UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MARTINGALAS LOCALES EN MODELOS DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

JOAQUÍN SILVA CANOSA

PROFESOR GUÍA:
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA
DANIEL REMENIK ZISIS
SOLEDAD TORRES DÍAZ

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por
CMM ANID BASAL FB210005

SANTIAGO DE CHILE
2023

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
Y MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: JOAQUÍN SILVA CANOSA
FECHA: 2023
PROF. GUÍA: JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

MARTINGALAS LOCALES EN MODELOS DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

El objetivo de este trabajo es precisar el comportamiento de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas. Concretamente, se determinará si la solución es una martingala o una martingala local estricta. Esto, en el contexto de las matemáticas financieras, está relacionado con la existencia de burbujas financieras en el precio de cierto activo modelado por dicho sistema.

El modelo estudiado corresponde específicamente a un modelo de volatilidad estocástica, donde el precio se representa por la exponencial estocástica de la volatilidad, que a su vez se rige según una ecuación diferencial estocástica, conocida como ecuación de volatilidad. Se ha estudiado anteriormente el comportamiento de la solución a esta ecuación cuando los coeficientes de difusión y de drift de la ecuación de volatilidad son potencias de la volatilidad. Este trabajo extiende dicho resultado al caso en que el drift de la ecuación de volatilidad se "comporta como una potencia" en infinito.

La ecuación estudiada es, concretamente,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= \sigma_t^{\alpha} X_t \mathrm{d}W_t, & X_0 = x_0 > 0 \\ \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta} \mathrm{d}B_t + p(\sigma_t)\mathrm{d}t, & \sigma_0 > 0, \end{aligned}$$

donde X_t es el proceso de precios del activo, σ_t corresponde a su volatilidad, B_t y W_t son movimientos Brownianos correlacionados y el drift p cumple con que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{Kx^{\delta}} = 1.$$

Tabla de Contenido

Introducción

Las burbujas financieras como fenómeno económico han existido desde el siglo XVII. Al menos, de la década de 1630 data el primer registro de un suceso de estas características. Consistió, como es parte de la cultura general, en un alza desmedida de los precios de los tulipanes holandeses, especialmente de los más exóticos. Posterior a esta alza sobrevino una fuerte crisis financiera.

A lo largo de la historia, esta clase de sucesos han ocurrido periódicamente, con diferentes intensidades. Las más relevantes iteraciones de este fenómeno son probablemente la burbuja financiera que precedió a la crisis de 1929, y la más reciente burbuja inmobiliaria que desató la crisis de 2008. Ambas originadas en Estados Unidos, pero cuyas consecuencias afectaron a gran parte de la economía global. La necesidad y motivación por estudiar matemáticamente el origen y comportamiento de este fenómeno es evidente.

Las burbujas aparecen naturalmente en el estudio de las matemáticas financieras. Con la finalidad de introducir esta área de estudio en este trabajo, se planteará un modelo sencillo, que abarca solamente un activo financiero. Para esto, se considera un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. En este espacio se considera el proceso de precios del activo $(S_t)_{0\leq t<\tau}$, donde τ es un tiempo de parada que representa el periodo de vida útil del activo. Se asume que el proceso S_t es una semimartingala.

Se considera también el proceso de dividendos $(D_t)_{0\leq t<\tau}$, representando la ganancia acumulada generada por el activo, y también será una semimartingala. $\Delta \in \mathcal{F}_\tau$ representará el valor de liquidación del activo en el tiempo terminal τ. Por último, se considera el proceso de intereses $(r_t)_{0\leq t}$ que corresponde a los intereses asociados a invertir o tomar prestado dinero del mercado. Este proceso será al menos progresivamente medible. Así, el proceso

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right)$$

representa el dinero que se posee invertido en el mercado tras invertir una unidad monetaria en tiempo 0.

Con esto se puede definir el proceso de riqueza asociada a una unidad de este activo por

$$W_t = \mathbb{1}_{t<\tau} S_t + B_t \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{B_s} \mathrm{d}D_s + \frac{B_t \Delta}{B_\tau} \mathbb{1}_{\tau\leq t},$$

donde el proceso B_t aparece ya que se considera que el dinero obtenido por los dividendos o por la liquidación del activo se invierte en el mercado.

Ahora, se supone la existencia de una medida riesgo-neutral equivalente a $\mathbb{P}$, denotada por $\mathbb{Q}$. Esto es, una medida para la cual el proceso de precios S_t es una martingala local. La existencia de esta medida es equivalente a una hipótesis conocida en la literatura como *No Free Lunch with Vanishing Risk* o *NFLVR*. Para la comprensión del contexto de este trabajo no es necesario entrar en detalle sobre esta hipótesis, es suficiente con mencionar que restringe la existencia de estrategias factibles que permitan conseguir beneficio con riesgo nulo (ver [6], capítulo 2).

La medida $\mathbb{Q}$ se supondrá única, lo que equivale a pedir que el mercado sea completo. Sin entrar en detalles, solo con el fin de dar un entendimiento intuitivo de la definición, esto es que la cartera o portafolio de una persona pueda alcanzar cualquier estado final $Z_T \in L^1_+(\mathbb{Q})$ mediante estrategias factibles.

El propósito de esta medida $\mathbb{Q}$ es dar un sentido a lo que se entiende como *precio fundamental* de un activo. Es sabido que, en la práctica, las burbujas financieras suelen producirse cuando el precio de mercado de los activos financieros involucrados sube de manera desenfrenada, superando lo que racionalmente se entendería como "precio justo" del activo. Sin embargo, el precio justo de un activo es una noción vaga por naturaleza, difícil de determinar. Usualmente, la regulación automática del mercado entrega precios justos para los activos, pero cuando el mercado falla de esta forma se vuelve necesaria una definición matemática más abstracta. Se conoce como precio fundamental de un activo al proceso

$$S_t^\star = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_0^{T\wedge\tau} \frac{1}{B_s} \mathrm{d}D_s + \frac{\Delta}{B_\tau} \mathbb{1}_{\tau\leq T} \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right) B_t,$$

donde T corresponde a un tiempo terminal, que podría ser infinito. Este proceso representa la mejor aproximación posible de las ganancias que generará el activo financiero con la información presente en tiempo t bajo la medida riesgo-neutral.

Acorde a lo comentado en el párrafo anterior, una burbuja financiera se define como el proceso

$$\beta_t = S_t - S_t^\star. \tag{1}$$

En base a lo anterior se enuncia el siguiente teorema, para el cual se asumen intereses y dividendos nulos.

Teorema 0.1 (Ver [7], Teo. 2) *Bajo la medida $\mathbb{Q}$, si β_t no es idénticamente nula se cumple alguno de los siguientes casos.*

1. *cuando $\mathbb{P}(\tau = \infty) > 0$, β_t es una martingala local. Esta martingala local podría ser una martingala uniformemente integrable.*
2. *cuando τ es no acotado, pero $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$, β_t es una martingala local que no es una martingala uniformemente integrable.*
3. *cuando τ es acotado, β_t es una martingala local estricta.*

El caso de interés para este trabajo es el último, puesto que se considerará un horizonte de tiempo finito $[0, T]$ y por lo tanto $\tau \leq T < \infty$. Bajo este contexto, escribiendo $S_t = \beta_t + S_t^\star$, se deduce que

Corolario 0.2 *β_t no es idénticamente nula en $[0,T]$ si y solo si el proceso de precios S_t es una martingala local estricta.*

Este resultado es de vital importancia para el desarrollo presentado en este trabajo, pues proporciona una forma de detectar la existencia de una burbuja financiera β_t simplemente estudiando la propiedad de martingala del proceso de precios S_t. El caso donde los intereses y dividendos no son nulos es similar, pero se requiere hacer una modificación al proceso S_t. En lo siguiente se continuará con la suposición de intereses y dividendos nulos.

Para proceder es necesario plantear un modelo que describa el comportamiento del proceso de precios S_t. Para el caso de intereses y dividendos nulos, un modelo estándar es

$$\mathrm{d}S_t = \sigma_t S_t \mathrm{d}Wt,$$

donde W_t es un movimiento Browniano para la medida riesgo neutral. Es decir, el proceso de precios es la exponencial estocástica del proceso σ_t que a su vez se comporta de forma estocástica, definido por una ecuación del tipo

$$\mathrm{d}\sigma_t = a(\sigma_t)\mathrm{d}t + b(\sigma_t)\mathrm{d}B_t.$$

donde a y b son suficientemente regulares y B_t es otro movimiento Browniano que puede no ser independiente de W_t. Esta clase de modelos se conoce como modelos de volatilidad estocástica. La volatilidad en si misma representa la intensidad de las variaciones que se distinguirán en el precio del activo. Algunos resultados en la línea del análisis de las soluciones de estos modelos en el sentido de la teoría de burbujas financieras puede encontrarse en [7] (sección 4, p. 17).

El modelo que se estudiará en este trabajo es el dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \sigma_t^{\alpha} S_t \mathrm{d}W_t, & S_0 > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta} \mathrm{d}B_t + p(\sigma_t)\mathrm{d}t, & \sigma_0 > 0. \end{aligned}$$

donde $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, B_t y W_t movimientos Brownianos ρ-correlacionados (i.e. $\langle W, B\rangle_t = \rho t$) para la medida $\mathbb{Q}$ y p cumple

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{p(\sigma)}{K\sigma^{\delta}} = 1$$

para $K \neq 0$ y $\delta \in \mathbb{R}$.

Se han estudiado modelos similares con metodologías parecidas a las que se utilizarán en este trabajo. Se destacan [1] donde se estudia el modelo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \sigma_t^{\alpha} S_t \mathrm{d}W_t, & S_0 > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta} \mathrm{d}B_t, & \sigma_0 > 0. \end{aligned}$$

y [3], de donde se recogen resultados muy importantes para el desarrollo de este estudio. El modelo estudiado en dicho trabajo corresponde a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \sigma_t^{\alpha} S_t \mathrm{d}W_t, & S_0 > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta} \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^{\delta}\mathrm{d}t, & \sigma_0 > 0. \end{aligned}$$

El objetivo del estudio consistirá en dilucidar para qué valores de los parámetros del sistema se obtendrá como solución un proceso de precios que tenga una burbuja no nula asociada, es decir, en qué casos el proceso de precios resultante es una martingala y en cuáles es una martingala local estricta.

Para abordar este trabajo se seguirá una metodología similar a la expuesta en [1] y [3]. En primer lugar, se introducirán resultados útiles del cálculo estocástico en el capítulo 1. Luego, en el capítulo 2 se estudiará la ecuación del proceso de volatilidad, obteniendo los valores para los parámetros de esta ecuación en donde este proceso tiene un comportamiento adecuado, además, con esta finalidad se deduce un lema que será de utilidad a lo largo de todo el trabajo. Finalmente, en el capítulo 3 se utilizan razonamientos aplicados previamente en [1] o [3] que permitirán determinar el comportamiento del proceso de precios a partir del estudio de una ecuación diferencial estocástica distinta.

Capítulo 1

Preliminares

Para abordar el contenido de este trabajo es necesario, evidentemente, conocer a cabalidad la teoría de probabilidades y procesos estocásticos, con énfasis en el cálculo estocástico. En esta primera sección se presentan los resultados más importantes a utilizar a lo largo de este trabajo, y serán necesarios para comprender las demostraciones y razonamientos aquí presentes.

1.1. Teorema de comparación

Los teoremas de comparación permiten deducir relaciones de desigualdad entre las soluciones de dos ecuaciones diferenciales estocásticas distintas a partir de ciertas hipótesis sobre los coeficientes de estas ecuaciones.

El teorema de interés para este trabajo corresponde al probado por Youssef Ouknine y Marek Rutkowski en [4], que tiene las hipótesis más afines a las ecuaciones que se estudiarán.

Teorema 1.1 (Ver [4], sección 3) *Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un movimiento Browniano estándar $(B_t)_{t\geq 0}$ definido en este, junto con su filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ que cumple las condiciones habituales, se consideran las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas*

$$X_t^{\mathrm{i}} = X_0^{\mathrm{i}} + \int_0^t \sigma(s, X_s^{\mathrm{i}})dB_s + \int_0^t b_{\mathrm{i}}(s, X_s^{\mathrm{i}})ds \quad \mathrm{i} = 1, 2$$

donde $\sigma, b_1, b_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones Borel medibles y acotadas. Supongamos también que σ y b_1 (o b_2) satisfacen las siguientes tres hipótesis:

(H1) Existe una función creciente $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$(\sigma(t, x) - \sigma(t, y))^2 \leq (x - y)(\varphi(x) - \varphi(y))$$

para todo par $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq y$ y $t \in \mathbb{R}_+$.

(H2) Existe una constante positiva $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\sigma(t,x)| \geq \varepsilon$$

para $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

(H3) Existe una función creciente $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$|b_1(t,x) - b_1(t,y)| \leq |\psi(x) - \psi(y)|$$

para todo par $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Y además, se cumple que

$$\inf_{s \in \mathbb{R}_+} (b_2(s,x) - b_1(s,x)) \geq 0, \qquad \lambda\text{-c.s.},$$

y se verifica una de las siguientes propiedades:

(i) $X_0^1 < X_0^2$

(ii) $X_0^1 \leq X_0^2$ *y existe una constante $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (0, \delta)$,*

$$\inf_{s \in (0,t)} (b_2(s,x) - b_1(s,x)) > 0, \qquad \lambda\text{-c.s.}$$

Entonces, si $X_t^{\mathrm{i}}, \mathrm{i} = 1, 2$ son soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas anteriores, estas cumplen

$$\mathbb{P}(X_t^1 < X_t^2, t > 0) = 1.$$

1.2. Teorema de Girsanov

A partir de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un movimiento Browniano estándar $(B_t)_{t \geq 0}$ con su filtración asociada $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ que cumple las condiciones habituales y un proceso medible $(X_t)_{t \geq 0}$ adaptado a la filtración $\mathbb{F}$, que cumple

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s < \infty\right) = 1, \qquad \forall 0 \leq t < \infty, \tag{1.1}$$

lo que asegura que la integral estocástica $\int_0^t X_s \mathrm{d}B_s$ sea una martingala local, se pretende definir una medida para la cual el proceso definido por

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t X_s \mathrm{d}s$$

sea un movimiento Browniano. Para esto, es necesario considerar la exponencial estocástica del proceso X_t, definida por

$$\xi_t(X) = \exp\left(\int_0^t X_s \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s\right). \tag{1.2}$$

Cuando este proceso es una martingala, se tiene que $\mathbb{E}(\xi_t(X)) = 1$, pues $\xi_0(X) = 1$. Por lo tanto, es posible definir la familia de medidas $(\mathbb{P}_t)_{t>0}$ dada por

$$\mathbb{P}_t(A) = \mathbb{E}(1_A \xi_t(X))$$

para $A \in \mathcal{F}_t$. El enunciado del teorema es el siguiente:

Teorema 1.2 (Ver [2], Teo. 3.5.1.) *Supongamos que $(\xi_t(X))_{t\geq 0}$ es una martingala. Sea $\tilde{B}_t$ el proceso definido por*

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t X_s ds,$$

utilizando la filtración $\mathbb{F}$, entonces, para todo $T \in [0, \infty)$, el proceso $\{(\tilde{B}_t)_{0\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}\}$ es un movimiento Browniano sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_T)$.

Una herramienta que será de utilidad a la hora de demostrar la primera condición del teorema, la propiedad de martingala para $\xi(X)$, se conoce como la condición de Novikov.

Proposición 1.3 (Ver [2], Teo. 3.5.13) *Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ su filtración asociada y $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso medible y adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ que satisface (1.1). Si*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 ds\right)\right] < \infty, \qquad \forall 0 \leq t < \infty,$$

entonces el proceso $\xi(X)$ es una martingala.

La utilidad de este teorema dentro de este trabajo es que permite modificar el termino de drift de una ecuación diferencial estocástica. En términos simples, aplicando directamente el teorema, la solución a la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}Y_s = \mathrm{d}B_s - X_s \mathrm{d}s$$

bajo la medida $\mathbb{P}_t$ se comporta sencillamente como un movimiento Browniano estándar, siempre que se cumplan las hipótesis necesarias. Concretamente, el resultado que se utilizará en este trabajo es el siguiente.

Proposición 1.4 (Ver [2], Teo 3.5.4) *Dado $0 \leq T < \infty$, sean $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ un movimiento Browniano, con su filtración asociada $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, y $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un proceso medible, adaptado a esta filtración, que cumple (1.1). Sea $\xi(X)$ el proceso definido por*

$$\xi_t(X) = \exp\left(\int_0^t X_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 ds\right).$$

y $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ una martingala local continua. Si $\xi(X)$ es una martingala, entonces el proceso

$$\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t X_s d\langle M, B\rangle_s, \ \mathcal{F}_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

es una martingala local continua, para la medida P_T, definida por (1.2). Además,

$$\langle \tilde{M}\rangle_t = \langle M\rangle_t, \quad \forall t \in [0, T], \ \text{c.s. para } \mathbb{P} \text{ y } \mathbb{P}_t,$$

donde las variaciones están calculadas con respecto a las medidas correspondientes.

Observación Como consecuencia, si W_t es otro movimiento Browniano, tal que $\langle W, B\rangle_t = \rho t$, entonces el proceso

$$\tilde{W}_t = W_t - \rho \int_0^t X_s \mathrm{d}s, \quad t \in [0, T]$$

es un movimiento Browniano en $[0, T]$ para la medida $\mathbb{P}_T$, pues de la segunda afirmación del lema

$$\langle \tilde{W}\rangle_t = \langle W\rangle_t = t.$$

Aplicando el teorema de Lévy se deduce la afirmación anterior.

1.3. Existencia y unicidad de soluciones

Justificar la existencia de una solución fuerte a una ecuación es vital a la hora de aplicar el teorema de comparación presentado en la sección 1.1 como en el caso de este trabajo, pues es necesario, por ejemplo, que las soluciones al sistema de ecuaciones presente en el teorema 1.1 estén definidas en el mismo espacio de probabilidad y en base al mismo movimiento Browniano.

En este contexto se presenta el siguiente teorema, que permitirá asegurar la existencia y unicidad de estas soluciones fuertes hasta un posible tiempo de explosión.

Teorema 1.5 (Ver [5], Teo. 5.7.38.) *Sean $M^{\mathrm{i}} = (M^{\mathrm{i}}_t)_{t\geq 0}$, $\mathrm{i} \in \{1, ..., n\}$ semimartingalas con $M^{\mathrm{i}}_0 = 0$ y f_{i} funciones localmente Lipschitz, entonces existe una función $\zeta(x, \omega) : \mathbb{R}^n \times \Omega \to [0, \infty]$ tal que cada $\zeta(x, \cdot)$ es un tiempo de parada, y existe una única solución a la ecuación*

$$dX_s = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} f_{\mathrm{i}}(X_{s-})dM^{\mathrm{i}}_s, \qquad X_0 = x$$

hasta el tiempo $\zeta(x, \cdot)$, con

$$\limsup_{t\to\zeta(x,\cdot)} ||X_t|| = \infty$$

c.s. en $\{\zeta < \infty\}$. Además, $x \mapsto \zeta(x, \omega)$ es semicontinua inferior, estrictamente positiva y las trayectorias de X son continuas en $[0, \zeta(x, \cdot))$.

Observación En el contexto de este trabajo, se requerirá utilizar este teorema solamente en ecuaciones del estilo

$$\mathrm{d}X_s = f_1(X_s)\mathrm{d}B_s + f_2(X_s)\mathrm{d}s, \qquad X_0 = x,$$

donde las semimartingalas son sencillamente un movimiento Browniano y la identidad (como proceso creciente determinista).

1.4. Test de Feller para explosiones

El último de los resultados presentados en esta sección corresponde al test de Feller, una herramienta que permite obtener conclusiones sobre el tiempo de explosión de la solución a una ecuación diferencial estocástica simplemente estudiando la convergencia de una integral.

En primer lugar, se trabaja en un intervalo $I = (l, r)$ donde l o r pueden ser $-\infty$ o ∞ respectivamente. Se considera sobre este intervalo la ecuación

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t + b(X_t)\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

con condición inicial $X_0 = x \in (l, r)$ y B_t un movimiento Browniano estándar. Además, sobre los coeficientes de la ecuación se asume que

$$\sigma^2(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in I, \exists\, \varepsilon > 0, \qquad \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1 + |b(y)|}{\sigma^2(y)} \mathrm{d}y < \infty.$$

Para plantear el resultado se precisa de la definición de solución débil en el intervalo I.

