior lleva comúnmente a interpretaciones incorrectas, sesgos en la estimación de los recursos, y, por lo tanto, una evaluación inexacta.

La construcción de secciones transversales limpias permite determinar las relaciones de los muestreos (sondaje a sondaje) y la continuidad de numerosas características geológicas como la litología, mineralogía, leyes y estructuras, y, quizás, características que pueden influir en la mina como la designación de la calidad de la roca (RQD) o la distribución de variedades metalúrgicas

en los tipos de minerales (dureza, alteración, especies de mineral u otros) que requieren de diferentes procesos metalúrgicos.

La construcción de un segundo conjunto de secciones transversales permite determinar la relación de las muestras (sondaje a sondaje) en dos direcciones y, por lo tanto, la relación de sección a sección en tres dimensiones.

El paso final es usualmente el desarrollo de un tercer conjunto de ilustraciones, mapas de nivel desde el punto de perforación del sondaje en el plano del mapa de nivel y las proyecciones desde los dos conjuntos de secciones transversales. Esto permite tener un modelo geológico en 3D con secciones transversales, longitudinales y planos de nivel.[6]



Source: Adapted from Herness 1951.

Figura 2: Ejemplo de construcción de un modelo geológico. [6]

2.2.2. Naturaleza de las fronteras entre unidades geológicas.

Las fronteras geológicas se pueden clasificar en duras y suaves según sea la variación de una variable cuantitativa: una frontera se clasifica como dura si la variación es abrupta o repentina y una frontera suave es donde la variable cuantitativa evoluciona continuamente a lo largo de las dos unidades geológicas o dominios geológicos. [4]

Las fronteras que definen los contactos entre dominios geológicos adyacentes son raramente duras, particularmente para la mineralización de cobre en un pórfido diseminado, la ley media local entre dos dominios tiene un cambio gradual más que abrupto.[13]

Dos características son esenciales para determinar el comportamiento espacial de una variable cuantitativa cuando se cruza una frontera geológica. Una de ellas es la variación del promedio de las leyes como función de la distancia a la frontera y la otra es la existencia de correlaciones cruzadas a lo largo de la frontera.

Se tienen las siguientes herramientas para diagnosticar la naturaleza (dura o blanda) de una frontera geológica:

- Correlogramas cruzados: hace posible la medida de correlaciones espaciales entre las leyes medidas en dos dominios.
- Pseudo variogramas cruzados: puede medir la diferencia en el promedio de las leyes, así como sus correlaciones cuando se cruza la frontera entre dos dominios.
- Diagramas de correlación diferida: compara leyes tomadas en dos dominios diferentes separada por una distancia dada, permitiendo la identificación de variaciones, en el promedio de las leyes y las correlaciones cruzadas a través de la frontera.[4]

2.3. Modelamiento de leyes y otras variables cuantitativas.

2.3.1. Análisis estructural

- *Concepto de función aleatoria:* la incertidumbre sobre un valor no muestreado de una variable z , es modelada a través de una función aleatoria $Z(u)$ con u siendo el vector de la coordenada de la ubicación de interés. Así como una variable aleatoria es caracterizada por una función de distribución, una función aleatoria es caracterizada por el conjunto de funciones de distribuciones n-variadas para todo número n y toda elección de las n ubicaciones $u_i, i = 1, \dots, n$ dentro de un área de estudio. [3][14]

Ecuación 1: Función de distribución n-variada.

$$F(u_1, \dots, u_n; z_1, \dots, z_n) = Prob\{Z(u_1) \leq z_1, \dots, Z(u_n) \leq z_n\}$$

La función aleatoria se dice estacionaria, si sus funciones de distribuciones n-variadas son invariantes bajo una traslación de las n coordenadas de los vectores u_k , eso es:

Ecuación 2: Función aleatoria estacionaria.

$$F(u_1, \dots, u_n; z_1, \dots, z_n) = F(u_1 + h, \dots, u_n + h; z_1, \dots, z_n) \text{ para todo vector } h.$$

- *Variograma*: considerando una función aleatoria estacionaria Z con media conocida m y varianza σ^2 , la media y la varianza son independientes de la ubicación, esto es, $m(u)=m$ y $\sigma^2(u) = \sigma^2$ para todas las ubicaciones u en un área de estudio. El variograma es definido por:

Ecuación 3: Variograma.

$$2\gamma(h) = \text{Var}[Z(u) - Z(u + h)] = E\{[Z(u) - Z(u + h)]^2\}$$

En palabras el variograma es la diferencia cuadrática esperada entre los valores de dos datos separados por un vector de distancia h .

Las principales características de los variogramas son la meseta (sill), el alcance (range), el efecto pepita (nugget effect) y la anisotropía.

1. La meseta de un variograma es igual a la varianza de la función aleatoria.
2. El alcance es la distancia a la cual el variograma llega a su meseta, i.e., la correlación cero ha sido alcanzada.
3. El efecto pepita es el valor del variograma a una distancia solo más larga que el tamaño de la muestra, la cual caracteriza la variabilidad a pequeña escala.
4. La anisotropía se manifiesta cuando el variograma no es idéntico en todas las direcciones del espacio, lo que evidencia la existencia de direcciones preferenciales de continuidad.

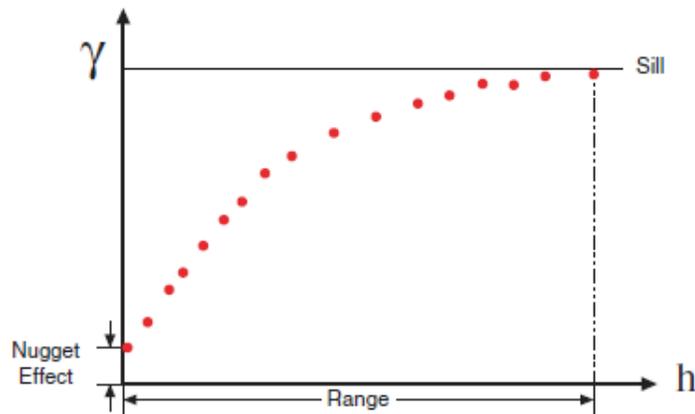


Figura 3: Características de un variograma.[14]

La correlación entre $Z(u)$ y $Z(u + h)$ es positiva cuando el valor del variograma es menor que la meseta y la correlación es negativa cuando el valor del variograma excede la meseta.[14]

- *Relación variograma y covarianza para una función aleatoria estacionaria* [14]:

Ecuación 4: Relación variograma y covarianza para una función aleatoria estacionaria.

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad \text{o} \quad C(h) = C(0) - \gamma(h)$$

- *Covarianza*: la función covarianza $C(h)$ es definida sobre la base de la estacionaridad de los primeros dos momentos de la función aleatoria.

Ecuación 5: Media y función covarianza.

$$\begin{cases} E[Z(u)] = m & \forall u \in D \\ E[Z(u) \cdot Z(u+h)] - m^2 = C(h) & \forall u, u+h \in D \end{cases}$$

La función covarianza está limitada y su valor no excede la varianza:

Ecuación 6: Restricción de la función covarianza.

$$|C(h)| \leq C(0) = \text{var}(Z(u))$$

La función covarianza es una función par, es decir: $C(-h) = C(+h)$.

La función covarianza es una función semidefinida positiva, esto significa que el uso de una función covarianza $C(h)$ para la computación de la varianza de una combinación lineal de $n+1$ variables aleatorias $Z(u_\alpha)$ (cualquier subconjunto muestreado desde una función aleatoria estacionaria de segundo orden) debe ser positiva o nula.[15]

Ecuación 7: Función covarianza semidefinida positiva.

$$\text{var} \left(\sum_{\alpha=0}^n \omega_\alpha Z(u_\alpha) \right) = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \omega_\alpha \omega_\beta C(u_\alpha - u_\beta) \geq 0$$

Ejemplos de funciones covarianzas:

1. Modelo de efecto pepita: la función covarianza que modela una discontinuidad en el origen es el modelo de efecto pepita:

Ecuación 8: Función covarianza efecto pepita.

$$C_{nug}(h) = \begin{cases} b & \text{para } |h| = 0 \\ 0 & \text{para } |h| > 0 \end{cases}$$

donde b es un valor positivo.

2. Función covarianza exponencial: el modelo cae exponencialmente con la distancia.

Ecuación 9: Función covarianza exponencial.

$$C_{exp}(h) = b \cdot \exp\left(\frac{-3 \cdot |h|}{a}\right) \quad \text{con } a, b > 0$$

El parámetro a (llamado alcance práctico) determina qué tan rápido cae la covarianza. El modelo exponencial es continuo, pero no diferenciable en el origen. Cae asintóticamente hacia cero para $|h| \rightarrow \infty$.

3. Función covarianza esférica:

Ecuación 10: Función covarianza esférica.

$$C_{sph}(h) = \begin{cases} b \left(1 - \frac{3}{2} \frac{|h|}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{|h|^3}{\alpha^3}\right) & \text{para } 0 \leq |h| \leq \alpha \\ 0 & \text{para } |h| > \alpha \end{cases}$$

El parámetro α indica el alcance de la covarianza esférica: el parámetro b representa el máximo valor de la covarianza: la covarianza esférica decae firmemente, comienza desde un máximo b al origen, hasta que se desvanece cuando se llega al alcance.[15]

- *Covarianza cruzada*: las funciones de covarianza directas y cruzadas $C_{ij}(h)$ de un conjunto de N funciones aleatorias $Z_i(u)$ son definidas en el marco de una hipótesis de estacionaridad conjunta de segundo orden.

Ecuación 11: Función covarianza cruzada.

$$\begin{cases} E[Z_i(u)] = m_i & \forall u \in D; i = 1, \dots, N. \\ E[(Z_i(u) - m_i) \cdot (Z_j(u+h) - m_j)] = C_{ij}(h) & \forall u, u+h \in D; i, j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

La media de cada variable $Z_i(u)$ a cualquier punto en el dominio es igual a una constante m_i . La covarianza de un par de variable depende solamente sobre un vector h vinculado a un par de puntos y es invariante para cualquier traslación de este par de puntos en el dominio.[15]

Un conjunto de funciones de covarianzas cruzadas es una función semidefinida positiva, i.e. la varianza de cualquier combinación lineal de N variables a n puntos con un conjunto de ponderadores ω_α^i es positiva o nula.

Ecuación 12: Función covarianza cruzada semidefinida positiva.

$$\text{var} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=0}^n \omega_{\alpha}^i Z(u_{\alpha}) \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \omega_{\alpha}^i \omega_{\beta}^j C_{ij}(u_{\alpha} - u_{\beta}) \geq 0$$

Una función de covarianza cruzada no es a priori una función par o impar, generalmente un cambio en el orden de las variables o un cambio en el signo del vector de separación h cambia el valor de la función de covarianza cruzada.

$$C_{ij}(h) \neq C_{ji}(h) \quad \text{y} \quad C_{ij}(-h) \neq C_{ij}(h)$$

Si tanto la secuencia como el signo son cambiados, volvemos al mismo valor.

$$C_{ij}(h) = C_{ji}(-h)$$

Las funciones de covarianzas directas y cruzadas satisfacen:

Ecuación 13: Restricción de la función covarianza cruzada.

$$|C_{ij}(h)|^2 \leq C_{ii}(0) \cdot C_{jj}(0)$$

bajo estacionaridad; sin embargo, $|C_{ij}(h)|$ no necesita ser menor o igual a $C_{ij}(0)$. [7]

- *Variogramas cruzados*: los variogramas directos y cruzados están definidos en el contexto de la hipótesis intrínseca para N funciones aleatorias. [15]

Ecuación 14: Función variograma cruzado.

$$\begin{cases} E[Z_i(u+h) - Z_i(u)] = 0 \\ \text{cov} \left[(Z_i(u+h) - Z_i(u)), (Z_j(u+h) - Z_j(u)) \right] = 2\gamma_{ij}(h) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall u \in D; i = 1, \dots, N. \\ \forall u, u+h \in D; i, j = 1, \dots, N. \end{array}$$

El variograma cruzado satisface la siguiente desigualdad:

Ecuación 15: Restricción de la función variograma cruzado.

$$|\gamma_{ij}(h)|^2 \leq \gamma_{ii}(h) \cdot \gamma_{jj}(h)$$

- *El modelo lineal de coregionalización*: la estructura espacial de un conjunto de funciones aleatorias, cuantificada a través de sus covarianzas directas y cruzadas o de sus variogramas directos y cruzados, puede ser representada por un modelo lineal de coregionalización, donde se ponderan modelos básicos de covarianzas o variogramas (efecto pepita, modelo exponencial, modelo esférico, etc.) por matrices de coregionalización que deben ser simétricas y semidefinidas positivas. [15]

En este modelo, todas las covarianzas o variogramas directos y cruzados son combinaciones de los mismos modelos básicos, por lo que suelen tener formas y alcances parecidos.

Existen otros modelos de coregionalización más flexibles, que permiten modelar covarianzas o variogramas directos y cruzados con formas y alcances diferentes, tales como el modelo de Matérn multivariable. [5][9]

2.3.2. Kriging

El kriging es una técnica que permite estimar el valor de una variable en un punto del espacio, o el valor promedio en un volumen (bloque), a partir de los valores conocidos de esta variable en puntos vecinos. Se construye como una combinación lineal ponderada de los valores conocidos, donde los ponderadores son determinados de manera que el error (diferencia entre el valor real y el valor estimado) tenga una media nula y una varianza mínima.

Algunas propiedades básicas del estimador kriging son:

1. Kriging es un interpolador exacto, significa que la estimación en un punto de muestreo es el valor muestreado.
2. La varianza de kriging (varianza del error) depende solamente de la covarianza, de las posiciones del punto a estimar y de la muestra, no de los valores de la muestra. La varianza de kriging puede ser sabida antes de que la estimación sea realizada.
3. Los ponderadores de kriging tampoco dependen de los valores de los datos; por lo tanto, a misma covarianza y configuración de los datos, resultará en los mismos ponderadores de kriging.[14]

El estimador de kriging que es de interés en el presente trabajo es el kriging ordinario.

El propósito del kriging es determinar un conjunto óptimo de ponderadores que minimizan la varianza del error esperado, considerando un estimador lineal en una ubicación donde el valor verdadero es desconocido. El KO no hace ninguna presunción sobre la media de la variable, que se supone desconocida y constante.

Ecuación 16: Estimación de kriging ordinario, donde u es la ubicación a estimar y u_1, \dots, u_n son las ubicaciones de datos vecinos.

$$Z^*(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Z(u_i)$$

La condición $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ es la condición de insesgo cuando la media es desconocida.

