UNIVERSIDAD DE CHILE

Facultad de Economía y Negocios

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Información Diferenciada Endógena en Mercados Incompletos

Tesis para optar al grado de

Magíster en Economía

Alumno: **Sebastián Cea-Echenique**

Profesor Guía: **Juan Pablo Torres-Martínez**

Santiago, 6 de Julio de 2010

"Tus caminos son una locura,
rompen mi humanidad;
pero son los únicos que
quiero recorrer"
Cecilia Perrín de Buide

Información Diferenciada Endógena en Mercados Incompletos

Sebastián Cea-Echenique

7 de julio de 2010

Resumen

Desarrollamos un modelo de equilibrio general en dos periodos con mercados finacieros incompletos e información diferenciada. Haciendo endógena la restricción tradicional de información en el consumo, permitimos que los agentes obtengan información de los mercados físicos y financieros. Entonces, la inversión en promesas finacieras e intercambio de bienes en mercados a la vista aparecen como canales naturales para aumentar la información que cada agente tiene sobre la realización de futuros estados de la naturaleza.

Palabras Clave. Mercados Incompletos, Información Diferenciada, Equilibrio Revelador de Información.
Clasificación JEL: D52, D53, D82.

Índice

1. Introducción

La teoría moderna de mercados financieros incompletos comienza con los clásicos papers de Radner (1968), Drèze (1974) y Hart (1975), que extienden el modelo de Arrow & Debreu (1954) de mercados completos introduciendo un conjunto incompleto de promesas finacieras que no necesariamente permiten diversificar completamente el riesgo. Esta teoría ha sido materia de investigación desde entonces, y extensiones a diferentes escenarios han sido estudiadas (para un resumen de esta literatura ver Geanakoplos (1990) o Magill & Quinzii (2008)).

Particularmente, el rol de comunicar información de los mercados finacieros cuando los agentes son asimétricamente informados ha sido estudiado, entre otros, por Polemarchakis & Siconolfi (1993), Rahi (1995) y Cornet & De Boisdeffre (2002). En Polemarchakis & Siconolfi (1993) el foco está dado en mostrar la existencia de equilibrios no informativos con expectativas racionales en mercados de activos nominales. Por otra parte, equilibrios con precios que entregan información son estudiados en economías de dos periodos por Rahi (1995), que modela información privada como señales sobre estados de la naturaleza que ocurrirán, y muestra que cualquier estructura de información compatible con no-arbitraje puede ser convertida en un equilibrio de expectativas racionales. En un contexto similar, Cornet & De Boisdeffre (2002) asumen que los agentes anticipan precios de activos y, antes del intercambio de bienes y activos, hace un refinamiento de las señales apartando las oportunidades de arbitraje. Luego, el vector de precios de activos es implementable como equilibrio sólo si la información agregada, que es obtenida después de la exclusión de las oportunidades de arbitraje, es no-vacío (véase también De Boisdeffre (2007)). En particular, hay mercados financieros donde sólo precios de activos que revelan completamente la información son equilibrio. En todo caso, cuando se permite *default* y los activos son hipotecables, como en Geanakoplos (1997) o Geanakoplos & Zame (2002), no es necesario que los agentes actualicen información para asegurar existencia equilibrio, desde que la obligación de los deudores de constituir la hipoteca induce límites naturales en la cantidad de recursos que un agente puede obtener de arbitraje (como se prueba en Petrassi & Torres-Martínez (2007)).

A diferencia de los desarrollos anteriores, en este trabajo modelamos información asimétrica como un vacío de conocimiento sobre los estados de la naturaleza que se realizan, llamado en la literatura como información diferenciada. Así, un agente no recibe señales que le permitan concentrar sus decisiones contingentes en un subconjunto de estados de la naturaleza. Sin embargo, después de la realización de la incertidumbre, el agente puede no tener la información para distinguir el estado de la naturaleza que efectivamente se realizó.

Contrario al modelo tradicional de información diferenciada de Radner (1968), en nuestro modelos los agentes demandan bienes en mercados a la vista y, de esta forma, ellos pueden inferir información sobre los estados de la naturaleza que se realizan en el segundo periodo cuando observan los pagos de activos o precios de bienes a la vista. De hecho, en el modelo original de Radner (1968) todas las negociaciones son hechas en el mismo periodo y existe un conjunto de contratos futuros contingentes completo para transar. Entonces, a pesar de que los precios de contratos futuros o algunos bienes pueden diferir entre estados de la naturaleza, los agentes no ganan información sobre el estado de la naturaleza que efectivamente se realiza.[1]

Recientemente, en un modelo que incorpora información diferenciada en una estructura de mercados financieros incompletos, Faias & Moreno-García (2010) no toman en cuenta el efecto de las señales del mercado en la información de los individuos. Esencialmente, ellas centran su análisis en tipos particulaes de activos que no revelan información y, también, en precios de equilibrio que son compatibles con la información común *ex-ante*. De este modo, los individuos no reciben nueva información de los mercados físicos o financieros. Con el foco en equilibrios que sólo consideran precios que no liberan información, ellas muestran que el grado de indeterminación real de equilibrio disminuye en mercados de activos nominales. En cualquier caso, no hay razón para creer que los mercados se concentrarán en este tipo de asignaciones de equilibrio no-informativo.

Consecuentemente, nosotros consideramos la información que los agentes pueden recibir de los mercados físicos y financieros, a través de la negociación de bienes en mercados a la vista o inversiones en promesas financieras. Estas actividades permiten a los agentes mejorar la información sobre los estados de la naturaleza que efectivamente ocurren, usando precios o pagos de activos como señales de mercado. Por esta razón, no imponemos restricciones exógenas en el consumo para hacer las asignaciones físicas compatibles con la información que los agentes tienen antes de la realización de los estados de la naturaleza. De este modo nuestro modelo hace la información diferencial individual endógena.

[1] En este trabajo seguimos la interpretación de información diferenciada de Daher et al. (2007): hoy, cada agente tiene una estructura de información completa sobre el conjunto de estados posible de la naturaleza, pero no son necesariamente capaces de distinguir, mañana, que estado se realizó.

Más precisamente, asumimos que los activos financieros son numerarios y libres de *default*. También, incorporamos restricciones en la forma de hacer las promesas. Específicamente, los agentes no pueden hacer promesas que, para ser cumplidas, requieran información que no tienen en el momento en que el contrato de deuda es acordado. Existen restricciones endógenas en las canastas de consumo, permitiendo a los agentes demandar planes de consumo que son compatibles con la información final, que incluye la obtenida usando las señales de mercado. Desde que la restricción sobre las canastas de consumo implica que la correspondencia presupuestaria no tenga gráfico cerrado, para probar existencia de equilibrio, internalizamos esta restricción requiriendo que las preferencias sean representadas por una función de utilidad separable.

El resto del trabajo es organizado así: En la Sección 2 presentamos el modelo. La Sección 3 está dedicada a discutir nuestro principal resultado y sus supuestos. En la Sección 4 proveemos ejemplos y concluímos con una sección final de conclusiones. La prueba de nuestros resultados está relegada al apéndice.

2. Modelo

Consideramos una economía de dos periodos donde no hay incertidumbre en el primer periodo, $t = 0$, y un estado de un conjunto finito S se realiza en el segundo periodo, $t = 1$. Para acortar notación, sea $S^* = \{0\} \cup S$ el conjunto de los estados de la naturaleza de la economía, identificando $s = 0$ como el único estado de la naturaleza en el primer periodo.