Definición 1.6 (Ver [2], Def. 5.5.20.) *Una solución débil de la ecuación (1.3) es una tripleta* $(X, B), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *tal que*

1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es un espacio de probabilidad donde* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *es una filtración que satisface la condiciones habituales.*
2. X *es un proceso continuo, adaptado, a valores en* $[l, r]$*, con* $X_0 \in I$ *c.s., y* B *es un movimiento Browniano estándar en una dimensión.*
3. *Para* $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones estrictamente monótonas que cumplen* $l < l_n < r_n < r$*,* $\lim l_n = l$ *y* $\lim r_n = r$*, y si*

   $$S_n := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (l_n, r_n)\}$$

   entonces se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ *que*

   $$\int_0^{t\wedge S_n} b(X_s) + \sigma^2(X_s) ds < \infty \quad c.s., \forall t \in [0, \infty),$$

   y además

   $$X_{t\wedge S_n} = X_0 + \int_0^t 1_{s\leq S_n} \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t 1_{s\leq S_n} b(X_s) ds, \quad \forall t \in [0, \infty), \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

Se entiende como tiempo de explosión al tiempo de parada dado por el límite

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (l, r)\}.$$

Se introducen, además, las funciones $p : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(x) = \int_c^x \exp\left(-2\int_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}y$$

y $v : I \to \mathbb{R}$, definida por

$$v(x) = \int_c^x p'(y)\int_c^y \frac{2}{p'(u)\sigma^2(u)}\mathrm{d}u.$$

donde $c \in I$. El test de Feller estudia el comportamiento de estas funciones al tender a los extremos del intervalo I. Es decir, son de interés los límites

$$p(l) = \lim_{x\searrow l} p(x),\ \ p(r) = \lim_{x\nearrow r} p(x),\ \ v(l) = \lim_{x\searrow l} v(x),\ \ \lim_{x\nearrow r} v(x).$$

Proposición 1.7 (Ver [2], Props. 5.5.12. y 5.5.28.) *La finitud de los límites anteriores no depende de la elección de $c \in I$ en la definición de estas funciones.*

En [2] (sección 5.5C) se exponen una serie de resultados que relacionan la finitud de los límites anteriores con la finitud del tiempo de explosión S. Estos son los siguientes:

Proposición 1.8 (Ver [2], Prop. 5.5.22.) *Si se sostienen las hipótesis y definiciones presentadas en esta sección, y X es solución débil de la ecuación (1.3), entonces se distinguen cuatro casos.*

1. *Si $p(l) = -\infty$ y $p(r) = \infty$, entonces*

$$\mathbb{P}(S = \infty) = \mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} X_t = r\right) = \mathbb{P}\left(\inf_{t\geq 0} X_t = l\right) = 1$$

2. *Si $p(l) > -\infty$ y $p(r) = \infty$, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = l\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t<S} X_t < r\right) = 1$$

3. *Si $p(l) = -\infty$ y $p(r) < \infty$, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = r\right) = \mathbb{P}\left(\inf_{0\leq t<S} X_t > l\right) = 1$$

4. *Si $p(l) > -\infty$ y $p(r) < \infty$, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = l\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = r\right) = \frac{p(r) - p(x)}{p(r) - p(l)}.$$

Proposición 1.9 (Ver [2], Teo. 5.5.29.) *Bajo las mismas hipótesis que el resultado anterior, se cumple*

$$\mathbb{P}(S = \infty) = 1 \iff v(l) = v(r) = \infty.$$

Proposición 1.10 (Ver [2], Prop. 5.5.32.) *Bajo las mismas hipótesis que el resultado anterior, $\mathbb{P}(S < \infty) = 1$ si y solo sí se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. $v(l) < \infty$ *y* $v(r) < \infty$.
2. $v(l) < \infty$ *y* $p(r) = \infty$.
3. $v(r) < \infty$ *y* $p(l) = -\infty$.

En el primer caso, además se cumple que $\mathbb{E}(S) < \infty$.

Proposición 1.11 *Bajo las hipótesis anteriores,*

$$p(r) = \infty \implies v(r) = \infty \quad y \quad p(l) = -\infty \implies v(l) = \infty.$$

Teorema 1.12 *Bajo las hipótesis anteriores, y definiendo*

$$S_l = \lim_{n\to\infty} S_{l_n}, \quad S_r = \lim_{n\to\infty} S_{r_n},$$

y

$$\rho(x) = \frac{p(r) - p(x)}{p(r) - p(l)},\ \rho^*(x) = 1 - \rho(x)$$

se distinguen los siguientes casos:

	$v(r) < \infty$	$p(r) < \infty$, $v(r) = \infty$	$p(r) = \infty$
$v(l) < \infty$	$\mathbb{E}(S) < \infty$, $\mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = l\right) = \rho(x)$ $\mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = r\right) = \rho^*(x)$	$\mathbb{P}(S = \infty) \in (0,1)$ $\mathbb{P}(S_r = \infty) = 1$ $\mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = l\right) = \rho(x)$ $\mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = r\right) = \rho^*(x)$	$\mathbb{P}(S < \infty) = 1$ $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = l) = 1$ $\mathbb{P}(\sup_{t\to\infty} X_t < r) = 1$
$p(l) > -\infty$, $v(l) = \infty$	$\mathbb{P}(S = \infty) \in (0,1)$, $\mathbb{P}(S_l = \infty) = 1$ $\mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = l\right) = \rho(x)$ $\mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = r\right) = \rho^*(x)$	$\mathbb{P}(S = \infty) = 1$, $\mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = l\right) = \rho(x)$ $\mathbb{P}\left(\lim_{t\nearrow S} X_t = r\right) = \rho^*(x)$	$\mathbb{P}(S = \infty) = 1$ $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = l) = 1$ $\mathbb{P}(\sup_{t\to\infty} X_t < r) = 1$
$p(l) = -\infty$	$\mathbb{P}(S < \infty) = 1$ $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = r) = 1$ $\mathbb{P}(\inf_{t\to\infty} X_t > l) = 1$	$\mathbb{P}(S = \infty) = 1$ $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = r) = 1$ $\mathbb{P}(\inf_{t\to\infty} X_t > l) = 1$	$\mathbb{P}(S = \infty) = 1$ $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} X_t = r) = 1$ $\mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} X_t = l) = 1$

Capítulo 2

Ecuación de Volatilidad

El propósito de este trabajo es estudiar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$\mathrm{d}X_t = \sigma_t^{\alpha} X_t \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x_0 > 0 \tag{2.1}$$

$$\mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^{\beta} \mathrm{d}B_t + p(\sigma)\mathrm{d}t, \quad \sigma_0 > 0, \tag{2.2}$$

donde $p(\sigma)$ es una función continua que cumple la propiedad

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{p(\sigma)}{K\sigma^{\delta}} = 1, \tag{2.3}$$

con $\alpha > 0$, $K \neq 0$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, donde B_t y W_t son movimientos Brownianos ρ-correlacionados. Específicamente, se intenta proporcionar una descripción de las condiciones que deben cumplir los parámetros del sistema para que X_t sea una martingala o, en su defecto, una martingala local estricta.

Bajo el contexto presentado en la introducción, X_t representa el proceso de precios y la medida de probabilidad que rige el sistema es la medida riesgo neutral, que será denotada por $\mathbb{P}$. Acorde a lo expuesto previamente, X_t es una martingala local estricta si y solo si existe una burbuja financiera.

Para estudiar la naturaleza de la solución X_t del sistema (2.1) es necesario precisar cuando se tiene una solución σ_t bien definida para todo $t > 0$. Esto es que el proceso σ_t resultante no explote a infinito en tiempo finito con probabilidad positiva. Mientras que una posible explosión a 0 se puede corregir estudiando $\sigma_{t \wedge S_0}$, no es posible hacer lo mismo con la explosión a infinito, ya que el modelo pierde sentido en su totalidad.

En [3] se prueba el siguiente resultado, enfocado en una ecuación similar.

Teorema 2.1 (Ver [3], Cap. 2) *La ecuación diferencial estocástica*

$$d\sigma_t = \sigma_t^{\beta} dB_t + K\sigma_t^{\delta} dt \tag{2.4}$$

$$\sigma_0 > 0$$

tiene una solución débil positiva (hasta un posible tiempo de explosión) para todo $K \neq 0$, con $\delta, \beta \in \mathbb{R}$. Sea S el tiempo de explosión a infinito de la solución de esta ecuación, es decir,

$$S = \lim_{n\to\infty} \inf\{t \geq 0 : \sigma_t \geq n\},$$

entonces $S = \infty$ c.s. si y solo si se cumple alguno de los siguientes casos no intersectantes:

1. $\delta = 2\beta - 1$, $K \leq \frac{1}{2}$.
2. $\delta = 2\beta - 1$, $K > \frac{1}{2}$, $\beta \leq 1$.
3. $\delta > 2\beta - 1$, $K < 0$.
4. $\delta > 2\beta - 1$, $K > 0$, $\delta \leq 1$.
5. $\delta < 2\beta - 1$.

El propósito de esta sección es generalizar este resultado al caso de la ecuación

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + p(\sigma)\mathrm{d}t \\ \sigma_0 > 0, \end{aligned}$$

donde la función p cumple la propiedad (2.3).

En general, se supondrá que la función $p(\sigma)$ es Lipschitz sobre compactos en $(0, \infty)$. De esta forma se cumple que

$$\frac{p(x)}{x^\beta}, \frac{1}{x^{2\beta}} \in L^1_{loc}((0,\infty)),$$

con lo que se comprueba la existencia de soluciones débiles para la ecuación anterior. Además, esta solución es única en ley (ver [9], Sección 2).

2.1. Lemas generales

Con este propósito se demuestra el siguiente lema, que será de utilidad para probar varias propiedades a lo largo de este trabajo.

Lema 2.2 *Consideremos la ecuación diferencial estocástica*

$$d\tilde{X}_t = \alpha \tilde{X}_t^\beta dB_t + [\alpha \tilde{X}_t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} p(\tilde{X}_t) + f(\tilde{X}_t)]dt, \qquad \tilde{X}_0 = \tilde{x}_0 > 0 \tag{2.5}$$

sobre el intervalo $I = (0, \infty)$, con $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\eta = 1 + \frac{\delta - 1}{\alpha}$, f Lipschitz sobre compactos y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{\tilde{K} x^{\frac{\delta}{\alpha}}} = 1, \tag{2.6}$$

con $\tilde{K} \neq 0$. Consideremos también las ecuaciones de la forma

$$dX_t = \alpha X_t^\beta dB_t + [K\alpha X_t^\eta + f(X_t)]dt, \qquad X_0 = x_0 > 0 \tag{2.7}$$

donde $K \neq 0$ y $x_0 > 0$.

Además, sean los tiempos de parada

$$S_n = \text{ínf}\{t > 0 : X_t > n\},\ S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$\tilde{S}_n = \text{ínf}\{t > 0 : \tilde{X}_t > n\},\ \tilde{S} = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n.$$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

1. *Si existe $K > \tilde{K}$ tal que para algún $\varepsilon > 0$ y cualquier $x_0 > \tilde{x}_0$, la ecuación de la forma (2.7) cumple que $S = \infty$ c.s. entonces $\tilde{S} = \infty$ c.s.*

2. *Si existe $K < \tilde{K}$ tal que para algún $\varepsilon > 0$ y cualquier $x_0 < \tilde{x}_0$ la ecuación de la forma (2.7) cumple que $S < \infty$ con probabilidad positiva, entonces $\tilde{S} < \infty$ con probabilidad positiva.*

Para demostrar este resultado se probará otro lema que será utilizado de forma recurrente.

Lema 2.3 *Sean*

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t + b(X_t)\mathrm{d}t, \qquad X_0 = x_0 > 0 \tag{2.8}$$
$$\mathrm{d}Y_t = \sigma(Y_t)\mathrm{d}B_t + \tilde{b}(Y_t)\mathrm{d}t, \qquad Y_0 = y_0 > 0 \tag{2.9}$$

dos ecuaciones diferenciales estocásticas con σ, b y $\tilde{b}$ cumpliendo las hipótesis del test de Feller y de existencia y unicidad en ley de soluciones débiles.

1. *Denotemos por S^X y S^Y a los tiempos de explosión a infinito de las respectivas soluciones débiles. Si existe una constante $M > 0$ tal que para todo $x > M$ se cumple que $b(x) = \tilde{b}(x)$, entonces*

$$\mathbb{P}(S^X = \infty) = 1 \iff \mathbb{P}(S^Y = \infty) = 1.$$

2. *Sean S_0^X y S_0^Y los tiempos de llegada a 0 de las respectivas soluciones débiles. Si existe una constante $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (0, \delta)$ se cumple que $b(x) = \tilde{b}(x)$, entonces*

$$\mathbb{P}(S_0^X = \infty) = 1 \iff \mathbb{P}(S_0^Y = \infty) = 1.$$

Demostración. Sean v_c y $\tilde{v}_c$ las funciones asociadas a las ecuaciones (2.8) y (2.9) mediante el Test de Feller:

$$v_c(x) = \int_c^x \exp\left(-2\int_c^y \frac{b(z)}{\sigma^2(z)}\mathrm{d}z\right)\int_c^y \frac{2}{\sigma^2(z)}\exp\left(2\int_c^z \frac{b_\nu(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$
$$\tilde{v}_c(x) = \int_c^x \exp\left(-2\int_c^y \frac{\tilde{b}(z)}{\sigma^2(z)}\mathrm{d}z\right)\int_c^y \frac{2}{\sigma^2(z)}\exp\left(2\int_c^z \frac{\tilde{b}_\nu(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

De acuerdo con lo mencionado en la sección de preliminares, la convergencia de estas funciones cuando x tiende a infinito es independiente del valor de c (Prop. 1.7), por lo tanto se puede elegir $c > M$ tal que

$$\begin{aligned}
v_c(x) &= \int_c^x \exp\left(-2\int_c^y \frac{b(z)}{\sigma^2(z)}\mathrm{d}z\right)\int_c^y \frac{2}{\sigma^2(z)}\exp\left(2\int_c^z \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \int_c^x \exp\left(-2\int_c^y \frac{\tilde{b}(z)}{\sigma^2(z)}\mathrm{d}z\right)\int_c^y \frac{2}{\sigma^2(z)}\exp\left(2\int_c^z \frac{\tilde{b}(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \tilde{v}_c(x).
\end{aligned}$$

Así, $v_c(x) = \tilde{v}_c(x)$ para todo $x > M$, de donde se obtiene que

$$\lim_{x\to\infty} v_c(x) = \infty \iff \lim_{x\to\infty} \tilde{v}_c(x) = \infty.$$

Gracias al test de Feller (Teo. 1.12), esto implica que

$$\mathbb{P}(S^X = \infty) = 1 \iff \mathbb{P}(S^Y = \infty) = 1,$$

lo que concluye la demostración del primer caso. El segundo caso se trata de manera análoga. Nuevamente, se tiene que

$$\begin{aligned}
v_c(x) &= \int_c^x \exp\left(-2\int_c^y \frac{b(z)}{\sigma^2(z)}\mathrm{d}z\right)\int_c^y \frac{2}{\sigma^2(z)}\exp\left(2\int_c^z \frac{b_\nu(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \int_c^x \exp\left(-2\int_c^y \frac{\tilde{b}(z)}{\sigma^2(z)}\mathrm{d}z\right)\int_c^y \frac{2}{\sigma^2(z)}\exp\left(2\int_c^z \frac{\tilde{b}_\nu(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \tilde{v}_c(x).
\end{aligned}$$

Ahora se estudia la convergencia en cero, tomando $c \in (0,\delta)$, obtendremos $v_c(x) = \tilde{v}_c(x)$ para todo $x \in (0,\delta)$. Así,

$$\lim_{x\to 0} v_c(x) = \infty \iff \lim_{x\to 0} \tilde{v}_c(x) = \infty$$

y, por el test de Feller,

$$\mathbb{P}(S_0^X = \infty) = 1 \iff \mathbb{P}(S_0^Y = \infty) = 1,$$

con lo que se concluye la demostración. □

Observación Evidentemente, el lema anterior también es válido para soluciones fuertes, pues estas se pueden interpretar también como una solución débil.

Probado lo anterior, se procede a demostrar el lema 2.2.

Demostración. Se separará la demostración en tres casos, dependiendo del signo de $1 - \beta$:

Caso 1: $1-\beta<0$**.** Se aplica el cambio de variables $Y_t = g(X_t) = X_t^{1-\beta}$. De la formula de Itô se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= f'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\mathrm{d}\langle X\rangle_t \\
&= (1-\beta)X_t^{-\beta}\mathrm{d}X_t + \frac{(\beta-1)\beta}{2}X^{-\beta-1}\alpha^2 X_t^{2\beta}\mathrm{d}t \\
&= (1-\beta)X_t^{-\beta}\left(\alpha X_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + [\alpha X_t^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}p(X_t) + f(X_t)]\mathrm{d}t\right) - \frac{(1-\beta)\beta}{2}\alpha^2 X_t^{-\beta-1}X_t^{2\beta}\mathrm{d}t \\
&= \alpha(1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(\alpha X^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\beta}p(X_t) + X^{-\beta}f(X_t) - \frac{\alpha^2\beta}{2}X_t^{\beta-1}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Reemplazando $X_t = Y_t^{\frac{1}{1-\beta}}$,

$$
\mathrm{d}Y_t = \alpha(1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(\alpha Y_t^{\frac{\alpha-1}{\alpha(1-\beta)}-\frac{\beta}{1-\beta}}p^*(Y_t) + Y_t^{\frac{-\beta}{1-\beta}}f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2\beta}{2}Y_t^{-1}\right)\mathrm{d}t \tag{2.10}
$$

donde $p^*(y) = p(y^{\frac{1}{1-\beta}})$ y $f^*(y) = f(y^{\frac{1}{1-\beta}})$. Si definimos

$$
\mu^*(y) = \frac{p^*(y)}{\tilde{K}y^{\frac{\delta}{\alpha(1-\beta)}}},
$$

entonces, ya que $1-\beta<0$, 2.6 implica que

$$
\lim_{y\to 0}\mu^*(y) = 1. \tag{2.11}
$$

Así, la ecuación (2.10) se escribe

$$
\mathrm{d}Y_t = \alpha(1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(\alpha\tilde{K}Y_t^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}}\mu^*(Y_t) + Y_t^{\frac{-\beta}{1-\beta}}f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2\beta}{2}Y_t^{-1}\right)\mathrm{d}t, \tag{2.12}
$$

con condición inicial $\tilde{Y}_0 = \tilde{x}_0^{\frac{1}{1-\beta}}$.

De manera análoga, se aplica el cambio de variable a la ecuación (2.7), obteniendo

$$
\mathrm{d}Y_t = \alpha(1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(\alpha K Y_t^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} + Y_t^{\frac{-\beta}{1-\beta}}f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2\beta}{2}Y_t^{-1}\right)\mathrm{d}t, \quad Y_0 = x_0^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{2.13}
$$

En adelante se entenderá por $X_t, \tilde{X}_t, Y_t, \tilde{Y}_t$ a las soluciones de las ecuaciones (2.7), (2.5), (2.13), (2.12) respectivamente, por $S^X, \tilde{S}^X, S^Y, \tilde{S}^Y$ a los tiempos de explosión respectivos, y por $S_c^X, \tilde{S}_c^X, S_c^Y, \tilde{S}_c^Y$ a los tiempos de llegada a $c\in[0,\infty)$, con la salvedad de que, en contraste con la definición presentada en el enunciado para los tiempos de parada asociados a X, será de interés definir los tiempos asociados a Y como

$$
S_c^Y = \inf\{t\geq 0 : Y_t < c\},
$$

pues como $1-\beta<0$, estudiar la explosión a infinito de X es equivalente a estudiar la llegada a cero de Y. Así, definir los tiempos de parada de esta forma permite definir

$$S_0^Y = \lim_{c\to 0} S_c^Y.$$

Evidentemente, las definiciones para $\tilde{Y}$ son análogas.

Se tienen ciertas relaciones entre los tiempos de explosión anteriores. Ya que $Y_t = X_t^{1-\beta}$, $S^X = S_0^Y$, $S_0^X = S^Y$ y de la misma manera $\tilde{S}^X = \tilde{S}_0^Y$ y $\tilde{S}_0^X = \tilde{S}^Y$. Por lo que probar que $\tilde{S}^X = \infty$ c.s. es equivalente a probar que $\tilde{S}_0^Y = \infty$ c.s. De la misma manera, $\tilde{S}^X < \infty$ con probabilidad positiva si y solo si $\tilde{S}_0^Y < \infty$ con probabilidad positiva.

Ahora, la propiedad (2.11) entrega que para todo $\xi > 0$ existe un $\zeta > 0$ tal que si $|y| < \zeta$,

$$1-\xi < \mu^*(y) < 1+\xi, \tag{2.14}$$

con lo que

$$\tilde{K}(1-\xi)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} < \tilde{K}\mu^*(y)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} < \tilde{K}(1+\xi)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}}.$$

Por lo tanto,

$$\alpha(1-\beta)\tilde{K}(1-\xi)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} > \alpha(1-\beta)\tilde{K}\mu^*(y)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} > \alpha(1-\beta)\tilde{K}(1+\xi)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}}$$

Denotando por $K_1 > \tilde{K}$ a la constante entregada por la afirmación 1 del lema, y por $K_2 < \tilde{K}$ a la constante entregada por la afirmación 2, se prueban ambos casos por separado. Para probar la afirmación 1, se elige $\xi > 0$ tal que $\tilde{K} < \tilde{K}(1+\operatorname{sgn}(\tilde{K})\xi) < K_1$ y por lo tanto, agregando términos a (2.14)

$$\alpha(1-\beta)\tilde{K}\mu^*(y)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} > \alpha(1-\beta)\tilde{K}(1+\operatorname{sgn}(\tilde{K})\xi)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} > \alpha(1-\beta)K_1y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}}.$$

Para la afirmación 2, se elige $\xi > 0$ tal que $K_2 < \tilde{K}(1-\operatorname{sgn}(\tilde{K})\xi) < \tilde{K}$. De esta manera,

$$\alpha(1-\beta)\tilde{K}\mu^*(y)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} < \alpha(1-\beta)\tilde{K}(1-\operatorname{sgn}(\tilde{K})\xi)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} < \alpha(1-\beta)K_2y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}}.$$

De las respectivas hipótesis del enunciado, la ecuación de la afirmación 1,

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha(1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(\alpha K_1 Y_t^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} + Y_t^{\frac{-\beta}{1-\beta}} f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2\beta}{2}Y_t^{-1}\right)\mathrm{d}t, \tag{2.15}$$

cumple que $\mathbb{P}(S_0^Y = \infty) = 1$, y la ecuación de la afirmación 2,

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha(1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(\alpha K_2 Y_t^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} + Y_t^{\frac{-\beta}{1-\beta}} f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2\beta}{2}Y_t^{-1}\right)\mathrm{d}t, \tag{2.16}$$

cumple que $\mathbb{P}(S_0^Y = \infty) < 1$. Se considera en ambos casos la condición inicial $x_0^{1-\beta}$, que cumple las propiedades expuestas en cada afirmación.