Kriging ordinario es más frecuentemente utilizado dentro de una vecindad de búsqueda móvil, i.e., usando diferentes conjuntos de datos para diferentes ubicaciones. Esto otorga robustez al estimador, dado que la media puede variar de una vecindad a otra, siempre y cuando permanece aproximadamente constante a la escala de la vecindad.[14]

La varianza del error es definida como:

Ecuación 17: Varianza de kriging ordinario.

$$\begin{aligned}
 E\{[Z^*(u) - Z(u)]^2\} &= E\{[Z^*(u)]^2\} - 2 \cdot E\{Z^*(u) \cdot Z(u)\} + E\{[Z(u)]^2\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E\{Z(u_i) \cdot Z(u_j)\} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i E\{Z(u) \cdot Z(u_i)\} + C(0) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(u_i - u_j) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C(u - u_i) + C(0)
 \end{aligned}$$

El formalismo de Lagrange es usado para obtener los ponderadores óptimos

Ecuación 18: Formalismo para determinar los ponderadores óptimos.

$$\frac{\partial \sigma_E^2}{\partial \lambda_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(u_i - u_j) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C(u - u_i) + C(0) + 2\mu \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right] = 0$$

Resulta en un sistema de n+1 ecuaciones con n ponderadores desconocidos y un multiplicador de Lagrange:

Ecuación 19: Sistema de kriging ordinario.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \lambda_j C(u_i - u_j) + \mu &= C(u - u_i) \quad i = 1, \dots, n \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_i &= 1
 \end{aligned}$$

Ecuación 20: Varianza del error del kriging ordinario.

$$\sigma_E^2 = C(0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i C(u - u_i) - \mu$$

2.3.3. Cokriging

Es un estimador similar al kriging que usa datos definidos sobre diferentes atributos, por ejemplo, la ley de oro puede ser estimada desde una combinación de valores de muestras de oro y cobre. Debe haber una correlación espacial entre la variable primaria y la variable secundaria que puede ser inferida desde la información disponible.

2.3.3.1. Cokriging ordinario

En el caso de una variable secundaria (Y), el estimador de cokriging ordinario de $Z(u)$ es escrito como:

Ecuación 21: Estimación por cokriging ordinario.

$$Z_{COK}^*(u) = \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1}(u)Z(u_{\alpha_1}) + \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \lambda'_{\alpha_2}(u)Y(u'_{\alpha_2})$$

donde los λ_{α_1} son los ponderadores aplicados a las n_1 muestras primarias y los λ'_{α_2} son los ponderadores aplicados a las n_2 muestras secundarias. El cokriging requiere un modelo de la función de covarianza, incluyendo la covarianza primaria $C_Z(h)$, la covarianza secundaria $C_Y(h)$, y las covarianzas cruzadas Z-Y $C_{ZY}(h) = Cov\{Z(u), Y(u+h)\}$, y $C_{YZ}(h)$.

Más generalmente, la función de covarianza multivariable consta de K^2 funciones de covarianzas escalares cuando se tiene consideradas K diferentes variables.

La inferencia llega a hacer demandante en términos de datos y el subsecuente modelado conjunto es tedioso.

Se tiene los siguientes tipos de cokriging:

1. *Cokriging ordinario tradicional*: la suma de los ponderadores aplicados a la variable primaria de un conjunto es uno, y la suma de los ponderadores aplicados a cada variable secundaria es cero. El problema con este formalismo es que la segunda condición tiende a limitar severamente la influencia de la(s) variable(s) secundaria(s).
2. *Cokriging ordinario estandarizado*: consiste en la estimación con variables secundarias que tienen la misma media que la primera variable. Entonces todos los ponderadores, primarios y secundarios, son restringidos a la suma de uno. [3][14]

2.3.4. Kriging de bloques

Permite usar el estimador de kriging lineal para obtener directamente los promedios de la variable $Z(\mathbf{u})$ sobre un soporte mayor (bloque) al soporte de los datos.

Considera la estimación del promedio de un bloque, como:

Ecuación 22: Estimación del promedio de un bloque.

$$Z_V(u) = \frac{1}{|V|} \int_{V(u)} Z(u') du' \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Z(u'_j)$$

donde $V(u)$ representa el bloque centrado en u , y u'_j 's son los puntos usados para discretizar el volumen V . [14]

2.3.5. Plan de kriging

El plan o vecindad de kriging determina ampliamente la calidad de la estimación de la ley, hay varias variables y parámetros que constituyen este plan.

Algunos de los factores que influyen en el tamaño y la geometría de la vecindad son: la influencia de los datos más cercanos aminora a los datos más alejados; los valores del variograma a lo largo de las distancias son derivados desde el modelo de variograma, no desde los datos; si el número de datos elegidos es grande, las matrices de covarianza usadas para obtener los ponderadores de kriging son muy grandes, entonces los ponderadores serán pequeños y muy parecidos para la mayoría de los valores; finalmente se tiene algunos casos en que hay problemas computacionales al resolver el sistema de kriging.

El radio máximo de búsqueda debería ser el límite de fiabilidad y eficacia del modelo de variograma, no solo de su alcance. La distancia de búsqueda de datos puede ser anisótropa, siguiendo la anisotropía observada en el modelo de variograma. [14]

2.3.6. Validación cruzada

Un método para seleccionar el mejor modelo de variograma o covarianza y la mejor vecindad para kriging es el proceso de validación cruzada. Estima los valores de cada muestra después de remover el valor observado de esta muestra al considerar todos los valores adyacentes en un área de búsqueda alrededor del punto; por lo tanto, el error experimental puede ser estimado.

Los puntos de salida de la validación cruzada son:

1. El promedio del error:

Ecuación 23: Promedio del error, validación cruzada.

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - Z_i^*)}{n}$$

2. El promedio del valor absoluto del error:

Ecuación 24: Promedio del valor absoluto del error, validación cruzada.

$$\frac{\sum_{i=1}^n |Z_i - Z_i^*|}{n}$$

3. El promedio de la varianza de kriging:

Ecuación 25: Promedio de la varianza de kriging, validación cruzada.

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_k^2}{n}$$

4. El promedio del cuadrado del error de la estimación:

Ecuación 26: Promedio del cuadrado del error de la estimación, validación cruzada.

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - Z_i^*)^2}{n}$$

5. Un número de puntos tomados en cuenta por kriging puntual.

Si el modelo permite una buena estimación, se tiene que (1) es cercano a cero y no es mayor al 1% del valor de Z (el promedio de todos los valores de Z_i), (4) debería ser igual a (3).[2]

2.4. Anisotropía

Los cálculos experimentales pueden revelar comportamientos muy diferentes de los variogramas experimentales en diferentes direcciones, esto es llamado un comportamiento anisótropo.

En el espacio 2D una representación del comportamiento del variograma experimental puede ser hecho, dibujando un mapa de líneas de iso-variogramas como función de un vector h . Idealmente si las líneas son circulares alrededor del origen, el variograma depende solamente del largo del vector h y el fenómeno es isótropo. Si las líneas de los iso-variogramas son elipses concéntricas definidas a lo largo de un conjunto de ejes principales que son perpendiculares, se tiene una anisotropía geométrica.

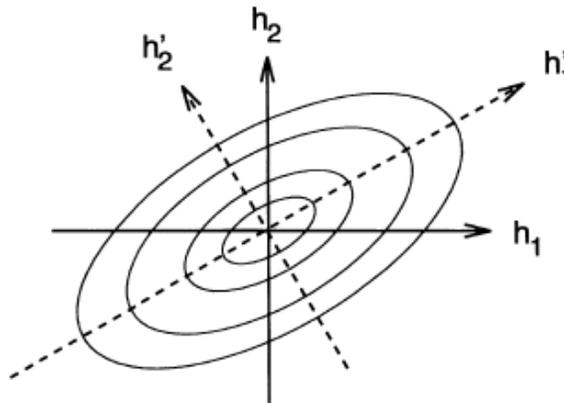


Figura 4: Ejemplo de anisotropía geométrica.[15]

donde h'_1 es el eje principal de la anisotropía, el cual está rotado con respecto a h_1 .

Puede suceder que los variogramas experimentales calculados en diferentes direcciones sugieren diferentes valores de las mesetas, entonces se tiene una anisotropía zonal.[15]

Una de las herramientas para ayudar a identificar anisotropías es el mapa variográfico, en donde se permite visualizar el variograma experimental en diferentes direcciones con una escala de colores o en escala de grises.

2.5. Práctica del modelamiento

La estimación de dominios geológicos está basada en una combinación de análisis geológicos y estadísticos. El concepto está basado en descomponer el problema, describiendo y modelando la relación entre cada variable geológica. La combinación de variables resulta en una matriz que determina el control geológico de los datos.[14]

El modelamiento de recursos de tipo jerárquico/cascada es una práctica típica en el proceso de construcción de un modelo de bloques. En este método, los dominios geológicos son modelados primero por alguna técnica explícita o implícita y la variable(s) cuantitativa(s) es(son) estimada(s) dentro del dominio geológico ya construido, tomando en cuenta solo a los datos que pertenecen al dominio correspondiente.[11]

El desarrollo de la estimación de la ley de un dominio, comienza y termina con el conocimiento geológico. El primer paso es identificar las variables geológicas para definir los dominios estimados. Las variables típicas son: litología, alteración, mineralogía, meteorización (óxidos, sulfuros, por ejemplo), y estructuras o dominios estructurales.

El segundo paso consiste en definir la variable geológica de mayor interés, esto está basado en consideraciones geológicas, y la información de las muestras.

El tercer paso está basado en todas las combinaciones razonables de los atributos geológicos que son definidos. El cuarto paso envuelve una descripción estadística de los dominios iniciales, el principal propósito es remover o agrupar dominios acordes a consideraciones geológicas y espaciales; dominios que tienen una pequeña representación en la base de datos pueden ser agrupados con otros.

Herramientas estadísticas como histogramas, diagramas de probabilidad, diagramas de cajas, diagramas de dispersión, diagramas cuantil-cuantil (Q-Q), diagramas de efecto proporcional y variogramas son comúnmente usados.[14]

Una de las restricciones del método jerárquico es que el comportamiento de la variable(s) cuantitativa(s) a través de la frontera geológica debe ser dura. El modelamiento separado de la(s) variable(s) cuantitativa(s) dentro de cada dominio solo garantiza la homogeneidad de esta(s) variable(s) dentro de cada dominio.[11]

Sin embargo, en la práctica, la transición entre dos dominios no es siempre abrupta, y una variable cuantitativa puede evolucionar continuamente a través de una frontera de dos dominios, conduciendo a una frontera suave. En este caso, considerar las correlaciones espaciales a lo largo de la frontera puede mejorar la precisión de la estimación.

Un camino intuitivo y constructivo es un modelo lineal de coregionalización para estimar las leyes por cokriging usando los datos de los dominios adyacentes. Entonces los datos del otro lado de la frontera pueden ser considerados para la estimación de los puntos no muestreados en un dominio geológico dado.

Otro camino es “dilatar” el dominio geológico, de manera de incluir muestras de dominios geológicos adyacentes dado un radio desde la frontera del dominio de interés.

A pesar de que haya una correlación entre las leyes en los diferentes dominios, las estadísticas y las propiedades estructurales pueden diferir desde un dominio a otro, lo que indicaría un comportamiento no estacionario. Desde un punto de vista del modelamiento, se puede distinguir dos tipos de no estacionaridad dentro de un conjunto de datos: no estacionaridad en términos de la media (no estacionaridad de primer orden) y la no estacionaridad en términos de la correlación espacial (no estacionaridad de segundo orden), por lo cual el valor de la media y la covarianza puede variar desde un dominio a otro, aunque sean constantes (estacionaridad) dentro de cada dominio.

El problema de la no estacionaridad de la covarianza se puede ver como un problema multivariable, en donde se definen covarianzas directas dentro de cada dominio y covarianzas cruzadas entre los dominios. [4]

En este problema se enfoca la memoria, puesto que busca mejorar la aplicación de las técnicas multivariadas al considerar no solamente las correlaciones cruzadas, sino que también las relaciones entre leyes medias de las diferentes unidades geológicas.

3. Metodología

Para realizar el trabajo, se tiene datos de pozos de tronadura de un banco de un yacimiento pórfido cuprífero-aurífero explotado a cielo abierto. Se tiene información de las coordenadas Este [m] y Norte [m], leyes de oro [g/t] y leyes de cobre [%]; además del tipo de roca (roca volcánica de composición andesítica, o de intrusivo de pórfido dacítico). La coordenada vertical es constante, dado que todos los datos están tomados en el mismo banco, y no se usará en el modelamiento.

Se determina si existen datos erróneos, datos duplicados; además se codifica las variables categóricas (tipo de roca), como 1 a roca intrusiva y 2 a roca volcánica.

Para estimar la ley de corto plazo se proponen tres métodos de estimación (con validación cruzada, para comparar su desempeño).

Previamente se tiene que hacer un estudio exploratorio de los datos, además de un análisis de contacto entre las fronteras de los dominios 1 y 2.

3.1. Método 1

El primer método consiste en hacer una estimación de las leyes del metal a través del kriging ordinario para cada dominio por separado (los dominios se separan de acuerdo a los tipos de rocas). Una vez separado los datos de acuerdo a cada dominio, se procede a hacer un análisis estructural, determinando la variabilidad espacial de los datos, de acuerdo a lo anterior, se finaliza con la covarianza ajustada según los datos de la muestra.

Una vez determinada la covarianza ajustada para cada dominio, se procede a hacer un kriging ordinario para cada dominio. El procedimiento finaliza con los criterios de la validación cruzada.

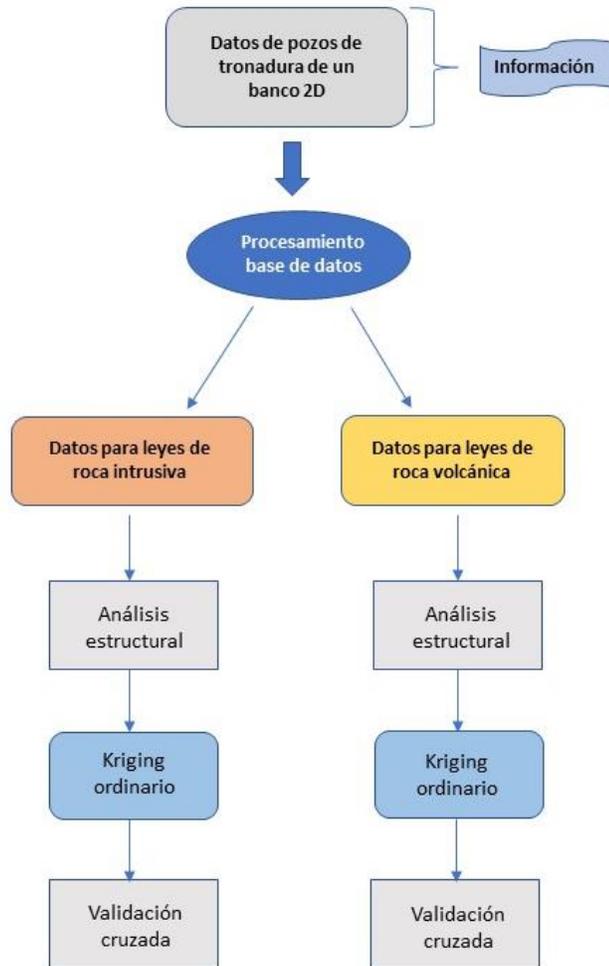


Figura 5: Diagrama método 1.

