



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

MEJORAMIENTO DEL DESEMPEÑO DEL CONTROL LONGITUDINAL DE  
UNA AERONAVE MEDIANTE LA INCORPORACIÓN DE  
CONTROLADORES ADAPTIVOS DE ORDEN FRACCIONARIO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA

GUSTAVO EDUARDO CEBALLOS BENAVIDES

PROFESOR GUÍA:  
MARCOS OCHARD CONCHA

PROFESOR CO-GUÍA:  
MANUEL DUARTE MERMOUD

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

NESTOR BECERRA YOMA  
RICARDO PÉREZ CORREA  
HECTOR RAMIREZ ESTAY

SANTIAGO DE CHILE  
2023

**RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL  
GRADO DE:** Doctor en Ingeniería Eléctrica  
**POR:** Gustavo Ceballos Benavides  
**FECHA:** 2023  
**PROFESOR GUÍA:** Marcos E. Orchard Concha

El presente trabajo aborda la implementación del control adaptivo directo de orden fraccionario en el control longitudinal de aeronaves, un enfoque no reportado en la literatura. Se analizó el control adaptivo directo fraccionario tanto en aeronaves civiles (Cessna-182) como de combate (F-16), obteniendo buenos resultados en comparación con el control adaptivo entero.

Esta propuesta de tesis aporta al conocimiento del control de aeronaves al presentar un esquema simple de control para plantas de grado relativo igual a 2 ( $n^* = 2$ ), como es el caso del Cessna-182, evitando la implementación más compleja para grados relativos mayores o iguales a 2.

La estabilidad de esta implementación se demostró incluyendo un nuevo lema (Lema 5) válido para plantas de orden entero y leyes adaptivas fraccionarias con grado relativo mayor o igual a 2 y simplificando un teorema fundamental del control fraccionario (Corolario 3).

Es importante destacar que esta es la primera implementación de control adaptivo de orden fraccionario aplicado al control de aeronaves. Más aún, los resultados teóricos y de simulación son fácilmente extensibles a la mayoría de los sistemas de control adaptivos de grado relativo 2 o superior.

## ABSTRACT

The present work deals with the implementation of direct adaptive control of fractional order in the longitudinal control of aircraft, an approach not reported in the literature. Fractional direct adaptive control was analyzed in both civil (Cessna-182) and combat (F-16) aircraft, obtaining good results compared to integer adaptive control.

This thesis proposal contributes to the knowledge of aircraft control by presenting a simple control scheme for plants with a relative degree equal to 2 ( $n^* = 2$ ), as is the case of the Cessna-182, avoiding the more complex implementation for degrees relative greater than or equal to 2.

The stability of this implementation was demonstrated by including a new lemma (lemma 5) valid for integer-order plants and fractional adaptive laws with relative degree greater than or equal to 2 and by simplifying a fundamental fractional control theorem (Corollary 3).

It is important to highlight that this is the first implementation of fractional order adaptive control applied to aircraft control. Furthermore, the theoretical and simulation results are easily extensible to most adaptive control systems of relative degree 2 or higher.

## **DEDICATORIA**

A mis hijos Natalia, Gustavo, Arantzazu, Antonia y Magdalena por su paciencia de no dedicarles el tiempo que se merecen, pero saben que los amo incondicionalmente.

A mi madre, que ha partido y me enseñó el valor de la perseverancia y el trabajo bien hecho.

A mi hermana Marcela por su cariñosa acogida y soporte en la ciudad de Santiago.

Finalmente, a mi compañera de toda la vida, mi señora Andrea por todo su apoyo, paciencia y comprensión.

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi familia por su constante soporte y paciencia.

A mis colegas Norelys y Lisbel por su constante apoyo.

A mi profesor co-guía Manuel Duarte que me ha guiado en el proceso de finalizar mis ideas plasmándolas en una Tesis. Siempre dispuesto a escucharme y analizar mis puntos de vista. Solo puedo decir que su constante ánimo y soporte fueron fundamentales para terminar mi Tesis.

Finalmente, a mi profesor guía Marcos Orchard por su apoyo y soporte para sacar adelante un importante paper en el área del control fraccionario.

Seguramente, faltaran muchos a los cuales debo agradecer, pero la memoria es frágil. A todos ellos, muchas gracias.

