



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

**DESARROLLO DE UN MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS NO  
LINEALES INCORPORANDO RESTRICCIONES PARAMÉTRICAS**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCIÓN MECÁNICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

**JAVIER ANDRÉS LEMUS ENCALADA**

PROFESOR GUÍA:  
BENJAMÍN HERRMANN PRIESNITZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
RODRIGO HERNÁNDEZ PELLICER  
RUBÉN FERNÁNDEZ URRUTIA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:  
Fondecyt 11220465

SANTIAGO DE CHILE  
2023

**RESUMEN DE:** TESIS PARA OPTAR  
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS  
DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MECÁNICA  
Y MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MECÁNICO  
**POR:** JAVIER ANDRÉS LEMUS ENCALADA  
**FECHA:** 2023  
**PROF. GUÍA:** BENJAMÍN HERRMANN PRIESNITZ

## **DESARROLLO DE UN MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES INCORPORANDO RESTRICCIONES PARAMÉTRICAS**

La identificación dispersa de dinámica no lineal (SINDy) se ha establecido como una técnica efectiva para producir modelos interpretables de sistemas dinámicos a partir de datos usando regresión dispersa. Sin embargo, para modelar sistemas parametrizados, SINDy requiere datos de transientes para varios valores del parámetro que son difíciles de obtener en un escenario experimental. En este trabajo, se extiende el método SINDy para poder aprovechar datos de puntos de equilibrio o ciclos límite como complemento a los transientes. Para lograr esto, se incorporan restricciones al problema de optimización involucrado. Primero se demuestra que el uso de restricciones duras lleva a un problema mal condicionado, y, en su lugar, se implementan restricciones blandas mediante la modificación de la función objetivo a optimizar. Esto deriva en la formulación de un problema de regresión dispersa multiobjetivo que busca simultáneamente minimizar los errores de ajuste a los datos transientes y a los equilibrios/ciclos límite mientras penaliza la cantidad de regresores activos. La extensión, demostrada en ejemplos numéricos, es más robusta al ruido en las mediciones y necesita considerablemente menos datos para identificar correctamente un sistema dinámico parametrizado que el algoritmo SINDy original en sistemas con características periódicas.



---

## Agradecimientos

---

Primeramente, a mi familia. A mis padres, que me permitieron estudiar sin inconvenientes ni preocupaciones. A mi hermana Pilar, por la compañía y el cuidado constante de mi bienestar. A mi hermano Jorge, por la inspiración y la ayuda durante toda la carrera.

A mis amigos del colegio: Seba, Pablo, Anto, David; por su amistad, constante apoyo y salidas en Buin. Más de 20 años de amistad no dejan de ser un orgullo.

A mis amigos de la U, partiendo por aquellos que me tendieron una mano en plan común y me ayudaron durante la montaña rusa de esa época. A Lukas por ser el único híbrido colegio-U, con quien peleamos juntos espalda con espalda los 2 primeros años. A aquellos amigos que encontré en mecánica, especialmente al grupo más cercano: Byron, Carlota, Cristóbal, Emi, Natha, Paula, Ralf, Seba y Víctor. Que bueno haberlos conocido cuando lo hice.

Finalmente, agradecer a aquellos que me acompañaron durante la última etapa. Juanma, como el híbrido mecánica-magíster; y a todo el equipo del Mode-lab: Mati, Efraín, Benja, Nico, Diemen y Erick. Les deseo el mayor de los éxitos. También al profesor Benjamín Herrmann, quien llegó al DIMEC en el mejor de momento para presentar su muy interesante área de trabajo y apoyarme infinitamente en el desarrollo de mi tesis.

Muchas gracias a todos.

---

# Tabla de Contenido

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. Alcances . . . . .	3
<b>2. Antecedentes generales</b>	<b>4</b>
2.1. Sistemas dinámicos . . . . .	4
2.2. Atractores . . . . .	5
2.2.1. Bifurcaciones . . . . .	6
2.2.2. Ciclos límite . . . . .	7
2.3. Sistemas caóticos . . . . .	7
2.3.1. Sistema de Lorenz . . . . .	8
2.4. Algoritmo SINDy . . . . .	9
2.4.1. Extensión paramétrica . . . . .	10
2.4.2. SINDy con restricciones . . . . .	11
2.4.3. Límites de SINDy con restricciones . . . . .	12
<b>3. Formulación</b>	<b>13</b>
3.1. Puntos de equilibrio . . . . .	13
3.2. Datos periódicos y ciclos límite . . . . .	14
3.3. Algoritmo propuesto . . . . .	14
<b>4. Metodología</b>	<b>16</b>
4.1. Generación de datos . . . . .	16
4.1.1. Sistemas dinámicos a utilizar . . . . .	17
4.2. Número de condición . . . . .	19
4.3. Efectividad del algoritmo . . . . .	19
<b>5. Resultados y discusión</b>	<b>21</b>
5.1. Cantidad de datos y número de condición . . . . .	21
5.2. Número de condición . . . . .	22
5.2.1. Bifurcación de Hopf . . . . .	22

5.2.2.	Oscilador de Van Der Pol . . . . .	23
5.2.3.	Sistema cuasiperiódico . . . . .	23
5.2.4.	Sistema de Lorenz . . . . .	24
5.3.	Robustez al ruido . . . . .	25
5.3.1.	Bifurcación de Hopf . . . . .	25
5.3.2.	Oscilador de Van Der Pol . . . . .	26
5.3.3.	Sistema cuasiperiódico . . . . .	27
5.3.4.	Sistema de Lorenz . . . . .	28
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>30</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>32</b>
	<b>Anexo</b>	<b>35</b>
A.1.	Bifurcación de Hopf . . . . .	36
A.2.	Van der Pol . . . . .	38
A.3.	Sistema cuasiperiódico . . . . .	39
A.4.	Sistema de Lorenz . . . . .	40

---

## Índice de Tablas

---

A.1.	Ejemplo de modelo incorrectamente identificado para sistema de bifurcación de Hopf. . . . .	36
A.2.	Ejemplo de modelo correctamente identificado para sistema de bifurcación de Hopf. . . . .	37
A.3.	Ejemplo de modelo correctamente identificado para el oscilador de Van der Pol.	38
A.4.	Ejemplo de modelo correctamente identificado para el oscilador cuasiperiódico.	39
A.5.	Ejemplo de modelo correctamente identificado para el sistema de Lorenz. . . .	40

---

## Índice de Ilustraciones

---

2.1.	Ejemplo de espacio de fase para un sistema dinámico. . . . .	4
2.2.	Diferentes estados estacionarios y sus frecuencias. (a) Punto de equilibrio. (b) Solución periódica. (c) Solución cuasiperiódica. (d) Atractor extraño [23]. . . . .	5
2.3.	Diferentes bifurcaciones locales en puntos de equilibrio. Círculos negros representan equilibrios estables y círculos blancos, inestables. . . . .	6
2.4.	Forma normal de la bifurcación de Hopf de parámetro $\mu$ . En el ejemplo, $\omega = A = 1$ . . . . .	7
2.5.	Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz de parámetro $\rho$ . . . . .	8
2.6.	Sistema de Lorenz para diferentes valores del parámetro de bifurcación $\rho$ . Puntos de equilibrios en verde y atractores en rojo. . . . .	8
2.7.	Esquema de SINDy, como se explica en [11]. a) SINDy original aplicado al sistema de Lorenz, de 3 dimensiones. b) SINDy paramétrico aplicado a una bifurcación de Hopf, un sistema de 2 dimensiones y un parámetro $\mu$ . . . . .	11
3.1.	Esquema del algoritmo propuesto. . . . .	15
4.1.	Diferentes datos para evaluar el número de condición. . . . .	17
4.2.	Datos utilizados para el sistema cuasiperiódico. Los datos recolectados a largo plazo están coloreados en magenta. En negro se muestra el transiente entregado. . . . .	18
4.3.	Ejemplo de 5 familias de datos utilizados para el sistema de Lorenz. Los datos recolectados a largo plazo están coloreados en magenta. En negro se muestra el transiente entregado. . . . .	19
5.1.	Número de condición de $\Theta$ para diferentes tipos de datos en un sistema de Hopf, en función del parámetro $\alpha$ . . . . .	22
5.2.	Número de condición para la matriz $\Theta$ en el oscilador de Van der Pol. . . . .	23
5.3.	Número de condición para la matriz $\Theta$ en el oscilador cuasiperiódico. . . . .	24
5.4.	Número de condición para la matriz $\Theta$ en el sistema de Lorenz propuesto. . . . .	25
5.5.	Sensibilidad al nivel de ruido y cantidad de datos transientes para diferentes valores de $\alpha$ para la forma normal de la bifurcación de Hopf. Arriba: error en los coeficientes. Abajo: tasa de éxito. . . . .	26
5.6.	Sensibilidad al nivel de ruido y cantidad de datos transientes para diferentes valores de $\alpha$ , caso oscilador de Van der Pol. Arriba: error en los coeficientes. Abajo: tasa de éxito. . . . .	27
5.7.	Sensibilidad al nivel de ruido y cantidad de datos transientes para diferentes valores de $\alpha$ para el caso cuasiestacionario. . . . .	28

5.8.	Sensibilidad al nivel de ruido y cantidad de datos transientes para diferentes valores de $\alpha$ para el sistema de Lorenz. Arriba: error en los coeficientes. Abajo: tasa de éxito. . . . .	29
------	--	----

# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

La identificación de sistemas es un área de la ingeniería que se encarga de encontrar las reglas o principios que describen la evolución de un sistema dinámico a partir de mediciones en el dominio temporal o de frecuencia. Se basa en el análisis de datos y observaciones del comportamiento del fenómeno en cuestión, con el fin de encontrar modelos matemáticos que lo describan de manera precisa. Idealmente, las formulaciones encontradas deberían permitir generalizar el comportamiento del sistema dentro de un rango controlado de estados y parámetros. Por ejemplo, si se observa el movimiento de un péndulo bajo ciertas condiciones, el modelo debería permitir predecir el comportamiento del mismo bajo condiciones distintas, pero dentro de un rango que garantice la validez del modelo. Esta área data de la década de los 60's [1, 2], pero actualmente se ha vuelto un tópico de interés gracias a los grandes avances en poder computacional y el surgimiento de la ciencia de datos como herramienta que combina algoritmos computacionales, optimización e ingeniería de datos. Esto ha revolucionado el paradigma de encontrar modelos para sistemas dinámicos de alta complejidad. Ahora es posible apoyarse en las herramientas que entrega la ciencia de datos para generar un abanico de modelos posibles, los cuales pueden ser descartados o complementados con información que provenga de primeros principios.

Las herramientas de identificación de sistemas son variadas y están estrechamente condicionadas al tipo de dinámica que se pretende investigar. Existe una extensa clasificación de sistemas dinámicos, dependiendo de sus características. La primera gran distinción viene a partir de la linealidad del sistema buscado [3]. Si el sistema buscado es lineal, existen varios algoritmos de alta eficacia para encontrar la dinámica. Entre ellos están, por ejemplo, *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA) [4], *Balanced Proper Orthogonal Decomposition* (BPOD) [5], y más recientemente *Dynamic Mode Decomposition* (DMD) [6]. Sin embargo, la identificación de sistemas no lineales no ha sido tan prevalente, principalmente debido a que los modelos de este tipo ofrecen un gran abanico de posibles soluciones que ajusten bien a los datos, pero que no necesariamente generalicen correctamente al fenómeno estudiado frente a otros valores de entrada. Más aún, en ingeniería no siempre basta con encontrar un modelo tipo caja negra que se comporte bien frente a los datos, sino que es altamente preferible extraer leyes gobernantes que sean interpretables y generalizables para lograr capturar los

principios físicos subyacentes y validar el modelo [7–9]. Dentro de este tipo de identificación, [10] propone un algoritmo basado en programación genética, donde simbólicamente se explora el espacio de modelos posibles para obtener las ecuaciones diferenciales más apropiadas. Aunque este enfoque es efectivo a bajas dimensiones, generalmente resulta en un problema de alto costo computacional.

Otra distinción interesante es la de sistemas dinámicos que poseen dependencia explícita en su dinámica frente a un parámetro. En particular, dentro de la dinámica no lineal, la variación de un parámetro puede resultar en cambios significativos en la estabilidad del sistema. En ingeniería, conocer la existencia de estas variaciones aporta en mantener un rango operacional conocido y seguro, evitando transiciones inestables y catastróficas. Por lo tanto, la investigación de tales sistemas puede entregar conocimiento valioso sobre la dinámica subyacente del mismo, motivando estrategias de control y el desarrollo de modelos más precisos.

Recientemente, la identificación dispersa de dinámica no lineal (SINDy) se ha establecido como una técnica efectiva para producir modelos interpretables de sistemas dinámicos a partir de datos usando regresión dispersa simbólica [11]. Su efectividad ha inspirado una gran cantidad de extensiones y variantes ajustadas para problemas específicos. Por ejemplo, incorporar la posibilidad de hacer identificación de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) [12], agregar variables de control [13–15], utilizar algoritmos de regresión más robustos [16–19]. Sin embargo, para modelar sistemas con dependencia a un parámetro, el algoritmo SINDy requiere datos de transientes para varios valores del parámetro que son difíciles de obtener en un escenario experimental, además de ser altamente sensible al ruido. Esto ha alentado a encontrar técnicas de optimización más sofisticadas para este tipo de problemas, por ejemplo usando técnicas de *group sparsity* [20] o operadores proximales [21] que se alejan de la simpleza del esquema SINDy original.

## 1.1. Motivación

La motivación de este trabajo surge de poder identificar sistemas dinámicos no lineales y paramétricos a partir de datos, aprovechando la arquitectura simbólica de SINDy. Encontrar estos modelos permite predecir, controlar y/o entender mejor la dinámica de fenómenos que pueden ocurrir en diversas áreas de la ciencia e ingeniería. Idealmente, se busca reducir la cantidad y fidelidad de datos necesarios para converger a un modelo preciso, de manera de sobrellevar las principales limitaciones del algoritmo SINDy original.

## 1.2. Objetivos

### Objetivo general

Diseñar un método de identificación de sistemas no lineales con dependencia paramétrica incorporando restricciones que dependan de los parámetros.

### Objetivos Específicos

- Definir restricciones dependientes de los parámetros del sistema que se puedan incorporar al problema de regresión.

- Escribir un código computacional que permita al usuario incluir rápida e intuitivamente la información postulada para poder automatizar el nuevo algoritmo.
- Diseñar y realizar experimentos con sistemas numéricos para generar datos resueltos en el tiempo.
- Comparar la efectividad de la extensión propuesta con los resultados obtenidos con el algoritmo original.

