



Impredictibilidad en tráfico de peatones: fenómenos emergentes en evacuaciones en una dimensión

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctora en Ciencias con mención en Física
Facultad de Ciencias

por

Matilde Valentina Coello Guzmán

Abril, 2024

Directores de Tesis: **Dr. J. Alejandro Valdivia Hepp**
Dr. Benjamín Toledo Cabrera
Dr. Max Ramírez González

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por la candidata

Matilde Valentina Coello Guzmán

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctora en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 3 de Abril de 2024.

Directores de Tesis

Dr. Alejandro Valdivia

Dr. Benjamín Toledo

Dr. Max Ramírez

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dra. María Daniela Cornejo

Dr. Andrés Concha

BIOGRAFÍA



Nací el 1 de agosto de 1994 a las 7 de la tarde, en el Hospital Clínico de la Universidad de Chile José Joaquín Aguirre. Desde pequeña me interesé en la lectura y las cosas ñoñas, pasiones ampliamente animadas por mi mamá y mi tío, sobretodo cuando resonaron constructivamente con mi desempeño académico.

Cursé la educación básica y media en el Liceo Experimental Manuel de Salas, dependiente de la Universidad de Chile, donde me enamoré de la física gracias a un profesor egresado de Ciencias Exactas (de la Facultad de Ciencias). Uno de mis recuerdos icónicos es haber entrevistado a un físico, en la Radio Universidad de Chile (pregúntele a quién al profesor Valdivia).

Entré a estudiar Licenciatura en Física el 2013, y viví un pregrado marcado por paros en los años impares y cierres de semestre en enero: una más de las experiencias folclóricas de esta gloriosa institución. Hice mi doctorado entre el 2018 y el 2024 y fue difícil, pero como diría Shrek, *Sí se pudo, Burro. Sí se pudo.*

El lector perspicaz notará que llevo toda mi vida en la Universidad de Chile. Es hora de partir. Ya he visto suficientes atardeceres binarios.

Y ahora, una canción para el camino:

The Road goes ever on and on
 Down from the door where it began.
 Now far ahead the Road has gone,
 And I must follow, if I can,
 Pursuing it with eager feet,
 Until it joins some larger way
 Where many paths and errands meet.
 And whither then? I cannot say.

AGRADECIMIENTOS

Pude educarme y entrar a la universidad gracias a las puertas a las que me acercó mi mamá, y a mi tío, que supieron que soy nerd antes que yo. Mi permanencia en el plan de doctorado fue posible gracias a una beca de Doctorado CONICYT. Me la adjudiqué cuando todavía se llamaba CONICYT, ahora se llama ANID.

Doy las gracias por poder concluir mi doctorado al equipo de académicos que me apoyó desde el pregrado, los profesores Benjamín Toledo, Juan Alejandro Valdivia, José Rogan y Max Ramírez. Sin su paciencia, constancia, y pases a gol en los descuentos no estaría aquí. Creo que nunca terminaré de aprender de ustedes. Gracias muchas también para los profesores Pablo Moya y Denisse Pastén, por su cercanía, sinceridad y dedicación.

Agradezco profundamente a los miembros de mi comisión, la profesora María Daniela Cornejo por su tiempo, atención y dedicación, y el profesor Andrés Concha por el empleo, tiempo, atención y dedicación.

Le debo mi permanencia en este mundo a un montón de personas, gatos y hamsters. Le doy las gracias por haber estado desde siempre a Felipe Fontecilla, Gabriela Henríquez e Iván Navia. Le doy las gracias por ser primera línea a Vicente Lenz y Loreto Martínez. Agradezco haber compartido con Javiera Cabezas, Gabriela Yupanqui, Belén Acosta-Tripailao y Valentina Villafior. Agradezco haber podido pelear por física con el Dr. Ignacio Tapia Tapia y haber podido pelear contra los papers de física con Valentina Villafior. Agradezco a Elio Bolsón y Selene Parra por invitarme a participar. Quiroz, gracias por ser mi hermana en STEM. I'm finally PhDone. Estoy agradecida con Elizabeth Garcés por su amistad y sinceridad. Un saludo de nuevo a Vicente y Belén, por haberme llevado a vivir con ustedes y a Loreto por haberme ayudado en la vida. Agradezco a Fernando Encina por las asociaciones libres y a las

voluntarias de Pequeñas Patitas por hacerme sobrevivir la pandemia.

También agradezco a Nicolás Zúñiga por cocinarme lentejas, garbanzos, curry, lasagnas, papitas, pizzas, panqueques, omelettes, pancitos, etcétera.

Finalmente, los más importantes. Mis hamsters, Ema, Toffee y Pirata, y mis gatos, Bombín, Newton, Marie y Cecilia. No habría logrado nada sin ustedes.

Índice

1. Introducción	1
2. Generalidades sobre flujo peatonal	5
2.1. Dinámica de multitudes	5
2.2. Definiendo una multitud y sus constituyentes elementales	9
2.3. Fenómenos colectivos en el flujo peatonal	13
2.4. Catástrofes y la noción errónea del pánico	17
2.5. Efectos de la ansiedad	21
3. Fenómenos colectivos e impredecibilidad	25
3.1. Fenómenos emergentes	26
3.2. Autómatas Celulares para describir sistemas complejos	28
3.3. Complejidad e Impredecibilidad	31
3.4. Predictibilidad y entropía	34
4. Modelos para el flujo peatonal	36
4.1. Modelo de fuerzas sociales	36
4.2. Clasificaciones para los modelos	38
4.3. Modelos basados en agentes	39

5. Pasillo simple determinista	43
5.1. Descripción del modelo	44
5.2. Expresiones teóricas	45
5.2.1. Sistema diluido o no colisional	45
5.2.2. Sistema lleno o colisional	50
5.3. Simulaciones	52
6. Modelo con parálisis aleatoria	57
6.1. Descripción del modelo	58
6.2. Expresiones teóricas	59
6.2.1. Sistema diluido	60
6.2.2. Sistema lleno	61
6.3. Simulaciones	62
7. Modelo con parálisis aleatoria y ansiedad	72
7.1. Descripción del modelo	73
7.2. Expresiones teóricas	76
7.2.1. Entropía	77
7.3. Simulaciones	78
7.3.1. Robustez del sistema lleno	81
7.3.2. Variando L para un sistema lleno	85
7.3.3. Entropía como medida de impredecibilidad	90
8. Conclusiones y proyecciones	95

RESUMEN

Las interacciones aleatorias entre peatones, usualmente afectadas por efectos psicológicos como la ansiedad, pueden producir dinámicas no triviales en la evolución de su flujo. En este trabajo, mejoramos nuestro entendimiento de estos fenómenos implementando simulaciones de autómatas celulares en un modelo simplificado de pasillo unidimensional. Consideramos distintos tipos de estocasticidad que podrían usarse para parametrizar comportamientos sociales, culturales o psicológicos; y estudiamos su incidencia en el tiempo promedio de evacuación y su variabilidad. La aleatoriedad del movimiento de los peatones permite separar entre distintas fases de movimiento, lo que finalmente impulsa la dinámica. Nuestro estudio permite distinguir los fenómenos colectivos emergentes e impredecibilidad propios de pasillos unidimensionales, como los que encontramos en aviones, cines, eventos deportivos masivos, salas de clases, etc. Estos hallazgos pueden ser relevantes para diseñar procesos de evacuación en situaciones de emergencia, donde comportamientos sociales, culturales o psicológicos puedan afectar negativamente el desempeño de las personas y la efectividad del plan de evacuación. Por lo tanto, sería muy útil introducir estos aspectos en las simulaciones de dinámica peatonal. Desde el punto de vista teórico, nuestros hallazgos subrayan la importancia de estudiar sistemas simples para desentrañar la complejidad de sistemas más complicados.

ABSTRACT

Random interactions among pedestrians, usually produced by psychological effects (e.g. anxiety), can produce collective nontrivial phenomena in their flow dynamics. Here, we improve our understanding on these phenomena by implementing cellular automaton simulations in a simplified one-dimensional corridor model. We

consider different types of randomness that could be used to parametrize social, cultural or psychological behaviors; their incidence on the average evacuation time and standard deviation are studied. The randomness in the pedestrians' motion allows the separation between different phases of movement, which in the end, drives the dynamics. Our study allows to observe emergent collective phenomena and unpredictability in specific regimes that occur in one-dimensional hallways, such as those in airplanes, cinemas, massive sports events, classrooms, etc. These findings may be relevant to the design of evacuation procedures in the event of an emergency, where anxiety may compromise people's performance and the effectiveness of the evacuation plan. Therefore, it could be advantageous to introduce these aspects in the simulation of pedestrian dynamics. From a merely theoretical point of view, our findings highlight the importance of understanding simple systems to disentangle the complexity of more complicated ones.

Capítulo 1

Introducción

Es altamente probable que quienes lean este trabajo hayan experimentado una situación donde el adecuado manejo del flujo peatonal fuese crucial. Ya sea utilizando el transporte público, egresando de un estadio o un centro comercial o caminando desde la silla del escritorio al estante con galletas en nuestro hogar, somos representantes activos del movimiento peatonal gran parte del tiempo. Con esto en mente, es fácil ver que los problemas de transporte y organización de multitudes componen un campo de estudio interdisciplinar debido a su transversalidad y alto impacto social. Por ejemplo, el urbanismo y la geografía se interesan en el uso de suelos, según la disponibilidad de recursos, y para eso estudian poblaciones estáticas o de dinámica *lenta*: al comparar el desarrollo de un asentamiento con la dinámica de pasajeros que alberga el andén de un tren subterráneo en hora punta, es evidente que la escala del primer proceso debe medirse en semanas, días o incluso años para registrar cambios relevantes, mientras que en el segundo proceso los cambios notorios pueden producirse incluso segundo a segundo. La circulación de peatones se puede dar en sitios de tráfico intermedio como aeropuertos, estaciones de metro, calles, pasillos de centros comerciales, o en situaciones de egreso en infraestructuras como salas de cine, estadios, cruceros, aviones, buses, entre otros. La comprensión de la dinámica de

multitudes es de creciente interés para la Física, principalmente debido a la dinámica emergente y los comportamientos colectivos exhibidos por las multitudes.

Otro ejemplo cotidiano de interés multidisciplinar es el estudio de tráfico vehicular. Estudios en sistemas simples han permitido dilucidar características esenciales del tráfico vehicular en ciudades: por ejemplo, que incluso el sistema de tráfico controlado por semáforos más simple posible, un vehículo solitario en una calle larga, con semáforos distribuidos de forma genérica, es inherentemente caótico [1]. El objetivo de un estudio de tales características, concentrado en un sistema extremadamente simplificado y no realista, no es realizar predicciones empíricas, sino que caracterizar la dinámica subyacente del sistema. Por otro lado, la Física teórica también ha sido fructífera en sugerir estrategias para mejorar concretamente el tráfico en ciudades. Desde estrategias para evitar embotellamientos en túneles en los años 60 [2, 3], hasta la navegación por GPS, que cambió la manera en que se entiende el tráfico vehicular urbano, pues la navegación satelital permite que un gran porcentaje de vehículos motorizados circulen por las calles con conocimiento de su entorno más allá de su campo de visión inmediato. Usando esta nueva información, se han construido simulaciones de ciudades [4] donde se proponen funciones de costo dinámicas que optimizan (además de la ruta más corta) la ruta más rápida dada la presencia de otros vehículos, o el tiempo de permanencia en una ruta bloqueada, pues cada conductor puede saber qué tan grande es un embotellamiento usando datos satelitales, y elegir de inmediato rutas alternativas más expeditas en lugar de esperar que el bloqueo se despeje. Ambos casos citados muestran el abanico de posibilidades de aporte ofrecidas por una perspectiva física en tópicos cotidianos.

En general, los estudios de flujo peatonal han servido para proveer discernimiento sobre su dinámica subyacente, no para predicciones empíricas exactas. Es más,

gracias a los avances tecnológicos y teóricos que acompañaron a la masificación de los autómatas celulares en la década de los 60, se probó que es suficiente caracterizar su dinámica macroscópica a partir de los fenómenos emergentes resultantes de sus interacciones, aunque sea imposible describirlos analíticamente con un conjunto de ecuaciones diferenciales solucionables, o incluso, conocer el detalle de dichas interacciones. Esta nueva perspectiva permite evitar pérdidas de tiempo y esfuerzo en la búsqueda de precisión que simplemente no se puede obtener, señalando que una vía fructífera para estudiar sistemas de alta complejidad es la caracterización de sus observables estadísticos.

En el caso del flujo peatonal, las herramientas estadísticas son cruciales, entre otras razones, porque los humanos somos capaces de tomar una amplia variedad de decisiones a partir de la misma información. En situaciones de emergencia, esta variabilidad puede conducir a estrategias de evacuación contraproducentes, tanto para el peatón que las emprende como para su entorno, por lo que es crucial incluir comportamientos divergentes en los modelos de evacuaciones. Uno de los objetivos generales de esta investigación, perseguido mediante la elaboración de un modelo sencillo, es dilucidar cómo nuestra aleatoriedad innata desencadena fenómenos colectivos. Consideramos que incluso el sistema de peatones más simple, una fila, es susceptible a cambios en su dinámica al incorporar la impredecibilidad humana; estos comportamientos aleatorios podrían perjudicar al sistema, aumentando el tiempo total de egreso, o, inesperadamente, expedir la auto-organización.

La presente tesis está estructurada en dos partes. La primera, compuesta por los Capítulos 2, 3 y 4, introduce los conceptos generales previamente enunciados, profundizando en bibliografía necesaria y suficiente para delimitar el contexto y objetivos específicos de nuestra investigación. La segunda parte expone el modelo estudiado

en tres etapas de estocasticidad: totalmente determinista (Capítulo 5), con una probabilidad de parálisis espontánea (Capítulo 6) y con una probabilidad de retroceso (Capítulo 7). Finalmente, en el Capítulo 8 de Conclusiones y Proyecciones realizamos una revisión general de los resultados principales, y proyectamos posibles áreas de indagación facilitadas por nuestra investigación.

Capítulo 2

Generalidades sobre flujo peatonal

Este capítulo esboza una visión general de la dinámica de multitudes, con el objetivo de situar nuestro problema particular dentro del área. El recorrido bibliográfico pretende enmarcar nuestra investigación, contextualizando su importancia, objetivos y proyecciones. Para el presente capítulo, nos basaremos en gran medida en la revisión elaborada por Schadschneider *et al.* [5], con especial énfasis en sus discusiones sobre la dificultad en la obtención e interpretación de observaciones empíricas, la caracterización de los fenómenos colectivos asociados a la dinámica de multitudes, y las nociones erróneas en el entendimiento de los detonantes de catástrofes colectivas.

2.1. Dinámica de multitudes

La dinámica de multitudes es de interés general, ya que se presenta en variados contextos. En la naturaleza, manadas de animales exhiben comportamientos migratorios, algunos insectos se organizan en colonias y ciertas amebas en estructuras complejas mediadas por mensajes químicos, por mencionar algunos ejemplos. En el contexto humano, la vida rural presenta, entre otros, el desafío de pastoreo de animales y las urbes exigen la gestión de grandes cantidades de personas, ya sea para organizar asentamientos o transportarlas por distancias de escalas disímiles: viajes

intercontinentales o dentro de una misma ciudad, a lugares de estudio o trabajo. Desde 1965, el mayor porcentaje de publicaciones sometidas a revisión de pares en el área de autómatas celulares¹, han sido en física. Entre estas publicaciones, los conceptos clave de flujo peatonal (mencionado como *pedestrian traffic*, en inglés), criticalidad y auto organización han mostrado crecimiento rápido y presencia sostenida hasta al menos 2017 [6]. Esto muestra la larga data del interés de la física en la dinámica de multitudes y su relevancia actual.

Nos centraremos en la dinámica de multitudes que se trasladan de un lugar a otro, compuestas por personas desplazándose a pie, en un número lo suficientemente grande tal que la aproximación estadística sea posible, y en general, necesaria. Estos grupos de peatones pueden reunirse dentro de un espacio delimitado por motivos culturales, laborales o de entretenimiento, por mencionar algunos, reuniéndose en conciertos de música o eventos deportivos, religiosos, de trabajo, o simplemente porque deben transitar por algún lugar en camino a otro.

Dentro de ese contexto, nos concentraremos en los procesos de evacuación que ocurren cuando es necesario el egreso de una gran cantidad de peatones desde un área cerrada, como un edificio o vehículo, debido a algún peligro real o percibido. Los egresos durante una emergencia presentan dificultades ya que se deben llevar a cabo en edificios con diseños complicados, considerando personas con discapacidad para desplazarse, como en hospitales con pacientes postrados, o centros educativos con niños y/o lactantes. Con esto en consideración, se deben diseñar estrategias robustas que alejen a *todos* los peatones del peligro lo más rápidamente posible, por lo que la comprensión de la dinámica subyacente es crucial.

Además, las evacuaciones involucran grupos heterogéneos de personas sometidas a

¹Una técnica de estudio de dinámica de multitudes, de la que hablamos extensamente en el Capítulo 4.

estrés, por lo que deben comprenderse desde puntos de vista fisiológicos, psicológicos, físicos, sociales y culturales. Las variables fisiológicas intervienen, por ejemplo, en el tiempo de respuesta, velocidad y capacidad de movimiento, las psicológicas en el análisis y procesamiento de información, las físicas son las condiciones ambientales, y las culturales pueden englobar preferencias compartidas por una sociedad, como la tolerancia a estar en cercanía de extraños en la vía pública, la tendencia a formar grupos (por no querer separarse del núcleo familiar, o del grupo de amigos) o a las distintas estrategias de colaboración o competencia adoptadas por sociedades más colectivistas o individualistas. En este sentido, al evacuar, un peatón debe procesar variables ambientales, usando reglas que obedecen a sus propias características. Este proceso interno deviene en una acción concreta, con la que el individuo interactúa con su entorno y sus pares. Hemos reunido algunas de estas variables, esquematizando su flujo, en la Figura 2.1.

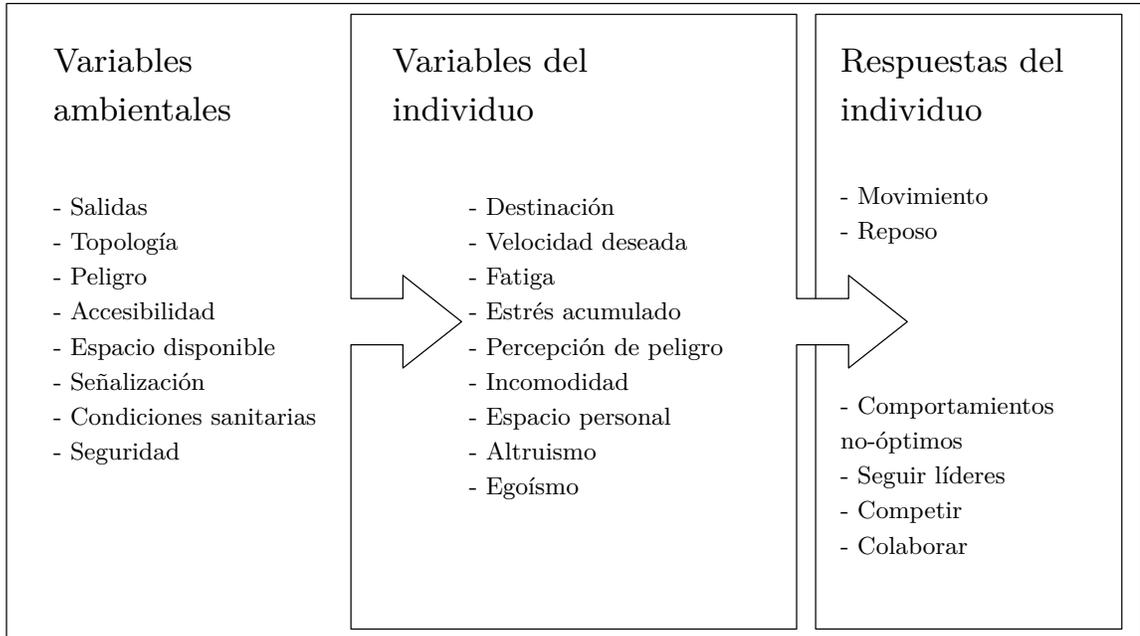


Figura 2.1: Esquema de cómo los peatones procesan variables ambientales.

Nuestra investigación simplifica las variables ambientales y no pretende ahondar en las características internas del individuo. El énfasis se encuentra en diversificar levemente las posibles respuestas de cada peatón y observar las repercusiones en el sistema.

La comprensión de estas variables, y cómo afectan los comportamientos observables de las multitudes evacuadas, son esenciales para evitar catástrofes, como aplastamientos masivos o las llamadas “estampidas humanas”, y es primordial para el diseño de infraestructuras y protocolos de seguridad. Como veremos más adelante, en la Sección 2.4, estas tienen causas sistemáticas y prevenibles, como mal diseño de salidas, señalización insuficiente y descuido de las acciones impredecibles de los peatones.

2.2. Definiendo una multitud y sus constituyentes elementales

En el presente trabajo no estudiaremos una multitud de la manera más general posible, delimitada por una región con condiciones de borde arbitrarias y escalas de tiempo generales. Enfocaremos nuestra indagación a habitaciones unidimensionales, es decir, pasillos con una sola salida, en donde los peatones estén forzados por la topología a formar filas, sin poder adelantarse o intercambiarse, como la situación que se da en el pasillo estrecho de un bus.

A lo largo de la historia, la humanidad ha debido transitar en caminos de fila forzada: Europa está lleno de puentes de piedra con apenas el ancho para pasar un solo caballo de carga. Esta configuración obligaba a las caravanas de comerciantes a desarmar sus carretas y pasar en fila, demora que debían considerar en sus itinerarios de viaje. En pequeños asentamientos, los estrechos puentes peatonales de piedra que cruzaban precipicios peligrosos se volvían tan relevantes para la cultura local que muchos pueblos desarrollaron independientemente folclore parecido: las leyendas de los Puentes del Diablo. Se conjetura que durante su servicio en la Primera Guerra Mundial, el escritor británico J.R.R. Tolkien transitó por varios de estos puentes y extrapoló sus ventajas estratégicas obvias a su obra magna de fantasía, la trilogía de novelas *El Señor de Los Anillos*. Como se explica en *La Comunidad del Anillo*, el puente de Khazad Dûm: “Era una antigua defensa de los enanos contra cualquier enemigo que pusiera el pie en la primera sala y los pasadizos exteriores. No se podía cruzar sino en fila de a uno.” [7].

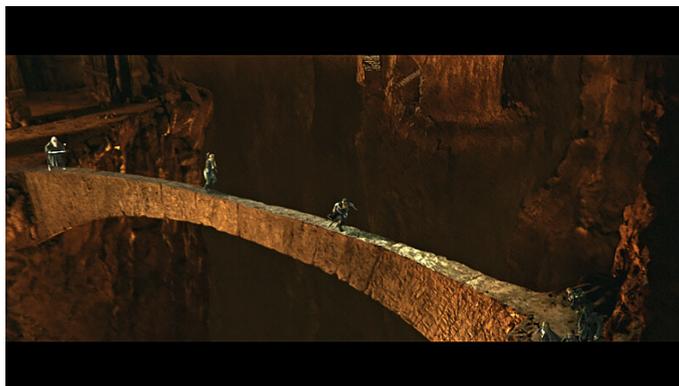


Figura 2.2: Puente de Khazad Dûm, representado en una cinemática del videojuego Lego El Señor de los Anillos. Propiedad de *Warner Bros. Interactive Entertainment* y *Feral Interactive*.

La anterior digresión ejemplifica cómo el transporte de peatones en fila ha sido importante para la humanidad desde antes de la invención de grandes vehículos para transporte de pasajeros, o megaestructuras urbanas. Esta configuración es ciertamente simple de explicar, pero no necesariamente de estudiar. Con más de tres peatones atrapados en un pasillo con una sola salida, ya tenemos un problema de tres cuerpos, es decir, potencial para caos; aunque dudamos poder observar comportamientos caóticos con una dinámica tan gruesa, como explicamos en el Capítulo 5.

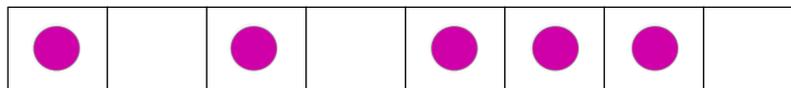


Figura 2.3: Diagrama de peatones ubicados en una fila. Las celdas cuadradas representan espacios disponibles, y los círculos representan a los peatones.

