

a 494056

T
2006
M558
C.2

**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS**

**ESCUELA DE POSTGRADO
ESCUELA DE INGENIERIA Y CIENCIAS**

**IDENTIFICACION NUMERICO EXPERIMENTAL DE PARAMETROS
EN DESCANSOS HIDRODINAMICOS**

VIVIANA ISABEL MERUANE NARANJO

COMISION EXAMINADORA

PROFESOR GUIA
SR. RODRIGO PASCUAL JIMENEZ

PROFESOR CO-GUIA
SR. RUBEN BOROSCHEK KRAUSKOPF

PROFESOR INTEGRANTE
SR. ALVARO VALENCIA MUSALEN

PROFESOR INVITADO
SR. MARIO RAZETO MIGLIARO



**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGISTER EN CS. DE LA ING. MENCION MECANICA**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TITULO DE
INGENIERO CIVIL MECANICO**

**SANTIAGO DE CHILE
MARZO DE 2006**

35601155488707

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO Y
MAGISTER EN CS. DE LA ING. MENCIÓN MECÁNICA
POR: VIVIANA MERUANE NARANJO
FECHA: 20/03/2006
PROF. GUIA: Sr. RODRIGO PASCUAL JIMÉNEZ

“IDENTIFICACIÓN NUMÉRICO EXPERIMENTAL DE PARÁMETROS EN DESCANSOS HIDRODINÁMICOS”

Los descansos constituyen un componente vital en equipos rotatorios, por esto una comprensión adecuada de su comportamiento, es un requisito importante en la predicción de la respuesta del equipo. Para disminuir tiempo de simulación, los descansos pueden ser modelados a través de coeficientes dinámicos relacionados con la rigidez y amortiguación.

El presente trabajo, define un procedimiento general para la determinación de coeficientes de rigidez y amortiguación de un descanso hidrodinámico. Los coeficientes se obtienen a partir de un modelo numérico por medio de un software CFD (Computational Fluid Dynamics). La metodología propuesta, tiene la ventaja de determinar en forma precisa la respuesta no lineal bajo diferentes condiciones de operación. Posee una mejor aproximación que los modelos clásicos, ya que considera términos no lineales, coeficientes asociados a rotaciones, grandes desplazamientos y altas cargas dinámicas, las que son usuales en rotores industriales.

El descanso en estudio, posee una geometría cilíndrica con cuatro entradas de aceite a presión. Se encuentra disponible en el Laboratorio de Sólidos y Vibraciones de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

El modelo numérico se desarrolló en el software ADINA 8.2. Se realizó un modelo tridimensional del descanso, en condiciones transientes y con interacción fluido-sólido entre el eje y el aceite. Las simulaciones fueron realizadas bajo condiciones de operación típicas, considerando grandes órbitas de oscilación (entre un 20 % y 60 % de la holgura del descanso) y altas cargas dinámicas (50 % de la carga estática). Los coeficientes se determinaron a partir de un método de identificación de parámetros en el dominio temporal, los cuales fueron validados por medio de resultados analíticos y experimentales.

Para el caso en estudio, se obtiene que los coeficientes no lineales tienen un importante efecto en la respuesta del descanso. Para órbitas de oscilación de un 30 % de la holgura del descanso, los efectos no lineales producen variaciones de hasta un 40 % en la rigidez efectiva. Se encontró un cambio en el comportamiento no lineal del descanso cuando comienza el fenómeno de *oil whirl*, este cambio no es observable en los modelos lineales clásicos. Bajo las condiciones de ensayo, se obtuvo que los grados de libertad de rotación tienen un efecto relevante en los coeficientes del descanso, siendo de mayor importancia los coeficientes que relacionan los rotaciones con las fuerzas.

De los resultados obtenidos se concluye que, para estudiar la respuesta de un sistema rotor montado en descansos hidrodinámicos, se deben considerar los coeficientes asociados a rotaciones en los descansos. Los coeficientes no lineales deben ser considerados cuando la órbita supera a un 20 – 30 % de la holgura del descanso.

A MIS PADRES

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo, es la culminación de un proceso de varios años, en el cual han participado muchas personas, en forma directa e indirecta, aportando cada una de ellas en diversas formas y matices a que este texto se llevara a cabo, por esto, quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que han participado de él.

Al profesor Rodrigo Pascual, por ser mi guía, por todo el tiempo dedicado, por su buena disposición, por sus sugerencias e ideas, y por la confianza y respaldo que me entrego.

A Omar González, por su acogida y desinteresada ayuda en el Laboratorio de Sólidos y Vibraciones.

A mi grupo de amigos (amigotes), Arturo, Mariana, Martín, Rodrigo, Max, Polo, Hernán y Giovanni con los que he compartido alegrías e incontables horas de trabajo (y aun mas incontables horas de ocio). Gracias por los buenos y malos momentos.

A "Julio Prado Producciones", por las horas de distensión brindadas, por sus magnos eventos y por las risas que tanto ayudaron a ser mas humana nuestra mecanizada existencia.

A mis amigas y compinches de siempre Brisna y Elizabeth, por ser mis confidentes, por su apoyo a toda prueba y por estar siempre dispuestas a escuchar.

En especial mis padres, Teodoro y Bibiana, por su amor, por haber estado siempre a mi lado, por inculcarme el amor por las ciencias y haberme ayudado a alcanzar todas las metas que me he propuesto.

También quiero agradecer a toda mi familia; a mis hermanos, Margarita, Manuel, Claudia, Gabriel, Rafael y en especial a Carolina, por su apoyo tanto intelectual como emocional; a mis cuñados y sobrinos, gracias por su cariño.

A Don Manuel Naranjo U., por quererme, por cuidarme, por enseñarme a que puedo ser la mejor y sobre todo por ser mi abuelo; gracias Tata.

A mis futuros suegros, Elena y José, por su ayuda y apoyo.

Al Fondo Nacional de Desarrollo y Tecnológico, proyecto FONDECYT 1030943, por el financiamiento de este estudio.

Y finalmente, por haber compartido todo el largo camino que me ha llevado hasta aquí, por su paciencia, amor, cariño y comprensión; gracias Pedro.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes Generales	1
1.2. Objetivos	4
1.3. Metodología	5
1.3.1. Estudio Numérico	5
1.3.2. Estudio Experimental	6
1.4. Organización de la Tesis	7
2. Revisión y Discusión de Antecedentes	9
2.1. Oil Whip y Oil Whirl	9
2.2. Modelos Analíticos	10
2.2.1. Ecuación de Reynolds	10
2.2.2. Distribución de Presiones	12
2.2.3. Fuerzas en el fluido	14
2.2.4. Coeficientes de rigidez y amortiguación	15
2.3. Identificación Numérica de Parámetros	16
2.4. Identificación Experimental de Parámetros	17
2.4.1. Métodos que Utilizan Cargas Estáticas	17
2.4.2. Métodos en el Dominio de Frecuencias	18
2.4.3. Métodos en el Dominio Temporal	21
3. Montaje Experimental	23
3.1. Sistema Rotor	23
3.2. Descanso Hidrodinámico	27
4. Mediciones Experimentales	28
4.1. Sin Fuerzas Externas	28
4.2. Con Excitación Externa	32

5. Identificación Experimental de Parámetros	35
5.1. Método de Identificación	35
5.2. Modelo en Elementos Finitos	38
5.2.1. Descanso hidrodinámico	38
5.2.2. Disco	39
5.2.3. Eje	39
5.2.4. Ensamble	40
5.2.5. Grados de Libertad Fijos	41
5.2.6. Condensación Grados de Libertad de Rotación	42
5.2.7. Diagrama de Campbell	43
5.3. Resultados	45
5.3.1. Sin Grados de Libertad de Rotación	45
5.3.2. Con Grados de Libertad de Rotación	47
6. Simulación Numérica	51
6.1. Preparación del Modelo	51
6.1.1. Ecuaciones Gobernantes	52
6.1.2. Discretización de las Ecuaciones	53
6.1.3. Solver	53
6.1.4. Procedimiento de Solución	54
6.1.5. Selección del Tipo de Malla	55
6.1.6. Selección del Tamaño de Malla	55
6.1.7. Integración Temporal	57
6.1.8. Interacción Fluido Sólido	58
6.2. Resultados	60
6.2.1. Deformación de la Malla	60
6.2.2. Campo de Velocidades	61
6.2.3. Distribución de Presiones	64
6.2.4. Comparación con Resultados Analíticos	65
6.2.5. Órbita Temporal	67

7. Identificación Numérica de Parámetros	72
7.1. Método de Identificación	72
7.2. Resultados Primer Modelo	74
7.3. Resultados Segundo Modelo	78
8. Comparación entre Resultados Numéricos y Experimentales	85
8.1. Coeficientes de Rigidez	87
8.2. Coeficientes de Amortiguación	89
9. Conclusiones	91
9.1. Futuros Puntos a Desarrollar	92
A. Determinación analítica de los coeficientes de rigidez y amortiguación	97
A.1. Aproximación de Descanso Corto	97
A.2. Aproximación de Descanso Largo	100

Índice de figuras

1.1. Rotor soportado en descansos hidrodinámicos	2
1.2. Esquema para la determinación numérica de los coeficientes dinámicos del descanso	6
1.3. Esquema propuesto para la determinación de coeficientes experimentales	7
2.1. Amplitud y frecuencia de vibración de un rotor montado en descansos hidrodinámicos	9
2.2. Espectro en cascada experimental obtenido por Muszynska (1987)	10
2.3. Balance de fuerzas en el fluido	11
2.4. Fuerza en el descanso y distribución de presiones	12
2.5. Condiciones de borde para la presión	14
2.6. Coeficientes adimensionales para la aproximación de descanso corto	15
2.7. Coeficientes adimensionales para la aproximación de descanso largo	16
2.8. Esquema de fuerzas en el descanso para la identificación de parámetros. En el caso (a) el rotor gira y flota libremente mientras el soporte del descanso está fijo, y en el segundo caso (b) el rotor gira en una posición fija, y la carcasa del descanso puede moverse libremente.	18
3.1. Montaje Experimental	24
3.2. Esquema de la adquisición de datos	25
3.3. Montaje sensores de desplazamiento	26
3.4. Descanso Hidrodinámico	27
4.1. Respuesta experimental del sistema rotor en función de la velocidad de rotación a una presión de entrada de aceite de 25kPa	29
4.2. Respuesta experimental del sistema rotor en función de la velocidad de rotación a una presión de entrada de aceite de 50kPa	30
4.3. Respuesta experimental del sistema rotor en función de la velocidad de rotación a una presión de entrada de aceite de 100kPa	31
4.4. Desplazamientos medidos en el descanso (1) y centro del rotor (2) para una excitación horizontal. Con una velocidad de rotación igual a Ω_n	33

ÍNDICE DE FIGURAS

4.5.	Desplazamientos medidos en el descanso (1) y centro del rotor (2) para una excitación vertical. Con una velocidad de rotación igual a Ω_n	33
4.6.	Desplazamientos medidos en el descanso (1) y centro del rotor (2) para una excitación horizontal. Con una velocidad de rotación igual a $3,5\Omega_n$	34
4.7.	Desplazamientos medidos en el descanso (1) y centro del rotor (2) para una excitación vertical. Con una velocidad de rotación igual a $3,5\Omega_n$	34
5.1.	Esquema del sistema rotor	38
5.2.	Esquema en elementos finitos del rotor	38
5.3.	Diagrama de Campbell del rotor	44
5.4.	Resultados del ajuste por mínimos cuadrados de C_F y $W_F\Phi_F$, para una velocidad de rotación igual Ω_n . Con grados de libertad de rotación condensados.	46
5.5.	Coefficientes de rigidez obtenidos experimentalmente, con grados de libertad de rotación condensados. En función del número de Sommerfeld (S)	46
5.6.	Coefficientes de amortiguación obtenidos experimentalmente, con grados de libertad de rotación condensados. En función del número de Sommerfeld (S)	47
5.7.	Resultados del ajuste por mínimos cuadrados de C_F y $W_F\Phi_F$, para una velocidad de rotación igual Ω_n	48
5.8.	Coefficientes de rigidez obtenidos experimentalmente, en función del número de Sommerfeld (S).	49
5.9.	Coefficientes de amortiguación obtenidos experimentalmente, en función del número de Sommerfeld (S).	50
6.1.	Condiciones de borde para los modelos numéricos	52
6.2.	Mallado para los modelos numéricos	57
6.3.	Órbita temporal con una velocidad de rotación igual a Ω_n	58
6.4.	Deformación de la malla	60
6.5.	Campo de velocidades en el plano $x - y$, para el primer modelo	61
6.6.	Campo de velocidades en el plano $y - z$, para el primer modelo	62
6.7.	Campo de velocidades en el plano $x - y$, para el segundo modelo	63
6.8.	Campo de velocidades en un plano inclinado de normal $(1, -1, 0)$, para el segundo modelo	64
6.9.	Distribución de presiones en la posición de equilibrio. Obtenidas para el primer modelo, con una velocidad de rotación igual a Ω_n	65

ÍNDICE DE FIGURAS

6.10. Distribución de presiones en la posición de equilibrio. Obtenidas para el segundo modelo, con una velocidad de rotación igual a Ω_n	65
6.11. Distribución de presiones con distintos modelos a Ω_n y $\kappa_0 = 0,37$	66
6.12. Distribución de presiones promediada en la dirección z, a Ω_n y $\kappa_0 = 0,37$. .	67
6.13. Órbita temporal para Ω_n , obtenida con el primer modelo	68
6.14. Órbita temporal para $2\Omega_n$, obtenida con el primer modelo	68
6.15. Órbita temporal para $3\Omega_n$, obtenida con el primer modelo	68
6.16. Órbita temporal para $4\Omega_n$, obtenida con el primer modelo	69
6.17. Análisis de frecuencias de las órbitas temporales obtenidas con el primer modelo	69
6.18. Órbita temporal para Ω_n , obtenida con el segundo modelo	70
6.19. Órbita temporal para $2\Omega_n$, obtenida con el segundo modelo	70
6.20. Órbita temporal para $3\Omega_n$, obtenida con el segundo modelo	70
6.21. Órbita temporal para $4\Omega_n$, obtenida con el segundo modelo	71
6.22. Análisis de frecuencias de las órbitas temporales obtenidas con el segundo modelo	71
7.1. Respuesta Transiente antes y después del fenómeno de <i>oil whirl</i>	74
7.2. Ajuste de Δf_x y Δf_y , antes y después del <i>oil whirl</i>	75
7.3. Coeficientes de rigidez lineales (adimensionales) derivados numéricamente. En función del número de Sommerfeld (S)	76
7.4. Coeficientes de amortiguación lineales (adimensionales) derivados numéricamente. En función del número de Sommerfeld (S)	76
7.5. Coeficientes de rigidez no lineales (adimensionales). En función del número de Sommerfeld (S)	77
7.6. Variación en la rigidez efectiva antes y después del fenómeno de <i>oil whirl</i> . .	78
7.7. Desplazamientos antes y después del fenómeno de <i>oil whirl</i>	78
7.8. Rotaciones antes y después del fenómeno de <i>oil whirl</i>	79
7.9. Ajuste de Δf_x y Δf_y , para una velocidad de rotación de Ω_n	79
7.10. Ajuste de Δm_x y Δm_y , para una velocidad de rotación de Ω_n	80
7.11. Ajuste de Δf_x y Δf_y , para una velocidad de rotación de $2,5\Omega_n$	80
7.12. Ajuste de Δm_x y Δm_y , para una velocidad de rotación de $2,5\Omega_n$	80
7.13. Coeficientes de rigidez lineales (adimensionales) derivados numéricamente. En función del número de Sommerfeld (S)	81

ÍNDICE DE FIGURAS

7.14. Coeficientes de amortiguación lineales (adimensionales) derivados numéricamente. En función del número de Sommerfeld (S)	82
7.15. Coeficientes de rigidez no lineales de segundo orden(adimensionales). En función del número de Sommerfeld (S)	83
7.16. Coeficientes de rigidez no lineales de tercer orden (adimensionales). En función del número de Sommerfeld (S)	83
7.17. Variación en la rigidez efectiva antes y después del fenómeno de <i>oil whirl</i> . .	84
8.1. Variación de los coeficientes de rigidez directos para tres frecuencias de excitación, obtenidos por 8.1	86
8.2. Variación de los coeficientes de rigidez directos en función de la frecuencia de excitación, obtenida por 8.1	86
8.3. Comparación entre coeficientes adimensionales de rigidez K_{ij} numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)	87
8.4. Comparación entre coeficientes adimensionales de rigidez $K_{i\psi_j}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)	87
8.5. Comparación entre coeficientes adimensionales de rigidez $K_{\psi_i j}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)	88
8.6. Comparación entre coeficientes adimensionales de rigidez $K_{\psi_i \psi_j}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)	88
8.7. Comparación entre coeficientes adimensionales de amortiguación C_{ij} numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)	89
8.8. Comparación entre coeficientes adimensionales de amortiguación $C_{i\psi_j}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)	89
8.9. Comparación entre coeficientes adimensionales de amortiguación $C_{\psi_i j}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)	90
8.10. Comparación entre coeficientes adimensionales de amortiguación $C_{\psi_i \psi_j}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)	90

Índice de tablas

3.1. Propiedades del sistema rotor	23
3.2. Propiedades del agitador electrodinámico TIRAvib 50009	26
3.3. Propiedades del sensor de fuerzas PCB208C01	26
3.4. Propiedades de los sensores de desplazamiento	27
3.5. Propiedades del descanso	27
5.1. Propiedades del elemento de disco	43
5.2. Propiedades de los elementos de eje	43
6.1. Elementos usados en flujos incompresibles	55
6.2. Tamaños de malla utilizados en modelos CFD	56
6.3. Análisis de sensibilidad sobre el número de divisiones (θ, z, r)	56
6.4. Efecto de los factores de relajación en la convergencia del acople fluido-sólido	59

Notación

Símbolo	Descripción	Unidad
c	holgura radial	m
c_{ij}	coeficiente de amortiguación del descanso	$N \cdot s/m$
c_{hi}	coeficiente de amortiguación de la estructura de soporte del descanso	$N \cdot s/m$
C_{ij}	coeficiente de amortiguación adimensional del descanso $=c\Omega c_{ij}/F_0$	
$[C_F]$	matriz con los coeficientes de fourier de la fuerza en el descanso	
$[C_r]$	matriz de amortiguación del rotor	
$[C_b]$	matriz de amortiguación del descanso	
$[C]$	matriz de amortiguación del sistema rotor	
$[C^R]$	matriz de amortiguación reducida	
\underline{d}_s	desplazamiento del sólido en la superficie FSI	m
d_0	diámetro de la entrada de aceite	m
d_e	diámetro del elemento de eje	m
D	diámetro del eje/rotor	m
e	excentricidad del rotor	m
E	Modulo de Young del elemento de eje	N/m^2
E_i	función error	N^2
$f_x, f_y,$	fuerzas de restitución del fluido en las direcciones x, y	N
$\Delta f_x, \Delta f_y$	fuerza de restitución estimada del fluido en las direcciones x, y	N
f_e	frecuencia de excitación externa	Hz
$\{f\}$	vector de fuerzas externas	
$\{f_b\}$	vector de fuerzas externas en el descanso	
$\{f_r\}$	vector de fuerzas externas en el rotor	
F_x, F_y	fuerza de excitación externa en el rotor en las direcciones x, y	N
F_0	carga estática en el descanso	N
$\Delta F_x, \Delta F_y$	incremento de la carga externa en las direcciones x, y	N
$[G_r]$	matriz de efectos giroscópicos del rotor	
$[G]$	matriz de efectos giroscópicos del sistema rotor	
$[G_d]$	matriz de efectos giroscópicos del elemento de disco	
$[G_e]$	matriz de efectos giroscópicos del elemento de eje	
$[G^R]$	matriz de efectos giroscópicos reducida	
h	espesor de aceite	m
H_{ij}	impedancia compleja	
$[H_r(j\omega)]$	matriz de impedancia del rotor	
$[H_b(j\omega)]$	matriz de impedancia del descanso	
$\Delta x, \Delta y$	perturbación del desplazamiento en las direcciones x, y	m
$\Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}$	perturbación de la velocidad en las direcciones x, y	m/s
I_{d_x}, I_{d_y}	momento de inercia del disco en los ejes x, y	$kg \cdot m^2$
I_x, I_y	momento de inercia del rotor en los ejes x, y	$kg \cdot m^2$

Símbolo	Descripción	Unidad
I_e	momento de inercia de la sección del elemento de eje	m^4
$[I]$	matriz identidad	
k_{ij}	coeficiente de rigidez del descanso	N/m
$k_{i\psi_j}$	coeficiente de rigidez del descanso entre fuerza lineal y rotaciones	N/rad
$k_{\psi_i j}$	coeficiente de rigidez del descanso entre momento y desplazamiento lineales	N
$k_{\psi_i \psi_j}$	coeficiente de rigidez del descanso asociado a rotaciones	$N \cdot m/rad$
k_{ijk}	coeficiente no lineal de rigidez de segundo orden	N/m^2
k_{ijkl}	coeficiente no lineal de rigidez de tercer orden	N/m^3
$k_{\psi_i \psi_j \psi_k}$	coeficiente no lineal de rigidez de segundo orden asociados de rotaciones	$N \cdot m/rad^2$
$k_{\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l}$	coeficiente no lineal de rigidez de tercer orden asociados de rotaciones	$N \cdot m/rad^3$
k_{hi}	coeficiente de rigidez de la estructura de soporte del descanso	N/m
K_{ij}	coeficiente de rigidez adimensionales del descanso = ck_{ij}/F_0	
$K_{i\psi_j}$	coeficiente de rigidez del descanso entre fuerza lineal y rotaciones (adimensional) = $2ck_{i\psi_j}/(LF_0)$	
$K_{\psi_i j}$	coeficiente de rigidez del descanso entre momento y desplazamiento lineales (adimensional) = $2ck_{\psi_i j}/(LF_0)$	
$K_{\psi_i \psi_j}$	coeficiente de rigidez del descanso asociado a rotaciones (adimensional) = $4ck_{\psi_i \psi_j}/(L^2 F_0)$	
K_{ijk}	coeficiente no lineal de rigidez de segundo orden (adimensional) = $c^2 k_{ijk}/F_0$	
K_{ijkl}	coeficiente no lineal de rigidez de tercer orden (adimensional) = $c^3 k_{ijkl}/F_0$	
$K_{\psi_i \psi_j \psi_k}$	coeficiente no lineal de rigidez de segundo orden (adimensional) asociados de rotaciones = $8c^2 k_{\psi_i \psi_j \psi_k}/(L^3 F_0)$	
$K_{\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l}$	coeficiente no lineal de rigidez de tercer orden (adimensional) asociados de rotaciones = $16c^3 k_{\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l}/(L^4 F_0)$	
$[K]$	matriz de rigidez del sistema rotor	
$[K_b]$	matriz de rigidez del descanso	
$[K_e]$	matriz de rigidez del elemento de eje	
$[K_r]$	matriz de rigidez del rotor	
$[K^R]$	matriz de rigidez reducida	
L	largo descanso	m
l_d	espesor del disco	m
l_e	largo del elemento de eje	m
m_x, m_y	momento de reacción del fluido en los ejes x, y	$N \cdot m$
$\Delta m_x, \Delta m_y$	momento de reacción estimado del fluido en los ejes x, y	$N \cdot m$
m_d	masa del disco	kg
$[M_r]$	matriz de masa del rotor	
$[M]$	matriz de masa del sistema rotor	

Símbolo	Descripción	Unidad
M_x, M_y	momento de excitación externa en los ejes x, y	$N \cdot m$
$[M_d]$	matriz de masa del elemento de disco	
$[M_e]$	matriz de masa del elemento de eje	
$[M^R]$	matriz de masa reducida	
n	velocidad de rotación	rps
N	fuerza de reacción del fluido en la dirección normal	N
p	presión	Pa
p_m	presión promedio del descanso = $F_0/(DL)$	Pa
p_x, p_y	presión perturbada en las direcciones x, y	Pa
p_{ψ_x}, p_{ψ_y}	presión perturbada en las direcciones angulares ψ_x, ψ_y	Pa
$p_{\dot{x}}, p_{\dot{y}}$	perturbación de la presión con respecto a las velocidades \dot{x}, \dot{y}	Pa
$p_{\dot{\psi}_x}, p_{\dot{\psi}_y}$	perturbación de la presión con respecto a las velocidades angulares $\dot{\psi}_x, \dot{\psi}_y$	Pa
p_s	distribución de presiones obtenida con la aproximación de descanso corto	Pa
p_l	distribución de presiones obtenida con la aproximación de descanso largo	Pa
$\{q\}$	vector de desplazamientos	
$\{q_r\}$	vector de desplazamientos del rotor	
$\{q_b\}$	vector de desplazamientos del descanso	
$\{q_a\}$	vector con grados de libertad activos	
$\{q_f\}$	vector con grados de libertad fijos	
$\{q_d\}$	vector con grados de libertad condensados	
r	coordenada radial desde el centro del descanso	m
r_d	radio del disco	m
R	radio eje/rotor	m
S	número de Sommerfeld = $(r/c)^2 \mu n / p_m$	
S_e	área sección del elemento de eje	m^2
t	tiempo	s
T	fuerza de reacción del fluido en la dirección tangencial	N
$[T_d]$	matriz de transformación grados condensados a activos	
$[T_t]$	matriz de transformación grados totales a activos	
u	velocidad en la dirección x	m/s
U	velocidad tangencial rotor	m/s
v	velocidad en la dirección y	m/s
w	velocidad en la dirección z	m/s
$[W_F]$	matriz que contiene los coeficientes de fourier del desplazamiento	
x, y	desplazamiento del rotor desde su posición de equilibrio	m
x_0, y_0	posición de equilibrio del rotor	m
X, Y	transformada de fourier del desplazamiento	m
z	coordenada axial	m
θ	coordenada circunferencial en sistema de referencia fijo	rad

Símbolo	Descripción	Unidad
κ	razón de excentricidad (e/c)	
κ_0	razón de excentricidad estacionaria	
λ_d	factor de relajación de los desplazamientos	
λ_τ	factor de relajación de los esfuerzos	
μ	viscosidad dinámica aceite	$kg/m \cdot s$
ρ	densidad aceite	kg/m^3
ρ_e	densidad por unidad de volumen del elemento de eje	kg/m^3
τ	tiempo adimensional = Ωt	
$\Delta\tau$	incremento de tiempo adimensional	
τ_c	esfuerzo de corte	N/m^2
τ_f	esfuerzo de corte en el fluido en la superficie FSI	N/m^2
$[\hat{\Phi}_F]$	matriz con los coeficientes a ser estimados	
$[\hat{\Phi}_F]$	matriz de coeficientes estimados	
φ	ángulo medido desde la normal del rotor	rad
ψ_x, ψ_y	rotación en el eje x, y	rad
$\Delta\psi_x, \Delta\psi_y$	perturbación del desplazamiento angular en los ejes x, y	rad
$\Delta\dot{\psi}_x, \Delta\dot{\psi}_y$	perturbación de la velocidad angular en los ejes x, y	rad/s
ω_i	frecuencia de excitación i-ésima	
Ω	velocidad de rotación	rad/s
Ω_c	velocidad crítica principal del rotor	rad/s
Ω_a	velocidad aparición oil whirl	rad/s
Ω_n	velocidad nominal de rotación	rad/s
\mathfrak{R}	fuerza de reacción del fluido	N

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes Generales

En muchas industrias la demanda por equipos rotatorios con altas potencias y velocidades de operación, junto con condiciones de operación confiables e ininterrumpidas ha ganado importancia en los últimos años. Para lograr esto, la predicción y control adecuados del comportamiento dinámico (respuesta al desbalance, velocidades críticas e inestabilidades) es un requerimiento vital.

Los descansos constituyen un componente vital del equipo, por esto una comprensión adecuada de su comportamiento es un requisito importante en la predicción de la respuesta del equipo. Los descansos se pueden clasificar principalmente en: descansos con elementos rotatorios (rodamientos), descansos magnéticos, descansos hidrostáticos y descansos hidrodinámicos. Los descansos hidrodinámicos se utilizan en un amplio rango de equipos rotatorios, debido a que soportan grandes cargas radiales con altas velocidades de operación.

La influencia de los descansos en la performance de sistemas rotores ha sido reconocida por muchos años. Uno de los primeros intentos por modelar un descanso hidrodinámico fueron realizados por Stodola (1925) y Hummel (1926). Ellos representaron el descanso como un resorte simple, pero este modelo era incapaz de explicar las amplitudes de oscilación observadas a velocidades de operación críticas. Por otro lado, Newkirk (1924) y Newkirk & Taylor (1925) describieron el fenómeno de inestabilidad producida por los descansos hidrodinámicos, el que denominaron *Oil Whip*. El fenómeno de *Oil Whip* es un tipo de vibración auto-excitada, que se presenta exclusivamente en sistemas rotores con descansos hidrodinámicos. Este fenómeno ha causado varios accidentes catastróficos en turbo-generadores (Zhang, 1992).

Para prevenir estas vibraciones es necesario realizar predicciones precisas de la dinámica de estos descansos, estimando las fuerzas producidas por el fluido. Estas fuerzas pueden ser expresadas en términos de coeficientes dinámicos relacionados con la rigidez y amortiguación.

La Figura 1.1 muestra un esquema de un rotor soportado por descansos hidrodinámicos. Cuando el rotor comienza a girar, se crean altas presiones en el fluido en el sector de menor espesor, éstas presiones soportan el rotor, y desplazan además la posición de equilibrio en un ángulo θ . El film de fluido actúa como un resorte y amortiguador, y el rotor vibra alrededor de la posición de equilibrio (x_0, y_0) .

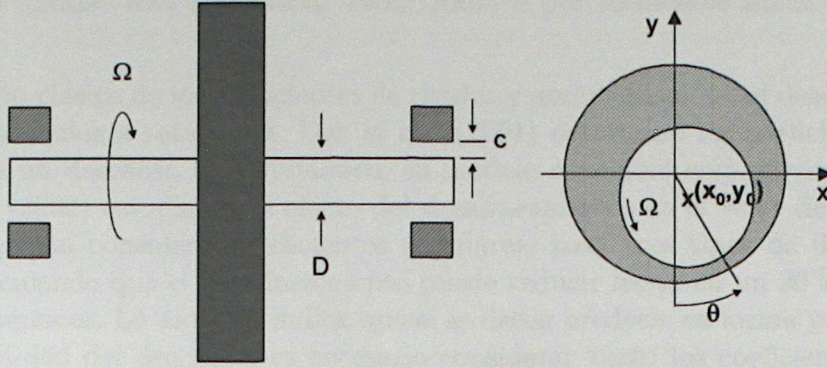


Figura 1.1: Rotor soportado en descansos hidrodinámicos

Para pequeños desplazamientos respecto al punto de equilibrio del descanso (x_0, y_0) , una expansión de Taylor de primer orden lleva a

$$\mathfrak{R}_x = \mathfrak{R}_{x_0} + k_{xx}x + k_{xy}y + c_{xx}\dot{x} + c_{xy}\dot{y} + m_{xx}\ddot{x} + m_{xy}\ddot{y} \quad (1.1)$$

$$\mathfrak{R}_y = \mathfrak{R}_{y_0} + k_{yx}x + k_{yy}y + c_{yx}\dot{x} + c_{yy}\dot{y} + m_{yx}\ddot{x} + m_{yy}\ddot{y} \quad (1.2)$$

donde

$$k_{xy} = \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)}, \quad c_{xy} = \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial \dot{y}} \right)_{(x_0, y_0)} \quad (1.3)$$

\mathfrak{R} es la fuerza de reacción del fluido, k_{ij} son los coeficientes de rigidez, c_{ij} son los coeficientes de amortiguación, y m_{ij} son coeficientes de masas adicionales del descanso (también denominados masas o inercia virtuales del fluido). Los coeficientes de masas adicionales representan la inercia del fluido (Reinhardt & Lund, 1975), y son considerables solo en casos excepcionales (para altos números de Reynolds), por esto, en la mayoría de los casos los coeficientes de masas adicionales son ignorados.

Como (x_0, y_0) es la posición de equilibrio, entonces \mathfrak{R}_{x_0} equivale a la carga estática, F_0 . La posición de equilibrio depende de un único valor adimensional denominado número de Sommerfeld (S). Este número define las condiciones de operación (velocidad, viscosidad del aceite, carga estática, y geometría). Los coeficientes son evaluados para una posición de equilibrio particular, la que es función del número de Sommerfeld (S). Esto significa, que para una aplicación dada, los coeficientes dependen de la velocidad de operación.

En la literatura actual, se encuentran disponibles cálculos teóricos de las características dinámicas de los descansos hidrodinámicos (Yamamoto & Ishida, 2001; Childs, 1993). Los coeficientes lineales se determinan a partir de un expansión de Taylor de primer orden de las fuerzas de restitución del fluido. Estas expresiones analíticas consideran simplificaciones como considerar el descanso infinitamente corto (Funakawa & Tatara, 1964), o infinitamente largo (Hori, 1959). Para descansos de largo finito se deben utilizar métodos numéricos como elementos finitos o diferencias finitas.

En los métodos numéricos los coeficientes lineales se obtienen a partir de un método de perturbaciones finitas. La ecuación de Reynolds se resuelve para perturbaciones de la presión

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

por diferencias finitas (Rao & Sawicki, 2002, 2003) o por elementos finitos (Ebrat *et al.*, 2004).

La derivación clásica de los coeficientes de rigidez y amortiguación del descanso, desprecia los términos asociados a rotaciones. Das *et al.* (2001) determinó los coeficientes asociados a rotaciones de un descanso hidrodinámico, su modelo consideró solo movimientos cónicos. Sharma *et al.* (2002) estudiaron el efecto del desalineamiento en el valor de los coeficientes lineales clásicos (sin considerar coeficientes angulares) para tres tipos de descansos hidrodinámicos, obteniendo que el desalineamiento puede reducir hasta en un 20% el valor de los coeficientes dinámicos. Lo anterior indica que si se desea predecir en forma precisa la performance y estabilidad del descanso, es necesario considerar tanto los coeficientes asociados a desplazamientos como aquellos asociados a rotaciones. Esto no se ha realizado aún y es uno de los objetivos principales del presente trabajo.

A pesar que las características del descanso son evidentemente no lineales, el concepto de coeficientes lineales se sigue utilizando en modelos modernos de dinámica de rotores. Claramente, estas técnicas son aplicables solo para vibraciones pequeñas en torno al punto de equilibrio. En condiciones reales, los rotores montados en descansos hidrodinámicos experimentan altas vibraciones cuando atraviesan las velocidades críticas. Debido a esto, el análisis clásico de coeficientes lineales derivados de pequeñas perturbaciones en torno al equilibrio puede ser inadecuado. Lund (1987) determinó que los coeficientes lineales evaluados por técnicas de perturbaciones en torno al equilibrio, son válidos para órbitas menores al 40% de la holgura del descanso. Pettinato *et al.* (2001a) por otro lado, estudiaron el efecto de la magnitud de la órbita de oscilación en los coeficientes lineales derivados experimentalmente. Pettinato observó que el sistema se mantiene lineal para órbitas de hasta un 30% de la holgura del descanso.

Para estudiar la validez del modelo lineal, primero es necesario estudiar el efecto de la no linealidad en los coeficientes del descanso. Choy *et al.* (1991) predijeron coeficientes no lineales considerando perturbaciones de los desplazamientos de orden impar. Sawicki & Rao (2004) determinaron coeficientes no lineales considerando una expansión de Taylor de segundo orden. Los resultados indican que la no linealidad en los coeficientes afecta el movimiento para números de Sommerfeld altos con una alta variación en la rigidez y amortiguación efectiva.

En general, la carga sobre los descansos es considerada estática (con lo que se genera un equilibrio). Sin embargo, en casos reales, las cargas sobre el descanso tienen además una componente dinámica debido al desbalance, sismos, resonancias, etc. Debido a esto, se puede esperar que los coeficientes no dependan sólo de la carga estática sobre el descanso, sino que dependan además, de la magnitud y frecuencia de la carga dinámica. San-Andrés & De-Santiago (2005) determinaron los coeficientes dinámicos de un descanso hidrodinámico bajo condiciones de altas cargas dinámicas. Ellos determinaron que los coeficientes no dependen de la magnitud de la carga dinámica, pero la frecuencia de excitación tienen una marcada influencia en los coeficientes de rigidez directos. La dependencia de los coeficientes de rigidez con la frecuencia de excitación se debe a los efectos de inercia del fluido que aumentan con la frecuencia de excitación.

Por otro lado, en la determinación experimental de los coeficientes se utilizan métodos

de identificación de parámetros. Estos métodos ofrecen una poderosa herramienta para la estimación de los coeficientes hidrodinámicos a partir de datos experimentales. En los últimos años se han realizado numerosas investigaciones al respecto. Los métodos hasta ahora utilizados se pueden dividir en dos grandes categorías: métodos en el dominio temporal (Kim & Lee, 2003; Zhou *et al.*, 2004), y en el dominio de frecuencias (San-Andrés & De-Santiago, 2005, 2004a; Sawicki & Rao, 2001; Pettinato *et al.*, 2001a,b; Kostrzewsky *et al.*, 1998; Jiang & Yu, 2000; Burrows & Sahinkaya, 1982a,c). Los métodos en el dominio de frecuencias son los más utilizados debido a su menor sensibilidad a ruidos en la señal.

La mayor parte de los métodos de identificación de parámetros experimentales asume un rotor rígido. Esta suposición se puede satisfacer en experiencias de laboratorios y permite enfocarse solamente en el comportamiento del descanso, pero en casos reales, es necesario considerar la flexibilidad del eje (Jiang & Yu, 2000; Burrows & Sahinkaya, 1982a,c).

Tiwari *et al.* (2004) realizaron un estudio de los métodos de identificación de parámetros utilizados en descansos. Se enfocaron principalmente al caso de los descansos hidrodinámicos, estudiando la evolución y desarrollo de los métodos de identificación de parámetros desde 1956 al 2004. Dentro de las conclusiones que obtuvieron, se pueden destacar las siguientes:

- En casi todos los trabajos disponibles, la interacción entre sistemas rotores y los descansos no ha sido tomada en cuenta.
- Se requiere la validación de los coeficientes dinámicos en condiciones de operación reales.
- Existe una necesidad de desarrollar nuevos modelos no lineales y sus métodos de identificación.

1.2. Objetivos

El principal objetivo de este trabajo es desarrollar y probar un nuevo método de identificación numérica de parámetros que permita determinar bajo condiciones de operación reales, los coeficientes de rigidez y amortiguación en descansos hidrodinámicos, considerando términos no lineales y coeficientes asociados a rotaciones. Los coeficientes se obtienen a partir de un modelo numérico de un descanso hidrodinámico plano, modelado a partir de un software CFD. Los coeficientes obtenidos a partir del modelo numérico, se comparan y correlacionan con resultados experimentales por medio de indicadores apropiados, para establecer la calidad del modelo numérico frente a las medidas experimentales.

El estudio consta, por lo tanto, de dos etapas principales: (a) estudio numérico, y (b) estudio experimental. Ambas etapas son independientes, y se realizan con efectos comparativos y para validar las aproximaciones del modelo numérico. De acuerdo a lo anterior los objetivos generales de este trabajo son:

- Desarrollar y probar un nuevo método de identificación de parámetros para determinar los coeficientes de rigidez y amortiguación de un descanso hidrodinámico a partir de

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

un modelo CFD. El modelo para los coeficientes debe considerar términos no lineales y coeficientes asociados a rotaciones.

- Determinar experimentalmente los coeficientes dinámicos de un descanso hidrodinámico, considerando un rotor flexible y su interacción con el descanso.

Para lograr los objetivos recién planteados se requiere:

- Definir un modelo para los coeficientes dinámicos en descansos hidrodinámicos, que considere términos no lineales y coeficientes asociados a desplazamientos angulares.
- Desarrollar y validar un modelo numérico del descanso hidrodinámico por medio de un software CFD.
- Definir e implementar un nuevo método de identificación de parámetros, que permita obtener los coeficientes de rigidez y amortiguación a partir del modelo CFD.
- Definir un montaje experimental adecuado para la identificación experimental de parámetros.
- Definir un método experimental de estimación de parámetros, para obtener los coeficientes experimentales considerando un rotor elástico.
- Comparar y correlacionar los resultados numéricos con resultados experimentales.

1.3. Metodología

A continuación se detalla la metodología seguida en los estudios numérico y experimental.

1.3.1. Estudio Numérico

El modelo numérico se realizó por medio del software ADINA 8.2 disponible en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Chile.

Para validar el modelo numérico, se realizó un primer modelo de un descanso hidrodinámico plano sin entradas de aceite a presión y sin considerar rotaciones. Los resultados de este modelo se compararon con los resultados analíticos disponibles en la literatura.

Una vez validado el primer modelo, se desarrolló un segundo modelo más complejo, que considera las entradas de aceite a presión, y desplazamientos angulares.

Los modelos numéricos cuentan con dos partes principales, el sólido que corresponde al rotor y el fluido que corresponde al aceite en el descanso. El modelo del sólido y el fluido se resuelven iterativamente por medio del módulo FSI (Fluid Structure Interaction). De esta manera, se obtiene la respuesta transiente del rotor.

En la Figura 1.2 se muestra el esquema para la determinación numérica de los coeficientes dinámicos del descanso. Los coeficientes se obtienen a partir de la respuesta forzada del

descanso a una excitación sinusoidal. El rotor fue excitado por medio de dos fuerzas de excitación independientes. Los coeficientes dinámicos del descanso se obtuvieron al ajustar la respuesta transiente a un modelo con parámetros concentrados.

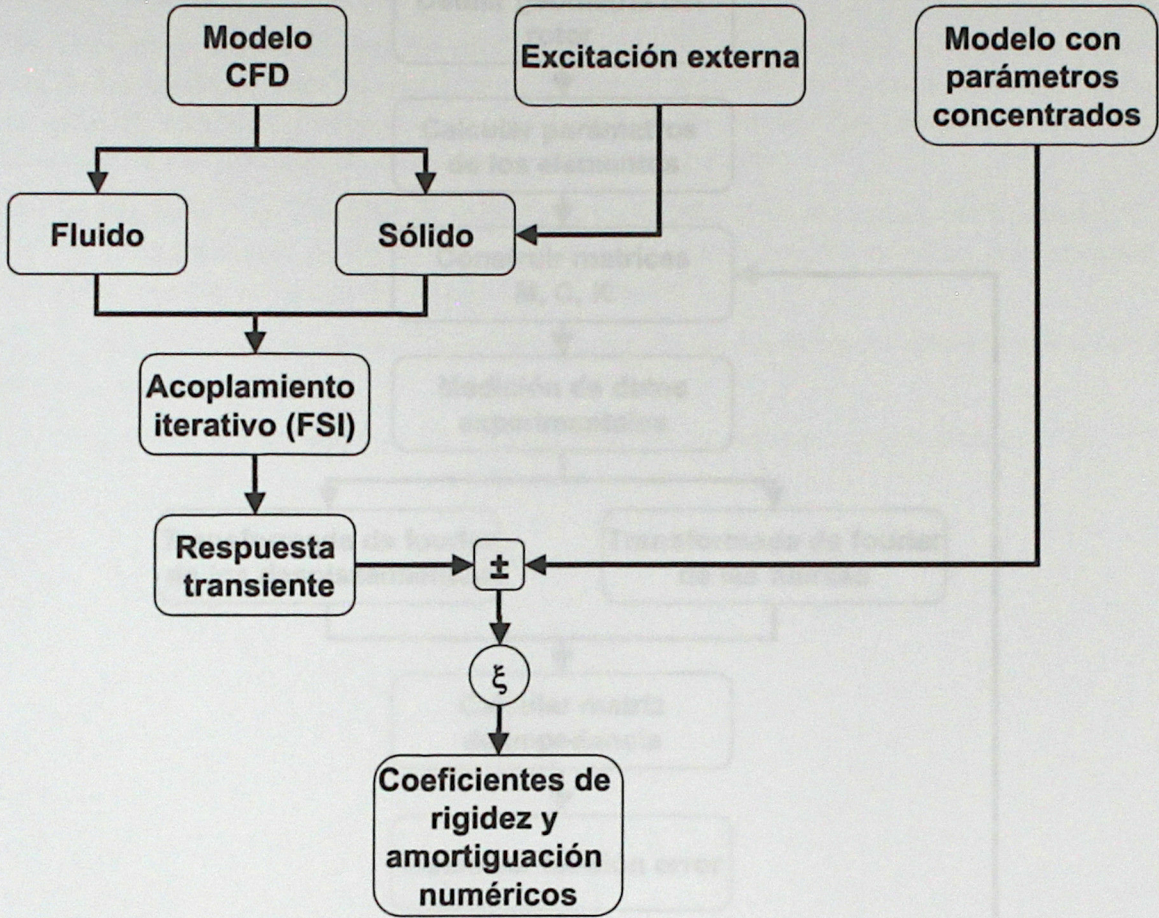


Figura 1.2: Esquema para la determinación numérica de los coeficientes dinámicos del descanso

1.3.2. Estudio Experimental

Se utilizó un método de identificación de parámetros en el dominio de frecuencias. Se consideró un rotor flexible y coeficientes asociados desplazamientos angulares en el descanso.

En la figura 1.3, se muestran los pasos seguidos para realizar la identificación de parámetros experimental. Los primeros tres puntos se refieren a la definición del modelo del rotor en elementos finitos.