### **1.3. Alcances**

Este trabajo busca extender al algoritmo SINDy original y comparar su efectividad frente al mismo en la identificación de sistemas dinámicos paramétricos, autónomos y no lineales. Por lo tanto, quedan excluidos del análisis otros algoritmos de identificación de sistemas, u otras dinámicas que no estén contempladas en el artículo original. Además, se requiere explicar el funcionamiento interno del algoritmo y las propiedades que se desean incorporar, por lo que se presentará un trasfondo teórico y matemático de sistemas no lineales y de la regresión dispersa, para comprender cómo obtener soluciones adecuadas en los diferentes métodos a explorar.

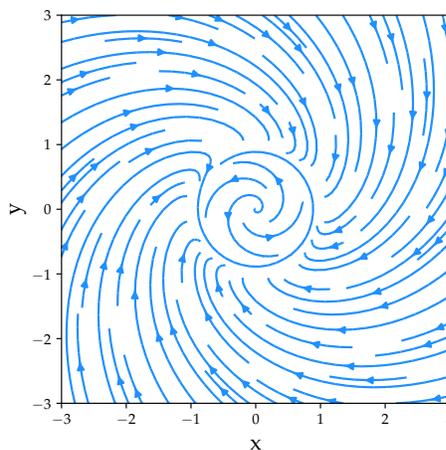
## 2.1. Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos de interés para el presente trabajo se describen por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias, de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu), \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es un vector de estado con dependencia temporal y  $\mu$  es un vector de parámetros; reunidos en una función  $\mathbf{f}$  conocida como la dinámica.

Matemáticamente, las soluciones de este conjunto de ecuaciones viene dado a partir de problemas de valor inicial. Esto puede ser visualizado como trayectorias que fluyen a través de un espacio de fase  $n$ -dimensional de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ . La Figura 2.1 muestra el espacio de fase de un sistema de dos dimensiones. Cada línea corresponde a una dinámica a partir de una condición inicial, integrada por un tiempo particular.



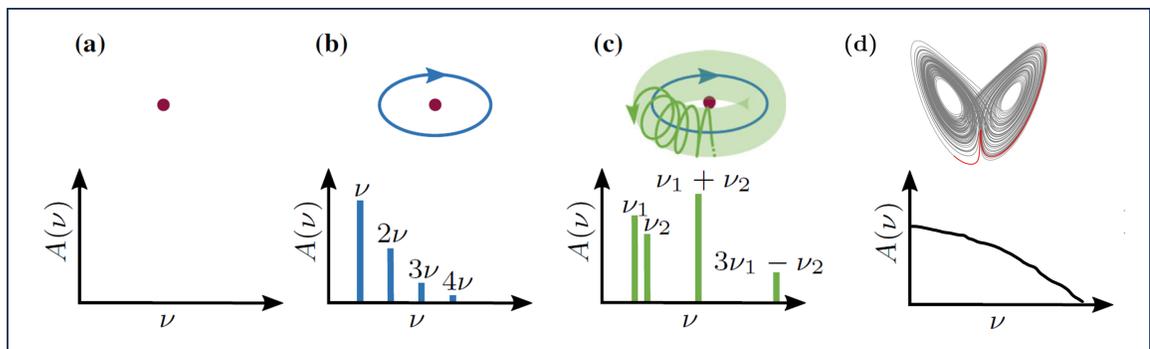
**Figura 2.1:** Ejemplo de espacio de fase para un sistema dinámico.

De acuerdo a cómo se relacione  $\mathbf{f}$  con sus variables, se definen diferentes tipos de ecuaciones diferenciales. La dependencia explícita de la dinámica frente al vector de parámetros  $\boldsymbol{\mu}$  da lugar a un *sistema dinámico paramétrico*. Los parámetros son variables adicionales, distintas a las variables de estado, que determinan las características del sistema; cada valor del vector de parámetros corresponde a un sistema dinámico diferente. Luego, a las soluciones de este tipo de sistemas se les llaman familias de parámetro  $\mu$ . A partir de ahora, los sistemas dinámicos tratados serán exclusivamente sistemas dinámicos paramétricos autónomos.

## 2.2. Atractores

En sistemas determinísticos, las soluciones que se desenvuelven alrededor de puntos fijos en la dinámica desempeñan un papel importante en el análisis y la caracterización de los sistemas dinámicos. Dentro de este trabajo, los atractores que se estudiarán se refieren a tipos de soluciones que persisten en intervalos de tiempo infinitos y pueden presentarse de las siguientes maneras [22]:

- Puntos de equilibrio: corresponden a puntos del espacio de fase donde la dinámica cesa y no poseen frecuencia. Matemáticamente,  $\mathbf{x}^*$  es un punto de equilibrio si se cumple  $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = 0$ .
- Ciclos límite: asociadas con una única frecuencia y múltiplos enteros de ella.
- Órbitas cuasiperiódicas: Caracterizadas también por un espectro de frecuencias discreto. Sin embargo, las frecuencias obtenidas no son múltiplos enteros de una frecuencia base, sino que combinaciones lineales de al menos dos frecuencias base independientes. La trayectoria ya no es cerrada y pasa de ser un ciclo límite a un toroide límite.
- Atractor caótico: Estructura fractal con dinámica aperiódica cuyas trayectorias divergen por la existencia de caos altamente dependiente de las condiciones iniciales.



**Figura 2.2:** Diferentes estados estacionarios y sus frecuencias. (a) Punto de equilibrio. (b) Solución periódica. (c) Solución cuasiperiódica. (d) Atractor extraño [23].

## 2.2.1. Bifurcaciones

En sistemas dinámicos paramétricos, cambios suaves en el valor de algún parámetro pueden causar cambios en la topología estructural del espacio de fases. En particular, estos cambios pueden apreciarse en el comportamiento y caracterización de los atractores mencionados anteriormente.

Cuando los cambios topológicos involucran sólo las características de los puntos de equilibrio, se les llama bifurcaciones locales. La existencia de este fenómeno puede resultar en la creación, destrucción o un cambio en el tipo de estabilidad de los equilibrios. Matemáticamente, considérese el sistema dinámico de la Ecuación (2.1). Una bifurcación local ocurre en el punto  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  si el jacobiano del sistema evaluado en dicho punto tiene un valor propio con parte real nula. La Figura 2.3 muestra algunas bifurcaciones en sus formas normales, es decir, las formas más simples para describir su comportamiento, donde el punto de bifurcación ocurre en el origen, destacado por la intersección de líneas continuas.

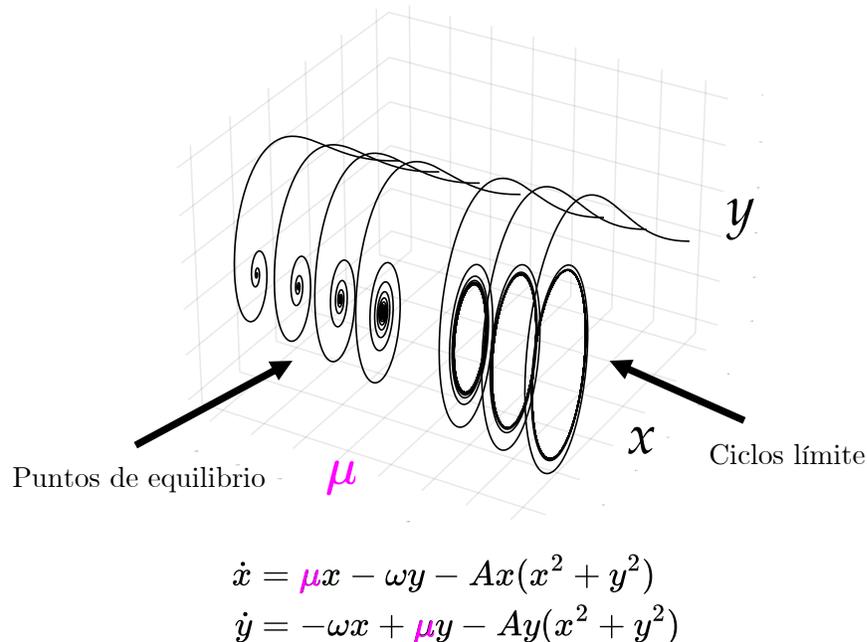
Tipo de bifurcación	Forma normal	Diagrama de bifurcación
Silla Nudo	$\dot{x} = \mu - x^2$	
Transcrítica	$\dot{x} = \mu x - x^2$	
Tridente Supercrítico	$\dot{x} = \mu x - x^3$	

**Figura 2.3:** Diferentes bifurcaciones locales en puntos de equilibrio. Círculos negros representan equilibrios estables y círculos blancos, inestables.

En los ejemplos anteriores se describen bifurcaciones que surgen de valores propios con parte real nula. Sin embargo, existe un tipo de bifurcación muy importante que ocurre en sistemas de al menos dos dimensiones, cuando los valores propios son pares de complejos conjugados de la forma  $\mu = \pm i\omega$ . Cuando los valores propios cruzan el plano complejo, surge la bifurcación de Hopf. Ésta es otro tipo de bifurcación local elemental, pues corresponde al mecanismo más sencillo de creación o destrucción de *ciclos límite*.

### 2.2.2. Ciclos límite

Los ciclos límite son trayectorias cerradas aisladas. Esto significa que corresponden a dinámicas periódicas locales donde las trayectorias cercanas son atraídas o repelidas por ellas. La Figura 2.1 muestra una bifurcación de Hopf supercrítica, y demuestra cómo el ciclo límite es único en el plano de fase y cómo dinámicas convergen a la dinámica periódica. Este tipo de periodicidad es particular a sistemas no lineales, y son un ejemplo de oscilaciones autosustentadas. La Figura 2.4 muestra la expresión matemática y la evolución cualitativa de una bifurcación de Hopf de acuerdo a la variación de su parámetro  $\mu$ . Antes de la bifurcación, cuando la parte real de los valores propios es negativa, el sistema tiende a puntos de equilibrio estables. Al pasar por la bifurcación, resulta la creación de ciclos límite estables.



**Figura 2.4:** Forma normal de la bifurcación de Hopf de parámetro  $\mu$ . En el ejemplo,  $\omega = A = 1$ .

### 2.3. Sistemas caóticos

Los sistemas dinámicos caóticos son una clase de sistemas complejos y no lineales que se caracterizan por su sensibilidad a las condiciones iniciales y su comportamiento impredecible a largo plazo, a pesar de ser sistemas inherentemente deterministas.

Cuando un sistema caótico evoluciona con el tiempo, su trayectoria puede deambular de manera aparentemente impredecible. Sin embargo, a pesar de este comportamiento aparentemente aleatorio, existe la posibilidad de que tienda a agruparse alrededor de ciertas regiones en el espacio de fase. Estos grupos, o patrones, son conocidos como atractores caóticos.

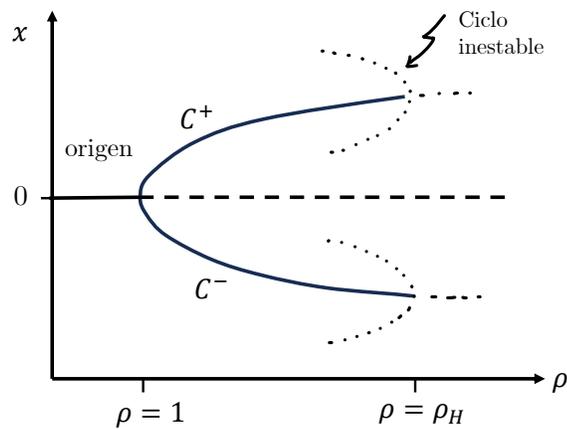
Los atractores caóticos se caracterizan por su complejidad, no periodicidad y alta sensibilidad a las condiciones iniciales. A medida que el sistema evoluciona, la trayectoria puede visitar diferentes partes del atractor caótico, sin repetir nunca el mismo camino.

### 2.3.1. Sistema de Lorenz

El sistema de Lorenz, introducido por Edward Lorenz en 1963, es uno de los sistemas más estudiados para caracterizar dinámica caótica. El sistema clásico de estudio se centra en su comportamiento caótico cuando sus ecuaciones son

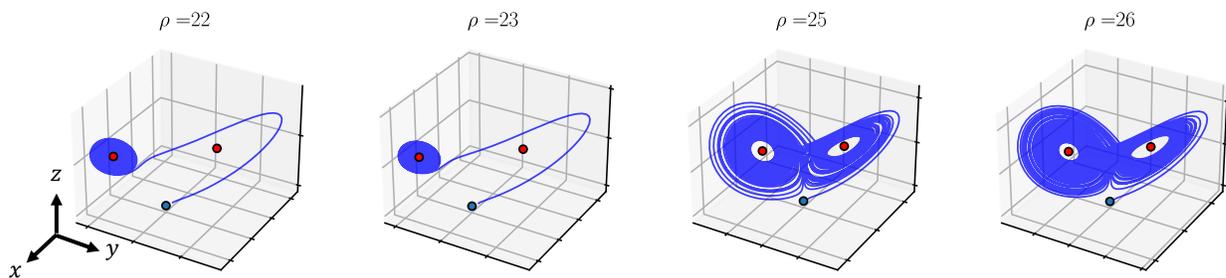
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - 2.666z \end{aligned} \tag{2.2}$$

Esta dinámica caótica aparece cuando el parámetro  $\rho$  pasa por una bifurcación de Hopf, que ocurre cuando  $\rho \approx 24.74$ , como se muestra en el diagrama de bifurcación de la Figura 2.5. A partir de ese punto, el sistema exhibe dinámica caótica, dominada por la existencia de dos atractores.



**Figura 2.5:** Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz de parámetro  $\rho$ .

Cualitativamente, en la Figura 2.6 se muestra que antes de la bifurcación, el sistema tiende a puntos de equilibrio estables; mientras que después de la bifurcación, el sistema adquiere su dinámica caótica entorno a los atractores.



**Figura 2.6:** Sistema de Lorenz para diferentes valores del parámetro de bifurcación  $\rho$ . Puntos de equilibrio en verde y atractores en rojo.

## 2.4. Algoritmo SINDy

La regresión dispersa de identificación de dinámica no lineal, o SINDy por sus siglas en inglés, es un algoritmo basado en datos para obtener ecuaciones diferenciales que describen la evolución de un sistema dinámico [11]. Su objetivo se basa en encontrar modelos altamente interpretables y generalizables, que balanceen complejidad y precisión para obtener simbólicamente la dinámica subyacente del sistema medido. Su simplicidad y efectividad ha promovido numerosas extensiones y variantes, haciéndolo una herramienta muy versátil para un amplio abanico de aplicaciones. A continuación se describirá su funcionamiento elemental y luego se ahondará en extensiones que competen a la identificación de sistemas paramétricos.