Si consideramos una fila de N peatones que pretendan avanzar en un mismo sentido, como se muestra en la Figura 2.3, veremos que cada uno debe interactuar, con, al menos, sus dos vecinos próximos; a excepción de los dos peatones de los extremos,

que sólo interactúan con un vecino. Sumando todas las posibles interacciones, tendremos $2(N - 2) + 2$ interacciones para rastrear y actualizar en cada paso temporal. Más aún, para N peatones ubicados en fila en una malla con L celdas disponibles, hay

$$\kappa = \binom{L}{N}, \quad (2.1)$$

maneras distintas de organizarlos, donde además N puede tomar cualquier valor entre 0 y L . Así, es fácil intuir la dramática disminución en nuestra capacidad analítica para generar expresiones predictivas para cada conjunto particular de condiciones iniciales, en forma de ecuaciones diferenciales. Pero podemos realizar predicciones sobre variables promedio y encontrar, por ejemplo, distribuciones de probabilidad de ciertos observables, por ejemplo, la cantidad de interacciones de corto alcance que ocurren en un intervalo temporal dado. Ya que el enfoque estadístico nos permite determinar el comportamiento promedio del sistema, es idóneo para dilucidar su dinámica subyacente, pero no es necesariamente apropiado para realizar predicciones empíricas [8]. Dicho de otra manera, los resultados estadísticos arrojan tendencias promedio del sistema, que no tienen por qué corresponderse con *una* realización particular (experimental) del ensamble.

Por otro lado, debemos considerar que los datos empíricos de evacuaciones son complicados de producir e interpretar. Para ser fidedigno, un simulacro de evacuación debe reproducir, al menos en escala, a una gran cantidad de personas albergadas en un recinto complejo. Esto puede ser monetariamente muy costoso. Por ejemplo, el simulacro de evacuación del ferry Stena Invicta, organizado por la Guardia Marina del Reino Unido en 1996, con el objetivo principal de entrenar los tiempos de respuesta

de la tripulación, costó más de £10.000². Además, cosechó críticas de sus propios participantes por su poco realismo [9]. Sin embargo, incluso mejorando el apego de los experimentos a la realidad, realizar simulacros donde se somete a personas a situaciones de riesgo sorpresivo y estrés real puede ser éticamente inviable.

Otra alternativa para evaluar situaciones realistas es la recopilación de evidencia posterior a partir de videos, pero estos pueden tener aberraciones ópticas a la hora de estimar la topología de los lugares, y relatos orales, que son fuertemente afectados por la experiencia subjetiva de los afectados. Es por esto que las observaciones empíricas en general no se usan para *calibrar* parámetros, sino que para *identificar* variables relevantes y validar resultados macroscópicos de simulaciones. De lo anterior, además, se explica que el uso de simulaciones es preferido a la hora de hacer análisis de riesgo cuando se diseñan edificaciones o embarcaciones.

Para esta investigación, nos enfocamos en los siguientes observables macroscópicos: densidad inicial de ocupación, tiempo total de evacuación e interacciones totales entre peatones, y con estos caracterizamos el sistema³. La impredecibilidad se estudia a partir de la desviación estándar de los promedios realizados, y además brevemente usando una medida basada en entropía. Las variables que están fuera del interés de nuestra investigación están relacionadas con tomas de decisiones, como preferencias para formar grupos, tendencias altruistas o egoístas, etcétera. Estas variables son tratadas en otros trabajos, donde se indaga, por ejemplo, la percepción de justicia o injusticia de ciertas configuraciones, cómo esto afecta las decisiones de los peatones y finalmente, el flujo promedio. Podemos encontrar una amplia recopilación de estudios dentro de este tópico en la Sección I de la referencia [10].

²Ajustando a inflación hasta 2023, corresponde a £24.016, o \$ 24.870.000 pesos chilenos, aproximadamente.

³Ahondamos con profundidad en la definición de estos observables el Capítulo 5

2.3. Fenómenos colectivos en el flujo peatonal

El estudio de flujo peatonal se concentra en el movimiento de grupos de peatones generalmente en distancias cortas y medianas. Desde esta perspectiva, se han planteado modelos físicos desde al menos la década de 1970, como profundizamos en el Capítulo 4. Tanto en observaciones empíricas como en los modelos revisados, se observan fenómenos de auto-organización que son considerados característicos de la dinámica; en otras palabras, un modelo se considera incompleto si no se logran emular. Explicamos más detalladamente cómo los fenómenos colectivos se enmarcan en la complejidad de los sistemas de flujo peatonal en el Capítulo 3, sobre Fenómenos Colectivos e Impredictabilidad, pero mencionaremos aquí los fenómenos colectivos característicos del flujo peatonal, aprovechando que son suficientemente simples de entender.

Definimos provisoriamente fenómenos colectivos en flujo peatonal de la siguiente manera: dado un sistema con muchos peatones, donde el tamaño del peatón define la escala “microscópica”, un fenómeno colectivo sólo se observa en una escala “mesoscópica”, donde se considera a la multitud de estos como un grupo. Por ejemplo, en la Figura 2.4 vemos una fotografía de un grupo de personas con impermeables rojos, que pueden estar asistiendo a una manifestación cultural, social, religiosa, o simplemente llevar el uniforme de una misma empresa privada.



Figura 2.4: Fotografía de Javi Julio, Anadolu Agency. Cortesía de Middle East Monitor.

Es al distanciarnos, alejando la cámara hasta que cada asistente individual se vuelve indistinguible, que es posible apreciar, en la Figura 2.5 que la vestimenta roja forma parte de un patrón más grande, imposible de predecir a partir de lo observado en la Figura 2.4.



Figura 2.5: Plaza de Guernica, Guernica y Luno, País Vasco, España. Fotografía por un drone desde altura, cortesía de Al Jazeera.

Los principales fenómenos colectivos característicos y robustos del flujo peatonal son:

- a) *Atascos y obstrucciones.* Ocurren generalmente cuando el flujo de peatones supera a la capacidad del lugar de tránsito. Se producen cuando hay un estrechamiento de la vía para caminar, por ejemplo, una habitación grande cuyas puertas de salida no son de la dimensión de un lado de la habitación (la mayoría de los casos), entre otros. Estos embotellamientos también pueden ocurrir cuando las vías de escape presentes se ven bloqueadas ya sea temporal o permanentemente, por la caída de un obstáculo, presencia de fuego, un peatón accidentado o paralizado de alguna manera. Es un consenso que su ocurrencia no depende de las características microscópicas del sistema, sino que de su topología.
- b) *Ondas de densidad.* Son variaciones cuasi-periódicas de densidad en el espacio y tiempo. Pueden verse como fluctuaciones de densidad longitudinales que

se mueven en sentido contrario al sentido de los peatones, también conocidas como *Stop-and-go waves* (“Ondas detenerse-partir”). Se ha observado que para densidades de 7 personas/m² se propagan ondas capaces de levantar a los peatones del piso y desplazarlos 3 metros o más [11] .

- c) *Formación de carriles.* Corresponde al enfilamiento espontáneo y no pre-acordado de peatones que comparten un objetivo aparente cuando se están desplazando a través de una multitud. Cuando se tiene contraflujo (peatones moviéndose en sentidos contrarios), los carriles disminuyen las interacciones fuertes (como choques frontales entre peatones) aumentando así la eficiencia de transporte. Pese a lo que se podría esperar, no hay cómo predecir el número de corredores que se formará dado el ancho de un pasillo y el flujo de peatones.
- d) *Oscilaciones.* Son oscilaciones del sentido del flujo peatonal, observadas en embotellamientos con contraflujo. Por ejemplo, cuando un grupo de personas quiere salir del vagón de metro por una puerta, al mismo tiempo que otra masa de pasajeros intenta entrar.
- e) *Patrones en intersecciones.* Cuando se tienen intersecciones donde se juntan varios corredores, o convergen masas de peatones desde distintas direcciones, se pueden formar rotondas de forma espontánea. Pese a que estas rotondas representan desvíos, suponiendo que los peatones siempre prefieren rutas más cortas, ofrecen una experiencia de transporte más suave y cómoda, pues previenen los choques con otros peatones. Estas rotondas pueden aparecer brevemente y desaparecer.
- f) *Situaciones de emergencia o “pánico”.* No existe una definición única para estas ocurrencias. Suceden cuando la competencia por recursos que escasean (espa-

cio seguro, acceso a la salida, visibilidad) conduce a comportamientos asociales, como egoísmo y competitividad, o totalmente irracionales y contraproducentes. Estos comportamientos suelen estar mal reportados en los medios masivos de comunicación, ya que hay evidencia formal de que no son espontáneos, ni comunes en sus formas más extremas. Ya que la caracterización de estos comportamientos es un objetivo de nuestra investigación, hablamos más de esto en la Sección 2.4.

Como podemos deducir de lo anterior, algunos fenómenos colectivos robustos que se deben observar en simulaciones requieren condiciones topológicas mínimas, por ejemplo, que haya al menos dos dimensiones de movimiento permitidas. Ya que nuestro problema es unidimensional, naturalmente no podremos observar formación de carriles, oscilaciones ni patrones de movimiento. Nuestro modelo de autómatas celulares también presenta una definición de densidad demasiado gruesa como para reflejar ondas de densidad. En consecuencia, esta tesis se concentra en el efecto de las obstrucciones como resultado de comportamientos no-óptimos desencadenados por emergencias.

2.4. Catástrofes y la noción errónea del pánico

Una aplicación crucial del estudio de los procesos de evacuación es la prevención de catástrofes colectivas, como estampidas humanas o aplastamientos por multitudes. Estas tragedias conllevan pérdidas de numerosas vidas, así como lesiones físicas y secuelas psicológicas muy traumáticas para los afectados.

La preocupación por el manejo apropiado de grandes multitudes puede rastrearse incluso al Imperio Romano. El Coliseo Romano, construido en el siglo I DC, podía albergar hasta 73.000 asistentes, y debido a la adecuada construcción de salidas y

señalización, podía ser evacuado en cerca de cinco minutos, una eficiencia que no se alcanza en estadios modernos. Se ha señalado como clave de este éxito el diseño simple de sus 80 puntos de ingreso y egreso, ubicados una al lado del otro, abarcando la circunferencia completa del edificio [12].



Figura 2.6: Fotografía aérea del Coliseo Romano, en Roma, Italia, disponible en la página turística oficial Colosseum Rome Tickets . Consultado en noviembre del 2023.

Sin embargo, estos avances no han sido lineales en la historia: en tiempos más modernos y mejor documentados, desastres como el incendio del Teatro Ringtheater en Viena y el Teatro Municipal en Niza, ambos en 1881, hicieron patente la necesidad de considerar la prevención de incendios como un factor decisivo en la construcción de edificios e implementación de protocolos de seguridad. Lamentablemente, en 1903, se incendió el Teatro Iroquois en Chicago y aunque las nuevas medidas anti-incendios previnieron daños estructurales, fallecieron cerca de 500 personas, ya que todas las decoraciones sí se quemaron y las personas no lograron evacuar a tiempo. Otra tragedia notable fue la catástrofe del concierto de The Who en 1979 [13], en gran medida precipitada porque sólo dos de las puertas de entrada se abrieron, esperando

acomodar a más de 18.000 personas en menos de media hora. Este tipo de eventos renovaron el interés en el diseño de salidas de emergencia y rutas de escape expeditas, y sin embargo, siguen ocurriendo año a año, lo que demuestra que no es sencillo darles solución.

Como si la dificultad intrínseca fuese poca, los medios masivos de comunicación suelen nublar la comprensión de estas catástrofes. Las coberturas periodísticas de este tipo de situaciones favorecen el sensacionalismo, reportando pánicos ciegos y espontáneos de unos pocos individuos aislados, que por motivos desconocidos se contagian a la multitud, de-individuando a sus componentes y culminando en una locura generalizada. En contraposición, la evidencia observacional (reportes de testigos, registros en video) indica que este relato es mayormente falso. La realidad es, de hecho, todo lo contrario: las personas atrapadas en emergencias exhiben predominantemente comportamientos de colaboración [13,14]. Los comportamientos producto del miedo, como la competencia debido a la desesperación, se producen una vez el peligro es inminente. Viéndolo de esta manera, las reacciones dejan de parecer irracionales, pues las vidas de las personas están efectivamente bajo amenaza y sus recursos para lidiar con el peligro, agotados. Por esto es que en la literatura, la noción del “pánico” se desecha y las acciones de los peatones son recogidas de forma más matizada a través del estudio de sus “comportamientos no-adaptativos”.

Los factores que han sido comprobados como conducentes a una catástrofe están relacionados con el diseño inadecuado de las instalaciones [11]. Por mencionar algunos ejemplos, pueden haber errores al estimar la relación entre el flujo de peatones y la capacidad de las salidas, no señalar correctamente las rutas de emergencia, o no considerar el comportamiento realista de los peatones al evacuar.

De hecho, bajo emergencias, incluso si las salidas de emergencia están bien señali-

zadas, las personas pueden tener otras prioridades, como mantenerse apegadas a sus grupos, que pueden incluir niños o adultos mayores vulnerables, o proteger sus pertenencias. Es así como incluso protocolos de evacuación bien diseñados pueden verse afectados por el comportamiento espontáneo e impredecible de las personas. Por eso, un buen modelo de evacuaciones debe incluir adecuadamente las respuestas no adaptativas de los peatones. El detalle de los procesos emocionales y cognitivos de cómo las personas deciden (o no) comportarse no adaptativamente es difícil de indagar y no es el objetivo de nuestra investigación. Nuestra estrategia consiste en añadir parámetros estadísticos que permitan reflejar mejor la realidad cualitativamente; en particular, asociando factores estocásticos a la toma de decisiones [15–18].

Este hecho nos motiva a incluir en nuestro modelo simplificado los comportamientos no-adaptativos más sencillos posibles. En un corredor unidimensional, donde la instrucción esencial es avanzar hacia la única salida cada vez que se puede, introducimos la probabilidad P de que un peatón se detenga aunque pueda avanzar. Esta probabilidad inicialmente fue concebida como un parámetro que representa el “pánico”, y más adelante, en vista de la evidencia bibliográfica recopilada, fue nombrada más adecuadamente. En esa misma línea, se construyó otra variable estadística llamada “ansiedad”, que, a diferencia de la probabilidad P de parálisis, no es espontánea, es sistemática y representativa de la fatiga que un peatón puede sufrir cuando se encuentra bajo presión por un período extendido de tiempo: cada vez que un agente no pueda moverse, acumulará ansiedad. Una motivación para considerar simulaciones en un modelo unidimensional es primero aislar y caracterizar estos efectos en una configuración sencilla, ya que se vuelven más difíciles de desentrañar en 2 o 3 dimensiones. Las características de nuestro modelo, y los niveles de aleatoriedad incrementales se detallan en los Capítulos 5, 6 y 7.

El objetivo de añadir las variables estocásticas mencionadas *no* es obtener simulaciones más fidedignas que se ajusten uno-a-uno a modelos computacionales comerciales, sino que dilucidar qué tan importante es que los peatones no actúen como lo indican las instrucciones, y cómo se ven afectados los fenómenos robustos del sistema.

2.5. Efectos de la ansiedad

Las evacuaciones durante una crisis han sido largamente reconocidas como un tópico de investigación desafiante e importante, que ha atraído atención considerable en los campos de ingeniería, física, psicología social y neurociencia social durante las últimas décadas [19–24]. Entender el comportamiento de las multitudes en situaciones de emergencia, y las interacciones sociales entre sus agentes, es crítico para desarrollar estrategias de evacuación efectivas y optimizar el diseño de infraestructuras. Aunque existen protocolos para reaccionar de forma organizada, las personas responden diferentemente ante situaciones que suponen un riesgo inmediato a su salud, integridad o vida. El comportamiento espacial depende en gran medida en cómo la información ambiental es procesada, por eso, cualquier error en el uso de esta información puede llevar a una respuesta inefectiva.

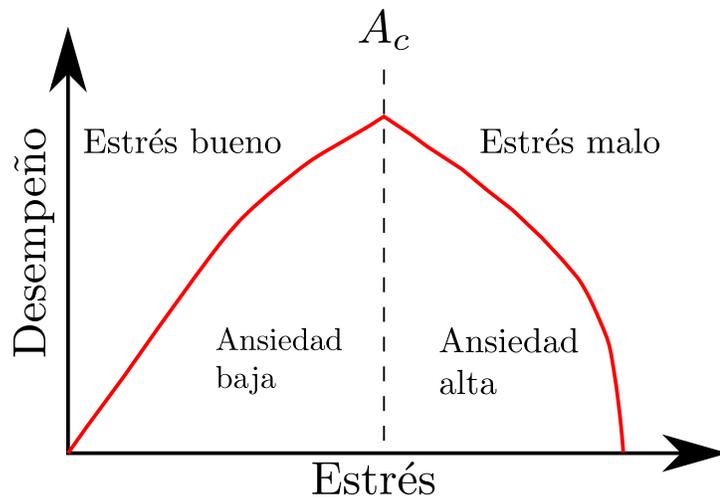


Figura 2.7: Ley de Yerkes-Dodson, extraída y adaptada de las referencias [25, 26] mostrando los posibles efectos beneficiosos de la ansiedad. Observamos dos tipos de respuestas generales al estrés: respuestas con baja ansiedad (estrés “bueno”) y una situación ansiedad alta (angustia o estrés “malo”).

Ciertos autores reportan que mientras cierto nivel de estrés puede llevar a un estado de alerta beneficiosa para procesar información, una respuesta alterada al estrés o ansiedad puede llevar a un estado hipervigilante, limitando nuestra habilidad de procesar información ambiental [27]. Ya que la ansiedad es un determinante del comportamiento durante un egreso de emergencia, el manejo de emergencias podría beneficiarse fuertemente al incluir estos efectos en los modelos de simulación [28–30]. Se ha elucubrado que el impacto del estrés en las reacciones humanas se basa en un modelo conocido como la Ley de Yerkes-Dodson [25]. Esta ley enuncia que el desempeño mejora con estrés fisiológico o mental, pero sólo hasta cierto punto: cuando los niveles de estrés son demasiado altos, el desempeño empeora. El proceso es usualmente ilustrado como una curva con forma de campana, que aumenta y luego disminuye para niveles altos de estrés, como se ve en la Figura 2.7. La parte creciente de la U invertida puede entenderse como los efectos energizantes del estrés, mientras que

la parte descendente es provocada por efectos negativos del estrés (alta ansiedad) en procesos cognitivos como atención, memoria y resolución de problemas. Uno de los objetivos de este trabajo es establecer cómo estos procesos internos individuales afectan la dinámica colectiva del grupo de peatones.

En el contexto de explicar comportamientos humanos individuales, la ley de Yerkes-Dodson ha sido cuestionada debido a la liberalidad con la que se han aplicado los resultados obtenidos para un experimento extremadamente acotado. El experimento original consistió en entrenar a un grupo de ratones para escoger siempre una puerta blanca, al enfrentarse a la decisión entre una puerta blanca y otra negra, indistinguibles entre sí salvo color y que podían cambiar de posición. Los investigadores emplearon choques eléctricos en los ratones que escogieran la puerta negra, y registraron cuánto tiempo demoraban en formar el hábito deseado, según la intensidad del castigo. Es ciertamente extraño que un estudio limitado a testear los límites del condicionamiento operante en roedores haya ganado tal popularidad para explicar fenómenos tan distantes como el procesamiento de información bajo estrés en humanos, o se aplique para entender el desempeño de trabajadores en empresas, donde se mantiene el mito (erróneo) de la existencia de un nivel de estrés óptimo para aumentar la productividad o creatividad [31]. Algunas críticas exhaustivas a la liberalidad de la aplicación de los resultados de Yerkes y Dodson datan de hace casi treinta años, como la de Teigen *et al.*, publicada en 1994 [32]. Sin embargo, las mutaciones que ha sufrido esta “ley” en áreas como psicología clínica, organizacional, laboral y económica han sido inevitables [33].

La literatura tampoco es concluyente respecto a la influencia del estrés en los procesos de toma de decisiones (como procesamiento de información, evaluación de riesgos, auto-percepción de las propias capacidades, etcétera); incluso el rol de cortisol

como modulador de la toma de decisiones permanece bajo escrutinio [34]. Es por esto que debemos enfatizar que adoptaremos la idea general de que cierto nivel de ansiedad (traducido en aleatoriedad) podría ayudar a optimizar *el sistema*, y no buscamos parámetros que mejoren el desempeño de peatones a un nivel individual, ya que esta pregunta continúa abierta en manos de una comunidad experta, mejor equipada para explorarla.

Capítulo 3

Fenómenos colectivos e impredecibilidad

El objetivo de este capítulo es explicar la relevancia de identificar fenómenos emergentes en los sistemas de muchos participantes y justificar por qué no es posible, ni necesario, conocer en profundidad los detalles de un sistema de muchos participantes para dilucidar su dinámica subyacente. Además, se discute brevemente la herramienta de cálculo escogida para estudiar nuestro problema y su idoneidad. Concluimos con una discusión sobre cómo contabilizamos la impredecibilidad y desorden presentes en estos sistemas, observando la desviación estándar de los promedios calculados, y a partir de una medida basada en entropía.

Este capítulo está basado principalmente en el trabajo de Heath *et al.* [8], particularmente las instructivas reflexiones acerca de los cambios de paradigma impulsados en Teoría del Caos y en Cibernética debido al modelamiento computacional de sistemas complejos.

3.1. Fenómenos emergentes

Un aspecto esencial de los sistemas con muchos participantes es la observación, identificación y caracterización de fenómenos emergentes. Los fenómenos emergentes son fenómenos de auto-organización espontánea que se dan a escala mesoscópica y macroscópica y no son posibles de predecir o estudiar observando a un solo agente aislado del sistema. Los efectos dinámicos inducidos por movimientos colectivos se encuentran ampliamente representados en la naturaleza, por ejemplo, en el movimiento de un grupo de animales, como cardúmenes de peces o bandadas de aves [35, 36], que a veces se parecen al comportamiento complejo de agua pasando por una boquilla. También ocurren cuando fluidos con distintas velocidades interactúan produciendo inestabilidades tipo Kelvin-Helmholtz [37–40]; o cuando el líquido de encendedor empuja un fluido más pesado, produciendo una inestabilidad tipo Rayleigh-Taylor [41, 42].

La noción de fenómenos globales que parecen “emerger” de la nada, a partir de la interacción de diversos agentes y mecanismos, ha sido observada a lo largo de la historia en otras áreas del conocimiento. Adam Smith postuló su teoría de la Mano Invisible en la economía en 1776; Charles Darwin propuso su teoría de la evolución de las especies en 1859; y Donald Hebb la teoría de la Asamblea Celular, en 1949. En estos últimos ejemplos, se identificó cómo los agentes individuales de cada sistema, al combinar esfuerzos individuales, obedeciendo a su propia funcionalidad y beneficio inmediato, producían efectos profundos, a nivel macroscópico y a largo plazo.

El paradigma usado para estudiar este tipo de sistemas hasta principios del siglo XX correspondía al heredado de la mecánica Newtoniana: el reduccionismo. Es decir, suponer que todos los sistemas pueden descomponerse en sus piezas elementales, que

serían estudiadas por separado, para entender el sistema macroscópico resultante como la suma de cada uno de sus constituyentes. Esta suposición sobre la linealidad del mundo, pese a que existían ejemplos de sistemas a la vez simples y no lineales (como el problema de los tres cuerpos) fue uno de los factores que estancó por años la indagación. Además, la tecnología de adquisición y procesamiento de datos en máquinas de computar todavía no tenía la suficiente capacidad para ser una herramienta viable, pese a ser prometedora. Para mayor dificultad, a principios del siglo pasado, el estudio de los sistemas de muchos integrantes que exhiben auto-organización se encontraba frenado por la aparente contradicción planteada por los postulados de Kurt Gödel sobre la incompletitud de las matemáticas y las tesis de Alonzo Church y Alan Turing sobre la completitud de sus Máquinas Universales.

Por una parte, en 1931, Gödel demostró que las matemáticas, como sistema lógico de símbolos que representan ideas, son fundamentalmente incompletas, por tanto, no era extraño que no pudieran ser un reflejo de la naturaleza. Parecía que una multitud de sistemas se quedarían entonces, sin descripción teórica o modelamiento posible. Pero cinco años más tarde, en 1936, Church y Turing propusieron sus Computadoras Universales, máquinas lógicas teóricas capaces no sólo de replicar cualquier cálculo matemático, sino que simular cualquier ley natural ejecutable como algoritmo. Church y Turing postularon que una máquina de tales características sería Turing-Completa, o capaz de cómputo universal, pues sería capaz de replicar cualquier sistema natural¹.