## Tabla de Contenido

Índice de Tablas .....	vii
Índice de Figuras .....	viii
1. Introducción .....	1
1.1. Motivación.....	2
1.2. Descripción del problema general .....	2
1.3. Hipótesis de trabajo .....	2
1.4. Objetivos.....	3
1.5. Contribuciones.....	4
2. Estado del Arte .....	4
2.1. Conceptos generales del control adaptable.....	6
2.2. Conceptos generales de cálculo fraccionario.....	9
2.2.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville.....	9
2.2.2. Derivada fraccionaria según Riemann-Liouville.....	10
2.3.3. Derivada fraccionaria según Caputo.....	10
3. Modelación de la dinámica de una aeronave.....	11
3.1. Sistema de coordenadas.....	12
3.2. Ejes relativos a la tierra (X'Y'Z') y ejes relativos al cuerpo (XYZ) .....	15
3.3. Modelo de perturbación o linealizado de la aeronave .....	16
3.4. Modelo longitudinal de perturbación y linealizado de una aeronave .....	19
3.4.1. Modelo longitudinal de perturbación linealizado del avión Cessna-182.....	22
4. Marco teórico .....	26
4.1. Definiciones y propiedades útiles del cálculo fraccionario aplicados al control adaptivo .....	36
5. Diseño de estrategias de control adaptivo directo fraccionario.....	45
5.1. Control adaptivo por modelo de referencia directo de orden entero y fraccionario (CAMRD y CAMRD-OF) aplicados al Cessna-182 cuyo grado relativo es $n^* = 2$ .....	45
5.2. Análisis de estabilidad del control adaptivo CAMRD-OF aplicado al Cessna-182 .....	48
5.3. Control adaptivo por modelo de referencia directo de orden entero y fraccionario (CAMRD y CAMRD-OF) aplicados al F-16 cuyo grado relativo es $n^* = 1$ .....	53
5.4. Análisis de estabilidad del control adaptivo CAMRD-OF aplicado al F-16 .....	55
6. Simulaciones y análisis de resultados .....	58
6.1. Pruebas de simulación del control CAMRD-OF aplicado al modelo longitudinal de la aeronave Cessna 182 .....	59
6.1.1. Resultados preliminares de las simulaciones para el Cessna 182.....	61
6.1.2. Resultados usando optimización PSO para el Cessna 182 .....	64

6.1.2. Análisis del comportamiento del CAMRD-OF aplicado al modelo longitudinal del Cessna 182 ante cambios en los parámetros de la planta.....	82
6.2. Pruebas de simulaciones del control CAMRD-OF del pitch rate (o razón de cambio del ángulo de cabeceo) aplicados al avión de combate F-16.....	87
6.2.1. Resultados usando optimización PSO para el F-16 .....	89
6.2.2. Análisis del comportamiento del CAMRD-OF aplicado al modelo longitudinal del F-16 ante cambios en los parámetros de la planta .....	93
7. Conclusiones y trabajo futuro .....	97
Bibliografía .....	99

## Índice de Tablas

Tabla 2.1: Resumen de modelos de error y leyes de ajuste para sistemas adaptivos .....	9
Tabla 3.1: Condiciones de operación del Cessna 182 en vuelo recto y nivelado.....	22
Tabla 3.2: Coeficientes derivativos del Cessna 182.....	22
Tabla 6.1: Detalles de la implementación del CAMRD y CAMRD-OF.....	61
Tabla 6.2: Funcional de costo $J_{norm}$ para el control CAMRD y CAMRD-OF para diversos ordenes de derivación $\alpha$ y ganancia de convergencia adaptiva $\gamma = 1$ .....	63
Tabla 6.3: Funcional de costo $J_{norm}$ optimizada por PSO para control CAMRD y CAMRD-OF. .....	64
Tabla 6.4: Funcional de costo $J_{norm}$ con optimización completa por PSO para el control CAMRD y CAMRD-OF. ....	71
Tabla 6.5: Detalles de la implementación del CAMRD y CAMRD-OF Generalizada ( $n \geq 2$ ) .	74
Tabla 6.6: Funcional de costo $J_{norm}$ para los controladores CAMRD y CAMRD-OF generalizados y no generalizados. ....	79
Tabla 6.7: Funcional de costo $J_{norm}$ para los controladores CAMRD y CAMRD-OF generalizados y no generalizados. ....	79
Tabla 6.8: Detalles de la implementación del CAMRD y CAMRD-OF ( $n = 1$ ).....	89
Tabla 6.9: Funcional de costo $J$ para los controladores CAMRD y CAMRD-OF de grado relativo $n$ * igual a 1. ....	91
Tabla 6.10: Funcional de costo $J$ para los controladores CAMRD y CAMRD-OF de grado relativo $n$ * igual a 1 incluido $\alpha \in (0,2)$ .....	93