Para el sistema dinámico autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

se recopilan datos, obteniendo un registro temporal de los estados de los sistemas, en forma del vector  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$ . Además, se mide su derivada  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  o se aproxima numéricamente a partir de  $\mathbf{x}$ . Los datos se muestrean en varios tiempos  $t_j$  con  $j = 1, \dots, n$  y se organizan en 2 grandes matrices.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t_1) \\ \mathbf{x}^T(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(t_n) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^T(t_1) \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_2) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_n) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Con estos datos, se propone un modelo mediante una combinación lineal de funciones no lineales. Evaluando  $\mathbf{X}$  en una librería de  $\ell$  funciones no lineales candidatas, se forma la matriz

$$\Theta(\mathbf{X}) = [\theta_1(\mathbf{X}) \ \dots \ \theta_\ell(\mathbf{X})], \quad (2.5)$$

donde las funciones  $(\theta_j)_{j=1}^\ell$  típicamente incluyen polinomios u otras funciones no lineales. Luego, el sistema dinámico de (2.3) se puede reescribir como un sistema de matrices:

$$\dot{\mathbf{X}} = \Theta(\mathbf{X})\Xi, \quad (2.6)$$

Donde  $\Xi \in \mathbb{R}^{\ell, m}$  corresponde a una matriz que contiene los coeficientes que multiplican a las funciones expresadas en  $\Theta$ . Idealmente, se desearía expresar la dinámica de la manera más parsimoniosa posible. Para lograrlo,  $\Xi$  debiese ser una matriz *dispersa*, esto es, una matriz donde la mayoría de sus elementos son cero. Aquellas entradas no nulas deben activar suficientes funciones de  $\Theta(\mathbf{X})$  para satisfacer (2.6). La función objetivo para este esquema está dada en términos de encontrar la matriz  $\Xi$  adecuada, a través de una regresión regularizada:

$$\arg \min_{\Xi} \|\dot{\mathbf{X}} - \Theta(\mathbf{X})\Xi\|^2 + \lambda \|\Xi\|_0. \quad (2.7)$$

En la expresión anterior, el término  $\|\Xi\|_0$  corresponde a la regularización que promueve, dependiendo del valor del hiperparámetro  $\lambda$ , la dispersión en la solución. Este problema no es convexo y la solución proviene de una optimización en un espacio combinatorial de modelos que requiere una búsqueda por fuerza bruta. El esquema SINDy original busca una relajación

convexa, por ejemplo, tomando la regularización usando norma  $\|\cdot\|_1$  que puede ser resuelto a través del algoritmo LASSO [24], el cual es computacionalmente costoso; ó a través del proceso de mínimos cuadrados con *Truncado Secuencial*. Este procedimiento resuelve una regresión de mínimos cuadrados y descarta de forma iterativa los coeficientes de  $\Xi$  cuyo valor absoluto no supere un valor predeterminado relacionado con  $\lambda$ . Este procedimiento es simple de programar, computacionalmente eficiente y converge en un número muy pequeño de iteraciones.

### 2.4.1. Extensión paramétrica

En su artículo original, el algoritmo SINDy es capaz de capturar comportamiento que dependa de un parámetro independiente del tiempo  $\mu$ , tratándolo como una variable. Esta extensión es similar al algoritmo original, y para implementarla es necesario registrar datos temporales del sistema dinámico autónomo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \\ \dot{\mu} &= 0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Para obtener estos datos, se hacen  $r$  experimentos. Para cada uno de ellos, se fija el valor del parámetro  $\mu$ , y se capturan observaciones de  $\mathbf{x}$  en el tiempo. Para el experimento  $k$ , el valor de  $\mu$  es fijado en  $\mu_k$ , con  $k = 1, \dots, r$ . Además, para cada experimento, se observa  $\mathbf{x}$  a diferentes instantes de tiempo, denotados  $\mathbf{x}^T(t_j, \mu_k)$  con  $j = 1, \dots, n_k$ . Luego, es posible formar las matrices de datos:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t_1, \mu_1) & \mu_1 \\ \mathbf{x}^T(t_2, \mu_1) & \mu_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^T(t_1, \mu_2) & \mu_2 \\ \mathbf{x}^T(t_2, \mu_2) & \mu_2 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}^T(t_{n_r}, \mu_r) & \mu_r \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^T(t_1, \mu_1) & 0 \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_2, \mu_1) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_1, \mu_2) & 0 \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_2, \mu_2) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_{n_r}, \mu_r) & 0 \end{bmatrix}.\tag{2.9}$$

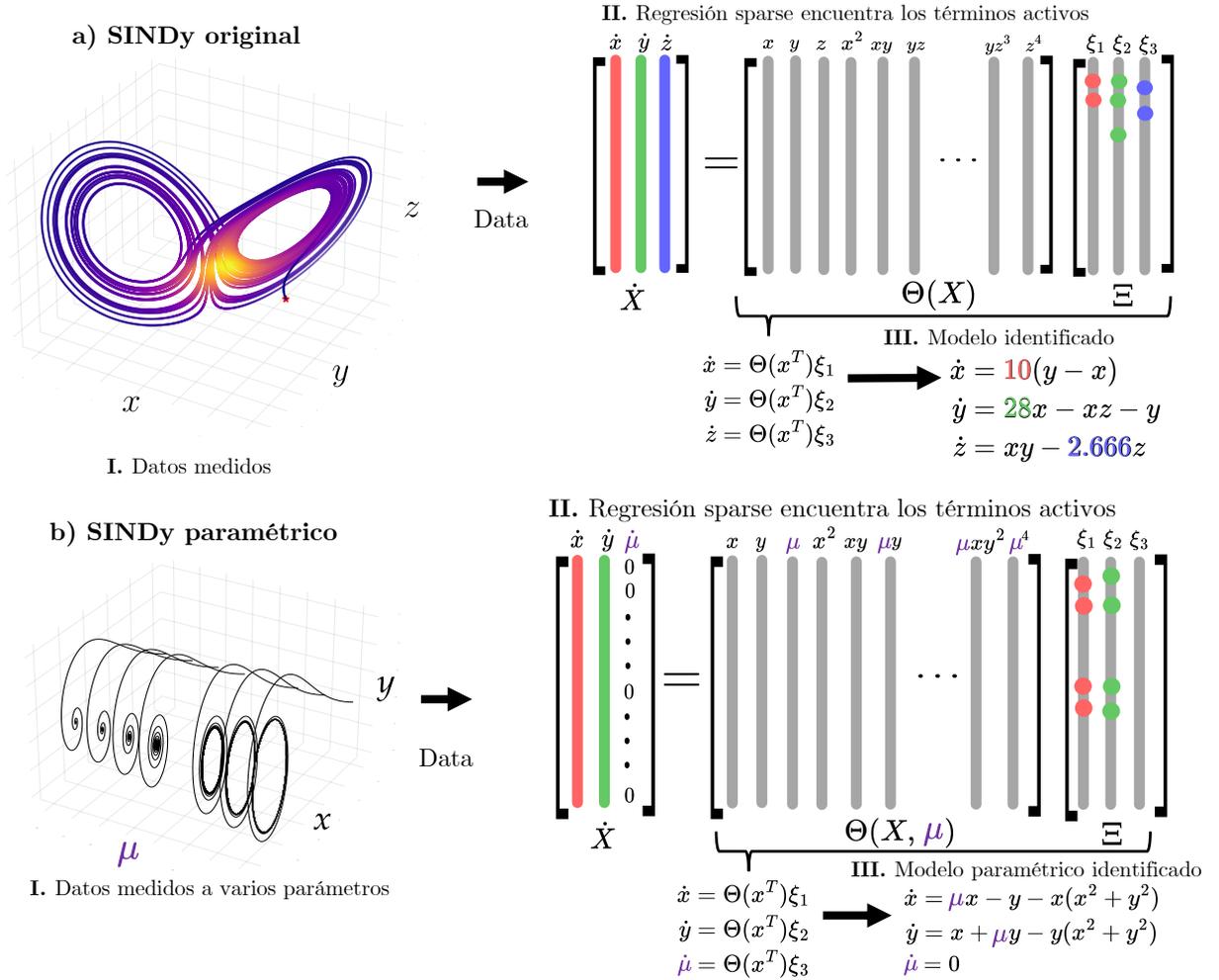
La nueva matriz de funciones candidatas posee dependencia en  $\mathbf{X}$  y  $\boldsymbol{\mu}$ . Por lo tanto, evaluando las variables, se tiene la nueva matriz:

$$\Theta(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) = [\theta_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) \quad \dots \quad \theta_\ell(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu})],\tag{2.10}$$

y (2.8) se reescribe en términos de las matrices

$$\dot{\mathbf{X}} = \Theta(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu})\Xi.\tag{2.11}$$

La regresión se realiza de manera idéntica a (2.7), y los coeficientes  $\Xi$  deberán activar funciones que incorporen la dependencia de  $\boldsymbol{\mu}$ , dependiendo de las funciones disponibles, embebidas en  $\Theta$ . En la Figura 2.7 se ejemplifica el uso de SINDy y las diferencias entre las matrices  $\Theta$  para ambos casos.



**Figura 2.7:** Esquema de SINDy, como se explica en [11]. a) SINDy original aplicado al sistema de Lorenz, de 3 dimensiones. b) SINDy paramétrico aplicado a una bifurcación de Hopf, un sistema de 2 dimensiones y un parámetro  $\mu$ .

## 2.4.2. SINDy con restricciones

Loiseau *et al.* [25] modifica al algoritmo SINDy introduciendo una regresión de mínimos cuadrados con restricciones. A este método se le llama *regresión Galerkin dispersa con restricciones*. En este caso, el problema de optimización se presenta como:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\underline{\Xi}} \|\Theta(\mathbf{X})\underline{\Xi} - \dot{\mathbf{X}}\|_2^2, \\ \text{subject to } \mathbf{C}\underline{\xi} = \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde  $\underline{\xi}$  es una forma vectorizada de la matriz de coeficientes  $\underline{\Xi}$ ; mientras que  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{d}$  son una matriz y un vector, respectivamente. Esta formulación permite imponer restricciones lineales de igualdad en la regresión.

La solución de (2.12) se encuentra iterativamente, comenzando de una regresión de mínimos cuadrados inicial, explicada más adelante. El algoritmo de truncado secuencial es emulado al agregar secuencialmente filas a  $\mathbf{C}$  y a  $\mathbf{d}$  en cada iteración, que resulten en imponer la

restricción  $\xi_i = 0$ . Esto anula coeficientes que estén debajo de un límite predeterminado, el cual depende del hiperparámetro establecido  $\lambda$ .

Usando multiplicadores de Lagrange,  $\mathbf{z}$ , cada solución de (2.12) se encuentra de manera analítica por medio de las ecuaciones de KKT, que resultan de la inversión de la matriz de KKT:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\hat{\Theta}(\mathbf{X})^T \hat{\Theta}(\mathbf{X}) & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{KKT Matrix}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\hat{\Theta}(\mathbf{X})^T \dot{\mathbf{X}}(\cdot) \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

En la expresión anterior,  $\hat{\Theta}$  es una matriz diagonal de  $m$  bloques de  $\Theta$ , donde  $m$  corresponde al número de columnas de  $\mathbf{X}$ . Un supuesto crítico es que la matriz KKT sea invertible, lo cual es cierto si y sólo si:

1.  $\mathbf{C}$  tiene filas linealmente independientes, y
2.  $\begin{bmatrix} \hat{\Theta}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$  tiene columnas linealmente independientes.

La adición secuencial de restricciones y la inversión de cada matriz KKT resultante se repite de tres a cinco veces, garantizando una solución dispersa. La principal ventaja de esta reformulación es la posibilidad de incorporar conocimiento previo respecto de la dinámica subyacente al poder agregar manualmente filas a  $\mathbf{C}$ . Estas filas pueden incluir coeficientes  $\xi_i$  conocidos o relaciones lineales entre los mismos.

### 2.4.3. Límites de SINDy con restricciones

Una desventaja importante de la metodología de SINDy con restricciones es la importancia que tiene la matriz  $\mathbf{C}$  a lo largo del algoritmo. Si la matriz  $\Theta$  tiene demasiadas columnas, por ejemplo, debido a una gran biblioteca de funciones candidatas, un problema de alta dimensionalidad o una combinación de ambos, la matriz  $\mathbf{C}$  aumentará rápidamente su tamaño de fila debido a la promoción de la dispersión. Esto afecta el número de condición de la matriz. Además, cuando se agregan restricciones adicionales que no son únicamente relaciones lineales entre los coeficientes de  $\boldsymbol{\xi}$ , la condición para una solución única se vuelve más difícil de satisfacer, lo que amenaza el rango completo de la matriz KKT en la ecuación (2.13).

En el caso de la identificación de modelos paramétricos, al agregar una columna adicional a la matriz  $\mathbf{X}$  con el parámetro de bifurcación como variable, la biblioteca de funciones candidatas aumenta de tamaño. Por lo tanto, incorporar restricciones adicionales en la dinámica que se desvíen del procedimiento original de la regresión con restricciones puede plantear desafíos para el algoritmo. Tales restricciones a incorporar requieren el desarrollo de una solución alternativa para asegurar que el algoritmo siga siendo efectivo. En la siguiente sección, se presenta una propuesta para abordar el problema mencionado anteriormente.

En contraste con la *regresión Galerkin dispersa con restricciones*, Ecuación (2.12), la metodología a presentar no se basa en una optimización con restricciones duras. En su lugar, se cambia a restricciones blandas, agregando un parámetro  $\alpha$  que penaliza desviaciones de las restricciones. Este parámetro mide la importancia relativa a cumplir con las restricciones versus minimizar la función objetivo. Una propiedad importante de este parámetro es que se puede calibrar para obtener un modelo de parsimonia que se ajusta bien a los datos. Importantly, también es posible incorporar información sobre el sistema que venga a partir de propiedades teóricas medibles.

A continuación se presentará la formulación del método al incorporar información a partir de estados estacionarios, incluyendo equilibrios estables y ciclos límite.