Existe un conjunto finito L de bienes que pueden transarse en cada periodo en mercados a la vista. Sea $p_s = (p_{s,l}; l \in L)$ el precio unitario de bienes en el estado de la naturaleza $s \in S^*$ y $p = (p_s; s \in S^*)$ el plan de precios de bienes en la economía. Fijamos a través del documento la canasta $\zeta = (\zeta_l; l \in L) \in \mathbb{R}^L_{++}$ y normalizamos su precio unitario, en cualquier estado de la naturaleza, a uno, $p_s \cdot \zeta = 1, \forall s \in S^*$. Así, un plan de precios de bienes pertenecerá a $\mathcal{P} := \{(p_s; s \in S^*) \in \mathbb{R}^{L\times S^*}_+ : p_s \cdot \zeta = 1, \forall s \in S^*\}$.

Sea J un conjunto de activos numerarios que son transados en $t = 0$. Cada activo $j \in J$ tiene un precio unitario q_j en el primer periodo y hace promesas contigentes a los estados de la naturaleza en S, $R_j = (R_{s,j}; s \in S) \in \mathbb{R}^S_+$, que está medido en unidades de la canasta ζ. También existe un activo libre de riesgo que es negociado con un precio unitario $\pi > 0$ en el primer periodo y entrega la canasta ζ en cualquier estado de la naturaleza del segundo periodo. Asumimos que no hay activos redundantes, esto es, que la familia de vectores $\{(1, \ldots, 1)\} \cup \{R_j; j \in J\}$ es linealmente independiente. Por conveniencia de notación, sea (q, π) el vector de precios de activos en la economía, donde $q := (q_j; j \in J) \in \mathbb{R}^J_+$.

También existe un conjunto finito de agentes, denotado por I, que demandan bienes y transan activos financieros. Cada agente $i \in I$ tiene preferencias en consumo representadas por una función de utilidad $U^i : \mathbb{R}^{L\times S^*}_+ \to \mathbb{R}$ y reciben, contigente al periodo y estado de la naturaleza, dotaciones iniciales de bienes, que son dadas por $w^i = (w^i_s; s \in S^*) \in \mathbb{R}^{L\times S^*}_+$.

Los agentes pueden tener infomación incompleta sobre la realización de estados de la naturaleza. Nosotros asumimos que la información inicial que un agente $i \in I$ tiene sobre la realización de estados futuros de la naturaleza está dada por una partición del conjunto S, denotado por $\mathbb{P}^i$. Esencialmente, el agente i conoce el conjunto S de estados de la naturaleza que pueden ocurrir en $t = 1$, pero después de la realización de la incertidumbre, si ocurre el estado de la naturaleza s, el agente i podrá distinguir entre ese estado y el estado de la naturaleza s' si y sólo si s y s' pertenecen a diferentes elementos de $\mathbb{P}^i$. Sin embargo, cada agente puede obtener infomación adicional de los precios de bienes y pagos de activos y, de este modo, su consumo sólo requiere ser compatible con la restricción final de información. Por esta razón, dada una partición $\mathbb{P}$ de S, diremos que un vector $(v_s; s \in S) \in \mathbb{R}^{L\times S}$ es $\mathbb{P}$-medible si $v_s = v_{s'}$ para cualquier par de estados de la naturaleza s y s' que pertenecen a un mismo elemento de la partición $\mathbb{P}$.

Suponemos que el vector $w^i_{-0} := (w^i_s; s \in S)$ es $\mathbb{P}^i$-medible. Esto es, toda la información que el agente i puede obtener de la variabilidad de sus dotaciones está contenida en $\mathbb{P}^i$.

Como dijimos antes, la información final que un agente tiene sobre la realización de estados de la naturaleza será endógena. Más precisamente, en nuestra estructura los agentes obtienen información de los precios de bienes y pagos de activos. Así, en el primer periodo, si *ex-ante* un agente $i \in I$ no distingue entre los estados de la naturaleza s y s', el los distinguirá *ex-post* si (i) los precios de bienes p_s y $p_{s'}$ son distintos, o (ii) el agente compra en $t = 0$ un activo que tiene pagos unitarios distintos en estados de la naturaleza s y s'. Así, como en el mundo real, en nuestro modelo precios de bienes y activos son señales de mercado naturales que revelan información a los agentes.

Asumimos que las acciones asociadas a contratos financieros deben ser compatibles con la información disponible en el momento en que las acciones son llevadas a cabo, no con la información que puede ser obtenida después de la realización de dichas acciones. Precisamente, los compradores de un activo pagan hoy y esperan recibir retornos mañana, luego ellos no ejecutan ninguna acción en el periodo $t = 1$. Por esta razón, no hay restricciones sobre las oportunidades de inversión. Por otra parte, un vendedor de un activo promete hacer pagos contingentes en $t = 1$. Así, en el momento en que el pago es llevado a cabo, el vendedor debe saber el estado de la naturaleza que fue realizado, independiente de las señales que los precios de bienes puedan dar. Consecuentemente, imponemos a los agentes una restricción de crédito dependiente de la información. En otro caso, un inversor que cree que va a obtener información sobre la realización de un estado de la naturaleza a través de pagos de activos, podría no recibir ningún retorno financiero porque los deudores están esperando obtener información sobre el estado de la naturaleza para cumplir sus promesas.

Más precisamente, dado un plan de precios $p \in \mathcal{P}$, un agente $i \in I$ sólo puede tomar posiciones cortas en activos que pertenezcan a $J(\mathbb{P}^i) := \{j \in J : (R_{s,j}; s \in S) \text{ es } \mathbb{P}^i\text{-medible}\}$. El conjunto $J(\mathbb{P}^i)$ sólo toma en consideración activos en J, porque independiente de la información privada los agentes conocen la información necesaria para cumplir una deuda en el activo libre de riesgo.

Los agentes toman los precios de bienes y activos como dados, $((p_s; s \in S^*), \pi, q) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^J$. Cada agente $i \in I$ toma decisiones sobre consumo, eligiendo canastas contingentes $(x_s^i; s \in S^*) \in \mathbb{R}_+^{L \times S^*}$. También, toman posiciones financieras $(z^i, \theta^i, \varphi^i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^J \times \mathbb{R}_+^J$, donde z^i es la cantidad de activo libre de riesgo que el compra o vende en $t = 0$. Análogamente, $(\theta^i, \varphi^i) = ((\theta_j^i, \varphi_j^i); j \in J)$ son la cantidades de activos que el agente $i \in I$ compra y vende. Asociada a esas posiciones financieras, en cualquier estado de la naturaleza del segundo periodo, el agente $i \in I$ recibe los retornos de sus posiciones o paga sus promesas, $z^i + \sum_{j \in J} R_{s,j}(\theta_j^i - \varphi_j^i)$.

Note que, dados precios de bienes para los estados de la naturaleza en el segundo periodo, $p_{-0} := (p_s; s \in S)$, cuando un agente $i \in I$ decide comprar cantidades θ_j^i de cada activo $j \in J$, el va a distinguir dos estados de la naturaleza s and s' en el segundo periodo si y sólo si al menos una de la siguientes tres condiciones se cumple:

(a) Ambos estados de la naturaleza están en diferentes elementos de $\mathbb{P}^i$, es decir, son distinguibles *ex-ante*.

(b) Existe un $j \in J$, tal que $R_{s,j}\theta_j^i \neq R_{s',j}\theta_j^i$. Esto es, mercados financieros permiten al agente distinguir dichos estados cuando él recibe los pagos de alguno de los activos negociados.

(c) Existe un $l \in L$ tal que $p_{s,l} \neq p_{s',l}$. Esto es, mercados físicos permiten a los agentes distinguir dichos estados de la naturaleza cuando hay al menos un bien para el cual su precio unitario es diferente entre los estados.