El sistema rotor fue excitado por dos fuerzas sinusoidales a distintas frecuencias de excitación. Se midieron los desplazamientos del sistema rotor para distintas velocidades de rotación y frecuencias de excitación. La respuesta en frecuencia se representa a través de una matriz de impedancia. Los coeficientes experimentales se determinarán al correlacionar la matriz de

impedancia numérica obtenida por elementos finitos y la matriz de impedancia experimental. El montaje experimental utilizado se detalla en el capítulo 3.

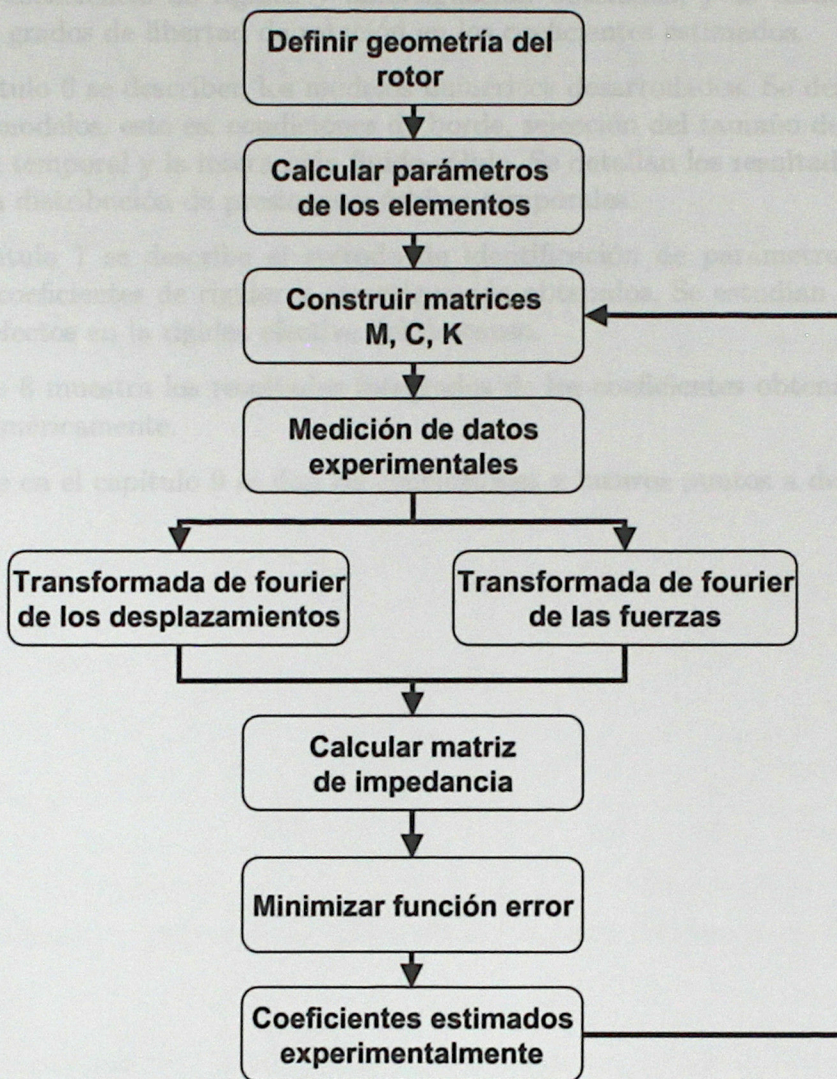


Figura 1.3: Esquema propuesto para la determinación de coeficientes experimentales

1.4. Organización de la Tesis

En el capítulo 2 se presenta una discusión de antecedentes. Se da especial enfoque a la determinación de los coeficientes de rigidez y amortiguación en descansos hidrodinámicos. Se consideran los métodos analíticos, numéricos y experimentales.

En el capítulo 3 se muestra el montaje experimental. Se describe en detalle los equipos utilizados y la metodología para la adquisición de datos. Los resultados de las mediciones experimentales se muestran en el capítulo 4, donde se detallan las mediciones realizadas para

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

el sistema rotor con y sin excitaciones externas.

El método de identificación de parámetros experimental se describe en el capítulo 5. Se muestran los coeficientes de rigidez y amortiguación obtenidos, y se estudia el efecto de considerar los grados de libertad de rotación en los coeficientes estimados.

En el capítulo 6 se describen los modelos numéricos desarrollados. Se describe la preparación de los modelos, esto es; condiciones de borde, selección del tamaño de malla, método de integración temporal y la interacción fluido-sólido. Se detallan los resultados obtenidos en términos de la distribución de presiones y órbitas temporales.

En el capítulo 7 se describe el método de identificación de parámetros numérico. Se muestran los coeficientes de rigidez y amortiguación obtenidos. Se estudian los términos no lineales y su efectos en la rigidez efectiva del descanso.

El capítulo 8 muestra los resultados integrados de los coeficientes obtenidos experimentalmente y numéricamente.

Finalmente en el capítulo 9 se dan las conclusiones y futuros puntos a desarrollar.

Capítulo 2

Revisión y Discusión de Antecedentes

2.1. Oil Whip y Oil Whirl

Dado que los descansos hidrodinámicos proveen una alta amortiguación, se utilizan ampliamente en equipos rotatorios para prevenir altas vibraciones. Sin embargo, tienen el riesgo de producir violentas vibraciones autoexcitadas, cuando operan sobre la velocidad crítica más importante. En la Figura 2.1 se muestra la amplitud y frecuencia de vibración de un rotor montado en descansos hidrodinámicos en función de la velocidad de rotación.

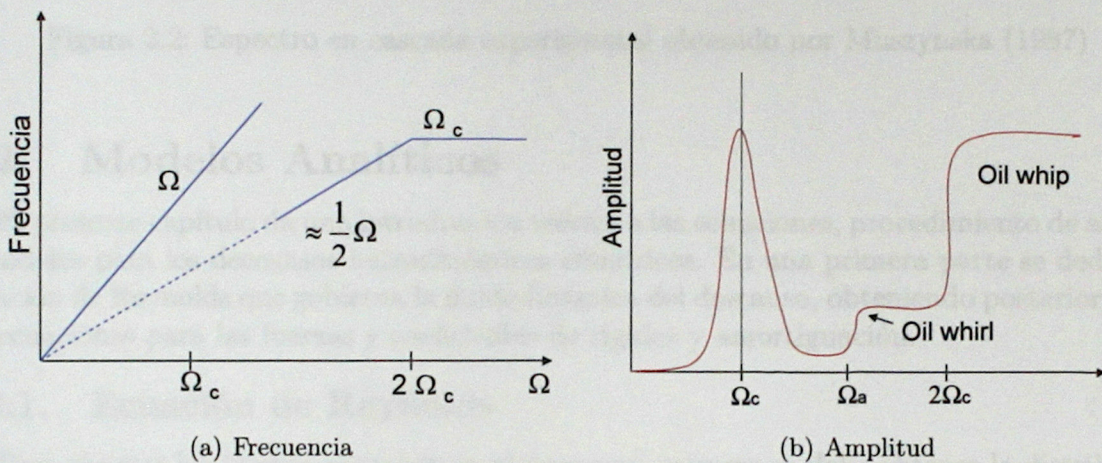


Figura 2.1: Amplitud y frecuencia de vibración de un rotor montado en descansos hidrodinámicos

A medida que se aumenta la velocidad de rotación, ocurre debido al desbalance una resonancia armónica en las vecindades de la velocidad crítica principal Ω_c . Si se sigue aumentando la velocidad, comienza a la velocidad Ω_a una vibración autoexcitada denominada *oil whirl*. La frecuencia de ésta vibración es cercana a $\Omega/2$. Cuando el *oil whirl* ocurre, el rotor gira hacia adelante con pequeñas amplitudes sin deformación, como un rotor rígido.

Muszynska (1987) reportó que la frecuencia de esta oscilación es un poco inferior a la mitad de la velocidad de rotación, y que depende del tipo de descanso y de las condiciones de excentricidad estática (varía entre $0.38x$ a $0.49x$ dependiendo del sistema). La velocidad de inestabilidad Ω_a puede ser en algunos casos menor que la primera velocidad crítica (Figura 2.2).

Cuando la velocidad sigue aumentando, comienza una violenta vibración autoexcitada a una velocidad cercana al doble de la velocidad crítica Ω_c , y persiste en un rango amplio velocidades de rotación, ésta vibración se denomina *oil whip*. La frecuencia del *oil whip* es

cercana a la velocidad crítica Ω_c del rotor, y el rotor se flexiona y gira hacia adelante con altas amplitudes.

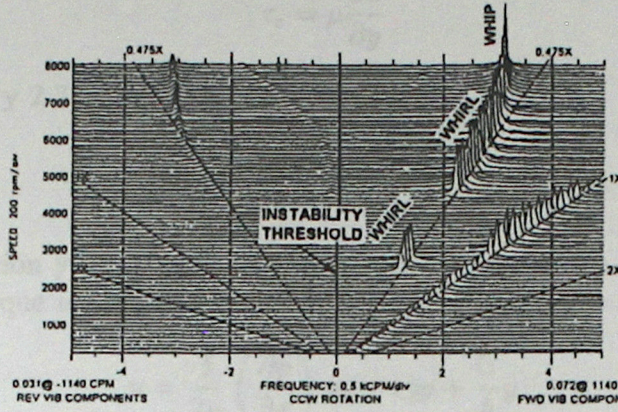


Figura 2.2: Espectro en cascada experimental obtenido por Muszynska (1987)

2.2. Modelos Analíticos

El presente capítulo da una introducción teórica a las ecuaciones, procedimiento de análisis y modelos para los descansos hidrodinámicos cilíndricos. En una primera parte se deduce la ecuación de Reynolds que gobierna la fluidodinámica del descanso, obteniendo posteriormente las ecuaciones para las fuerzas y coeficientes de rigidez y amortiguación.

2.2.1. Ecuación de Reynolds

Para obtener las fuerzas actuando en el descanso, primero se debe obtener la distribución de presiones en el fluido. Para esto se debe derivar la ecuación de Reynolds para el fluido.

Se asume que el aceite es un fluido Newtoniano, incompresible y laminar. El espesor del aceite $h(x, t)$ es tan delgado comparado con el diámetro del rotor, que la curvatura puede ser despreciada. La superficie del rotor se mueve a una velocidad tangencial igual a $U = \Omega R$.

Considerando un paralelepípedo infitesimal de dimensiones dx, dy , y dz en el punto (x, y, z) del aceite como se muestra en la Figura 3.3. Se pueden derivar las ecuaciones de equilibrio de presión p y esfuerzo de corte τ_c . Si la inercia del fluido es lo suficientemente pequeña como para ser despreciada, se obtiene la siguiente relación en la dirección x

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_c dx dz + \left(\tau_c + \frac{\partial \tau_c}{\partial x} dx \right) dy dz = 0 \quad (2.1)$$

Lo que se reduce a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_c}{\partial y} \quad (2.2)$$

CAPÍTULO 2. REVISIÓN Y DISCUSIÓN DE ANTECEDENTES

Llamando u, v y w a las velocidades según las direcciones x, y, z respectivamente, y la viscosidad absoluta μ . Entonces el esfuerzo de corte está dado por

$$\tau_c = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.3}$$

De las ecuaciones 2.2 y 2.3, se obtiene que:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.4}$$

Integrando ésta ecuación y asumiendo que la presión no cambia en la dirección y , y con las condiciones de borde que $u = 0$ cuando $y = 0$, y $u = U$ cuando $y = h$, se obtiene que

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y - h)y + \frac{U}{h}y \tag{2.5}$$

De manera similar se puede obtener la siguiente expresión para w

$$w = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) (y - h)y \tag{2.6}$$

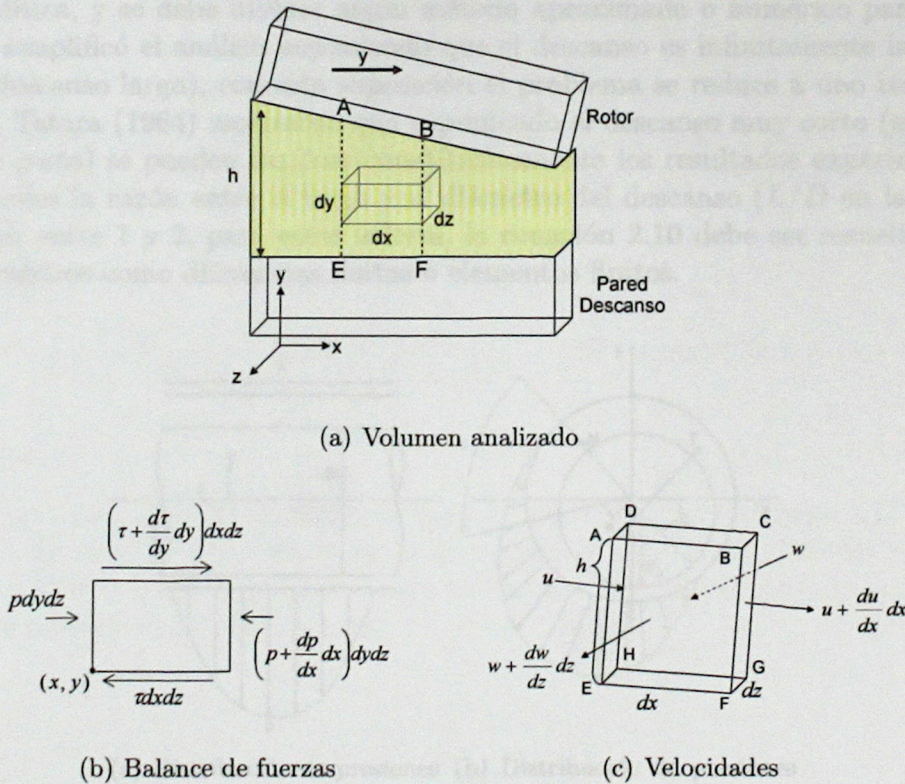


Figura 2.3: Balance de fuerzas en el fluido

De las ecuaciones 2.5 y 2.6 se tiene que el volumen por unidad de tiempo de fluido circulando por la caras $AEHD$ y $AEBF$ (Figura 3.3 (c)) esta dado por

$$q_x = dz \int_0^h u dy = dz \left(-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Uh}{2} \right) \quad (2.7)$$

$$q_z = dx \int_0^h w dy = dx \left(-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (2.8)$$

Como el aceite es incompresible, el volumen del elemento debe crecer cambiando la altura h para incluir el incremento de fluido en un tiempo dt . De esta manera se debe cumplir la siguiente ecuación

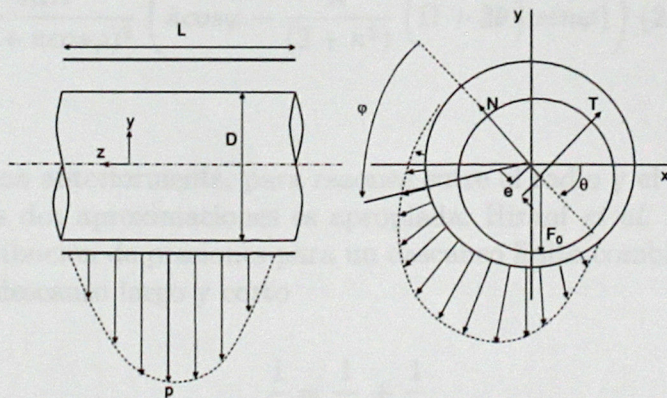
$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dt + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz dt \right) = dx dz \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (2.9)$$

Substituyendo las ecuaciones 2.7 y 2.8 en la ecuación 2.9, y simplificando se obtiene la ecuación de Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.10)$$

2.2.2. Distribución de Presiones

Con la ecuación 2.10 se puede obtener la distribución de presiones en el descanso, y con esto, las fuerzas de reacción que actúan en el rotor. Sin embargo, la ecuación 2.10 no posee solución analítica, y se debe utilizar algún método aproximado o numérico para resolverla. Hori (1959) simplificó el análisis suponiendo que el descanso es infinitamente largo (aproximación del descanso largo), con esta suposición el problema se reduce a uno bidimensional. Funakawa & Tataru (1964) mostraron que suponiendo el descanso muy corto (aproximación del descanso corto) se pueden explicar cuantitativamente los resultados experimentales. En problemas reales la razón entre el largo y el diámetro del descanso (L/D en la Figura 2.4) tiene un valor entre 1 y 2, para estos valores, la ecuación 2.10 debe ser resuelta utilizando métodos numéricos como diferencias finitas o elementos finitos.



(a) Distribución de presiones (b) Distribución de presiones y fuerzas

Figura 2.4: Fuerza en el descanso y distribución de presiones

Aproximación de descanso corto

En la aproximación de descanso corto, se considera que la variación de presión en la dirección z es mucho mayor que en la dirección x ($\partial p/\partial x \ll \partial p/\partial z$), y se puede despreciar el primer termino de la ecuación 2.10. Luego la ecuación de Reynolds se simplifica a

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.11)$$

Adoptando las condiciones de borde que $\partial p/\partial z = 0$ para $z = 0$, y $p = 0$ (presión atmosférica) para $z = \pm L/2$. Y reemplazando $x = \varphi R$ y $U = R\Omega$, e integrando la ecuación 2.11, se obtiene que

$$p = \frac{3\mu}{h^3} \left(\Omega \frac{\partial h}{\partial t} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \quad (2.12)$$

Definiendo la holgura radial, excentricidad, y razón de excentricidad como c , e , y $\kappa = e/c$, respectivamente. El espesor del aceite está dado por

$$h = c(1 + \kappa \cos \varphi) \quad (2.13)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.12

$$p_s = \frac{3\mu}{c^2(1 + \kappa \cos \varphi)^3} (2\dot{\kappa} \cos \varphi - \kappa(\Omega + 2\dot{\theta}) \sin \varphi) \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \quad (2.14)$$

Aproximación de descanso largo

En la aproximación de descanso largo se asume que la presión no varia en la dirección axial (i.e., $\partial p/\partial z=0$). Adoptando esta condición se puede obtener que la distribución de presiones es la siguiente

$$p_l(\varphi) = \frac{-6\mu R^2}{c^2(1 + \kappa \cos \varphi)^2} \left(\dot{\kappa} \cos \varphi - \frac{\kappa}{(2 + \kappa^2)} (\Omega + 2\dot{\theta}) \sin \varphi \right) (2 + \kappa \cos \varphi) \quad (2.15)$$

Descanso Finito

Como se menciona anteriormente, para razones entre el radio y el largo L/D en el rango (1,2) ninguna de las dos aproximaciones es apropiada. Hirani *et al.* (1998) definieron una expresión de la distribución de presiones para un descanso finito combinando armónicamente las soluciones para descanso largo y corto

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_s} + \frac{1}{p_l} \quad (2.16)$$

De las tres expresiones obtenidas para la presión (descanso largo, corto y finito). Se deduce que cuando el rotor se encuentra en la posición de equilibrio ($\dot{\kappa} = \dot{\theta} = 0$), la distribución

de presiones es simétrica en torno al punto $\varphi = \pi$, positiva en la zona de $\varphi = 0$ a π y negativa para $\varphi = \pi$ a 2π . Esta condición se denomina condición de Sommerfeld (Figura 2.5 (a)). Sin embargo en la práctica la presión en la zona $\varphi = \pi$ a 2π es casi 0, debido a la posible evaporación del lubricante y flujo de aire desde ambos costados. Considerando esto, la presión en la zona $\varphi = \pi$ a 2π , se puede considerar 0, esta condición se denomina condición de Gumbel (Figura 2.5 (b)). Esta condición es revisada posteriormente definiendo el gradiente de presiones igual a 0 en los bordes del film, esta condición se denomina condición de Reynolds. La condición de Reynolds posee una mejor aproximación a situaciones reales, pero en la mayoría de los casos se utiliza la condición de Gumbel debido a su simplicidad.

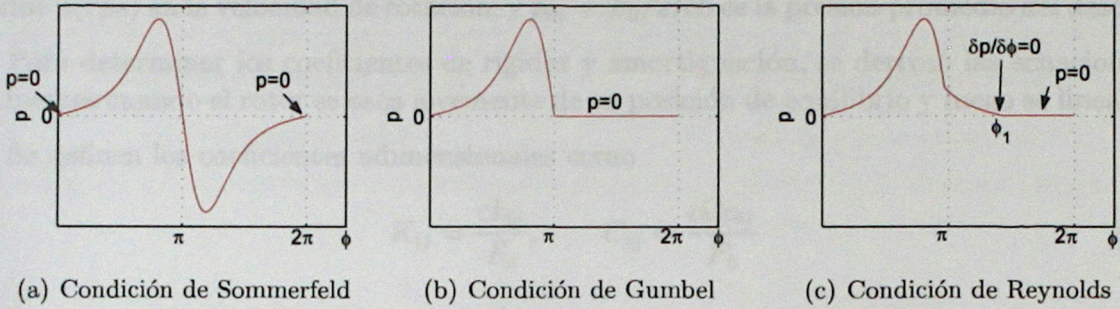


Figura 2.5: Condiciones de borde para la presión

2.2.3. Fuerzas en el fluido

Si se adopta la condición de Gumbel, las fuerzas en el fluido mostradas en la Figura 2.4 (b), están dadas por

$$N = -R \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi p \cos \varphi d\varphi dz, \quad T = -R \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi p \sin \varphi d\varphi dz, \quad (2.17)$$

Sustituyendo la ecuación 2.14 en estas expresiones, se obtiene que las fuerzas para la aproximación de descanso corto vienen dadas por (Funakawa & Tatara, 1964)

$$N = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{L^3}{R} \left[\frac{2\kappa^2(\Omega + 2\dot{\theta})}{(1 - \kappa^2)^2} + \frac{\pi\dot{\kappa}(1 + 2\kappa^2)}{(1 - \kappa^2)^{5/2}} \right] \quad (2.18)$$

$$T = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{L^3}{R} \left[\frac{\pi\kappa(\Omega + 2\dot{\theta})}{2(1 - \kappa^2)^{3/2}} + \frac{4\kappa\dot{\kappa}}{(1 - \kappa^2)^2} \right] \quad (2.19)$$

y para la aproximación de descanso largo (Hori, 1959)

$$N = 6\mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 RL \left[\frac{2\kappa^2(\Omega + 2\dot{\theta})}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)} + \frac{2\dot{\kappa}}{(1 - \kappa^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2 + \kappa^2)} \right\} \right] \quad (2.20)$$

$$T = 6\mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 RL \left[\frac{\pi\kappa(\Omega + 2\dot{\theta})}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)^{1/2}} + \frac{4\kappa\dot{\kappa}}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)^{1/2}} \right] \quad (2.21)$$

2.2.4. Coeficientes de rigidez y amortiguación

Cuando el eje rota, se generan fuerzas en el aceite y el eje flota como se muestra en la Figura 2.4. La posición de equilibrio es determinada por el equilibrio entre el peso F_0 y las fuerzas del fluido (N_0, T_0), las que se obtienen al reemplazar $\dot{\theta} = \dot{\kappa} = 0$ en las ecuaciones 2.18 y 2.19 o 2.20 y 2.21. El resultado muestra que la posición de equilibrio está determinada por la geometría del descanso y la siguiente cantidad adimensional llamada número de Sommerfeld

$$S = \left(\frac{R}{c}\right)^2 \frac{\mu n}{p_m} \quad (2.22)$$

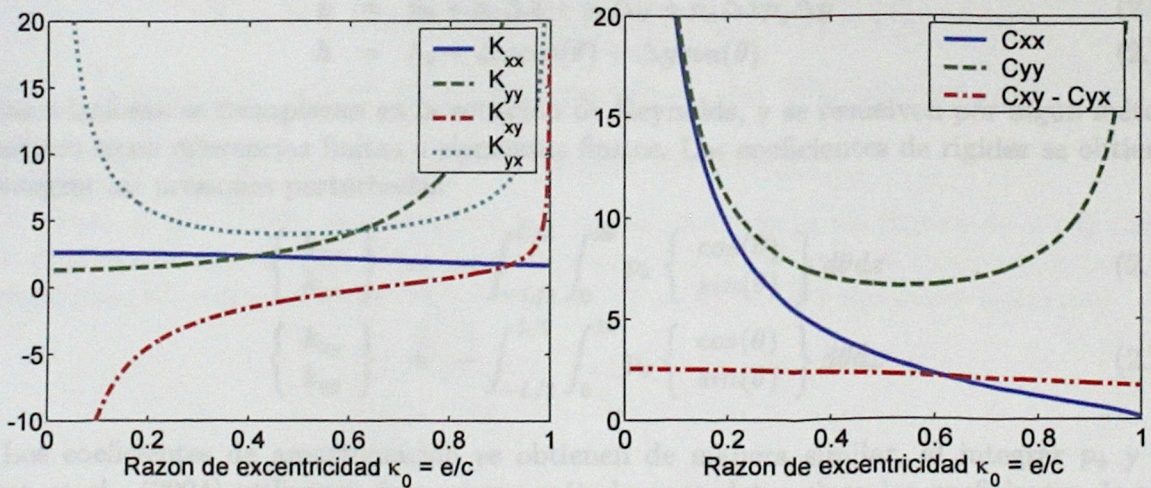
Donde n (rps) es la velocidad de rotación, y $p_m = F_0/2RL$ es la presión promedio del descanso.

Para determinar los coeficientes de rigidez y amortiguación, se derivan las ecuaciones de las fuerzas cuando el rotor se saca levemente de su posición de equilibrio y luego se linealizan.

Se definen los coeficientes adimensionales como

$$K_{ij} = \frac{ck_{ij}}{F_0}, \quad C_{ij} = \frac{c\Omega c_{ij}}{F_0} \quad (2.23)$$

Las Figuras 2.6, 2.7 muestran los coeficientes adimensionales en función de la posición de equilibrio κ_0 , para la aproximación de descanso corto y largo. Se puede observar que los coeficientes son mayores para la aproximaciones de descanso corto, aún así las curvas muestran las mismas tendencias con ambas aproximaciones. El desarrollo matemático realizado para llegar a las curvas mostradas en las Figuras 2.6 y 2.7 se encuentra en el apéndice A.



(a) Coeficiente de rigidez

(b) Coeficiente de amortiguación

Figura 2.6: Coeficientes adimensionales para la aproximación de descanso corto

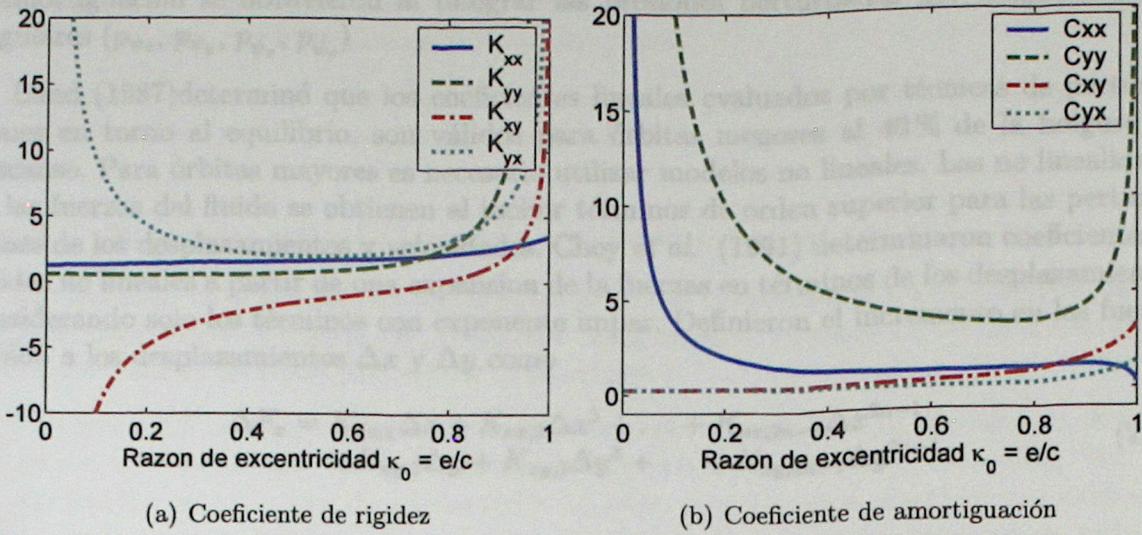


Figura 2.7: Coeficientes adimensionales para la aproximación de descanso largo

2.3. Identificación Numérica de Parámetros

Los coeficientes de rigidez y amortiguación se obtienen a partir de una expansión de Taylor de las fuerzas de reacción del fluido en términos de los desplazamientos y velocidades. Rao & Sawicki (2002, 2003) determinaron los coeficientes para un descanso hidrodinámico por medio de un método de perturbaciones finitas. Ellos realizaron una expansión de primer orden para la presión y el espesor de aceite

$$p = p_0 + p_x \Delta x + p_y \Delta y + p_{\dot{x}} \Delta \dot{x} + p_{\dot{y}} \Delta \dot{y} \quad (2.24)$$

$$h = h_0 + \Delta x \cos(\theta) + \Delta y \sin(\theta) \quad (2.25)$$

Estas relaciones se reemplazan en la ecuación de Reynolds, y se resuelven por algún método numérico como diferencias finitas o elementos finitos. Los coeficientes de rigidez se obtienen al integrar las presiones perturbadas

$$\begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yx} \end{Bmatrix} = - \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p_x \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix} d\theta dz \quad (2.26)$$

$$\begin{Bmatrix} k_{xy} \\ k_{yy} \end{Bmatrix} = - \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p_y \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix} d\theta dz \quad (2.27)$$

Los coeficientes de amortiguación se obtienen de manera similar, al integrar $p_{\dot{x}}$ y $p_{\dot{y}}$. Ebrat *et al.* (2004) utilizaron éste mismo método para determinar los coeficientes de rigidez y amortiguación de una descanso hidrodinámico plano, considerando desalineamiento y deformación estructural. Ellos utilizaron un método de elementos finitos para resolver las ecuaciones acopladas del fluido y el sólido.

Das *et al.* (2001) realizaron un análisis similar para el caso de movimiento cónico. Esto quiere decir, que se consideraron solo desplazamientos angulares. Los coeficientes de rigidez

y amortiguación se obtuvieron al integrar las presiones perturbadas por desplazamientos angulares ($p_{\psi_x}, p_{\psi_y}, P_{\psi_x}, P_{\psi_y}$)

Lund (1987) determinó que los coeficientes lineales evaluados por técnicas de perturbaciones en torno al equilibrio, son válidos para órbitas menores al 40% de la holgura del descanso. Para órbitas mayores es necesario utilizar modelos no lineales. Las no linealidades en las fuerzas del fluido se obtienen al incluir términos de orden superior para las perturbaciones de los desplazamientos y velocidades. Choy *et al.* (1991) determinaron coeficientes de rigidez no lineales a partir de una expansión de la fuerzas en términos de los desplazamientos, considerando solo los términos con exponente impar. Definieron el incremento en las fuerzas debido a los desplazamientos Δx y Δy como

$$\Delta F_x = K_{xx,1}\Delta x + K_{xx,3}\Delta x^3 + \dots + K_{xx,2n-1}\Delta x^{2n-1} + K_{xy,1}\Delta y + K_{xy,3}\Delta y^3 + \dots + K_{xy,2n-1}\Delta y^{2n-1} \quad (2.28)$$

$$\Delta F_y = K_{yx,1}\Delta x + K_{yx,3}\Delta x^3 + \dots + K_{yx,2n-1}\Delta x^{2n-1} + K_{yy,1}\Delta y + K_{yy,3}\Delta y^3 + \dots + K_{yy,2n-1}\Delta y^{2n-1} \quad (2.29)$$

Sawicki & Rao (2004) incluyeron términos de primer y segundo orden para los desplazamientos y velocidades. Consideraron además, términos cruzados entre las perturbaciones de los desplazamientos y velocidades. Definieron el incremento en las fuerzas de reacción como

$$\Delta F_x = K_{xx,0}\Delta x + K_{xxx}\Delta x^2 + K_{xxy}\Delta y\Delta x + C_{xxx}\Delta \dot{x}\Delta x + C_{xxy}\Delta \dot{y}\Delta x + K_{xy,0}\Delta y + K_{xyx}\Delta x\Delta y + K_{xyy}\Delta y^2 + C_{xyx}\Delta \dot{x}\Delta y + C_{xyy}\Delta \dot{y}\Delta y \quad (2.30)$$

$$\Delta F_y = K_{yx,0}\Delta x + K_{yxx}\Delta x^2 + K_{yxy}\Delta y\Delta x + C_{yxx}\Delta \dot{x}\Delta x + C_{yxy}\Delta \dot{y}\Delta x + K_{yy,0}\Delta y + K_{yyx}\Delta x\Delta y + K_{yyy}\Delta y^2 + C_{yyx}\Delta \dot{x}\Delta y + C_{yyy}\Delta \dot{y}\Delta y \quad (2.31)$$

2.4. Identificación Experimental de Parámetros

2.4.1. Métodos que Utilizan Cargas Estáticas

Mitchell *et al.* (1965) determinaron los cuatro coeficientes de rigidez de un descanso hidrodinámico, al incrementar la carga estática del descanso, y medir el cambio en la posición de equilibrio. Ellos determinaron los coeficientes de acuerdo a las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} k_{xx} &= (\alpha_{yy}/\gamma), & k_{xy} &= -(\alpha_{xy}/\gamma) \\ k_{yx} &= -(\alpha_{yx}/\gamma), & k_{yy} &= (\alpha_{xx}/\gamma) \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha_{xx}\alpha_{yy} - \alpha_{xy}\alpha_{yx} \\ \alpha_{xx} &= (x_1/\Delta F_x), & \alpha_{yx} &= (y_1/\Delta F_x) \\ \alpha_{xy} &= (x_2/\Delta F_y), & \alpha_{yy} &= (y_2/\Delta F_y) \end{aligned} \quad (2.33)$$

x_1 y y_1 son desplazamientos en las direcciones vertical y horizontal respectivamente, respecto de la posición de equilibrio debido a un incremento de la carga estática horizontal ΔF_x , y x_2 y y_2 son desplazamientos debido al incremento de la carga estática vertical ΔF_y . Parkins

& Horner (1993) utilizaron también este método para determinar los cuatro coeficientes de rigidez de un descanso hidrodinámico tipo tilting pad.

El inconveniente de este tipo de métodos, es que no es posible determinar los coeficientes de amortiguación, y muestran una gran sensibilidad a errores de medición (Tiwari *et al.*, 2004).

2.4.2. Métodos en el Dominio de Frecuencias

Los métodos en el dominio de frecuencias permiten la estimación de parámetros para un rango de frecuencias de excitación. Se utilizan ampliamente, en casos en donde el descanso o el sistema rotor es excitado por fuerzas sinusoidales.

La Figura 3.2 muestra el esquema de fuerzas sobre el descanso. El descanso es excitado por medio de dos fuerzas, que pueden ser de tipo armónica, impacto, sinusoidal, etc. Las fuerzas pueden ser aplicadas directamente en el rotor, pero en casos prácticos una excitación precisa en el rotor es difícil de llevar a cabo. Por este motivo, se utiliza también un rotor fijo y la excitación se realiza en la carcasa flotante del descanso.

La ecuación de movimiento para pequeñas amplitudes cerca del equilibrio viene dada por

$$m\ddot{x} + (c_{xx} + c_{hx})\dot{x} + c_{xy}\dot{y} + (k_{xx} + k_{hk})x + k_{xy}y = F_x \quad (2.34)$$

$$m\ddot{y} + (c_{yy} + c_{hy})\dot{y} + c_{yx}\dot{x} + (k_{yy} + k_{hy})y + k_{yx}x = F_y \quad (2.35)$$

Donde F_x , F_y son las fuerzas de excitación externas en las direcciones x e y , m es la masa del elemento de prueba (carcasa o rotor), los parámetros k_{hx} , k_{hy} , c_{hx} , c_{hy} , corresponden a los coeficientes de rigidez y amortiguación de la estructura de soporte del descanso, y $\{k_{ij}, c_{ij}\}$ corresponden a los coeficientes de rigidez y amortiguación del descanso.

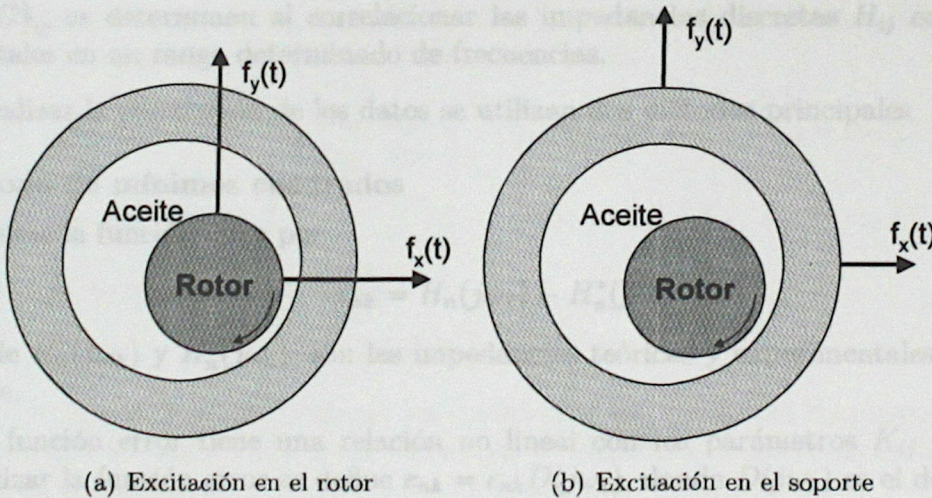


Figura 2.8: Esquema de fuerzas en el descanso para la identificación de parámetros. En el caso (a) el rotor gira y flota libremente mientras el soporte del descanso está fijo, y en el segundo caso (b) el rotor gira en una posición fija, y la carcasa del descanso puede moverse libremente.

Los coeficientes de amortiguación y rigidez de la estructura de soporte del descanso se obtienen excitando la estructura en condiciones secas, i.e., sin aceite en el descanso. En los casos donde el rotor es excitado directamente, por ejemplo, por un descanso magnético (Kim & Lee, 2003), no se deben considerar los términos asociados a la estructura del descanso.

Se aplican dos fuerzas de excitación independientes (armónica, impacto, sinusoidal, etc) $(F_x, 0)^T$ y $(F_y, 0)^T$. Aplicando la transformada de fourier (FFT) a las ecuaciones lineales 2.34 y 2.35, se obtienen las siguientes ecuaciones en el dominio de frecuencias

$$\begin{bmatrix} X_x & Y_x \\ X_y & Y_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{yx} \\ H_{xy} & H_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x & 0 \\ 0 & F_y \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Donde X_y es la transformada de fourier discreta del desplazamiento del rotor en la dirección x debido a una excitación en la dirección y , etc. Las impedancias complejas $\{H_{ij}\}$ están definidas por

$$H_{ij} = [(K_{ij} + K_{hi}\delta_{ij} - w^2 M_{hi}\delta_{ij}) + jw (C_{ij} + C_{hi}\delta_{ij})] \quad (2.37)$$

Donde $j = \sqrt{-1}$, δ_{ij} = delta de Kroneker. La ecuación 2.36 representa cuatro ecuaciones independientes para cuatro variables desconocidas (H_{ij}), que se pueden resolver fácilmente. Las impedancias están compuestas de una parte real e imaginaria, ambas función de ω . La parte real denota la rigidez dinámica, mientras que la parte imaginaria es proporcional a los coeficientes de amortiguación. Por lo tanto para determinar los ocho coeficientes es necesario realizar mediciones para dos set de fuerzas de excitación independientes con la misma frecuencia de excitación. San-Andrés & De-Santiago (2005), Kim & Lee (2003) y Rouvas & Childs (1993) utilizaron éste método para determinar los coeficientes de un descanso hidrodinámico.

Jiang *et al.* (1997) y Youyun *et al.* (1988) utilizaron este método, con excitaciones en un rango de frecuencias. En este caso, los valores estimados para los parámetros desconocidos $\{K, C\}_{ij}$ se determinan al correlacionar las impedancias discretas H_{ij} con los datos experimentales en un rango determinado de frecuencias.

Para realizar la correlación de los datos se utilizan dos métodos principales

1. Método de mínimos cuadrados

Se define la función error por

$$\epsilon_{nk} = H_n(j\omega_k) - H_n^*(j\omega_k) \quad (2.38)$$

Donde $H_n(j\omega_k)$ y $H_n^*(j\omega_k)$, son las impedancias teóricas y experimentales respectivamente.

Esta función error tiene una relación no lineal con los parámetros K_{ij} y C_{ij} . Para linealizar la función error se define $e_{nk} = \epsilon_{nk} D(j\omega_k)$, donde $D(j\omega_k)$ es el determinante de la matriz de impedancias.

La suma del cuadrado de los errores es $E = \sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^P (e_{nk})^2$ la que es una función lineal de los coeficientes del film. Definiendo entonces $\frac{dE}{dK_{ij}} = 0$, $\frac{dE}{dC_{ij}} = 0$, se obtienen un set de ecuaciones lineales donde se despejan K_{ij} y C_{ij} .

2. Método de las amplitudes cuadradas

Se define la función error como

$$e_{nk} = |H_n(j\omega_k)|^2 - |H_n^*(j\omega_k)|^2 \quad (2.39)$$

La suma de los errores al cuadrado es $E = \sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^P (e_{nk})^2$, la que es una función no lineal de los coeficientes. Por lo tanto, se debe utilizar un algoritmo no lineal de optimización para calcular K_{ij} y C_{ij} .

Este método tiene mejores resultados que el método 1, debido a que elimina el efecto de posibles corrimientos en fase, y además es un método efectivo para reducir posibles ruidos en la señal, pero la convergencia de este método es altamente dependiente de los valores iniciales. Para evitar posibles dificultades se pueden calcular inicialmente los coeficientes por el método 1, y dar éstos como valores iniciales al método 2.

Someya (1976), Hisa *et al.* (1980) y Sakakida *et al.* (1992) determinaron los coeficientes de un descanso hidrodinámico, utilizando excitaciones sinusoidales simultaneas en el descanso para dos frecuencias de excitación distintas. Si la fuerza de excitación y los desplazamientos en el descanso se pueden medir, entonces los ocho coeficientes desconocidos se pueden determinar por

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & j\omega_1 X_1 & j\omega_1 Y_1 \\ X_2 & Y_2 & j\omega_2 X_2 & j\omega_2 Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{yx} \\ k_{xy} & k_{yy} \\ c_{xx} & c_{yx} \\ c_{xy} & c_{yy} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} - m\omega_1^2 X_1 & F_{y1} - m\omega_1^2 Y_1 \\ F_{x2} - m\omega_2^2 X_2 & F_{y2} - m\omega_2^2 Y_2 \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

donde ω_i es la frecuencia de excitación, F_{xi} , F_{yi} son las fuerzas de excitación, y X_i , Y_i son los desplazamientos. Como la ecuación 2.40 representa ocho ecuaciones para los coeficientes, estos se pueden determinar directamente. En el caso que se realicen mediciones para más de dos frecuencias (Burrows & Sahinkaya, 1982b) los coeficientes se pueden determinar por mínimos cuadrados, escribiendo las ecuaciones de la forma

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & j\omega_1 X_1 & j\omega_1 Y_1 \\ & & \vdots & \\ X_n & Y_n & j\omega_n X_n & j\omega_n Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{yx} \\ k_{xy} & k_{yy} \\ c_{xx} & c_{yx} \\ c_{xy} & c_{yy} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} - m\omega_1^2 X_1 & F_{y1} - m\omega_1^2 Y_1 \\ \vdots & \vdots \\ F_{xn} - m\omega_n^2 X_n & F_{yn} - m\omega_n^2 Y_n \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

La ecuación 2.41 se puede escribir como

$$[W_F][\Phi_F] = [C_F] \quad (2.42)$$

Donde $[W_F]$ es una matriz que contiene los coeficientes de fourier del desplazamiento, $[\Phi_F]$ es una matriz con los coeficientes a ser estimados y $[C_F]$ contiene los coeficientes de fourier de la fuerza en el descanso.

Dado el sistema de ecuaciones 2.42, la estimación por mínimos cuadrados de la matriz de coeficientes viene dada por (Cadzow, 2002)

$$[\hat{\Phi}_F] = ([W_F]^T [W_F])^{-1} [W_F]^T [C_F] \quad (2.43)$$

La mayor parte de las investigaciones realizadas supone un rotor rígido, esta suposición se puede satisfacer en experiencias de laboratorios y permite enfocarse solamente en el comportamiento del descanso, pero en casos reales es necesario considerar la flexibilidad del eje (Jiang & Yu, 2000; Burrows & Sahinkaya, 1982a,c).

Considerando un sistema rotor completo, se obtiene la siguiente ecuación de movimiento

$$[M_r]\{\ddot{q}\} + ([C_b] + [C_r])\{\dot{q}\} + ([K_b] + [K_r])\{q\} = \{f\} \quad (2.44)$$

donde r denota a las matrices del rotor y b al descanso. Reordenando se obtiene que

$$[C_b]\{\dot{q}\} + [K_b]\{q\} = \{f\} - [M_r]\{\ddot{q}\} - [C_r]\{\dot{q}\} - [K_r]\{q\} \quad (2.45)$$

Escribiendo en el dominio de frecuencias

$$(j\omega[C_b] + [K_b])\{q(j\omega)\} = \{f(j\omega)\} - (-[M_r]\omega^2 + j\omega[C_r] + [K_r])\{q(j\omega)\} \quad (2.46)$$

Los coeficientes desconocidos del descanso se pueden determinar entonces a partir de la ecuación 2.46 con los parámetros conocidos del sistema.