### 3.1. Puntos de equilibrio

Primero se propondrá el caso de incorporar datos puntuales de alta fidelidad que vengan a partir de medir puntos de equilibrio. Supongamos que empíricamente se encuentra que el punto  $\mathbf{x}^*$  es un equilibrio para el parámetro  $\mu^*$ . Matemáticamente, la dinámica subyacente debe satisfacer

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}^*, \mu^*) = 0. \quad (3.1)$$

Para agregar esta información a SINDy, agregamos un término que penalice las desviaciones de

$$\|\Theta(\mathbf{x}^*, \mu^*)\Xi - 0\|.$$

En la práctica, esto significa agregar filas a  $\mathbf{C}$  que evalúan las funciones candidatas en los puntos de equilibrio  $(\mathbf{x}^*, \mu^*)$ , e imponer que en esas filas,  $\mathbf{d} = 0$ . Agregar estas restricciones es particularmente útil al momento de medir sistemas dinámicos paramétricos, puesto que para cada  $\mu_i$  en el vector  $\boldsymbol{\mu}$ , pueden existir diferentes puntos de equilibrio estables. Como es de esperar, a mayor cantidad de puntos de equilibrio conocidos, el resultado converge a una solución que cumpla con lo pedido. Esto es porque este tipo de restricción descarta efectivamente funciones que no cumplen con dinámica nula en estos equilibrios.

## 3.2. Datos periódicos y ciclos límite

Otra contribución de la metodología es incorporar información acerca de datos periódicos y en atractores a la estimación. La importancia de las tasas de muestreo y calidad de los datos para que SINDy pueda identificar correctamente las dinámicas en diferentes tipos de atractores es discutida por Champion *et al.* [26]. La razón de por qué esto es crítico se debe principalmente a la importancia de la derivada numérica en el algoritmo. Al usar datos meramente en atractores periódicos o caóticos, el estudio muestra que se requiere menos de un período para obtener las verdaderas ecuaciones diferenciales en sistemas dinámicos uniparamétricos<sup>1</sup>.

Además, en el mismo artículo, se presenta una metodología de muestreo por ráfagas (burst sampling). Los datos se capturan en ráfagas cortas con una resolución fina, espaciadas aleatoriamente a lo largo de una trayectoria periódica. Esto reduce la tasa de muestreo efectiva, lo cual es especialmente útil cuando se está limitado por la cantidad de muestras que se puedan recolectar. Al mantener un tamaño de paso pequeño, es posible observar los detalles finos de la dinámica y también obtener una estimación más precisa de la derivada.

La metodología propuesta se relaciona tangencialmente con este trabajo, pues, para datos en atractores, se muestrean varios puntos con la técnica de muestreo por ráfagas donde se asume poder obtener datos de mayor fidelidad. Muestreando, por ejemplo, 5 puntos por ráfaga, se puede obtener numéricamente una derivada de cuarto orden central, lo que básicamente entrega la derivada en el punto central. Esta información se incorpora en la regresión del método propuesto a través de la penalización de desviaciones de la ecuación  $f(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\mu}) = \dot{\mathbf{x}}_c$  por medio de

$$\|\Theta(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Xi} - \dot{\mathbf{x}}_c\|. \quad (3.2)$$

En (3.2),  $\mathbf{x}_c$  corresponde a datos medidos exclusivamente en atractores. Se hace especial énfasis en que este muestreo por ráfagas se hace pocas veces (alrededor de 6 veces por ciclo) por parámetro, y se agregan a la regresión. En el algoritmo, esta información se incorpora por medio de, nuevamente, agregar filas a  $\mathbf{C}$  que contengan las funciones de  $\Theta$  en cada columna, evaluadas en los puntos  $\mathbf{x}_c$ . En este caso,  $\mathbf{d}$  es igual a la derivada numérica en ese punto  $\dot{\mathbf{x}}_c$ .

## 3.3. Algoritmo propuesto

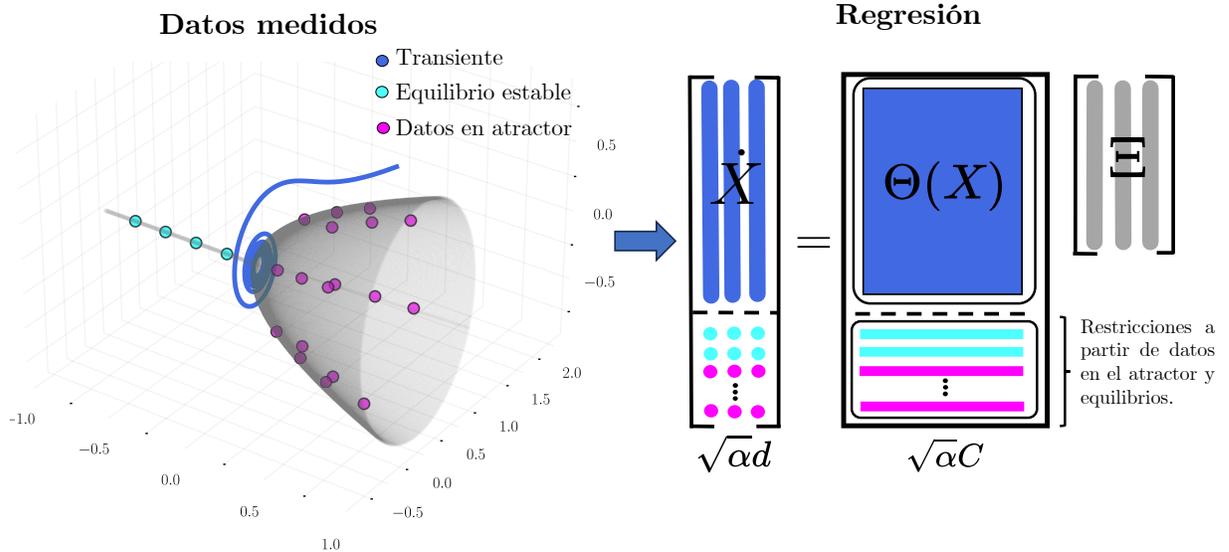
Para ambos casos, el problema de regresión propuesto se realiza como se muestra a continuación. La Ecuación (2.7) se extiende a la siguiente función objetivo:

$$\arg \min_{\boldsymbol{\Xi}} \left\| \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \sqrt{\alpha} \mathbf{d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Theta(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}) \\ \sqrt{\alpha} \mathbf{C} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Xi} \right\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\Xi}\|_0, \quad (3.3)$$

donde  $\alpha$  es el hiperparámetro de las restricciones, y  $\Theta$  es la matriz de funciones candidatas evaluadas en  $\mathbf{X}$ . Dependiendo del problema, se sugiere normalizar cada columna de  $\Theta$  por el máximo valor absoluto respectivo. Esto surge de la necesidad de ayudar al ajuste por medio de escalar apropiadamente los valores relativos dentro de cada columna. También, el

<sup>1</sup> Las condiciones para que esto ocurra es que la cantidad de muestras por periodo requeridas son por lo menos  $2^8$ , con datos altamente limpios y enfocándose en un sistema no-paramétrico. Estas conclusiones se obtuvieron usando un algoritmo SINDy con monomios de grado menor o igual a 3.

término regularizador se sustituye con el algoritmo de Truncado Secuencial. Notar que para el algoritmo,  $\mathbf{X}$  se compone casi exclusivamente de datos en dinámica transiente. La Figura 3.1 muestra un esquema e incorporación de restricciones en puntos de equilibrio y dinámica periódica al algoritmo. Se presenta el pseudocódigo del algoritmo en Algoritmo 1.



**Figura 3.1:** Esquema del algoritmo propuesto.

---

**Algoritmo 1:** Extensión a SINDy paramétrico para la incorporación de restricciones a partir de datos medidos en atractores.

---

```

1 function uSINDy ( $X, \dot{X}, C, d, \theta, \lambda, \alpha$ );
   Input : Datos en transiente y sus derivadas  $X, \dot{X}$ 
           Datos en atractores y sus derivadas  $C, d$ 
           Biblioteca de funciones  $\theta$ 
           Parámetros de dispersión y de restricciones  $\lambda, \alpha$ 
   Output: Coeficientes del modelo  $\Xi$ 
2  $dX \leftarrow$  Concatenando verticalmente los vectores  $\dot{X}, \sqrt{\alpha}d$ ;
3  $\Theta \leftarrow$  Concatenando verticalmente las matrices  $\theta(X), \sqrt{\alpha}\theta(C)$ ;
4 for columna de  $\Theta$  do
5    $\text{norms} \leftarrow \mathbf{max}(\mathbf{abs}(\text{columna}))$ ;
6    $\text{columna} \leftarrow \text{columna}/\text{norms}$  ▷ Normalizar columnas de  $\Theta$ 
7 Calcular un  $\Xi$  inicial, resolviendo  $dX = \Theta\Xi$ ;
8 for iteración  $i$  con  $i = 1, \dots, 5$  do
9   for columna de  $\Xi$  do
10     $\lambda_2 \leftarrow \mathbf{max}(\mathbf{abs}(\text{columna})) \times \lambda$ ;
11    Los valores de columna menores a  $\lambda_2$  se igualan a 0 ▷ Truncado Secuencial
12    Resolver con el nuevo  $\Xi$ ,  $dX = \Theta\Xi$ ;
13     $\Xi \leftarrow \Xi/\text{norms}$ 

```

---

## 4.1. Generación de datos

Para evaluar el rendimiento del algoritmo propuesto, se aplicará a diferentes sistemas dinámicos que presenten alguno de los atractores particulares discutidos en la Sección 2.2, que corresponden a:

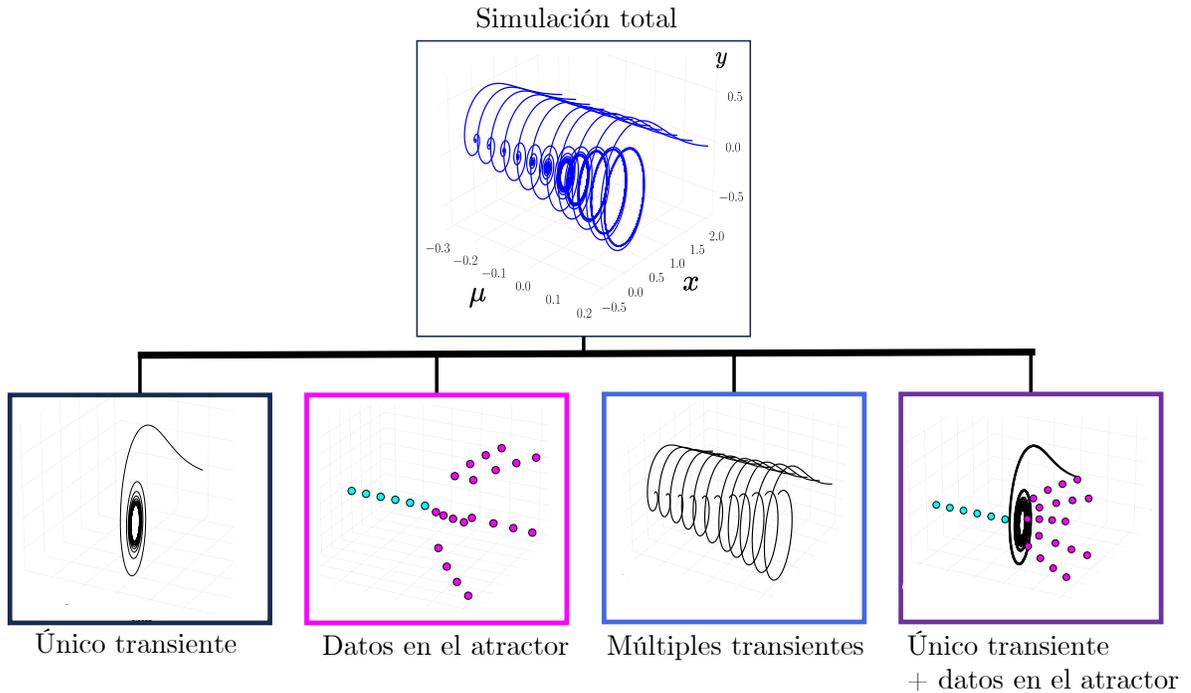
- Puntos de equilibrio
- Ciclos límite
- Órbita cuasiperiódica
- Atractor caótico

La generación de las bases de datos se explica a continuación. Para cada ejemplo se generaron familias de soluciones para un parámetro  $\mu$ . Tomando como referencia los sistemas evaluados por Fasel *et al.* [27], cada trayectoria fue obtenida mediante integración numérica por 75 unidades de tiempo, con un paso temporal de 0.01. Además, se generaron a partir de una misma condición inicial.

A partir de esta base, se formaron subconjuntos de datos que representan diferentes escenarios relacionados con transientes o atractores en los que se podría hacer una regresión. La Figura 4.1 muestra los datos totales y cómo se subdividieron, para el primer ejemplo de una bifurcación de Hopf. Los diferentes tipos de datos se distinguen de la siguiente manera:

- Un transiente sin ruido a un valor del parámetro.
- Puntos de equilibrio (color cyan) y puntos medidos en atractores (color magenta), obtenidos por muestreo por ráfaga (5 puntos para obtener una derivada de 4to orden central, en el punto visualizado).
- Gran número de transientes a diferentes valores del parámetro.

- Los datos propuestos por el método presentado: 1 transiente y los diferentes puntos de equilibrio y en atractores a diferentes valores del parámetro.



**Figura 4.1:** Diferentes datos para evaluar el número de condición.

#### 4.1.1. Sistemas dinámicos a utilizar

Para ciclos límite, se utilizarán dos sistemas dinámicos característicos: la ya mencionada forma normal de la bifurcación de Hopf y el oscilador de Van der Pol. En el caso de la bifurcación de Hopf, el sistema de ecuaciones diferenciales que la describe es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - \omega y - Ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \omega x + \mu y - Ay(x^2 + y^2)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Con  $\omega = A = 1$ . Los datos entregados como restricción, para el caso de la dinámica de Hopf, son los mismos mostrados en la Figura 4.1, caso final.