Así, la información final del agente i cuando el elige el portafolio θ^i es dada por una partición $\mathbb{P}^i(p_{-0}, \theta^i)$ tan fina como $\mathbb{P}^i$ en donde dos estados de la naturaleza son indistinguibles si y sólo si las tres condiciones anteriores no se cumplen. Como es usual en la literatura de información diferenciada, en nuestro modelo los agentes se restringen a si mismos a consumir canastas que son compatibles con la información (final) disponible, $\mathbb{P}^i(p_{-0}, \theta^i)$. Esencialmente, esto ocurre desde que ningún agente conoce si alguno de los dos estados de la naturaleza $\{s, s'\}$ que no puede distinguir ocurre, el no tendrá señales para elegir la canasta de consumo cuando $x_s^i \neq x_{s'}^i$.

Requiriendo que $(x_s^i; s \in S)$ sea $\mathbb{P}^i(p_{-0}, \theta^i)$-medible capturamos el efecto que la inversión en activos financieros tiene en las posibilidades de consumo del agente i. Así, una razón para invertir en algún activo puede ser el interés del agente en incrementar el conjunto de canastas que son presupuestaria y informacionamente implementables.

Sea $\Gamma(\mathbb{P}^i)$ el conjunto de planes admisibles por el mercado para el agente $i \in I$. Esto es, el conjunto de vectores $\left(x^i, z^i, \theta^i, \varphi^i\right) \in \mathbb{R}_+^{L\times S^*} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^J \times \mathbb{R}_+^J$ tal que $\varphi_j = 0$ para cualquier $j \notin J(\mathbb{P}^i)$. Note que Γ^i es no-vacío, cerrado y convexo.

Dados precios $((p_s; s \in S^*), q, \pi) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}_+^J \times \mathbb{R}_+$, el objetivo de cada agente $i \in I$ es maximizar su función de utilidad eligiendo una asignación en su conjunto presupuestario, que es denotado por $B^i(p, q, \pi)$ y es definido como la colección de vectores $(x^i, z^i, \theta^i, \varphi^i) \in \Gamma(\mathbb{P}^i)$ tal que $(x_s^i; s \in S) \in \mathbb{P}^i(p_{-0}, \theta^i)$ y

$$\begin{aligned} p_0 x_0^i + \pi z^i + \sum_{j\in J} q_j \theta_j^i &\leq p_0 w_0^i + \sum_{j\in J} q_j \varphi_j^i, \\ p_s x_s^i + \sum_{j\in J} R_{s,j} \varphi_j^i &\leq p_s w_s^i + z^i + \sum_{j\in J} R_{s,j} \theta_j^i, \ \forall s \in S. \end{aligned}$$

Definición 1. *Un equilibrio para una economía con información diferencial endógena es dado por un vector de precios unitarios* $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\pi}) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}_+^J \times \mathbb{R}_+$ *en conjunto con asignaciones individuales* $\left(\overline{x}^i, \overline{z}^i, \overline{\theta}^i, \overline{\varphi}^i\right)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \Gamma(\mathbb{P}^i)$ *tal que,*

(i) Para cada agente $i \in I$*, el vector* $\left(\overline{x}^i, \overline{z}^i, \overline{\theta}^i, \overline{\varphi}^i\right)$ *maximiza la función de utilidad* $U^i : \mathbb{R}_+^{L\times S^*} \to \mathbb{R}_+$ *sobre las asignaciones de su conjunto presupuestario* $B^i(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\pi})$*.*

(ii) Las siguientes condiciones de vacío de mercados se cumplen,

$$\sum_{i\in I} \left(\overline{x}_s^i - w_s^i\right) = 0, \quad \forall s \in S^*; \qquad \sum_{i\in I} \overline{z}^i = 0, \qquad \sum_{i\in I} (\overline{\theta}_j^i - \overline{\varphi}_j^i) = 0, \ \forall j \in J.$$

3. Existencia de equilibrio

Nuestro principal resultado sobre existencia de equilibrio es,

TEOREMA 1. *Suponga que los siguientes supuestos se cumplen,*

(A1) Para cada agente $i \in I$, la función de utilidad $U^i : \mathbb{R}_+^{L\times S^*} \to \mathbb{R}$ es continua, estrictamente cóncava y creciente.

(A2) Para cada agente $i \in I$, $w^i \in \mathbb{R}_{++}^{L\times S^*}$.

(A3) La función de utilidad de todo agente $i \in I$ satisface la siguiente propiedad asintótica,

$$\lim_{r\to+\infty} U^i(x_0 + r\cdot\zeta, (x_s; s\in S)) = +\infty, \quad \forall (x_s; s\in S^*) \in \mathbb{R}_{++}^{L\times S^*}.$$

(A4) Para cada agente $i \in I$, $U^i(x_s; s\in S^*) := \sum_{s\in S} \alpha_s u^i(x_0, x_s)$, donde $u^i : \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}_+$, y el parámetro $\alpha_s > 0$ es la probabilidad de ocurrencia que el agente i le da al estado de la naturaleza $s \in S$.

Entonces, existe equilibrio.

Dependiendo de la información inicial, los agentes pueden no tener acceso a algunos mercados de crédito. Así, si normalizamos los precios de bienes y activos en una forma tal que estén en el simplex, entonces las correspondencias de conjuntos presupuestarios pueden tener interior vacío. Así, para probar existencia de equilibrio, normalizamos el precio de bienes para que pertenezca a $\mathcal{P}$ y, entonces, requerimos definir límites superiores en precios de activos. Por esta razón, incluímos el Supuesto (A3), desde que nos permite encontrar límites endógenos en el precio del activo libre de riesgo, para también acotar los precios de activos por arriba usando las condiciones de no-arbitraje. Más aún, las condiciones (A2) y (A3) nos permiten probar la hemicontinuidad inferior de las correspondecias de conjuntos presupuestarios, porque nos asegura que el interior de dicha correspondencia tiene valores no-vacíos.

Note que, la restricción de información sobre los planes de consumo implica que la correspondencia de conjuntos presupuestarios de cualquier agente no tiene gráfico cerrado, una importante propiedad requerida para probar existencia de equilibrio usando la forma tradicional del juego generalizado.[2] Así, requerimos asegurar la compatibilidad entre los planes de consumo y la información final sin imponer explícitamente en la correspondencia de conjuntos presupuestarios de los agentes esta restricción informacional. Por estas razones, concentramos el análisis en la preferencias que satisfacen el Supuesto (A4), porque con esta hipótesis un agente *irrestricto informacionalmente* i consume diferentes canastas de bienes en dos estados $(s, s') \in S \times S$ sólo si esos estados de la naturaleza son distinguibles en $\mathbb{P}^i(\overline{p}_{-0}, \overline{\theta}^i)$.

De hecho, si s y s' están en el mismo elemento de $\mathbb{P}^i(\overline{p}_{-0}, \overline{\theta}^i)$, entonces (por definición) ambos estados de la naturaleza están también en el mismo elemento de $\mathbb{P}^i$, $\overline{p}_s = \overline{p}_{s'}$, y $R_{s,j}\overline{\theta}^i_j = R_{s',j}\overline{\theta}^i_j$, $\forall j \in J$. Así, dadas canastas de equilibrio $\overline{x}^i_s$ y $\overline{x}^i_{s'}$, para todo $\lambda \in [0,1]$ el vector $x(\lambda) := \lambda\overline{x}^i_s + (1-\lambda)\overline{x}^i_{s'}$ es presupuestariamente factible en ambos estados de la naturaleza. Por Supuesto (A4) y de la no-distinguibilidad de los estados de la naturaleza s y s', sigue que, $u^i(\overline{x}^i_0, \overline{x}^i_s) = u^i(\overline{x}^i_0, \overline{x}^i_{s'})$. Así, suponiendo que $\overline{x}^i_s \neq \overline{x}^i_{s'}$. Si el agente i cambia sus canastas de equilibrio en s y s' por $x(\lambda)$, $\lambda \in (0,1)$, entonces aumentará su nivel de utilidad (una consecuencia de la estricta concavidad de su función de utilidad). Una contradicción.