2.4.3. Métodos en el Dominio Temporal

Los métodos en el dominio temporal se basan en una expansión de Taylor de las fuerzas en el fluido, ésta expansión puede ser en primer orden considerando solo los coeficientes linealizados (Zhou *et al.*, 2004), o se pueden considerar los términos de orden superior (Sawicki & Rao, 2001).

Considerando una expansión de primer orden, el incremento en las fuerzas del film se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Donde Δf_x y Δf_y son los incrementos en las fuerzas del descanso en las direcciones horizontal y vertical respectivamente, k_{ij} son los coeficientes de rigidez y c_{ij} son los coeficientes de amortiguación.

En el dominio temporal, la velocidad de oscilación del rotor se puede derivar de los desplazamientos por un diferenciador (FIR differential filter). Es válido utilizar nuevamente el diferenciador para obtener la aceleración. El inconveniente de este método, es que al derivar una señal con ruido, el ruido se multiplica, por esto es necesario eliminar el ruido en la señal por algún método antes de diferenciarla.

El incremento en las fuerzas del descanso se puede escribir por suma de fuerzas como

$$\begin{aligned} f_x &= F_x - m\ddot{x} \\ f_y &= F_y - m\ddot{y} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Donde f_x , f_y son los incrementos de las fuerzas del descanso en las direcciones x , y respectivamente, F_x , F_y son las fuerzas externas sobre el descanso en las direcciones x , y



respectivamente, m es la masa del rotor, y \ddot{x} y \ddot{y} son las aceleraciones en las direcciones horizontal y vertical respectivamente. Los coeficientes del descanso se pueden determinar al minimizar la diferencia entre f_i y Δf_i . La diferencia mínima cuadrática entre Δf_i y f_i se puede escribir como

$$\min \left(\varepsilon_i^2 = \sum_{k=1}^m [\Delta f_i(k) - f_i]^2 \right) \quad (2.49)$$

Los coeficientes se pueden determinar entonces, al encontrar la solución de la ecuación 2.49.

3.1. Sistema Rotor

El descanso hidrodinámico en estado se encuentra montado en el Rotor Kit Bently Nevada (ver Figura 3.1), disponible en el laboratorio de análisis y vibraciones de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. La tabla 3.1 muestra los datos generales del sistema rotor.

Tabla 3.1. Propiedades del sistema rotor.

Descripción	Valor	Unidad
Radio eje	10	mm
Largo eje	440	mm
Masa eje	0.26	kg
Diámetro disco	75	mm
Cargado disco	1	oz
Masa disco	0.5	kg
Velocidad máx. Motor	15000	rpm
Rango de ajuste de velocidad máx.	15000	rpm/min
Sensibilidad sensores de desplazamiento	200	mV/mil

El sistema rotor consiste en un rotor formado por un eje (5) y dos masas de forma de disco (8) en el centro de este. El eje se encuentra montado en un leje (6) y un descanso hidrodinámico (7).

El eje se encuentra acoplado a un motor eléctrico (9) por medio de un acople flexible (10). El motor puede girar en el sentido de giro del rotor o en contra, y tiene un rango de velocidades de operación entre 350 rpm y 10000 rpm. Con una velocidad nominal de $\Omega_n = 1000$ rpm. La velocidad del motor se ajusta en el controlador de velocidades (16), el que muestra la velocidad leída por el sensor de velocidades (14) en un tacómetro digital.

Para la alimentación del descanso hidrodinámico se utiliza una bomba de aceite (1), la que extrae el aceite proveniente del recipiente de aceite (2) y lo ingresa a presión en el descanso por medio de cuatro entradas de aceite. La presión de entrada del aceite al descanso se puede medir con un rango de 10-120[kPa], y puede ser visualizada por medio de un medidor de presión (9).

Capítulo 3

Montaje Experimental

A continuación se detalla el montaje experimental utilizado. En la sección 3.1 muestra el sistema rotor y el montaje para la adquisición de datos. En la sección 3.2 se muestra en detalle el descanso hidrodinámico.

3.1. Sistema Rotor

El descanso hidrodinámico en estudio se encuentra montado en el Rotor Kit Bently Nevada (ver Figura 3.1), disponible en el laboratorio de sólidos y vibraciones de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. La tabla 3.1 muestra los datos principales del sistema rotor.

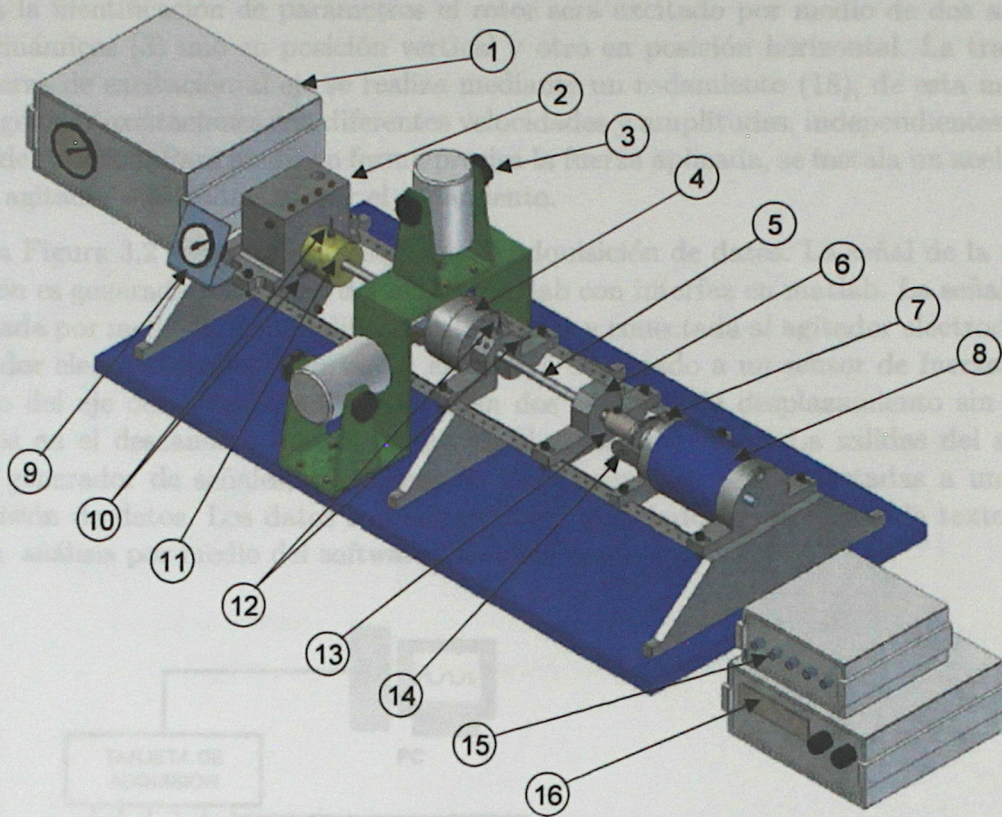
Tabla 3.1: Propiedades del sistema rotor

Descripción	Valor	Unidad
Radio eje	10	mm
Largo eje	440	mm
Masa eje	0,36	kg
Diámetro disco	75	mm
Espesor disco	1	in
Masa disco	0,8	kg
Velocidad máx. Motor	10000	rpm
Tasa de aumento de velocidad máx.	15000	rpm/min
Sensibilidad sensores de desplazamiento	200	mV/mil

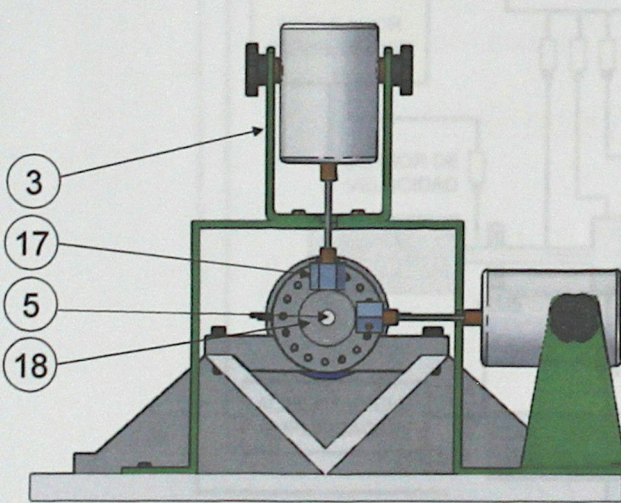
El sistema rotor consiste en un rotor formado por un eje (5) y dos masas de forma de disco (4) en el centro de éste. El eje se encuentra montado en un buje (6) y un descanso hidrodinámico (11).

El eje se encuentra acoplado a un motor eléctrico (8) por medio de un acople flexible (13). El motor puede girar en el sentido de giro del reloj o en contra, y tiene un rango de velocidades de operación entre 250 rpm y 10000 rpm. Con una velocidad nominal de $\Omega_n=1000$ rpm. La velocidad del motor se ajusta en el controlador de velocidades (16), el que muestra la velocidad leída por el sensor de velocidades (14) en un tacómetro digital.

Para la alimentación del descanso hidrodinámico se utiliza una bomba de aceite (1), la que extrae el aceite proveniente del recipiente de aceite (2) y lo ingresa a presión en el descanso por medio de cuatro entradas de aceite. La presión de entrada del aceite al descanso se puede modificar con un rango de 10-120[kPa], y puede ver visualizada por medio de un medidor de presión (9).



(a) Vista General



1. Bomba de aceite
2. Recipiente de aceite
3. Agitador Electrodinámico
4. Disco (masa)
5. Eje
6. Buje
7. Sensor de fase
8. Motor eléctrico
9. Medidor de presión de entrada de aceite al descanso
10. Sensores de desplazamiento en el descanso
11. Descanso Hidrodinámico
12. Sensores de desplazamiento en el centro del rotor
13. Acople flexible
14. Sensor de velocidad
15. Conversor de señales
16. Controlador de velocidad del motor
17. Acelerómetro
18. Rodamiento

(b) Montaje Agitadores Electrodinámicos

Figura 3.1: Montaje Experimental

CAPÍTULO 3. MONTAJE EXPERIMENTAL

Para la identificación de parámetros el rotor será excitado por medio de dos agitadores electrodinámicos (3) uno en posición vertical y otro en posición horizontal. La transmisión de la fuerza de excitación al eje se realiza mediante un rodamiento (18), de esta manera, se pueden generar excitaciones con diferentes velocidades y amplitudes, independientes de la velocidad de rotación. Para medir en forma precisa la fuerza aplicada, se instala un acelerómetro entre el agitador electrodinámico y el rodamiento.

En la Figura 3.2 se muestra el esquema de adquisición de datos. La señal de la fuerza de excitación es generada por medio del modulo siglab con interfaz en matlab. La señal es luego amplificada por medio de un amplificador de señales y conectada al agitador electrodinámico. El agitador electrodinámico a su vez se encuentra conectado a un sensor de fuerzas y luego al centro del eje del sistema rotor. Se tienen dos sensores de desplazamiento sin contacto montados en el descanso y dos montados en el centro del rotor. La salidas del sensor de fuerzas, generador de señales, y sensores de desplazamiento van conectadas a una tarjeta de adquisición de datos. Los datos son adquiridos y guardados en archivos de texto para su posterior análisis por medio del software LabView.

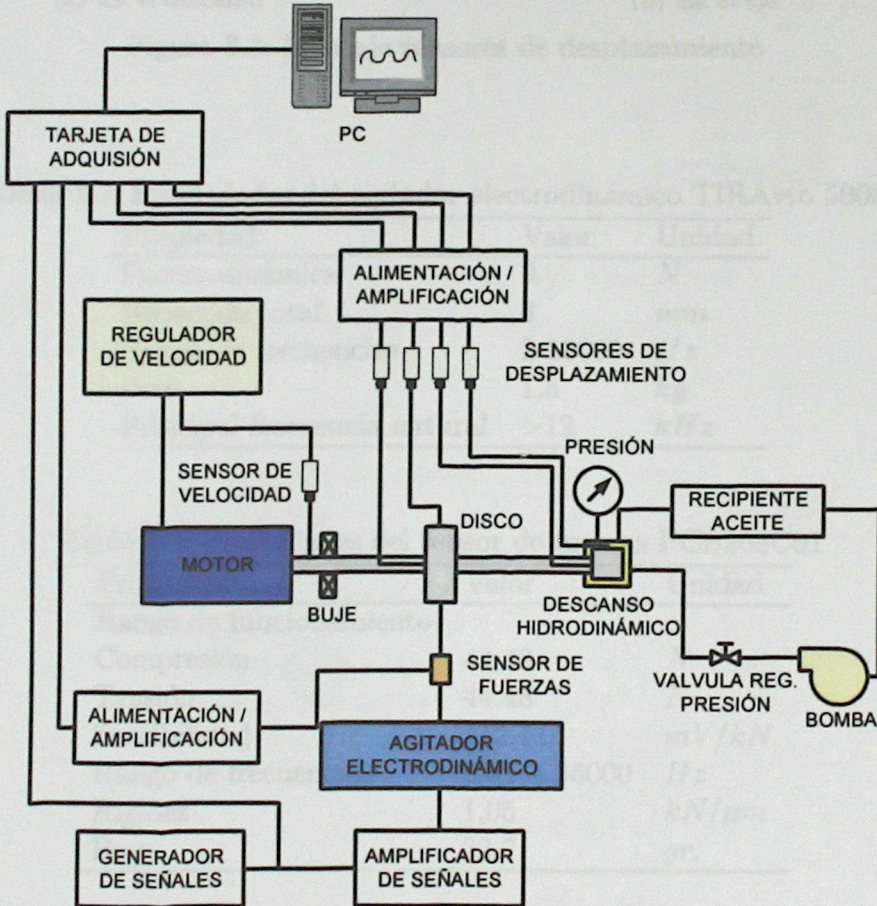


Figura 3.2: Esquema de la adquisición de datos

En la Figura 3.4 se muestra el montaje de los sensores de desplazamiento. Se utilizaron sensores de desplazamiento inductivos (sin contacto). Este tipo de sensores mide la distancia relativa entre su punto de fijación y el eje, permiten medir movimientos relativos eje/descanso tanto dinámicos como estáticos. Las tablas 3.2, 3.3 y 3.4 muestran las propiedades principales del agitador electrodinámico, sensor de fuerzas y sensores de desplazamiento respectivamente.

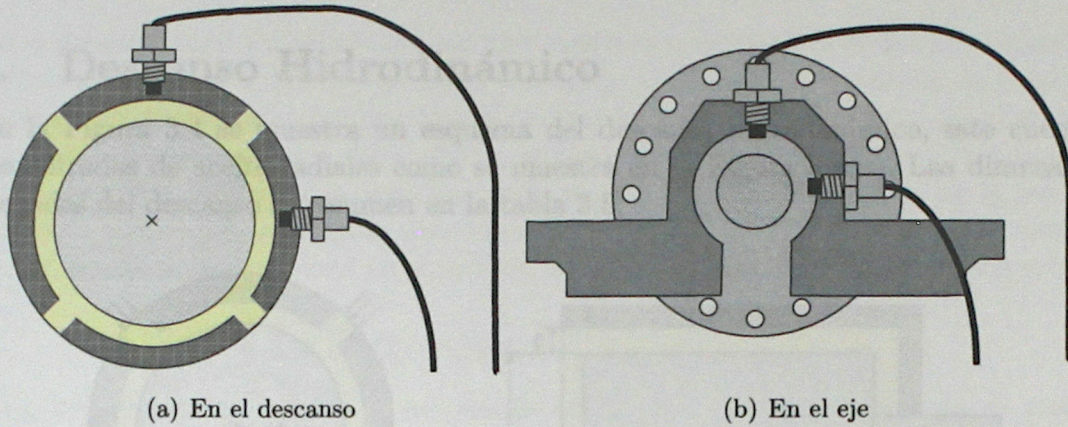


Figura 3.3: Montaje sensores de desplazamiento

Tabla 3.2: Propiedades del agitador electrodinámico TIRAvib 50009

Propiedad	Valor	Unidad
Fuerza dinámica	9	N
Recorrido total	3	mm
Rango de frecuencias	2-13000	Hz
Peso	1,5	kg
Principal frecuencia natural	>12	kHz

Tabla 3.3: Propiedades del sensor de fuerzas PCB208C01

Propiedad	Valor	Unidad
Rango de funcionamiento		
Compresión	44,48	N
Tensión	44,48	N
Sensibilidad	112,41	mV/kN
Rango de frecuencias	0,01 – 36000	Hz
Rigidez	1,05	$kN/\mu m$
Peso	22,7	$gr.$

Tabla 3.4: Propiedades de los sensores de desplazamiento

Propiedad	Valor	Unidad
Sensibilidad	7,87	V/mm
Rango lineal	0,25-2,3	mm
Gap recomendado	1,27	mm

3.2. Descanso Hidrodinámico

En la Figura 3.4 se muestra un esquema del descanso hidrodinámico, este cuenta con cuatro entradas de aceite radiales como se muestra en la Figura 3.4(a). Las dimensiones y propiedades del descanso se resumen en la tabla 3.5.

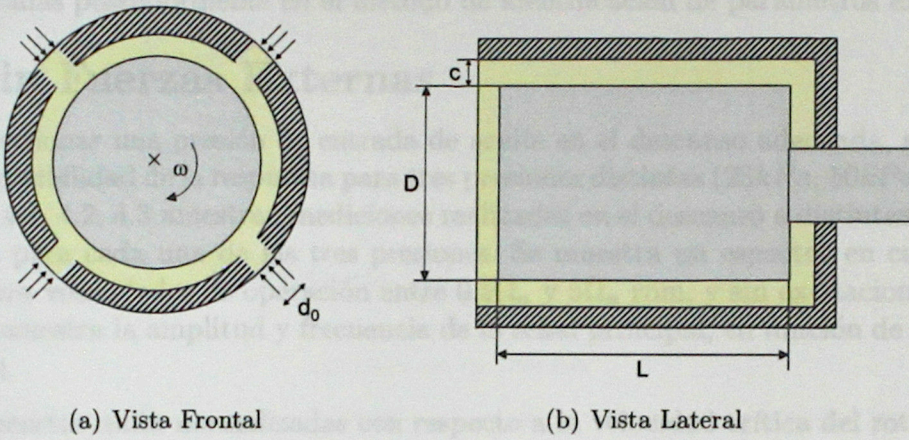


Figura 3.4: Descanso Hidrodinámico

Tabla 3.5: Propiedades del descanso

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
c	Holgura radial	$6,5 \cdot 10^{-3}$	in
D	Diámetro Descanso	1	in
L	Largo Descanso	1	in
d_0	Diámetro entrada de aceite	2	mm
ρ	Densidad del aceite	870	kg/m ³
μ	Viscosidad del aceite	0,025056	kg/m · s

Capítulo 4

Mediciones Experimentales

En el presente capítulo se detallan las mediciones experimentales realizadas. Inicialmente se realizaron mediciones del sistema rotor operando a distintas velocidades de rotación sin excitaciones externas, estas mediciones se realizaron con el propósito de estudiar el comportamiento del sistema rotor (desbalance, resonancias, etc) y de estudiar la aparición de fenómenos propios del descanso como los fenómenos de *oil whirl* y *oil whip*. En la sección 4.2 se muestran mediciones realizadas con una excitación sinusoidal externa, estas mediciones fueron utilizadas posteriormente en el método de identificación de parámetros experimental.

4.1. Sin Fuerzas Externas

Para seleccionar una presión de entrada de aceite en el descanso adecuada, se realizó un análisis de sensibilidad de la respuesta para tres presiones distintas ($25kPa$, $50kPa$ y $100kPa$). Las Figuras 4.1, 4.2, 4.3 muestran mediciones realizadas en el descanso a distintas velocidades de rotación, para cada una de las tres presiones. Se muestra un espectro en cascada de la respuesta para velocidades de operación entre $0.5\Omega_n$ y $5\Omega_n$ rpm, y sin excitaciones externas. También se muestra la amplitud y frecuencia de la señal principal, en función de la velocidad de operación.

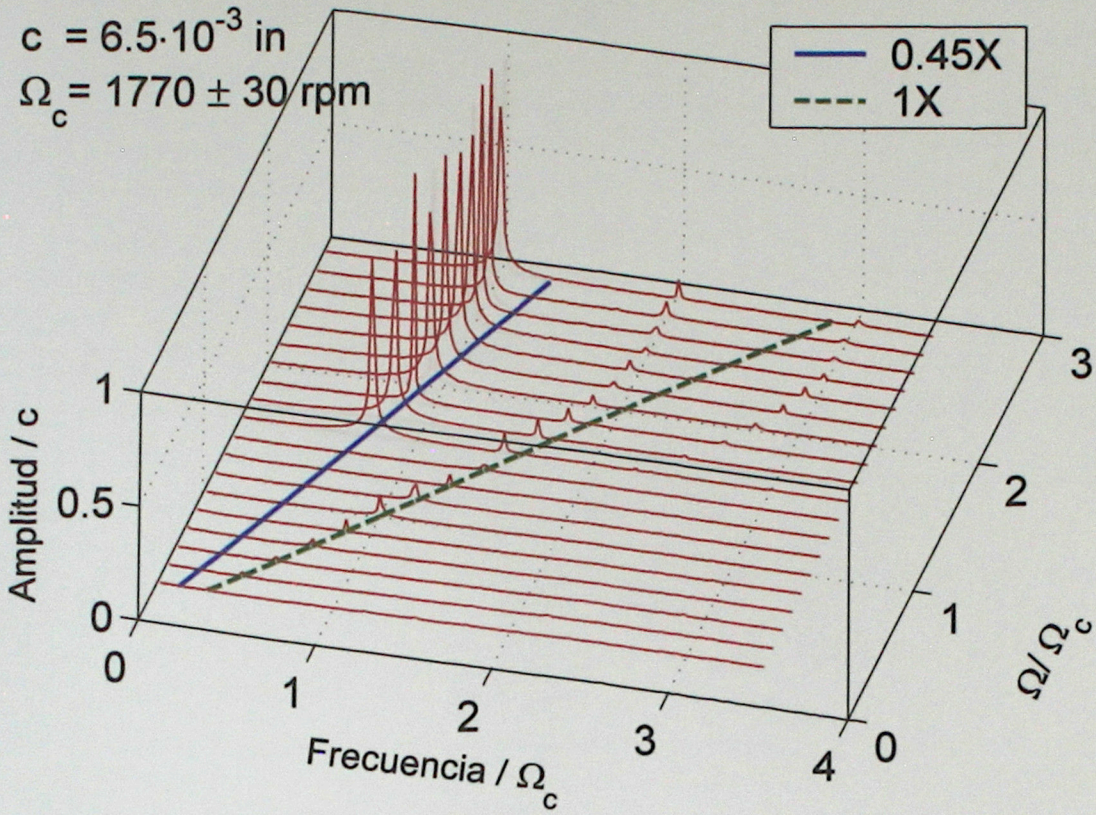
Las frecuencias están normalizadas con respecto a la velocidad crítica del rotor (Ω_c), que se encontró experimentalmente igual a $(1,77 \pm 0,3)\Omega_n$.

De la Figuras 4.1(c), 4.2(c), 4.3(c) se observa como inicialmente predomina la respuesta al desbalance (1X). Para el caso donde la presión de entrada de aceite es $25kPa$, aparece a una velocidad de $\Omega_a = 2,8\Omega_n$ el fenómeno de *oil whirl*. La frecuencia del *oil whirl* es aproximadamente $0,45X$ veces la velocidad de operación. Se ve que al aumentar la presión de entrada de aceite se suprime el fenómeno de *oil whirl*. A $50kPa$ se observa una pequeña zona de *oil whirl*, y a $100kPa$ esta se suprime, pasando directamente al fenómeno de *oil whip*.

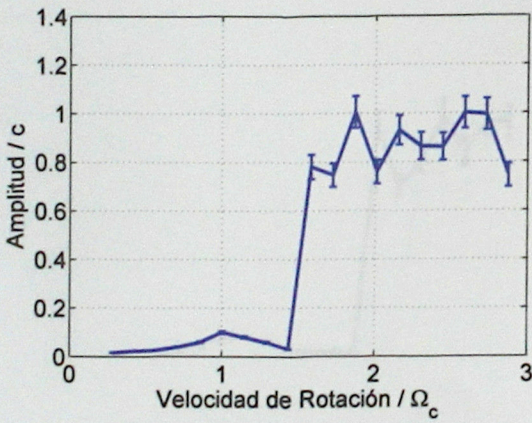
Cuando se alcanza una velocidad de rotación cercana a 2 veces la velocidad crítica del rotor aparece el fenómeno de *oil whip*. Se puede observar que una vez que comienza el fenómeno de *oil whip*, la frecuencia de la respuesta es constante e igual a Ω_c , también se observa una parte de la respuesta a $2\Omega_c$ y $3\Omega_c$.

De los gráficos de amplitud versus velocidad de operación (Figuras 4.1(b), 4.2(b) y 4.3(b)), se puede observar una resonancia cercana a la velocidad crítica del rotor. Esta respuesta es mucho menor a la amplitud de las oscilaciones cuando comienzan los fenómenos de *oil whirl* y *oil whip*, mostrando la naturaleza inestable de estos fenómenos.

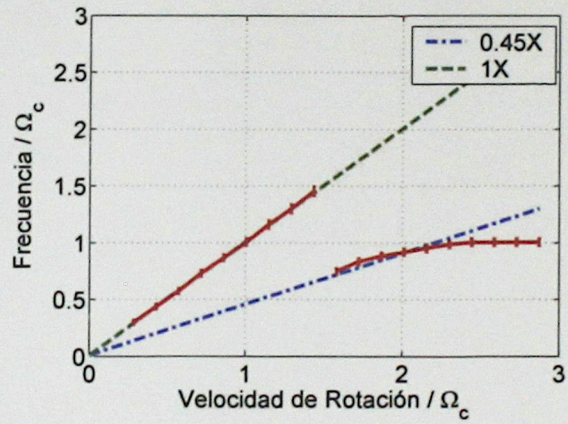
Para evitar el fenómeno de *oil whirl* durante el procedimiento de identificación de parámetros, se definió la presión de entrada de aceite igual a $100kPa$.



(a) Espectro en Cascada

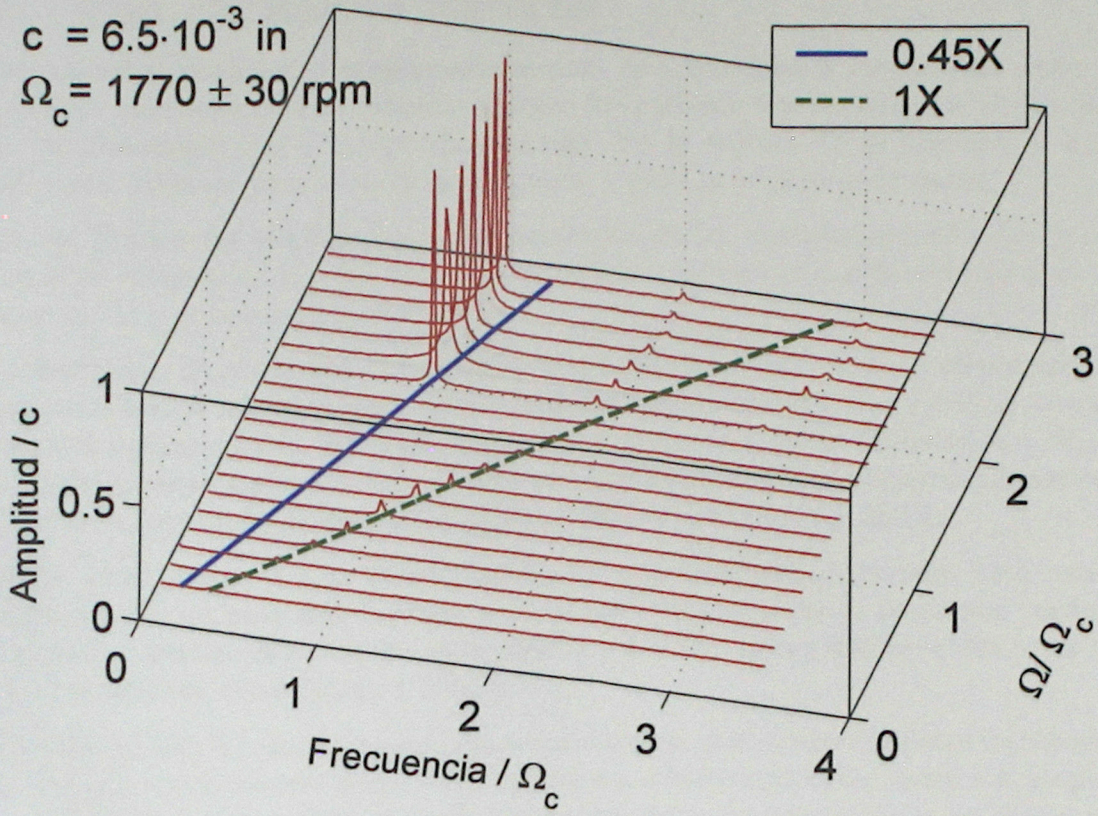


(b) Amplitud

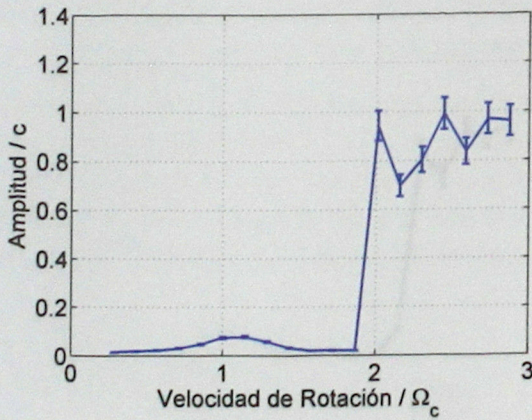


(c) Frecuencia

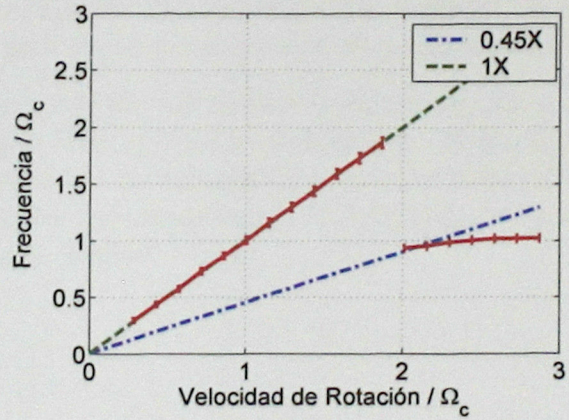
Figura 4.1: Respuesta experimental del sistema rotor en función de la velocidad de rotación a una presión de entrada de aceite de 25kPa



(a) Espectro en Cascada

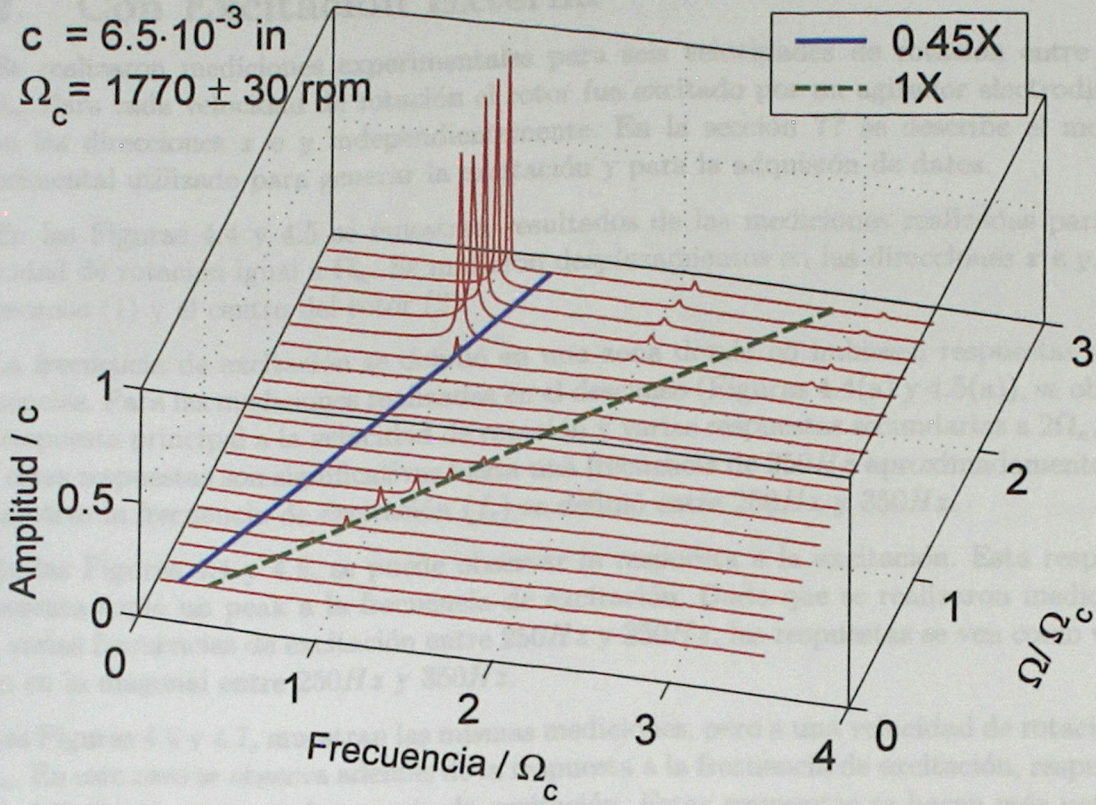


(b) Amplitud

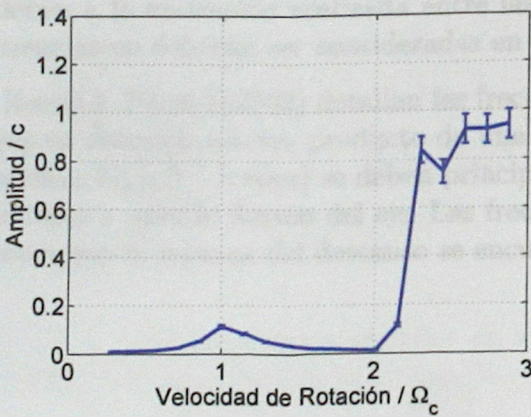


(c) Frecuencia

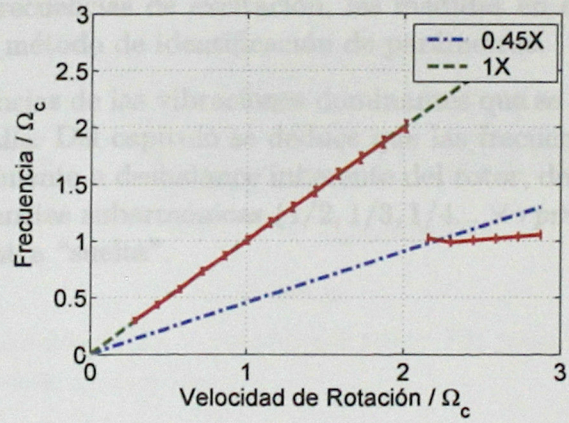
Figura 4.2: Respuesta experimental del sistema rotor en función de la velocidad de rotación a una presión de entrada de aceite de 50kPa



(a) Espectro en Cascada



(b) Amplitud



(c) Frecuencia

Figura 4.3: Respuesta experimental del sistema rotor en función de la velocidad de rotación a una presión de entrada de aceite de 100kPa

4.2. Con Excitación Externa

Se realizaron mediciones experimentales para seis velocidades de rotación entre Ω_n y $3,5\Omega_n$. Para cada velocidad de rotación el rotor fue excitado por un agitador electrodinámico en las direcciones x e y independientemente. En la sección ?? se describe el montaje experimental utilizado para generar la excitación y para la adquisición de datos.

En las Figuras 4.4 y 4.5 se muestran resultados de las mediciones realizadas para una velocidad de rotación igual a Ω_n . Se midieron desplazamientos en las direcciones x e y , para el descanso (1) y el centro del rotor (2).

La frecuencia de excitación se definió en una zona donde no hubiesen respuestas a esas frecuencias. Para las mediciones realizadas en el descanso (Figuras 4.4(a) y 4.5(a)), se observa una respuesta principal a la velocidad de rotación y varias respuestas secundarias a $2\Omega_n$, $3\Omega_n$, etc., estas respuestas son significativas hasta una frecuencia de $250Hz$ aproximadamente. Por este motivo la frecuencia de excitación (f_e) se definió entre $250Hz$ y $350Hz$.

En las Figuras 4.4 y 4.5, se puede observar la respuesta a la excitación. Esta respuesta se presenta como un peak a la frecuencia de excitación. Dado que se realizaron mediciones para varias frecuencias de excitación entre $250Hz$ y $350Hz$, las respuestas se ven como varios peaks en la diagonal entre $250Hz$ y $350Hz$.

Las Figuras 4.6 y 4.7, muestran las mismas mediciones, pero a una velocidad de rotación de $3,5\Omega_n$. En este caso se observa además de la respuesta a la frecuencia de excitación, respuestas a $1/4$, $1/2$, 2 , etc., veces la frecuencia de excitación. Estas respuestas se hacen más notorias a medida que aumenta la frecuencia de excitación. También se observan respuestas, que no se deben a la excitación realizada entre las frecuencias de excitación, las medidas en estas frecuencias no deberán ser consideradas en el método de identificación de parámetros.

Harris & Piersol (2002) detallan las frecuencias de las vibraciones dominantes que se producen en sistemas rotores producto de una falla. Del capítulo se deduce que las frecuencias armónicas ($1, 2, 3... \times rpm$) se deben principalmente a desbalance inherente del rotor, desalineamiento y posible flexión del eje. Las frecuencias subarmónicas ($1/2, 1/3, 1/4... \times rpm$) se deben a que la carcasa del descanso se encuentra "suelta".

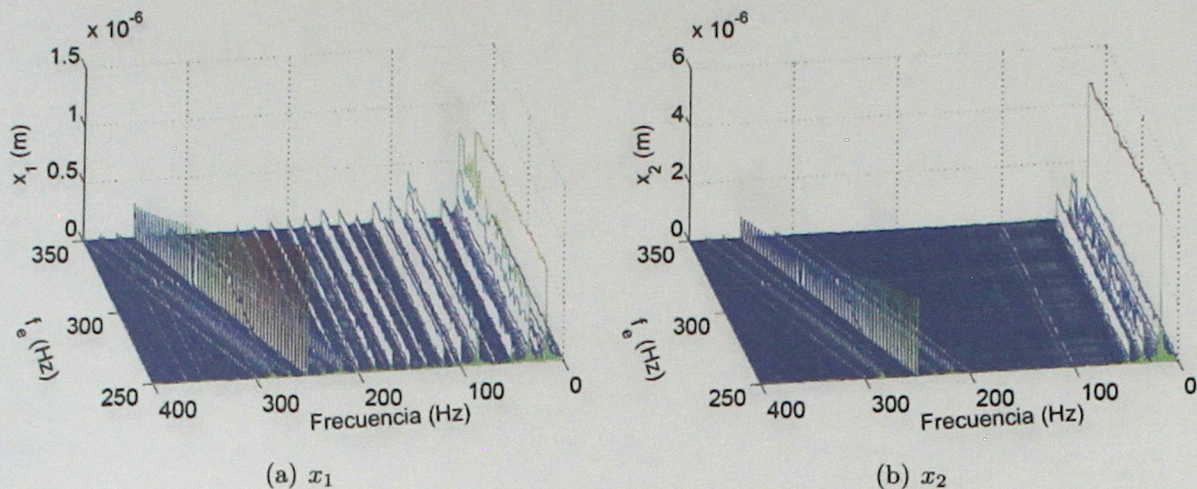


Figura 4.4: Desplazamientos medidos en el descanso (1) y centro del rotor (2) para una excitación horizontal. Con una velocidad de rotación igual a Ω_n

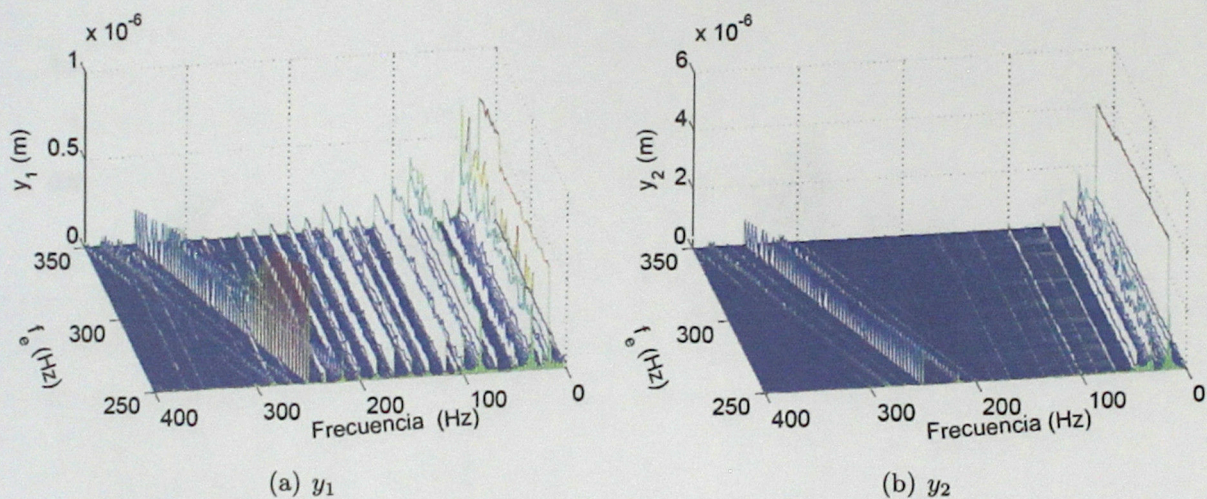


Figura 4.5: Desplazamientos medidos en el descanso (1) y centro del rotor (2) para una excitación vertical. Con una velocidad de rotación igual a Ω_n

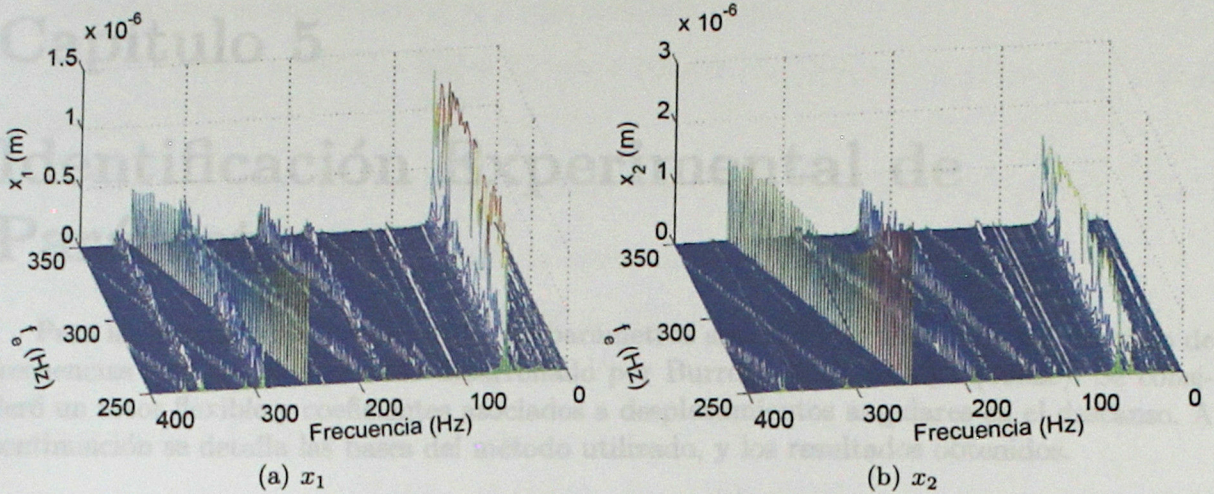


Figura 4.6: Desplazamientos medidos en el descanso (1) y centro del rotor (2) para una excitación horizontal. Con una velocidad de rotación igual a $3,5\Omega_n$

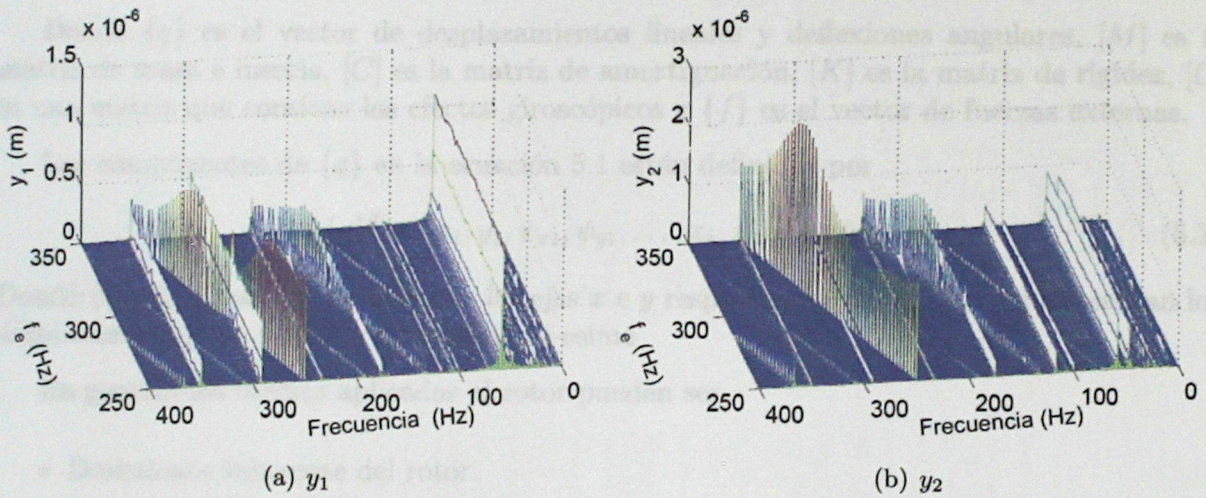


Figura 4.7: Desplazamientos medidos en el descanso (1) y centro del rotor (2) para una excitación vertical. Con una velocidad de rotación igual a $3,5\Omega_n$

Capítulo 5

Identificación Experimental de Parámetros

Para la identificación experimental de parámetros se utilizó un método en el dominio de frecuencias basado en el método desarrollado por Burrows & Sahinkaya (1982c). Se consideró un rotor flexible y coeficientes asociados a desplazamientos angulares en el descanso. A continuación se detalla las bases del método utilizado, y los resultados obtenidos.