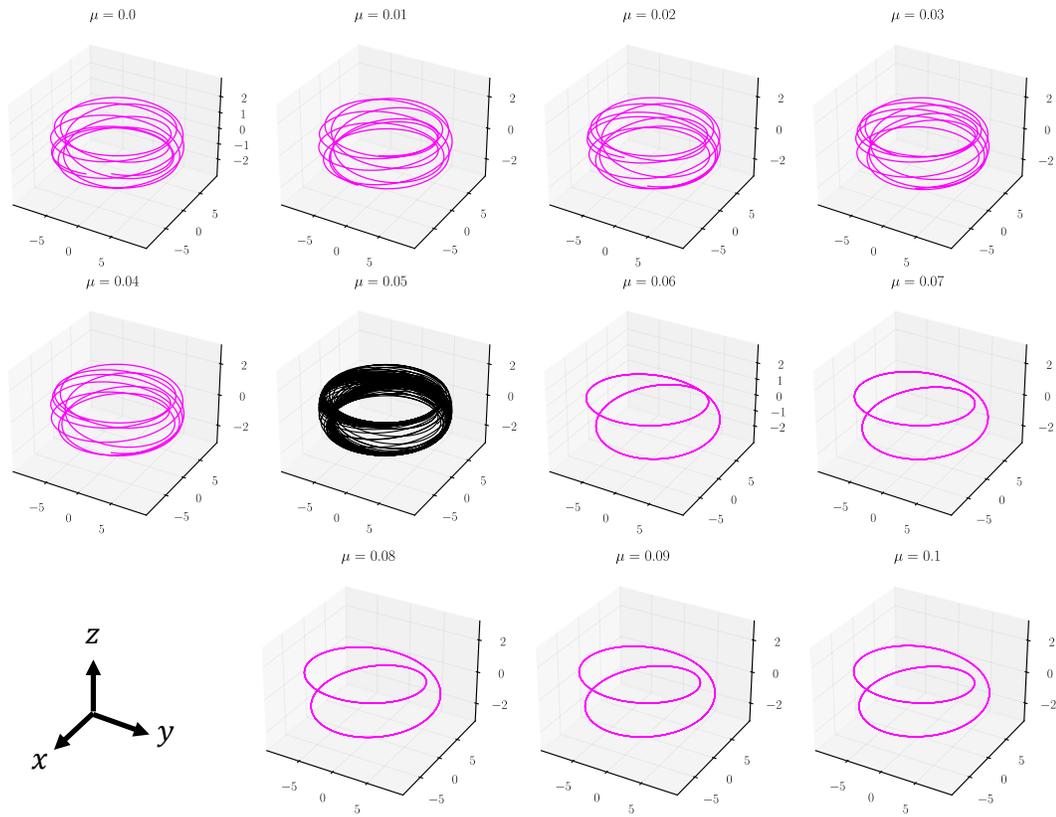
Para el oscilador de Van der Pol, el transiente y las restricciones son similares al caso anterior. Las ecuaciones utilizadas para la generación de datos son:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu y(1 - x^2) - x\end{aligned}\tag{4.2}$$

Por otro lado, para el sistema cuasiperiódico se tienen, en coordenadas toroidales, las siguientes ecuaciones a utilizar:

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= r - r^3 + \mu r \cos(\phi - 2\theta) \\
 \dot{\theta} &= 1 - l_r r^2 + \mu \sin(\phi - 2\theta) \\
 \dot{\phi} &= 1 \\
 \dot{\mu} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Se puede observar la forma toroidal cuando se grafica el sistema en coordenadas cartesianas, como se muestra en la Figura 4.2. En la misma Figura se destacan los datos a largo plazo que serán ponderados por  $\alpha$ , mientras que en negro se muestra un transiente inicial para incluir en la regresión.

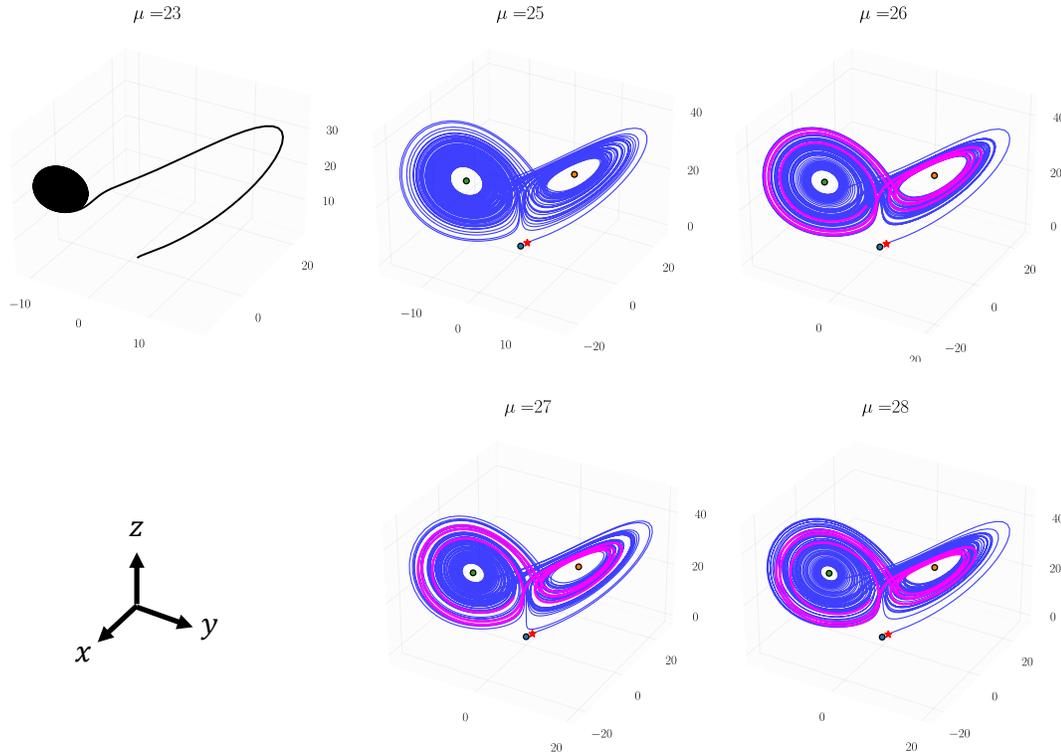


**Figura 4.2:** Datos utilizados para el sistema cuasiperiódico. Los datos recolectados a largo plazo están coloreados en magenta. En negro se muestra el transiente entregado.

Finalmente, para el atractor caótico se utilizará el sistema de Lorenz, cuyas ecuaciones están dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x), \\
\dot{y} &= x(\mu - z) - y, \\
\dot{z} &= xy - \beta z
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

Con  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  y  $\mu$  siendo el parámetro de estudio, que se mueve entre los valores 16 y 29. La Figura 5.4 muestra las últimas 5 familias de datos para ejemplificar la recolección de datos en el atractor.



**Figura 4.3:** Ejemplo de 5 familias de datos utilizados para el sistema de Lorenz. Los datos recolectados a largo plazo están coloreados en magenta. En negro se muestra el transiente entregado.

## 4.2. Número de condición

Con cada subconjunto de datos, se procedió a evaluar el número de condición de la matriz  $\Theta$  para diferentes bibliotecas de funciones, dependiendo del ejemplo. En el Anexo se pueden encontrar las diferentes funciones candidatas para cada caso específico. Se busca encontrar cómo varía el número de condición al cambiar el valor de  $\alpha$  dentro de un rango de valores.

## 4.3. Efectividad del algoritmo

En este caso, para cada sistema de ejemplo, a la dinámica transiente escogida se le agregaron dos formas de manipulación aleatoria para testear la robustez del método propuesto. (1) ruido Gaussiano, con media 0 y varianza  $\sigma/||u||_{rms}$ , donde  $||u||_{rms}$  es el valor RMS de la

trayectoria; y (2) una remoción aleatoria de puntos en  $\mathbf{X}$  y  $\dot{\mathbf{X}}$ , lo que afecta el largo total de la cantidad de datos.

Para cada ejemplo, se usaron 2 métricas de efectividad del algoritmo propuesto:

1. La estructura del modelo identificado (tasa de éxito), que corresponde a un valor binario de si están activas o no todas casillas correctas de funciones al mismo tiempo, sin importar el valor de su coeficiente.
2. El error de los coeficientes, que cuantifica cuánto se desvían los coeficientes identificados  $\Xi$  de los parámetros reales  $\hat{\Xi}$  usados para generar los datos. Esto se mide a partir de la Ecuación (4.5), mostrada a continuación:

$$E_c = \frac{\|\hat{\Xi} - \Xi\|_F}{\|\hat{\Xi}\|_F}, \quad (4.5)$$

donde  $\|\cdot\|_F$  es la norma Frobenius.

Se fijaron los valores de  $\alpha$  en tres diferentes escenarios:  $\alpha = 1$  para medir la efectividad del algoritmo SINDy original; y 2 valores más grandes para observar la injerencia que tiene en las soluciones. Para mostrar los resultados obtenidos, se generan 500 instancias aleatorias y los resultados en cada escenario se promedian.

Respecto al algoritmo, se utilizó una derivada numérica de 4to orden. Además, se fijó el valor de  $\lambda$  en cada ejemplo.

## 5.1. Cantidad de datos y número de condición

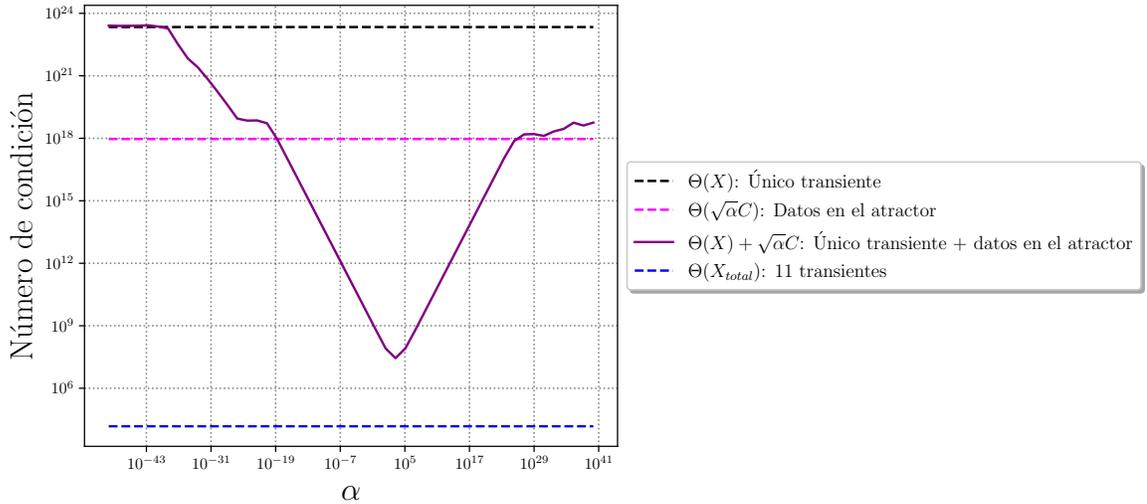
Una de las principales ventajas de este método es que potencialmente sólo se requiere de un transiente particular, y agregar los pocos datos en equilibrios y/o atractores disponibles como restricciones para encontrar la dinámica paramétrica del sistema. Esto reduce altamente la cantidad de datos necesarios para SINDy. Además, existe un grado de robustez que puede sobrellevar el algoritmo respecto al ruido que el transiente puede contener, siempre y cuando se garantice una calidad alta de los datos en los puntos de restricción.

El trabajo de Champion *et al.* [26] muestra que la dinámica de sistemas periodicos y caóticos puede ser descubierta mediante una regresión a valores encontrados sólo en atractores, en casos particulares. Las condiciones para que ello ocurra son datos sin ruido y con una tasa de muestreo alta. Sin embargo, no se refiere a condiciones para identificar correctamente sistemas paramétricos. Si se decidiera aplicar la metodología utilizada en el artículo, se requeriría tener muchos datos experimentales y de alta calidad para cada valor del parámetro. En la metodología presentada en este trabajo, se relajan las condiciones, utilizando un transiente de poca fidelidad y muy pocos datos en estado estacionario de alta fidelidad. Además, se propone una librería de funciones candidata más grande, incluyendo, por ejemplo, monomios de grado menor o igual a 4. Dado que se busca medir el desempeño de SINDy en el límite de pocos datos, el uso de sólo datos en trayectorias periódicas llevarían a la matriz de funciones candidatas a estar mal condicionada, especialmente dado a que, en el caso paramétrico, el tamaño de  $\Theta(\mathbf{X})$  aumenta significativamente al agregar un parámetro como variable. Por lo tanto, nuevamente se destaca el interés de usar el número de condición como una de las posibles métricas para el algoritmo propuesto. Eso es lo que se mostrará a continuación.

## 5.2. Número de condición

### 5.2.1. Bifurcación de Hopf

Al evaluar el número de condición de la matriz de funciones candidatas (ver Anexo A.2) en los diferentes tipos de datos descritos anteriormente, se obtuvo el siguiente resultado para el sistema de bifurcación de Hopf:



**Figura 5.1:** Número de condición de  $\Theta$  para diferentes tipos de datos en un sistema de Hopf, en función del parámetro  $\alpha$ .

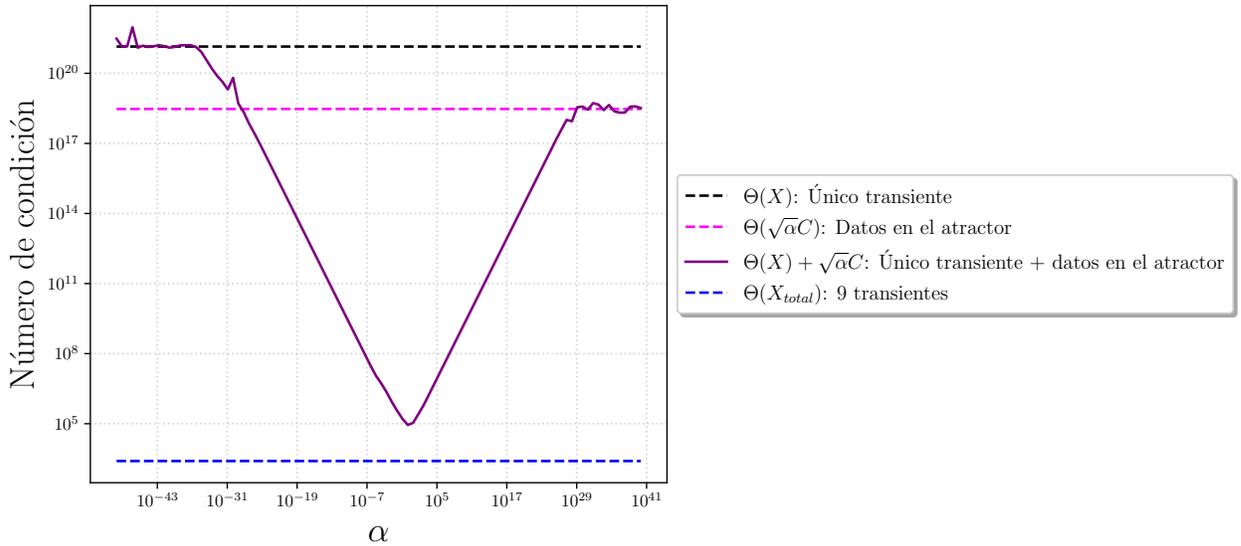
La Figura 5.1 muestra que el número de condición de  $\Theta$  posee una alta dependencia de acuerdo a qué tipo de dato se le esté entregando al algoritmo y el valor que se le entregue al hiperparámetro propuesto  $\alpha$ . La línea negra muestra que el número de condición es extremadamente alto para un solo transiente. Por otro lado, también es alto para los puntos obtenidos por muestreo por ráfagas, del orden de  $10^{18}$ . El caso ideal, con muchos datos y muchos transientes se muestra en línea azul, donde el número de condición es bajo y el algoritmo es capaz de hacer la regresión con eficacia. Importantemente, los datos propuestos para el algoritmo del presente trabajo se muestra en la línea morada continua. Denota un mínimo en el número de condición ( $\alpha \approx 10^3$ ) que resulta de un compromiso entre el caso ideal y los casos de baja cantidad de datos; regulado de acuerdo al hiperparámetro  $\alpha$ . Es importante notar que para un  $\alpha$  cercano a 0, el sistema tiende a quitar importancia a las restricciones, decantando al caso de sólo un transiente. Evidentemente, lo contrario ocurre para valores altos de  $\alpha$ , donde la regresión se inclina a tomar en cuenta sólo los valores puntuales de las restricciones.