Para el caso 1 se definen las funciones

$$b(y) = \begin{cases} (1-\beta)\left(\alpha K_1 y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} + y^{\frac{-\beta}{1-\beta}} f^*(y) - \frac{\alpha^2\beta}{2} y^{-1}\right) & \text{si } y \in (0,\zeta] \\ \zeta^{-1} b(\zeta)(2\zeta - y) & \text{si } y \in (\zeta, 2\zeta) \\ 0 & \text{si } y \in [2\zeta, \infty) \end{cases}$$

$$\tilde{b}(y) = \begin{cases} (1-\beta)\left(\alpha \tilde{K} y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} \mu^*(y) + y^{\frac{-\beta}{1-\beta}} f^*(y) - \frac{\alpha^2\beta}{2} y^{-1}\right) & \text{si } y \in (0,\zeta] \\ \zeta^{-1}\left(\tilde{b}(\zeta)(2\zeta - y) + (y-\zeta)\right) & \text{si } y \in (\zeta, 2\zeta) \\ 1 & \text{si } y \in [2\zeta, \infty) \,. \end{cases}$$

Notar que el valor de las funciones en $(\zeta, 2\zeta)$ es simplemente el de la función lineal afín que conecta de forma continua los dos tramos restantes. A partir de estas se definen también, para $0 < \nu < x_0 \wedge \tilde{x}_0$:

$$\begin{aligned} b_\nu(y) &= b(\nu)\mathbb{1}_{(-\infty,\nu]} + b(y)\mathbb{1}_{(\nu,\infty)} \\ \tilde{b}_\nu(y) &= \tilde{b}(\nu)\mathbb{1}_{(-\infty,\nu]} + \tilde{b}(y)\mathbb{1}_{(\nu,\infty)}. \end{aligned}$$

Estas funciones cumplen con que $b_\nu < \tilde{b}_\nu$. La idea principal es aplicar el teorema de comparación expuesto en la sección de preliminares a las ecuaciones

$$\mathrm{d}Y_t = (1-\beta)\mathrm{d}B_t + b_\nu(Y_t)\mathrm{d}t, \qquad Y_0 = x_0^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{2.17}$$

$$\mathrm{d}\tilde{Y}_t = (1-\beta)\mathrm{d}B_t + \tilde{b}_\nu(\tilde{Y}_t)\mathrm{d}t, \qquad \tilde{Y}_0 = \tilde{x}_0^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{2.18}$$

a cuyas soluciones denotaremos por Y_t^ν e $\tilde{Y}_t^\nu$ respectivamente.

Para ello, se verificará que estas ecuaciones cumplan las hipótesis del teorema. En primer lugar, denominando $\sigma(y) = 1-\beta$ al coeficiente de difusión, tenemos que σ, b_ν y $\tilde{b}_\nu$ son acotadas. Por otro lado, (H1) y (H2) se cumplen trivialmente, ya que σ es una constante distinta de cero. Para verificar la hipótesis (H3) basta notar que b_ν es Lipschitz continua pues está conformada como una concatenación de funciones Lipschitz continuas. Llamando L a su constante de Lipschitz, con $\varphi(x) = Lx$ se tiene que

$$|b_\nu(x) - b_\nu(y)| \leq L|x-y| = |Lx - Ly| = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \tag{2.19}$$

para cualquier par $x, y \in \mathbb{R}$, y por lo tanto se cumple (H3).

Finalmente, como $b_\nu(x) < \tilde{b}_\nu(x)$, y eligiendo x_0 tal que

$$Y_0^\nu = x_0^{\frac{1}{1-\beta}} < \tilde{x}_0^{\frac{1}{1-\beta}} = \tilde{Y}_0^\nu$$

se cumplen las condiciones de desigualdad necesarias para aplicar el teorema, obteniendo que

$$\mathbb{P}(Y_t^\nu < \tilde{Y}_t^\nu, t > 0) = 1. \tag{2.20}$$

Sean Y_t^* e $\tilde{Y}_t^*$ las soluciones a las ecuaciones

$$\mathrm{d}Y_t = (1-\beta)\mathrm{d}B_t + b(Y_t)\mathrm{d}t, \qquad Y_0 = x_0^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{2.21}$$

$$\mathrm{d}\tilde{Y}_t = (1-\beta)\mathrm{d}B_t + \tilde{b}(\tilde{Y}_t)\mathrm{d}t, \qquad \tilde{Y}_0 = \tilde{x}_0^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{2.22}$$

respectivamente, que existen y son únicas hasta el tiempo de explosión ya que los coeficientes de difusión y de drift son Lipschitz sobre compactos en $(0,\infty)$. Como las soluciones a (2.17) y (2.18) también son únicas, pues los coeficientes asociados son Lipschitz, en particular son únicas en el intervalo (ν,∞), pero en este intervalo los coeficientes son iguales (los de la ecuación (2.17) con los de (2.21) y los de (2.18) con los de (2.22)). Por lo tanto, ya que las condiciones iniciales pertenecen a (ν,∞), por unicidad de soluciones, Y_t^* y Y_t^ν deben ser iguales hasta S_ν^Y. De igual manera, las soluciones $\tilde{Y}_t^*$ y $\tilde{Y}_t^\nu$ deben ser iguales hasta $\tilde{S}_\nu^Y$. Luego, ambas igualdades se cumplen hasta el tiempo de parada $S_\nu^Y \wedge \tilde{S}_\nu^Y$. Dada la relación (2.20), se tiene que $S_\nu^Y \wedge \tilde{S}_\nu^Y = S_\nu^Y$.

Con lo anterior, se deduce que

$$\mathbb{P}(Y^*_{t\wedge S_\nu^Y} < \tilde{Y}^*_{t\wedge S_\nu^Y}, t>0) = 1,$$

y como $\nu > 0$ es arbitrario, se puede tomar límite y obtener que

$$\mathbb{P}(Y^*_{t\wedge S_0^Y} < \tilde{Y}^*_{t\wedge S_0^Y}, t>0) = 1. \tag{2.23}$$

Como las ecuaciones (2.15) y (2.21) tienen igual coeficiente de difusión y los coeficientes de drift son iguales en el intervalo $(0,\zeta)$, el lema 2.3 entrega que

$$\mathbb{P}(S_0^Y = \infty) = 1 \iff \mathbb{P}(S_0^{Y^*} = \infty) = 1.$$

Dado que $\mathbb{P}(S^X = \infty) = 1$, se deduce que $\mathbb{P}(S_0^Y = \infty) = 1$, y por lo tanto

$$\mathbb{P}(S_0^{Y^*} = \infty) = 1.$$

Luego, la desigualdad (2.23) implica que

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_0^{Y^*} = \infty) = 1,$$

y nuevamente aplicando el lema 2.3, esta vez a las ecuaciones (2.12) y (2.22) se obtiene que

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_0^{Y^*} = \infty) = 1 \iff \mathbb{P}(\tilde{S}_0^{Y} = \infty) = 1,$$

y, por lo tanto,

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_0^{Y} = \infty) = 1,$$

que implica

$$\mathbb{P}(\tilde{S} = \infty) = 1.$$

Para el caso 2, se modifican las funciones b y $\tilde{b}$ para incluir la constante K_2 y obtener la desigualdad que es útil en este caso al utilizar el teorema de comparación. Fuera de eso, el argumento es similar. Las funciones a utilizar son

$$b(y) = \begin{cases} (1-\beta)\left(\alpha K_2 y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} + y^{\frac{-\beta}{1-\beta}} f^*(y) - \frac{\alpha^2\beta}{2} y^{-1}\right) & \text{si } y \in (0,\zeta] \\ \zeta^{-1}(\tilde{b}(\zeta)(2\zeta - y) + (y-\zeta)) & \text{si } y \in (\zeta, 2\zeta] \\ 1 & \text{si } y \in (2\zeta, \infty) \end{cases}$$

$$\tilde{b}(y) = \begin{cases} (1-\beta)\left(\alpha\tilde{K}y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}}\mu^*(y) + y^{\frac{-\beta}{1-\beta}}f^*(y) - \frac{\alpha^2\beta}{2}y^{-1}\right) & \text{si } y \in (0,\zeta] \\ \zeta^{-1}b(\zeta)(2\zeta - y) & \text{si } y \in (\zeta, 2\zeta) \\ 0 & \text{si } y \in [2\zeta, \infty) \end{cases}$$

y así, $b > \tilde{b}$. También se definen las funciones b_ν y $\tilde{b}_\nu$, y las respectivas ecuaciones de la misma manera. Para utilizar el teorema de comparación es necesario verificar las hipótesis, pero las funciones de este caso cumplen las mismas propiedades que sus equivalentes del caso anterior, por lo que el teorema también es válido, esta vez eligiendo x_0 tal que

$$\tilde{Y}_0 = \tilde{x}_0^{\frac{1}{1-\beta}} < x_0^{\frac{1}{1-\beta}} = Y_0,$$

y dado el sentido de la desigualdad, esta vez se deduce que

$$\mathbb{P}(\tilde{Y}^*_{t\wedge\tilde{S}^Y_\nu\wedge S^Y_\nu} < Y^*_{t\wedge\tilde{S}^Y_\nu\wedge S^Y_\nu}, t > 0) = 1.$$

Cabe recalcar que, dado lo anterior, esta vez $\tilde{S}^Y_\nu \wedge S^Y_\nu = \tilde{S}^Y_\nu$. Aplicando esto y tomando límite se obtiene que

$$\mathbb{P}(\tilde{Y}^*_{t\wedge\tilde{S}^Y_0} < Y^*_{t\wedge\tilde{S}^Y_0}, t > 0) = 1.$$

Al igual que en el caso anterior, se puede aplicar el lema 2.3, obteniendo que

$$\mathbb{P}(S^Y_0 = \infty) < 1 \iff \mathbb{P}(S^{Y^*}_0 = \infty) < 1$$

Y dado que $\mathbb{P}(S^X_\infty = \infty) < 1$, se deduce que $\mathbb{P}(S^Y_0 = \infty) < 1$, lo que implica que $\mathbb{P}(S^{Y^*}_0 = \infty) < 1$, y por lo tanto $\mathbb{P}(\tilde{S}^{Y^*}_0 = \infty) < 1$.

Luego, aplicando el lema 2.3 nuevamente,

$$\mathbb{P}(\tilde{S}^{Y^*}_0 = \infty) < 1 \iff \mathbb{P}(\tilde{S}^Y_0 = \infty) < 1.$$

De lo anterior, se deduce que $\mathbb{P}(\tilde{S}^Y_0 = \infty) < 1$ y, de la relación entre $\tilde{Y}$ y $\tilde{X}$,

$$\mathbb{P}(\tilde{S}^X = \infty) < 1.$$

Esto prueba el resultado para el caso $1 - \beta < 0$.

Caso 2: $1 - \beta = 0$**.** Ahora, el cambio de variables anterior no tiene sentido, por lo que se utilizará el cambio dado por la función $g(x) = \ln(x)$. Así, aplicando la fórmula de Itô se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y_t &= f'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\mathrm{d}\langle X\rangle_t \\ &= X_t^{-1}\mathrm{d}X_t - \frac{1}{2}X_t^{-2}\alpha^2X_t^2\mathrm{d}t \\ &= X_t^{-1}\left(\alpha X_t\mathrm{d}B_t + [\alpha X_t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}p(X_t) + f(X_t)]\mathrm{d}t\right) - \frac{\alpha^2}{2}\mathrm{d}t \\ &= \alpha\mathrm{d}B_t + \left(\alpha X_t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-1}p(X_t) + X_t^{-1}f(X_t) - \frac{\alpha^2}{2}\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Luego, usando que $X_t = \exp(Y_t)$,

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha \mathrm{d}B_t + \left(\alpha \mathrm{e}^{Y_t\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}-1\right)} p^*(Y_t) + \mathrm{e}^{-Y_t} f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2}{2} \right) \mathrm{d}t,$$

donde $p^*(y) = p(\mathrm{e}^y)$ y $f^*(y) = f(\mathrm{e}^y)$.

Siguiendo la lógica del caso anterior, definimos

$$\mu^*(y) = \frac{p^*(y)}{\tilde{K}\mathrm{e}^{\frac{\delta}{\alpha}y}}$$

y dada la propiedad (2.6), se tiene que

$$\lim_{y\to\infty} \mu^*(y) = 1. \tag{2.24}$$

La ecuación anterior se escribe como

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha \mathrm{d}B_t + \left(K\alpha \mathrm{e}^{Y_t(\eta-1)} \mu^*(Y_t) + \mathrm{e}^{-Y_t} f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2}{2} \right) \mathrm{d}t. \tag{2.25}$$

Análogamente, al aplicar el cambio de variables a la ecuación (2.7), se obtiene

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha \mathrm{d}B_t + \left(K\alpha \mathrm{e}^{(\eta-1)Y_t} + \mathrm{e}^{-Y_t} f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2}{2} \right) \mathrm{d}t. \tag{2.26}$$

Al igual que en el caso anterior, se denotará por $X_t, \tilde{X}_t, Y_t, \tilde{Y}_t$ a las soluciones de las ecuaciones (2.7), (2.5), (2.26) y (2.25), por $S^X, \tilde{S}^X, S^Y, \tilde{S}^Y$ a los tiempos de explosión respectivos, y por $S_c^X, \tilde{S}_c^X, S_c^Y, \tilde{S}_c^Y$ a los tiempos de llegada a $c \in \mathbb{R}$. Dado que el cambio de variable es creciente, el tiempo de parada de interés para Y también es el de explosión a infinito, por lo que los tiempos de llegada S_c^Y se definen igual que los de X, es decir,

$$S_c^Y = \inf\{t \geq 0 : Y_t > c\},$$

y análogamente para $\tilde{Y}$. Por lo tanto, se tiene que $S^X = S^Y$ y $\tilde{S}^X = \tilde{S}^Y$. Así, probar que $\tilde{S}^X = \infty$ c.s. es equivalente a probar que $\tilde{S}^Y = \infty$ c.s. De la misma manera, probar que $\mathbb{P}(\tilde{S}^X = \infty) < 1$ es equivalente a probar que $\mathbb{P}(\tilde{S}^Y = \infty) < 1$.

De forma similar al caso anterior, de la propiedad (2.24) se obtiene que para todo $\xi > 0$ existe un $\zeta > 0$ tal que si $y > \zeta$, entonces

$$1 - \xi < \mu^*(y) < 1 + \xi,$$

y, agregando términos,

$$(1 - \operatorname{sgn}(\tilde{K})\xi)\tilde{K}\alpha\mathrm{e}^{(\eta-1)y} - \frac{\alpha^2}{2} < \tilde{K}\alpha\mu^*(y)\mathrm{e}^{(\eta-1)y} - \frac{\alpha^2}{2} < \tilde{K}\alpha(1 + \operatorname{sgn}(\tilde{K})\xi)\mathrm{e}^{(\eta-1)y} - \frac{\alpha^2}{2}$$

Se eligen K_1 y K_2 de la misma forma que en el caso anterior, tales que si $y > \zeta$,

$$\tilde{K}\alpha\mu^*(y)\mathrm{e}^{(\eta-1)y} - \frac{\alpha^2}{2} < K_1\alpha\mathrm{e}^{(\eta-1)y} - \frac{\alpha^2}{2},$$

y

$$\tilde{K}\alpha\mu^*(y)\mathrm{e}^{(\eta-1)y} - \frac{\alpha^2}{2} > K_2\alpha\mathrm{e}^{(\eta-1)y} - \frac{\alpha^2}{2}.$$

De esta manera, para probar la afirmación 1 se estudia la ecuación

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha\mathrm{d}B_t + \left(\alpha K_1\mathrm{e}^{(\eta-1)Y_t} + \mathrm{e}^{-Y_t}f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2}{2}\right)\mathrm{d}t, \tag{2.27}$$

que cumple que $\mathbb{P}(S^Y = \infty) = 1$, dadas las hipótesis del lema. Por otro lado, la ecuación del caso 2 es

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha\mathrm{d}B_t + \left(\alpha K_2\mathrm{e}^{(\eta-1)Y_t} + \mathrm{e}^{-Y_t}f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2}{2}\right)\mathrm{d}t, \tag{2.28}$$

que cumple $\mathbb{P}(S^Y = \infty) < 1$.

Primero se estudiará el caso 1 Se definen las funciones

$$b(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in (-\infty, \zeta-1)\,, \\ b(\zeta)(y-(\zeta-1)) + (\zeta - y) & \text{si } y \in (\zeta-1, \zeta)\,, \\ \alpha K_1\mathrm{e}^{(\eta-1)y} + \mathrm{e}^{-y}f^*(y) - \frac{\alpha^2}{2} & \text{si } y \in (\zeta, \infty)\,, \end{cases}$$

$$\tilde{b}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (-\infty, \zeta-1)\,, \\ \tilde{b}(\zeta)(y-(\zeta-1)) & \text{si } y \in (\zeta-1, \zeta)\,, \\ \alpha K_2\mathrm{e}^{(\eta-1)y} + \mathrm{e}^{-y}f^*(y) - \frac{\alpha^2}{2} & \text{si } y \in (\zeta, \infty)\,. \end{cases}$$

A partir de estas, se definen, para $\nu > 0$:

$$b_\nu(y) = b(y)\mathbb{1}_{(-\infty,\nu]}(y) + b(\nu)\mathbb{1}_{(\nu,\infty)}(y)$$
$$\tilde{b}_\nu(y) = \tilde{b}(y)\mathbb{1}_{(-\infty,\nu]}(y) + \tilde{b}(\nu)\mathbb{1}_{(\nu,\infty)}(y).$$

Estas funciones cumplen con que $b_\nu > \tilde{b}_\nu$. Nuevamente se utiliza el teorema de comparación, esta vez con las siguientes ecuaciones:

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha\mathrm{d}B_t + b_\nu(Y_t)\mathrm{d}t, \qquad Y_0 = \ln(x_0),$$
$$\mathrm{d}\tilde{Y}_t = \alpha\mathrm{d}B_t + \tilde{b}_\nu(\tilde{Y}_t)\mathrm{d}t, \qquad \tilde{Y}_0 = \ln(\tilde{x}_0).$$

Como anteriormente, sus soluciones se denotarán por Y_t^ν e $\tilde{Y}_t^\nu$ respectivamente.

Las hipótesis se cumplen de manera similar al caso anterior. Esta vez, $\sigma \equiv c$ sigue siendo constante, por lo que es acotada y cumple (H1) y (H2). Por otro lado, b_ν y $\tilde{b}_\nu$ son acotadas y b_ν es Lipschitz continua, por lo que se cumple (H3) tal como se verificó en (2.19).

Finalmente, como $\tilde{b}_\nu < b_\nu$ y

$$\tilde{Y}_0^\nu = \ln(\tilde{x}_0) < \ln(x_0) = Y_0^\nu,$$

se cumplen las condiciones de desigualdad necesarias para aplicar el teorema.

Así, se obtiene que

$$\mathbb{P}(\tilde{Y}_t^{\nu} < Y_t^{\nu}, t > 0) = 1. \tag{2.29}$$

Sean Y_t^* e $\tilde{Y}_t^*$ las soluciones a las ecuaciones

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha \mathrm{d}B_t + b(Y_t)\mathrm{d}t \tag{2.30}$$

$$\mathrm{d}\tilde{Y}_t = \alpha \mathrm{d}B_t + \tilde{b}(\tilde{Y}_t)\mathrm{d}t. \tag{2.31}$$

que existen y son únicas hasta el tiempo de explosión, pues los coeficientes de difusión y de drift son Lipschitz sobre compactos en $\mathbb{R}$. Por unicidad de soluciones en $(-\infty, \nu)$, Y_t^{ν} y Y_t^* deben ser iguales hasta S_ν^Y. De igual manera, $\tilde{Y}_t^{\nu}$ y $\tilde{Y}_t^*$ deben ser iguales hasta $\tilde{S}_\nu^Y$, con lo que ambas igualdades se cumplen hasta el tiempo de parada $S_\nu^Y \wedge \tilde{S}_\nu^Y$. Dada la relación (2.29), se tiene que $S_\nu^Y \wedge \tilde{S}_\nu^Y = S_\nu^Y$.

Con lo anterior, se deduce que

$$\mathbb{P}(\tilde{Y}^*_{t\wedge S_\nu^Y} < Y^*_{t\wedge S_\nu^Y}, t > 0) = 1,$$

y como $\nu > 0$ es arbitrario, se puede tomar $\nu \to \infty$ y obtener que

$$\mathbb{P}(\tilde{Y}^*_{t\wedge S^Y} < Y^*_{t\wedge S^Y}, t > 0) = 1. \tag{2.32}$$

Como las ecuaciones (2.7) y (2.30) tienen igual coeficiente de difusión y los coeficientes de drift son iguales en el intervalo (ζ, ∞), el lema 2.3 entrega que

$$\mathbb{P}(S^Y = \infty) = 1 \iff \mathbb{P}(S^{Y^*} = \infty) = 1.$$

Dado que $\mathbb{P}(S^X = \infty) = 1$, se deduce que $\mathbb{P}(S^Y = \infty) = 1$ de las relaciones expuestas anteriormente, y por lo tanto

$$\mathbb{P}(S^{Y^*} = \infty) = 1.$$

Luego, la desigualdad (2.32) implica que

$$\mathbb{P}(\tilde{S}^{Y^*} = \infty) = 1,$$

y nuevamente aplicando el lema 2.3, esta vez a las ecuaciones (2.25) y (2.31), se obtiene que

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_\infty^{Y^*} = \infty) = 1 \iff \mathbb{P}(\tilde{S}_\infty^{Y} = \infty) = 1,$$

y, por lo tanto, $\mathbb{P}(\tilde{S}_\infty^Y = \infty) = 1$, lo que implica el resultado buscado

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_\infty^X = \infty) = 1.$$

Para estudiar el caso 2, nuevamente se modifican las funciones b y $\tilde{b}$ para incluir la constante K_2 de forma tal que se obtenga la desigualdad opuesta entre estas,

$$b(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (-\infty, \zeta - 1] \\ b(\zeta)(y - (\zeta - 1)) & \text{si } y \in (\zeta - 1, \zeta) \\ \alpha K_2 \mathrm{e}^{(\eta-1)y} + \mathrm{e}^{-y} f^*(y) - \frac{\alpha^2}{2} & \text{si } y \in [\zeta, \infty) \end{cases}$$

$$\tilde{b}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in (-\infty, \zeta - 1]\,. \\ b(\zeta)(y - (\zeta - 1)) + (\zeta - y) & \text{si } y \in (\zeta - 1, \zeta) \\ \alpha K \mathrm{e}^{(\eta-1)y} \mu^*(y) + \mathrm{e}^{-y} f^*(y) - \frac{\alpha^2}{2} & \text{si } y \in [\zeta, \infty) \end{cases}$$

y así, $b < \tilde{b}$. A partir de estas, se definen las funciones b_ν, $\tilde{b}_\nu$, las ecuaciones respectivas y se elige x_0 de forma apropiada, tal como en el caso anterior. Se cumplen las hipótesis del teorema de comparación bajo la misma justificación. El teorema entrega que

$$\mathbb{P}(Y^*_{t \wedge \tilde{S}^Y_\nu \wedge S^Y_\nu} < \tilde{Y}^*_{t \wedge \tilde{S}^Y_\nu \wedge S^Y_\nu}, t > 0) = 1.$$

A partir de esto, se deduce que $\tilde{S}^Y_\nu \wedge S^Y_\nu = \tilde{S}^Y_\nu$. De aplicar esto y tomar límite se obtiene que

$$\mathbb{P}(Y^*_{t \wedge \tilde{S}^Y} < \tilde{Y}^*_{t \wedge \tilde{S}^Y}, t > 0) = 1. \tag{2.33}$$

Al igual que en el caso anterior, se puede aplicar el lema 2.3, deduciendo que

$$\mathbb{P}(S^Y = \infty) < 1 \iff \mathbb{P}(S^{Y^*} = \infty) < 1.$$

Dado que $\mathbb{P}(S^X = \infty) < 1$, se deduce que $\mathbb{P}(S^Y = \infty) < 1$, y por lo tanto

$$\mathbb{P}(S^{Y^*} = \infty) < 1.$$

Luego, usando (2.33),

$$\mathbb{P}(\tilde{S}^{Y^*} = \infty) < 1.$$

Para concluir, se aplica el lema 2.3 una vez más, con las ecuaciones de (2.25) y (2.31),

$$\mathbb{P}(\tilde{S}^{Y^*} = \infty) < 1 \iff \mathbb{P}(\tilde{S}^Y = \infty) < 1.$$

De donde se obtiene que $\mathbb{P}(\tilde{S}^Y = \infty) < 1$ y, de la relación entre $\tilde{Y}$ y $\tilde{X}$,

$$\mathbb{P}(\tilde{S}^X = \infty) < 1,$$

lo que termina la demostración del caso $1 - \beta = 0$.