La aparente contradicción planteada por ambos postulados, amplía, en realidad, el paradigma de investigación en sistemas no lineales. En 1966, con la aparición y “masificación” (al menos en ambientes académicos y en la industria) de los compu-

¹La noción de cómputo universal tiene otras definiciones formales, pero esta es suficiente para nuestros propósitos.

tadores, el matemático Paul Von Neumann identificó la capacidad de las máquinas de cálculo rápido de romper el empate aparente entre las teorías de Gödel y Church-Turing: mediante programación adecuada de algoritmos, los computadores podrían suplementar e incluso reemplazar la experimentación y los modelos analíticos.

Sin embargo, con todos sus méritos, Von Neumann arrastró un enfoque reduccionista en sus construcciones teóricas: pensaba que los sistemas complicados sólo podrían obtenerse mediante reglas complicadas de comportamiento e interconexión de sus agentes. Creía, erróneamente, que sólo se puede obtener complejidad a partir de la complejidad. Paralelamente, en 1940, los matemáticos Konrad Zuse y Stanislaw Ulam habían desarrollado la idea de los Autómatas Celulares (AC). En una colaboración, Ulam le sugirió a Von Neumann utilizar AC en sus indagaciones de sistemas auto-organizantes, cuyo gran éxito para emular sistemas complejos de muchas partículas, convenció a Von Neumann y a la comunidad científica, que se podía obtener complejidad a partir de reglas sencillas.

3.2. Autómatas Celulares para describir sistemas complejos

Los autómatas celulares (AC) son extremadamente populares y ampliamente reconocidos en el área de modelamiento peatonal, como veremos más adelante en el Capítulo 4. Podemos encontrar una descripción profunda sobre autómatas celulares en la referencia [43], con énfasis en su utilidad e implementación. Aquí, nos limitamos a proveer descripciones generales, concentrándonos en las características relevantes para nuestros propósitos.

Los autómatas celulares propuestos originalmente por Zuse y Ulam son entidades programables que existen en una malla bidimensional, similar a un tablero de

ajedrez [44]. Cada autómatas ocupa una celda determinada en la malla (espacio celular), y es capaz de interactuar con sus vecindades: otros autómatas y otras celdas. Pueden tomar decisiones y cambiar de estado o posición a partir de la información de su ambiente y reglas internas pre-establecidas. La implementación y masificación de autómatas celulares permitió desarrollos populares como el Juego de la Vida, propuesto por el matemático James Horton Conway en 1970. Con autómatas que siguen reglas sencillas, se encontró que ciertas condiciones iniciales pueden derivar en criticalidad auto-organizada [45]. También, se pueden obtener desde configuraciones periódicas, como se ve en la Figura 3.1, hasta configuraciones móviles (*gliders* en inglés) y caos.

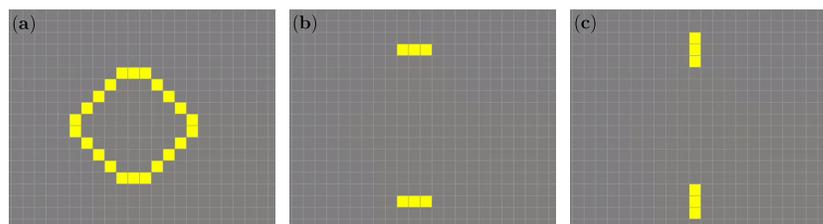


Figura 3.1: Vemos una configuración inicial (a) y el resultado periódico en (b) y (c), al que la configuración converge en sólo 4 iteraciones. Imagen generada en la página gratuita Play Game Of Life.

Las simulaciones con AC generalmente evolucionan a partir de un estado inicial n_0 donde todos los autómatas evalúan su estado y el de su vecindad, y toman decisiones para actualizarse y pasar al estado $n_0 + 1$, donde n_0 es un número entero. Los sistemas de AC son naturalmente paralelos, es decir, todos los autómatas toman decisiones al mismo tiempo, por lo que una gran cantidad de éstos (incluso todos) puede cambiar en un mismo turno. Esta cualidad de paralelización de los AC es una de las características que los vuelven idóneos para simular sistemas naturales. En la

década de 1960, la implementación y masificación de los AC removi6 el freno t6cnico existente para el estudio de sistemas con muchos agentes interactuantes. Una de las 6reas que m6s se desarroll6 debido a su proliferaci6n fue la Cibern6tica.

La Cibern6tica se inici6 como la indagaci6n de los mecanismos de control y retroalimentaci6n entre animales y m6quinas. De ella, se derivan las nociones de sistemas con retroalimentaci6n positiva, negativa y neutra, conceptos luego recogidos por Teor6a de la Informaci6n para estudiar sistemas con todo tipo de retroalimentaci6n.

En t6rminos sencillos, la retroalimentaci6n es la informaci6n que el mismo sistema produce y se inyecta de vuelta al sistema. Los sistemas se pueden caracterizar seg6n las cualidades de esta retroalimentaci6n, en positiva, negativa o neutra. Un sistema exhibe retroalimentaci6n positiva cuando la ocurrencia de un fen6meno aumenta las probabilidades de que el fen6meno vuelva a ocurrir, y negativa cuando la ocurrencia de un fen6meno disminuye las probabilidades de que se repita. En los sistemas con retroalimentaci6n negativa, se observa que los patrones que se forman en el espacio de fase se extinguen o se estancan; con retroalimentaci6n positiva, estos patrones o periodicidades crecen de forma infinita e incontrolable; en los sistemas con retroalimentaci6n nula, o estables, se observan patrones estables y periodicidad.

Como cuarta categor6a, existen sistemas con todo tipo de retroalimentaci6n. Para ciertas combinaciones, emergen inevitablemente comportamientos ca6ticos. Los sistemas ca6ticos exhiben atractores extra6os en su espacio de fase: las trayectorias que dibuja el sistema (su respuesta) se estancan en una regi6n limitada, sin embargo, el sistema nunca transita dos veces por el mismo camino. As6, se dibujan figuras fractales de 6rea finita, pero per6metro infinito. Estos sistemas ca6ticos se pueden generar a partir de sistemas con reglas muy simples.

La Teor6a del Caos se desarroll6 naturalmente junto al estudio de los sistemas

complejos, pero no es lo central de nuestra investigación. La mencionamos por última vez para ahondar en el concepto de predictibilidad de los sistemas, subrayando las diferencias entre caos, impredecibilidad y determinismo. Un sistema totalmente determinista se puede llamar caótico si muestra extrema sensibilidad ante las condiciones iniciales. Esto implica que una pequeña diferencia en el espacio de fase de condiciones iniciales lleve a trayectorias exponencialmente diferentes. Esta sensibilidad también hace que los modelos de sistemas caóticos sean poco predictivos: existe una inevitable incerteza al medir y describir sus condiciones iniciales. Cuando el tiempo avanza en las simulaciones, incluso las incertezas más pequeñas se acumulan y hacen que el modelo diverja importantemente del sistema original. Esto fue célebremente reportado por el matemático Edward Norton Lorenz en sus estudios sobre modelos climáticos [46] a finales de la década de 1960 y principios de 1970. Además de sus afirmaciones sobre la naturaleza del clima, Lorenz arribó a una conclusión complementaria: es posible estudiar, caracterizar y clasificar sistemas complejos y caóticos según los fenómenos colectivos que se manifiesten en ellos [47]. Es más, es posible estudiarlos a satisfacción mediante modelos que reproduzcan sus fenómenos emergentes, sin necesariamente saber cuáles son las reglas microscópicas subyacentes a éstos.

3.3. Complejidad e Impredictibilidad

Debemos remarcar la diferencia entre caos y complejidad. Los sistemas dinámicos clásicos son caóticos si cumplen una definición específica: en el espacio de fase de las variables generalizadas y sus momentos, se debe observar una divergencia exponencial en el tiempo de trayectorias que inicien en condiciones iniciales muy similares. Por otro lado, la complejidad es una etiqueta de amplia aplicación para los sistemas

naturales. Usaremos la definición funcional de que un sistema complejo presenta comportamientos colectivos no triviales. Podríamos decir que los efectos colectivos son no triviales si el estudio de las reglas sencillas que rigen a alguno de sus constituyentes *no* permite predecir de forma inmediata el comportamiento a gran escala.

Por ejemplo, en un sistema de moscas encerradas en un pequeño frasco, podemos deducir fenómenos triviales, como que habrán choques entre ellas, pero no cómo esos choques van a determinar la dinámica, y cómo las moscas se organizarán con sus vecinas para ocupar el espacio de vuelo de forma organizada. Es más, tampoco es posible predecir *a priori* si se observará organización. En ese contexto, la emergencia de un fenómeno asociado a una escala macroscópica, que no es posible de inferir del estudio microscópico, indicará la existencia de complejidad en el sistema, o su no trivialidad.

Es por todo esto que podemos afirmar que un sistema de autómatas celulares sencillos, evolucionando según reglas sencillas, es capaz de reflejar los fenómenos colectivos propios de un sistema de flujo peatonal, y es suficiente para estudiar la dinámica subyacente del sistema complejo. Con la retroalimentación como una noción extraída de la Cibernética, consideramos las interacciones entre sus constituyentes como un tipo de retroalimentación interna del sistema. Las interacciones aumentan la complejidad, y esto se refleja en el aumento de sus fenómenos colectivos. Es decir, cuando el sistema se auto-organiza, cada integrante comienza a coordinarse más y más con los demás, y a medida que más y más integrantes participan, los fenómenos colectivos se vuelvan más notorios a escala macroscópica. En resumen, el sistema gana complejidad al ordenarse, y por eso se vuelve más predecible.

En este sentido, es posible caracterizar la impredecibilidad del problema estudiando la distribución estadística de los estados de sus participantes, y la desviación

en su comportamiento respecto a los comportamientos promedio. Una desviación grande refleja un sistema poco organizado, mientras que una desviación estándar pequeña muestra mayor organización y predictibilidad. En este contexto, llamamos más predecible a un sistema cuando podemos afirmar, con creciente seguridad, qué está haciendo un participante arbitrario, dado el comportamiento promedio observado. Complementariamente, ya que la complejidad no surge necesariamente de variables aleatorias, sino que del gran número de componentes interactuando, podemos desafiar la robustez de la capacidad de auto-organización de un sistema totalmente determinista al agregar variables aleatorizantes. Si los fenómenos emergentes observados en un régimen determinista persisten, esta robustez indicaría que son fundamentales en la dinámica del sistema.

Finalmente, cabe destacar que un sistema complejo no necesita azar para perder la predictibilidad pasado el tiempo suficiente. Como ya explicamos, para identificar caos en un sistema es necesario construir su diagrama de fase con una precisión que permita observar estructuras fractales, lo que no es posible considerando la escala gruesa de la dinámica en un modelo con autómatas celulares. En otras palabras, no buscamos pesquisar la caoticidad de nuestro sistema simplificado en esta ocasión, por lo que no construiremos diagramas de fase para el movimiento de los peatones.

Concluyendo, si bien no podemos predecir con exactitud qué ocurrirá en una ejecución particular de un sistema, podemos llevar a cabo simulaciones que recorran el ensamble de posibles configuraciones y obtener resultados estadísticos promedio, para identificar las dinámicas subyacentes. Observar cantidades promedio, como tiempo promedio de evacuación, o cantidad promedio de interacciones internas, permite identificar cambios de fase en el movimiento (si los hay) y sus principales impulsores.

3.4. Predictibilidad y entropía

Ya que la caracterización de la impredecibilidad de la dinámica de un pasillo del que egresan peatones es un objetivo central de nuestra investigación, usaremos, además de la desviación estándar, otra medida para medir la incerteza de nuestro sistema, basada en entropía. El concepto de la entropía fue introducido por primera vez para su uso en termodinámica por el físico Rudolf Clausius en 1865. Más adelante, el matemático Claude Shannon adaptó su idea para la Teoría de la Información, y construyó la llamada entropía de Shannon, que se puede demostrar que es equivalente a la usada en termodinámica [48].

Originalmente, Shannon planteó su entropía aplicando un logaritmo base 2 a las probabilidades favorables de ocurrencias de eventos, porque la medida esencial de la transmisión de información es comunicar si ciertos sucesos ocurren o no ocurren. Es por eso que con un bit binario (0 ó 1) ubicado en una posición particular, es posible codificar resultados de procesos gobernados por distribuciones de probabilidad. Se necesitarían tantas ubicaciones para concatenar los bits en números binarios como respuestas posibles, por lo tanto un mayor abanico de posibilidades requiere de más bits, y de un número binario más largo, aumentando así el exponente del número escrito en base 2. De esta forma, un sistema más impredecible usa números binarios más largos y así tiene mayor entropía.

Por comodidad de cálculo, es usual transformar la base de bits binarios a una natural, que es la que adoptamos acá. Lo esencial es que la entropía de Shannon se define de manera que los resultados cuya probabilidad de ocurrencia se acerquen más a 1 (sean más posibles) tengan menor entropía que los resultados con probabilidades más bajas de suceder. En el presente trabajo, consideramos un sistema discreto,

con N posibles configuraciones, donde p_i indica la probabilidad de ocurrencia de la configuración i -ésima. En tal caso, la entropía H está dada por:

$$H = - \sum_{i=0}^N p_i \log(p_i) . \quad (3.1)$$

Evidentemente, la distribución de probabilidades está normalizada, es decir

$$\sum_{i=0}^N p_i = 1 .$$

Capítulo 4

Modelos para el flujo peatonal

El objetivo del presente capítulo es realizar una breve revisión histórica de estrategias empleadas en el estudio de flujo peatonal, para explicar y contextualizar la importancia del nuestro. Además, justificamos su idoneidad para caracterizar la impredecibilidad de sistemas sencillos que dan origen a comportamientos colectivos complejos. El problema del flujo peatonal ha sido estudiado desde diferentes ángulos, como la interacción social entre agentes [49, 50] donde los métodos de resolución de conflictos pueden incluso involucrar teoría de juegos [51]. También se ha indagado la reproducción de fenómenos colectivos clave con modelos continuos y discretos [52–54] y mediante la construcción de distintas topologías para las mallas de AC o campos de piso [55–57]. Estas herramientas han sido aplicadas, por ejemplo, para estudiar el embarque/desembarque de aviones y buses, o multitudes evacuando de edificios bajo desastres naturales y situaciones de emergencia, como terremotos o incendios.

4.1. Modelo de fuerzas sociales

En la década de 1970, se analizaron videos de grupos de personas caminando [58] para obtener y caracterizar funciones de distribución de velocidades asociadas al flujo peatonal, y se distinguió una separación en la distribución de velocidades según el

sexo de los peatones [59]. Esto sugirió la relevancia de describir el flujo peatonal con componentes heterogéneos. Dos décadas más tarde, se establecieron similitudes matemáticas entre el flujo peatonal y un gas que sigue la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, modelo que recoge efectos internos entre peatones análogos a presión y fricción [60]. Con esto, se pudieron encontrar teóricamente fenómenos colectivos observados empíricamente, como formación de corredores, propagación de ondas de densidad y embotellamientos.

En 1995 fue formulado el modelo de fuerzas sociales en el flujo peatonal [53], que es uno de los más populares en el área de dinámica peatonal, debido a la simpleza de su implementación y capacidad de reproducir fenómenos realistas de manera cualitativa. En este modelo, los peatones, representados computacionalmente como partículas que se mueven en un espacio bidimensional, interactúan entre ellos según fuerzas descritas por ecuaciones diferenciales. En este esquema, las “fuerzas sociales” corresponden a una iniciativa interna de cada peatón, más que a un efecto ejercido por su medio ambiente. El sistema macroscópico queda representado por ecuaciones de Langevin acompladas no-linealmente. Estas ecuaciones describen con fuerzas (o aceleraciones) tres características esenciales del flujo peatonal:

- (i) La intención de desplazarse hacia algún lugar específico.
- (ii) Las interacciones “repulsivas” entre peatones.
- (iii) Sus aceleraciones para lograr una velocidad “deseada” (o ideal).

En años siguientes, se aplicó específicamente a situaciones de evacuación [52] y en ese contexto ha recibido numerosas aportaciones y mejoras, incorporando atributos a los peatones, como cambios en su forma, o fuerzas atractivas con otros miembros de un mismo grupo [61].

Con una adecuada calibración de parámetros, el modelo de fuerzas sociales ha resultado idóneo para monitorear el aumento de la presión en acumulaciones de peatones sometidos a diversas condiciones. Un resultado interesante fue la caracterización del fenómeno *Faster-Is-Slower* [52], que se da en los atascos peatonales que ocurren en pasillos que se amplían antes de arribar a una salida más angosta. Usando simulaciones computacionales, se propusieron configuraciones para evitar dichas congestiones y prevenir que las presiones entre peatones alcancen niveles que amenacen sus vidas. Las estrategias se orientaron a mejorar el diseño de las infraestructuras, en acuerdo con observaciones empíricas, porque como ya fue mencionado, es un consenso aceptado que los factores que realmente desencadenan estampidas o avalanchas humanas corresponden al mal diseño de entornos, y no a un pánico ciego espontáneo de los peatones [5, 11, 12].

4.2. Clasificaciones para los modelos

Los modelos de dinámica peatonal se pueden categorizar según variados criterios: discretos o continuos, deterministas o estocásticos, basados en reglas o en fuerzas, de alta o baja fidelidad, por mencionar algunos. Estas clasificaciones son importantes para entender el alcance e idoneidad de cada modelo, aunque la efectividad de sus aproximaciones no siempre es fácil de dirimir [5, 62].

Una clasificación simple y pertinente de considerar para nuestro modelo, es según escala espacial. Según ésta, los modelos de flujo peatonal se dividen en macroscópicos y microscópicos. Los modelos macroscópicos suponen un flujo continuo y homogéneo de peatones, circulando en situaciones de equilibrio estacionario [63], por lo que reducen la carga computacional en las simulaciones y son una buena primera aproximación al diseño de infraestructuras donde se espera un tráfico constante y estable,

como calles, pasarelas o estaciones de tren. Debido a eso, poseen un impedimento obvio para estudiar el sistema en situaciones de emergencia que por su naturaleza son transientes; tampoco pueden distinguir entre distintas poblaciones de peatones y sus diferencias en velocidades, tamaños, etc.

Los modelos microscópicos recogen la heterogeneidad de las poblaciones, e incorporan fácilmente la variabilidad biológica y social de los peatones. Dicha diversidad se puede traducir en la distribución de velocidad por sexo [58], tendencia a evitar o preferir rutas, la pertenencia a un núcleo familiar que lleva a formar grupos, entre otros ejemplos. Dentro de los modelos microscópicos, se encuentran los modelos geográficos, donde los peatones toman decisiones según reglas establecidas [64], los modelos de fuerzas sociales, discutidos anteriormente, y los modelos basados en agentes, donde se desechan las fuerzas internas descritas por ecuaciones diferenciales, a cambio de un conjunto de decisiones que los agentes pueden tomar según atributos propios, de otros agentes y del entorno [65]. Estos atributos constituyen parámetros del modelo, que pueden ajustarse para acercarse a la realidad; modelos con gran cantidad de parámetros suelen tener mayor exigencia computacional y son clasificados como modelos de alta fidelidad, aunque no necesariamente reproducen las observaciones empíricas de mejor manera que modelos de baja fidelidad.

4.3. Modelos basados en agentes

Una fuente usual de variabilidad son los peatones y sus diferencias. Esencialmente, los peatones no sólo reaccionan a su ambiente según un conjunto de reglas pre-establecido, sino que también toman decisiones influidas por sus estados internos. Por ejemplo, en un centro comercial, pueden convivir diversos objetivos e itinerarios, ya que cada peatón pretende visitar distintas tiendas. También, pertenecen a distin-

tos grupos sociales, como grupos de amigos o núcleos familiares. El comportamiento posible también es diverso en situaciones de emergencia que requieren una evacuación: los rescatistas también son peatones, pero que van en contra del flujo evacuativo para asistir a otros peatones que no pudieron reaccionar como los demás. Además, distintos peatones pueden tener distintas velocidades y prioridades, e intentar resolver conflictos internos como no separarse de su grupo mientras se alejan lo más rápidamente posible del peligro. En resumen, la presión ambiental puede ser uniforme, pues todos los peatones comparten el mismo ambiente, pero las reacciones de cada peatón pueden variar entre sí.

Las diferencias entre peatones también pueden llevar a dinámicas entre grupos, y entre grupos y peatones. Se ha observado que estas dinámicas afectan la eficiencia de procesos como el registro de maletas en aeropuertos y el tráfico en centros comerciales, y deben ser consideradas para diseñar estrategias que hagan un uso eficiente de los espacios y tiempos [66,67]. Esto está más allá del objetivo de nuestra investigación, pero plantea proyecciones interesantes. De hecho, en nuestro modelo, los peatones no tendrán diferencias de forma, ya que cada peatón podrá ocupar totalmente una celda, y no acumularán estrés por la mera presencia de peatones vecinos, solo si compiten directamente por ocupar un espacio, conflicto que explicamos en mayor detalle en los Capítulos 5, 6 y 7. Tampoco nos concentraremos en la dinámica de grupos, que puede ser importante en geometrías más complicadas y donde se deciden distintos itinerarios, o donde hay varias salidas pero no suficiente información (visibilidad) sobre estas y se exhiben comportamientos de pastoreo o designación de líderes de movimiento.

Dentro de los modelos microscópicos, las simulaciones basadas en agentes, una generalización de los AC, son populares porque son computacionalmente simples de

implementar y capturan naturalmente la variabilidad de los peatones, evolución de su ambiente y estados internos [68]. Además, debido a esta simplicidad, resulta sencillo añadir variables probabilísticas y observar interacciones microscópicas (visibilidad entre agentes, resolución de conflictos, competencias por espacios) y su impacto mesoscópico.

Estos modelos por lo general discretizan espacio y tiempo. El espacio se subdivide en un conjunto de celdas discretas que los agentes ocupan con prioridades establecidas. Los pasos temporales, o actualizaciones del sistema, también son discretos. En la mayoría de la bibliografía publicada se usan sistemas bidimensionales y la topología de las celdas forma mallas que disponibilizan una cierta cantidad de direcciones para los peatones. Por ejemplo, una rejilla hexagonal otorga más grados de libertad de movimiento que una malla cuadrada, reflejando mejor la realidad en ciertas aplicaciones [69], ya que permite desplazamientos oblicuos. Esto último no es exclusivo de las mallas hexagonales, ya que en una malla cuadrada también pueden permitirse movimientos diagonales, mediante la construcción adecuada de un campo de piso.

Los campos de piso son una estrategia alternativa para controlar los grados de libertad en los agentes e imprimir intencionalidad de movimiento. En el caso de las evacuaciones, un campo de piso es un campo escalar que tiene su mínimo valor en las celdas correspondientes a las salidas y recubre el resto del espacio con un gradiente, de acuerdo a factores relevantes como la distancia, visibilidad de la salida, o presencia de obstáculos, por mencionar ejemplos [57]. La toma de decisiones de los agentes es sencilla, pues siempre buscan posicionarse en la celda con el menor campo de piso posible. En un trabajo del año 2022, Kirchner *et al.* afirmaron que la construcción de

los campos de piso o métricas empleadas para permitir el movimiento de los agentes, no afectarían cualitativamente los procesos de evacuación mientras cumplieran con la condición esencial de disminuir hacia las salidas [55]. Esto fue refutado en 2007 por Varas *et al.* [57] pues observaron diferencias cualitativas no triviales al construir campos de piso que, por ejemplo, permitieran movimientos diagonales en el contexto de una rejilla en cuadrícula. Esto mostró que la construcción de campos de piso es esencial para la emergencia de fenómenos colectivos, y en consecuencia, para reflejar flujo peatonal de forma fidedigna.

Otra fortaleza de los modelos basados en agentes, es que los agentes se pueden inicializar con un conjunto predefinido de características, como las tres ya recogidas en las fuerzas sociales y además, características más complejas que influyen en su comportamiento, como género, edad o pertenencia a algún grupo familiar. Esto permite estudiar formación de grupos y sus interacciones en ambientes como pasillos estrechos, mostrando buen acuerdo con las observaciones existentes en centros comerciales [70]. Estos modelos también han permitido identificar dinámicas de grupo en la eficiencia de procesos de *check-in* y evacuaciones en aeropuertos [66, 67].

Los modelos basados en fuerzas sociales y los de agentes sobre campos de piso, son capaces de mostrar fenómenos emergentes similares, característicos de la dinámica de peatones, lo que enfatiza la utilidad de ambas aproximaciones. Dados los objetivos de nuestra investigación, los autómatas celulares son suficientes para caracterizar la dinámica subyacente de un modelo simplificado de pasillo unidimensional.

Capítulo 5

Pasillo simple determinista

En el presente capítulo, describimos el modelo estudiado, que pese a su simplicidad produce fenómenos de auto-organización no triviales. Además, su sencillez permite aislar los impactos de las variables estocásticas en la dinámica, pues evitamos la ocurrencia de fenómenos colectivos más complejos.