El resultado obtenido para este sistema periódico es altamente valioso, pues avala la importancia de ponderar aquellos pocos datos que puedan obtenerse midiendo en el atractor, que sean de alta fidelidad, para que se obtenga una solución de compromiso óptima en el sentido del número de condición en la regresión. A partir de la información dada, para la implementación de la siguiente métrica de robustez, se fija un valor de  $\alpha$ , tomándolo como un valor intermedio entre el mínimo y el valor máximo a la derecha de la misma curva. En este caso, el valor intermedio a tomar será  $\alpha = 10^{14}$ .

### 5.2.2. Oscilador de Van Der Pol

Como se mencionó en 3.2, la dinámica sin dependencia paramétrica del oscilador de Van der Pol sí es identificada correctamente por SINDy utilizando sólo un atractor periódico. Esto plantea la pregunta ¿cómo desempeña, entonces, el algoritmo propuesto con el caso paramétrico de un sistema que SINDy ya puede identificar correctamente con pocos datos? Esto se muestra a continuación.

Para el oscilador de Van der Pol, se aplica la misma metodología. Primero se evaluará el número de condición de la matriz  $\Theta$ , para luego encontrar un valor de  $\alpha$  razonable para incorporar al algoritmo y hacer el testeo de robustez. Las funciones candidatas a utilizar son las mismas que las del caso anterior, y se pueden encontrar en la Tabla A.3 del Anexo. La Figura 5.2 nuevamente muestra al comportamiento observado en el sistema anterior. El mínimo en la curva morada indica cómo afecta la ponderación de restricciones al sistema. A partir de ella, se escoje un valor a su derecha, en este caso  $\alpha = 10^8$  como valor prudente para el algoritmo.

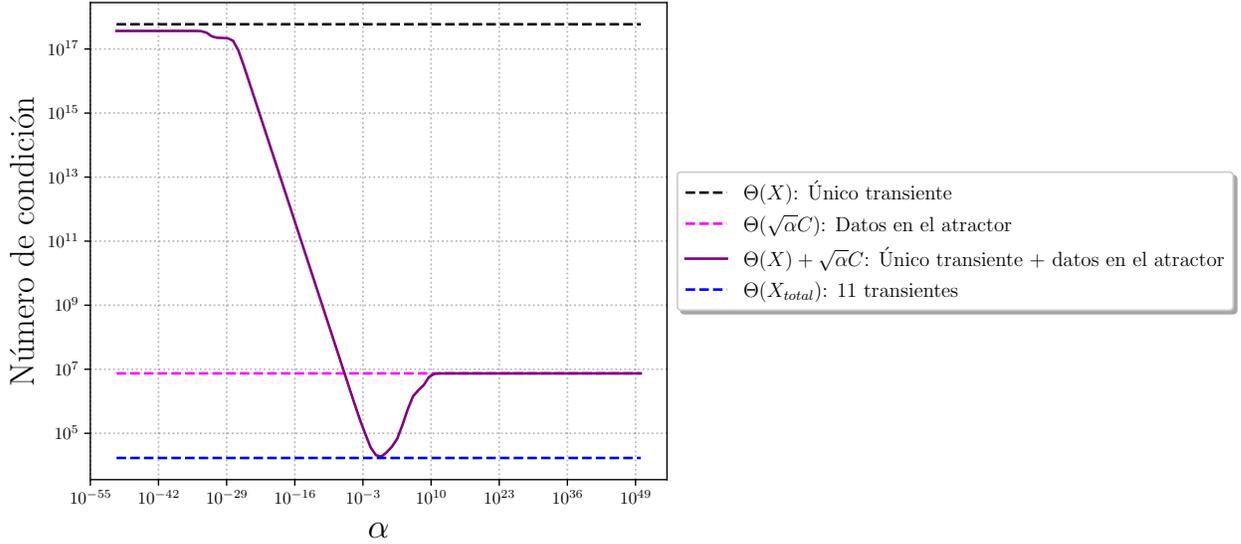


**Figura 5.2:** Número de condición para la matriz  $\Theta$  en el oscilador de Van der Pol.

### 5.2.3. Sistema cuasiperiódico

Habiendo demostrado la aplicación del algoritmo a sistemas con atractores periódicos, se testeará el desempeño en atractores no periódicos. En esta ocasión, se propone un sistema que exhibe cuasiperiodicidad. Las ecuaciones que lo describen se encuentran en la Ecuación 4.3. En este caso la matriz de funciones candidatas, incluye monomios de  $r$  y funciones seno-oidales de la forma  $f(i\theta - j\phi)$  con  $i, j = 0, 1, 2$ , para un total de 36 posibles candidatas. Un detalle de las funciones utilizadas se encuentra en la Tabla A.4 del Anexo. En este caso, la normalización de las columnas de  $\Theta$  por el máximo de cada una de ellas fue omitida.

La variación del número de condición de acuerdo a  $\alpha$  para la matriz  $\Theta$  propuesta se muestra en la Figura 5.3. En este caso, se observa que el número de condición para datos sólo en el atractor es bastante más bajo que aquel de los casos anteriores. El mínimo obtenido con el algoritmo sólo es un par de órdenes de magnitud más pequeño. Esto revela que el modelo que pueda obtenerse al aplicar el algoritmo sólo en puntos de los atractores está mucho mejor condicionado frente a los casos de los osciladores periódicos. Se espera, entonces, que los modelos encontrados a valores medios y altos de  $\alpha$  sean similares en cierto grado.

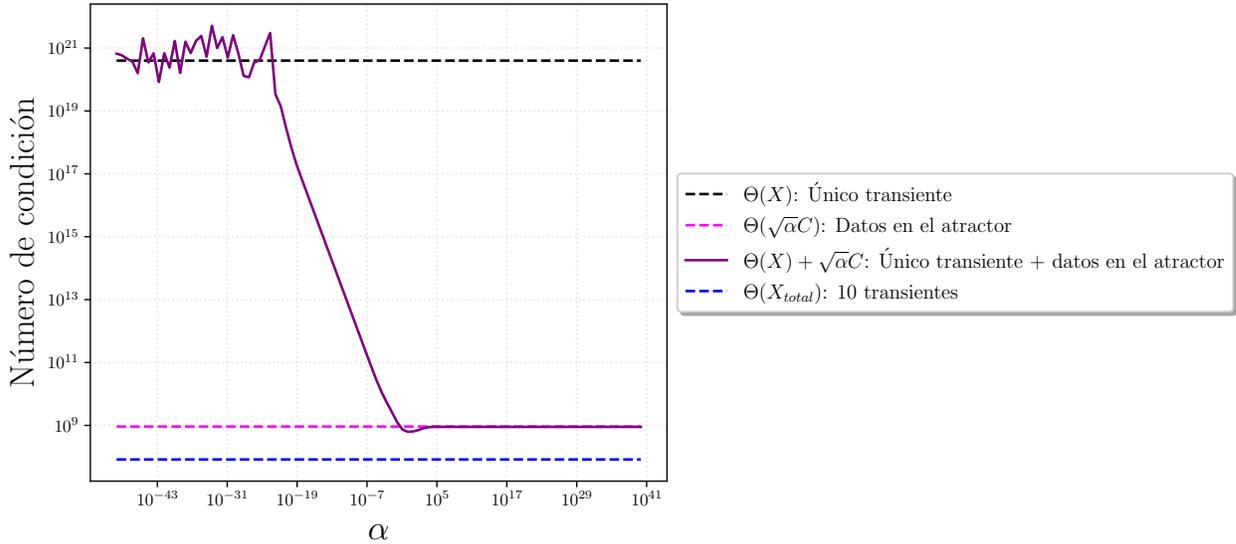


**Figura 5.3:** Número de condición para la matriz  $\Theta$  en el oscilador cuasi-periódico.

## 5.2.4. Sistema de Lorenz

Para la evaluación del caso con varios transientes, se utilizaron en total 10 familias. En este caso, las funciones utilizadas corresponden a monomios de hasta grado 4, sin considerar potencias del parámetro. Considerando que este sistema posee 3 dimensiones espaciales, además del parámetro, esto genera una matriz de 36 funciones candidatas, detalladas en el Anexo A.5.

En la Figura 5.4 tenemos un comportamiento más extremo que en el caso cuasiperiódico. Debido a la dinámica caótica, los datos capturados en el atractor son ricos en información, por lo que el algoritmo está bien condicionado para identificar modelos sólo a partir de datos en los atractores. Esto desafía la efectividad del algoritmo propuesto, dado que no existe una mejora sustancial en la dinámica si se agregan transientes.



**Figura 5.4:** Número de condición para la matriz  $\Theta$  en el sistema de Lorenz propuesto.

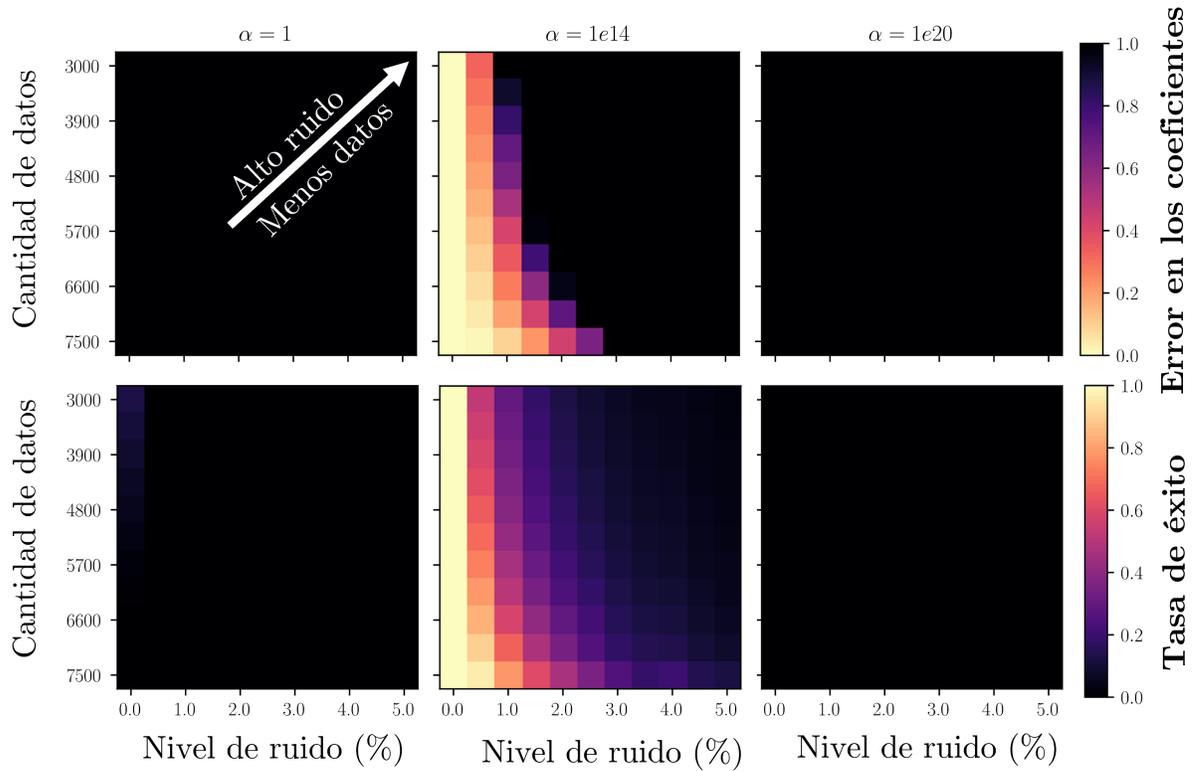
### 5.3. Robustez al ruido

Conocida la variación del número de condición de las regresiones en los ejemplos anteriores, ahora se cuantificará la efectividad para encontrar modelos a 3 diferentes valores de  $\alpha$ .

#### 5.3.1. Bifurcación de Hopf

Los resultados se exponen en la Figura 5.5. Como primera observación, destaca la incapacidad del algoritmo SINDy original ( $\alpha = 1$ ) para encontrar un modelo pertinente al sistema, lo mismo para el caso de  $\alpha = 10^{20}$ . Por otro lado, el método propuesto para  $\alpha = 10^{14}$  posee un desempeño decente en tanto el error de los coeficientes, como estructura correcta, especialmente a bajos valores de ruido.

¿Por qué este caso es interesante para SINDy? Nótese que en la Figura 4.1 para  $\mu > \mu_c$  hay un ciclo límite que forma un círculo perfecto en el espacio de fases. Para este sistema particular, con la metodología expresada en [26] para una dinámica a parámetro fijo, SINDy no puede distinguir entre un modelo del sistema subyacente de aquel más simple que se ajusta bien a los datos, que podría ser, por ejemplo, un oscilador armónico. Se requieren más condiciones iniciales y transientes para que SINDy identifique correctamente los términos lineales y cúbicos. Para el caso paramétrico esto sigue siendo cierto, dado que los diferentes parámetros solo entregan suficiente información de cómo varía la amplitud de los datos en los atractores. Por lo tanto, con los pocos datos que se entregan en la metodología presentada, el algoritmo original sigue siendo incapaz de reconocer el sistema correctamente.

