

T
1966
Sa75
c.2

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
ESCUELA DE INGENIERIA

"PROYECTO DE LOSA DE PRUEBAS PARA UN
LABORATORIO DE ENSAYO DE ESTRUCTURAS"



MEMORIA DE PRUEBA
PÁRA OPTAR AL TITULO DE
INGENIERO CIVIL

MAURICIO SARRAZIN A.
1966.



15769-1571

A MI MADRE

PROLOGO.-

La presente memoria tiene como objetivo fundamental el diseño y cálculo de la losa de pruebas de un laboratorio de ensayo de estructuras a escala natural o a una escala suficientemente grande como para que los valores determinados sean representativos del fenómeno en estudio.

Existen en el mundo varios laboratorios del tipo que se estudiará más adelante, el primero de los cuales se construyó en Bélgica en 1955. En nuestro país, el Instituto de Investigaciones y Ensayos de Materiales de la Universidad de Chile tiene la intención de construir uno a un plazo más o menos breve.

El estudio de la losa de este laboratorio se ha realizado mediante la teoría de las líneas de rotura de Johansen y el cálculo de las armaduras mediante la teoría anelástica del hormigón armado.

La interacción suelo-estructura se ha estudiado suponiendo válida la hipótesis de Winkler de proporcionalidad entre deformación y presión de contacto. Se ha resuelto analíticamente el problema de una viga finita descansando en un suelo elástico y sometida a un sistema cualquiera de cargas concentradas y se ha confeccionado un programa para el computador digital ER-56. Mediante este programa se han confeccionado unas tablas que se incluyen al final y que pueden ser de utilidad para el cálculo de esfuerzos en fundaciones de edificios.

Quiero aprovechar esta oportunidad para manifestar mis más sinceros agradecimientos a quienes me han ayudado en la realización de este trabajo, en especial a los señores Ernesto Gomez, Joaquín Monge, Arturo Arias y Rodrigo Flores, quienes gastaron parte de su valioso tiempo proporcionándome conocimientos y experiencia. Quiero expresar también mis agradecimientos al Centro de Computación por haberme proporcionado la oportunidad de usar su equipo y por el desinterés con que su personal ha colaborado conmigo.

MAURICIO SARRAZIN A.

1966.

C O N T E N I D O.-

	Página
1.- ANTECEDENTES GENERALES.	1
2.- DESCRIPCION DEL LABORATORIO Y ADOPCION DE UNA SOLUCION	4
2.1.- Tipos de losas de ensayo existentes : sus ventajas y desventajas.	4
a) Losa sin subterráneo.	4
b) Losa con subterráneo.	5
2.2.- Elección del tipo de losa.	5
Instrumental y equipo de cargas.	10
3.- DETERMINACION DE LAS SOLICITACIONES.	14
3.1.- Posibles ensayos con cargas de gran magnitud.	14
3.1.1.- Esfuerzo de flexión máximo.	15
a) Puentes ferroviarios.	
b) Puentes carreteros.	
c) Vigas portantes de grúas puente.	
d) Vigas de fundación de edificios.	
e) Muros sísmicos de edificios.	
3.1.2.- Carga concentrada máxima.	19
a) Pilares.	
b) Apoyo de vigas.	
c) Ensayo de muros sísmicos de edificios.	
3.1.3.- Carga rasante máxima.	19
3.2.- Cargas de diseño usadas en otros laboratorios.	19
3.2.1.- Laboratorio de la Asociación de Industriales de Bélgica.	19
3.2.2.- Laboratorio de la Universidad de Lehigh	20
3.2.3.- Laborarorio de la Portland Cement Association	20
3.3.- Cargas de diseño adoptadas.	20
4.- RESISTENCIA DE LA LOSA SUPERIOR ANTE CARGAS CONCENTRADAS.	21
4.1.- Esfuerzos de corte debido al efecto punzante.	21
4.1.1.- Bases de cálculo de la resistencia al corte.	21
4.1.2.- Determinación de la fatiga de ruptura al corte del hormigón.	22
4.1.3.- Determinación del espesor de la losa superior.	23
4.2.- Momento flectante analizado según el método de la línea de fluencia de Johansen.	24
4.2.1.- Antecedentes generales relativos al método de la línea de fluencia.	
4.2.2.- Hipótesis.	25
4.2.3.- El método del trabajo virtual y la representación vectorial.	26
4.2.4.- Efecto de la "Acción de Membrana".	28
4.2.5.- Momento resistente en una dirección cualquiera para armadura isotrópica.	30
4.2.6.- Losa empotrada en su contorno sometida a una carga concentrada.	30

	Página
A N E X O.-	131
VIGAS FINITAS SOBRE SUELO ELASTICO.	131
a) Vigas de longitud infinita.	131
1.- La solución de Biot.	131
2.- Solución basada en la hipótesis de Winkler.	133
3.- Solución numérica de Vesic y expresión para determinar k .	134
4.- Valores dados por Terzaghy para el coeficiente de reacción del terreno.	135
b) Vigas de longitud finita.	136
1.- Viga de longitud finita con una carga concentrada en una posición cualquiera.	137
2.- Viga de longitud finita con un momento aplicado en una posición cualquiera.	142
3.- Viga finita con un número cualquiera de cargas concentradas y momentos.	146
4.- Tablas para el cálculo de vigas de longitud finita sobre suelo elástico.	148
REFERENCIAS.-	151

1.- ANTECEDENTES GENERALES.-

La concepción del Laboratorio que estudiaremos en los capítulos siguientes representa un cambio trascendental de la idea convencional de un laboratorio destinado a investigar sobre elementos estructurales. En vez de consistir en ciertas máquinas de pruebas ubicadas dentro de un edificio destinado a este fin, el laboratorio es, en sí mismo, una máquina de pruebas gigante capaz de resistir varios cientos de toneladas de carga en casi cualquier ubicación y dirección.

Esta "máquina" está constituida, en esencia, por una base rígida consistente en una gran losa, la cual cuenta con dispositivos de anclaje cada cierto trecho por medio de los cuales es posible instalar una gran cantidad de sistemas de prueba diferentes. La aplicación de las cargas se realiza mediante un equipo especial consistente en gatos hidráulicos de pequeño tamaño que pueden ubicarse en cualquier posición y dirección y en el número que se desee, dando así una gran versatilidad al sistema.

La idea de construir un laboratorio de este tipo data de 1943 (1), año en el cual los señores L. Baes, de la Universidad de Bruselas y Y. Verswilt, de la Asociación de Industriales Belgas empezaron los estudios preliminares de la instalación que ellos denominaron G.I.M.E.D. Los estudios se extendieron por espacio de cuatro años, hasta 1947. El equipo de carga fué suministrado por Alfred Amsler y Cía. Los marcos auxiliares, vigas, pernos de anclaje, etc., fueron diseñados también por Amsler. El cálculo del piso de prueba fué hecho por Messrs. Verdeyen y Moenaert, Ingenieros Consultores, Bruselas. Por último, las pruebas preliminares comenzaron en Marzo de 1952.

Luego se construyó una instalación análoga en Italia, en el Politécnico de Milano, Instituto de Scienza delle Contruzioni (1) y que fué designada con el mismo nombre : G.I.M.E.D.

Desde entonces se han construido en el mundo unas cuarenta o más instalaciones de este tipo, las cuales constituyen una herramienta poderosísima para avanzar en la difícil senda del conocimiento del comportamiento real de las estructuras y de los materiales ante sollicitaciones, ya sean éstas de tipo estático o, más importante aún, de tipo dinámico repetitivo.

Hay diversas razones que hacen necesaria la confección de modelos a escala natural o a una escala técnicamente suficiente como para asegurar que haya una simulación satisfactoria de las condiciones de servicio :

- a) El fenómeno general llamado "efecto de escala" no permite una extrapolación directa de los resultados obtenidos sobre una muestra pequeña al comportamiento de una pieza grande en condiciones reales, especialmente en el caso de cargas repetidas.
- b) La resistencia límite puede disminuir en un grado considerable debido a concentraciones de fatigas producidas por la forma geométrica de la estructura.
- c) El comportamiento de un detalle complicado ante cargas repetidas es, a menudo, imposible de predecir mediante un cálculo analítico. Además, las fatigas de trabajo así calculadas son sólo burdas aproximaciones de los valores reales. Por estas razones se hace necesaria una prueba a escala natural.

d) Durante la fabricación y construcción de los elementos estructurales se pueden producir en ellos esfuerzos que no se han tenido en cuenta en el análisis, como por ejemplo, las fatigas residuales debidas al laminado de piezas de acero, las fatigas residuales debidas a las soldaduras, y las fatigas producidas por la retracción de fraguado del hormigón, en el caso de piezas de hormigón armado.

Mediante un laboratorio de este tipo se pueden duplicar con exactitud en el espécimen de prueba los efectos de cargas de servicio reales, ya que es posible construir en torno de él una máquina que le aplique cargas en una pluralidad de puntos y en prácticamente cualquier dirección.

Entre los laboratorios más importantes de este tipo que se han construído en el mundo, podemos citar los siguientes :

- 1) Instalación G.I.M.E.D. en Anderghem, cerca de Bruselas, Bélgica (1). Pertenece a la Asociación de Industriales Belgas y comenzó a funcionar en 1952.
- 2) Instalación G.I.M.E.D. en el Politécnico de Milano, Italia (1). Comenzó a prestar servicios aproximadamente en 1955.
- 3) "Cama de Pruebas" de la Universidad de Lehigh, Bethlehem, Pa., U.S.A. (2). En operación desde 1955.
- 4) Laboratorio de la Compañía Industrial Suiza, en Neuhausen am Rheinflall, Suiza (3).
- 5) "Losa de Pruebas" de la Portland Cement Association, Skokie, Ill., U.S.A. (4). Desde 1957.
- 6) Laboratorio de la Building Research Station, Garston, England (3).
- 7) Laboratorio de la Universidad de Liege, Liege, Bélgica, (3).
- 8) Laboratorio de la Universidad de Gand, Gand, Bélgica (3).
- 9) Laboratorio E.M.P.A., Dübendorf/Zürich, Suiza (3).
- 10) Laboratorio de Ensayos de Materiales del Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento del C.S.I.C., Madrid, Espana (5).
- 11) "Losa de Ensayos" de l'Iraba en Saint-Remy-les-Chevreuse, Francia (6). Desde 1963.

OBJETIVOS :

El Laboratorio que estamos estudiando será construído por el Instituto de Investigaciones y Ensayos de Materiales de la Universidad de Chile. Dicho Instituto ya cuenta con parte del equipo necesario, el cual ha sido adquirido de Amsler y Co., Schaffhausen, Suiza.

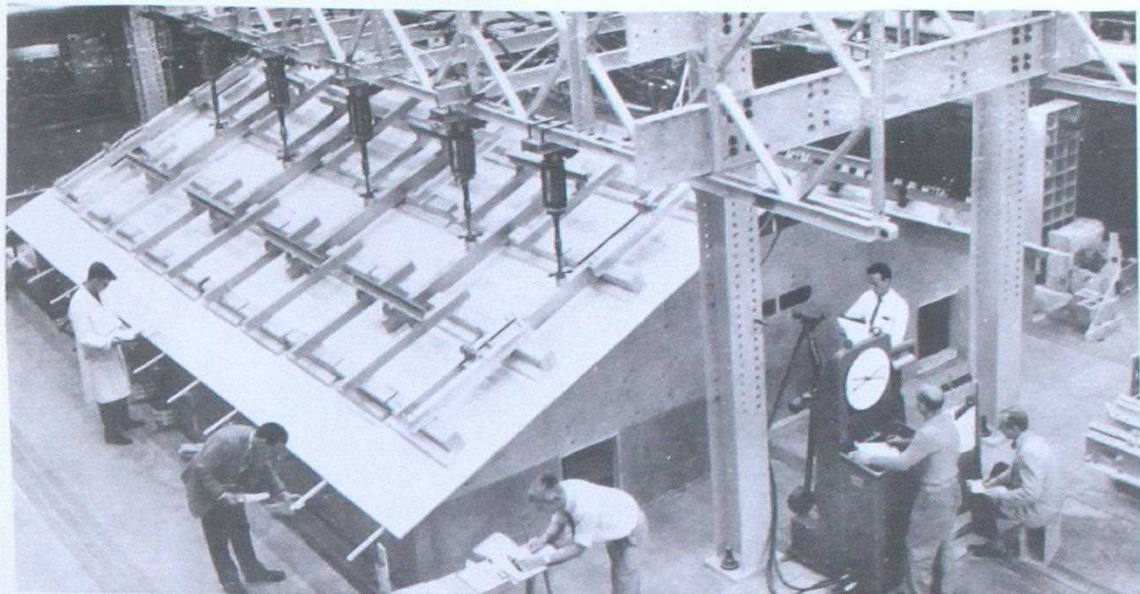
Los principales objetivos del laboratorio serán los siguientes :

- a) Investigación de Materiales, elementos estructurales y elementos de máquinas.
- b) Ensayo de modelos a escala reducida o a escala natural.
- c) Para fines docentes.

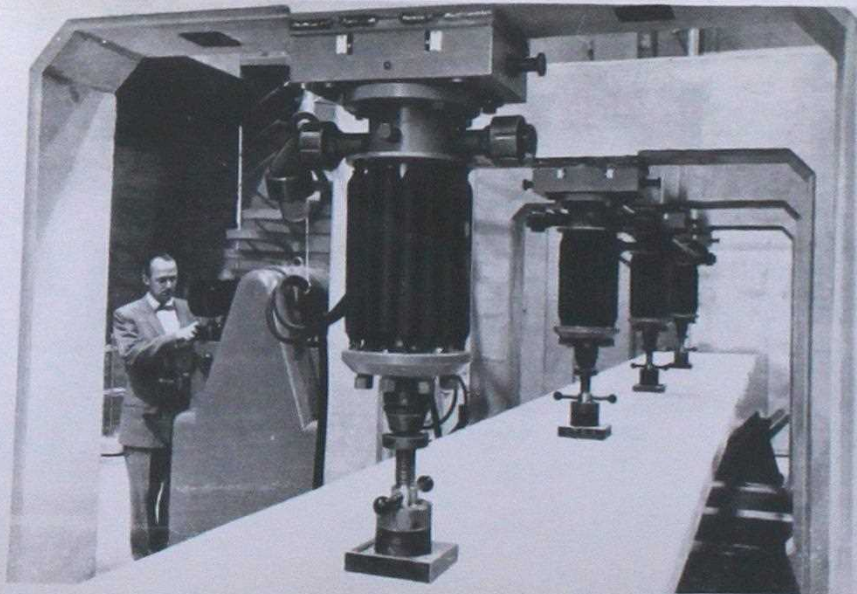
Las actividades del tipo a) se concentrarán principalmente sobre las siguientes investigaciones :

- Estudio de las propiedades estructurales del hormigón armado que aún no se conozcan, en especial del hormigón pretensado, el hormigón con agregados livianos y el uso de aceros de alta resistencia.
- Estudio de nuevos elementos estructurales de hormigón armado, tales como marcos y vigas prefabricados, cascarones, losas, placas plegadas, marcos espaciales de edificios, etc.
- Estudio de los detalles de unión de elementos estructurales.
- Estudio de los nuevos métodos de diseño estructural del hormigón armado, tales como el diseño a la rotura, la teoría de la línea de fluencia para el cálculo de losas, las teorías de membranas y cascarones y el diseño al límite.
- Estudio del efecto de cargas dinámicas y de cargas repetidas en los distintos materiales y en las diferentes estructuras que se vayan a analizar.

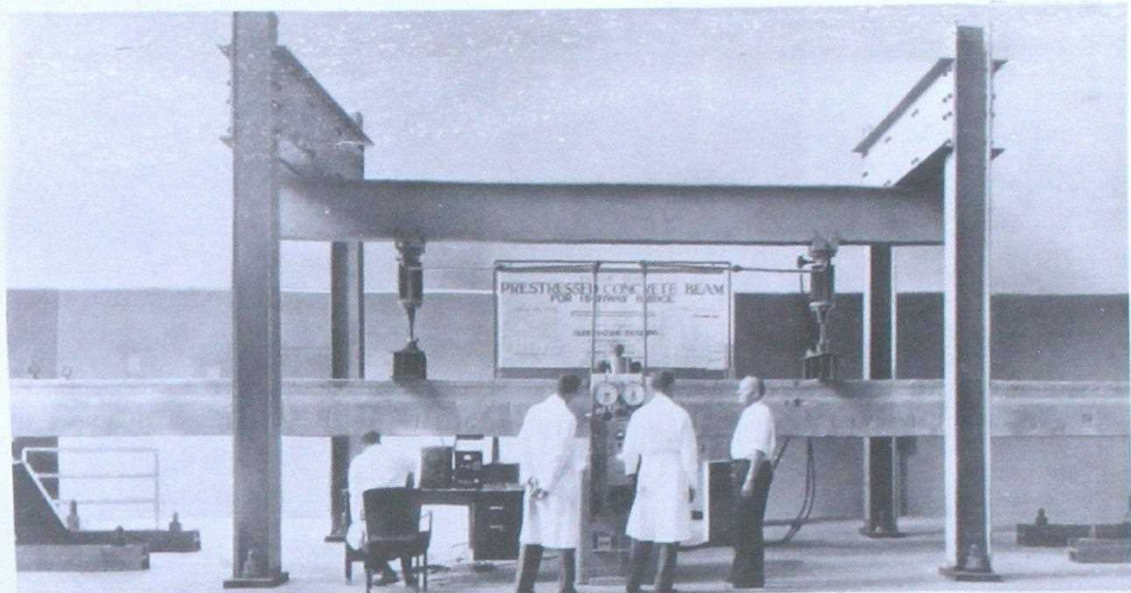
No es necesario seguir hablando sobre la enorme utilidad que representa un laboratorio de este tipo para un instituto de investigación como I.D.I.E.M., ya que ésta se pone de manifiesto de inmediato con sólo dar una mirada a los distintos usos que se le ha dado a instalaciones de este tipo en otros laboratorios. A continuación se encuentran algunas fotografías que ponen de manifiesto gráficamente la versatilidad del sistema.



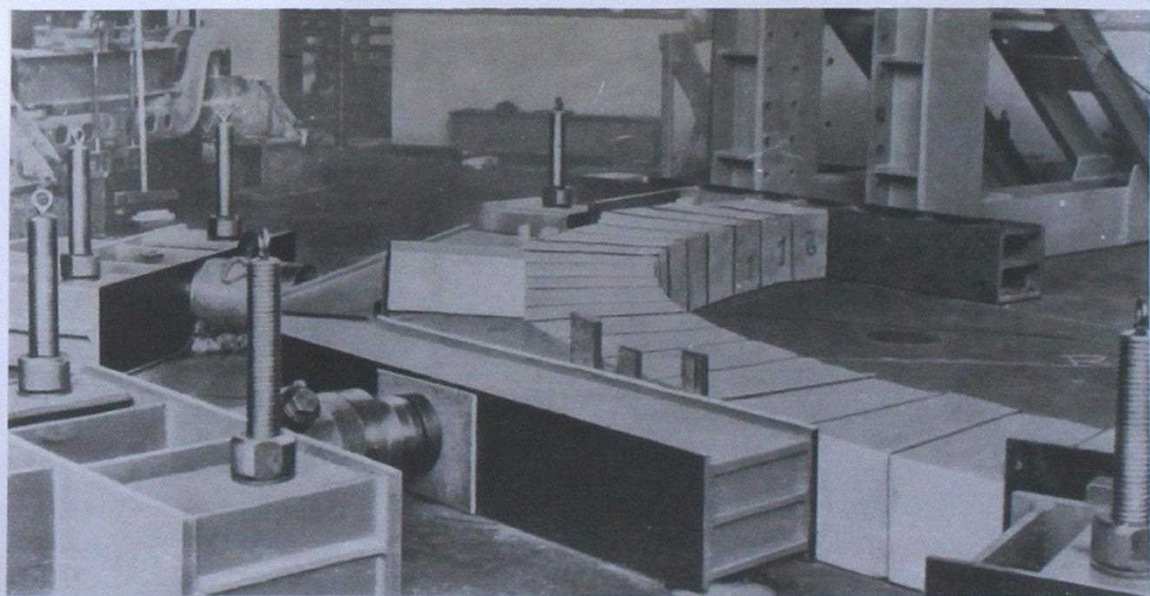
Universidad de Lehigh. Bethlehem, Pa., U.S.A.



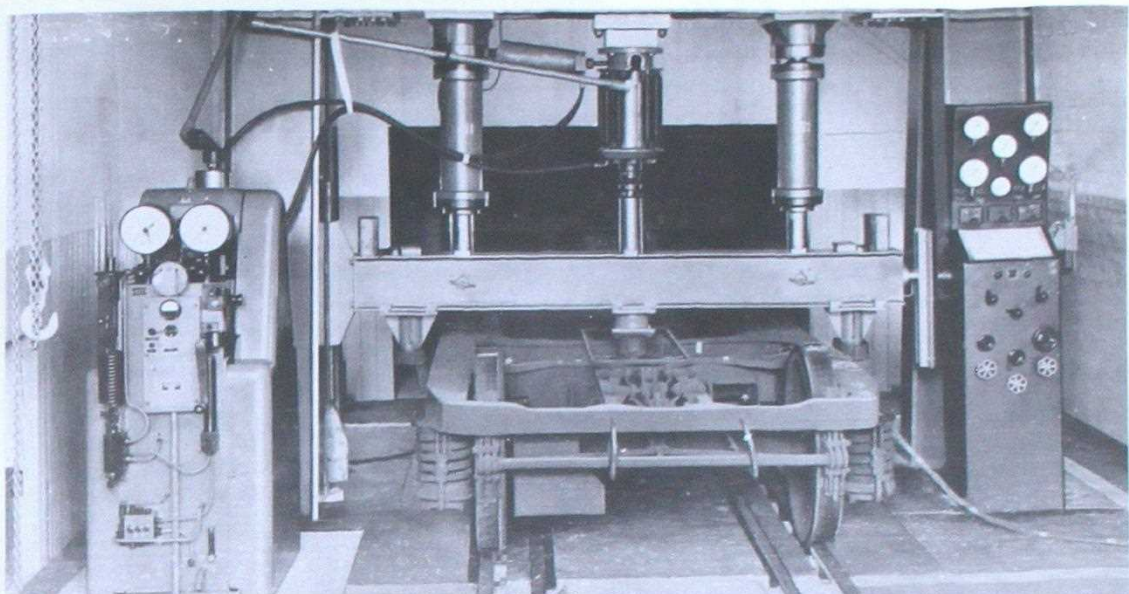
Asociación del Cemento Portland. Skokie, Ill., U.S.A.



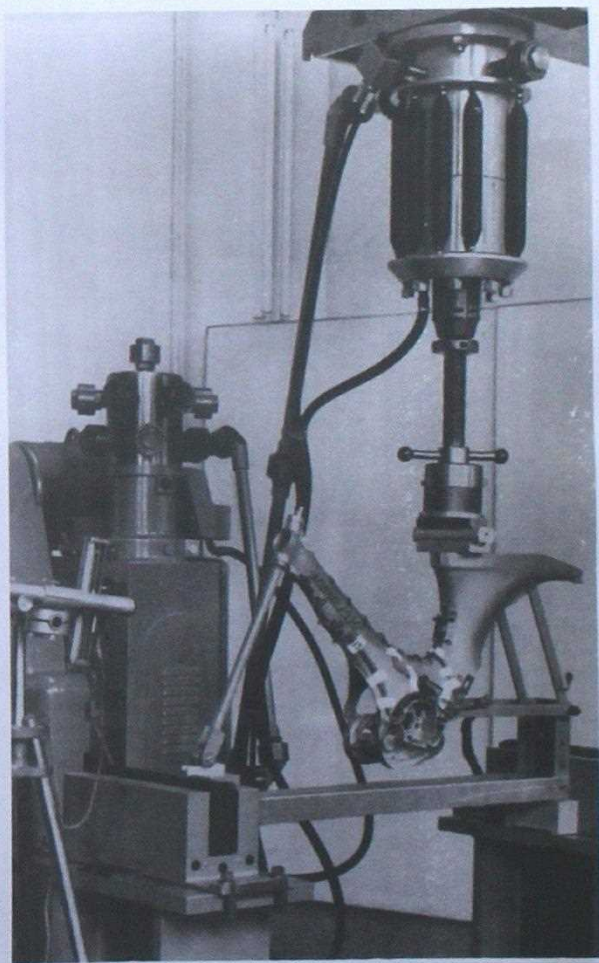
Universidad de Lehigh. Bethlehem, Pa., U.S.A.



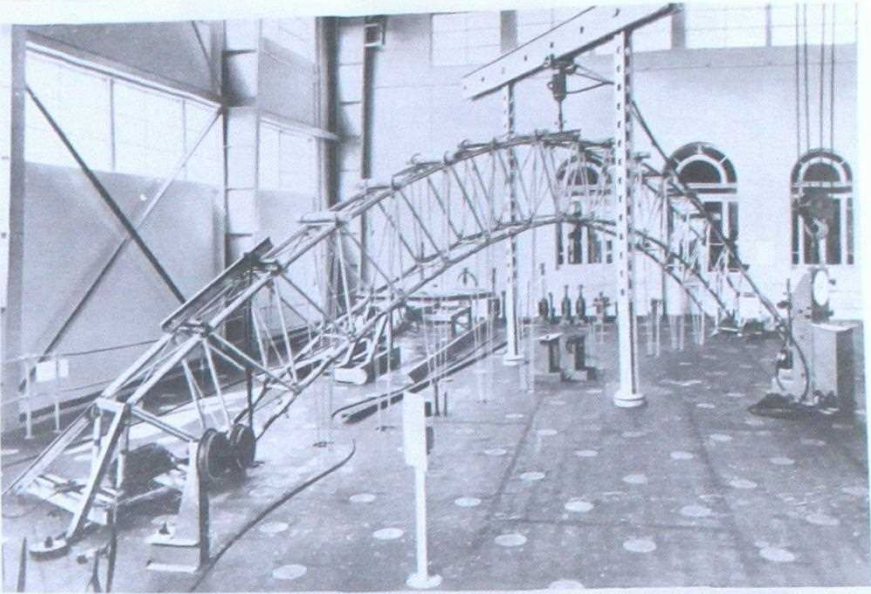
Asociación de Industriales de Bélgica. Bruselas.



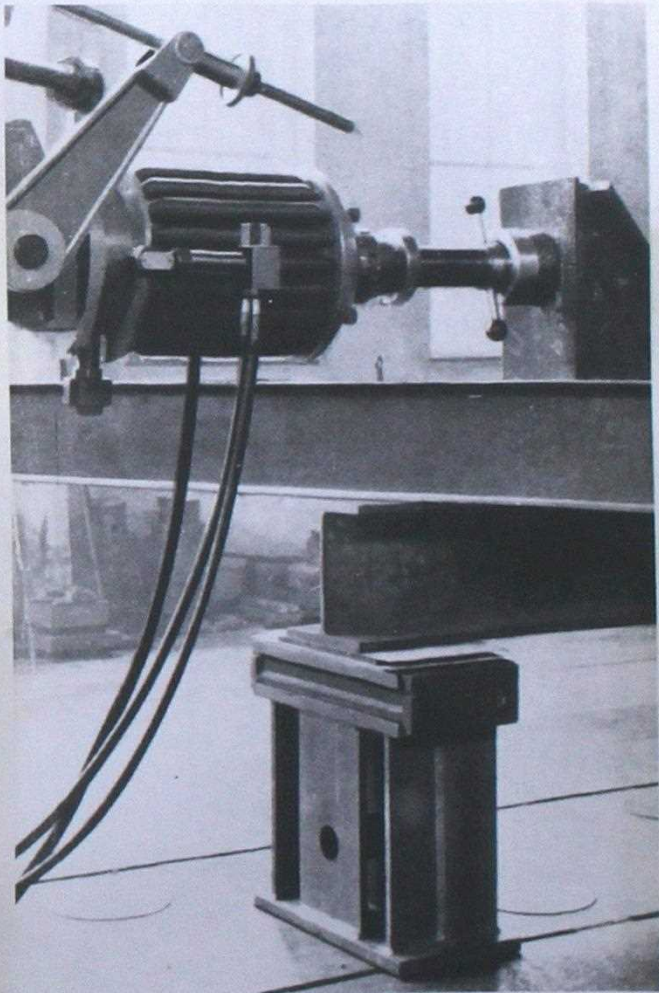
Compañía Industrial Suiza. Neuhausen am Rheinfall, Suiza.



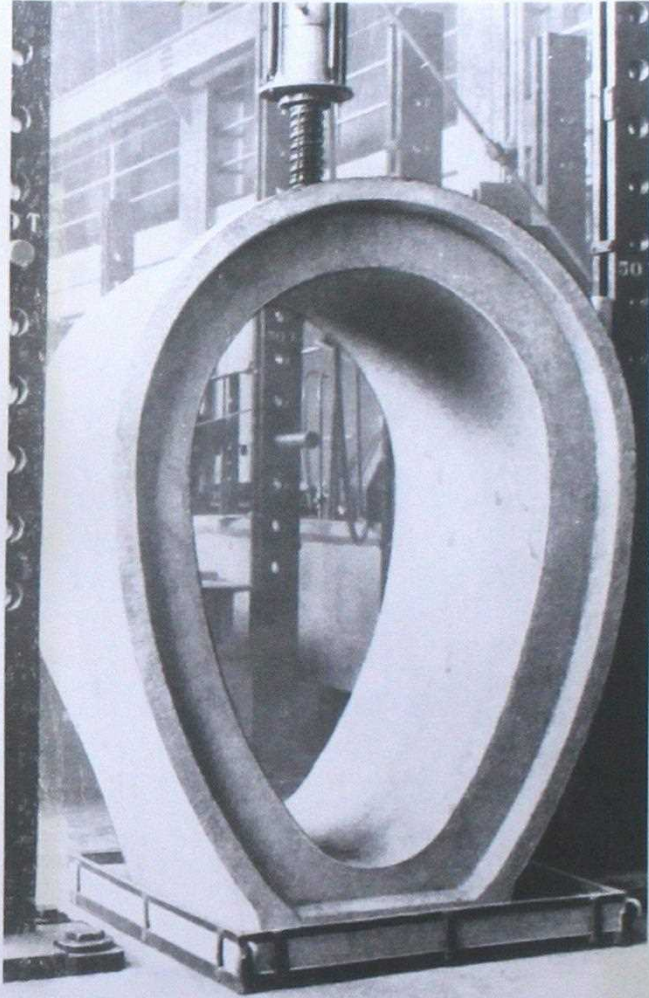
Asociación de Industriales de Bélgica. Bruselas, Bélgica.



Politécnico de Milán. Milán, Italia.



Asociación de Industriales de
Bélgica. Bruselas, Bélgica.



Universidad de Gand
Gand, Bélgica



Politécnico de Milán.
Milán, Italia.



Universidad de Lehigh.
Bethlehem, Pa., U.S.A.

2.- DESCRIPCION DEL LABORATORIO Y ADOPCION DE UNA SOLUCION.-

Como hemos dicho anteriormente, la parte principal del laboratorio consiste en una gran losa que posee ciertos dispositivos de anclaje y mucha rigidez y resistencia. Esta losa es la encargada de resistir en buena forma las reacciones que se produzcan en el equipo que está aplicando las cargas y las reacciones que el espécimen de prueba produce en sus apoyos.

2.1.- Tipos de losas de ensayo existentes : sus ventajas y desventajas.-

En general, se han usado hasta ahora dos tipos principales de losas, caracterizadas por la forma en que los pernos de fijación de los elementos de prueba van anclados a ella :

a) Losa sin subterráneo.- (Lám. 1)

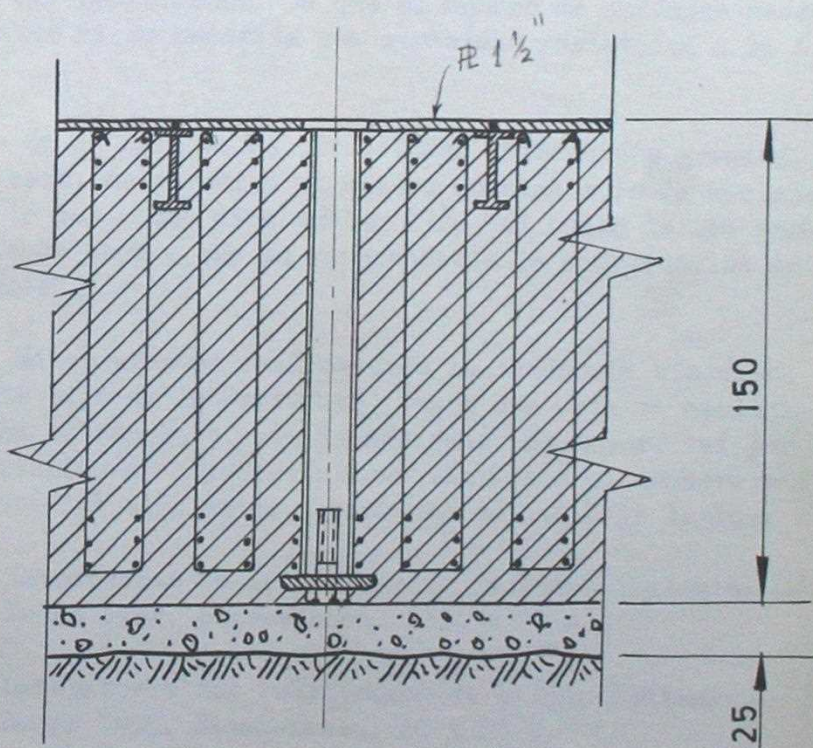
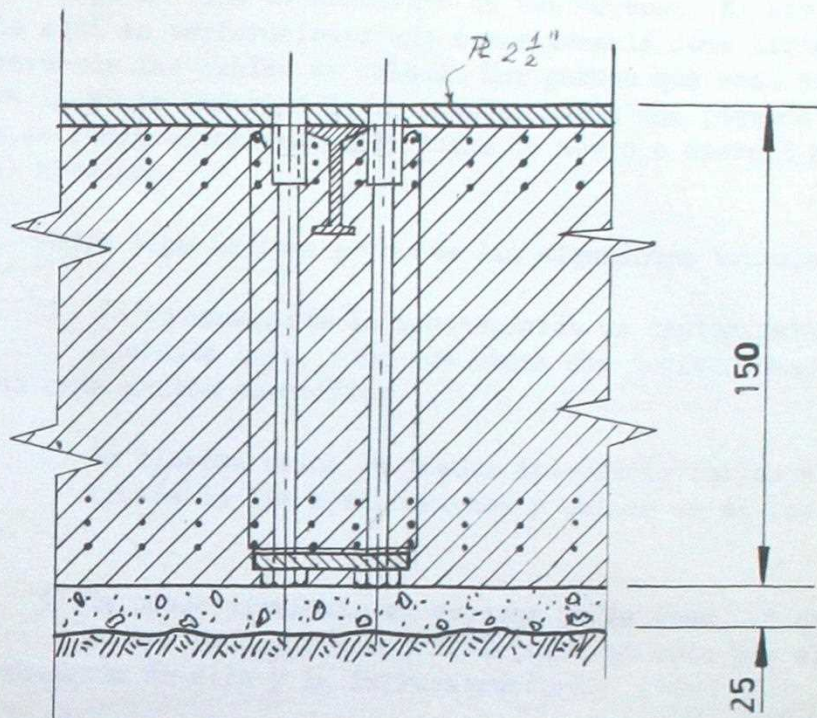
Este sistema consiste en una gran losa, que puede alcanzar un espesor de hasta 2 metros, y en la cual quedan empotrados los pernos de anclaje.

Los pernos de anclaje pueden diseñarse en dos formas diferentes :

- 1) Pernos de una longitud igual al espesor de la losa, anclados en la parte inferior mediante una placa de acero (Lám. 1-a). Estos pernos deberán cubrirse con papel emparafinado antes de colocar el hormigón, con el objeto de que éste no se adhiera a su superficie y puedan tensarse posteriormente, cuando se desee efectuar ensayos con cargas repetidas.
- 2) Dejar perforaciones a través de la losa mediante tubos de acero o de eternit y anclar en la parte inferior unos pernos roscados (Lám. 1-b). Con este sistema se puede conseguir algún ahorro en el costo de los pernos.

La losa sin subterráneo tiene la ventaja de que no es necesaria la construcción de éste, lo que disminuye el costo, pero tiene en cambio las siguientes desventajas :

- a) No es posible reparar los anclajes en caso de que éstos sufran deterioros.
- b) Debido a que los anclajes tienen un costo elevado, ya que deben ser diseñados para las cargas máximas, cuando se trata de una losa de dimensiones considerables, pueden aumentar mucho el costo total.
- c) No posee subterráneo, por lo que éste no puede ser utilizado como bodega o para instalar sistemas de carga en él que actúen a través de las perforaciones.
- d) Resulta una losa de un espesor considerable (del orden de 1.5 m.) debido a que no es posible usar el subterráneo y la losa inferior de fundación como una estructura resistente conjunta.



LAM. 1 ESC. 1:25
 Forma de los pernos de
 anclaje para losa sin
 subterráneo.

b) Losa con subterráneo.- (Lám. 2)

Bajo la losa se construye un subterráneo. El sistema de anclaje consiste aquí en perforaciones que atraviesan la losa hasta el subterráneo y a través de las cuales se colocan los pernos que sean necesarios, apoyándolos en la parte inferior de la losa mediante una pequeña placa. Las perforaciones se confeccionan poniendo tubos de acero o eternit antes de la colocación del hormigón.

Este tipo de losa presenta las siguientes ventajas :

- 1) No es necesaria la construcción de tantos pernos como anclajes haya, sino que basta con confeccionar los que se necesiten en cada prueba específica.
- 2) En ciertos casos se pueden introducir cables al sótano a través de las perforaciones y ubicar en él los dispositivos de carga.
- 3) Se puede disminuir el espesor de la losa, ya que los momentos de flexión son resistidos no sólo por ella, sino por la acción conjunta de ella y la infraestructura.

2.2.- Elección del tipo de losa.-

Dadas las ventajas y desventajas recién consideradas y en base a las informaciones que se tienen referentes a otros laboratorios del mismo tipo, se puede decir que, para losas de tamaño pequeño, tiene ventajas el sistema sin subterráneo, ya que el número de anclajes necesario no resulta muy grande ni se necesita una capacidad resistente a la flexión excesiva.

Si la losa es de dimensiones francamente grandes, como ocurre en nuestro caso, se necesita un número considerable de anclajes (unos 500 ó más) por lo que, como dice Amsler (7), "el costo de los pernos y sus casquillos asciende tanto, que es recomendable la construcción de una placa con subterráneo".

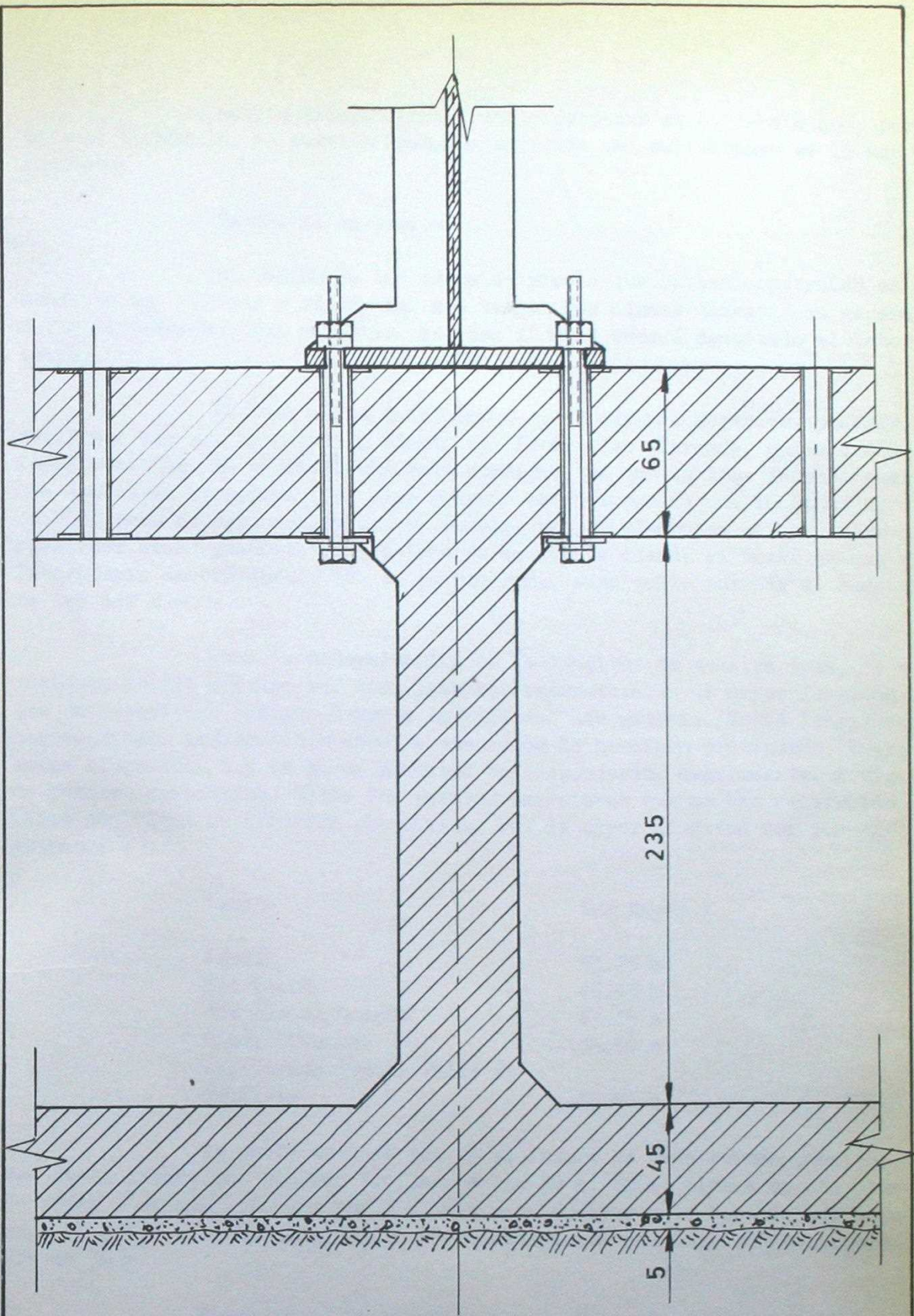
Si observamos cual ha sido la tendencia histórica en cuanto al diseño de este tipo de laboratorios, vemos que ésta va hacia la construcción de losas con subterráneo y de tamaño cada vez mayor. Así por ejemplo, entre los laboratorios de características similares al nuestro más conocidos, podemos citar los siguientes, todos con sótano bajo la losa :

Laboratorio de la Asociación de Industriales de Bélgica.
Desde 1952. Dimensiones: 13.4 x 20 m.

Laboratorio del Politécnico de Milán, Italia.
Desde 1955. Dimensiones: 20 x 20 m.

Laboratorio de la Portland Cement Association, U.S.A.
Desde 1957. Dimensiones: 17 x 37 m.

Laboratorio de l'Iraba, Francia.
Desde 1963. Dimensiones: 15.85 x 29.50 m.



LAM.2

ESC. 1:25

Corte transversal de losa con
subterráneo mostrando los
pernos de anclaje.

Las consideraciones anteriores ponen en evidencia que, para el caso particular de nuestra losa, la solución con subterráneo es la más adecuada.

Tamaño de la losa.-

El tamaño de las losas de prueba que se han construido en el mundo es muy variado y no hay dos que tengan las mismas dimensiones generales. Estas dependerán, como es obvio, del uso al cual estará destinado el laboratorio.

En base a los datos dados en el párrafo anterior, podemos decir que hay una tendencia a elegir una forma algo alargada, antes que una forma cuadrada. Es evidente que ésto conviene, ya que la losa deberá tener una dimensión apropiada como para ensayar estructuras de una longitud apreciable, pero no será necesario, en cambio, probar elementos en que ambas dimensiones sean grandes. Deberá tomarse en cuenta además el hecho de que el laboratorio deberá contar con un puente-grúa, cuyo costo aumenta al aumentar la luz del puente.

Para la determinación de la longitud de nuestra losa, se estudiaron cuales podrían ser los elementos estructurales de mayor longitud que se necesitara ensayar durante la vida del laboratorio. Estas longitudes corresponden, indiscutiblemente, a elementos de hormigón pretensado. Entre estos elementos, los de mayor longitud corresponderán, seguramente, a vigas de puentes carreteros. Entre los puentes carreteros que se han construido en Chile con vigas de hormigón pretensado, los de mayor longitud son los siguientes :

Puente :	Luz Mayor :
Cautín	53.75 m.
Río Bueno	46.43 m.
Bío Bío en Coigüe	43.15 m.
Piedra Blanca	35.50 m.
Reparación Puente Pedro de Valdivia	35.00 m.

Se puede estimar que en el futuro se construirán puentes con luces libres que pasarán fácilmente los 60 m. Si se piensa en una prueba hecha a escala 1:2, que suele usarse para ensayar este tipo de estructuras, se llega a la conclusión de que se necesitará una longitud de alrededor de 30 m.

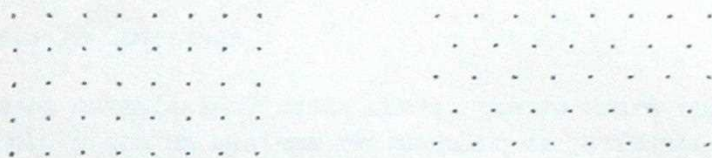
Finalmente, se acordó dar a la losa una longitud de 32 m.

En cuanto a la dimensión transversal, se fijó en 16 m.

En la determinación de estas dimensiones se tomó en cuenta el hecho de que es muy difícil predecir los tipos de ensayos que se realizarán en el laboratorio durante su vida futura, ya que estará destinado a prestar sus servicios durante muchos años y para una gran variedad de usos diferentes. Por esta razón se le debe dar una dimensión que pueda cubrir todos los imprevistos pues, una vez construido, su ampliación o modificación resultará imposible.

Ubicación de las perforaciones.-

Se han usado dos sistemas diferentes para distribuir las perforaciones en el plano de la losa : una primera disposición según la cual éstas forman cuadrados, como un tablero de ajedrez, y una segunda disposición según la cual las perforaciones forman triángulos equiláteros:



Las opiniones sobre cual sistema es más conveniente se encuentran divididas; pues se ha usado tanto uno como otro. Desde luego, la elección dependerá de la forma y uso que se dé al laboratorio. Si éste es de forma aproximadamente cuadrada y se destinara a realizar varios ensayos que ocupen poco espacio, en forma simultánea, seguramente convendrá usar un sistema triangular de distribución, el cual da mayores posibilidades para hacer ensayos en direcciones oblicuas con respecto a los bordes de la losa, con lo que se podrían aprovechar mejor los espacios vacíos disponibles. Sí, en cambio, la losa presenta una forma alargada, será preferible el uso de un sistema "tablero de ajedrez", que es más apropiado para realizar pruebas paralelas a los bordes de la losa. Esta distribución es más simple y se presta para construir un sistema de marcos para montar los dispositivos de prueba de dimensiones standard, que se puedan usar para muchas experiencias. El sistema rectangular sirve también para realizar ensayos en direcciones que no estén a 90° con respecto a los bordes.

Resumiendo, podemos decir que el sistema triangular no presenta ventajas claras en cuanto a la posibilidad de combinaciones, ni representa tampoco un ahorro en el número de anclajes para un laboratorio de forma rectangular. En nuestro caso es preferible, por lo tanto, un sistema rectangular.

Otros laboratorios que han adoptado un sistema rectangular, son los siguientes :

Laboratorio M.A.N. Universal - Prüfaulage, Alemania.
Separación entre perforaciones = 1 m.

Laboratorio de la P.C.A., en U.S.A.
Separación entre perforaciones = 3 feet = 92 cm.

Laboratorio de Ensayes de Materiales del Instituto
Técnico de la Construcción y del Cemento del C.S.I.C.,
Madrid, España.

Laboratorio de la Universidad de Lehigh, U.S.A.

Laboratorio de E.M.P.A. Dübendorf/Zürich, Suiza.

Laboratorio de l'Iraba, Francia
Separación entre perforaciones = 1.25 m.

Laboratorios que han adoptado un sistema triangular :

Asociación de Industriales de Bélgica.

Politécnico de Milán.

Adoptaremos un sistema rectangular, con una separación entre perforaciones igual a 1 m.

Solución adoptada :

Hemos establecido, hasta ahora, que se usará una losa con sótano de 32 x 16 m., y con un sistema rectangular de perforaciones.

Las principales características que debe tener esta losa son las siguientes :

- 1) Ser capaz de soportar fuertes cargas concentradas.
- 2) Tener una gran capacidad para resistir momentos de flexión.
- 3) Poseer una gran rigidez.

Ya hemos dicho que la losa contará con un sótano. Debemos, por lo tanto, aprovechar esta cualidad para dar a la estructura las características enunciadas anteriormente.

La primera y la última característica determinarán, en gran parte, el espesor de la losa superior.

Para cumplir con la segunda y la tercera característica, se dará a la estructura la forma que se puede apreciar en la Lámina 3, es decir, se pondrán en el sentido longitudinal, además de los muros laterales, tres muros longitudinales interiores, los cuales harán actuar a la estructura como si fuera un conjunto de varias vigas I o de varias vigas tipo cajón. Esta disposición dará como resultado una gran capacidad resistente y una fuerte rigidez en el sentido longitudinal.

En el sentido transversal, la rigidez resultará mucho menor. Pero no será necesaria una capacidad de carga demasiado grande en este sentido, ya que las pruebas para las cuales se necesite una gran resistencia a la flexión se harán en el sentido longitudinal. El comportamiento de la estructura en el sentido transversal será similar al de una viga Vierendeel apoyada sobre un suelo elástico. Se le dará una capacidad de carga adecuada en este sentido.

Para ensayos dinámicos en los cuales se necesite una base de gran rigidez, el dispositivo de prueba se podrá montar sobre uno de los nervios longitudinales, en donde habrá una gran masa de hormigón que contribuirá a disminuir el efecto de las vibraciones.

La solución adoptada puede verse en las figuras 3 y 4 y la determinación de las dimensiones en los capítulos siguientes.

Sobre la losa de pruebas se construirá un galpón, el cual deberá tener las siguientes características generales :

Fundaciones independientes del piso de pruebas, con el objeto de que no se transmitan las vibraciones provenientes de los ensayos dinámicos al resto del edificio.

Un puente-grúa con capacidad de carga entre 10 y 20 Ton.

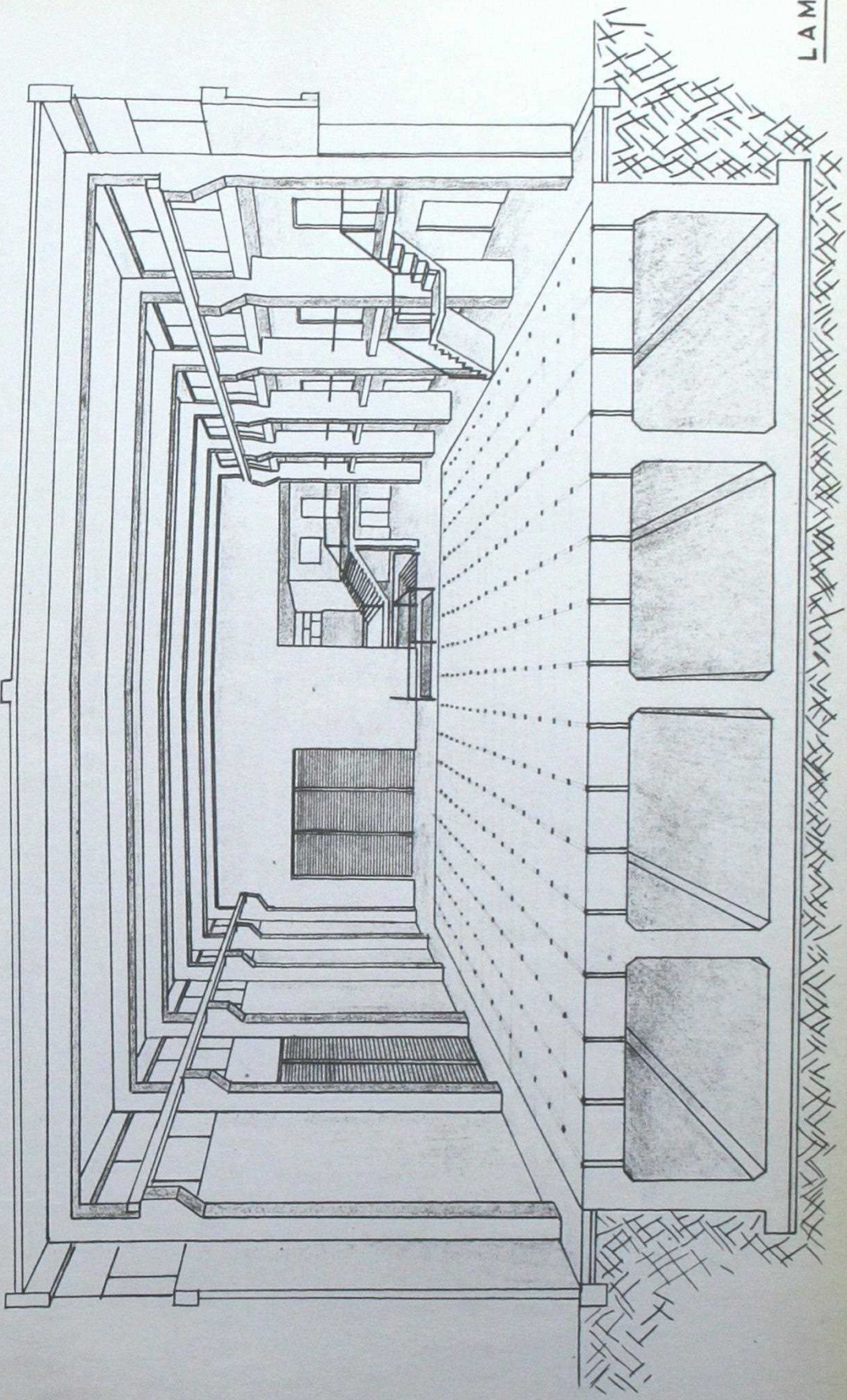
Altura libre de alrededor de 8 m.

Amplias puertas de acceso.

Buena iluminación, aislación térmica y ventilación.

Además de este galpón, el laboratorio deberá contar con una edificación adjunta en la cual se encuentren ubicadas las oficinas del personal, las salas para guardar el instrumental, el archivo, el taller de reparaciones, la sala de clases, los servicios higiénicos, etc.

Una posible distribución de los diferentes elementos del laboratorio es la que se propone en las figuras siguientes.



L.A.M. 3

CORTE Y PERSPECTIVA INTERIOR

INSTRUMENTAL Y EQUIPO DE CARGAS.-

El instrumental y equipo de cargas con que contará inicialmente el laboratorio, ya ha sido adquirido de Alfred J. Amsler y Co. Schaffhause, Switzerland, y consiste en lo siguiente :

- 1) Gatos hidráulicos : una gato de cada uno de los siguientes rangos : 2/1, 5/2.5, 10/5, 20/10 y dos de 50/25 Tons.
- 2) Un pulsador tipo P 960.
- 3) Un dinamómetro de péndulo tipo PM 103.
- 4) Un acumulador tipo A 274.
- 5) Un distribuidor.
- 6) Una bomba de derrame.
- 7) Dos válvulas de medición.
- 8) Tubos de acero articulados, etc.

Este equipo se puede apreciar en la fotografía adjunta.

Según su uso, se puede agrupar en cuatro tipos de elementos:

- a) Elementos para aplicar las cargas : gatos hidráulicos. Todos los gatos tienen un desplazamiento del pistón máximo de 125 mm.

Se han diseñado para las siguientes cargas estáticas máximas : 2, 5, 10, 20, 50 y 100 Ton. y para cargas dinámicas de la mitad de éstas, vale decir : 1, 2.5, 5, 10, 25 y 50 Ton.

- b) Unidades para producir y medir las cargas.

Para cargas estáticas : unidad de control con dinamómetro pendular. Este dinamómetro produce la presión de aceite necesaria mediante una bomba y mide la carga aplicada por el gato mediante el control del movimiento del péndulo.

Para cargas dinámicas : si se trata de pruebas con esfuerzos fluctuantes, se usa un "pulsador". El pulsador tipo P 960 de Amsler produce una presión fluctuante sinusoidal en el sistema de carga estático. Trabaja a dos velocidades fijas : 250 y 500 c.p.m.. También puede ser equipado para trabajar a otras velocidades fijas o bien con un motor para velocidades ajustables entre 120 y 500 c.p.m. ó entre 200 y 800 c.p.m.

Si se necesita realizar una prueba de esfuerzos alternados, es necesario el uso de un "acumulador". A este acumulador se le conecta otro gato hidráulico que actúa con una fuerza constante en sentido opuesto al del gato conectado al pulsador.

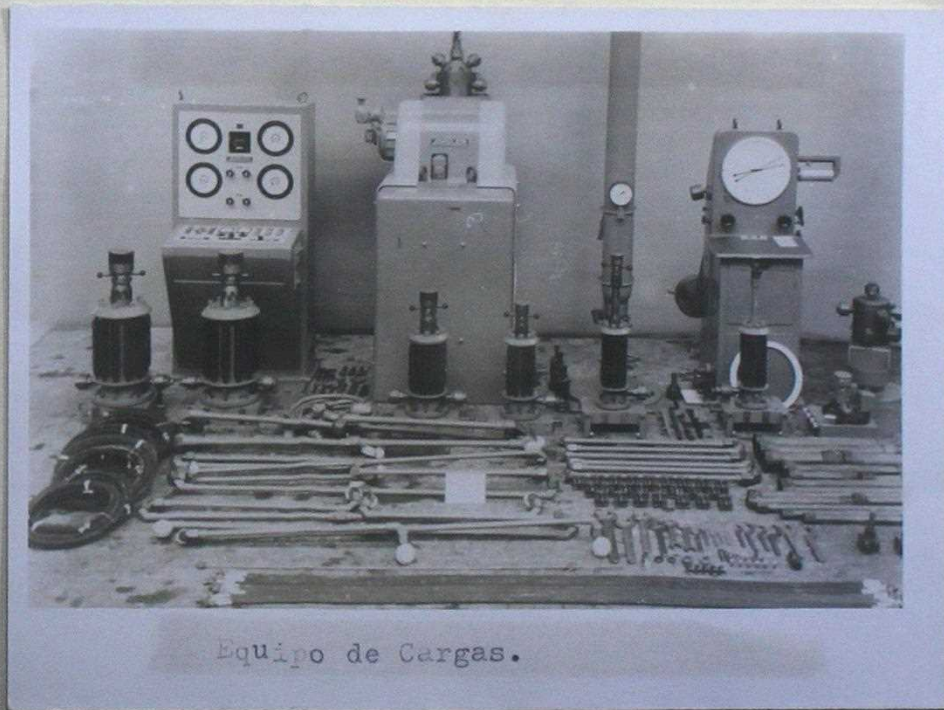
c) Elementos de conexión.-

Consisten en los tubos de acero que conducen el aceite a los gatos hidráulicos y en un distribuidor, cuando se deben conectar varios gatos simultáneamente.