Usamos un modelo de AC para estudiar el flujo de peatones en un pasillo unidimensional. En nuestras simulaciones, las variables discretas son el paso temporal, la posición de cada agente y las decisiones tomadas por cada agente en un paso temporal dado: moverse o quedarse detenido. Nuestro pasillo sólo tiene una salida, que define las direcciones privilegiadas de “adelante” (acercarse a la salida) y “atrás” (alejarse de la salida). En esta primera etapa podemos deducir expresiones analíticas para las variables promedio, considerando el conjunto de reglas asignado a la simulación de AC. En nuestros resultados mostramos el acuerdo entre lo obtenido de las simulaciones y estas aproximaciones, remarcando que no necesitamos geometrías más complicadas, ni conjuntos de reglas complejos, para observar efectos colectivos no triviales.

En las etapas posteriores de la investigación, en las que añadimos variables estocásticas, usamos este caso como base para comparar cuánto afectan los efectos

psicológicos al sistema, qué tan robustos son sus fenómenos emergentes y qué tan impredecible se vuelve su auto-organización al añadir azar. De esta manera, compararemos las expresiones teóricas y resultados de los Capítulos 6 y 7 con el presente.

5.1. Descripción del modelo

Consideremos un pasillo unidimensional de largo D , dividido en N celdas del mismo largo, tal que el número de celdas L es

$$L = \frac{D}{\ell_0}, \quad (5.1)$$

donde ℓ_0 es el largo de una celda. El tiempo que le toma a un peatón para moverse a la siguiente celda es el paso temporal de evolución del autómata. La malla unidimensional de largo L es ocupada por un número inicial de agentes que quieren salir de la habitación tan pronto como sea posible, a través de una puerta fija a la izquierda. Las celdas pueden ser ocupadas por un solo agente a la vez, como se muestra en la Figura 5.1.

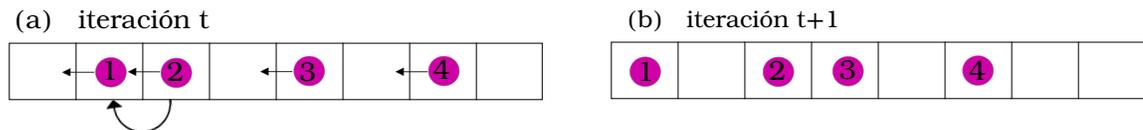


Figura 5.1: Esquema de movimiento de los agentes en un modelo totalmente determinista. En (a) las flechas representan la intención de movimiento de cada uno. El agente 1 bloquea el avance del agente 2, ocurriendo una colisión de intenciones entre ellos, representada por la flecha curva que los une. El esquema (b) muestra el cambio sufrido por el sistema tras un paso temporal. Entre las iteraciones t y $t+1$ el agente 1 avanza sin problemas hacia la salida, pero 2 perdió su turno. Ya que tienen vacancias frente a ellos, en todas las repeticiones futuras, los agentes 2 y 4 avanzarán hacia la salida sin bloqueos.

En esta etapa, cada agente tiene una sola regla de movimiento característica: la intención de moverse hacia adelante, acercándose a la puerta. Esto implica que cada agente se mueve hacia adelante mientras tenga el espacio disponible para hacerlo. La simulación concluye cuando todos los agentes han abandonado la habitación, y en adelante nos referiremos a una evacuación completa como una iteración de la simulación. Más adelante, para considerar los efectos psicológicos, se añaden variables aleatorias y probabilísticas que influyen las decisiones de movimiento de los agentes.

En la Figura 5.1 vemos un ejemplo de todas las situaciones posibles de este sistema. Si consideramos el tiempo t como el inicial, observamos una distribución inicial aleatoria de agentes. En (a) el agente 1 declara su intención de avanzar hacia la salida porque su ruta no está obstruída, pero bloquea la celda que el agente 2 pretende ocupar. Por tanto, en (b) el agente 1 se ha movido mientras que el agente 2 no; así, el agente 2 “pierde un turno” debido a la colisión de intenciones que se produjo entre él y el agente 1. Llamamos a este tipo de interacción “colisión tipo 1” y son las únicas posibles para el presente sistema. Es importante notar que una vez el espacio frente al agente 2 se desocupa, éste no volverá a colisionar y se moverá sin detenerse hasta salir de la malla. Por su parte, el agente 4 es el más lejano a la salida en (a) y se moverá sin colisionar hasta egresar; por lo tanto es su tiempo de evacuación el que determina el tiempo total del sistema.

5.2. Expresiones teóricas

5.2.1. Sistema diluido o no colisional

Nuestra configuración consiste de un corredor, modelado con una malla rectangular unidimensional, con un conjunto inicial de agentes, aleatoriamente distribuidos

a lo largo del mismo. Primero, apuntando a entender las características más básicas del sistema, supondremos que los agentes no se paralizan, por lo que la dinámica resultante es impulsada únicamente por la densidad inicial de ocupación. La definición de la densidad inicial de ocupación ρ es

$$\rho = \frac{N_A}{L} , \quad (5.2)$$

donde N_A es el número inicial de agentes en la habitación; observemos que esta densidad es adimensional, pues corresponde al número inicial de agentes dividido en el número de celdas disponibles. Consideraremos que los agentes aceleran instantáneamente, y que pueden moverse a lo más una celda por turno, por lo que definiremos el tiempo de evacuación T como el número adimensional de *pasos de tiempo* que demora la habitación en vaciarse totalmente. De esta forma, a un agente solitario ubicado en la celda más lejana a la salida, le tomará $T = L$ pasos de tiempo en evacuar. Si consideramos el ejemplo presentado en la Figura 5.1, tendremos que $L = 7$ celdas, $N_A = 3$ agentes y la densidad promedio es $\rho = 3/7$ agentes por celda. Ya que en nuestro ejemplo el agente 4 se encuentra al otro extremo de la habitación respecto a la puerta, la evacuación total tomará $T = 7$ pasos de tiempo.

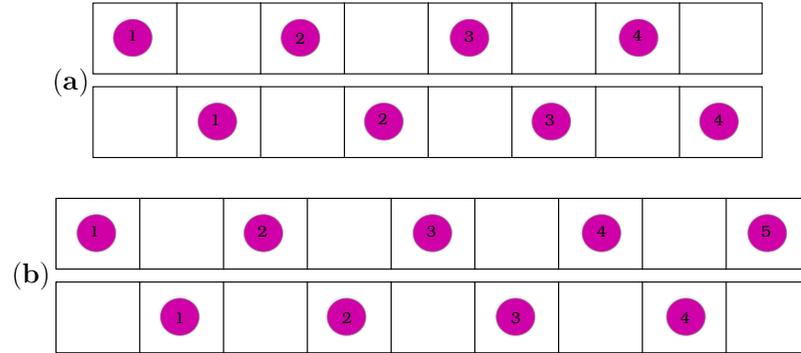
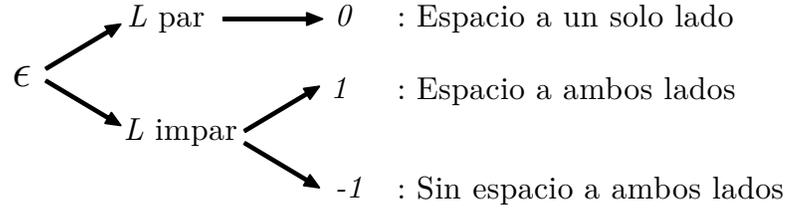


Figura 5.2: Ubicación de agentes equidistantes con distancia mínima de una celda separando a cada uno de ellos, en el caso de L par (a) e impar (b).

Los mecanismos subyacentes a la evacuación son bastante simples para sistemas con L grande. Supongamos que los N_A agentes se distribuyen equidistantes en la malla. La suposición de base para que el último agente domine el tiempo de evacuación como fue descrito anteriormente, es que logre avanzar sin detenerse; como sólo se puede detener si colisiona, también subyace la condición de que todos los agentes se separen entre sí por vacancias. De ser así, la distancia ℓ promedio entre ellos, y los bordes, está dada por

$$\ell = \frac{\text{Celdas vacantes}}{\text{Celdas ocupadas}}. \quad (5.3)$$

Como podemos ver en la Figura 5.2 la paridad de L añade una variabilidad extra para determinar los espacios necesarios para organizar los N_A agentes equidistantes entre ellos y respecto a las paredes, representada mediante ϵ , cuyos posibles valores se detallan en el siguiente esquema:



Ya que en la simulación usaremos una habitación de largo $L = 100$, nos limitaremos al caso de un número total de celdas pares, pero mantenemos por ahora la variable ϵ para estimar el orden de la corrección. Así, la expresión (5.3) queda

$$\ell = \frac{L - N_A}{N_A + \epsilon} . \quad (5.4)$$

El agente más lejano a la puerta determina el tiempo de evacuación, y está, en promedio, a una distancia d de la salida, dada por

$$d = L - \ell = L - \frac{L - N_A}{N_A + \epsilon} . \quad (5.5)$$

Para densidades de ocupación inicial bajas, ℓ es grande (muy parecido a L), por lo que la probabilidad de bloqueo entre agentes es muy pequeña. Por tanto, en promedio, todos los agentes avanzan una celda en cada paso temporal, sin bloquearse entre ellos, y la velocidad promedio es $\langle v \rangle = 1$, es decir, un paso por unidad de tiempo. Se sigue que el tiempo de evacuación promedio $\langle T \rangle$ es la cantidad de pasos necesaria para que el agente más lejano a la salida, a una distancia d , logre egresar. Normalizando en (5.5) la distancia recorrida por el tamaño de la habitación:

$$\frac{d}{L} = \frac{\langle v \rangle \langle T \rangle}{L} = \frac{\langle T \rangle}{L} = 1 - \left(\frac{1 - \rho}{\rho L + \epsilon} \right) , \quad (5.6)$$

obtenemos una expresión para el tiempo de evacuación promedio en función de la densidad, para densidades bajas, es decir, agentes no interactuantes.

Esta aproximación deja de ser válida cuando nos acercamos a una densidad crítica ρ_C donde la probabilidad de que ocurran colisiones aumenta, haciendo que las interacciones se vuelvan relevantes. Calculamos la densidad crítica de la siguiente manera: para evitar que ocurran interacciones, la separación mínima entre agentes debe ser de al menos una celda vacía. Insertando esa condición en la ecuación (5.4) despejamos la densidad asociada

$$\rho_C = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon}{L} \right), \quad (5.7)$$

así encontramos la densidad crítica máxima para la cual el sistema se compone de peatones mayormente no interactuantes. El grado de libertad ϵ finalmente sólo introduce una corrección del orden de $\pm 1/L$ en la expresión (5.7), lo que muestra que el valor de la densidad crítica es robusto para sistemas unidimensionales de muchas celdas.

Para observar cómo se comporta el sistema en torno a su llenado crítico, podemos reemplazar la ecuación (5.7) en (5.6) para obtener

$$\frac{\langle T_C \rangle}{L} = 1 - \frac{1}{L}. \quad (5.8)$$

que es un valor asintótico para el tiempo de evacuación entre agentes no interactuantes, cuando las densidades son grandes. Este valor de saturación indica cómo sería la evacuación si los agentes no pudieran interactuar aunque ocuparan la misma celda, y la divergencia del sistema respecto a éste remarca cómo las interacciones entre agentes introducen un cambio de fase al sistema.

5.2.2. Sistema lleno o colisional

En esta nueva fase, la dinámica de evacuación sigue dependiendo exclusivamente de la densidad inicial, pero se deben realizar otras consideraciones para determinar el comportamiento del sistema. Ya que las colisiones tipo 1, definidas anteriormente, se vuelven dominantes, debemos considerar una configuración inicial que las maximice para representar el comportamiento promedio del sistema. Es decir, una configuración compacta, sin espacios libres entre el agente más cercano a la puerta y el más lejano, como se observa en la Figura 5.3. Del análisis de dicha Figura, es claro que una vez un agente es desbloqueado por su predecesor, permanecerá en movimiento. Como mínimo, la vacancia abierta por el primero en línea, en el primer paso temporal, se tarda $N_A - 1$ pasos más en avanzar por los $N_A - 1$ agentes restantes, y el último agente se debe mover al menos N_A pasos más para llegar a la salida. Esto totaliza $2N_A$ turnos que debe esperar el último agente, que se darán a una velocidad promedio de $\langle v \rangle = 1$ paso por unidad de tiempo, por lo que el comportamiento colectivo resulta en un tiempo promedio de evacuación de

$$\frac{\langle T \rangle}{L} = 2\rho . \quad (5.9)$$

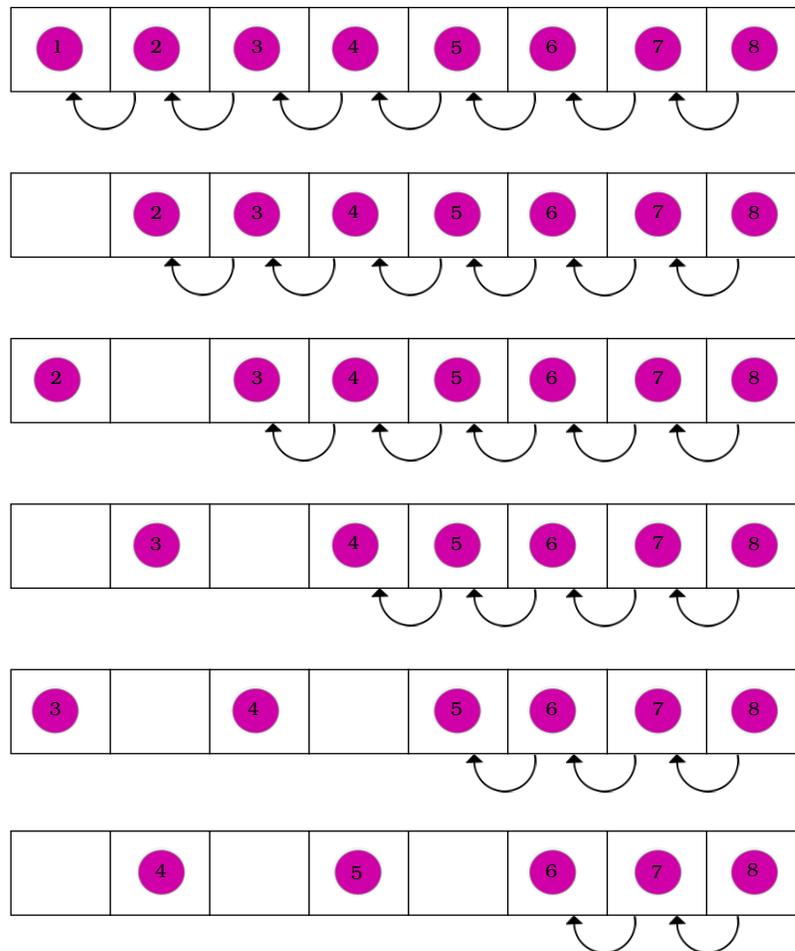


Figura 5.3: Esquema de movimiento de los agentes en un modelo totalmente determinista. Las flechas curvas representan las colisiones de intenciones entre ellos. Mientras los agentes se van desbloqueando, las colisiones van disminuyendo, desde la totalidad de los agentes, a ninguna.

Otra variable relevante en esta fase del movimiento es el número de colisiones tipo 1. A partir de la simulación es sencillo contar cuántas ocurren y promediarlas. Para ajustar este conteo a la escala del sistema, consideremos una cota superior de la máxima cantidad posible de colisiones: esto ocurre para la condición inicial con $\rho = 1$, como se presenta en la Figura 5.3. En este caso, en el primer paso temporal,

tendríamos $L - 1$ colisiones, pues todos los agentes, excepto el agente 1 que está adyacente a la salida, colisionan con los de adelante. En lo sucesivo, el agente más cercano a la puerta nunca colisiona con nada, mientras todos los que tiene detrás colisionarán con sus vecinos frontales hasta que sean desbloqueados. Recordando además que una vez un agente es desbloqueado nunca dejará de moverse, es fácil deducir que el número máximo posible de colisiones se obtiene sumando el número total de colisiones en cada turno, que va desde $L - 1$ colisiones cuando están todos los agentes en la habitación, hasta 1, cuando el penúltimo agente comienza a moverse. Entonces, el número máximo de colisiones C_0 está dado por la suma aritmética

$$C_0 = \sum_{i=1}^{L-1} i = \frac{(L-1)L}{2} . \quad (5.10)$$

5.3. Simulaciones

Cabe preguntarse si estas simplificaciones reflejan el comportamiento promedio del sistema. Para responder esto, realizamos múltiples iteraciones de las simulaciones para cada densidad, hasta que al agregar repeticiones la dinámica promedio no se vea afectada, es decir, hasta obtener comportamientos con validez estadística; en general, realizamos entre 1000 y 1200 repeticiones para cada densidad. Usamos un tamaño de malla con $L = 100$ celdas, donde se ubica el número inicial de agentes N_A en posiciones generadas aleatoriamente según una distribución uniforme. Con esta metodología, fueron obtenidos tiempos promedio de evacuación $\langle T \rangle$ para cada valor de densidad, y la impredecibilidad fue caracterizada por la desviación estándar σ_T .

En la Figura 5.4 observamos distintivamente dos regímenes para $\langle T \rangle$, separados por un punto de transición en torno a la densidad crítica $\rho_C = 1/2$, lo que comprueba las hipótesis formuladas para construir la ecuación (5.7). Para $\rho < \rho_C$ se observa la

situación diluida, en la cual la dinámica depende de la posición inicial del agente más lejano a la salida. En el otro régimen, las colisiones entre agentes dominan la dinámica y producen organización colectiva. Cuando las funciones teóricas descritas por (5.9) y (5.6) para ambos regímenes son graficadas, coinciden con nuestros hallazgos numéricos, excepto en una pequeña región de transición en torno a $\rho \approx \rho_C$. Identificamos entonces que existe un proceso análogo a una transición de fase, no en el sentido termodinámico estricto, pues no hemos definido una temperatura, o energía libre para el sistema, pero porque observamos un claro cambio en la derivada de la relación funcional que representa la dependencia entre los observables mesoscópicos ρ y $\langle T \rangle$.

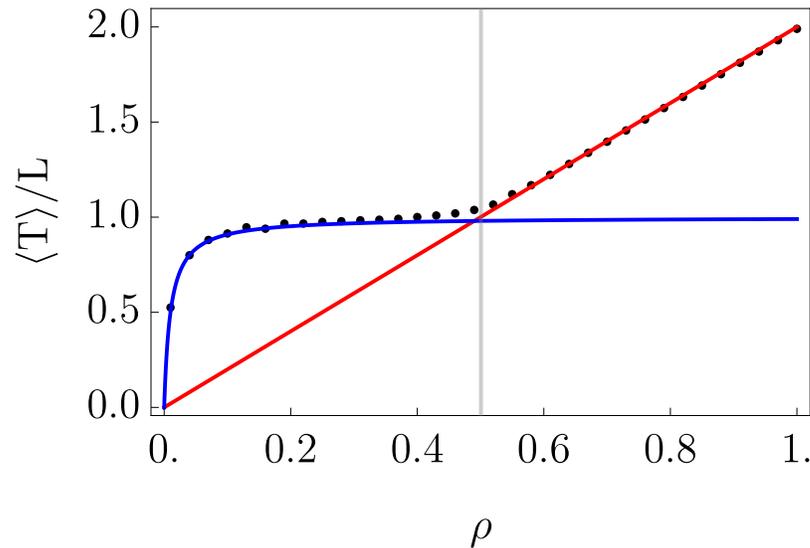


Figura 5.4: Tiempo de evacuación promedio como función de ρ . Los puntos corresponden a los resultados de la simulación, mientras que las descripciones teóricas de cada régimen se muestran con las líneas sólidas coloreadas. El régimen diluido está representado teóricamente con la expresión (5.6) (azul) y el interactuante, con (5.9) (rojo), ambos regímenes están separados por una línea vertical gris ubicada en la densidad crítica $\rho_C = 1/2$.

En la Figura 5.5 presentamos la desviación estándar como función de ρ , para

caracterizar la variabilidad en el movimiento de los agentes. Esta variabilidad procede principalmente de las

$$\binom{L}{N_A} = \frac{L!}{(L - N_A)!N_A!},$$

posibles formas diferentes de ubicar N_A agentes en L celdas. Es por esto que disminuye notoriamente cuando la densidad se aproxima al valor crítico $\rho_C \sim 1/2$. La variabilidad en efecto se acerca a cero cuando $\rho \rightarrow 1$, pues mientras mayor sea la densidad de llenado inicial, menos vacancias habrán disponibles para el agente más lejano a la puerta, hasta que ya sólo pueda ocupar una única celda que es la más lejana. En consecuencia, el sistema se vuelve totalmente determinista cuando la distribución inicial de agentes es perfectamente compacta.

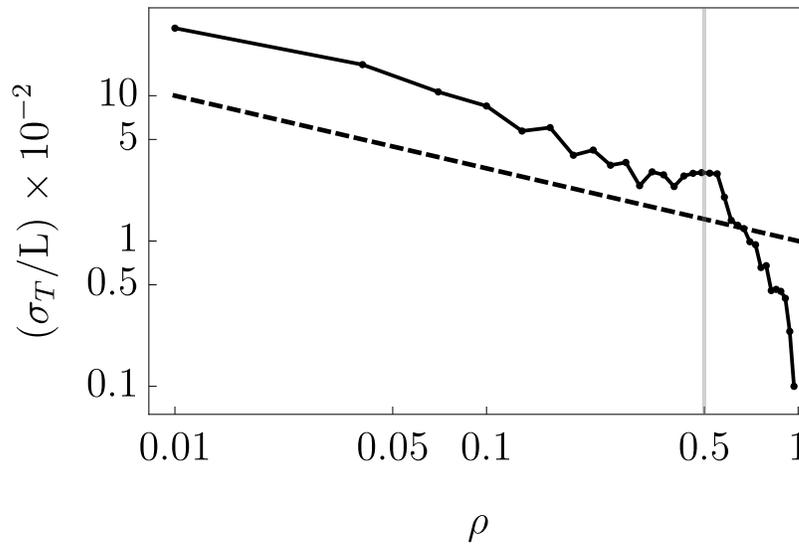


Figura 5.5: La desviación estándar de $\langle T \rangle$ representada en escala logarítmica. Los puntos corresponden a los resultados de las simulaciones, unidos por líneas continuas para facilitar la legibilidad. Una línea vertical gris destaca la densidad crítica en $\rho = 1/2$. También mostramos como referencia la tendencia $\rho^{-1/2}$ como la línea negra segmentada, para comparar visualmente el comportamiento del ancho de la distribución.

Observando la Figura 5.6 vemos que las colisiones aumentan pasado el umbral $\rho_c \sim 1/2$, esto es, cuando el número de interacciones aumenta notoriamente. Comparando esta Figura con la Figura 5.5 podemos afirmar que las colisiones disminuyen la desviación estándar de la distribución, es decir, vuelven el tiempo de evacuación promedio $\langle T \rangle$ más predecible y asisten en la auto-organización del sistema.

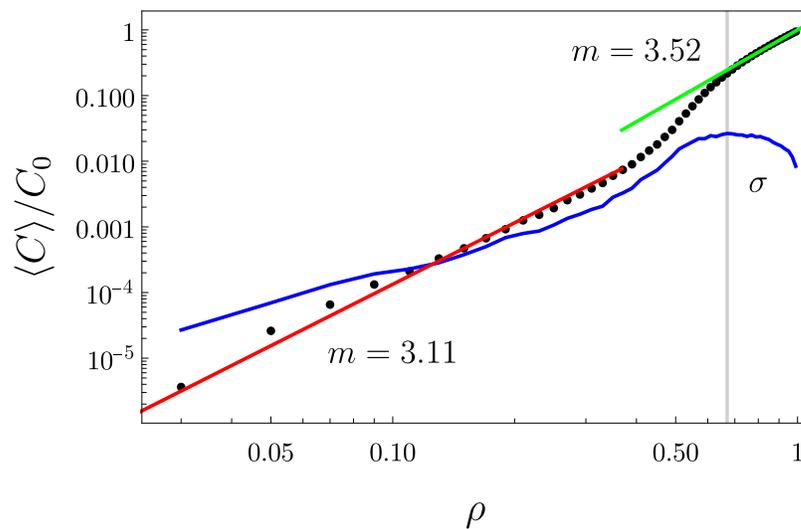


Figura 5.6: El número de colisiones normalizadas por C_0 en función de la densidad ρ , en escala logarítmica. Los puntos representan los resultados de las simulaciones, las líneas rectas roja y verde son ajustes con leyes de potencia, acompañados del índice de la ley de potencia m correspondiente. Además, mostramos en azul la desviación estándar de este promedio, σ , y la densidad en donde es máxima con una línea vertical cerca de $\rho \sim 0.7$.