## Índice de Figuras

Figura 2.1: Esquema de controlador adaptable por modelo de referencia. ....	7
Figura 3.1: Sistema de ejes considerados para una aeronave en vuelo. ....	11
Figura 3.2: Caracterización de cada componente vectorial con respecto a los ejes XYZ (Figura subida del libro Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls de Jon Roskam).....	13
Figura 3.3: Orientación de la aeronave con respecto a los ángulos de Euler. ....	15
Figura 3.4: Ejemplo de una condición de vuelo perturbado rectilíneo.....	17
Figura 3.5: Ángulos fundamentales del movimiento longitudinal de una aeronave (figura subida por Baron Johnson y modificada por mi autoría). ....	19
Figura 4.1: Estructura del caso general del controlador adaptivo directo (CAMRD) de grado relativo $n^* = 1$ . ....	31
Figura 4.2: Diagrama en bloques del error de salida en el caso de CAMRD cuyo grado relativo es $n^* = 1$ .....	31
Figura 4.3: Diagrama en bloques de la entrada de control modificada para el caso en que la planta presente un grado relativo $n^* = 2$ . ....	32
Figura 4.4: Estructura modificada del controlador adaptivo directo (CAMRD) para el caso particular de grado relativo $n^* = 2$ . ....	34
Figura 4.5: Diagrama en bloques del error de salida en el caso de CAMRD cuyo grado relativo es $n^* = 2$ .....	34
Figura 5.1: Diagrama en bloques del controlador CAMRD.....	45
Figura 6.1: Respuesta al escalón unitario de la planta en lazo abierto. ....	60
Figura 6.2: Ángulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF para diversos ordenes de derivación $\alpha$ .....	62
Figura 6.3: Ángulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF para diversos ordenes de derivación $\alpha$ durante el período transiente de la respuesta. ....	62
Figura 6.4: Ángulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF para diversos ordenes de derivación $\alpha$ cercano al estado estacionario de la respuesta. ....	63
Figura 6.5: Ángulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD optimizados. ....	65
Figura 6.6: Ángulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF CAMRD optimizados durante el período transiente. ....	65
Figura 6.7: Esfuerzo de control $\delta e(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD optimizados.....	66
Figura 6.8: Esfuerzo de control $\delta e(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD optimizados en el período transiente. ....	66
Figura 6.9: Evolución de la función objetivo o funcional de costo $J_{norm}$ a medida que aumenta el número de iteraciones usando PSO y CAMRD-OF. ....	67
Figura 6.10: Evolución de la función objetivo o funcional de costo $J_{norm}$ a medida que aumenta el número de iteraciones usando PSO y CAMRD.....	68
Figura 6.11: Ángulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD con optimización exhaustiva. ....	69
Figura 6.12: Ángulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD con optimización exhaustiva durante el período transiente de la respuesta.....	69
Figura 6.13: Esfuerzo de control $\delta e(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD con optimización exhaustiva. ....	70