Caso 3: $1 - \beta > 0$**.** En este caso se vuelve a utilizar el cambio de variables $f(x) = x^{1-\beta}$, por lo que se trabaja con las mismas ecuaciones encontradas en el caso 1:

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha(1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(\alpha K Y_t^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} + Y_t^{\frac{-\beta}{1-\beta}} f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2 \beta}{2} Y_t^{-1}\right)\mathrm{d}t,$$
$$\mathrm{d}Y_t = \alpha(1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(\alpha \tilde{K} Y_t^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} \mu^*(Y_t) + Y_t^{\frac{-\beta}{1-\beta}} f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2 \beta}{2} Y_t^{-1}\right)\mathrm{d}t,$$

donde μ^* se define tal como en el caso 1, y esta vez cumple que

$$\lim_{y \to \infty} \mu^*(y) = 1. \tag{2.34}$$

Se utilizará para las soluciones y los tiempos de parada y explosión respectivos la misma notación y definiciones que en el caso $1-\beta=0$ pues, a diferencia del primer caso, el cambio de variable es creciente, lo que implica que $S^X = S^Y$ y $\tilde{S}^X = \tilde{S}^Y$.

La propiedad (2.34) entrega que para todo $\xi > 0$ existe un $\zeta > 0$ tal que si $y > \zeta$, se cumple que

$$1-\xi < \mu^*(y) < 1+\xi,$$

y por lo tanto,

$$\alpha(1-\beta)\tilde{K}(1-\operatorname{sgn}(\tilde{K})\xi)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} < \alpha(1-\beta)\tilde{K}\mu^*(y)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} < \alpha(1-\beta)\tilde{K}(1+\operatorname{sgn}(\tilde{K})\xi)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}}.$$

Nuevamente, se utilizan las constantes K_1 y K_2 que cumplan las propiedades del enunciado, con

$$\alpha(1-\beta)K_2y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} < \alpha(1-\beta)\tilde{K}(1-\operatorname{sgn}(\tilde{K})\xi)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} < \alpha(1-\beta)\tilde{K}\mu^*(y)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}},$$

y

$$\alpha(1-\beta)\tilde{K}\mu^*(y)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} < \alpha(1-\beta)\tilde{K}(1+\operatorname{sgn}(\tilde{K})\xi)y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} < \alpha(1-\beta)K_1y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}}$$

Para el caso 1, se utiliza la ecuación

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha(1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(\alpha K_1 Y_t^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} + Y_t^{\frac{-\beta}{1-\beta}}f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2\beta}{2}Y_t^{-1}\right)\mathrm{d}t,$$

que cumple que $\mathbb{P}(S^Y = \infty) = 1$. Luego, se definen las funciones

$$b(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in (-\infty, \zeta-1] \\ b(\zeta)(y-(\zeta-1)) + (\zeta-1) & \text{si } y \in (\zeta-1, \zeta) \\ (1-\beta)\left(\alpha K_1 y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} + y^{\frac{-\beta}{1-\beta}}f^*(y) - \frac{\alpha^2\beta}{2}y^{-1}\right) & \text{si } y \in [\zeta, \infty) \end{cases}$$

$$\tilde{b}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (-\infty, \zeta-1) \\ b(\zeta)(y-(\zeta-1)) & \text{si } y \in (\zeta-1, \zeta) \\ (1-\beta)\left(\alpha\tilde{K} y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}}\mu^*(y) + y^{\frac{-\beta}{1-\beta}}f^*(y) - \frac{\alpha^2\beta}{2}y^{-1}\right) & \text{si } y \in [\zeta, \infty), \end{cases}$$

y de la misma manera, para $\nu > 0$:

$$b_\nu(y) = b(\nu)\mathbb{1}_{(-\infty,\nu]} + b(y)\mathbb{1}_{(\nu,\infty)}$$
$$\tilde{b}_\nu(y) = \tilde{b}(\nu)\mathbb{1}_{(-\infty,\nu]} + \tilde{b}(y)\mathbb{1}_{(\nu,\infty)}.$$

Estas funciones cumplen con $\tilde{b}_\nu < b_\nu$. Con estas funciones ya definidas, para concluir se procede exactamente como en el subcaso 1 dentro del caso $1-\beta=0$, por lo que este desarrollo se omitirá.

Por otro lado, para el caso 2, se utiliza la ecuación

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha(1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(\alpha K_2 Y_t^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} + Y_t^{\frac{-\beta}{1-\beta}}f^*(Y_t) - \frac{\alpha^2\beta}{2}Y_t^{-1}\right)\mathrm{d}t,$$

que cumple que $\mathbb{P}(S^Y = \infty) < 1$, y se utilizan las funciones

$$b(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (-\infty, \zeta - 1] \\ b(\zeta)(y - (\zeta - 1)) & \text{si } y \in (\zeta - 1, \zeta) \\ (1-\beta)\left(cK_2 y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} + y^{\frac{-\beta}{1-\beta}} f^*(y) - \frac{\alpha^2\beta}{2} y^{-1}\right) & \text{si } y \in [\zeta, \infty) \end{cases}$$

$$\tilde{b}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in (0, \zeta - 1] \\ b(\zeta)(y - (\zeta - 1)) + (\zeta - 1) & \text{si } y \in (\zeta - 1, \zeta) \\ (1-\beta)\left(\alpha\tilde{K} y^{\frac{\eta-\beta}{1-\beta}} \mu^*(y) + y^{\frac{-\beta}{1-\beta}} f^*(y) - \frac{\alpha^2\beta}{2} y^{-1}\right) & \text{si } y \in [\zeta, \infty) \end{cases}$$

y las funciones truncadas

$$\begin{aligned} b_\nu(y) &= b(\nu)\mathbb{1}_{(-\infty,\nu]} + b(y)\mathbb{1}_{(\nu,\infty)} \\ \tilde{b}_\nu(y) &= \tilde{b}(\nu)\mathbb{1}_{(-\infty,\nu]} + \tilde{b}(y)\mathbb{1}_{(\nu,\infty)}. \end{aligned}$$

Ahora, $b_\nu < \tilde{b}_\nu$. A partir de aquí, para concluir se procede exactamente como en el subcaso 2 del caso $1 - \beta = 0$. Esto completa la demostración. $\square$

Con esto ya se puede abordar la demostración de la propiedad presentada comentada al comienzo de esta sección mayor facilidad.

2.2. Análisis de la ecuación de volatilidad

A partir del lema recién demostrado se puede probar la siguiente proposición con facilidad.

Proposición 2.4 *La ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{aligned} d\sigma_t &= \sigma_t^\beta dB_t + p(\sigma_t)dt \\ \sigma_0 &> 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde p es una función Lipschitz sobre compactos en $(0, \infty)$ que cumple

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{p(\sigma)}{K\sigma^\delta} = 1,$$

tiene una única solución fuerte positiva (hasta un posible tiempo de explosión) para todo $K \neq 0, \delta, \beta \in \mathbb{R}$. Esta solución cumple con que $\mathbb{P}(S^\sigma = \infty) = 1$ si se cumple alguno de los siguientes casos no intersectantes:

1. $\delta = 2\beta - 1$, $K < \frac{1}{2}$.
2. $\delta = 2\beta - 1$, $K > \frac{1}{2}$, $\beta \leq 1$.
3. $\delta > 2\beta - 1$, $K < 0$.

4. $\delta > 2\beta - 1,\ K > 0,\ \delta \leq 1.$

5. $\delta < 2\beta - 1.$

Por otro lado, si no se cumple ninguno de los casos anteriores, y tampoco se cumple el caso borde

- $\delta = 2\beta - 1,\ K = \frac{1}{2},$

entonces la solución a la ecuación cumple $\mathbb{P}(S^\sigma < \infty) > 0.$

Demostración. En primer lugar, la existencia y unicidad de la solución fuerte positiva hasta un posible tiempo de explosión es una consecuencia directa del teorema 1.5, puesto que tanto el coeficiente de difusión como el de drift son funciones Lipschitz sobre compactos en $(0, \infty)$.

Para probar el resto de la propiedad, la idea es utilizar el lema 2.2 para comparar la ecuación (2.35) con la ecuación (2.4) y así deducir el resultado. Para concordar con la notación del lema, la constante K del enunciado se denotará por $\tilde{K}$. El lema es aplicable en cualquiera de los casos del enunciado, pues en todos se verifica la hipótesis de la afirmación 1 del lema 2.2. En efecto, escribiendo

$$\mu(\sigma) = \frac{p(\sigma)}{\tilde{K}\sigma^\delta},$$

la ecuación (2.35) se escribe

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma}_t = \tilde{\sigma}_t^\beta \mathrm{d}B_t + \tilde{K}\tilde{\sigma}^\delta \mu(\sigma_t)\mathrm{d}t. \tag{2.36}$$

Por otro lado, la ecuación de la forma

$$\mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\sigma^\delta \mathrm{d}t \tag{2.37}$$

cumple con que $S^\sigma = \infty$ c.s. para cualquier condición inicial $\sigma_0 > 0$ siempre que se sus parámetros cumplan alguno de los casos expuestos en el teorema 2.1. Es directo que las ecuaciones presentadas cumplen con las formas requeridas para aplicar el lema 2.2, con $\alpha = 1$ y $f \equiv 0$.

Por lo tanto, notando que si δ, β y $\tilde{K}$ cumplen alguno de los casos favorables del enunciado entonces siempre existe $K > \tilde{K}$ para el cual las constantes δ, β y K caen dentro del mismo caso, se deduce mediante el teorema 2.1 que en estos casos la ecuación (2.37) cumple que $S^\sigma = \infty$ c.s. Así, de la afirmación 1 del lema 2.2 se deduce que la solución a la ecuación (2.35) cumple $S = \infty$ c.s.

Lo anterior concluye la demostración de aquellos casos en los que $S = \infty$ c.s., pero aun es necesario revisar que en los casos opuestos a los mencionados en el enunciado se cumpla que $S < \infty$ con probabilidad positiva. Estos corresponden a

1. $\delta = 2\beta - 1,\ K > \frac{1}{2},\ \beta > 1.$

2. $\delta > 2\beta - 1,\ K > 0,\ \delta > 1.$

En [3] se prueba, como afirma el teorema 2.1, que la solución a la ecuación (2.37) cumple lo buscado en ambos casos, es decir, que $S < \infty$ con probabilidad positiva siempre que las constantes cumplan con alguna de las dos condiciones. Bajo los mismos argumentos que en la parte anterior, se puede probar que la ecuación (2.35) también lo cumple, esta vez utilizando la afirmación 2 del lema 2.2.

Dado $\tilde{K} > \frac{1}{2}$ o $\tilde{K} > 0$ dependiendo del caso, es directo que siempre existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{K} - \varepsilon < \tilde{K}$ y $\frac{1}{2} < \tilde{K} - \varepsilon$ o $0 < \tilde{K} - \varepsilon$. Luego, se cumple que la solución a la ecuación (2.4) con constante $K = \tilde{K} - \varepsilon$ cumple $\mathbb{P}\left(S^{\sigma} = \infty\right) < 1$. Por lo probado en 2.2, utilizando esta vez la afirmación 2, se concluye que (2.35) cumple $\mathbb{P}\left(S^{\tilde{\sigma}} = \infty\right) < 1$, que es lo requerido.

Con esto, se han cubierto todos los casos necesarios para probar el resultado, lo que concluye la demostración. □

2.2.1. Estudio del caso especial

La propiedad anterior trata la gran mayoría de los casos por analizar, sin embargo, queda pendiente el caso $\delta = 2\beta - 1,\ K = \frac{1}{2}$. Dada la naturaleza del caso, no se puede utilizar directamente el lema 2.2 para obtener el resultado deseado. En primer lugar, se abordará el subcaso en el que sí se puede aplicar el lema, dado por las condiciones $\delta = 2\beta - 1,\ K = \frac{1}{2}$, $\beta \leq 1$.

En este caso, tomando $\tilde{K} > K$, entonces las constantes δ, β y $\tilde{K}$ quedan dentro del caso $\delta = 2\beta - 1,\ K > \frac{1}{2},\ \beta \leq 1$, por lo que la solución a la ecuación

$$\mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + \tilde{K}\sigma_t^{\delta}\mathrm{d}t$$

cumple con que $S = \infty$ c.s., de acuerdo con el teorema 2.1. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis para utilizar la afirmación 1 del lema 2.2 y deducir que la solución a 2.35 cumple $S = \infty$ c.s. que es lo buscado.

Así, solo queda estudiar el caso $\delta = 2\beta - 1,\ K = \frac{1}{2},\ \beta > 1$. Para comenzar, se procede realizando el cambio de variable $Y_t = g(\sigma_t) = \sigma_t^{1-\beta}$, obteniéndose mediante la fórmula de Itô la ecuación

$$\mathrm{d}Y_t = (1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(K\mu^*(Y_t) - \frac{\beta}{2}\right)Y_t^{-1}\mathrm{d}t, \quad Y_0 = \sigma_0^{1-\beta}, \tag{2.38}$$

donde ahora

$$\mu^*(y) = \mu(y^{\frac{1}{1-\beta}}) = \frac{p(y^{\frac{1}{1-\beta}})}{Ky^{\frac{\delta}{1-\beta}}},$$

que cumple $\mu^*(y) \to 1$ cuando $y \to 0$, pues $1 - \beta < 0$. Para aplicar el test de Feller se escribe la función

$$v(x) = \int_1^x \exp\left(-2\int_1^y \frac{b(u)}{\sigma(u)^2}\mathrm{d}u\right)\int_1^y \frac{2}{\sigma(z)^2}\exp\left(2\int_1^z \frac{b(u)}{\sigma(u)^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

donde

$$\exp\left(-2\int_1^y \frac{b(u)}{\sigma(u)^2}\mathrm{d}u\right) = \exp\left(-\frac{2}{1-\beta}\int_1^y \left(K\mu^*(u) - \frac{\beta}{2}\right) u^{-1}\mathrm{d}u\right).$$

Escribiendo $\mu^*(x) = 1 + \varepsilon^*(x)$ y $K = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\exp\left(-2\int_1^y \frac{b(u)}{\sigma(u)^2}\mathrm{d}u\right) &= \exp\left(-\frac{2}{1-\beta}\int_1^y \frac{1-\beta}{2}u^{-1} + \frac{\varepsilon^*(u)}{2}u^{-1}\mathrm{d}u\right) \\
&= \exp\left(-\ln(y) - \frac{1}{1-\beta}\int_1^y \varepsilon^*(u)u^{-1}\mathrm{d}u\right) \\
&= y^{-1}\exp\left(-\frac{1}{1-\beta}\int_1^y \varepsilon^*(u)u^{-1}\mathrm{d}u\right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_x^1 y^{-1}\int_y^1 z\exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_y^z \varepsilon^*(u)u^{-1}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\geq \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_x^1 y^{-1}\int_y^1 z\exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_y^z \varepsilon^{*+}(u)u^{-1}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\geq \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_x^1 \varepsilon^{*+}(u)u^{-1}\mathrm{d}u\right)\frac{2}{(1-\beta)^2}\int_x^1 y^{-1}\int_y^1 z\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_x^1 \varepsilon^{*+}(u)u^{-1}\mathrm{d}u\right)v^*(x),
\end{aligned}$$

donde $v^*(x)$ corresponde a la función asociada a la ecuación

$$\mathrm{d}Y_t = (1-\beta)\mathrm{d}B_t + \frac{(1-\beta)^2}{2}Y_t^{-1}\mathrm{d}t, \quad Y_0 = \sigma_0^{1-\beta},$$

mediante el test de Feller. Esta ecuación se obtiene como consecuencia de aplicar el mismo cambio de variable a la ecuación 2.37 por lo que, en virtud del teorema 2.1, la solución a esta ecuación cumple que $S_0^Y = \infty$ c.s., lo que implica que

$$\lim_{x\to 0} v^*(x) = \infty.$$

Por otro lado, suponiendo que

$$\int_0^1 \varepsilon^{*+}(u)u^{-1}\mathrm{d}u < \infty, \tag{2.39}$$

entonces

$$\begin{aligned}
v(x) &\geq \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_x^1 \varepsilon^+(u)u^{-1}\mathrm{d}u\right)v^*(x) \\
&\geq \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_0^1 \varepsilon^+(u)u^{-1}\mathrm{d}u\right)v^*(x).
\end{aligned}$$

Como la exponencial en la última expresión es positiva, pues la integral es finita, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} v^*(x) = \infty \implies \lim_{x\to 0} v(x) = \infty,$$

por lo que la solución a la ecuación (2.38) cumple $S_0^Y = \infty$ c.s.

Revisando la condición (2.39), esta se cumple si, por ejemplo, existen $C, \alpha > 0$ tales que $\varepsilon^*(x) \leq Cx^\alpha$. Deshaciendo el cambio de variable $\varepsilon^*(x) = \varepsilon(x^{\frac{1}{1-\beta}})$, donde $\mu(x) = 1 + \varepsilon(x)$, esto se traduce en

$$\varepsilon(x) \leq Cx^{\alpha(1-\beta)}.$$

Es decir, (2.39) se cumple si existen $C > 0$ y $\alpha < 0$ tales que

$$\varepsilon(x) \leq Cx^\alpha.$$

Esta condición puede mejorarse. Si se considera que existen $C' > 0$ y $M > 1$ tales que para $x > M$

$$\varepsilon(x) \leq C' \ln(x)^{-1}, \tag{2.40}$$

es decir, $\varepsilon^*(x) \leq C \ln(x^{-1})^{-1}$ para $x < \frac{1}{M} =: \eta$, con $C = C'(\beta - 1)$. Reemplazando esto en el desarrollo anterior, se obtiene que

$$v(x) \geq \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_x^\eta y^{-1} \int_y^\eta z \exp\left(\frac{C}{1-\beta} \int_y^z \ln(u^{-1})^{-1} u^{-1} \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

Para efectos del cálculo se utilizará $\eta = \mathrm{e}^{-1}$, pero dado que la convergencia de $v(x)$ no depende del valor de η, las conclusiones serán aplicables para cualquier $\eta < 1$. Aplicando el cambio de variable $s = \ln(u^{-1})$, $\mathrm{d}s = -u^{-1}\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{C}{1-\beta} \int_y^z \ln(u^{-1})^{-1} u^{-1} \mathrm{d}u\right) &= \exp\left(-\frac{C}{1-\beta} \int_{\ln(y^{-1})}^{\ln(z^{-1})} s^{-1} \mathrm{d}s\right) \\
&= \exp\left(-\frac{C}{1-\beta} \left(\ln(\ln(z^{-1})) - \ln(\ln(y^{-1}))\right)\right) \\
&= \ln(z^{-1})^{-\frac{C}{1-\beta}} \ln(y^{-1})^{\frac{C}{1-\beta}},
\end{aligned}$$

con lo que

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_x^{\mathrm{e}^{-1}} y^{-1} \ln(y^{-1})^{\frac{C}{1-\beta}} \int_y^{\mathrm{e}^{-1}} z \ln(z^{-1})^{-\frac{C}{1-\beta}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

Como $z \ln(z^{-1})^{-\frac{C}{1-\beta}} \to 0$ cuando $z \to 0$, se tiene que $\int_0^{\mathrm{e}^{-1}} z \ln(z^{-1})^{-\frac{C}{1-\beta}}$ es finita (y positiva). Luego $v(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$ si y solo si

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{\mathrm{e}^{-1}} y^{-1} \ln(y^{-1})^{\frac{C}{1-\beta}} \mathrm{d}y = \infty.$$

Aplicando el mismo cambio de variable,

$$\int_x^{e^{-1}} y^{-1} \ln(y^{-1})^{\frac{C}{1-\beta}} dy = \int_1^{\ln(x^{-1})} u^{\frac{C}{1-\beta}} du.$$

Y, resolviendo, asumiendo $\frac{C}{1-\beta} \neq -1$

$$\int_x^{e^{-1}} y^{-1} \ln(y^{-1})^{\frac{C}{1-\beta}} dy = \frac{1-\beta}{C+1-\beta} \left(\ln(x^{-1})^{\frac{C+1-\beta}{1-\beta}} - 1 \right)$$

Al tomar el límite $x \to 0$, si $0 < C < \beta - 1$, la integral anterior va a infinito, y si $C > \beta - 1$, converge a una constante positiva. Si $\frac{C}{1-\beta} = -1$,

$$\int_x^{e^{-1}} y^{-1} \ln(y^{-1})^{\frac{C}{1-\beta}} dy = \ln(\ln(x^{-1})),$$

que tiende a infinito cuando $x \to 0$. Por una parte, lo anterior implica que si $0 < C \leq \beta - 1$ la solución a (2.35) cumplirá $S = \infty$ c.s. La conclusión restante se puede aplicar para obtener otro resultado.