Consistentemente con los demás resultados, también existe una transición de fase en la dependencia de las colisiones totales respecto a la densidad inicial. En la Figura 5.6 vemos que para las regiones diluida y colisional las colisiones totales tienen una dependencia con la densidad tipo ρ^m , donde el cambio de fase separa dos valores de m distintos. Ambos se obtienen usando todos los datos de la simulación (no solo los promedios) para los intervalos de densidad $\rho \in [0, 0.5]$ para la línea roja y

$\rho \in [0.7, 1.0]$ para la verde¹. Escogimos los intervalos orientándonos por la evidente variación en la desviación estándar σ que tiene un máximo asociado a la región de transición de fase.

La desviación estándar muestra que la predictibilidad, en tanto ocurrencia de colisiones, tiene dos máximos locales: en el régimen diluido es razonable esperar que hayan pocas colisiones, por lo que la desviación estándar es baja. La predictibilidad disminuye mientras la densidad aumenta, pues se produce una competencia en la dinámica, las colisiones ordenan al sistema, pero el posicionamiento inicial de los agentes es aleatorio. Finalmente, en el régimen compacto con $\rho \rightarrow 1$ el sistema actúa cada vez más similar al caso descrito para obtener la expresión (5.10), por lo que la desviación estándar cae abruptamente: el resultado de contar las colisiones vuelve a ser predecible. Dicho de otra manera, mientras la habitación se llena, podemos predecir con mayor certeza que la mayoría de los agentes colisiona.

En resumen, las colisiones se vuelven relevantes aproximadamente cuando $\rho \rightarrow \rho_C = 1/2$, donde el cambio en la pendiente de la curva del promedio de colisiones totales, y en la tendencia de su desviación estándar, señalan una transición de fase en el tipo de dinámica. Esto refuerza que para $\rho < \rho_C$ las colisiones son producidas por las condiciones iniciales aleatorias, y son poco probables, mientras que para $\rho > \rho_C$ las colisiones son producidas por agentes bloqueando a los que tienen detrás.

Cabe destacar que cuando $\rho \rightarrow 1$ el número contabilizado de colisiones no supera al máximo teórico propuesto en la expresión (5.10), lo que valida nuestra contabilidad.

¹Se usó el método de Theil-Sen para calcular las pendientes promedio. Es un método numérico que ajusta tendencias lineales en datos dispersos, ignorando puntos atípicos, mencionado por completitud, pues sólo se usó en esta ocasión.

Capítulo 6

Modelo con parálisis aleatoria

Alteramos el modelo determinista descrito en el Capítulo 5, agregando una variable estocástica al proceso de toma de decisión de los agentes. Mantenemos la misma geometría: un pasillo unidimensional, donde la única salida define la dirección preferida por todos los agentes, o “adelante”. Se mantiene el largo de $L = 100$ celdas, las restricciones de un solo agente por celda y la imposibilidad de adelantamientos.

Introducimos una probabilidad de parálisis arbitraria, parametrizada por $P \in [0, 1[$. Aquí, no intentamos encontrar cuáles valores parametrizan mejor una situación social, cultural o psicológica real, más bien pretendemos probar que estos valores pueden afectar considerablemente la respuesta de los agentes, induciendo variaciones relevantes al tiempo total de evacuación y cantidad de colisiones. Esta variable pretende introducir en la simulación el comportamiento no adaptativo más simple posible, es decir, que un agente no se mueva pese a tener las condiciones para hacerlo.

Procedemos de la misma manera que en el Capítulo 5, derivamos expresiones teóricas donde sea posible y comparamos con los resultados de la simulación, caracterizando la impredecibilidad de la dinámica a partir de la desviación estándar. Además, observamos cómo cambian los fenómenos emergentes debido a la diversificación en el motivo de las colisiones.

6.1. Descripción del modelo

Mantendremos la misma geometría de la sala anterior, pero esta vez agregamos un segundo condicionante al movimiento de los agentes: si la celda adyacente a un agente, y más cercana a la puerta, está vacía, éste avanzará siempre y cuando no se encuentre en un estado de parálisis, suceso que puede ocurrir con probabilidad P . En otras palabras, como se muestra en la Figura 6.1, un agente es capaz de avanzar hacia la puerta si ningún otro agente bloquea su camino, o si no ha entrado en parálisis. En un tiempo t cualquiera, de un total de N agentes presentes en la simulación, existe una probabilidad P para cada uno de que se paralice.

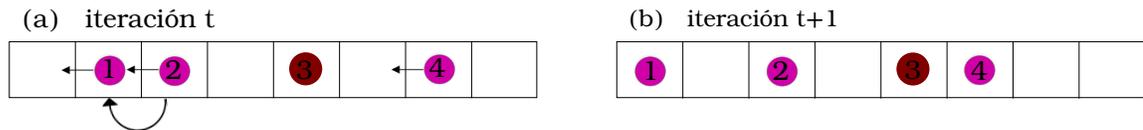


Figura 6.1: Representación del movimiento de los agentes durante la simulación. En (a), tenemos la intención de movimiento, representada por flechas, de los agentes 1, 2 y 4. En esta iteración, el agente 3 (en marrón) no se moverá ya que tiene una probabilidad $P \neq 0$ de quedarse en su sitio. En (b) vemos el resultado de evolucionar el sistema un paso temporal. Los agentes 1 y 4 pudieron moverse ya que tuvieron espacio para hacerlo, mientras que el agente 2 no pudo moverse ya que colisionó con 1, indicado por la flecha curva que une a ambos. El agente 3 no se movió ya que fue afectado por la parálisis aleatoria.

Como vemos en la Figura 6.1, la dinámica interesante aparece cuando los agentes paralizados bloquean a los agentes tras ellos. Esta nueva opción en el espacio de estados posibles del agente no sólo aumenta trivialmente el tiempo de evacuación, sino que aumenta la probabilidad de que ocurran colisiones. De este modo, la expresión (5.10) para la máxima cantidad de colisiones en un sistema sin parálisis ya no representa el máximo posible, pero sigue siendo útil para normalizar las colisiones

totales a la escala del sistema.

El factor P también cambia la velocidad promedio de los agentes comparados con el sistema sin parálisis. La velocidad máxima de los agentes corresponde a una celda por paso temporal, con capacidades de frenado y aceleración infinitas; visto así, podemos entender P como la probabilidad de que ocurra una perturbación en la velocidad de un agente en un paso temporal dado.

6.2. Expresiones teóricas

Como ya mencionamos, cada agente tiene la misma probabilidad P de detenerse súbitamente en cada paso temporal. De esta manera, un agente puede trabar el sistema detrás de él espontáneamente. La implementación práctica del algoritmo es como sigue: en cada tiempo t cada agente genera un número aleatorio entre 0 y 1, y se evalúa si es mayor o menor a P ; si es menor, el agente está paralizado, y no declara intención de moverse. A continuación, se cuentan las colisiones entre agentes que no están paralizados, pero que no podrán moverse pues la celda delantera está bloqueada. Cuando el sistema se actualiza, los agentes paralizados pierden su turno, junto con todos los que tampoco se mueven debido a colisiones.

En relación con la Figura 6.1 vemos que el agente 3 no se mueve en su turno, pese a tener el espacio para hacerlo. Por supuesto, en la siguiente iteración el agente genera un número entre 0 y 1 de nuevo, con una distribución de probabilidad uniforme, para compararlo con P . De esta forma se seleccionan nuevos agentes que no se moverán durante la iteración, lo que podría o no incluir al agente 3. Así, para N agentes presentes, en promedio, $N(1 - P)$ agentes se moverán y NP no, sin contar los que pierden su turno por los bloqueos. Esta nueva posibilidad para los agentes debería aumentar el espacio de configuraciones posibles que recorre el sistema antes

de concluir la evacuación, y elevar la desviación estándar del tiempo de evacuación mientras mayor sea la probabilidad de parálisis. En resumen, con $P \neq 0$ los agentes pueden detenerse espontáneamente, demorar el egreso de sus vecinos traseros e iniciar atascos, que es uno de los fenómenos emergentes característicos del flujo peatonal.

Los atascos iniciados por P , que afectan a los posibles η agentes que se agolpan tras el paralizado en el paso $t \rightarrow t + 1$, no se resuelven inmediatamente, pero comienzan a disolverse en cuanto el agente paralizado se moviliza de nuevo, lo que impide la formación de embotellamientos capaces de trabar el sistema completo, o interactuar entre sí [71]. Sin embargo, en el paso $t + 1 \rightarrow t + 2$ existe la probabilidad de que otro agente atascado se paralice, iniciando un nuevo bloqueo. En resumen, los atascos no tienen un tiempo de vida suficiente para fragmentar al sistema ni interactuar entre sí, pues se disgregan rápidamente, sin embargo, son suficientemente frecuentes como para demorar el egreso. Es posible que al asignar valores de P a los agentes con alguna distribución que favorezca que ciertos agentes permanezcan muchos turnos paralizados, surjan dinámicas de embotellamientos complejas, pero dicha indagación no es el objetivo de la presente investigación.

Por todo lo anterior, más allá de este punto se dificulta obtener expresiones analíticas para la densidad crítica ρ_C y tiempo de evacuación promedio $\langle T \rangle$ de forma análoga al capítulo anterior. No obstante, sigue siendo cierto que cuando $\rho > 1/2$ no existe ninguna configuración del sistema capaz de impedir las colisiones, por lo que esta densidad es de interés.

6.2.1. Sistema diluido

Para el régimen diluido, podemos repetir el razonamiento usado para construir las expresiones (5.2)-(5.5), que permiten encontrar la distancia del último agente res-

pecto a la salida en la configuración inicial. La diferencia es que en este caso, P afecta el *movimiento* de los agentes, reduciendo la velocidad promedio aproximadamente a

$$\frac{\langle v \rangle}{v_{\max}} = 1 - P, \quad (6.1)$$

donde $v_{\max} = 1$ celda por paso temporal, es la velocidad máxima posible en este sistema. Esta nueva velocidad modifica la ecuación (5.5) que relaciona el tiempo de evacuación con la probabilidad de parálisis:

$$\frac{\langle T \rangle}{L} = \frac{1}{1 - P} \left[1 - \left(\frac{1 - \rho}{\rho L + 1} \right) \right]. \quad (6.2)$$

Esta función diverge en el límite $P \rightarrow 1$, reflejando el límite en que todos los agentes se paralizan, en dicho caso, la velocidad media de cada uno es nula y el tiempo de evacuación es infinito. Además, al tomar el límite $\rho \rightarrow 1$ encontramos un valor de saturación que sería válido en el caso de agentes no interactuantes (es decir, sin colisiones). Este valor de saturación debería ser muy diferente al valor real arrojado en las simulaciones, ya que los atascos incrementan la cantidad de colisiones y esto aumenta el tiempo de evacuación.

6.2.2. Sistema lleno

Por lo discutido en el Capítulo 3, es de esperar que las interacciones aumenten la no-linealidad y complejidad del sistema, dificultando la construcción de expresiones analíticas; en su lugar, debemos observar los resultados de las simulaciones para caracterizar las variables relevantes del sistema observacionalmente. Para la elaboración de la Figura 6.2 que muestra el tiempo promedio de evacuación, es necesaria la construcción de expresiones semi-empíricas, y a partir de éstas es posible encontrar una densidad crítica ρ_C que delimite regiones donde la colisionalidad es más (o

menos) dominante, como se discutirá en el análisis de la Figura 6.3.

Además, compararemos la velocidad de los agentes con una expresión teórica orientada por el caso sencillo: sin parálisis pero interactuante, el cual es como sigue: para el caso $P = 0$, sabemos que con una sala llena, los agentes se demoran en promedio $2L$ pasos temporales en evacuar el sistema de largo L (ver ecuación (5.9)), por lo que la velocidad promedio del último agente será $\langle v \rangle = L/2L = 1/2$. Pero al aumentar P , las interacciones colectivas ganan relevancia, haciendo que $\langle v \rangle$ disminuya. Con estos argumentos, podemos estimar una cota superior para la velocidad cuando se introduce, simplemente, la probabilidad de una parálisis, sin suponer que puedan iniciarse atascos (que no es el caso):

$$\frac{\langle v \rangle}{v_{\max}} = \frac{(1 - P)}{2} . \quad (6.3)$$

6.3. Simulaciones

Repetimos el procedimiento descrito en el Capítulo 5, esta vez variando el valor de P además de las densidades iniciales. Obtenemos simulacionalmente los tiempos promedio de evacuación $\langle T \rangle$, como función de la densidad para varios valores de P y la impredecibilidad de la dinámica es caracterizada a partir de la desviación estándar σ_T . Realizamos $M = 1000$ repeticiones de cada simulación, y observamos que aumentar el valor de M no altera los resultados, por lo que la estadística efectivamente representa el comportamiento del sistema. En la Figura 6.2 mostramos el tiempo de evacuación promedio, y su respectiva desviación estándar en la Figura 6.5.

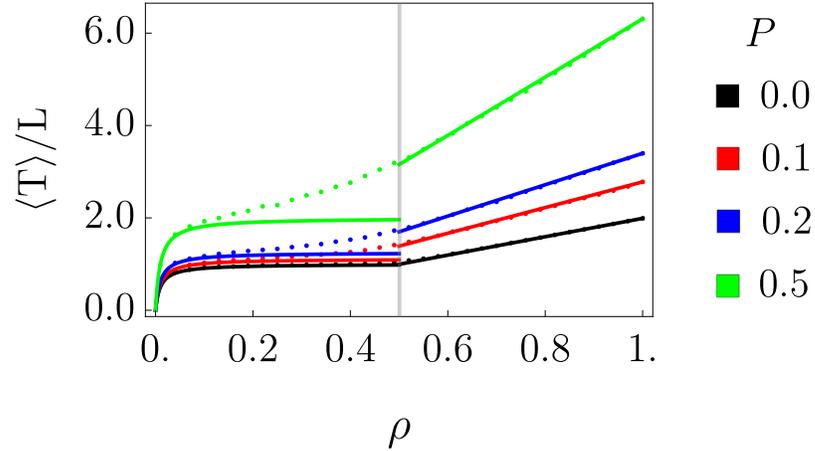


Figura 6.2: Tiempo promedio de evacuación, normalizado por el largo de la habitación, para distintos valores de $P = 0.0$ (negro), 0.1 (rojo), 0.2 (azul) y 0.5 (verde). Los puntos representan los resultados de las simulaciones, y las líneas continuas de color para $\rho < 1/2$ representan la ecuación (6.2). En el otro régimen, para $\rho > 1/2$, mostramos una recta desde $\rho = 1$ al origen, cuya pendiente es extraída de la simulación. Ambos regímenes son separados por una línea gris vertical en $\rho_C = 1/2$.

Comencemos analizando la Figura 6.2 para el intervalo $\rho < 1/2$ y valores crecientes de P . Es evidente que nuestra aproximación teórica comienza a fallar a medida que ρ aumenta. Esto muestra que la dinámica colectiva se vuelve relevante y no trivial a medida que P aumenta, incluso para densidades y parálisis espontáneas pequeñas, rompiendo rápidamente el comportamiento propio del régimen no interactuante. Además, vemos que a partir de cierta densidad crítica, que para todos los valores de P está cerca de $1/2$, es posible describir el tiempo de evacuación en función de la densidad con la función lineal

$$f(\rho) = \rho \langle T(\rho = 1) \rangle , \quad (6.4)$$

donde el valor $\langle T(\rho = 1) \rangle$ para la pendiente se obtuvo *directamente de la simulación*, observando el tiempo promedio correspondiente a las evacuaciones con un sistema

inicialmente lleno. Este resultado nos indica que, a partir de cierta densidad crítica, el sistema actúa similarmente a cuando el pasillo está lleno, es decir, como si no hubiera vacancias entre agentes, maximizando las colisiones para una densidad dada. Obtener este comportamiento para un intervalo amplio de valores de P demuestra que dicho escalamiento lineal se perfila como una característica robusta del sistema.

El caso determinista ($P = 0$ en negro) tiene los tiempos mínimos de evacuación para cada ρ y además una transición de fase clara en torno a $\rho = 1/2$, que es eliminada por el aumento de la parálisis; en efecto, las curvas para todos los casos donde $P \neq 0$ son suaves. La pérdida de la transición de fase difumina la definición para una densidad crítica ρ_C , pero es posible estimarla a partir de las simulaciones. En la Figura 6.3 definimos $\rho_C(P)$ como la intersección entre la ecuación (6.2) y la línea recta $f(\rho)$ definida en (6.4). Aunque no es perfecta, esta estimación de ρ_C proporciona un método robusto para determinar en cuál densidad las interacciones comienzan a formar dinámicas emergentes que dominen el sistema. Lógicamente, al aumentar P las colisiones ganan importancia cada vez más temprano, lo que reduce la densidad crítica necesaria para que las interacciones dominen la dinámica de evacuación.

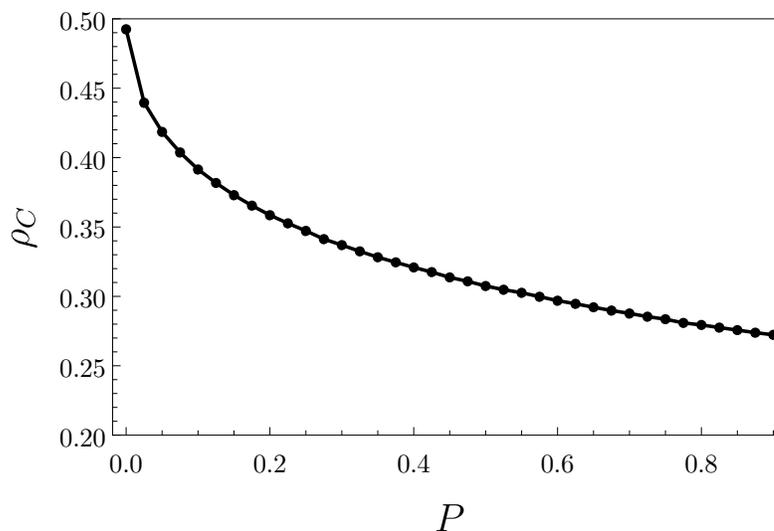


Figura 6.3: La densidad crítica ρ_C como función de P . Los puntos son los resultados de las simulaciones, unidos con una línea para facilitar la legibilidad.

El tiempo de evacuación es determinado en la práctica por la salida del agente más lejano a la puerta y en el régimen altamente interactuante ($\rho = 1$), el último agente recorre una distancia L en un tiempo $\langle T \rangle$. Como otra forma de cuantificar la relevancia de los efectos colectivos producidos por la variable aleatorizante P , estimamos una velocidad promedio empírica del último agente $\langle v \rangle$, calculando $L/\langle T \rangle$ a partir de las simulaciones, usando el inverso $1/f$ de los valores descritos por la expresión (6.4), lo que se muestra en la Figura 6.4 como función de P .

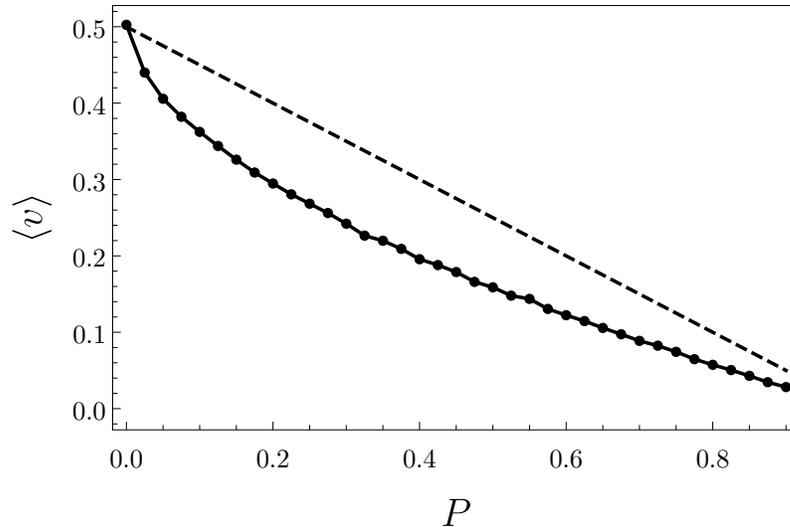


Figura 6.4: En esta Figura se muestra $\langle v \rangle$ para la situación altamente interactuante en $\rho = 1$ como el inverso de la pendiente del gráfico de la Figura 6.2. En la línea segmentada, vemos como referencia la cota calculada en (6.3). Los puntos representan los resultados de las simulaciones, unidos por una línea para facilitar la legibilidad.

Observamos que la velocidad efectiva permanece estrictamente debajo de la estimación dada por (6.3) para el caso interactuante, y, con mayor razón, bajo lo estimado por (6.1) (el doble) que es el caso no interactuante. Esta comparación enfatiza que tan pronto como el valor de P aumenta, las interacciones se vuelven relevantes y el comportamiento emergente domina la dinámica, pues los resultados empíricos se desvían notoriamente de las expresiones teóricas que no consideran colisiones.

Ahora discutiremos la impredecibilidad del sistema. Observamos en la Figura 6.5 la desviación estándar σ_T de los promedios de los tiempos de evacuación, para diferentes valores de ρ inicial y P . Aunque σ_T aumenta con P , como era esperado, su disminución con ρ merece discusión.

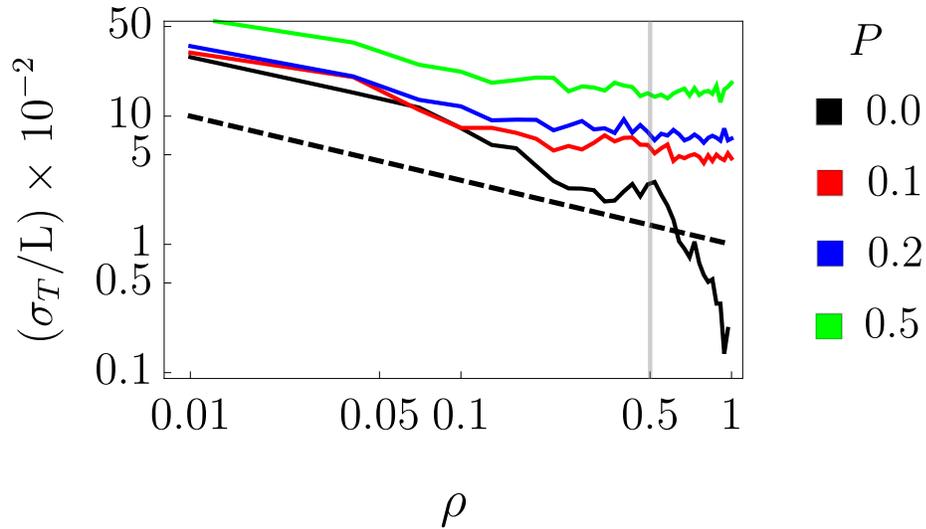


Figura 6.5: La desviación estándar asociada a $\langle T \rangle$ en función de ρ representada en un gráfico en escala logarítmica. Las líneas son continuas para facilitar la legibilidad. El punto crítico $\rho = 1/2$ es destacado con una línea vertical gris. La línea negra segmentada representa una tendencia $\rho^{-1/2}$.

La desviación estándar proviene de dos fuentes: la distribución inicial aleatoria de agentes y las colisiones inducidas por $P \neq 0$. Notamos que para todos los valores de $P \neq 0$ tenemos una tendencia promedio a que la desviación estándar disminuya con al aumentar la densidad, es decir, la aleatoriedad derivada de la distribución inicial de agentes se atenúa. Para valores de ρ cercanos a 1, la primera fuente se vuelve irrelevante en introducir aleatoriedad, pues las posibilidades para ubicar al último agente disminuyen drásticamente. Esto implica que para el pasillo lleno, sólo las colisiones contribuyen significativamente a σ_T . En otras palabras, para una habitación llena, la mayor fuente de aleatoriedad son las parálisis estocásticas en algunos agentes, que generan bloqueos para los que están tras ellos; mientras que para una habitación más vacía, además de la parálisis, aporta a la desviación estándar la variabilidad facilitada por la mayor cantidad de configuraciones iniciales posibles.

Además, para el sistema susceptible a parálisis espontáneas, no existe un cambio de fase agudo como para $P = 0$, donde la desviación estándar, de hecho, disminuye prácticamente a cero una vez se cruza el umbral $\rho \approx 1/2$. Esto muestra que para los casos $P \neq 0$ las colisiones *sostienen* la impredecibilidad del sistema.