3.2. Método 2

El segundo método consiste en hacer una estimación de las leyes del metal a través del cokriging ordinario tradicional para dos dominios (tipos de rocas); para lo anterior, la base de datos se estructura en la separación del metal, en variables $\{Z_1, Z_2\}$ según dominio al cual pertenezca.

Después de determinar las covarianzas ajustadas directas (en cada tipo de roca) y cruzadas (entre tipos de roca), se estima las leyes a través del siguiente formulismo:

Ecuación 27: Estimación de leyes.

$$Z^*(u) = a + \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(u_i)$$

Condiciones de insesgo y varianza mínima para dos dominios

Ecuación 28: Esperanza del error de la estimación.

$$E\{Z^*(u) - Z(u)\} = a + \sum_{i=1}^n \lambda_i E\{Z(u_i)\} - E\{Z(u)\}$$

Sin pérdida de generalidad, si se tiene que las leyes que van de 1, ..., k pertenecen al dominio 1, ($Z(u_i) \in D1$, con $i \in \{1 \dots k\}$) y las leyes que van de k+1, ..., n pertenecen al dominio 2, ($Z(u_i) \in D2$, con $i \in \{k + 1 \dots n\}$).

Ecuación 29: Esperanza de error de la estimación con dos dominios.

$$E\{Z^*(u) - Z(u)\} = a + \sum_{i=1}^k \lambda_i E\{Z(u_i)\} + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i E\{Z(u_i)\} - E\{Z(u)\}$$

Si se tiene que m1 es la media del dominio 1 (D1) y m2 es la media del dominio 2 (D2), entonces:

Ecuación 30: Esperanza del error de la estimación con dos dominios.

$$E\{Z^*(u) - Z(u)\} = a + \sum_{i=1}^k \lambda_i m1 + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i m2 - E\{Z(u)\}$$

Si

Ecuación 31: Esperanza del error de estimación con dos dominios, con $Z(u) \in D1$.

$$Z(u) \in D1 \Rightarrow E\{Z^*(u) - Z(u)\} = a + \sum_{i=1}^k \lambda_i m1 + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i m2 - m1$$

Reordenando se tiene:

Ecuación 32: Esperanza del error de la estimación con dos dominios ordenada.

$$E\{Z^*(u) - Z(u)\} = a + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i - 1 \right) m1 + \left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i \right) m2$$

Si

Ecuación 33: Condición de insesgo.

$$E\{Z^*(u) - Z(u)\} = 0$$

Entonces se tienen las siguientes condiciones de insesgo:

Ecuación 34: Condiciones de insesgo.

$$a = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i - 1 \right) = 0$$

$$\left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i \right) = 0$$

Condición de varianza mínima

Ecuación 35: Varianza del error.

$$\begin{aligned} \text{Var}\{Z^*(u) - Z(u)\} &= \text{Var}\{Z^*(u)\} - 2\text{cov}\{Z^*(u), Z(u)\} + \text{Var}\{Z(u)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \text{cov}\{Z(u_i), Z(u_j)\} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{cov}\{Z(u), Z(u_i)\} + C_{11}(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij}(u_i - u_j) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{1i}(u - u_i) + C_{11}(0) \end{aligned}$$

- Los ponderadores óptimos que minimizan la varianza del error sujeto a que la suma de los ponderadores sea igual a 1, con $i \in \{1 \dots k\}$ y sea igual a 0, con $i \in \{k + 1 \dots n\}$, pueden determinarse introduciendo multiplicadores de Lagrange, μ_1 y μ_2 .

Ecuación 36: Varianza del error con la integración de ponderadores de Lagrange.

$$\begin{aligned} \text{Var}\{Z^*(u) - Z(u)\} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij}(u_i - u_j) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{1i}(u - u_i) + C_{11}(0) + 2\mu_1 \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i - 1 \right) + 2\mu_2 \left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i \right) \\ &C_{ij} = C_{11}, \quad \text{si } i \in \{1 \dots k\} \wedge j \in \{1 \dots k\} \\ &C_{ij} = C_{12}, \quad \text{si } i \in \{1 \dots k\} \wedge j \in \{k + 1 \dots n\} \\ &C_{ij} = C_{21}, \quad \text{si } i \in \{k + 1 \dots n\} \wedge j \in \{1 \dots k\} \\ &C_{ij} = C_{22}, \quad \text{si } i \in \{k + 1 \dots n\} \wedge j \in \{k + 1 \dots n\} \end{aligned}$$

C_{11} y C_{22} , covarianzas ajustadas directas en cada tipo de roca.

C_{12} y C_{21} covarianzas ajustadas cruzadas entre tipos de roca

Y anulando las derivadas parciales con respecto a los ponderadores y con respecto a los multiplicadores de Lagrange.

Ecuación 37: Derivadas parciales de la varianza del error con respecto a los ponderadores y con respecto a los multiplicadores de Lagrange.

$$\frac{\partial []}{\partial \lambda_i} = 2 \sum_{j=1}^k \lambda_j C_{11} (u_i - u_j) + 2 \sum_{j=k+1}^n \lambda_j C_{12} (u_i - u_j) - 2C_{11}(u - u_i) + 2\mu_1, \quad i = 1, \dots, k$$

$$\frac{\partial []}{\partial \lambda_i} = 2 \sum_{j=1}^k \lambda_j C_{21} (u_i - u_j) + 2 \sum_{j=k+1}^n \lambda_j C_{22} (u_i - u_j) - 2C_{12}(u - u_i) + 2\mu_2, \quad i = k + 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial []}{\partial \mu_1} = 2 \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i - 1 \right), \quad i = 1, \dots, k$$

$$\frac{\partial []}{\partial \mu_2} = 2 \left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i \right), \quad i = k + 1, \dots, n$$

Se desemboca en el sistema de cokriging ordinario tradicional para dos dominios.

Ecuación 38: Sistema de cokriging ordinario tradicional para dos dominios.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^k \lambda_j C_{11}(u_i - u_j) + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j C_{12}(u_i - u_j) + \mu_1 = C_{11}(u - u_i), \quad i = 1, \dots, k \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j C_{21}(u_i - u_j) + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j C_{22}(u_i - u_j) + \mu_2 = C_{12}(u - u_i), \quad i = k + 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad i = 1, \dots, k \\ \sum_{i=k+1}^n \lambda_i = 0, \quad i = k + 1, \dots, n \end{array} \right.$$

En notación matricial se tiene:

Matriz 1: Sistema de cokriging ordinario tradicional para dos dominios.

$$\begin{pmatrix} C_{11}(u_1 - u_1) & \dots & \dots & C_{11}(u_1 - u_k) & C_{12}(u_1 - u_{k+1}) & \dots & \dots & C_{12}(u_1 - u_n) & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{11}(u_k - u_1) & \dots & \dots & C_{11}(u_k - u_k) & C_{12}(u_k - u_{k+1}) & \dots & \dots & C_{12}(u_k - u_n) & 1 & 0 \\ C_{21}(u_{k+1} - u_1) & \dots & \dots & C_{21}(u_{k+1} - u_k) & C_{22}(u_{k+1} - u_{k+1}) & \dots & \dots & C_{22}(u_{k+1} - u_n) & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{21}(u_n - u_1) & \dots & \dots & C_{21}(u_n - u_k) & C_{22}(u_n - u_{k+1}) & \dots & \dots & C_{22}(u_n - u_n) & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \lambda_{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(u - u_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{11}(u - u_k) \\ C_{12}(u - u_{k+1}) \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{12}(u - u_n) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un sistema de ecuaciones similares se obtiene si el punto u a estimar pertenece al dominio 2.

La varianza del error o varianza de cokriging ordinario tradicional para dos dominios, vale:

Ecuación 39: Varianza de cokriging ordinario tradicional para dos dominios.

$$\sigma_{COK}^2(u) = \sigma^2 - \sum_{i=1}^k \lambda_i C_{11}(u - u_i) - \sum_{i=k+1}^n \lambda_i C_{12}(u - u_i) - \mu_1$$

$$\text{si } Z(u) \in D2 \Rightarrow \sigma_{COK}^2(u) = \sigma^2 - \sum_{i=1}^k \lambda_i C_{21}(u - u_i) - \sum_{i=k+1}^n \lambda_i C_{22}(u - u_i) - \mu_2$$

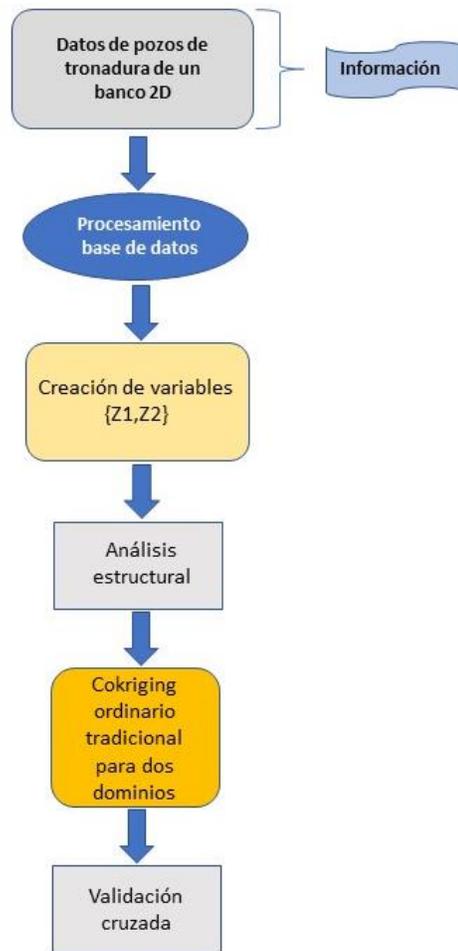


Figura 6: Diagrama método 2.

3.3. Método 3

El tercer método consiste en hacer una estimación de las leyes del metal a través del cokriging ordinario estandarizado para dos dominios (tipos de rocas); para lo anterior, la base de datos se estructura en la separación del metal en variables $\{Z1, Z2\}$ de acuerdo al dominio al cual pertenezca.

La diferencia con el segundo método radica, en que se agrega la condición de que la ley media es (localmente) la misma en ambos lados de la frontera de los dos tipos de roca.

Por lo tanto, si se tienen las mismas condiciones que en el método 2, cambiando solamente que $m1=m2$, se tiene el siguiente sistema de cokriging ordinario estandarizado para dos dominios (se muestra el caso en que la ubicación u a estimar pertenece al dominio 1; las ecuaciones se pueden adaptar al caso en que pertenece al dominio 2):

Ecuación 40: Sistema de cokriging ordinario estandarizado para dos dominios.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k \lambda_j C_{11}(u_i - u_j) + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j C_{12}(u_i - u_j) + \mu = C_{11}(u - u_i), & i = 1, \dots, k \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j C_{21}(u_i - u_j) + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j C_{22}(u_i - u_j) + \mu = C_{12}(u - u_i), & i = k + 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

En notación matricial se tiene:

Matriz 2: Sistema de cokriging ordinario estandarizado para dos dominios.

$$\begin{pmatrix} C_{11}(u_1 - u_1) & \dots & \dots & C_{11}(u_1 - u_k) & C_{12}(u_1 - u_{k+1}) & \dots & \dots & C_{12}(u_1 - u_n) & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ C_{11}(u_k - u_1) & \dots & \dots & C_{11}(u_k - u_k) & C_{12}(u_k - u_{k+1}) & \dots & \dots & C_{12}(u_k - u_n) & 1 \\ C_{21}(u_{k+1} - u_1) & \dots & \dots & C_{21}(u_{k+1} - u_k) & C_{22}(u_{k+1} - u_{k+1}) & \dots & \dots & C_{22}(u_{k+1} - u_n) & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ C_{21}(u_n - u_1) & \dots & \dots & C_{21}(u_n - u_k) & C_{22}(u_n - u_{k+1}) & \dots & \dots & C_{22}(u_n - u_n) & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \lambda_{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(u - u_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{11}(u - u_k) \\ C_{12}(u - u_{k+1}) \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{12}(u - u_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

La varianza del error o varianza de cokriging ordinario estandarizado para dos dominios, vale:

Ecuación 41: Varianza de cokriging ordinario estandarizado para dos dominios.

$$\sigma_{COK}^2(u) = \sigma^2 - \sum_{i=1}^k \lambda_i C_{11}(u - u_i) - \sum_{i=k+1}^n \lambda_i C_{12}(u - u_i) - \mu$$

$$\text{si } Z(u) \in D2 \Rightarrow \sigma_{COK}^2(u) = \sigma^2 - \sum_{i=1}^k \lambda_i C_{21}(u - u_i) - \sum_{i=k+1}^n \lambda_i C_{22}(u - u_i) - \mu$$

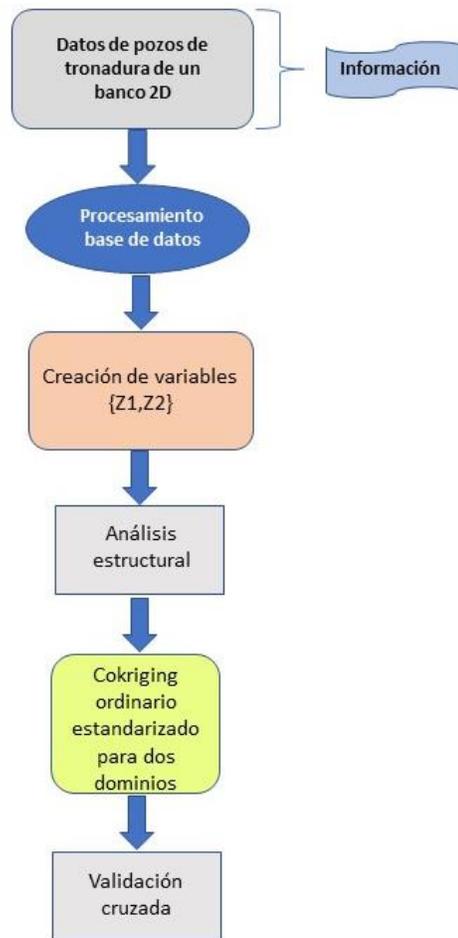


Figura 7: Diagrama método 3.