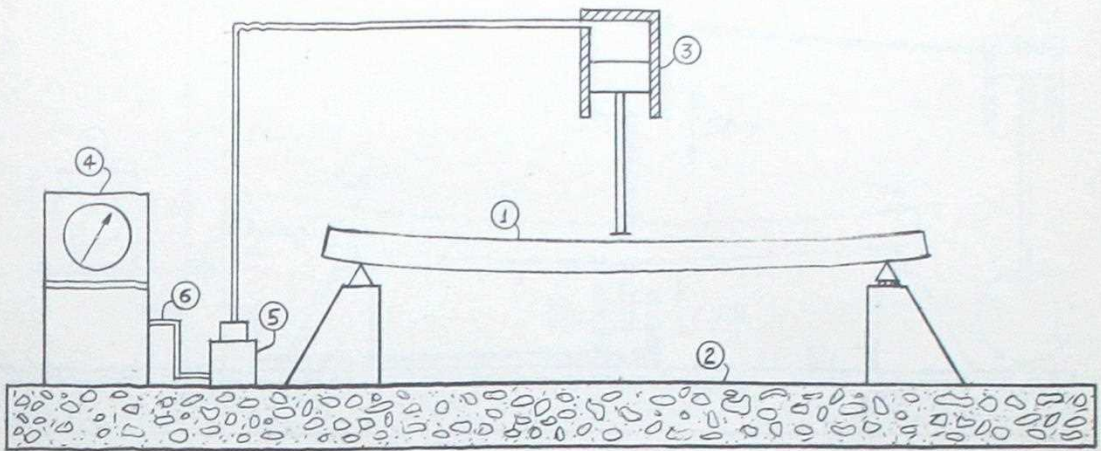
d) Accesorios.

Bomba para el aceite de derrame.
Válvulas de medición.
Válvulas de inyección.

Las formas en que deben montarse los instrumentos para los distintos tipos de pruebas son las que se indican a continuación.



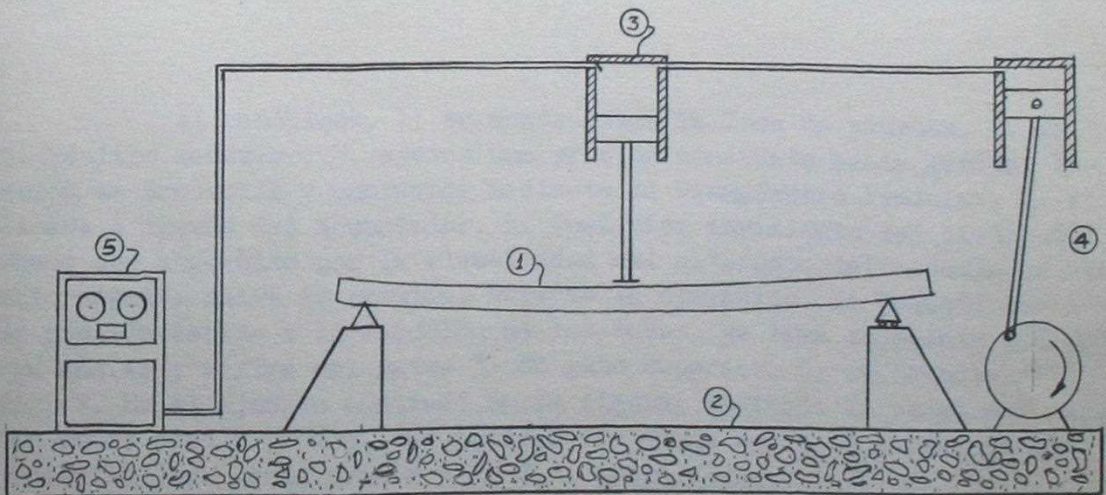
a) Para pruebas estáticas.-



Se necesitan una Unidad de Control (Dinamómetro Pendular) y los gatos hidráulicos con sus respectivos elementos de unión. El espécimen, 1, se monta sobre la losa de pruebas, 2. La Unidad de Control, 4, queda conectada al Distribuidor, 5, por medio del tubo de unión, 6. Los Gatos, 3, están conectados mediante tubos articulados al distribuidor, 5. En general, se cuenta además con una bomba para el aceite de derrame de los gatos, que lo envía a presión a la Unidad de Control.

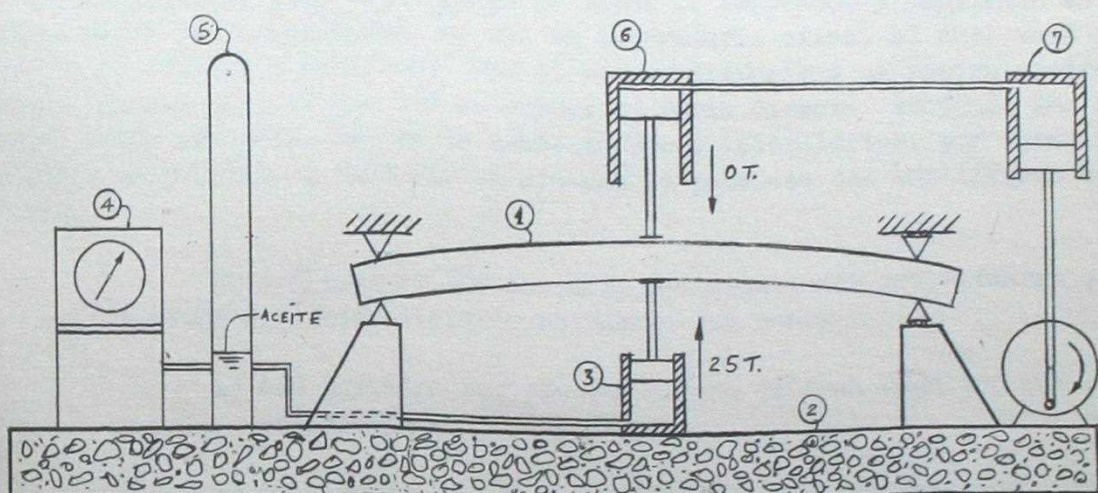
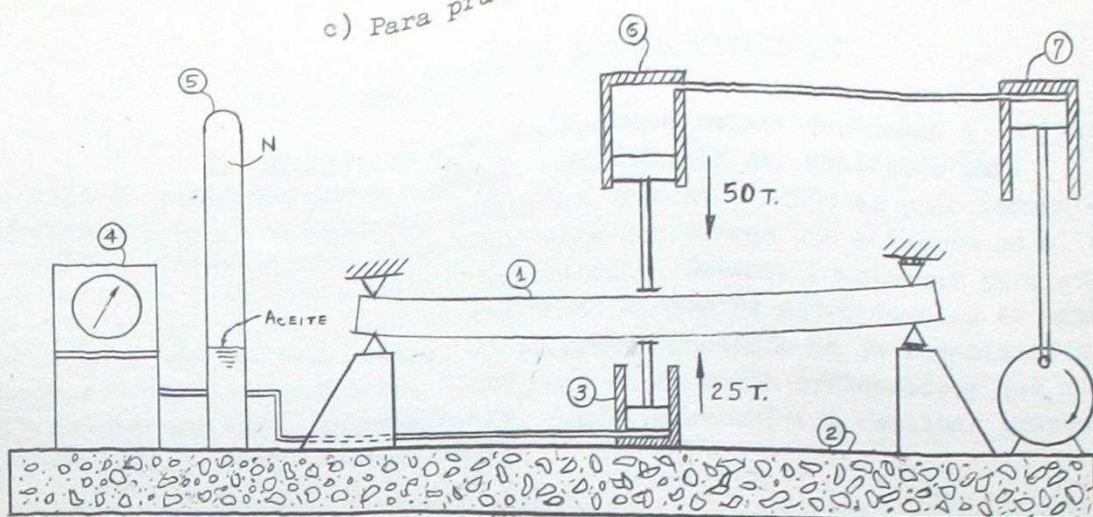
b) Para pruebas con esfuerzos fluctuantes.-

Se debe disponer de un Pulsador y un Banco de Control



En forma similar al caso anterior, el espécimen se monta sobre la losa de pruebas. El Pulsador, 4, posee una cabeza cilíndrica diseñada como un distribuidor, desde la cual los tubos articulados conducen el aceite a los gatos, 3. Uno de los gatos posee una válvula de medición mediante la cual un tubo flexible de alta presión conduce a los instrumentos de medición del Banco de Control (5).

c) Para pruebas con esfuerzos alternados.-



El espécimen, 1, se monta sobre la losa de pruebas, 2. Un gato hidráulico inferior, 3, ejerce una presión constante hacia arriba. Esta presión es producida y mantenida mediante el Dinamómetro Pendular, 4, y es aplicada a través del Acumulador, 5. Cualquier movimiento del pistón del gato puede ser absorbido por la elasticidad del nitrógeno del acumulador sin un cambio significativo de presión. Durante la operación, la pequeña variación de presión debido a la fricción de los tubos, se toma en cuenta midiendo la carga máxima y mínima del gato, 3. El gato superior, 6, se conecta al Pulsador, 7. En el ejemplo mostrado en la figura, variando la carga del gato superior entre cero y 50 Ton., se obtiene una carga sobre el espécimen que varía entre 25 Ton. hacia arriba y 25 Ton. hacia abajo.

3.- DETERMINACION DE LAS SOLICITACIONES.-

El laboratorio que estudiaremos estará destinado a ensayar todo tipo de elementos estructurales, pudiendo aún ser utilizado para experimentar sobre estructuras completas. Por esta razón es prácticamente imposible prever la ubicación y monto de las cargas que actuarán en el futuro sobre la losa de pruebas del laboratorio. Debemos considerar para nuestro estudio que en el futuro se emplearán elementos estructurales de dimensiones cada vez mayores, debido al progreso creciente de la ingeniería en nuevos métodos constructivos, tales como el hormigón pretensado, y que sobre estos elementos será, especialmente, donde se necesitará realizar pruebas para conocer su comportamiento real.

El criterio a adoptar será de que las solicitaciones no quedarán limitadas por el monto de las cargas que puedan aplicarse mediante el equipo disponible, pues este equipo se puede ir renovando y ampliando en el futuro según las necesidades, no así el laboratorio mismo, el cual será imposible de ampliar o modificar. Con el equipo disponible se pueden producir, además, cargas mayores que las obtenidas en forma directa, montando los gatos en forma adecuada. Se los ha usado en otros laboratorios, por ejemplo, montados en paralelo o mediante un sistema de palancas que amplifiquen su efecto.

El análisis de las posibles solicitaciones que actuarán sobre la losa de pruebas se hará teniendo en cuenta dos cosas :

- a) Los posibles ensayos con cargas de gran magnitud que se realizarán en el laboratorio.
- b) Las cargas de diseño usadas en otros laboratorios.

3.1.- Posibles ensayos con cargas de gran magnitud.-

Entre los innumerables elementos estructurales que pueden ensayarse en el futuro, elegiremos aquellos que representen mayores esfuerzos para la losa durante su experimentación. Con este fin hemos seleccionado los siguientes elementos :

- a) Aquellos que representan para la losa un esfuerzo de flexión máximo :
Vigas de puentes ferroviarios, de soportes de puente-grúas,
de puentes carreteros y de fundaciones de edificios.
Muros sísmicos de edificios.
- b) Aquellos que representan para la losa una carga concentrada máxima :
Pilares.
Apoyos de vigas.
Muros sísmicos.
- c) Aquellos que representan para la losa una carga rasante máxima :
Muros sísmicos de edificios.

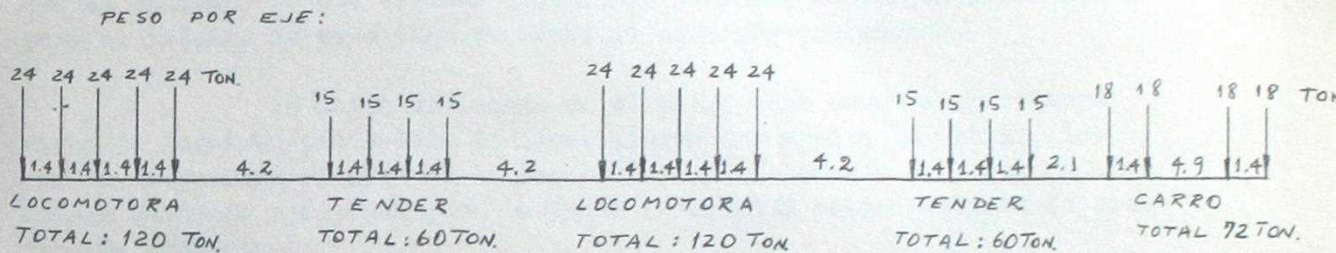
3.1.1.- Esfuerzo de flexión máximo.-

a) Puentes ferroviarios.-

En Chile, el cálculo de puentes ferroviarios se basa en las "Normas Técnicas para el cálculo de Puentes Metálicos" (8).

El "tren de cargas tipo" más pesado es el llamado "C", el cual corresponde al tren tipo "A" de 1907 aumentado en un 50%.

La distribución de las cargas de este tren es la siguiente :



Coefficiente de dinamicidad : El coeficiente de dinamicidad es máximo cuando los rieles van apoyados directamente, sin durmientes, y vale :

$$\varphi = 1.20 + \frac{17}{1 + 28} \quad \text{siendo } \underline{L} \text{ la luz libre del puente.}$$

Luz máxima de las vigas : Actualmente, las vigas de alma llena se confeccionan casi exclusivamente de acero. El hormigón pretensado no se ha usado aún en Chile para puentes ferroviarios, pero se espera que sea una buena solución en el futuro.

Las vigas de acero de alma llena tienen una luz límite de aproximadamente 20 m., ya que, en general, el alma se limita a 2 m. ó menos de altura y la razón entre la luz y el alma es 10 como máximo. Para luces mayores se usan vigas reticuladas. Pero con hormigón pretensado es de esperar que se usen luces mayores que 20 m. Como ejemplo del empleo de vigas de acero de alma llena, tenemos el puente San Francisco, en el kilómetro 60 de la línea Alameda-Talca, el cual posee vigas de 19.46 m. de longitud, siendo el más largo de este tipo en esta línea, que es la línea más importante del país. En cambio, la longitud máxima para puentes reticulados la tenemos en los de Malleco y Quillén, ambos de 70 m. de longitud.

Consideraremos como solicitud más desfavorable la de un tren de carga tipo "C" actuando sobre una viga de 30 m. de longitud, que es aproximadamente la luz máxima que se podrá probar en nuestro laboratorio. El momento máximo para un riel resulta igual a :

$$M_{\text{máx.}} = 500 \text{ Ton.m.}$$

El coeficiente de dinamicidad vale :

$$\varphi = 1.20 + \frac{17}{30 + 28} = 1.49$$

$$\text{LUEGO: } M_{\text{máx.}} = 1.49 \times 500 = 745 \text{ Ton.m}$$

Como nuestro laboratorio deberá ser capaz de probar la viga hasta la ruptura, su capacidad de carga debe ser aproximadamente el doble que el valor de este momento máximo. Es decir, debe resistir aproximadamente 1490 T.m. en el sentido longitudinal para un ensayo de este tipo. Claro está que una parte de este esfuerzo será absorbido por el peso propio de la losa y las reacciones del terreno, como se verá en el capítulo 5.-

b) Puentes carreteros.-

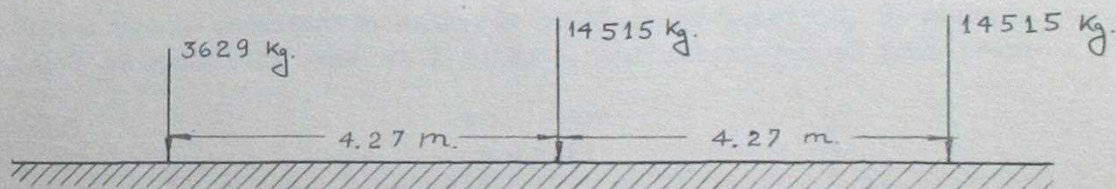
Actualmente se está empleando cada vez más profusamente el hormigón pretensado en la construcción de vigas de puentes carreteros, aún cuando en Chile existe poca experiencia al respecto. Es de suponer entonces que el laboratorio que estamos estudiando será una herramienta utilísima para el estudio de este tipo de obras de hormigón pretensado.

Se están empleando en el país, para puentes carreteros, vigas de hormigón pretensado de luces libres cercanas a los 60 m., las cuales se podrían ensayar en el laboratorio a una escala 1:2, que es una escala bastante apropiada para obtener resultados satisfactorios de este tipo de elementos.

Algunos de los puentes de mayor longitud con vigas de hormigón pretensado que se han construido en el país son los siguientes :

Puente	Luz Mayor
Cautín	53.75 m.
Río Bueno	46.43 m.
Bío Bío en Coigüe	43.15 m.
Piedra Blanca	35.50 m.
Reparación Pte. Pedro de Valdivia	35.00 m.
Chamiza	33.50 m.
Pilmaiquén	33.33 m.

La carga de mayor magnitud, según "The American Association of State Highway Officials" es la del camión tipo H20-S-16-44. Este camión presenta las siguientes características de carga :



Además establece que :

"Para considerar el paso por los puentes de cargas pesadas no habituales , se debe suponer en una vía cualquiera un camión tipo H o H-S aumentado en 100% y sin carga concurrente de las otras vías. Los esfuerzos combinados de carga móvil, carga permanente y efecto dinámico que resultan con tal sobrecarga, no deben ser superiores al 150% de los esfuerzos permisibles".

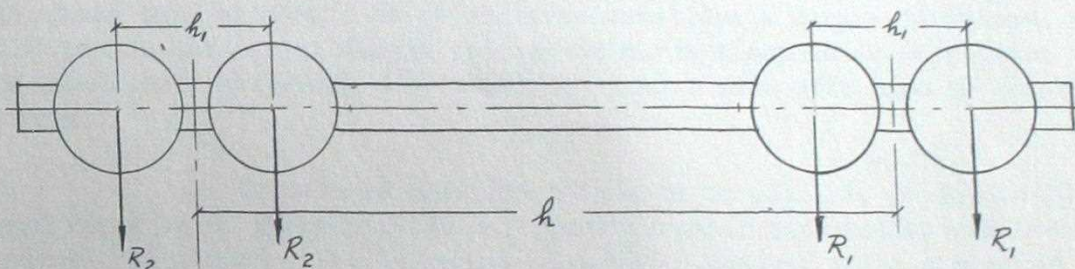
El momento máximo, para un camión tipo H20-S 16-44 en un tramo simplemente apoyado de 30 m. de luz, resulta :

$$M_{\text{máx.}} = 207 \text{ T.m.}$$

Si consideramos un 100% más y el peso propio del puente, resulta un momento máximo de aproximadamente unas 500 T.m. . Si suponemos que el puente posee dos vigas, llegamos a la conclusión de que el momento máximo por viga es de alrededor de 250 T.m., es decir, muy inferior al valor encontrado para una viga de un puente ferroviario.

c) Vigas Portantes de grúas puente.-

Según el Manual de Ingeniería "Stahlbau" (9), los esfuerzos máximos sobre vigas portantes de grúas puente corresponden a una de 250 Ton. de capacidad y 38.35 m. de luz.



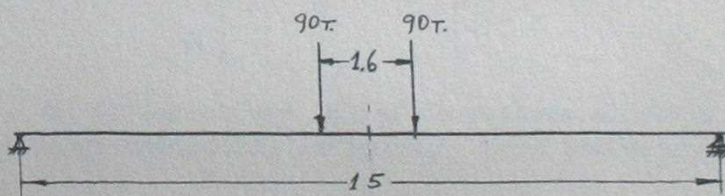
$$2 R_1 = 180 \text{ Ton.}$$

$$2 R_2 = 168 \text{ Ton.}$$

$$h = 8.8 \text{ m.}$$

$$h_1 = 1.6 \text{ m.}$$

Supongamos un caso extremo en que se construyen unas vigas portantes de la grúa puente anterior de 15 m. de longitud. El momento máximo que se producirá será el siguiente, sin considerar el peso propio :



$$M_{\text{máx.}} = 7.5 \times 90 - 90 \times 0.8 = 603 \text{ T.m.}$$

Suponiendo que el coeficiente de seguridad de la viga sea 2, el momento de ruptura valdría :

$$M_{\text{rup.}} = 2 \times 603 = 1200 \text{ Ton.m.}$$

La losa del laboratorio deberá ser capaz de soportar estos esfuerzos en el sentido longitudinal. Véase el capítulo 5.-

d) Vigas de fundaciones de edificios.-

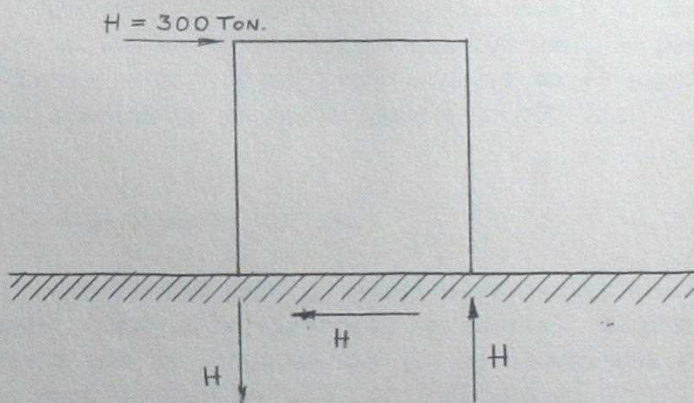
Los esfuerzos producidos por muros sísmicos de edificios sobre sus elementos de fundación pueden alcanzar valores muy altos. Así por ejemplo, un muro sísmico correspondiente a un edificio de 8 a 10 pisos de altura puede descargar sobre su base una carga vertical cercana a las 500 Ton. y producir un momento flector debido a fuerzas horizontales de origen sísmico de alrededor de 5000 Ton.m (10). Es imposible pretender entonces realizar un ensayo de tales elementos a una escala 1:1. Si se deseara efectuar una prueba de un elemento de este tipo, se deberá estudiar la escala adecuada de manera que las fuerzas necesarias queden dentro de la capacidad resistente que tendrá el laboratorio.

e) Muros sísmicos de edificios.-

Debido a que el equipo con que se dispondrá es especialmente apropiado para el ensayo de estructuras sometidas a cargas dinámicas, es lógico pensar que se realizarán pruebas de muros sísmicos de edificios, ya sean de albañilería reforzada o de hormigón armado, ante este tipo de sollicitaciones.

Un muro de hormigón armado de un edificio de más de 10 pisos, como vimos en el párrafo anterior, puede alcanzar capacidades resistentes enormes. Es absurdo, por lo tanto, pretender ensayar tales elementos a escala 1:1, sobre todo si se tiene en cuenta que una información similar se puede obtener realizando un ensayo a escala reducida.

Vamos a suponer que se desea ensayar un muro de 3 x 3 m. y de 0.20 m. de espesor, hecho con hormigón tipo D.



Si estimamos una fatiga de ruptura al corte de 50 Kg/cm^2 , se necesitará una carga horizontal de 300 Ton. para producir el colapso.

Esta fuerza produce un momento volcante de 900 Ton.m y una carga de tracción de 300 Ton.

3.1.2.- Carga concentrada máxima.-

a) Pilares.-

Las columnas son capaces de resistir cargas axiales muy grandes. Así por ejemplo, una columna zunchada de 50 cm. de diámetro es capaz de resistir más de 400 Ton. antes de romperse.

Para nuestro diseño, supondremos que nunca se va a probar una columna que resista más de 500 Ton. antes del colapso.

b) Apoyo de vigas.

En el caso del ensayo de una viga de un puente ferroviario de 30 metros de longitud, la reacción del apoyo vale :

$$R_{\text{máx.}} = 91 \text{ Ton.}$$

Considerando el coeficiente de dinamicidad resulta :

$$R = 1.49 \times 91 = 136 \text{ Ton.}$$

Y considerando también que la ruptura se producirá para una carga aproximadamente igual al doble, obtenemos :

$$R = 372 \text{ Ton.}$$

c) Ensayo de muros sísmicos de edificios.-

Como ya vimos en 3.1.1., para este tipo de ensayos se necesitan cargas horizontales del orden de las 300 Ton. Se puede pensar entonces que se necesitarán cargas de magnitud similar en el sentido vertical, es decir, cargas concentradas de aproximadamente 300 Ton.

3.1.3.- Carga rasante máxima.-

Para cierto tipo de ensayos se necesitará una resistencia bastante grande a cargas de dirección horizontal, paralelas al plano de la losa. Supondremos que la carga máxima que se necesitará en este sentido corresponderá al ensayo del "muro sísmico indicado en 3.1.1. e), es decir, 300 Ton.

3.2.- Cargas de diseño usadas en otros Laboratorios.-

3.2.1.- Laboratorio de la Asociación de Industriales de Bélgica.-

En el diseño de la losa de este laboratorio se usaron las siguientes cargas principales de diseño (1) :

200 Ton. de carga concentrada en un punto de la zona central de la losa y 300 Ton si el punto está cercano a los bordes.

Estos valores pueden ser excedidos substancialmente si las fuerzas verticales se encuentran distribuidas en un área grande.

Los esfuerzos horizontales localizados se limitaron a 200 Ton., pero mediante dispositivos apropiados de anclaje se pueden aumentar considerablemente.

3.2.2.- Laboratorio de la Universidad de Lehigh, Bethlehem. (2)

La "cama de pruebas" de este laboratorio es del tipo sin subterráneo, y fué diseñada para resistir las siguientes cargas :

Un momento flector en el sentido longitudinal de 1240 Ton.m.

Un esfuerzo de corte vertical máximo de 270 Ton.

Una fuerza horizontal máxima de 450 Ton.

Una resistencia torsional de 550 Ton.m.

Los diseñadores le dieron especial importancia a la rigidez, considerando que el laboratorio estaría destinado a ensayar elementos sometidos a cargas dinámicas.

3.2.3.- Laboratorio de la Portland Cement Association.-

Este laboratorio se diseñó para soportar las siguientes cargas de trabajo (4) :

91 Ton. concentradas hacia arriba o hacia abajo, en una grilla de 3' x 3'.

410 Ton. concentradas, hacia arriba o hacia abajo en una grilla de 9 perforaciones adyacentes.

2080 Ton.m. como momento flectante en sentido longitudinal por cada elemento de sección I.

454 Ton. de esfuerzo de corte en el alma de cada viga de sección I.

3.3.- Cargas de diseño adoptadas.-

De acuerdo con los párrafos anteriores y de acuerdo también con los resultados de los análisis de los capítulos siguientes, se establecieron las siguientes cargas de diseño :

Momento flector de 1000 T.m. por cada viga longitudinal de sección I.

Cargas concentradas en la losa superior de alrededor de 300 Ton., dependiendo dicha resistencia de la ubicación de las cargas.

Esfuerzos de corte máximos de 240 Ton. en cada nervio.

Capacidad de carga transversal de 5 T/m. para una franja de 1 m. de ancho.

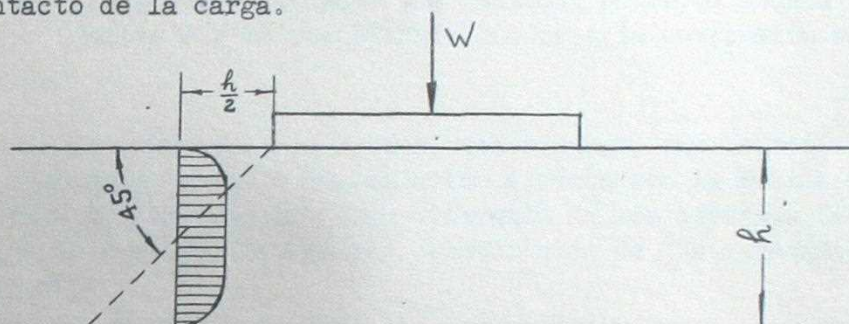
4.- RESISTENCIA DE LA LOSA SUPERIOR ANTE CARGAS CONCENTRADAS.-

4.1.- Esfuerzo de corte debido al efecto punzante.-

4.1.1.- Bases de cálculo de la resistencia al corte.-

El método generalmente usado para determinar la resistencia al corte de losas sometidas a fuertes cargas concentradas, y que ha sido adoptado por la mayoría de las normas de los diferentes países, está basado en el método de Forssell and Holmberg (11).

Se supone que la falla de ruptura se produce según un plano a 45° con respecto a la horizontal y que alcanza la superficie superior de la losa en el borde de la carga concentrada. Para el cálculo, este plano se reemplaza por un plano vertical ubicado a una distancia $h/2$ del borde de la zona de contacto de la carga.



Resultados experimentales obtenidos por otros autores (12) dan ángulos inferiores : entre 20° y 40° para el hormigón armado.

La armadura principal y los estribos aumentan algo la resistencia y el esfuerzo de corte punzante debido a cargas concentradas. Así por ejemplo, ensayos realizados por G.D. Base (13) establecieron una resistencia al corte $\tau = 220 \text{ lb/in}^2$ para una losa con un porcentaje de 0.54% de acero, y una fatiga al corte $\tau = 300 \text{ lb/in}^2$ para un porcentaje de 2.46% de acero. Sin embargo, según D.J.Lee (14), si la armadura no posee estribos este aumento es mínimo y, generalmente, la resistencia al corte punzante depende casi exclusivamente de la resistencia del hormigón y del espesor de la losa.

Según E. Hognestad (15) la resistencia a cargas punzantes depende de la resistencia a flexión de la losa. A partir de estudios hechos en base a ensayos realizados por F.E. Richart, Hognestad obtuvo la siguiente expresión :

$$t_r = \frac{R}{20} \left(\frac{1}{2} + \frac{P_f}{P_p} \right) + 10 \quad (\text{en unidades métricas})$$

Donde :

t_r es la fatiga de cizalle producida por la carga de ruptura expresada en Kg/cm^2

R es la resistencia cúbica a la compresión del hormigón expresada en Kg/cm^2 .

P_p es la carga aplicada expresada en Kg.



P_f es la carga que produciría la ruptura por flexión consecutiva al alargamiento excesivo de las armaduras, si la ruptura por carga punzante no se produjera antes. Se debe evaluar sólo considerando las armaduras inferiores de la placa, suponiéndola articulada en su contorno.

4.1.2.- Determinación de la fatiga de ruptura al corte del hormigón.-

Debido a la dificultad que presenta determinar en forma directa la resistencia al corte del hormigón, diversos autores han tratado de relacionar dicha resistencia con la resistencia cúbica a la compresión. Morice (16) sugiere, para el caso que estamos considerando, que la fatiga máxima de corte puede ser substituída por la resistencia a tracción por flexión. A su vez, se puede establecer una relación entre el módulo resistente a tracción por flexión R y la resistencia cúbica a la compresión medida a los 28 días, f_{cu} .

Se debe tener en cuenta, sin embargo, que la resistencia a tracción del hormigón no tiene una relación directa con la resistencia a la compresión, sino que depende en forma diferente de los diversos factores (17) : el tipo de cemento, la forma y constitución de los agregados inertes, la razón A/C, etc.

Féret (18) determinó, en base a experiencias, la siguiente relación entre R y f_{cu} :

$R = a \sqrt{f_{cu} - b}$, siendo a y b coeficientes experimentales.
En general, se adopta

$$R = 8.5 \sqrt{f_{cu}} \quad (14)$$

Las recomendaciones norteamericanas para fatigas de tracción en hormigón pretensado están basadas en la relación :

$R = 7.5 \sqrt{f_c'}$, en la cual, si tomamos $f_c' = 0.83 f_{cu}$,
obtenemos :

$$R = 6.8 \sqrt{f_{cu}}$$

Por otro lado, los requerimientos para el cálculo de estanques de agua establecidos por el B.S. Code CP 2007 (1960) para valores menores que 5000 psi dan la relación :

$$R = 2 \left(\frac{f_{cu}}{40} + 100 \right)$$

Según A. Hummel (19) existe la siguiente relación entre R y f_{cu} :

$$R = f_{cu}^{0.66}$$

Según Loesser (20) la resistencia a tracción por flexión está comprendida entre 0.20 y 0.25 de la resistencia a la compresión cúbica.

Para un hormigón tipo D (resistencia cúbica a la compresión = 225 Kg/cm²) obtenemos los siguientes valores para la resistencia a tracción por flexión según las expresiones dadas por los diferentes autores :

a) Según Féret :

$$R = 8.5 \sqrt{f_{cu}} = 480 \text{ psi} = 33.9 \text{ Kg/cm}^2$$

b) Según recomendaciones norteamericanas :

$$R = 6.8 \sqrt{f_{cu}} = 385 \text{ psi} = 27 \text{ Kg/cm}^2$$

c) Según el B.S. Code CP 2007 :

$$R = 2 \left(\frac{f_{cu}}{40} + 100 \right) = 360 \text{ psi}$$

$$R = 25.4 \text{ Kg/cm}^2$$

d) Según A. Hummel :

$$R = f_{cu}^{0.66} = 36 \text{ Kg/cm}^2$$

e) Según Loesser :

$$R = 45 \div 56 \text{ Kg/cm}^2$$

f) Según Hognestad :

Si suponemos un diseño equilibrado, tendremos que $\frac{P_f}{P_p} = 1$

Luego

$$t_r = \frac{225}{20} (0.5 + 1) + 10$$

$$t_r = 27 \text{ Kg/cm}^2$$

Considerando, como dice A. Guerrin y lo demuestran las experiencias realizadas por Thomas y Short, que un ángulo de ruptura de 45° es muy pesimista y tomando en cuenta también el efecto de las armaduras, podemos decir que una fatiga de ruptura al corte de 30 Kg/cm² es adecuada para nuestros cálculos.

4.1.3.- Determinación del espesor de la losa superior.--

Daremos a la losa superior un espesor tal que sea capaz de resistir una carga de 300 Ton. con un coeficiente de seguridad 2.5 y sobre un área tal que la fatiga de contacto no sobrepase los 50 Kg/cm². Este espesor de losa será provisorio y podrá confirmarse o ser alterado cuando se analicen los demás tipos de solicitaciones que deberá soportar la losa de pruebas en su conjunto.

Suponiendo que la carga está aplicada sobre un área cuadrada, el lado del cuadrado medirá :

$$a = \sqrt{\frac{300.000}{50}} = 77.2 \text{ cm.}$$

La expresión de Forssell y Holmberg para determinar la carga de ruptura vale :

$$W = \frac{2}{3} h \cdot s \cdot R$$

Donde :

W = carga total
s = perímetro
h = espesor de la losa.

Substituyendo nuestro valores, tenemos :

$$2.5 \times 300.000 = \frac{2}{3} \times h \times 4 (77.2 + h) \times 30$$

De donde se obtiene :

$$h = 65 \text{ cm.}$$

La losa superior podrá soportar cargas mayores aún sin haber peligro de falla por cizallamiento, si la carga se reparte en un área mayor.

Es interesante destacar que según ACI 318-63 (21), resulta un espesor de losa de 73 cm. para las mismas condiciones anteriores, sin considerar el efecto de las armaduras. Esta altura es demasiado pesimista, ya que un coeficiente de seguridad 2.5 es suficiente, considerando además que el factor real de seguridad es mayor, ya que existe la influencia de las armaduras. Existiendo armadura al corte, esta norma aceptaría un espesor de hasta 55 cm. .

4.2.- Momento flectante analizado según el método de la línea de fluencia de Johansen.-

4.2.1.- Antecedentes generales relativos al método de la línea de fluencia.-

El método de la línea de fluencia para el cálculo de losas es aceptado actualmente por la normas de algunos países, tales como Dinamarca, Rusia e Inglaterra y muchos otros países están pendientes de los progresos que se realizan en el campo de las teorías del diseño al límite y del cálculo a la ruptura y realizan estudios para ver las conveniencias y los inconvenientes que presentan tales métodos.

La investigación en este campo ha sido abundante, aunque pocas publicaciones han sido traducidas al español. Muchas de estas publicaciones se encuentran en danés o en ruso. Pero últimamente la mayoría de estos trabajos han sido traducidos al inglés y se han realizado importantes publicaciones en este campo en Inglaterra y en E.E.U.U.

El análisis según el método de la línea de fluencia ha sido rigurosamente comprobado en forma experimental. Calificados especialistas en la materia están de acuerdo en que los valores teóricos calculados según el método de Johansen dan resultados conservadores con respecto a los obtenidos en forma experimental. Así por ejemplo, podemos citar las siguientes opiniones :

E. Hognestad (22) "... la carga máxima calculada subestima los resultados reales de las pruebas, siendo solamente el 80 ó 90% de su verdadera capacidad" (comentando los resultados de ensayos realizados en Europa).

P.M. Ferguson (23) "...; sin embargo, los ingenieros pueden usar con confianza el método de la línea de fluencia; pues este les da un valor conservador de la resistencia al momento".

R.H. Wood (24) "... los efectos de la acción de membrana cubren cualquier deficiencia existente en el criterio de fluencia supuesto".

En cuanto a experiencias realizadas en este campo, son numerosas y es conveniente citar algunas de las más importantes :

Los ensayos más completos han sido los realizados por la "Deutscher Ausschuss für Eisenbeton", en Stuttgart, bajo la dirección de Bach y Graf y en Dresden, bajo la dirección de Gehler (25).

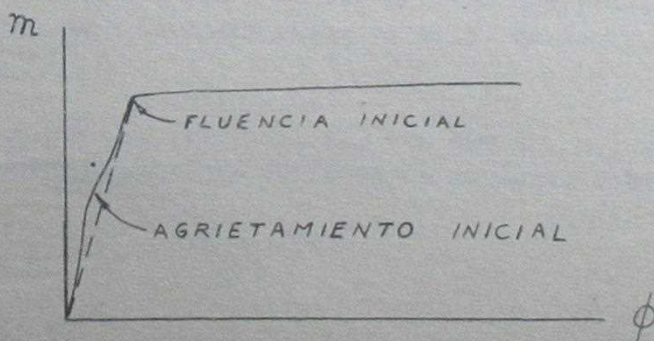
Se han realizado también muchas pruebas sobre la capacidad última de carga de losas en el Instituto Real de Tecnología de Estocolmo (26), en la Building Research Station, en Walford (27) (Baker, Thomas, Simms), en la "Cement and Concrete Association" en Wexham Spring, Inglaterra (28) (Morice, Reynolds) y en la Universidad de Illinois (29) (Siess and Viest).

4.2.2.- Hipótesis.-

El método de la línea de fluencia idealiza el fenómeno real del colapso plástico de la losa y funda su desarrollo en las siguientes hipótesis :

- a) El hormigón armado se comporta como un material plástico cuando alcanza el punto de fluencia.

Esta hipótesis no es exacta en la práctica, pero en muchos casos se aproxima bastante a la realidad. Así por ejemplo, una relación típica entre el momento flector m y el ángulo de giro ϕ es la siguiente, para una losa moderadamente armada :



Esta relación es aceptable y se debe a que, en general, las losas poseen un bajo porcentaje de acero, por lo que se produce una gran fluencia de éste antes que ocurra la falla por compresión del hormigón.

- b) Las deflexiones elásticas son despreciables con respecto a las deformaciones plásticas, cualquiera que sea la forma de ruptura.
- c) Las deflexiones no cambian la geometría del sistema.
- d) Las secciones contiguas en que queda dividida la losa giran en torno a líneas de fluencia rectas.

4.2.3.- El método del trabajo virtual y la representación vectorial.-

Uno de los métodos para determinar la carga crítica de la losa según la presente teoría, consiste en establecer las ecuaciones de equilibrio estático de cada segmento resultante de la ruptura según las líneas de fluencia. La resolución de estas ecuaciones puede resultar tediosa. Pero Johansen demostró que dichas ecuaciones de equilibrio pueden simplificarse usando el principio de los trabajos virtuales. El método consiste, en esencia, en lo siguiente :

- a) Se introducen ciertos parámetros, supuestos conocidos, que determinan la posición de las líneas de fluencia.
- b) Se establece un movimiento virtual en un punto de la losa, con lo cual quedan determinados los desplazamientos virtuales de todos los demás puntos.
- c) Se establece una ecuación de energía, igualando la energía entregada al sistema por las fuerzas externas con la energía producida por las deformaciones angulares, es decir :

$$\iint \omega \delta \, dx \, dy = \sum M \phi$$

- Donde : ω es la densidad de carga
 δ es el desplazamiento virtual
 x e y son las coordenadas que definen el punto.
 M es el momento de fluencia de la losa en torno a la línea respectiva.
 ϕ es el ángulo de giro de los dos segmentos adyacentes a la línea.

- d) Finalmente, los parámetros que ubican las líneas de fractura se determinan estableciendo la condición de que la forma correcta de ruptura debe ser aquella que produzca el máximo momento para la misma carga externa. Es decir, que si se tiene :

$m = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, en que x_1, x_2, \dots, x_n son los parámetros que fijan la forma de ruptura. Debe tenerse que :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_m} = 0$$

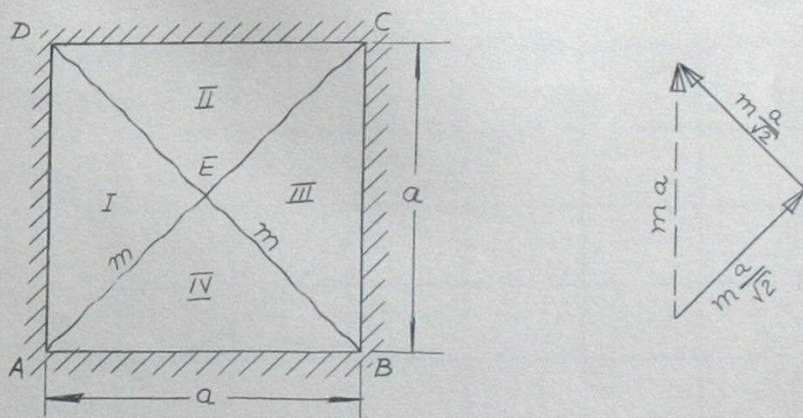
O bien, si suponemos constante \underline{m} , la red de líneas de fluencia correcta es aquella que da un valor menor para la carga externa : $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es decir, aquella en la cual :

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial P}{\partial x_n} = 0$$

Representación vectorial :

En la dirección de cada línea de fluencia actuará un momento flector que será proporcional a la longitud de la línea de fluencia y que actuará en un plano perpendicular a dicha línea. Se podrá representar entonces por un vector en la dirección de la línea y que tenga como magnitud \underline{m} veces la longitud de ésta, siendo \underline{m} el momento de fluencia por unidad de longitud de la losa. El momento resultante correspondiente a un segmento de la losa será igual a la suma de los vectores momento correspondientes a los lados. El trabajo interno de la losa será igual a la suma de los momentos resultantes correspondientes a cada segmento multiplicada por el ángulo de giro del segmento. Veamos el ejemplo siguiente para mayor claridad del método:

Calcular el momento límite correspondiente a una losa cuadrada uniformemente cargada y simplemente apoyada a lo largo de sus costados, para una forma de ruptura con líneas de fluencia a lo largo de las diagonales.



Para el segmento I, resultará un momento igual a $\underline{m} a$, como se puede apreciar en la figura, y en la dirección del lado AD. Lo mismo ocurre con los demás segmentos.

Si suponemos ahora un desplazamiento unitario del punto central E, obtenemos los siguientes valores para la energía :

Energía externa = $\frac{a^2 \omega}{3}$ (volumen de la pirámide de altura unitaria).

$$\begin{aligned} \text{Energía interna} &= \sum M \phi = 4 (a m) \left(\frac{1}{a/2} \right) \\ &= 8 m. \end{aligned}$$

Estableciendo la igualdad de energías, obtenemos :

$$\frac{a^2 \omega}{3} = 8 m., \text{ de donde}$$

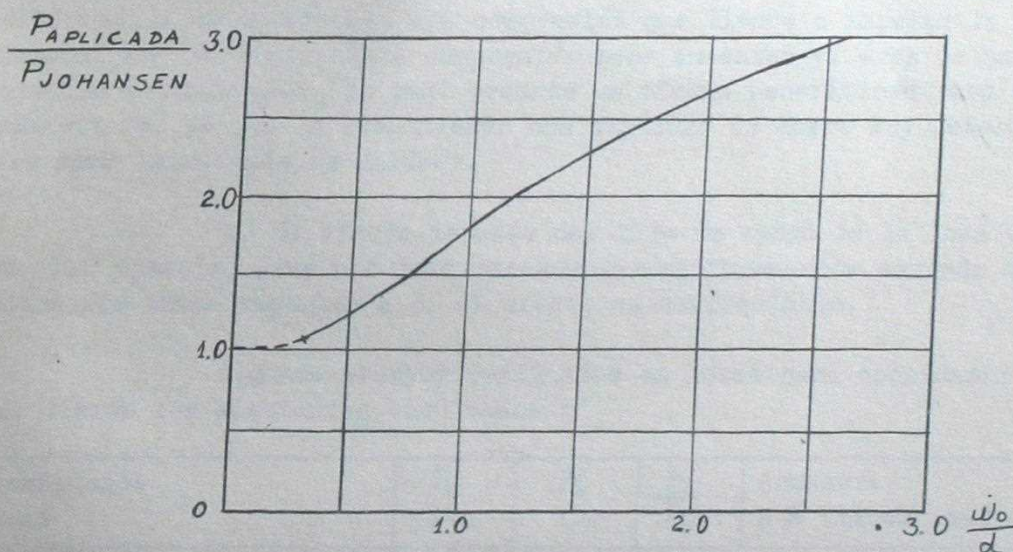
$$m = \frac{a^2 \omega}{24}$$

4.2.4.- Efecto de la "Acción de Membrana".-

R.H. Wood (24) ha estudiado en detalle este efecto y ha sugerido ciertas reglas para su consideración en el diseño. Este autor nos dice que el efecto se debe especialmente a la compresión del hormigón y no a la tracción del acero. Al producirse una cierta deflexión en la losa debida a las cargas externas, se produce una especie de auto-pretensado, lo que trae como consecuencia un aumento de la capacidad de carga a la flexión de la losa.

Wood llegó a las siguientes conclusiones después de un extenso estudio sobre este tópico :

a) Que el efecto depende de la relación $\frac{\omega_0}{d}$, siendo ω_0 la deflexión central y d el espesor de la losa.



Efecto de la acción de membrana en una losa circular simplemente apoyada.

b) Que depende del porcentaje de armadura, siendo mayor el aumento de resistencia para los porcentajes menores. Esto se explica recordando que la acción de membrana es principalmente una acción de compresión, y no de tracción. Wood propone las siguientes expresiones, que dan valores conservativos del aumento de resistencia debido a este efecto :

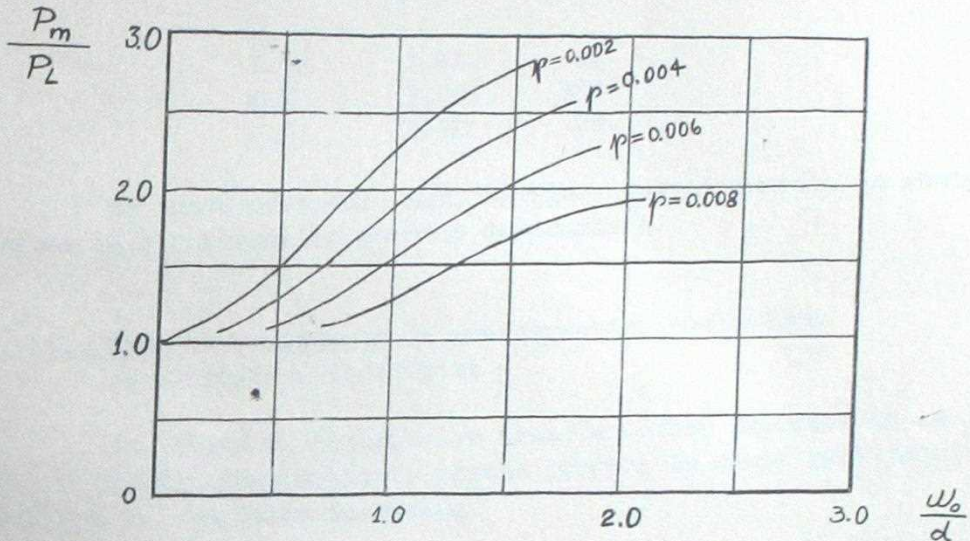
$$P_m = P_L \left(1 + 0.6 \frac{\omega_0}{d} \right) \quad \text{para losas débilmente armadas : } p = 0.002$$

$$P_m = P_L \left(1 + 0.3 \frac{\omega_0}{d} \right) \quad \text{para losas fuertemente armadas : } p = 0.008$$

En donde :

P_m = carga aplicada

P_L = carga calculada según la teoría de Johansen.



Efecto de la acción de membrana para diferentes porcentajes de acero.

En el gráfico superior se puede observar la variación del aumento de resistencia en función del porcentaje de armadura p . Se nota claramente que este aumento es tanto mayor cuanto menor es el porcentaje de armadura. Esto se explica, como ya lo dijimos, por el hecho de que la acción de membrana es una especie de pretensado autointroducido, pues al producirse la deformación se desarrolla una compresión que tiende a impedir la expansión lateral del hormigón. Esta compresión hace aumentar el área de hormigón que trabaja a compresión, lo cual produce un efecto beneficioso para el momento resistente, ya que la losa tienen una cantidad de acero muy inferior a la del caso balanceado de Whitney.

c) El efecto depende del tipo de apoyo de la losa y de su forma. Por ejemplo, para una losa rectangular uniformemente cargada de razón entre sus lados superior a 3, el efecto es despreciable.

Algunos ensayos realizados en losas para considerar este efecto, dieron los siguientes resultados :

Dimensiones losas	P_m lb.	P_L lb.	$\frac{P_m}{P_L}$	Armadura p % (Ambos sentidos).
6'x6'x2 1/4" Simplemente apoyadas	36500	24000	1.52	0.88
6'x6'x2 1/4"	35500	20000	1.77	0.66
2'x2'x1"	3860	2350	1.64	0.58
5'-8"x5'-8"x2 1/4" Empotradas.	78000	7190	10.9	0.25
5'-8"x5'-8"x2 1/4"	56700	12930	4.4	\pm 0.25
5'-8"x5'-8"x2 1/4"	43700	0		0

(Ensayos realizados por Hognestad)

Para el caso de cargas concentradas, que será nuestro caso, la acción de membrana produce un efecto considerable. A continuación se encuentran los resultados de experiencias realizadas por Thomas en 1939 para losas

cuadradas con una carga puntual en el centro y los valores obtenidos mediante la aplicación del método de Johansen, suponiendo una forma circular de fracturamiento ($P_L = 4 \pi m$)

p %	P_m/P_L	% Mayor
0.92	1.44	44
0.61	2.04	104
0.61	1.78	78

Se puede observar, aquí también, que el aumento de resistencia fué mayor para porcentajes menores de armadura.

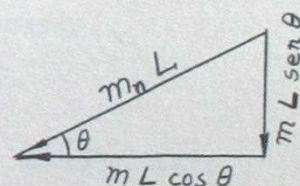
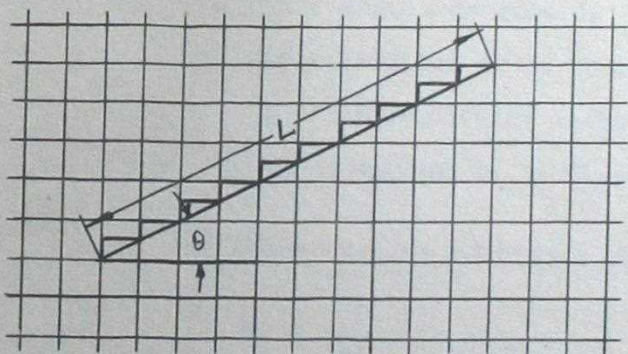
4.2.5.- Momento resistente en una dirección cualquiera para armadura isotrópica.-

Una armadura ortogonal e igual en ambos sentidos de la losa, se denomina "armadura isotrópica", porque produce la misma resistencia a momento flector en cualquier dirección.

Para demostrar ésto, consideremos una dirección que forme un ángulo θ con respecto las armaduras en un sentido. Si descomponemos esta dirección en el sentido de las armaduras principales, tomando pequeños segmentos, como se aprecia en la figura, se tiene :

$$m_n L = (m L \cos \theta) \cos \theta + (m L \sin \theta) \sin \theta$$

$$m_n = m \cos^2 \theta + m \sin^2 \theta = m$$



4.2.6.- Losa empotrada en su contorno sometida a una carga concentrada.-

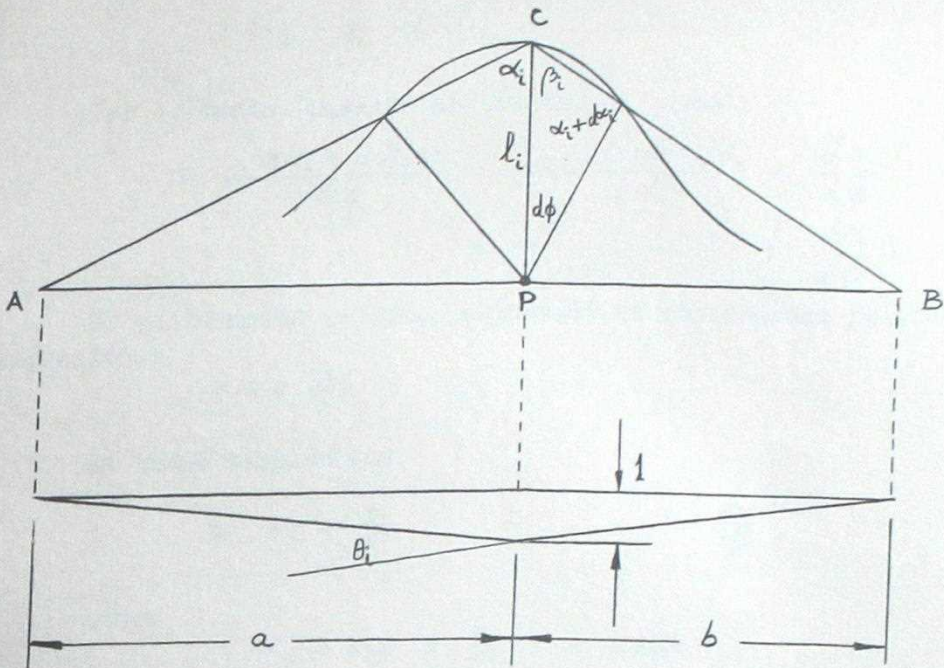
Se puede demostrar que en una losa empotrada en todo su contorno y que tenga una forma cualquiera, se produce un fracturamiento de forma circular y radial cuando se le aplica una carga concentrada (30).

Supongamos que el contorno de ruptura, para una losa empotrada en todo su contorno, tiene una forma cualquiera, como se aprecia en la figura, y que dividimos la superficie en contornos con un ángulo central muy pequeño. Se puede, entonces, reemplazar el arco de curva por la cuerda.

Calculemos la expresión de la energía para una carga puntual

P.

En la figura se ha dibujado $AB \perp CP$.



$$P \cdot l = m \sum \theta_i L_i + m' \sum \frac{S_i}{P_i}$$

Siendo :

m' = momento resistente positivo por unidad de longitud.

θ_i = ángulo de giro de los diedros radiales.

S_i = longitud de la cuerda i .

P_i = perpendicular desde p a la cuerda.

L_i = longitud de la fisura radial.

Se puede ver que, debido a relaciones geométricas :

$$\theta_i = \frac{1}{L_i} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i), \text{ de manera que :}$$

$$P = m \sum (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) + m' \sum \frac{S_i}{P_i}$$

Además, se tiene que :

$$\beta_i = \bar{\alpha} - \alpha_i - d\alpha_i - d\phi$$

de donde resulta :

$$\cot \alpha_i + \cot \beta_i = \cot \alpha_i - \cot(\alpha_i + d\alpha_i + d\phi)$$

Amplificando por $\frac{m}{d\phi}$, se obtiene :

$$m \frac{\cot \alpha_i + \cot \beta_i}{d\phi} = m \frac{\cot \alpha_i - \cot(\alpha_i + d\alpha_i + d\phi)}{d\alpha_i + d\phi} \frac{d\alpha_i + d\phi}{d\phi}$$

Si $d\phi \rightarrow 0$, $d\alpha_i$ también $\rightarrow 0$, luego

$$d\alpha_i + d\phi \rightarrow 0$$

Por lo tanto, pasando al límite, se tiene

$$\begin{aligned} m \frac{\cot\alpha_i + \cot\beta_i}{d\phi} &= -m \frac{d(\cot\alpha_i)}{d\alpha_i} \left(1 + \frac{d\alpha_i}{d\phi}\right) \\ &= m \frac{1}{\text{sen}^2\alpha_i} \left(1 + \frac{d\alpha_i}{d\phi}\right) \end{aligned}$$

El contorno de la losa, expresado en coordenadas polares, tiene la expresión :

$$r = r(\phi)$$

Se tiene también que

$$\text{tg } \alpha_i = \frac{r}{r'} \quad \left(r' = \frac{dr}{d\phi}\right)$$

Luego

$$\alpha_i = \text{arc tg } \frac{r}{r'}, \text{ de donde :}$$

$$\alpha'_i = \frac{\frac{r'^2 - r r''}{r'^2}}{1 + \frac{r^2}{r'^2}} = \frac{r'^2 - r r''}{r^2 + r'^2}$$

y por lo tanto,

$$1 + \alpha'_i = \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{r^2 + r'^2}$$

$$\frac{1}{\text{sen}^2 \alpha_i} = 1 + \cot^2 \alpha_i = 1 + \frac{r'^2}{r^2}$$

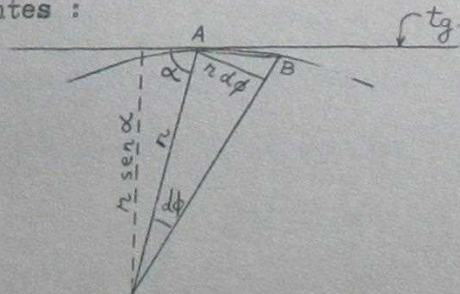
Luego

$$\begin{aligned} \cot \alpha_i + \cot \beta_i &= (1 + \alpha_i^2) \frac{d\phi}{\text{sen}^2 \alpha_i} = \\ &= \left(1 + 2 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r}\right) d\phi \end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación energética, obtenemos :

$$P = m \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{r''}{r} + 2 \frac{r'^2}{r^2}\right) d\phi + m' \sum \frac{S_i}{P_i}$$

Para el segundo término del segundo miembro podemos calcular las expresiones siguientes :



El ángulo diedro, para el segmento infinitamente pequeño AB, siendo unitario el desplazamiento de P, es :

$$\theta = \frac{1}{r \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\text{Además } AB = \frac{r d\phi}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Luego, el trabajo realizado por un sector infinitamente pequeño vale :

$$\begin{aligned} m' \frac{1}{r \operatorname{sen} \alpha} \frac{r d\phi}{\operatorname{sen} \alpha} &= m' \frac{d\phi}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \\ &= m' \left(1 + \frac{r'^2}{r^2}\right) d\phi \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio de energías para toda la losa vale :

$$P = m \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{r''}{r} + 2 \frac{r'^2}{r^2}\right) d\phi + m' \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2}\right) d\phi$$

Para el caso particular en que $m' = m$, se obtiene :

$$P = m \int_0^{2\pi} \left(2 + 3 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r}\right) d\phi$$

Para determinar el mínimo valor de P_1 consideramos la función :

$$F = 2 + 3 \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r}$$

Su derivada igualada a cero nos da la expresión :

$$\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial r'} - \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{\partial F}{\partial r''} = \frac{4}{r^2} (r'^2 - r r'') = 0$$

Por lo tanto debe tenerse :

$$r'^2 - r r'' = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial es :

$$r = A e^{c\phi}$$

Esta solución corresponde a un conjunto de espirales logarítmicas con centro en P. Una solución particular se produce para $c = 0$, teniéndose entonces un conjunto de circunferencias. Esta última solución corresponderá al caso de un contorno totalmente cerrado, que es el caso que nos interesa.