Más aún, desde que la separabilidad de las funciones de utilidad impuesta por el Supuesto (A4) endogeneiza el requerimiento de compatibilidad informacional, no requerimos asumir que, para cada cualquier estado de la naturaleza $s \in S$ existe al menos un agente $i \in I$ que lo distingue, $\{s\} \in \mathbb{P}^i$. Un supuesto tradicional en modelos de equilibrio general estático con información diferencial, usado para asegurar que (bajo monotonicidad de preferencias) el precio de equilibrio de cualquier contrato de bienes contigente sea estrictamente positivo.

[2] En efecto, fijando un agente $i \in I$ que no es totalmente informado (es decir, $\mathbb{P}^i \neq \{\{s\}; s \in S\}$), y considerando una secuencia de precios $(p_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}$ que converge a un precio $p \in \mathcal{P}$. Tambien, suponiendo que, para cada $n \geq 1$, p_n es $\mathbb{Q}$-medible, con $\mathbb{Q}$ estrictamente más fina que $\mathbb{P}^i$, y p es $\mathbb{P}^i$-medible. Si suponemos que $z^i = \theta^i = \varphi^i = 0$ y $x^i = (w^i_0, (\alpha_s w^i_s; s \in S))$, donde el vector $(\alpha_s; s \in S) \in (0,1)^S$ es $\mathbb{P}^i(p_n, 0) = \mathbb{Q}$ medible, la canasta $(x^i, z^i, \theta^i, \varphi^i)$ pertenece a $B^i(p_n, q, \pi)$, para cualquier $n \geq 1$ e independiente del vector $(q, \pi) \in \mathbb{R}^J_+ \times \mathbb{R}_+$. A pesar de que, $(x^i, z^i, \theta^i, \varphi^i) \notin B^i(p, q, \pi)$.

4. Algunos ejemplos

En nuestro modelo, permitimos equilibrio en donde los agentes obtienen información de los mercados financieros porque, contrariamente a Faias & Moreno-García (2010) Supuesto (A.4), no imponemos ningún supuesto sobre la medibilidad de los pagos de activos. También, permitimos equilibrios con precios de bienes que entregan información, desde que no hay razón de concentrarse en un concepto de refinamiento de equilibrio donde el plan de precios de bienes es medible con respecto a la partición común de información.

Por otra parte, nuestras restricciones de deuda, que son dependientes de la información inicial de los agentes, son impuestas para asegurar que los deudores tienen suficiente información para saber, luego de la realización de la incertidumbre, si deben cumplir alguna deuda. En otro caso, pueden aparecer ciclos en los procesos de decisión de pagos, causados por la ausencia de información sobre el estado de la naturaleza que se realizó.

Esas posibilidad son ilustradas en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.

Considere una economía que satisface los Supuestos (A1)-(A4), con dos bienes, sin mercados financieros y funciones de utilidad dadas por

$$U^i((x_s; s \in S^*)) = x_{0,1}^{\beta} x_{0,2}^{1-\beta} + \sum_{s \in S} \alpha_s x_{s,1}^{\beta} x_{s,2}^{1-\beta}, \quad \forall i \in I,$$

donde $\beta \in (0, 1)$. Las condiciones de primer orden del problema del consumidor en el estado $s \in S$ implican que, con cualquier precio de equilibrio $\overline{p}_s$,

$$\frac{\overline{p}_{s,1}}{\overline{p}_{s,2}} = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{W_{s,2}}{W_{s,1}},$$

donde $W_{s,l} = \sum_{i \in I} w_{s,l}^i$.

Suponiendo que existe un agente desinformado $i_0 \in I$ (es decir, $\mathbb{P}^{i_0} = \{S\}$). Entonces, los precios de equilibrio serán no-informativos, en el sentido que son medibles con respecto a la partición de información común, si y sólo si el grado relativo de escasez de bienes es constante en el segundo periodo, $\frac{W_{s,2}}{W_{s,1}} = \frac{W_{s',2}}{W_{s',1}}$, $\forall (s, s') \in S \times S$, que es una hipótesis restrictiva. Más aún, para una economía en que esta condición no se cumple, todo precio de equilibrio revelará información (al menos para el agente desinformado i_0).

Note que, si se permiten mercados financieros en esta economía, para asegurar que los pagos de activos no revelen información, requeriríamos restringirlos a ser medibles con respecto a la información común. Así, sólo activos libres de riesgo estarían disponibles para transar. Un supuesto fuerte, especialmente cuando el número de estados de la naturaleza es elevado. En otras palabras, cualquier condición de medibilidad sobre pagos de activos con respecto a la partición de información común de la economía, incremente fuertemente el grado de incompletitud de los mercados financieros. Entonces, cuando los mercados tienen un buen nivel de innovación financiera, no es creíble que los pagos de activos no revelen información.

Ejemplo 2.

En este ejemplo ilustramos la importancia de la existencia en nuestro modelo de las restricciones de deuda dependientes de infomación. Por simplicidad, consideremos una economía con un sólo bien, tres estados de la naturaleza en $t = 1$, denotados por $\{u, m, d\}$, y dos agentes que sólo reciben utilidad por consumo en el segundo periodo. También, ellos no tienen dotaciones iniciales en $t = 0$. Así, las funciones de utilidad y dotaciones están dadas por

$$U^1(x_u, x_m, x_d) = \sqrt{x_u} + \sqrt{\frac{x_m}{3}} + 2\sqrt{x_d}, \qquad (w_u^1, w_m^1, w_d^1) = (0, 2, 2);$$

$$U^2(x_u, x_m, x_d) = \sqrt{x_u} + \sqrt{x_m} + 2\sqrt{\frac{x_d}{3}}, \qquad (w_u^2, w_m^2, w_d^2) = (2, 2, 2).$$

En esta economía existen dos activos numerarios. Uno de ellos tiene un precio unitario de q_1 en el primer periodo y promete entregar una unidad del bien en los estados de la naturaleza $\{u, m\}$. El otro activo es uno de Arrow contigente al estado de la naturaleza $s = d$, que es negociado en $t = 0$ a un precio unitario q_2. De este modo, si no hay restricciones de deuda en esta economía, la restricción presupuestaria del primer periodo del agente $i \in \{1, 2\}$ es dada por $q_1 z_1^i + q_2 z_2^i = 0$, donde z_j^i denota la posición del agente i sobre el activo $j \in \{1, 2\}$. Note que, en ausencia de restricciones de deuda no es necesario identificar posiciones largas y cortas con notaciones distintas.

Asumiendo que los precios unitarios son dados por $\overline{q}_1 = \overline{q}_2 = 1$. Entonces, las asignaciones

$$(z_1^1, z_2^1, x_u^1, x_m^1, x_d^1) = (1, -1, 1, 3, 1), \qquad (z_1^2, z_2^2, x_u^2, x_m^2, x_d^2) = (-1, 1, 1, 1, 3).$$

constituyen un equilibrio de la economía.

Nosotros argumentamos que, dependiendo de la información inicial de los agente, podría no ser creíble que esta asignación de equilibrio sea implementable. De hecho, si se asume que $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^2 = \{\{u\}, \{m, d\}\}$, entonces para pagar su deuda, el agente $i = 1$ necesita observar que se realizó el estado de la naturaleza $s = d$. Para esto, el necesita creer que el pago asociado a su posición larga siempre se cumplirá. Análogamente, para pagar su deuda en los estados de la naturaleza $s \in \{u, m\}$, el agente $i = 2$ necesita creer que el activo $j = 2$ no dará *default*. Así, aparece un ciclo de interdependencia de decisiones, que bloquea cualquier pago, dada la información parcial de los deudores.