4. Caso de estudio: Datos de pozos de tronadura de un banco (2D) de un yacimiento pórfido cuprífero-aurífero explotado a cielo abierto.

4.1. Presentación de la geología del yacimiento.

4.1.1. Geología local

Rocas intrusivas: el pórfido puede caracterizarse como de composición riodacítica a dacítica. La denominación se hace en base a fenocristales cuyo origen es magmático. Cuando la alteración de la pasta es parcial o mínima se identifica al pórfido como riodacítico, cualquiera sea el tipo de alteración que posea. El pórfido riodacítico-dacítico se caracteriza por poseer fenocristales de plagioclasa, y de cuarzo, a veces acompañados por fenocristales de máficos (anfíbol y/o biotita).

En el stock de pórfido riodacítico-dacítico se observan algunos xenolitos, descomposición granítica y esquistos biotíticos.

Rocas volcánicas: en estas se incluyen brechas, diques, filones, capas de composición andesítica. Las rocas volcánicas se caracterizan por la presencia de abundantes fenocristales de plagioclasa, a veces orientados, de composición andesina media.

4.1.2. Alteración hidrotermal

En el yacimiento han sido reconocidos los tipos de alteración potásica, silíceo, sericítica, argílica y propilítica. Los mismos siguen las definiciones de los tipos de alteración establecidos por Meyer y Hemley (1967) [12] y luego por Lowell y Guilbert (1970) [10].

Una distribución zonal bien desarrollada de los tipos de alteración está presente en esta zona, donde un núcleo de alteración potásica está rodeado por una zona a grandes rasgos anulares, comprendiendo la alteración sericítica y argílica, y que posee unos 400 [m] de ancho. La misma pasa hacia afuera a la alteración propilítica, que está desarrollada también en forma anular, y que posee un promedio estimado de 1000 [m] de ancho. Dentro de la zona de alteración potásica se puede definir claramente silicificación, que está distribuida irregularmente ocupando los morros más elevados de la parte central del área.

Alteración potásica: es el tipo de alteración más importante, ya que está asociada a la mineralización más significativa de cobre-oro. Esta alteración afecta a las rocas del pórfido riodacítico-dacítico y a las rocas volcánicas. La característica fundamental de la asociación potásica es la presencia de biotita secundaria, la cual predomina ampliamente sobre el feldespato potásico.

- a) *Pórfido:* en este caso la alteración potásica se manifiesta bajo la forma de escaso reemplazo de los fenocristales de plagioclasa por feldespato potásico, el cual se presenta en venillas o bien en masas irregulares. En los fenocristales de máficos se encuentra como reemplazo biotita secundaria, la cual afecta en especial a los de anfíbol.

- b) *Rocas volcánicas*: en ellas, la alteración potásica se localiza fundamentalmente en la pasta, la cual está reemplazada por biotita secundaria de grano fino, la que a veces se encuentra también escasamente en los fenocristales. El cuarzo y feldespato potásico acompañan en pequeña proporción a la biotita. A veces, el feldespato potásico afecta a los fenocristales de plagioclasa en forma de venillas. Solamente en profundidad, después de los 220 [m], se encontró anhidrita, mineral asociado comúnmente a la alteración potásica. La anhidrita se presenta en cristales de buen desarrollo, diseminada, o en venillas junto al cuarzo y feldespato potásico.

Alteración silíceo: dentro de la zona de alteración potásica se observaron núcleos de alteración silíceo con abundante magnetita, los cuales poseen mineralización hipogénica económica, representada por una abundante diseminación de calcopirita, y oro nativo subordinado, acompañado por gran cantidad de pirita. Este tipo de alteración afecta al pórfido y a veces a las rocas volcánicas. Esta se manifiesta como venillas y parches de cuarzo, que muchas veces se observan macroscópicamente, también como reemplazo total de la roca por un mosaico de cuarzo con magnetita. El cuarzo de los fenocristales puede ser reemplazado por cuarzo hidrotermal. En los núcleos existe abundante jarosita asociada al cuarzo, con arcilla y sericita presentes.

Alteración sericítico-argílica: además de la alteración sericítico-argílica que se desarrolla exteriormente a la zona potásica, existe un núcleo elongado en sentido NW-SE dentro de la alteración antes mencionada. Contiene abundante pirita (diseminada y venillas). Las leyes hipogénicas de la mineralización oscilan entre 0.15 y 0.25%.

- a) *Pórfido*: la alteración sericítico-argílica se manifiesta como reemplazo total a parcial de fenocristales de plagioclasa por sericítico-argílica, a veces acompañada por calcita. En los casos en que la alteración sericítico-argílica es parcial, se presenta como un reborde de ambos minerales, los cuales avanzan a través de los planos de clivaje. La sericita y arcilla se encuentran también en la pasta del pórfido, en general acompañadas por cuarzo. También poseen alteración de este tipo el feldespato potásico magmático y de alteración potásica; cualquiera sea este el lugar que ocupe (pasta y fenocristales)
- b) *Rocas volcánicas*: la alteración sericítico-argílica está afectando fenocristales de plagioclasa y tablillas de este mismo mineral de la pasta, en ambos casos en forma similar a la de los fenocristales de plagioclasa del pórfido.

Alteración propilítica: un amplio halo con alteración propilítica representa los efectos más externos de la alteración hidrotermal. Los minerales diagnósticos de esta asociación son clorita, epidota y calcita, asociados a pirita que en general es abundante en el contacto interno con la sericítica. La pirita se observa como diseminación y venillas.

- a) *Pórfido*: es de escaso desarrollo esta alteración y siempre va acompañada por una o las dos alteraciones ya descritas. Se manifiesta como cloritización, con o sin calcita y epidota de fenocristales de máficos, en que puede ser parcial o total.

- b) *Rocas volcánicas*: en estas rocas, la alteración propilítica se manifiesta como reemplazo de mesostasis por clorita, calcita y epidota; en algunos casos este reemplazo es total, y dicha asociación constituye la pasta actual de las rocas volcánicas. Solo en contadas ocasiones los fenocristales están totalmente alterados a calcita, a epidota y a clorita, o bien a una asociación de dos o tres de los minerales recién mencionados.

Alteración supergena: está evidenciada en superficie por la alteración sericítica-argílica, que reemplaza a los otros minerales de alteración, en una textura característica que es muy visible al microscopio.

4.1.3. Mineralización

La mineralización cuprífera está genética y especialmente relacionada al pórfido riódacítico-dacítico y se presenta tanto en el intrusivo como en las rocas volcánicas. Se tiene que las zonas con alteración potásica y silícea, y posiblemente también pequeños sectores al este en el borde interno del área con alteración sericítica, poseen mineralización económica. En cambio, es descartable como zona económica el resto de alteración sericítica-argílica y la totalidad de la propilítica.

La metalización más importante está asociada a la alteración potásica y silicificación. En esos sectores se tienen los siguientes minerales: pirita, magnetita (ambas diseminadas), y en menor proporción de calcopirita.

En las zonas que comprenden alteración sericítica y propilítica es escasa la mineralización, encontrándose solo pirita y magnetita. En cambio, adquiere mayor desarrollo en la zona sericítica la presencia de minerales lixiviados tales como hematita y goethita.

La mineralización económica consiste casi exclusivamente en calcopirita, con una regular y subordinada proporción de oro.

Los minerales se presentan de dos formas: diseminados o a través de la roca alterada o en venillas y microvenillas. La diseminación es la más abundante, en cuanto a la distribución de venillas y microvenillas cuyos espesores promedio son de 1 [mm]; en ocasiones la abundancia de las mismas llega a formar una red donde se observan un entrecruzamiento irregular.

La mineralización primaria consiste en pirita en granos idiomorfos, subidiomorfos y alotrimorfos, siendo el tamaño promedio de los mismos de 600 [μm]. Este mineral se presenta diseminado y en venillas.

La calcopirita es el principal portador de cobre, de acuerdo a los sondeos se encuentra diseminada, intercrecida con otros sulfuros y ocasionalmente en venillas. La magnetita es muy abundante, observándose principalmente en el sector donde existe silicificación; se presenta como masas o agregados granulares, encontrándose en algunos granos una martitización regular o irregular (hematita).

La bornita es un mineral que se determina en poca cantidad; generalmente se altera a covelina. La pirrotina se observa en pocas ocasiones; la molibdenita se encuentra como laminillas diseminadas y en menor proporción en venillas de cuarzo.

La especularita se halla dispuesta como tablillas con hábito radiado en escasa cantidad. En las zonas donde existe abundancia de carbonatos se acumulan granos de galena y blenda intercrecidos.

Finalmente es importante la presencia de chispas de oro nativo diseminadas. Sus tamaños promedio oscilan entre 10 y 20 [μm] de diámetro, y se las observa en las rocas alteradas.

4.2. Análisis exploratorio de los datos.

La base de datos consiste en un conjunto de pozos de tronadura y contiene información de las coordenadas Este y Norte en metros, datos de leyes de oro [g/t] y leyes de cobre [%], así como el tipo de roca (roca volcánica de composición andesítica o intrusivo de pórfido dacítico). La elevación es constante, por tratarse de datos tomados en un mismo banco de la explotación, por lo que no será utilizada en el estudio.

En la base de datos se encuentra una cantidad de 8134 datos, sin errores aparentes (datos aberrantes o inconsistentes), con la excepción de dos pares de datos duplicados.

Tabla 1: Datos duplicados.

Dominio	Este [m]	Norte [m]	Au [g/t]	Cu [%]
D1	353.60	49.50	0.05	0
D2	123.30	68.10	0.03	0

Se codificó a cada tipo de roca como un dominio en particular, de la siguiente manera:

Tabla 2: Codificación de dominios.

Dominio	Descripción	Código
Dominio 1	Intrusiva	D1
Dominio 2	Volcánica	D2

Las estadísticas básicas de las leyes de oro y cobre son las siguientes:

Tabla 3: Estadísticas básicas de leyes de oro [g/t] y cobre [%] respectivamente.

Dominio	D1	D2	Total
Número de datos	4549	3583	8132
Proporción	56%	44%	100%
Mínimo	0	0	0
Máximo	3.05	1.86	3.05
Media	0.34	0.17	0.27
Mediana	0.24	0.09	0.15
St. Desviación	0.37	0.19	0.32
Coef. Asimetría	2.17	2.45	2.56
Curtosis	6.32	8.59	9.24

Dominio	D1	D2	Total
Número de datos	4549	3583	8132
Proporción	56%	44%	100%
Mínimo	0	0	0
Máximo	4.44	2.21	4.44
Media	0.31	0.14	0.24
Mediana	0.22	0.06	0.14
St. Desviación	0.37	0.19	0.32
Coef. Asimetría	3.16	2.98	3.51
Curtosis	17.60	14.91	22.27

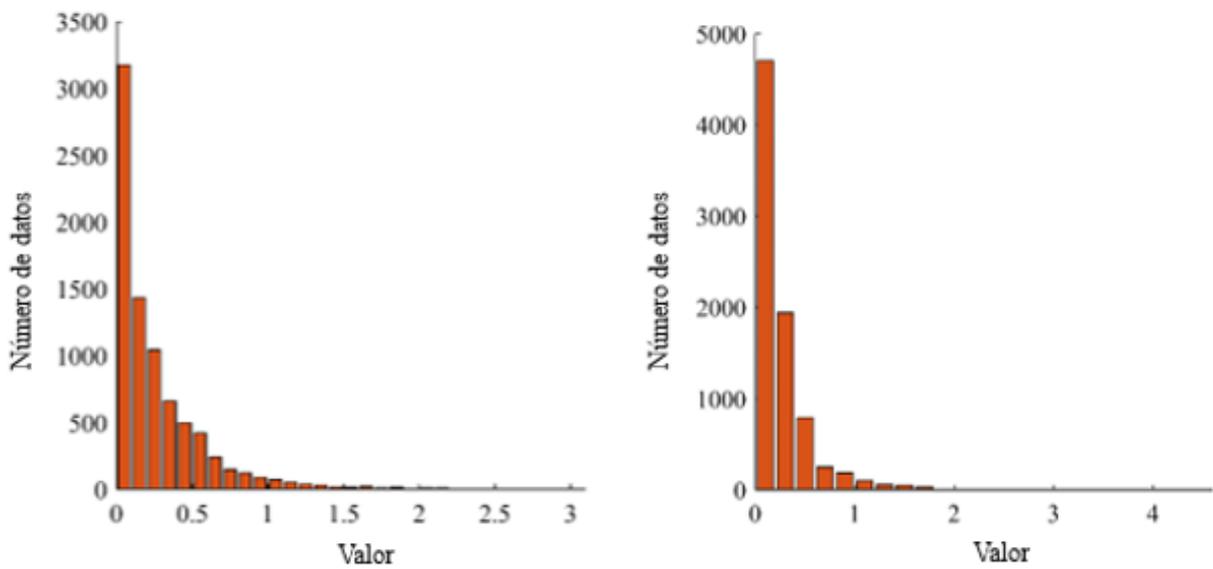


Figura 8: Histogramas de las leyes de oro [g/t] y cobre [%] respectivamente.

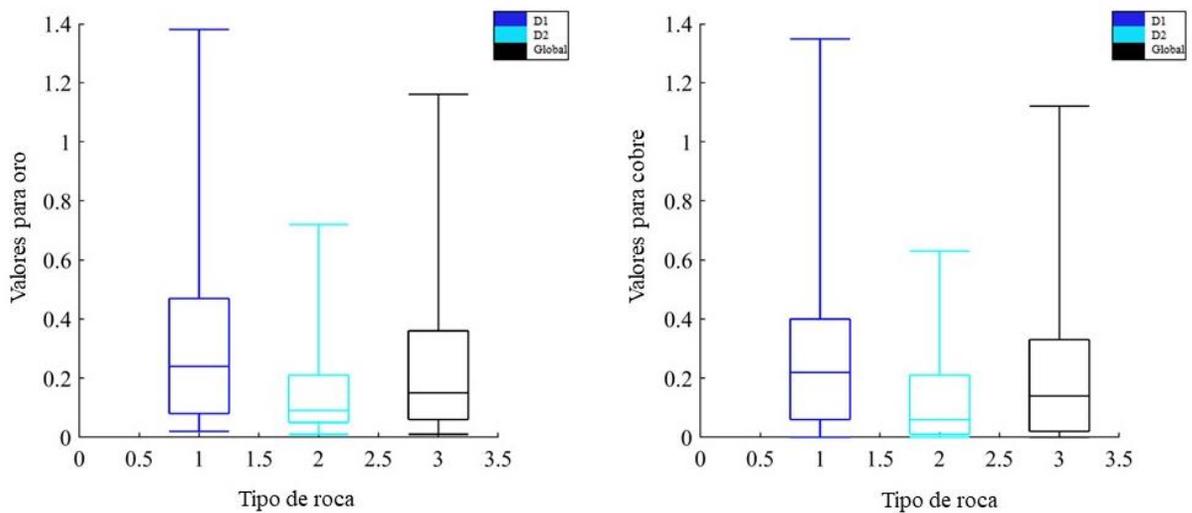


Figura 9: Diagramas de caja para leyes de oro [g/t] y leyes de cobre [%] respectivamente.