Reemplazando entonces los valores :

$c = 0$; $r = A$; $F = 2$, se obtiene :

$$P = m \int_0^{2\pi} 2 d\phi = \underline{4\pi m}$$

Hemos demostrado que para el caso de una losa empotrada en todo su contorno y con $m' = m$, se produce un fracturamiento circular, y que el valor de la carga concentrada P es independiente de la posición que tenga en la losa y vale :

$$P = 4 \bar{\kappa} m = 12.56 m.$$

Para cualquier otro tipo de apoyo,

$$P < 4 \bar{\kappa} m.$$

4.2.7.- Superposición de cargas.-

El principio de superposición no es aplicable, en general, al método de la línea de fluencia, ya que dos sistemas de carga diferentes tendrán, individualmente, un mecanismo de ruptura distinto del que tendrían al ser aplicados juntos sobre la losa. Sin embargo, para cálculos aproximados, el método puede ser usado teniendo en cuenta el teorema y las consideraciones siguientes :

Teorema : Sean L_1 y L_2 dos tipos diferentes de carga que tienen, individualmente, el mismo mecanismo de colapso. Entonces, una carga combinada de la forma :

$C_1 L_1 + C_2 L_2$, donde $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, tendrán el mismo mecanismo de ruptura y ésta ocurrirá cuando :

$$C_1 + C_2 = 1$$

Esto se debe a que la disipación de energía, para cualquier deflexión arbitraria, es la misma en un lado de la ecuación de trabajos, mientras que el trabajo externo, para un tipo de carga dado, es proporcional al valor de c , en el otro lado.

Si los mecanismos de colapso son diferentes, sean m_1 y m_2 , para cada estado individual de cargas, y el mecanismo de las cargas combinadas es m , se tiene :

Para el mecanismo m , unas cargas de ruptura $K_1 L_1$ y $K_2 L_2$ respectivamente, para las posiciones L_1 y L_2 de las cargas. En estas circunstancias, una carga combinada de la forma $C_1 L_1 + C_2 L_2$, que podemos escribir en la forma :

$$\left(\frac{C_1}{K_1}\right) K_1 L_1 + \left(\frac{C_2}{K_2}\right) K_2 L_2, \text{ causa la ruptura cuando}$$

$$\frac{C_1}{K_1} + \frac{C_2}{K_2} = 1$$

Como m_1 y m_2 corresponden a la menor carga de ruptura, se tiene que :

$$K_1 > 1$$

$$K_2 > 1$$

Luego, $c_1 + c_2 > 1$, y si usamos $c_1 + c_2 = 1$, estaremos usando un valor conservativo.

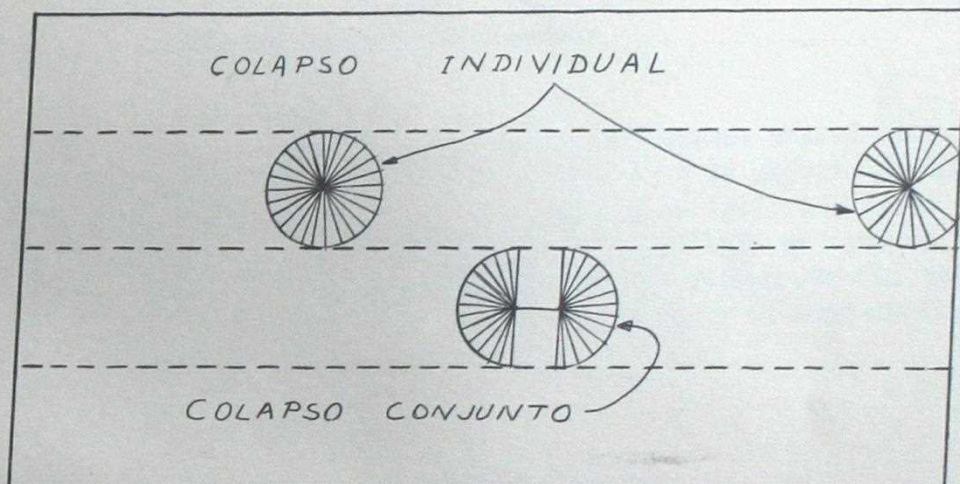
En otras palabras, según la expresión de Johansen, se tiene :

$M_{\Sigma P} \leq \sum M_p$, es decir, que el momento producido en la losa debido a la suma de las cargas, es menor o a lo sumo igual (es igual cuando todas las cargas tienen el mismo mecanismo de colapso) que la suma de los momentos calculados en forma individual para cada configuración de cargas.

4.2.8.- Aplicación del método de Johansen al análisis de la losa.-

La Losa :

El piso de nuestro laboratorio se puede considerar como una losa continua de cuatro tramos y con un cierto grado de empotramiento en los apoyos extremos.



La losa tendrá la misma capacidad resistente a momentos negativos que a momentos positivos, dado el hecho de que las cargas pueden cambiar de sentido y estar aplicadas hacia abajo en un momento y luego actuar hacia arriba.

Vamos a suponer que el momento resistente negativo en los apoyos extremos es igual a un cierto porcentaje del momento resistente de la losa, y que dicho porcentaje es aproximadamente igual al cuadrado de la razón entre los espesores del muro vertical y de la losa superior, vale decir :

$$i = \left(\frac{0.45}{0.65} \right)^2 = 0.48$$

Las Cargas :

Los esfuerzos principales a que estará sometida nuestra losa se deberán a cargas concentradas, las cuales podrán tener una ubicación cualquiera en las diversas perforaciones, dependiendo del dispositivo de prueba a usarse. Es, por lo tanto, imposible predecir todas las combinaciones de cargas posibles durante la vida futura del laboratorio. Analizaremos, pues, el efecto de cargas concentradas en perforaciones aisladas y en grupos de

perforaciones adyacentes.

Cuando se apliquen cargas en perforaciones relativamente distantes, dada la forma que se ha dado a la estructura, se producirán colapsos locales para cada carga, dentro de una cierta área de influencia, como puede apreciarse en la figura superior. Si las cargas están relativamente cerca una de otras, se producirá un sistema de colapso para el conjunto y no uno aislado para cada carga.

Además de las cargas concentradas, actuará sobre la losa una carga uniformemente repartida proveniente del peso propio de la estructura. Esta carga será de poca importancia en comparación con el monto de las cargas concentradas. Su efecto se tomará en cuenta en base al teorema enunciado en 4.2.7.

Casos posibles.-

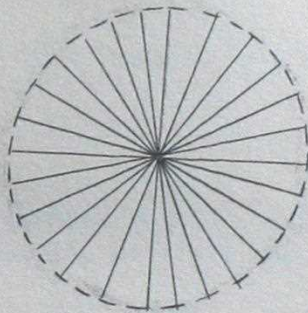
A continuación estudiaremos las siguientes combinaciones de cargas concentradas, consideradas como los casos de mayor importancia.

Para una carga concentrada.-

Caso I :

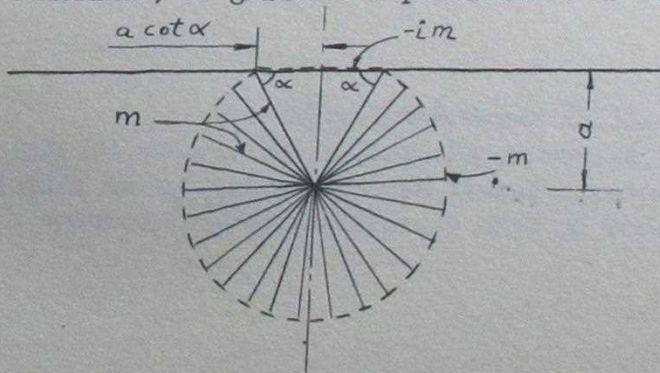
Una carga concentrada ubicada en una perforación de los sectores centrales de la losa. Para la mayoría de las perforaciones de estos sectores, dado que su longitud es igual a 8 veces su ancho, se puede considerar que se trata de una losa empotrada en todo su contorno. Se produce entonces un fracturamiento circular y radial como lo demostramos en 4.2.6 .y la relación entre la mitad de la carga y el momento flector por unidad de longitud de la losa vale :

$$\frac{P}{2m} = 2\pi = 6.283$$



Caso II :

Para cargas concentradas ubicadas en perforaciones cercanas al apoyo externo de la losa, tanto en los tramos laterales como en los centrales, el grado de empotramiento es menor.



Vamos a suponer que la forma de colapso es la que se indica en la figura y que la capacidad de momento negativo en el apoyo vale $-i m$.

La ecuación de energía, para un desplazamiento unitario del punto P, vale :

$$P \cdot 1 = 2 \left[a \cotg \alpha (1 + i) m \frac{1}{a} + 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) m \right]$$

De donde obtenemos :

$$\frac{P}{2 m} = (1 + i) \cotg \alpha + 2 \alpha + \pi$$

Para determinar α usamos la condición de que P debe ser mínimo para un m dado.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{P}{2 m} = (1 + i) \left(- \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \right) + 2 = 0$$

Por lo tanto,

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{\frac{1 + i}{2}}$$

Para nuestro caso, con $i = 0.48$, obtenemos :

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{\frac{1.48}{2}} = 0.860$$

Luego

$$\alpha = 59.5^\circ = 1.04 \text{ Rad.}$$

Sustituyendo este valor en la expresión de $\frac{P}{2 m}$, obtenemos :

$$\frac{P}{2 m} = 6.093$$

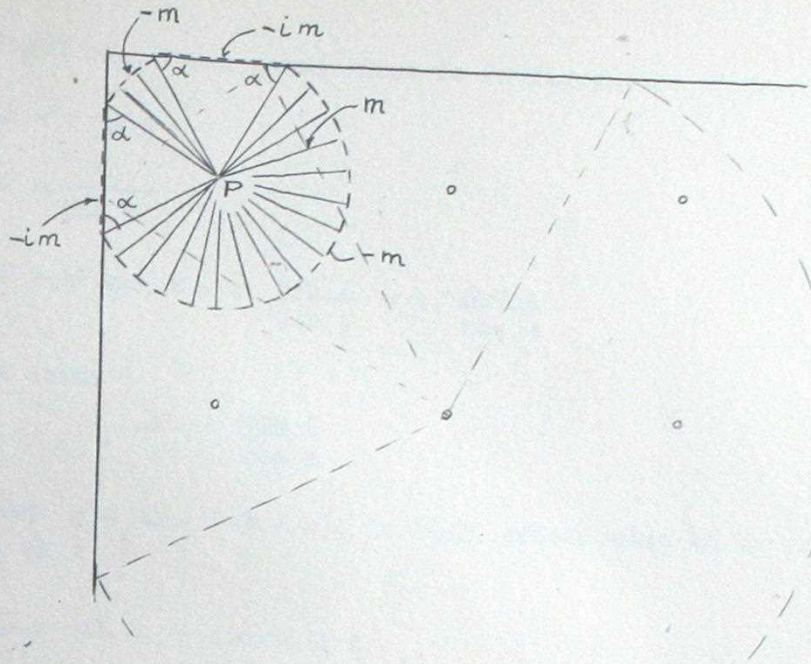
Nota : si el momento negativo del empotramiento fuera menor, por ejemplo, si $i = 0$, se tendría $\alpha = 45^\circ$

$$\text{y } \frac{P}{2 m} = 1.00 + 2 \times \frac{3 \pi}{4} = 5.71$$

Es decir, la disminución de la capacidad de carga sería de sólo un 6.7%.

Caso III :

Una carga concentrada aplicada en una perforación cercana a la esquina externa de la losa. Se producirá aquí un colapso de la forma que se indica en la figura. La losa tiende a romperse a lo largo de los dos apoyos que presentan menor resistencia ante un momento negativo.



sión :

Planteando la ecuación de los trabajos, se obtiene la expresión :

$$\frac{P}{2m} = 2 \cot \alpha (1 + i) + 2 \frac{2\alpha - \frac{\pi}{2}}{2} + 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

Es decir :

$$\frac{P}{2m} = 2 (1 + i) \cot \alpha + 4 \alpha$$

Para calcular el valor de α hacemos :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{P}{2m} = 2 (1 + i) \left(- \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) + 4 = 0$$

De donde : $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1+i}{2}}$, que resulta igual que en el caso II, como era de esperar.

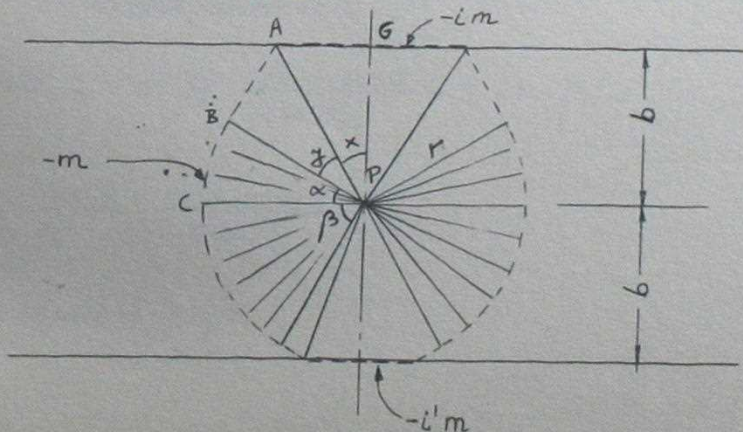
Para $i = 0.48$, se obtiene $\alpha = 1.04$ Rad.

y

$$\frac{P}{2m} = 6.101$$

Caso IV:

Carga aplicada en un punto central de uno de los sectores laterales. Supondremos que se produce un colapso según la forma que se indica en la figura, que parece ser el más cercano a la realidad.



Según relaciones geométricas de la figura, se tiene :

$$BA = r \operatorname{tg} y$$

$$AP = \frac{r}{\cos y}$$

$$AG = AP \operatorname{sen} x = r \frac{\operatorname{sen} x}{\cos y} = b \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

De donde :

$$\frac{r}{b} = \frac{\cos y}{\cos x}$$

Pero $y = 90 - (\alpha + x)$, lo cual, substituído en la expresión anterior, nos da :

$$\frac{r}{b} = \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} x$$

Luego

$$\operatorname{tg} x = \frac{r/b - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

De donde podemos obtener :

$$AG = b \operatorname{tg} x = \frac{r - b \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Y en forma similar :

$$BA = \frac{b - r \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

La ecuación de energías, para este sistema de fracturamiento, resulta así :

$$\frac{P}{2m} = \frac{r - b \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} (1 + i) \cdot \frac{1}{b} + 2 \frac{b - r \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{r} + 2(\alpha + \beta) + 2 \frac{b - r \operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{1}{r} + \frac{r - b \operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} (1 + i') \cdot \frac{1}{b}$$

$$\text{Pongamos } K = \frac{r}{b}$$

Obtenemos entonces :

$$\frac{P}{2m} = \frac{k - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} (1 + i) + 2 \frac{1/k - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + 2(\alpha + \beta) + 2 \frac{1/k - \operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} + \frac{k - \operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} (1 + i')$$

$\frac{P}{2m}$ mínimo se obtendrá cuando :

$$\frac{\partial \frac{P}{2m}}{\partial \alpha} = \frac{-\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \sin \alpha k}{\cos^2 \alpha} (1+i) +$$

$$2 \frac{-\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \frac{1}{k} \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 = 0$$

Es decir :

$$2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha \left[k(1+i) + \frac{2}{k} \right] + 1 + i = 0$$

Teniendo en cuenta que $i = 0.48$, $i' = 1.00$, se obtiene :

$$\sin \alpha = \frac{1.48 k + \frac{2}{k} \pm \sqrt{\left(1.48 k + \frac{2}{k}\right)^2 - 10}}{4}$$

$$\sin \beta = \frac{k + \frac{1}{k} \pm \sqrt{\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - 4}}{2}$$

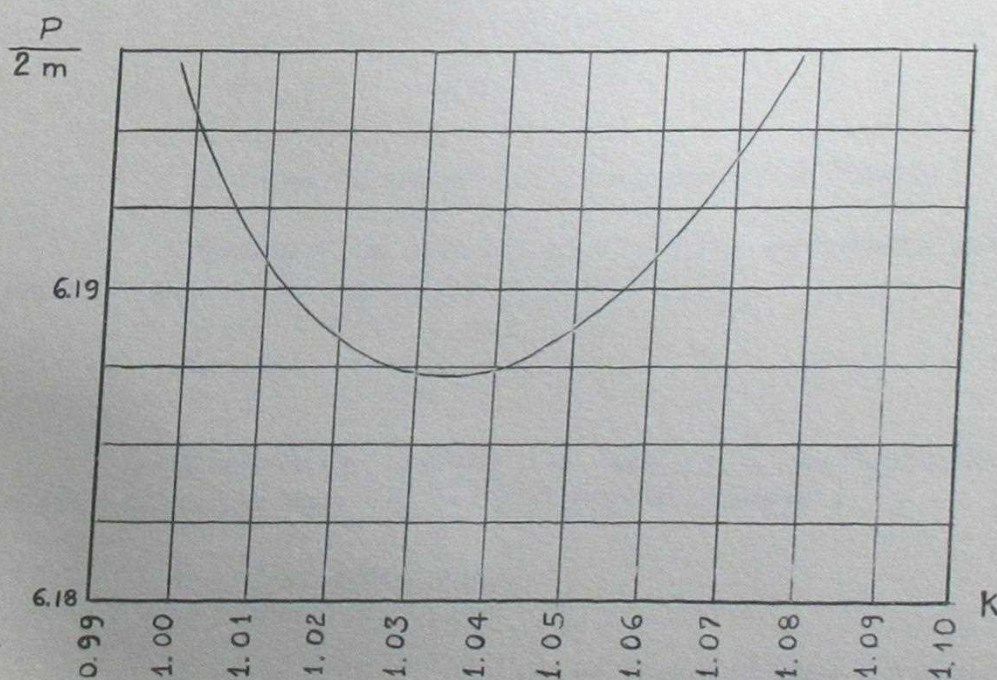
Para calcular el valor mínimo de $\frac{P}{2m}$, usaremos el siguiente método : daremos distintos valores a k y, mediante un computador digital, calcularemos los valores de α y β a partir de las expresiones anteriores. Obtenidos estos valores, calcularemos :

$$\frac{P}{2m} = 1.48 \frac{k - \sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \frac{1/k - \sin \alpha}{\cos \alpha} + 2(\alpha + \beta) +$$

$$2 \frac{1/k - \sin \beta}{\cos \beta} + 2 \frac{k - \sin \beta}{\cos \beta}$$

Hecho este cálculo, podemos confeccionar el siguiente gráfico :

co :



Se puede observar que se obtiene un mínimo aproximadamente los siguientes valores :

$$\begin{aligned} k &= 1.03 \\ \alpha &= 0.537 \\ \beta &= 1.133 \\ \frac{P}{2m} &= 6.187 \end{aligned}$$

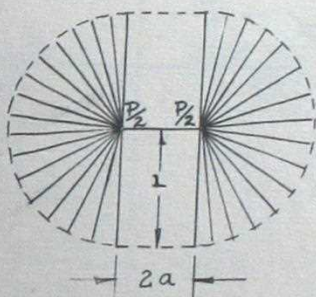
Comparando entre sí estos cuatro casos, correspondientes a una sola carga concentrada, podemos ver que resultan valores muy semejantes :

C A S O	$\frac{P}{2m}$	% MENOR
I Carga en parte central	6.283	0.0
II Carga cerca apoyo lateral	6.093	3.0
III Carga cerca intersección apoyos laterales	6.101	2.9
IV Carga centro tramo lateral	6.187	1.5

Para dos cargas concentradas.--

Caso V :

Dos cargas concentradas aplicadas en perforaciones adyacentes de los sectores centrales, alejadas de los bordes :



La forma de colapso es la indicada en la figura.

Planteando la ecuación de equilibrio energético, para un desplazamiento unitario de las cargas, obtenemos :

$$\frac{P}{2m} = 2\bar{\pi} + \frac{4a}{r}$$

Esta función tiende a $2\bar{\pi}$ cuando $r \rightarrow \infty$. Para nuestras condiciones, r queda limitado a $3.0 \times a$. Se obtiene entonces :

$$\frac{P}{2m} = 2\bar{\pi} + \frac{4}{3} = 7.615$$

La misma forma de colapso se producirá para una distancia mayor que $2a$, hasta un cierto límite, superado el cual la forma de colapso será local para cada carga. Este límite es el siguiente :

$$2\bar{\pi} + \frac{2x}{3a} = 4 = 12.56 \text{ (dos veces la carga correspondiente al colapso individual).}$$

De donde :

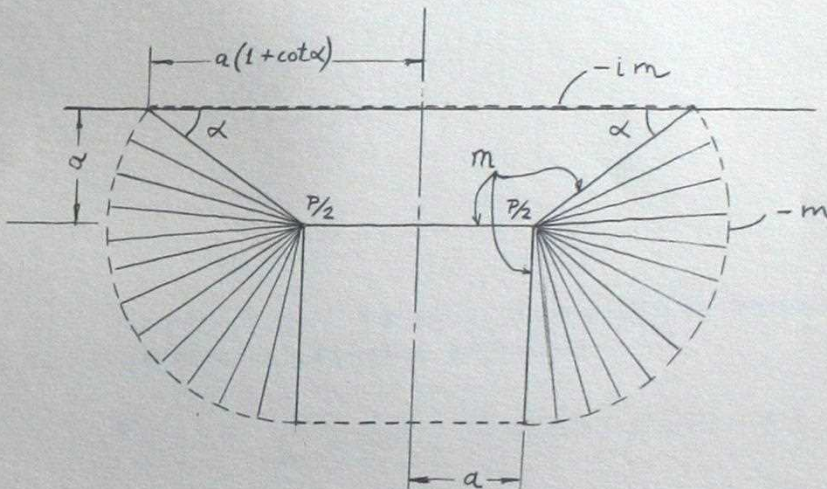
$$x = 9.42 \times a = 4.71 \text{ m .}$$

Para distancias intermedias entre las cargas las relaciones serán las siguientes :

Distancia m	P/2 m
0	$2\bar{\pi} = 6.282$
1	7.615
2	8.949
3	10.282
4	11.602
5 ó más	$4\bar{\pi} = 12.56$

Caso VI :

Dos cargas concentradas aplicadas en perforaciones cercanas al borde :



$$\frac{P}{2m} = \frac{a(1 + \cot \alpha)}{a} (1 + i) + 2 \left(\alpha + \frac{\bar{\pi}}{2} \right) + \frac{2a}{a/\sin \alpha}$$

$$\frac{P}{2m} = (1 + \cot \alpha) (1 + i) + 2\alpha + \bar{\pi} + 2 \sin \alpha$$

De la derivada parcial c/r a α obtenemos :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{P}{2m} = (1 + i) \left(-\frac{1}{\sin^2} \right) + 2 + 2 \cos \alpha = 0$$

O bien :

$$(1 + \cos \alpha) (1 - \cos^2 \alpha) = \frac{1 + i}{2} = 0.74$$

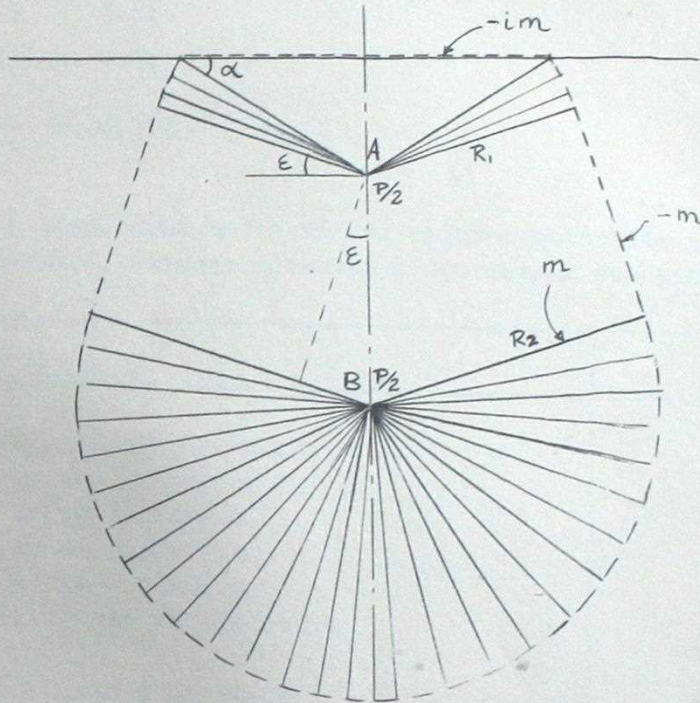
Resolviendo esta ecuación mediante tanteos, obtenemos :

$$\alpha = 40^\circ = 0.698$$

$$\frac{P}{2m} = 9.072$$

Caso VII :

Carga concentrada en dos perforaciones, una de las cuales está adyacente al borde exterior.



La ecuación de energías, suponiendo un descenso unitario del punto A, nos conduce a la siguiente expresión :

$$\frac{P}{4m} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = (1+i) \cot \alpha + 2(\alpha - \epsilon) + \frac{R_2}{R_1} (\pi + 2\epsilon) + \frac{4a \cos \epsilon}{R_1}$$

Teniendo en cuenta que $i = 0.48$, obtenemos la siguiente expresión en función de $K_1 = \frac{R_1}{a}$ y $K = \frac{R_2}{a}$ solamente :

$$\frac{P}{2m} = \frac{2.96 \sqrt{K_1^2 - 1} + 4 \left[\arcsen \frac{1}{K_1} - \arcsen \frac{K_2 - K_1}{2} \right]}{1 + \frac{K_2}{K_1}} + \frac{2 \frac{K_2}{K_1} (\pi + 2 \arcsen \frac{K_2 - K_1}{2}) + \frac{8}{K_1} \sqrt{1 - \frac{R_2 - R_1^2}{2}}}{1 + \frac{K_2}{K_1}}$$

Buscar el mínimo de esta función resulta difícil si no se cuenta con un computador.

El mínimo fué calculado con un computador digital, haciendo variar los valores de K_1 y K_2 dentro de ciertos límites. El programa calcula el valor de $\frac{P}{2m}$ para todas las combinaciones de K_1 y K_2 y guarda el menor valor obtenido.

Se obtuvieron así los siguientes resultados :

$$K_1 = 1.92$$

$$K_2 = 3.64$$

$$\frac{P}{2m} = 10.103$$

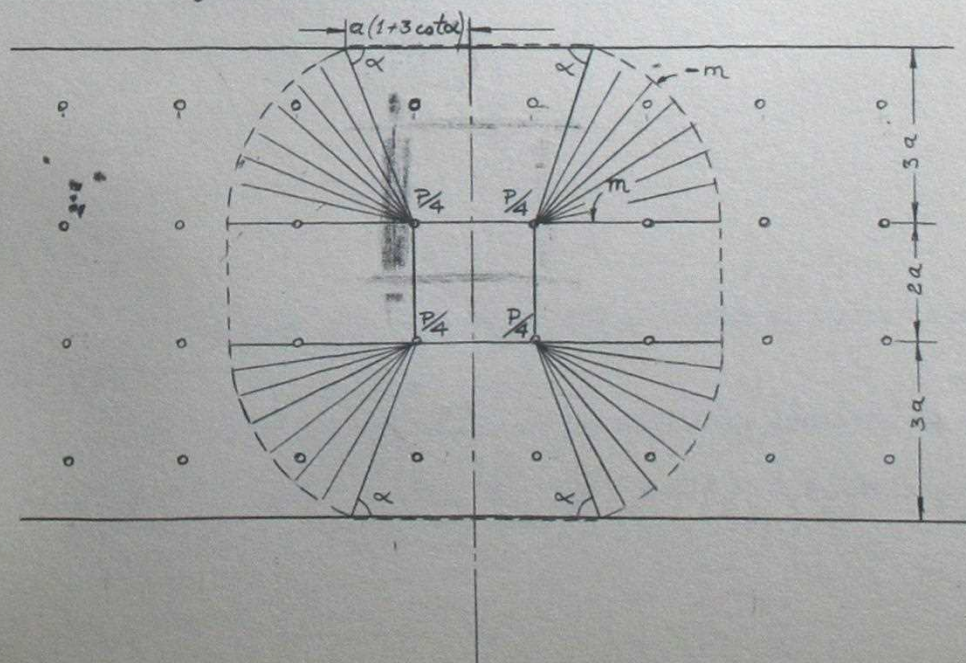
Si comparamos entre sí los valores obtenidos para los distintos casos considerados, correspondientes a dos cargas concentradas, obtenemos :

C A S O	$\frac{P}{2m}$
V Dos cargas adyacentes al centro	
A 1 m. de distancia	7.615
A 2 m. de distancia	8.949
A 3 m. de distancia	10.282
A 4 m. de distancia	11.602
A 4.71 m. ó más de distancia	12.56
VI Dos cargas cercanas a un borde	9.072
VII Dos cargas, una de ellas cerca del borde	10.103

Para cuatro cargas concentradas.-

Caso VIII :

Cuatro cargas concentradas en otras tantas perforaciones adyacentes de los sectores centrales :



La ecuación de energías es la siguiente :

$$\frac{P}{2m} = \frac{4(1 + 3 \cot \alpha) \cdot a}{3a} + 4\alpha + \frac{4a}{3a/\sin \alpha}$$

Es decir :

$$\frac{P}{2m} = \frac{4}{3} (1 + 3 \cot \alpha) + 4\alpha + \frac{4}{3} \sin \alpha$$

De la condición de mínimo, resulta :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{P}{2m} = 4 \left(-\frac{1}{\sin^2} \right) + 4 + \frac{4}{3} \cos \alpha = 0$$

De donde :

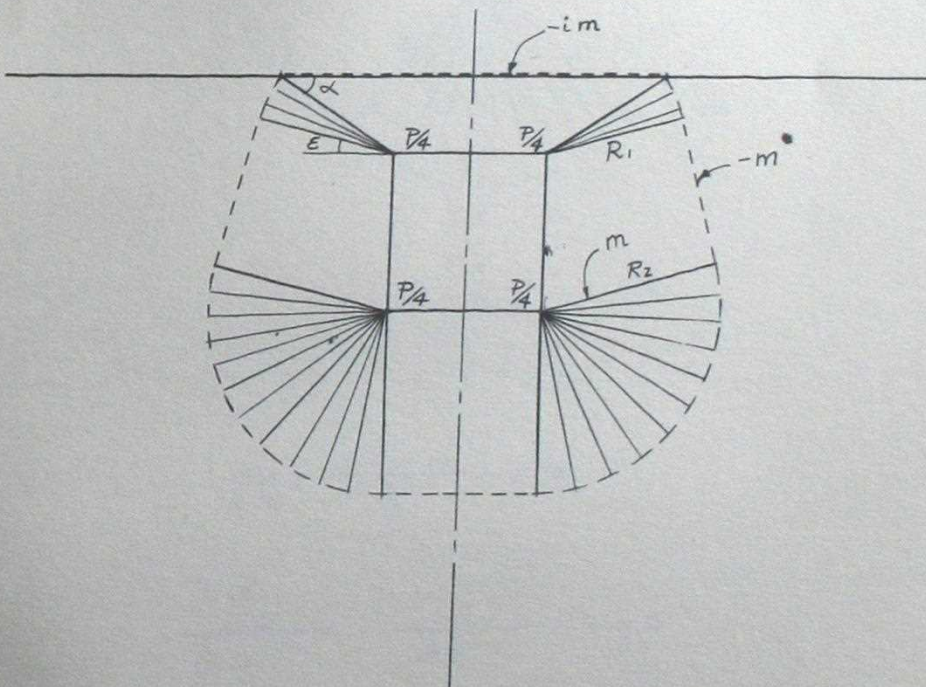
$$\sin^2 \alpha (3 + \cos \alpha) = 3$$

Por lo tanto, el valor mínimo de la carga se obtiene para $\alpha = 90^\circ$, y la función toma el valor :

$$\frac{P}{2m} = 8.949$$

Caso IX :

Cuatro cargas concentradas, dos de las cuales se encuentran cerca del borde.



Supondremos que las cargas más cercanas al apoyo bajan en una cantidad unitaria.

Se puede plantear entonces la siguiente ecuación de energía :

$$\frac{P}{4m} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = (1+i)(1+\cot \alpha) + 2(\alpha - \epsilon) + \frac{R_2}{R_1} (\pi + 2\epsilon) + \frac{4a \cos \epsilon}{R_1} + \frac{2a}{R_1}$$

Poniendo $K_1 = \frac{R_1}{a}$; $K_2 = \frac{R_2}{a}$, se obtiene :

$$\frac{P}{2m} \frac{2.96 (1 + \sqrt{K_1^2 - 1}) + 4 \left[\text{arc sen } \frac{1}{K_1} - \text{arc sen } \frac{K_2 - K_1}{2} \right]}{1 + \frac{K_1}{K_2}} +$$

$$+ 2 \frac{\frac{K_2}{K_1} \left[\bar{h} + 2 \text{ arc sen } \frac{K_2 - K_1}{2} \right]}{1 + \frac{K_1}{K_2}} + \frac{8}{K_1} \sqrt{1 - \left(\frac{K_2 - K_1}{2} \right)^2} + \frac{2}{K_1}$$

Calculando el mínimo de esta función como se hizo en el caso VII, obtenemos :

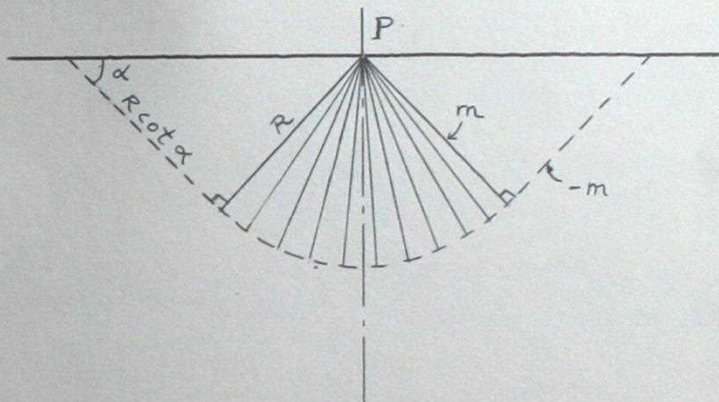
$$\frac{P}{2m} = 8.441$$

$$\text{Para } K_1 = 1.80$$

$$K_2 = 2.84$$

Caso X :

Carga colocada en un borde libre de la losa.



$$\frac{P}{2m} = \frac{R \cot \alpha}{R} + 2 \alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{P}{2m} = - \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} + 2 = 0$$

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

Luego $\alpha = 45^\circ$

$$\frac{P}{2m} = 1 + 1.57 = 2.57$$

5.- RESISTENCIA DE LA LOSA ANTE MOMENTOS FLECTANTES Y ESFUERZOS DE CORTE EN EL SENTIDO LONGITUDINAL

En el sentido longitudinal consideraremos la estructura como varias vigas de sección I unidas entre sí.

Analizaremos, en primer lugar, la resistencia necesaria de un elemento de sección I de 32 m. de largo por 4 m. de ancho que supondremos actuando en forma independiente del resto de la estructura. Luego consideraremos la resistencia de una viga tipo cajón formada por dos vigas de sección I adyacentes. Por último, se determinará la resistencia total a la flexión que es capaz de soportar la estructura en este sentido.

a) Resistencia de un elemento de sección I.-

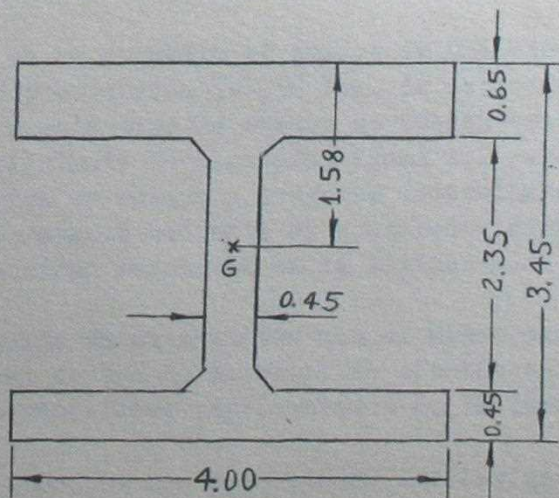
Cada elemento de sección I se diseñará en tal forma que sea capaz de soportar las solicitaciones que se han determinado en el capítulo 3.- La forma en que este elemento resistirá tales esfuerzos corresponderá a una viga de longitud finita que se encuentra apoyada sobre un suelo que supondremos de características elásticas. Estas características no son conocidas con exactitud, ya que aún no se ha fijado la ubicación definitiva que tendrá el laboratorio. Lo más probable es que se construya en los terrenos adyacentes a la Escuela de Ingeniería o en el terreno que I.D.I.E.M. posee cerca de Cerrillos. Se puede suponer que el primero de estos terrenos es de tipo ripioso y que, poniéndonos en un caso desfavorable, se trata de un G.F., es decir, una grava con material fino constituido por partículas de diámetro menor que 0.1 mm. El segundo terreno posible se trata de cenizas de origen volcánico con un alto grado de consolidación. Es un terreno bastante compacto. Supondremos que ambos terrenos tienen las mismas características elásticas :

$$\begin{aligned} \text{Módulo de Young} & E = 1500 \text{ Kg/cm}^2 \\ \text{Coeficiente de Poisson} & \nu = 0.3 \end{aligned}$$

Con este valor para E nos hemos puesto en un caso desfavorable, ya que casi todos los ripios de Santiago poseen un E mayor que 1500 Kg/cm².

La viga tiene la sección que se indica en la figura. El momento de inercia con respecto al centro de gravedad resulta :

$$I = 9.61 \text{ m}^4$$



El coeficiente de reacción del terreno K para esta viga y las características del suelo que tenemos, será determinada según la expresión que se encuentra en el Anexo, párrafo a)3. Debemos destacar aquí que la expresión que se ha determinado para K, se apoya en la hipótesis de que la base de la viga se mantiene plana en el sentido transversal, hecho que no se cumple en este caso. Pero si usamos tal expresión para determinar K, nos encontraremos por el lado de la seguridad, ya que K resultará menor que el valor real.

$$K = 0.65 \sqrt{\frac{12 E_s B^4}{E_b I}} \frac{E_s}{1 - \nu^2}$$

$$K = 0.65 \sqrt{\frac{12 \cdot 1.5 \cdot 4}{210 \cdot 9.61}} \frac{1.5}{1 - (0.3)^2}$$

$$K = 0.961 \text{ Ton/cm}^2$$

De aquí obtenemos el siguiente valor para la característica de la viga :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4 E I}} = 0.104 \text{ m}^{-1}$$

Por lo tanto, $\beta L = 0.104 \times 32 = 3.33$, es decir, no es posible analizar tal viga suponiendo que posee una longitud infinita, pues no se obtendrían resultados de acuerdo con la realidad.

En la segunda parte del Anexo se ha desarrollado la solución de una viga de longitud finita apoyada sobre un terreno elástico y sometida a un número cualquiera de cargas concentradas. Mediante un computador digital se ha aplicado esta solución a la viga que estamos considerando para diferentes estados de carga, con el objeto de determinar los esfuerzos máximos que se puedan producir durante la utilización del laboratorio.

En primer lugar se supuso el ensayo estático de una viga de un puente ferroviario de 30 m. de luz libre diseñada para un tren tipo C y cargada hasta la ruptura. Los esfuerzos ocasionados sobre nuestra viga debido a estas cargas son los indicados en la lámina 5. En el gráfico correspondiente a la reacción del terreno sobre la viga, se ha dibujado con línea punteada la reacción correspondiente al peso propio, con el objeto de demostrar que la viga prácticamente no se separa del terreno en ningún punto y que la presión sobre el terreno no alcanza un valor peligroso.

Luego se ha supuesto el ensayo de una viga de 15 m. de longitud, portante de un puente grúa de 250 Ton. de capacidad. Las solicitaciones correspondientes a este tipo de ensayo se pueden ver en el capítulo 3. Se ha supuesto un coeficiente de seguridad igual a 2 para determinar la carga de ruptura de la viga en ensayo y luego se determinaron los esfuerzos sobre la viga I del laboratorio mediante el computador digital. Los resultados así obtenidos se encuentran resumidos en la lámina 6.-

En seguida se ha supuesto que el mismo ensayo anterior, en vez de realizarse en el centro de la viga, se efectúa en un extremo de ella. Se obtuvieron así los resultados representados en la lámina 7.-

Por último, se han determinado las fatigas internas correspondientes a la simulación de ensayo de una viga portante de un puente grúa

conjuntamente con el ensayo de un muro sísmico de un edificio con una capacidad de carga al corte de 250 Ton. Lámina 8.-

En base a los esfuerzos calculados para las sollicitaciones recién consideradas, establecemos que la viga de sección I debe ser capaz de resistir los siguientes esfuerzos :

- 1) Un momento flector de 1.000 T.m. en toda su longitud y en ambos sentidos.
- 2) Un esfuerzo de corte de 240 Ton. en toda su longitud y en ambos sentidos.
- 3) Un esfuerzo combinado de flexo-tracción equivalente a - 750 T.m. de flexión más 300 Ton. de tracción.

- b) Resistencia de una viga tipo cajón formada por dos vigas de sección I.-

Podemos decir que la resistencia de una viga con una sección transversal que posea las características indicadas, corresponderá aproximadamente al doble de la resistencia de una viga I actuando en forma individual, vale decir :

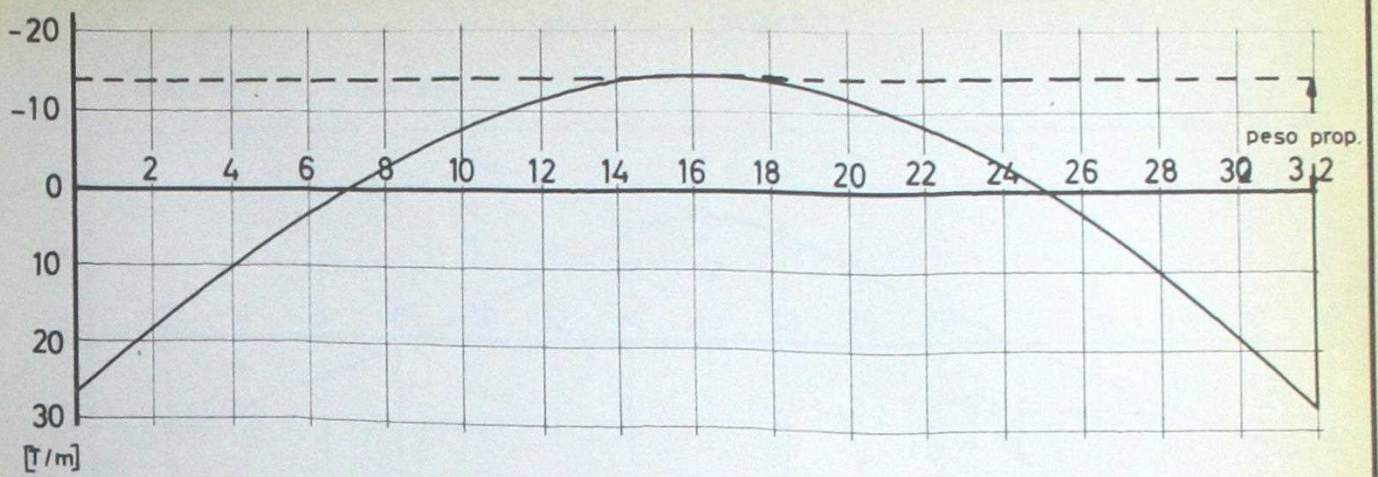
2000 Ton.m. de flexión
600 Ton. de esfuerzo de corte.

- c) Resistencia total de la losa a un momento flector en el sentido longitudinal.-

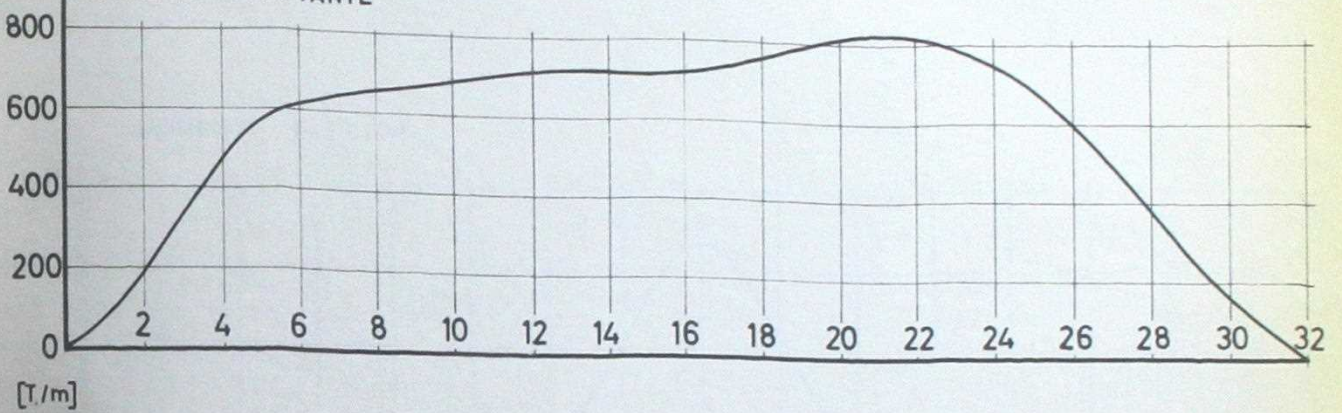
Esta resistencia será algo mayor que 4 veces la correspondiente a una viga I, es decir, 4000 Ton.m.

ESFUERZOS EN LA VIGA I SOMETIDA A LA CARGA DE UN TREN TIPO 'C'

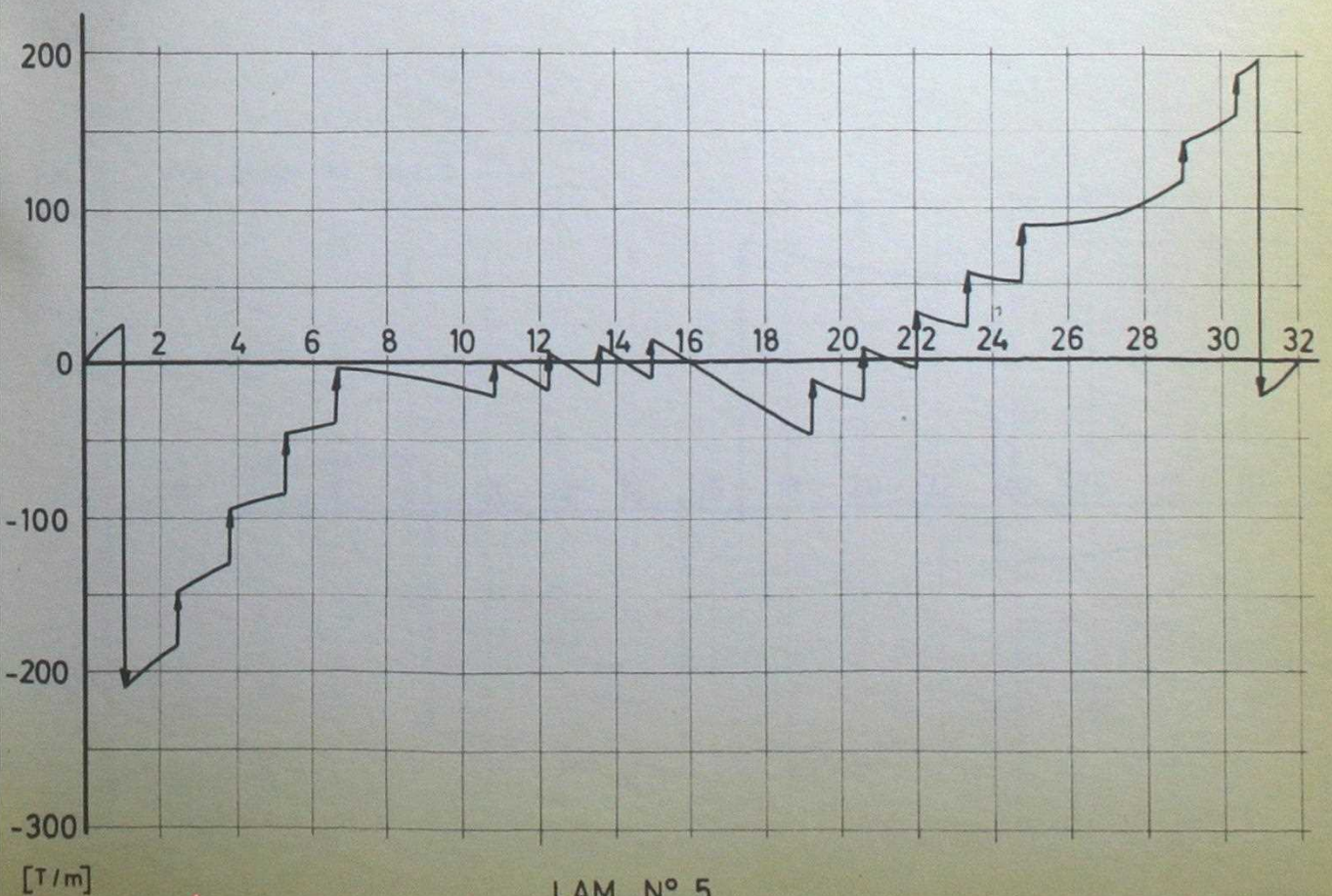
REACCION DEL TERRENO



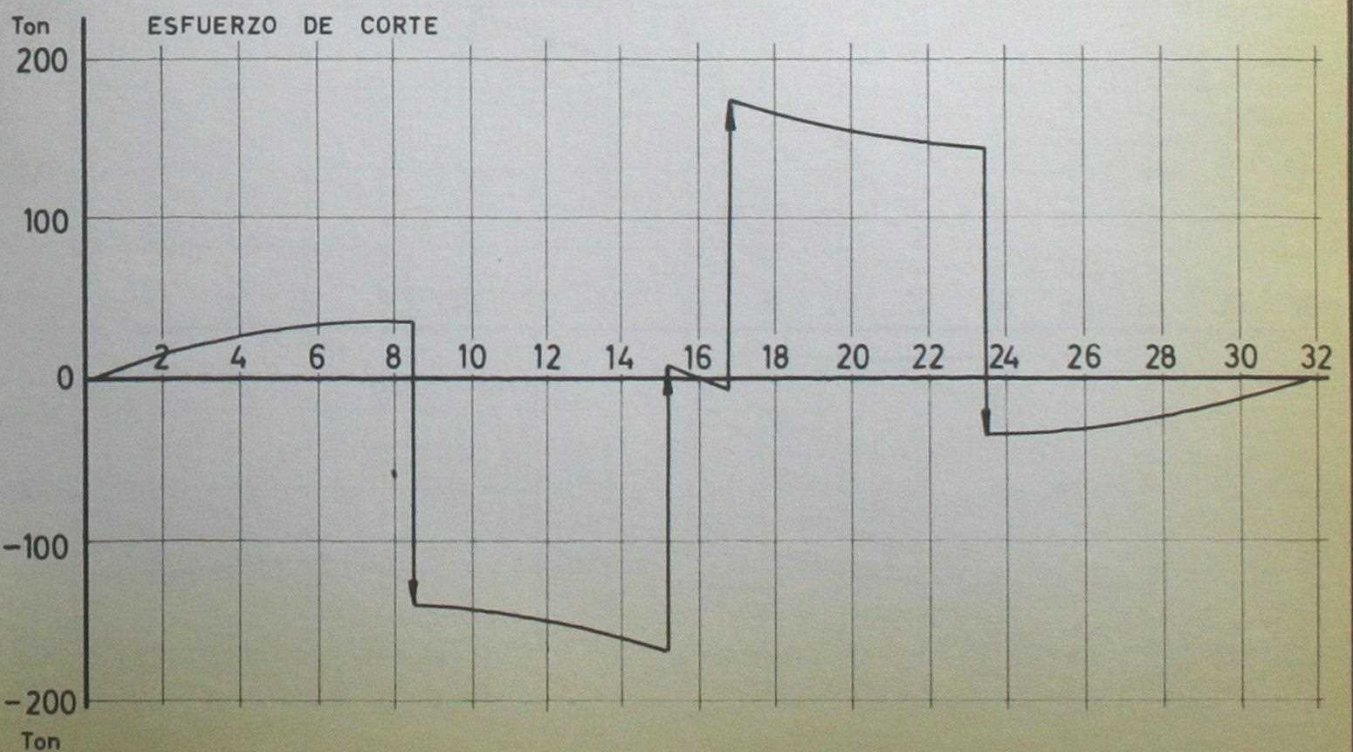
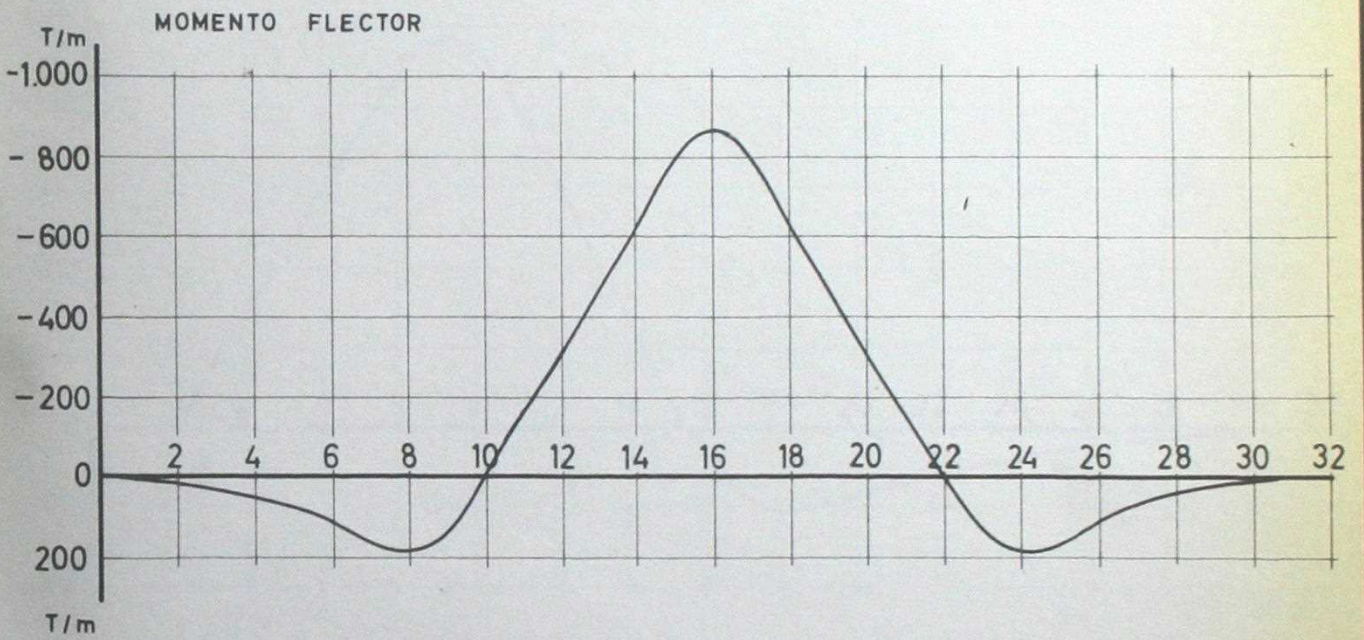
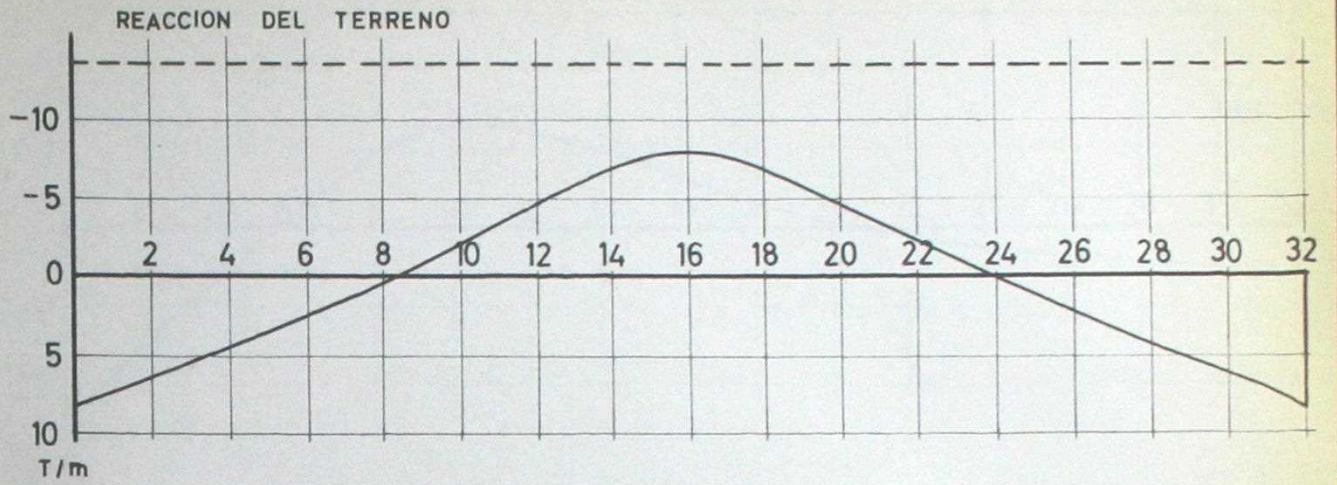
MOMENTO FLECTANTE