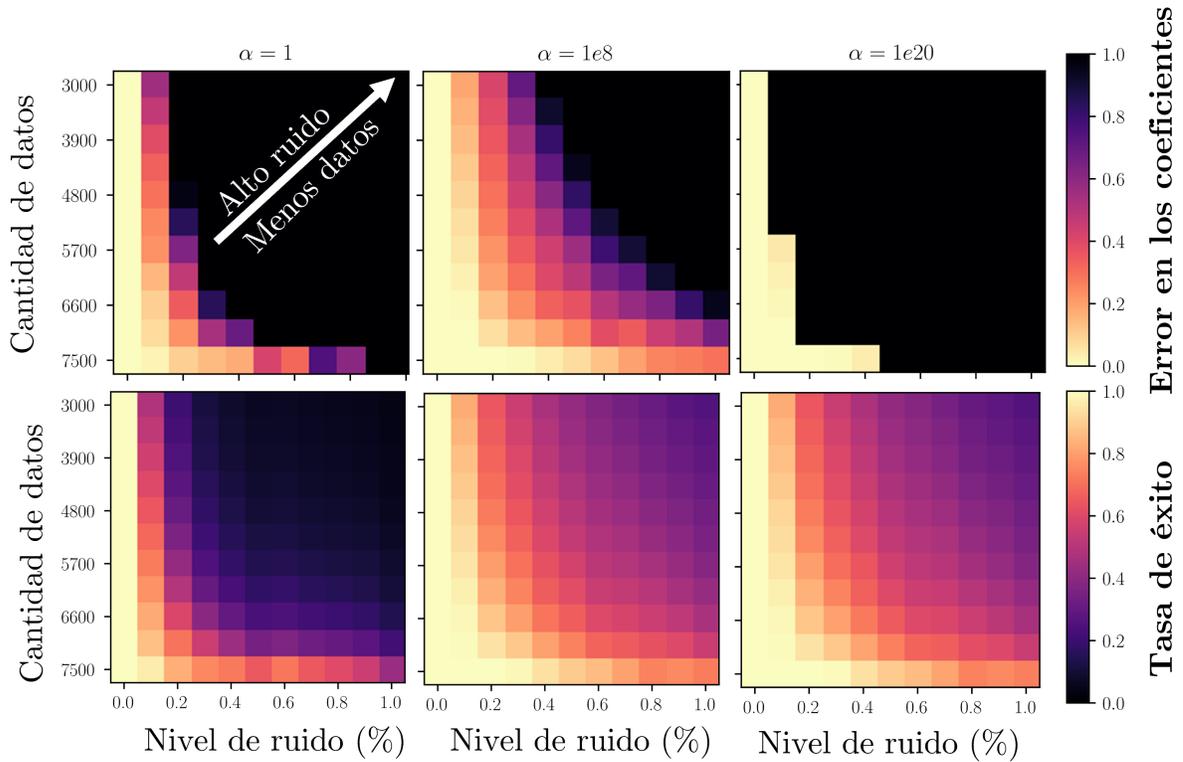


**Figura 5.5:** Sensibilidad al nivel de ruido y cantidad de datos transientes para diferentes valores de  $\alpha$  para la forma normal de la bifurcación de Hopf. Arriba: error en los coeficientes. Abajo: tasa de éxito.

### 5.3.2. Oscilador de Van Der Pol

En la Figura 5.2 se muestran los resultados obtenidos de cómo varía la efectividad de la identificación frente a nivel de ruido y remoción aleatoria de datos. Sin embargo, en este ejemplo el rango de ruido fue fijado entre 0 y 1%. Se puede apreciar que el método planteado es capaz de mejorar levemente la identificación del sistema, en particular se ve una mejora sustancial en la capacidad de detectar correctamente las posiciones correctas de los coeficientes de  $\Xi$ , mostrado en la tasa de éxito.

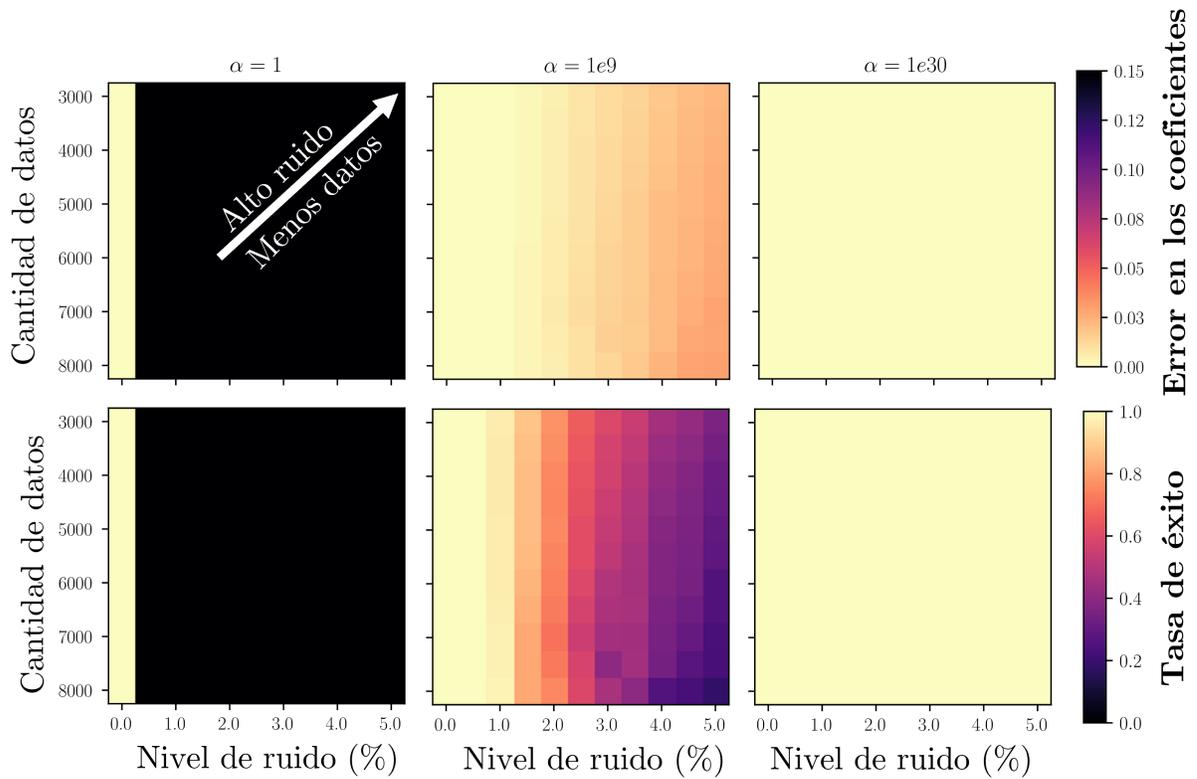
Resulta interesante que, a pesar de ambos ser osciladores periódicos, las dos figuras anteriores poseen mucha diferencia en la identificación de modelos. Para la bifurcación de Hopf, la identificación es nula a valores extremos de  $\alpha$ , mientras que para el oscilador de Van der Pol, posee un rendimiento decente a bajos niveles de ruido. Aún así, la inclusión de transientes al algoritmo aporta levemente a una identificación más efectiva.



**Figura 5.6:** Sensibilidad al nivel de ruido y cantidad de datos transientes para diferentes valores de  $\alpha$ , caso oscilador de Van der Pol. Arriba: error en los coeficientes. Abajo: tasa de éxito.

### 5.3.3. Sistema cuasiperiódico

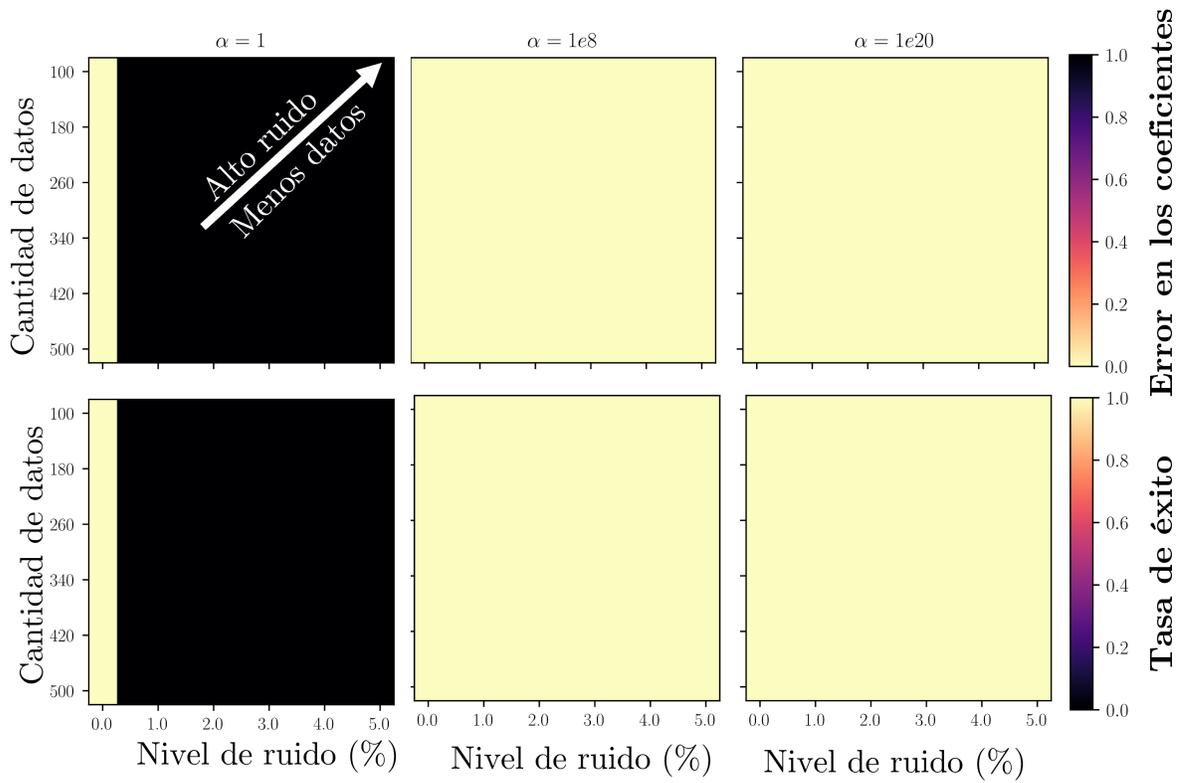
La sensibilidad frente al ruido y a la cantidad de datos se muestra en la Figura 5.7. En este caso, y como era de esperar dados los resultados de la sección anterior, se ve que la identificación para valores medios y altos de  $\alpha$  es similar. Sin embargo, cuando la cantidad de datos en el transiente entregados son altos, a mucho ruido, esto afecta negativamente a la regresión, teniendo una baja tasa de éxito. Este comportamiento comienza a indicar que la cantidad de información que es posible obtener a largo plazo encaminan al algoritmo a encontrar modelos efectivos ignorando aquellos datos que vienen de transientes. Para  $\alpha$  alto, la identificación es perfecta, pues se cumplen las condiciones de considerar sólo datos de alta fidelidad. Por otro lado, se ve que el algoritmo SINDy original es altamente sensible al ruido del transiente incorporado, que finalmente, en todos los casos resulta ser un entorpecimiento para la regresión.



**Figura 5.7:** Sensibilidad al nivel de ruido y cantidad de datos transientes para diferentes valores de  $\alpha$  para el caso cuasiestacionario.

### 5.3.4. Sistema de Lorenz

Un comportamiento similar al anterior se puede ver en la Figura 5.8. Una ponderación suficientemente alta a los datos de los atractores llevan a encontrar modelos correctos e insensibles al ruido, mientras que al agregar un transiente ruidoso, se afecta negativamente a SINDy. Este caso es interesante pues demuestra que en atractores caóticos, la metodología presentada no es pertinente.



**Figura 5.8:** Sensibilidad al nivel de ruido y cantidad de datos transientes para diferentes valores de  $\alpha$  para el sistema de Lorenz. Arriba: error en los coeficientes. Abajo: tasa de éxito.

---

## Conclusiones y trabajos futuros

---

Se logra diseñar un método de identificación de sistemas no lineales paramétricos, a partir de una extensión al algoritmo SINDy original. Su efectividad fue testada en sistemas numéricos canónicos para diferentes tipos de atractores. En particular, el sistema presenta un alta tasa de éxito en sistemas periódicos, mientras que para sistemas aperiódicos, la efectividad disminuye para ser similar a la del algoritmo basal.

Además, se justifica el uso del algoritmo en los casos que presentan ciclos límite. Existe una mejora sustancial, de varios órdenes de magnitud en la condición de la regresión al incorporar tanto transientes de poca fidelidad como algunos puntos de alta fidelidad ubicados en el atractor. La robustez frente al ruido y la cantidad de datos es también mejor que en el algoritmo original. Estas dos métricas diferentes avalan al método propuesto principalmente en el caso de la forma normal de la bifurcación de Hopf, donde SINDy es incapaz de encontrar un modelo pertinente en los escenarios propuestos. Para el caso del oscilador de Van der Pol, la innovación desempeña casi 3 veces mejor: al mismo valor de ruido se obtienen modelos con 3 veces menos error en los coeficientes.

Dentro del potencial del trabajo, es importante notar que la incorporación de las restricciones propuestas son un elemento pasivo a la regresión original de SINDy. Esto quiere decir que es posible incorporar otras técnicas existentes que pueden crear un algoritmo aún más efectivo para la identificación de sistemas no lineales paramétricos. La gran cantidad de extensiones existentes hasta la fecha avalan la posibilidad de incorporar la metodología propuesta a escenarios donde se abordan sistemas más complejos.

Para los posibles trabajos futuros, sería interesante estudiar más allá de los límites estipulados. El supuesto más fuerte de este trabajo es que los puntos de restricción son de alta fidelidad, esto es, se asume que no tienen ruido. Se podría estudiar la tolerancia que se tiene frente a la fidelidad de las restricciones y posibles alternativas para sobrellevar las dificultades que surjan. También, si existe alguna relación con la cantidad de puntos del transiente y la cantidad de restricciones, para determinar si existe un número de restricciones óptimo. Finalmente, una gran frontera sería evaluar la implementación del algoritmo en sistemas ex-

perimentales que puedan surgir de ciencia e ingeniería. En particular, sistemas que presenten una dinámica oscilatoria, como lo puede ser, por ejemplo, oscilaciones autosustentadas en flujos a bajo número de Reynolds alrededor de una placa plana, donde el parámetro viene dado por el ángulo de ataque. También análisis vibratorio en vigas u otras configuraciones donde puedan obtenerse series de datos a largo plazo que puedan tener alta fidelidad, y ver cómo afecta agregar datos de un transiente con pocos datos, o con la presencia de ruido.