Otra forma de analizar la relevancia de los comportamientos colectivos, es estudiar las colisiones como función de P y de ρ , como se muestra en la Figura 6.6.

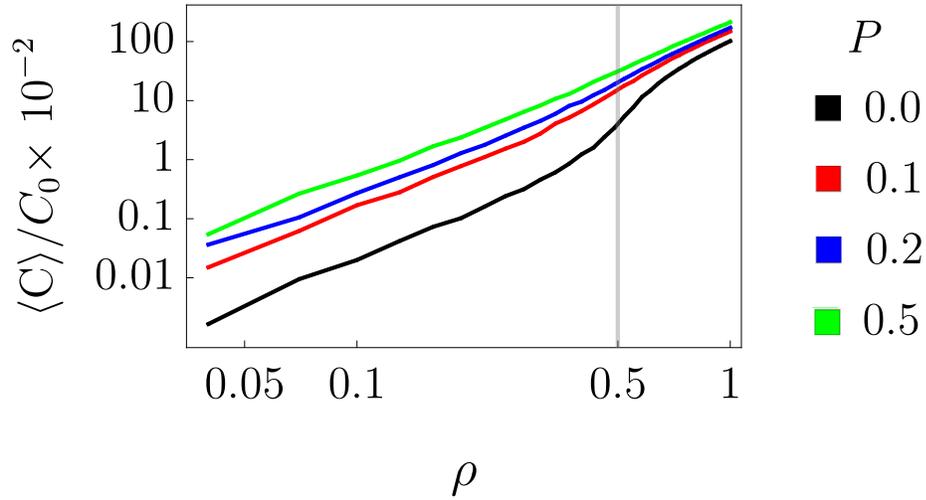


Figura 6.6: El promedio normalizado de colisiones como función de ρ , en escala logarítmica. Para ajustar los resultados a la escala del sistema, se normaliza nuevamente con el valor teórico de colisiones C_0 derivado en (5.10). El punto crítico $\rho = 1/2$ es destacado con una línea vertical gris.

Comparamos los resultados de las colisiones totales del modelo sin parálisis (ver Figura 6.6) con distintos valores para P ; en la Figura 6.6 graficamos el caso $P = 0$ (en negro) junto a los demás (en colores). Es claro que al tener $P \neq 0$, la transición de fase entre regímenes diluido y lleno desaparece, lo que enfatiza la importancia de las interacciones una vez ocurren parálisis.

Además de observar $\langle T \rangle$ con su respectiva desviación estándar σ_T , podemos caracterizar la impredecibilidad del sistema estudiando la distribución de los tiempos

de evacuación en nuestras simulaciones. Pretendemos caracterizar la variación de la distribución, primero en el régimen diluido, y segundo en el régimen lleno. Es por eso que presentamos los pares de Figuras 6.7 y 6.8, agrupados según densidad; y en todos los casos mantenemos el mismo intervalo para $\langle T \rangle / L$, ya que nuestro interés es compararlos. Sabemos, de la Figura 5.5, que para $\rho = 1$ y $P = 0$ tendremos una función delta, concentrada en $T/L = 2$ pues la evolución está totalmente determinada por una condición inicial sin espacio para aleatoriedad. Dicho caso no es de interés en este contexto.

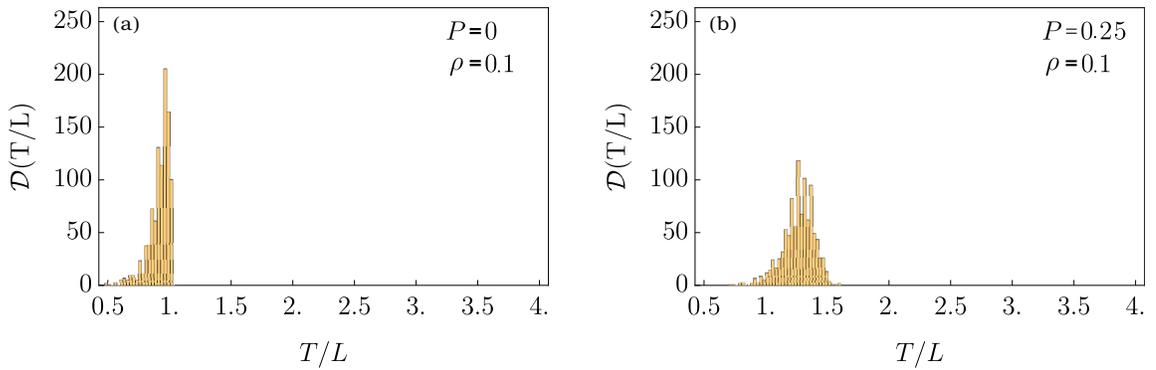


Figura 6.7: Funciones de distribución para tiempo de evacuación T/L para un régimen diluido, es decir $\rho = 0.1$. En (a) observamos la distribución cuando no existe la probabilidad de parálisis. En (b) graficamos la distribución de tiempos de evacuación para $P = 0.25$. Construimos las distribuciones a partir de $M = 1000$ iteraciones.

En la Figura 6.7 (a), notamos que para $P = 0$, y un valor pequeño de ρ la distribución no es normal, es asimétrica. Además, la media de los tiempos de evacuación se encuentra cerca de $\langle T \rangle / L \lesssim 1$, en acuerdo con lo predicho por la ecuación (5.6) para el tiempo de evacuación en el régimen diluido. En efecto, al reemplazar $\rho = 0.1$ y $\epsilon = 0$, encontramos que

$$\frac{\langle T \rangle}{L} = 1 - 0,09 \lesssim 1, \quad (6.5)$$

implicando que cuando las colisiones no son importantes, los tiempos de evacuación pueden ser más cortos que 100 pasos (recordemos que $L = 100$ es la cantidad de celdas del sistema), pero no es probable que sean mucho más largos. También hay un mínimo de pasos necesarios, aunque es improbable de obtener, debido a la probabilidad de que ocurra el caso más optimista: el último agente se ubica lo más cerca posible de la salida, a una distancia $L\rho$ de ésta. En ese caso particular, se daría una configuración compacta de agentes, por lo que la expresión válida es (5.9) y la evacuación toma apenas $2\rho L = 20$ pasos temporales en ejecutarse. Este caso optimista es equivalente a que el último agente se ubique a una distancia $2L\rho$ de la salida, dejando las vacancias mínimas en la fila (una entre cada agente) para prevenir colisiones.

Para estudiar los casos con probabilidad P de detenerse distinta de cero, nos orientamos por los resultados expuestos en las Figuras 6.2, 6.3 y 6.5 para escoger un valor de P que varíe la dinámica de forma notoria, pero sin volver irreconocibles las características del sistema totalmente determinista. Como se puede ver en la Figura 6.2, incrementos en P del 50% triplican el tiempo total de salida incluso en el régimen menos aleatorio posible ($\rho = 1$), aumentando la impredecibilidad, como se ve en la Figura 6.5 y disminuyendo casi a la mitad la densidad crítica para la cual las interacciones comandan al sistema (ver Figura 6.3). Es por esto que se escogió el valor $P = 0.25$ para elaborar las Figuras 6.7 (b) y 6.8 y así llevar a cabo un análisis similar al previamente expuesto.

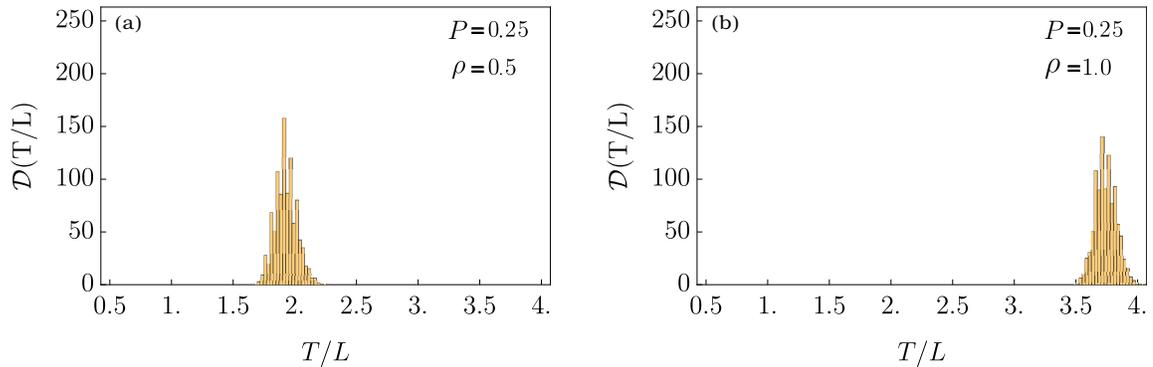


Figura 6.8: Funciones de distribución del tiempo de evacuación T/L , para una probabilidad de parálisis $P = 0.25$, en un régimen colisional con $\rho = 0.5$ en (a), y totalmente colisional con $\rho = 1.0$ en (b). Construimos las distribuciones a partir de $M = 1000$ simulaciones.

Podemos ver que en la Figura 6.7 (b), la distribución se vuelve simétrica, pero es mucho más ancha que en los casos mostrados en la Figura 6.8, indicando que la aleatoriedad en la ubicación inicial de los agentes es más relevante que las colisiones. Es decir, en densidades pequeñas, la parálisis iguala las probabilidades de un egreso muy rápido o muy lento, mientras que en el sistema sin parálisis se privilegian los egresos rápidos.

Al aumentar ρ observamos que las distribuciones se vuelven más angostas, debido a que la menor cantidad de vacancias vuelve más predecible al sistema. Aún así las colisiones inducidas por la parálisis sostienen el ancho y la simetría de las distribuciones.

Capítulo 7

Modelo con parálisis aleatoria y ansiedad

Ya estudiamos los efectos de una parálisis espontánea en nuestro modelo, ahora incluimos los efectos de la fatiga de decisión, cuando un peatón lleva mucho tiempo sometido a una situación de emergencia. En este caso, la capacidad de decidir podría verse mermada y los comportamientos no adaptativos agudizarse y volverse directamente contraproducentes. En un esquema de evacuación, más contraproducente que paralizarse es moverse hacia atrás, alejándose de la salida.

En nuestro modelo, en situaciones de bajo estrés, el movimiento preferido siempre es hacia adelante, mientras que en situaciones de alto estrés los agentes podrían moverse hacia atrás, alejándose efectivamente de la salida. Ambas respuestas se caracterizan por umbrales de ansiedad y consideramos que el valor general de estos umbrales cambia dependiendo de los diferentes trasfondos sociales, culturales o psicológicos de los agentes. Nuevamente, no intentaremos afirmar cuáles valores parametrizarían mejor una situación real, pero pretendemos mostrar que estos valores inducen variaciones relevantes en los fenómenos colectivos.

7.1. Descripción del modelo

Además de la probabilidad de parálisis P , introducimos la variable “ansiedad”, que se acumula en el tiempo para cada agente si no logra moverse en un turno, y que se disipa cuando el agente logra moverse, sin importar si se acerca o aleja de la salida. De esta manera, parametrizamos la probabilidad del otro comportamiento no adaptativo más simple posible, además de no moverse: alejarse de la salida. Ya que este comportamiento es mucho más contraproducente, sólo se alcanza una vez el agente se fatiga, tras haber atravesado varios turnos de la simulación sin poder avanzar hacia la salida.

Definimos el nivel de ansiedad A_i para el agente i -ésimo, que funciona de la siguiente manera: inicialmente, todos los agentes tienen un valor nulo de ansiedad $A_i = 0$. Para valores bajos o nulos de ansiedad, el agente siempre intenta moverse hacia la salida, y se moverá si el espacio de adelante está disponible y no esté paralizado, según el mecanismo explicado en el capítulo anterior. Cuando un agente no logra moverse en su turno, el nivel anterior de ansiedad aumenta en una unidad. Este incremento afecta las futuras decisiones que el agente podría realizar para moverse, es decir, una vez el valor de A_i sobrepasa un umbral crítico de ansiedad A_C , el agente podría intentar moverse a cualquier posición adyacente disponible, hacia adelante o atrás. Cuando el agente se mueve, su nivel de ansiedad se reduce en una unidad; a menos que haya sido nula, en cuyo caso no disminuye.

Así, la ansiedad introduce un efecto aleatorizante que depende de una propiedad interna de cada agente, intentando parametrizar un proceso psicológico que refleja su historial de movimiento. Por supuesto, si el agente dispone de un espacio vacío en frente, se moverá en esta dirección.

Este comportamiento genera colisiones no triviales que dependen de la historia de cada agente, e introduce la necesidad de un esquema de resolución de conflictos, en el caso de que dos agentes intenten moverse a la misma celda. Resolvemos estos conflictos haciendo que cada agente declare a qué celda se quiere mover y luego se selecciona aleatoriamente cuál de los dos tendrá éxito en la colisión, es decir, logrará moverse. El que no lo consigue, aumentará su ansiedad en una unidad.

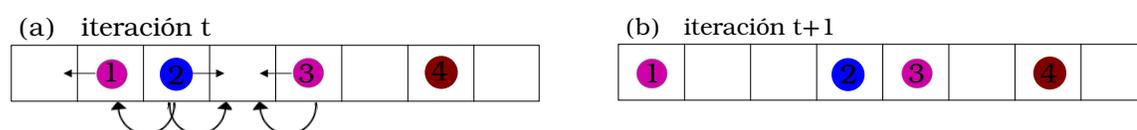


Figura 7.1: Representación del movimiento de los agentes durante la simulación, que incluye tanto una probabilidad de detenerse como una posibilidad de moverse a una celda vacía, a pesar de que éste movimiento implique alejarse de la salida. En (a), se muestra la intención de movimiento de los agentes 1, 2 y 3, representada por flechas. En este turno, el agente 4 (en marrón) no se moverá ya que está paralizado. El agente 2 (en azul) acumuló suficiente ansiedad en turnos anteriores para superar el umbral A_C y pretende moverse a la celda de atrás para disminuirla, ya que la celda delantera está bloqueada por el agente 2. En (b) vemos la configuración de agentes tras un paso temporal. El agente 1 fue capaz de moverse ya que tuvo las condiciones para hacerlo. Los agentes 2 y 3 querían moverse hacia la misma celda y el agente 2 fue seleccionado aleatoriamente para moverse, mientras que el agente 3 no se mueve ya que perdió su oportunidad.

Cuando comparamos la ansiedad particular de un agente A_i con A_C , sus posibles decisiones están enmarcadas en dos escenarios principales, mostrados en los diagramas de la Figura 7.1(a) en la iteración t , y la Figura 7.1(b) en la iteración $t + 1$:

1. Cuando su valor de ansiedad es igual o menor al crítico, el agente intenta avanzar hacia la puerta. Si tiene éxito su ansiedad bajará en una unidad (siempre que su ansiedad inicial haya sido no nula). Si el camino está bloqueado por otro

agente, el primero mantiene su posición, al costo de que su ansiedad aumente en una unidad.

2. Si el valor de ansiedad A_i es mayor que A_C , el agente revisa si la celda hacia la salida está vacía y declara que se quiere mover hacia ella. En el caso de que esta celda esté ocupada y la celda detrás del agente esté vacía, declarará que quiere moverse a la última. Se buscan celdas en conflicto en la simulación y se selecciona aleatoriamente a uno de los agentes para que triunfe en el conflicto. Los agentes que logran moverse reducen su ansiedad en una unidad (siempre que no haya sido nula), mientras que los demás la aumentan en la misma cantidad.

Estas posibilidades introducen dos tipos de interacciones posibles entre los agentes, diversificando los tipos de colisiones. Éstos son definidos de la siguiente manera:

- 1) **Colisión tipo 1:** Cuando un agente pretende avanzar hacia la salida, pero encuentra su camino bloqueado frente a él, ya sea porque su vecino está paralizado, o tiene a su vez la vía de evacuación obstruida por otro agente. El agente que pretende avanzar siempre pierde su turno al enfrentarse a este tipo de conflicto. Esta colisión se representa en los esquemas con una flecha curva bajo los agentes, que une las dos celdas ocupadas, apuntando en el sentido de la salida.
- 2) **Colisión tipo 2:** Cuando la ansiedad de un agente A_i ha superado el umbral A_C y éste intenta retroceder, podría competir con un agente vecino por una celda vacía, generándose así un conflicto que es solucionado aleatoriamente, cuando se selecciona al azar a uno de los agentes para que logre ocupar la celda

vacante. Esta colisión se representa en los esquemas con una flecha curva bajo cada agente involucrado; ambas flechas tienen sentidos opuestos, pues unen cada agente con la celda en disputa.

7.2. Expresiones teóricas

Como ya se vio en el Capítulo 6, con sólo introducir la variable estocástica P se vuelve impracticable determinar analíticamente expresiones para los tiempos de evacuación, densidad crítica y número de colisiones, pese a que en las simulaciones se observa que la dinámica promedio del sistema depende de estas variables.

Pero incluso en esta situación, podemos predecir algunos comportamientos colectivos y distinguir fases del movimiento. Consideremos la relación entre el umbral de ansiedad crítica A_C y el *tamaño* L del sistema (no su densidad). Para un sistema lleno (alta colisionalidad de tipo 1) se puede transicionar desde el régimen $A_C \rightarrow \infty$ (en la práctica, sin ansiedad) al de ansiedad crítica baja, para un tamaño de sistema dado L_{trans} tal que los últimos agentes esperen en reposo un tiempo suficiente para que su ansiedad se active, es decir $A_i > A_C$. Recordemos que para $\rho = 1$ y $P = 0$ el último agente debe esperar aproximadamente $2L$ turnos para comenzar a moverse (ver ecuación (5.9)), lo que implica que la ansiedad se vuelve relevante sólo si el sistema es suficientemente grande. Podemos, entonces, estimar un tamaño de sistema L_{trans} que propicie esta transición con

$$L_{\text{trans}} \approx \frac{A_c}{2} . \quad (7.1)$$

La expresión (7.1) muestra que es posible relacionar el tamaño del sistema con la probabilidad de que efectos acumulativos se vuelvan relevantes.

7.2.1. Entropía

Además de las medidas usuales de desviación estándar, para esta etapa de las simulaciones, comentaremos brevemente otro método para medir impredecibilidad: una medida basada en entropía.

Como vimos en los resultados expuestos en los Capítulos 5 y 6 las celdas vacías aumentan la impredecibilidad del sistema: mientras más celdas vacías, mayor es la desviación estándar del tiempo de evacuación. Esto se debe a que la mayor cantidad de celdas disponibles aumenta la libertad que tienen los N_A agentes iniciales para ubicarse, en acuerdo con la definición de ρ inicial dada en (5.2). Según los resultados de la Figura 5.6 con el aumento de la densidad, disminuye la desviación estándar del número de colisiones, esto implica que la presencia de vacancias más grandes también hacen que el sistema auto-interactúe de forma errática. Superada la densidad crítica, el número de colisiones domina la dinámica, disminuyendo la desviación estándar del tiempo de salida σ_T y de la cantidad total de colisiones σ , lo que indica que el sistema está más auto-organizado y su dinámica emergente es representativa de sus interacciones microscópicas.

En resumen, la variable probabilística que produce mayor impredecibilidad es la cantidad de vacancias, por lo que definimos la probabilidad p_n de encontrar n celdas vacías entre dos agentes durante todo el procedimiento de evacuación. A partir de p_n , calculamos la entropía H , según la definición de Shannon discutida en la Sección 3.4. Adicionalmente, podemos construir una estimación de p_n realizando contabilidad de permutaciones. Primero, consideremos las distintas formas ϕ_n de organizar N_A agentes en $L - n$ vacancias (ya que n deben permanecer vacías)

$$\phi_n \sim \frac{(L - n)!}{(L - n - N_A)!}.$$

Luego, incluimos el hecho de que los N_A agentes son indistinguibles:

$$\phi_n \sim \frac{(L - n)!}{(N_A)!(L - n - N_A)!}.$$

Finalmente, añadimos la consideración adicional de que las vacancias deben encontrarse entre dos agentes, lo que descuenta los bordes de nuestra contabilidad:

$$\phi_n \sim \frac{(L - n - 2)!}{(N_A - 2)!(L - n - N_A)!}.$$

Este conteo corresponde a las configuraciones favorables para tener n vacancias entre dos agentes, dentro de todas las posibles maneras de organizar N_A agentes en L celdas. Por lo tanto, la aproximación a p_n es:

$$p_n = \frac{\binom{L - n - 2}{N_A - 2}}{\binom{L}{N_A}}. \quad (7.2)$$

Este cálculo se realizó suponiendo que la aleatoriedad en la ubicación de agentes en cada actualización del sistema es más fuerte que la tendencia a evacuar y en cada iteración los agentes tienden a permanecer en la habitación, es decir, asumimos una elevada probabilidad de parálisis $P \gtrsim 0.8$.

7.3. Simulaciones

Estudiamos un valor de ansiedad crítica pequeño comparado con el tamaño del sistema $A_c/L = 0.1$, asegurando que la respuesta no-adaptativa ansiosa se active y sea notoria. Presentamos nuestros resultados para los tiempos promedio de evacuación en

la Figura 7.2 y sus respectivas desviaciones estándar en la Figura 7.3, con promedios construidos para $M = 1000$ iteraciones.

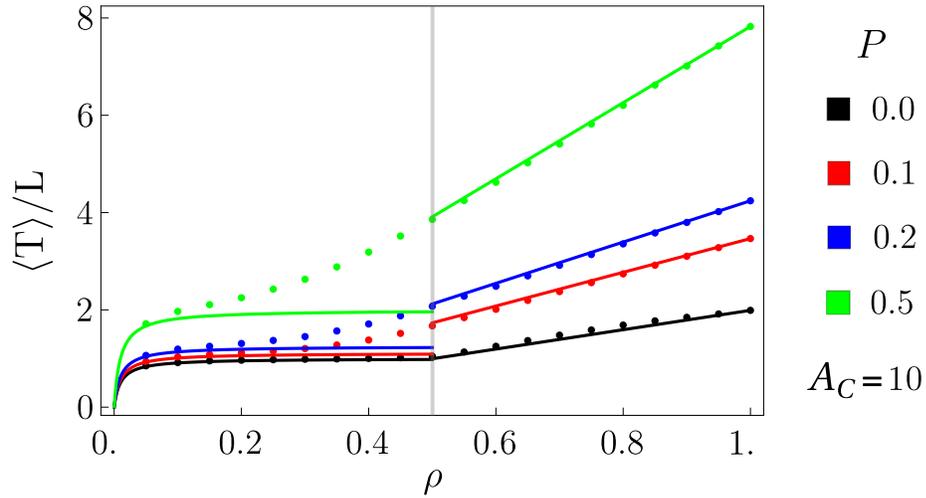


Figura 7.2: Tiempos de evacuación para distintos valores de P y un umbral de ansiedad crítica $A_C = 10$. Cada punto corresponde al promedio sobre 1000 simulaciones. Para $\rho < 1/2$, se compara con la expresión teórica (6.2), graficada con curvas sólidas de color. Para el régimen lleno, se usa el mismo procedimiento indicado que para obtener (6.4) y se grafican con rectas sólidas de color. Ambos regímenes se separan por una línea vertical gris en $\rho_C = 1/2$.

De comparar los resultados para $\langle T \rangle$ con sólo parálisis de la Figura 6.2 con el tiempo de evacuación con parálisis y ansiedad de la Figura 7.2, es inmediato que la ansiedad aumenta el tiempo de evacuación. Para $P = 0.5$ (verde en ambas figuras) el tiempo de evacuación aumenta en 200 turnos; esta cantidad de pasos temporales es significativa en la escala del sistema, pues corresponde al tiempo total de evacuación promedio en el caso lleno y totalmente determinista, mostrado en la Figura 5.4. Para $P = 0.2$ y $P = 0.1$, los puntos representativos de los resultados promedio se alejan más rápidamente de la expresión teórica propuesta por la expresión (6.2), y en los tres casos mencionados se elimina la transición de fase en torno a $\rho_C = 1/2$.

Interesantemente, en el caso $P = 0$ (negro) la respuesta ansiosa no logra separar los resultados de las simulaciones de los predichos: las curvas teóricas muestran buen acuerdo con lo simulado, y se mantiene la transición de fase en torno a $\rho = 1/2$. Esto indica que la respuesta ansiosa necesita de la parálisis para afectar mayormente el tiempo de evacuación del sistema.

En el régimen lleno, en todos los casos con $P \neq 0$ las pendientes de las rectas graficadas fueron encontradas de forma empírica a partir de la simulación, igualmente a lo realizado en la Figura 6.2. Esto reafirma la robustez de la dependencia lineal del tiempo de evacuación con la densidad inicial cuando $\rho > \rho_C \approx 1/2$; aunque no podamos predecir la pendiente analíticamente con razonamientos inductivos, como sí se puede en el sistema sin parálisis.