En ambos dominios las leyes de los metales tienen asimetrías positivas, en el dominio 2 las medias son menores en ambos metales y, como las distribuciones tienen asimetrías positivas, las medianas también son menores.

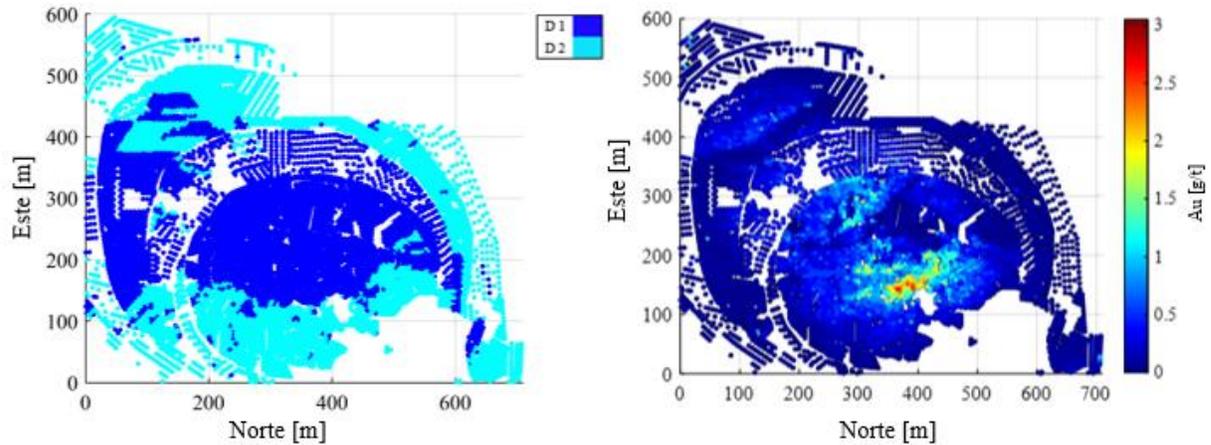


Figura 10: Disposición espacial de las leyes de oro [g/t].

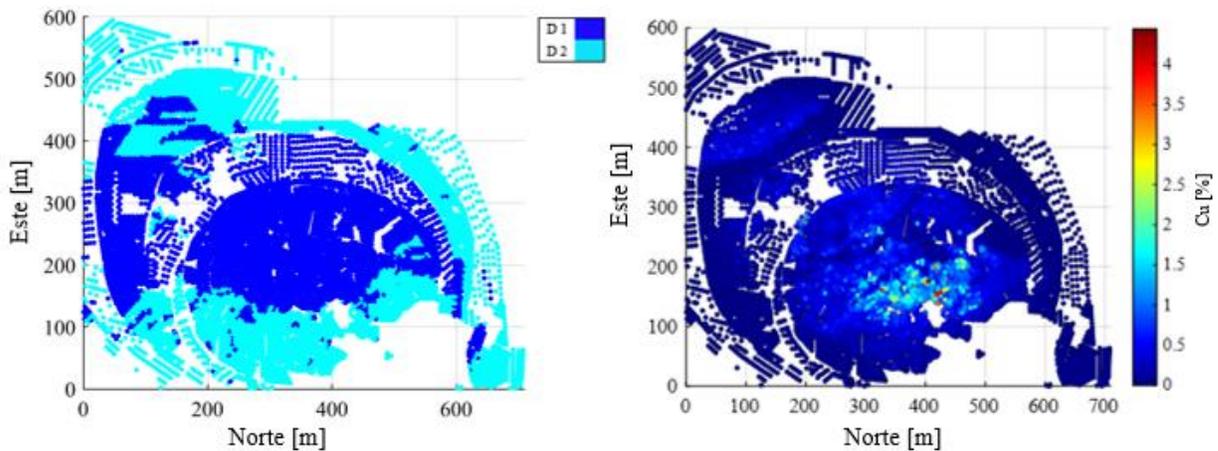


Figura 11: Disposición espacial de las leyes de cobre [%].

Se observa que las leyes altas de oro [g/t] y cobre [%] se encuentran en las rocas intrusivas, además se tiene que la zona periférica (rocas volcánicas) presenta mayormente leyes bajas de oro [g/t] y cobre [%].

Las leyes de cobre y oro tienen una correlación baja ($\rho = 0.75$), por lo que, en lo que sigue, se estudiarán por separado.

4.3. Análisis de contacto

A continuación, se presenta unas nubes de correlación diferida, donde se comparan leyes de oro (respectivamente, de cobre) medidas en dos muestras pertenecientes a tipos de roca distintos y separadas menos de 40 [m] una de otra, luego corresponden a pares de muestras ubicadas cerca de la frontera entre los dos dominios geológicos definidos.

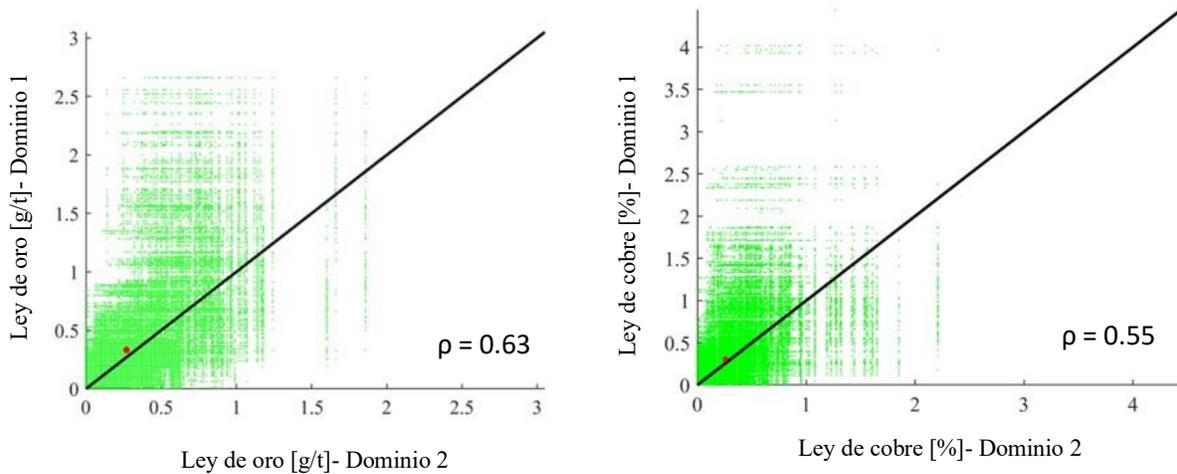


Figura 12: Diagramas de correlación diferida omnidireccional a menos de 40 [m], para leyes de oro [g/t] y cobre [%] en dos dominios diferentes 1 y 2. Los puntos rojos son los centros de gravedad de los diagramas. La línea de identidad está representada en negro, y el coeficiente de correlación ρ está indicado para cada elemento en dos dominios diferentes 1 y 2.

De la figura 12, se tiene que el oro presenta una mayor correlación lineal que el cobre cuando se comparan mediciones realizadas a menos de 40 [m] una de otra en los dominios 1 y 2. Los centros de gravedad de las nubes de correlación diferida para el oro y el cobre son: (0.32 [g/t] en el dominio 1 y 0.27 [g/t] en el dominio 2) y (0.29 [%] en el dominio 1 y 0.24 [%] en el dominio 2) respectivamente. La similitud en medias y la correlación de leyes en ambos dominios sugieren que la frontera entre los dos dominios es de tipo suave. Lo anterior se puede corroborar con los gráficos de la figura 13, que muestran la evolución del valor promedio de las leyes de oro y cobre cuando uno se acerca o aleja de la frontera entre los dos dominios.

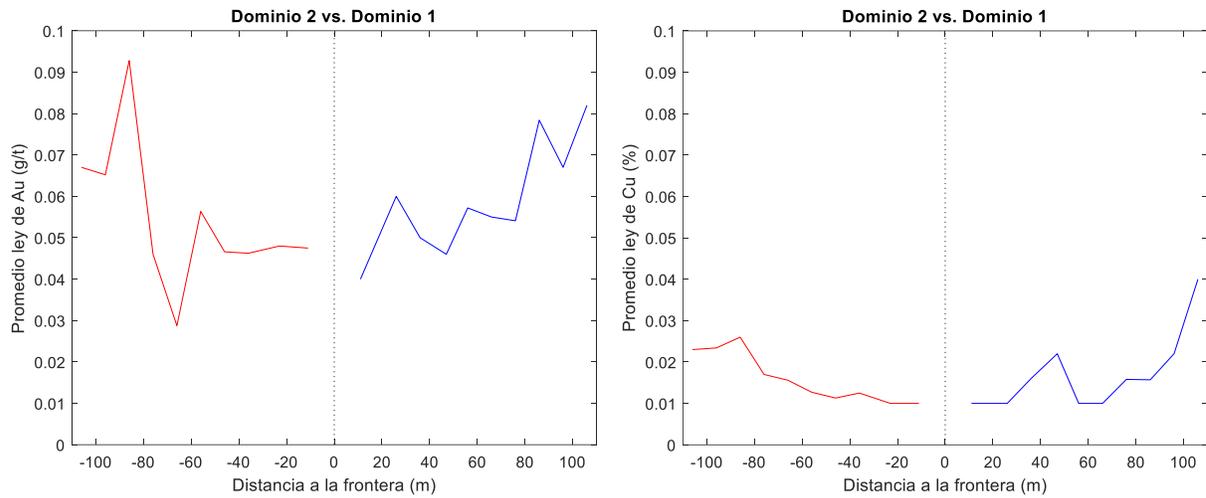


Figura 13: Promedio de las leyes de oro [g/t] y cobre [%] como función del signo de la distancia a la frontera del dominio.

Cada promedio de las leyes de la figura 13, fue realizado con una tolerancia de ± 3 [m]; de la figura anterior, se puede observar variaciones graduales de las leyes medias, tanto para el oro como para el cobre, al cruzar la frontera entre rocas volcánicas y rocas intrusivas, lo que aboga por la presencia de una frontera suave y por el método 3 como el más adecuado para la estimación de las leyes, dado que permitirá tomar en cuenta el hecho de que, localmente (cerca de la frontera entre D1 y D2), las leyes promedio de los dos dominios son idénticas y que existen correlaciones entre las mediciones observadas en ambos lados de la frontera.

4.4. Modelamiento geoestadístico

4.4.1. Determinación de direcciones de anisotropía.

Siguiendo con el análisis de la estructura espacial de leyes, se calculan los mapas variográficos (ver Anexo para los parámetros de cálculo) para determinar las direcciones principales de anisotropía, si las hay.

- Mapas variográficos de las leyes de oro y cobre en el dominio 1.

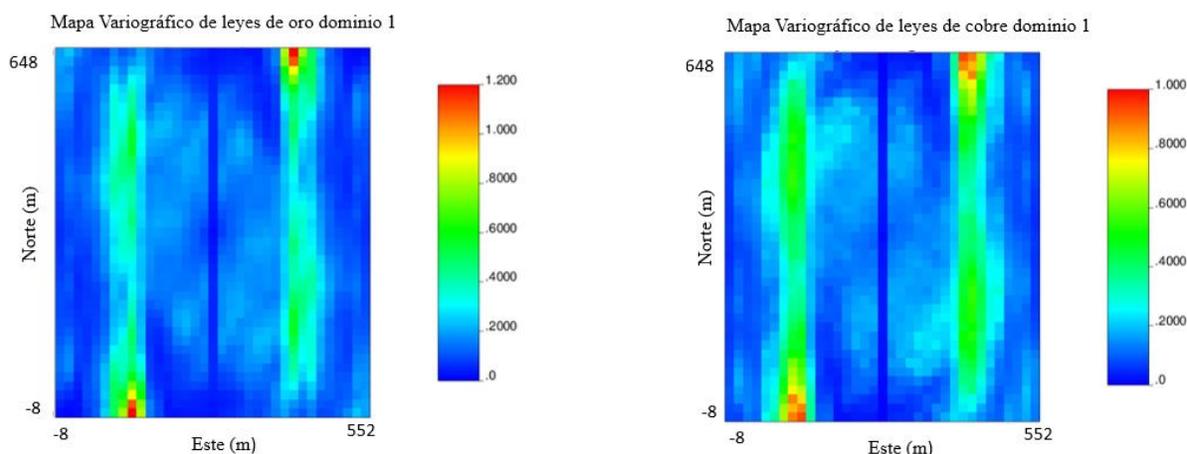


Figura 14: Mapas variográficos de leyes de oro y cobre en el dominio 1.

De acuerdo a la figura 14, se determina la existencia de anisotropía con dirección principal $N0^\circ E$, tanto para las leyes de oro como para las leyes de cobre.

- Mapas variográficos de las leyes de oro y cobre en el dominio 2.

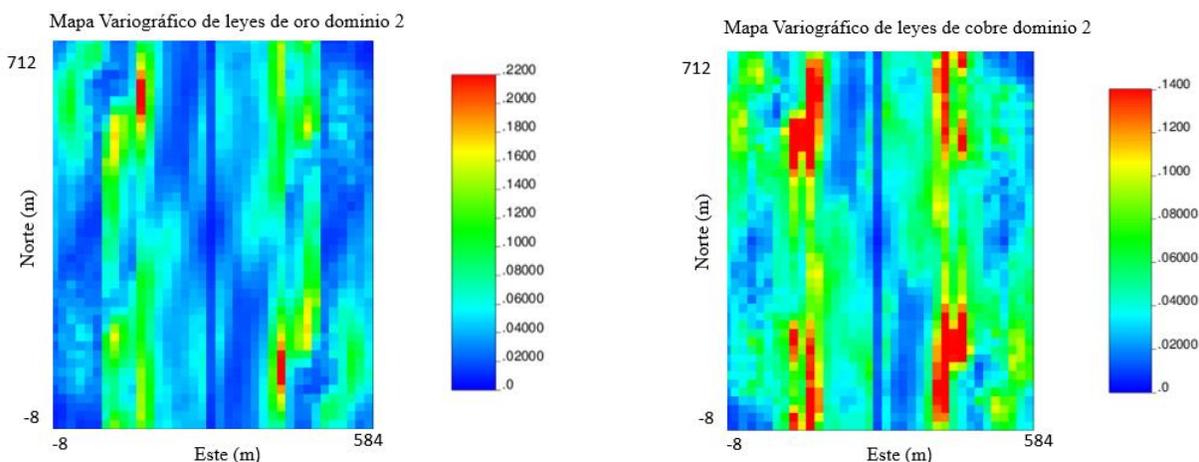


Figura 15: Mapas variográficos de leyes de oro y cobre en el dominio 2.