Pensando en este tipo de situaciones, imponemos nuestra restricción de deuda dependiente de información, $z_j^i \geq 0$ si $j \notin J(\mathbb{P}^i)$, para cada agente $i \in \{1, 2\}$. En este contexto, la deuda financiera de equilibrio y las dotaciones de bienes son compatible con nuestro modelo si y sólo si el agente $i = 1$ está totalmente informado sobre la realización de los estados de la naturaleza y el agente $i = 2$ está totalmente informado también o tiene una partición de información dada por $\mathbb{P}^2 = \{\{u, m\}, \{d\}\}$. En otro caso, al menos uno de los agentes no tiene total acceso al mercado del crédito y, en equilibrio, el agente se consume sus dotaciones iniciales.

5. Conclusiones

En este trabajo extendemos el modelo de mercados competitivos con información diferenciada introducido por Radner (1968), para permitir negociación secuencial en mercados financieros incompletos. Así, los agentes compran bienes en mercados a la vista y reciben señales de precios de bienes y pagos de activos, que permiten aumentar la información privada sobre la realización de estados de la naturaleza. También, las restricciones iniciales de información inducen restricciones naturales de deuda que eliminan ciclos de indeterminación sobre acciones financiera. Desde que las restricciones sobre el consumo son impuestas por la información que es configurada endógena, no requerimos restringir el número de activos disponible para transar ni sus pagos contigentes.

Existen otras dimensiones interesantes que pueden ser materia de investigación futura. Por ejemplo, nuestro modelo puede ser extendido a más de dos periodos y la discusión sobre los efectos que el *default* tiene (informacionalmente) sobre las restricciones a la deuda puede ser relevante. De hecho, cuando los agentes viven más de dos periodos, la inversión en promesas financieras puede tener efecto no sólo sobre el consumo futuro inmediato sino que también sobre las oportunidades de crédito futuras, desde que agentes más informados tienen más acceso a los mercados de crédito. Sin embargo, todo intento de incluir múltiples periodos en nuestro esquema viene de la mano con un modelo que describa cómo la información evoluciona a través del tiempo. Por otra parte, si permitimos *default* y protegemos a los inversores con penalización a los agentes que no cumplen sus promesas o demandamos hipotecas como garantías a los deudores (como en Dubey et al. (2005) o Geanakoplos & Zame (2002)), las restricciones al crédito presentadas en este trabajo pueden relajarse como una consecuencia de la existencia de mecanismos de obligación de pagos.

Apéndice: Prueba del Teorema 1

Para probar la existencia de equilibrio en nuestra economía, primero definimos un juego generalizado en el que los agentes maximizan sus funciones de utilidad en conjuntos presupuestarios truncados y subastadores que eligen precios con el objetivo de maximizar el valor de los excesos de demanda en mercados físicos y financieros.

Demostramos que este juego generalizado tiene un equilibrio a la Cournot-Nash. También, que cuando los límites superiores que truncan por arriba las asignaciones del conjutno presupuestario son los suficientemente grandes, un equilibrio del juego generalizado será un equilibrio de le economía.

El juego generalizado $\mathcal{G}\,(n, Q, X, Z, \Theta, \Phi)$. Dado un vector $(n, Q, X, Z, \Theta, \Phi) \in \mathbb{N}^6$, definimos el juego caracterizado por los siguientes conjuntos de jugadores y estrategias.

Conjunto de jugadores. Existe un conjunto finito de jugadores constituido por,

(i) El conjunto de agentes de la economía, I.

(ii) Un subastador, $h(s)$, para cada $s \in S^*$.

Denotamos el conjunto de jugadores por $H = I \cup H(S^*)$ donde $H(S^*) := \{h(s) : s \in S^*\}$.

Conjunto de estrategias. Dado $\overline{W} := \max\limits_{(s,l)\in S^*\times L} \sum_{i\in I} w^i_{s,l}$, definimos

$$K(X, Z, \Theta, \Phi) = \left\{(x_0, (x_s; s \in S), z, \theta, \varphi) \in [0, X]^L \times [0, 2\overline{W}]^{S\times L} \times [-Z, Z] \times [0, \Theta]^J \times [0, \Phi]^J\right\},$$

y, para cualquier $s \in S^*$, sea $\mathcal{P}_s = \{p \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot \zeta = 1\}$. El conjunto de estrategias para los jugadores en el juego generalizado, $(\overline{\Gamma}^h; h \in H)$, está dado por,

(i) Para cada $h \in I$, $\overline{\Gamma}^h = K(X, Z, \Theta, \Phi) \cap \Gamma(\mathbb{P}^h)$.

(ii) Para $h = h(0)$, $\overline{\Gamma}^h = \mathcal{P}_0 \times [0, n] \times [0, Q]^J$

(iii) Para $h = h(s)$, con $s \in S$, $\overline{\Gamma}^h = \mathcal{P}_s$.

Por simplicidad, sea $\eta^h = \left(x^h, z^h, \theta^h, \varphi^h\right) \in \overline{\Gamma}^h$ el vector genérico de estrategias para un jugador $h \in I$; (p_0, π, q) denotará la estrategia genérica para el jugador $h(0)$; y p_s una estrategia genérica para un jugador $h(s)$, con $s \in S$. Finalmente, sea $\overline{\Gamma} = \prod_{h\in H} \overline{\Gamma}^h$ el espacio de estrategias del $\mathcal{G}(n, Q, X, Z, \mathit{\Theta}, \mathit{\Phi})$. Un elemento genérico de $\overline{\Gamma}$ es denotado por (p, π, q, η), donde $\eta := \left(\eta^h; h \in I\right)$ es un elemento genérico de $\prod_{i \in I} \overline{\Gamma}^i$.

Estrategias admisibles. Las estrategias efectivamente elegidas por los jugadores dependen de las acciones tomadas por los otros jugadores, a través de una correspondecia de estrategias admisibles $\phi^h : \overline{\Gamma}_{-h} \twoheadrightarrow \overline{\Gamma}^h$, donde $\overline{\Gamma}_{-h} = \prod_{h' \neq h} \overline{\Gamma}^{h'}$. Sea $(p, \pi, q, \eta)_{-h}$ un elemento genérico de $\overline{\Gamma}_{-h}$. Suponemos que,

(i) Si $h \in I$, $\phi^h \left[(p, \pi, q, \eta)_{-h}\right] = B^h(p, \pi, q) \cap \overline{\Gamma}^h$.

(ii) Si $h \in H(S^*)$, $\phi^h \left[(p, \pi, q, \eta)_{-h}\right] = \overline{\Gamma}^h$.

Funciones objetivo. Cada jugador está caracterizado por una función objetivo $F^h : \overline{\Gamma}^h \times \overline{\Gamma}_{-h} \to \mathbb{R}_+$. Asumimos que,

(i) Cuando $h \in I$ y $\eta^h = \left(x^h, z^h, \theta^h, \varphi^h\right) \in \overline{\Gamma}^h$, entonces $F^h \left(\eta^h; (p, \pi, q, \eta)_{-h}\right) = U^h \left(x^h\right)$.

(ii) Si $h = h(0)$ y $(p, \pi, q) \in \overline{\Gamma}^h$, entonces

$$F^h \left((p_0, \pi, q); (p, \pi, q, \eta)_{-h}\right) := p_0 \sum_{i \in I} \left(x_0^i - w_0^i\right) + \pi \sum_{i \in I} z^i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_j (\theta_j^i - \varphi_j^i).$$

(iii) Si $h(s) \in H(S^*) \setminus \{h(0)\}$ y $p_s \in \overline{\Gamma}^h$, entonces $F^h \left(p_s; (p, \pi, q, \eta)_{-h}\right) := p_s \sum_{i \in I} \left(x_s^i - w_s^i\right)$.