Suponiendo ahora que existe un $M > 1$ tal que para todo $x > M$, $\varepsilon(x) \geq C \ln(x)^{-1}$ para $C > \beta - 1$, es decir, para todo $x \in (0, \frac{1}{M})$,

$$\varepsilon^*(x) \geq C \ln(x^{-1})^{-1}, \tag{2.41}$$

del cálculo anterior se obtiene que,

$$v(x) \leq \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_x^{\frac{1}{M}} y^{-1} \int_y^{\frac{1}{M}} z \exp\left(\frac{C}{1-\beta} \int_y^z \ln(u^{-1})^{-1} u^{-1} du \right) dz dy,$$

y como el lado derecho de la desigualdad es convergente cuando $x \to 0$, $v(x)$ también lo es.

Lo anterior implica que si se cumple (2.41), entonces la solución a la ecuación (2.35) cumplirá que $S < \infty$ con probabilidad positiva.

Escribiendo lo anterior en términos de la ecuación para σ, se concluye el siguiente resultado:

Proposición 2.5 *La ecuación diferencial estocástica*

$$d\sigma_t = \sigma_t^\beta dB_t + p(\sigma_t) dt$$
$$\sigma_0 > 0$$

donde p es una función Lipschitz sobre compactos en $(0, \infty)$ que cumple

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{2p(\sigma)}{\sigma^\delta} = 1,$$

tiene una única solución fuerte positiva (hasta un posible tiempo de explosión) para todo $\delta = 2\beta - 1$ y $\beta > 1$. Sea

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{2p(\sigma)}{\sigma^\delta} - 1,$$

si existen $0 < C \leq 1$ *y* $M > 1$ *tales que para todo* $\sigma > M$*,*

$$\varepsilon(\sigma) \leq C \ln(\sigma)^{-1},$$

entonces la solución σ_t *cumple* $S = \infty$ *c.s.*

Por otro lado, si existen $C > 1$ *y* $M > 1$ *tales que*

$$\varepsilon(\sigma) \geq C \ln(\sigma)^{-1}$$

para todo $\sigma > M$*, entonces* σ_t *cumple* $S < \infty$ *con probabilidad positiva.*

Esto concluye el estudio del tiempo de explosión de la ecuación de volatilidad (2.35), sin embargo, del análisis anterior es posible deducir un corolario que será útil al estudiar ciertos casos en el capítulo siguiente. Concretamente, el resultado es una reescritura de la proposición anterior en términos que serán útiles posteriormente.

Corolario 2.6 *La ecuación diferencial estocástica*

$$dY_t = (1-\beta)dB_t + (1-\beta)\left(K\mu^*(Y_t) - \frac{\beta}{2}\right)Y_t^{-1}dt, \quad Y_0 > 0,$$

donde μ^* *es una función Lipschitz sobre compactos en* $(0,\infty)$ *que cumple*

$$\lim_{y\to 0} \mu^*(y) = 1,$$

tiene una única solución fuerte positiva hasta un tiempo de explosión S^Y *para todo* $\delta = 2\beta - 1$ *y* $\beta > 1$*. Sea*

$$\varepsilon^*(y) = \mu^*(y) - 1,$$

si existen $C \in (0, \beta - 1)$ *y* $M > 1$ *tales que para todo* $y > M$*,*

$$\varepsilon^*(y) \leq C \ln(y^{-1})^{-1},$$

entonces la solución Y_t *cumple* $S^Y = \infty$ *c.s.*

Por otro lado, si existen $C > \beta - 1$ *y* $M > 1$ *tales que*

$$\varepsilon^*(y) \geq C \ln(y^{-1})^{-1}$$

para todo $y > M$*, entonces* Y_t *cumple* $S^Y < \infty$ *con probabilidad positiva.*

Con esta información, es posible abordar el estudio del sistema (2.1).

Capítulo 3

Modelo de Volatilidad Estocástica

El objeto de estudio de esta sección será la solución X_t del sistema

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \sigma_t^\alpha X_t \mathrm{d}W_t, & X_0 = x_0 > 0 \\ \mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + p(\sigma_t)\mathrm{d}t, & \sigma_0 > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $\alpha > 0$, y los procesos W_t y B_t son movimientos Brownianos ρ-correlacionados, con $\rho \in [-1, 1]$, es decir, existe un movimiento Browniano B'_t independiente de B_t tal que

$$W_t = \rho B_t + \sqrt{1-\rho^2} B'_t, \ \forall \ t > 0,$$

o, en otras palabras, $[W, B]_t = \rho t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Específicamente, se deberá resolver la pregunta de si el proceso X es una martingala o, en su defecto, una martingala local estricta.

En [3], se resuelve la misma interrogante en base a la solución X de un modelo similar, dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= \sigma_t^\alpha X_t \mathrm{d}W_t, & X_0 = x_0 > 0 \\ \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^\delta \mathrm{d}t, & \sigma_0 > 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

La respuesta que se da a esta interrogante está relacionada con la finitud del tiempo de explosión de la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha Y_t^{1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \mathrm{d}\tilde{B}_t + \left[K\alpha Y_t^{1+\frac{\delta-1}{\alpha}} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} Y_t^{1+2\frac{\beta-1}{\alpha}} + \rho\alpha Y_t^{2+\frac{\beta-1}{\alpha}} \right] \mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

Más específicamente, la relación está dada por la siguiente proposición.

Proposición 3.1 (Ver [3]) *Si σ_t es una solución buena (i.e. $\mathbb{P}(S^\sigma = \infty) = 1$), entonces la única solución positiva Y_t de la ecuación (3.3) explota hacia infinito en un tiempo finito con probabilidad positiva bajo la medida $\mathbb{P}$, es decir, $\mathbb{P}(S^Y < \infty) > 0$ si y solo X_t es una martingala local estricta.*

3.1. Resultados previos

Siguiendo el razonamiento presentado en [3] y [1] para demostrar este resultado, se puede probar una propiedad análoga a la anterior para el sistema (3.1). En primer lugar, se definen los tiempos de parada

$$\begin{aligned} T_M &= \text{ínf}\{t > 0 : X_{t\wedge S_0} \geq M\}, \\ \tau_M^{M'} &= T_{M'} \wedge S_M \end{aligned}$$

y se estudia el proceso $X_{t\wedge S_0\wedge\tau_M^{M'}}$. Para alivianar un poco la notación, en adelante se utilizará la letra S solo para los tiempos de parada asociados a σ y la letra T para los asociados a X. Aplicando la fórmula de Itô con la función $f(x) = x^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$, se obtiene que

$$X^\gamma_{t\wedge S_0\wedge\tau_M^{M'}} = x_0^\gamma + \int_0^{t\wedge S_0\wedge\tau_M^{M'}} \gamma X_s^\gamma \sigma_s^\alpha \mathrm{d}W_s + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\int_0^{t\wedge S_0\wedge\tau_M^{M'}} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s,$$

y tomando esperanza, usando que $X^{t\wedge S_0\wedge\tau_M^{M'}} \geq 0$ por ser una exponencial estocástica y anulando el término de la integral estocástica pues es una martinganla que comienza en cero,

$$0 \leq \mathbb{E}(X^\gamma_{t\wedge S_0\wedge\tau_M^{M'}}) = x_0^\gamma + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_0\wedge\tau_M^{M'}} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s\right), \tag{3.4}$$

y, por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_0\wedge\tau_M^{M'}} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s\right) \leq -\frac{2x_o^\gamma}{\gamma(1-\gamma)} < \infty.$$

Luego, el teorema de convergencia monótona implica que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_0} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s\right) \leq -\frac{2x_o^\gamma}{\gamma(1-\gamma)} < \infty.$$

Por otro lado, como

$$M\mathbb{P}(T_M \leq t) = \mathbb{E}(M1_{T_M\leq t\wedge S_0}) \leq \mathbb{E}(X_{t\wedge S_0\wedge T_M}) = x_0,$$

se deduce que

$$\mathbb{P}(T_M \leq t) \leq \frac{x_0}{M},$$

pues X_t es una martingala local, y al detenerla en $S_0 \wedge T_M$ resulta una martingala. Así, $T_M \to \infty$ c.s. cuando $M \to \infty$. Además, si σ_t cumple $S = \infty$ c.s., $S_M \to \infty$ c.s. cuando $M \to \infty$. Por lo tanto, $\tau_M^{M'} \to \infty$ si $M, M' \to \infty$.

Por otra parte, aplicando la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{\gamma}$ y $\frac{1}{1-\gamma}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^\gamma_{\tau_M^{M'}\wedge t\wedge S_0} 1_{\tau_M^{M'}<t\wedge S_0}) &\leq \mathbb{E}(X_{\tau_M^{M'}\wedge t\wedge S_0})^\gamma \mathbb{E}(1_{\tau_M^{M'}\wedge t\wedge S_0})^{1-\gamma} \\ &= x_0^\gamma \mathbb{P}(\tau_M^{M'} < t\wedge S_0)^{1-\gamma} \leq x_0^\gamma\mathbb{P}(\tau_M^{M'} < t)^{1-\gamma} \end{aligned}$$

y así, $\mathbb{E}(X^{\gamma}_{\tau^{M'}_M \wedge t\wedge S_0} 1_{\tau^{M'}_M < t\wedge S_0}) \to 0$ cuando $M, M' \to \infty$. Como $X^{\gamma}_{t\wedge S_0} \leq X_{t\wedge S_0} + 1 \in L^1$, se puede aplicar el teorema de convergencia dominada, mediante el que se obtiene, al hacer $M, M' \to \infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^{\gamma}_{t\wedge S_0\wedge \tau^{M'}_M}) &= \mathbb{E}(X^{\gamma}_{t\wedge S_0\wedge \tau^{M'}_M} 1_{\tau^{M'}_M \geq t\wedge S_0}) + \mathbb{E}(X^{\gamma}_{t\wedge S_0\wedge \tau^{M'}_M} 1_{\tau^{M'}_M < t\wedge S_0}) \\ &\to \mathbb{E}(X^{\gamma}_{t\wedge S_0}).\end{aligned}$$

Aplicando este resultado en (3.4), se deduce que

$$\mathbb{E}(X^{\gamma}_{t\wedge S_0}) = x_0^{\gamma} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_0} X_s^{\gamma}\sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s\right),$$

y tomando límite con $\gamma \to 1$ se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 3.2 *Sean X_t y σ_t soluciones del sistema (3.1), donde σ_t es buena. Para todo $\gamma \in (0,1)$ y $t > 0$ se cumple que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_0} X_s^{\gamma}\sigma_s^{2\alpha} ds\right) < \infty.$$

Además, el siguiente límite existe

$$\Theta(t) = \lim_{\gamma\to 1} \frac{\gamma - 1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_0} X_s^{\gamma}\sigma_s^{2\alpha} ds\right),$$

donde $\Theta(t) = \mathbb{E}(X_{t\wedge S_0}) - x_0 \leq 0$.

Con la notación de la propiedad anterior, X_t es una martingala local estricta si y solo si existe algún $t > 0$ para el cual $\Theta(t) < 0$.

Lema 3.3 (Ver [1], Lema 5.3) *Sean $0 \leq \theta_1 < \theta_2$ y X_t, σ_t las soluciones del sistema (3.1), donde σ_t cumple $S = \infty$ c.s. Si para $t > 0$ sucede que*

$$\liminf_{y\to 1^-}(\gamma - 1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_0} X_s^{\gamma}\sigma_s^{\theta_1} ds\right) < 0,$$

entonces

$$\liminf_{y\to 1^-}(\gamma - 1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_0} X_s^{\gamma}\sigma_s^{\theta_1} ds\right) = -\infty,$$

Con esto, se puede probar el siguiente resultado

Proposición 3.4 *Dado el sistema*

$$\begin{cases} dX_t = X_t\sigma_t^{\alpha} dW_t, & X_0 = x_0 > 0 \\ d\sigma_t = \sigma_t^{\beta} dB_t + p(\sigma_t)dt, & \sigma_0 > 0 \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $K < 0$ y $\rho \leq 0$. Entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.

Demostración. La demostración es análoga a lo expuesto en [3] (Teo. 3.3), pues cuando $K < 0$, acorde a lo probado en el teorema 2.4, σ_t cumple $S = \infty$ c.s. y, dado que también es continua, posee las mismas propiedades de la solución σ_t del sistema (3.2) que se utilizan en [3] al probar el resultado análogo. Concretamente, se procede aplicando la formula de Itô al proceso $X^{\gamma}_{t\wedge S_\varepsilon \wedge \tau}\sigma_{t\wedge S_\varepsilon\wedge\tau}$. Para evitar sobrecargar la notación, se escribirá $\tau = \tau_M^{M'}$.

$$\begin{aligned}X^{\gamma}_{t\wedge S_\varepsilon \wedge \tau}\sigma_{t\wedge S_\varepsilon\wedge\tau} = x_0^\gamma\sigma_0 &+ \gamma\int_0^{t\wedge S_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{\alpha+1}\mathrm{d}W_s + \int_0^{t\wedge S_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{\beta}\mathrm{d}B_s \\ &+ K\int_0^{t\wedge S_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{\delta}\mathrm{d}s + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\int_0^{t\wedge S_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s \\ &+ \gamma\rho\int_0^{t\wedge S_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{\alpha+\beta}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Tomando esperanza y acotando se deduce que

$$0 \leq \mathbb{E}\left(X^{\gamma}_{t\wedge S_\varepsilon \wedge \tau}\sigma_{t\wedge S_\varepsilon\wedge\tau}\right) \leq x_0^\gamma\sigma_0 + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s\right).$$

Luego, reorganizando los términos y utilizando el teorema de convergencia monótona sobre M y M',

$$(1-\gamma)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_0} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s\right) \leq \frac{2x_0^\gamma\sigma_0}{\gamma}.$$

Por lo tanto,

$$\liminf_{y\to 1^-}(\gamma-1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_0} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s\right) \geq -2x_0\sigma_0 > -\infty,$$

y aplicando el lema anterior, se deduce que

$$\lim_{\gamma\to 1^-}(\gamma-1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_0} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s\right) = 0$$

para cualquier $t > 0$. De la propiedad 3.2 se concluye entonces que $\mathbb{E}(X_{t\wedge S_0}) = x_0$, es decir, $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala. $\square$

Para obtener la propiedad análoga a la proposición 3.1, se aplica el cambio de variables $Y_t = \sigma_t^\alpha$. Concretamente,

$$\begin{aligned}Y_t &= \sigma_0^\alpha + \alpha\int_0^t \sigma_s^{\alpha-1}\mathrm{d}\sigma_s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\int_0^t \sigma_s^{\alpha-2}\mathrm{d}\langle\sigma\rangle_s \\ &= \sigma_0^\alpha + \int_0^t \sigma_s^{\alpha+\beta-1}\mathrm{d}B_s + \alpha\int_0^t \sigma_s^{\alpha-1}p(\sigma_s)\mathrm{d}s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\int_0^t \sigma_s^{\alpha+2\beta-2}\mathrm{d}s \\ &= \sigma_0^\alpha + \alpha\int_0^t Y_s^{1+\frac{\beta-1}{\alpha}}\mathrm{d}B_s + K\alpha\int_0^t Y_s^{1+\frac{\delta-1}{\alpha}}\mu^*(Y_s)\mathrm{d}s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\int_0^t Y_s^{1+2\frac{\beta-1}{\alpha}}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

donde, a diferencia del capítulo anterior,

$$\mu^*(y) = \mu(y^{\frac{1}{\alpha}}) = \frac{p(y^{\frac{1}{\alpha}})}{Ky^{\frac{\delta}{\alpha}}} = \frac{p(\sigma)}{K\sigma^{\delta}}.$$

Por lo tanto, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = X_t Y_t \mathrm{d}W_t, & X_0 = x_0 > 0 \\ \mathrm{d}Y_t = \alpha Y_t^{1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \mathrm{d}B_s + \left[K\alpha Y_t^{1+\frac{\delta-1}{\alpha}} \mu^*(Y_s) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} Y_t^{1+2\frac{\beta-1}{2}}\right] \mathrm{d}s, & Y_0 = \sigma_0^{\alpha} > 0. \end{cases}$$

X_t es, entonces, la exponencial estocástica del proceso Y_t, es decir,

$$X_{t\wedge S_0} = x_0 \exp\left(\int_0^{t\wedge S_0} y_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge S_0} y_s^2 \mathrm{d}s\right).$$

Además,

$$\mathbb{E}(X_{S_M^Y \wedge S_0} 1_{S_M^Y < t\wedge S_0}) = x_0 \tilde{\mathbb{P}}_t(S_M^Y < t \wedge S_0),$$

donde $\tilde{\mathbb{P}}_t$ es la medida que tiene como densidad a $\frac{1}{x_0} X_{t\wedge S_0 \wedge S_M^Y}$. Esta medida es de probabilidad, pues el proceso $X_{t\wedge S_0\wedge S_M^y}$ cumple la condición de Novikov y acorde a lo expuesto en el teorema 1.3 es una martingala. Esto se comprueba acotando como sigue,

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge S_0\wedge S_M^Y} Y_s^2 \mathrm{d}s\right)\right) \leq \exp\left(\frac{1}{2}M^2 t\right) < \infty.$$

Una aplicación del teorema de Girsanov (1.4) dice que el proceso estocástico definido por

$$\begin{aligned} \tilde{B}_s &= B_s - \int_0^s Y_s \mathrm{d}\langle B, W\rangle_s \\ &= B_s - \rho \int_0^s Y_s \mathrm{d}s, \qquad \text{con } 0 \leq s < t \wedge S_0 \wedge S_M^Y, \end{aligned}$$

es un movimiento Browniano respecto a la medida $\tilde{\mathbb{P}}_t$. Utilizando esta igualdad, se puede describir Y_s mediante la siguiente ecuación

$$\mathrm{d}Y_s = \alpha Y_s^{1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \mathrm{d}\tilde{B}_s + \left[K\alpha Y_s^{1+\frac{\delta-1}{\alpha}} \mu^*(Y_s) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} Y_s^{1+2\frac{\beta-1}{\alpha}} + \alpha\rho Y_s^{2+\frac{\beta-1}{\alpha}}\right] \mathrm{d}s.$$

Por lo tanto, la solución Y_s del sistema (sistema original), al ser vista bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}_t$ tiene la misma distribución que la solución de la ecuación

$$\mathrm{d}Y_s = \alpha Y_s^{1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \mathrm{d}\Gamma_s + \left[K\alpha Y_s^{1+\frac{\delta-1}{\alpha}} \mu^*(Y_s) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} Y_s^{1+2\frac{\beta-1}{\alpha}} + \alpha\rho Y_s^{2+\frac{\beta-1}{\alpha}}\right] \mathrm{d}s, \tag{3.5}$$

bajo la medida $\mathbb{P}$ (en adelante $\tilde{Y}_s$), donde Γ es un movimiento Browniano para la medida $\mathbb{P}$, siempre que ambas comiencen desde la misma condición inicial σ_0^{α}. Con esto, se puede probar el siguiente resultado:

Proposición 3.5 *La única solución positiva $\tilde{Y}_s$ de la ecuación (3.5) cumple*

$$\mathbb{P}(S^{\tilde{Y}} < \infty) > 0$$

si y solo sí existe algún $t > 0$ tal que

$$\liminf_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{S_M^Y \wedge S_0} 1_{S_M^Y < t\wedge S_0}) > 0,$$

y $X_{s\wedge S_0}$ es una martingala local estricta.

Demostración. Procediendo exactamente como en [3] o [1] se obtiene el resultado. En resumen, el razonamiento es el siguiente: $X_{s\wedge S_M^Y \wedge S_0}$ es una martingala para cualquier $M > 0$, por lo que

$$\begin{aligned} x_0 &= \mathbb{E}(X_{s\wedge S_0} 1_{s\wedge S_0 \le S_M^Y}) + \mathbb{E}(X_{S_M^Y} 1_{S_M^Y < s\wedge S_0}) \\ &= \mathbb{E}(X_{s\wedge S_0}) + \liminf_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{S_M^Y} 1_{S_M^Y < s\wedge S_0}) \end{aligned}$$

donde se utiliza el teorema de convergencia monótona para la primera esperanza, junto con que $X_{s\wedge S_0} \ge 0$ y $S_M^Y \to \infty$, pues Y_s cumple $S^Y = \infty$ c.s. Por lo tanto, si para todo $s > 0$,

$$\liminf_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{S_M^Y} 1_{S_M^Y < s\wedge S_0}) = 0$$

entonces $X_{s\wedge S_0}$ es una martingala. En caso contrario $X_{s\wedge S_0}$ será una martingala local estricta.

Ahora, suponiendo que $\mathbb{P}(S^{\tilde{Y}} < \infty) > 0$, como $\mathbb{P}(S^{\tilde{Y}} < \infty) = \mathbb{P}(S^{\tilde{Y}} < S_0^{\tilde{Y}})$, para s_0 suficientemente grande,

$$\tilde{\mathbb{P}}_t(S_M^Y < s_0 \wedge S_0) = \mathbb{P}(S_M^{\tilde{Y}} < s_0 \wedge S_0^{\tilde{Y}}) \ge \mathbb{P}(S^{\tilde{Y}} < s_0 \wedge S_0^{\tilde{Y}}) > 0$$

donde la primera igualdad se tiene debido a que la distribución de Y_s bajo $\tilde{\mathbb{P}}_t$ es la misma que la de $\tilde{Y}_s$ bajo $\mathbb{P}$. Luego,

$$\liminf_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{S_M^Y \wedge S_0} 1_{S_M^Y < s_0 \wedge S_0}) = x_0 \liminf_{M\to\infty} \mathbb{P}(S_M^{\tilde{Y}} < s_0 \wedge S_0^{\tilde{Y}}) \ge x_0 \mathbb{P}(S^{\tilde{Y}} < s_0 \wedge S_0^{\tilde{Y}}) > 0,$$

y por el razonamiento anterior, se comprueba que $X_{s\wedge S_0}$ es una martingala.