De acuerdo a la figura 15, se determina la existencia de anisotropía con dirección principal $N0^\circ E$, tanto para las leyes de oro como para las leyes de cobre.

4.4.2. Modelamiento variográfico.

Cada elemento (Au y Cu) consta de dos variables (una por cada dominio). El variograma experimental no permite calcular la correlación espacial cruzada entre estas dos variables, por su heterotopía total, razón por la cual se prefiere utilizar la covarianza como herramienta estructural.

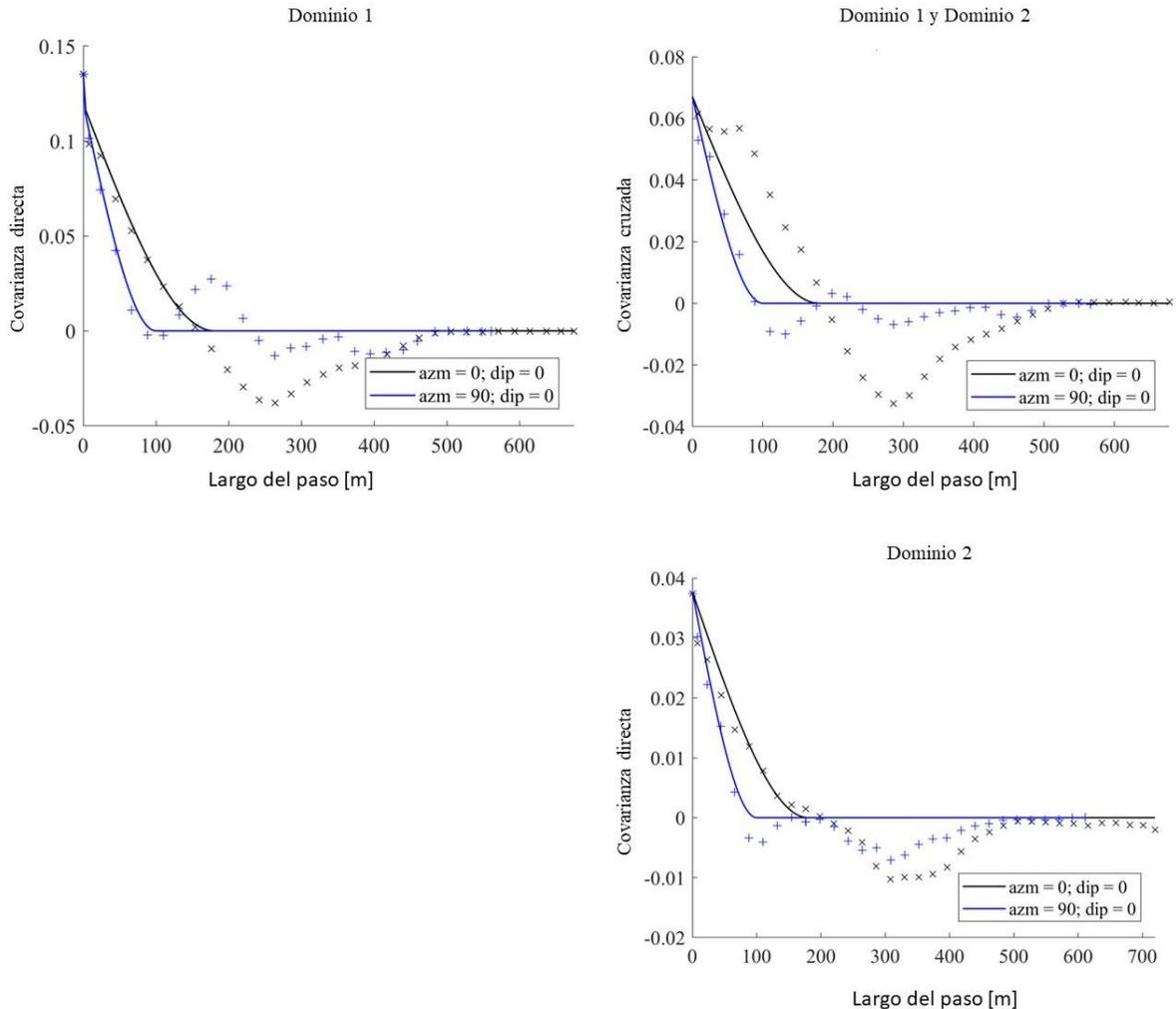


Figura 16: Covarianzas experimentales y ajustadas para las leyes de oro.

Las covarianzas no ergódicas experimentales directas (dentro de cada dominio) y cruzadas (entre dominios) fueron calculadas en la dirección principal N0°E y en la perpendicular N90°E, con una tolerancia de $\pm 20^\circ$; el paso utilizado, fue de 22 [m] con una tolerancia de \pm la mitad del paso. Para el ajuste de un modelo, se consideró una combinación de efecto pepita y estructura esférica para Au, y efecto pepita y estructura exponencial para Cu.

Tabla 4: Parámetros del modelo de covarianzas esféricas ajustadas para las leyes de oro.

Índice del primer dominio	Índice del segundo dominio	Efecto pepita	Meseta de la estructura esférica	Alcance en la dirección N0°E [m]	Alcance en la dirección N90°E [m]
1	1	0.015	0.119	180	100
1	2	0	0.067	180	100
2	2	0	0.037	180	100

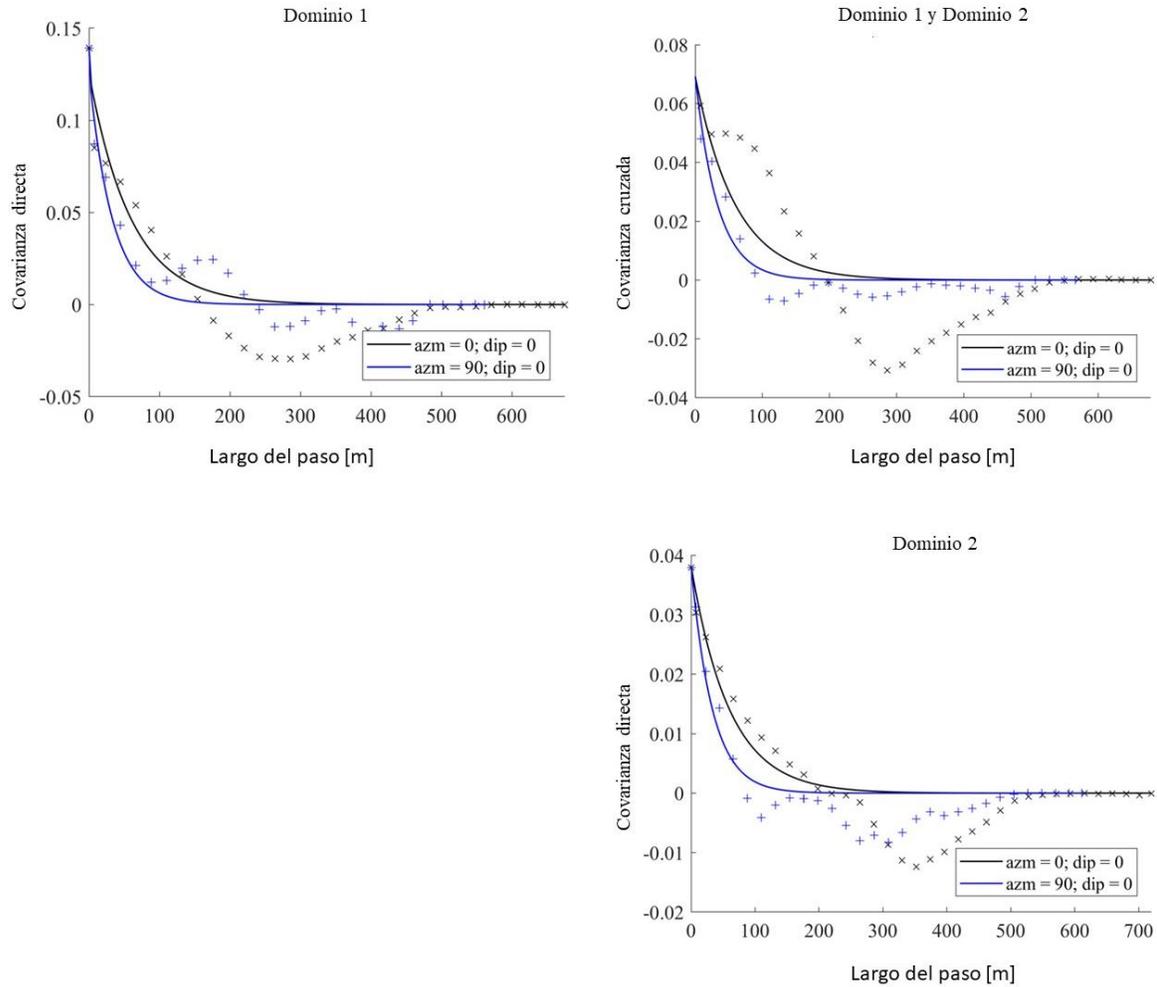


Figura 17: Covarianzas experimentales y ajustadas para las leyes de cobre.

Tabla 5: Parámetros del modelo de covarianzas exponenciales ajustadas para las leyes de cobre.

Índice del primer dominio	Índice del segundo dominio	Efecto pepita	Meseta de la estructura exponencial	Alcance en la dirección N0°E [m]	Alcance en la dirección N90°E [m]
1	1	0.013	0.125	180	100
1	2	0	0.069	180	100
2	2	0	0.038	180	100

4.4.3. Validación cruzada

Para la aplicación de los métodos de estimación, se utiliza una vecindad móvil con un radio de 180 [m] en la dirección principal y 100 [m] en la dirección perpendicular, con un número óptimo de datos de 40.

Se consideran también radios de exclusión de 0.1 y 0.15 (no se consideran datos más cercanos que el 10% o el 15% del radio de la vecindad móvil, para ver si se logran buenos resultados aun cuando no existen datos "demasiado" cercanos al punto a estimar) para comparar con los resultados obtenidos al usar la vecindad móvil entera.

Notaciones:

- (1) Número de datos
- (2) Promedio del error
- (3) Promedio del valor absoluto del error
- (4) Raíz cuadrada del promedio del error al cuadrado.

Tabla 6: Validación cruzada para las leyes de oro [g/t] en los dominios 1 y 2.

Método	Estadísticos	Dominio 1- sin radio de exclusión	Dominio 1- radio exclusión 0.1	Dominio 1- radio exclusión 0.15	Dominio 2- sin radio de exclusión	Dominio 2- radio exclusión 0.1	Dominio 2- radio exclusión 0.15
1	(1)	4549	4549	4549	3583	3583	3583
	(2)	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.001
	(3)	0.096	0.127	0.140	0.049	0.058	0.063
	(4)	0.162	0.204	0.221	0.098	0.106	0.114
2	(1)	1577	1748	1898	2227	2503	2696
	(2)	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000	0.000
	(3)	0.074	0.100	0.117	0.054	0.062	0.068
	(4)	0.133	0.166	0.195	0.106	0.111	0.120
3	(1)	4549	4549	4549	3583	3583	3583
	(2)	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
	(3)	0.097	0.129	0.143	0.049	0.057	0.062
	(4)	0.163	0.206	0.224	0.098	0.106	0.112

Tabla 7: Validación cruzada para las leyes de cobre [%] en los dominios 1 y 2.

Método	Estadísticos	Dominio 1- sin radio de exclusión	Dominio 1- radio exclusión 0.1	Dominio 1- radio exclusión 0.15	Dominio 2- sin radio de exclusión	Dominio 2- radio exclusión 0.1	Dominio 2- radio exclusión 0.15
1	(1)	4549	4549	4549	3583	3583	3583
	(2)	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	-0.003
	(3)	0.099	0.133	0.141	0.041	0.050	0.056
	(4)	0.200	0.256	0.260	0.092	0.107	0.115
2	(1)	1577	1748	1898	2227	2503	2696
	(2)	0.000	0.003	0.011	0.000	0.000	-0.003
	(3)	0.086	0.112	0.127	0.051	0.058	0.064
	(4)	0.178	0.234	0.254	0.110	0.123	0.128
3	(1)	4549	4549	4549	3583	3583	3583
	(2)	0.000	0.001	0.016	0.000	0.000	-0.006
	(3)	0.100	0.135	0.160	0.041	0.049	0.067
	(4)	0.201	0.258	0.273	0.090	0.105	0.126

Se observa que todos los métodos (1, 2 y 3) conducen a estimaciones insesgadas, con promedio de errores cercano a 0 en todos los casos probados. Sin embargo, el método 2 (cokriging ordinario tradicional) falla en estimar una cantidad significativa de datos, debido a que necesita tener al menos 1 dato de cada dominio dentro de la vecindad para poder entregar una estimación; de lo contrario, la matriz de cokriging es singular a causa de la condición de insesgo impuesta. Este inconveniente desaparece con el cokriging ordinario estandarizado (método 3), cuyos resultados son casi idénticos a aquellos del kriging ordinario por dominio (método 1). Es decir, en base a la validación cruzada, no se aprecia una ganancia - ni tampoco una pérdida - en la precisión de la estimación al realizar una estimación conjunta de las leyes de ambos dominios.

4.5. Modelo de bloques

Para la realización del modelo de bloques, se consideró una grilla con bloques de tamaño de 2 [m] x 2 [m], para obtener una mayor resolución en la delineación de los tipos de roca en el banco de interés. Primero, los tipos de roca fueron modelados por el método de más cercano vecino, considerado como suficiente para el propósito de este trabajo dada la gran cantidad de datos y la clara separación de los dos tipos de roca en el área de estudio (ver Figuras 10 y 11).

Una vez asignado un tipo de roca a cada bloque de la grilla, las leyes de oro y cobre fueron interpoladas a partir de los datos con los parámetros (covarianzas y vecindades) usados en la validación cruzada, con los tres métodos de kriging o cokriging propuestos, siendo la única diferencia la discretización de los bloques a estimar en 5 x 5 puntos para obtener estimaciones a soporte de bloques.