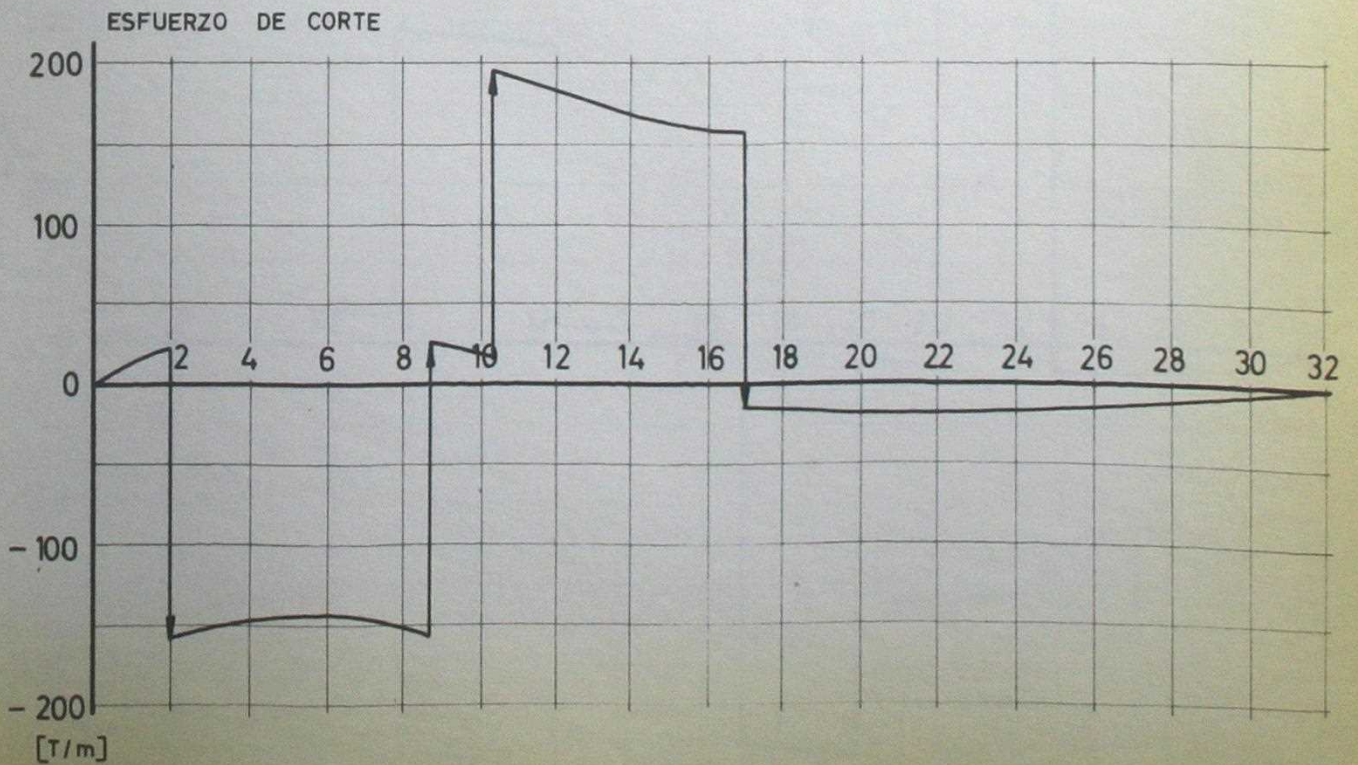
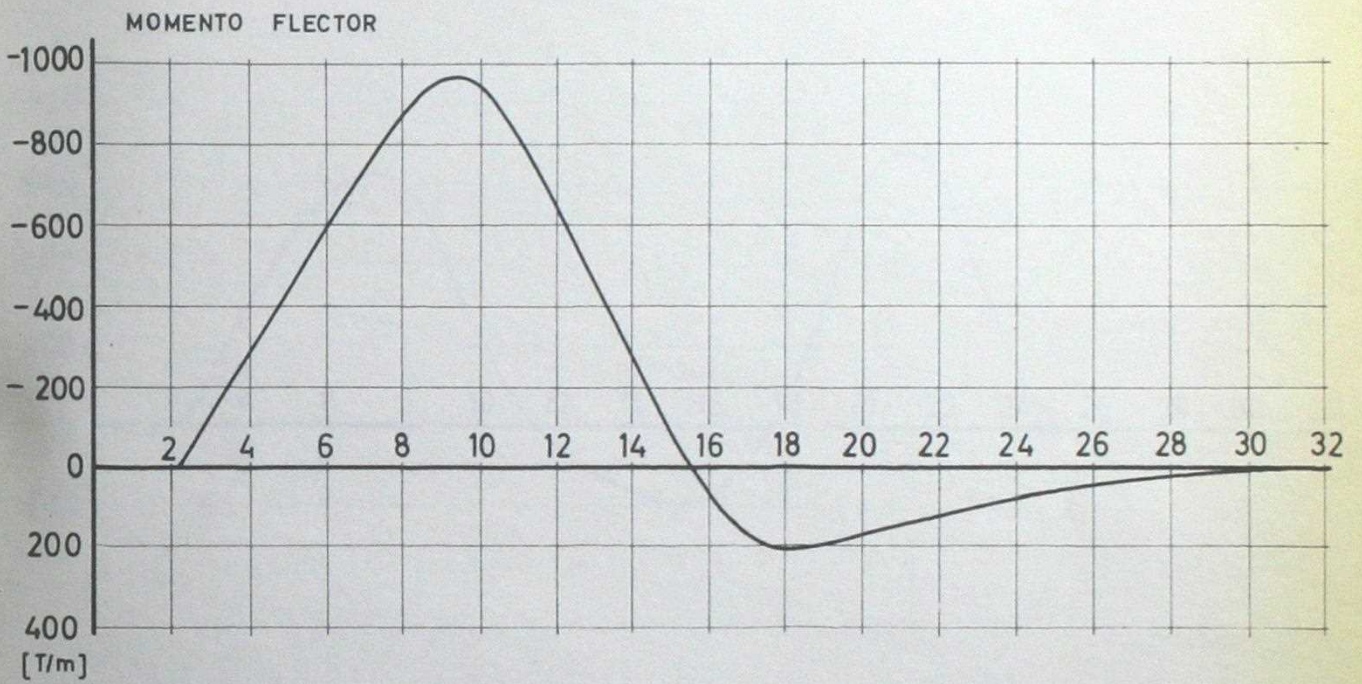
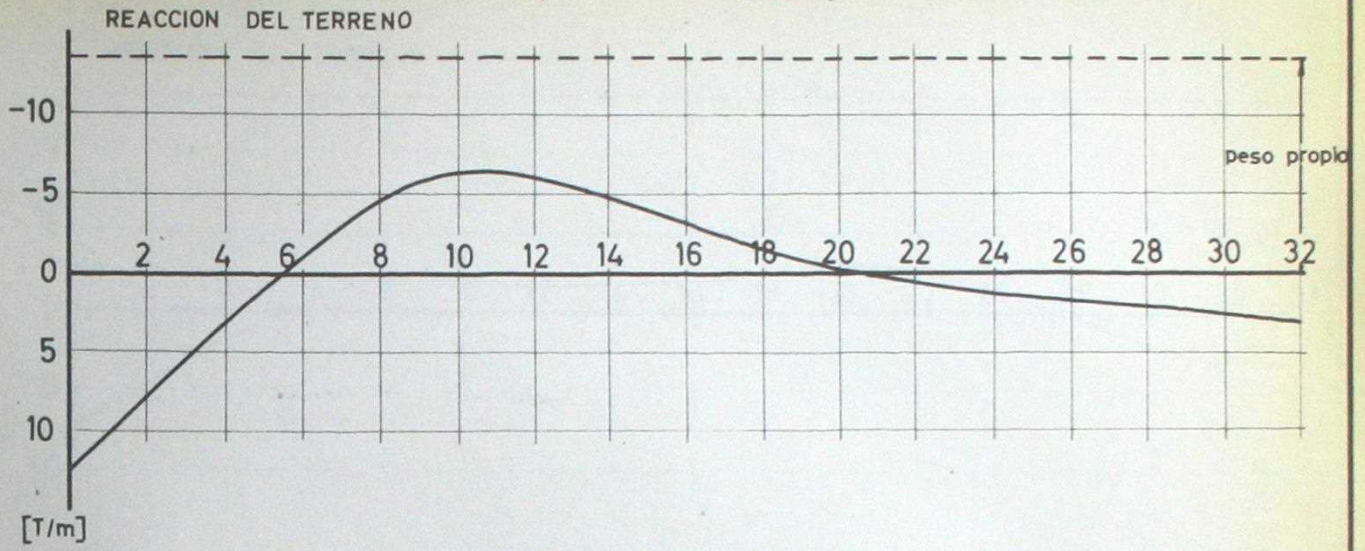
ESFUERZO DE CORTE



ESFUERZOS EN LA VIGA I SOMETIDA A LA ACCION
DEL ENSAYO DE UNA VIGA SOPORTE DE UN PUNTE
GRUA (AL CENTRO)

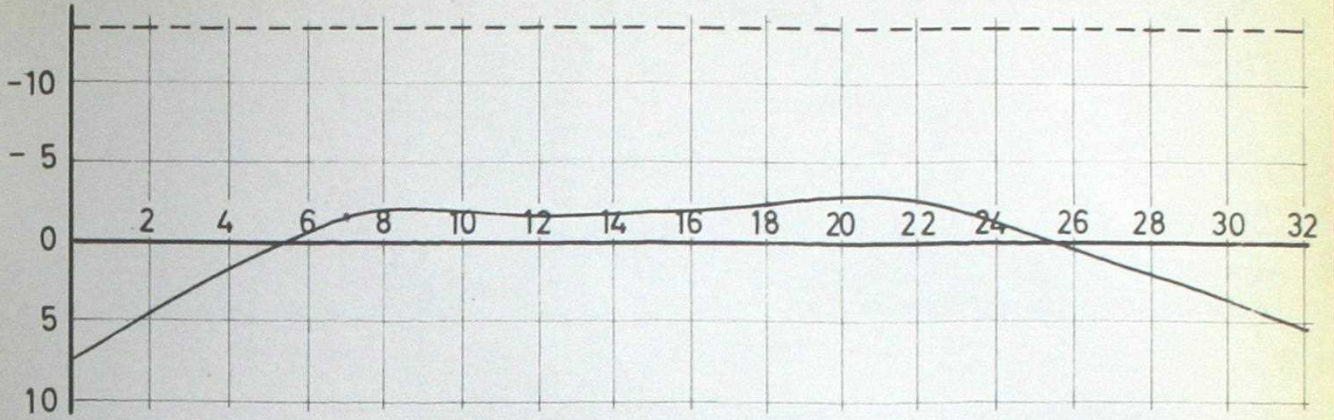


ESFUERZOS EN LA VIGA I SOMETIDA A LA ACCION DEL ENSAYO DE UNA VIGA SOPORTE DE UN PUNTE GRUA (A UN COSTADO)

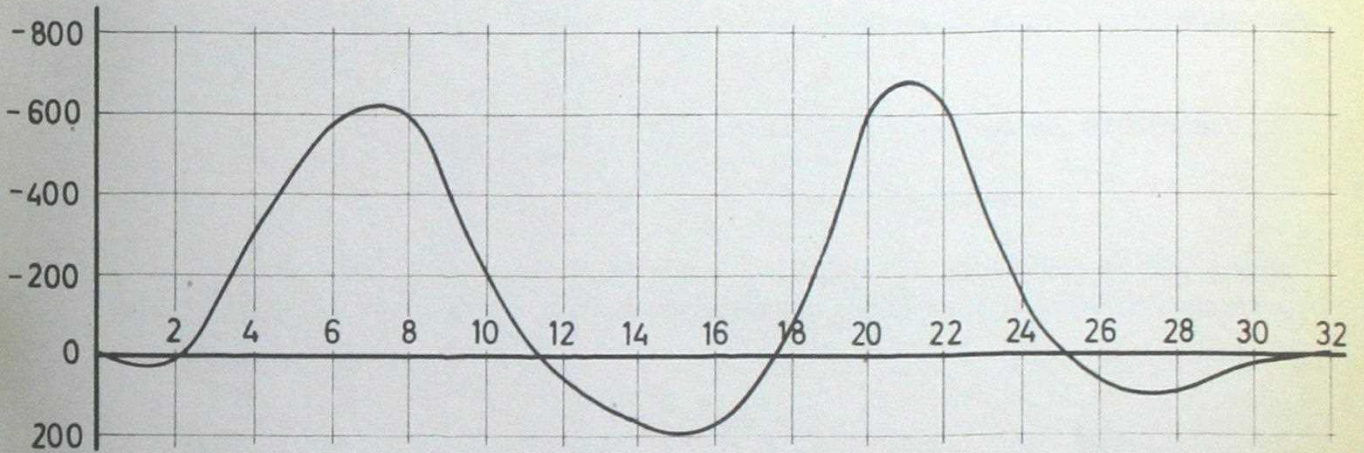


ESFUZOS EN LA VIGA I SOMETIDA A LA ACCION DEL
 ENSAYO DE UNA VIGA SOPORTE DE UN PUEBTE GRUA Y
 DE UN MURO SIMULTANEAMENTE.-

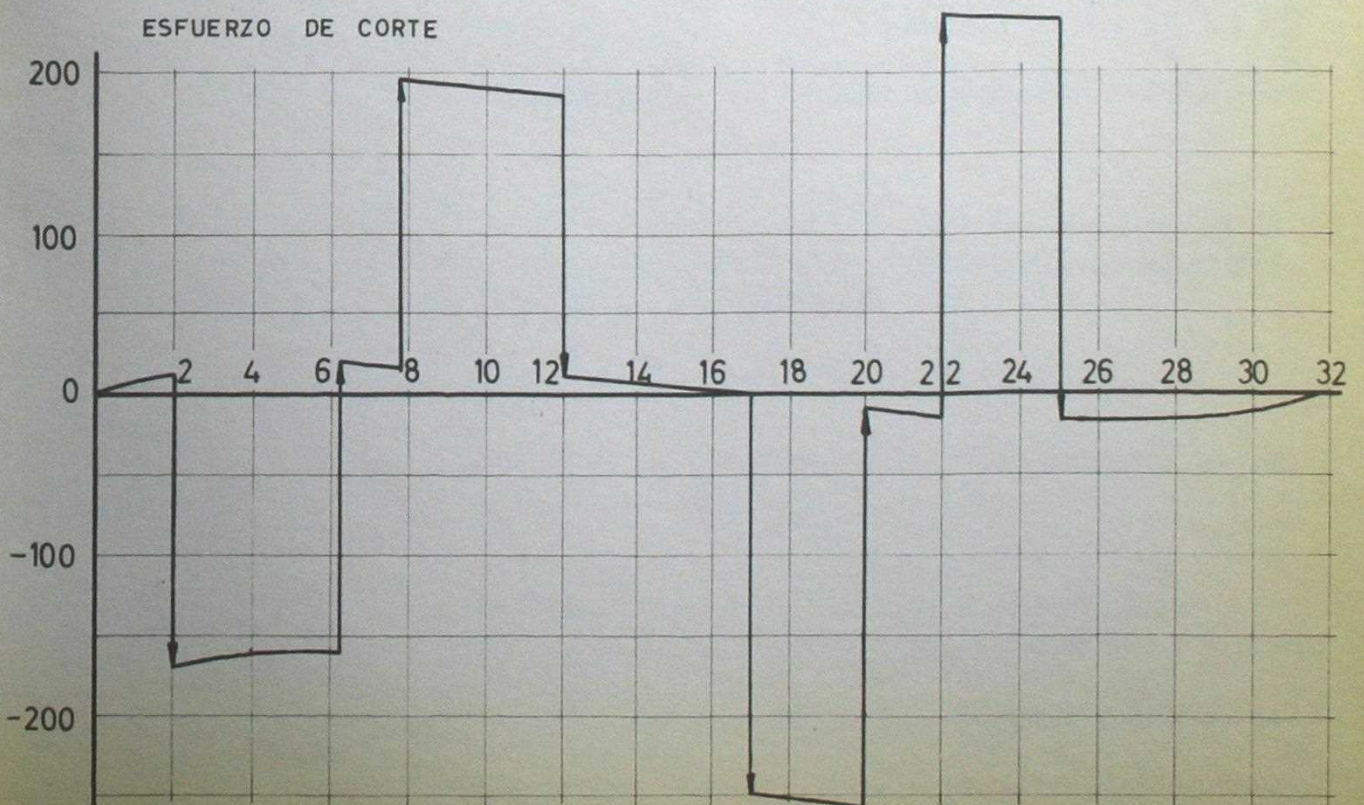
REACCION DEL TERRENO



MOMENTO FLECTOR



ESFUERZO DE CORTE



6.- ANALISIS DE LA CAPACIDAD DE CARGA EN EL SENTIDO TRANSVERSAL.-

6.1.- Solicitaciones.-

6.1.1.- Tipos de solicitaciones.-

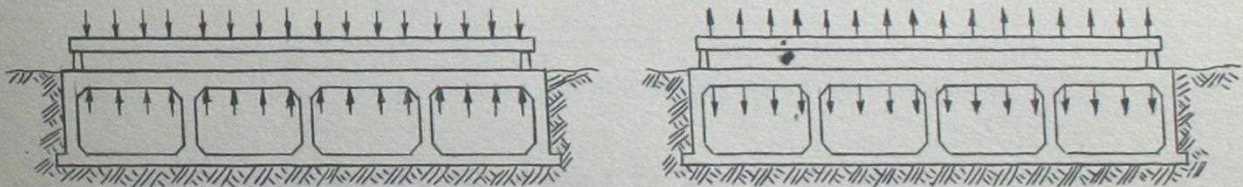
Nuestra losa de pruebas se va a comportar, en el sentido transversal, como una viga Vierendeel apoyada, en su parte inferior, sobre un suelo elástico. Esta viga va a estar sometida a las siguientes solicitaciones :

- El peso propio.
- La presión del suelo sobre los muros laterales.
- La presión del terreno sobre la losa inferior.
- Fuertes cargas concentradas en las perforaciones de la losa superior.

En cuanto a estas últimas solicitaciones, cargas concentradas en las perforaciones, consideraremos los dos casos siguientes, estimados como más desfavorables :

- a) El ensayo de una viga a flexión positiva en el sentido transversal de la losa de pruebas.
- b) El mismo ensayo, pero a flexión negativa.

Ambos casos son opuestos y se podrían presentar en una prueba con cargas alternadas que varíen de un máximo positivo a un máximo negativo.



Supondremos que este estado de solicitaciones debe ser resistido por una franja transversal de 2 m. de ancho, que corresponde al espacio existente entre una perforación y la subsiguiente.

6.1.2.- Peso propio.-

De acuerdo con las dimensiones que hemos determinado, los pesos propios resultan ser los siguientes :

$$\begin{aligned} \text{Losa superior} &= 0.70 \times 2.4 \times 2 = 3.36 \text{ T/m.} \\ \text{Losa inferior} &= 0.50 \times 2.4 \times 2 = 2.40 \text{ T/m.} \\ \text{Muros verticales} &= 0.50 \times 2.4 \times 2 \times 2.20 = 5.3 \text{ T.c/muro} \end{aligned}$$

El peso total del conjunto de 16.00 m. de largo y 2.00 m. de ancho será de 119 Ton.

No se considerará el peso propio del equipo de prueba y la viga.

6.1.3.- Presión del suelo sobre los muros laterales.-

Debido a que estos muros no tienen posibilidad de desplazamiento, no se producirá el estado de empuje activo. Se considerará, entonces, un empuje neutro igual a dos veces el empuje activo.

Supondremos que se trata de un suelo no cohesivo y con un ángulo de rozamiento interno $\phi = 25^\circ$.

Según la teoría de Rankine del empuje activo (31), el coeficiente N_ϕ vale :

$$N_\phi = \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \phi) = \operatorname{tg}^2 20^\circ = 0.132$$

El empuje activo en la parte inferior del muro vale :

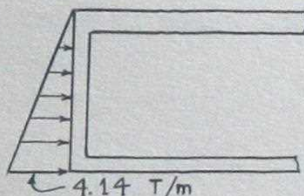
$$p_a = N_\phi \cdot h \cdot \gamma = 0.132 \times 2.9 \times 2.7 = 1.035 \quad \text{T/m}^2$$

El empuje neutro será igual a dos veces este valor :

$$p_N = 2.07$$

Y, por último, la carga en la parte inferior, para 2 m. de ancho valdrá :

$$p = 2 \times 2.07 = 4.14 \quad \text{T/m}$$



No se considerarán sobrecargas sobre el terreno.

6.1.4.- Presión del suelo sobre la losa inferior.-

Las presiones con que actúe el suelo sobre la losa inferior van a depender de las deformaciones que sufra dicha losa y de la constante de reacción del suelo. Las deformaciones de la losa van a depender, a su vez, de las fuerzas que actúen sobre ella. El problema se va a resolver, como se verá más adelante, por aproximaciones sucesivas. Por el momento nos limitaremos a determinar la constante de reacción del terreno K para esta viga y su característica de longitud, β .

Como se ha demostrado en el Anexo, la constante de reacción del terreno para una viga infinita de un ancho B está dada por la expresión aproximada :

$$K = 0.65 \sqrt{\frac{E_s B^4}{E_b I}} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2}$$

En nuestro caso tenemos los siguientes valores :

$$E_s = 1.5 \text{ T/cm}$$

$$E_b = 210 \text{ T/cm}$$

$$B = 200 \text{ cm.}$$

$$I = 1/12 \times 2 \times (0.45)^3 = 1.53 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

Substituyendo estos valores en la expresión anterior obtenemos:

$$K = 1.27 \text{ T/cm}^2$$

Supondremos que este valor es válido también para una viga de longitud finita.

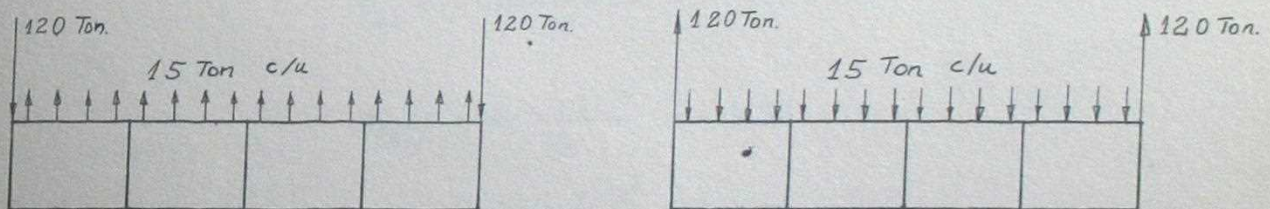
A su vez, el valor de β está dado por la expresión :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4 E_b I}} = 0.56 \text{ m}^{-1}$$

6.1.5.- Cargas concentradas en las perforaciones de la losa superior.-

Serán las cargas provenientes del posible ensayo. Vamos a suponer que la losa debe ser capaz de resistir, en una franja transversal de dos metros de ancho, cargas concentradas de 15 Ton. cada 1 m., es decir, en todas las perforaciones correspondientes a una fila transversal.

Primero se analizará el caso en que estas cargas actúen hacia arriba, junto con dos reacciones hacia abajo en los extremos, de 120 Ton. cada una, y luego se analizará el mismo caso pero con las cargas en sentido opuesto.

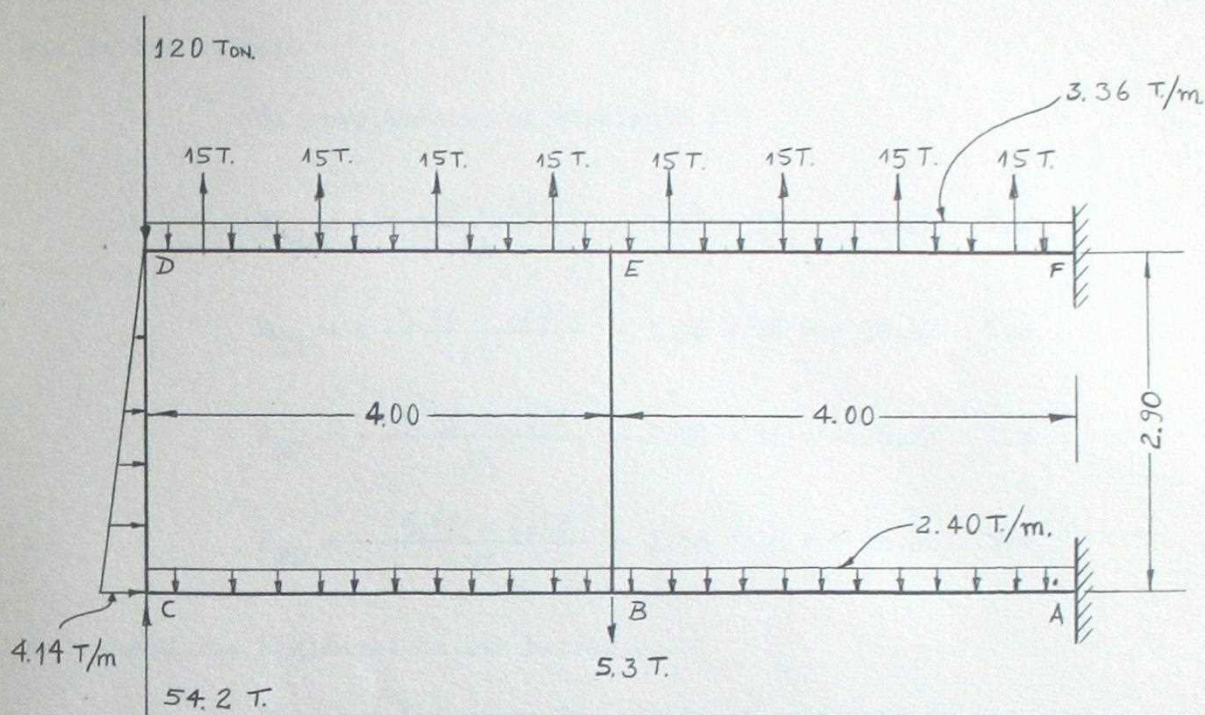


6.2.- Viga Vierendeel sobre suelo elástico sometida a un sistema de cargas simétrico hacia arriba.-

6.2.1.- Primera aproximación.-

Como primera aproximación supondremos que la losa inferior se apoya en el suelo sólo en los extremos, sin estar en contacto con él en el resto de su extensión. De esta manera todo el peso de la estructura estará equilibrado por dos fuerzas verticales en los extremos.

Dada la simetría del sistema de cargas, analizaremos sólo la mitad izquierda de la estructura, la cual estará sometida al siguiente sistema de cargas :



Los esfuerzos serán determinados mediante el método de H. Cross, suponiendo despreciables las deformaciones axiales de las barras.

6.2.1.1.- Determinación de los momentos de empotramiento.-

a) Barras AB y BC :

$$M_{AB} = - \frac{2.4 \times (4)^2}{12} = - 3.20 \text{ T.m}$$

$$M_{BA} = + \frac{2.4 \times (4)^2}{12} = + 3.20 \text{ T.m}$$

$$M_{BC} = - \frac{2.4 \times (4)^2}{12} = - 3.20 \text{ T.m}$$

$$M_{CB} = \frac{2.4 \times (4)^2}{12} = + 3.20 \text{ T.m}$$

b) Barra CD :

$$M_{CD} = + \frac{4.14 \times (2.9)^2}{20} = + 1.74 \text{ T.m}$$

$$M_{DC} = - \frac{4.14 \times (2.9)^2}{30} = - 1.16 \text{ T.m}$$

c) Barras DE y EF :

Calcularemos los momentos de empotramiento mediante superposición del caso de una viga doblemente empotrada con una carga uniforme y del caso de esta misma viga con una carga concentrada aplicada a cada

una de las cargas.

El resultado es el siguiente :

$$M_{DE} = + \frac{3.36 \times (4)^2}{12} - 1.38 \times 15 = - 16.22 \quad \text{T.m}$$

$$M_{ED} = + \frac{3.36 \times (4)^2}{12} - 1.38 \times 15 = + 16.22 \quad \text{T.m}$$

$$M_{EF} = + \frac{3.36 \times (4)^2}{12} - 1.38 \times 15 = - 16.22 \quad \text{T.m}$$

$$M_{FE} = + \frac{3.36 \times (4)^2}{12} - 1.38 \times 15 = + 16.22 \quad \text{T.m}$$

6.2.1.2.- Rigideces de las barras.-

Sólo nos interesan las rigideces relativas de las barras entre sí :

a) Barras AB y BC :

$$\text{Sección} = 2.00 \times 0.45 \quad \text{m}^2$$

$$K_1 = \frac{E I_1}{L_1} = 10 \text{ C} \frac{h_1^3}{L_1} = 10 \text{ C} \frac{(0.45)^3}{4} = 0.228 \times \text{C}$$

b) Barras CD y BE :

$$\text{Sección} = 2.00 \times 0.45 \quad \text{m}^2$$

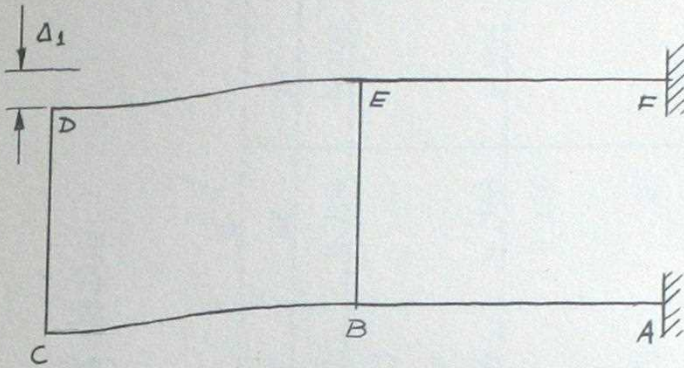
$$K_2 = \frac{E I_2}{L_2} = 10 \text{ C} \frac{h_2^3}{L_2} = 10 \text{ C} \frac{(0.45)^3}{2.9} = 0.314 \times \text{C}$$

c) Barras DE y EF :

$$\text{Sección} = 2.00 \times 0.45 \quad \text{m}^2$$

$$K_3 = \frac{E I_3}{L_3} = 10 \text{ C} \frac{h_3^3}{L_3} = 10 \text{ C} \frac{(0.65)^3}{4} = 0.687 \times \text{C}$$

6.2.1.4.- Repartición de momentos para un desplazamiento de la barra CD hacia abajo.-



$$M_{\Delta_1} = \frac{6 E I}{L^2} \Delta_1$$

Si suponemos un momento = - 1000 para la barra CB, resulta :

$$M_{DE} = - 1000 \left(\frac{65}{45} \right)^3 = - 3013$$

Distribuimos entonces los siguientes momentos :

$$M_{DE} = -3013$$

$$M_{ED} = -3013$$

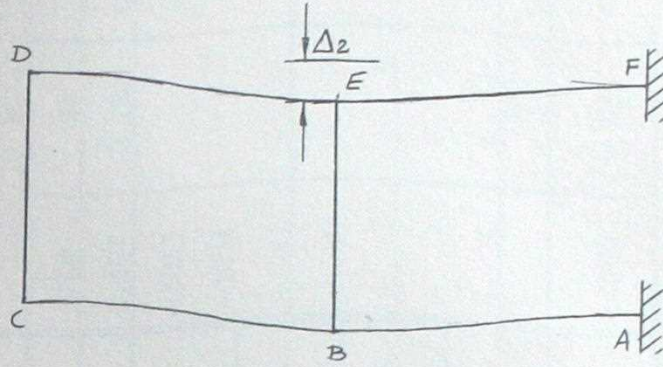
$$M_{CB} = -1000$$

$$M_{BC} = -1000$$

6.2.1.4.- Repartición de momentos para un desplazamiento de la barra CD hacia abajo.-

NUDO	A			B			C			D			E			F
	AB	BA	BE	BC	CB	CD	DC	DE	ED	EB	EF	FE				
COEF. DISTRIB.		0.296	0.408	0.296	0.42	0.58	0.314	0.686	0.407	0.186	0.407					
				-1000	-1000	+ 473	+ 946	-3013	-3013							
	+ 121	+ 242	+ 184	+ 242	+ 121			+ 403	+ 805	+ 368	+ 805	+ 403				
	- 13	- 25	+ 185	+ 185	+ 170	+ 236	+ 118			+ 166						
	- 4		- 35	- 25	- 13	- 82	- 164	- 357	- 179	- 18						
			+ 3	+ 20	+ 40	+ 55	+ 28	+ 7	+ 13	+ 5	+ 13	+ 7				
			- 9	- 7	- 4	- 6	- 11	- 24	- 12	- 5						
			+ 2	+ 2	+ 4	+ 6	+ 3	+ 4	+ 7	+ 3	+ 7	+ 4				
			- 2	- 1			- 2	- 5	- 3							
									+ 1	+ 1	+ 1					
TOTALES	+ 104	+ 209	+ 475	- 684	- 682	+ 682	+ 918	- 918	-1347	+ 520	+ 826	+ 414				

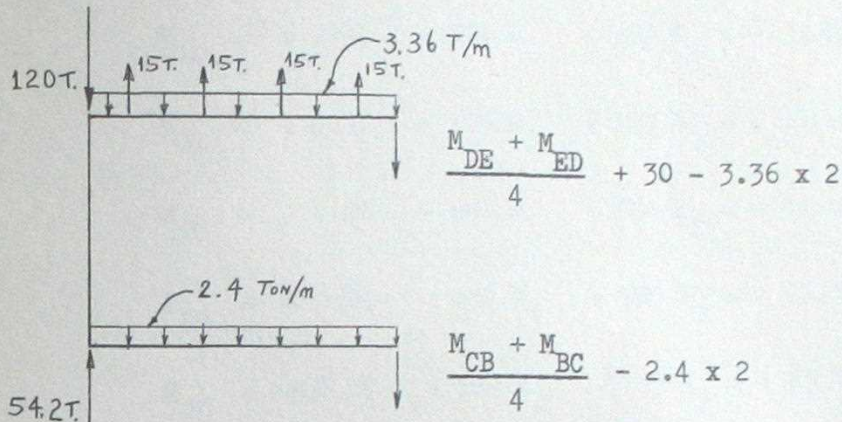
6.2.1.5.- Repartición de momentos para un desplazamiento de la barra BE hacia abajo.-



Suponiendo que en los extremos de las barras AB y BC se producen momentos iguales a -1000 y $+1000$, respectivamente, en las barras DE y EF se producirán momentos iguales a $+3013$ y -3013 .

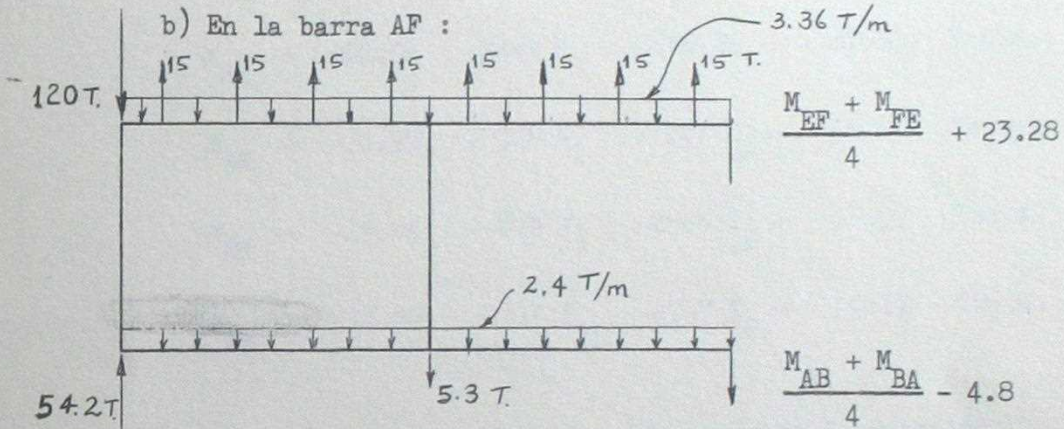
6.2.1.6.- Ecuaciones de corte.-

a) En la barra BE :



Planteando la condición de equilibrio de las fuerzas verticales obtenemos :

$$M_{DE} + M_{ED} + M_{CB} + M_{BC} = -189.3$$



La nueva ecuación de equilibrio nos da la siguiente expresión :

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{EF} + M_{FE} = -62.64$$

Si designamos por K_1 y K_2 los coeficientes que deben multiplicar los momentos obtenidos para los desplazamientos de las barras CD y BE respectivamente, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones a partir de las relaciones de equilibrio expresadas anteriormente :

$$\begin{cases} -3631 K_1 + 5179 K_2 = -202.3 \\ 1533 K_1 - 7375 K_2 = -58.94 \end{cases}$$

La solución de este sistema nos da por resultado :

$$K_1 = 0.0986$$

$$K_2 = 0.0301$$

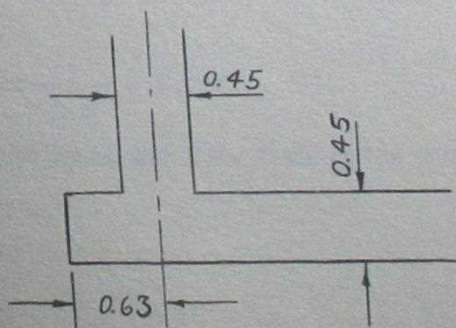
Con estos valores encontramos los siguientes momentos totales en las diferentes barras :

$$\begin{aligned}
 M_{AB} &= - 2.82 + 104 K_1 - 998 K_2 = - 22.59 \text{ Ton.m.} \\
 M_{BA} &= + 3.96 + 209 K_1 - 997 K_2 = - 5.43 \text{ Ton.m.} \\
 M_{BE} &= + 0.30 + 475 K_1 + 103 K_2 = + 50.24 \text{ Ton.m.} \\
 M_{BC} &= - 4.26 - 684 K_1 + 894 K_2 = - 44.82 \text{ Ton.m.} \\
 M_{CB} &= - 0.08 - 682 K_1 + 783 K_2 = - 43.78 \text{ Ton.m.} \\
 M_{CD} &= + 0.07 + 682 K_1 - 783 K_2 = + 43.78 \text{ Ton.m.} \\
 M_{DC} &= + 3.08 + 918 K_1 - 1117 K_2 = + 60.04 \text{ Ton.m.} \\
 M_{DE} &= - 3.08 - 918 K_1 + 1117 K_2 = - 60.04 \text{ Ton.m.} \\
 M_{ED} &= +20.38 - 1347 K_1 + 2386 K_2 = - 40.68 \text{ Ton.m.} \\
 M_{EB} &= - 0.95 + 520 K_1 + 197 K_2 = + 56.27 \text{ Ton.m.} \\
 M_{EF} &= -19.44 + 826 K_1 - 2583 K_2 = - 15.59 \text{ Ton.m.} \\
 M_{FE} &= +14.60 + 414 K_1 - 2797 K_2 = - 29.17 \text{ Ton.m.}
 \end{aligned}$$

6.2.2.- Segunda aproximación : Consideración de la reacción del suelo.-

En la primera aproximación habíamos supuesto que gran parte de la losa inferior se levantaba del terreno, apoyándose sólo en sus extremos. Ahora determinaremos la realidad o no realidad de este hecho, calculando a su vez las presiones de contacto con el terreno y su influencia sobre los esfuerzos en el resto de las barras. Para calcular estas presiones haremos uso de las tablas para calcular vigas finitas sobre suelos elásticos que se incluyen en el anexo.

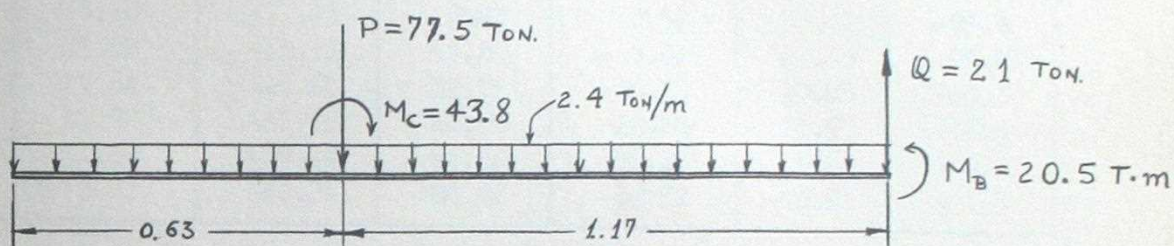
Debido a que el peso propio constituye una carga de consideración (119 Ton.), los "pilares" extremos de la viga Vierendeel descargarán solicitaciones apreciables sobre la losa inferior. Será aconsejable entonces prolongar dicha losa con un pequeño voladizo, el cual ayudará a canalizar en mejor forma estos esfuerzos.



6.2.2.1.- Determinación de la reacción del suelo suponiendo una viga finita sobre un terreno elástico.-

Mediante ciertos tanteos preliminares se ha determinado que la losa inferior se separa del terreno a una distancia de aproximadamente 1.80 m. del extremo del voladizo, si éste mide 0.63 m.

Las solicitaciones que actúan sobre esta viga de 1.80 m. de longitud serán las siguientes :



Los valores de las cargas son los siguientes :

a) El momento en el extremo derecho lo obtenemos del diagrama de momentos :

$$M_b = 20.5 \text{ T.m.}$$

b) El esfuerzo de corte Q lo obtenemos mediante una ecuación de equilibrio de momentos en el punto C.

$$Q \times 1.17 - 2.6 \times 0.58 = 43.8 - 20.5$$

$$Q = 21 \text{ Ton.}$$

c) La carga P la obtenemos mediante la condición de equilibrio vertical de las fuerzas :

$$P = 77.5 \text{ Ton.}$$

La característica de nuestra viga finita, βL , vale :

$$\beta L = 0.56 \times 1.80 = 1.008$$

Usaremos entonces la tabla correspondiente a $\beta L = 1$ del anexo.

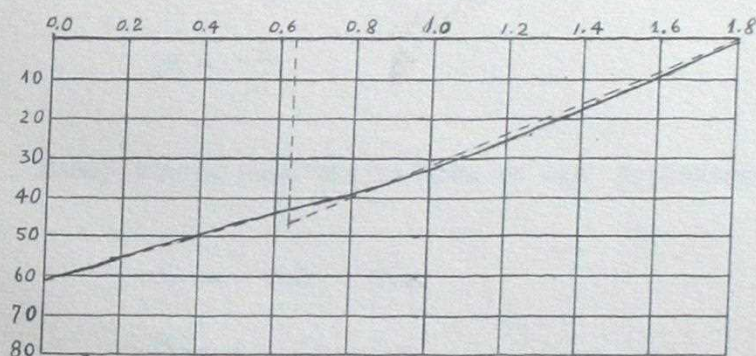
$$\beta = \frac{1}{1.8} = 0.5556$$

Se obtienen así los siguientes resultados :

x	P = 77.5 C = 0.63	Q = -21 C = 1.80	M _L = 43.8 C = 1.8	M _D = -20.5 C = 1.8	Σ R	Σ R + 2.4
m	R ₁ = P ₁ /β λ _{R1}	R ₂ = Q/β λ _{R2}	R ₃ = M _L /β ²	R ₄ = M _D /β ² λ _{R4}	T/m	T/m
0.00	81.13	22.58	-81.97	36.47	58.21	+60.6
0.18	73.72	15.85	-65.45	29.34	53.46	+55.9
0.36	66.31	9.11	-48.90	22.20	48.72	+51.1
0.54	58.78	2.36	-32.30	15.03	43.87	+46.3
0.72	51.16	- 4.42	-15.64	7.82	38.92	+41.3
0.90	43.40	-11.23	0.73	0.51	33.41	+35.8
1.08	35.52	-18.11	16.85	- 6.91	27.35	+29.8
1.26	27.64	-25.05	32.76	-14.50	20.85	+23.3
1.44	19.72	-32.06	48.55	-22.28	13.93	+16.3
1.62	11.80	-39.14	64.30	-30.28	6.68	+ 9.1
1.80	3.83	-46.24	80.02	-38.52	- 0.91	+ 1.5

Se puede apreciar que la distancia a la cual se supuso que la losa inferior se levantaría del suelo era aproximadamente correcta.

Obtenemos así el siguiente diagrama de reacciones del suelo :



Para efectos prácticos, dada la poca precisión con que se conoce el coeficiente de reacción del suelo K y la pequeña influencia que tiene sobre los momentos de las demás barras dicha reacción, vamos a usar el diagrama simplificado de la figura : un trapecio hacia el lado izquierdo de bases 61 T/m. y 43 T/m. y un triángulo hacia el lado derecho de 47 T/m. de altura.

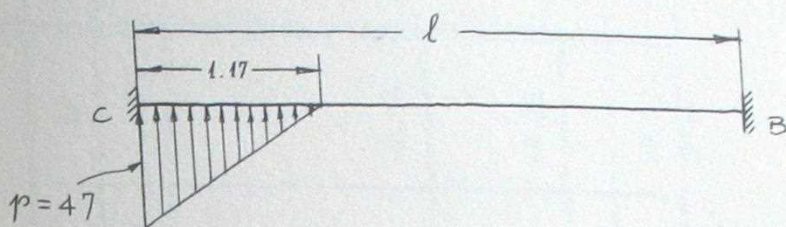
6.2.2.2.- Influencia de la presión del suelo sobre el resto de las barras.-

El diagrama trapecial de cargas del lado izquierdo nos conduce al siguiente momento flector sobre el nudo C :

$$M = \frac{43 \times (0.63)^2}{2} + \frac{(61 - 43) (0.63)^2}{3}$$

$$M = 8.51 + 2.38 = 10.9 \quad \text{T.m.}$$

El diagrama triangular de cargas del lado derecho produce los siguientes momentos de empotramiento en la barra BC :



valen : (32)

Para este estado de cargas los momentos de empotramiento

$$M_C = - \frac{1}{3} (2L - R)$$

$$M_B = \frac{1}{3} (2R - L)$$

Donde :

$$R = \frac{pl^2}{60} \alpha^2 (10 - 3\alpha^2)$$

$$L = \frac{pl}{60} \alpha^2 (20 - 15\alpha + 3\alpha^2)$$

$$\alpha = \frac{a}{l}$$

obtenemos :

Reemplazando nuestros valores en las expresiones anteriores

$$M_C = - 8.0 \quad \text{T.m.}$$

$$M_B = + 1.27 \quad \text{T.m.}$$

Los momentos desequilibrantes que actúan en los nudos C y B son entonces :

$$M_{CB} = 10.9 - 8.0 = + 2.9 \quad \text{T.m.}$$

$$M_{BC} = + 1.27 \quad \text{T.m.}$$

La repartición de estos momentos, sin considerar desplazamientos en los nudos es la siguiente :

Las ecuaciones de corte para este caso son las siguientes :

$$M_{DE} + M_{ED} + M_{CB} + M_{BC} = 0$$

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{EF} + M_{FE} = 0$$

O bien :

$$- 363 K_1 + 518 K_2 = - 2.70$$

$$165 K_1 - 738 K_2 = + 0.33$$

De donde obtenemos :

$$K_1 = 0.0104$$

$$K_2 = 0.00207$$

Con los coeficientes K_1 y K_2 obtenemos los siguientes resultados para los momentos en las barras :

M_{AB}	=	- 0.07	+ 0.11	- 0.21	=	- 0.17	T.m.
M_{BA}	=	- 0.13	+ 0.22	- 0.21	=	- 0.12	T.m.
M_{BE}	=	- 0.20	+ 0.49	+ 0.02	=	+ 0.31	T.m.
M_{BC}	=	+ 0.33	- 0.71	+ 0.18	=	- 0.20	T.m.
M_{CB}	=	+ 1.58	- 0.71	+ 0.16	=	+ 1.03	T.m.
M_{CD}	=	- 1.58	+ 0.71	- 0.16	=	- 1.03	T.m.
M_{DC}	=	- 0.57	+ 0.95	- 0.23	=	+ 0.15	T.m.
M_{DE}	=	+ 0.57	- 0.95	+ 0.23	=	- 0.15	T.m.
M_{ED}	=	+ 0.22	- 1.40	+ 0.49	=	- 0.69	T.m.
M_{EB}	=	- 0.13	+ 0.54	+ 0.04	=	+ 0.45	T.m.
M_{EF}	=	- 0.09	+ 0.86	- 0.53	=	+ 0.24	T.m.
M_{FE}	=	- 0.04	+ 0.43	- 0.58	=	- 0.19	T.m.

Superponiendo ahora estos valores a los obtenidos en la primera aproximación, llegamos a los siguientes resultados :

M_{AB}	=	-22.59	- 0.17	=	- 22.76	T.m.
M_{BA}	=	- 5.43	- 0.12	=	- 5.55	T.m.
M_{BE}	=	+50.24	+ 0.31	=	+ 50.55	T.m.
M_{BC}	=	-44.82	- 0.20	=	- 45.02	T.m.
M_{CB}	=	-43.78	+ 1.03	=	- 42.75	T.m.
M_{CD}	=	+43.78	- 1.03	=	+ 42.75	T.m.
M_{DC}	=	+60.04	+ 0.15	=	+ 60.19	T.m.
M_{DE}	=	-60.04	- 0.15	=	- 60.19	T.m.

$$\begin{aligned}
 M_{ED} &= -40.68 & - 0.69 & = - 41.37 \text{ T.m.} \\
 M_{EB} &= +56.27 & + 0.45 & = + 56.72 \text{ T.m.} \\
 M_{EF} &= -15.59 & + 0.24 & = - 15.35 \text{ T.m.} \\
 M_{FE} &= -29.17 & - 0.19 & = - 29.36 \text{ T.m.}
 \end{aligned}$$

La diferencia entre los valores obtenidos en la primera y luego en la segunda aproximación es muy pequeña, por lo que se hace innecesaria una tercera aproximación.

6.3.- Viga Vierendeel sobre suelo elástico sometida a un sistema de cargas simétricas hacia abajo.-

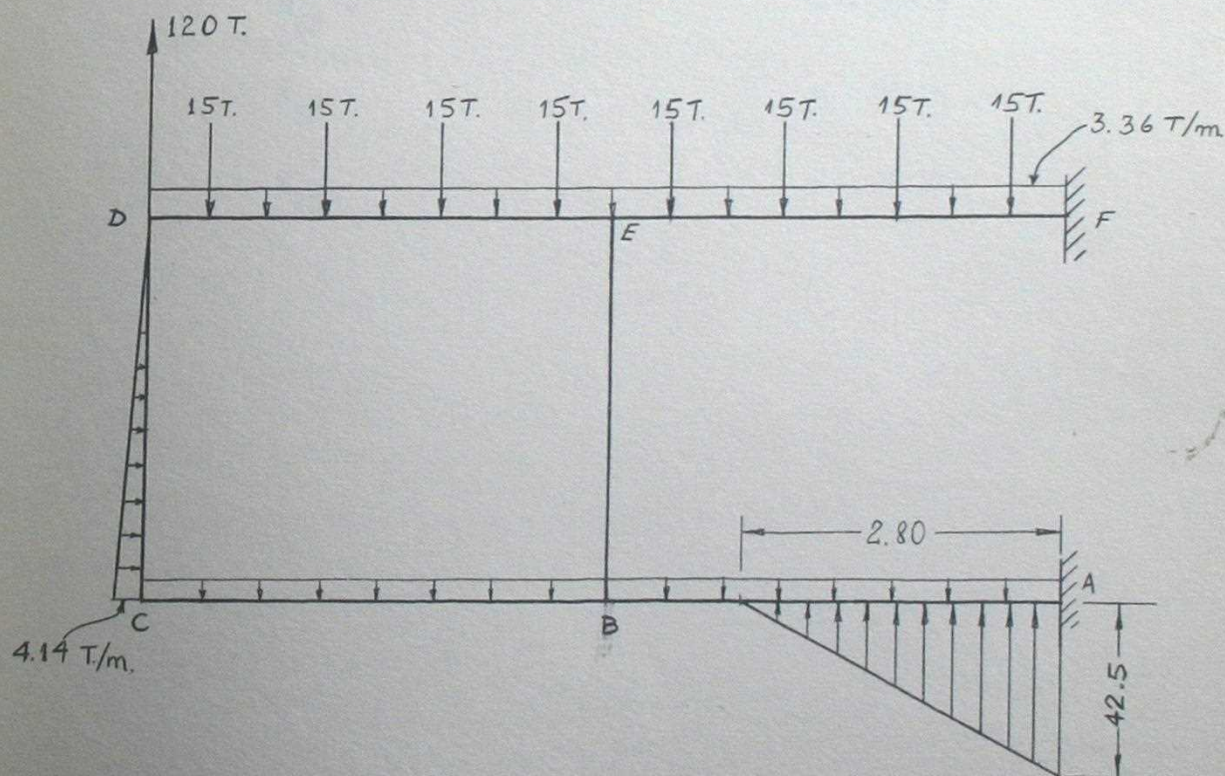
6.3.1.- Primera aproximación.-

Como primera aproximación supondremos que la estructura se apoya sólo en la parte central, levantándose del terreno en el resto. Además, dado que la losa superior es mucho más rígida que la inferior, supondremos también que casi todo el peso se transmite a la losa inferior mediante el "pilar" central. Debido a esta carga, estimaremos que la losa inferior se separará del terreno a una distancia tal que se tenga $\beta L \approx \bar{\pi}$. Resulta entonces:

$$L = \frac{\bar{\pi}}{\beta} = \frac{3.14}{0.56} = 5.6 \text{ m.}, \text{ es decir, que se separará del terreno a } 2.8 \text{ m.}, \text{ aproximadamente, del "pilar" central.}$$

La reacción del terreno sobre la losa inferior se asimilará a un triángulo que tenga por área el peso de la estructura.

Tenemos así las siguientes cargas sobre nuestra estructura:



6.3.1.1.- Determinación de los momentos de empotramiento.-

a) Barra AB.-

Presenta la superposición de dos cargas, una carga uniformemente distribuida de 2.4 T/m. y una carga triangular de 42.5 T/m. y 2.8 m. de largo. Para la carga triangular usaremos las fórmulas de 6.2.2.2.-

$$M_{AB} = - 3.20 + 24.83 = + 21.63 \quad \text{T.m.}$$

$$M_{BA} = + 3.20 - 11.33 = - 8.13 \quad \text{T.m.}$$

b) Barra BC.-

$$M_{BC} = - 3.20 \quad \text{T.m.}$$

$$M_{CB} = + 3.20 \quad \text{T.m.}$$

c) Barra CD.-

$$M_{CD} = \frac{4.14 (2.9)^2}{20} = + 1.74 \quad \text{T.m.}$$

$$M_{DC} = \frac{4.14 (2.9)^2}{30} = - 1.16 \quad \text{T.m.}$$

d) Barras DE y EF.-

$$M_{DE} = + 1.38 \quad 15 + \frac{3.36 (4)^2}{12} = + 25.18$$

$$M_{ED} = \quad \quad \quad = - 25.18$$

$$M_{EF} = \quad \quad \quad = + 25.18$$

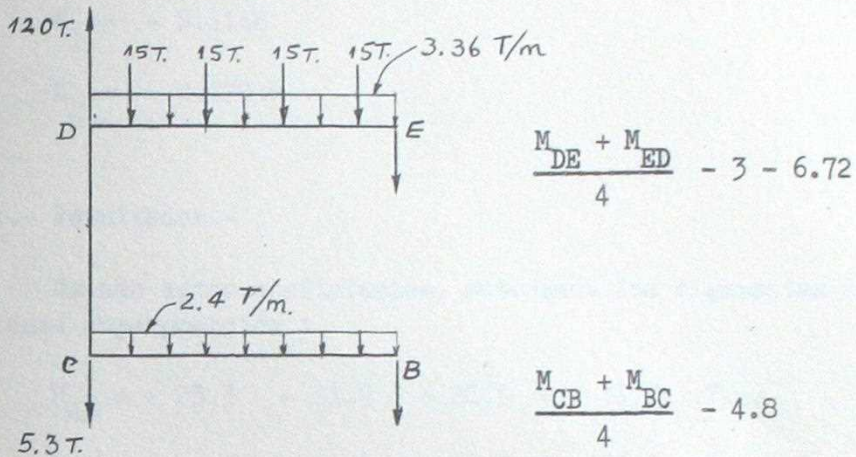
$$M_{FE} = \quad \quad \quad = - 25.18$$

6.3.1.2.- Distribución de momentos suponiendo que no hay desplazamientos de los nudos.-

NUDO	A			B			C			D			E			F
	AB	BA	BE	BC	CB	CD	DC	DE	ED	EB	EF	FE				
BARRA			0.408	0.296	0.420	0.580	0.314	0.686	0.407	0.186	0.407					
COEF. DISTRIB.	+21.63	- 8.13		- 3.20	+ 3.20	+ 1.74	- 1.16	+25.18	-25.18			-25.18				
	+ 1.68	+ 3.35	+ 4.63	+ 3.35	+ 1.68	- 3.78	- 7.55	-16.47	- 8.24	+ 2.32		+ 1.21				
			+ 0.55	- 0.59	- 1.19	- 1.65	- 0.83	+ 1.21	+ 2.41	+ 1.10	+ 2.41	+ 0.03				
			+ 0.02	+ 0.02	+ 0.03	- 0.06	- 0.12	- 0.26	- 0.13	+ 0.03	+ 0.05	+ 0.05				
						+ 0.03	+ 0.02	+ 0.03	+ 0.05							
							- 0.02	- 0.03								
TOTALES	+23.31	- 4.78	+ 5.20	- 0.42	+ 3.72	- 3.72	- 9.66	+ 9.66	-31.09	+ 3.45	+27.64	-23.94				

6.3.1.3.- Ecuaciones de corte.-

a) En la barra BE :

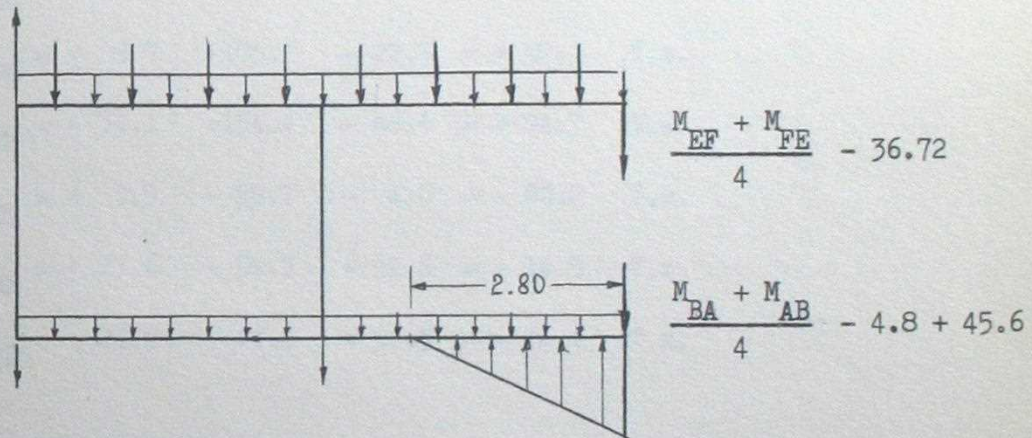


$$\frac{M_{DE} + M_{ED} + M_{CB} + M_{BC}}{4} - 41.52 = 120 - 60 - 23.04 - 5.3$$

Es decir :

$$M_{DE} + M_{ED} + M_{CB} + M_{BC} = 292.7$$

b) En la barra AF :



$$\frac{M_{EF} + M_{FE} + M_{BA} + M_{AB}}{4} + 4.08 = 2.7$$

De donde :

$$M_{EF} + M_{FE} + M_{BA} + M_{AB} = - 5.6$$

Reemplazando los valores correspondientes de los momentos en estas dos ecuaciones, se obtiene el siguiente sistema :

$$\begin{cases} - 18.03 - 3631 K_1 + 5179 K_2 = + 292.7 \\ + 22.23 + 1553 K_1 - 7375 K_2 = - 5.6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - 3631 K_1 + 5179 K_2 = 310.7 \\ 1553 K_1 - 7375 K_2 = -27.8 \end{cases}$$

De este sistema de ecuaciones obtenemos los siguientes resultados :

$$K_1 = - 0.1146$$

$$K_2 = - 0.02036$$

6.3.1.4.- Resultados.-

Usando estos coeficientes, obtenemos los siguientes resultados finales mediante superposición :

$$\begin{aligned} M_{AB} &= + 23.3 - 11.9 + 20.3 = + 31.7 \text{ T.m.} \\ M_{BA} &= - 4.8 - 24.0 + 20.3 = - 8.5 \text{ T.m.} \\ M_{BE} &= + 5.2 - 54.4 - 2.1 = - 51.3 \text{ T.m.} \\ M_{BC} &= - 0.4 + 78.4 - 18.2 = + 59.8 \text{ T.m.} \\ M_{CB} &= + 3.7 + 78.2 - 15.9 = + 66.0 \text{ T.m.} \\ M_{CD} &= - 3.7 - 78.2 + 15.9 = - 66.0 \text{ T.m.} \\ M_{DC} &= - 9.7 - 105.2 + 22.7 = - 92.2 \text{ T.m.} \\ M_{DE} &= + 9.7 + 105.2 - 22.7 = + 92.2 \text{ T.m.} \\ M_{ED} &= - 31.1 + 154.4 - 48.6 = + 74.7 \text{ T.m.} \\ M_{EB} &= + 3.5 - 59.7 - 4.0 = - 60.2 \text{ T.m.} \\ M_{EF} &= + 27.6 - 94.7 + 52.6 = - 14.5 \text{ T.m.} \\ M_{FE} &= - 23.9 - 47.4 + 56.9 = - 14.4 \text{ T.m.} \end{aligned}$$

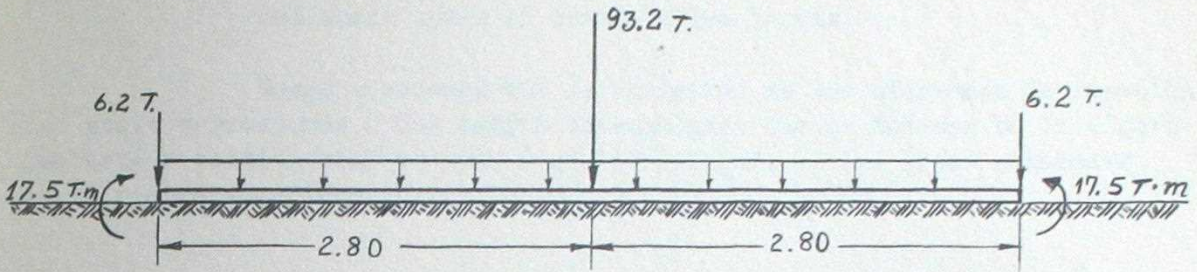
6.3.2.- Segunda aproximación.-

En la primera aproximación supusimos una cierta distribución de la presión del suelo sobre la losa inferior y estimamos una cierta longitud de contacto entre esta losa y el terreno. Ahora determinaremos, mediante las tablas incluídas en el Anexo, la forma que tiene esta distribución de presiones del suelo debido a las cargas determinadas a partir de los valores obtenidos en la primera aproximación.