5.1. Método de Identificación

El sistema rotor se puede modelar por medio de elementos finitos, obteniendo una ecuación de la forma

$$[M]\{\ddot{q}\} + (\Omega[G] + [C])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\} \quad (5.1)$$

Donde $\{q\}$ es el vector de desplazamientos lineales y deflexiones angulares, $[M]$ es la matriz de masa e inercia, $[C]$ es la matriz de amortiguación, $[K]$ es la matriz de rigidez, $[G]$ es una matriz que contiene los efectos giroscópicos y $\{f\}$ es el vector de fuerzas externas.

Los componentes de $\{q\}$ en la ecuación 5.1 están definidos por

$$\{q\}^T = [x_1, y_1, \psi_{x1}, \psi_{y1}, \dots, x_k, y_k, \psi_{xk}, \psi_{yk}] \quad (5.2)$$

Donde ψ_{xi} , ψ_{yi} denota la rotación en los ejes x e y respectivamente, y x_i y y_i representan los desplazamientos en el punto de medición i -ésimo

En general las fuerzas aplicadas al rotor pueden ser

- Desbalance inherente del rotor.
- Fuerzas aplicadas externamente por agitadores electrodinámicos en una o más ubicaciones.
- Fuerzas en el descanso.

Las fuerzas en el descanso se consideran introduciendo las matrices de rigidez y amortiguación $[C_b]$ y $[K_b]$ de dimensiones $4k \times 4k$ respectivamente.

Definiendo las matrices de rigidez, amortiguación, y efectos giroscópicos del rotor como $[K_r]$, $[C_r]$ y $[G_r]$ respectivamente, y la matriz de masa como M , todas de dimensiones $4k \times 4k$. La ecuación 5.1 se puede escribir como

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C_b] + [C_r] + \Omega[G_r])\{\dot{q}\} + ([K_b] + [K_r])\{q\} = \{f\} \quad (5.3)$$

Esta ecuación se puede escribir se forma compleja como:

$$[-[M]\omega^2 + (\Omega[G_r] + [C_b] + [C_r])j\omega + ([K_b] + [K_r])]\{q(j\omega)\} = \{f(j\omega)\} \quad (5.4)$$

reordenado

$$[-[M]\omega^2 + (\Omega[G_s] + [C_r])j\omega + [K_r]\{q(j\omega)\} = \{f(j\omega)\} - [j\omega[C_b] + [K_b]\{q(j\omega)\} \quad (5.5)$$

Definiendo, las matrices de impedancia estructural y del descanso como

$$[H_r(j\omega)] = -[M]\omega^2 + (\Omega[G_r] + [C_r])j\omega + [K_r] \quad (5.6)$$

$$[H_b(j\omega)] = j\omega[C_b] + [K_b] \quad (5.7)$$

La ecuación 5.5 se puede escribir como

$$[H_r]\{q(j\omega)\} = \{f(j\omega)\} - [H_b]\{q(j\omega)\} \quad (5.8)$$

Separando la ecuación en los grados de libertad que están en el descanso y los que no

$$\{q(j\omega)\} = \begin{Bmatrix} \{q_b\} \\ \{q_r\} \end{Bmatrix}$$

$$\{f(j\omega)\} = \begin{Bmatrix} \{f_b\} \\ \{f_r\} \end{Bmatrix}$$

$$[H_r] = \begin{bmatrix} [H_{r1}] & [H_{r2}] \\ [H_{r3}] & [H_{r4}] \end{bmatrix}$$

$$= -\omega^2 \begin{bmatrix} [M_1] & [M_2] \\ [M_3] & [M_4] \end{bmatrix} + j\omega \left(\Omega \begin{bmatrix} [G_{r1}] & [G_{r2}] \\ [G_{r3}] & [G_{r4}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{r1}] & [C_{r2}] \\ [C_{r3}] & [C_{r4}] \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} [K_{r1}] & [K_{r2}] \\ [K_{r3}] & [K_{r4}] \end{bmatrix}$$

$$[H_b] = \begin{bmatrix} [H_{b1}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} [C_b] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_b] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

reemplazando en la ecuación 5.5 se tiene

$$\begin{bmatrix} [H_{r1}] & [H_{r2}] \\ [H_{r3}] & [H_{r4}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_b\} \\ \{q_r\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_b\} \\ \{f_r\} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [H_{b1}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_b\} \\ \{q_r\} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Con lo que se llega a la siguiente ecuación para el descanso (San-Andrés & De-Santiago, 2004b)

$$[H_{b1}]\{q_b\} = \{f_b\} - [H_{r1}]\{q_b\} - [H_{r2}]\{q_r\} \quad (5.10)$$

Separando en parte real e imaginaria y considerando que no hay fuerzas externas sobre el descanso, se obtiene que

$$\begin{bmatrix} [K_b] & -\omega[C_b] \\ \omega[C_b] & [K_b] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_b\}^r \\ \{q_b\}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2[M_1] - [K_{r1}] & \omega(\Omega[G_{r1}] + [C_{r1}]) \\ -\omega(\Omega[G_{r1}] + [C_{r1}]) & \omega^2[M_1] - [K_{r1}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_b\}^r \\ \{q_b\}^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2[M_2] - [K_{r2}] & \omega(\Omega[G_{r2}] + [C_{r2}]) \\ -\omega(\Omega[G_{r2}] + [C_{r2}]) & \omega^2[M_2] - [K_{r2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_r\}^r \\ \{q_r\}^i \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Escribiendo en forma transpuesta y reordenando

$$\begin{bmatrix} \{q_b\}^{rT} & -\omega\{q_b\}^{iT} \\ \{q_b\}^{iT} & \omega\{q_b\}^{rT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K_b]^T \\ [C_b]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{q_b\}^{rT}(\omega^2 [M_1]^T - [K_{r1}]^T) + \omega\{q_b\}^{iT}(\Omega [G_{r1}]^T + [C_{r1}]^T) \\ -\omega\{q_b\}^{rT}(\Omega [G_{r1}]^T + [C_{r1}]^T) + \{q_b\}^{iT}(\omega^2 [M_1]^T - [K_{r1}]^T) \\ \{q_r\}^{rT}(\omega^2 [M_2]^T - [K_{r2}]^T) + \omega\{q_r\}^{iT}(\Omega [G_{r2}]^T + [C_{r2}]^T) \\ -\omega\{q_r\}^{rT}(\Omega [G_{r2}]^T + [C_{r2}]^T) + \{q_r\}^{iT}(\omega^2 [M_2]^T - [K_{r2}]^T) \end{bmatrix} + \quad (5.12)$$

Considerando que se realizan n mediciones a distintas frecuencias de excitación, se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones (Burrows & Sahinkaya, 1982c)

$$\begin{bmatrix} \{q_{b1}\}^{rT} & -\omega_1\{q_{b1}\}^{iT} \\ \{q_{b1}\}^{iT} & \omega_1\{q_{b1}\}^{rT} \\ \vdots & \vdots \\ \{q_{bn}\}^{rT} & -\omega_n\{q_{bn}\}^{iT} \\ \{q_{bn}\}^{iT} & \omega_n\{q_{bn}\}^{rT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K_b]^T \\ [C_b]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{q_{b1}\}^{rT}(\omega_1^2 [M_1]^T - [K_{r1}]^T) + \omega_1\{q_{b1}\}^{iT}(\Omega [G_{r1}]^T + [C_{r1}]^T) \\ -\omega_1\{q_{b1}\}^{rT}(\Omega [G_{r1}]^T + [C_{r1}]^T) + \{q_{b1}\}^{iT}(\omega_1^2 [M_1]^T - [K_{r1}]^T) \\ \vdots \\ \{q_{bn}\}^{rT}(\omega_n^2 [M_1]^T - [K_{r1}]^T) + \omega_n\{q_{bn}\}^{iT}(\Omega [G_{r1}]^T + [C_{r1}]^T) \\ -\omega_n\{q_{bn}\}^{rT}(\Omega [G_{r1}]^T + [C_{r1}]^T) + \{q_{bn}\}^{iT}(\omega_n^2 [M_1]^T - [K_{r1}]^T) \\ \{q_{r1}\}^{rT}(\omega_1^2 [M_2]^T - [K_{r2}]^T) + \omega_1\{q_{r1}\}^{iT}(\Omega [G_{r2}]^T + [C_{r2}]^T) \\ -\omega_1\{q_{r1}\}^{rT}(\Omega [G_{r2}]^T + [C_{r2}]^T) + \{q_{s1}\}^{iT}(\omega_1^2 [M_1]^T - [K_{r2}]^T) \\ \vdots \\ \{q_{rn}\}^{rT}(\omega_n^2 [M_2]^T - [K_{r2}]^T) + \omega_n\{q_{rn}\}^{iT}(\Omega [G_{r2}]^T + [C_{r2}]^T) \\ -\omega_n\{q_{rn}\}^{rT}(\Omega [G_{r2}]^T + [C_{r2}]^T) + \{q_{rn}\}^{iT}(\omega_n^2 [M_1]^T - [K_{r2}]^T) \end{bmatrix} + \quad (5.13)$$

La ecuación 5.13 se puede escribir como

$$[W_F][\Phi_F] = [C_F] \quad (5.14)$$

Donde $[W_F]$ es una matriz que contiene los coeficientes de fourier del desplazamiento, $[\Phi_F]$ es una matriz con los coeficientes a ser estimados y $[C_F]$ contiene los coeficientes de fourier de la fuerza equivalente en el descanso.

Dado el sistema de ecuaciones 5.13, la estimación por mínimos cuadrados de la matriz de coeficientes viene dada por (Cadzow, 2002)

$$[\hat{\Phi}_F] = ([W_F]^T [W_F])^{-1} [W_F]^T [C_F] \quad (5.15)$$

5.2. Modelo en Elementos Finitos

En la Figura 5.1 se muestra un esquema simplificado de sistema rotor a modelar. El rotor se encuentra apoyado por un descanso hidrodinámico y un buje.

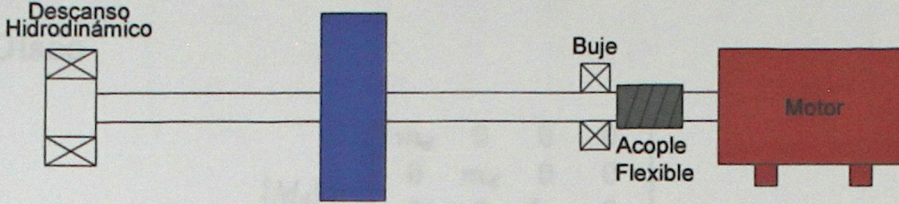


Figura 5.1: Esquema del sistema rotor

El sistema mostrado en la Figura 5.1 se modeló en elementos finitos por medio de 2 elementos de eje y un elemento de disco, como se muestra en la Figura 6.1.2, obteniendo tres nodos y 12 grados de libertad.

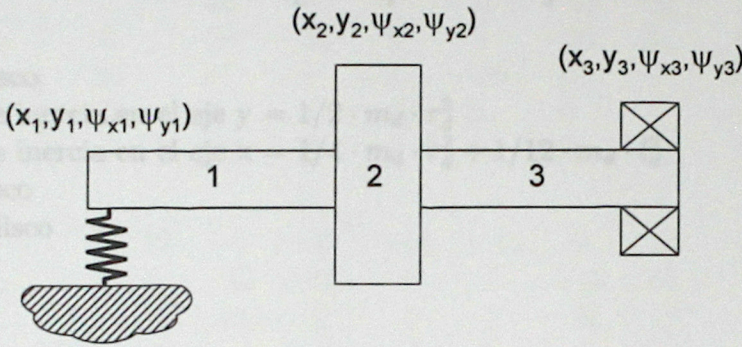


Figura 5.2: Esquema en elementos finitos del rotor

A continuación se detallará la construcción de las matrices de rigidez, amortiguación, efectos giroscópicos y fuerzas, para cada elemento y su posterior ensamble (Lalanne & Ferraris, 1998).

5.2.1. Descanso hidrodinámico

En el descanso se consideran 4 grados de libertad (x, y, ψ_x, ψ_y) , y se modela considerando 16 coeficientes de rigidez y 16 coeficientes de amortiguación. Por lo tanto las matrices de rigidez K_b y amortiguación C_b son las siguientes

$$[K_b] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{x\psi_x} & K_{x\psi_y} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{y\psi_x} & K_{y\psi_y} \\ K_{\psi_x x} & K_{\psi_x y} & K_{\psi_x \psi_x} & K_{\psi_x \psi_y} \\ K_{\psi_y x} & K_{\psi_y y} & K_{\psi_y \psi_x} & K_{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$[C_b] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{x\psi_x} & C_{x\psi_y} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{y\psi_x} & C_{y\psi_y} \\ C_{\psi_x x} & C_{\psi_x y} & C_{\psi_x \psi_x} & C_{\psi_x \psi_y} \\ C_{\psi_y x} & C_{\psi_y y} & C_{\psi_y \psi_x} & C_{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

5.2.2. Disco

$$[M_d] = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{d_y} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$[G_d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{d_y} \\ 0 & I_{d_y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

donde

m_d = Masa del disco

I_{d_y} = Momento de inercia en el eje y = $1/2 \cdot m_d \cdot r_d^2$

I_{d_x} = Momento de inercia en el eje x = $1/4 \cdot m_d \cdot r_d^2 + 1/12 \cdot m_d \cdot l_d^2$

r_d = Radio del disco

l_d = Espesor del disco

5.2.3. Eje

$$[M_e] = [M_{e1}] + [M_{e2}] \quad (5.20)$$

$$[M_{e1}] = \frac{\rho_e S_e l_e}{420} \begin{pmatrix} 156 & 0 & 0 & -22l_e & 54 & 0 & 0 & 13l_e \\ 0 & 156 & 22l_e & 0 & 0 & 54 & -13l_e & 0 \\ 0 & 22l_e & 4l_e^2 & 0 & 0 & 13l_e & -3l_e^2 & 0 \\ -22l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & -13l_e & 0 & 0 & -3l_e^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13l_e & 156 & 0 & 0 & 22l_e \\ 0 & 54 & 13l_e & 0 & 0 & 156 & -22l_e & 0 \\ 0 & -13l_e & -3l_e^2 & 0 & 0 & -22l_e & 4l_e^2 & 0 \\ 13l_e & 0 & 0 & -3l_e^2 & 22l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

5.2.4. Ensamble

Si ordenamos todos los desplazamientos nodales en un vector $\{q\}$, podemos expresar los desplazamientos de cada elemento e como:

$$\{u\} = [L_e] \{q\} \quad (5.22)$$

$$[M_{e2}] = \frac{\rho_e I_e}{30l_e} \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l_e & -36 & 0 & 0 & -3l_e \\ 0 & 36 & 3l_e & 0 & 0 & -36 & 3l_e & 0 \\ 0 & 3l_e & 4l_e^2 & 0 & 0 & -3l_e & -l_e^2 & 0 \\ -3l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & 3l_e & 0 & 0 & -l_e^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3l_e & 36 & 0 & 0 & 3l_e \\ 0 & -36 & -3l_e & 0 & 0 & 36 & -3l_e & 0 \\ 0 & 3l_e & -l_e^2 & 0 & 0 & -3l_e & 4l_e^2 & 0 \\ -3l_e & 0 & 0 & -l_e^2 & 3l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

$$[G_e] = [G_{e1}] - [G_{e1}]^T \quad (5.23)$$

$$[G_{e1}] = \frac{\rho_e I_e}{15l} \begin{pmatrix} 0 & -36l_e & -3l_e & 0 & 0 & 36 & -3l_e & 0 \\ -36l_e & 0 & 0 & -3l_e & -36 & 0 & 0 & -3l_e \\ -3l_e & 0 & 0 & -4l_e^2 & -3l_e & 0 & 0 & l_e^2 \\ 0 & -3l_e & -4l_e^2 & 0 & 0 & -3l_e & -l_e^2 & 0 \\ 0 & -36 & -3l_e & 0 & 0 & -36 & 3l_e & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3l_e & -36 & 0 & 0 & 3l_e^2 \\ -3l_e & 0 & 0 & -l_e^2 & 3l_e & 0 & 0 & -4l_e^2 \\ 0 & -3l_e & l_e^2 & 0 & 0 & 3l_e^2 & -4l_e^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$[K_e] = \frac{EI_e}{l_e^3} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & -6l_e & -12 & 0 & 0 & -6l_e \\ 0 & 12 & 6l_e & 0 & 0 & -12 & 6l_e & 0 \\ 0 & 6l_e & l_e^2 & 0 & 0 & -6l_e & l_e^2 & 0 \\ -6l_e & 0 & 0 & l_e^2 & 6l_e & 0 & 0 & l_e^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6l_e & 12 & 0 & 0 & 6l_e \\ 0 & -12 & -6l_e & 0 & 0 & 12 & -6l_e & 0 \\ 0 & 6l_e & l_e^2 & 0 & 0 & -6l_e & l_e^2 & 0 \\ -6l_e & 0 & 0 & l_e^2 & 6l_e & 0 & 0 & l_e^2 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

donde

E = Modulo de Young

ρ_e = Densidad por unidad de volumen

S_e = Área sección = $\pi d_e^2/4$

d_e = Diámetro eje

l_e = Largo elemento de eje

I_e = Momento de inercia sección = $\pi d_e^4/32$

5.2.4. Ensamble

Si ordenamos todos los desplazamientos nodales en un vector $\{q\}$, podemos expresar los desplazamientos de cada elemento i como

$$\{q_i\} = [L_i]\{q\} \quad (5.26)$$

Donde $[L_i]$ es el operador de localización, que corresponde a una matriz booleana con dimensiones $dim(\{q_i\}) \times dim(\{q\})$. Por ejemplo,

$$[L_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

indica que el elemento 2 es definido por los grados de libertad 2 y 3 del modelo completo. Las matrices del sistema son entonces

$$[M] = \sum [L_i]^T [M_i] [L_i] \quad (5.27)$$

$$[K] = \sum [L_i]^T [K_i] [L_i] \quad (5.28)$$

$$[C] = \sum [L_i]^T [C_i] [L_i] \quad (5.29)$$

$$[G] = \sum [L_i]^T [G_i] [L_i] \quad (5.30)$$

y para las fuerzas

$$\{f\} = \sum [L_i]^T \{f_i\} \quad (5.31)$$

5.2.5. Grados de Libertad Fijos

Una vez realizado el ensamble. Se deben determinar y fijar los grados de libertad fijos. Considerando la ecuación de movimiento

$$[M]\{\ddot{q}\} + (\Omega[G] + [C])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\} \quad (5.32)$$

Escribiendo en el dominio de frecuencias

$$[Z]\{q\} = \{f\} \quad (5.33)$$

donde

$$[Z] = -\omega^2[M] + j\omega(\Omega[G] + [C]) + [K] \quad (5.34)$$

reescribiendo la ecuación 5.33 en términos de los grados de libertad activos y fijos

$$\begin{bmatrix} [Z_{aa}] & [Z_{af}] \\ [Z_{fa}] & [Z_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_a\} \\ \{q_f\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_a\} \\ \{f_f\} \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

Separando en dos ecuaciones y reemplazando $\{q_f\} = 0$, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$[Z_{aa}]\{q_a\} = \{f_a\} \quad (5.36)$$

$$[Z_{fa}]\{q_a\} = \{f_f\} \quad (5.37)$$

Para conocer los desplazamientos del sistema basta con resolver la ecuación 5.36. La ecuación 5.37 permite determinar las reacciones en los grados de libertad fijos.

5.2.6. Condensación Grados de Libertad de Rotación

En la practica los grados de libertad asociados a rotación son difíciles de medir. Burrows & Sahinkaya (1982c) mostraron que se puede determinar efectivamente los coeficientes asociados a desplazamientos, sin la necesidad de considerar las rotaciones. A continuación se describe un procedimiento para reducir los grados de libertad asociados a rotaciones, descrito por Heylen *et al.* (1995). La técnica utilizada se denomina reducción estática o de Gumbel de los grados de libertad.

Los técnicas de reducción expresan las matrices en términos de los grados de libertad medidos experimentalmente. Los grados de libertad medidos, se denominan grados de libertad "activos". Los otros grados de libertad (grados "eliminados") son eliminados.

La técnicas de reducción definen una relación entre los grados de libertad activos y eliminados a través de una matriz de "transformación" $[T_d]$ o $[T_t]$.

$$\{q_d\} = [T_d]\{q_a\} \quad (5.38)$$

$$\{q\} = [T_t]\{q_a\} \quad (5.39)$$

$$[T_t] = \begin{bmatrix} [I] \\ [T_d] \end{bmatrix}$$

donde $\{q_a\}$, $\{q_d\}$ y $\{q\}$ son los grados de libertad activos, eliminados y totales, respectivamente. Escribiendo el sistema de ecuaciones estáticas

$$[K]\{q\} = \{f\} \quad (5.40)$$

Para el sistema reducido no existen fuerzas externas actuando en los grados de libertad eliminados. Reescribiendo en términos de los grados de libertad activos y eliminados

$$\begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ad}] \\ [K_{da}] & [K_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_a\} \\ \{q_d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_a\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

Separando en dos ecuaciones, se obtiene que

$$\{q_d\} = -[K_{dd}]^{-1}[K_{da}]\{q_a\} \quad (5.42)$$

$$([K_{aa}] - [K_{ad}] \cdot [K_{dd}]^{-1}[K_{da}])\{q_a\} = \{f_a\} \quad (5.43)$$

de la ecuación 5.42 se deduce que

$$[T_d] = -[K_{dd}]^{-1}[K_{da}] \quad (5.44)$$

por lo tanto

$$[T_t] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{dd}]^{-1}[K_{da}] \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Las matrices reducidas se determinan como

$$[M^R] = [T_f]^T [M] [T_f] \quad (5.46)$$

$$[K^R] = [T_f]^T [K] [T_f] \quad (5.47)$$

$$[C^R] = [T_f]^T [C] [T_f] \quad (5.48)$$

$$[G^R] = [T_f]^T [G] [T_f] \quad (5.49)$$

$$(5.50)$$

5.2.7. Diagrama de Campbell

Los datos utilizados en el modelo en elementos finitos se resumen en las tablas 5.1 y 5.2. El diagrama de Campbell fue obtenido sin considerar el descanso hidrodinámico, para obtener de esta manera las frecuencias críticas del rotor. Se eliminaron los grados de libertad asociados al nodo ubicado en el buje (tercer nodo). La Figura 5.3 muestra el diagrama de campbell del sistema rotor. No se obtuvieron mayores diferencia en el diagrama de Campbell con los grados de libertad de rotación condensados. Al condensar los grados de libertad de rotación, la primera frecuencia natural se mantuvo y la segunda aumentó en un 0,5 %.

Del diagrama de Campbell se predice que la primera frecuencia natural tiene un valor de $1,68\Omega_n$. La primera frecuencia natural obtenida experimentalmente es de $(1,77 \pm 0,3)\Omega_n$. La diferencia entre la frecuencia estimada por el modelo en elementos finitos y la frecuencia obtenida experimentalmente, es menor a un 4 %, esto valida el modelo en elementos finitos.

El *oil whip*, por otro lado, según el diagrama de Campbell comienza a una velocidad de $3,645\Omega_n$, esto es congruente con los resultados experimentales obtenidos en el capítulo 4.

Tabla 5.1: Propiedades del elemento de disco

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
m_d	Masa del disco	1,6	kg
I_{d_y}	Momento de inercia en el eje y	$1,10 \cdot 10^{-3}$	kg · m ²
I_{d_x}	Momento de inercia en el eje x	$9,07 \cdot 10^{-4}$	kg · m ²
r_d	Radio del disco	$3,75 \cdot 10^{-2}$	m
l_d	Espesor del disco	$5,08 \cdot 10^{-2}$	m

Tabla 5.2: Propiedades de los elementos de eje

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
E	Modulo de Young	$2 \cdot 10^{11}$	N/m ²
ρ_e	Densidad por unidad de volumen	7800	kg/m ³
S_e	Área sección	$7,85 \cdot 10^{-5}$	m ²
d_e	Diámetro eje	$1 \cdot 10^{-3}$	m
l_e	Largo elemento de eje	$1,6 \cdot 10^{-1}$	m
I_e	Momento de inercia sección	$4,91 \cdot 10^{-10}$	m ⁴

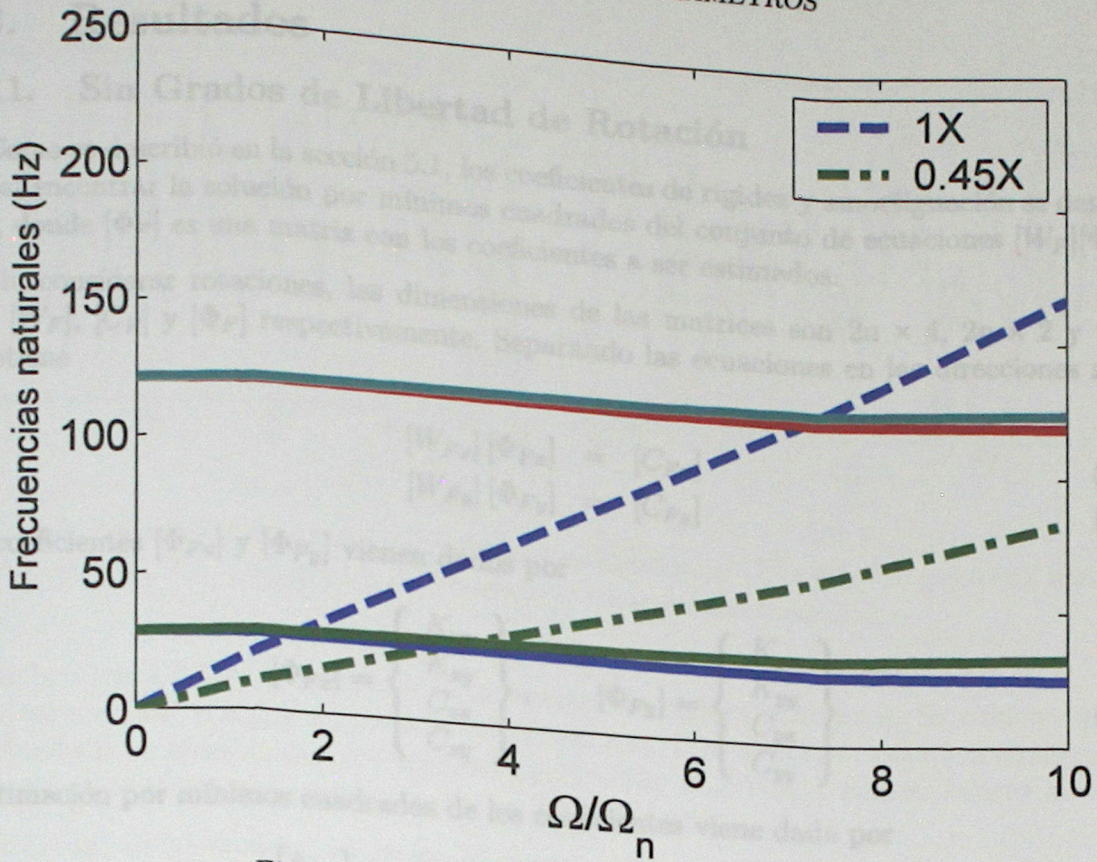


Figura 5.3: Diagrama de Campbell del rotor

Se realizaron mediciones para seis velocidades de rotación distintas entre Ω_n y $3.5\Omega_n$. Para cada velocidad de rotación se realizaron mediciones a distintas frecuencias de excitación. La excitación se realizó en las direcciones x e y independientemente. Los resultados obtenidos en las mediciones experimentales fueron mostrados en el capítulo 4.

En la Figura 5.4 se muestran las curvas de $|C_{rx}|$ y $|W_{rx}||\Phi_{rx}|$ y $|C_{ry}|$ y $|W_{ry}||\Phi_{ry}|$. N es el número de ecuación. Se puede ver como estas curvas se ajustan bien con los coeficientes estimados. Esto demuestra que el método utilizado minimiza efectivamente la diferencia entre $|C_{rx}|$ y $|W_{rx}||\Phi_{rx}|$.

5.3. Resultados

5.3.1. Sin Grados de Libertad de Rotación

Como se describió en la sección 5.1, los coeficientes de rigidez y amortiguación se determinan al encontrar la solución por mínimos cuadrados del conjunto de ecuaciones $[W_F][\Phi_F] = [C_F]$, donde $[\Phi_F]$ es una matriz con los coeficientes a ser estimados.

Sin considerar rotaciones, las dimensiones de las matrices son $2n \times 4$, $2n \times 2$ y 2×2 para $[W_F]$, $[C_F]$ y $[\Phi_F]$ respectivamente. Separando las ecuaciones en las direcciones x e y , se obtiene

$$[W_{Fx}][\Phi_{Fx}] = [C_{Fx}] \quad (5.51)$$

$$[W_{Fy}][\Phi_{Fy}] = [C_{Fy}] \quad (5.52)$$

Los coeficientes $[\Phi_{Fx}]$ y $[\Phi_{Fy}]$ vienen dados por

$$[\Phi_{Fx}] = \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{xy} \\ C_{xx} \\ C_{xy} \end{Bmatrix}, \quad [\Phi_{Fy}] = \begin{Bmatrix} K_{yx} \\ K_{yy} \\ C_{yx} \\ C_{yy} \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

la estimación por mínimos cuadrados de los coeficientes viene dada por

$$[\hat{\Phi}_{Fx}] = ([W_{Fx}]^T [W_{Fx}])^{-1} [W_{Fx}]^T [C_{Fx}] \quad (5.54)$$

$$[\hat{\Phi}_{Fy}] = ([W_{Fy}]^T [W_{Fy}])^{-1} [W_{Fy}]^T [C_{Fy}] \quad (5.55)$$

Se realizaron mediciones para seis velocidades de rotación distintas entre Ω_n y $3,5\Omega_n$. Para cada velocidad de rotación se realizaron mediciones a distintas frecuencias de excitación. La excitación se realizó en las direcciones x e y independientemente. Los resultados obtenidos en las mediciones experimentales fueron mostrados en el capítulo 4.

En la Figura 5.4 se muestran las curvas de $[C_{Fx}]$ y $[W_{Fx}][\hat{\Phi}_{Fx}]$ y $[C_{Fy}]$ y $[W_{Fy}][\hat{\Phi}_{Fy}]$. N es el número de ecuación. Se puede ver como estas curvas se ajustan bien con los coeficientes estimados. Esto demuestra que el método utilizado minimiza efectivamente la diferencia entre $[C_F]$ y $[W_F][\Phi_F]$.

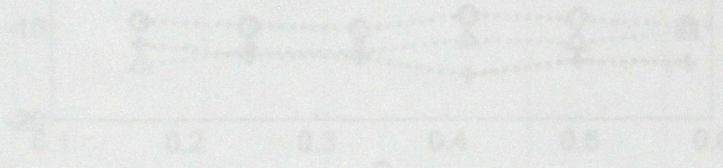


Figura 5.4. Coeficientes de rigidez y amortiguación experimentalmente, con grados de libertad de rotación restringidos. En función del número de ecuaciones (5)

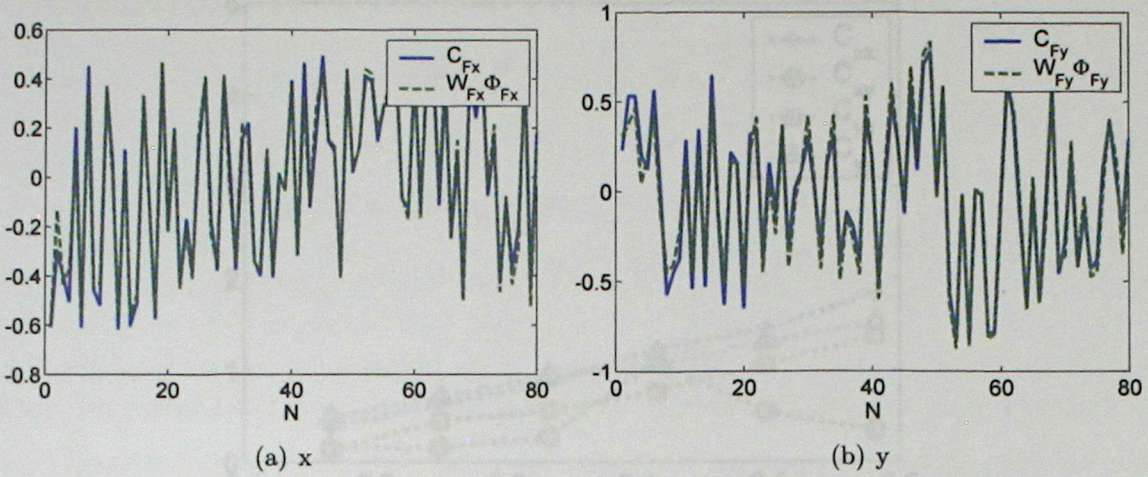


Figura 5.4: Resultados del ajuste por mínimos cuadrados de C_F y $W_F \Phi_F$, para una velocidad de rotación igual Ω_n . Con grados de libertad de rotación condensados.

En la Figura 5.5 se muestran los coeficientes de rigidez obtenidos. Se obtiene que los coeficientes cruzados K_{xy} y K_{yx} toman valores en magnitud similares, pero con signos opuestos. También se observa que los coeficientes directos K_{xx} y K_{yy} tienen valores similares, manteniéndose prácticamente constantes en función de S.

En el caso de los coeficientes de amortiguación (Figura 5.6), se obtiene que los coeficientes directos predominan. Se observa una tendencia en los cuatro coeficientes a aumentar en función del número de Sommerfeld S.

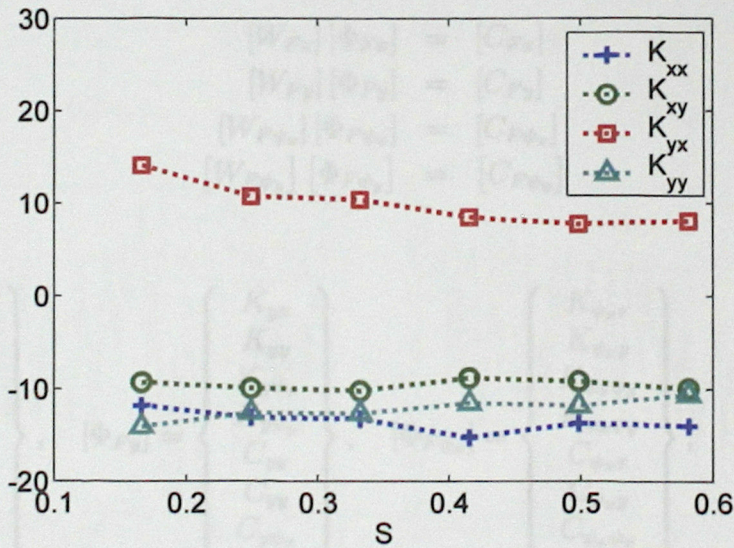


Figura 5.5: Coeficientes de rigidez obtenidos experimentalmente, con grados de libertad de rotación condensados. En función del número de Sommerfeld (S)

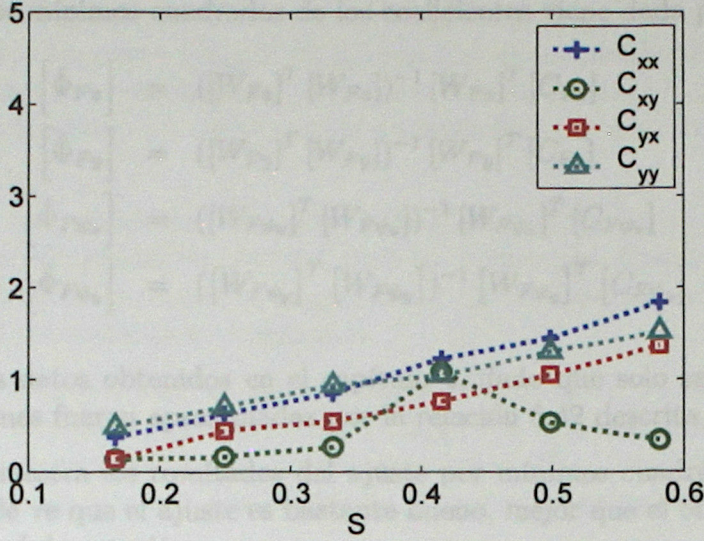


Figura 5.6: Coeficientes de amortiguación obtenidos experimentalmente, con grados de libertad de rotación condensados. En función del número de Sommerfeld (S)

5.3.2. Con Grados de Libertad de Rotación

Considerando los grados de libertad de rotación las matrices $[W_F]$, $[C_F]$ y $[\Phi_F]$ tienen dimensiones $2n \times 8$, $2n \times 4$ y 8×4 respectivamente. La ecuación $[W_F][\Phi_F] = [C_F]$, se puede separar en cuatro ecuaciones

$$[W_{Fx}][\Phi_{Fx}] = [C_{Fx}] \quad (5.56)$$

$$[W_{Fy}][\Phi_{Fy}] = [C_{Fy}] \quad (5.57)$$

$$[W_{F\psi_x}][\Phi_{F\psi_x}] = [C_{F\psi_x}] \quad (5.58)$$

$$[W_{F\psi_y}][\Phi_{F\psi_y}] = [C_{F\psi_y}] \quad (5.59)$$

donde

$$[\Phi_{Fx}] = \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{xy} \\ K_{x\psi_x} \\ K_{x\psi_y} \\ C_{xx} \\ C_{xy} \\ C_{x\psi_x} \\ C_{x\psi_y} \end{Bmatrix}, \quad [\Phi_{Fy}] = \begin{Bmatrix} K_{yx} \\ K_{yy} \\ K_{y\psi_x} \\ K_{y\psi_y} \\ C_{yx} \\ C_{yy} \\ C_{y\psi_x} \\ C_{y\psi_y} \end{Bmatrix}, \quad [\Phi_{F\psi_x}] = \begin{Bmatrix} K_{\psi_x x} \\ K_{\psi_x y} \\ K_{\psi_x \psi_x} \\ K_{\psi_x \psi_y} \\ C_{\psi_x x} \\ C_{\psi_x y} \\ C_{\psi_x \psi_x} \\ C_{\psi_x \psi_y} \end{Bmatrix}, \quad [\Phi_{F\psi_y}] = \begin{Bmatrix} K_{\psi_y x} \\ K_{\psi_y y} \\ K_{\psi_y \psi_x} \\ K_{\psi_y \psi_y} \\ C_{\psi_y x} \\ C_{\psi_y y} \\ C_{\psi_y \psi_x} \\ C_{\psi_y \psi_y} \end{Bmatrix} \quad (5.60)$$

la estimación por mínimos cuadrados de los coeficientes viene dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{F_x} \end{bmatrix} = ([W_{F_x}]^T [W_{F_x}])^{-1} [W_{F_x}]^T [C_{F_x}] \quad (5.61)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{F_y} \end{bmatrix} = ([W_{F_y}]^T [W_{F_y}])^{-1} [W_{F_y}]^T [C_{F_y}] \quad (5.62)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{F\psi_x} \end{bmatrix} = ([W_{F\psi_x}]^T [W_{F\psi_x}])^{-1} [W_{F\psi_x}]^T [C_{F\psi_x}] \quad (5.63)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{F\psi_y} \end{bmatrix} = ([W_{F\psi_y}]^T [W_{F\psi_y}])^{-1} [W_{F\psi_y}]^T [C_{F\psi_y}] \quad (5.64)$$

Se utilizaron los datos obtenidos en el capítulo 4, dado que solo se midieron desplazamientos, las rotaciones fueron aproximadas por la relación 5.42 descrita en la sección 5.2.6.

La Figura 5.7 muestra los resultados del ajuste por mínimos cuadrados para las cuatro columnas de $[C_F]$. Se ve que el ajuste es bastante bueno, mejor que el obtenido al despreciar los grados de libertad de rotación.

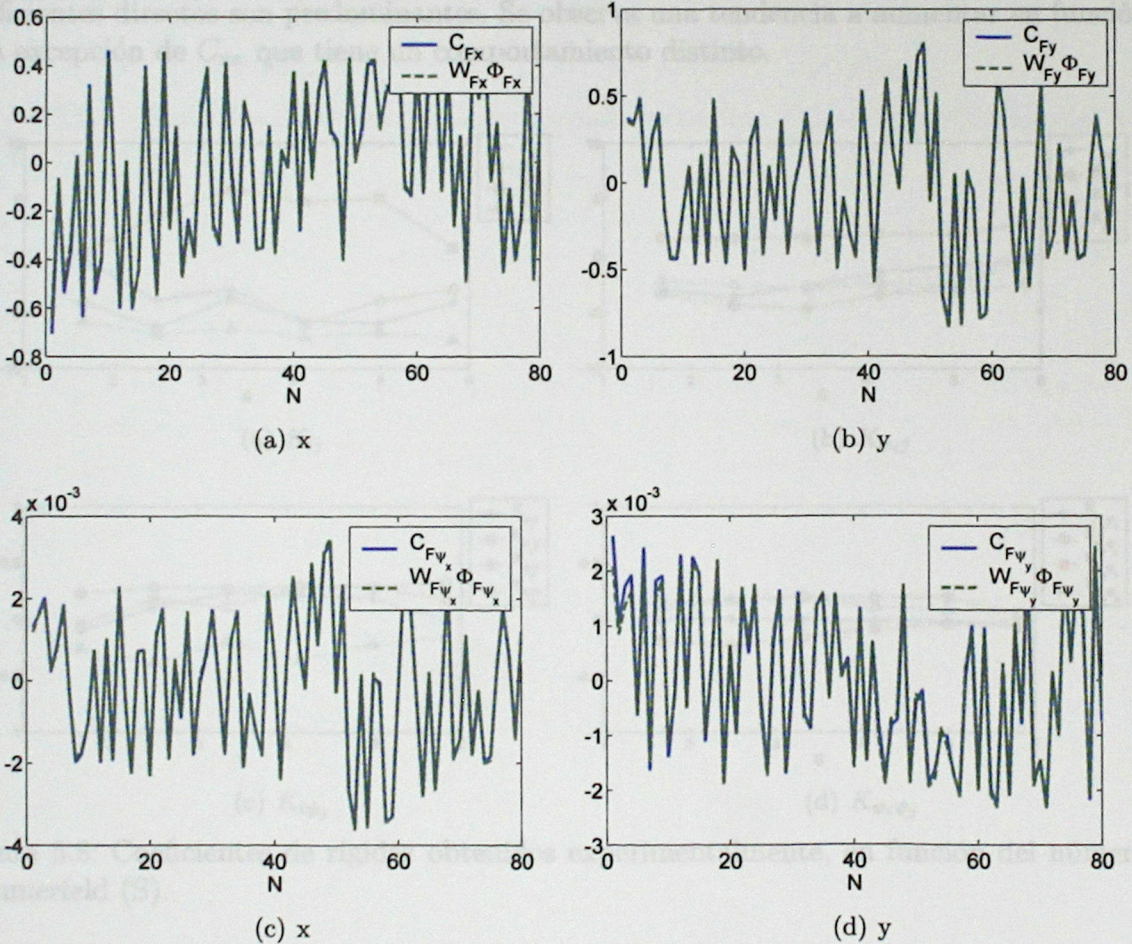


Figura 5.7: Resultados del ajuste por mínimos cuadrados de C_F y $W_F \Phi_F$, para una velocidad de rotación igual Ω_n .

En la Figura 5.8 se muestran los coeficientes de rigidez obtenidos. Se ve que los coeficientes asociados a momentos angulares ($K_{i\psi_j}$ y $K_{\psi_i\psi_j}$) son prácticamente despreciables. No es así el caso de los coeficientes que relacionan las rotaciones con las fuerzas ($K_{i\psi_j}$), estos coeficientes toman valores considerables, del mismo orden de magnitud que los coeficientes asociados a desplazamientos (K_{ij}).

Para el caso de los coeficientes asociados a desplazamientos, se ve la misma tendencia encontrada en el caso sin grados de libertad, pero los coeficientes disminuyen casi a la mitad del valor. Esto muestra la importancia de considerar los coeficientes asociados a rotaciones, ya que pueden cambiar bastante los resultados.

En el caso de los coeficientes de amortiguación (Figura 5.9). Se obtiene que los coeficientes asociados a momentos angulares ($C_{i\psi_j}$ y $C_{\psi_i\psi_j}$) son prácticamente despreciables. Los coeficientes que relacionan las fuerzas con las rotaciones ($C_{i\psi_j}$), en cambio, tienen valores considerables, se observa también una tendencia a aumentar en función de S en los cuatro coeficientes.