Definimos la correspondencia de estrategias óptimas para cada $h \in H$, $\Psi^h : \overline{\Gamma}_{-h} \twoheadrightarrow \overline{\Gamma}^h$ como

$$\Psi^h \left((p, \pi, q, \eta)_{-h}\right) := \underset{y \in \phi^h\left((p, \pi, q, \eta)_{-h}\right)}{\arg\max} F^h \left(y; (p, \pi, q, \eta)_{-h}\right).$$

Finalmente, sea $\Psi : \overline{\Gamma} \twoheadrightarrow \overline{\Gamma}$ la correspondencia de respuestas óptimas del juego, que es dada por $\Psi(p, \pi, q, \eta) = \prod_{h \in H} \Psi^h \left((p, \pi, q, \eta)_{-h}\right)$.

Definición 2. *Un equilibrio Cournot-Nash para el juego generalizado $\mathcal{G}(n, Q, X, Z, \mathit{\Theta}, \mathit{\Phi})$ es dado por un perfil de estrategias $(\overline{p}, \overline{\pi}, \overline{q}, \overline{\eta}) \in \Psi(\overline{p}, \overline{\pi}, \overline{q}, \overline{\eta}) \subset \overline{\Gamma}$.*

Para probar la existencia de equilibrio en el juego generalizado, requerimos algunas propiedades sobre la correspondencia de estrategias amisibles que los siguiente lemas entregan.

Lema 1. *Bajo Supuesto (A2), correspondencias de estrategias admisibles,* $\left(\phi^h; h \in H\right)$, *son no-vacías y continuas. Más aún, las correspondencias tienen valores compactos y convexos.*

Demostración. Para cada jugador $h \in H(S^*)$, la correspondencia de estrategias admisibles es constante y, por ende, es continua y no-vacía. También, por definición, sus valores son compactos y convexos.

Por otra parte, para cada jugador $h \in I$, sigue de la definición del conjunto presupuestario que la correspondencia de estrategias admisibles ϕ^h tiene valores no-vacíos, compactos y convexos. Desde que el gráfico de esta correspondencia es cerrado, tenemos hemicontinuidad superior. Para asegurar la hemicontinuidad inferior de ϕ^h, consideramos la correspondencia $\mathring{\phi}^h\left((p,\pi,q,\eta)_{-h}\right) := int_{K(X,Z,\Theta,\Phi)}\ B^h(p,\pi,q)$, que asocia al vector de precios de bienes y activos el conjunto de asignaciones en $K(X,Z,\Theta,\Phi)$ que satisface todas las restricciones presupuestarias del agente h con desigualdad estricta. Note que por Supuesto (A2), esta correspondencia tiene valores no-vacíos y gráfico abierto. Entonces, es hemicontinua inferior. Sabemos que la clausura de $\mathring{\phi}^h\left((p,\pi,q,\eta)_{-h}\right)$, que es igual a $\phi^h\left((p,\pi,q,\eta)_{-h}\right)$, es también hemicontinua inferior. Luego, las correspondencias de estrategias admisibles $(\phi^h; h \in I)$ son continuas. $\square$

Proposición 1. *Bajo Supuestos (A1) y (A2) el conjunto de equilibrios Cournot-Nash para el juego* $\mathcal{G}(n,Q,X,Z,\Theta,\Phi)$ *es no-vacío.*

Demostración. Por Supuesto (A1), cada función objetivo en el juego es continua en todas las variables y cuasi-cóncava en la propia estrategia. También, los conjuntos de estrategias son no-vacíos, compactos y convexos.[3] Por Lema 1, correspondencias admisibles son continuas con valores no-vacíos, convexos y compactos. Así, podremos aplicar el Teorema del Máximo de Berge para asegurar que, para cada jugador $h \in H$ la correspondencia de estrategias óptimas Ψ^h, es

[3]Note que, las restricciones a la deuda para tomar deuda financiera compatible con la información individual inicial son incluidas en la definición del conjunto $\Gamma(\mathbb{P}^h)$. Este conjunto es cerrado, convexo y no-vacío. Cuando lo intersectamos con $K(X,Z,\Theta,\Phi)$, para obtener $\overline{\Gamma}^h$, tendremos compacidad también.

hemicontinua superior con valores no-vacíos, convexos y compactos. Luego, la correspondencia Ψ tiene gráfico cerrado con valores no-vacíos, compactos y convexos. Aplicando el Teorema de Punto Fijo De Kakutani a Ψ concluímos la prueba. $\square$

Probaremos en lo que sigue, que para vectores $(n, Q, X, Z, \Theta, \Phi)$ en donde las coordenadas son lo suficientemente grandes, todo equilibrio del juego generalizado es un equilibrio de la economía. Sin embargo, necesitamos encontrar previamente límites superiores para las variables de equilibrio.

LEMA 2. *Para cada $s \in S$, fijando un vector $(p_s, w_s, x_s) \in \mathcal{P}_s \times \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}^L_+$, con $x_s < \overline{W}$. Entonces, existe $A > 0$ tal que, toda asignación $(z, (\kappa_j; j \in J)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^J$ que satisface*

$$p_s x_s = p_s w_s + z + \sum_{j \in J} R_{s,j} \kappa_j, \ \forall s \in S;$$

es acotada por A, es decir, pertenece a $[-A, A]^{\#J+1}$.

Más aún, el límite A sólo depende de $((\overline{W}, w_s, R_{s,j}); (s, j) \in S \times J)$.

DEMOSTRACIÓN. Note que, como S (respectivamente, J) es un conjunto finito, podemos abusar de notación e identificarlo con $\{1, \ldots, S\}$ (respectivamente, $\{1, \ldots, J\}$). Así, podemos reescribir las condiciones del enunciado del Lema en una forma matricial:

$$\begin{bmatrix} p_1(x_1 - w_1) \\ \vdots \\ p_S(x_S - w_S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1,1} & \cdots & R_{1,J} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{S,1} & \cdots & R_{S,J} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_J \\ z \end{bmatrix}$$

Desde que no hay activos redundantes en la economía, tenemos que $J+1 \leq S$. Más aún, podemos encontrar sub-matrices no-singulares de dimensión $(J+1) \times (J+1)$. Específicamente, se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que la matriz es dada por

$$B = \begin{vmatrix} R_{1,1} & \cdots & R_{1,h} & \cdots & R_{1,J} & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ R_{J+1,1} & \cdots & R_{J+1,h} & \cdots & R_{J+1,J} & 1 \end{vmatrix}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{bmatrix} p_1(x_1 - w_1) \\ \vdots \\ p_{J+1}(x_{J+1} - w_{J+1}) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_J \\ z \end{bmatrix}$$

Por la regla de Cramer,

$$z = \frac{det(B(y, J+1))}{\det(B)}, \qquad \kappa_j = \frac{det(B(y, j))}{\det(B)}, \ \forall j \in \{1, \ldots, J\},$$

donde $y = (p_1(x_1 - w_1), \ldots, p_{J+1}(x_{J+1} - w_{J+1}))$ y $B(y, j)$ es la matriz obtenida por el cambio, en la matriz B, de la j-ésima columna por el vector y. Desde que (i) el determinante es una función continua; (ii) el vector y depende continuamente de $((p_s, x_s); s \in S)$; y (iii) los vectores $((p_s, x_s, w_s); s \in S)$ están en un espacio compacto, sigue que el vector $(z, (k_j; j \in J))$ es acotado, independiente del valor de $((p_s, x_s, w_s); s \in S)$. Así, existe $A > 0$ que satisface las condiciones del lema y depende de $((\overline{W}, w_s, R_{s,j}); (s, j) \in S \times J)$. $\square$

Siguiendo la notación del lema previo, definimos $(\overline{Z}, \overline{\Theta}, \overline{\Phi}) = 2A(1, 1, 1)$.