Figura 6.14: Esfuerzo de control $\delta e(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD con optimización exhaustiva en el período transiente.....	70
Figura 6.15: Función objetivo en cada iteración para el caso CAMRD-OF en que el orden de derivación del parámetro $\alpha \in (0,2)$ . ....	71
Figura 6.16: Estructura del controlador adaptivo directo (CAMRD) generalizado para el caso en que el grado relativo de la planta es $n \geq 2$ . ....	72
Figura 6.17: Angulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD generalizados.....	75
Figura 6.18: Angulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF CAMRD generalizados durante el período transiente. ....	75
Figura 6.19: Esfuerzo de control $\delta e(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD generalizado.....	76
Figura 6.20: Esfuerzo de control $\delta e(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD generalizado en el período transiente. ....	76
Figura 6.21: Ángulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD.....	77
Figura 6.22: Zoom ángulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD en parte del período transiente. ....	77
Figura 6.23: Esfuerzo de control $\delta e(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD. ....	78
Figura 6.24: Zoom esfuerzo de control $\delta e(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD en el período transiente.....	78
Figura 6.25: Angulo de cabeceo $\theta(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD-OF-Generalizado... ..	80
Figura 6.26: Angulo de cabeceo $\theta(t)$ en parte del transiente con control CAMRD-OF y CAMRD-OF-Generalizado. ....	81
Figura 6.27: Esfuerzo de control $\delta e(t)$ con control CAMRD-OF y CAMRD en el período transiente.....	81
Figura 6.28: Oscilaciones de período corto y largo o fugoide (Figura subida del libro Aircraft Design de Ajoy Kumar).....	83
Figura 6.29: Angulo de cabeceo $\theta(t)$ ante cambio del parámetro constante del denominador. ....	83
Figura 6.30: Zoom de $\theta(t)$ ante cambio del parámetro constante del denominador. ....	84
Figura 6.31: Esfuerzo de control $u(t) = \delta e(t)$ ante cambio del parámetro constante del denominador. ....	84
Figura 6.32: Zoom del esfuerzo de control $u(t) = \delta e(t)$ ante cambio del parámetro constante del denominador. ....	85
Figura 6.33: Angulo de cabeceo $\theta(t)$ ante cambio del parámetro que acompaña a $s^2$ en el denominador. ....	86
Figura 6.34: Esfuerzo de control $u(t) = \delta e(t)$ ante cambio ante cambio del parámetro que acompaña a $s^2$ en el denominador.....	86
Figura 6.35: Zoom del esfuerzo de control $u(t) = \delta e(t)$ ante cambio ante cambio del parámetro que acompaña a $s^2$ en el denominador.....	87
Figura 6.36: Estructura del caso general del controlador adaptivo directo (CAMRD) de grado relativo $n = 1$ . ....	88
Figura 6.37: Funcional de costo para el caso optimizado con PSO del controlador CAMRD-OF. ....	90
Figura 6.38: Funcional de costo para el caso optimizado con PSO del controlador CAMRD. ....	90
Figura 6.39: Razón de cambio del ángulo de cabeceo $q(t) = \dot{\theta}(t)$ o pitch rate con control CAMRD y CAMRD-OF. ....	91
Figura 6.40: Esfuerzo de control $u(t) = \delta e(t)$ con control CAMRD y CAMRD-OF.....	92
Figura 6.41: Razón de cambio del ángulo de cabeceo $q(t) = \dot{\theta}(t)$ o pitch rate con control y CAMRD-OF con $\alpha \in (0,2)$ . ....	92
Figura 6.42: Pitch rate $q(t)$ ante cambio del parámetro constante del denominador. ....	93

Figura 6.43: Zoom del pitch rate $q(t)$ ante cambio del parámetro constante del denominador...	94
Figura 6.44: Esfuerzo de control $u(t) = \delta e(t)$ ante cambio del parámetro constante del denominador.....	94
Figura 6.45: Señales auxiliares del sistema de control fraccionario con $n^* = 2$ .....	95
Figura 6.46: Zoom de parte del periodo transiente de las señales auxiliares del sistema de control fraccionario con $n^* = 2$ .....	95
Figura 6.47: Señales auxiliares del sistema de control fraccionario con $n^* = 1$ .....	96

## 1. Introducción

El control longitudinal del ángulo de cabeceo (o actitud) de una aeronave tiene gran importancia en su dinámica de vuelo debido a que ésta, se ve expuesta constantemente a perturbaciones del aire como son los vórtices y ráfagas de viento, las cuales hacen que una aeronave se desvíe de su rumbo e inclusive pueda quedar en una condición peligrosa de inestabilidad. Más aún, una aeronave presenta incertidumbre en sus parámetros debido a las diversas condiciones de vuelo como son altitud y presión atmosférica, entre varias otras, haciendo aún más difícil el control.