6.3.2.1.- Determinación de la reacción del suelo suponiendo una viga finita sobre un suelo elástico.-

Mediante algunos tanteos preliminares se ha determinado que la losa inferior se separa del terreno a aproximadamente 2.80 m. del "pilar" central.

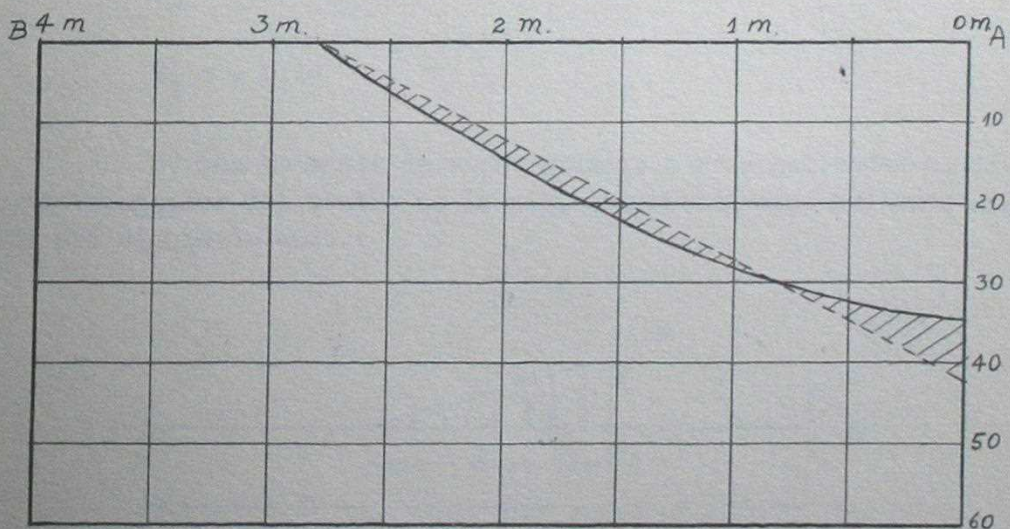
Las solicitaciones que actúan sobre esta viga de 5.60 m. de longitud son las siguientes :



Aplicando la tabla para el cálculo de vigas finitas en suelo elástico correspondiente a $\beta L = 3$, ($\beta = 0.536$) obtenemos los siguientes valores :

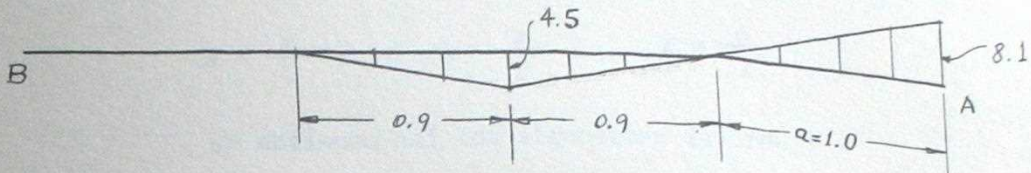
x	$P_1 = 6.2$ $C = 0$	$P_2 = 93.2$ $C = 2.8$	$P_3 = 6.2$ $C = 5.6$	$M_1 = 17.5$ $C = 0$	$M_2 = 17.5$ $C = 5.6$		
[m]	$R_1 = P_1/\beta\lambda_{R1}$	$R_2 = P_2/\beta\lambda_{R2}$	$R_3 = P_3/\beta\lambda_{R3}$	$R_4 = M_1/\beta^2\lambda_{R4}$	$R_5 = M_2/\beta^2\lambda_{R5}$	ΣR	$\Sigma R + 2.4$
0.00	+ 6.68	+ 1.64	- 0.75	-10.05	+ 0.28	- 2.20	+ 0.20
0.56	+ 4.74	+ 8.11	- 0.69	- 4.89	+ 0.79	+ 8.06	+10.46
1.12	+ 3.05	+14.50	- 0.62	- 1.40	+ 1.30	+16.83	+19.23
1.68	+ 1.71	+20.47	- 0.50	+ 0.72	+ 1.75	+24.15	+26.55
2.24	+ 0.75	+25.20	- 0.28	+ 1.81	+ 2.08	+29.56	+31.96
2.80	+ 0.11	+27.24	+ 0.11	+ 2.17	+ 2.17	+31.80	+34.20

En la figura se han puesto estos valores en un gráfico y se ha puesto también la distribución supuesta para la primera aproximación con línea punteada. Se puede observar que lo supuesto se aproxima bastante a lo real.



6.3.2.2.- Influencia de la variación del diagrama de reacción del suelo sobre el resto de las barras.-

Vamos a suponer que la variación de los diagramas de reacción del suelo corresponde a dos cargas triangulares que se indican en la figura que está a continuación y cuyas áreas corresponden a las áreas achuradas de la figura anterior :



Los momentos de empotramiento correspondientes a este sistema de cargas valen : (32)

a) Para el sistema de cargas triangular cercano a A, como ya hemos visto :

$$M'_A = - \frac{1}{3} (2L - R)$$

$$M'_B = + \frac{1}{3} (2R - L)$$

$$R = \frac{pl^2}{60} \alpha^2 (10 - 3\alpha^2)$$

$$L = \frac{pl^2}{60} \alpha^2 (20 - 15\alpha + 3\alpha^2)$$

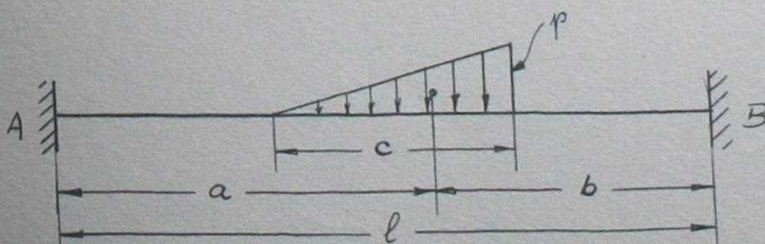
$$\alpha = \frac{a}{l}$$

De aquí resulta :

$$M'_A = - 1.04$$

$$M'_B = + 0.14$$

b) Los momentos de empotramiento correspondientes al sistema de cargas triangular del centro de la viga los obtendremos mediante superposición del siguiente caso : ()



$$M_A = + \frac{1}{3} (2L - R)$$

$$M_B = - \frac{1}{3} (2R - L)$$

$$R = \frac{3}{20} pl^2 \gamma (1 - \beta^2) 10\alpha - (15\alpha - 2\gamma) \gamma^2$$

$$L = \frac{3}{20} pl^2 \gamma (1 - \beta^2) 10\beta - (15\beta + 2\gamma) \gamma^2$$

$$\alpha = \frac{a}{1} ; \quad \beta = \frac{b}{1} ; \quad \gamma = \frac{c}{1}$$

Se obtienen así los siguientes valores :

$$M_A^m = + 2.10$$

$$M_B^m = - 1.95$$

Luego, los momentos de empotramiento totales valen :

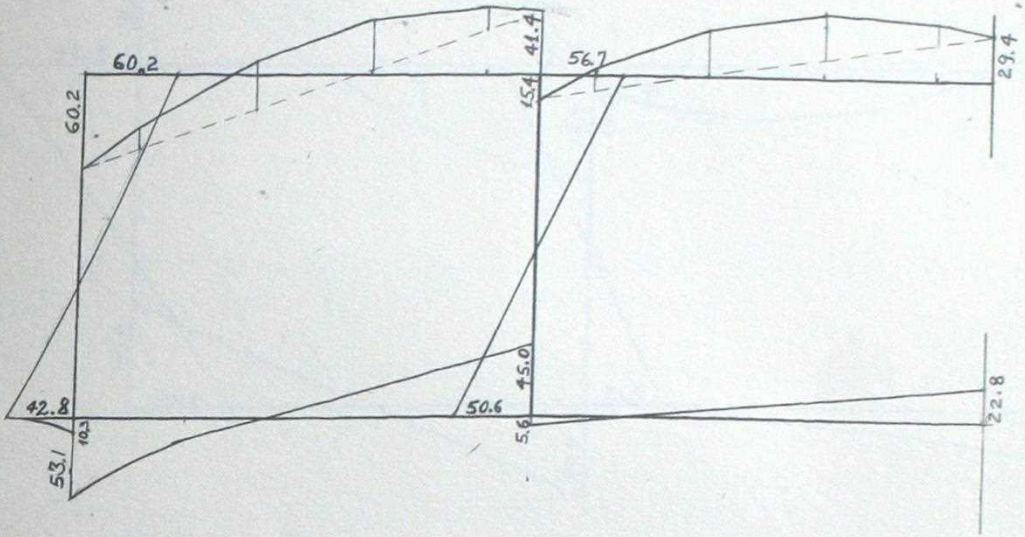
$$M_A = + 1.06 \quad \text{T.m.}$$

$$M_B = - 1.81 \quad \text{T.m.}$$

El efecto de estos momentos de empotramiento sobre el resto de las barras se puede estimar que va a ser pequeño en porcentaje, ya que tenemos valores de cerca de 100 T.m. para algunos nudos. Si consideramos, además, la inexactitud con que podemos predecir las solicitaciones y la poca realidad de algunas hipótesis que se han introducido en el cálculo, podemos concluir que no es necesario seguir el cálculo y que es suficientemente exacto considerar como momentos resultantes los obtenidos en la primera aproximación.

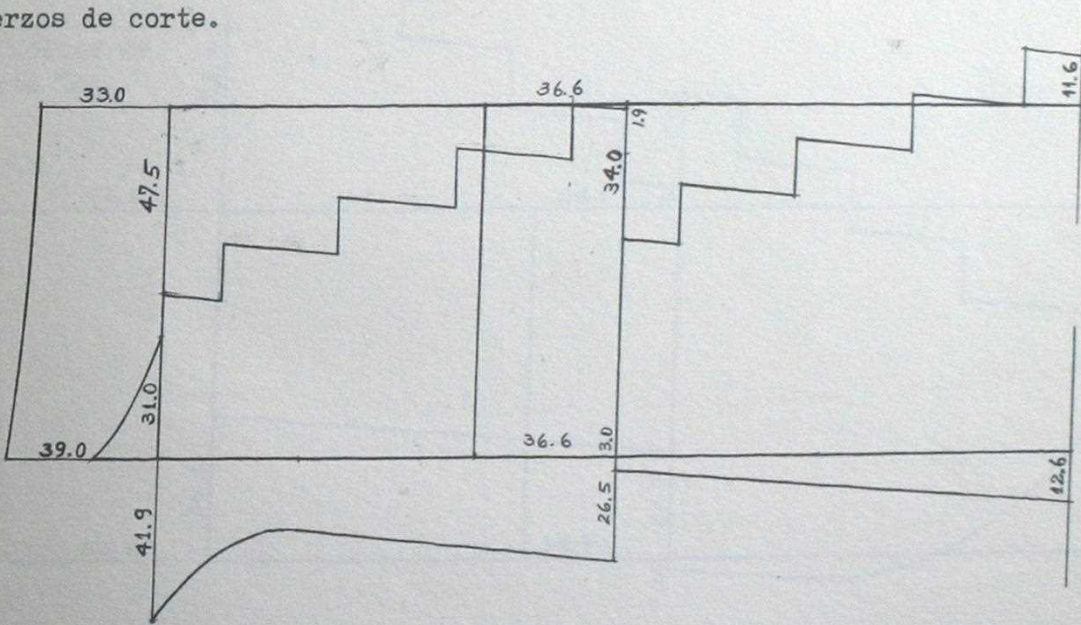
Diagrama de esfuerzos para estado de cargas 6.2.-

Momentos Ton. x m.



Esfuerzos de corte.

Ton.



Esfuerzos axiales

Ton.

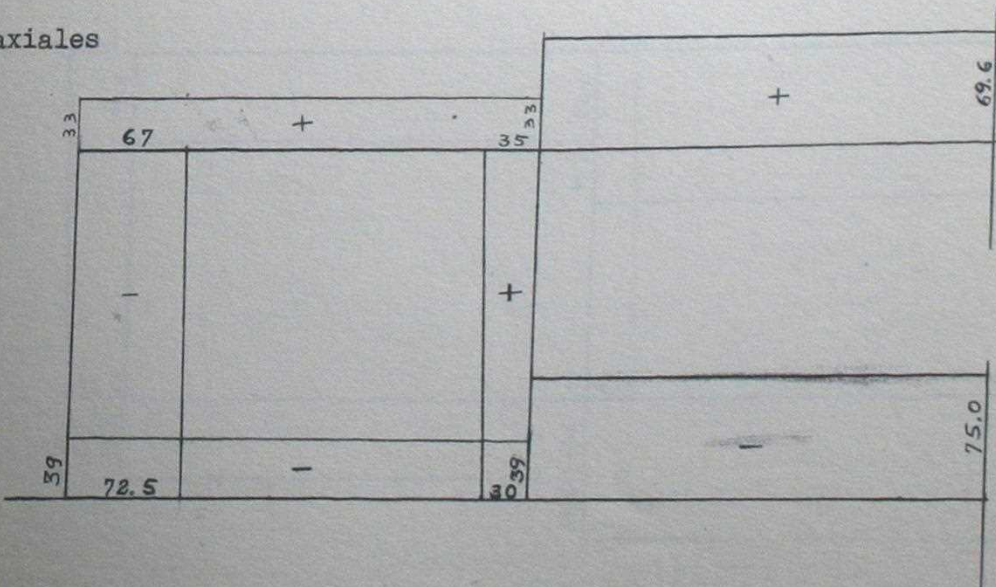
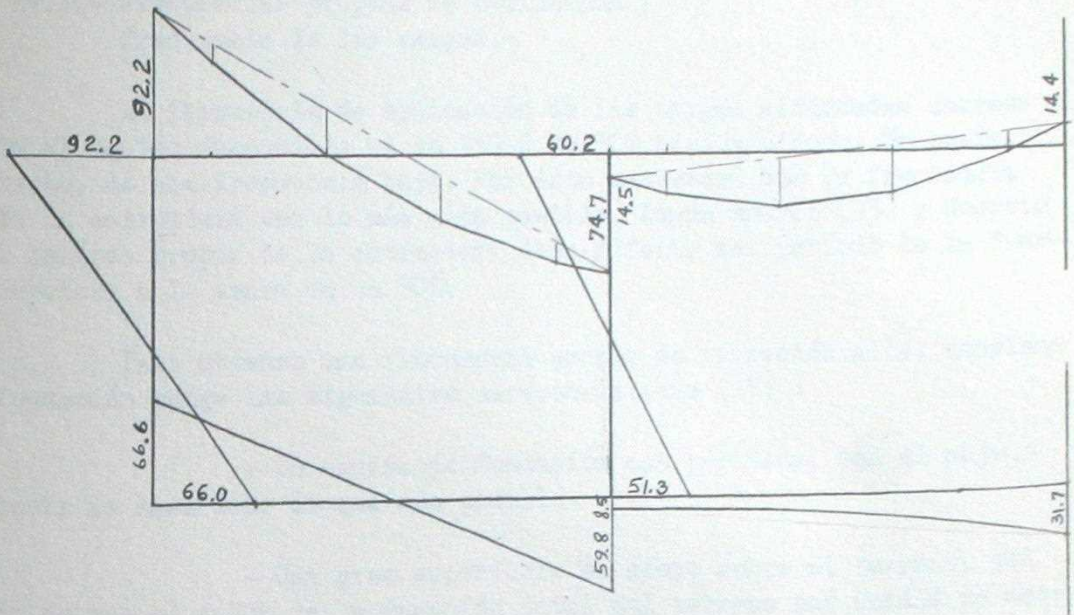
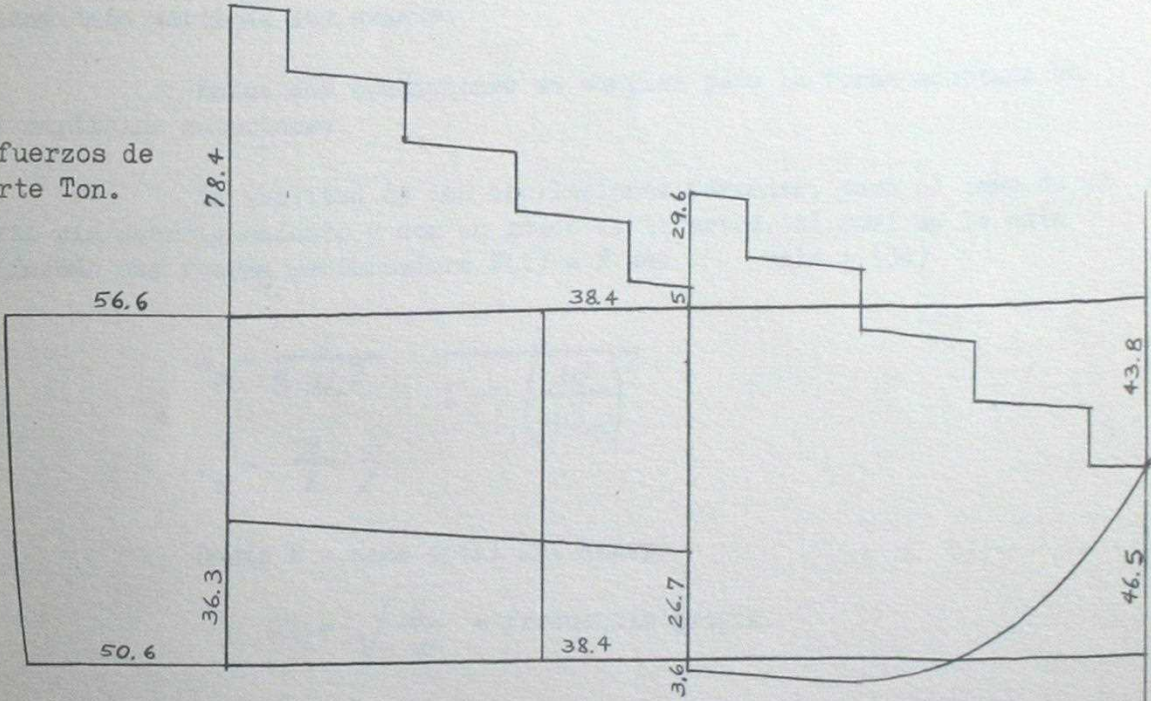


Diagrama de esfuerzos para estado de cargas 6.3.-

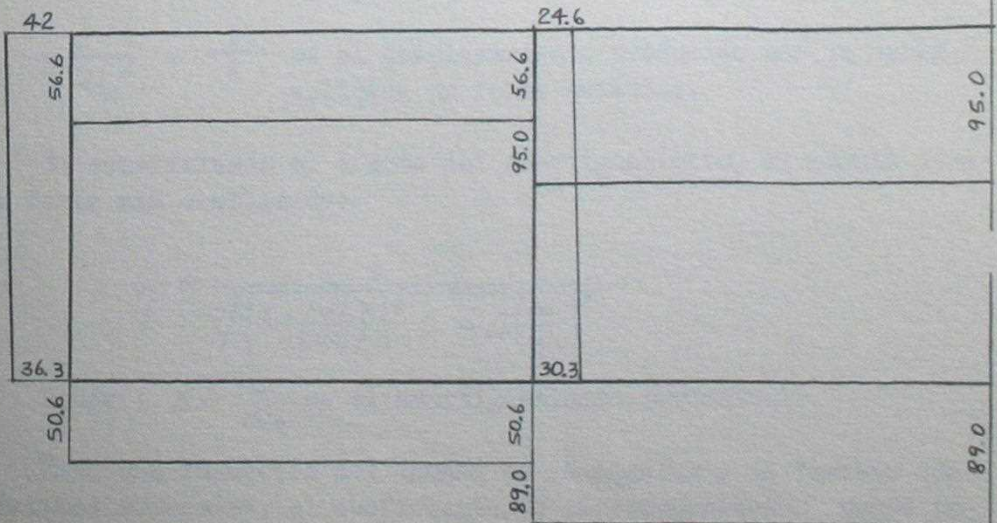
Momentos Ton. x m.



Esfuerzos de corte Ton.



Esfuerzos axiales Ton.



7.- EFECTO DE CARGAS REPETIDAS Y ALTERNADAS.-

7.1.- Frecuencias propias de oscilación y frecuencia de las cargas.-

La frecuencia de aplicación de las cargas alternadas correspondiente al equipo disponible es de 250 ó de 500 ciclos/minuto. Se trata, por lo tanto, de una frecuencia baja. Por ésto convendrá que la frecuencia propia de la estructura sea lo más alta posible. Según Moerch (33) y Guerrin (17), el período propio de la estructura debe diferir del período de la fuerza perturbadora a lo menos en un 30%.

Para obtener una frecuencia propia de vibración alta, conviene que la fundación tenga las siguientes características (17) :

- Un macizo de fundación con pórticos, con el objeto de disminuir la masa todo lo que sea posible.

- Una gran superficie de apoyo sobre el terreno, con el objeto de que el valor de la reacción total del terreno por unidad de desplazamiento vertical sea grande.

Estas dos condiciones se cumplen para la forma adoptada en los capítulos anteriores.

La amplitud de las oscilaciones forzadas, para el caso de un móvil sin amortiguamiento y con un grado de libertad, al cual se le está aplicando una fuerza perturbadora $P(t) = P \text{ sen } \omega t$ vale : (34)

$$A_z = \frac{P}{M \omega_n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$A_z = \frac{P}{K} \cdot \gamma$$

Donde M = masa total del cuerpo.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \text{frecuencia propia.}$$

$$\gamma = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{es el llamado módulo dinámico.}$$

$$\frac{P}{M \omega_n^2} = \frac{P}{K} \quad \text{es el desplazamiento producido por la carga } P \text{ aplicada en forma estática.}$$

Si consideramos el efecto del amortiguamiento, el módulo dinámico toma una forma más complicada:

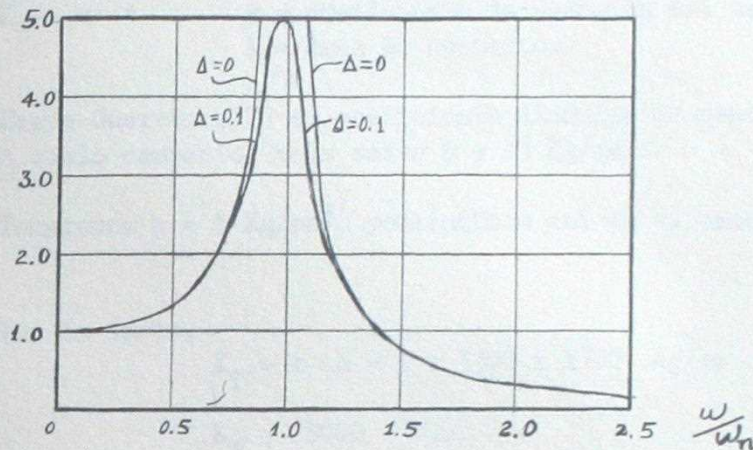
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4 \Delta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Donde : $\Delta = \frac{c}{\omega_n}$ es el amortiguamiento porcentual.

Para una fundación del tamaño de la nuestra y un terreno con las características supuestas, el coeficiente de amortiguamiento puede tener valores bastante bajos. De acuerdo con los valores dados por Barkan (34)

supondremos que $\Delta = 0.05$ a 0.10 .

Para estos valores de Δ se obtiene el siguiente gráfico de los valores del módulo dinámico en función de la razón $\frac{\omega}{\omega_n}$:

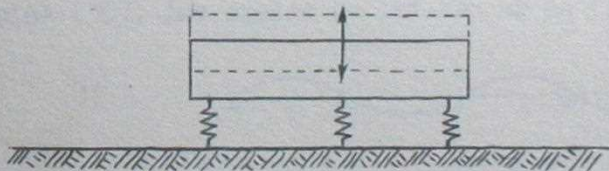


Se puede observar en este gráfico que la influencia del amortiguamiento sobre el módulo dinámico es muy pequeña para valores de ω_n alejados de la frecuencia de la carga perturbadora. Además, el módulo dinámico vale prácticamente 1.0 para valores de $\frac{\omega}{\omega_n}$ menores que 0.25.

Bastará entonces demostrar que las frecuencias propias de vibración de la losa de pruebas son lo suficientemente elevadas como para que no exista ningún peligro de que se produzca resonancia con la frecuencia de las cargas periódicas que se aplicarán durante el funcionamiento del laboratorio.

Consideraremos los siguientes modos de vibrar de la losa como los que poseen frecuencias de vibración más bajas y, por lo tanto, más peligrosas.

a) Vibración en el sentido vertical del conjunto como si fuera una sola masa rígida descansando sobre un suelo elástico. Esta forma de vibrar es utópica, considerando que la resultante de las cargas externas sobre la losa completa va a ser prácticamente cero, pero la consideramos porque parece ser la que da una frecuencia de vibración menor.



La frecuencia propia de vibración para este caso, si se desprecia el amortiguamiento y el efecto de la inercia del terreno que vibra conjuntamente con la losa, vale:

$$n_p = \frac{300}{\sqrt{\delta_{est.}}}$$

Donde $\delta_{est.} = \frac{P}{K_T}$

K_T es el coeficiente de reacción total del terreno.

P es el peso total de la fundación.

$P = 1900$ Ton. para nuestro caso.

$K_T = k A$ $k =$ coeficiente de reacción del terreno.
 $A =$ área de contacto.

Según Guerrin (17) el coeficiente dinámico de reacción del terreno, para un suelo compacto, vale entre 5 y 15 Kg/cm^2 .

Tomaremos $k = 5 \text{ Kg/cm}^2$, poniéndonos así en el caso más desfavorable.

Por lo tanto,

$$K_T = k A = 5 \times 3300 \times 1700 \text{ Kg/cm}$$

$$K_T = 28000 \text{ T.m.}$$

$$d_{\text{est.}} = \frac{1900}{28000} = 0.068 \text{ cm.}$$

$$n_p = \frac{300}{0.068} = 1220 \text{ osc./min.}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{500}{1200} = 0.41 \rightarrow \eta = 1.25$$

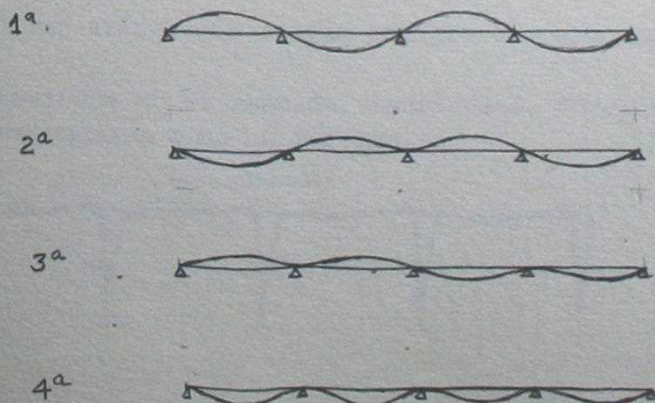
El peligro de resonancia es, por lo tanto, muy remoto.

b) Vibración de la losa superior considerada como una viga continua.

No será necesario calcular en forma exacta la frecuencia de esta forma de vibrar, sino que bastará con demostrar que es lo suficientemente alta.

Supondremos entonces que la losa superior se comportará como una viga continua simplemente apoyada de cuatro tramos.

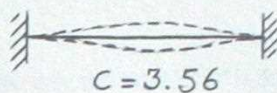
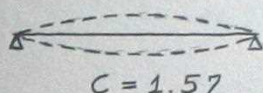
Una viga continua de cuatro tramos presenta cuatro primeras frecuencias propias (35), las cuales se indican en la figura siguiente :



Se puede demostrar que estas cuatro primeras frecuencias propias se encuentran comprendidas entre la primera frecuencia propia de una viga simplemente apoyada y la losa de una viga doblemente empotrada.

Según Rogers (36) la frecuencia natural del primer modo para una viga de un tramo con carga uniformemente repartida está dada por la expresión :

$n_p = C \sqrt{\frac{E I}{m L^4}}$, en donde C es un coeficiente que depende del tipo de apoyo de la viga, y tiene los siguientes valores :



En nuestro caso, la frecuencia de la primera forma de vibrar, que es la frecuencia menor, corresponderá exactamente a la frecuencia del primer modo de la viga de un tramo simplemente apoyada.

Reemplazando los valores correspondientes, obtenemos :

$$n_p = C \sqrt{\frac{300 \times 0.732 \times 10^8}{0.051 \times (4)^4 \times 10^6}}$$

$$n_p = 41 C$$

Para la viga simplemente apoyada :

$$n_p = 41 \times 1.57 \times 60 = 3860 \text{ ciclos/min.}$$

Para la viga doblemente empotrada :

$$n_p = 41 \times 3.56 \times 60 = 8800 \text{ ciclos/seg.}$$

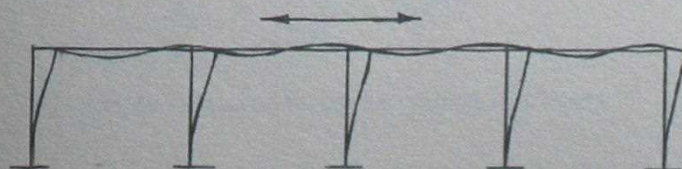
El valor real de vibración de la primera forma está mucho más cercano al primer valor ($n_p = 3860$), pero será algo mayor, ya que la losa superior no se encuentra simplemente apoyada, sino que hay una continuidad con los muros verticales que le da una rigidez mayor.

La relación más desfavorable para este caso estaría dada por :

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{500}{3860} = 0.13, \text{ por lo que el módulo dinámico}$$

vale prácticamente 1.0, no existiendo ningún peligro de resonancia.

c) Vibraciones en el sentido transversal, considerando la estructura como un pórtico.-



Para calcular en forma aproximada la frecuencia propia de vibración de este sistema, haremos las siguientes hipótesis :

- La influencia de la presión del terreno sobre los muros laterales es pequeña y no la tomaremos en cuenta. Esta hipótesis nos mantiene por el lado de la seguridad, ya que el efecto de esta presión haría aumentar la frecuencia propia del sistema.
- Los muros se encuentran perfectamente empotrados en la parte inferior.
- Gran parte de la masa se encuentra concentrada en la losa superior, por lo que supondremos que toda la masa se encuentra concentrada en el plano medio de esta losa.
- La masa está moviéndose solamente en sentido horizontal.
- Los puntos de inflexión de la elástica de la losa superior se producen aproximadamente en los puntos medios de los tramos.

Aceptadas estas hipótesis simplificadorias, tenemos lo siguiente :

Peso total de la estructura concentrado en la parte superior :

$$P = 1080 \text{ Ton.}$$

Desplazamiento estático debido al peso propio aplicado horizontalmente sobre la losa superior :

$$\delta_{est} = \frac{P L^3}{(3 \times 1.805 \times EI + 2 \times 1.67 \times EI) \times 6}$$

$$\delta_{est} = \frac{1080 (2.9)^3}{300 \times 10^4 \times 0.25} \times \frac{1}{(5.415 + 3.34) \times 6}$$

$$\delta_{est} = 0.0617 \text{ cm.}$$

Por lo tanto, la frecuencia propia de vibración vale :

$$n_p = \frac{300}{\sqrt{0.0617}} \quad 1200 \text{ ciclos/min.}$$

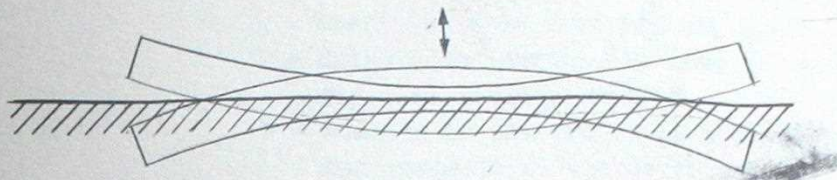
$$\frac{n}{n_p} = \frac{500}{1200} = 0.417$$

El módulo dinámico vale aproximadamente :

$\gamma = 1.3$, de manera que no existiría ningún peligro debido al efecto de resonancia de vibraciones en este sentido. Se puede decir en este caso lo mismo que se dijo en a), es decir, que la resultante de las cargas que pudieran actuar en este sentido es prácticamente cero, por

lo que el peligro de vibraciones fuertes en el sentido transversal es muy remoto.

- d) Vibración de la losa considerada como una viga en el sentido longitudinal.-



Se trata de una viga muy rígida, por lo que la influencia de las reacciones del terreno sobre la frecuencia propia de vibración no va a ser demasiado grande. Además esta influencia hará aumentar la frecuencia, por lo que, si la despreciamos y, calculando la frecuencia sin considerar dicha influencia, obtenemos una lo suficientemente alta, debemos considerarnos satisfechos ya que la frecuencia real va a ser superior a ésta.

La frecuencia de vibración para el caso de una barra que vibra libremente, está dada por la expresión : (36)

$$n_p = 3.56 \sqrt{\frac{E I}{m L^4}}$$

Los valores para los términos de esta expresión son :

$$E = 300 \times 10^4 \text{ T/m}^2 \quad (\text{módulo dinámico})$$

$$I = 38.55 \text{ m}^4$$

$$m = 6.17 \text{ T.seg}^2/\text{m}^2$$

$$L = 33 \text{ m.}$$

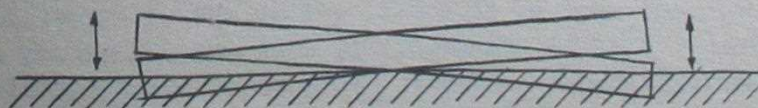
Y el valor de la expresión es :

$$n_p = 3.56 \times \frac{300 \times 38.55 \times 10^4}{6.17 \times (33)^4} = 13.8 \text{ ciclos/seg.}$$

$$= 830 \text{ ciclos/min.}$$

La frecuencia real de vibración será mayor que ésta, por lo que estamos lo suficientemente alejados de la frecuencia máxima de las cargas, que vale 500 ciclos/ min. , como para que no se produzca el desagradable fenómeno de resonancia.

- e) Se puede concebir también que la losa vibre en la forma indicada en la figura, debido a las fuerzas restitutivas del suelo :



Suponiendo que no existe amortiguamiento, la frecuencia de vibración para este caso vale :

$$n_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k I_b}{W_o}}$$

k = coeficiente de reacción del suelo.

I_b = momento de inercia del área de contacto entre el suelo y la losa.

W_o = momento de inercia de la masa vibratoria con respecto al eje de rotación.

Substituimos en esta expresión los siguientes valores :

$$k = 5 \times 10^3 \text{ Ton/m}^3$$

$$I_b = \frac{17 \times (33)^3}{12} = 5.1 \times 10^4 \quad [\text{m}^4]$$

$$W_o = 1.7 \times 10^4 \quad [\text{Ton.} \times \text{m.} \times \text{seg}^2]$$

Obtenemos así :

$$n_p = 1180 \text{ osc/min.}$$

Esta frecuencia vale más del doble que la mayor frecuencia de las cargas, por lo que no se produce un efecto de amplificación de las oscilaciones.

Fuera de los modos de vibrar que hemos considerado, existen una infinidad más, pero podemos decir que los modos superiores tienen frecuencias mayores que la frecuencia del primer modo y que todas las formas locales de vibrar tendrán también frecuencias mayores, ya que las masas en movimiento son de mucho menor magnitud, en cambio las fuerzas restitutivas resultan grandes en comparación.

Resumiendo, podemos decir que la frecuencia menor de vibración es del orden de 1000 ciclos/min. , es decir, el doble de la mayor frecuencia posible de las cargas. El modo de vibración más peligroso, debido al monto de las cargas que pueden actuar sobre él, corresponde a la losa superior considerada como una viga continua; pero las vibraciones que se producirán en este caso tendrán amplitudes prácticamente iguales a las de la carga aplicada en forma estática, pues la frecuencia propia vale alrededor de 4000 ciclos/min .

Debemos considerar también la magnitud de las oscilaciones que se producirán en la losa superior debido a los ensayos dinámicos. La condición que debe cumplirse, según las normas norteamericanas, es que ninguna deformación elástica sobrepase los 0.5 mm.

Suponiendo que se haya aplicado una carga dinámica de 300 Ton. en el centro de uno de los tramos de la losa superior, la deformación estática producida, que será prácticamente igual a la deformación dinámica según lo que hemos visto anteriormente, valdrá aproximadamente lo siguiente :

Si la losa se supone con continuidad en sus apoyos

y con una carga al centro, la deflexión vale, según Timoshenko y Woinowsky - Krieger (37) :

$$\omega_{\text{máx.}} = \alpha \frac{Pa^2}{D}$$

En donde : α es un coeficiente que depende de la razón entre el largo y el ancho de la losa.

P es la carga aplicada a el ancho.

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

En nuestro caso tenemos :

$$\alpha = 0.00725$$

$$P = 300 \text{ Ton.}$$

$$a = 4.00 \text{ m.}$$

$$D = \frac{3 \times 10^6 \times (0.65)^3}{12 (1 - (0.3)^2)} = 7.55 \times 10^4$$

Substituyendo estos valores obtenemos :

$$\omega_{\text{máx.}} = 0.00725 \frac{300 \times 4^2}{7.55 \times 10^4} = 0.462 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\omega_{\text{máx.}} = 0.462 \text{ mm.} \quad \therefore$$

Nos encontramos, por lo tanto, por debajo de los 0.5 mm. aceptados por las normas.

7.2.- Efectos de cargas repetidas y alternadas sobre el hormigón armado.-

Se ha comprobado que la resistencia del hormigón armado disminuye cuando éste se encuentra sometido a cargas repetidas durante un gran número de ciclos. Diversos investigadores han realizado estudios sobre este rubro, cuyos resultados experimentales son los que se indicarán a continuación en orden cronológico :

1903 : Van Ornum (38) : realizó pruebas en cubos de 2" de cemento Portland, fraguados durante 28 días. Fueron sometidos a 5500 ciclos de una carga del 55% de su resistencia estática a la compresión. En 1907, Van Ornum publicó los resultados de las pruebas realizadas y los resultados de la continuación de sus trabajos sobre pruebas con una mezcla 1 : 3 : 5 en volumen. Algunas de las pruebas se ensayaron a los 28 días y el resto un año después. Las cargas fueron aplicadas con una frecuencia de 4 a 8 por minuto.

Resultados :

La resistencia límite a la compresión resultó ser alrededor de un 50 a un 55% de la resistencia estática a la compresión.

Para vigas, la resistencia límite en el caso de aplicarse 5500 ciclos, fué menor que un 50% de la resistencia a la ruptura para cargas estáticas.

1909 : M.O. Withey (39) : nos da los resultados de una serie de pruebas a cargas repetidas hechas como una parte de un estudio general sobre la resistencia a la adherencia.

Se realizaron pruebas en vigas de 5 piés de largo y de sección cuadrada de 5" por lado. Estas vigas contaban con una barra de acero a 2/3 de la parte superior en la zona de tracción. El hormigón usado tenía una resistencia a los 28 días comprendida entre 77 y 162 Kg/cm².

Resultados :

Una carga igual al 50 a 60% de la resistencia estática podía repetirse en forma indefinida sin que se observaran fallas en las vigas reforzadas con barras lisas. Para barras deformadas esta razón fué de un 60 a un 70%.

1909 : B. Kirsh (40) : realizó pruebas de adherencia con barras tanto limpias como oxidadas y con hormigones de 70 a 130 Kg/cm² de resistencia a la compresión a los 28 días. Las probetas se sometieron a 50 cargas repetidas de 12 y 22% respectivamente de la carga estática máxima. Al probarse luego a cargas estáticas, no se observó ninguna disminución en la resistencia.

1922 : H.F. Clemmer (41) : nos da los resultados de pruebas realizadas con cargas repetidas, tratando de simular el esfuerzo real de una carretera. Probetas : vigas de hormigón armado de 36" de longitud y de sección cuadrada de 6"x 6", con un hormigón 1 : 2 : 3 ½ en volumen.

Frecuencia de la carga : 40 ciclos/min.

Resultados :

Cuando la carga fué de un 50% de la resistencia estática de la viga, no se produjeron fallas para un grupo de probetas después de 1130976 ciclos, ni tampoco en otro grupo después de 5.000.000 de ciclos. Cuando la carga se aumentó a un 61% de la resistencia estática, se produjeron fallas para un número de ciclos comprendido entre 16782 y 199836. El número de ciclos promedio bajo el cual se produjeron fallas fué 50000 y la edad promedio del hormigón en el momento de la falla de 147 días.

Clemmer encontró que la resistencia límite de las vigas de hormigón era de un 51% a un 54% del módulo estático de ruptura.

1923 : R.B. Crepps (42) : investigó la resistencia de morteros ante cargas repetidas, obtenida mediante viguetas de 30" de longitud y una sección de 4"x4", con un mortero 1 : 2.

La carga se aplicó con una frecuencia de 10 veces/min. y la fatiga se midió mediante el uso de strain gage.

Resultados :

La resistencia límite se alcanzó antes de 300.000 ciclos y se observó que vigas fraguadas durante 28 días mostraban una resis-

tencia límite no bien definida comprendida entre un 40% y un 60% de la resistencia estática. Fraguadas durante 4 meses tenían una resistencia límite comprendida entre un 50% y un 55% de la resistencia estática y las fraguadas durante 6 meses, una resistencia límite de aproximadamente 55% de la estática.

1924 : W.K. Hatt (43) : investigó por primera vez la influencia de la razón A/C.

Realizando pruebas con un promedio de 20000 ciclos cada una, llegó a los siguientes resultados :

Para hormigones secos, encontró que la resistencia a cargas repetidas era de un 50% a un 55% de la resistencia estática, y que para hormigones fluidos era de un 37% solamente de la resistencia estática.

También encontró que las probetas curadas durante un tiempo mayor, tenían una resistencia límite superior.

1929 : D.D. Ewing (44) : presentó un resumen del trabajo anterior, pero no aportó material nuevo.

1939 : Probst (45) : presentó un trabajo hecho en el Instituto de Tecnología de Karlsruhe, Alemania, ante el Instituto de Ingenieros Estructurales en Londres. Este trabajo cubre 10 años de investigaciones.

Las características de las pruebas realizadas fueron las siguientes :

Materiales :

Cemento Portland
 Dosificación 1 : 2.7 : 4.6 en volumen.
 Razón A/C = 6 gal/saco
 Fraguado : 7 a 12 meses.

Tamaño de las pruebas : 2.76 x 2.76 x 15.8 pulgadas.

Frecuencia de las cargas : 60 ciclos/min.

Cargas : Inferior = 8 Kg/cm^2

Superior = 50 Kg/cm^2

56 Kg/cm^2

80 Kg/cm^2

Resultados :

Para las pruebas de compresión, la resistencia límite fué de 47% a 60% de la resistencia estática de ruptura por compresión.

Para el caso de vigas armadas, la resistencia límite fué de 50% de la resistencia estática.

1935 : Rudolf Saliger (46) : realizó estudios, siendo profesor de hormigón armado en la Universidad Técnica de Viena, sobre la influencia de cargas repetidas en vigas.

Características de los ensayos :

Acero : 8500 a 3750 Kg/cm² en la ruptura.
 Hormigón: 325 a 338 Kg/cm² a los 400 a 500 días.
 Razón A/C : 1.04 a 1.08
 Repeticiones : 1.000.000 a 3.000.000 en 160 a 170 min.

Resultados :

Las primeras grietas se produjeron para fatigas del acero comprendidas entre 400 y 800 Kg/cm². Dichas fisuras se abrían y cerraban durante la prueba.

Para igual capacidad de carga, los aceros más resistentes se comportaron mejor.

Las deformaciones y deflexiones durante la aplicación de las cargas mostraron tendencia a hacerse permanentes.

El hormigón adquirió características más elásticas como resultado de la aplicación de cargas repetidas.

Las deformaciones totales y permanentes mostradas durante la prueba de flexión estática en el rango de fatigas de trabajo, fué menor para vigas a las cuales se les había aplicado una prueba preliminar de fatigas que para vigas a las cuales no se les había aplicado previamente cargas repetidas. Para las cargas máximas, las fatigas fueron aproximadamente las mismas en ambos casos.

1939 : W.F. Cassie (47) : presenta los resultados obtenidos con vigas de 6 meses de edad, cargadas 20 a 100 veces/min.

Cassie observó que las deformaciones permanentes crecen en relación con las deformaciones elásticas y que tales deformaciones son mayores en hormigones jóvenes que en hormigones viejos. En los hormigones viejos la deformación es más elástica, pero las mismas condiciones pueden alcanzarse en hormigones jóvenes mediante una carga previa. Se observaron mayores deformaciones para pruebas hechas a 20 ciclos/min. que para aquellas hechas a velocidades mayores.

La resistencia límite del hormigón ante cargas repetidas resultó ser de un 50% de la resistencia estática.

1940 : F.C. Lea (48) : presentó un informe al Instituto de Ingenieros Estructurales en Londres sobre los resultados de una investigación que incluía medidas de la deformación de tres pruebas en vigas, antes y después de la aplicación de cargas repetidas.

Resultados :

Realizando pruebas sobre 7 vigas de hormigón armado con 11 millones de ciclos, se encontró que la carga mínima ante la cual la viga se rompía era un 70% de la resistencia final estática.

Para pruebas de adherencia entre el hormigón y el acero, hechas con un mortero 1 : 3 y aplicando 2000 ciclos/min. durante 14 días, encontró que, para cargas variando entre cero y un máximo, la resistencia era aproximadamente un 50% de la resistencia estática.

1945 : C.W. Muhlenbruck (49) : realizó pruebas para determinar el efecto de las cargas repetidas sobre la resistencia de adherencia entre el hormigón y el acero.

El material usado para las pruebas fué el siguiente:

Cemento Portland Standard.

Arena y Grava : con la siguiente granulometría :

Malla	% que pasa	
	Arena	Grava
1½		100
1		96
¾		74
½		35
⅜		11
Nº 4	100	3
Nº 8	98	
Nº 16	77	
Nº 30	42	
Nº 50	15	
Nº100	2	

Dosis : 1 : 1.5 : 3.0 en volumen.

Razón A/C = 7.5 galones/saco

Acero : 7/8"

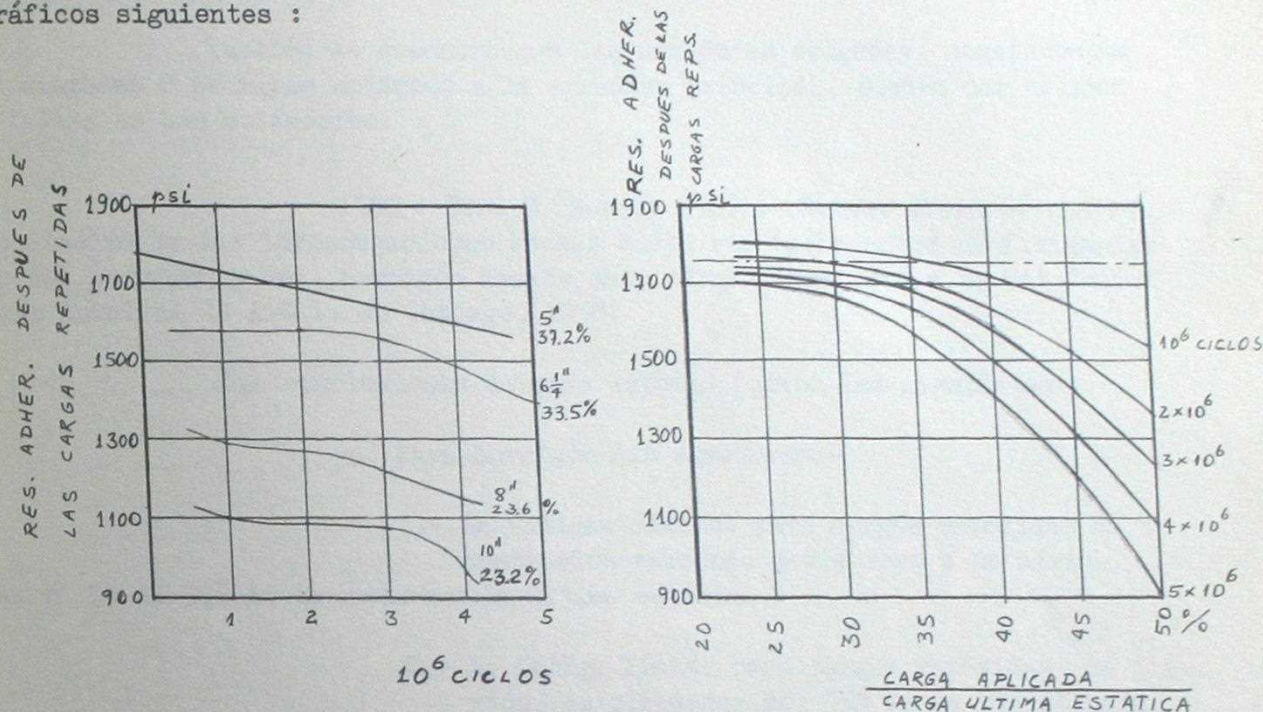
Carga aplicada hasta 4 millones de veces.

Conclusiones de la investigación :

- a) La resistencia de adherencia disminuye cuando está precedida por cargas repetidas.
- b) La fatiga máxima de adherencia estática determinada después de las cargas repetidas decrece con el aumento de las repeticiones.
- c) A mayor razón $\frac{\text{carga repetida aplicada}}{\text{carga estática máxima}}$, menor es la resistencia de adherencia después de tales cargas.
- d) Después de aproximadamente 4.300.000 repeticiones de cargas igual al 23% de la resistencia estática de adherencia, la resistencia final es un 84% de aquella sin cargas repetidas, para barras empotradas 8 y 10 pulgadas.
- e) Después de aproximadamente 4.500.000 repeticiones de carga igual al 35% de la resistencia estática, la resistencia final fué un 88% de aquella sin cargas repetidas, para barras empotradas 5 y 6½ pulgadas.
- f) Después de 4.600.000 repeticiones de carga igual al 49.8% de la resistencia estática, la resistencia final fué un 55.4% de aquella sin cargas repetidas, para barras empotradas 5 pulgadas.

g) Para fatigas de adherencia repetidas mayores que un 40% de la fatiga máxima estática, se debería hacer una rebaja en las fatigas de trabajo, debido a los efectos de tal repetición. Pareciera que para una carga repetida del 50% de la fatiga estática y para empotramiento pequeño, la reducción debería ser de un 50%.

Algunos de los resultados obtenidos se pueden observar en los gráficos siguientes :



1953 : Becker y Fontaine (50) : efectuaron ensayos en la losa de la carretera N^o7 de Orly, Francia. Esta losa tiene 18 cm. de espesor y una precompresión transversal y longitudinal de 18 Kg/cm² efectuada mediante cables de acero.

Se aplicaron cargas repetidas mediante un disco de 75 cm. de diámetro. Los intervalos de carga fueron : 0 a 45 Ton., 0 a 60 Ton. y 0 a 100 Ton.

Conclusiones :

Existe una ley de equivalencia entre el número de ciclos bajo cargas diferentes, según las deformaciones producidas :

2000 ciclos a 60 Ton equivalen a
200000 ciclos a 45 Ton.

700 ciclos a 100 Ton. equivalen a varios
millones de ciclos a 60 Ton.

1958 : A.I. Ivanov - Diatlov (51) : realizó pruebas en el Instituto de Carreteras de Moscú, sobre vigas de 8 x 20 cm. de sección y 100 cm. de longitud, con una frecuencia de cargas de 500 ciclos/minuto.

Estas pruebas demostraron que los estribos aumentan la fatiga límite en vigas de hormigón armado.

Vigas con armaduras consistentes en barras de 6.5 mm. de diámetro soportaron 2.000.000 de ciclos de una carga pulsátil igual al 65% de

la carga estática máxima, mientras que aquellas con barras de 19 mm. soportaron sólo el 60%.

La resistencia estática de vigas que habían soportado previamente 2 millones de ciclos de una carga pulsátil, fué aproximadamente la misma que la resistencia estática de vigas que no habían sido sometidas a pulsaciones, y en algunos casos dicha resistencia fué mayor.

También se demostró que las armaduras delgadas, consistentes en alambres o estribos soldados a la armadura principal, pueden dar origen a fallas en las soldaduras.

1958 : Gene M. Nordby (52) : Nordby presentó una recopilación de las investigaciones hechas hasta esa fecha sobre el fatigamiento del hormigón y del hormigón armado ante cargas repetidas a la 54ª Convención Anual de la A.C.I. en Chicago, 1958.

Las conclusiones de este estudio fueron las siguientes :

a) Para hormigón sin armaduras.-

- 1.- La fatiga límite, para cargas repetidas de compresión variando desde cero a un máximo, es el 50 al 55% de la resistencia última estática.
- 2.- La fatiga límite para cargas repetidas de flexión, es alrededor del 55% de la resistencia última estática, aunque hay una variación entre un 33 y un 64%, dependiendo de otras variables, tales como la edad, la dosificación, el curado, etc.
- 3.- La fatiga límite de tracción es alrededor del 55% del módulo de ruptura estático.
- 4.- Es dudoso que el hormigón posea un límite de resistencia, al menos con 10.000.000 de repeticiones de carga.
- 5.- El módulo de elasticidad cambia bajo cargas repetidas, cambio que depende de la intensidad de la carga.
- 6.- El hormigón posee una propiedad similar al endurecimiento por deformación de los metales. Cargas repetidas por debajo de la resistencia de fatigamiento aumenta la resistencia y/o la rigidez del espécimen.
- 7.- La edad y el curado tienen un efecto decisivo sobre la resistencia al fatigamiento. El hormigón joven y mal curado es menos resistente al fatigamiento que aquel de edad adecuada y bien curado.
- 8.- El efecto de la saturación con agua se desconoce. Sin embargo un investigador encontró una resistencia límite tan baja como un 33% de la resistencia estática a la ruptura.

9.- Rangos de pruebas comprendidos entre 70 y 440 ciclos/min. tienen un efecto pequeño sobre la resistencia al fatigamiento. En cambio los rangos lentos (alrededor de 10 ciclos/min.) parecen disminuir dicha resistencia.

10.- El resto de los períodos de cargas parecen aumentar la resistencia del hormigón, aunque los resultados de las pruebas son escasos.

11.- La mayor parte de las deformaciones permanentes tienen lugar en la primera etapa de las pruebas, generalmente en los primeros miles de ciclos.

12.- La resistencia por fatigamiento decrece ligeramente en los hormigones con poco cemento y con alta razón agua/cemento.

13.- Si el rango de fatigas decrece, el límite superior de fatigas crece substancialmente.

14.- Con respecto a la adherencia, se puede decir poco, excepto que se puede producir fallas por fatigamiento con cargas menores que un 55% de la carga estática última de arrancamiento. Los resultados han sido dispersos.

b) Para hormigón armado.-

Nordby concluye lo siguiente :

"En resumen, se puede decir que estamos lejos de tener un cuadro completo en cuanto al fatigamiento de estructuras de hormigón armado. Las vigas de este material pueden fallar ya sea por el acero o por el hormigón y, a su vez, las fallas del hormigón pueden ser de adherencia, tensión diagonal o flexión. Las acciones fundamentales no se conocen bien todavía, sin embargo ciertos hechos reaparecen en muchas de las investigaciones reunidas :

1.- Muchas fallas de vigas armadas se debieron a fallas en el acero. Las vigas en las cuales se hace crítica la armadura longitudinal, parecen tener una resistencia límite del 60 al 70% de la resistencia estática última, para 1.000.000 de ciclos.

2.- En ninguno de los ensayos analizados, excepto en los hechos por Le Camus, se notaron fallas por compresión del hormigón.

3.- En ocasiones, las vigas fallaron por tensión diagonal, pero la causa real quedó oscurecida debido a fallas combinadas de corte y adherencia. Se reportaron pruebas en las cuales las vigas sometidas a cargas repetidas fallaron con un esfuerzo de corte tan bajo como lo es el 40% de la resistencia última. Los datos con respecto a este tipo de fallas son escasos.

4.- Las deformaciones acumuladas en vigas armadas sometidas a fuertes cargas de fatigamiento, son muy parecidas a las del hormigón sin armaduras, pero se recobran algo en períodos posteriores a la aplicación de las cargas.

1960 : Blume - Newmark - Corning (53) : estos autores analizan en su libro los resultados experimentales obtenidos por otros investigadores.

En cuanto al efecto de cargas repetidas sobre el hormigón, llegan a las siguientes conclusiones :

Para cargas de compresión que varíen entre cero y un máximo, la fatiga última, repetida 1 millón a 2 millones de veces, queda limitada entre el 50 y el 65% de la resistencia estática.

En cuanto a la resistencia del acero, concluyen lo siguiente :

Si los esfuerzos varían desde cero hasta un máximo, no hay variación de la resistencia de ruptura. Para esfuerzos que varíen de $-P$ a $+P$, el valor útil es de un 60 a un 70%.

Los resaltes de las barras deformadas producen una concentración de fatigas que tiende a hacer disminuir su resistencia. Esto es más perjudicial aún en las barras de mayor resistencia, especialmente en las tratadas en frío. Los autores no han encontrado casos en la práctica en que las fallas del hormigón armado debido a cargas repetidas se deban al comportamiento del acero.

Comportamiento del hormigón armado a la flexión :

Debido a los ciclos repetidos de fatigas, se produce una redistribución de éstas en la zona de compresión del hormigón, aumentando las fatigas de las fibras más cercanas a la neutra. En general, para acero estructural corriente, las fallas no se producen debido al fracturamiento de éste, sino que se debe a desplazamientos y alargamientos acumulativos en las barras, los que producen, finalmente, la falla del hormigón. En cambio, para barras de alta resistencia, las experiencias han comprobado que las fallas ocurren generalmente por fracturamiento de las barras a fatigas muy por debajo de la fatiga de fluencia.

Todas las evidencias indican que los miembros flexionados sometidos a muchos ciclos de carga pero por debajo de las fatigas de trabajo, no sufren pérdidas en la resistencia última para cargas estáticas posteriores.