- [1] Ho, B. y Kálmán, R. E., “Effective construction of linear state-variable models from input/output functions: Die konstruktion von linearen modeilen in der darstellung durch zustandsvariable aus den beziehungen für ein-und ausgangsgrößen,” *at-Automatisierungstechnik*, vol. 14, no. 1-12, pp. 545–548, 1966.
- [2] Åström, K.-J. y Torsten, B., “Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 2, no. 2, pp. 96–111, 1965.
- [3] Schoukens, J., Pintelon, R., y Rolain, Y., “Identification of nonlinear and linear systems, similarities, differences, challenges,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, no. 1, pp. 122–124, 2006.
- [4] Juang, J.-N. y Pappa, R. S., “An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction,” *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 8, no. 5, pp. 620–627, 1985.
- [5] Willcox, K. y Peraire, J., “Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition,” *AIAA journal*, vol. 40, no. 11, pp. 2323–2330, 2002.
- [6] Schmid, P. J., “Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data,” *Journal of fluid mechanics*, vol. 656, pp. 5–28, 2010.
- [7] Billings, S. A., *Nonlinear system identification: NARMAX methods in the time, frequency, and spatio-temporal domains*. John Wiley & Sons, 2013.
- [8] Bongard, J. y Lipson, H., “Automated reverse engineering of nonlinear dynamical systems,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 104, no. 24, pp. 9943–9948, 2007.
- [9] Billings, S. A., *Nonlinear system identification: NARMAX methods in the time, frequency, and spatio-temporal domains*. John Wiley & Sons, 2013.
- [10] Schmidt, M. y Lipson, H., “Distilling free-form natural laws from experimental data,” *science*, vol. 324, no. 5923, pp. 81–85, 2009.
- [11] Brunton, S. L., Proctor, J. L., y Kutz, J. N., “Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems,” *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 113, no. 15, pp. 3932–3937, 2016.
- [12] Rudy, S. H., Brunton, S. L., Proctor, J. L., y Kutz, J. N., “Data-driven discovery of

- partial differential equations,” *Science advances*, vol. 3, no. 4, p. e1602614, 2017.
- [13] Brunton, S. L., Proctor, J. L., y Kutz, J. N., “Sparse identification of nonlinear dynamics with control (sindyc),” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 49, no. 18, pp. 710–715, 2016.
- [14] Fasel, U., Kaiser, E., Kutz, J. N., Brunton, B. W., y Brunton, S. L., “Sindy with control: A tutorial,” en *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 16–21, IEEE, 2021.
- [15] Kaiser, E., Kutz, J. N., y Brunton, S. L., “Sparse identification of nonlinear dynamics for model predictive control in the low-data limit,” *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 474, no. 2219, p. 20180335, 2018.
- [16] Champion, K., Zheng, P., Aravkin, A. Y., Brunton, S. L., y Kutz, J. N., “A unified sparse optimization framework to learn parsimonious physics-informed models from data,” *IEEE Access*, vol. 8, pp. 169259–169271, 2020.
- [17] Messenger, D. A. y Bortz, D. M., “Weak sindy: Galerkin-based data-driven model selection,” *Multiscale Modeling & Simulation*, vol. 19, no. 3, pp. 1474–1497, 2021.
- [18] Mangan, N. M., Brunton, S. L., Proctor, J. L., y Kutz, J. N., “Inferring biological networks by sparse identification of nonlinear dynamics,” *IEEE Transactions on Molecular, Biological and Multi-Scale Communications*, vol. 2, no. 1, pp. 52–63, 2016.
- [19] Bertsimas, D. y Gurnee, W., “Learning sparse nonlinear dynamics via mixed-integer optimization,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 111, no. 7, pp. 6585–6604, 2023.
- [20] Rudy, S., Alla, A., Brunton, S. L., y Kutz, J. N., “Data-driven identification of parametric partial differential equations,” *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 18, no. 2, pp. 643–660, 2019.
- [21] Ma, H., Lu, X., y Zhang, L., “Extracting parametric dynamics from time-series data,” *Nonlinear Dynamics*, pp. 1–23, 2023.
- [22] Frantz, R., “Instabilities and transition to turbulence in periodic flows,” Ph. D. thesis, 2022.
- [23] Bäuerle, S., Fiedler, R., y Hetzler, H., “An engineering perspective on the numerics of quasi-periodic oscillations: A comparison of two hyper-time approaches based on a unified framework,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 108, no. 4, pp. 3927–3950, 2022.
- [24] R, T., “Regression shrinkage and selection via the lasso,” *J. of the Royal Statistical Society B*, pp. 267–288, 1996.
- [25] Loiseau, J.-C. y Brunton, S. L., “Constrained sparse galerkin regression,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 838, pp. 42–67, 2018.
- [26] Champion, K. P., Brunton, S. L., y Kutz, J. N., “Discovery of nonlinear multiscale systems: Sampling strategies and embeddings,” *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 18, no. 1, pp. 312–333, 2019.
- [27] Fasel, U., Kutz, J. N., Brunton, B. W., y Brunton, S. L., “Ensemble-sindy: Robust sparse model discovery in the low-data, high-noise limit, with active learning and control,” *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 478, no. 2260, p. 20210904, 2022.
- [28] Ljung, L., “System identification,” en *Signal analysis and prediction*, pp. 163–173, Springer, 1998.

- [29] Kaptanoglu, A. A., Zhang, L., Nicolaou, Z. G., Fasel, U., y Brunton, S. L., “Benchmarking sparse system identification with low-dimensional chaos,” *Nonlinear Dynamics*, pp. 1–22, 2023.
- [30] de Silva, B. M., Higdon, D. M., Brunton, S. L., y Kutz, J. N., “Discovery of physics from data: Universal laws and discrepancies,” *Frontiers in artificial intelligence*, vol. 3, p. 25, 2020.
- [31] de Silva, B. M., Champion, K., Quade, M., Loiseau, J.-C., Kutz, J. N., y Brunton, S. L., “Pysindy: a python package for the sparse identification of nonlinear dynamics from data,” *arXiv preprint arXiv:2004.08424*, 2020.
- [32] Kaheman, K., Brunton, S. L., y Kutz, J. N., “Automatic differentiation to simultaneously identify nonlinear dynamics and extract noise probability distributions from data,” *Machine Learning: Science and Technology*, vol. 3, no. 1, p. 015031, 2022.
- [33] Naozuka, G. T., Rocha, H. L., Silva, R. S., y Almeida, R. C., “Sindy-sa framework: enhancing nonlinear system identification with sensitivity analysis,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 110, no. 3, pp. 2589–2609, 2022.
- [34] Ma, H., Lu, X., y Zhang, L., “Extracting parametric dynamics from time-series data,” *Nonlinear Dynamics*, pp. 1–23, 2023.
- [35] Fukami, K., Murata, T., Zhang, K., y Fukagata, K., “Sparse identification of nonlinear dynamics with low-dimensionalized flow representations,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 926, p. A10, 2021.

---

Ejemplos de modelos identificados

---

## A.1. Bifurcación de Hopf

**Tabla A.1:** Ejemplo de modelo incorrectamente identificado para sistema de bifurcación de Hopf.

"	'xdot'	'ydot'	'udot'
'1'	0	0	0
'x'	0	1	0
'y'	-1	0	0
'u'	0	0	0
'x2'	0	0	0
'x y'	0	0	0
'x u'	1.458	0	0
'y^2'	0	0	0
'y u'	0	0.998	0
'u^2'	0	0	0
'x^3'	-4.458	0	0
'x^2 y'	0	-0.998	0
'x^2 u'	0	0	0
'x y^2'	-1.458	0	0
'x y u'	0	0	0
'x u^2'	-9.208	0	0
'y^3'	0	-0.998	0
'y^2 u'	0	0	0
'y u^2'	0	0	0
'u^3'	0	0	0
'x^4'	0	0	0
'x^3 y'	0	0	0
'x^3 u'	9.208	0	0
'x^2 y^2'	0	0	0
'x^2 y u'	0	0	0
'x^2 u^2'	0	0	0
'x y^3'	0	0	0
'x y^2 u'	9.208	0	0
'x y u^2'	0	0	0
'x u^3'	0	0	0
'y^4'	0	0	0
'y^3 u'	0	0	0
'y^2 u^2'	0	0	0
'y u^3'	0	0	0
'u^4'	0	0	0

**Tabla A.2:** Ejemplo de modelo correctamente identificado para sistema de bifurcación de Hopf.

"	'xdot'	'ydot'	'udot'
'1'	0	0	0
'x'	0	1	0
'y'	-1	0	0
'u'	0	0	0
'x^2'	0	0	0
'x y'	0	0	0
'x u'	0.998	0	0
'y^2'	0	0	0
'y u'	0	0.998	0
'u^2'	0	0	0
'x^3'	-0.998	0	0
'x^2 y'	0	-0.998	0
'x^2 u'	0	0	0
'x y^2'	-0.998	0	0
'x y u'	0	0	0
'x u^2'	0	0	0
'y^3'	0	-0.998	0
'y^2 u'	0	0	0
'y u^2'	0	0	0
'u^3'	0	0	0
'x^4'	0	0	0
'x^3 y'	0	0	0
'x^3 u'	0	0	0
'x^2 y^2'	0	0	0
'x^2 y u'	0	0	0
'x^2 u^2'	0	0	0
'x y^3'	0	0	0
'x y^2 u'	0	0	0
'x y u^2'	0	0	0
'x u^3'	0	0	0
'y^4'	0	0	0
'y^3 u'	0	0	0
'y^2 u^2'	0	0	0
'y u^3'	0	0	0
'u^4'	0	0	0

## A.2. Van der Pol

**Tabla A.3:** Ejemplo de modelo correctamente identificado para el oscilador de Van der Pol.

"	'xdot'	'ydot'	'udot'
'1'	0	0	0
'x'	0	-1	0
'y'	1	0	0
'u'	0	0	0
x^2'	0	0	0
'x y'	0	0	0
'x u'	0	0	0
y^2'	0	0	0
'y u'	0	1	0
'u^2'	0	0	0
'x^3'	0	0	0
'x^2 y'	0	0	0
'x^2 u'	0	0	0
'x y^2'	0	0	0
'x y u'	0	0	0
'x u^2'	0	0	0
'y^3'	0	0	0
'y^2 u'	0	0	0
'y u^2'	0	0	0
'u^3'	0	0	0
'x^4'	0	0	0
'x^3 y'	0	0	0
'x^3 u'	0	0	0
'x^2 y^2'	0	0	0
'x^2 y u'	0	-1	0
'x^2 u^2'	0	0	0
'x y^3'	0	0	0
'x y^2 u'	0	0	0
'x y u^2'	0	0	0
'x u^3'	0	0	0
'y^4'	0	0	0
'y^3 u'	0	0	0
'y^2 u^2'	0	0	0
'y u^3'	0	0	0
'u^4'	0	0	0

### A.3. Sistema cuasiperiódico

**Tabla A.4:** Ejemplo de modelo correctamente identificado para el oscilador cuasiperiódico.

"	'r'	' $\theta$ '	' $\phi$ '	'u'
1	0	1	1	0
r	1	-0.57	0	0
r <sup>2</sup>	0	0	0	0
r <sup>3</sup>	-1	0	0	0
cos( $\theta-\phi$ )	0	0	0	0
cos(2 $\theta-\phi$ )	0	0	0	0
cos( $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
cos(2 $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
sin( $\theta-\phi$ )	0	0	0	0
sin( $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
sin(2 $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
r cos( $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
r cos(2 $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
r sin( $\theta-\phi$ )	0	0	0	0
r sin( $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
r sin(2 $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
u sin(2 $\theta-\phi$ )	0	-1	0	0
sin(2 $\theta-\phi$ )	0	0	0	0
r u sin(2 $\theta-\phi$ )	0	0	0	0
r u cos(2 $\theta-\phi$ )	1	0	0	0
u cos( $\theta$ )	0	0	0	0
u cos( $\phi$ )	0	0	0	0
u sin( $\theta$ )	0	0	0	0
u sin( $\phi$ )	0	0	0	0
u cos( $\theta-\phi$ )	0	-1	0	0
u cos(2 $\theta-\phi$ )	0	0	0	0
u cos( $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
u cos(2 $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
u sin( $\theta-\phi$ )	0	0	0	0
u sin( $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
u sin(2 $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
r u cos( $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
r u cos(2 $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
r u sin( $\theta-\phi$ )	0	0	0	0
r u sin( $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0
r u sin(2 $\theta-2\phi$ )	0	0	0	0

## A.4. Sistema de Lorenz

**Tabla A.5:** Ejemplo de modelo correctamente identificado para el sistema de Lorenz.

"	'xdot'	'ydot'	'zdot'	'udot'
'1'	0	0	0	0
'x'	-10	0	0	0
'y'	10	-1	0	0
'z'	0	0	2.666	0
'u'	0	0	0	0
'x^2'	0	0	0	0
'x y'	0	0	1	0
'x z'	0	-1	0	0
'x u'	0	1	0	0
'y^2'	0	0	0	0
'y z'	0	0	0	0
'y u'	0	0	0	0
'z^2'	0	0	0	0
'z u'	0	0	0	0
'x^3'	0	0	0	0
'x^2 y'	0	0	0	0
'x^2 z'	0	0	0	0
'x^2 u'	0	0	0	0
'x y z'	0	0	0	0
'x y u'	0	0	0	0
'x z^2'	0	0	0	0
'x z u'	0	0	0	0
'y^3'	0	0	0	0
'y^2 u'	0	0	0	0
'y z^2'	0	0	0	0
'y z u'	0	0	0	0
'z^3'	0	0	0	0
'z^2 u'	0	0	0	0
'x^4'	0	0	0	0
'x^3 y'	0	0	0	0
'x^3 z'	0	0	0	0
'x^3 u'	0	0	0	0
'x^2 y^2'	0	0	0	0
'x^2 y u'	0	0	0	0
'x^2 z^2'	0	0	0	0
'x^2 z u'	0	0	0	0
'x y^3'	0	0	0	0
'x y^2 u'	0	0	0	0
'x y z^2'	0	0	0	0
'x y z u'	0	0	0	0
'x z^3'	0	0	0	0
'y^4'	0	0	0	0
'y^3 z'	0	0	0	0
'y^3 u'	0	0	0	0
'y^2 z^2'	0	0	0	0
'y z^3'	0	0	0	0
'y z^2 u'	0	0	0	0
'z^3 u'	0	0	0	0