Para los coeficientes de amortiguación asociados a desplazamientos. Se obtienen que los coeficientes directos son predominantes. Se observa una tendencia a aumentar en función de S, a excepción de C_{xx} que tiene un comportamiento distinto.

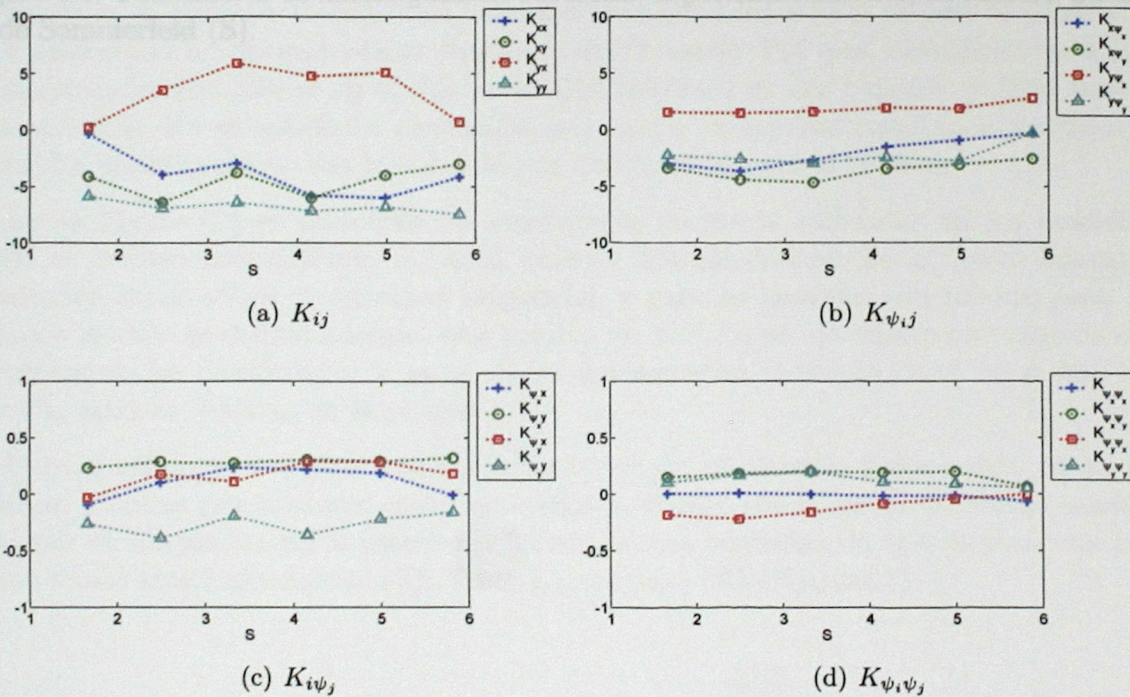


Figura 5.8: Coeficientes de rigidez obtenidos experimentalmente, en función del número de Sommerfeld (S).

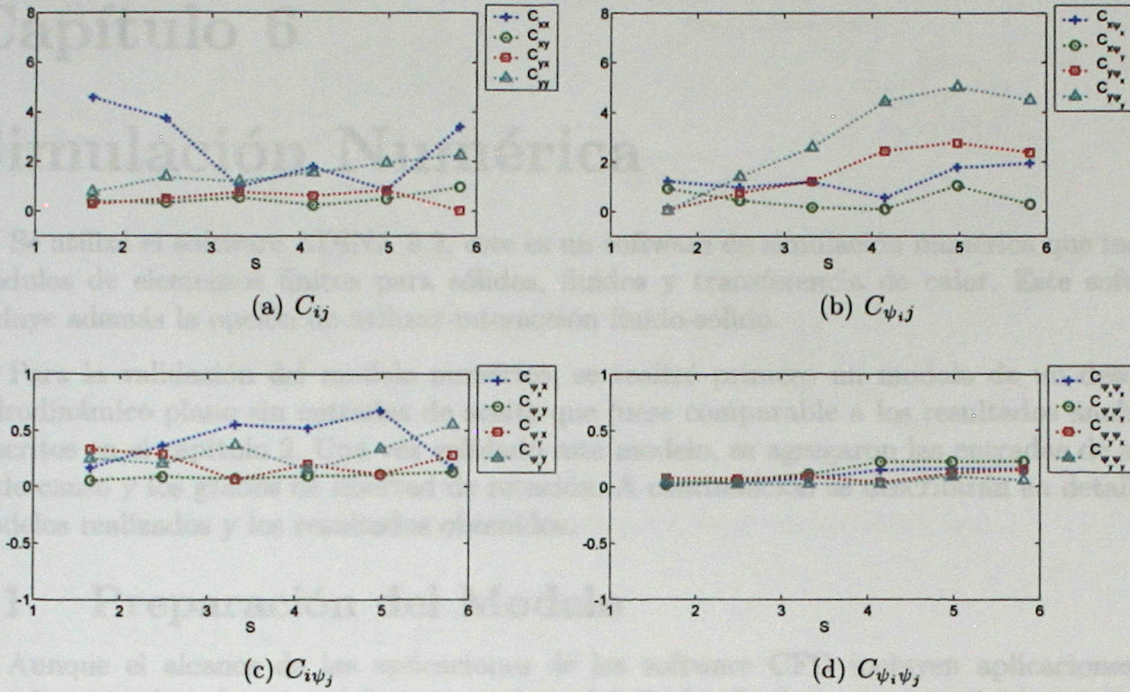


Figura 5.9: Coeficientes de amortiguación obtenidos experimentalmente, en función del número de Sommerfeld (S).

En la Figura 6.1 se muestran los esquemas de borde utilizados en los modelos. El fluido se modeló considerando la pared exterior del eje de deslizamiento, pared interior con interacción fluido-sólido y velocidad tangencial, y paredes laterales con presión cero. En el segundo modelo se definió además una presión de referencia P_0 en las cuatro entradas de aceite. Se utilizaron las dimensiones y propiedades del sistema instalado en el rotor Kit Bentley Nevada, estas se detallan en la sección 6.2.

Para el sólido se utilizó la condición de borde de interacción fluido-sólido en su pared exterior, y fuerza gravitacional como una carga de cuerpo (body force). Se utilizó también la hipótesis de desplazamientos grandes y desplazamientos pequeños, lo que implica una formulación totalmente Lagrangiana (T.L. Ver: Lagrangian) (ANSYS, 2003).

Capítulo 6

Simulación Numérica

Se utilizó el software ADINA 8.2, este es un software de simulación numérica que incluye módulos de elementos finitos para sólidos, fluidos y transferencia de calor. Este software incluye además la opción de utilizar interacción fluido-sólido.

Para la validación del modelo numérico, se realizó primero un modelo de un descanso hidrodinámico plano sin entradas de aceite que fuese comparable a los resultados analíticos descritos en el capítulo 2. Una vez validado este modelo, se agregaron las entradas de aceite al descanso y los grados de libertad de rotación. A continuación se describirán en detalle los modelos realizados y los resultados obtenidos.

6.1. Preparación del Modelo

Aunque el alcance de las aplicaciones de los software CFD incluyen aplicaciones con transferencia de calor, propiedades variables del fluido, fluidos no newtonianos y modelos turbulentos, el presente trabajo está restringido prioritariamente a utilizar el modelo CFD para determinar las características dinámicas del descanso. Por esto, se utilizan las hipótesis de propiedades constantes en el fluido, no deslizamiento en las paredes, y flujo laminar e incompresible. No se considera cavitación, por lo que se esperan resultados similares a los obtenidos analíticamente con la condición de Sommerfeld para la presión.

En la Figura 6.1 se muestran las condiciones de borde utilizadas en los modelos. El fluido se modeló considerando la pared exterior fija sin deslizamiento, pared interior con interacción fluido-sólido y velocidad tangencial, y paredes laterales con presión cero. En el segundo modelo se definió además, una presión de $100kPa$ en las cuatro entradas de aceite. Se utilizaron las dimensiones y propiedades del descanso montado en el rotor Kit bently Nevada, estas se detallan en la sección 3.2.

Para el sólido se utilizó la condición de borde de interacción fluido-sólido en su pared exterior, y fuerza gravitacional como una carga de cuerpo (body force). Se utilizó también la hipótesis de desplazamientos grandes y deformaciones pequeñas, lo que implica una formulación totalmente Lagrangiana (TL Total Lagrangian) (ADINA, 2003).

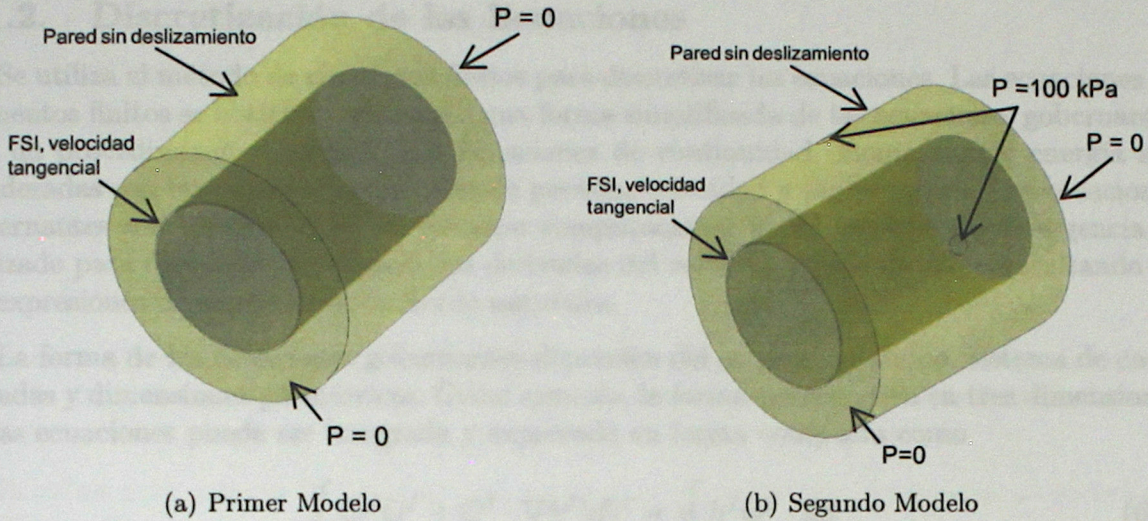


Figura 6.1: Condiciones de borde para los modelos numéricos

6.1.1. Ecuaciones Gobernantes

Las ecuaciones gobernantes en el fluido son las ecuaciones de Navier-Stokes con la condición de flujo laminar e incompresible. La compresibilidad de un fluido, se mide como el cambio de volumen del fluido o equivalentemente. El cambio de densidad bajo una variación de presión externa, puede ser representado por el modulo de bulk de elasticidad k

$$k = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad (6.1)$$

En general, los fluidos incompresibles están caracterizados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \rho &= \text{constante} \\ e &= C_v \theta \end{aligned} \quad (6.2)$$

Aplicando estas condiciones a las ecuaciones de Navier-Stokes, las ecuaciones para flujo incompresible y transferencia de calor son las siguientes

$$\rho \nabla \cdot v = 0 \quad (6.3)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} + \rho v \cdot \nabla v - \nabla \cdot \tau = f^B \quad (6.4)$$

$$\rho C_v \frac{d\theta}{dt} + \rho C_v v \cdot \nabla \theta + \nabla \cdot q = 2\mu D^2 + q^B \quad (6.5)$$

donde el vector de esfuerzos se puede simplificar a

$$\tau = -pI + 2\mu e$$

6.1.2. Discretización de las Ecuaciones

Se utiliza el método de elementos finitos para discretizar las ecuaciones. Las ecuaciones de elementos finitos se obtienen utilizando una forma simplificada de las ecuaciones gobernantes con un procedimiento Galerkin. Las ecuaciones de continuidad, momentum y energía son ponderadas con las cantidades virtuales de presión, velocidad y temperatura. Las ecuaciones gobernantes son integradas en un dominio computacional V . El teorema de divergencia es utilizado para disminuir el orden de las derivadas del esfuerzo y flujo de calor, resultando en las expresiones de condiciones de borde naturales.

La forma de las ecuaciones gobernantes dependen del modelo del fluido, sistema de coordenadas y dimensiones geométricas. Como ejemplo, la forma conservativa en tres dimensiones de las ecuaciones puede ser integrada y expresada en forma compacta como

$$\int_V (h^f G^f + Q^f \cdot \nabla h^f) dV = \oint h^f Q^f \cdot dS \quad (6.6)$$

donde f representa p , v y θ para las ecuaciones de continuidad, momentum y energía, respectivamente; h^p , h^v y h^θ son cantidades virtuales de presión, velocidad y temperatura, y

$$\begin{aligned} G^p &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) \\ G^v &= \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v v) - f^B \\ G^B &= \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v E - \tau \cdot v) - f^B \cdot v - q^B \\ Q^p &= 0 \\ Q^v &= \tau \\ Q^\theta &= -q \end{aligned}$$

En particular, si h^f son funciones de paso (step), el método Galerkin se vuelve el método de volúmenes finitos (de acuerdo a definición convencional). Para estos elementos, se deben utilizar un set de funciones "Flow-Condition-Based-Interpolation" (FCBI) (Interpolación basada en las condiciones del fluido).

6.1.3. Solver

El problema de solucionar un sistema lineal de ecuaciones de la forma $Ax = B$ es la parte central de los cálculos en ADINA. La mayor parte de los datos almacenados por el programa es ocupada por el sistema de ecuaciones (matriz), y la mayor parte de los tiempos de la CPU usados por el programa se dedican a la solución de las ecuaciones algebraicas. Varios solvers están disponibles para solucionar las ecuaciones lineales.

ADINA posee 2 tipos de solver, los de solución directa y los métodos iterativos. Existen implementados 2 solver de solución directa y 3 métodos iterativos:

- Métodos de solución directa

- Método de eliminación de Gauss
- Sparse solver
- Métodos iterativos
 - Right preconditioned biconjugate gradient method (RPBCG)
 - Right preconditioned generalized minimal residual method (RPGMRES)
 - Algebraic multi-grid method

El método de eliminación de Gauss es probablemente la técnica directa más conocida de solución, aunque este método por lo general no se utiliza, dado que el Sparse Solver es mucho más eficaz.

El solver seleccionado fue el solver Sparse, este es un solver directo basado en el método de eliminación de gauss. Se diferencia de los solvers directos tradicionales en preservar la dispersión de los elementos de la matriz, reduciendo así drásticamente la memoria utilizada y el tiempo de computadora requeridos por los solvers directos tradicionales.

6.1.4. Procedimiento de Solución

El procedimiento general de solución para fluidos incompresibles es el siguiente.

Se comienza con una solución inicial X , la que es una solución en el tiempo t . En el primer paso de tiempo, se utilizan las condiciones iniciales. Las condiciones iniciales por defecto son valores iniciales cero para todas las variables. El vector de solución contienen los valores de v , p , y θ definidas en todos los nodos.

El siguientes procedimiento de iterativo de equilibrio es llevado a cabo para obtener la solución en $t + \Delta t$.

1. Se forma el sistema de ecuaciones linealizadas, utilizando el vector solución actual, elementos seleccionados, materiales especificados y todas las condiciones de borde asociadas.
2. Se resuelven las ecuaciones linealizadas utilizando el solver seleccionado (ver sección 6.1.3), y se actualiza el vector solución: $X + \Delta X \rightarrow X$.
3. Se calculan los residuos de la velocidad, presión y temperatura y se chequea si son menores que la tolerancia predeterminada

$$\max_f \left\{ \frac{\|\Delta X_f\|}{\|X_f\|} \right\} \leq \varepsilon_e \quad f = v, p, \theta \quad (6.7)$$

donde X_f consiste en los elementos en X que corresponden a la variable f . Si los residuos no son menores que la tolerancia, el programa vuelve a paso 1 para continuar la siguiente iteración hasta que se alcanza un máximo número de iteraciones.

Para el problema se utilizó el método iterativo de Newton, con una tolerancia de 0.01 para los grados de libertad.

6.1.5. Selección del Tipo de Malla

La tabla 6.1 resume los tipos de elementos que se pueden utilizar en flujos incompresibles. Dada la geometría simple del problema se utilizó un mallado “rule-based”, en este caso, la malla se realiza en forma ordenada siguiendo la geometría del problema. Se utilizaron elementos 3D de 4 nodos por elemento, por ser lo más generales (para bajo y alto número de Reynolds).

Tabla 6.1: Elementos usados en flujos incompresibles

Elementos		Aplica a
Elementos 2D Galerkin	3-nodos	Flujo 2D y axisimétrico de bajo y alto número de Reynolds/Peclet
	9 y 6 nodos	Flujo 2D y axisimétrico de bajo número de Reynolds/Peclet
Elementos 3D Galerkin	4 nodos	Flujo 3D y axisimétrico de bajo y alto número de Reynolds/Peclet
	27 nodos	Flujo 3D y axisimétrico de bajo número de Reynolds/Peclet
Elementos 2D FCBI	4 y 3 nodos	Flujo 2D y axisimétrico de bajo y alto número de Reynolds/Peclet
Elementos 3D FCBI	4, 5, 6 y 8 nodos	Flujo 3D y axisimétrico de bajo número de Reynolds/Peclet

6.1.6. Selección del Tamaño de Malla

Una consideración importante, es utilizar un tamaño de malla y una razón de aspecto (relación entre la mayor y menor distancia entre nodos) apropiadas. La practica usual es utilizar razones de aspecto no mayores a 2. Si se siguiese esta regla, la cantidad de elementos en el mallado sería excesiva ¹, impidiendo llevar a cabo la simulación numérica por limitantes de memoria computacional. Chen & Hahn (1998) demostraron que para problemas de lubricación hidrodinámica como el presente, es válido utilizar razones de aspecto de la malla mayores, debido a que no hay mayores cambios del flujo en las direcciones circunferencial y axial. En la Tabla 6.2 se muestran tamaños de malla utilizados en modelos CFD de descansos hidrodinámicos, realizados por Tucker & Keogh (1996), Keogh *et al.* (1997) y Gomiciaga & Keogh (1999).

Para la selección de un tamaño de malla adecuado, se realizó un análisis de sensibilidad variando el número de divisiones en la dirección circunferencial (θ), axial (z) y radial (r). El caso de prueba se realizó con el sólido rotando en una posición fija ($\kappa_0 = 0,1$), comparando posteriormente la distribución de presión obtenida en cada caso.

En la tabla 6.3, se muestran los resultados obtenidos. Se definió como parámetro, la diferencia porcentual entre la presión máxima obtenida con el número de divisiones actual y

¹Debido a las diferencias de magnitud entre la holgura radial (espesor de aceite) y las dimensiones del descanso ($c/L = c/D = 6,5 \cdot 10^{-3}$)

con el caso con mayor número de divisiones.

Tabla 6.2: Tamaños de malla utilizados en modelos CFD

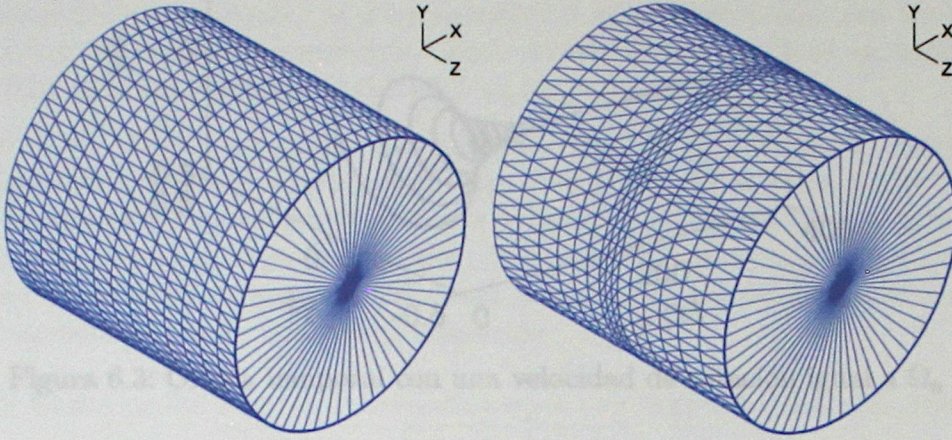
Tucker & Keogh (1996)		
		Nº de divisiones
Largo	0,04234 (<i>m</i>)	9
Perímetro	0,267 (<i>m</i>)	40
Holgura	$2,10 \cdot 10^{-5}$ (<i>m</i>)	5
Razón de aspecto mayor	159	
Razón de aspecto menor	112	
Keogh <i>et al.</i> (1997)		
		Nº de divisiones
Largo	0,055 (<i>m</i>)	9
Perímetro	0,314 (<i>m</i>)	40
Holgura	$7,50 \cdot 10^{-5}$ (<i>m</i>)	5
Razón de aspecto mayor	523	
Razón de aspecto menor	407	
Gomiciaga & Keogh (1999)		
		Nº de divisiones
Largo	0,055 (<i>m</i>)	9
Perímetro	0,314 (<i>m</i>)	40
Holgura	$7,26 \cdot 10^{-5}$ (<i>m</i>)	5
Razón de aspecto mayor	540	
Razón de aspecto menor	420	

Tabla 6.3: Análisis de sensibilidad sobre el número de divisiones (θ, z, r)

$(z, r) = (16, 5)$		$(\theta, r) = (70, 5)$		$(\theta, z) = (70, 13)$	
θ	% ϵ	z	% ϵ	r	% ϵ
40	6.0	8	12.6	3	12.6
50	4.7	9	9.1	4	5.8
60	3.8	10	6.8	5	2.5
70	2.9	11	4.4	6	1.0
80	2.2	12	3.4	7	0.0
90	1.6	13	2.0		
100	1.1	14	1.3		
110	0.6	15	0.4		
120	0.0	16	0.0		

Considerando, que se debe tener un tamaño razonable de elementos (ya que a medida que a medida que se aumenta el número de elementos, aumenta el tiempo de integración), y una precisión adecuada (con errores menores al 5%). Se definió el modelo del fluido con $70 \times 13 \times 5$ divisiones en las direcciones (θ, z, r) respectivamente. Para el caso del segundo modelo se refinó la malla en el sector de la entrada de aceite, obteniendo $78 \times 15 \times 5$ divisiones.

El modelo del sólido fue definido con $70 \times 1 \times 1$ divisiones. En la Figura 6.2 se muestran ambos modelos mallados, en el primero se obtuvo un total de 27440 elementos 3D, y en el segundo un total de 35240 elementos 3D.



(a) Primer Modelo

(b) Segundo Modelo

Figura 6.2: Mallado para los modelos numéricos

6.1.7. Integración Temporal

El problema se definió como un problema transiente y se utilizó un método de integración temporal trapezoidal de segundo orden TR-BDF (Trapezoidal Rule/Backward Differentiation Formula). En el método TR-BDF, la solución al tiempo $t + \Delta t$ es obtenida por dos sub-pasos consecutivos

$$\begin{aligned} u^{t+\gamma\Delta t} &= u^t + \gamma\Delta t f(u^{t+\frac{1}{2}\gamma\Delta t}) \\ u^{t+\Delta t} &= u^{t+\beta\gamma\Delta t} + (1 - \alpha)\Delta t f(u^{t+\Delta t}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde $u^{t+\beta\gamma\Delta t} = (1 - \beta)^t u + \beta^{t+\gamma\Delta t} u$, $\gamma = 2 - 1/\alpha$ y $\beta = \alpha^2/(2\alpha - 1)$. Si se elige $1/2 < \alpha < 1$, el método TR-BDF es de segundo orden e incondicionalmente estable. El valor por defecto es $\alpha = 1/\sqrt{2}$ (llamado método TR-BDF2), el que provee el mínimo error de truncación para sistemas lineales.

La selección del paso de tiempo se realizó con la opción de paso de tiempo automático (ATS Automatic Time Stepping). Con esta opción, en caso de que no haya convergencia en un paso de tiempo, el programa disminuye automáticamente el paso en dos sub-pasos de igual magnitud, e intenta calcular la solución. Este procedimiento continua si todavía no se alcanza una convergencia hasta que se llega a un paso de tiempo apropiado.

El tiempo total de integración fue definido de manera de asegurar una órbita de oscilación permanente. En la Figura 6.3 se muestra que para una velocidad de rotación igual a Ω_n , se llega a una condición permanente en el tiempo adimensional de $\tau = 200$ ($\tau = \Omega t$).

En cada simulación se realizaron 1000 pasos de tiempo, con un paso de tiempo adimensional $\Delta\tau = 0,4$ para el primer modelo y $\Delta\tau = 0,3$ para el segundo.

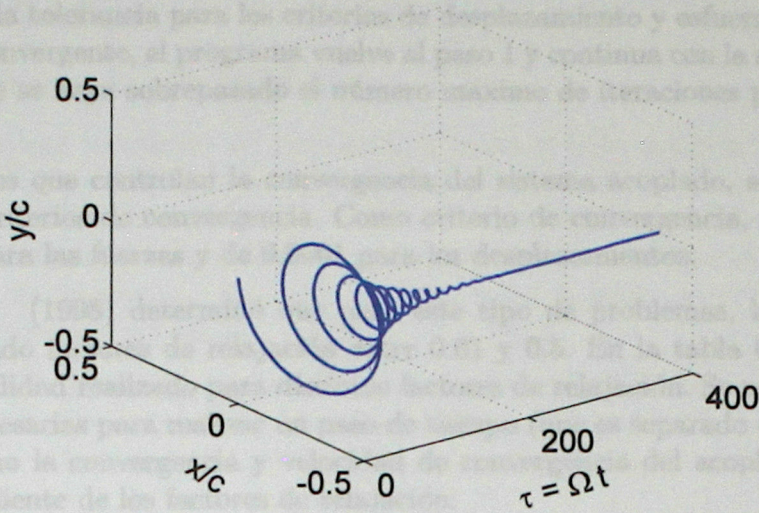


Figura 6.3: Órbita temporal con una velocidad de rotación igual a Ω_n

6.1.8. Interacción Fluido Sólido

Para el acoplamiento entre el modelo del fluido y el sólido se utilizó un método de acoplamiento iterativo. En este método, las ecuaciones del fluido y sólido son resueltas individualmente, utilizando la última información de la otra parte del sistema acoplado. Esta iteración continua hasta la convergencia del sistema acoplado.

El procedimiento computacional se puede resumir de la siguiente manera; Para obtener la solución en el tiempo $t + \Delta t$, se itera entre el modelo del fluido y el sólido. Se comienza con una primera aproximación $\underline{d}_s^{-1} = \underline{d}_s^0 = \underline{d}_s^t$ y $\underline{\tau}_f^0 = \underline{\tau}_f^t$. Para encontrar la solución X^k en las iteraciones $k=1,2,\dots$, se realiza lo siguiente

1. Se determina la solución para el fluido X_f^k de las ecuaciones del fluido

$$F_f[X_f^k, \lambda_d \underline{d}_s^{k-1} + (1 - \lambda_d) \underline{d}_s^{k-2}] = 0$$

Esta solución se obtiene de un análisis en el fluido, utilizando el desplazamiento prescrito del sólido. El desplazamiento del sólido es relajado utilizando un factor de relajación λ_d ($0 < \lambda_d \leq 1$), el que puede ser útil para muchos problemas complicados, ya que el fluido y el sólido no son resueltos en el mismo sistema de matrices. El uso de este factor ayuda a llegar a una convergencia en cada paso de tiempo.

2. Se determina la solución para el sólido X_s^k , de las ecuaciones para el sólido:

$$F_s[X_s^k, \lambda_\tau \underline{\tau}_f^k + (1 - \lambda_\tau) \underline{\tau}_f^{k-1}] = 0$$

Los esfuerzos en el fluido también son relajados utilizando un factor de relajación de esfuerzos λ_τ ($0 < \lambda_\tau \leq 1$).

3. Se calculan los desplazamientos en los nodos del fluido con la condición de borde:

$$\underline{d}_f^k = \lambda_d \underline{d}_s^k + (1 - \lambda_d) \underline{d}_s^{k-1}$$

4. Se chequea la tolerancia para los criterios de desplazamiento y esfuerzos. Si la iteración aún no es convergente, el programa vuelve al paso 1 y continua con la siguiente iteración a menos que se haya sobrepasado el número máximo de iteraciones permitidas.

Los parámetros que controlan la convergencia del sistema acoplado, son los factores de relajación y los criterios de convergencia. Como criterio de convergencia, se utilizaron tolerancias de 0,01 para las fuerzas y de 0,0001 para los desplazamientos.

Lahmar *et al.* (1998) determinó que para este tipo de problemas, la convergencia es acelerada utilizando factores de relajación entre 0.01 y 0.5. En la tabla 6.4 se muestra un análisis de sensibilidad realizado para distintos factores de relajación. Se compara el número de iteraciones necesarias para realizar un paso de tiempo (que es separado en dos sub-pasos). Se puede ver como la convergencia y velocidad de convergencia del acople fluido-sólido, es altamente dependiente de los factores de relajación.

Tabla 6.4: Efecto de los factores de relajación en la convergencia del acople fluido-sólido

factor de relajación	Número de Iteraciones	
	sub-paso 1	sub-paso 2
1	diverge	diverge
0.9	diverge	diverge
0.8	diverge	diverge
0.7	diverge	diverge
0.6	33	25
0.5	46	35
0.4	66	51
0.3	105	81
0.2	195	145

Aunque la velocidad de convergencia fue mayor con factores iguales a 0.6, éstos se encuentran en el límite de convergencia. Por esto, para asegurar la convergencia, se utilizaron factores de relajación iguales a 0.5 para el desplazamiento y los esfuerzos.

Figura 6.4: Deformación de la malla

6.2. Resultados

6.2.1. Deformación de la Malla

Dada la naturaleza transiente del problema, la malla se debe adaptar al movimiento del sólido dentro del fluido. ADINA tiene implementado el procedimiento de malla adaptativa, en la Figura 6.4 se muestra la deformación de la malla del fluido cuando el sólido se encuentra en una posición distinta del centro del descanso. En azul se muestra la malla deformada y el gris se muestra la malla original. Se puede observar como la malla se comprime y expande, adaptándose a la posición del sólido.

Se debe notar que la condición de rotación del sólido fue impuesta como una velocidad tangencial en la interfaz fluido-sólido, y no se ve físicamente. Debido a esto, la malla no se deforma debido a la rotación, sino que solo hay deformación de la malla debido a los desplazamientos.

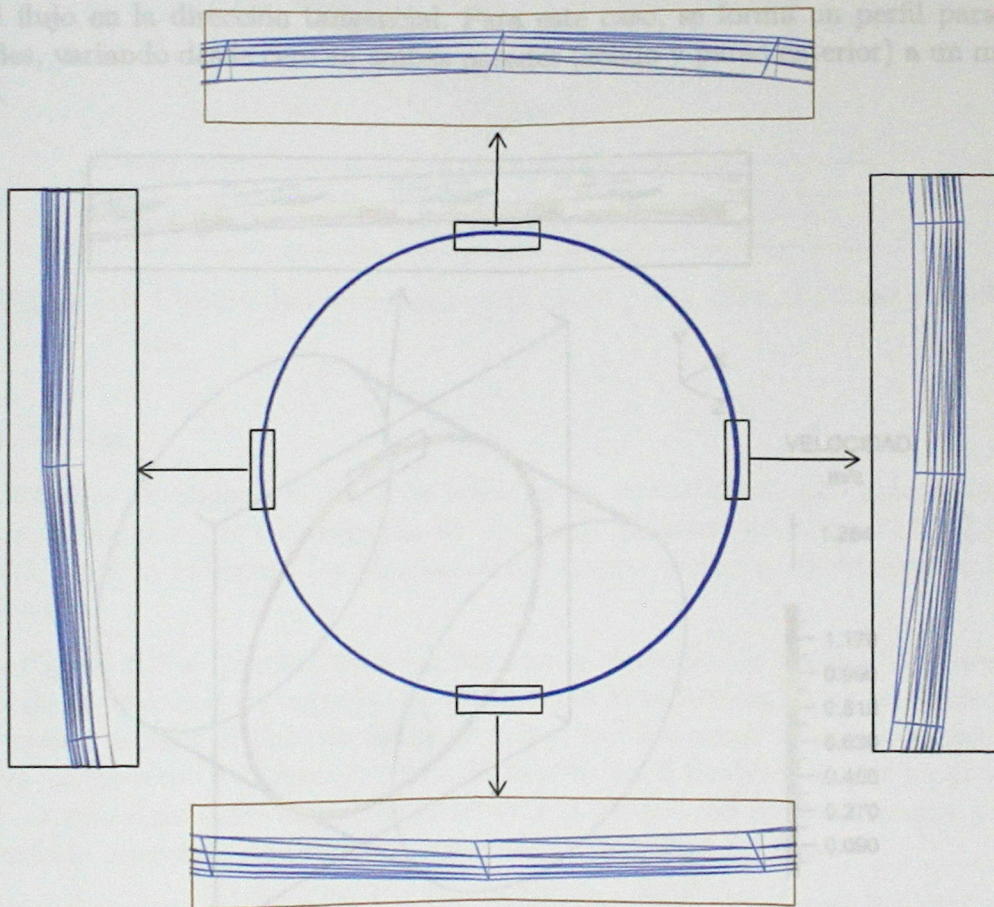


Figura 6.4: Deformación de la malla

6.2.2. Campo de Velocidades

Primer Modelo

Para estudiar el campo de velocidades en el fluido, se realizaron dos cortes en el fluido, el primero en el plano $x - y$ y el segundo en el plano $y - z$. En las Figuras 6.5 y 6.6 se muestran los resultados del campo vectorial de velocidades en los planos de corte.

En la Figura 6.5 se observa como la velocidad varía en forma lineal, tomando un valor igual a la velocidad tangencial en la superficie de contacto con el sólido, y cero en la pared exterior. También se observa que la magnitud de la velocidad no es homogénea en el perímetro del fluido, esto se debe a que, debido a la excentricidad del sólido el espesor del fluido no es homogéneo y, por lo tanto, en las zonas de menor espesor la magnitud de la velocidad es mayor que en las zonas de mayor espesor.

Aunque no hay condiciones para la velocidad en la dirección axial (z), de la Figura 6.6 se observa un flujo en esa dirección. La magnitud del flujo en la dirección axial es bastante menor al flujo en la dirección tangencial. Para este caso, se forma un perfil parabólico de velocidades, variando desde cero en ambas paredes (sólido y pared exterior) a un máximo en el centro.

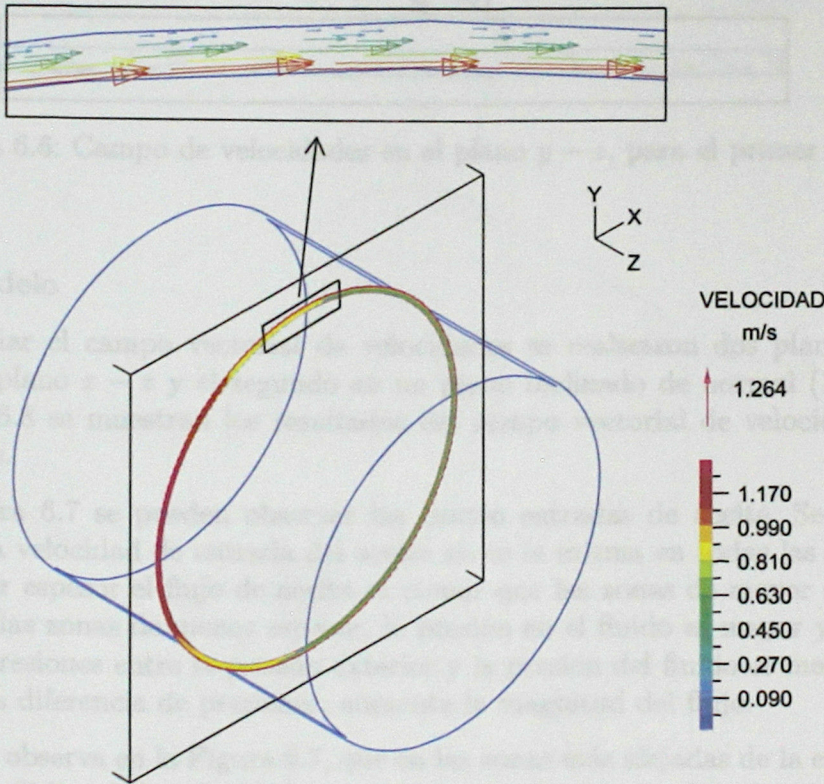


Figura 6.5: Campo de velocidades en el plano $x - y$, para el primer modelo

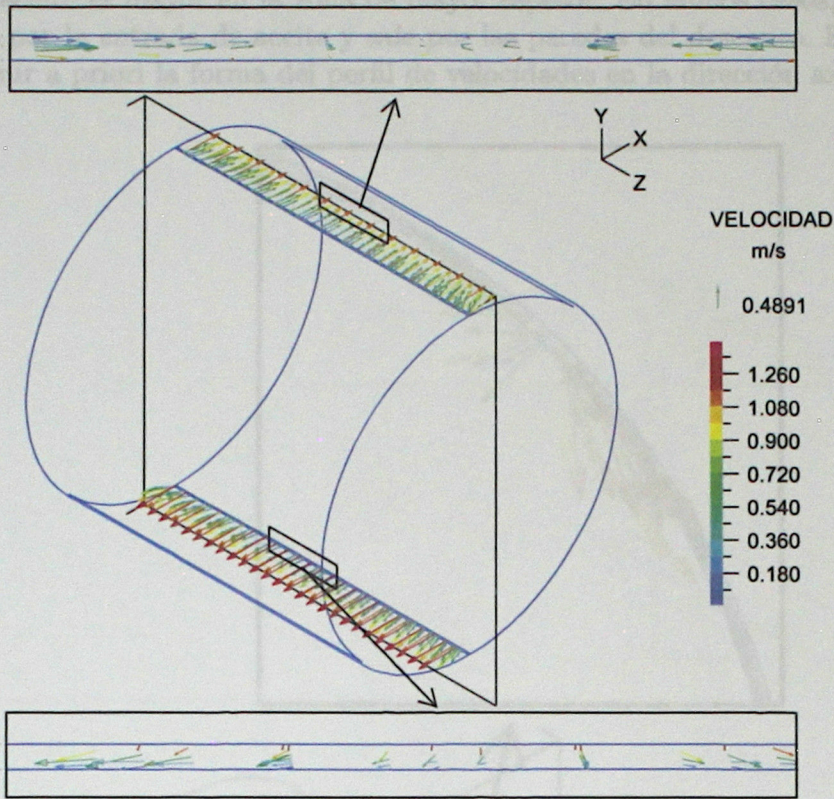


Figura 6.6: Campo de velocidades en el plano $y - z$, para el primer modelo

Segundo Modelo

Para estudiar el campo vectorial de velocidades se realizaron dos planos de corte. El primero en el plano $x - z$ y el segundo en un plano inclinado de normal $(1, -1, 0)$. En las Figuras 6.7 y 6.8 se muestran los resultados del campo vectorial de velocidades en ambos planos de corte.

En la Figura 6.7 se pueden observar las cuatro entradas de aceite. Se observa que la magnitud de la velocidad de entrada del aceite no es la misma en todas las entradas, en las zonas de menor espesor el flujo de aceite es menor que las zonas de mayor espesor. Esto se debe a que en las zonas de menor espesor, la presión en el fluido es mayor y por lo tanto la diferencia de presiones entre la presión exterior y la presión del fluido es menor, y a medida que aumenta la diferencia de presiones, aumenta la magnitud del flujo.

También se observa en la Figura 6.7, que en las zonas más alejadas de la entrada de aceite se forma un perfil lineal de velocidades, tomando un valor igual a la velocidad tangencial en la superficie de contacto con el sólido, y cero en la pared exterior.

En la Figura 6.8, se puede observar el flujo axial. Se realizó un corte en un plano inclinado para intersectar a las entradas de aceite. Se observa nuevamente que la magnitud del flujo en

la entrada de aceite es mayor en la zona de mayor espesor. En ambos casos, se observa que el fluido entra por la entrada de aceite y sale por las paredes del descanso. En este caso, no es posible definir a priori la forma del perfil de velocidades en la dirección axial.

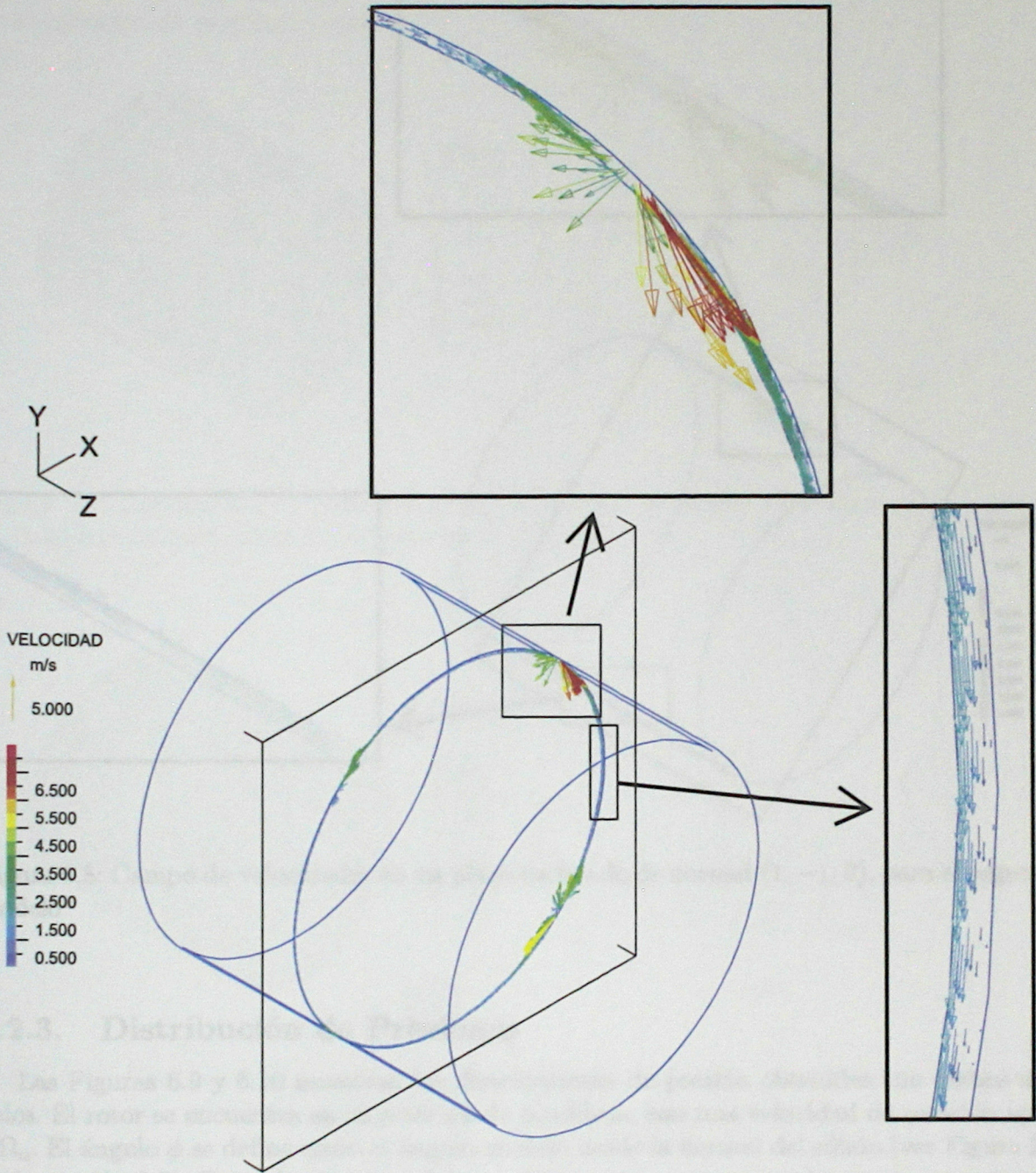


Figura 6.7: Campo de velocidades en el plano $x - y$, para el segundo modelo

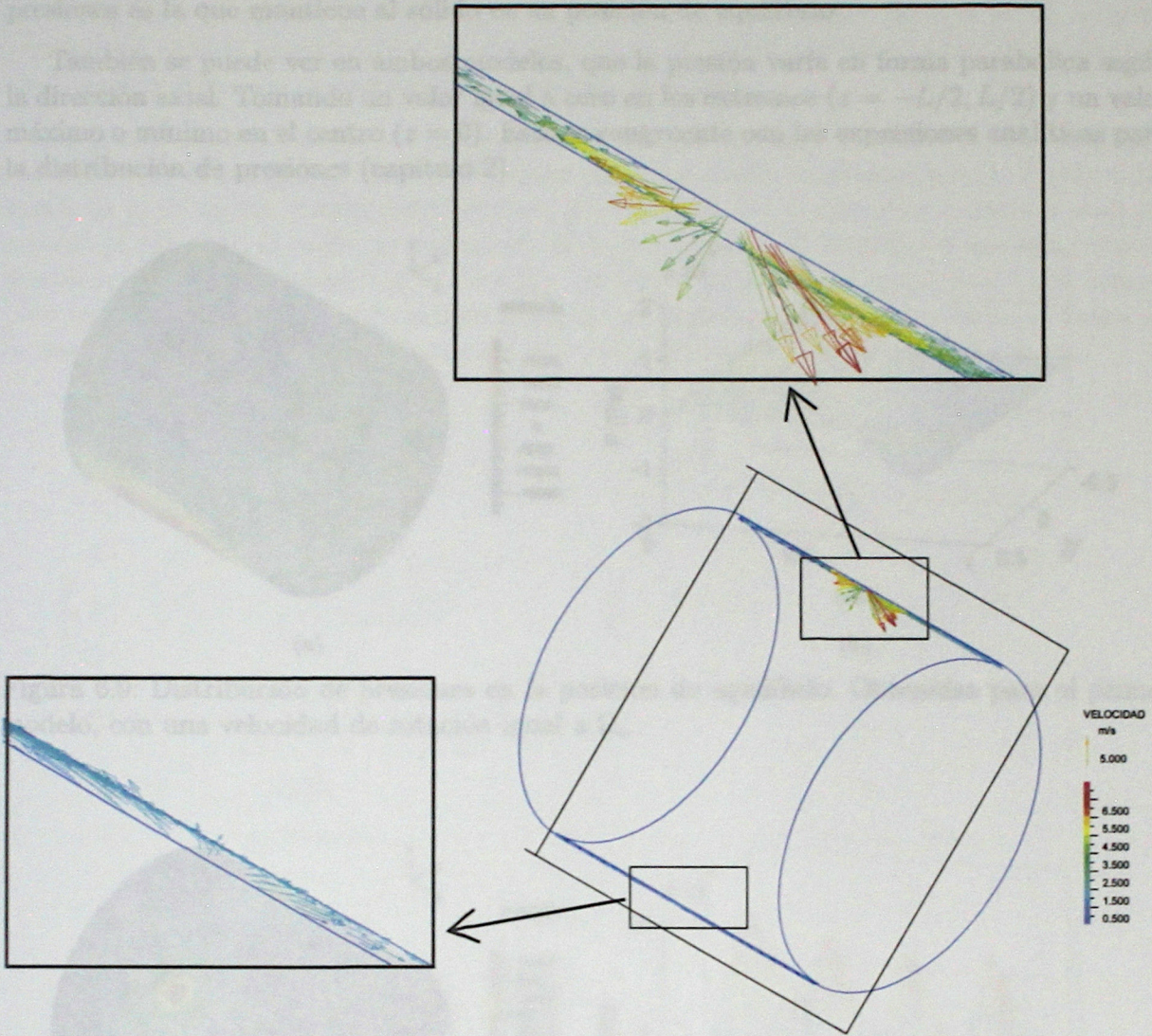


Figura 6.8: Campo de velocidades en un plano inclinado de normal $(1, -1, 0)$, para el segundo modelo

6.2.3. Distribución de Presiones

Las Figuras 6.9 y 6.10 muestran las distribuciones de presión obtenidas con ambos modelos. El rotor se encuentra en su posición de equilibrio, con una velocidad de rotación igual a Ω_n . El ángulo ϕ se define como el ángulo medido desde la normal del sólido (ver Figura 2.4 de la sección 2.2). Para el primer modelo se obtuvo, como era esperado, presiones positivas para ϕ entre 0 y π y negativas para ϕ entre π y 2π . Cuando se agregan las entradas de aceite a presión (segundo modelo), no se generan presiones negativas, evitando así el tener que modelar el fenómeno de cavitación que es inherentemente inestable. Aún así se mantiene en ambos modelos, la relación de presiones mayores con ϕ entre 0 y π . Esta diferencia de

presiones es la que mantiene al sólido en su posición de equilibrio.