Comportamiento ante el esfuerzo de corte :

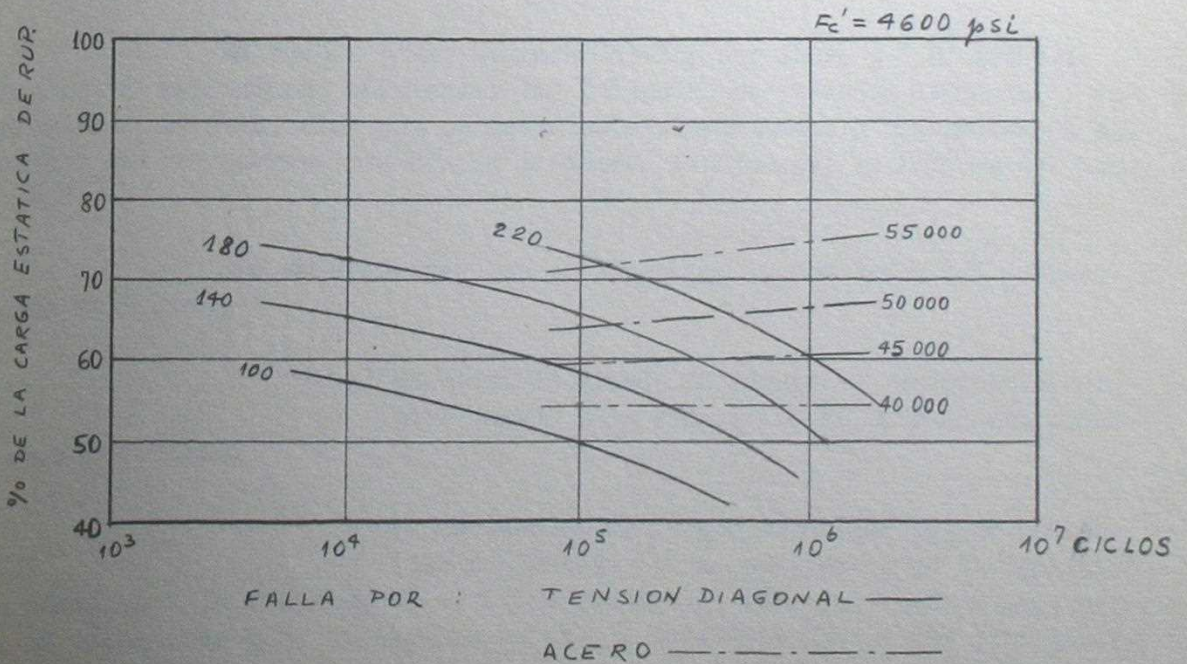
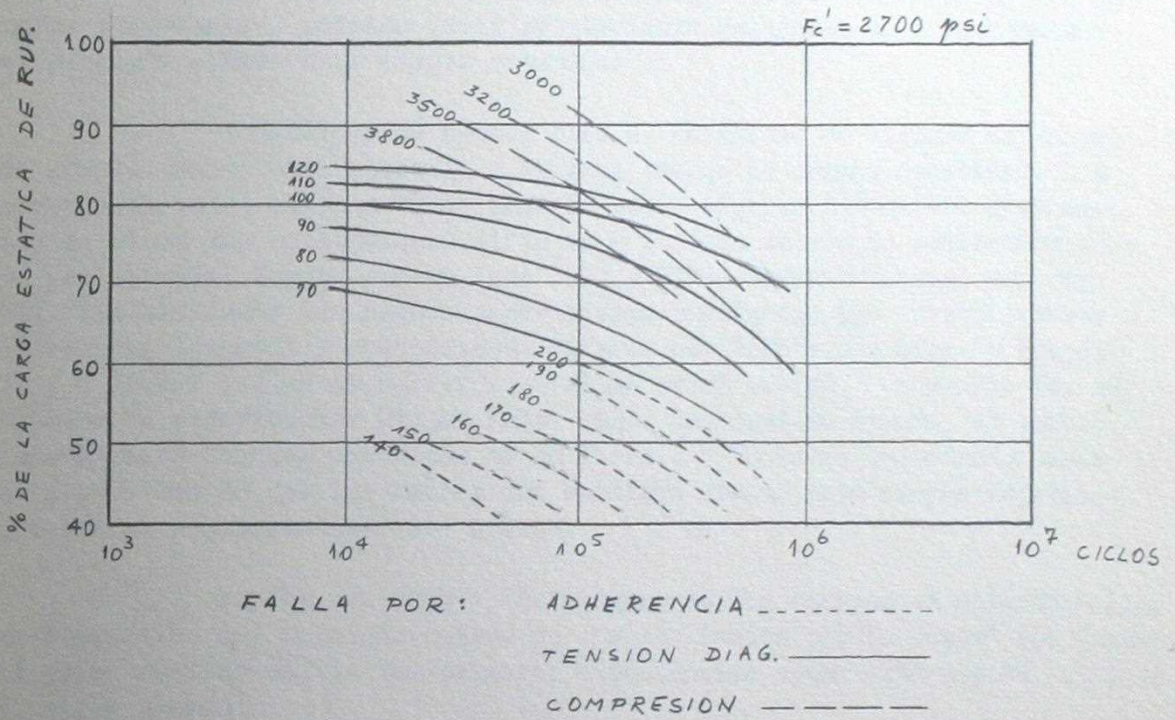
Se sugiere ser más bien conservador en cuanto a la resistencia al esfuerzo de corte, debido a que se tienen muy pocos datos acerca del comportamiento dinámico de piezas sometidas a esfuerzos de corte repetidos. Algunos investigadores han observado resistencias al corte relativamente bajas ante este tipo de cargas.

1962 : J.R. Varna y T.E. Steleson (54) : se ensayaron 60 vigas hasta su destrucción bajo cargas repetidas. Las probetas eran de 78" de longitud por 5" de espesor y 4", 5 $\frac{1}{2}$ " ó 7" de altura.

Las conclusiones a que se llegaron después de estos ensayos fueron las siguientes :

- a) Las vigas que fallaron estáticamente por adherencia, fallaron también por adherencia cuando fueron sometidas a cargas repetidas. De esta manera, la adherencia fué el modo de falla más susceptible a las cargas repetidas en las viguetas sometidas a flexión.
- b) Los hormigones más resistentes soportan mejor la acción de cargas repetidas.
- c) Las vigas que fallan estáticamente por tracción, compresión o tensión diagonal, pueden fallar de cualquiera de estos modos cuando están sometidos a cargas repetidas.

Los gráficos siguientes resumen algunos de los resultados obtenidos en esta investigación.



1965 ; R. Baus (55) : Baus constató, en experiencias realizadas en la Universidad de Liege sobre las características resistentes de vigas de hormigón armado sometidas a cargas repetidas, que el valor del módulo de Young E aumentaba en un 25 a 50% con respecto al módulo estático. La ruptura por fatigamiento se evitaba si el momento de servicio no pasaba del 60% del momento de ruptura estática.

1965 : B. Goschy (56) : Goschy realizó ensayos sobre vigas de hormigón pretensado. Obtuvo como resultado que los momentos de ruptura dinámicos eran de un 55 a un 65% de los momentos estáticos de ruptura, dependiendo del porcentaje de acero, y que la relación entre los esfuerzos de ruptura por cizallamiento dinámico y estático está comprendida entre 0.45 y 0.65.

Conclusiones.-

En base a las investigaciones que se han resumido en los párrafos precedentes, podemos decir lo siguiente en cuanto al comportamiento del hormigón armado ante cargas repetidas :

Todavía no se conoce bien el mecanismo de ruptura del hormigón armado cuando está sometido a un gran número de cargas repetidas. Los investigadores se han puesto de acuerdo sobre algunos puntos del problema, pero en otros sus conclusiones difieren e incluso entran en contradicciones. Así por ejemplo, Nordby por un lado (52) y Blume-Newmark-Corning por otro (53), han analizado las mismas experiencias realizadas por investigadores anteriores, llegando a conclusiones diferentes. Nordby nos dice, por ejemplo : " Muchas fallas se debieron a fallas en el acero", al analizar los resultados de experiencias hechas sobre vigas de hormigón armado, en cambio, Blume-Newmark-Corning nos dicen en su libro : " No hemos encontrado casos en la práctica en que las fallas del hormigón armado ante cargas repetidas se deban al comportamiento del acero".

Nordby nos dice : "En ninguno de los ensayos se notaron fallas por compresión del hormigón, salvo en los realizados por Le Camus" (Le Camus fué quien realizó una de las primeras experiencias sobre este tópico, a fines del siglo pasado).

En cambio Blume-Newmark-Corning nos dicen : " En general, para acero estructural corriente, las fallas no se producen debido al fracturamiento de éste, sino que se deben a desplazamientos y alargamientos acumulados en las barras, los cuales producen, finalmente, la ruptura del hormigón".

Sin embargo, hay puntos sobre los cuales todos los autores están de acuerdo :

- a) El hormigón armado disminuye su resistencia estática debido a la aplicación de un gran número de cargas repetidas.
- b) La aplicación de cargas repetidas que se encuentran por debajo de la resistencia de fatigamiento, no disminuyen la resistencia estática posterior, sino que, por el contrario, se ha encontrado que, en algunos casos, la aumentan. Esto tiene gran impor-

tancia para nuestro laboratorio, ya que en él se van a realizar experiencias con cargas repetidas que se encuentran por debajo de la carga de colapso y se podría haber pensado que dichas cargas producirían una disminución en la capacidad de carga estática posterior. Afortunadamente se ha comprobado en forma experimental que esto no ocurre.

c) Se debe tener cuidado con las fallas debidas a esfuerzos de corte (tensión diagonal) o a esfuerzos de adherencia de las barras con el hormigón, ya que los pocos datos que se tienen al respecto, divergen mucho entre sí. Han habido investigadores que encontraron valores muy bajos para este tipo de esfuerzos.

d) En cuanto a la resistencia del hormigón sin armar podemos decir que la disminución puede llegar hasta los siguientes porcentajes con respecto a la resistencia estática de ruptura :

Tipo de solicitación	% de la resistencia estática.
Adherencia	40 a 50% (pruebas de arrancamiento en probetas).
Tensión diagonal	50%
Compresión	50 a 55%
Acero por tracción	60 a 70% (ensayo de barras de acero sin influencia del hormigón).

e) El comportamiento ante cargas repetidas es mejor en los hormigones secos que en los fluidos y en los hormigones de mayor resistencia que en los más débiles. También mejoran considerablemente las condiciones resistentes del hormigón ante este tipo de solicitaciones cuando posee una edad considerable y ha tenido un buen curado.

f) El módulo de elasticidad E, para cargas dinámicas repetitivas, aumenta desde un 25 hasta un 50% con respecto al módulo estático.

Las conclusiones anteriores nos indican que, para tener un coeficiente de seguridad semejante al coeficiente usado para cargas estáticas, debemos reducir el monto de las cargas repetidas alternadas a aproximadamente un 50% de éstas. Como el equipo de gatos hidráulicos ha sido diseñado en tal forma que puede producir cargas dinámicas del 50% de su capacidad de carga estática, existe una concordancia entre las capacidades estática y dinámica de la losa y las capacidades respectivas del equipo de cargas.

8.- DIMENSIONAMIENTO DE LAS ARMADURAS Y PLANOS DE CALCULO.-

El dimensionamiento de las armaduras se realizará según el método de diseño a rotura aceptado por A.C.I. Standard 318-63. Se usará este método y no el de las fatigas admisibles, con el fin de que el coeficiente de seguridad resulte lo más uniforme posible para todos los elementos de la estructura y se pueda disponer del valor de dicho coeficiente en un momento dado.

Materiales a usar : hormigón tipo D, acero A44-28H.

8.1.- Armadura longitudinal correspondiente a viga de sección I.-

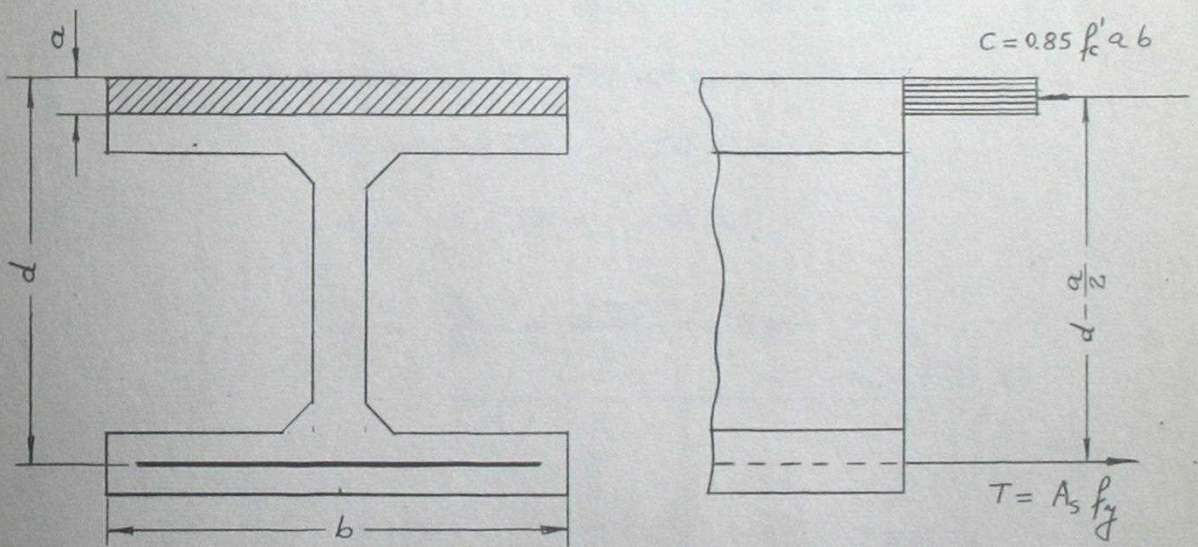
Como se estableció en el capítulo 5, esta viga deberá resistir un momento de + 1000 Ton.m. y un esfuerzo de flexo-tracción equivalente a - 750 Ton.m. y + 300 Ton.

a) Momento de + 1000 T.m.

$$M_u = 1.8 \times 1000 = 1800 \text{ T.m.}$$

$$f'_c = 186 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$$



Supondremos que la armadura de tracción está distribuída en tal forma que su centro de gravedad coincide con el plano medio de la losa.

El acero comprimido no alcanzará la fluencia, por lo que no consideraremos su influencia.

La zona de compresión no alcanza el nervio. El cálculo se hará, por lo tanto, como si se tratara de una viga rectangular.

Si observamos la figura, podemos poner que :

$$M_u = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

Suponiendo $a = 10$ cm. y considerando que $d = 322$ cm.
y $\phi = 0.9$, tenemos :

$$180.000 = 0.9 \times A_s \times 2.8 \times (322 - 5)$$

De donde obtenemos :

$$A_s = 225 \text{ cm}^2$$

El valor de a correspondiente a esta armadura es :

$$a = \frac{A_s \times f_y}{0.85 f'_c \times b} = 9.9 \text{ cm.}$$

Este valor difiere muy poco de los 10 cm. asignados primitivamente a a , de manera que no hay variaciones en el monto de las armaduras:

$$A_s = 225 \text{ cm}^2$$

La armadura por metro de losa, en cada cara, valdrá :

$$A_{s/m} = \frac{225}{8} = 28 \text{ cm}^2$$

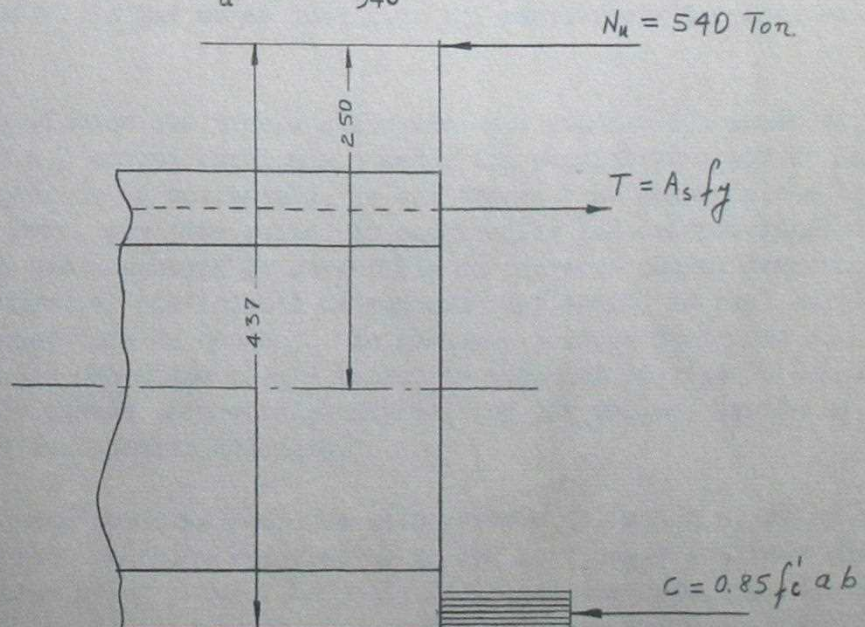
($\phi 22 @ 13 \text{ cm.} = 29.24$)

b) Flexo-tracción de - 750 Ton.m. y + 300 Ton.-

$$M_u = -1.8 \times 750 = -1350 \text{ T.m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 300 = 540 \text{ Ton.}$$

$$e = \frac{M_u}{N_u} = \frac{1350}{540} = 2.5 \text{ m.}$$



Supongamos $a = 4$ cm.

Tenemos entonces :

$$T = \frac{540 \times 435}{310} = 759 \text{ Ton.}$$

De donde obtenemos :

$$a = \frac{759 - 540}{0.85 \times 0.186 \times 400} = 3.50 \text{ cm.}$$

Es decir,

$$T = \frac{540 \times 435.2}{310.2} = 754 \text{ Ton.}$$

Por lo tanto :

$$A_s = \frac{759}{0.9 \times 2.8} = 300 \text{ cm}^2$$

Armadura por metro de losa, en cada cara :

$$A_{s/m} = 37.5 \text{ cm}^2 \quad (\phi 22 @ 10 = 38.01 \text{ cm}^2)$$

8.2.- Armadura en el sentido transversal para la losa superior : esfuerzos debidos a las solicitaciones consideradas en capítulo 6.-

Los esfuerzos mayores se producen en el nudo D para el sistema de cargas considerado en el párrafo 6.3.- Estas solicitaciones son demasiado grandes en comparación con los esfuerzos longitudinales, por lo que resultarían armaduras excesivas. Supondremos entonces que las cargas de 15 Ton. por perforación en una fila transversal son resistidas por una viga Vierendeel de 3 metros de ancho, en lugar de la de 2 metros que se había supuesto primitivamente, ya que no se justifica una resistencia tan alta en este sentido.

Los efectos que traerá aparejado este aumento del ancho de la viga Vierendeel a 3 metros serán más o menos los siguientes : por un lado, aumentará el peso de la estructura, lo que traerá como consecuencia un efecto favorable. Pero, por otra parte, la magnitud de las deformaciones disminuirá, por lo que aumentará la superficie de contacto con el terreno. Pero también aumentará el coeficiente de reacción del suelo, lo cual hará disminuir dicha superficie de contacto. En resumen, podemos decir que si usamos los resultados obtenidos para 2 metros de ancho en la viga de 3 metros de ancho, estaremos usando valores algo mayores que los reales, debido al efecto beneficioso del aumento del peso.

Debemos destacar aquí que sólo estamos estimando el valor de los posibles esfuerzos en forma aproximada, ya que no podemos adivinar que ensayos se realizarán en el futuro. Se puede decir que una capacidad resistente de 5 Ton. en una fila transversal de perforaciones, por cada metro en

el sentido longitudinal, es suficiente. Los ensayos que se realicen en el futuro deberán tomar en cuenta estos valores para fijar su límite superior. Si el ensayo fuera a producir esfuerzos del orden de los aquí considerados o superiores, se deberá hacer un análisis para ese caso particular y averiguar si la estructura es o no es capaz de soportar tal experiencia. Si los esfuerzos son francamente mayores, se podrá recurrir al artificio de aumentar la resistencia en este sentido colocando en el sótano diagonales o diafragmas provisionarios de hormigón armado.

Consideraremos en primer lugar las sollicitaciones producidas por el estado de cargas 6.2.- y luego las correspondientes al estado de cargas 6.3.-

a) Estado de cargas 6.2.-

Nudo D.-

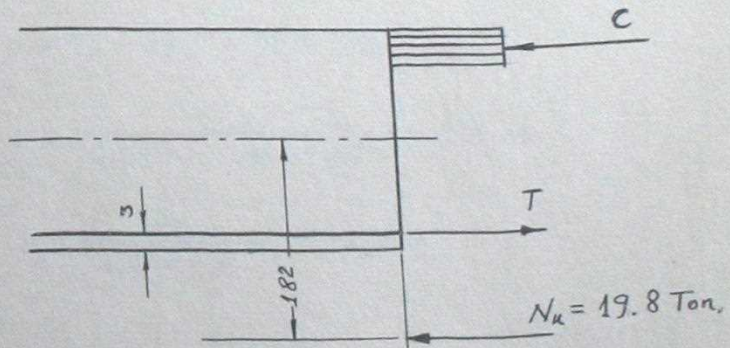
Barra DE :

$$M = \frac{60.2}{3} = 20.1 \text{ Ton.m.}$$

$$N = \frac{33}{3} = 11.0 \text{ Ton. (tracción)}$$

$$e = \frac{20.1}{11} = 1.82 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 11 = 19.8 \text{ Ton.}$$



Supongamos $a = 3.0 \text{ cm.}$

$$T = \frac{19.8 \times 213.5}{60.5} = 69.5 \text{ Ton.}$$

$$c = 69.5 - 19.8 = 48.7 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{48.7}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 3.07 \text{ cm.}$$

Luego :

$$A_s = \frac{69.5}{0.9 \times 2.8} = 27.8 \text{ cm}^2$$

Nudo E.-

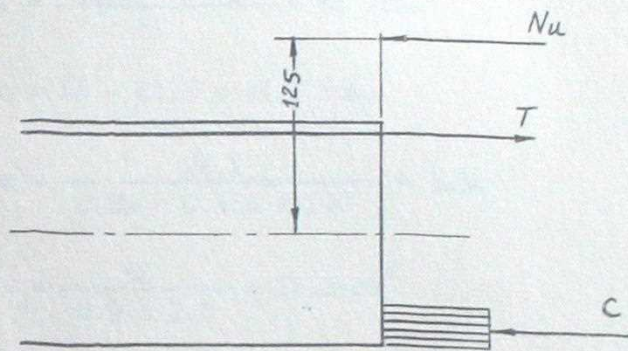
Barra ED :

$$M = \frac{41.4}{3} = 13.8 \text{ T.m.}$$

$$N = + \frac{33}{3} = + 11 \text{ Ton. (tracción)}$$

$$e = \frac{13.8}{11} = 1.25 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 11 = 19.8 \text{ Ton.}$$



Supongamos $a = 2 \text{ cm.}$

$$T = \frac{19.8 \times 156.5}{61} = 51 \text{ Ton.}$$

$$c = 51 - 19.8 = 31.2 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{31.2}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 2.3 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{51}{0.9 \times 2.8} = 20.2 \text{ cm}^2$$

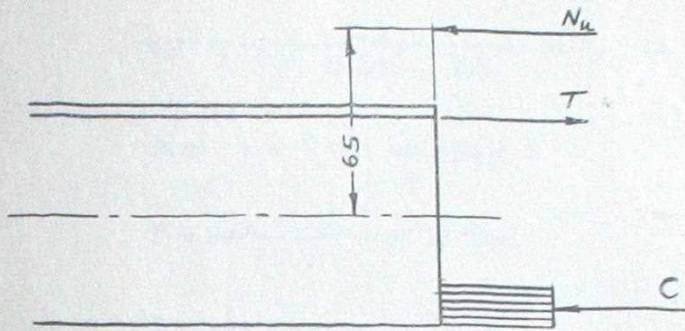
Barra EF :

$$M = - \frac{45}{3} = - 15 \text{ T.m.}$$

$$N = + \frac{69.6}{3} = + 23.2 \text{ Ton. (tracción)}$$

$$e = \frac{15}{23.2} = 0.65 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 23.2 = 41.8 \text{ Ton.}$$



Supongamos $a = 2$ cm.

$$T = \frac{41.8 \times 96.5}{61} = 66 \text{ Ton.}$$

$$c = 66 - 41.8 = 24.2 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{24.2}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 1.54$$

$$A_s = \frac{66}{0.9 \times 2.8} = 26.2 \text{ cm}^2$$

b) Estado de cargas 6.3.-

Nudo D.-

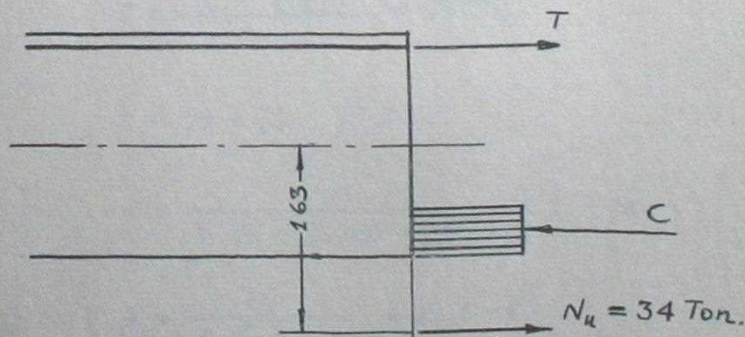
Barra DE :

$$M = - \frac{92.2}{3} = - 30.8 \text{ T.m.}$$

$$N = - \frac{56.6}{3} = - 18.9 \text{ Ton. (compresión)}$$

$$e = \frac{30.8}{18.9} = 1.63 \text{ m.}$$

$$N_u = - 1.8 \quad 18.9 = - 34 \text{ Ton.}$$



Supongamos $a = 8$ cm.

$$T = \frac{34 \times 134.5}{58} = 79 \text{ Ton.}$$

$$c = 79 + 34 = 113 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{113}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 7.1 \text{ cm.}$$

Para $a = 7 \text{ cm.}$ se tiene :

$$T = \frac{34 \times 134}{58.5} = 78 \text{ Ton.}$$

$$A_s = \frac{78}{0.9 \times 2.8} = 31 \text{ cm}^2$$

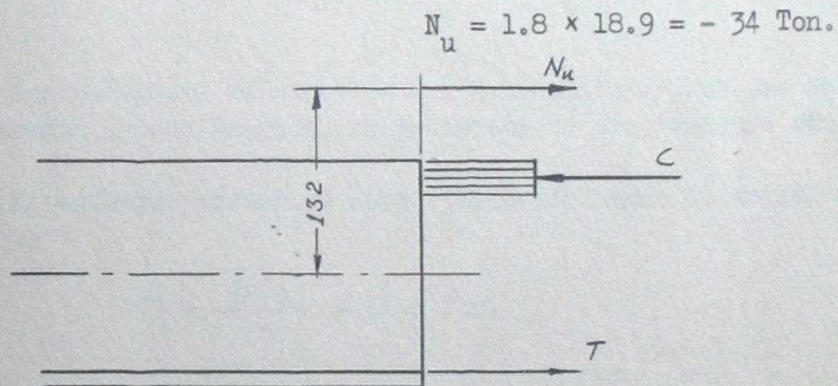
Nudo E.-

Barra ED :

$$M = \frac{+74.7}{3} = +24.9 \text{ T.m.}$$

$$N = -\frac{56.6}{3} = -18.9 \text{ Ton. (compresión)}$$

$$e = \frac{24.9}{18.9} = 1.32 \text{ m.}$$



Supongamos $a = 6 \text{ cm.}$

$$T = \frac{34 \times 102.5}{59} = 59 \text{ Ton.}$$

$$c = 59 + 34 = 93 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{93}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 5.9 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{59}{0.9 \times 2.8} = 23.4 \text{ cm}^2$$

Barra EF :

$$M = \frac{+30}{3} = 10 \text{ Ton.m.}$$

$$N = -\frac{95}{3} = -31.7 \text{ Ton. (compresión)}$$

$$e = \frac{10}{31.7} = 0.315 \text{ m.}$$

Se trata de una compresión con poca excentricidad.

Supongamos que la armadura sea un mínimo de 0.2% en ambos lados . ($A_S = A_S' = 13 \text{ cm}^2$).

Usando los gráficos de Witney para cargas excéntricas (23), vemos que la pieza, fallaría por tracción para una excentricidad de 31.5 cm. y con una carga última igual a :

$P_u = 240 \text{ Ton.}$ Esta carga es muy superior a la que estamos considerando de $1.8 \times 31.7 = 57 \text{ Ton.}$, lo que demuestra que bastaría una armadura mínima para soportar tal carga.

Resumiendo, en la losa superior se necesitaría una armadura máxima de 31 cm^2 por metro en una de las caras para absorber los esfuerzos que hemos considerado en el capítulo 6.- El monto de esta armadura es bastante cercano a la armadura longitudinal de esta losa : 37.5 cm^2 . Usaremos entonces una armadura isotrópica en esta losa, 37.5 cm^2 de armadura en ambas caras y en ambos sentidos. Esta armadura, como veremos más adelante, nos resistirá en buena forma los momentos debidos a las cargas concentradas, que se han analizado en el capítulo 4.- mediante el método de Johansen.

Los esfuerzos de corte no van a constituir problema serio, ya que, como veremos a continuación, no es necesario una armadura adicional:

El esfuerzo máximo de corte producido según el estado de cargas 6.3.- vale :

$$V = \frac{78.4}{3} = 26.1 \text{ Ton.}$$

$$V_u = 1.8 \times 26.1 = 47 \text{ Ton.}$$

Luego

$$v_u = \frac{47000}{100 \times 63} = 7.5 \text{ Kg/cm}^2$$

Según 1701 - (c) se tiene :

$$v_c = 0.53 \times \phi \times \sqrt{f_c'}$$

$$v_c = 0.53 \times 0.85 \times \sqrt{186}$$

$$v_c = 6.2 \text{ Kg/cm}^2$$

Pero según 1701 - (e) se tiene :

$$M' = M - N \times \frac{4t - d}{8}$$

$$M' = 30 - 18.9 \times \frac{2.60 - 0.63}{8}$$

$$M' = 30 - 4.9 = 25.1 \text{ Ton.m.}$$

$$v_c = 0.85 \left(0.502 \sqrt{f'_c} + 660 \frac{p_u \times V_d}{M'} \right)$$

$$v_c = 0.85 \left(6.9 + 660 \frac{0.006 \times 26.1 \times 0.63}{25.1} \right)$$

$$v_c = 10.7 \text{ Kg/cm}^2$$

Además se está por debajo de $0.93 \phi \sqrt{f'_c}$

Cabe destacar aquí que, según las normas chilenas se tendría :

$$z = \frac{26100}{100 \times 55} = 4.75 \text{ Kg/cm}^2$$

Para hormigón tipo D se acepta hasta 7 Kg/cm^2 .

8.3.- Armadura de los muros verticales.-

Los muros verticales deben ser capaces de resistir dos tipos de esfuerzos, a) los provenientes de flexión en el sentido transversal : viga Vierendeel, y b) los esfuerzos de corte de la viga longitudinal de sección I.

a) Armadura necesaria para absorber los esfuerzos de la viga Vierendeel.-

Barra CD.-

En nudo C :

Debido al efecto del acartelamiento, consideremos primero la sección a - a :

Los esfuerzos en esta sección valen :

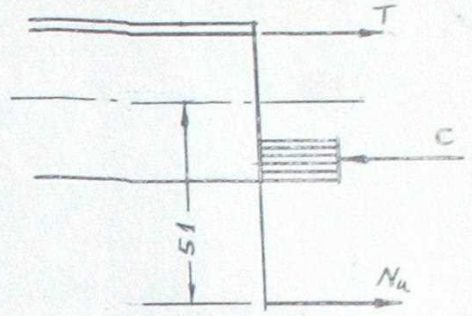
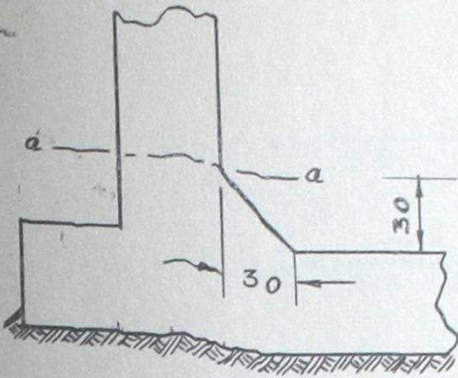
Debido a las cargas 6.2.-

$$M = - \frac{40}{3} = - 13.3 \text{ Ton.m.}$$

$$N = - \frac{72.5}{3} = - 24.2 \text{ Ton. (compresión)}$$

$$e = \frac{13.3}{24.2} = 0.51 \text{ m.}$$

$$N_u = - 1.8 \times 24.2 = - 43.5 \text{ Ton.}$$



Supongamos $a = 5 \text{ cm.}$

$$T = \frac{43.5 \times 3.1}{39.5} = 34 \text{ Ton.}$$

$$c = 34 + 43.5 = 77.5 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{77.5}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 4.9 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{34}{0.9 \times 2.8} = 13.5 \text{ cm}^2$$

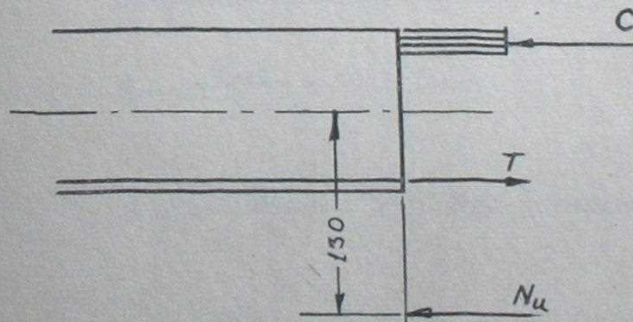
Debido a la 6.3.-

$$M = + \frac{48}{3} \text{ Ton.m.} = + 16 \text{ T.m.}$$

$$N = + \frac{37}{3} = + 12.3 \text{ Ton. (tracción)}$$

$$e = \frac{16}{12.3} = 1.30 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 12.3 = 22.1 \text{ Ton.}$$



Supongamos $a = 4 \text{ cm.}$

$$T = \frac{22.1 \times 150.5}{40} = 83.5 \text{ Ton.}$$

$$c = 83.5 - 22.1 = 61.4 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{61.4}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 3.9 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{83.5}{0.9 \times 2.8} = 33.1 \text{ cm}^2$$

(ϕ 22 @ 11.5)

Armadura del acartelamiento : supondremos que debe soportar un momento puro de :

$$M = \frac{66}{3} = 22 \text{ T.m.}$$

altura útil : $d = 65 \text{ cm.}$

$$M_u = 1.8 \times 22 = 39.6 \text{ Ton.m.}$$

Supongamos $a = 6.5 \text{ cm.}$

$$T = \frac{39.6}{0.618} = 64 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{64}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 4.05 \text{ cm.}$$

$$T = \frac{39.6}{0.63} = 63 \text{ Ton.}$$

$$A_s = \frac{63}{0.9 \times 2.8} = 25 \text{ cm}^2$$

(ϕ 18 @ 10) (ó ϕ 26 @ 20)

En nudo D :

Esfuerzos debidos a las cargas 6.2.-

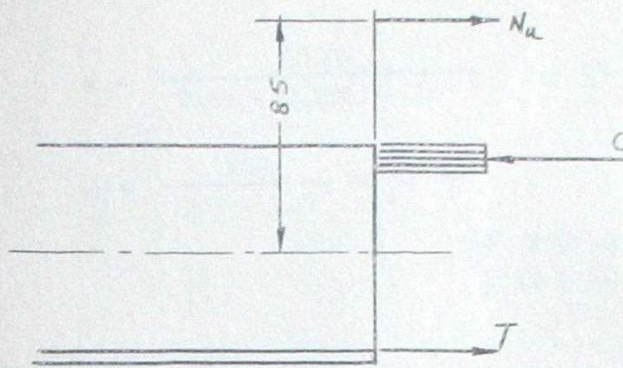
$$M = \frac{60.2}{3} = 20.1 \text{ Ton.m.}$$

$$N = - \frac{70}{3} = - 23.3 \text{ Ton. (compresión)}$$

$$e = \frac{20.1}{23.3} = 0.86 \text{ m.}$$

$$N_u = - 1.8 \times 23.3 = - 42 \text{ Ton.}$$

$d = 62 \text{ cm.}$



Sea $a = 5.0$ cm.

$$T = \frac{42 \times 56}{59.5} = 39.7 \text{ Ton.}$$

$$c = 39.7 + 42 = 81.7 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{81.7}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 5.1 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{39.7}{0.9 \times 2.8} = 15.8 \text{ cm}^2$$

(0 18 15)

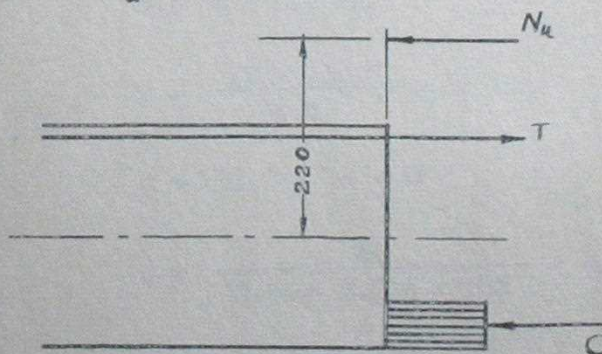
Esfuerzos debidos a las cargas 6.3.-

$$M = - \frac{92.2}{3} = - 30.8 \text{ Ton.m.}$$

$$N = + \frac{42}{3} = + 14 \text{ Ton. (tracción)}$$

$$e = \frac{30.8}{14} = 2.20 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 14 = 25.2 \text{ Ton.}$$



Supongamos $a = 5$ cm.

$$T = \frac{25.2 \times 250}{59.5} = 106 \text{ Ton.}$$

$$c = 106 - 25.2 = 80.8 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{80.8}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 5.1 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{106}{0.9 \times 2.8} = 42 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \phi 22 @ 10 &= 38.01 \\ \phi 10 @ 20 &= \frac{3.93}{41.94 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Barra BE.-

En nudo B :

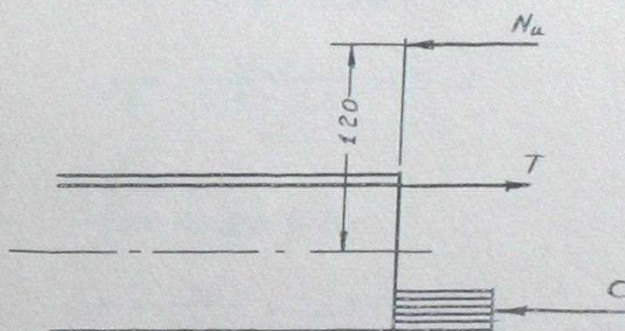
Cargas 6.2.-

$$M = - \frac{36}{3} = - 12 \text{ Ton.m.}$$

$$N = + \frac{30}{3} = + 10 \text{ Ton. (tracción)}$$

$$e = \frac{12}{10} = 1.20 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 10 = 18 \text{ Ton.}$$



Sea $a = 2.5 \text{ cm.}$

$$T = \frac{18 \times 140.0}{40.8} = 62 \text{ Ton.}$$

$$c = 62.0 - 18 = 44$$

$$a = \frac{44}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 2.8 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{62.0}{0.9 \times 2.8} = 24.6 \text{ cm}^2$$

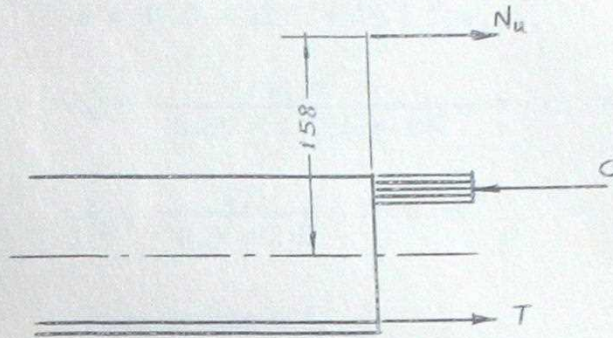
Cargas 6.3.-

$$M = \frac{48}{3} = 16 \text{ Ton.m.}$$

$$N = - \frac{30.3}{3} = - 10.1 \text{ Ton. (compresión)}$$

$$e = \frac{16}{10.1} = 1.58 \text{ m.}$$

$$N_u = -1.8 \times 10.1 = 18.2 \text{ Ton.}$$



$$\text{Sea } a = 5.5 \text{ cm.}$$

$$T = \frac{18.2 \times 138.2}{38.7} = 65.2 \text{ Ton.}$$

$$c = 65.2 + 18.2 = 83.4 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{83.4}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 5.3 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{65.2}{0.9 \times 2.8} = 26 \text{ cm}^2$$

Nudo E :

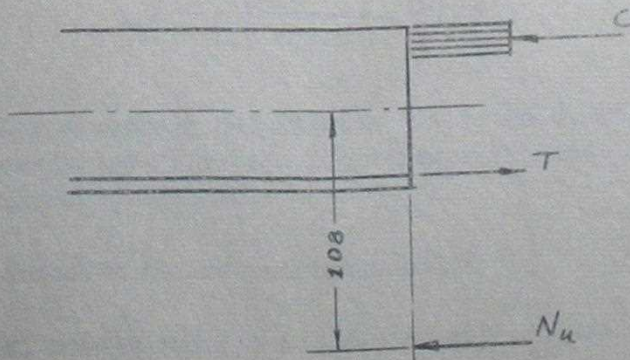
Para cargas 6.2.-

$$M = \frac{38}{3} = 12.6 \text{ Ton.m.}$$

$$N = + \frac{35}{3} = + 11.7 \text{ Ton. (tracción)}$$

$$e = \frac{12.6}{11.7} = 1.08 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 11.7 = 21.1 \text{ Ton.}$$



$$\text{Sea } a = 2.6 \text{ cm.}$$

$$T = \frac{21.1 \times 129.2}{40.7} = 67.0 \text{ Ton.}$$

$$c = 67.0 - 21.1 = 45.9 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{45.9}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 2.9 \text{ cm.}$$

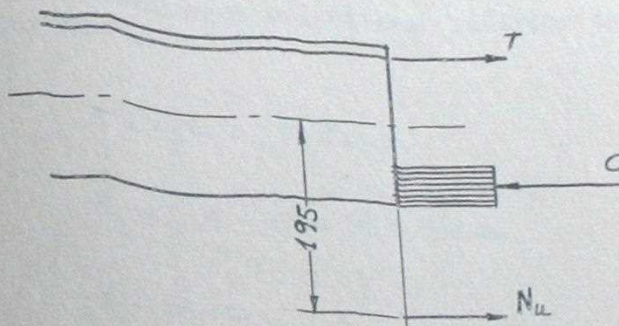
$$A_s = \frac{67}{0.9 \times 2.8} = 26.6 \text{ cm}^2$$

Para cargas 6.3.-

$$M = \frac{48}{3} = 16 \text{ Ton.m.}$$

$$N = -\frac{24.6}{3} = -8.2 \text{ Ton. (compresión)}$$

$$N_u = 14.8 \text{ Ton.}$$



$$\text{Sea } a = 5 \text{ cm.}$$

$$T = \frac{14.8 \times 175}{39.5} = 65.3$$

$$c = 65.3 + 14.8 = 80.1$$

$$a = \frac{80.1}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 5.1 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{65.3}{0.9 \times 2.8} = 26 \text{ cm}^2$$

Las armaduras resultantes (24.6, 26.0, 26.6 y 26.0 cm²) son sensiblemente semejantes entre sí. Adoptaremos entonces la misma armadura para todas las caras: $\phi 18 @ 10$.

Armadura de los acartelamientos :

El acartelamiento más desfavorable tiene aplicado un momento flector de :

$$M = \frac{60.2}{3} = 20.1 \text{ Ton.m. (Parte superior)}$$

$$M_u = 1.8 \times 20.1 = 36.1 \text{ T.m.}$$

$$d = 93 \text{ cm.}$$

Supongamos $a = 4 \text{ cm.}$

$$T = \frac{36.1}{0.91} = 39.7 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{39.7}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 2.5 \text{ cm.}$$

$$T = \frac{36.1}{91.7} = 39.5 \text{ Ton.}$$

$$A_s = \frac{39.5}{0.9 \times 2.8} = 15.7 \text{ cm}^2 \quad (\phi 18 @ 15)$$

Los acartelamientos del extremo inferior tienen aplicados el siguiente momento flector :

$$M = \frac{51}{3} = 17 \text{ Ton.m.}$$

$$M_u = 1.8 \times 17 = 30.6 \text{ Ton.m.}$$

$$d = 68 \text{ cm.}$$

Supongamos $a = 3 \text{ cm.}$

$$T = \frac{30.6}{0.65} = 47.5 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{47.5}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 3 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{47.5}{0.9 \times 2.8} = 18.9 \text{ cm}^2 \quad \begin{array}{l} (\phi 18 @ 13.5) \\ (\phi 22 @ 20) \end{array}$$

b) Esfuerzos de corte procedentes de la viga longitudinal de sección I.-

Según A.C.I. 1705 - (b), la fatiga última de corte máxima admisible vale :

$$v_u = 2.65 \phi \sqrt{f'_c}$$

Que en nuestro caso vale :

$$v_u = 2.65 \times 0.85 \times \sqrt{186} = 30.7 \text{ Kg/cm}^2$$

Se tiene entonces que la máxima carga última que pueden aceptar los nervios es :

$$V_u = v_u \cdot b_o \cdot d$$

$$b_o = 45 \text{ cm.}$$

$$d = 312 \text{ cm.}$$

$$V_u = 30.7 \times 45 \times 312 = 430.000 \text{ Kg.}$$

$$V = \frac{430}{1.8} = 240 \text{ Ton. (carga admisible)}$$

Se aceptará entonces una carga admisible de corte de 240 Ton. en cualquier punto del nervio.

El esfuerzo de corte absorbido por el hormigón, sin tomar en cuenta las armaduras, vale :

$$V_c = v_c b_o d$$

$$v_c = 0.53 \phi \sqrt{f'_c} = 6.13 \text{ Kg/cm}^2 \quad 1701-(c)$$

$$V_c = 6.13 \times 45 \times 312 = 86 \text{ Ton.}$$

$$V'_n = V_u - V_c = 430 - 86 = 344 \text{ Ton.}$$

Area de estribos necesaria por metro :

$$A = \frac{V'_n s}{\phi f_y d} = \frac{344 \times 1.00}{0.85 \times 2.8 \times 3.12} = 43.6 \text{ cm}^2$$

Es decir, la armadura necesaria para absorber los esfuerzos provenientes del efecto Vierendeel es suficiente (51 cm^2). Se supondrá que en ningún momento actúan juntos ambos esfuerzos máximos.

Armadura longitudinal del nervio :

Según DIN 1045 párrafo 14 punto 2, debe usarse una armadura a lo menos igual a 8% de la tracción cuando la viga tiene una altura superior a 1.40 m.

Usaremos una armadura igual aproximadamente 10% de la longitudinal de tracción por cada 1.40 m de altura.

$$\text{Armadura por metro} = \frac{0.1 \times 300}{1.40} = 21.4$$

Usaremos $\phi 16 @ 20$ en ambas caras.

8.4.- Armadura de la losa inferior.-

Esfuerzos :

- a) Provenientes de las presiones del terreno sobre viga longitudinal de sección I.-

$$\text{Presión máxima : } 10 \text{ Ton/m}^2$$

Momento flector máximo por metro de ancho :

$$M = \frac{10 \times (1.5)^2}{2} = + 11.2 \text{ T.m.}$$

- b) Provenientes de la viga Vierendeel (Capítulo 6.-).

Los esfuerzos máximos se producen en la viga BC y vales, considerando los acartelamientos :

En nudo B :

Estado de cargas 6.2.-

$$M = - \frac{39}{3} = - 13 \text{ Ton.m.}$$

$$N = - \frac{39}{3} = - 13 \text{ Ton.}$$

Estado de cargas 6.3.-

$$M = + \frac{42}{3} = + 14 \text{ Ton.m.}$$

$$N = + \frac{50.6}{3} = + 16.9 \text{ Ton.}$$

En nudo C :

Estado de cargas 6.2.-

$$M = + \frac{40.2}{3} = + 13.4 \text{ Ton.m.}$$

$$N = - \frac{39}{3} = - 13 \text{ Ton.}$$

Estado de cargas 6.3.-

$$M = - \frac{48}{3} = - 16 \text{ Ton.m.}$$

$$N = + \frac{50.6}{3} = + 16.9 \text{ Ton.}$$

Armaduras :

Tienen mayor importancia las solicitaciones provenientes de la acción Vierendeel.

Nudo B :

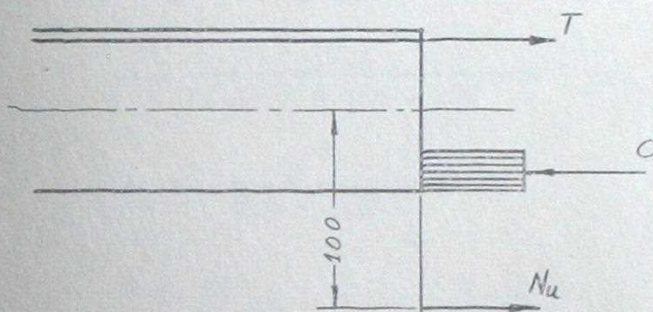
Armadura superior :

$$M = - 13 \text{ T.m.}$$

$$N = - 13 \text{ Ton. (compresión)}$$

$$e = \frac{13}{13} = 1.00 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 13 = 23.4$$



Sea $a = 4.4 \text{ cm.}$

$$T = \frac{23.4 \times 79.7}{39.8} = 47.5 \text{ Ton.}$$

$$c = 47.5 + 23.9 = 71.4$$

$$a = \frac{71.4}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 4.5 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{47.5}{0.2 \times 2.8} = 18.9 \text{ cm}^2$$

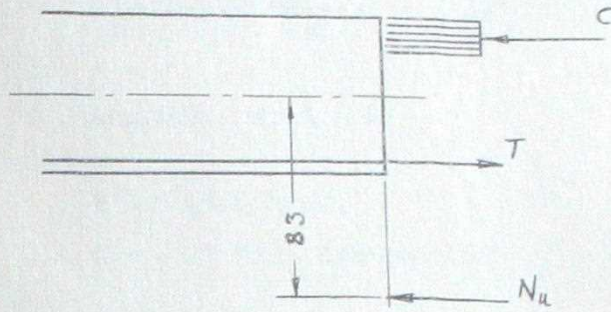
Armadura inferior :

$$M = + 14 \text{ Ton.m.}$$

$$N = + 16.9 \text{ Ton.m. (tracción)}$$

$$e = \frac{14}{16.9} = 0.83 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 16.9 = 30.4 \text{ Ton.}$$



Sea $a = 3$ cm.

$$T = \frac{30.4 \times 104}{40.5} = 78.0 \text{ Ton.}$$

$$c = 78.0 - 30.4 = 47.6 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{47.6}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 3 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{78}{0.9 \times 2.8} = 31 \text{ cm}^2$$

Nudo C :

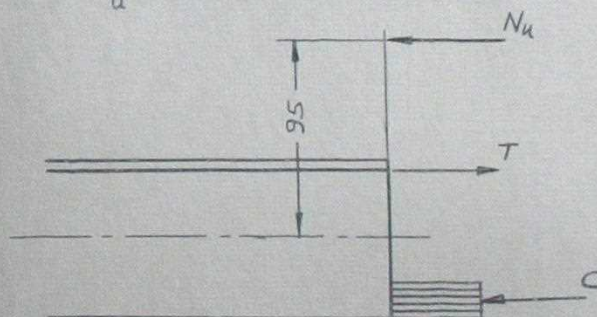
Armadura superior :

$$M = -16 \text{ Ton.m.}$$

$$N = +16.9 \text{ Ton. (tracción)}$$

$$e = \frac{16}{16.9} = 0.95 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 16.9 = 30.4 \text{ Ton.}$$



Sea $a = 3.5$ cm.

$$T = \frac{30.4 \times 115.7}{40.2} = 87.1$$

$$c = 87.1 - 30.4 = 56.7 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{56.7}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 3.6 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{87.1}{0.9 \cdot 2.8} = 34.6 \text{ cm}^2$$

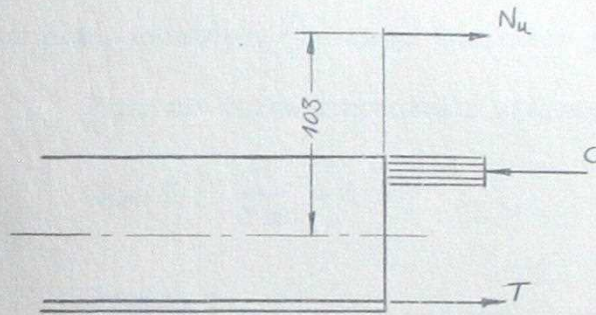
Armadura inferior :

$$M = + 13.4 \text{ Ton.m.}$$

$$N = - 13 \text{ Ton. (compresión)}$$

$$e = \frac{13.4}{13} = 1.03 \text{ m.}$$

$$N_u = - 1.8 \cdot 13 = - 23.4 \text{ Ton.}$$



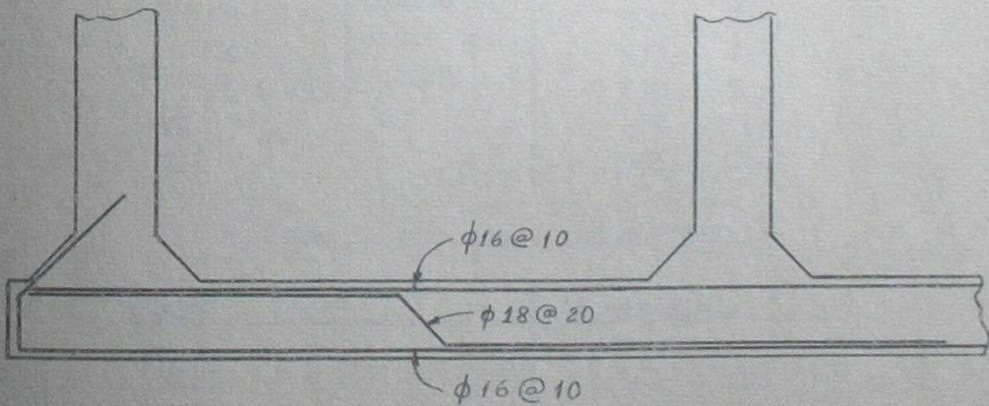
$$\text{Sea } a = 4.5 \text{ cm.}$$

$$T = \frac{23.4 \cdot 82.8}{39.7} = 48.7 \text{ Ton.}$$

$$c = 48.7 + 23.4 = 72.1 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{72.1}{0.85 \cdot 0.186 \cdot 100} = 4.57 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{48.7}{0.9 \cdot 2.8} = 19.4 \text{ cm}^2$$



8.5.- Resistencia de la losa superior a cargas concentradas.-

La capacidad última a la flexión de la losa superior, por metro de longitud, vale :

$$T = 37.5 \times 2.8 = 105 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{105}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 6.6 \text{ cm.}$$

$$m = 105 \times 0.58.7 = 61.6 \text{ Ton.m.}$$

Usaremos un coeficiente de seguridad = 2.5

Tendremos, entonces, una carga admisible para cada caso :

Para una carga concentrada aislada :

$$\text{Caso I : } \frac{P}{2 \text{ m}} = 6.283$$

Resulta :

$$P = \frac{2 \times m \times 6.283}{2.5} = 309 \text{ Ton.}$$

Caso	P admisible
I	309 Ton.
II	300 Ton.
III	301 Ton.
IV	304 Ton.

Para dos cargas concentradas :

Caso	P admisible
V 0 m.	309 Ton.
1 m.	375 Ton.
2	440 Ton.
3	507 Ton.
4	573 Ton.
5 ó más	618 Ton.
VI	446 Ton.
VII	496 Ton.

Distancia entre las cargas

Para cuatro cargas concentradas :

Caso	P admisible
VIII	441 Ton.
IX	416 Ton.

8.6.- Resistencia al arrancamiento de la losa superior.-

Cuando se aplican cargas a la viga longitudinal de sección I, estas actúan sobre la losa superior. Debe haber, por lo tanto, una cierta resistencia que impida que dicha losa se separe de los nervios.

La armadura que une estos dos elementos, por metro de longitud, vale :

$$A_s = 51 + 75 \text{ cm}^2 = 126 \text{ cm}^2$$

La carga admisible para esta armadura es :

$$P = 126 \times 1.4 = 176 \text{ Ton/m.}$$

8.7.- Cálculo de viga de entrada.-

Si dejáramos libre la losa en la entrada del sótano, ésta no sería capaz de resistir una carga concentrada del orden de las trescientas toneladas aplicada en su borde libre. Por esta razón dispondremos de una viga que pueda resistir tales cargas.

La losa sin viga será capaz de resistir, con un coeficiente de seguridad 2.5, la siguiente carga, como se vió en el capítulo 4.

$$\frac{P}{2 \text{ m}} = 2.57 \text{ (en la ruptura)}$$

$$P = \frac{2.57 \times 2 \times 61.6}{2.5} = 127 \text{ Ton.}$$

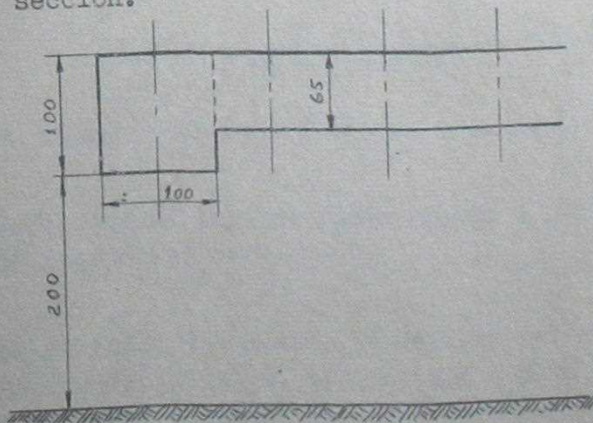
Es decir, falta una capacidad de carga de :

$$P = 300 - 127 = 173 \text{ Ton.}$$

Esta carga, aplicada en el centro, nos produce un momento flector máximo igual a :

$$M = \frac{P l}{8} = 86.5 \text{ Ton.m.}$$

Para absorber este esfuerzo dispondremos de una viga de $100 \times 100 \text{ cm}^2$ de sección.