La desviación estándar de estos promedios σ_T se muestra en la Figura 7.3, en comparación con el caso sin parálisis $P = 0$ (línea negra). Cuando no hay parálisis, pero solamente un efecto de fatiga acumulativo, la desviación estándar es mínima, y descende notoriamente con el aumento de la densidad; además, cerca de la densidad crítica $\rho_C \approx 1/2$ la impredecibilidad del tiempo de egreso aumenta súbitamente señalando un cambio de fase, y luego vuelve a descender. Cabe destacar que el mínimo de σ_T en este caso es *mayor* que el mínimo alcanzado en el caso totalmente determinista, presentado en la Figura 5.5. Al considerar esto en conjunto con el análisis para $P = 0$ en los tiempos de evacuación, concluimos que pese a que la respuesta ansiosa no aleja el comportamiento promedio de lo propuesto teóricamente, ni elimina la transición de fase, diversifica las configuraciones posibles del sistema, volviéndolo más impredecible.

Al analizar los casos $P \neq 0$ (líneas coloreadas en la Figura 7.3) vemos que las desviaciones estándar aumentan sistemáticamente respecto al caso sin parálisis, de-

mostrando que ambos efectos aleatorizantes sostienen la impredecibilidad del sistema.

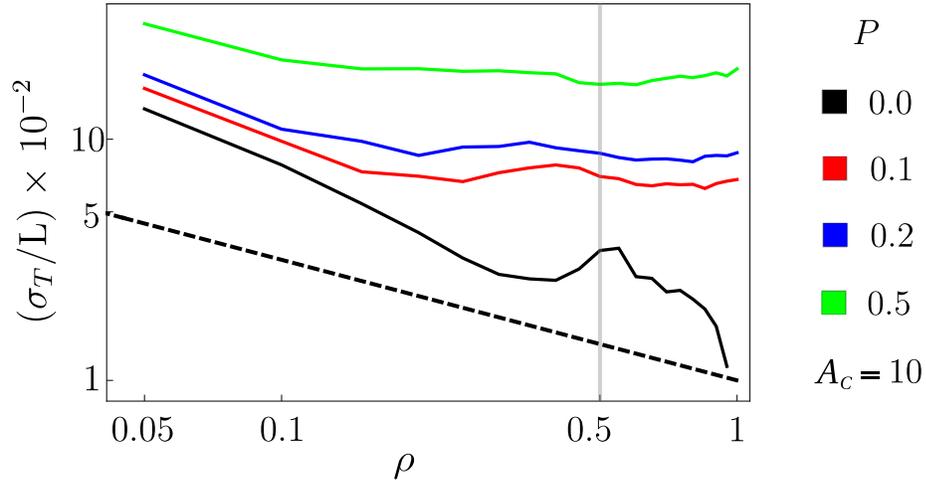


Figura 7.3: Desviación estándar para los tiempos de evacuación de la Figura 7.2. El punto de interés $\rho = 1/2$ se señala con una línea gris vertical. Se muestra como comparación la línea segmentada que escala como $\rho^{-1/2}$.

7.3.1. Robustez del sistema lleno

Todas las etapas de la investigación han sugerido que el comportamiento del sistema es robusto cuando se encuentra lleno ($\rho \approx 1$), por lo que vale la pena cotejar cuánto afectan los efectos aleatorizantes a esta robustez. Con este objetivo, analizaremos el comportamiento de las variables promedio del sistema lleno cuando se varían los parámetros de ansiedad crítica A_C y parálisis P .

En la Figura 7.4 la velocidad promedio del último agente se calcula siguiendo el mismo procedimiento de la Figura 6.4 usando el inverso $1/f$ de la ecuación (6.4), esta vez considerando simulaciones con distintos valores de A_C . El caso sin ansiedad, o $A_C \rightarrow \infty$, se muestra en negro.

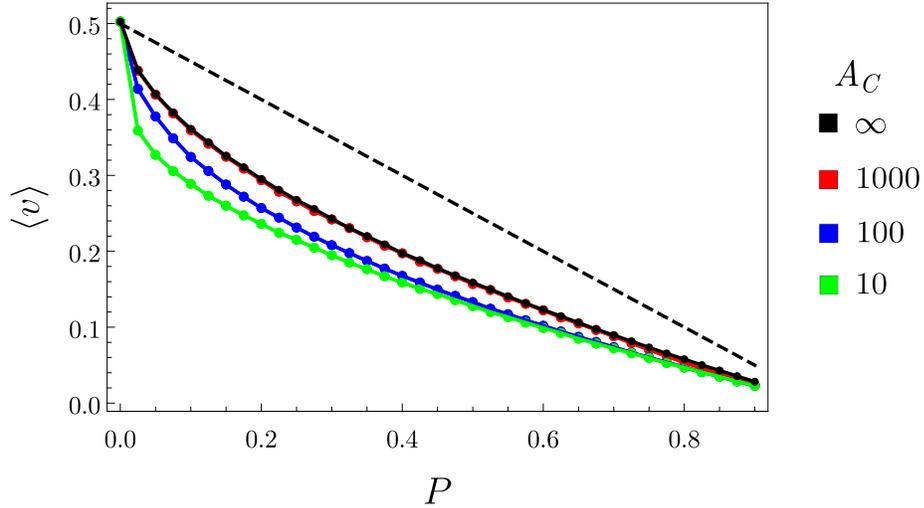


Figura 7.4: Velocidades promedio para el régimen altamente interactuante $\rho \rightarrow 1$, como los inversos $1/f$ de las pendientes empíricas de la Figura 7.2. Los resultados de las simulaciones son los puntos, unidos por líneas sólidas para mejorar la legibilidad. Usamos como referencia la expresión para la velocidad (6.3) derivada para el caso interactuante, con la recta negra segmentada.

Primero, notamos que todas las velocidades promedio se ubican por debajo de la estimación dada por (6.3), incluso en los casos donde la respuesta ansiosa no se activa, lo que la desacredita una vez más: recordando la Figura 6.4 concluimos que (6.3) es una mala estimación cuando existe solamente parálisis y también cuando se activa la respuesta ansiosa. El régimen donde la respuesta ansiosa nunca se acciona ($A_C \rightarrow \infty$ en negro) y donde el umbral es demasiado alto ($A_C = 10000$ en rojo) están superpuestos dando a entender su equivalencia; es más, la estimación (7.1) para el largo crítico de transición indica que para que se supere el umbral A_C el sistema debería tener al menos $L = 5000$ celdas. La parálisis espontánea $P = 0.1$ no es suficiente para inducir la respuesta ansiosa, sugiriendo que para la activación de la respuesta ansiosa es más relevante el largo del sistema que la probabilidad de parálisis, y que un valor de P mayor no es capaz de sustituir esta condición sobre el

largo.

En los órdenes de magnitud más bajos de A_C (en azul y verde) las ansiedades se activan debido a la colisionalidad propia del sistema lleno (colisiones tipo 1) pues las velocidades promedio se diferencian por A_C incluso para valores bajos de P . Interesantemente, al aumentar P las velocidades promedio para ambos umbrales A_C se asemejan cada vez más y tienden a saturar, superpuestas, en un mínimo. La velocidad de saturación es cercana la del caso sin ansiedad, lo que sugiere una pendiente máxima (velocidad mínima) en los gráficos de tiempo medio de evacuación en función de la densidad, como el presentado en la Figura 7.2. Todo lo anterior resalta la robustez de los fenómenos colectivos del sistema lleno (altamente colisional).

Ahora debemos caracterizar la colisionalidad en este régimen. El número normalizado de colisiones tipo 1 como función de P se muestra en la Figura 7.5(a), para distintos umbrales de ansiedad. Además, mostramos el número normalizado de colisiones tipo 2 para diferentes umbrales de ansiedad, como función de P , en la Figura 7.5(b).

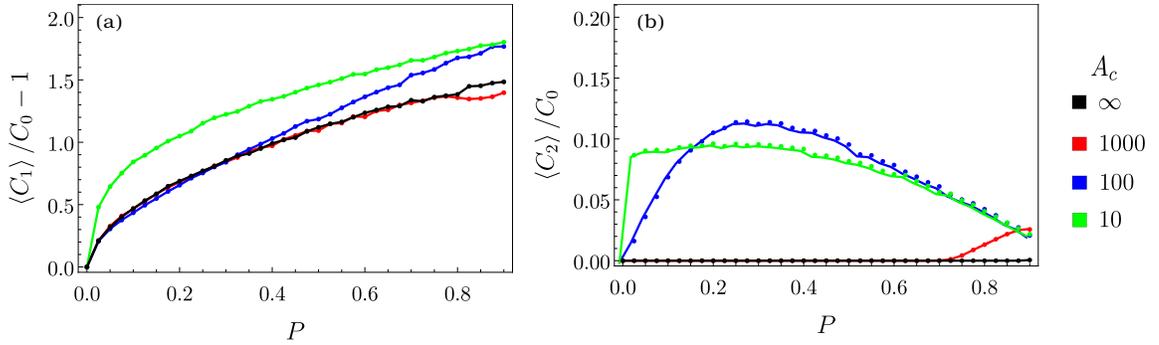


Figura 7.5: (a) El número normalizado de colisiones de tipo 1 ($C_1/C_0 - 1$) como una función de P , con $\rho = 1$. (b) El número normalizado de colisiones de tipo 2 (C_2/C_0) como función de P , también con $\rho = 1$. En ambos gráficos, los puntos representan promedios sobre los resultados de las simulaciones, unidos por líneas sólidas para mejorar la legibilidad. El caso $A_C \rightarrow \infty$ (negro) se encuentra superpuesto con $A_C = 1000$ (rojo), demostrando su equivalencia. La escala en (a) fue ajustada para facilitar la comparación visual con (b).

Tal como ocurre en el caso de las velocidades, los umbrales $A_C \rightarrow \infty$ y $A_C = 10000$ (en negro y rojo respectivamente) son prácticamente indistinguibles mientras aumenta P , lo que indica que la parálisis no es suficiente para que incluso el último agente espere más de 10000 turnos quieto; en contraste con las velocidades, sin embargo, para valores de $P \gtrsim 0.7$, el comportamiento de ambos regímenes ansiosos se diferencia: Como observamos en la Figura 7.5(b), sobre este valor de P se activa la respuesta ansiosa, y la presencia de colisiones tipo 2 *disminuye* a las colisiones de tipo 1, para los mismos valores de L , en el gráfico complementario (b).

Adicionalmente, notamos que en todos los casos de la Figura 7.5(a), las colisiones tipo 1 aumentan con P desde el valor de base C_0 calculado en (5.10). Esto demuestra que en un sistema compacto, la parálisis tiene la capacidad de afectar no sólo a los agentes paralizados, sino que a todos los peatones no paralizados que estén tras ellos en el pasillo. Por su parte, al analizar el comportamiento medio de las colisiones

tipo 2, mostrado en la Figura 7.5(b), observamos que el comportamiento ansioso se hace presente de inmediato para valores de $P \neq 0$, pero que no se activan para $P = 0$, por lo que todas las líneas coinciden en ese punto. Además, las colisiones tipo 2 tienden a disminuir mientras la parálisis se hace más dominante en el sistema. Estos últimos dos hechos, junto a la observación de la activación de la respuesta ansiosa para $A_C = 10000$ cuando P es suficientemente alto, indica que existe un acoplamiento no trivial entre estas variables aleatorizantes. Finalmente, destacamos que existe una diferencia de un orden de magnitud entre las colisiones de tipo 1 y 2, siendo las de primer tipo claramente más dominantes en la dinámica.

7.3.2. Variando L para un sistema lleno

Ya establecimos que existe una interacción interesante entre la respuesta ansiosa y P en un sistema compacto, ahora debemos explorar si se cumple la relación (7.1) que predice la existencia de un largo de transición L_T en un sistema inicialmente lleno, $\rho = 1$, para valores bajos de P . Para esto, estudiamos primero el comportamiento de cada tipo de colisión en dichas condiciones, a medida que L va creciendo.

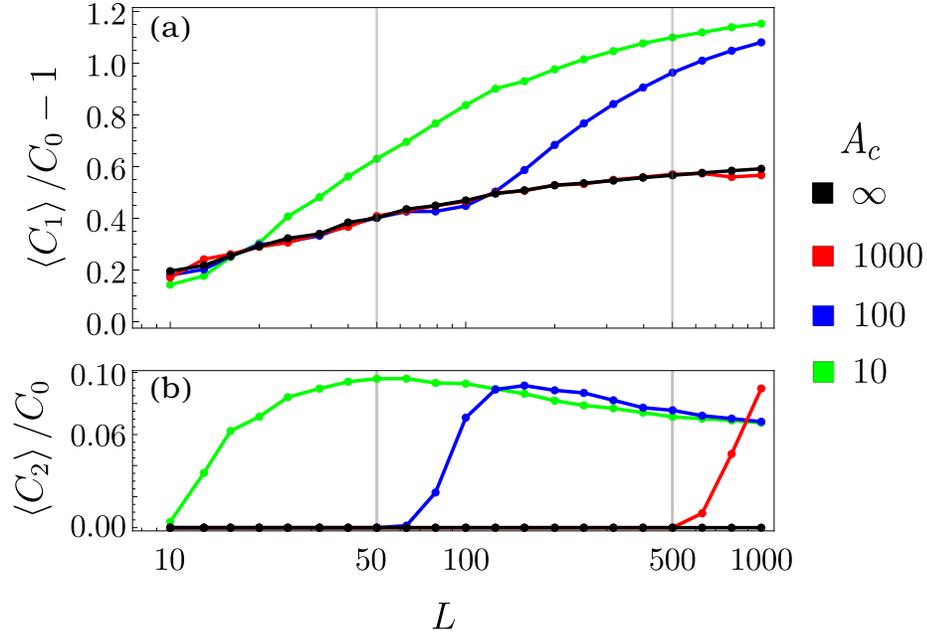


Figura 7.6: Promedios de las colisiones totales (tipo 1 y 2), en función del largo del sistema, L , para $\rho = 1$, $P = 0.1$ y distintas ansiedades críticas. Los puntos corresponden a medias estadísticas sobre 100 simulaciones cada uno, y están unidos con líneas sólidas para mejorar la legibilidad. Ambos gráficos están en escala semi-logarítmica, ya que el número de colisiones varía lentamente incluso para tres órdenes de magnitud de L . En (a) mostramos la media del número normalizado de colisiones tipo 1, $\langle C_1 \rangle / C_0 - 1$, y en (b) el promedio normalizado de las colisiones tipo 2, $\langle C_2 \rangle / C_0$. Ambas gráficas comparten el eje de las abscisas, y en ambas señalamos las longitudes de transición teóricas para cada régimen ansioso, con líneas grises verticales.

En la Figura 7.6 mostramos el promedio normalizado de colisiones tipo 1 y 2 en función de L , y analizaremos estos resultados en conjunto a los mostrados en la Figura 7.7, que presenta la suma de la media de colisiones (colisiones totales) para distintos largos. En esta última, el caso sin ansiedad ($A_C \rightarrow \infty$), en negro, indica que las colisiones tienden a aumentar sostenidamente con el crecimiento del sistema. Para entender el comportamiento de las colisiones totales una vez los largos de transición son superados, debemos recurrir a la Figura 7.5, pues en la sub-figura

(b) se puede apreciar que cuando las respuestas ansiosas se activan en los respectivos largos de transición, las colisiones tipo 1, mostradas en (a), *disminuyen* localmente, antes de volver a aumentar de forma monótona con el tamaño del pasillo. Esto explica por qué las colisiones totales se diferencian del régimen sin ansiedad *pasado* el largo de transición, pues en la vecindad superior de los respectivos L_T , el aumento de las colisiones tipo 2 es compensado por la disminución en las colisiones tipo 1. Notablemente, el descenso local de $\langle C_1 \rangle$ se rectifica al aumentar L , y aumenta de tal manera que su tendencia domina la suma $\langle C_1 + C_2 \rangle$, mientras que las colisiones tipo 2, de un orden de magnitud menor a las tipo 1, tienden a saturar. Una vez más, observamos un acoplamiento no trivial entre las variables aleatorizantes P y A_C .

En resumen, cuando el tamaño del sistema aumenta, la diversificación del tipo de colisiones produce un incremento sostenido en el conteo total, salvo regiones de transición que ocurren donde se activan las respuestas ansiosas.

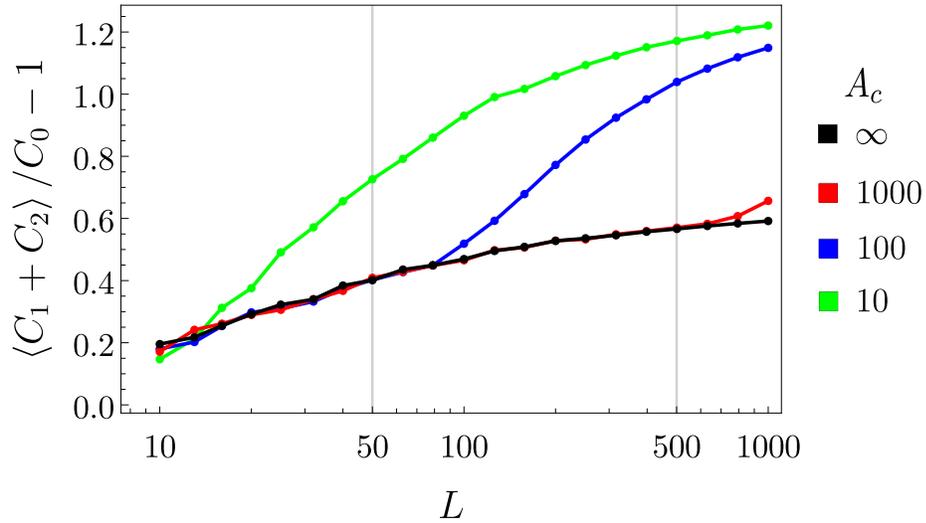


Figura 7.7: Suma de la media normalizada de colisiones tipo 1 y 2, $\langle C_1 + C_2 \rangle / C_0 - 1$, como función de L para $\rho = 1$ y $P = 0.1$. Utilizamos una escala semi-logarítmica en el eje horizontal, pues el valor total de colisiones varía poco para tres órdenes de magnitud del sistema. Los puntos corresponden a promedios estadísticos, y están unidos mediante líneas sólidas para mejorar la legibilidad. La línea negra corresponde al caso sin ansiedad, es decir $A_c \rightarrow \infty$, como punto de comparación. Los largos de transición teóricos de cada régimen ansioso se destacan con líneas grises verticales.

Ahora, indagamos el efecto conjunto de P y A_c en el tiempo de evacuación cuando varía el largo L del sistema. Ya que hemos comprobado la robustez de la dependencia lineal de $\langle T \rangle$ con la densidad, para $\rho > \rho_C$, nos enfocaremos en el efecto del cambio de L en las pendientes de dichas relaciones lineales. En la Figura 7.8 mostramos la velocidad promedio $\langle v \rangle$ del último agente como función de L para diferentes umbrales de ansiedad crítica, en el régimen de densidad alta $\rho = 1$ y $P = 0.1$. Las velocidades fueron calculadas de la misma forma que para elaborar la Figura 6.4.

Las velocidades en los regímenes con ansiedad se separan del caso sin ansiedad justamente en torno a sus largos de transición predichos en (7.1), en $L_{\text{trans}} = 50$ para $A_c = 100$ (azul) y $L_{\text{trans}} = 500$ para $A_c = 1000$ (rojo). Observamos que si bien

$\langle v \rangle$ decae inicialmente con el aumento de L , todos los sistemas con ansiedad saturan convergiendo en un mínimo, mostrando que las pendientes de $\langle T \rangle$ (inversos de las velocidades) tienden a un valor límite independiente de L .

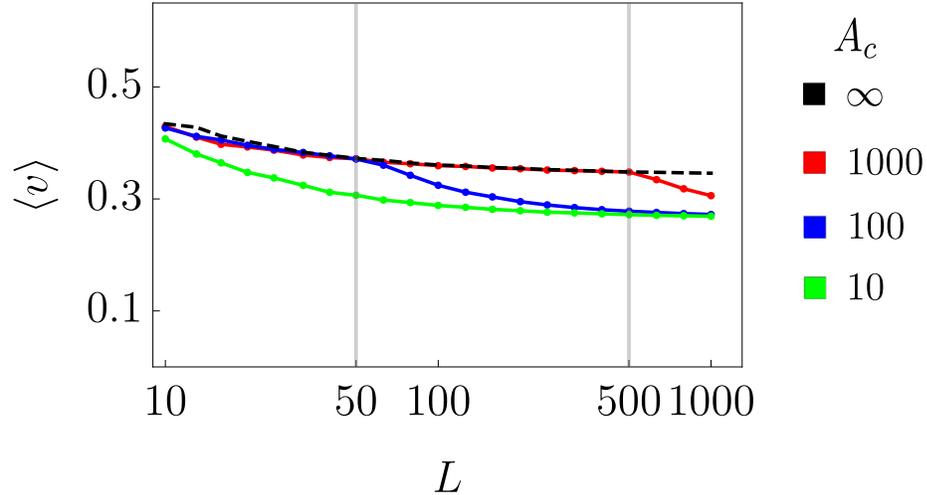


Figura 7.8: Mostramos $\langle v \rangle$ como el inverso de la pendiente del gráfico de la Figura 7.4 para la situación altamente interactuante en $\rho = 1$, en escala semi-logarítmica. Los puntos muestran los promedios de las simulaciones, unidos con líneas sólidas para facilitar la legibilidad. La línea negra segmentada corresponde al límite $A_C \rightarrow \infty$. Para A_C se estudiaron los valores 1000 (línea roja negra), 100 (línea azul continua) y 10 (línea verde continua). Los largos de transición teóricos de cada régimen ansioso se destacan con líneas grises verticales. Fijamos $P = 0.1$ como valor representativo.

Finalizando, en la Figura 7.9 mostramos la desviación estándar del tiempo de evacuación σ_T como función de L en escala logarítmica. Comparando con la línea punteada que representa la tendencia $L^{-1/2}$ observamos que para todos los valores de A_C la desviación estándar normalizada disminuye con el tamaño del sistema con un comportamiento comparable a $\sigma_T \sim L^{-1/2}$ a simple vista. Para los umbrales $A_C = 1000$ y $A_C = 100$ (rojo y azul) se observan aumentos locales bruscos de σ_T en torno a los largos de transición $L_T = 500$ y $L_T = 50$ respectivamente, haciendo eco de las transiciones de fase observadas en las colisiones totales (Figura 7.7) y las

velocidades promedio (Figura 7.8); esto es consistente con lo observado anteriormente en los casos determinista y solamente con parálisis, donde la impredecibilidad crece localmente en torno a las transiciones de fase. En ambos casos, superados los largos de transición, el aumento de L lleva a una saturación de las velocidades y las colisiones totales, y con esto, la desviación estándar retoma su tendencia global a disminuir mientras el sistema se agranda.

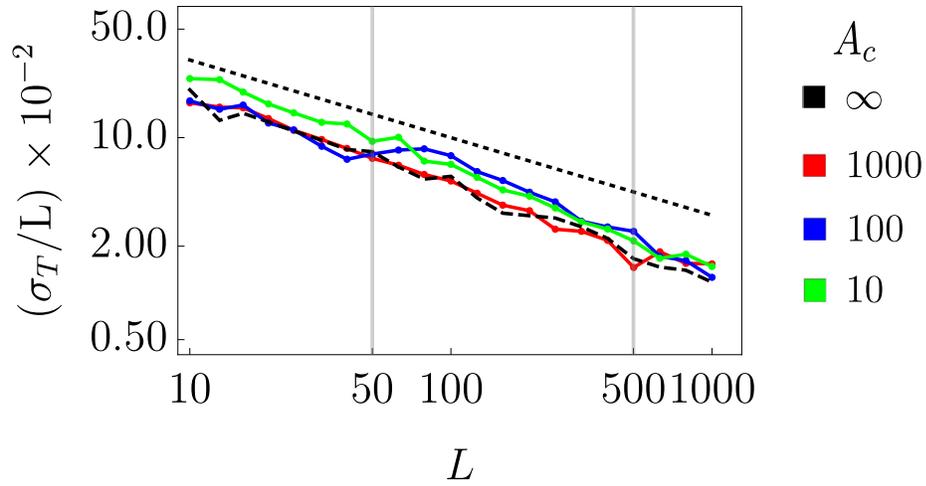


Figura 7.9: La desviación estándar del tiempo promedio de evacuación $\langle T \rangle$ en función de distintos largos L del sistema, en escala logarítmica, para $\rho = 1$. La recta punteada corresponde a $L^{-1/2}$ para comparar las tendencias. Los puntos representan resultados promedio de las simulaciones, unidos por líneas sólidas para facilitar la legibilidad. La línea segmentada negra corresponde a los resultados para $A_c \rightarrow \infty$. Los largos de transición teóricos de cada régimen ansioso se destacan con líneas grises verticales. Fijamos $P = 0.1$ como valor representativo.