También se puede ver en ambos modelos, que la presión varía en forma parabólica según la dirección axial. Tomando un valor igual a cero en los extremos ($z = -L/2, L/2$) y un valor máximo o mínimo en el centro ($z = 0$). Esto es congruente con las expresiones analíticas para la distribución de presiones (capítulo 2).

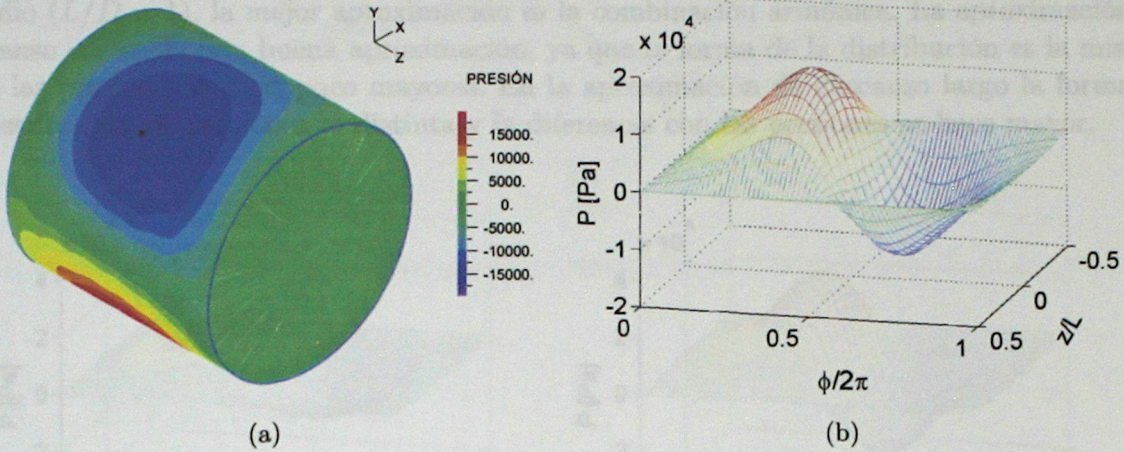


Figura 6.9: Distribución de presiones en la posición de equilibrio. Obtenidas para el primer modelo, con una velocidad de rotación igual a Ω_n

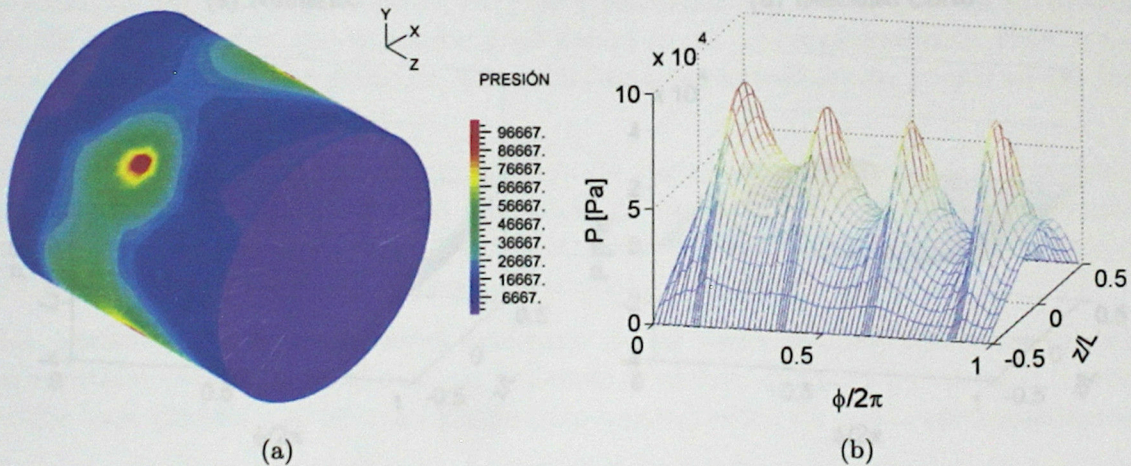


Figura 6.10: Distribución de presiones en la posición de equilibrio. Obtenidas para el segundo modelo, con una velocidad de rotación igual a Ω_n

6.2.4. Comparación con Resultados Analíticos

En la Figura 6.11(a) se muestra la distribución de presiones obtenida con el modelo numérico, en su posición de equilibrio $\kappa_0 = 0,37$. Se determinó además, la distribución de

presiones para la misma posición $\kappa_0 = 0,37$ asumiendo equilibrio ($\dot{\kappa} = \dot{\theta} = 0$), con las expresiones para la aproximación de descanso corto (6.11(b)), descanso largo (6.11(c)), y la combinación armónica de ambas aproximaciones (6.11(d)).

Se puede observar como los resultados numéricos, son muy similares a los resultados obtenidos con la combinación armónica. Esta similitud queda en evidencia en la Figura 6.12, donde se grafican las cuatro distribuciones promediadas en la dirección z . Para el caso en estudio ($L/D = 1$), la mejor aproximación es la combinación armónica. La aproximación de descanso corto, da una buena aproximación, ya que la forma de la distribución es la misma, pero las presiones son un poco mayores. En la aproximación de descanso largo la forma de la distribución de presiones es distinta y la diferencia con las presiones se hace mayor.

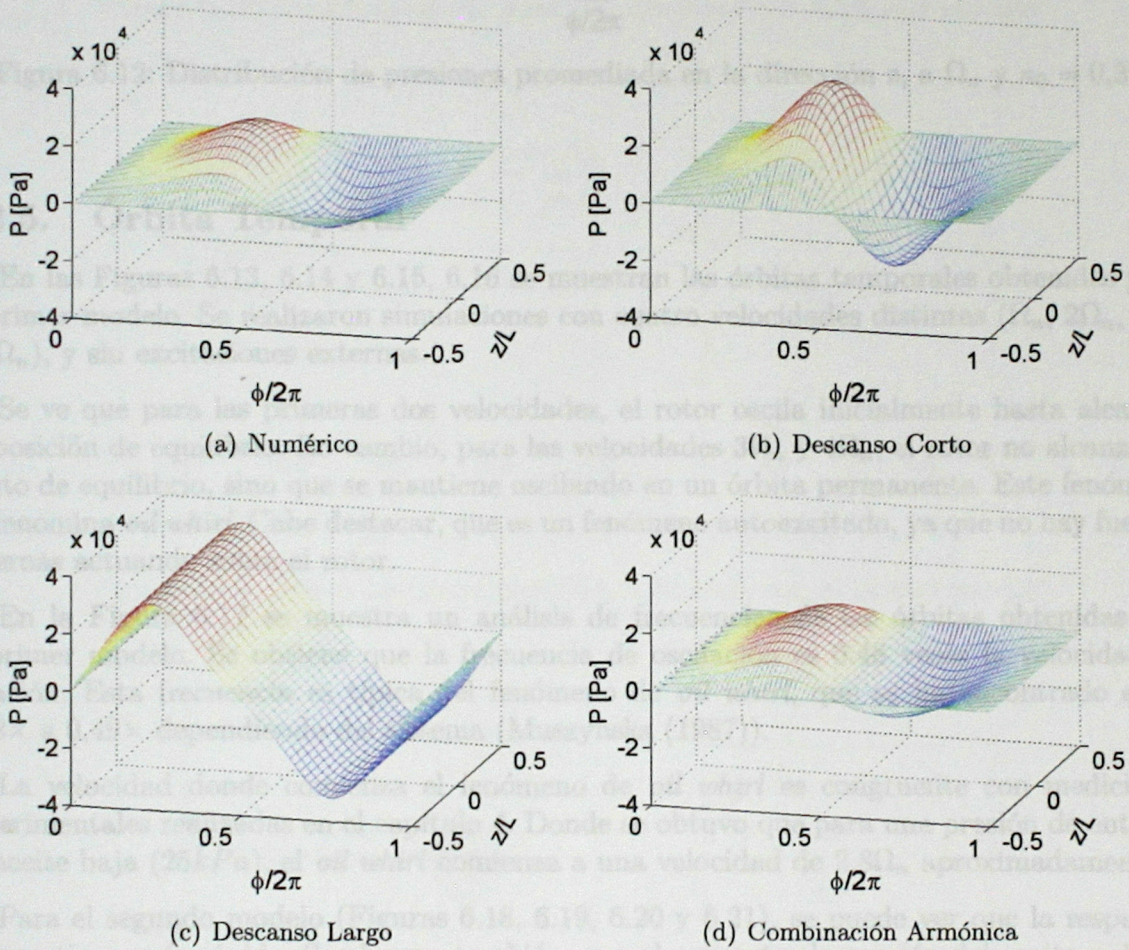


Figura 6.11: Distribución de presiones con distintos modelos a Ω_n y $\kappa_0 = 0,37$

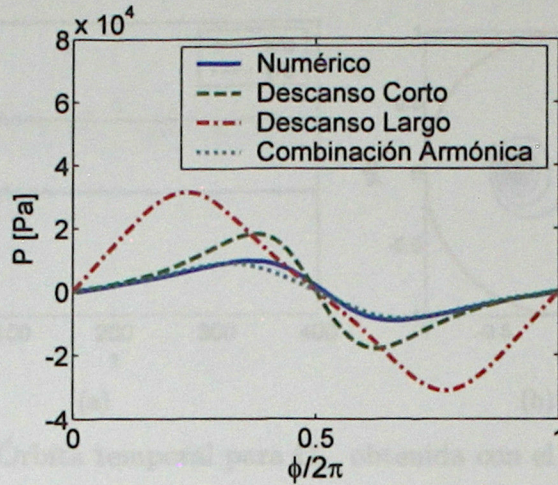


Figura 6.12: Distribución de presiones promediada en la dirección z , a Ω_n y $\kappa_0 = 0,37$

6.2.5. Órbita Temporal

En las Figuras 6.13, 6.14 y 6.15, 6.16 se muestran las órbitas temporales obtenidas para el primer modelo. Se realizaron simulaciones con cuatro velocidades distintas (Ω_n , $2\Omega_n$, $3\Omega_n$ y $4\Omega_n$), y sin excitaciones externas.

Se ve que para las primeras dos velocidades, el rotor oscila inicialmente hasta alcanzar su posición de equilibrio. En cambio, para las velocidades $3\Omega_n$ y $4\Omega_n$, el rotor no alcanza un punto de equilibrio, sino que se mantiene oscilando en un órbita permanente. Este fenómeno se denomina *oil whirl*. Cabe destacar, que es un fenómeno autoexcitado, ya que no hay fuerzas externas actuando sobre el rotor.

En la Figura 6.17 se muestra un análisis de frecuencias de las órbitas obtenidas con el primer modelo. Se obtiene que la frecuencia de oscilación es 0.48 veces la velocidad de rotación. Esta frecuencia es típica del fenómeno de *oil whirl*, que se ha encontrado entre $0,38\times$ a $0,49\times$ dependiendo del sistema (Muszynska (1987)).

La velocidad donde comienza el fenómeno de *oil whirl* es congruente con mediciones experimentales realizadas en el capítulo 4. Donde se obtuvo que para una presión de entrada de aceite baja ($25kPa$), el *oil whirl* comienza a una velocidad de $2,8\Omega_n$ aproximadamente.

Para el segundo modelo (Figuras 6.18, 6.19, 6.20 y 6.21), se puede ver que la respuesta se amortigua más rápido. Se observa también, que al aumentar la presión del aceite se logra retrasar el *oil whirl*. Esto, es también congruente con los resultados experimentales obtenidos en el capítulo 4.

En la Figura 6.22 se muestra un análisis de frecuencias de las órbitas obtenidas con el segundo modelo. Se obtiene también, que la frecuencia de oscilación es 0.48 veces la velocidad de rotación.

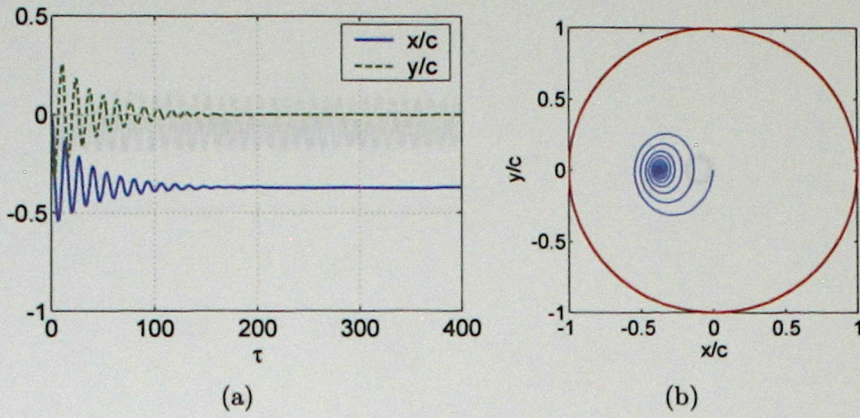


Figura 6.13: Órbita temporal para Ω_n , obtenida con el primer modelo

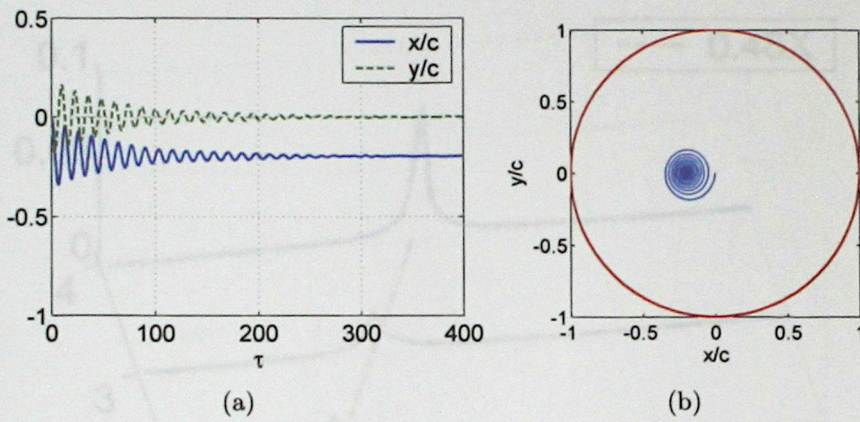


Figura 6.14: Órbita temporal para $2\Omega_n$, obtenida con el primer modelo

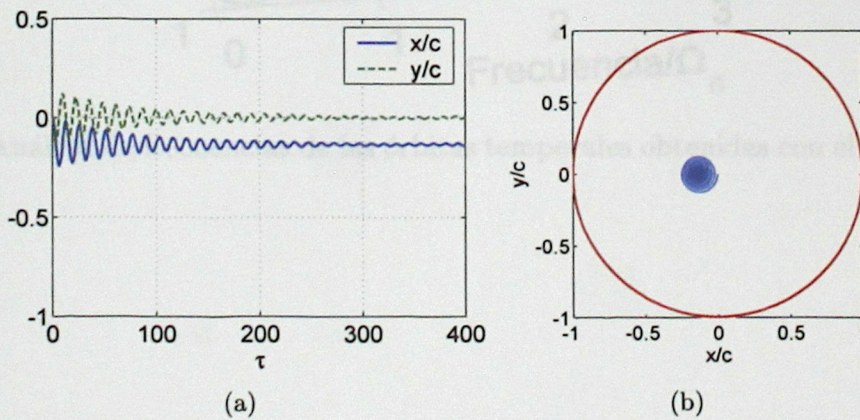


Figura 6.15: Órbita temporal para $3\Omega_n$, obtenida con el primer modelo

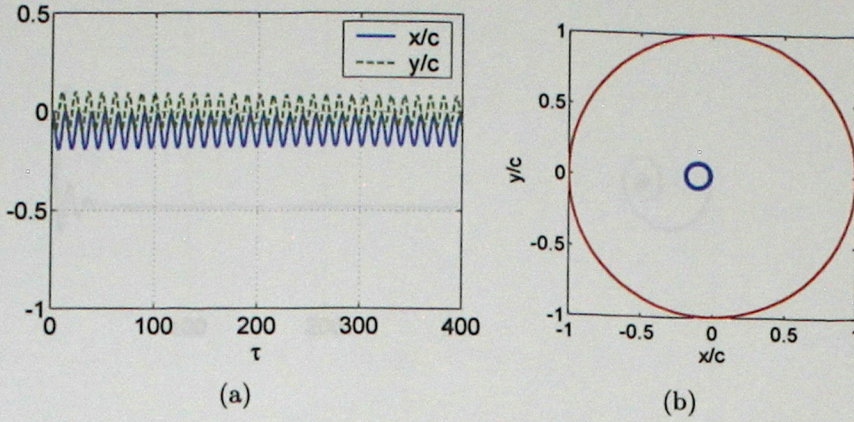


Figura 6.16: Órbita temporal para $4\Omega_n$, obtenida con el primer modelo

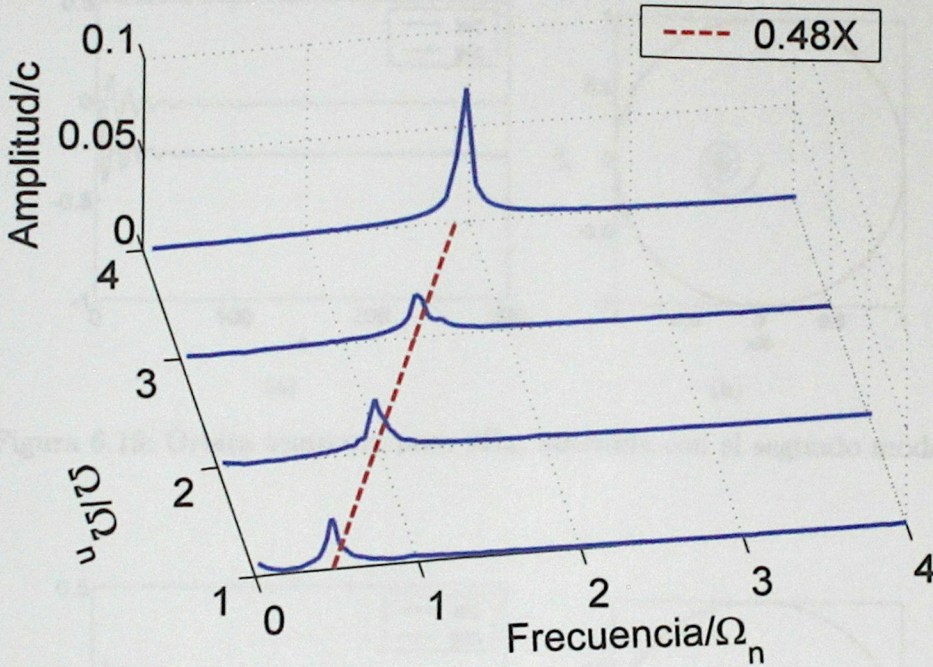


Figura 6.17: Análisis de frecuencias de las órbitas temporales obtenidas con el primer modelo

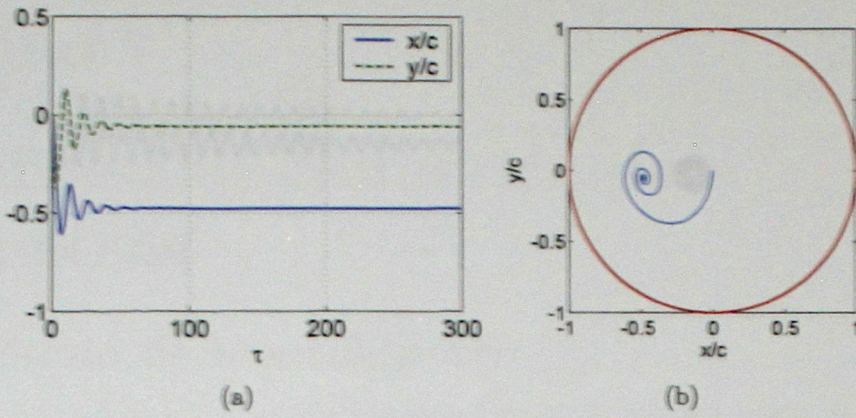


Figura 6.18: Órbita temporal para Ω_n , obtenida con el segundo modelo

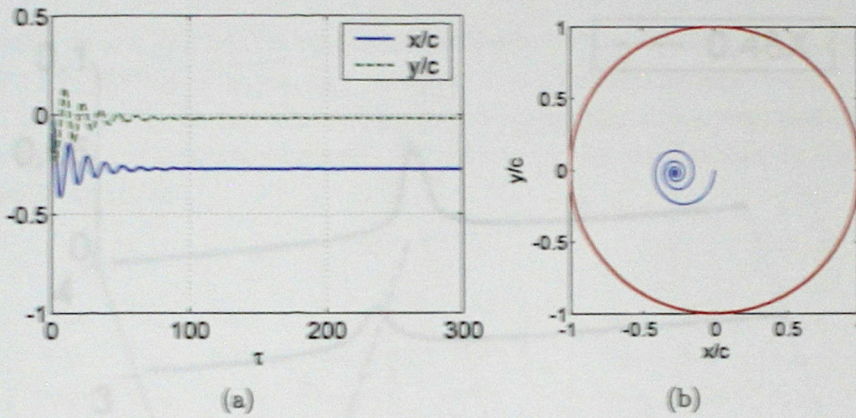


Figura 6.19: Órbita temporal para $2\Omega_n$, obtenida con el segundo modelo

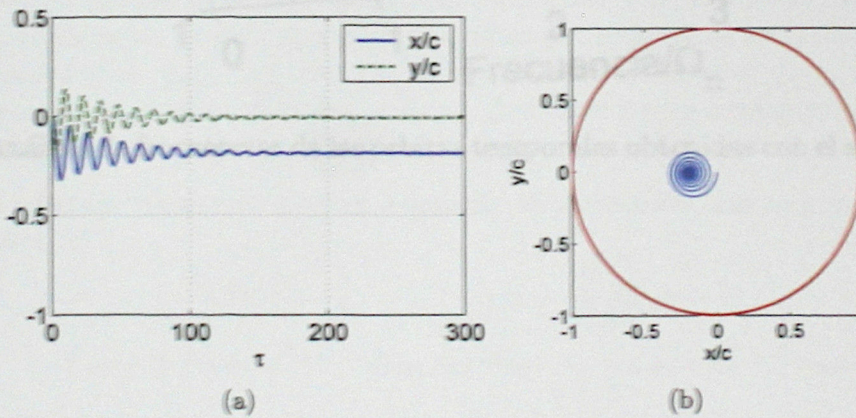


Figura 6.20: Órbita temporal para $3\Omega_n$, obtenida con el segundo modelo

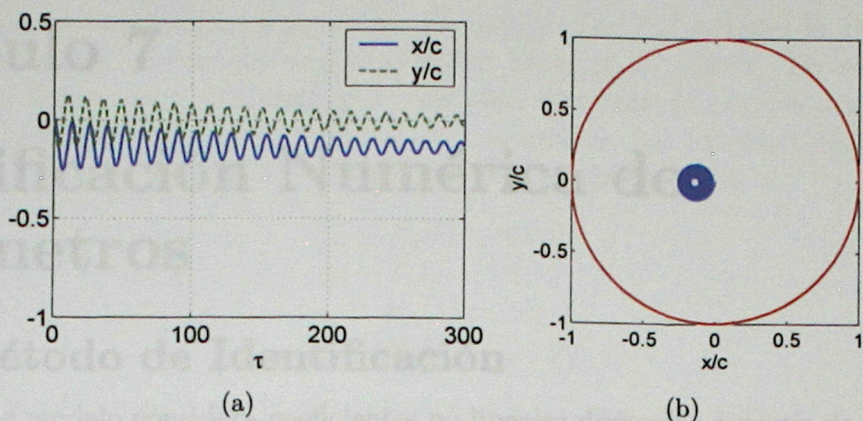


Figura 6.21: Órbita temporal para $4\Omega_n$, obtenida con el segundo modelo

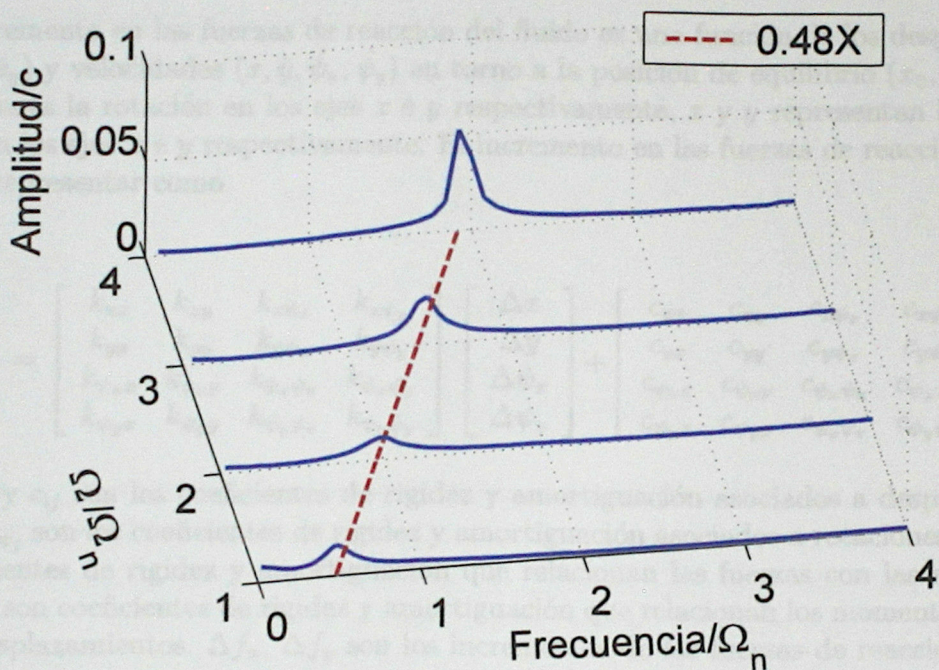


Figura 6.22: Análisis de frecuencias de las órbitas temporales obtenidas con el segundo modelo

Capítulo 7

Identificación Numérica de Parámetros

7.1. Método de Identificación

El presente modelo considera coeficientes no lineales derivados a partir de una expansión de Taylor de tercer orden de las fuerzas. Se basa en el modelo realizado por Sawicki & Rao (2004), descrito en la sección 2.3, pero con un orden más en la expansión de Taylor, y despreciando términos superiores asociados a perturbaciones de la velocidad. Se consideran además, coeficientes asociados a desplazamientos angulares.

El incremento en las fuerzas de reacción del fluido es una función de los desplazamientos (x, y, ψ_x, ψ_y) y velocidades $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}_x, \dot{\psi}_y)$ en torno a la posición de equilibrio $(x_0, y_0, \psi_{x0}, \psi_{y0})$. ψ_x, ψ_y denota la rotación en los ejes x e y respectivamente, x y y representan los desplazamientos en los ejes x e y respectivamente. El incremento en las fuerzas de reacción del fluido se puede representar como

$$\begin{bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \\ \Delta m_x \\ \Delta m_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\psi_x} & k_{x\psi_y} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\psi_x} & k_{y\psi_y} \\ k_{\psi_x x} & k_{\psi_x y} & k_{\psi_x \psi_x} & k_{\psi_x \psi_y} \\ k_{\psi_y x} & k_{\psi_y y} & k_{\psi_y \psi_x} & k_{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \psi_x \\ \Delta \psi_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{x\psi_x} & c_{x\psi_y} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{y\psi_x} & c_{y\psi_y} \\ c_{\psi_x x} & c_{\psi_x y} & c_{\psi_x \psi_x} & c_{\psi_x \psi_y} \\ c_{\psi_y x} & c_{\psi_y y} & c_{\psi_y \psi_x} & c_{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{\psi}_x \\ \Delta \dot{\psi}_y \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

donde k_{ij} y c_{ij} son los coeficientes de rigidez y amortiguación asociados a desplazamientos, $k_{\psi_i \psi_j}$ y $c_{\psi_i \psi_j}$ son los coeficientes de rigidez y amortiguación asociados a rotaciones, $k_{i\psi_j}$ y $c_{i\psi_j}$ son coeficientes de rigidez y amortiguación que relacionan las fuerzas con las rotaciones, y $k_{\psi_i j}$ y $c_{\psi_i j}$ son coeficientes de rigidez y amortiguación que relacionan los momentos angulares con los desplazamientos. $\Delta f_x, \Delta f_y$ son los incrementos de las fuerzas de reacción del fluido en las direcciones x, y , respectivamente, y $\Delta m_x, \Delta m_y$ son los incrementos de los momentos de reacción del fluido en los ejes x, y respectivamente.

Los coeficientes de rigidez se pueden expandir considerando términos no lineales de la siguiente manera

$$k_{ij} = k_{ij0} + k_{ijx} \Delta x + k_{ijy} \Delta y + k_{ijxx} \Delta x^2 + k_{ijyy} \Delta y^2 \quad (7.2)$$

$$k_{\psi_i \psi_j} = k_{\psi_i \psi_j 0} + k_{\psi_i \psi_j \psi_x} \Delta \psi_x + k_{\psi_i \psi_j \psi_y} \Delta \psi_y + k_{\psi_i \psi_j \psi_x \psi_x} \Delta \psi_x^2 + k_{\psi_i \psi_j \psi_y \psi_y} \Delta \psi_y^2 \quad (7.3)$$

donde $k_{ij0}, k_{\psi_i \psi_j 0}$ son los coeficientes de rigidez lineales. $k_{ijk}, k_{\psi_i \psi_j \psi_k}$ son los coeficientes no lineales de segundo orden, y $k_{ijkm}, k_{\psi_i \psi_j \psi_k}$ son los coeficientes no lineales de tercer orden.

Los coeficientes se obtienen a partir de una adaptación del método de identificación de parámetros en el dominio temporal realizado por Zhou *et al.* (2004). En este método, los coeficientes se determinan al ajustar por mínimos cuadrados la respuesta temporal a una excitación externa. Si las fuerzas externas son conocidas, las fuerzas que ejerce el fluido (f_x, f_y, m_x, m_y) se pueden determinar por equilibrio de fuerzas como

$$\begin{aligned} f_x &= F_x(t) - m\Delta\ddot{x} \\ f_y &= F_y(t) - m\Delta\ddot{y} \\ m_x &= M_x(t) - I_x\Delta\ddot{\psi}_x \\ m_y &= M_y(t) - I_y\Delta\ddot{\psi}_y \end{aligned} \quad (7.4)$$

donde F_x, F_y son fuerzas de excitación externas, M_x, M_y son momentos de excitación externos, m es la masa del rotor y I_x, I_y son los momentos de inercia del rotor en las direcciones x, y respectivamente.

Los parámetros del descanso se pueden determinar entonces minimizando la diferencia entre f_i y Δf_i y m_i y Δm_i . La correlación se realiza por medio de mínimos cuadrados. Se pueden definir entonces cuatro funciones error

$$E_1 = \sum_{k=1}^n (f_x(k) - \Delta f_x(k))^2 \quad (7.5)$$

$$E_2 = \sum_{k=1}^n (f_y(k) - \Delta f_y(k))^2 \quad (7.6)$$

$$E_3 = \sum_{k=1}^n (m_x(k) - \Delta m_x(k))^2 \quad (7.7)$$

$$E_4 = \sum_{k=1}^n (m_y(k) - \Delta m_y(k))^2 \quad (7.8)$$

donde n es el número de datos. Los coeficientes se determinan entonces, al minimizar cada una de estas funciones error.

En los modelos numéricos, se realizaron simulaciones para seis velocidades de rotación distintas entre Ω_n y $3,5\Omega_n$. El descanso fue excitado por medio de dos fuerzas sinusoidales F_x y F_y . Para asegurar una alta carga dinámica se definió la magnitud de la fuerza de excitación del mismo orden de magnitud que la fuerza estática, definiéndola como la mitad de la carga sobre el descanso F_0 . En el caso del segundo modelo se agregaron dos momentos sinusoidales M_x y M_y , la magnitud del momento aplicado fue de $0,005Nm$.

La frecuencia de las fuerzas de excitación fue definida de manera tal, que no estuviese cercana a frecuencias propias del modelo (*oil whirl*), y que fuese lo suficientemente pequeña para que no sea necesario disminuir el paso de tiempo definido en el capítulo 6. Considerando ambos criterios, se definió la frecuencia de excitación como $0,12\Omega_n$.

El algoritmo de optimización utilizado para minimizar la función error, fue el código de optimización no lineal GRG2 (Generalized Reduced Gradient) desarrollado por Lasdon & Waren (1978).

A continuación se detallan los resultados obtenidos en ambos modelos.

7.2. Resultados Primer Modelo

Se realizaron simulaciones para seis velocidades de rotación diferentes. Para cada velocidad el rotor fue excitado por dos fuerzas sinusoidales F_x y F_y simultáneamente. Para este modelo no se realizaron excitaciones en las direcciones angulares, por lo que los coeficientes asociados a estas direcciones no serán determinados. En la Figura 7.1 se muestra la respuesta obtenida para dos velocidades de rotación distintas $2\Omega_n$ y $2,5\Omega_n$.

Se observa que para la primera velocidad los efectos transientes son amortiguados hasta llegar a una orbita permanente, esta es la respuesta forzada debido a las fuerzas de excitación F_x y F_y . En cambio, para una velocidad de $2,5\Omega_n$, los efectos transientes no son amortiguados, esto se debe al fenómeno de *Oil Whirl*. La respuesta esta compuesta en este caso, de dos señales principales, el *oil whirl* y una señal a baja frecuencia que corresponde a la respuesta forzada. El hecho que este presente el fenómeno de *oil whirl*, podría afectar al método de ajuste por mínimos cuadrados, en éste caso sería necesario utilizar un filtro en la respuesta.

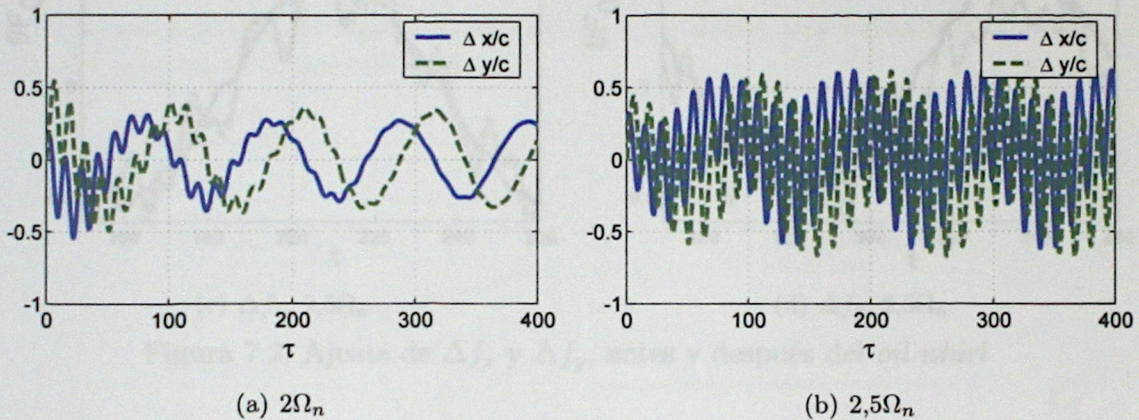


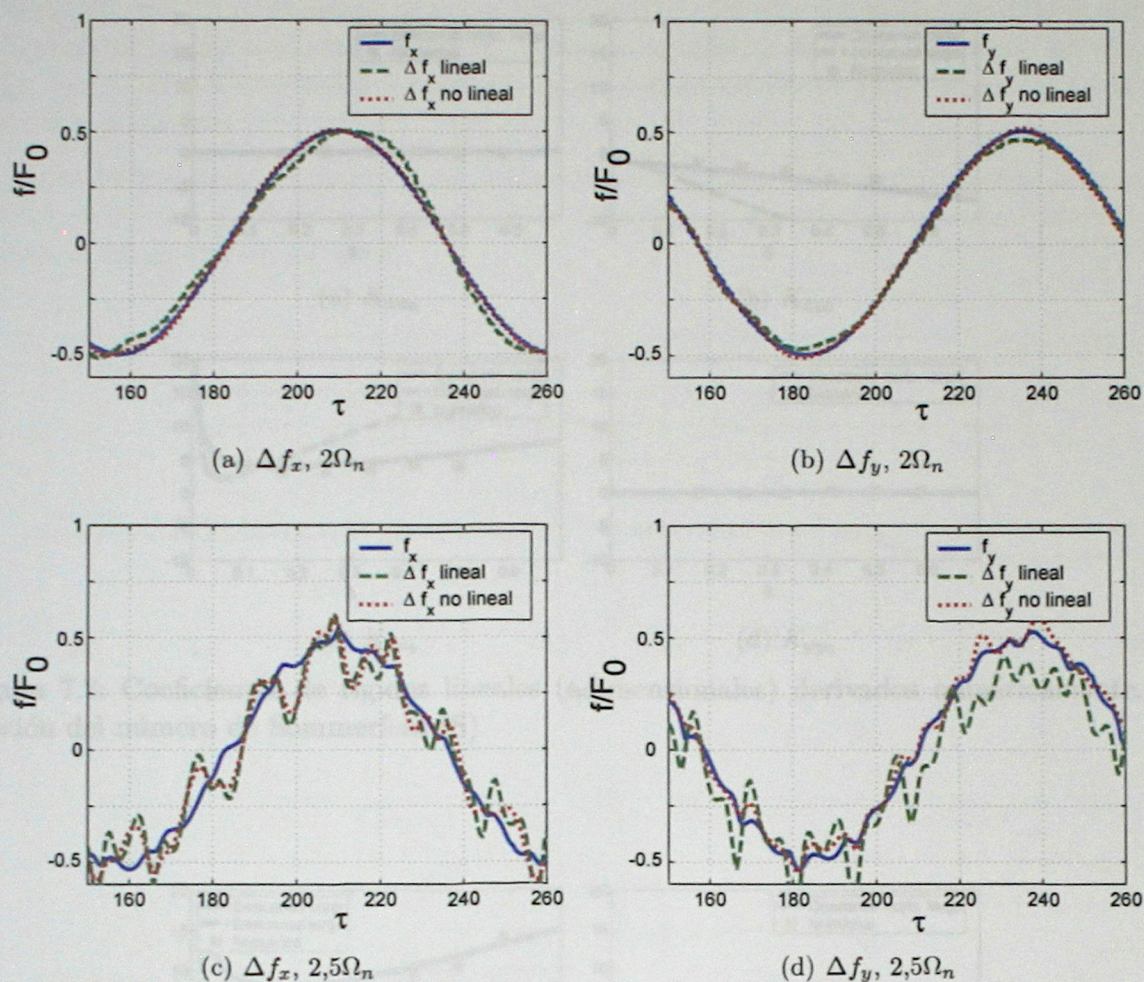
Figura 7.1: Respuesta Transiente antes y después del fenómeno de *oil whirl*

En las Figuras 7.3 y 7.4 se muestran los resultados obtenidos para los coeficientes de rigidez y amortiguamiento cuando se comparan con los coeficientes obtenidos.

Para cada velocidad se determinaron los coeficientes de manera de minimizar la diferencia cuadrática entre f_x y Δf_x y f_y y Δf_y , como se describió en la sección 7.1.

En la Figura 7.2, se muestran las curvas obtenidas luego del ajuste. Se muestran los resultados obtenidos para dos velocidades distintas 2Ω y $2,5\Omega_n$. En cada gráfico se muestra la curva objetivo f_x y f_y , y las curvas obtenidas considerando un modelo lineal y no lineal.

Se observa que el modelo con términos no lineales da un mejor ajuste que el modelo lineal. Esto muestra la no linealidad de la respuesta. Es también posible observar que el fenómeno de *oil whirl* no afecta el ajuste, y por lo tanto tampoco el procedimiento de identificación de parámetros.


 Figura 7.2: Ajuste de Δf_x y Δf_y , antes y después del *oil whirl*

En las Figuras 7.3 y 7.4 se muestran los resultados obtenidos para los coeficientes de rigidez y amortiguación lineales. Los resultados se compararon con los coeficientes obtenidos a partir de las aproximaciones de descanso corto y descanso largo.

Los coeficientes analíticos fueron evaluados utilizando la condición de Sommerfeld para la presión. Con esta condición los coeficientes de rigidez directos (K_{xx} y K_{yy}) son nulos, y los coeficientes de rigidez cruzados toman un valor igual a la mitad del valor que se obtiene con la condición de Gumbel. Para el caso de los coeficientes de amortiguación, los coeficientes cruzados son nulos, y los coeficientes directos toman un valor igual a la mitad del valor obtenido con la condición de Gumbel.

De las Figuras 7.3 y 7.4 se puede ver como los coeficientes lineales de rigidez y amortiguación obtenidos numéricamente, son muy cercanos a los obtenidos analíticamente con la aproximación de descanso corto. Esto muestra la validez de la aproximación de descanso corto para determinar coeficientes lineales.