Esta viga deberá resistir el esfuerzo antes considerado en ambos sentidos, por lo que dispondrá de una armadura simétrica.

$$M = 86.5 \text{ Ton.m.}$$

$$M_n = 1.8 \times 86.5 = 156 \text{ Ton.m.}$$

$$\text{Supongamos } a = 11 \text{ cm.}$$

$$T = \frac{156}{0.905} = 172 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{172}{0.85 \times 0.186 \times 100} = 10.9 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{172}{0.9 \times 2.8} = 68.2 \text{ cm}^2$$

10	∅	26	=	53.1
2	∅	32	=	<u>16.1</u>
				69.2 cm ²

Estribos :

La viga debe resistir un esfuerzo de corte igual a la mitad de P, en ambas direcciones.

$$V = \frac{173}{2} = 86.5 \text{ Ton.}$$

$$V_u = 1.8 \times 86.5 = 156 \text{ Ton.}$$

$$v_u = \frac{156000}{100 \times 96} = 16.2 \text{ Kg/cm}^2$$

(Necesita armadura)

$$v_c = 0.53 \times \phi \sqrt{f'_c} = 6.12 \text{ Kg/cm}^2$$

$$V_c = 6.12 \times 100 \times 96 = 60 \text{ Ton.}$$

$$V'_u = V_u - V_c = 156 - 60 = 96 \text{ Ton.}$$

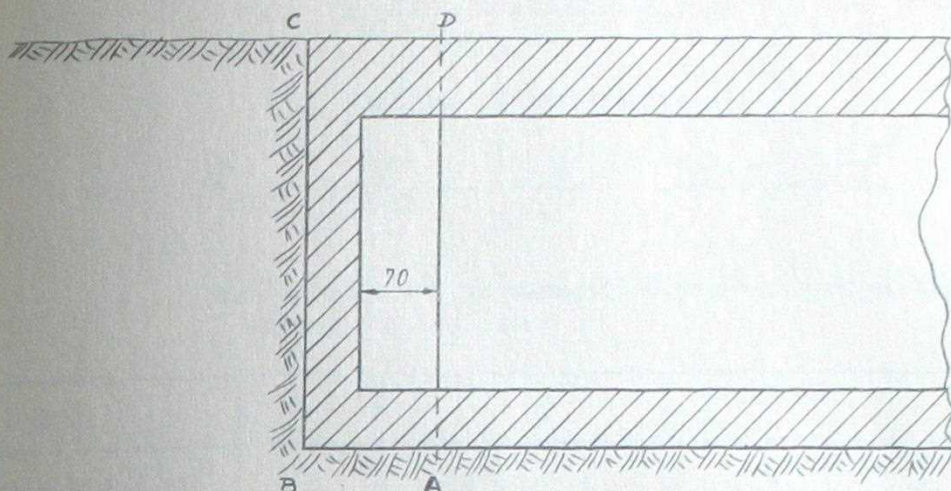
Suponiendo estribos @ 20 cm.,

$$A_v = \frac{96 \times 20}{0.85 \times 2.8 \times 96} = 8.4 \text{ cm}^2$$

Se usarán estribos ∅ 16 con 6 ramas (véase figura).

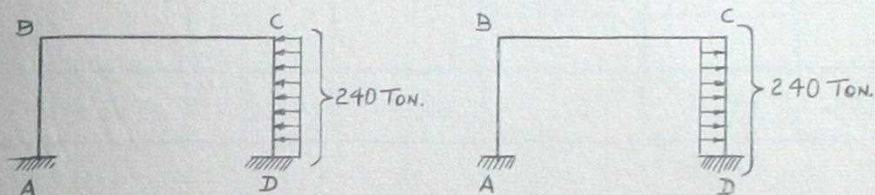
8.8.- Esfuerzos del muro de fondo debido a perforaciones de paso en el nervio.-

En el fondo del sótano se dejarán perforaciones en los nervios con el objeto de facilitar el paso de una a otra sección. Estas perforaciones tendrán la forma y tamaño que se indican en el corte de la figura.

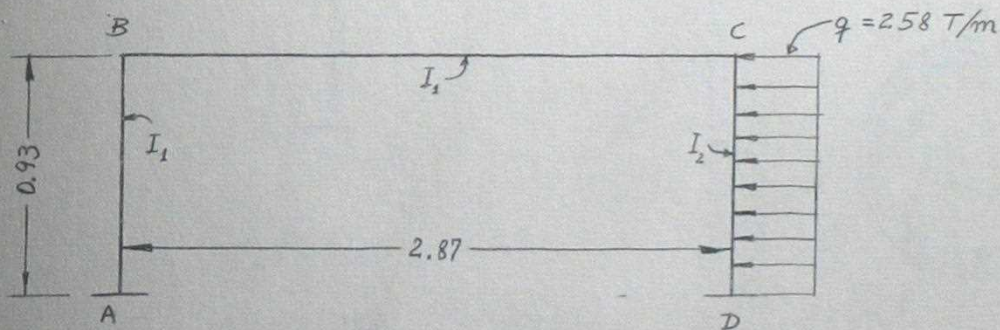


Solicitaciones :

Supondremos que en CD habrá una carga uniformemente repartida equivalente a 240 Ton. en total y que pueden actuar tanto hacia arriba como hacia abajo. El conjunto : losa inferior, muro del fondo y losa superior actuarán como un marco empotrado en A y en D.



Calcularemos los esfuerzos internos de este marco mediante el método de distribución de momentos de H. Cross :



$$I_1 = \frac{400 \times (0.45)^3}{12} = 0.0303$$

$$I_2 = \frac{400 \times (0.65)^3}{12} = 0.0918$$

Rigideces :

$$K_{AB} = C \times \frac{0.0303}{0.93} = 0.0326 C$$

$$K_{BC} = C \times \frac{0.0303}{2.87} = 0.0106 C$$

$$K_{DC} = C \times \frac{0.0918}{0.93} = 0.0986 C$$

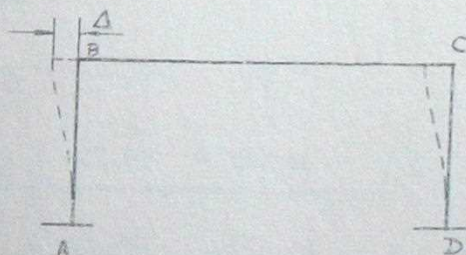
Momentos de empotramiento :

$$M_{DC} = -M_{CD} = -\frac{q l^2}{12} = -\frac{258 \times (0.93)^2}{12} = -18.60 \text{ T.m.}$$

a) Distribución de momentos suponiendo que no hay desplazamiento de los nudos :

NUDO	A	B		C		D
BARRA	AB	BA	BC	CB	CD	DC
Coef. Distrib.		0.754	0.246	0.097	0.903	
					+18.60	-18.60
			-0.90	-1.80	-16.80	-8.40
	+0.34	+0.68	+0.22	+0.11		
				-0.01	-0.10	-0.05
TOTALES	+0.34	+0.68	-0.68	-1.70	+1.70	-27.05

b) Distribución de momentos para un desplazamiento de BC :



$$M_{CD} = -1000$$

$$M_{DC} = -1000$$

$$M_{AB} = M_{BA} = -1000 \times \frac{326}{986} = -331$$



NUDO	A	B		C		D
BARRA	AB	BA	BC	CB	CD	DC
Coef. Distrib.		0.754	0.246	0.097	0.903	
	-331	-331			-1000	-1000
			+ 49	+ 97	+ 903	+ 452
	+107	+213	+ 69	+ 35		
			- 2	- 3	- 32	- 0.16
		+ 1	+ 1			
TOTALES	-224	-117	+117	+129	-129	-564

Ecuación de corte :

$$\frac{M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC}}{0.93} = - \frac{a h}{2}$$

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC} = - \frac{240}{2} \times 0.93 = - 112$$

$$M_{AB} = + 0.34 - 224 \alpha$$

$$M_{BA} = + 0.68 - 117 \alpha$$

$$M_{CD} = + 1.70 - 129 \alpha$$

$$M_{DC} = -27.05 - 564 \alpha$$

$$\Sigma = -24.33 - 1034 \alpha = - 112$$

$$\alpha = \frac{87.7}{1034} = 0.0849$$

$$M_{AB} = 0.34 - 19.0 = - 18.7 \text{ Ton.m.}$$

$$M_{BA} = 0.68 - 9.9 = - 9.2 \text{ "}$$

$$M_{BC} = - 0.68 + 9.9 = + 9.2 \text{ "}$$

$$M_{CB} = - 1.70 + 11.0 = + 9.3 \text{ "}$$

$$M_{CD} = 1.70 - 11.0 = - 9.3 \text{ "}$$

$$M_{DC} = -27.05 - 47.9 = - 75.0 \text{ "}$$

Diagrama de momentos :

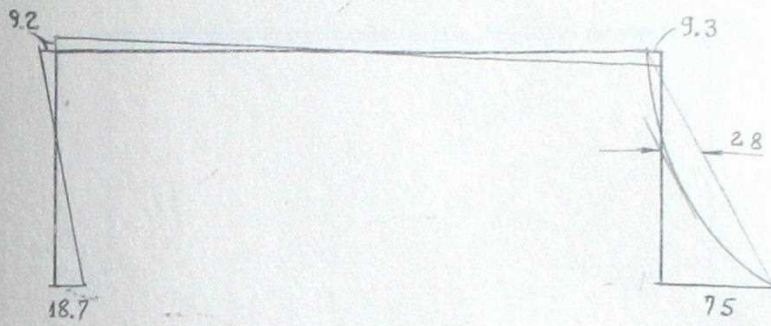


Diagrama de esfuerzos de corte :

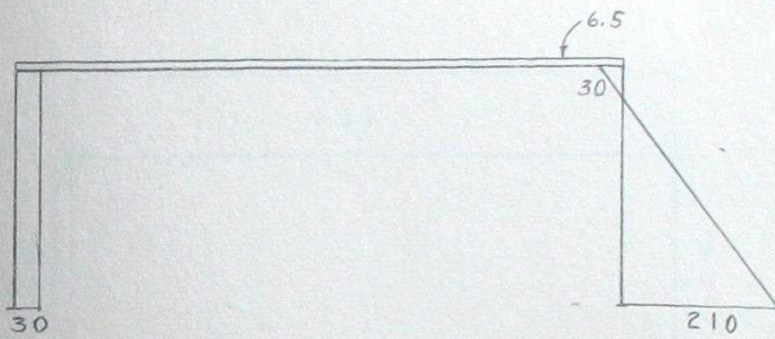
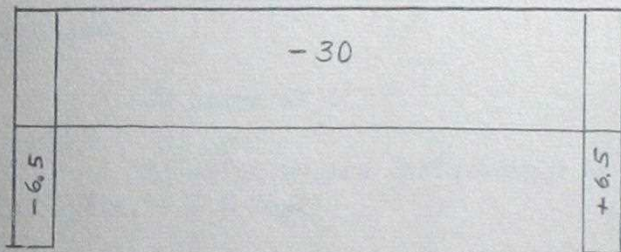
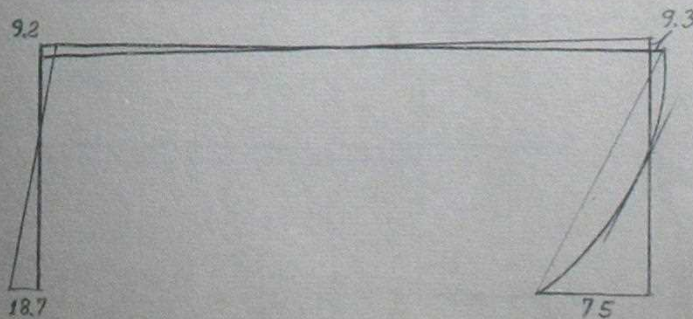


Diagrama de esfuerzos normales :

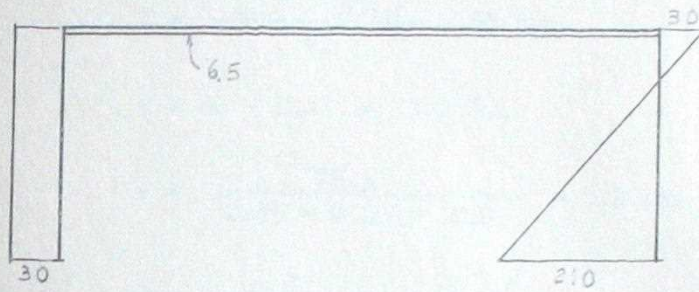


Si las fuerzas exteriores están aplicadas en sentido contrario, los diagramas correspondientes son los siguientes :

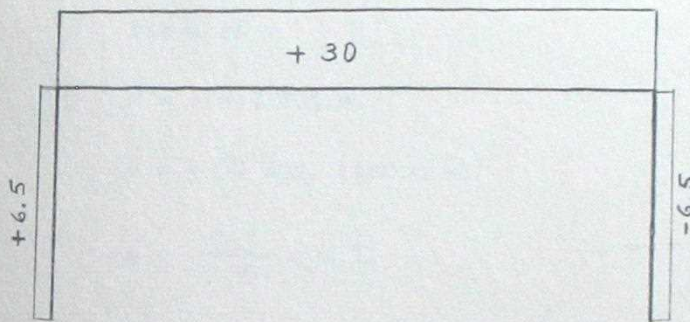
Momentos flectores :



Esfuerzos de corte :



Esfuerzos normales :



Armaduras :

a) Armaduras de tracción para soportar los momentos y las fuerzas axiales.

En barra AB :

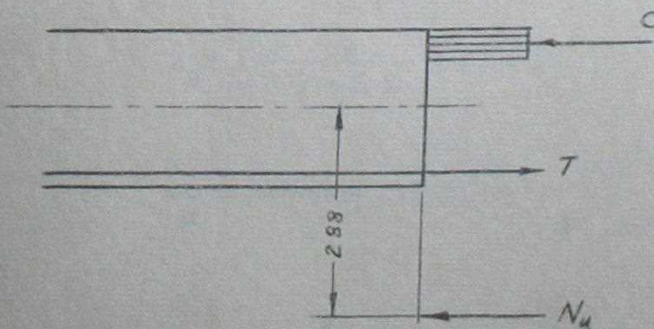
El esfuerzo más desfavorable es una flexo-tracción equivalente a 18.7 T.m. + 6.5 Ton.

$$M = 18.7 \text{ T.m.}$$

$$N = 6.5 \text{ Ton.}$$

$$e = \frac{18.7}{6.5} = 2.88 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 6.5 = 11.7 \text{ Ton.}$$



Supongamos $a = 2$ cm.

$$T = \frac{11.7 \times 309.5}{41} = 88 \text{ Ton.}$$

$$c = 88 - 11.7 = 76.3 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{76.3}{0.85 \times 0.186 \times 400} = 1.2 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{88}{0.9 \times 2.8} = 35 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A_s}{m} = 8.8 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

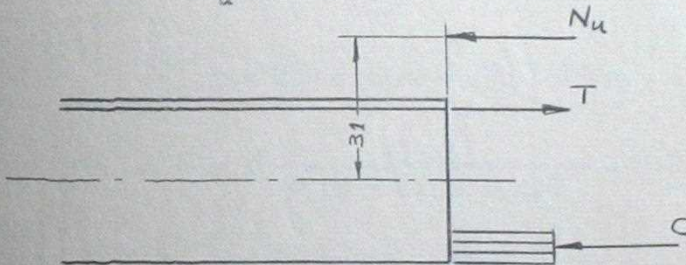
Barra BC :

$$M = - 9.3 \text{ Ton.m.}$$

$$N = + 30 \text{ Ton. (tracción)}$$

$$e = \frac{9.3}{30} = 0.31$$

$$N_u = 1.8 \times 30 = 54 \text{ Ton.}$$



Supongamos $a = 1$ cm.

$$T = \frac{54 \times 0.53}{0.415} = 69 \text{ Ton.}$$

$$c = 69 - 54 = 15 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{15}{0.85 \times 0.186 \times 400} = 0.24 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{69}{0.9 \times 2.8} = 27.4 \text{ cm.}$$

$$\frac{A_s}{m} = \frac{27.4}{4} = 6.9 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \phi 12 @ 15$$

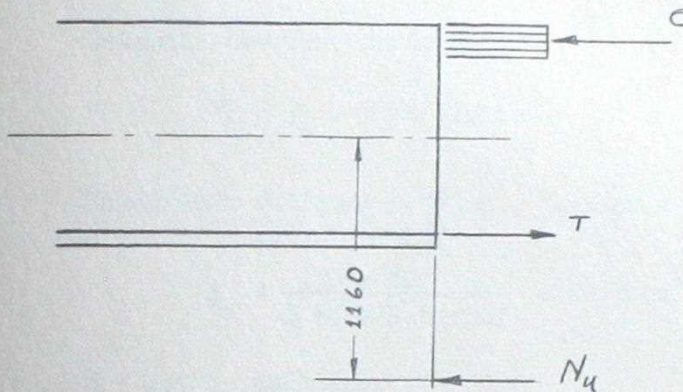
Barra CD :

$$M = 75 \text{ T.m.}$$

$$N = + 6.5 \text{ Ton. (tracción)}$$

$$e = \frac{75}{6.5} = 11.6 \text{ m.}$$

$$N_u = 1.8 \times 6.5 = 11.7 \text{ Ton.}$$



Sea $a = 3 \text{ cm.}$

$$T = \frac{11.7 \times 1181}{60.5} = 228 \text{ Ton.}$$

$$c = 228 + 11.7 = 239.7 \text{ Ton.}$$

$$a = \frac{239.7}{0.85 \times 0.186 \times 400} = 3.7 \text{ cm.}$$

$$T = \frac{11.7 \times 1180.4}{60.2} = 230 \text{ Ton.}$$

$$A_s = \frac{230}{0.9 \times 2.8} = 91.2 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A_s}{m} = \frac{91.2}{4} = 22.8 \text{ cm}^2/\text{m}$$

b) Armadura de corte .

El esfuerzo de corte puede resultar crítico en CD, ya que alcanza el alto valor de 210 Ton. en el punto D.

Según A.C.I. 318-63, la fatiga de corte que puede soportar el hormigón sin necesidad de armadura especial vale :

$$v_c = \phi \left(0.503 \sqrt{f'_c} + 665 \frac{p_{wl} V_d}{M} \right)$$

$$v_c = \phi \left(6.9 + 665 \times 0.00603 \times \frac{210 \times 62}{75.00} \right)$$

$$v_c \leq 11.8 \text{ Kg/cm}^2$$

Pero v_c no puede exceder :

$$v_c \leq 0.93 \phi \sqrt{f'_c} = 10.8 \text{ Kg/cm}^2$$

$$V_c = 10.8 \times 400 \times 62 = 268 \text{ Ton.}$$

Tenemos que :

$$V_u = 1.8 \times 210 = 378 \text{ Ton.}$$

Debemos absorber con armaduras :

$$V'_u = V_u - V_c = 110 \text{ Ton.}$$

Suponiendo estribos a 30 cm., tenemos :

$$A_v = \frac{110 \times 30}{0.85 \times 2.8 \times 62} = 22.3 \text{ cm}^2$$

Por metro tendríamos :

$$\frac{A_v}{m} = \frac{22.3}{4} = 5.6 \text{ cm}^2$$

$$5 \phi 12 = 5.65 \text{ cm}^2$$

Es decir, se deben poner estribos algo más juntos en esta zona, o bien doblar algo de la armadura longitudinal.

Area necesaria para barras dobladas :

$$A_v = \frac{V'_u}{\phi f_y \text{ sen}} = \frac{110}{0.85 \times 2.8 \times 0.708}$$

$$A_v = 65 \text{ cm}^2$$

Se deberían doblar, por lo tanto,

$$\frac{65}{150} = 0.43 \text{ de las barras.}$$

Lo más práctico será poner una cierta cantidad de estribos, dejándolos algo más tupidos en la zona crítica. Debemos considerar que de todas maneras se pondrán estribos, y que no se sabe a ciencia cierta cual será la sollicitación, ya que ésta dependerá del tipo de prueba que se realice.

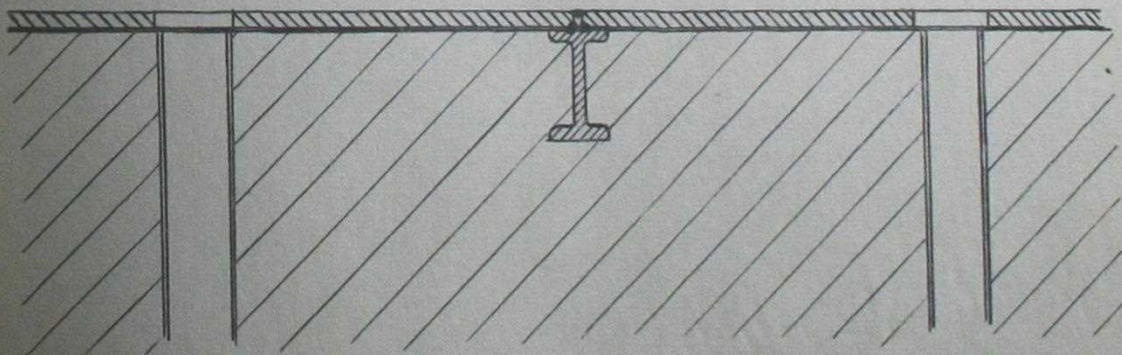
8.9.- Comparación entre la solución obtenida y otras soluciones.-

	Laboratorios Industriales Belgas.	Laboratorio A.C.I.	Laboratorio Universidad Lehigh	Laboratorio de l'Iraba	Nuestra Solución
SUP. TOTAL m ²	268	630	91	467	511
PESO TOTAL (reducido al mismo tipo hormigón).	1850 Ton.	2830	436	2948	1900
<u>SUP. TOTAL</u> <u>PESO TOTAL</u>	0.145	0.222	0.209	0.158	0.270
ARMADURA (% en vol.) Reducido al mismo acero : A 44-28-H	?	2.5	1.8 a 2.0	Hormigón pretensado	2.0
ALTURA Desde nivel fundación hasta nivel de piso.	4.15 m.	3.65	2.00 (sin subterráneo)	7.00	3.45 m.

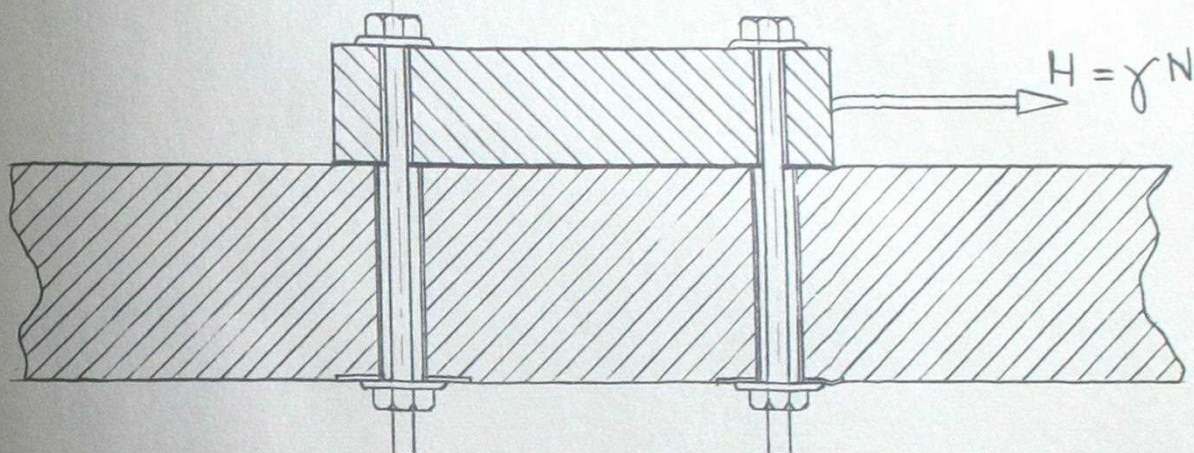
8.10.- Fuerzas horizontales.-

Se han empleado dos métodos diferentes para absorber las fuerzas razantes paralelas al plano de la losa :

a) La cara superior de la losa se cubre con gruesas placas de acero, las cuales van soldadas a perfiles metálicos empotrados en el hormigón. Las fuerzas horizontales se aplican entonces sobre estas placas de acero, los cuales se encargan de transmitir las a la losa mediante los perfiles de sección I.



b) Las fuerzas horizontales se transmiten a la losa mediante roce. Para este objeto se fabrica un bloque de hormigón armado de tamaño adecuado al monto de la carga y se pone en contacto con la losa mediante una capa de mortero. Enseguida se une a la losa mediante un cierto número de pernos de alta resistencia, los cuales se tensan con un gato hidráulico antes de ajustar las tuercas. De esta manera se obtiene una gran fuerza normal entre el bloque y la losa, fuerza que se traduce en una cierta capacidad de carga horizontal, igual al coeficiente de rozamiento multiplicado por la fuerza normal.



Suponiendo cuatro pernos de 50 Ton. cada uno y $\gamma = 0,6$,
tenemos :

$$H = 0.6 \times 200 = 120 \text{ Ton.}$$

De estas dos soluciones sólo la segunda es aplicable a nuestro laboratorio, ya que la primera resulta demasiado cara cuando el tamaño de la losa es grande.

A N E X O.-

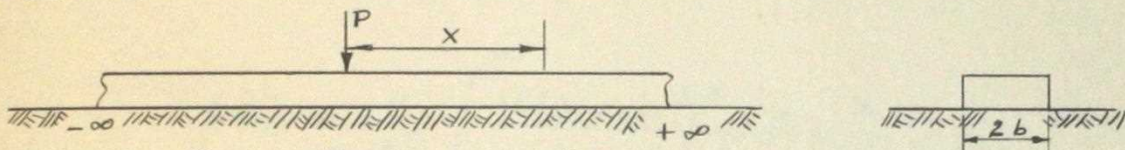
VIGAS FINITAS SOBRE SUELO ELASTICO.-

a) Vigas de longitud infinita.-

La solución exacta del problema de determinar las deformaciones de una viga descansando sobre un medio elástico, isotrópico e infinito, es extremadamente compleja. La solución matemática exacta del problema fué establecida por Biot en 1937 (57). Pero las integrales resultantes son demasiado complicadas como para que se puedan usar en forma práctica. Sólo ha sido posible resolverlas en forma numérica mediante computadores. Por ésta razón, en la práctica el problema se resuelve introduciendo ciertas hipótesis simplificatorias.

1.- La solución de Biot.-

La solución dada por Biot para una viga infinita con una carga concentrada es la siguiente :



Momento flector en la viga :

$$M(x) = \frac{Pc}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \cos \frac{\alpha x}{c} d\alpha}{\alpha^3 + \psi(\beta)} = \frac{Pc}{\pi} J_2(x)$$

En donde :

M(x) es el momento flector de la viga a la distancia x de la carga.

α es un parámetro adimensional.

b es la mitad del ancho de la viga.

$$c = \left[\frac{c (1 - \nu_s^2) E_b I}{E_s} \right]^{1/3}$$

es la "dimensión principal" de la viga.

c es función de $\frac{b \alpha}{c}$;

(c = 1.0 si la presión está uniformemente distribuida a través del ancho de la viga.

1.00 < c < 1.13 si la deflexión a través del ancho de la viga es uniforme.)

$E_b I$ es la rigidez de la viga.

E_s ; ν_s son los módulos de Young y de Poisson del suelo, respectivamente.

$\beta = b \alpha / c =$ parámetro adimensional.

$\psi(\beta) =$ función tabulada para $\beta > 0.1$ y dada mediante una expresión asintótica para $\beta < 0.1$.

Tomando la expresión anterior como punto de partida, se obtienen las siguientes funciones para la deformación $y(x)$, la desangulación $\theta(x)$, el esfuerzo de corte $Q(x)$ y la presión de contacto $p(x)$:

$$E_b I y(x) = \frac{Pc^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{\alpha x}{c} d\alpha}{\alpha [\alpha^3 + \psi(\beta)]} = \frac{Pc^3}{\pi} J_0(x)$$

$$E_b I \theta(x) = -\frac{Pc^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{\alpha x}{c} d\alpha}{\alpha^3 + \psi(\beta)} = -\frac{Pc^2}{\pi} J_1(x)$$

$$Q(x) = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 \text{sen} \frac{\alpha x}{c} d\alpha}{\alpha^3 + \psi(\beta)} = \frac{P}{\pi} J_3(x)$$

$$p(x) = \frac{P}{c\pi} \int_0^{\infty} \frac{\psi(\beta) \cos \frac{\alpha x}{c} d\alpha}{\alpha^3 + \psi(\beta)} = \frac{P}{c\pi} J_4(x)$$

En forma similar, si en vez de una carga concentrada se trata de un momento M , la solución completa es la siguiente:

$$E_b I y(x) = \frac{Mc^2}{\pi} J_1(x)$$

$$E_b I \theta(x) = \frac{Mc}{\pi} J_2(x)$$

$$M(x) = \frac{M}{\pi} J_3(x)$$

$$Q(x) = -\frac{M}{c\pi} J_4(x)$$

$$p(x) = \frac{M}{c^2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \psi(\beta) \text{sen} \frac{\alpha x}{c} d\alpha}{\alpha^3 + \psi(\beta)} = \frac{M}{c^2\pi} J_5(x)$$

Como se puede apreciar en las expresiones anteriores, la solución completa del problema es extremadamente compleja, aún cuando se trata sólo de una viga infinita con una carga concentrada única. El problema es mucho más complejo si se trata de una viga de longitud finita.

2.- Solución basada en la hipótesis de Winkler (58).-

Corrientemente el problema se resuelve mediante la hipótesis establecida por Winkler en el año 1867 de que la razón entre la presión y la deformación en un punto cualquiera de la fundación es constante:

$$\frac{P}{y} = \text{Cte.} = k \quad (\text{coeficiente de reacción del terreno}).$$

El problema se plantea entonces, según Timoshenko (59), en la siguiente forma :

Ecuación diferencial correspondiente a una viga sin carga :

$$E_b I \frac{d^4 y}{dx^4} = -k y, \text{ siendo } k = 2b \times k$$

Resolviendo esta ecuación para una viga infinita con una carga concentrada P, se obtiene :

$$y(x) = \frac{P \beta}{2k} F_1 (\beta x)$$

$$\theta(x) = \frac{P \beta}{k} F_2 (\beta x)$$

$$M(x) = \frac{P}{4 \beta} F_3 (\beta x)$$

$$Q(x) = \frac{P}{2} F_4 (\beta x)$$

En donde :

$$\beta = 4 \sqrt{\frac{K}{4E_b I}}$$

$$F_1 = e^{-\beta x} (\text{sen } \beta x + \text{cos } \beta x)$$

$$F_2 = e^{-\beta x} \text{sen } \beta x$$

$$F_3 = e^{-\beta x} (\text{cos } \beta x - \text{sen } \beta x)$$

$$F_4 = e^{-\beta x} \text{cos } \beta x$$

La determinación de la constante de reacción del terreno k resulta un problema difícil de resolver. Diversos autores dan valores aproximados de acuerdo con el tipo de suelo en que estará ubicada la fundación. Otros recomiendan obtener k en forma experimental en el terreno, efectuando una prueba de carga mediante una placa cuadrada de 30 cm. de lado. Pero la constante k va a depender no sólo de las características del terreno, sino que también dependerá de las características de la viga (ancho de la base de apoyo y rigidez de la viga).

3.- Solución numérica de Vesić y expresión para determinar k (60).-

Alexander B. Vesić, Profesor Asociado de Ingeniería Civil del Instituto Tecnológico de Georgia, ha hecho un interesante estudio resolviendo en forma aproximada las integrales de Biot mediante un computador y comparando los resultados con los obtenidos mediante la solución convencional basada en la hipótesis de Winkler y con los obtenidos en forma experimental.

Vesić obtuvo la siguiente expresión :

$$J_2(x) = J_2(0) e^{-\lambda' x} (\cos \lambda' x - \text{sen } \lambda' x)$$

$$\text{Siendo } J_2(0) = 0.332 \left(\frac{b}{c}\right)^{0.169}$$

λ' es un parámetro que tiene la dimensión L^{-1} y está definido como :

$$\lambda' = \frac{\sqrt{12}}{4 x_0}, \text{ donde } x_0 \text{ es la abscisa correspondiente al primer cero de la integral.}$$

x_0 , en forma aproximada (2% de error) está dado por :

$$x_0 = 1.140 c \left(\frac{b}{c}\right)^{0.187}$$

De aquí se obtiene :

$$\lambda' = \frac{0.689}{b} \left(\frac{b}{c}\right)^{0.813}$$

En el análisis convencional, como hemos visto, se obtienen funciones de idéntica forma a las expresiones de Vesić. Estas funciones serán congruentes si se tiene que :

$$\lambda' = \beta \quad \text{es decir}$$

$$\frac{0.689}{b} \left(\frac{b}{c}\right)^{0.813} = 4 \sqrt{\frac{k}{4E_b I}}$$

Substituyendo el valor de

$$c = \frac{3}{\sqrt{E_s}} \sqrt{\frac{C(1 - \nu_s^2) E_b I}{E_s}} \quad \text{y considerando que } c \approx 1, \text{ se}$$

obtiene :

$$K_\infty = \frac{0.90}{C} \left[\frac{E_b b^4}{E_s I} \right]^{0.083} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2}$$

Tomando $C = 1.10$ y poniendo $B = 2b$, se obtiene finalmente :

$$K_\infty = k_\infty B = 0.65 \sqrt{\frac{E_s B^4}{E_b I}} \times \frac{E_s}{1 - \nu_s^2}$$

Si se conoce el coeficiente de reacción para una placa cuadrada de ancho $B(\bar{K})$, en vez del módulo de Young y de Poisson del terreno, la expresión se transforma en :

$$K_{\infty} = 0.52 \sqrt{\frac{12}{E_b I}} \frac{K B^4}{\bar{K}}$$

En el Instituto de Tecnología de Georgia, Estados Unidos, se realizaron ensayos a escala natural los cuales corroboraron los resultados obtenidos numéricamente. Vesic' llegó, finalmente, a las siguientes conclusiones :

1) Que la hipótesis de Winkler prácticamente se satisface no sólo en vigas de longitud infinita sobre suelos elásticos e isotrópicos, sino que también se satisfacen en vigas de longitud moderada sobre un terreno imperfectamente elástico.

2) Que el coeficiente de reacción del terreno k , cuando la hipótesis de Winkler es plausible, puede determinarse usando las expresiones recién establecidas y pruebas de laboratorio o en obra a pequeña escala para la determinación de E_s .

4.- Valores dados por Terzaghy para el coeficiente de reacción del terreno.-

Terzaghy ha dado los siguientes valores de k , basados en un coeficiente - k_{30} - obtenido experimentalmente mediante una placa cuadrada de 30 cm. de lado (17).

a) Suelos sin cohesión o muy ligeramente coherentes.-

k en Kg/cm^3 para una placa de 30 x 30 cm. o para una zapata de 30 cm. de ancho.

A R E N A Densidad seca	SUELTA 1.3	MEDIA 1.6	DENSA 1.9
Valores extremos de k para arena seca o húmeda.	0.64 a 1.92	1.92 a 9.60	9.60 a 32
Valores propuestos	1.3	4.0	16
Arena saturada : Valores propuestos	0.8	2.5	10

Para una zapata de ancho B o una base cuadrada de lado B se tiene :

$$k = k_{30} \left(\frac{B + 20}{2 B} \right)^2$$

b) Arcilla consistente.-

Valor de k_{30} en Kg/cm^3 para una placa cuadrada de 30 x 30 cm.

A R C I L L A	RIGIDA	MUY RIGIDA	DURA
Compresión posible sobre la arcilla	1 a 2	2 a 4	4
Valores extremos de k_{30}	1.6 a 3.2	3.2 a 6.4	6.4
Valores propuestos	2.5	5	10

Para una placa rectangular de 30 cm. de ancho y L cm. de longitud, se tiene :

$$k = k_{30} \frac{L + 15}{15 L}$$

Para una zapata continua de 30 cm. de ancho :

$$k = 0.67 k_{30}$$

Para una zapata continua de ancho B cm. :

$$k = k_{30} \frac{30}{B}$$

El coeficiente k varía mucho de un suelo a otro, aún para terrenos muy cercanos entre sí. Por esta razón, si se le desea conocer con cierta precisión, será necesario hacer pruebas del suelo.

b) Vigas de longitud finita.-

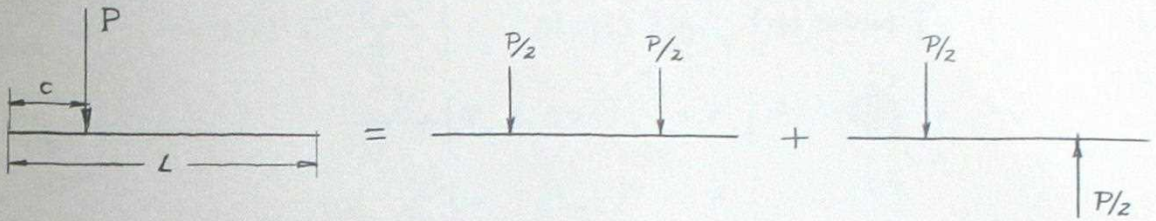
Las teorías recién expuestas son válidas para vigas de longitud infinita. Sin embargo pueden aplicarse en forma aproximada a vigas de longitud finita siempre que la característica de longitud de la viga, βL , sea superior a un cierto valor. Por ejemplo, para una viga finita con una carga concentrada al centro, se pueden usar las expresiones establecidas para vigas de longitud infinita sin errores demasiado grandes, siempre que βL sea superior a π . Se comprende que el error será tanto menor cuanto mayor sea βL .

Para los casos en que estas expresiones no sean aplicables, se podrá hacer uso del principio de superposición, descomponiendo el problema en la suma de varias vigas de longitud infinita.

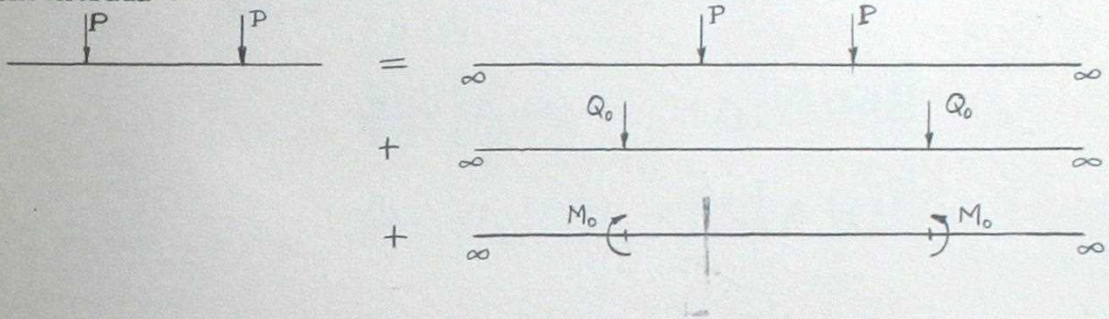
Si solucionamos los casos de una viga finita con una carga concentrada ubicada en una posición cualquiera y de una viga finita con un momento ubicado en una posición cualquiera, podremos resolver cualquiera otra viga finita con un sistema arbitrario de cargas, mediante la superposición de los dos casos básicos mencionados.

1.- Viga de longitud finita con una carga concentrada en una posición cualquiera.-

El problema queda resuelto mediante la superposición de un caso de simetría con uno de antimetría :



Los casos de simetría y antimetría quedan resueltos, a su vez, mediante la superposición de casos de una viga infinita con una carga concentrada :



Para determinar los valores de Q_0 y M_0 , establecemos las condiciones de que en los extremos de la viga, tanto el esfuerzo de corte como el momento flector debern ser cero.

$$\frac{P}{4\beta} \{F_1[\beta(L-c)] + F_3(\beta c)\} + \frac{Q_0}{4\beta} [1 + F_3(\beta L)] + \frac{M_0}{2} [1 + F_4(\beta L)] = 0$$

$$\frac{P}{2} \{F_4[\beta(L-c)] + F_4(\beta c)\} - \frac{Q_0}{2} [1 - F_4(\beta L)] - \frac{M_0}{2} \beta [1 - F_1(\beta L)] = 0$$

De donde obtenemos :

$$M_0 = \frac{\frac{P}{2\beta} \{ [F_3[\beta(L-c)] + F_3(\beta c)] [1 - F_4(\beta L)] + [F_4[\beta(L-c)] + F_4(\beta c)] [1 + F_3(\beta L)] \}}{1 - [F_4(\beta L)]^2} - \frac{1}{2} [1 - F_1(\beta L)] [1 + F_3(\beta L)]}$$

$$Q_0 = - \frac{P \{ F_3[\beta(L-c)] + F_3(\beta c) \} + 2\beta M_0 [1 + F_4(\beta L)]}{1 + F_3(\beta L)}$$

Conocidos M_0 y Q_0 , obtenemos las siguientes expresiones para la reacción del terreno, el momento flector y el esfuerzo de corte :

Reacción del terreno :

$$R(x) = \frac{P\beta}{2} \left[F_1(\beta|x-c|) + F_1(\beta|x-L+c|) \right] + \frac{Q_0\beta}{2} \left[F_1(\beta x) + F_1[\beta(L-x)] \right] + M_0\beta^2 \left[F_2(\beta x) + F_2[\beta(L-x)] \right]$$

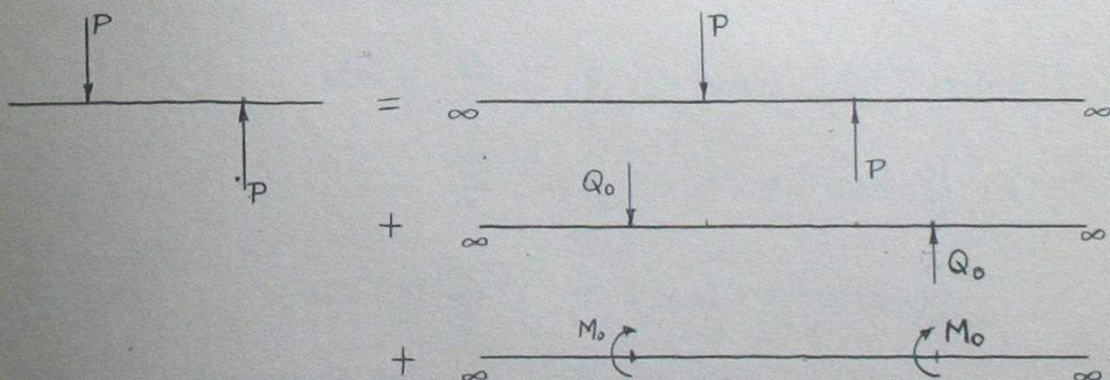
Momento flector :

$$M(x) = \frac{P}{4\beta} \left[F_3(\beta|x-c|) + F_3(\beta|x-L+c|) \right] + \frac{Q_0}{4\beta} \left[F_3(\beta x) + F_3[\beta(L-x)] \right] + \frac{M_0}{2} \left[F_2(\beta x) + F_2[\beta(L-x)] \right]$$

Esfuerzo de corte :

$$Q(x) = \frac{P}{2} \left[\begin{array}{cc} (x-c) \leq 0 & (x-L+c) \leq 0 \\ + F_4(\beta|x-c|) & + F_4(\beta|x-L+c|) \\ (x-c) > 0 & (x-L+c) > 0 \end{array} \right] + \frac{Q_0}{2} \left[-F_4(\beta x) + F_4[\beta(L-x)] \right] - \frac{M_0}{2} \left[F_1(\beta x) - F_1[\beta(L-x)] \right]$$

Procediendo en forma análoga obtenemos la solución para el caso de antisimetría :



Se obtienen los siguientes valores para M_0 y Q_0 :

$$M_0 = -\frac{P}{2\beta} \frac{\{ [F_3(\beta c) - F_3[\beta(L-c)]] [1 + F_4(\beta L)] + [F_4(\beta c) - F_4[\beta(L-c)]] [1 - F_3(\beta L)] \}}{1 - [F_4(\beta L)]^2 - \frac{1}{2} [1 + F_4(\beta L)] [1 - F_3(\beta L)]}$$

$$Q_0 = \frac{P [F_4(\beta c) - F_4[\beta(L-c)]] - M_0 \beta [1 + F_4(\beta L)]}{1 + F_4(\beta L)}$$

La reacción del terreno, el momento flector y el esfuerzo de corte están dados por las siguientes expresiones :

Reacción del terreno :

$$R(x) = \frac{P\beta}{2} \left[F_1(\beta |x-c|) - F_1(\beta |x-L+c|) + \frac{Q_0\beta}{2} \left[F_1(\beta x) - F_1[\beta(L-x)] \right] + M_0\beta^2 \left[F_2(\beta x) - F_2[\beta(L-x)] \right] \right]$$

Momento flector :

$$M(x) = \frac{P}{4\beta} \left[F_3(\beta |x-c|) - F_3(\beta |x-L+c|) + \frac{Q_0}{4\beta} \left[F_3(\beta x) - F_3[\beta(L-x)] \right] + \frac{M_0}{2} \left[F_2(\beta x) - F_2[\beta(L-x)] \right] \right]$$

Esfuerzo de corte :

$$Q(x) = \frac{P}{2} \left[-F_4(\beta |x-c|) + F_4(\beta |x-L+c|) \right] + \frac{Q_0}{2} \left[-F_4(\beta x) - F_4[\beta(L-x)] \right] - \frac{M_0\beta}{2} \left[F_1(\beta x) + F_1[\beta(L-x)] \right]$$

La suma de estos dos casos, dividida por dos, nos da la solución buscada.

Mediante las expresiones anteriores se ha confeccionado un programa para un computador digital en lenguaje indirecto "ALCOR". Este programa se encuentra en la página siguiente.

Da los diagramas de reacción del terreno, momento flector y esfuerzo de corte para una viga de cualquier característica y cada un intervalo variable, DL , según se desee. El ha servido para confeccionar las tablas que se encuentran más adelante.


```

'BEGIN', 'COMMENT', 'VIGA FINITA CON CARGA P;
'REAL', X, B, BX, L, C, P, F1, F2, F3, F4, MO1, MO2, QO1, QO2, DL, R1, R2, R,
M1, M2, M, Q1, Q2, Q, F41, F42;
'REAL', 'PROCEDURE' F1(BX); 'VALUE' BX; 'REAL' BX;
F1 := (EXP(-BX)) * (SIN(BX) + COS(BX));
'REAL', 'PROCEDURE' F2(BX); 'VALUE' BX; 'REAL' BX;
F2 := (EXP(-BX)) * SIN(BX);
'REAL', 'PROCEDURE' F3(BX); 'VALUE' BX; 'REAL' BX;
F3 := (EXP(-BX)) * (COS(BX) - SIN(BX));
'REAL', 'PROCEDURE' F4(BX); 'VALUE' BX; 'REAL' BX;
F4 := (EXP(-BX)) * COS(BX);

READ(B, L, C, P, DL);
FORMAT(4, 1);

MO1 := ((-P) / (2. * B)) * ((F3(B * (L - C)) + F3(B * C)) * (1. - F4(B * L)) +
(F4(B * (L - C)) + F4(B * C)) * (1. + F3(B * L))) / (1. - (F4(B * L)) * (F4(B * L)))
- 0.5 * (1. - F1(B * L)) * (1. + F3(B * L)));
QO1 := -(P * (F3(B * (L - C)) + F3(B * C)) + 2. * B * MO1 * (1. + F4(B * L))) /
(1. + F3(B * L));
MO2 := -(P / (2. * B)) * ((F3(B * C) - F3(B * (L - C))) * (1. + F4(B * L)) +
(F4(B * C) - F4(B * (L - C))) * (1. - F3(B * L))) / (1. - (F4(B * L)) * F4(B * L))
- 0.5 * (1. + F1(B * L)) * (1. - F3(B * L)));
QO2 := (P * (F4(B * C) - F4(B * (L - C))) - MO2 * B * (1. + F1(B * L))) /
(1. + F4(B * L));
'FOR' X := 0. 'STEP' DL 'UNTIL' L 'DO' 'BEGIN'
R1 := ((P * B) / 2.) * (F1(B * ABS(X - C)) + F1(B * ABS(X - L + C))) +
((QO1 * B) / 2.) * (F1(B * X) + F1(B * (L - X))) +
MO1 * B * B * (F2(B * X) + F2(B * (L - X)));
R2 := ((P * B) / 2.) * (F1(B * ABS(X - C)) - F1(B * ABS(X - L + C))) +
((QO2 * B) / 2.) * (F1(B * X) - F1(B * (L - X))) +
MO2 * B * B * (F2(B * X) - F2(B * (L - X)));
R := (R1 + R2) / 2.;
M1 := (P / (4. * B)) * (F3(B * ABS(X - C)) + F3(B * ABS(X - L + C))) +
(QO1 / (4. * B)) * (F3(B * X) + F3(B * (L - X))) +
(MO1 / 2.) * (F4(B * X) + F4(B * (L - X)));
M2 := (P / (4. * B)) * (F3(B * ABS(X - C)) - F3(B * ABS(X - L + C))) +
(QO2 / (4. * B)) * (F3(B * X) - F3(B * (L - X))) +
(MO2 / 2.) * (F4(B * X) - F4(B * (L - X)));
M := (M1 + M2) / 2.;
'IF' X - C 'GREATER' 0. 'THEN'
F41 := -F4(B * ABS(X - C)) 'ELSE' F41 := F4(B * ABS(X - C));
'IF' X - L + C 'GREATER' 0. 'THEN'
F42 := -F4(B * ABS(X - L + C)) 'ELSE' F42 := F4(B * ABS(X - L + C));
Q1 := (P / 2.) * (F41 + F42) + (QO1 / 2.) * (-F4(B * X) + F4(B * (L - X)))
- (MO1 * B / 2.) * (F1(B * X) - F1(B * (L - X)));
Q2 := (P / 2.) * (F41 - F42) - (QO2 / 2.) * (F4(B * X) + F4(B * (L - X)))
- (MO2 * B / 2.) * (F1(B * X) + F1(B * (L - X)));
Q := (Q1 + Q2) / 2.; PRINT(X, R, M, Q);
'END';
'END'

```

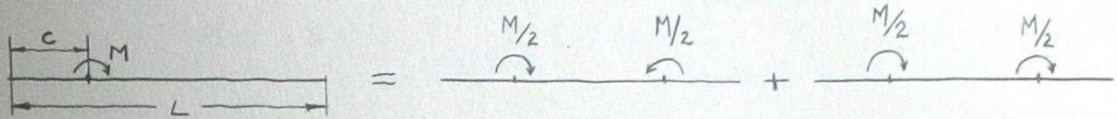
```

#####9999999999999999

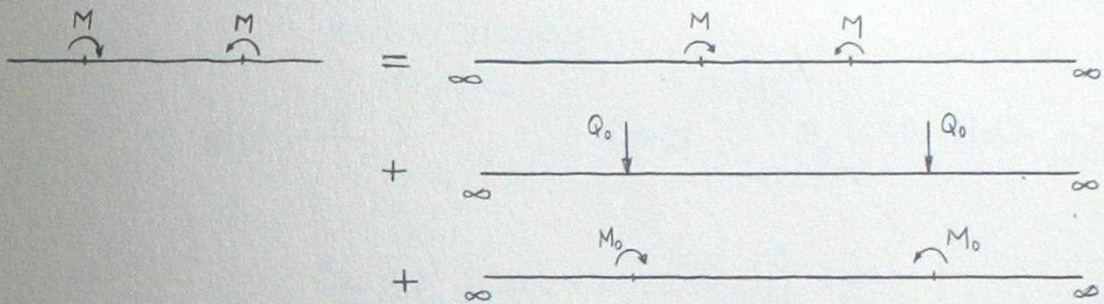
```


2.- Viga de longitud finita con un momento aplicado en una posición cualquiera.-

Al igual que en el caso anterior, el problema queda resuelto mediante la superposición de un caso de simetría con uno de anti-simetría :



A su vez, los casos de simetría y antisimetría quedan resueltos mediante la superposición de casos de una viga infinita con una carga concentrada.



Planteando las condiciones de que el momento flector y el esfuerzo de corte deben anularse en los extremos de la viga, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} M \left[-F_4(\beta c) + F_4[\beta(L-c)] \right] + \frac{Q_0}{2\beta} \left[1 + F_3(\beta L) \right] + M_0 \left[1 + F_4(\beta L) \right] &= 0 \\ -Q_0 \left[1 - F_4(\beta L) \right] - M_0 \beta \left[1 - F_1(\beta L) \right] + M \beta \left[F_1[\beta(L-c)] - F_1(\beta c) \right] &= 0 \end{aligned}$$

De aquí obtenemos los siguientes valores para M_0 y Q_0 :

$$M_0 = \frac{M \left\{ -[F_1[\beta(L-c)] - F_1(\beta c)] [1 + F_1(\beta L)] - 2[-F_4(\beta c) + F_4[\beta(L-c)]] [1 - F_4(\beta L)] \right\}}{2 \left\{ 1 - [F_4(\beta L)]^2 \right\} - [1 - F_1(\beta L)] [1 + F_3(\beta L)]}$$

$$Q_0 = \frac{-2\beta \left\{ M [-F_4(\beta c) + F_4[\beta(L-c)]] + M_0 [1 + F_4(\beta L)] \right\}}{1 + F_3(\beta L)}$$

Conocidos estos esfuerzos en los bordes, obtenemos las siguientes expresiones para la reacción del terreno, el momento flector y el esfuerzo de corte :

Reacción del terreno :

$$R(x) = M \beta^2 \left[\begin{array}{l} x \geq c \\ x < c \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{+}{-} \\ \frac{-}{+} \end{array} F_2 (\beta |x-c|) \left. \begin{array}{l} (x-L+c) < 0 \\ (x-L+c) > 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{+}{-} \\ \frac{-}{+} \end{array} F_2 (\beta |x-L+c|) \left. \right] + \\ \frac{Q_0 \beta}{2} \left[F_1 (\beta x) + F_1 [\beta (L-x)] \right] + \\ M_0 \beta^2 \left[F_2 (\beta x) + F_2 [\beta (L-x)] \right]$$

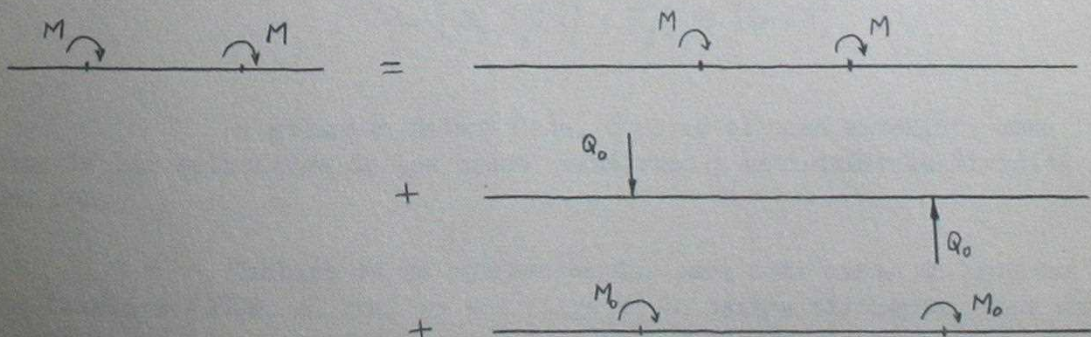
Momento flector :

$$M(x) = \frac{M}{2} \left[\begin{array}{l} (x-c) \geq 0 \\ (x-c) < 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{+}{-} \\ \frac{-}{+} \end{array} F_4 (\beta |x-c|) \left. \begin{array}{l} (x-L+c) < 0 \\ (x-L+c) \geq 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{+}{-} \\ \frac{-}{+} \end{array} F_4 (\beta |x-L+c|) \left. \right] + \\ \frac{M_0}{2} \left[F_4 (\beta x) + F_4 [\beta (L-x)] \right] + \\ \frac{Q_0}{4\beta} \left[F_3 (\beta x) + F_3 [\beta (L-x)] \right]$$

Esfuerzo de corte :

$$Q(x) = -\frac{M\beta}{2} \left[F_1 (\beta |x-c|) - F_1 (\beta |x-L+c|) \right] - \\ \frac{M_0 \beta}{2} \left[F_1 (\beta x) - F_1 [\beta (L-x)] \right] + \\ \frac{Q_0}{2} \left[-F_4 (\beta x) + F_4 [\beta (L-x)] \right]$$

El caso antisimétrico, resuelto en forma análoga, conduce a los siguientes resultados :



$$M_0 = \frac{M \{ 2 [F_4(\beta c) + F_4[\beta(L-c)]] [1 + F_4(\beta L)] + [F_1[\beta(L-c)] + F_1(\beta c)] [1 - F_3(\beta L)] \}}{2 \{ 1 - [F_4(\beta L)]^2 \} - [1 + F_1(\beta L)] [1 - F_3(\beta L)]}$$

$$Q_0 = \frac{2\beta \{ M [F_4(\beta c) + F_4[\beta(L-c)]] - M_0 [1 - F_4(\beta L)] \}}{1 - F_3(\beta L)}$$

Y los esfuerzos respectivos a lo largo de la viga valen :

Reacción del terreno :

$$R(x) = M \beta^2 [F_2(\beta | x-c|) - F_2(\beta | x-L+c|)] + \frac{Q_0 \beta}{2} [F_1(\beta x) - F_1[\beta(L-x)]] + M_0 \beta^2 [F_2(\beta x) - F_2[\beta(L-x)]]$$

Momento flector :

$$M(x) = \frac{M}{2} [F_4(\beta | x-c|) + F_4(\beta | x-L+c|)] + \frac{M_0}{2} [F_4(\beta x) - F_4[\beta(L-x)]] + \frac{Q_0}{4\beta} [F_3(\beta x) - F_3[\beta(L-x)]]$$

Reacción del terreno :

$$Q(x) = - \frac{M\beta}{2} [F_1(\beta | x-c|) + F_1(\beta | x-L+c|)] - \frac{M_0\beta}{2} [F_1(\beta x) + F_1[\beta(L-x)]] - \frac{Q_0}{2} [F_4(\beta x) + F_4[\beta(L-x)]]$$

La solución estará dada, como en el caso anterior, como la suma de las soluciones de los casos simétrico y antisimétrico dividida por dos.

También se ha confeccionado, para este caso, un programa en lenguaje ALCOR, el cual se encuentra en la página siguiente. Este programa tiene las mismas características que el anterior, vale decir, da como resultados los diagramas de reacción del terreno, momento flector y esfuerzo de corte para una viga finita de cualquier característica con un momento aplicado en una posición cualquiera. Este programa ha servido para confeccionar las tablas que se incluyen al final.


```

'BEGIN' 'COMMENT' VIGA FINITA CON MOMENTO MO;
'REAL' X, B, BX, L, C, MO, F1, F2, F3, F4, MO1, MO2,
QO1, QO2, DL, R1, R2, R, M1, M2, M, Q1, Q2, Q, F41, F42, F21, F22;

'REAL' 'PROCEDURE' F1(BX); 'VALUE' BX; 'REAL' BX;
  F1:=(EXP(-BX))*(SIN(BX)+COS(BX));

'REAL' 'PROCEDURE' F2(BX); 'VALUE' BX; 'REAL' BX;
  F2:=(EXP(-BX))*SIN(BX);

'REAL' 'PROCEDURE' F3(BX); 'VALUE' BX; 'REAL' BX;
  F3:=(EXP(-BX))*(COS(BX)-SIN(BX));

'REAL' 'PROCEDURE' F4(BX); 'VALUE' BX; 'REAL' BX;
  F4:=(EXP(-BX))*COS(BX);
  READ(B, L, C, MO, DL); FORMAT(4, 1);

MO1:=MO*(-(F1(B*(L-C))-F1(B*C))*(1.+F3(B*L))
-2.*(F4(B*C)+F4(B*(L-C)))*(1.-F4(B*L)))/
(2.*(1.-F4(B*L))*F4(B*L)-(1.-F1(B*L))*(1.+F3(B*L)));

QO1:=(-2.*B)*(MO*(-F4(B*C)+F4(B*(L-C)))+MO1*(1.+F4(B*L)))/
(1.+F3(B*L));

MO2:=MO*(2.*(F4(B*C)+F4(B*(L-C)))*(1.+F4(B*L))+
(F1(B*(L-C))+F1(B*C))*(1.-F3(B*L)))/(2.*(1.-
F4(B*L))*F4(B*L)-(1.+F1(B*L))*(1.-F3(B*L)));

QO2:=2.*B*(MO*(F4(B*C)+F4(B*(L-C)))-MO2*(1.-F4(B*L)))/
(1.-F3(B*L));

'FOR' X:=0 'STEP' DL 'UNTIL' L 'DO' 'BEGIN'
  'IF' X 'GREATER' C 'THEN'
    F21:=F2(B*ABS(X-C)) 'ELSE' F21:=-F2(B*ABS(X-C));
  'IF' X-L+C 'GREATER' 0. 'THEN'
    F22:=-F2(B*ABS(X-L+C)) 'ELSE' F22:=F2(B*ABS(X-L+C));

R1:=MO*B*B*(F21+F22)+((QO1*B)/2.)*(F1(B*X)+F1(B*(L-X)))
+MO1*B*B*(F2(B*X)+F2(B*(L-X)));

R2:=MO*B*B*(F21-F22)+((QO2*B)/2.)*(F1(B*X)-F1(B*(L-X)))
+MO2*B*B*(F2(B*X)-F2(B*(L-X)));

R:=(R1+R2)/2.;

'IF' X 'GREATER' C 'THEN' F41:=F4(B*ABS(X-C))
'ELSE' F41:=-F4(B*ABS(X-C));

'IF' X-L+C 'GREATER' 0. 'THEN' F42:=F4(B*ABS(X-L+C))
'ELSE' F42:=-F4(B*ABS(X-L+C));

M1:=(MO/2.)*(F41-F42)+(MO1/2.)*(F4(B*X)+F4(B*(L-X)))
+(QO1/(4.*B))*(F3(B*X)+F3(B*(L-X)));

M2:=(MO/2.)*(F41+F42)+(MO2/2.)*(F4(B*X)-F4(B*(L-X)))
+(QO2/(4.*B))*(F3(B*X)-F3(B*(L-X)));

M:=(M1+M2)/2.;

Q1:=- (MO*B)/2.*(F1(B*ABS(X-C))-F1(B*ABS(X-L+C)))-
(MO1*B)/2.*(F1(B*X)-F1(B*(L-X)))+QO1/2.*(-F4(B*X)+F4(B*(L-X)));

Q2:=-MO*B/2.*(F1(B*ABS(X-C))+F1(B*ABS(X-L+C)))-
MO2*B/2.*(F1(B*X)+F1(B*(L-X)))-
QO2/2.*(F4(B*X)+F4(B*(L-X)));

Q:=(Q1+Q2)/2.;

PRINT(X, R, M, Q); 'END'; 'END'

```


3.- Viga finita con un número cualquiera de cargas concentradas y momentos.-

Este caso se puede resolver mediante la superposición de la aplicación repetida de las soluciones dadas a los casos anteriores. Para este fin se han confeccionado las tablas que se incluyen al final y que simplifican mucho la solución de un problema práctico en el que hayan cargas concentradas y momentos aplicados sobre una viga que tenga un valor bajo de βL .