Para la implicancia inversa, si $\mathbb{P}(S^{\tilde{Y}} < \infty) = 0$, entonces

$$\tilde{\mathbb{P}}_t(S_M^Y < s \wedge S_0) = \mathbb{P}(S_M^{\tilde{Y}} < s \wedge S_0^{\tilde{Y}}) \to \mathbb{P}(S^{\tilde{Y}} < s \wedge S_0^{\tilde{Y}}) = 0.$$

Así,

$$\liminf_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{S_M^Y \wedge s_0} 1_{S_M^Y < s\wedge S_0}) = \liminf_{M\to\infty} \tilde{\mathbb{P}}_t(S_M^y < s \wedge S_0) = 0,$$

lo que demuestra el resultado. $\square$

3.2. Análisis del modelo de volatilidad estocástica

De la propiedad anterior se deduce que es posible entender el comportamiento de la solución al sistema (3.1) mediante el estudio del tiempo de explosión de la solución a la ecuación (3.5), que es lo que se realizará a continuación. Para agilizar la notación durante este estudio se utilizarán las constantes

$$\gamma = 1 + \frac{\beta - 1}{\alpha}, \ \eta = 1 + \frac{\delta - 1}{\alpha}$$

con lo que la ecuación se escribe

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha Y_t^{\gamma} \mathrm{d}\Gamma_t + \left[K\alpha Y_t^{\eta} \mu^*(Y_t) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} Y_t^{2\gamma - 1} + \rho\alpha Y_t^{\gamma+1} \right] \mathrm{d}t.$$

En el siguiente teorema, demostrado en [3], se explicitan los intervalos para las constantes K, ρ, α, β y δ en los que la solución al sistema (3.2) es una martingala o una martingala local estricta. Concretamente el resultado es el siguiente:

Teorema 3.6 (Ver [3], Teo. 3.8) *Se considera el sistema*

$$\begin{cases} dX_t = X_t \sigma_t^{\alpha} dW_t, & X_0 = x_0 > 0 \\ d\sigma_t = \sigma_t^{\beta} dB_t + K\sigma_t^{\delta} dt, & \sigma_0 > 0, \end{cases}$$

donde $\delta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $K \neq 0$. Se supone, además, que la única solución débil σ_t de la segunda ecuación es buena, es decir, $\mathbb{P}(S^{\sigma} = \infty) = 1$. Si $\rho > 0$ y sucede cualquiera de los siguientes casos no intersectantes

- $\delta < 2\beta - 1,\ \alpha = \beta - 1,\ \rho > \frac{1}{2}$.
- $\delta < 2\beta - 1,\ \alpha > \beta - 1,\ \alpha + \beta > 1$.
- $\delta = 2\beta - 1,\ \alpha = \beta - 1,\ K + \rho > \frac{1}{2}$.
- $\delta = 2\beta - 1,\ \alpha > \beta - 1,\ \alpha + \beta > 1$.
- $\delta > 2\beta - 1,\ \alpha > \beta - 1,\ \alpha + \beta > 1,\ \delta < \alpha + \beta$.
- $\delta > 2\beta - 1,\ \alpha > \beta - 1,\ \alpha + \beta > 1,\ \delta = \alpha + \beta,\ K \in (-\rho, 0)$,

entonces $X_{t \wedge S_0}$ es una martingala local estricta. Por otra parte, si $\rho > 0$ y no se cumple ninguno de los casos anteriores, o si $\rho \leq 0$, entonces $X_{t \wedge S_0}$ es una martingala.

En la presente sección se demostrará un resultado similar asociado al sistema estudiado en este trabajo. En primer lugar se abordará un resultado intermedio que omite los casos borde. Estos se estudiarán por separado posteriormente.

Proposición 3.7 *Se considera el sistema*

$$\begin{cases} dX_t = X_t \sigma_t^{\alpha} dW_t, & X_0 = x_0 > 0 \\ d\sigma_t = \sigma_t^{\beta} dB_t + p(\sigma_t) dt, & \sigma_0 > 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

donde, $\alpha > 0$*,* $\beta \in \mathbb{R}$*,* $K \neq 0$ *y* p *es una función que cumple*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{K\sigma^{\delta}} = 1$$

para algún $\delta \in \mathbb{R}$*. Se supone, además, que la única solución* σ_t *de la segunda ecuación cumple* $S = \infty$ *c.s. Si* $\rho > 0$ *y sucede cualquiera de los siguientes casos no intersectantes:*

- $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $\rho > \frac{1}{2}$.
- $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$.
- $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $K + \rho > \frac{1}{2}$.
- $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$.
- $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta < \alpha + \beta$.
- $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta = \alpha + \beta$, $K \in (-\rho, 0)$,

entonces $X_{t\wedge S_0}$ *es una martingala local estricta. Por otra parte, si* $\rho > 0$ *y no se cumple ninguno de los casos anteriores, ni alguno de los siguientes casos borde:*

- $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $K + \rho = \frac{1}{2}$,
- $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta = \alpha + \beta$, $K = -\rho$,
- $\delta = 2\beta - 1$, $K = \frac{1}{2}$, $\beta > 1 + \alpha$.

o si $\rho \leq 0$ *y no se cumple el caso borde*

- $\delta = 2\beta - 1$, $K = \frac{1}{2}$, $\beta > 1$,

entonces $X_{t\wedge S_0}$ *es una martingala.*

Demostración. Se considerará en primer lugar $\rho > 0$. Supondremos que las constantes α, β, δ y K cumplen con alguno de los casos listados en el enunciado y con alguno de los casos para los que $\mathbb{P}(S^{\sigma} = \infty) = 1$ según el teorema 2.4. En lo siguiente se utilizará $S := S^{\sigma}$.

Si $\delta < 2\beta - 1$, del teorema 2.4 se deduce que no es necesario imponer ninguna restricción adicional sobre las constantes para que se cumpla que $\mathbb{P}(S = \infty) = 1$, y los casos del enunciado no imponen ninguna condición sobre K, por lo que para cualquier $\tilde{K} < K$, las constantes α, β, δ y $\tilde{K}$ caen dentro del mismo caso que α, β, δ y K.

Si $\delta = 2\beta - 1$, el teorema 2.4 dice que para que σ cumpla $S = \infty$ c.s., se requiere que o bien $K \leq \frac{1}{2}$, o bien $K > \frac{1}{2}$ y $\beta \leq 1$. Si α, β, δ y K satisfacen alguno de estos casos, y alguno de los casos del enunciado asociados a la restricción $\delta = 2\beta - 1$ para el cual $X_{t\wedge S_0}$ es martingala local estricta, entonces es posible encontrar $\tilde{K} < K$ tal que α, β, δ y $\tilde{K}$ satisfacen las misma restricciones que α, β, δ y K.

Si $\delta > 2\beta - 1$, el teorema 2.4 dice que o bien $K < 0$, o bien $K > 0$ y $\delta \leq 1$. Considerando también los casos del enunciado, en cualquiera de estos es posible encontrar un $\tilde{K} < K$ tal que α, β, δ y $\tilde{K}$ cumplan la misma restricción que α, β, δ y K, tanto dentro del teorema 2.4 como en el contexto de este resultado.

Por lo tanto, en cualquiera de los casos se cumple que existe $\tilde{K} < K$ tal que la solución a

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma}_t = \tilde{\sigma}_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + \tilde{K}\tilde{\sigma}_t^{\delta}\mathrm{d}t, \qquad \sigma_0 > 0 \tag{3.7}$$

es buena acorde al teorema 2.1, y la solución X al sistema

$$\begin{cases} \mathrm{d}\tilde{X}_t = \tilde{X}_t\tilde{\sigma}_t^{\alpha}\mathrm{d}W_t, & \tilde{x}_0 > 0 \\ \mathrm{d}\tilde{\sigma}_t = \tilde{\sigma}_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + \tilde{K}\tilde{\sigma}_t^{\delta}\mathrm{d}t, & \tilde{\sigma}_0 > 0, \end{cases}$$

es una martingala local estricta, según el teorema 3.6. Y de acuerdo con la propiedad 3.1, esto implica que la solución $\tilde{Y}_t$ a la ecuación

$$\mathrm{d}\tilde{Y}_t = \alpha\tilde{Y}_t^{\gamma}\mathrm{d}\Gamma_t + \left[\tilde{K}\alpha\tilde{Y}_t^{\eta} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\tilde{Y}_t^{2\gamma-1} + \rho\alpha\tilde{Y}_t^{\gamma+1}\right]\mathrm{d}t,$$

donde Γ es un movimiento Browniano, explota a infinito en tiempo finito con probabilidad positiva, es decir,

$$\mathbb{P}(S^{\tilde{Y}} = \infty) < 1,$$

para cualquier condición inicial $\tilde{Y}_0$. Para mayor claridad se escriben ambas ecuaciones a comparar:

$$\mathrm{d}\tilde{Y}_t = \alpha\tilde{Y}_t^{\gamma}\mathrm{d}\Gamma_t + \left[\tilde{K}\alpha\tilde{Y}_t^{\eta} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\tilde{Y}_t^{2\gamma-1} + \rho\alpha\tilde{Y}_t^{\gamma+1}\right]\mathrm{d}t, \tag{3.8}$$

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha Y_t^{\gamma}\mathrm{d}\Gamma_t + \left[\alpha Y_t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}p^*(Y_t) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}Y_t^{2\gamma-1} + \rho\alpha Y_t^{\gamma+1}\right]\mathrm{d}t, \tag{3.9}$$

donde se ha escrito

$$p^*(y) = Ky^{\frac{\delta}{\alpha}}\mu^*(y).$$

Esta comparación cae dentro de la implicancia 2 del lema pues, marcando con una comilla las constantes asociadas al enunciado del lema 2.2, con $\alpha' = 1$, $\beta' = \gamma$, $\alpha' = \alpha$ y

$$f(y) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^{2\gamma-1} + \rho\alpha y^{\gamma+1},$$

que es Lipschitz sobre compactos en $(0, \infty)$, se comprueba que ambas ecuaciones cumplen las hipótesis necesarias para utilizar la afirmación 2 de este resultado.

Por lo tanto, se obtiene que $\mathbb{P}(S^Y = \infty) < 1$. Luego, gracias a la propiedad 3.5 se deduce que $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala local estricta.

Por otro lado, si $\rho > 0$ y no se cumple ninguno de los casos de la parte anterior, entonces se cumple alguno de los siguientes casos:

- $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

- $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta \leq 1$.
- $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha < \beta - 1$.
- $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $K + \rho \leq \frac{1}{2}$.
- $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta \leq 1$.
- $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha < \beta - 1$
- $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta > \alpha + \beta$.
- $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta = \alpha + \beta$, $K \leq -\rho \vee K > 0$.
- $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha \leq |1 - \beta|$.

Además, se supone que σ_t cumple $S = \infty$ c.s., por lo que debe cumplirse alguno de los casos del teorema 2.4. Se lleva a cabo un análisis similar al de los casos anteriores para verificar la existencia del $\tilde{K} > K$ tal que las constantes α, β, δ y $\tilde{K}$ cumplan las mismas condiciones que α, β, δ y K tanto en el contexto del teorema 2.4 como en el de este resultado. Así, con un razonamiento similar al anterior se podrá utilizar la afirmación 1 del lema 2.2.

Si $\delta < 2\beta - 1$ ninguna de las restricciones impone algo sobre K, por lo que al mantener el resto de constantes iguales y modificar K (es decir, usar $\tilde{K} > K$ en lugar de K) se siguen cumpliendo las mismas restricciones.

Si $\delta = 2\beta - 1$, hay dos casos problemáticos. En primer lugar, en el caso $\alpha = \beta - 1$, $K + \rho \leq \frac{1}{2}$, si $K + \rho = \frac{1}{2}$, cualquier valor para $\tilde{K} > K$ deja de cumplir esta restricción, por lo que la ecuación (3.8) no cumpliría que $S^{\tilde{Y}} = \infty$ c.s. y no se podría usar la afirmación 1 del lema 2.2. Así, como se menciona en el enunciado, se excluye como caso problemático y se analizará más adelante. Si $K + \rho < \frac{1}{2}$, entonces existe $\tilde{K} > K$ tal que se cumple la misma condición, por lo que se puede proceder normalmente.

Por otro lado, en el caso $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta \leq 1$, las restricciones que impone el teorema 2.4 son $K \leq \frac{1}{2}$ o $K > \frac{1}{2}$ y $\beta \leq 1$. Como $\beta \leq 1$, incluso cuando $K = \frac{1}{2}$, si $\tilde{K} > K$, este $\tilde{K}$ satisfaría el segundo caso y la ecuación (3.7) seguiría cumpliendo $\tilde{S} = \infty$ c.s. y por lo tanto el teorema 3.6 implica que la ecuación (3.8) cumple $S^{\tilde{Y}} = \infty$ c.s., por lo que sí se puede aplicar la afirmación 1 del lema 2.2.

En el caso $\delta = 2\beta - 1$, $\beta > \alpha + 1$ lo anterior no siempre puede realizarse, ya que si $K = \frac{1}{2}$, entonces para cualquier $\tilde{K} > K$ las constantes α, β, δ y $\tilde{K}$ satisfacen $\delta = 2\beta - 1$, $\beta > 1$ y $\tilde{K} > \frac{1}{2}$, lo que, acorde al teorema 2.1, implica que la solución a la ecuación (3.7) cumple que $\tilde{S} < \infty$ con probabilidad positiva, y por lo tanto no es posible determinar el comportamiento de la solución de la ecuación (3.3) utilizando la proposición 3.1. Como consecuencia, también se excluye el caso $\delta = 2\beta - 1$, $\beta > \alpha + 1$ $K = \frac{1}{2}$ para ser estudiado posteriormente.

Si $\delta > 2\beta - 1$, las restricciones que impone el teorema 2.4 son $K < 0$ o $K > 0$ y $\delta \leq 1$, que no interfieren al encontrar $\tilde{K} > K$ que cumpla lo requerido. Por lo tanto, los casos $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta > \alpha + \beta$ y $\alpha \leq |1 - \beta|$ no son problemáticos.

El caso restante, por otra parte, incluye el subcaso $\alpha > \beta - 1$, $\alpha > \beta > 1$, $\delta = \alpha + \beta$, $K = -\rho$ en el que sí hay un problema, puesto que cualquier $\tilde{K} > K$ se sale del caso en el que el teorema 3.6 asegura que la solución de la ecuación (3.8) cumple que $S^{\tilde{Y}} = \infty$ c.s., ya sea porque $\tilde{K} \in (-\rho, 0)$, en donde $S^{\tilde{Y}} < \infty$ con probabilidad positiva, o bien porque $\tilde{K} > 0$, en donde el teorema 2.1 afirma que la solución a la ecuación (3.7) cumple $S^{\sigma} < \infty$ con probabilidad positiva. En cualquier caso, no es posible aplicar la afirmación 1 del lema 2.2 para obtener la conclusión deseada, por lo que se estudiará este caso posteriormente.

Finalmente, se agrega a la lista anterior el caso $\rho \leq 0$. De la proposición 3.4 se sabe que si $\rho \leq 0$ y $K < 0$, $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala. Luego, solo resta probar que esto también se cumple en el caso $K > 0$, $\rho \leq 0$. Revisando los casos favorables del teorema 2.4 se deduce que el único caso problemático es el dado por las condiciones $\delta = 2\beta - 1$, $K = \frac{1}{2}$ y $\beta > 1$, siguiendo el mismo razonamiento que en los casos anteriores. Se pospone el análisis de este caso para la sección siguiente.

Por lo tanto, se ha verificado que para todos los casos listados anteriormente, excluyendo los casos borde expuestos en el enunciado, existe algún $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\tilde{K} > K$ el teorema 3.6 entrega que la solución de la ecuación (3.8) cumple que $S^{\tilde{Y}} = \infty$ c.s. siempre que la solución a (3.7) cumpla $S^{\tilde{\sigma}} = \infty$ c.s. Bajo las mismas especificaciones que en el caso anterior, se deduce, aplicando la afirmación 1 del lema 2.2 de la misma forma que al aplicar la afirmación 2 anteriormente, que $S^{Y} = \infty$ c.s., con lo que $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala. Con esto, se comprueba la propiedad enunciada. $\square$

3.3. Estudio de los casos especiales

Habiendo demostrado lo anterior, queda resolver la interrogante en los casos que fueron excluidos. Si $\rho > 0$

1. $\delta = 2\beta - 1$, $K = \frac{1}{2}$, $\beta > 1 + \alpha$,
2. $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $K + \rho = \frac{1}{2}$,
3. $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta = \alpha + \beta$, $K = -\rho$.

Por otro lado, si $\rho \leq 0$, se tiene el caso borde

4. $\delta = 2\beta - 1$, $K = \frac{1}{2}$, $\beta > 1$.

3.3.1. Caso 1

El primer caso a estudiar está dado por las condiciones $\delta = 2\beta - 1$, $K = \frac{1}{2}$, $\beta > 1 + \alpha$. En este caso, se realiza el cambio de variable $Z_t = Y_t^{1-\gamma}$ obteniendo, mediante la fórmula de Itô, la ecuación

$$\mathrm{d}Z_t = (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\left(\frac{\tilde{\mu}(Z_t) - \beta}{2} Z_t^{-1} + \rho Z_t^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)\mathrm{d}t, \quad Z_0 = \sigma_0^{\frac{1}{\alpha(1-\gamma)}} = \sigma_0^{\frac{1}{1-\beta}} > 0, \tag{3.10}$$

donde $\tilde{\mu}(z) = \mu^*(z^{\frac{1}{1-\gamma}}) = \mu(z^{\frac{1}{\alpha(1-\gamma)}})$, siguiendo la notación de la sección anterior. De aquí se deduce que si σ_t cumple $S = \infty$ c.s., entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala. Para probar esto formalmente basta con aplicar el test de Feller.

$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_x^1\int_y^1 \exp\left(2\int_y^z \frac{b(u)}{\sigma(u)^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_x^1\int_y^1 \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_y^z (\tilde{\mu}(u)-\beta)u^{-1} + 2\rho u^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_x^1\int_y^1 \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_y^z (\tilde{\mu}(u)-\beta)u^{-1}\mathrm{d}u\right)\exp\left(\frac{2\rho}{1-\beta}\int_y^z u^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\geq \exp\left(\frac{2\rho}{1-\beta}\int_x^1 u^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\mathrm{d}u\right)v'(x) \\
&\geq \exp\left(\frac{2\rho}{1-\beta}\int_0^1 u^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\mathrm{d}u\right)v'(x),
\end{aligned}$$

donde

$$v'(x) = \int_x^1\int_y^1 \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_y^z (\tilde{\mu}(u)-\beta)u^{-1}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

es la integral relacionada a la ecuación

$$\mathrm{d}Z_t = (1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\frac{\tilde{\mu}(Z_t)-\beta}{2}Z_t^{-1}\mathrm{d}t, \quad Z_0 = \sigma_0^{\frac{1}{\alpha(1-\gamma)}} = \sigma_0^{\frac{1}{1-\beta}} > 0, \tag{3.11}$$

mediante el test de Feller. Esta se obtiene al aplicar el cambio de variable $Z = \sigma^{\alpha(1-\gamma)}$ a la ecuación

$$\mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^\delta \mu(\sigma_t)\mathrm{d}t.$$

Dado que se parte desde la premisa de que la solución σ_t cumple $S = \infty$ c.s., se tiene que la solución a esta ecuación cumple que $S = \infty$ c.s. Es decir, en términos de la ecuación (3.11), $S_0^Z = \infty$ c.s. Relacionando esto al test de Feller, se deduce que $v'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$. Además, $\frac{\alpha}{1-\beta} \in (0,1)$, lo que implica que

$$\exp\left(\frac{2\rho}{1-\beta}\int_0^1 u^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\mathrm{d}u\right) > 0.$$

Así, se deduce que $v(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$. Por lo tanto, la solución a la ecuación (3.10) cumple $S_0^Z = \infty$ c.s., y así, $S^Y = \infty$ c.s. Esto implica el siguiente resultado.

Proposición 3.8 *Considérese el sistema (3.6), donde $\delta = 2\beta - 1$, $K = \frac{1}{2}$, $\beta > 1 + \alpha$, y B_t y W_t son ρ-correlacionados, con $\rho > 0$. Si la solución σ_t cumple $S = \infty$ c.s., entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.*

3.3.2. Caso 2

Se prosigue con el caso $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $K + \rho = \frac{1}{2}$. Realizando el cambio de variable $Z_t = Y_t^{1-\gamma}$ sobre la ecuación (3.5),

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z_t &= (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\left(K\tilde{\mu}(Z_t)Z_t^{\frac{\delta-\beta}{1-\beta}} + \rho Z_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} - \frac{\beta}{2}Z_t^{-1}\right) \\ &= (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\left(K\tilde{\mu}(Z_t) + \rho - \frac{\beta}{2}\right)Z_t^{-1} \\ &= (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\left(K\tilde{\varepsilon}(Z_t) + \frac{1-\beta}{2}\right)Z_t^{-1}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mu}(z) = 1 + \tilde{\varepsilon}(z)$.

Esta ecuación corresponde a la ecuación estudiada en el corolario 2.6. En efecto, dicho resultado estudia, específicamente, la ecuación del tipo

$$\mathrm{d}Y_t = (1-\beta)\mathrm{d}B_t + (1-\beta)\left(\frac{1+\varepsilon^*(Y_t)-\beta}{2}\right)Y_t^{-1}\mathrm{d}t,$$

que corresponde a la ecuación anterior cuando $2K\tilde{\varepsilon}(x) = \varepsilon^*(x)$. Por lo tanto, se puede aplicar dicho corolario para obtener que

- si existen $0 < C \leq \beta - 1$ y $0 < \eta < 1$ tales que $2K\tilde{\varepsilon}(x) \leq C\ln(x^{-1})^{-1}$ para todo $0 < x < \eta$, entonces $S_0^Z = \infty$ c.s.
- si existen $C > \beta - 1$ y $0 < \eta < 1$ tales que $2K\tilde{\varepsilon}(x) \geq C\ln(x^{-1})^{-1}$ para todo $0 < x < \eta$, entonces $S_0^Z < \infty$ con probabilidad positiva.

Dados los valores de las constantes en este caso, la solución σ_t siempre cumple $S = \infty$ c.s., por lo que el lema 3.5 es siempre aplicable. Así, escribiendo lo anterior en función de la variable σ se deduce el resultado siguiente.