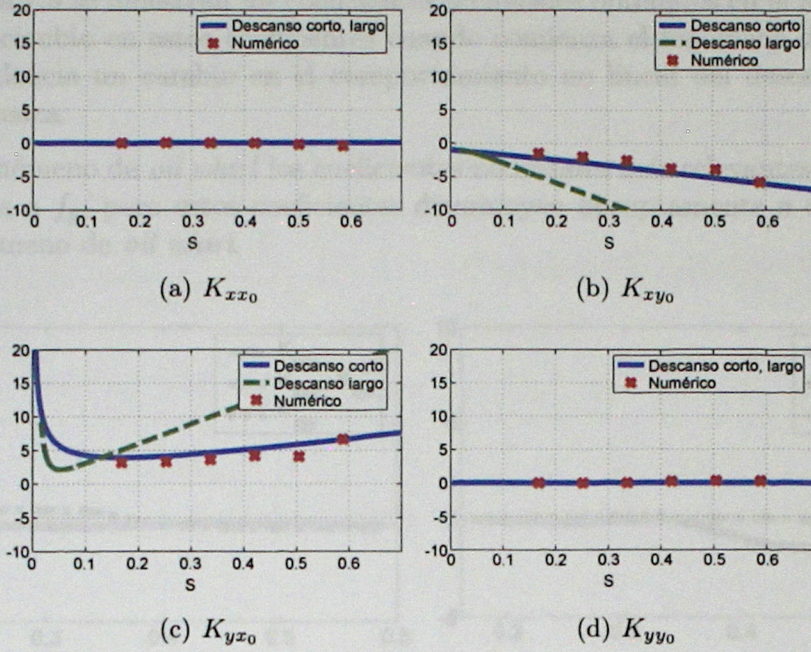


Figura 7.3: Coeficientes de rigidez lineales (adimensionales) derivados numéricamente. En función del número de Sommerfeld (S)

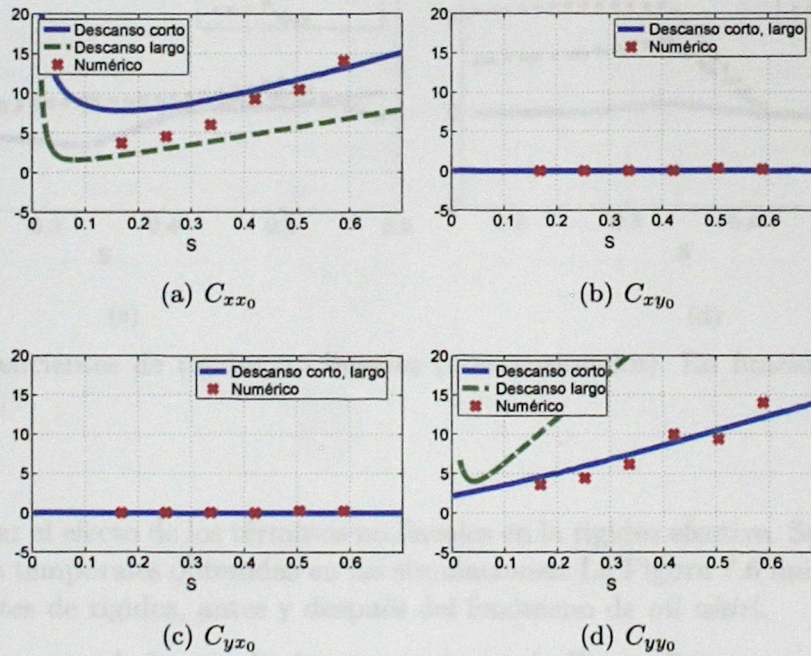


Figura 7.4: Coeficientes de amortiguación lineales (adimensionales) derivados numéricamente. En función del número de Sommerfeld (S)

En la Figura 7.5 se muestran los coeficientes no lineales obtenidos en el modelo numérico. Se observa un cambio en estos coeficientes cuando comienza el fenómeno de *oil whirl* ($S = 0,42$), esto evidencia un cambio en el comportamiento no lineal del descanso cuando este fenómeno comienza.

Antes de fenómeno de *oil whirl* los coeficientes no lineales más relevantes son los de tercer orden asociados a f_y , pero estos coeficientes disminuyen abruptamente a cero una vez que aparece el fenómeno de *oil whirl*.

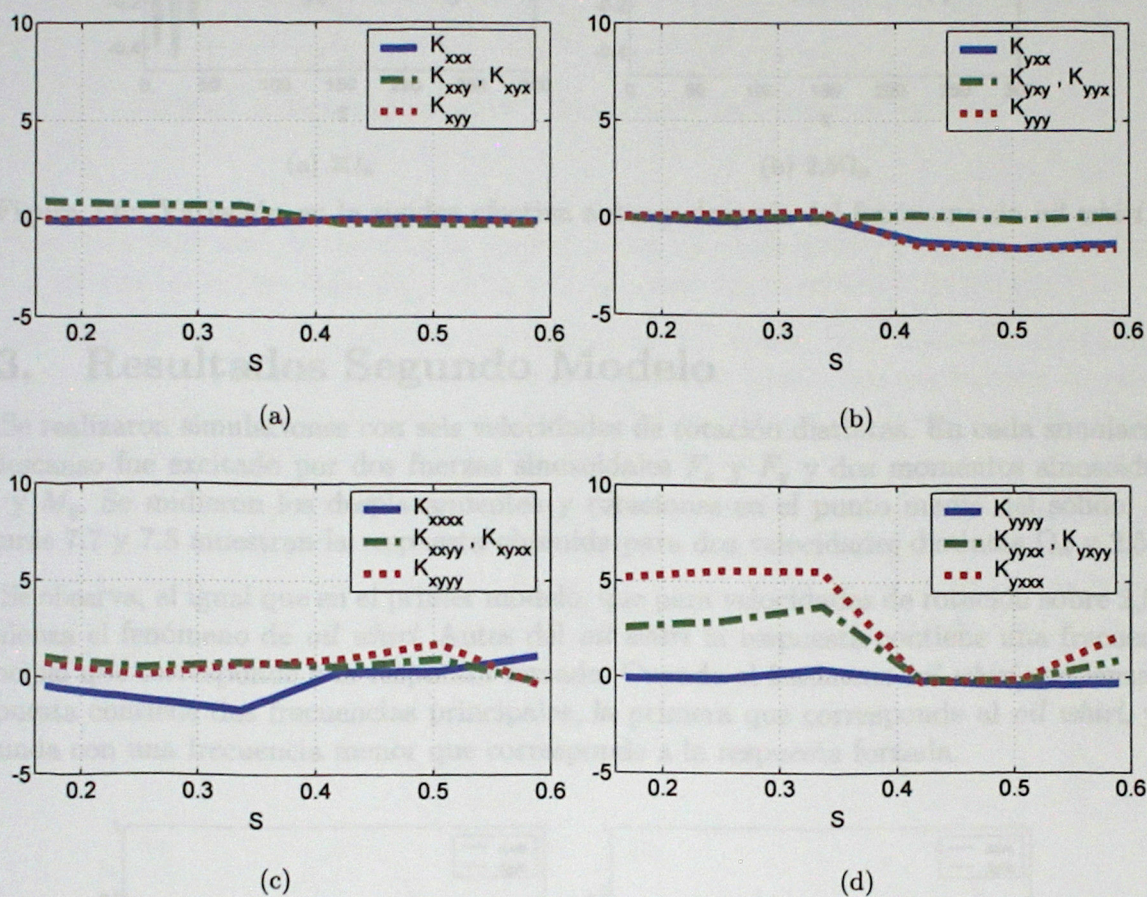


Figura 7.5: Coeficientes de rigidez no lineales (adimensionales). En función del número de Sommerfeld (S)

Para estudiar el efecto de los términos no lineales en la rigidez efectiva. Se evaluó la rigidez para las órbitas temporales obtenidas en las simulaciones. La Figura 7.6 muestra la variación de los coeficientes de rigidez, antes y después del fenómeno de *oil whirl*.

Se puede observar, de los resultados mostrados en la Figura 7.6, que antes del fenómeno de *oil whirl* ($2\Omega_n$) la variación en la rigidez efectiva es cercana al 30 % para k_{xy} y al 10 % para k_{yx} . Cuando comienza el fenómeno de *oil whirl* ($2,5\Omega_n$) la variación debido a no linealidades es cercana al 5 % para k_{xy} y al 20 % para k_{yx} . Se observa un cambio en el comportamiento

no lineal asociado al fenómeno de *oil whirl*. En cualquier caso, las no linealidades tienen un efecto importante en la rigidez efectiva, y deben ser consideradas.

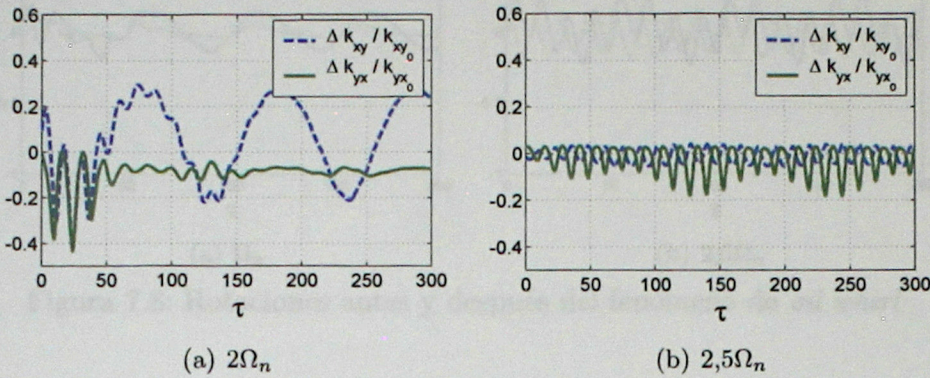


Figura 7.6: Variación en la rigidez efectiva antes y después del fenómeno de *oil whirl*

7.3. Resultados Segundo Modelo

Se realizaron simulaciones con seis velocidades de rotación distintas. En cada simulación, el descanso fue excitado por dos fuerzas sinusoidales F_x y F_y y dos momentos sinusoidales M_x y M_y . Se midieron los desplazamientos y rotaciones en el punto medio del sólido. Las Figuras 7.7 y 7.8 muestran la respuesta obtenida para dos velocidades distintas Ω_n y $2,5\Omega_n$.

Se observa, al igual que en el primer modelo, que para velocidades de rotación sobre $2,5\Omega_n$ comienza el fenómeno de *oil whirl*. Antes del *oil whirl* la respuesta contiene una frecuencia principal que corresponde a la respuesta forzada. Cuando el fenómeno *oil whirl* comienza, la respuesta contiene dos frecuencias principales, la primera que corresponde al *oil whirl*, y la segunda con una frecuencia menor que corresponde a la respuesta forzada.

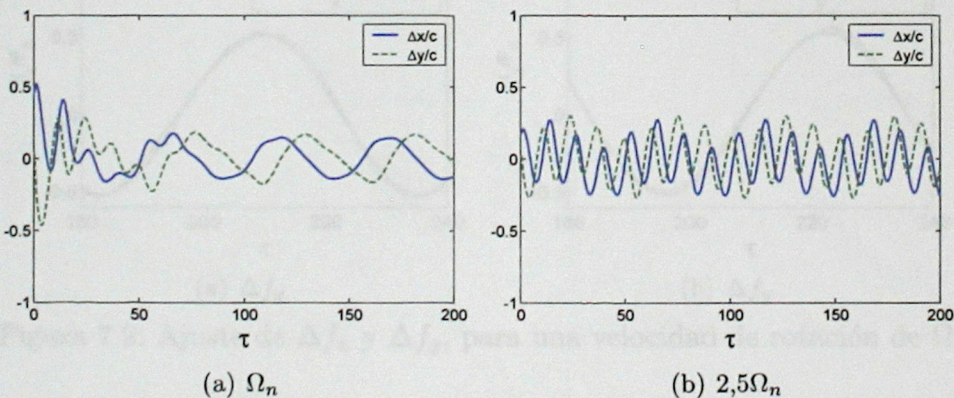


Figura 7.7: Desplazamientos antes y después del fenómeno de *oil whirl*

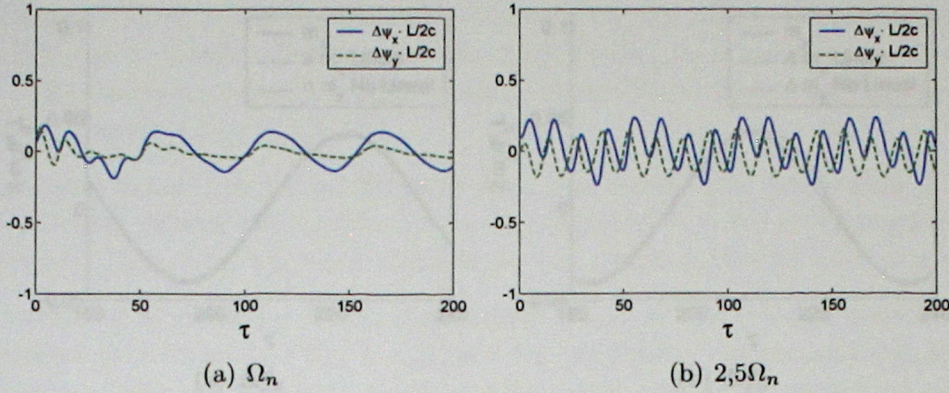


Figura 7.8: Rotaciones antes y después del fenómeno de *oil whirl*

Para cada velocidad de rotación se determinaron los coeficientes de rigidez y amortiguación al ajustar las curvas Δf_x , Δf_y , Δm_x y Δm_y , como fue descrito en la sección 7.1.

Las Figuras 7.9 y 7.10 muestran los resultados del ajuste para velocidad de rotación nominal. Se comparan los resultados obtenidos entre un ajuste con coeficientes lineales y considerando coeficientes no lineales. Se puede observar como el modelo con coeficientes no lineales da un mejor ajuste, en especial para las curvas f_y y m_y .

En las Figuras 7.11 y 7.12 se muestran los ajustes obtenidos para una velocidad de $2,5\Omega_n$, a esta velocidad comienza el fenómeno de *oil whirl*. Se observa que el ajuste no lineal continua siendo mejor que el ajuste con un modelo lineal. Es posible notar que el fenómeno de *oil whirl* no afectó el ajuste de las curvas, especialmente en las curvas de f_y , donde casi no quedan rastros del *oil whirl*.

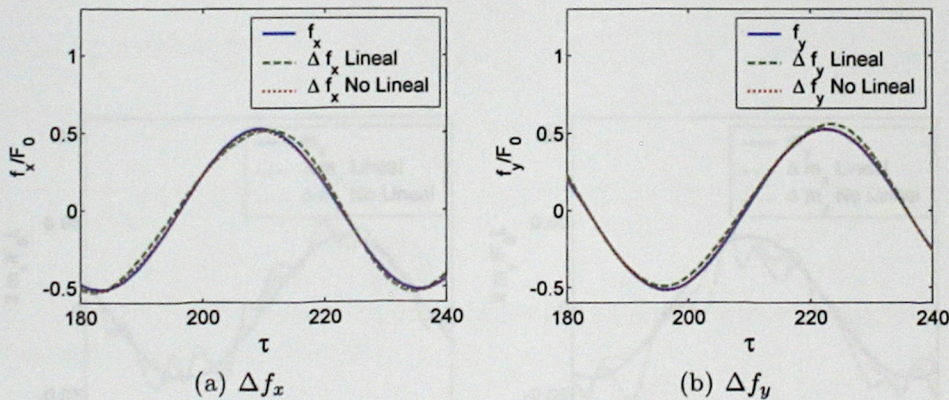


Figura 7.9: Ajuste de Δf_x y Δf_y , para una velocidad de rotación de Ω_n

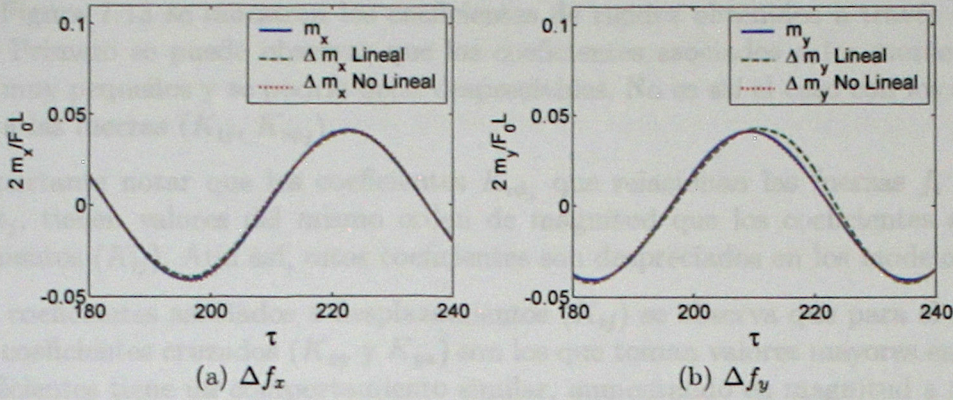


Figura 7.10: Ajuste de Δm_x y Δm_y , para una velocidad de rotación de Ω_n

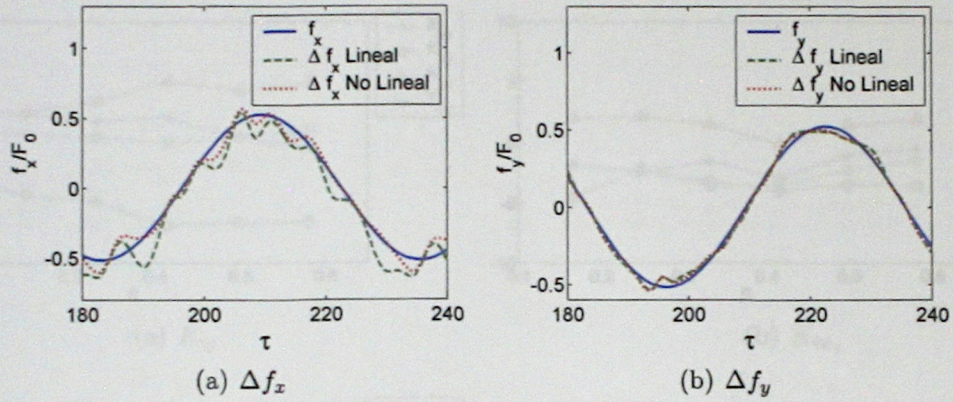


Figura 7.11: Ajuste de Δf_x y Δf_y , para una velocidad de rotación de $2,5\Omega_n$

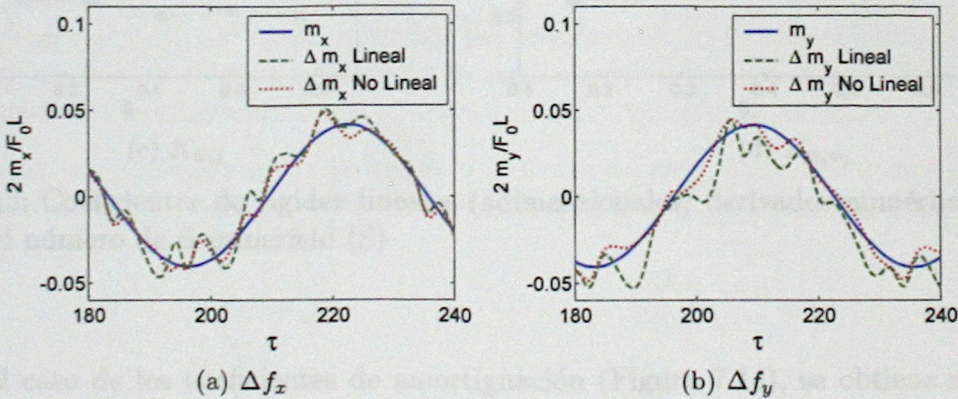


Figura 7.12: Ajuste de Δm_x y Δm_y , para una velocidad de rotación de $2,5\Omega_n$

CAPÍTULO 7. IDENTIFICACIÓN NUMÉRICA DE PARÁMETROS

En la Figura 7.13 se muestran los coeficientes de rigidez obtenidos a través del modelo numérico. Primero se puede observar que los coeficientes asociados a los momentos ($K_{\psi_i\psi_j}$, $K_{i\psi_j}$) son muy pequeños y se podría decir despreciables. No es así el caso con los coeficientes asociados a las fuerzas (K_{ij} , $K_{i\psi_j}$).

Es importante notar que los coeficientes $K_{i\psi_j}$ que relacionan las fuerzas f_i con las rotaciones ψ_j , tienen valores del mismo orden de magnitud que los coeficientes asociados a desplazamientos (K_{ij}). Aun así, estos coeficientes son despreciados en los modelos clásicos.

De los coeficientes asociados a desplazamientos (K_{ij}) se observa que para el rango estudiado, los coeficientes cruzados (K_{xy} y K_{yx}) son los que toman valores mayores en magnitud. Estos coeficientes tiene un comportamiento similar, aumentando en magnitud a medida que aumenta el número de Sommerfeld S, pero con signos opuestos. El coeficiente de rigidez K_{yy} se mantiene prácticamente constante en el rango estudiado, y K_{xx} disminuye a medida que aumenta el número de Sommerfeld.

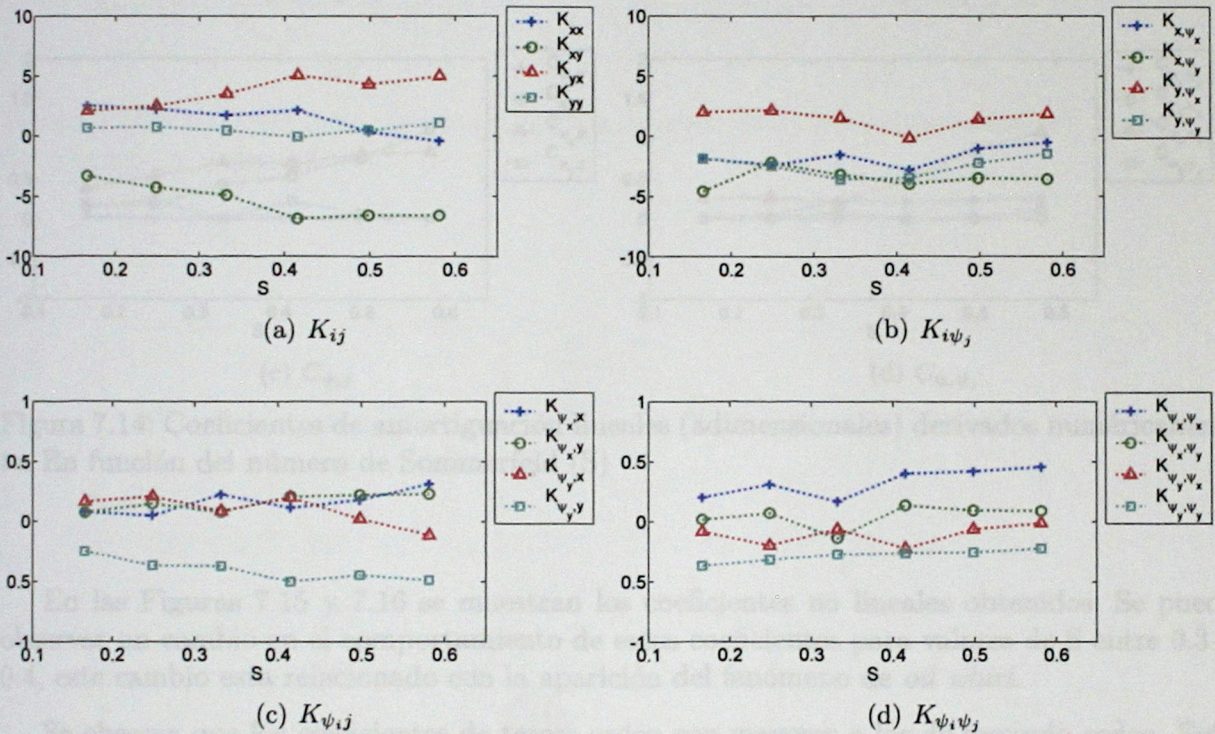


Figura 7.13: Coeficientes de rigidez lineales (adimensionales) derivados numéricamente. En función del número de Sommerfeld (S)

Para el caso de los coeficientes de amortiguación (Figura 7.14), se obtiene nuevamente que los coeficientes asociados a los momentos ($C_{\psi_i\psi_j}$ y C_{ψ_i,ψ_j}) son despreciables.

Los coeficientes de amortiguación de la forma $C_{i\psi_j}$ toman valores considerables, especialmente los relacionados con la velocidad angular $\dot{\psi}_x$ (C_{x,ψ_x} y C_{y,ψ_x}).

Para el caso de los coeficientes de amortiguación relacionados con desplazamientos lineales, los coeficientes directos son los que toman valores mayores (C_{xx} y C_{yy}). Ambos coeficientes muestran la misma tendencia de aumentar en función de S , siendo mayores los coeficientes en la dirección x . Los coeficientes cruzados tienen valores menores y una tendencia a disminuir con S .

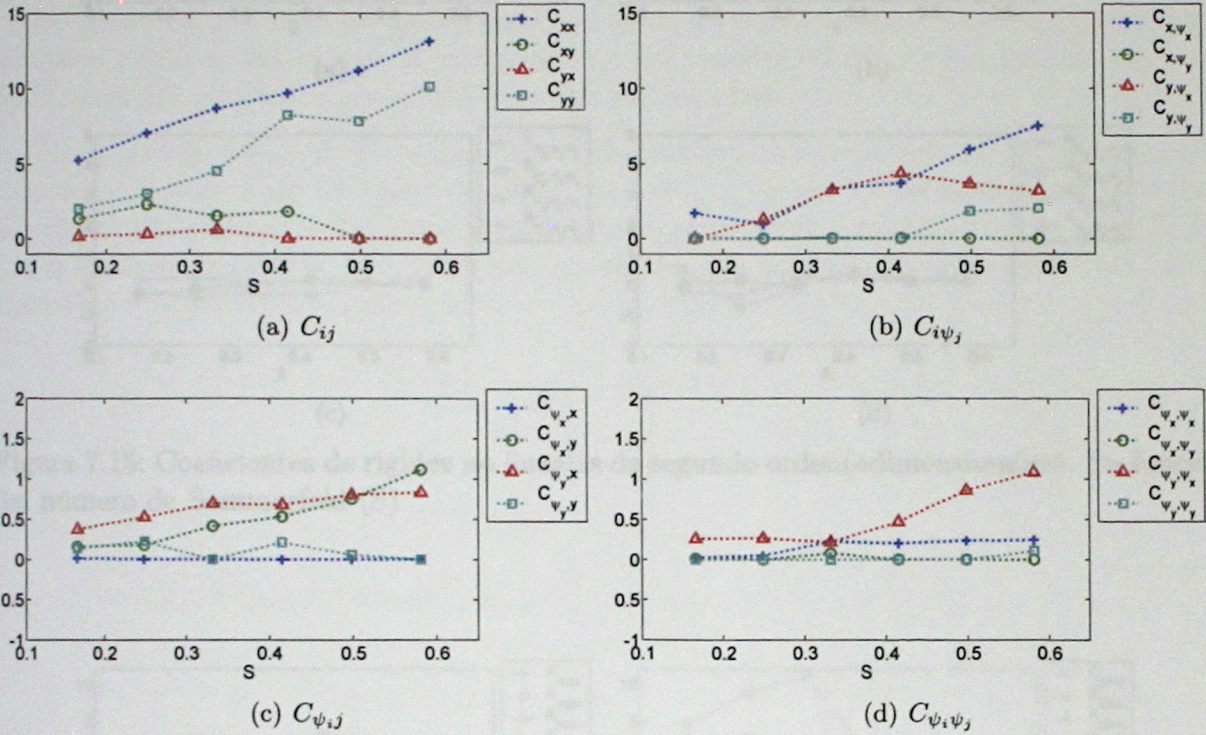


Figura 7.14: Coeficientes de amortiguación lineales (adimensionales) derivados numéricamente. En función del número de Sommerfeld (S)

En las Figuras 7.15 y 7.16 se muestran los coeficientes no lineales obtenidos. Se puede observar un cambio en el comportamiento de estos coeficientes para valores de S entre 0.3 y 0.4, este cambio está relacionado con la aparición del fenómeno de *oil whirl*.

Se observa que los coeficientes de tercer orden son mayores a los de segundo orden. Esto es aún más notoria para el caso de coeficientes asociados a desplazamientos angulares.

Figura 7.16: Coeficientes de amortiguación no lineales de tercer orden (adimensionales). En función del número de Sommerfeld (S)

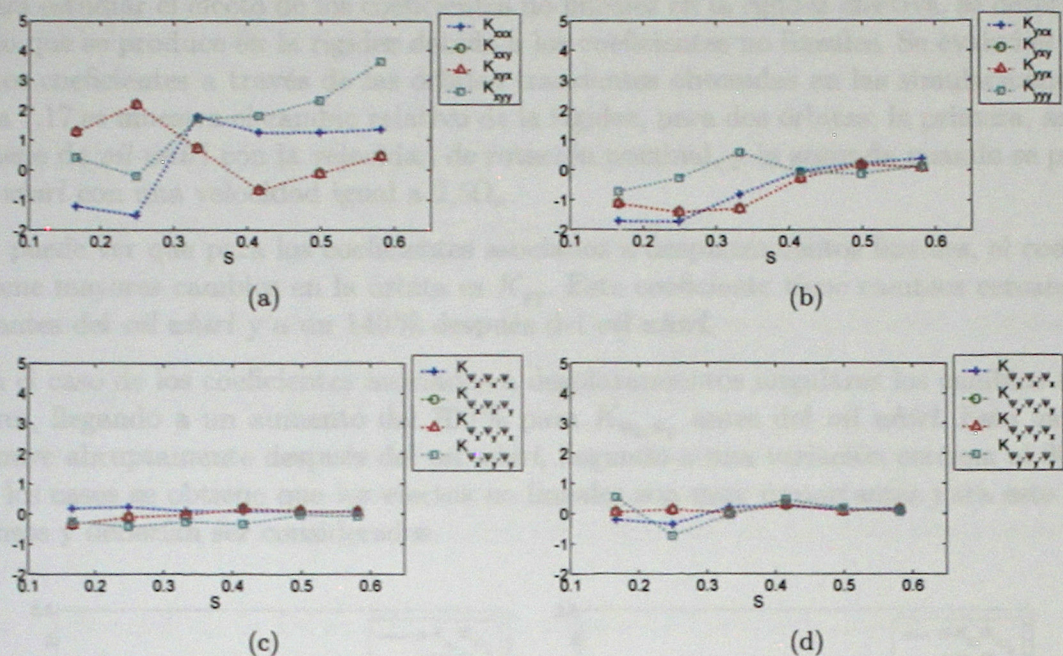


Figura 7.15: Coeficientes de rigidez no lineales de segundo orden(adimensionales). En función del número de Sommerfeld (S)

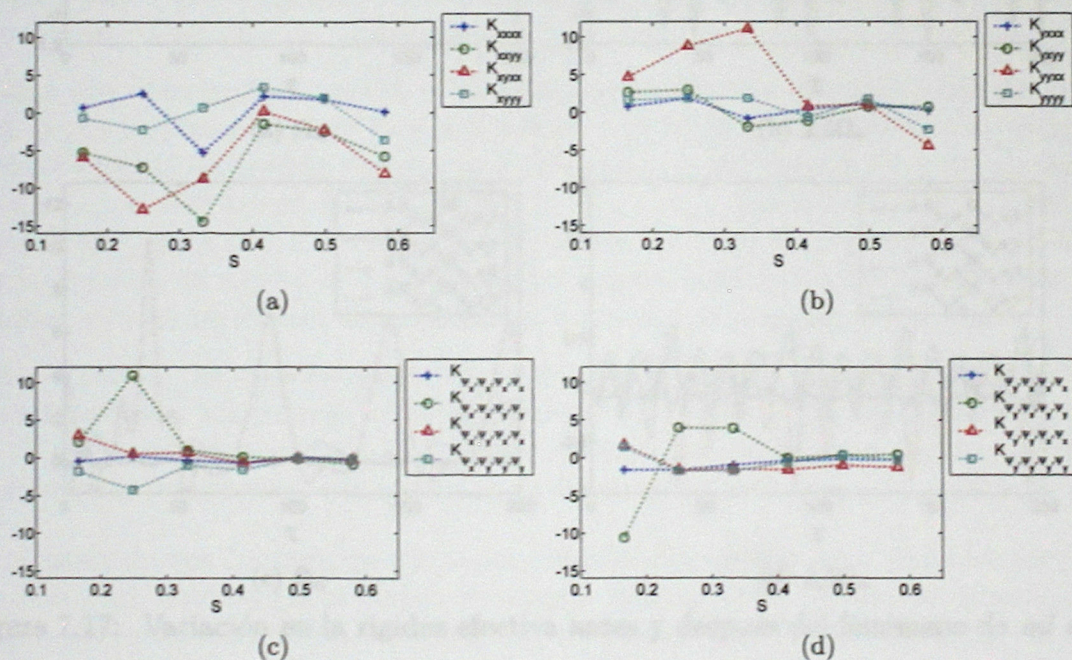


Figura 7.16: Coeficientes de rigidez no lineales de tercer orden (adimensionales). En función del número de Sommerfeld (S)

Capítulo 8

Comparación entre Resultados Numéricos y Experimentales

En las secciones 8.1 y 8.2, se muestran en un mismo gráfico los coeficientes adimensionales de rigidez y amortiguación obtenidos numéricamente con el segundo modelo, y experimentalmente considerando los grados de libertad de rotación.

Para los coeficientes de rigidez asociados a desplazamientos (K_{ij}), se ve que ambos modelos toman valores similares para los coeficientes de rigidez cruzados (K_{xy} y K_{yx}). Para los coeficientes directos (K_{xx} y K_{yy}), en cambio, las diferencias son mayores, siendo más notorio el caso de K_{yy} .

Los coeficientes de la forma $K_{i\psi_j}$ tienen valores bastante cercanos en ambos modelos, al igual que los coeficientes de la forma $K_{\psi_i j}$. Los coeficientes asociados a rotaciones son similares en ambos modelos, siendo el coeficiente $K_{\psi_x \psi_x}$, el que muestra mayores diferencias.

Las diferencias en los coeficientes de rigidez directos se debe a los efectos de inercia del fluido. En la identificación de los coeficientes se despreciaron los coeficientes de masa adicionales, asociados a la inercia del fluido (m_{ij}). Los coeficientes de rigidez tienen entonces un término asociado a la rigidez y un término asociado a la inercia del fluido, estos coeficientes se denominan coeficientes de rigidez efectiva.

Como describieron San-Andrés & De-Santiago (2005), los efectos de inercia del fluido toman mayor importancia a medida que aumenta la frecuencia de excitación, aumentando considerablemente los coeficientes de rigidez directos. En las Figuras 8.1 y 8.2 se muestra la variación de los coeficientes de rigidez directos K_{xx} y K_{yy} , obtenidas por San-Andrés & De-Santiago (2005) para tres frecuencias de excitación distintas. Se observa que las diferencias en los coeficientes de rigidez es considerable para frecuencias de excitación diferentes, siendo congruente con los resultados experimentales obtenidos en el presente trabajo.

Para el caso de los coeficientes de amortiguación, las diferencias entre ambos modelos se hacen más notorias. En general, los coeficientes de amortiguación experimentales son menores a los obtenidos numéricamente. Las diferencias entre los coeficientes de amortiguación de ambos modelos (numérico y experimental) se deben principalmente a los siguientes puntos:

- A pesar de que las matrices de masa y rigidez del sistema rotor modelan muy bien al rotor real, obteniendo la misma frecuencia natural en el modelo de elementos finitos y experimentalmente. No existe un modelo preciso para la amortiguación del rotor, se cree que ésta es una de las razones por la que no se obtuvieron experimentalmente los coeficientes de amortiguación esperados en el descanso.
- La viscosidad del aceite varía exponencialmente con la temperatura del aceite. El mode-

lo numérico utilizado asume una viscosidad constante del aceite, al igual que el método experimental. Se debería monitorear la temperatura del aceite y considerar estos cambios de temperatura en el modelo numérico.

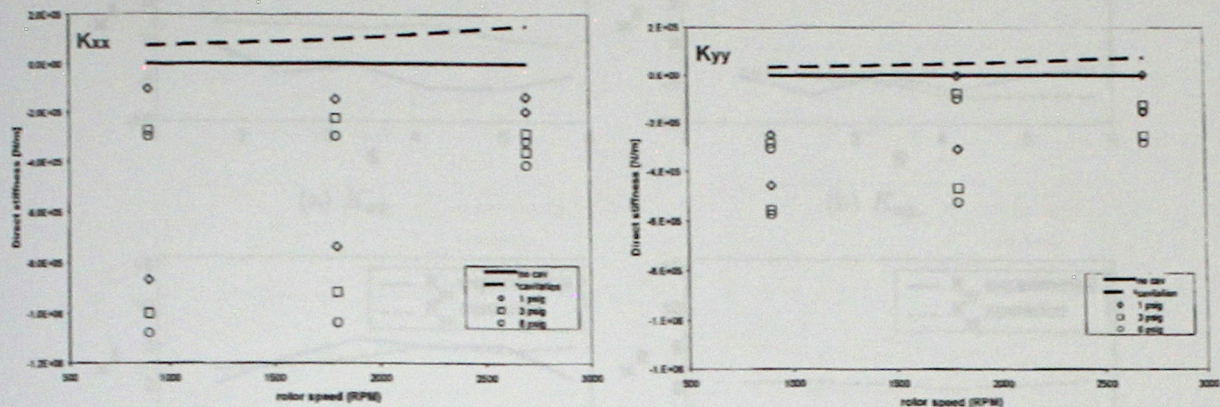


Figura 8.1: Variación de los coeficientes de rigidez directos para tres frecuencias de excitación, obtenidos por San-Andrés & De-Santiago (2005)

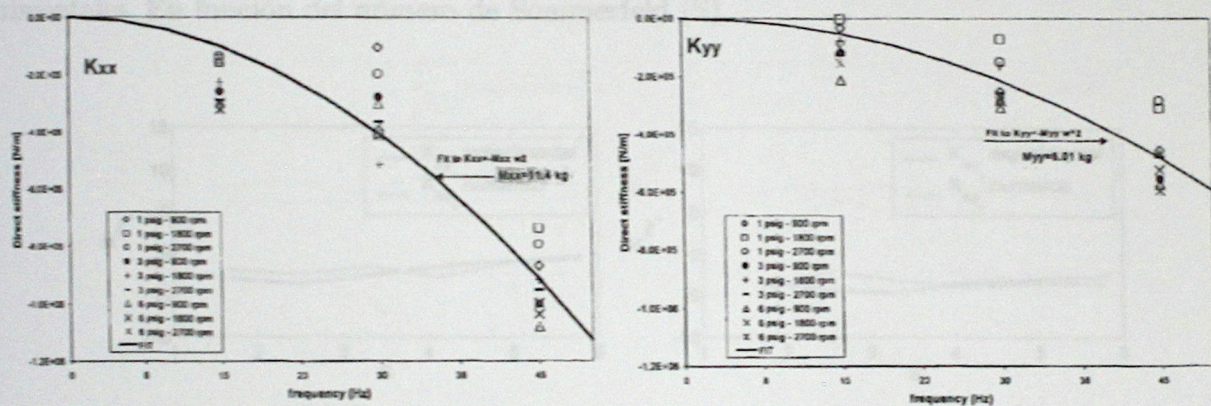


Figura 8.2: Variación de los coeficientes de rigidez directos en función de la frecuencia de excitación, obtenida por San-Andrés & De-Santiago (2005)

8.1. Coeficientes de Rigidez

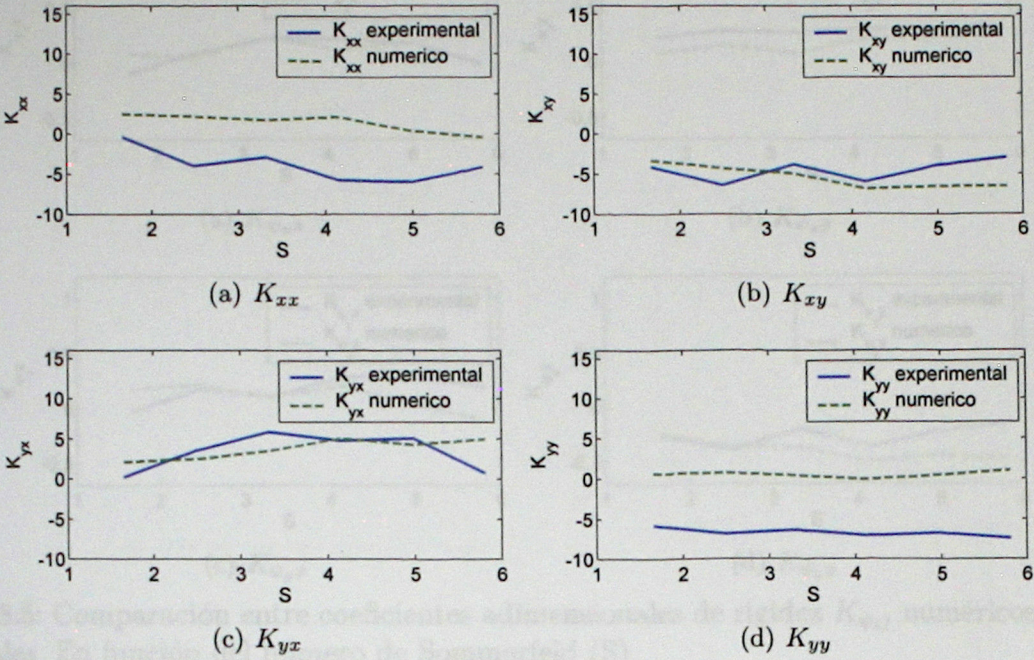


Figura 8.3: Comparación entre coeficientes adimensionales de rigidez K_{ij} numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)

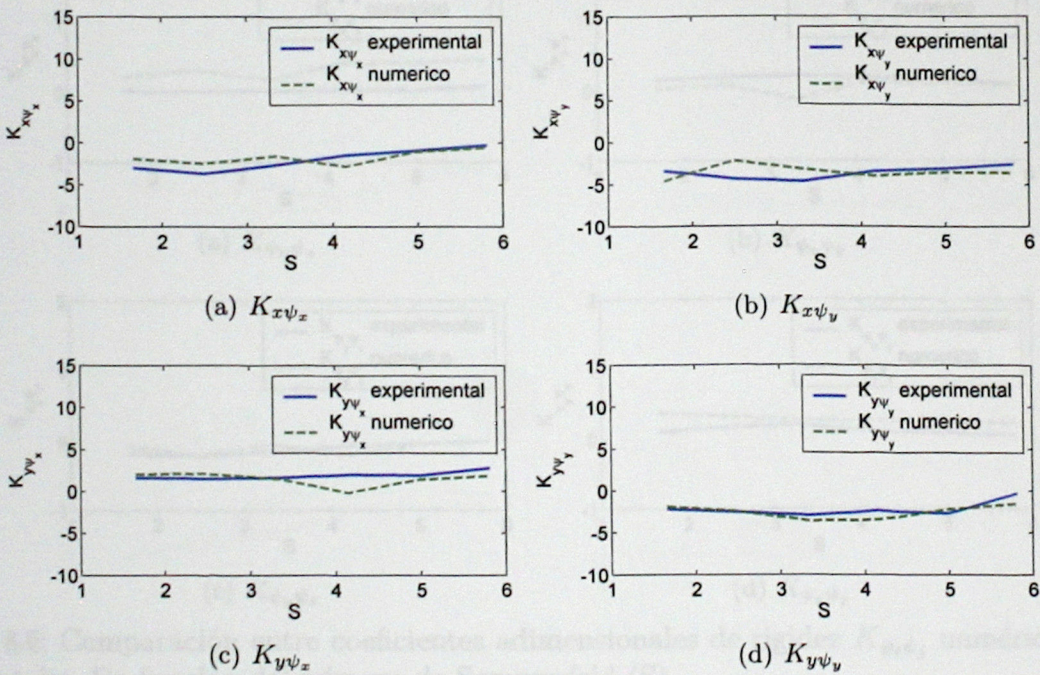


Figura 8.4: Comparación entre coeficientes adimensionales de rigidez $K_{i\psi_j}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)

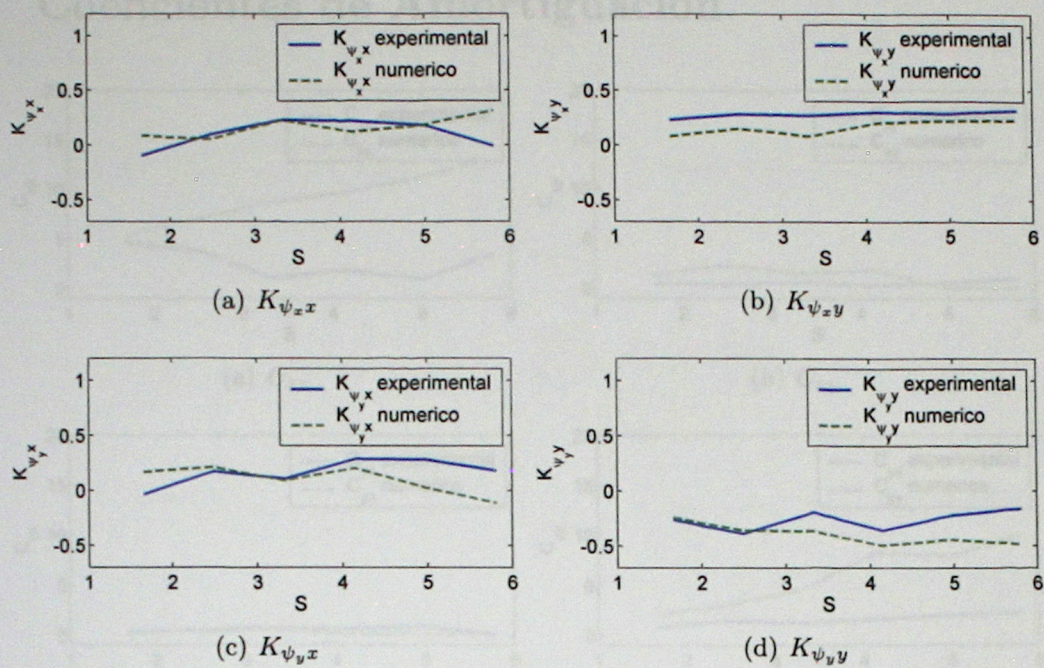


Figura 8.5: Comparación entre coeficientes adimensionales de rigidez $K_{\psi_{ij}}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)