El problema también puede ser resuelto mediante el computador, ya que se ha confeccionado un programa que da como resultados los diagramas de reacción del terreno, momento flector y esfuerzo de corte para una viga de cualquier característica, sometida a un número cualquiera de cargas concentradas, mediante superposición del primer caso estudiado. El programa sirve también para el caso de momentos aplicados, ya que estos se pueden reemplazar por una pareja equivalente con un brazo de palanca suficientemente pequeño como para que el error introducido sea despreciable.

Para usar este programa, debe tenerse el siguiente cuidado en cuanto a la introducción de los datos:

- Poner primero una cinta con los datos : N, B, L, DL, espacios en blanco. N es el número de cargas, $B = \beta$, L la longitud de la viga y DL el intervalo elegido. El programa se detendrá luego de leer estos datos.

- Poner enseguida una cinta con los datos $P_1, C_1, P_2, C_2, P_3, C_3, \dots$ y pegar ambos extremos de la cinta de manera que cuando se termine la lectura de estos datos, la cinta vuelva a quedar automáticamente lista para empezar nuevamente la lectura.

- Dejar correr de nuevo el programa.

El tiempo de operación está dado en forma aproximada por la expresión :

$$T = 0.6 N + 0.62 \frac{L}{DL} \quad [\text{min.}]$$


```

'BEGIN''COMMENT'VIGA FINITA CON VARIAS CARGAS CONCENTRADAS;
'REAL'X,B,BX,L,C,P,F1,F2,F3,F4,MO1,MO2,QO1,QO2,DL,R1,R2,R,
RX,MX,QX,M1,M2,M,Q1,Q2,Q,F41,F42;

'REAL''PROCEDURE'F1(BX);'VALUE'BX;'REAL'BX;
F1:=(EXP(-BX))*(SIN(BX)+COS(BX));

'REAL''PROCEDURE'F2(BX);'VALUE'BX;'REAL'BX;
F2:=(EXP(-BX))*SIN(BX);

'REAL''PROCEDURE'F3(BX);'VALUE'BX;'REAL'BX;
F3:=(EXP(-BX))*(COS(BX)-SIN(BX));

'REAL''PROCEDURE'F4(BX);'VALUE'BX;'REAL'BX;
F4:=(EXP(-BX))*COS(BX);

'INTEGER'N,I;FORMAT(6,1);
READ(N,B,L,DL);STOP(10);
'FOR'X:=0.'STEP'DL'UNTIL'L'DO''BEGIN'RX:=MX:=QX:=0.;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN'
READ(P,C);

MO1:=((-P)/(2.*B))*(F3(B*(L-C))+F3(B*C))*(1.-F4(B*L))+
(F4(B*(L-C))+F4(B*C))*(1.+F3(B*L)))/(1.-(F4(B*L))*(F4(B*L))
-0.5*(1.-F1(B*L))*(1.+F3(B*L)));
QO1:=-((P*(F3(B*(L-C))+F3(B*C))+2.*B*MO1*(1.+F4(B*L)))/
(1.+F3(B*L)));
MO2:=-(P/(2.*B))*(F3(B*C)-F3(B*(L-C)))*(1.+F4(B*L))+
(F4(B*C)-F4(B*(L-C)))*(1.-F3(B*L)))/(1.-(F4(B*L))*F4(B*L)-
0.5*(1.+F1(B*L))*(1.-F3(B*L)));
QO2:=(P*(F4(B*C)-F4(B*(L-C)))-MO2*B*(1.+F1(B*L)))/
(1.+F4(B*L));
R1:=((P*B)/2.)*(F1(B*ABS(X-C))+F1(B*ABS(X-L+C)))+
((QO1*B)/2.)*(F1(B*X)+F1(B*(L-X)))+
MO1*B*B*(F2(B*X)+F2(B*(L-X)));
R2:=((P*B)/2.)*(F1(B*ABS(X-C))-F1(B*ABS(X-L+C)))+
((QO2*B)/2.)*(F1(B*X)-F1(B*(L-X)))+
MO2*B*B*(F2(B*X)-F2(B*(L-X)));
R:=(R1+R2)/2.;
M1:=(P/(4.*B))*(F3(B*ABS(X-C))+F3(B*ABS(X-L+C)))+
(QO1/(4.*B))*(F3(B*X)+F3(B*(L-X)))+
(MO1/2.)*(F4(B*X)+F4(B*(L-X)));
M2:=(P/(4.*B))*(F3(B*ABS(X-C))-F3(B*ABS(X-L+C)))+
(QO2/(4.*B))*(F3(B*X)-F3(B*(L-X)))+
(MO2/2.)*(F4(B*X)-F4(B*(L-X)));
M:=(M1+M2)/2.;
'IF'X-C'GREATER'0.'THEN'
F41:=-F4(B*ABS(X-C))'ELSE'F41:=F4(B*ABS(X-C));
'IF'X-L+C'GREATER'0.'THEN'
F42:=-F4(B*ABS(X-L+C))'ELSE'F42:=F4(B*ABS(X-L+C));
Q1:=(P/2.)*(F41+F42)+(QO1/2.)*(-F4(B*X)+F4(B*(L-X)))
-(MO1*B/2.)*(F1(B*X)-F1(B*(L-X)));
Q2:=(P/2.)*(F41-F42)-(QO2/2.)*(F4(B*X)+F4(B*(L-X)))
-(MO2*B/2.)*(F1(B*X)+F1(B*(L-X)));
Q:=(Q1+Q2)/2.;
RX:=RX+R;QX:=QX+Q;MX:=MX+M;
'END';PRINT(X,RX,MX,QX)'END''END';

```


4.- Tablas para el cálculo de vigas de longitud finita sobre suelo elástico.-

Mediante los programas confeccionados en ALCOR para el computador digital, se han obtenido las tabulaciones siguientes, que representan los coeficientes λ_R , λ_M y λ_Q para el caso de una viga finita con una carga concentrada y para el caso de un momento, aplicados a una distancia c del extremo izquierdo.

Los diagramas de reacción del suelo, momento flector y esfuerzo de corte, quedan dados por las expresiones siguientes :

Para una carga concentrada :

$$R_x = P/\beta \lambda_R$$

$$M_x = \frac{P}{\beta} \lambda_M$$

$$Q_x = R \lambda_Q$$

Para un momento flector :

$$R_x = M/\beta^2 \lambda_R$$

$$M_x = M \lambda_M$$

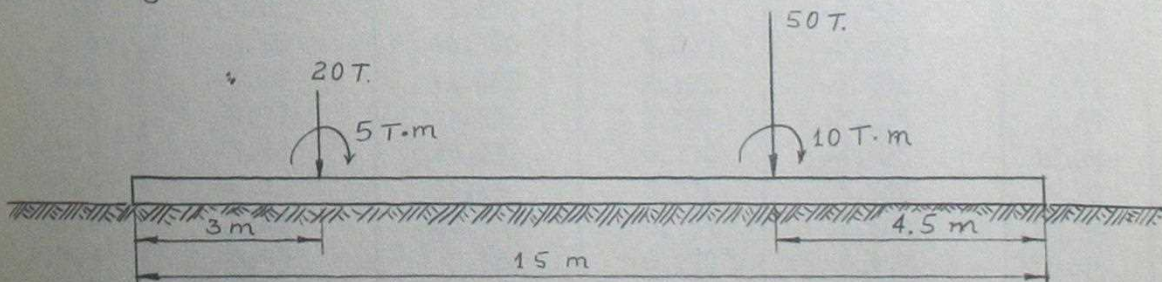
$$Q_x = M/\beta \lambda_Q$$

Para las tabulaciones, se ha dividido la viga en 10 partes iguales, por lo que en cada tabla se dan 11 valores de cada coeficiente.

Para cada valor de βL se han tabulado los coeficientes correspondientes a 11 posiciones de la carga entre el extremo izquierdo y el centro, es decir, cada $1/20$ de la longitud de la viga.

Ejemplo de aplicación.-

Para aclarar mejor el uso de estas tabulaciones, obtengamos la solución del siguiente caso : una viga de longitud finita a la cual llegan dos pilares, los cuales producen las cargas indicadas en la figura sobre la viga de fundación.



Se tiene :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} = 0.2 \text{ m}^{-1}$$

Luego $\beta \cdot L = 0.2 \times 15 = 3$

Usamos entonces la tabulación correspondiente a $\beta L = 3$.

Obteniendo los valores de λ_R , λ_M y λ_Q de las tablas, podemos calcular las cifras siguientes, para 11 puntos de la viga :

Reacción del terreno :

x m.	$P_1=20T; c=3m.$ $R_1 = P_1 / \beta \lambda_{R_1}$	$P_2=50; c=10.5$ $R_2 = P_2 / \beta \lambda_{R_2}$	$M'=5Tm; c=3m.$ $R_3 = M' / \beta^2 \lambda_{R'}$	$M''=10Tm; c=10.5$ $R_4 = M'' / \beta^2 \lambda_{R''}$	$\sum R$
0.0	3.673	-1.520	-0.306	-0.064	1.783
1.5	3.335	-0.470	-0.196	-0.097	2.572
3.0	2.936	0.597	-0.080	-0.128	3.325
4.5	2.366	1.716	0.013	-0.154	3.941
6.0	1.744	2.897	0.064	-0.165	4.540
7.5	1.161	4.098	0.084	-0.148	5.195
9.0	0.659	5.178	0.084	-0.084	5.837
10.5	0.239	5.869	0.073	0.049	6.230
12.0	-0.118	5.914	0.056	0.205	6.057
13.5	-0.440	5.590	0.037	0.336	5.523
15.0	-0.750	5.164	0.018	0.460	4.891

Momento flector :

x m.	$P_1=20 \quad c=3$ $M_1 = \frac{P_1}{\beta} \lambda_{M_1}$	$P_2=50; c=10.5$ $M_2 = \frac{P_2}{\beta} \lambda_{M_2}$	$M'=5 \quad c=3$ $M_3 = M' \lambda_{M'}$	$M''=10 \quad c=10.5$ $M_4 = M'' \lambda_{M''}$	$\sum M$
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.5	4.01	-1.325	-0.303	-0.084	2.30
3.0	15.51	-3.675	-1.045	-0.386	10.40
4.5	3.56	-4.700	3.027	-0.975	0.91
6.0	-3.07	-1.850	2.121	-1.906	-4.71
7.5	-5.77	7.55	1.353	-3.203	0.07
9.0	-5.84	26.13	0.770	-4.823	16.24
10.5	-4.42	56.28	0.372	3.380	55.61
12.0	-2.44	24.50	0.137	1.697	23.89
13.5	-0.73	5.98	0.027	0.471	5.75
15.0	-0.00	0.00	0.00	0.000	0.00

Esfuerzo de corte :

x	$P_1=20 \quad c=3$	$P_2=50 \quad c=10.5$	$M'=5 \quad c=3$	$M''=10 \quad c=10.5$	
m.	$Q_1=P_1$	$Q_2=P_2$	$Q_3=M'$	$Q_4=M''$	
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.5	5.258	-1.490	-0.376	-0.121	3.271
3.0	9.972	-1.400	-0.585	-0.289	7.698
4.5	-6.040	+0.325	-0.629	-0.502	-6.846
6.0	-2.958	+3.780	-0.566	-0.743	-0.488
7.5	-0.788	+9.030	-0.453	-0.982	+6.807
9.0	0.566	+16.015	-0.325	-1.163	+15.093
10.5	1.230	-25.630	-0.207	-1.200	-25.807
12.0	1.314	-16.720	-0.111	-1.005	-16.522
13.5	0.892	-8.070	-0.041	-0.596	-7.815
15.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Estos mismos valores están representados en los gráficos que se encuentran a continuación.

Nota :

En el caso en que L no coincida exactamente con alguno de los valores para los cuales están calculadas las tablas y se desee hacer una interpolación lineal, conviene proceder en la siguiente forma :

Calcular las tabulaciones para los valores de L que se encuentran en la tabla y que sean inmediatamente superior e inferior al valor L de la viga en estudio.

Una vez hecho esto, proceder a realizar la interpolación lineal.

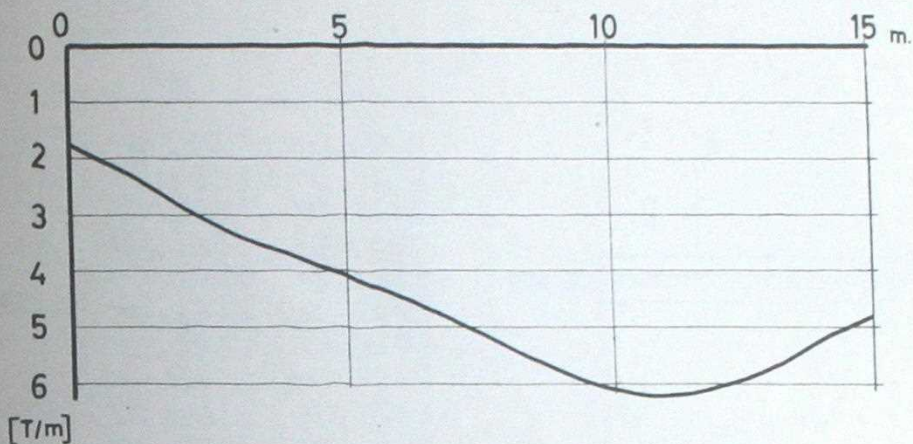
La interpolación debe hacerse en esta forma, ya que, por ejemplo, los valores de la reacción del terreno dependen de P para una carga concentrada y de M para un momento, y como la viga tiene una longitud fija, los valores de x serán variables junto con el valor de L .

Realizando el mismo cálculo en forma directa mediante el computador, se obtuvieron los siguientes resultados :

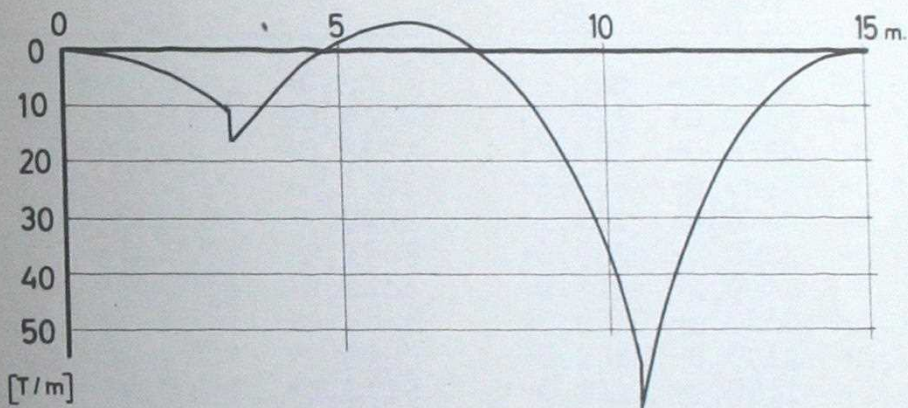
x m	R_x	M_x	Q_x
0,00000	1,78644	0,00000	0,00000
1,50000	2,57219	2,30519	3,27016
3,00000	3,31781	10,3911	7,69790
4,50000	3,94088	0,91466	- 6,84489
6,00000	4,54013	- 4,69806	- 0,48925
7,50000	5,19478	- 0,08371	6,80565
9,00000	5,83660	16,2181	15,0915
10,5000	6,22914	45,6072	25,8940
12,0000	6,05624	23,8943	-16,5230
13,5000	5,52293	5,74216	- 7,81428
15,0000	4,8903	0,00000	0,00000

DIAGRAMAS CORRESPONDIENTES AL EJEMPLO

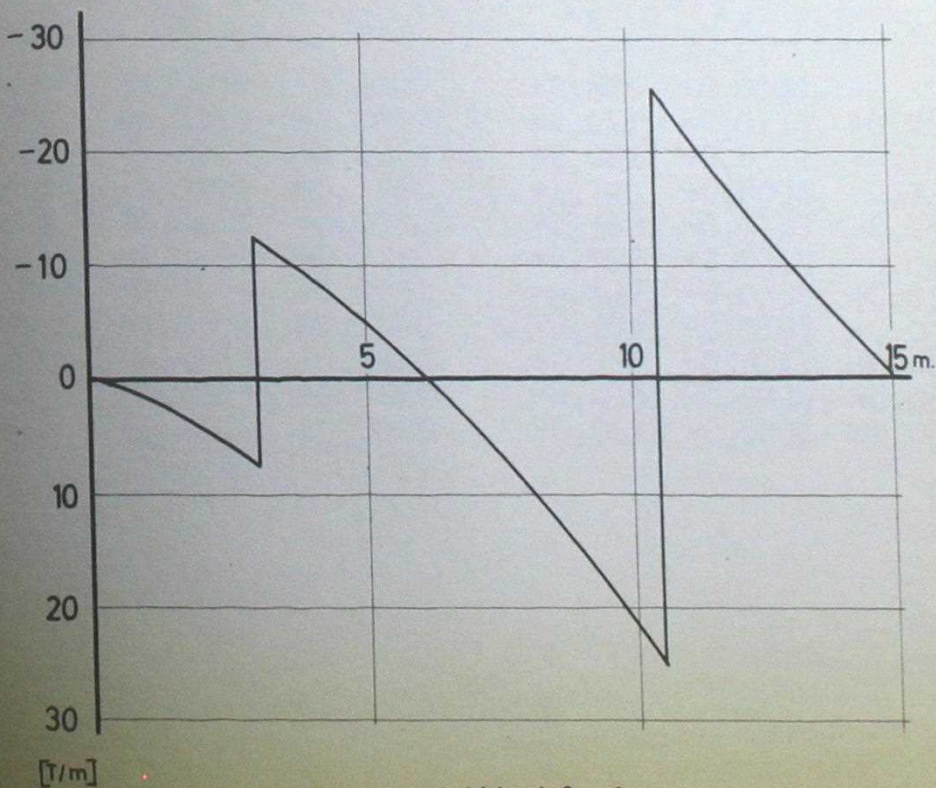
a) REACCION DEL TERRENO



b) MOMENTO REFLECTOR



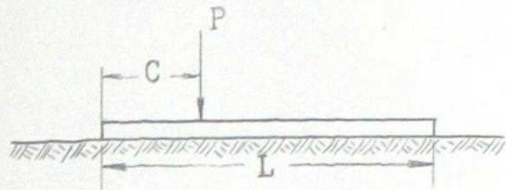
c) ESFUERZO DE CORTE



CARGA CONCENTRADA $\beta L = 1$

C/L = 0.00

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	+4,038	-0,0000	-0,0000
0.1	+3,418	-0,0808	-0,6272
0.2	+2,800	-0,1275	-0,3164
0.3	+2,188	-0,1462	-0,0670
0.4	+1,582	-0,1429	+0,1215
0.5	+0,9814	-0,1239	+0,2496
0.6	+0,3857	-0,0950	+0,3179
0.7	-0,2063	-0,0623	+0,3269
0.8	-0,7957	-0,0316	+0,2768
0.9	-1,384	-0,0089	+0,1678
1.0	-1,972	-0,0000	-0,0000



C/L = 0.05

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	+3,728	-0,0000	-0,0000
0.1	+3,174	-0,0323	-0,6549
0.2	+2,621	-0,0828	-0,3652
0.3	+2,072	-0,1072	-0,1306
0.4	+1,526	-0,1108	-0,0492
0.5	+0,9855	-0,0991	+0,1748
0.6	+0,4487	-0,0776	+0,2464
0.7	-0,0851	-0,0516	+0,2646
0.8	-0,6169	-0,0265	+0,2295
0.9	+1,148	-0,0075	+0,1413
1.0	-1,678	+0,0000	+0,0000

C/L = 0,1

λ_R	λ_M	λ_Q
+3,418	-0,0000	-0,0000
+2,930	+0,0163	+0,3174
+2,441	-0,0382	-0,4141
+1,955	-0,0682	-0,1943
+1,471	-0,0786	-0,0231
+0,9896	-0,0744	+0,0999
+0,5116	-0,0602	+0,1749
+0,0360	-0,0410	+0,2023
-0,4380	-0,0214	+0,1822
-0,9111	-0,0061	+0,1148
-1,384	-0,0000	+0,0000

C/L = 0,15

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	+3,109	-0,0000	-0,0000
0.1	+2,685	-0,0148	+0,2897
0.2	+2,262	-0,0065	-0,4629
0.3	+1,838	-0,0292	-0,2580
0.4	+1,415	-0,0465	-0,0954
0.5	+0,9937	-0,0496	+0,0250
0.6	+0,5746	-0,0429	+0,1034
0.7	+0,1572	-0,0303	+0,1400
0.8	-0,2590	-0,0163	+0,1349
0.9	-0,6746	-0,0047	-0,0882
1.0	-1,090	+0,0000	+0,0000

C/L = 0,20

λ_R	λ_M	λ_Q
+2,800	+0,0000	+0,0000
+2,441	+0,0134	+0,2621
+2,082	+0,0512	+0,4883
+1,720	+0,0098	-0,3216
+1,359	-0,0143	-0,1677
+0,9977	-0,0249	-0,0499
+0,6375	-0,0255	+0,0319
+0,2783	-0,0197	+0,0777
-0,0800	-0,0111	+0,0876
-0,4380	-0,0034	+0,0617
-0,7957	-0,0000	-0,0000

$$\beta L = 3$$

$$C/L = 0.30$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,149	0,0000	0,0000
0,1	-0,8406	-0,0471	-0,2986
0,2	-0,5125	-0,1697	-0,5025
0,3	-0,1219	-0,3380	-0,5999
0,4	+0,2108	+0,4823	-0,5814
0,5	+0,3692	+0,3203	-0,4908
0,6	+0,4114	+0,1906	-0,3715
0,7	+0,3839	+0,0975	-0,2509
0,8	+0,3202	+0,0386	-0,1447
0,9	+0,2418	+0,0084	-0,0603
1,0	+0,1597	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.35$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,9660	0,0000	0,0000
0,1	-0,7520	-0,0403	-0,2578
0,2	-0,5215	-0,1481	-0,4497
0,3	-0,2363	-0,3025	-0,5653
0,4	+0,1135	+0,5226	-0,5827
0,5	+0,3198	+0,3566	-0,5138
0,6	+0,3970	+0,2184	-0,4037
0,7	+0,3944	+0,1153	-0,2835
0,8	+0,3493	+0,0474	-0,1713
0,9	+0,2862	+0,0109	-0,0757
1,0	+0,2184	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.40$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,6695	0,0000	0,0000
0,1	-0,5354	-0,0281	-0,1807
0,2	-0,4012	-0,1044	-0,3213
0,3	-0,2667	-0,2168	-0,4215
0,4	-0,1314	-0,3532	-0,4812
0,5	+0,0034	+0,4985	-0,5004
0,6	+0,1365	+0,3506	-0,4793
0,7	+0,2685	+0,2149	-0,4186
0,8	+0,3997	+0,1034	-0,3183
0,9	+0,5306	+0,0278	-0,1788
1,0	+0,6614	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.45$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,6410	0,0000	0,0000
0,1	-0,5696	-0,0278	-0,1817
0,2	-0,4866	-0,1067	-0,3407
0,3	-0,3640	-0,2292	-0,4697
0,4	-0,1578	-0,3838	-0,5507
0,5	+0,1420	+0,4483	-0,5528
0,6	+0,3250	+0,2921	-0,4794
0,7	+0,4020	+0,1644	-0,3684
0,8	+0,4187	+0,0724	-0,2442
0,9	+0,4082	+0,0178	-0,1198
1,0	+0,3903	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.50$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,5057	0,0000	0,0000
0,1	-0,4848	-0,0225	-0,1486
0,2	-0,4545	-0,0885	-0,2900
0,3	-0,3911	-0,1951	-0,4181
0,4	-0,2565	-0,3365	-0,5176
0,5	0,0000	-0,5000	-0,5598
0,6	+0,2565	+0,3365	-0,5176
0,7	+0,3911	+0,1951	-0,4181
0,8	+0,4545	+0,0885	-0,2900
0,9	+0,4848	+0,0225	-0,1486
1,0	+0,5057	0,0000	0,0000

$$\beta L = 4$$

$$C/L = 0,00$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-2,003	0,0000	0,0000
0,1	-0,7124	+0,8783	-0,5226
0,2	+0,0223	+0,6351	-0,6444
0,3	+0,3506	+0,3901	-0,5590
0,4	+0,4262	+0,1978	-0,3975
0,5	+0,3716	+0,0721	-0,2352
0,6	+0,2678	+0,0051	-0,1066
0,7	+0,1584	-0,0191	-0,0216
0,8	+0,0599	-0,0177	+0,0217
0,9	-0,0278	-0,0067	+0,0278
1,0	-0,1110	0,0000	0,0000

$$C/L = 0,05$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,933	0,0000	0,0000
0,1	-0,7188	+0,8794	-0,5206
0,2	+0,0190	+0,6367	-0,6443
0,3	+0,3493	+0,3915	-0,5597
0,4	+0,4262	+0,1989	-0,3985
0,5	+0,3722	+0,0727	-0,2360
0,6	+0,2685	+0,0054	-0,1072
0,7	+0,1590	-0,0189	-0,0219
0,8	+0,0603	-0,0177	+0,0215
0,9	-0,0276	-0,0067	+0,0278
1,0	-0,1110	0,0000	0,0000

$$C/L = 0,10$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,760	0,0000	0,0000
0,1	-0,7621	-0,1143	-0,5052
0,2	-0,0044	+0,6461	-0,6421
0,3	+0,3399	+0,4004	-0,5639
0,4	+0,4251	+0,2056	-0,4046
0,5	+0,3751	+0,0770	-0,2417
0,6	+0,2726	+0,0078	-0,1113
0,7	+0,1628	-0,0179	-0,0244
0,8	+0,0631	-0,0174	+0,0203
0,9	-0,0261	-0,0066	+0,0275
1,0	-0,1109	0,0000	0,0000

$$C/L = 0,15$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,529	0,0000	0,0000
0,1	-0,7948	-0,1029	-0,4654
0,2	-0,0681	+0,6678	-0,6319
0,3	+0,3119	+0,4220	-0,5715
0,4	+0,4193	+0,2226	-0,4185
0,5	+0,3806	+0,0884	-0,2554
0,6	+0,2821	+0,0143	-0,1219
0,7	+0,1721	-0,0149	-0,0311
0,8	+0,0702	-0,0163	+0,0170
0,9	-0,0219	-0,0064	+0,0264
1,0	-0,1097	0,0000	0,0000

$$C/L = 0,20$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,274	0,0000	0,0000
0,1	-0,7647	-0,0885	-0,4084
0,2	-0,1921	-0,2985	-0,6037
0,3	+0,2531	+0,4591	-0,5791
0,4	+0,4025	+0,2532	-0,4405
0,5	+0,3865	+0,1095	-0,2790
0,6	+0,2971	+0,0267	-0,1410
0,7	+0,1882	-0,0088	-0,0438
0,8	+0,0832	-0,0141	+0,0102
0,9	-0,0134	-0,0060	+0,0239
1,0	-0,1060	0,0000	0,0000

$$C/L = 0,25$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,020	0,0000	0,0000
0,1	-0,6945	-0,0730	-0,3434
0,2	-0,3161	-0,2565	-0,5489
0,3	+0,1491	+0,5114	-0,5796
0,4	+0,3658	+0,2990	-0,4681
0,5	+0,3881	+0,1425	-0,3127
0,6	+0,3160	+0,0470	-0,1700
0,7	+0,2111	+0,0016	-0,0642
0,8	+0,1033	-0,0101	-0,0014
0,9	+0,0012	-0,0052	+0,0193
1,0	-0,0976	0,0000	0,0000

$$\beta L = 4$$

$$C/L = 0.30$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,7835	0,0000	0,0000
0,1	-0,6021	-0,0579	-0,2775
0,2	-0,3785	-0,2116	-0,4763
0,3	-0,0162	-0,4241	-0,5620
0,4	+0,2976	+0,3602	-0,4958
0,5	+0,3784	+0,1890	-0,3548
0,6	+0,3351	+0,0768	-0,2094
0,7	+0,2397	+0,0175	-0,0935
0,8	+0,1311	-0,0036	-0,0193
0,9	+0,0237	-0,0037	+0,0116
1,0	-0,0815	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.35$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,5738	0,0000	0,0000
0,1	-0,5009	-0,0440	-0,2152
0,2	-0,3955	-0,1678	-0,3966
0,3	-0,1795	-0,3533	-0,5171
0,4	+0,1841	+0,4351	-0,5153
0,5	+0,3478	+0,2496	-0,4017
0,6	+0,3488	+0,1175	-0,2586
0,7	+0,2717	+0,0403	-0,1329
0,8	+0,1665	+0,0061	-0,0448
0,9	+0,0559	-0,0014	-0,0003
1,0	-0,0542	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.40$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,3957	0,0000	0,0000
0,1	-0,4004	-0,0318	-0,1594
0,2	-0,3814	-0,1274	-0,3174
0,3	-0,2776	-0,2829	-0,4534
0,4	+0,0096	-0,4804	-0,5151
0,5	+0,2843	+0,3234	-0,4474
0,6	+0,3495	+0,1700	-0,3155
0,7	+0,3030	+0,0710	-0,1825
0,8	+0,2085	+0,0199	-0,0793
0,9	+0,0995	+0,0020	-0,0175
1,0	-0,0118	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.45$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,2504	0,0000	0,0000
0,1	-0,3072	-0,0216	-0,1117
0,2	-0,3476	-0,0921	-0,2437
0,3	-0,3261	-0,2174	-0,3816
0,4	-0,1627	-0,3931	-0,4858
0,5	+0,1736	+0,4084	-0,4834
0,6	+0,3272	+0,2343	-0,3765
0,7	+0,3280	+0,1107	-0,2419
0,8	+0,2552	+0,0385	-0,1238
0,9	+0,1556	+0,0068	-0,0412
1,0	+0,0503	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.50$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,1363	0,0000	0,0000
0,1	-0,2250	-0,0133	-0,0723
0,2	-0,3032	-0,0624	-0,1787
0,3	-0,3389	-0,1596	-0,3094
0,4	-0,2696	-0,3095	-0,4360
0,5	0,0000	-0,5000	-0,4985
0,6	+0,2696	+0,3095	-0,4360
0,7	+0,3389	+0,1596	-0,3094
0,8	+0,3032	+0,0624	-0,1787
0,9	+0,2250	+0,0133	-0,0723
1,0	+0,1363	0,0000	0,0000

$$\beta L = 5$$

$$C/L = 0.00$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-2,001	0,0000	0,0000
0,1	-0,4832	+0,8230	-0,5818
0,2	+0,2218	+0,5081	-0,6194
0,3	+0,4145	+0,2381	-0,4451
0,4	+0,3606	+0,0667	-0,2454
0,5	+0,2326	-0,0161	-0,0964
0,6	+0,1157	-0,0404	-0,0106
0,7	+0,0369	-0,0349	+0,0259
0,8	-0,0079	-0,0195	+0,0320
0,9	-0,0330	-0,0057	+0,0213
1,0	-0,0517	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.05$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,895	0,0000	0,0000
0,1	-0,4940	+0,8255	-0,5789
0,2	+0,2176	+0,5110	-0,6201
0,3	+0,4139	+0,2403	-0,4470
0,4	+0,3616	+0,0679	-0,2471
0,5	+0,2338	-0,0156	-0,0975
0,6	+0,1167	-0,0403	-0,0112
0,7	+0,0375	-0,0350	+0,0257
0,8	-0,0077	-0,0196	+0,0320
0,9	-0,0331	-0,0057	+0,0213
1,0	-0,0520	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.10$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,647	0,0000	0,0000
0,1	-0,5669	-0,1614	-0,5556
0,2	+0,1864	+0,5286	-0,6222
0,3	+0,4076	+0,2541	-0,4577
0,4	+0,3664	+0,0762	-0,2577
0,5	+0,2413	-0,0118	-0,1048
0,6	+0,1230	-0,0392	-0,0150
0,7	+0,0414	-0,0352	+0,0245
0,8	-0,0060	-0,0200	+0,0322
0,9	-0,0333	-0,0059	+0,0219
1,0	-0,0540	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.15$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,336	0,0000	0,0000
0,1	-0,6318	-0,1381	-0,4938
0,2	+0,0986	+0,5682	-0,6179
0,3	+0,3840	+0,2880	-0,4797
0,4	+0,3737	+0,0977	-0,2827
0,5	+0,2580	-0,0013	-0,1231
0,6	+0,1383	-0,0359	-0,0250
0,7	+0,0515	-0,0351	+0,0209
0,8	-0,0013	-0,0207	+0,0322
0,9	-0,0333	-0,0063	+0,0230
1,0	-0,0584	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.20$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,018	0,0000	0,0000
0,1	-0,6097	-0,1105	-0,4083
0,2	-0,0787	-0,3711	-0,5901
0,3	+0,3251	+0,3460	-0,5083
0,4	+0,3764	+0,1371	-0,3233
0,5	+0,2829	+0,0194	-0,1555
0,6	+0,1641	-0,0280	-0,0442
0,7	+0,0699	-0,0339	+0,0129
0,8	+0,0080	-0,0216	+0,0312
0,9	-0,0324	-0,0068	+0,0245
1,0	-0,0653	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.25$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,7256	0,0000	0,0000
0,1	-0,5371	-0,0831	-0,3168
0,2	-0,2543	-0,2986	-0,5221
0,3	+0,2071	+0,4279	-0,5312
0,4	+0,3617	+0,1978	-0,3763
0,5	+0,3111	+0,0541	-0,2032
0,6	+0,2000	-0,0131	-0,0748
0,7	+0,0979	-0,0301	-0,0014
0,8	+0,0237	-0,0219	+0,0278
0,9	-0,0291	-0,0074	+0,0258
1,0	-0,0739	0,0000	0,0000

$$\beta L = 5$$

$$C/L = 0.30$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,4782	0,0000	0,0000
0,1	-0,4409	-0,0584	-0,2305
0,2	-0,3361	-0,2257	-0,4302
0,3	+0,0013	-0,4723	-0,5283
0,4	+0,3109	+0,2809	-0,4336
0,5	+0,3333	+0,1059	-0,2649
0,6	+0,2429	+0,0119	-0,1187
0,7	+0,1356	-0,0216	-0,0244
0,8	+0,0471	-0,0208	+0,0203
0,9	-0,0216	-0,0078	+0,0261
1,0	-0,0822	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.35$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,2818	0,0000	0,0000
0,1	-0,3397	-0,0377	-0,1558
0,2	-0,3529	-0,1596	-0,3327
0,3	-0,1993	-0,3662	-0,4814
0,4	+0,1995	+0,3843	-0,4810
0,5	+0,3351	+0,1773	-0,3360
0,6	+0,2866	+0,0503	-0,1761
0,7	+0,1819	-0,0061	-0,0583
0,8	+0,0795	-0,0170	+0,0064
0,9	-0,0077	-0,0076	+0,0238
1,0	-0,0871	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.40$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,1355	0,0000	0,0000
0,1	-0,2455	-0,0216	-0,0955
0,2	-0,3288	-0,1040	-0,2414
0,3	-0,3013	-0,2664	-0,4063
0,4	-0,0013	-0,4986	-0,4977
0,5	+0,2973	+0,2689	-0,4078
0,6	+0,3210	+0,1050	-0,2458
0,7	+0,2331	+0,0192	-0,1050
0,8	+0,1211	-0,0088	-0,0164
0,9	+0,0154	-0,0064	+0,0173
1,0	-0,0842	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.45$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,0337	0,0000	0,0000
0,1	-0,1645	-0,0097	-0,0497
0,2	-0,2822	-0,0603	-0,1626
0,3	-0,3338	-0,1801	-0,3212
0,4	-0,1985	-0,3796	-0,4657
0,5	+0,1952	+0,3786	-0,4665
0,6	+0,3316	+0,1783	-0,3235
0,7	+0,2828	+0,0572	-0,1653
0,8	+0,1711	+0,0055	-0,0508
0,9	+0,0503	-0,0036	+0,0045
1,0	-0,0680	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.50$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	+0,0313	0,0000	0,0000
0,1	-0,0995	-0,0015	-0,0170
0,2	-0,2266	-0,0279	-0,0990
0,3	-0,3212	-0,1103	-0,2385
0,4	-0,2989	-0,2706	-0,4012
0,5	0,0000	-0,5000	-0,4918
0,6	+0,2989	+0,2706	-0,4012
0,7	+0,3212	+0,1103	-0,2385
0,8	+0,2266	+0,0279	-0,0990
0,9	+0,0995	+0,0015	-0,0170
1,0	-0,0313	0,0000	0,0000

$$\beta L = 6$$

$$C/L = 0.00$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-2,000	0,0000	0,0000
0,1	-0,2861	+0,7628	-0,6198
0,2	+0,3432	+0,3899	-0,5614
0,3	+0,3971	+0,1234	-0,3219
0,4	+0,2564	-0,0056	-0,1225
0,5	+0,1126	-0,0422	-0,0140
0,6	+0,0246	-0,0365	+0,0242
0,7	-0,0120	-0,0204	+0,0259
0,8	-0,0187	-0,0077	+0,0157
0,9	-0,0135	-0,0015	+0,0057
1,0	-0,0055	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.05$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,853	0,0000	0,0000
0,1	-0,3021	+0,7674	-0,6164
0,2	+0,3388	+0,3944	-0,5638
0,3	+0,3979	+0,1262	-0,3251
0,4	+0,2584	-0,0045	-0,1246
0,5	+0,1142	-0,0420	-0,0150
0,6	+0,0254	-0,0367	+0,0239
0,7	-0,0117	-0,0206	+0,0260
0,8	-0,0187	-0,0079	+0,0158
0,9	-0,0136	-0,0015	+0,0058
1,0	-0,0057	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.10$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,526	0,0000	0,0000
0,1	-0,4103	-0,2090	-0,5858
0,2	+0,3044	+0,4218	-0,5740
0,3	+0,3993	+0,1439	-0,3435
0,4	+0,2701	+0,0034	-0,1383
0,5	+0,1244	-0,0403	-0,0218
0,6	+0,0312	-0,0374	+0,0219
0,7	-0,0096	-0,0218	+0,0263
0,8	-0,0186	-0,0086	+0,0168
0,9	-0,0145	-0,0017	+0,0065
1,0	-0,0072	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.15$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-1,142	0,0000	0,0000
0,1	-0,5138	-0,1690	-0,5008
0,2	+0,2000	+0,4833	-0,5833
0,3	+0,3902	+0,1879	-0,3830
0,4	+0,2933	+0,0247	-0,1712
0,5	+0,1482	-0,0342	-0,0397
0,6	+0,0459	-0,0383	+0,0157
0,7	-0,0033	-0,0242	+0,0262
0,8	-0,0176	-0,0103	+0,0187
0,9	-0,0162	-0,0023	+0,0082
1,0	-0,0109	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.20$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,7798	0,0000	0,0000
0,1	-0,5021	-0,1245	-0,3874
0,2	-0,0238	-0,4240	-0,5641
0,3	+0,3463	+0,2645	-0,4377
0,4	+0,3210	+0,0662	-0,2265
0,5	+0,1867	-0,0197	-0,0732
0,6	+0,0727	-0,0375	+0,0022
0,7	+0,0095	-0,0276	+0,0245
0,8	-0,0144	-0,0131	+0,0215
0,9	-0,0188	-0,0033	+0,0110
1,0	-0,0177	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.25$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,4768	0,0000	0,0000
0,1	-0,4288	-0,0834	-0,2735
0,2	-0,2423	-0,3174	-0,4883
0,3	+0,2311	+0,3739	-0,4896
0,4	+0,3368	+0,1335	-0,3018
0,5	+0,2360	+0,0084	-0,1256
0,6	+0,1130	-0,0322	-0,0222
0,7	+0,0314	-0,0308	+0,0187
0,8	-0,0072	-0,0168	+0,0242
0,9	-0,0214	-0,0047	+0,0149
1,0	-0,0279	0,0000	0,0000

$$\beta L = 6$$

$$C/L = 0.30$$

$$C/L = 0.35$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,2470	0,0000	0,0000
0,1	-0,3314	-0,0498	-0,1746
0,2	-0,3299	-0,2166	-0,3816
0,3	-0,0027	-0,4926	-0,5064
0,4	+0,3139	+0,2301	-0,3870
0,5	+0,2861	+0,0557	-0,1975
0,6	+0,1659	-0,0182	-0,0611
0,7	+0,0647	-0,0317	+0,0059
0,8	+0,0063	-0,0206	+0,0253
0,9	-0,0227	-0,0064	+0,0194
1,0	-0,0415	0,0000	0,0000

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	-0,0880	0,0000	0,0000
0,1	-0,2338	-0,0247	-0,0970
0,2	-0,3340	-0,1324	-0,2723
0,3	-0,2294	-0,3545	-0,4580
0,4	+0,2148	+0,3549	-0,4624
0,5	+0,3194	+0,1276	-0,2855
0,6	+0,2267	+0,0096	-0,1175
0,7	+0,1104	-0,0273	-0,0174
0,8	+0,0287	-0,0234	+0,0223
0,9	-0,0207	-0,0082	+0,0236
1,0	-0,0573	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.40$$

$$C/L = 0.45$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	+0,0109	0,0000	0,0000
0,1	-0,1492	-0,0077	-0,0416
0,2	-0,2919	-0,0686	-0,1760
0,3	-0,3232	-0,2315	-0,3705
0,4	-0,0077	-0,5007	-0,4956
0,5	+0,3090	+0,2275	-0,3796
0,6	+0,2854	+0,0569	-0,1919
0,7	+0,1676	-0,0136	-0,0550
0,8	+0,0621	-0,0233	+0,0123
0,9	-0,0126	-0,0096	+0,0259
1,0	-0,0730	0,0000	0,0000

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	+0,0637	0,0000	0,0000
0,1	-0,0829	+0,0027	-0,0056
0,2	-0,2299	-0,0245	-0,0999
0,3	-0,3316	-0,1333	-0,2733
0,4	-0,2274	-0,3556	-0,4577
0,5	+0,2181	+0,3544	-0,4606
0,6	+0,3244	+0,1289	-0,2812
0,7	+0,2315	+0,0144	-0,1100
0,8	+0,1079	-0,0175	-0,0087
0,9	+0,0049	-0,0099	+0,0240
1,0	-0,0841	0,0000	0,0000

$$C/L = 0.50$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0,0	+0,0841	0,0000	0,0000
0,1	-0,0356	+0,0080	+0,0148
0,2	-0,1653	+0,0029	-0,0448
0,3	-0,2921	-0,0618	-0,1836
0,4	-0,3174	-0,2288	-0,3760
0,5	0,0000	-0,5000	-0,4969
0,6	+0,3174	+0,2288	-0,3760
0,7	+0,2921	+0,0618	-0,1836
0,8	+0,1653	-0,0029	-0,0448
0,9	+0,0356	-0,0080	+0,0148
1,0	-0,0841	0,0000	0,0000



$$\sqrt{\beta L} = 7$$

$$C/L = 0.00$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	-2,000	-0,0000	-0,0000
0.1	-0,1198	+0,6997	-0,6398
0.2	+0,4022	+0,2849	-0,4860
0.3	+0,3351	+0,0439	-0,2114
0.4	+0,1553	-0,0369	-0,0407
0.5	+0,0353	-0,0388	+0,0212
0.6	-0,0118	-0,0204	+0,0260
0.7	-0,0180	-0,0061	+0,0142
0.8	-0,0108	-0,0001	+0,0038
0.9	-0,0025	+0,0006	-0,0008
1.0	+0,0048	-0,0000	-0,0000

$$C/L = 0.05$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	-1,809	+0,0000	-0,0000
0.1	-0,1412	+0,7071	-0,6365
0.2	+0,3988	+0,2912	-0,4905
0.3	+0,3378	+0,0469	-0,2156
0.4	+0,1582	-0,0362	-0,0428
0.5	+0,0368	-0,0390	+0,0206
0.6	-0,0113	-0,0207	+0,0261
0.7	-0,0180	-0,0063	+0,0144
0.8	-0,0110	-0,0002	+0,0039
0.9	-0,0026	+0,0006	-0,0008
1.0	+0,0048	+0,0000	+0,0000

$$C/L = 0.10$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	-1,399	+0,0000	+0,0000
0.1	-0,2885	-0,2552	-0,6005
0.2	+0,3670	+0,3290	-0,5125
0.3	+0,3499	+0,0663	-0,2412
0.4	+0,1753	-0,0307	-0,0568
0.5	+0,0468	-0,0397	+0,0163
0.6	-0,0080	-0,0226	+0,0263
0.7	-0,0179	-0,0075	+0,0156
0.8	-0,0118	-0,0007	+0,0048
0.9	-0,0033	+0,0005	-0,0004
1.0	+0,0045	-0,0000	-0,0000

$$C/L = 0.15$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	-0,9553	+0,0000	-0,0000
0.1	-0,4335	-0,1937	-0,4932
0.2	+0,2567	+0,4138	-0,5421
0.3	+0,3623	+0,1161	-0,2972
0.4	+0,2119	-0,0138	-0,0921
0.5	+0,0715	-0,0391	+0,0033
0.6	+0,0018	-0,0263	+0,0251
0.7	-0,0166	-0,0105	+0,0179
0.8	-0,0132	-0,0020	+0,0068
0.9	-0,0048	+0,0002	+0,0004
1.0	+0,0035	+0,0000	+0,0000

$$C/L = 0.20$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	-0,5699	-0,0000	-0,0000
0.1	-0,4306	-0,1297	-0,3547
0.2	-0,0035	-0,4594	-0,5388
0.3	+0,3446	+0,2059	-0,3781
0.4	+0,2626	+0,0231	-0,1543
0.5	+0,1144	-0,0332	-0,0240
0.6	+0,0219	-0,0309	+0,0197
0.7	-0,0119	-0,0154	+0,0206
0.8	-0,0147	-0,0045	+0,0102
0.9	-0,0075	-0,0004	+0,0022
1.0	+0,0011	+0,0000	+0,0000

$$C/L = 0.25$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	-0,2800	+0,0000	-0,0000
0.1	-0,3549	-0,0755	-0,2247
0.2	-0,2537	-0,3184	-0,4584
0.3	+0,2451	+0,3377	-0,4602
0.4	+0,3092	+0,0891	-0,2436
0.5	+0,1744	-0,0156	-0,0715
0.6	+0,0561	-0,0338	+0,0057
0.7	-0,0006	-0,0218	+0,0219
0.8	-0,0147	-0,0084	+0,0148
0.9	-0,0112	-0,0015	+0,0053
1.0	-0,0037	-0,0000	-0,0000

$$\sqrt{\beta L} = 7$$

$$C/L = 0.30$$

$$C/L = 0.35$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	-0,0878	-0,0000	+0,0000	+0,0229	-0,0000	+0,0000
0.1	-0,2560	-0,0356	-0,1214	-0,1627	-0,0096	-0,0491
0.2	-0,3342	-0,1934	-0,3393	-0,3165	-0,0979	-0,2216
0.3	-0,0076	-0,4991	-0,4972	-0,2535	-0,3331	-0,4439
0.4	+0,3177	+0,1915	-0,3503	+0,2359	+0,3320	-0,4501
0.5	+0,2433	+0,0219	-0,1434	+0,3024	+0,0883	-0,2393
0.6	+0,1066	-0,0305	-0,0224	+0,1721	-0,0146	-0,0704
0.7	+0,0210	-0,0283	+0,0186	+0,0567	-0,0323	+0,0064
0.8	-0,0109	-0,0137	+0,0197	-0,0001	-0,0197	+0,0231
0.9	-0,0152	-0,0032	+0,0096	-0,0184	-0,0055	+0,0152
1.0	-0,0120	-0,0000	+0,0000	-0,0244	-0,0000	+0,0000

$$C/L = 0.40$$

$$C/L = 0.45$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	+0,0739	-0,0000	+0,0000	+0,0865	-0,0000	+0,0000
0.1	-0,0883	+0,0049	-0,0047	-0,0361	+0,0113	+0,0181
0.2	-0,2531	-0,0336	-0,1249	-0,1780	+0,0041	-0,0554
0.3	-0,3319	-0,1932	-0,3409	-0,3136	-0,0904	-0,2309
0.4	-0,0065	-0,4995	-0,4976	-0,2473	-0,3310	-0,4495
0.5	+0,3186	+0,1910	-0,3500	+0,2408	+0,3316	-0,4518
0.6	+0,2448	+0,0218	-0,1424	+0,3065	+0,0878	-0,2380
0.7	+0,1088	-0,0294	-0,0200	+0,1760	-0,0133	-0,0663
0.8	+0,0214	-0,0251	+0,0221	+0,0574	-0,0272	+0,0125
0.9	-0,0186	-0,0083	+0,0211	-0,0126	-0,0110	+0,0259
1.0	-0,0410	-0,0000	+0,0000	-0,0601	+0,0000	+0,0000

$$C/L = 0.50$$

X/L	λ_R	λ_M	λ_Q
0.0	+0,0778	-0,0000	+0,0000
0.1	-0,0040	+0,0125	+0,0263
0.2	-0,1100	+0,0221	-0,0113
0.3	-0,2505	-0,0239	-0,1366
0.4	-0,3242	-0,1903	-0,3483
0.5	-0,0000	-0,5000	-0,4999
0.6	+0,3242	+0,1903	-0,3483
0.7	+0,2505	+0,0239	-0,1366
0.8	+0,1100	-0,0221	-0,0113
0.9	+0,0040	-0,0125	+0,0263
1.0	-0,0778	+0,0000	+0,0000

R E F E R E N C I A S.-

- (1) Baes, L. e Y. Verwilst. "A large mechanical installation for duration tests".
Proceeding of the Society of Experimental Stress Analysis, vol. XVI, N°1, 1958.
- (2) Thürlimann, B. y W.J. Eney "Modern installation for testing of large assemblies under static and fatigue loading".
Proceeding of the Society of Experimental Stress Analysis, vol. XVI N°2, 1959.
- (3) Amsler, A. y Cía. "Examples of applications".
Catálogos del equipo de cargas.
- (4) Hognestad, E. "Function of new P.C.A. Structural Laboratory".
Journal of the P.C.A. research and development laboratories, vol. I, N°1, 12-20, 40-44, 1959.
- (5) Barredo, R. "Hormigón Pretensado : procedimiento Barredo" (sistema español).
- (6) Dreux, G. "La dalle des essais de l'Iraba".
Bulletin de la Recherche N°5, Union Technique Interfédérale du Batiment et des Travaux Publics.
- (7) Amsler, A. y Cía. "Descripción N° 749".
- (8) FF.CC. del Estado "Normas Técnicas para el Cálculo de Puentes Metálicos, decreto N° P. 4/210/202.
- (9) Stahlbau-Verlag-G.M.B.H. "Stahlbau ein handbuch für studium und praxis".
- (10) Stekel, M. "Cálculo de un edificio de 8 pisos".
Memoria, 1961.
- (11) Forssell y Holmberg "Concentrated loads on Concrete Slabs".
Betong, vol.31 N°2, 1946.
- (12) Thomas y Short "A Laboratory Investigation of some Bridge Deck Systems".
Proceedings I.C.E., Part II, vol. I N°2, Marzo de 1952.
- (13) Base, G.D. "Some tests on Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs".
Cement and Concrete Association.
- (14) Lee, D.J. "Shearing Effects on Concentrated Loads on Slabs".
Concrete, Abril de 1963.

- (15) Labelle, P. y E., Hognestad "Calcul a la Rupture des Hourdis et Plaques en Béton Armé".
Annales de l'Institut Technique des Batiment et des Travaux Publics, Enero de 1955.
- (16) Morice "Local Effects of Concentrated Loads on Bridge Deck Slabs Panels".
Civil Engineering and Publics Works Review, vol. 51, N°598, Abril de 1956.
- (17) Guerrin, A. "Traité de Béton Armé".
- (18) Ferét "Relation between the Tensile and Compressive Strength of Mortars and Concrete".
Concrete and Constructional Engineering, vol. 32, N°5, Mayo de 1937.
- (19) Hummel "Das Beton A.B.C."
(Beton Kalender) Berlin 1951, ed. 11ª
- (20) Loesser, B. "Hormigón Armado".
- (21) A.C.I. (318-63) "Building Code Requirements for Reinforced Concrete".
- (22) Hognestad, E. "Yield Line Theory for the Ultimate Flexural Strength of Reinforced Concrete Slabs".
Journal of A.C.I., Marzo de 1953.
- (23) Ferguson, P.M. "Teoría Elemental del Concreto Reforzado".
- (24) Wood, R.H. "Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates".
- (25) Bach, Graf y Gehler Libros 30, 44, 52, 56, 70.
Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, 1915 a 1932.
- (26) Nylander, N. "Design of two way concrete slabs".
Bulletin N°19, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1955.
- (27) Baker, F.J. "Deflection of certain rectangular reinforced concrete slabs freely supported along two paralell edges".
Concrete and C.E., vol. 27, 1932.
- Thomas, F.G. "Studies in Reinforced Concrete VIII.
The strength and deformation of some reinforced concrete slabs subjected to concentrated loading".
Technical Paper N° 25, H.M.S.O., Londres.

- Simms, L.G.
- "Some tests of reinforced concrete slabs with fixed edges and uniformly loads". J.J. Structural Engineering, Abril 1940.
- (28) Morice y Reinolds
- "The strength of simple supported slabs bridges subjected to concentrated loads". Cement and Concrete Association, Londres.
- (29) Siess y Viest
- "Studies of slab and beam highway bridges. Part V." University Illinois Bulletin N° 416, 1953.
- (30) Rjanitsyn
- "Calcul a la rupture et plasticité des constructions".
- (31) Terzaghi
- "Mecánica de Suelos".
- (32) Beton - Kalender
- (33) Moerch, E.
- "Teoría y práctica del hormigón armado".
- (34) Barkan, D.D.
- "Dynamics of bases foundations".
- (35) Kolousék, V.
- "Efforts dynamiques dans les ossatures rigides".
- (36) Rogers, G.
- "Dynamics of framed structures".
- (37) Timoshenko-Woinowsky-Krieger
- "Theory of Plates and Shells".
- (38) Van Ornum, J.L.
- "The fatigue of cement products". Transactions A.S.C.E., vol. 51, 1907.
- (39) Withey, M.O.
- "Tests on bond between concrete and steel in reinforced concrete beams". University of Wisconsin, Bulletin 231, Engineering Series, vol. 5, N°5.
- (40) Kirsh, B.
- "Influence of repetead loading upon the adhesion between concrete and iron, of bright, and rusty surfaces". Proceedings International Association Testing Materials, Fifth Congress, Copenhagen, 1909, Paper IX-4.
- (41) Clemmer, H.F.
- "Research in fatigue of concrete". Proceedings A.S.T.M., vol. 22, Part II, 1922.
- (42) Crepp, R.B.
- "Fatigue of mortars". Proceedings A.S.T.M., vol. 23, Part II, 1923.
- (43) Hatt, W.K.
- "Fatigue of concrete". Proceedings Highway Research Board, National Research Council, Diciembre de 1924.

- (44) Ewing, D.D. "Fatigue in concrete".
Electric Railway Journal, vol.73,
Septiembre 1929.
- (45) Probst "Influence of rapidly alternating loading
on concrete and reinforced concrete".
Journal Institution of Civil Engineers,
vol. 11, 1939.
- (46) Saliger, R. "Engineering New-Records, Mayo de 1935"
- (47) Cassie, W.F. "The fatigue of concrete".
Journal Institution of Civil Engineers,
vol. 11, 1939.
- (48) Lea, F.C. "Repeated stresses on reinforced concrete".
Structural Engineering (Londres) vol. 18,
Part 2, 1940.
- (49) Muhlenbruch, C.W. "The effect of repeated loading on the
bond strength".
Proceedings A.S.T.M., vol. 45, 1945.
Revista Travaux, Junio-Julio 1955.
- (50) Becker y Fontaine
- (51) Ivanov-Diatlov "Fatiga límite del hormigón armado bajo
cargas repetidas".
Beton i Zhelezobeton (Moscú), Sept.1958.
- (52) Nordby, G.M. "Fatigue of concrete. A review of research".
Journal of American Concrete Institute,
Agosto 1958.
- (53) Blume, Newmark y Corning "Design of multistory reinforced concrete
buildings for Earthquake motions".
- (54) Verna, J.R. y T.E. Steleson "Failure of small reinforced concrete beams
under repeated loads".
Journal, American Concrete Institute Proc.
vol.59, N°10.
- (55) Baus (Bélgica) Boletín de R.I.L.E.M., Marzo 1965.
- (56) Goschy, B. (Hungría) Boletín de R.I.L.E.M., Marzo 1965.
- (57) Biot "Bending of an infinite beam on an elastic
foundation".
Journal of Applied Mechanics, Trans.
A.S.M.E., vol. 59.
- (58) Winkler "Die lehre von elasticitaet und festigkeit".
Praga 1867.
- (59) Timoshenko S. "Resistencia de Materiales".
- (60) Vesic, B. "Beams on elastic subgrade and the Winkler
hypothesis".
Comptes Rendus du 5éme. Congrès Internat.
de Mécanique des Sols et des Travaux des
Fondations, 1961.