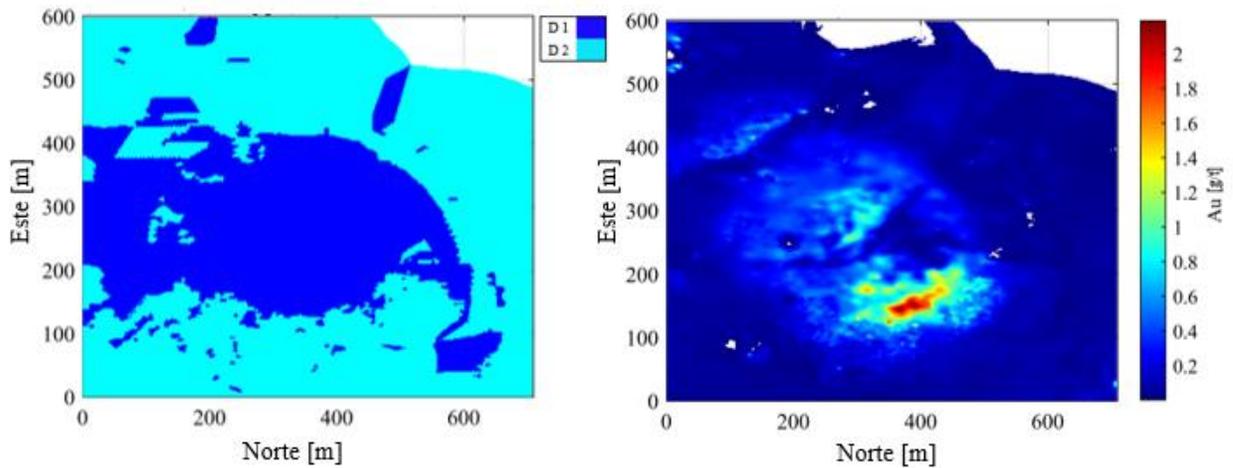


Figura 18: Modelo de bloques con leyes de oro [g/t] en una grilla de 2 [m] x 2 [m], usando el método 1.

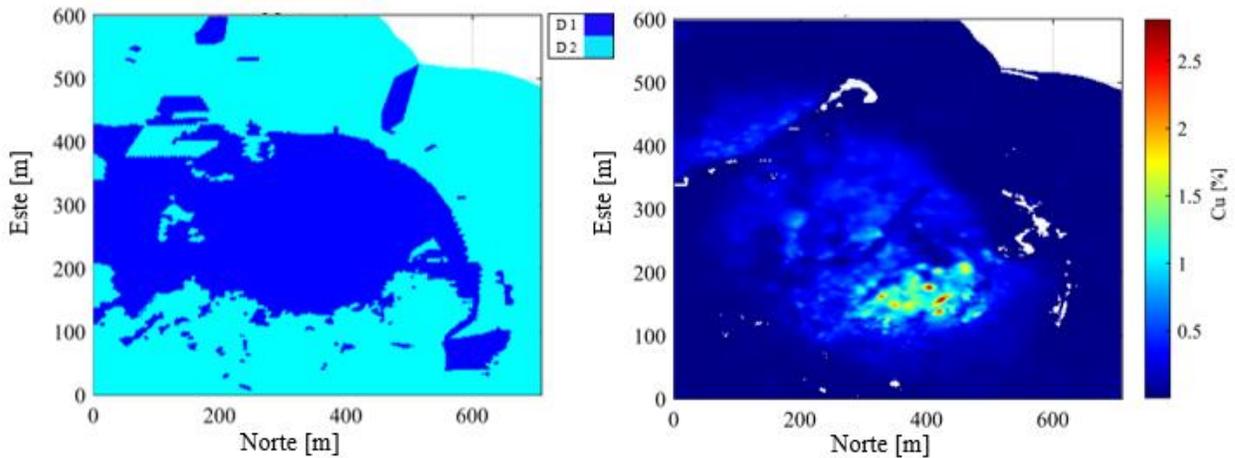


Figura 19: Modelo de bloques con leyes de cobre [%] en una grilla de 2 [m] x 2 [m], usando el método 1.

4.5.1. Recursos in situ

De las estimaciones de leyes de oro y cobre, se puede calcular los recursos totales (in situ) para los bloques estimados (ver Tabla 8 y 9). Tal como se manifestó en la validación cruzada, el método 2 (cokriging ordinario tradicional) desemboca en un sistema de ecuaciones singular para muchos bloques, los cuales quedan sin estimar. Por el contrario, los métodos 1 y 3 logran estimar (casi) todos los bloques de la grilla de interés.

Tabla 8: Recursos in situ del banco para el oro.

Método	Área del banco [m ²]	Ley media [g/t]
1	399168	0.174
2	212012	0.156
3	399912	0.174

Tabla 9: Recursos in situ del banco para el cobre.

Método	Área del banco [m ²]	Ley media [%]
1	403416	0.142
2	216096	0.120
3	402452	0.142

4.5.2. Recursos recuperables

Previo al cálculo de recursos recuperables, se rebloquean las estimaciones a un soporte de 10 [m] x 10 [m], considerado como la unidad de selección minera.

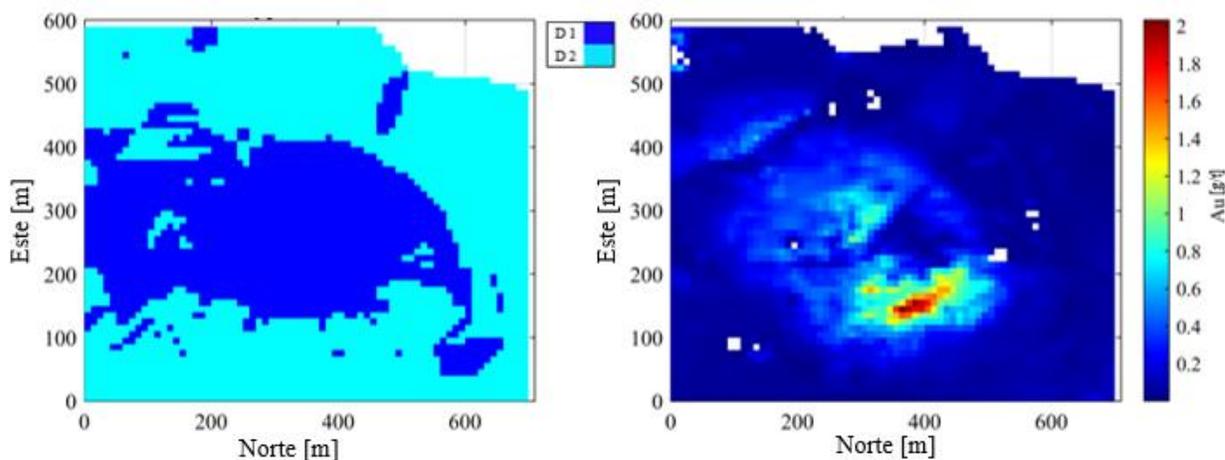


Figura 20: Modelo de bloques con leyes de oro [g/t] en una grilla de 10 [m] x 10 [m], usando el método 1.

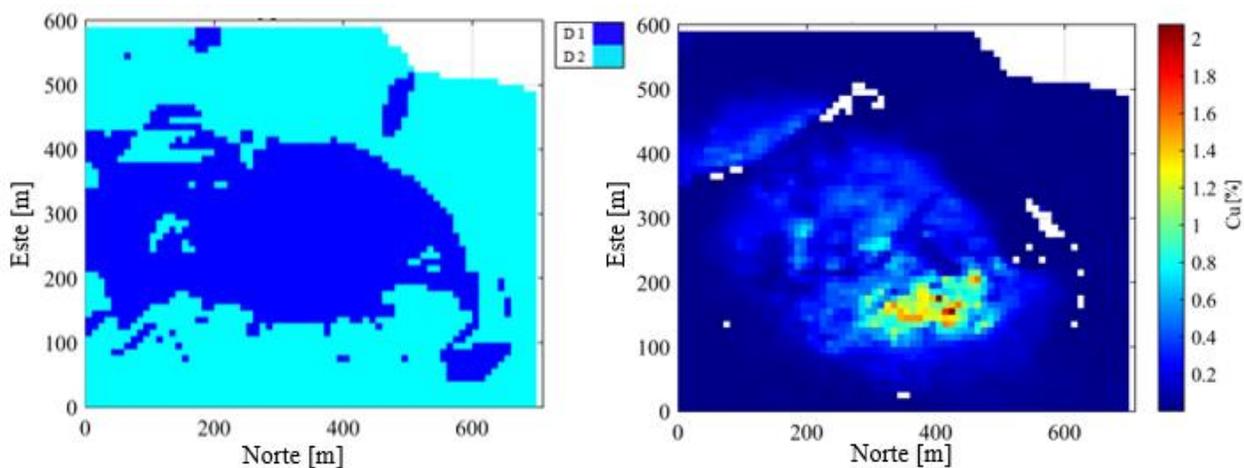


Figura 21: Modelo de bloques con leyes de cobre [%] en una grilla de 10 [m] x 10 [m], usando el método 1.

Para obtener los recursos recuperables se considera una ley de corte de 0.15 [g/t] para las leyes de oro y 0.14 [%] para las leyes de cobre, que corresponde a la mediana de las leyes.

Tabla 10: Recursos recuperables del banco para el oro.

Método	Ley de corte [g/t]	Área del banco [m ²]	Ley media [g/t]
1	0.15	130700	0.407
2	0.15	52000	0.369
3	0.15	130000	0.410

Tabla 11: Recursos recuperables del banco para el cobre.

Método	Ley de corte [%]	Área del banco [m ²]	Ley media [%]
1	0.14	128200	0.379
2	0.14	48700	0.343
3	0.14	127100	0.381

4.6. Análisis de resultados

De las validaciones cruzadas se tiene que el método 3 no logra mejorar la estimación de las leyes en cuanto a precisión o exactitud al método 1 en las leyes de oro y cobre en el dominio 1. En cuanto al método 2 la cantidad de datos estimados es 34.66% la cantidad total de datos para este dominio sin considerar un radio de exclusión, al considerar radios de exclusión 0.1 y 0.15, la cantidad de datos estimados aumenta a 38.42% y 41.72% respectivamente; por lo tanto, la cantidad de datos estimados es significativamente menor en comparación a los otros dos métodos, razón por la cual este método aparece como desaconsejable al no producir estimaciones en numerosos casos debido a la heterotopía total de las leyes de oro y cobre en los dominios 1 y 2.

Al comparar los métodos 1 y 3 en el dominio 2, se tiene lo siguiente:

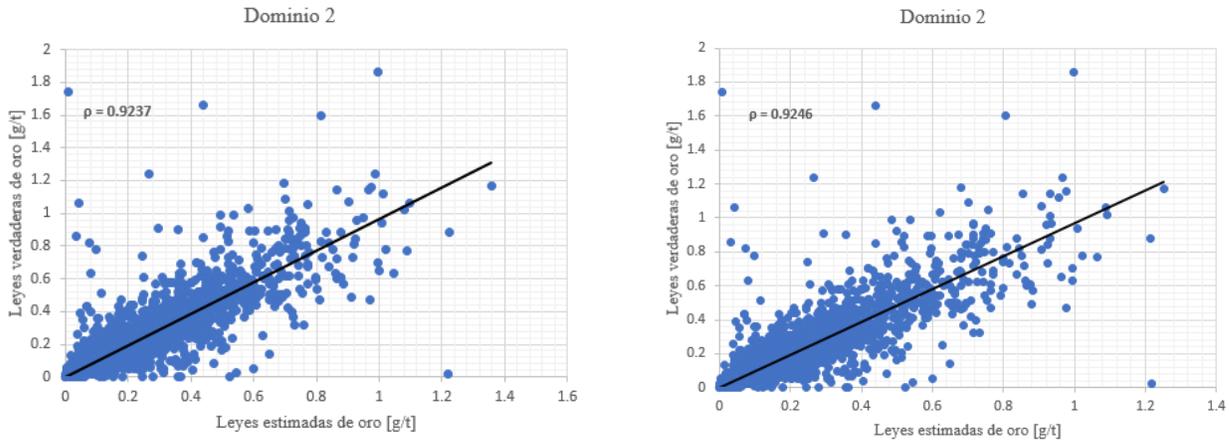


Figura 22: Diagramas de correlación entre leyes de oro [g/t] estimadas y verdaderas en el dominio 2, método 1 y 3 respectivamente.

De la figura 18, se tiene una diferencia de 0.09% en los coeficientes de correlación lineal entre los métodos 1 y 3 para la estimación de leyes de oro, sin considerar un radio de exclusión.

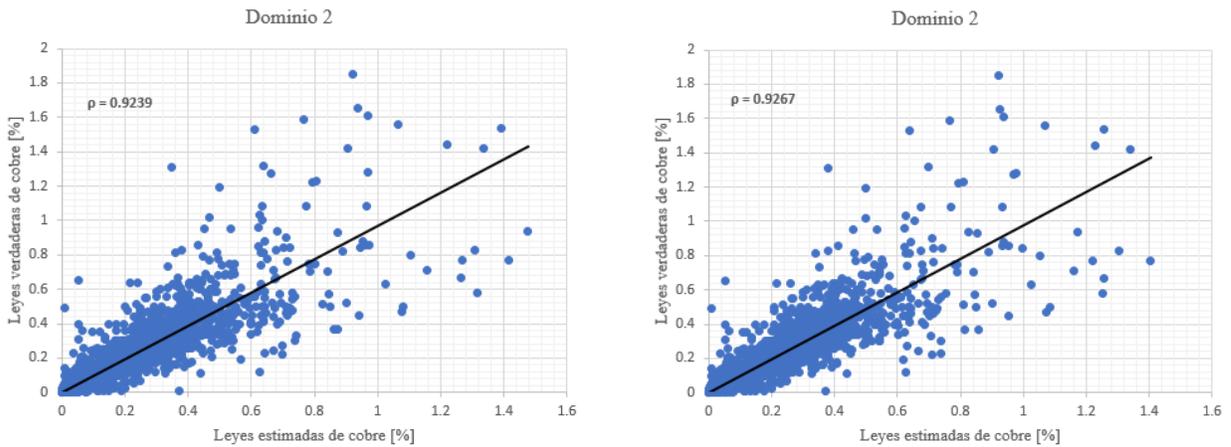


Figura 23: Diagramas de correlación entre leyes de cobre [%] estimadas y verdaderas en el dominio 2, método 1 y 3 respectivamente.

De la figura 19, se tiene una diferencia de 0.3% en los coeficientes de correlación lineal entre los métodos 1 y 3 para la estimación de leyes de cobre, sin considerar un radio de exclusión.