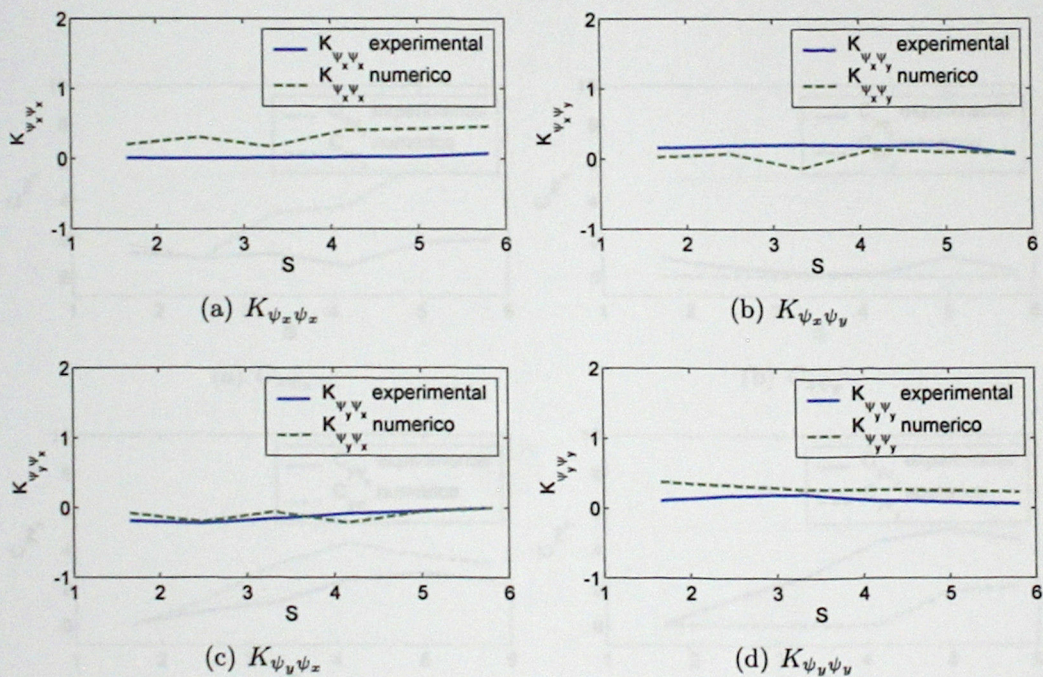


Figura 8.6: Comparación entre coeficientes adimensionales de rigidez $K_{\psi_i \psi_j}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)

8.2. Coeficientes de Amortiguación

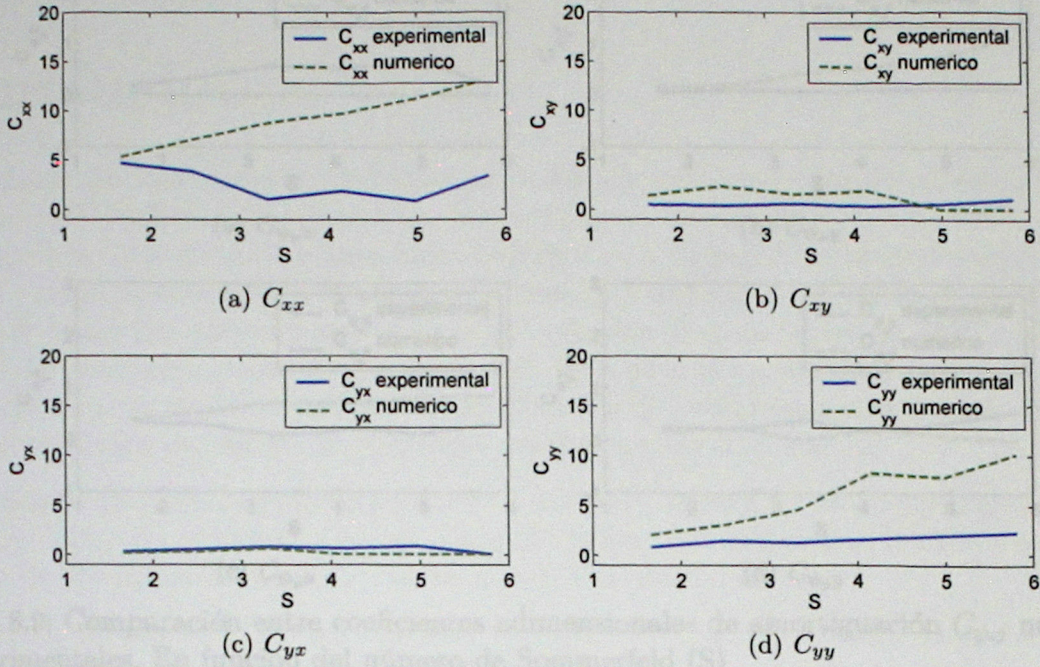


Figura 8.7: Comparación entre coeficientes adimensionales de amortiguación C_{ij} numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)

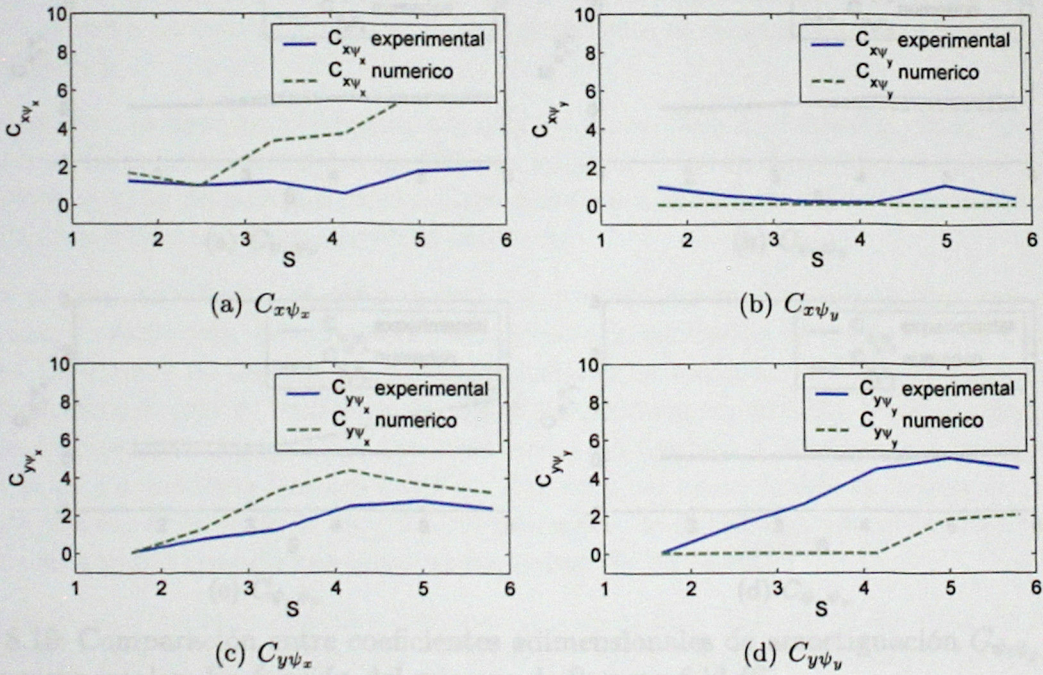


Figura 8.8: Comparación entre coeficientes adimensionales de amortiguación $C_{i\psi_j}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)

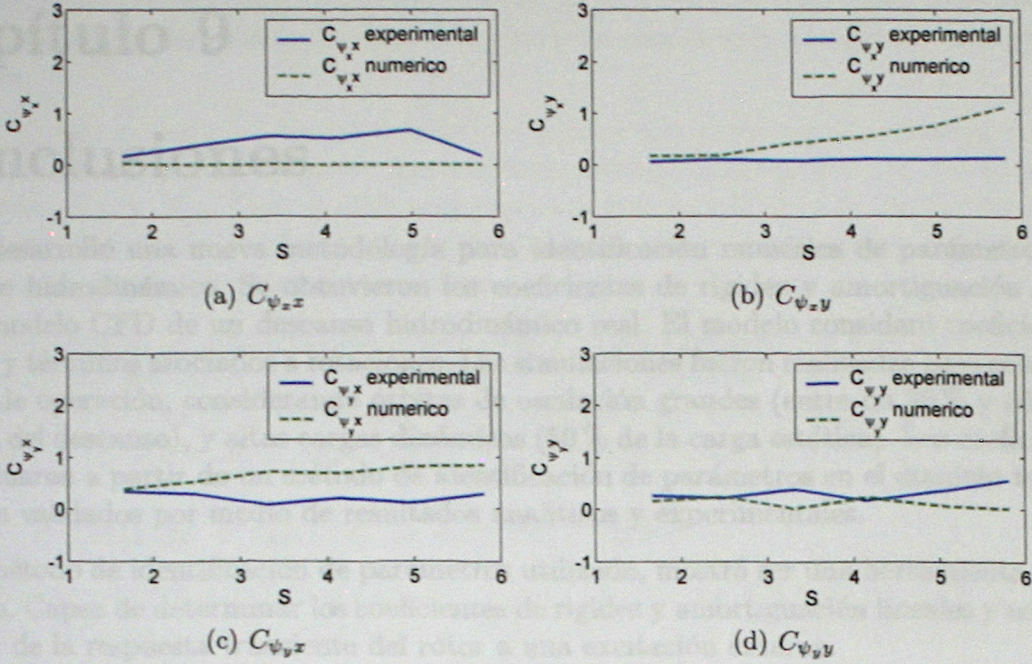


Figura 8.9: Comparación entre coeficientes adimensionales de amortiguación $C_{\psi_{ij}}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)

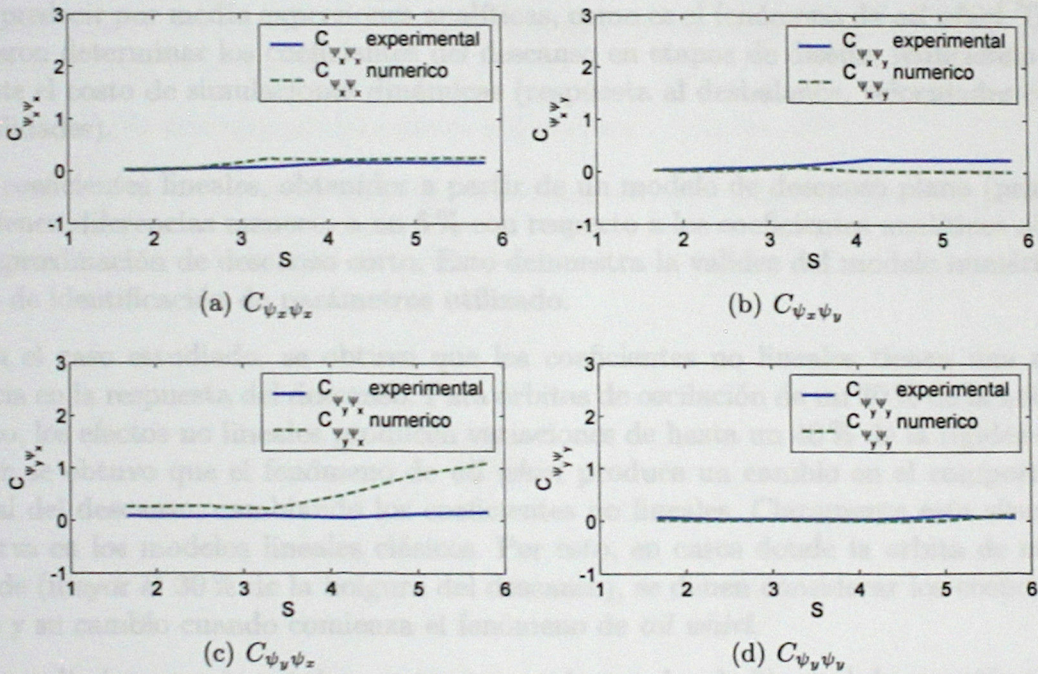


Figura 8.10: Comparación entre coeficientes adimensionales de amortiguación $C_{\psi_i \psi_j}$ numéricos y experimentales. En función del número de Sommerfeld (S)

Capítulo 9

Conclusiones

Se desarrolló una nueva metodología para identificación numérica de parámetros en un descanso hidrodinámico. Se obtuvieron los coeficientes de rigidez y amortiguación a partir de un modelo CFD de un descanso hidrodinámico real. El modelo consideró coeficientes no lineales y términos asociados a rotaciones. Las simulaciones fueron realizadas bajo condiciones típicas de operación, considerando órbitas de oscilación grandes (entre un 20 % y 60 % de la holgura del descanso), y altas cargas dinámicas (50 % de la carga estática). Los coeficientes se determinaron a partir de un método de identificación de parámetros en el dominio temporal, y fueron validados por medio de resultados analíticos y experimentales.

El método de identificación de parámetros utilizado, mostró ser una herramienta eficiente y rápida. Capaz de determinar los coeficientes de rigidez y amortiguación lineales y no lineales a partir de la respuesta transiente del rotor a una excitación externa.

A partir del modelo CFD del descanso hidrodinámico, se pudo simular la dinámica transiente del descanso bajo diferentes condiciones de operación. Los resultados obtenidos a partir del modelo CFD fueron validados con resultados analíticos disponibles en la literatura actual. Con el modelo numérico fue posible predecir fenómenos propios del descanso, que no es posible predecir por medio expresiones analíticas, como es el fenómeno de *oil whirl*. También, se pudieron determinar los coeficientes del descanso en etapas de diseño, reduciendo sustancialmente el costo de simulaciones dinámicas (respuesta al desbalance, velocidades críticas e inestabilidades).

Los coeficientes lineales, obtenidos a partir de un modelo de descanso plano (primer modelo), tienen diferencias menores a un 5 % con respecto a los coeficientes analíticos obtenidos con la aproximación de descanso corto. Esto demuestra la validez del modelo numérico y del método de identificación de parámetros utilizado.

Para el caso estudiado, se obtuvo que los coeficientes no lineales tienen una marcada influencia en la respuesta del descanso. Para órbitas de oscilación de un 30 % de la holgura del descanso, los efectos no lineales producen variaciones de hasta un 40 % de la rigidez efectiva. También se obtuvo que el fenómeno de *oil whirl* produce un cambio en el comportamiento no lineal del descanso, cambiando los coeficientes no lineales. Claramente esta situación no se observa en los modelos lineales clásicos. Por esto, en casos donde la órbita de oscilación es grande (mayor al 30 % de la holgura del descanso), se deben considerar los coeficientes no lineales y su cambio cuando comienza el fenómeno de *oil whirl*.

Los resultados experimentales mostraron que los grados de libertad de rotación tienen un efecto importante en los coeficientes de rigidez y amortiguación estimados del descanso, y que los coeficientes que relacionan las fuerzas con las rotaciones tienen un efecto importante en la respuesta del sistema rotor. Estos resultados fueron obtenidos también en el modelo

numérico. Se deduce entonces, que al modelar un sistema rotor con descansos hidrodinámicos, se deben considerar las rotaciones en el descanso y los coeficientes de rigidez y amortiguación asociados.

Para el caso en estudio, los coeficientes de rigidez obtenidos con los modelos numéricos y experimentales son muy similares. Las mayores diferencias se encontraron en los coeficientes directos K_{xx} y K_{yy} . Esto confirma lo expuesto por San-Andrés & De-Santiago (2005), donde describieron que los efectos de inercia del fluido tienen una marcada influencia en los coeficientes de rigidez directos del descanso.

Los coeficientes de amortiguación numéricos y experimentales, por otro lado, tienen diferencias mayores. Estas diferencias se pueden disminuir al mejorar el modelo de amortiguación del rotor experimental, y al considerar otras variables en el modelo como la temperatura del aceite, que tiene una relación exponencial con la viscosidad del aceite.

9.1. Futuros Puntos a Desarrollar

El modelo numérico utilizado mostró ser una herramienta útil para predecir la respuesta no lineal a partidas, paradas, respuesta al desbalance, y para predecir fenómenos propios del descanso como el *oil whirl* y *oil whip*. Aunque solo se probó la aplicabilidad bajo condiciones de flujo laminar e incompresible, con propiedades constantes, y sin cavitación, la extensión a utilizar modelos más realistas es directa. Como futuros puntos a desarrollar se pueden mencionar los siguientes:

- Considerar la distribución de temperatura en el descanso y el cambio de la viscosidad del aceite con la temperatura.
- Considerar la flexibilidad del soporte del descanso.
- Considerar otro tipo de geometrías, como descansos de lóbulos, tipo tilting pad, etc.
- Realizar un modelo turbulento que considere los efectos de inercia del fluido.

Bibliografía

- ADINA. 2003. *Theory and Modeling Guide*. ADINA R & D, Inc.
- Burrows, C. R., & Sahinkaya, M. N. 1982a. Estimation of rotor support characteristics and unbalance mass distribution in rotating machinery. *6th IFAC Identification Symposium*, 651–656.
- Burrows, C. R., & Sahinkaya, M. N. 1982b. Frequency-domain estimation of linearized oil-film coefficients. *Journal of Lubrication Technology*, **104**, 210–215.
- Burrows, C. R., & Sahinkaya, M. N. 1982c. Parameter estimation of multi-mode rotor-bearing systems. *Proc. Royal Society, London*, **A379**, 367–387.
- Cadzow, J. A. 2002. Minimum l_1 , l_2 , and l_∞ Norm Approximate Solutions to an Overdetermined System of Linear Equations. *Digital Signal Processing*, **12**, 524–560.
- Chen, P. Y. P., & Hahn, E. J. 1998. Use of computational fluid dynamics in hydrodynamic lubrication. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, **212**, 427–436.
- Childs, D. 1993. *Turbomachinery Rotordynamics "Phenomena, modeling, and Analysis"*. New York: John Wiley & Sons.
- Choy, F. K., Braun, M. J., & Hu, Y. 1991. Nonlinear effects in a plain journal bearing: part 1 - analytical study. *ASME Journal of Tribology*, **113**, 555–562.
- Das, S., Guha, S. K., & Chattopadhyay, A. K. 2001. On the conical whirl instability of hydrodynamic journal bearings lubricated with micropolar fluids. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, **215**, 431–439.
- Ebrat, O., Mourelatos, Z. P., Vlahopoulos, N., & Vaidyanathan, K. 2004. Calculation of journal bearing dynamic characteristics including journal misalignment and bearing structural deformation. *Tribology Transactions*, **47**, 94–102.
- Funakawa, M., & Tatara, A. 1964. Stability criterion of an elastic rotor in journal bearings. *Trans. JSME*, **218**, 1238–1244.
- Gomiciaga, R., & Keogh, P. S. 1999. Orbit induced journal temperature variation in hydrodynamic bearings. *Journal of Tribology*, **121**, 77–84.
- Harris, C. M., & Piersol, A. G. 2002. *Harris' Shock and Vibrations Handbook*. 5th edn. McGraw-Hill.
- Heylen, W., Lammens, S., & Sas, P. 1995. *Modal Analysis Theory and Testing*. Katholieke Universiteit Leuven.
- Hirani, H., Athre, K., & Biswas, S. 1998. Rapid and globally convergent method for dynamically loaded journal bearing design. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, **212**, 207–214.

BIBLIOGRAFÍA

- Hisa, S., Matsuura, T., & Someya, T. 1980. Experiments on the dynamic characteristics of large scale journal bearings. *Proceedings of the 2nd International Conference on Vibration in Rotating Machinery, IMechE*, 223–230.
- Hori, Y. 1959. A theory of oil whip. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **26**(2), 189–198.
- Hummel, C. 1926. Kritische drehzahlen als folge der nachgiebigkeit des schmiermittels im lager. *VDI-Forschungsheft*, 287.
- Jiang, G. D., H. Hu, W. Xu, Jin, Z. W., & Xie, Y. B. 1997. Identification of oil film coefficients of a large journal bearing on a full scale journal bearing test rig. *Tribology International*, **30**(11), 789–793.
- Jiang, P.L., & Yu, L. 2000. Identification of the oil film dynamic coefficients in a rotor-bearing system with a hydrodynamic thrust bearing. *Journal of Sound and Vibration*, **236**(4), 733–740.
- Keogh, P. S., Gomiciaga, R., & Khonsari, M. M. 1997. CFD based design techniques for thermal prediction in a generic two-axial groove hydrodynamic journal bearing. *Journal of Tribology*, **119**, 428–436.
- Kim, K.J., & Lee, C.W. 2003. Identification of dynamic stiffness of squeeze film damper using active magnetic bearing system as an exciter. *ISCORMS-2*, August.
- Kostrzewsky, G. J., Flack, R. D., & Barret, L. E. 1998. Theoretical and experimental dynamic characteristics of a highly preloaded three-lobe journal bearing. *Tribology Transactions*, **41**(3), 392–398.
- Lahmar, M., Haddad, A., & Nicolas, D. 1998. Elastohydrodynamic analysis of one-layered journal bearings. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J*, **212**, 193–205.
- Lalanne, M., & Ferraris, G. 1998. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. 2nd edn. John Wiley & Sons.
- Lasdon, L. S., & Waren, A. D. 1978. Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **4**, 34–50.
- Lund, J.W. 1987. Review of the concept for dynamic coefficients for fluid film journal bearings. *ASME Journal of Tribology*, **109**, 38–41.
- Mitchell, J. R., Holmes, R., & Ballegooyen, H.V. 1965. Experimental determination of a bearing oil film stiffness. *Proceedings of the 4th Lubrication and Wear Convention, IMechE*, **180**(3K), 90–96.
- Muszynska, A. 1987. Tracking the mystery of oil whirl. *Sound Vib.*, 8–11.
- Newkirk, B.L. 1924. Shaft whipping. *General Electric Review*, 169.

BIBLIOGRAFÍA

- Newkirk, B.L., & Taylor, H. D. 1925. Shaft whipping due to oil action in journal bearing. *General Electric Review*, 559–568.
- Parkins, D.W., & Horner, D. 1993. Tilting pad journal bearings - measured and predicted stiffness coefficients. *Tribology Transactions*, **36**(3), 359–366.
- Pettinato, B., Flack, R. D., & Barrett, L. E. 2001a. Test results for a highly preloaded three-lobe journal bearing - effect of load orientation on static and dynamic characteristics. *Journal of the Society of Tribologists and Lubrication Engineers*, 23–30.
- Pettinato, B. C., Flack, R. D., & Barrett, L. E. 2001b. Effects of excitation frequency and orbit magnitude on the dynamic characteristics of a highly preloaded three-lobe journal bearing. *Tribology Transactions*, **44**(4), 575–582.
- Rao, T. V. V. L. N., & Sawicki, J. 2002. Linear stability analysis for a hydrodynamic journal bearing considering cavitation effects. *Tribology Transactions*, **45**(4), 450–456.
- Rao, T. V. V. L. N., & Sawicki, J. 2003. Dynamic coefficient prediction in multi-lobe journal bearings using a mass conservation algorithm. *Tribology Transactions*, **46**(3), 414–420.
- Reinhardt, E., & Lund, J.W. 1975. The influence of fluid inertia on the dynamic properties of journal bearings. *Wear*, **212**(2), 159–167.
- Rouvas, C., & Childs, D. W. 1993. A parameter identification method for the rotordynamic coefficients of a high reynolds number hydrodynamic bearing. *Journal of Vibration and Acoustics*, **115**, 264–269.
- Sakakida, H., Asatsu, S., & Tasaki, S. 1992. The static and dynamic characteristics of 23 inch (584.2 mm) diameter journal bearing. *Proceedings of the 5th International Conference on Vibration in Rotating Machinery, IMechE*, 351–358.
- San-Andrés, L., & De-Santiago, O. 2004a. Forced response of a squeeze film damper and identification of force coefficients from large orbital motions. *Journal of Tribology*, **126**, 292–300.
- San-Andrés, L., & De-Santiago, O. 2004b. Identification of Bearing Force Coefficients From Measurements of Imbalance Response of a Flexible Rotor. *ASME Turbo Expo*.
- San-Andrés, L., & De-Santiago, O. 2005. Identification of journal bearing force coefficients under high dynamic loading centered static operation. *Tribology Transactions*, **48**, 9–17.
- Sawicki, J., & Rao, T. V. V. L. N. 2001. Nonlinear prediction of rotordynamic coefficients for a hydrodynamic journal bearing. *Tribology Transactions*, **44**(3), 367–374.
- Sawicki, J., & Rao, T. V. V. L. N. 2004. A nonlinear model for prediction of dynamic coefficients in a hydrodynamic journal bearing. *International Journal of Rotating Machinery*, **10**(6), 507–513.

BIBLIOGRAFÍA

- Sharma, S. C., Jain, S. C., & Nagaraju, T. 2002. Combined influence of journal misalignment and surface roughness on the performance of an orifice compensated non-recessed hybrid journal bearing. *Tribology Transactions*, **45**(4), 457-463.
- Someya, T. 1976. An investigation into the spring and damping coefficients of the oil film in journal bearing. *Transactions of The Japan Society of Mechanical Engineerings*, **42**(360), 2599-2606.
- Stodola, A. 1925. Critical shaft perturbations as a result of the elasticity of the oil cushion in the bearings. *Schweizerische Bauzeitung*, **85**(21).
- Tiwari, R., Lees, A.W., & Friswell, M.I. 2004. Identification of dynamic bearing parameters: a review. *The Shock and Vibrations Digest*, **36**(2), 99-124.
- Tucker, P. G., & Keogh, P. S. 1996. On the dynamic thermal state in a hydrodynamic bearing with a wirling journal using CFD techniques. *Journal of Tribology*, **118**, 356-363.
- Yamamoto, T., & Ishida, Y. 2001. *Linear and Nonlinear Rotordynamics "A Modern Treatment with Applications"*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Youyun, Zhang, Youbai, Xie, & Qingfeng, Meng. 1988. Identification of linearized oil-film coefficients on a rotor-bearing system. *Proceedings of 6th International Modal Analysis Conference*.
- Zhang, X.Y. 1992. On site testing and analysis of the oil whirl and oil whip phenomena in national made 200MW steam turbine generator systems. *Schweizerische Bauzeitung*, **12**(5), 32-37.
- Zhou, H., Zhao, S., Xu, H., & Zhu, J. 2004. An experimental study on oil-film dynamic coefficients. *Tribology International*, **37**, 245-253.

Apéndice A

Determinación analítica de los coeficientes de rigidez y amortiguación

A.1. Aproximación de Descanso Corto

Las fuerzas que ejerce un descanso plano adoptando la hipótesis de descanso corto y la condición de Gumbel, vienen dadas por

$$N = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{R}{c}\right)^2 \frac{L^3}{R} \left[\frac{2\kappa^2(\Omega + 2\dot{\theta})}{(1 - \kappa^2)^2} + \frac{\pi\dot{\kappa}(1 + 2\kappa^2)}{(1 - \kappa^2)^{5/2}} \right] \quad (\text{A.1})$$

$$T = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{R}{c}\right)^2 \frac{L^3}{R} \left[\frac{\pi\kappa(\Omega + 2\dot{\theta})}{2(1 - \kappa^2)^{3/2}} + \frac{4\kappa\dot{\kappa}}{(1 - \kappa^2)^2} \right] \quad (\text{A.2})$$

Sustituyendo $S = \frac{\mu\omega RL}{F_0\pi} \left(\frac{R}{c}\right)^2$ en las ecuaciones A.1 y A.2, y reemplazando $\dot{\theta} = \dot{\kappa} = 0$, se obtiene que

$$N_0 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 F_0\pi S \left(\frac{\kappa_0^2}{(1 - \kappa_0^2)^2}\right) \quad (\text{A.3})$$

$$T_0 = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{L}{R}\right)^2 F_0 S \left(\frac{\kappa_0}{(1 - \kappa_0^2)^{3/2}}\right) \quad (\text{A.4})$$

Con la condición de equilibrio que $N_0^2 + T_0^2 = F_0^2$, se obtiene la siguiente relación para S y la posición de equilibrio κ_0 :

$$S = \left(\pi \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\kappa_0}{1 - \kappa_0^2} \sqrt{\frac{\kappa_0^2}{(1 - \kappa_0^2)^2} + \frac{\pi^2}{16} \frac{1}{1 - \kappa_0^2}} \right)^{-1} \quad (\text{A.5})$$

Para determinar los coeficientes de amortiguación y rigidez, se derivan las ecuaciones de las fuerzas cuando el rotor se saca levemente de su posición de equilibrio y luego se linealizan. Sustituyendo $\kappa = \kappa_0 + \Delta\kappa$ y $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, en las ecuaciones A.1 y A.2 y linealizandolas para $\Delta\kappa, \Delta\theta, \Delta\dot{\kappa}, \Delta\dot{\theta}$, se obtiene que

$$N = N_0 + A_1\Delta\kappa + B_1\Delta\dot{\theta} + C_1\Delta\dot{\kappa} \quad (\text{A.6})$$

Donde

$$N_0 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 F_0 \pi S \frac{\kappa_0^2}{(1 - \kappa_0^2)^2} \quad (\text{A.7})$$

$$A_1 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 F_0 \pi S \left(\frac{2\kappa_0}{(1 - \kappa_0^2)^2} + \frac{4\kappa_0^3}{(1 - \kappa_0^2)^3} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$B_1 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 F_0 \pi S \frac{2}{\Omega} \frac{\kappa_0^2}{(1 - \kappa_0^2)^2} \quad (\text{A.9})$$

$$C_1 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 F_0 \pi S \frac{1}{2\Omega} \frac{\pi(1 + 2\kappa_0^2)}{(1 - \kappa_0^2)^{5/2}} \quad (\text{A.10})$$

$$T = T_0 + A_2 \Delta \kappa + B_2 \Delta \dot{\theta} + C_2 \Delta \dot{\kappa} \quad (\text{A.11})$$

Donde

$$T_0 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 F_0 S \frac{\pi^2}{4} \frac{\kappa_0}{(1 - \kappa_0^2)^{3/2}} \quad (\text{A.12})$$

$$A_2 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 F_0 \pi S \left(\frac{3\pi\kappa_0^2}{4(1 - \kappa_0^2)^{5/2}} + \frac{\pi}{4(1 - \kappa_0^2)^{3/2}} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$B_2 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 F_0 S \frac{\pi^2}{2\Omega} \frac{\kappa_0}{(1 - \kappa_0^2)^{3/2}} \quad (\text{A.14})$$

$$C_2 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 F_0 S \frac{2\pi}{\Omega} \frac{\kappa_0}{(1 - \kappa_0^2)^2} \quad (\text{A.15})$$

De la transformación $F_x = -N \cos \theta + T \sin \theta$, $F_y = -N \sin \theta - T \cos \theta$, se obtienen los componentes de la fuerza según x e y respectivamente. Reemplazando y linealizando

$$\cos(\theta_0 + \Delta \theta) = \cos \theta_0 - \Delta \theta \sin \theta_0 \quad (\text{A.16})$$

$$\sin(\theta_0 + \Delta \theta) = \sin \theta_0 + \Delta \theta \cos \theta_0 \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} -F_x = & N_0 \cos \theta_0 - N_0 \sin \theta_0 \Delta \theta + A_1 \cos \theta_0 \Delta \kappa + B_1 \cos \theta_0 \Delta \dot{\theta} + C_1 \cos \theta_0 \Delta \dot{\kappa} \\ & - T_0 \sin \theta_0 - T_0 \cos \theta_0 \Delta \theta - A_2 \sin \theta_0 \Delta \kappa - B_2 \sin \theta_0 \Delta \dot{\theta} - C_2 \sin \theta_0 \Delta \dot{\kappa} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} -F_y = & N_0 \sin \theta_0 + N_0 \cos \theta_0 \Delta \theta + A_1 \sin \theta_0 \Delta \kappa + B_1 \sin \theta_0 \Delta \dot{\theta} + C_1 \sin \theta_0 \Delta \dot{\kappa} \\ & + T_0 \cos \theta_0 - T_0 \sin \theta_0 \Delta \theta + A_2 \cos \theta_0 \Delta \kappa + B_2 \cos \theta_0 \Delta \dot{\theta} + C_2 \cos \theta_0 \Delta \dot{\kappa} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Reordenando

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -F_x \\ -F_y \end{Bmatrix} = & \begin{Bmatrix} -F_{x0} \\ -F_{y0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \cos \theta_0 - A_2 \sin \theta_0 & -N_0 \sin \theta_0 - T_0 \cos \theta_0 \\ A_1 \sin \theta_0 + A_2 \cos \theta_0 & N_0 \cos \theta_0 - T_0 \sin \theta_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \kappa \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} C_1 \cos \theta_0 - C_2 \sin \theta_0 & B_1 \cos \theta_0 - B_2 \sin \theta_0 \\ C_1 \sin \theta_0 + C_2 \cos \theta_0 & B_1 \sin \theta_0 + B_2 \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\kappa} \\ \Delta \dot{\theta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Lo que se puede expresar en función de Δx , Δy , $\Delta \dot{x}$, $\Delta \dot{y}$, por el cambio de variables

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\kappa_0 \cdot \sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \kappa_0 \cdot \cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\kappa \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

El valor de $\sin\theta_0$ y $\cos\theta_0$ se pueden obtener al reemplazar la relación $N_0 = F_0 \sin\theta_0$ y $T_0 = F_0 \cos\theta_0$ en las ecuaciones A.3, A.4

$$\sin\theta_0 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 \pi S \left(\frac{\kappa_0^2}{(1-\kappa_0^2)^2}\right) \quad (\text{A.22})$$

$$\cos\theta_0 = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{L}{R}\right)^2 S \left(\frac{\kappa_0}{(1-\kappa_0^2)^{3/2}}\right) \quad (\text{A.23})$$

De la relación

$$\begin{Bmatrix} -F_x \\ -F_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_{x0} \\ -F_{y0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

definiendo los coeficientes adimensionales como

$$K_{ij} = \frac{ck_{ij}}{F_0}, \quad C_{ij} = \frac{c\Omega c_{ij}}{F_0} \quad (\text{A.25})$$

Y reemplazando se obtiene que

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_1 \cos\theta_0 - A'_2 \sin\theta_0 & -N'_0 \sin\theta_0 - T'_0 \cos\theta_0 \\ A'_1 \sin\theta_0 + A'_2 \cos\theta_0 & N'_0 \cos\theta_0 - T'_0 \sin\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0/\kappa_0 & \cos\theta_0/\kappa_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_1 \cos\theta_0 - C'_2 \sin\theta_0 & B'_1 \cos\theta_0 - B'_2 \sin\theta_0 \\ C'_1 \sin\theta_0 + C'_2 \cos\theta_0 & B'_1 \sin\theta_0 + B'_2 \cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0/\kappa_0 & \cos\theta_0/\kappa_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Donde

$$A'_1 = \pi \left(\frac{L}{R} \right)^2 S \left(\frac{2\kappa_0}{(1 - \kappa_0^2)^2} + \frac{4\kappa_0^3}{(1 - \kappa_0^2)^{3/2}} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$A'_2 = \pi \left(\frac{L}{R} \right)^2 S \left(\frac{3\pi\kappa_0^2}{4(1 - \kappa_0^2)^{5/2}} + \frac{\pi}{4(1 - \kappa_0^2)^{3/2}} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$B'_1 = 2\pi \left(\frac{L}{R} \right)^2 S \frac{\kappa_0^2}{(1 - \kappa_0^2)^2} \quad (\text{A.30})$$

$$B'_2 = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{L}{R} \right)^2 S \frac{\kappa_0}{(1 - \kappa_0^2)^{3/2}} \quad (\text{A.31})$$

$$C'_1 = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{L}{R} \right)^2 S \frac{(1 + 2\kappa_0^2)}{(1 - \kappa_0^2)^{5/2}} \quad (\text{A.32})$$

$$C'_2 = 2\pi \left(\frac{L}{R} \right)^2 S \frac{\kappa_0}{(1 - \kappa_0^2)^2} \quad (\text{A.33})$$

$$N'_0 = \pi \left(\frac{L}{R} \right)^2 S \frac{\kappa_0^2}{(1 - \kappa_0^2)^2} \quad (\text{A.34})$$

$$T'_0 = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{L}{R} \right)^2 S \frac{\kappa_0}{(1 - \kappa_0^2)^{3/2}} \quad (\text{A.35})$$

A.2. Aproximación de Descanso Largo

La fuerzas que ejerce un descanso plano adoptando la hipótesis de descanso largo y la condición de Gumbel, vienen dadas por

$$N = 6\mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 RL \left[\frac{2\kappa^2(\Omega + 2\dot{\theta})}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)} + \frac{2\dot{\kappa}}{(1 - \kappa^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2 + \kappa^2)} \right\} \right] \quad (\text{A.36})$$

$$T = 6\mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 RL \left[\frac{\pi\kappa(\Omega + 2\dot{\theta})}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)^{1/2}} + \frac{4\kappa\dot{\kappa}}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)^{1/2}} \right] \quad (\text{A.37})$$

Sustituyendo $S = \frac{\mu\omega RL}{F_0\pi} \left(\frac{R}{c} \right)^2$ en las ecuaciones A.36 y A.37, y reemplazando $\dot{\theta} = \dot{\kappa} = 0$, se obtiene que

$$N_0 = 6F_0\pi S \left(\frac{2\kappa_0^2}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)} \right) \quad (\text{A.38})$$

$$T_0 = 6F_0\pi^2 S \left(\frac{\kappa_0}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)^{1/2}} \right) \quad (\text{A.39})$$

Con la condición de equilibrio que $N_0^2 + T_0^2 = F_0^2$, se obtiene la siguiente relación para S y la posición de equilibrio κ_0 :

$$S = \left(6\pi \frac{\kappa_0}{2 + \kappa_0^2} \sqrt{\frac{4\kappa_0^2}{(1 - \kappa_0^2)^2} + \frac{\pi^2}{1 - \kappa_0^2}} \right)^{-1} \quad (\text{A.40})$$

Para determinar los coeficientes de amortiguación y rigidez, se derivan las ecuaciones de las fuerzas cuando el rotor se saca levemente de su posición de equilibrio y luego se linealizan. Sustituyendo $\kappa = \kappa_0 + \Delta\kappa$ y $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, en las ecuaciones A.36 y A.37 y linealizandolas para $\Delta\kappa, \Delta\theta, \Delta\dot{\kappa}, \Delta\dot{\theta}$, se obtiene que

$$N = N_0 + A_1\Delta\kappa + B_1\Delta\dot{\theta} + C_1\Delta\dot{\kappa} \quad (\text{A.41})$$

Donde

$$N_0 = 6F_0\pi S \left(\frac{2\kappa_0^2}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)} \right) \quad (\text{A.42})$$

$$A_1 = 24F_0\pi S \left(\frac{\kappa_0^2(\kappa_0 + 2\kappa_0^3)}{(1 - \kappa_0^2)^2(2 + \kappa_0^2)^2} + \frac{\kappa_0}{(1 - \kappa_0^2)(2 + \kappa_0^2)} \right) \quad (\text{A.43})$$

$$B_1 = \frac{24F_0\pi S}{\Omega} \frac{\kappa_0^2}{(1 - \kappa_0^2)(2 + \kappa_0^2)} \quad (\text{A.44})$$

$$C_1 = \frac{12F_0\pi S}{\Omega} \frac{1}{(1 - \kappa_0^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2 + \kappa_0^2)} \right\} \quad (\text{A.45})$$

$$T = T_0 + A_2\Delta\kappa + B_2\Delta\dot{\theta} + C_2\Delta\dot{\kappa} \quad (\text{A.46})$$

Donde

$$T_0 = 6F_0\pi^2 S \left(\frac{\kappa_0}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)^{1/2}} \right) \quad (\text{A.47})$$

$$A_2 = \frac{6F_0\pi^2 S}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)^{1/2}} \left(\frac{\kappa_0^2}{(1 - \kappa_0^2)} - \frac{2\kappa_0}{(2 + \kappa_0^2)} + 1 \right) \quad (\text{A.48})$$

$$B_2 = \frac{12\pi^2 F_0 S}{\Omega} \frac{\kappa_0}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)^{1/2}} \quad (\text{A.49})$$

$$C_2 = \frac{24\pi F_0 S}{\Omega} \frac{\kappa_0}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)^{1/2}} \quad (\text{A.50})$$

De la transformación $F_x = -N\cos\theta + T\sin\theta$, $F_y = -N\sin\theta - T\cos\theta$, se obtienen los componentes de la fuerza según x e y respectivamente. Reemplazando y linealizando

$$\cos(\theta_0 + \Delta\theta) = \cos\theta_0 - \Delta\theta\sin\theta_0 \quad (\text{A.51})$$

$$\sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \sin\theta_0 + \Delta\theta\cos\theta_0 \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned}
 -F_x &= N_0 \cos \theta_0 - N_0 \sin \theta_0 \Delta \theta + A_1 \cos \theta_0 \Delta \kappa + B_1 \cos \theta_0 \Delta \dot{\theta} + C_1 \cos \theta_0 \Delta \dot{\kappa} \\
 &\quad - T_0 \sin \theta_0 - T_0 \cos \theta_0 \Delta \theta - A_2 \sin \theta_0 \Delta \kappa - B_2 \sin \theta_0 \Delta \dot{\theta} - C_2 \sin \theta_0 \Delta \dot{\kappa}
 \end{aligned} \tag{A.53}$$

$$\begin{aligned}
 -F_y &= N_0 \sin \theta_0 + N_0 \cos \theta_0 \Delta \theta + A_1 \sin \theta_0 \Delta \kappa + B_1 \sin \theta_0 \Delta \dot{\theta} + C_1 \sin \theta_0 \Delta \dot{\kappa} \\
 &\quad + T_0 \cos \theta_0 - T_0 \sin \theta_0 \Delta \theta + A_2 \cos \theta_0 \Delta \kappa + B_2 \cos \theta_0 \Delta \dot{\theta} + C_2 \cos \theta_0 \Delta \dot{\kappa}
 \end{aligned} \tag{A.54}$$

Reordenando

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} -F_x \\ -F_y \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -F_{x0} \\ -F_{y0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \cos \theta_0 - A_2 \sin \theta_0 & -N_0 \sin \theta_0 - T_0 \cos \theta_0 \\ A_1 \sin \theta_0 + A_2 \cos \theta_0 & N_0 \cos \theta_0 - T_0 \sin \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \kappa \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} C_1 \cos \theta_0 - C_2 \sin \theta_0 & B_1 \cos \theta_0 - B_2 \sin \theta_0 \\ C_1 \sin \theta_0 + C_2 \cos \theta_0 & B_1 \sin \theta_0 + B_2 \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\kappa} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.55}$$

Lo que se puede expresar en función de Δx , Δy , $\Delta \dot{x}$, $\Delta \dot{y}$, por el cambio de variables

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\kappa_0 \cdot \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \kappa_0 \cdot \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \kappa \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \tag{A.56}$$

El valor de $\sin \theta_0$ y $\cos \theta_0$ se pueden obtener al reemplazar la relación $N_0 = F_0 \sin \theta_0$ y $T_0 = F_0 \cos \theta_0$ en las ecuaciones A.38, A.39

$$\sin \theta_0 = 6\pi S \left(\frac{2\kappa_0^2}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)} \right) \tag{A.57}$$

$$\cos \theta_0 = 6\pi^2 S \left(\frac{\kappa_0}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)^{1/2}} \right) \tag{A.58}$$

De la relación

$$\begin{Bmatrix} -F_x \\ -F_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_{x0} \\ -F_{y0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix} \tag{A.59}$$

definiendo los coeficientes adimensionales como

$$K_{ij} = \frac{ck_{ij}}{F_0}, \quad C_{ij} = \frac{c\Omega c_{ij}}{F_0} \tag{A.60}$$

Y reemplazando se obtiene que

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_1 \cos \theta_0 - A'_2 \sin \theta_0 & -N'_0 \sin \theta_0 - T'_0 \cos \theta_0 \\ A'_1 \sin \theta_0 + A'_2 \cos \theta_0 & N'_0 \cos \theta_0 - T'_0 \sin \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 / \kappa_0 & \cos \theta_0 / \kappa_0 \end{bmatrix} \tag{A.61}$$

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_1 \cos\theta_0 - C'_2 \sin\theta_0 & B'_1 \cos\theta_0 - B'_2 \sin\theta_0 \\ C'_1 \sin\theta_0 + C'_2 \cos\theta_0 & B'_1 \sin\theta_0 + B'_2 \cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0/\kappa_0 & \cos\theta_0/\kappa_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.62})$$

Donde

$$A'_1 = 24\pi S \left(\frac{\kappa_0^2(\kappa_0 + 2\kappa_0^3)}{(1 - \kappa_0^2)^2(2 + \kappa_0^2)^2} + \frac{\kappa_0}{(1 - \kappa_0^2)(2 + \kappa_0^2)} \right) \quad (\text{A.63})$$

$$A'_2 = \frac{6\pi^2 S}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)^{1/2}} \left(\frac{\kappa_0^2}{(1 - \kappa_0^2)} - \frac{2\kappa_0}{(2 + \kappa_0^2)} + 1 \right) \quad (\text{A.64})$$

$$B'_1 = 24\pi S \frac{\kappa_0^2}{(1 - \kappa_0^2)(2 + \kappa_0^2)} \quad (\text{A.65})$$

$$B'_2 = 12\pi^2 S \frac{\kappa_0}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)^{1/2}} \quad (\text{A.66})$$

$$C'_1 = 12\pi S \frac{1}{(1 - \kappa_0^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2 + \kappa_0^2)} \right\} \quad (\text{A.67})$$

$$C'_2 = 24\pi S \frac{\kappa_0}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)^{1/2}} \quad (\text{A.68})$$

$$N'_0 = 6\pi S \left(\frac{2\kappa_0^2}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)} \right) \quad (\text{A.69})$$

$$T'_0 = 6\pi^2 S \left(\frac{\kappa_0}{(2 + \kappa_0^2)(1 - \kappa_0^2)^{1/2}} \right) \quad (\text{A.70})$$