Los próximos dos lemas son utilizados para probar que los precios de equilibrio de activos del juego generalizado son acotados uniformemente. Por conveniencia de notaciones, sea $W_0 = (W_{0,l}; l \in L)$ el vector de los recuros físicos agregados en $t = 0$, donde $W_{0,l} := \sum_{i \in I} w^i_{0,l}$.

Lema 3. *Bajo Supuestos (A1)-(A3), dados* $(\overline{p}, \overline{\pi}, \overline{q}) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^J_+$, *se supone que existe una solución óptima* $(\overline{x}^i, \overline{z}^i, \overline{\theta}^i, \overline{\varphi}^i) \in \Gamma^i$ *para el problema individual de algún agente* $i \in I$ *tal que* $\overline{x}^i_0 \leq W_0$ *y* $\overline{x}^i_{s,l} \leq 2\overline{W}$, $\forall (s, l) \in S \times L$. *Luego, existe* $\overline{n}$ *tal que* $\overline{\pi} < \overline{n}$.

Demostración. Se define $\varepsilon = \min_{(s,l,i) \in S \times L \times I} \ w^i_{s,l}$, que es estrictamente positivo como consecuencia del Supuesto (A2). Suponemos que el agente $i \in I$ vende $\frac{\varepsilon}{2}$ unidades del activo libre de riesgo, que le reportan recursos en el primer periodo por un monto de $\frac{\overline{\pi}\varepsilon}{2}$. Así, él puede consumir en el primer periodo la canasta $w^i_0 + \frac{\overline{\pi}\varepsilon}{2}\,\zeta$ (recuerde que $\overline{p}_0 \cdot \zeta = 1$). Entonces, requerimos que

$$U^i\left(w^i_0 + \frac{\overline{\pi}\varepsilon}{2}\,\zeta, \left(w^i_{s,l} - \frac{\varepsilon}{2}\right)_{(s,l) \in S \times L}\right) \leq U^i(\overline{x}^i) < U^i\left(W_0, (2\overline{W}(1, \ldots, 1))_{s \in S}\right).$$

Sigue de los Supuestos (A1), (A2) y (A3) que existe $\overline{n}$ tal que $\overline{\pi} < \overline{n}$. $\square$

Definimos $\overline{X} = 2(1 + \overline{n}\sum_{l \in L} \zeta_l)\overline{W}$.

Note que, para un $X > \overline{X}$ y $n > \overline{n}$, en el juego generalizado $\mathcal{G}(n, Q, X, Z, \Theta, \Phi)$ cualquier jugador $h \in I$ puede demandar en el primer periodo la canasta utilizada en la prueba del Lema 3. Así, en este tipo de juego generalizado, la existencia de un plan óptimo que satisface las condiciones de lema anterior implicará que el precio unitario del activo libre de riesgo esté acotado por arriba por $\overline{n}$.

Lema 4. *Existe un $\overline{Q} > 0$ tal que, en cualquier equilibrio del juego $\mathcal{G}(n, Q, X, Z, \Theta, \Phi)$ con $(n, Q, X, Z, \Theta, \Phi) \gg (\overline{n}, \overline{Q}, \overline{X}, \overline{Z}, \overline{\Theta}, \overline{\Phi})$, si algún agente $i \in I$ tal que (i) $\overline{x}_0^i \leq W_0$; (ii) $\overline{x}_{s,l}^i \leq 2\overline{W}$, $\forall (s,l) \in S \times L$; y (iii) para algún $j \in J$, $(\overline{\theta}_j^i, \overline{\varphi}_j^i) \in \mathbb{R}_{++} \times \{0\}$; entonces el precio unitario $\overline{q}_j$ es acotado por arriba por $\overline{Q}$.*

Demostración. Desde que $\overline{\theta}_j^i > 0$, aplicando el Teorema de Kuhn-Tucker al problema de optimización del agente i, tenemos que, $\overline{q}_j = \sum_{s \in S} \frac{\gamma_s^i}{\gamma_0^i} R_{s,j}$, donde $\left(\gamma_s^i; s \in S\right)$ es el vector de multiplicadores de Lagrange del agente i que están asociados a las restricciones presupuestarias. Note que del Lema 2 que $\overline{\theta}_j^i < \overline{\Theta} < \Theta$. Por esta razón, no incluímos–en las condiciones de primer order anteriores–el precio sombra asociado a la restricción superior de la posición larga de $j \in J$. Más aún, desde que no hay restricciones a la venta del activo libre de riesgo, $\overline{\pi} = \sum_{s \in S} \frac{\gamma_s^i}{\gamma_0^i}$.

De esta forma,

$$\overline{q}_j = \sum_{s \in S} \frac{\gamma_s^i}{\gamma_0^i} R_{s,j} \leq \overline{\pi} \max_{(s,j') \in S \times J} R_{s,j'} < \overline{Q} := \overline{n} \max_{(s,j') \in S \times J} R_{s,j'},$$

donde $\overline{n}$ es el límite superior para el precio unitario del activo libre de riesgo que fue encontrado en el lema previo. $\square$

Note que, para un juego $\mathcal{G}(n, Q, X, Z, \Theta, \Phi)$ existe al menos un equilibro Cournot-Nash en que $\overline{\theta}_j^i \overline{\varphi}_j^i = 0$, para cualquier par $(i, j) \in I \times J$. Nos referiremos a estos equilibrios como los normalizados Cournot-Nash.

Finalmente, la existencia de equilibrio en nuestra economía es una consecuencia del siguiente resultado.

Proposición 2. *Bajo Supuestos (A1)-(A4), si* $(n, Q, X, Z, \varTheta, \varPhi) \gg (\overline{n}, \overline{Q}, \overline{X}, \overline{Z}, \overline{\varTheta}, \overline{\varPhi})$*, entonces cada equilibrio normalizado Cournot-Nash de* $\mathcal{G}\,(n, Q, X, Z, \varTheta, \varPhi)$ *es un equilibrio de la economía original.*

Demostración. Sea $\left(\overline{p}, \overline{\pi}, \overline{q}, (\overline{\eta}^i; i \in I)\right)$, donde $\overline{\eta}^i = \left(\overline{x}^i, \overline{z}^i, \overline{\theta}^i, \overline{\varphi}^i\right) \in \overline{\Gamma}^i$, es un equilibrio normalizado para el juego generalizado $\mathcal{G}\,(n, Q, X, Z, \varTheta, \varPhi)$, con $(n, Q, X, Z, \varTheta, \varPhi) \gg (\overline{n}, \overline{Q}, \overline{X}, \overline{Z}, \overline{\varTheta}, \overline{\varPhi})$.

Paso I: Factibilidad de Mercado. Agregando las restricciones presupuestarias del primer periodo de los agentes tenemos,

$$\overline{p}_0 \sum_{i \in I} \left(\overline{x}_0^i - w_0^i\right) + \overline{\pi} \sum_{i \in I} \overline{z}^i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \overline{q}_j (\overline{\theta}_j^i - \overline{\varphi}_j^i) \leq 0.$$

Sigue que, si para algún bien $l \in L$, $\sum_{i \in I} \left(\overline{x}_{0,l}^i - w_{0,l}^i\right) > 0$ el subastador $h(0)$ eligirá el precio más alto para ese bien, $\overline{p}_l = 1/\zeta_l > 0$, y precios cero para los demás bienes y activos, haciendo su función objetivo positiva, Una contradicción. Luego, para cada bien $l \in L$ tendremos que $\sum_{i \in I} \overline{x}_{0,l}^i \leq \sum_{i \in I} w_{0,l}^i < W_{0,l}$.