Del modelo de bloques, se tiene un 0.18% más de recursos in situ en el método 3 en comparación con el método 1 en el oro, y un 0.23% más de recursos in situ en el método 1 en comparación con el método 3 para el cobre. En cuanto a los recursos recuperables, tomando en cuenta las leyes de corte consideradas, se tiene un 0.19% más de recursos en el método 3 en comparación con el método 1 en el oro, y un 0.33% más de recursos en el método 1 en comparación con el método 3 en el cobre. De todos estos resultados, se concluye que, del punto de vista estadístico (en términos de precisión, exactitud, correlación entre leyes reales y estimadas, y cálculo de recursos in situ), no se aprecian diferencias significativas entre los métodos 1 y 3.

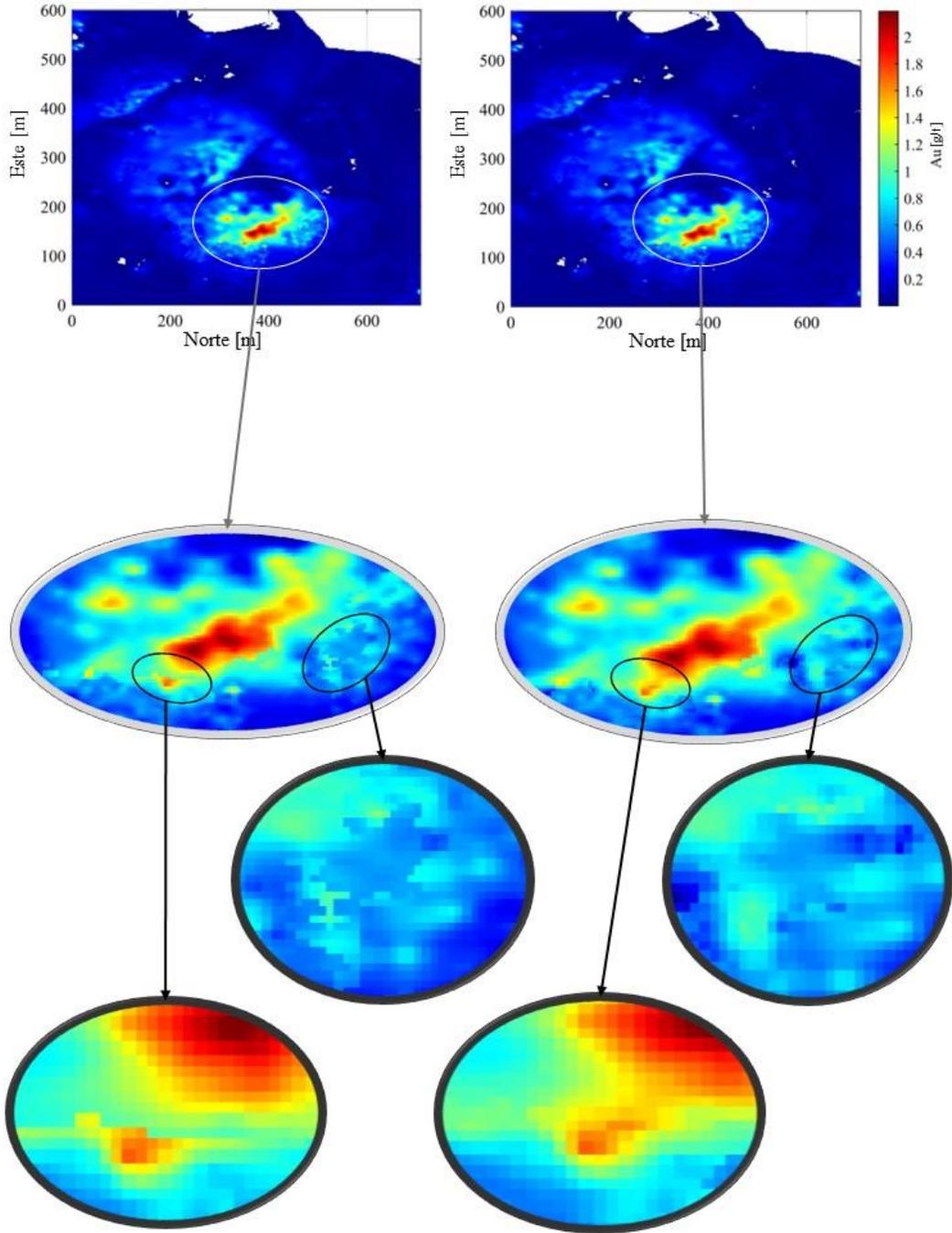


Figura 24: Visualización del banco con leyes de oro [g/t], método 1 (izquierda) y 3 (derecha), usando una grilla de 2 [m] x 2 [m].

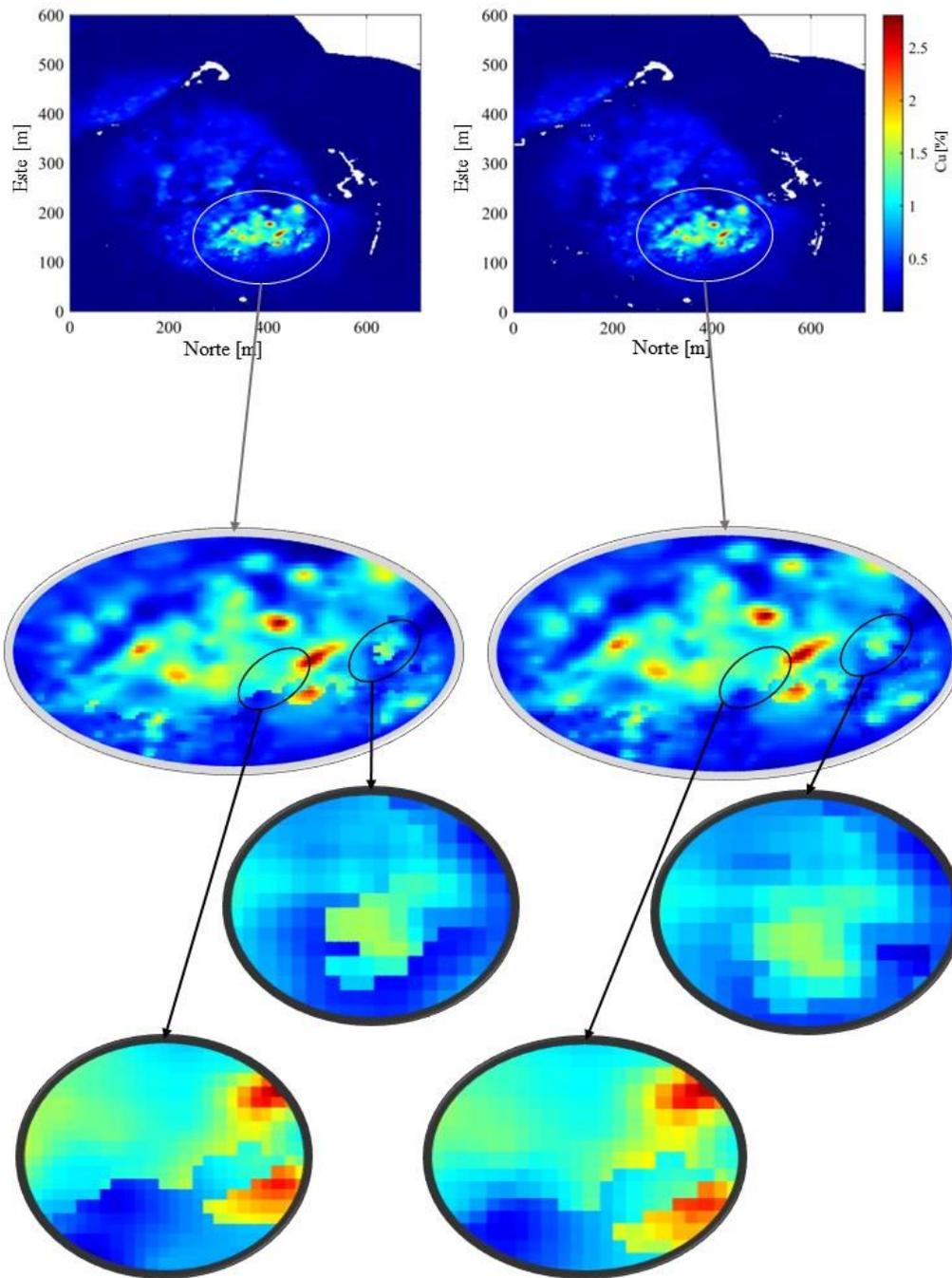


Figura 25: Visualización del banco con leyes de cobre [%], método 1 (izquierda) y 3 (derecha), usando una grilla de 2 [m] x 2 [m].

Al hacer un análisis visual para las leyes de oro y cobre, se tiene que el método 3 logra dar mayor continuidad a la estimación de las leyes, no se producen quiebres abruptos como en el método 1; por lo tanto, el modelo de bloques interpreta de mejor manera los cambios en la frontera de los dominios geológicos. Al realizar las estimaciones de los dominios 1 y 2 en forma separada, el método 1 no logra obtener un "empalme" perfecto en la frontera de los dos dominios.

5. Conclusiones

De los antecedentes del trabajo de título se tiene que la práctica común para estimar las leyes en un yacimiento es de tipo jerárquico si las fronteras de las leyes son abruptas. En los yacimientos diseminados como los yacimientos de tipo porfídico se tiene conocimiento que las leyes de cobre presentan fronteras en donde hay variaciones graduales de las leyes medias en distintos dominios geológicos; por lo tanto, la base de datos es potencialmente útil para responder la pregunta del trabajo de título.

Al comparar el desempeño de los métodos propuestos, se tiene que al integrar una covariable para mejorar la estimación de las leyes no basta; por lo tanto, si se tiene una frontera suave, considerar la ley media (localmente) la misma en ambos lados de la frontera, podría resultar en una mejora significativa en la estimación de las leyes; de esta manera, no solamente se integra la correlación espacial en las leyes medidas en ambos lados de la frontera, sino que también la identidad de medias.

De las validaciones cruzadas y cálculos de recursos in situ y recuperables, no se logra obtener una diferencia estadística importante entre estos dos métodos; por lo tanto, no se puede responder cuál de los dos es más preciso, lo único que se puede responder es que queda descartado el método 2 para estimar las leyes, dado que existen muchas configuraciones de datos donde el sistema de cokriging ordinario tradicional es singular, debido a la heterotopía total de las leyes de oro y cobre en los dominios 1 y 2.

No obstante lo anterior, del análisis visual se tiene que el método 3 (cokriging ordinario estandarizado) logra dar una mayor continuidad a la estimación de las leyes de oro y cobre en el modelo de bloques, evitando algunos cambios bruscos que se producen con el método 1 (kriging ordinario de cada dominio por separado); en consecuencia, dado que no existe una diferencia significativa de los recursos in situ y recuperables en ambos métodos, se preferiría el método 3 porque se logra obtener un modelo más realista en la frontera entre los dominios geológicos.

Como perspectiva de mejora, se podría proponer otro modelo de covarianza ajustada, que respete la propiedad de la covarianza cruzada de ser semidefinida positiva. Con los modelos tradicionales, no se logra ajustar de una manera adecuada la covarianza cruzada en la dirección principal N0°E; por lo tanto, hay un margen para mejorar el método 3.

6. Bibliografía

1. Australasian Code for Reporting of Exploration Results, Mineral Resources and Ore Reserves. The JORC Code 2012 Edition. AusIMM The Minerals Institute.
2. Bustillo, M. Mineral Resources From Exploration to Sustainability Assessment. Springer 2018, 281-282.
3. Deutsch, C.V.; Journel, A.G. GSLIB Geostatistical Software Library and User's Guide. Oxford 1992, 61-64, 69-70.
4. Ekolle-Essoh, F.; Meying, A.; Zanga-Amougou, A.; Emery, X. Resource Estimation in Multi-Unit Mineral Deposits Using a Multivariate Matérn Correlation Model: An Application in an Iron Ore Deposit of Nkout, Cameroon. *Minerals* 2022, 12, 1599.
5. Emery, X.; Porcu, E.; White, P. New validity conditions for the multivariate Matérn coregionalization model, with an application to exploration geochemistry. *Mathematical Geosciences* 2022, 54(6), 1043-1068.
6. Erickson, A.J. Geologic Interpretation, Modeling, and Representation. SME Mining Engineering Handbook 2011, 13, 173.
7. Genton, M.G.; Kleiber, W. Cross-covariance functions for multivariate geostatistics. *Stat.Sci.* 2015, 30, 147-163.
8. Glacken, I.M.; Snowden, D.V. Mineral Resource Estimation, in Mineral Resource and Ore Reserve Estimation-The AustMM Guide to Good Practice (Ed: A C Edwards), 2001, 189-198.
9. Gneiting, T.; Kleiber, W.; Schlather, M. Matérn cross-covariance functions for multivariate random fields. *Journal of the American Statistical Association* 2010, 105, 1167-1177.
10. Lowell, J.L.; Gilbert, J.M. Lateral and vertical alteration-mineralization zoning in porphyry copper ore deposits. *Economic Geology*, 1970, v.65, 373- 408.
11. Madani, N.; Maleki, M.; Sepidbar, F. Integration of Dual Border Effects in Resource Estimation: A Cokriging Practice on a Copper Porphyry Deposit. *Minerals* 2021, 11, 660.
12. Meyer, C.; Hemley, J.J. Wall rock alteration, in Barnes, H.L. eds., *Geochemistry of Hydrothermal ore deposits* New York. Holt, Rinehart, and Winston, 1967, 166-232.
13. Ortiz, J.M.; Emery, X. Geostatistical estimation of mineral resources with soft geological boundaries: A comparative study. *J. South. Afr. Inst. Min. Metall.* 2006, 106, 577-584.
14. Rossi, M.E.; Deutsch, C.V. Mineral Resource Estimation. Springer 2014, 97-113, 139-144, 147-148.
15. Wackernagel, H. Multivariate Geostatistics An Introduction With Applications. Springer 2003, 52-58, 62-65, 145-150, 175-182.

Anexo

Parámetros de cálculo del VARMAP

- Para dominio 1
 - Límites de los valores: 0 a $1e21$.
 - Valores dispersos: sí
 - Número de pasos: 20 (en la dirección Norte), 17 (en la dirección Este).
 - Largo del paso: 16 [m] (en la dirección Norte), 16 [m] (en la dirección Este).
 - Mínimo número de pares: 1
 - Meseta estandarizada: no
 - Número de variogramas: 1
 - Tipo de variograma: semivariograma tradicional.

- Para dominio 2
 - Límites de los valores: 0 a $1e21$.
 - Valores dispersos: sí
 - Número de pasos: 22 (en la dirección Norte), 18 (en la dirección Este).
 - Largo del paso: 16 [m] (en la dirección Norte), 16 [m] (en la dirección Este).
 - Mínimo número de pares: 1
 - Meseta estandarizada: no
 - Número de variogramas: 1
 - Tipo de variograma: semivariograma tradicional.