7.3.3. Entropía como medida de impredecibilidad

Ahora discutiremos si una medida de impredecibilidad basada en entropía es adecuada para caracterizar el sistema y complementar las medidas presentadas a lo largo de las secciones anteriores para $L = 100$. Primero, de nuestras simulaciones, podemos obtener la probabilidad empírica de encontrar n vacancias entre dos agen-

tes durante el desarrollo de toda la simulación, p_n , y compararla con la expresión teórica (7.2).

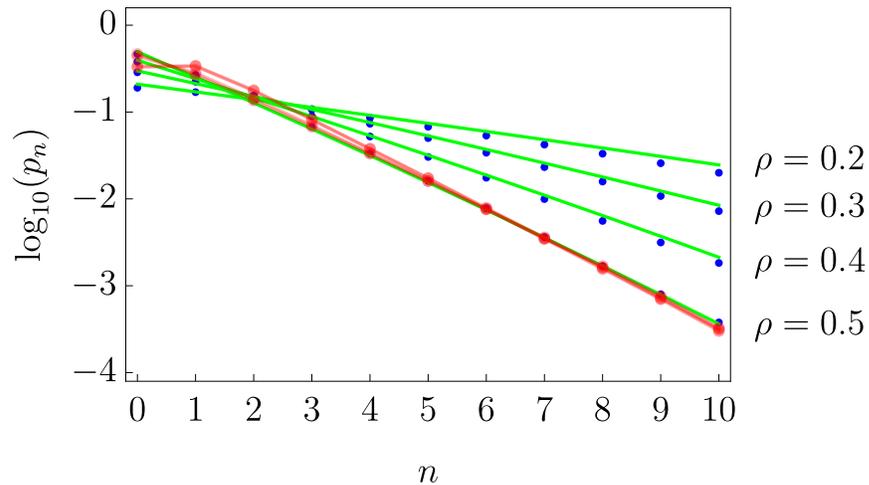


Figura 7.10: Probabilidad de encontrar n vacancias consecutivas entre dos agentes en función del número de vacancias. Las líneas verdes representan la aproximación teórica construída en la ecuación (7.2). Los puntos azules son los resultados de la simulación con $P = 0.9$ y el intervalo de densidades indicado. Los puntos rojos, son resultados de simulaciones realizadas para $\rho = 1/2$, $P = 0.9$ y un intervalo de A_C (10, 100, 1000 y 10000); las líneas continuas rojas unen los puntos para facilitar la legibilidad.

Para elaborar la Figura 7.10 se seleccionaron valores de densidad menores que $\rho \approx 1/2$ para estudiar el sistema cuando abundan las vacancias. En la teoría y en los hallazgos de las simulaciones, p_n es sensible a cambios en ρ cuando $P > 0.8$ y el umbral de ansiedad crítica es tan alto que la respuesta ansiosa no se activa. En contraste, hallamos degeneración para $\rho = 1/2$ y el intervalo de umbrales de ansiedad simulados, pues todos los puntos rojos se encuentran, en la práctica, superpuestos. Dicho de otra manera, al observar empíricamente la distribución de probabilidad p_n , no somos capaces de distinguir entre distintos A_C .

Adicionalmente, vale la pena destacar que en la Figura 7.10 vemos que la pro-

babilidad teórica calculada en (7.2) fue una buena contabilidad, ya que las líneas continuas (expresiones teóricas) aproximan bien los resultados observados en la simulación (puntos azules).

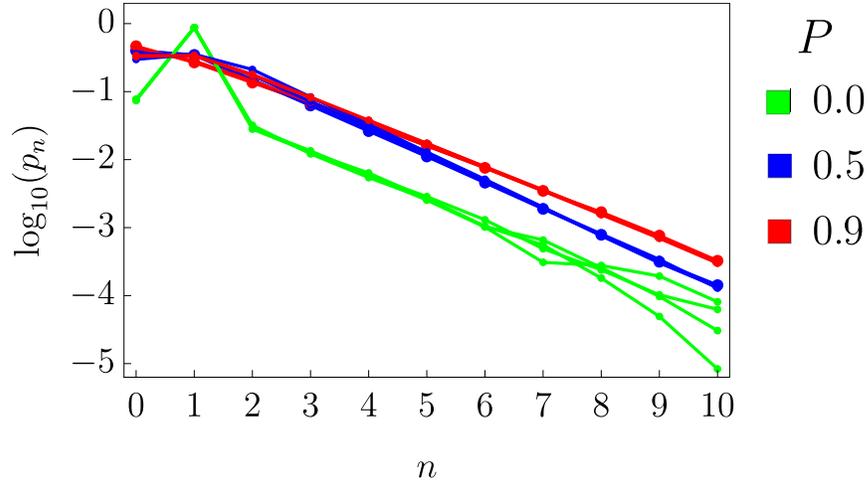


Figura 7.11: Probabilidad de encontrar dos agentes separados por n espacios para $\rho = 1/2$ y $P = 0$ (verde), $P = 0.5$ (azul) y $P = 0.9$ (rojo). Para cada valor de P , mostramos además el comportamiento para $A_C = 10000, 1000, 100, 10$, donde es claro que la probabilidad de detenerse es más relevante que el nivel de ansiedad en este límite. Los puntos son resultados de las simulaciones, unidos por líneas sólidas coloreadas para facilitar la legibilidad.

Estudiamos más de cerca los casos degenerados de la densidad crítica $\rho = 1/2$ en la Figura 7.11, mostrando nuevamente el comportamiento de la probabilidad como función de la separación entre dos agentes, donde queda claro que P es decisiva para dividir la dinámica, pero no así A_C . La ramificación en las líneas verdes indica que en el caso de $P = 0$, los distintos umbrales de ansiedad crítica sólo vuelven a los sistemas distinguibles en el caso de concentrarnos en vacaciones grandes e improbables, cercanas al 10 % del tamaño del sistema.

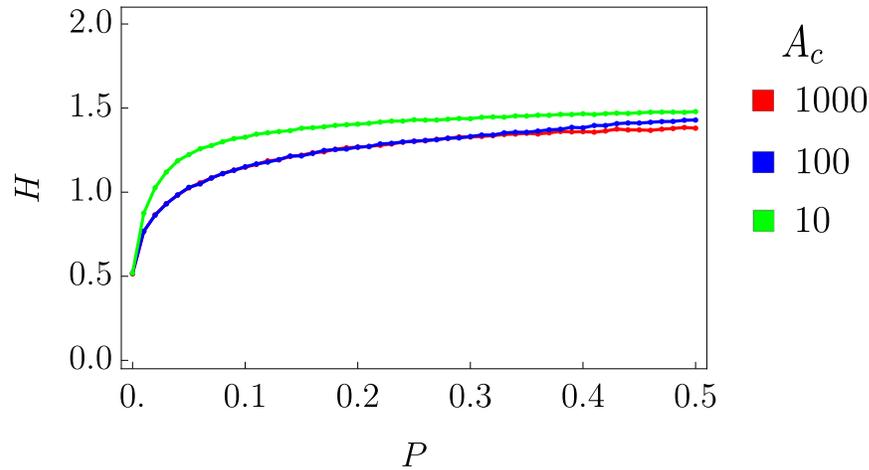


Figura 7.12: La entropía asociada a p_n como función de P , para $\rho = 1/2$. Los puntos son los resultados de las simulaciones, unidos por líneas continuas para facilitar la legibilidad. Se muestra el comportamiento para $A_C = 1000$ (rojo), $A_C = 100$ (azul), y $A_C = 10$ (verde).

Pese a la insensibilidad de las distribuciones p_n en torno a los umbrales de ansiedad, son suficientes para definir una entropía que representa el sentido físico general del sistema. En la Figura 7.12 mostramos que la entropía aumenta con P , lo que era esperable, ya que para una densidad fija, la probabilidad de parálisis grande diversifica la distribución de los ocupantes de las celdas durante la evacuación, a expensas de reducir el flujo de salida. Vemos que los umbrales de ansiedad más altos ($A_C = 1000$ y $A_C = 100$) permanecen superpuestos para los valores más bajos de la parálisis, y sólo se diferencian cuando P se vuelve más relevante. Como era de esperar, el umbral de ansiedad bajo ($A_C = 10$), que se activa rápidamente durante las evacuaciones, tiene una entropía sistemáticamente más alta que los otros, aunque al aumentar P todas las entropías comienzan a converger. Estos resultados refuerzan la noción de que la probabilidad de detenerse es más relevante que el nivel de ansiedad; además, son consistentes con los hallazgos arrojados por el estudio de la desviación estándar

σ_T cuando el sistema sólo sufre parálisis, visto en la Figura 6.5 .

Ya que los efectos de diferentes umbrales A_C son marginales, para elaborar la Figura 7.13, sólo consideramos el caso donde la respuesta ansiosa nunca se activa y P (que sabemos que domina la dinámica) es alto. Vemos que la entropía disminuye al aumentar la densidad de ocupación, pues como también se discutió al analizar la Figura 6.5, la mayor densidad reduce la libertad de los agentes para distribuirse ocupando las vacancias disponibles.

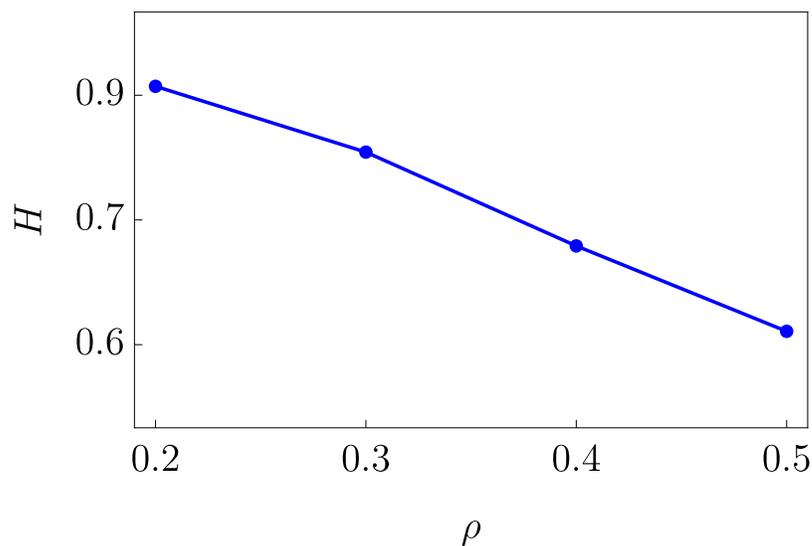


Figura 7.13: Entropía asociada como función de ρ y para $P = 0.9$. Sólo consideramos el caso $A_c = 10000$ (sin ansiedad). Los puntos representan los resultados de las simulaciones, unidos por líneas continuas para mejorar la legibilidad.

Capítulo 8

Conclusiones y proyecciones

Es innegable que un apropiado procedimiento de evacuación en emergencias es crucial para el diseño de cualquier recinto que albergue personas. En este contexto, un esquema que incluya la diversidad psicológica y cultural de los evacuados es esencial para contribuir a su seguridad. En esta aproximación al problema buscamos caracterizar los efectos de la aleatoriedad propia de las personas con todo el detalle razonable permitido por el margen de un modelo muy simplificado. En el caso de un proceso ideal, donde todos los participantes acceden a información y están suficientemente tranquilos, resultando en que sigan instrucciones de forma óptima, encontramos que el sistema presenta transiciones de fase en los observables clave de tiempo de evacuación y colisiones totales, ambas marcadas por un aumento local en impredecibilidad, caracterizada por la desviación estándar, en torno al punto crítico. Al añadir las variables estocásticas, en la gran mayoría de los casos, la transición de fase desaparece, y la impredecibilidad aumenta sostenidamente.

Además, logramos demostrar que existe un comportamiento robusto del sistema: la dependencia lineal entre el tiempo medio de egreso y la densidad inicial de llenado, cuando ésta es superior a la densidad crítica $\rho_C = 1/2$. Es más, cuando nos enfocamos en los casos que más fomentan las colisiones, $\rho = 1$, las variables estocásticas

P y A_C se acoplan de forma no trivial para determinar las pendientes de esta dependencia lineal, pero no logran cambiar su forma funcional. La caracterización del comportamiento de las colisiones podría ser de utilidad para indagar un esquema de contagios en un sistema peatonal, en el contexto de materia activa [72] o en sistemas de microfluídica, en donde filas de burbujas atrapadas en capilares transportan tanto información a través de puertas lógicas, como mensajeros químicos contenidos en la misma burbuja [73, 74].

Este acoplamiento no trivial también inspiró al grupo encabezado por Ramírez *et al.* para explorar estocasticidad óptima en un sistema más realista: evacuaciones en dos dimensiones [75]. Una diferencia esencial entre un pasillo y una habitación plana es que los peatones pueden escoger rutas alternativas hacia las salidas, rodeándose en lugar de adelantarse; para incentivar estas diferencias de decisiones, se vuelve necesario tener una heterogeneidad de umbrales para los cuales las respuestas ansiosas se activan. En su trabajo, lograron encontrar la existencia de distribuciones óptimas de respuestas ansiosas que permiten agilizar el proceso de egreso de una habitación, ahondando así en el objetivo de incluir respuestas no adaptativas en los procedimientos de evacuación.

Otro aspecto que se podría explorar en una topología unidimensional con una sola salida, es la eficiencia de distintos regímenes de abordaje o egreso empleados en aerolíneas comerciales alrededor del mundo. Ya sea en fraccionar el grupo en participantes de diversos tamaños, o según velocidad (capacidades de movilidad variadas). También es posible añadir más de una salida en un esquema tipo pasillo, y explorar la importancia de las decisiones tomadas por los peatones que queden en medio.

Con el objetivo de caracterizar con más detalle la auto-organización del sistema, observamos una tendencia preliminar de las desviaciones estándar de los tiempos

de evacuación, σ_T , a escalar con la densidad y largo del sistema, siguiendo una ley de potencias muy similar a $\rho^{-1/2}$ o $L^{-1/2}$. Esta tendencia sugiere que existe más complejidad escondida en este sistema, que podría dilucidarse más a fondo estudiando el exponente de Hurst de los procesos de egreso, que es un método para caracterizar el tipo de auto-correlación y auto-retroalimentación de los sistemas dinámicos.

Es interesante notar que todavía queda mucha complejidad por explorar en este modelo simplificado.

Referencias

- [1] B. A. Toledo, V. Muñoz, J. Rogan, C. Tenreiro y J. A. Valdivia, *Physical Review E* **70**, 016107 (Jul 2004).
- [2] H. Greenberg, *Operations Research* **7**, 79–85 (feb. 1959).
- [3] R. F. Leslie Edie, *The Port of New York Authority* **39** (1960).
- [4] S. Carrasco, P. Medina, J. Rogan y J. A. Valdivia, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **31**, 033103 (Mar 2021).
- [5] A. Schadschneider, W. Klingsch, H. Kluepfel, T. Kretz, C. Rogsch y A. Seyfried, *Safety Science* **50**, 1253–1260 (Jun 2012). ArXiv:0802.1620 [physics].
- [6] Y. Zhuang, W.-Y. Li, H. Wang, S. Hong y H. Wang, *Journal of Cellular Automata* **12**, 475 (2017).
- [7] J. R. R. Tolkien, *La Comunidad del Anillo*, El Señor de los Anillos 1 (Minotauro, 1954).
- [8] B. L. Heath y R. R. Hill, *Journal of Simulation* **4**, 163–169 (Sep 2010).
- [9] A. T. Brumley, *Human Performance During The Evacuation Of Passenger Ships*, Tesis de doctorado, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Clayton, Melbourne, Australia (Sep 2001). Disponible

en https://www.academia.edu/77002856/Human_performance_during_the_evacuation_of_passenger_ships.

- [10] *Traffic and Granular Flow 2019*, Vol. 252 de *Springer Proceedings in Physics* (Springer International Publishing, Cham, 2020).
- [11] J. J. Fruin, en *First International Conference on Engineering for Crowd Safety*, London, UK (1993).
- [12] D. Helbing y P. Mukerji, *EPJ Data Science* (2012).
- [13] N. R. Johnson, *Social Problems* **34**, 362–373 (Oct 1987).
- [14] C. Barham, *Psychology of Crisis Evacuation* (Springer International Publishing, Cham, 2020), pág. 1–12.
- [15] H.-J. Huang y R.-Y. Guo, *Phys. Rev. E* **78**, 021131 (Aug 2008).
- [16] X. Zheng, T. Zhong y M. Liu, *Building and Environment* **44**, 437 (2009).
- [17] J. L. Silverberg, M. Bierbaum, J. P. Sethna y I. Cohen, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 228701 (May 2013).
- [18] R. Lovreglio, E. Ronchi y D. Nilsson, *Fire Safety Journal* **78**, 168 (2015).
- [19] M. Isobe, D. Helbing y T. Nagatani, *Physical Review E* **69**, 066132 (Jun 2004).
- [20] R. Nagai, H. Hanaura, K. Tanaka y T. Nagatani, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **364**, 464–472 (May 2006).
- [21] S. Wei-Guo, Y. Yan-Fei, W. Bing-Hong y F. Wei-Cheng, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **371**, 658–666 (Nov 2006).

- [22] W.-X. Zhu y L.-D. Zhang, *International Journal of Modern Physics C* **25**, 1450018 (Jul 2014).
- [23] R. Lovreglio, A. Fonzzone, L. dell'Olio y D. Borri, *Safety Science* **82**, 421–431 (Feb 2016).
- [24] Z.-M. Fang, W. Lv, L.-X. Jiang, Q.-F. Xu y W.-G. Song, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **448**, 102–112 (Apr 2016).
- [25] R. M. Yerkes y J. D. Dodson, *Journal of Comparative Neurology and Psychology* **18**, 459–482 (Nov 1908).
- [26] P. G. Nixon, *Activitas nervosa superior* **Suppl 3 Pt 1**, 130 (1982).
- [27] F. Ozel, *Safety Science* **38**, 95 (2001).
- [28] D. Paton y R. Flin, *Disaster Prevention and Management* **8**, 261 (1999).
- [29] A. R. Mawson, *Psychiatry: Interpersonal and Biological Processes* **68**, 95 (Jun 2005).
- [30] M. Kobes, I. Helsloot, B. de Vries, J. G. Post, N. Oberijé y K. Groenewegen, *Building and Environment* **45**, 537 (mar. 2010).
- [31] D. H. Pink, *Drive: The surprising truth about what motivates us* (Canongate Books, Prestonpans, Scotland, 2011).
- [32] K. H. Teigen, *Theory and Psychology* **4**, 525–547 (Nov 1994).
- [33] M. Corbett, *Journal of Managerial Psychology* **30**, 741–752 (Ago 2015).
- [34] A. Duque, I. Cano-López y S. Puig-Pérez, *European Journal of Neuroscience* **56**, 3889–3920 (jul 2022).

- [35] Z. Chen, H.-T. Zhang, M.-C. Fan, D. Wang y D. Li, (IEEE) Transactions on Control Systems Technology **22**, 1544 (Jul 2014).
- [36] I. D. Couzin, J. Krause, R. James, G. D. Ruxton y N. R. Franks, Journal of Theoretical Biology **218**, 1 (Sep 2002).
- [37] B. Reipurth y J. Bally, Annual Review of Astronomy and Astrophysics **39**, 403 (2001).
- [38] D. C. Fritts y M. J. Alexander, Reviews of geophysics **41** (2003).
- [39] H. Hasegawa, M. Fujimoto, T.-D. Phan, H. Rème, A. Balogh, M. Dunlop, C. Hashimoto y R. TanDokoro, Nature **430**, 755 – 758 (2004).
- [40] O. Agertz, B. Moore, J. Stadel, D. Potter, F. Miniati, J. Read, L. Mayer, A. Gawryszczak, A. Kravtsov, A. Nordlund, F. Pearce, V. Quilis, D. Rudd, V. Springel, J. Stone, E. Tasker, R. Teyssier, J. Wadsley y R. Walder, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **380**, 963 (08 2007).
- [41] H. Isobe, T. Miyagoshi, K. Shibata y T. Yokoyama, Nature **434**, 478 (Mar 2005).
- [42] W. H. Cabot y A. W. Cook, Nature Physics **2**, 562 (Jul 2006).
- [43] S. Wolfram, Rev. Mod. Phys. **55**, 601 (Jul 1983).
- [44] C. G. Langton, *Artificial Life: Proceedings of an Interdisciplinary Workshop on the Synthesis and Simulation of Living Systems* (Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., USA, 1989).
- [45] P. Bak, K. Chen y M. Creutz, Nature **342**, 780–782 (Dic 1989).
- [46] E. N. Lorenz, *The essence of chaos* (Univ. of Washington Press, 2008).

- [47] J. D. Halley y D. A. Winkler, *Complexity* **13**, 10–15 (May 2008).
- [48] A. Namdari y Z. S. Li, *Advances in Mechanical Engineering* **11**, 168781401985735 (Jun 2019).
- [49] S. Reicher y J. Drury, *Collective Identity, Political Participation, and the Making of the Social Self* (Wiley-Blackwell, Oxford, UK, 2010), pág. 158–175.
- [50] A. Templeton, J. Drury y A. Philippides, *Review of General Psychology* **19**, 215–229 (Sep 2015).
- [51] G.-W. Lin y S.-K. Wong, *Physical Review E* **97**, 062303 (Jun 2018).
- [52] D. Helbing, I. Farkas y T. Vicsek, *Nature* **407**, 487–490 (Sep 2000).
- [53] D. Helbing y P. Molnár, *Physical Review E* **51**, 4282–4286 (May 1995).
- [54] D. Parisi y C. Dorso, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **354**, 606–618 (Aug 2005).
- [55] A. Kirchner y A. Schadschneider, *Physica A* (2002).
- [56] M. Muramatsu, T. Irie y T. Nagatani, *Physica A* (1999).
- [57] A. Varas, M. Cornejo, D. Mainemer, B. Toledo, J. Rogan, V. Muñoz y J. Valdivia, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **382**, 631 (2007).
- [58] L. F. Henderson, *Nature* **229**, 381–383 (Feb 1971).
- [59] L. Henderson, *Transportation Research* **8**, 509–515 (Dic 1974).
- [60] D. Helbing, *Complex Systems* **6**, 391–415 (1992).

- [61] X. Chen, M. Treiber, V. Kanagaraj y H. Li, *Transport Reviews* **38**, 625–653 (Sep 2018).
- [62] L. Cheng, R. Yarlagadda, C. Fookes y P. Yarlagadda, *World Journal of Mechanical Engineering* **1**, 1 (2014).
- [63] D. Bauer, S. Seer y N. Brändle (01 2007), Vol. 2, págs. 1035–1042.
- [64] M. Fukui y Y. Ishibashi, *Journal of the Physical Society of Japan* **68**, 2861–2863 (Aug 1999).
- [65] C. Macal y M. North (01 2005), Vol. 2005, págs. 2–15.
- [66] L. Cheng, V. Reddy, C. Fookes y P. K. V. Yarlagadda, en *2014 International Conference on Computational Science and Computational Intelligence* (IEEE, Las Vegas, NV, USA, 2014), pág. 161–167.
- [67] L. Cheng, V. Reddy, C. Fookes y P. K. Yarlagadda, *Applied Mechanics and Materials* **568–570**, 1859 (Jun 2014).
- [68] E. Bonabeau, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **99**, 7280 (May 2002).
- [69] G. Köster, M. Seitz, F. Treml, D. Hartmann y W. Klein, *Contemporary Social Science* **6**, 397–414 (Nov 2011).
- [70] I. Karamouzas y M. Overmars, en *Proceedings of the 17th ACM Symposium on Virtual Reality Software and Technology* (ACM, Hong Kong, 2010), pág. 183–190.
- [71] P. G. Donald, *Journal of Applied Probability* **6**, 137–153 (Abr 1969).

- [72] P. de Castro, F. Urbina, A. Norambuena y F. Guzmán-Lastra, *Phys. Rev. E* **108**, 044104 (Oct 2023).
- [73] M. Prakash y N. Gershenfeld, *Science* **315**, 832–835 (feb. 2007).
- [74] S. L. Anna, *Annual Review of Fluid Mechanics* **48**, 285–309 (ene. 2016).
- [75] M. Ramírez, B. A. Toledo, F. Torres, J. Rogan, J. A. Valdivia y P. Correa-Burrows, *Physical Review E* **104**, 024312 (Ago 2021).