Proposición 3.9 *Considérese el sistema 3.6, donde $\delta = 2\beta - 1$, $K + \rho = \frac{1}{2}$, $\beta = 1 + \alpha$, B_t y W_t son ρ-correlacionados, con $\rho > 0$, y σ_t cumple con $S = \infty$ c.s. Sea*

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{2p(\sigma)}{\sigma^\delta} - 1,$$

entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

1. *Si existen $0 < C \leq \frac{1}{2|K|}$ y $M > 1$ tales que para todo $\sigma > M$,*

$$sgn(K)\varepsilon(\sigma) \leq C\ln(\sigma)^{-1},$$

   entonces la solución $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.

2. *Si existen $\frac{1}{2|K|} < C$ y $M > 1$ tales que*

$$sgn(K)\varepsilon(\sigma) \geq C\ln(\sigma)^{-1}$$

   para todo $\sigma > M$, entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala local estricta.

3.3.3. Caso 3

El siguiente caso está dado por las condiciones $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta = \alpha + \beta$, $K = -\rho$. Notando que

$$\gamma + 1 = \left(1 + \frac{\beta - 1}{\alpha}\right) + 1 = \frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha} + 1 = \frac{\delta - 1}{\alpha} + 1 = \eta,$$

y aplicando esto en la ecuación (3.3), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y_t &= \alpha Y_t^{\gamma} \mathrm{d}\Gamma_t + \alpha \left[(K + \rho) Y_t^{\eta} + \frac{(\alpha - 1)}{2} Y_t^{2\gamma - 1} \right] \mathrm{d}t \\ &= \alpha Y_t^{\gamma} \mathrm{d}\Gamma_t + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} Y_t^{2\gamma - 1} \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por otro lado, en la ecuación (3.8), debido a la presencia de la función μ^*, el término asociado a Y_t^{η} no desaparece. Así, se obtiene la ecuación

$$\mathrm{d}Y_t = \alpha Y_t^{\gamma} \mathrm{d}\Gamma_t + \alpha \left[\rho \left(1 - \mu^*(Y_t)\right) Y_t^{\eta} + \frac{\alpha - 1}{2} Y_t^{2\gamma - 1} \right] \mathrm{d}t.$$

Para estudiar el comportamiento del tiempo de explosión de la solución a esta ecuación se utiliza el test de Feller. La integral a calcular es

$$v(x) = \int_1^x \exp\left(-2 \int_1^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} \mathrm{d}u\right) \int_1^y \frac{2}{\sigma^2(u)} \exp\left(2 \int_1^z \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}y,$$

donde los coeficientes de difusión y de drift están dados por

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= \alpha u^{\gamma}, \\ b(u) &= \alpha \left[\rho(1 - \mu^*(u)) u^{\eta} + \frac{\alpha - 1}{2} u^{2\gamma - 1} \right]. \end{aligned}$$

En primer lugar, se calcula

$$\frac{b(u)}{\sigma^2(u)} = \frac{\alpha \left[\rho(1 - \mu^*(u)) u^{\eta} + \frac{\alpha - 1}{2} u^{2\gamma - 1} \right]}{\alpha^2 u^{2\gamma}} = \frac{1}{\alpha} \left(\rho(1 - \mu^*(u)) u^{\eta - 2\gamma} + \frac{\alpha - 1}{2} u^{-1} \right),$$

luego, usando que $\eta - 2\gamma = 1 - \gamma$,

$$\begin{aligned} \exp\left(-2 \int_1^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} \mathrm{d}u\right) &= \exp\left(-\frac{2}{\alpha} \int_1^y \rho(1 - \mu^*(u)) u^{1 - \gamma} + \frac{\alpha - 1}{2} u^{-1} \mathrm{d}u\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha} \int_1^y (1 - \mu^*(u)) u^{1 - \gamma} \mathrm{d}u + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \ln(y)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha} \int_1^y (1 - \mu^*(u)) u^{1 - \gamma} \mathrm{d}u\right) y^{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Así, con $\varepsilon^*(u) = 1 - \mu^*(u)$,

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha}\int_1^y \varepsilon^*(u)u^{1-\gamma}\mathrm{d}u\right) y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \int_1^y z^{-2\gamma}\exp\left(\frac{2\rho}{\alpha}\int_1^z \varepsilon^*(u)u^{1-\gamma}\mathrm{d}u\right) z^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha}\int_1^y \varepsilon^*(u)u^{1-\gamma}\mathrm{d}u\right)\exp\left(\frac{2\rho}{\alpha}\int_1^z \varepsilon^*(u)u^{1-\gamma}\mathrm{d}u\right)\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha}\int_z^y \varepsilon^*(u)u^{1-\gamma}\mathrm{d}u\right)\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Acotando, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
v(x) &\geq \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha}\int_z^y \varepsilon^{*+}(u)u^{1-\gamma}\mathrm{d}u\right)\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\geq \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha}\int_1^x \varepsilon^{*+}(u)u^{1-\gamma}\mathrm{d}u\right)\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha}\int_1^x \varepsilon^{*+}(u)u^{1-\gamma}\mathrm{d}u\right)\tilde{v}(x), \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\tilde{v}(x) = \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y,
$$

que corresponde la integral que describe el comportamiento en infinito de la solución a la ecuación (3.12) a través del test de Feller. En efecto, denotando por $v^*(x)$ a la integral que entrega el test para la ecuación (3.12), se obtiene

$$
v^*(x) = \int_1^x \exp\left(-2\int_1^y \frac{\alpha-1}{2\alpha}u^{-1}\mathrm{d}u\right)\int_1^y \frac{2}{\alpha^2 z^{2\gamma}}\exp\left(2\int_1^z \frac{\alpha-1}{2\alpha}u^{-1}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y
$$

y reemplazando

$$
\exp\left(-2\int_1^y \frac{\alpha-1}{2\alpha}u^{-1}\mathrm{d}u\right) = \exp\left(-\frac{\alpha-1}{\alpha}\ln(y)\right) = y^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}},
$$

en la expresión anterior, se obtiene

$$
\begin{aligned}
v^*(x) &= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x y^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}}\int_1^y z^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \tilde{v}(x).
\end{aligned}
$$

Como resultado del teorema 3.6, cuando las constantes toman los valores que dan lugar a este caso, la solución X al sistema (3.2) es una martingala. Mediante el lema 3.1 se deduce que el tiempo de explosión a infinito de la ecuación (3.3) es infinito c.s. y por lo tanto, gracias al test de Feller,

$$\lim_{x\to\infty} \tilde{v}(x) = \infty.$$

De esta propiedad y de la desigualdad (3.13) se deduce que

$$\exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha}\int_1^x \varepsilon^+(u)u^{1-\gamma}\mathrm{d}u\right) > 0 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} v(x) = \infty.$$

Luego,

$$\int_1^x \varepsilon^+(u)u^{1-\gamma}\mathrm{d}u < \infty \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} v(x) = \infty \iff \mathbb{P}(S_\infty = \infty) = 1,$$

por lo tanto, dadas las constantes del caso, una condición suficiente para que $X_{t\wedge S_0}$ sea una martingala es que

$$\varepsilon^+(u)u^{1-\gamma} \in L^1(1,\infty). \tag{3.14}$$

Es importante notar que, a partir de las condiciones que definen el caso,

$$\delta - \beta > \beta - 1,$$

y usando que $\delta = \alpha + \beta$ se tiene que $\alpha > \beta - 1$, es decir,

$$1 > \frac{\beta - 1}{\alpha} = \gamma - 1,$$

y así, $1-\gamma > -1$. Esto implica que $u^{1-\gamma} \notin L^1(1,\infty)$, de donde se deduce que para cumplir la condición (3.14) no basta con la mera convergencia a cero de $\varepsilon(u)$, sino que se requiere una condición sobre la velocidad de la convergencia de $\varepsilon(u)$ a cero.

En particular, si existen $C > 0$ y $r < \gamma - 2 = \frac{\beta-1}{\alpha} - 1$ tales que

$$\varepsilon^{*+}(y) < Cy^r,$$

entonces

$$\varepsilon^{*+}(u)u^{1-\gamma} < Cu^{r+1-y},$$

y como $r + 1 - \gamma < (\gamma - 2) + 1 - \gamma = -1$, se cumplirá que $\varepsilon^+(u)u^{1-\gamma} \in L^1$ y así, $X_{t\wedge S_0}$ será una martingala.

Sin embargo, esta condición es meramente suficiente y está lejos de ser la condición necesaria. Para notar esto basta revisar el caso $\varepsilon^*(u)u^{1-\gamma} = Cu^{-1}$ con $C > 0$. El cálculo es el siguiente

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha}\int_z^y \varepsilon(u)u^{1-\gamma}\mathrm{d}u\right)\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho C}{\alpha}\int_z^y u^{-1}\mathrm{d}u\right)\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho C}{\alpha}(\ln(y)-\ln(z))\right)\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2\rho C+\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}\\
&= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x y^a\int_1^y z^b\mathrm{d}z\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

con $a=-\frac{2C\rho+\alpha-1}{\alpha}$ y $b=\frac{2C\rho+\alpha-1}{\alpha}-2\gamma$. Analizando estos coeficientes, es posible notar que $a+1<0$ si y solo si $C>\frac{1}{2\rho}$ y $b+1>0$ si y solo si $C>\frac{2\beta-1}{2\rho}$. Por otro lado, $a+b+2=2(1-\gamma)$ que tiene el mismo signo que $1-\beta$, como se ha mencionado anteriormente. Así, suponiendo $a\neq-1$, $b\neq-1$, y $a+b+1\neq-1$,

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \frac{2}{\alpha^2(b+1)}\int_1^x y^{a+b+1}-y^a\mathrm{d}y\\
&= \frac{2}{\alpha^2(b+1)}\left(\frac{x^{2(1-\gamma)}-1}{2(1-\gamma)}-\frac{x^{a+1}-1}{(a+1)}\right).
\end{aligned}
$$

Si $1-\gamma>0$ y $a+1<0$, notando que $b=-a-2\gamma$, se tiene que

$$
b=-a-2\gamma>-a-2=-(a+1)-1>-1,
$$

con lo que $b+1>0$. Así, en este caso, $v(x)\to\infty$ cuando $x\to\infty$. Eligiendo C suficientemente grande se puede asegurar la condición $a+1<0$, y para $c<C$ se deduce que

$$
\begin{aligned}
v_c(x) &= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha}\int_z^y cu^{-1}\mathrm{d}u\right)\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&\geq \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha}\int_z^y Cu^{-1}\mathrm{d}u\right)\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&= v_C(x)\to\infty,
\end{aligned}
$$

lo que implica que si $1-\gamma>0$ entonces $X_{t\wedge S_0}$ será martingala para cualquier C.

El caso $1-\gamma<0$ requiere un análisis similar. Notando que $1-\beta<0$ implica que $\frac{2\beta-1}{2\rho}>\frac{1}{2\rho}$, se identifican tres casos. En el primer caso, asociado a la condición $C>\frac{2\beta-1}{2\rho}$, se tiene que $a+1<0$ y $b+1>0$, con lo que $v(x)\to L<\infty$ y $X_{t\wedge S_0}$ es martingala local estricta. El segundo caso es similar; con $C\in\left(\frac{1}{2\rho},\frac{2\beta-1}{2\rho}\right)$ se tiene que $a+1<0$ y $b+1<0$, por lo que también se cumple $v(x)\to L<\infty$ y $X_{t\wedge S_0}$ es martingala local estricta. Por último, el tercer caso corresponde a $C<\frac{1}{2\rho}$, en el que $a+1>0$ y $b+1<0$, obteniendo así que $v(x)\to\infty$ y $X_{t\wedge S_0}$ es martingala.

Es importante estudiar el caso borde $C = \frac{1}{2\rho}$ donde $a+1=0$. En este caso, el cálculo de la integral es diferente, y se obtiene

$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{2}{\alpha^2(b+1)} \int_1^x y^{a+b+1} - y^a \mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\alpha^2(b+1)} \left(\frac{x^{2(1-\gamma)} - 1}{2(1-\gamma)} - \ln(x) \right).
\end{aligned}$$

Como $b+1 < 0$, se tiene que $v(x) \to \infty$. Para el caso $C = \frac{2\beta-1}{2\rho}$ se puede aplicar un razonamiento similar al del caso anterior. Sea $c \in \left(\frac{1}{2\rho}, \frac{2\beta-1}{2\rho}\right)$,

$$\begin{aligned}
v_C(x) &= \frac{2}{\alpha^2} \int_1^x \int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha} \int_z^y Cu^{-1} \mathrm{d}u \right) \left(\frac{z}{y} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
&\leq \frac{2}{\alpha^2} \int_1^x \int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha} \int_z^y cu^{-1} \mathrm{d}u \right) \left(\frac{z}{y} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
&= v_c(x) \to L < \infty.
\end{aligned}$$

Así, $v_C(x) \to L' < \infty$, y por el lema 3.5, $X_{t \wedge S_0}$ es una martingala local estricta.

Finalmente, se estudia el caso $1-\gamma = 0$. Para C suficientemente grande, $a+1 < 0$ y $b+1 > 0$, con lo que

$$\begin{aligned}
v_C(x) &= \frac{2}{\alpha^2(b+1)} \int_1^x y^{a+b+1} - y^a \mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\alpha^2(b+1)} \left(\ln(x) - \frac{x^{a+1} - 1}{a+1} \right) \to \infty.
\end{aligned}$$

Luego, razonando de igual forma que en el caso $1-\gamma > 0$, se deduce que para todo $c < C$, $v_c(x) \to \infty$. Así, en este caso $X_{t \wedge S_0}$ es martingala, sin importar el valor de la constante C.

En resumen, cuando $\varepsilon^*(u)u^{1-\gamma} = Cu^{-1}$, si $1-\beta \geq 0$, o si $1-\beta < 0$ y $C \leq \frac{1}{2\rho}$, $X_{t \wedge S_0}$ es una martingala. En el caso contrario, dado por $1-\beta < 0$ y $C > \frac{1}{2\rho}$, $X_{t \wedge S_0}$ es una martingala local estricta. Con esto, basta que $\varepsilon^*(u) \leq Cu^{\gamma-2}$ (con $C \in \mathbb{R}$ en el primer caso y $C = \frac{1}{2\rho}$ en el segundo) para que $X_{t \wedge S_0}$ sea martingala. En efecto, si C es tal que $X_{t \wedge S_0}$ es martingala y $\varepsilon^*(u)u^{1-\gamma} \leq Cu^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{2}{\alpha^2} \int_1^x \int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha} \int_z^y \varepsilon(u)u^{1-\gamma} \mathrm{d}u \right) \left(\frac{z}{y} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
&\geq \frac{2}{\alpha^2} \int_1^x \int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha} \int_z^y Cu^{-1} \mathrm{d}u \right) \left(\frac{z}{y} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
&= v_C(x) \to \infty,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $v(x) \to \infty$. Por otro lado, en el segundo caso, si $\varepsilon^*(u) \geq Cu^{\gamma-2}$ con $C > \frac{1}{2\rho}$, entonces $X_{t \wedge S_0}$ es una martingala local estricta. Esto se deduce de manera análoga al caso anterior, pues

$$
\begin{aligned}
v(x) &\leq \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x \int_1^y \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha}\int_z^y Cu^{-1}\mathrm{d}u\right)\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} z^{-2\gamma}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= v_C(x) \to L < \infty.
\end{aligned}
$$

Con esto, en el caso $1-\gamma<0$ se tiene una condición que implica que $X_{t\wedge S_0}$ es martingala y otra que implica que es martingala local estricta. Sin embargo, para el caso $1-\gamma \geq 0$ solo se tiene una condición que implica que $X_{t\wedge S_0}$, por lo que ahora se estudiará este caso para obtener una condición que implique que $X_{t\wedge S_0}$ es martingala local estricta.

En primer lugar, se estudiará el caso $1-\beta>0$. Aplicando el cambio de variables $z=y^{1-\gamma}$ que ya ha sido utilizado anteriormente, se obtiene

$$
\mathrm{d}Z_t = (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\left(\rho\left(1-\tilde{\mu}(Z_t)\right)Z_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} - \frac{\beta}{2}Z_t^{-1}\right)\mathrm{d}t.
$$

Cabe recalcar que $\delta > 2\beta-1$ y $\alpha+\beta=\delta$ implican que $s := \frac{\alpha}{1-\beta} > 1$. Según el test de Feller, la integral a calcular es

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \int_1^x \exp\left(-2\int_1^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right)\int_1^y \frac{2}{\sigma^2(u)}\exp\left(2\int_1^z \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^x \exp\left(-2\int_1^y \frac{\rho\tilde{\varepsilon}(u)u^{\frac{\alpha}{1-\beta}} - \frac{\beta}{2}u^{-1}}{(1-\beta)}\mathrm{d}u\right)\int_1^y \exp\left(2\int_1^z \frac{\rho\tilde{\varepsilon}(u)u^{\frac{\alpha}{1-\beta}} - \frac{\beta}{2}u^{-1}}{(1-\beta)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

donde, por supuesto,

$$
\tilde{\varepsilon}(u) = 1-\tilde{\mu}(u) = 1-\mu^*(u^{\frac{1}{1-\gamma}}) = \varepsilon^*(u^{\frac{1}{1-\gamma}}) = \varepsilon^*(u^s).
$$

Por lo tanto, se tiene que

$$
\int_1^y \frac{\rho\tilde{\varepsilon}(u)u^s - \frac{\beta}{2}u^{-1}}{1-\beta}\mathrm{d}u = \frac{1}{1-\beta}\left(\int_1^y \rho\tilde{\varepsilon}(u)u^s\mathrm{d}u - \frac{\beta}{2}\ln(y)\right),
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\exp\left(-2\int_1^y \frac{\rho\tilde{\varepsilon}(u)u^s - \frac{\beta}{2}u^{-1}}{1-\beta}\mathrm{d}u\right) &= \exp\left(\frac{-2\rho}{1-\beta}\int_1^y \tilde{\varepsilon}(u)u^s\mathrm{d}u + \frac{\beta}{1-\beta}\ln(y)\right) \\
&= \exp\left(\frac{-2\rho}{1-\beta}\int_1^y \tilde{\varepsilon}(u)u^s\mathrm{d}u\right)y^{\frac{\beta}{1-\beta}}.
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \frac{1}{(1-\beta)^2}\int_1^x \exp\left(\frac{-2\rho}{1-\beta}\int_1^y \tilde{\varepsilon}(u)u^s\mathrm{d}u\right)y^{\frac{\beta}{1-\beta}}\int_1^y \exp\left(\frac{2\rho}{1-\beta}\int_1^z \tilde{\varepsilon}(u)u^s\mathrm{d}u\right)y^{\frac{-\beta}{1-\beta}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(1-\beta)^2}\int_1^x \frac{\int_1^y f(z)\mathrm{d}z}{f(y)}\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

con

$$f(x) = \exp\left(\frac{2\rho}{1-\beta}\int_1^y \tilde{\varepsilon}(u)u^s \mathrm{d}u\right) y^{\frac{\beta}{1-\beta}} > 0.$$

Asumiendo $\varepsilon^*(u)u^s = Cu^q$ con $C, q > 0$, se tiene que $f(y)y^{-q} \to \infty$ y $\int_1^y f(u)\mathrm{d}u \to \infty$. Para aplicar la regla de L'Hôpital al límite

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\int_1^y f(z)\mathrm{d}z}{f(y)y^{-q}}$$

es necesario calcular $f'(y)$:

$$\begin{aligned}
f'(y) &= \exp\left(\frac{2\rho}{1-\beta}\int_1^y Cu^q \mathrm{d}u\right)\frac{2\rho}{1-\beta}Cy^{q+\frac{\beta}{1-\beta}} + \exp\left(\frac{2\rho}{1-\beta}\int_1^y Cu^q \mathrm{d}u\right)\frac{\beta}{1-\beta}y^{\frac{\beta}{1-\beta}-1} \\
&= f(y)\left(\frac{2C\rho}{1-\beta}y^q + \frac{\beta}{1-\beta}y^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el límite es

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} \frac{\int_1^y f(z)\mathrm{d}z}{f(y)y^{-q}} &= \lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{f'(y)y^{-q} - qf(y)y^{-q-1}} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\frac{2C\rho}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta}y^{-1-q} - qy^{-q-1}} \\
&= \frac{1-\beta}{2C\rho},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene, gracias al criterio del cociente para convergencia de integrales, que

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \frac{1}{1-\beta}\int_1^\infty f(y)^{-1}\int_1^y f(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \sim \int_1^\infty y^{-q}\mathrm{d}y.$$

Es decir,

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \infty \iff q \in (0, 1],$$

por lo que, siguiendo la justificación anterior presentada para un contexto similar, para $C > 0$

$$\tilde{\varepsilon}(x)x^s \leq Cx \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} v(x) = \infty,$$

es decir, recordando que $\tilde{\varepsilon}(x) = \varepsilon^*(x^s)$,

$$\varepsilon^*(x)x \leq Cx^{\frac{1}{s}} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} v(x) = \infty.$$

Se distingue como condición suficiente para que $X_{t\wedge S_0}$ sea una martingala local estricta la existencia de constantes $q > 1$, $C > 0$ y $M > 0$ tales que para todo $x > M$,

$$\varepsilon^*(x)x > Cx^{\frac{q}{s}}.$$

Por otro lado, si $1-\beta=0$ el cambio de variables aplicado es $z=f(y)=\ln(y)$, con lo que se obtiene la ecuación

$$\mathrm{d}Z_t = \alpha \mathrm{d}\Gamma_t + \alpha\left(\rho\tilde{\varepsilon}(Z_t)\mathrm{e}^{Z_t} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t,$$

donde ahora

$$\tilde{\varepsilon}(z) = \varepsilon^*(\mathrm{e}^z).$$

Acorde al test de Feller,

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_1^x \exp\left(-2\int_1^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right)\int_1^y \frac{2}{\sigma^2(u)}\exp\left(2\int_1^z \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x \exp\left(-\frac{2}{\alpha}\int_1^y \rho\tilde{\varepsilon}(u)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u + \frac{y}{\alpha}\right)\int_1^z \exp\left(\frac{2}{\alpha}\int_1^z \rho\tilde{\varepsilon}(u)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u - \frac{z}{\alpha}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Con $q>1$ y $C>0$ tales que $\tilde{\varepsilon}(x)\mathrm{e}^x = Cx^q$, y $f(x) = \exp\left(\frac{2}{\alpha}\int_1^x \rho C u^q \mathrm{d}u - \frac{x}{\alpha}\right)$, al igual que en el caso anterior, se puede usar la regla de L'Hôpital para calcular el límite. Para ello, se calcula la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2\rho C x^q - 1}{\alpha} f(x).$$

Con lo que L'Hôpital entrega

$$\begin{aligned} \lim_{y\to\infty} \frac{\int_1^y f(z)\mathrm{d}z}{f(y)y^{-q}} &= \lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{f'(y)y^{-q} - qf(y)y^{-q-1}} \\ &= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\frac{2\rho C}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}y^{-q} - qy^{-q-1}} \\ &= \frac{\alpha}{2\rho C}, \end{aligned}$$

por lo que, de manera análoga al caso anterior, se cumple que para $C>0$

$$\tilde{\varepsilon}(x)\mathrm{e}^x \le Cx \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} v(x) = \infty,$$

o bien,

$$\varepsilon^*(x)x \le C\ln(x) \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} v(x) = \infty.$$

Y siguiendo el argumento, también se cumple que la existencia de constantes $q>1$ y $C>0$ tales que

$$\varepsilon^*(x)x > C\ln(x)^q$$

implica que $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala local estricta. En resumen, si $1-\beta>0$:

- Si existe $C>0$ tal que $\varepsilon^*(x) \le Cx^{\frac{1-\beta}{\alpha}-1}$ entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.
- Si existen $q > \frac{1-\beta}{\alpha}$ y $C>0$ tales que $\varepsilon^*(x) \ge Cx^{q-1}$, entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala local estricta.