Por otra parte, suponiendo que para algún activo $j \in J$, $\sum_{i \in I} (\overline{\theta}_j^i - \overline{\varphi}_j^i) > 0$. El subastador $h(0)$ elegiría el precio máximo posible para dicho activo, esto es $\overline{q}_j = Q > \overline{Q}$, una contradicción con el máximo precio que es compatible con la existencia de un agente que compra el activo (véase Lema 4). Así, se concluye que para un activo $j \in J$, $\sum_{i \in I} \overline{\theta}_j^i \leq \sum_{i \in I} \overline{\varphi}_j^i$.

Más aún, si el agregado de las posiciones libres de riesgo es positivo, es decir, $\sum_{i \in I} \overline{z}^i > 0$, entonces el subastador $h(0)$ elegiría un precio $\overline{\pi} = n$, que es mayor que $\overline{n}$ (el máximo precio posible como fue probado en el Lema 3), una contradicción. Así, $\sum_{i \in I} \overline{z}^i \leq 0$.

Como se probó anteriormente, el consumo en el primer periodo es acotado por arriba por las dotaciones agregadas de ese periodo, que es menor que la cota superior X. Así, las restricciones presupuestarias del primer periodo son satisfechas con igualdad y la función objetivo del subastador $h(0)$ tiene un valor óptimo igual a cero. Como consecuencia, si $\sum_{i \in I} \left(\overline{x}_{0,l}^i - w_{0,l}^i\right) < 0$, el subastador $h(0)$ elegiría un precio cero para el bien l, una contradicción con la estricta monotonicidad de las preferencias (Supuesto (A1)). Entonces, $\sum_{i \in I} \overline{x}_0^i = W_0$.

Análogamente, si $\sum_{i \in I} \left(\overline{\theta}_j^i - \overline{\varphi}_j^i\right) < 0$, el subastador elegiría un precio cero nuevamente, una contradicción desde que $(R_{s,j}; s \in S) \neq 0$ y las preferencias son estrictamente monótonas. Finalmente, si $\sum_{i\in I} \overline{z}^i < 0$, entonces el subastador elegirá precio cero para el activo libre de riesgo, resultando en otra contradicción. Así la factibilidad de mercado físicos y financieros se cuple en $t = 0$.

Usando las asignaciones factibles $\left(\left(\overline{x}^i, \overline{z}^i, \overline{\theta}^i, \overline{\varphi}^i\right); i \in I\right)$ en el primer periodo, y agregando las restricciones presupuestarias en el estado de la naturaleza $s \in S$ tenemos que $\overline{p}_s \sum_{i\in I} \left(\overline{x}^i_s - w^i_s\right) \leq 0$. De esta manera, como $\overline{p}_s \cdot \zeta = 1$, tendremos que $\sum_{i\in I} \left(\overline{x}^i_{s,l} - w^i_{s,l}\right) \leq 0$, para cualquier $l \in L$.

Sigue que las restricciones presupuestarias son satisfechas con igualdad, dado que las asignaciones de consumo son acotadas por las dotaciones iniciales agregadas en este estado de la naturaleza y $\sum_{i\in I} w^i_s < 2\overline{W}(1, \ldots, 1)$. Finalmente, si $\sum_{i\in I} \left(\overline{x}^i_{s,l} - w^i_{s,l}\right) < 0$, entonces el subastador $h(s)$ eligiría un precio cero para el bien $l \in L$. Una contradicción. Conluimos que la factibilidad de mercado también se cumple en cada estado de la naturaleza $s \in S$.

Paso II. Optimalidad de las asignaciones individuales. Desde que la factibilidad, se cumple en el mercado de bienes, sigue que $\overline{x}^i_{0,l} < X$ y $\overline{x}^i_{s,l} < 2\overline{W}$, para cualquier $(i, s, l) \in I \times S \times L$. Como se normalizó el equilibrio, sigue del Lema 2, que para un $(i, j) \in I \times J$, $\max\{\overline{\theta}^i_j, \overline{\varphi}^i_j\} < \min\{\Theta, \Phi\}$. También, para cada $i \in I$, $\overline{z}^i \in (-Z, Z)$. Así, para un $i \in I$ las asignación $\overline{\eta}^i$ pertenece al interior del conjunto $K(X, Z, \Theta, \Phi)$ con respecto a $\Gamma(\mathbb{P}^i)$.

Así, si existe otra asignación $\eta^i \in \Gamma(\mathbb{P}^i)$ tal que $U^i(\eta^i) > U^i(\overline{\eta}^i)$, entonces para un $\lambda \in (0, 1)$ suficientemente pequeño, tenemos que $\eta^i(\lambda) := \lambda\eta^i + (1 - \lambda)\overline{\eta}^i \in K(X, Z, \Theta, \Phi)$. Por la estricta concavidad la de función de utilidad, tenemos $U^i(\eta^i(\lambda)) > U^i(\overline{\eta}^i)$, una contradicción con la optimalidad de $\overline{\eta}^i \in \overline{\Gamma}^i$. Entonces, para cada $\eta^i \in \Gamma(\mathbb{P}^i)$, $U^i(\eta^i) \leq U^i(\overline{\eta}^i)$, que prueba la optimalidad de $\overline{\eta}^i \in B^i(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\pi})$ sobre las asignaciones en el conjunto presupuestario del agente i.

Finalmente, note que desde que las preferencias cumplen el Supuesto (A4) la restricción de medibilidad del consumo en $t = 1$ con respecto a la información final se cumple sin necesidad de imponerla previamente (Para mayor detalle ver los comentarios sobre este supuesto en la tercera sección). $\square$

Referencias

Arrow, K. & Debreu, G. (1954), 'The existence of an equilibrium for a competitive economy', *Econometrica* **22**, 265–290.

Cornet, B. & De Boisdeffre, L. (2002), 'Arbitrage and price revelation with asymmetric information and incomplete markets', *Journal of Mathematical Economics* **38**, 393–410.

Daher, W., da Rocha, V. M. & Vailakis, Y. (2007), 'Asset market equilibrium with short-selling and differential information', *Economic Theory* **32**(3), 425–446.

De Boisdeffre, L. (2007), 'No-arbitrage equilibria with differential information: an existence proof', *Economic Theory* **31**, 255–269.

Drèze, J. (1974), Investment under private ownership. optimality, equilibrium and stability., *in* 'Allocation under uncertainty: Equilibria and optimality.', Wiley New York, pp. 129–165.

Dubey, P., Geanakoplos, J. & Shubik, M. (2005), 'Default and punishment in general equilibrium', *Econometrica* **73**, 1–37.

Faias, M. & Moreno-García, E. (2010), 'Incomplete financial markets and differential information', *Economic Theory* **43**, 189–206.

Geanakoplos, J. (1990), 'An introduction to general equilibrium with incomplete asset markets', *Journal of Mathematical Economics* **19**, 1–38.

Geanakoplos, J. (1997), Promises, promises., *in* 'The Economy as an Evolving Complex System II', Addison-Wesley, pp. 285–320.

Geanakoplos, J. & Zame, W. (2002), Collateral and the enforcement of intertemporal contracts, *in* 'Yale University working paper'.

Hart, O. (1975), 'On the optimality of equilibrium when the market structure is incomplete', *Journal of Economic Theory* **11**, 418–443.

Magill, M. & Quinzii, M. (2008), *Incomplete Markets.*, The International Library of Critical Writings in Economics Series, Edward Elgar Publishing.

Petrassi, M. & Torres-Martínez, J. (2007), 'Collateralized assets and asymmetric information', *Journal of Mathematical Economics* **44**(5-6), 530–534.

Polemarchakis, H. & Siconolfi, P. (1993), 'Asset markets and the information revealed by prices', *Economic Theory* **3**, 645–661.

Radner, R. (1968), 'Competitive equilibrium under uncertainty', *Econometrica* **36**, 31–58.

Rahi, R. (1995), 'Partially revealing rational expectations equilibria with nominal assets', *Journal of Mathematical Economics* **24**, 137–146.