Si $1-\beta=0$:

- Si existe $C>0$ tal que $\varepsilon^*(x)\leq C\frac{\ln(x)}{x}$ entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.
- Si existen $q>1$ y $C>0$ tales que $\varepsilon^*(x)\geq C\frac{\ln(x)^q}{x}$, entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala local estricta.

Finalmente, si $1-\beta<0$:

- Si existen $C\leq\frac{1}{2\rho}$ y $M>0$ tales que $\varepsilon^*(x)\leq Cx^{\frac{\beta-1}{\alpha}-1}$ para todo $x>M$, entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.
- Si existen $C>\frac{1}{2\rho}$ y $M>0$ tal que $\varepsilon^*(x)\geq Cx^{\frac{\beta-1}{\alpha}-1}$ para todo $x>M$, entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala local estricta.

Al escribir estas afirmaciones en función de la variable σ se obtiene el resultado siguiente.

Proposición 3.10 *Considérese el sistema (3.6), donde $\delta>2\beta-1$, $\alpha>|1-\beta|$, $K=-\rho$, $\delta=\alpha+\beta$, y B_t y W_t son ρ-correlacionados, con $\rho>0$. Sea*

$$\varepsilon(\sigma)=1+\frac{p(\sigma)}{\rho\sigma^\delta}.$$

Si $\beta<1$:

- *Si existe $C>0$ tal que $\varepsilon(x)\leq Cx^{1-\delta}$ entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.*
- *Si existen $q>1-\delta$ y $C>0$ tales que $\varepsilon(x)\geq Cx^q$, entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala local estricta.*

Si $\beta=1$:

- *Si existe $C>0$ tal que $\varepsilon(x)\leq C\frac{\ln(x)}{x^\alpha}$ entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.*
- *Si existen $q>1$ y $C>0$ tales que $\varepsilon(x)\geq C\frac{\ln(x)^q}{x^\alpha}$, entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala local estricta.*

Si $\beta>1$:

- *Si existen $C\leq\frac{1}{2\rho}$ y $M>0$ tales que $\varepsilon(x)\leq Cx^{\beta-1-\alpha}$ para todo $x>M$, entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.*
- *Si existen $C>\frac{1}{2\rho}$ y $M>0$ tal que $\varepsilon(x)\geq Cx^{\beta-1-\alpha}$ para todo $x>M$, entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala local estricta.*

Observación Cabe recalcar que, dados los valores para las constantes que definen el caso, no hay problemas asociados a la aplicabilidad del lema 3.5, puesto que, acorde a la proposición 2.4, la solución σ_t al sistema (3.6) siempre cumple que $S^\sigma=\infty$ c.s.

Con esto se concluye el estudio del tercer caso. Queda, por lo tanto, el estudio del último caso borde.

3.3.4. Caso 4

El último caso está definido por las condiciones $\rho \leq 0$, $\delta = 2\beta - 1$, $K = \frac{1}{2}$ y $\beta > 1$. Aplicando el cambio de variable $Z_t = Y_t^{1-\gamma}$, se obtiene la ecuación

$$\mathrm{d}Z_t = (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\left(\left(K\tilde{\mu}(Z_t) - \frac{\beta}{2}\right) Z_t^{-1} + \rho Z_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right) \mathrm{d}t. \tag{3.15}$$

Para estudiar este caso, se dividirá en cuatro subcasos en base a los valores de α, $\beta - 1$ y ρ.

Caso $\alpha > \beta - 1$, $\rho < 0$: En este caso, existen $\eta > 0$ y $\tilde{\rho} \in (\rho, 0)$ tales que para todo $0 < x < \eta$ se cumple que

$$(1-\beta)\left(\left(K\tilde{\mu}(x) - \frac{\beta}{2}\right) x^{-1} + \rho x^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right) > (1-\beta)\left(\left(K - \frac{\beta}{2}\right) x^{-1} + \tilde{\rho} x^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right).$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, sea $\eta_1 > 0$ tal que para todo $0 < x < \eta_1$, $\tilde{\mu}(x) < 1 + \varepsilon$, entonces

$$(1-\beta)\left(\left(K\tilde{\mu}(x) - \frac{\beta}{2}\right) x^{-1} + \rho x^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right) > (1-\beta)\left(\left(K - \frac{\beta}{2}\right) x^{-1} + K\varepsilon x^{-1} + \rho x^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right).$$

Si $x < 1$, entonces $x^{-1} < x^{\frac{\alpha}{1-\beta}}$, por lo que

$$(1-\beta)\left(\left(K - \frac{\beta}{2}\right) x^{-1} + K\varepsilon x^{-1} + \rho x^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right) > (1-\beta)\left(\left(K - \frac{\beta}{2}\right) x^{-1} + (K\varepsilon + \rho)\, x^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right).$$

Luego, con ε tal que $(K\varepsilon + \rho) < 0$, se cumple la afirmación anterior, con $\tilde{\rho} = K\varepsilon + \rho$ y $\eta = \min\{\eta_1, 1\}$.

Para concluir, se aplica el teorema de comparación de la misma forma que en demostraciones anteriores. Se definen las funciones

$$b(x) = \begin{cases} (1-\beta)\left(\left(K\tilde{\mu}(x) - \frac{\beta}{2}\right) x^{-1} + \rho x^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right) & \text{si } x \in (0, \eta], \\ \eta^{-1}(b(\eta)(2\eta - x) + (x - \eta)) & \text{si } x \in (\eta, 2\eta), \\ 1 & \text{si } x \in [2\eta, \infty), \end{cases}$$

$$\tilde{b}(x) = \begin{cases} (1-\beta)\left(\left(K - \frac{\beta}{2}\right) x^{-1} + \tilde{\rho} x^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right) & \text{si } x \in (0, \eta], \\ \eta^{-1} b(\eta)(2\eta - x) & \text{si } x \in (\eta, 2\eta), \\ 0 & \text{si } x \in [2\eta, \infty), \end{cases},$$

y, para $0 < \nu < \tilde{Z}_0 < Z_0$ las funciones

$$b_\nu(x) = b(\nu)\mathbb{1}_{x \leq \nu} + b(x)\mathbb{1}_{x > \nu},$$
$$\tilde{b}_\nu(x) = \tilde{b}(\nu)\mathbb{1}_{x \leq \nu} + \tilde{b}(x)\mathbb{1}_{x > \nu}.$$

Se trabaja entonces con las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_t^* &= (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + b(Z_t)\mathrm{d}t, && Z_0^* = Z_0,\\
\mathrm{d}\tilde{Z}_t^* &= (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + \tilde{b}(Z_t)\mathrm{d}t, && \tilde{Z}_0^* = \tilde{Z}_0,\\
\mathrm{d}Z_t^\nu &= (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + b_\nu(Z_t)\mathrm{d}t, && Z_0^\nu = Z_0,\\
\mathrm{d}\tilde{Z}_t^\nu &= (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + \tilde{b}_\nu(Z_t)\mathrm{d}t, && \tilde{Z}_0^\nu = \tilde{Z}_0,
\end{aligned}$$

con soluciones Z^*, $\tilde{Z}^*$, Z^ν, $\tilde{Z}^\nu$ respectivamente. Del teorema de comparación se deduce que $\mathbb{P}(Z_t^\nu > \tilde{Z}_t^\nu) = 1$, y por lo tanto $\mathbb{P}(S_\nu^\nu > \tilde{S}_\nu^\nu) = 1$. Además, por unicidad de soluciones en (ν, ∞), $\mathbb{P}(Z^*_{t\wedge\tilde{S}^*_\nu} > \tilde{Z}^*_{t\wedge\tilde{S}^*_\nu}) = 1$. Tomando límite sobre ν,

$$\mathbb{P}(Z^*_{t\wedge\tilde{S}^*_0} > \tilde{Z}^*_{t\wedge\tilde{S}^*_0}) = 1.$$

El teorema 3.6 y la relación dada por la propiedad 3.1 implican que la ecuación

$$\mathrm{d}\tilde{Z}_t = (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\left(\left(K - \frac{\beta}{2}\right)\tilde{Z}_t^{-1} + \tilde{\rho}Z_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right),$$

con condición inicial $\tilde{Z}_0$ cumple $\tilde{S}_0^Z = \infty$ c.s., pues sale de aplicar la fórmula de Itô a la ecuación (3.3) en uno de los casos donde $\tilde{X}_{t\wedge S_0}$ es martingala. Del lema 2.3 se deduce que $\tilde{S}_0^* = \infty$ c.s., y de la desigualdad anterior, $S_0^* = \infty$ c.s. Luego, el lema 2.3 implica que $S_0^Z = \infty$ c.s., y por lo tanto $X_{t\wedge S_0}$ es martingala. Así, se comprueba el siguiente resultado.

Proposición 3.11 *Considérese el sistema 3.6, donde $\delta = 2\beta - 1$, $K = \frac{1}{2}$, $\beta > 1$, $\alpha > \beta - 1$ y B_t y W_t son ρ-correlacionados, con $\rho < 0$. Bajo estas condiciones, $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.*

Caso $\alpha = \beta - 1$, $\rho < 0$: La ecuación a estudiar es

$$\mathrm{d}Z_t = (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\left(\frac{1}{2}\tilde{\mu}(Z_t) - \frac{\beta}{2} + \rho\right)Z_t^{-1}\mathrm{d}t.$$

Escribiendo $\tilde{\mu}(Z_t) = 1 + \varepsilon(Z_t)$, y suponiendo $\rho < 0$ y $\rho \neq -\frac{1}{2}$

$$\mathrm{d}Z_t = (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\left(K' + K'\varepsilon'(Z_t) - \frac{\beta}{2}\right)Z_t^{-1}\mathrm{d}t,$$

donde, $K' = \frac{1}{2} + \rho < \frac{1}{2}$ y $\varepsilon'(x) = \frac{1}{1+2\rho}\varepsilon(x)$. Así, con $\mu'(x) = 1 + \varepsilon'(x)$,

$$\mathrm{d}Z_t = (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\left(K'\mu'(Z_t) - \frac{\beta}{2}\right)Z_t^{-1}\mathrm{d}t.$$

Esta ecuación sale como resultado de realizar el cambio de variable $Z_t = \sigma_t^{1-\beta}$ en la ecuación

$$\mathrm{d}\sigma_t = \sigma^\beta\mathrm{d}\Gamma_t + K'\sigma^\delta\mu'(\sigma_t)\mathrm{d}t.$$

Las constantes satisfacen las condiciones del caso $\delta = 2\beta - 1$, $K < \frac{1}{2}$ en la proposición 2.4, de donde la solución a esta ecuación cumple $S = \infty$ c.s. Esto implica que $S_0^Z = \infty$ c.s.

Si $\rho = -\frac{1}{2}$, se utiliza el mismo argumento que en el caso anterior, pues se puede elegir $\tilde{\rho} < -\frac{1}{2}$ tal que

$$(1-\beta)\left(\frac{\tilde{\mu}(Z_t)-\beta}{2}+\rho\right) > (1-\beta)\left(\frac{\tilde{\mu}(Z_t)-\beta}{2}+\tilde{\rho}\right).$$

Se procede análogamente, definiendo las funciones b_1, b_2, b_1^ν, b_2^ν y sus ecuaciones asociadas, y utilizando el teorema de comparación tal como en el caso $\alpha > \beta-1$. Se concluye el siguiente resultado.

Proposición 3.12 *Considérese el sistema 3.6, donde $\delta = 2\beta-1$, $K = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta-1$ y B_t y W_t son ρ-correlacionados, con $\rho < 0$, entonces $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.*

Caso $\alpha < \beta - 1$, $\rho < 0$: Se escribe la ecuación (3.15) como

$$\mathrm{d}Z_t = (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\left(\frac{\tilde{\mu}(Z_t)-\beta}{2}Z_t^{-1} + \rho Z_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right)\mathrm{d}t.$$

Para aplicar el test de Feller, se calcula

$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_x^1\int_y^1 \exp\left(2\int_y^z \frac{b(u)}{\sigma(u)^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_x^1\int_y^1 \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_y^z (\tilde{\mu}(u)-\beta)u^{-1} + 2\rho u^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_x^1\int_y^1 \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\int_y^z (\tilde{\mu}(u)-\beta)u^{-1}\mathrm{d}u\right)\exp\left(\frac{2\rho}{1-\beta}\int_y^z u^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\geq v'(x),
\end{aligned}$$

donde se acota inferiormente la última exponencial por 1. Al igual que en el caso 1, $v'(x)$ está asociada (tras un cambio de variable) al comportamiento de la solución σ_t mediante el test de Feller, y por lo tanto,si σ_t cumple $S = \infty$ c.s., entonces $v'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$. Luego, $v(x) \to \infty$ y así, por el lema 3,5, $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala. Esto se resume en el siguiente resultado.

Proposición 3.13 *Considérese el sistema 3.6, donde $\delta = 2\beta-1$, $K = \frac{1}{2}$, $\alpha < \beta-1$ y B_t y W_t son ρ-correlacionados, con $\rho < 0$. Si la solución σ_t cumple $S = \infty$ c.s., entonces el proceso $X_{t\wedge S_0}$ es una martingala.*

Caso $\rho = 0$: Por último, en este caso simplemente se debe estudiar el tiempo de llegada a 0 de la solución de la ecuación

$$\mathrm{d}Z_t = (1-\beta)\mathrm{d}\Gamma_t + (1-\beta)\frac{\tilde{\mu}(Z_t)-\beta}{2}Z_t^{-1},$$

que es sencillamente la ecuación resultante de aplicar el cambio de variable $Z = \sigma^{\alpha(1-\gamma)}$ a la ecuación (2.35) (salvo el Browniano utilizado, pero esto no es de relevancia ya que las soluciones son iguales en ley, y la propiedad estudiada es invariante en este aspecto). Por lo tanto, bajo la hipótesis de que σ_t cumple $S = \infty$ c.s., se tiene que la solución a esta ecuación debe cumplir que $S_0^Z = \infty$ c.s. y, por el test de Feller, $X_{t\wedge S_0}$ es martingala.

Proposición 3.14 *Considérese el sistema 3.6, donde* $\delta = 2\beta - 1$, $K = \frac{1}{2}$, $\alpha < \beta - 1$ *y* $\rho = 0$. *Si* σ_t *cumple* $S = \infty$ *c.s., entonces el proceso* $X_{t \wedge S_0}$ *es una martingala.*

Lo anterior concluye el estudio de los casos de excepción encontrados en la demostración de la propiedad 3.7. Los resultados encontrados se resumen en el siguiente enunciado.

Teorema 3.15 *Se considera el sistema*

$$\begin{cases} dX_t = X_t \sigma_t^{\alpha} dW_t, & X_0 = x_0 > 0 \\ d\sigma_t = \sigma_t^{\beta} dB_t + p(\sigma_t)\, dt, & \sigma_0 > 0, \end{cases} \tag{3.16}$$

donde, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$ *y* p *es una función que cumple*

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{p(\sigma)}{K\sigma^{\delta}} = 1$$

para algún $\delta \in \mathbb{R}$. *Se supone, además, que la única solución de la segunda ecuación,* σ_t, *cumple* $S = \infty$ *c.s. Si* $\rho > 0$ *y sucede cualquiera de los siguientes casos no intersectantes*

- $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $\rho > \frac{1}{2}$.
- $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$.
- $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $K + \rho > \frac{1}{2}$.
- $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$.
- $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta < \alpha + \beta$.
- $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta = \alpha + \beta$, $K \in (-\rho, 0)$,

entonces $X_{t \wedge S_0}$ *es una martingala local estricta. Por otra parte, si* $\rho > 0$ *y no se cumple ninguno de los casos anteriores, ni alguno de los siguientes casos borde:*

- $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $K + \rho = \frac{1}{2}$,
- $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta = \alpha + \beta$, $K = -\rho$,

o si $\rho \leq 0$, *entonces* $X_{t \wedge S_0}$ *es una martingala. Los dos casos anteriores se rigen de acuerdo a las propiedades 3.9 y 3.10 respectivamente.*

Conclusión

En el presente trabajo se ha ampliado un resultado previo, para lo cual en el proceso se ha presentado una metodología que podría ser utilizada para ampliar de la misma forma resultados similares, en donde un término de drift se modifique levemente para incorporar una clase más grande de procesos estocásticos.

Con respecto al resultado obtenido en el teorema 3.15, se observa que el comportamiento de la solución de la ecuación (3.16), como era de esperarse, es muy similar al de la solución a (3.2). Sin embargo, existen casos específicos en donde la velocidad de convergencia del límite

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{p(\sigma)}{K\sigma^{\delta}} = 1$$

puede ser causante de una diferencia entre el comportamiento de ambos sistemas.

Esto se prueba específicamente en las proposiciones 3.9 y 3.10, donde se demuestra que existe una relación entre la velocidad de convergencia del límite anterior y el que la solución X_t sea una martingala real o una martingala local estricta, señalando incluso que, de converger suficientemente lento, la solución se comportaría como una martingala local estricta, a diferencia de lo observado en el teorema 3.6, probado en [3].

Como puntos importantes a tener en cuenta para determinar la propiedad que cumpla el proceso X_t se distinguen la desigualdad entre δ y $2\beta - 1$, y la relación entre α y $|1-\beta|$. Puede observarse, por ejemplo, que siempre que X_t es martingala local estricta, debe cumplirse que, o bien $\alpha > |1 - \beta|$, o bien $\alpha = \beta - 1$. Esto puede indicar, por ejemplo, que para que se de una martingala local estricta es necesario que el valor de σ_t incida más fuertemente en las variaciones de X_t que en sus propias variaciones aleatorias asociadas al Browniano (no exactamente, puesto que se debe cumplir $\alpha > |\beta - 1|$ y no necesariamente $\alpha > |\beta|$, pero es la misma idea). Por otro lado, la relación entre δ y $2\beta - 1$ dan cuenta del término que tiene predominancia en la evolución de σ_t al acercarse a infinito.

Por otro lado, cuando $\rho \leq 0$ se cumple que $X_{t \wedge S_0}$ es una martingala, lo que guarda relación con que cuando el Browniano B_t tiende a aumentar, el Browniano W_t tiende a disminuir, por lo que cuando, por aleatoriedad, la solución σ_t aumenta, el proceso X_t tenderá a disminuir, evitando así comportamientos erráticos.

Las relaciones anteriores son difícilmente interpretables, parecen surgir muchas veces como mero resultado del cálculo matemático. Esto se debe en gran medida a la dificultad intrínseca de interpretar la condición de martingala local estricta. La condición de burbuja financiera, tal como se expuso en la introducción, no se refiere a que el proceso de precios se dispare y explote a infinito, sino que basta con que el proceso β_t definido en (1), no sea nulo c.s.

Como puede leerse en [7] (Teo. 3), es posible que las burbujas, tal como se entienden en este trabajo (asumiendo *NFLVR* y mercado completo), se anulen. Es decir, que si existe un t tal que $\beta_t = 0$, entonces $\beta_u = 0$ para todo $u > t$. Esto da lugar a dos observaciones importantes. En primer lugar, el comportamiento de burbuja debe presentarse desde $t = 0$ (i.e. si existe burbuja, entonces $\beta_0 \not\equiv 0$) y en segundo lugar, es un recordatorio de que una burbuja puede no estar asociada a una explosión desmedida del proceso de precios, sino que puede dar cuenta solo de una pequeña diferencia entre el precio de mercado y el precio fundamental del activo.

Como posible avance posterior, queda precisar el comportamiento de la solución de la ecuación en los casos abordados por las propiedades (3.9) y (3.10). Los resultados presentes en este trabajo, si bien entregan información relevante al caso, no son una caracterización de la propiedad de martingala, sino que solo proporcionan condiciones suficientes sobre la velocidad de convergencia para que la solución sea una martingala o una martingala local estricta.

Bibliografía

[1] R. Jarrow, P. Protter, J. San Martín; *Asset price bubbles: invariance theorems* (2021).

[2] I. Karatzas, S. Shreve; *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 2 ed. (2000)

[3] A. Riveros; *Propiedad de Martingala, Volatilidad Estocástica y Burbujas Financieras*, Masters Thesis, Universidad de Chile (2020).

[4] Y. Ouknine, M. Rutkowski; *Strong comparison of solutions of one-dimesional stochastic differential equations*, Stochastic Processes and their Applications, 36 (1990), p. 217-230.

[5] P. Protter; *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, 2 ed. (2004).

[6] R. Jarrow; *Continuous-Time Asset Pricing Theory. A Martingale Based Approach*, Springer Finance Textbooks (2018).

[7] P. Protter; *A Mathematical Theory of Financial Bubbles*, Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2013, Lecture Notes in Mathematics 2081, Springer (2013), p. 1-108.

[8] S. Shreve; *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous Time Models*, Springer (2004).

[9] I. Karatzas, J. Ruf; *Distribution of the time to explosion for one-dimensional diffusions*, Probability Theory and Related Fields (2013).