En Fluidodinámica, es sabido que cualquier cuerpo en movimiento a través de un fluido experimenta fuerzas debidas a la interacción entre éste y el fluido, que dependen de la geometría del cuerpo y de las propiedades del fluido. Esencialmente, estas fuerzas constituyen una resistencia al movimiento del cuerpo. La posibilidad de vuelo de un avión depende de la utilización adecuada de un cuerpo, denominado perfil alar. Será la geometría del perfil, quien definirá en último término el sentido y dirección de las fuerzas que resultan al interactuar éste con el fluido, por tanto, el control automático de una aeronave es vital para mantener condiciones de vuelo seguras.

En este trabajo, se realiza una descripción de los conceptos de la aerodinámica, ecuaciones de vuelo, fuerzas, sensores, actuadores y planta que son necesarios para la representación del movimiento longitudinal de una aeronave. Luego se desarrolla un análisis y diseño de las estrategias de control aplicadas al modelo del avión (o aeronave) usando estrategias de control avanzado tales como el control adaptable por modelo de referencia directo de orden fraccionario (CAMRD-OF) aplicado al modelo longitudinal de la aeronave. Más aún, se establece teóricamente, la estabilidad de la implementación fraccionaria.

Los resultados preliminares del estudio del controlador CAMRD-OF muestran una mejoría respecto de su contraparte entera. En particular, la salida controlada o ángulo de cabeceo, presenta un seguimiento más cercano a la salida de modelo de referencia, con índices de desempeño tales como el IAE (Integral absolute error del inglés), ITAE (Integral time absolute error), ISE (Integral square error) e ISI (Integral square input) menores que aquellos obtenidos con CAMRD tradicional o CAMRD de orden entero.

En síntesis, el tema de esta Tesis consiste en la implementación de estrategias de control avanzado del tipo adaptivo por modelo de referencia directo de orden fraccionario o CAMRD-OF aplicadas al control de vuelo de una aeronave y la respectiva comparación con su contraparte de orden entero o clásica (CAMRD). Específicamente, aquella relacionada con el control del movimiento longitudinal del avión, controlando la actitud (ángulo de cabeceo) del avión a través de la superficie de control denominada elevador de cola. Para el caso del modelo de una aeronave civil, se utilizó como base de estudio, la aeronave Cessna-182 debido a su gran uso en la aviación civil como aeronave de entrenamiento e instrucción. En el caso de una aeronave de combate, se extendieron los resultados al caso de modelos de un avión caza multipropósito F-16 Fighting Falcon construido por la empresa Lockheed Martin Co., el cual es parte del arsenal aéreo de la Fuerza Aérea de Chile (FACH).

## **1.1. Motivación**

El control longitudinal de una aeronave es fundamental para una correcta y segura maniobra de ascenso o elevación. Por tal motivo es de vital importancia contar con sistemas de control cuyo desempeño sea el mejor posible en un sentido seguro y robusto. Existen diversos enfoques para llevar a cabo el control longitudinal, entre los que se cuentan tanto los enfoques clásicos (PID tradicional) como sistemas de control más avanzados tales como el control adaptivo con todas sus variantes (directo, indirecto y combinado, principalmente).

Por otra parte, en la actualidad existen diversos trabajos de investigación que sugieren las bondades de los controladores de orden fraccionario, en cuanto a mejorar el desempeño de los controladores clásicos, como es el caso de los PID-OF [6,7, 8], e incluso, ser comparables, en algunos casos, con controladores avanzados tales como los adaptivos [4]. Por tal motivo, se desea estudiar el desempeño de controladores avanzados de orden fraccionario, para cuantificar las mejoras en el desempeño que puedan existir frente a los controles avanzados de orden entero actualmente en funcionamiento para el control longitudinal de una aeronave, como es el control adaptivo por modelo de referencia CAMR [1, 2, 3, 13, 16].

## **1.2. Descripción del problema general**

El problema fundamental que este trabajo pretende resolver es el desarrollo de controladores adaptivos de orden fraccionario, que exhiban ventajas respecto de los controladores clásicos usados en la actualidad para el control del ángulo de cabeceo de aeronaves.

Una de las muchas tareas de los pilotos es mantener una actitud específica, es decir, lograr un vuelo recto horizontal, como también ascender o descender con un cierto grado respecto al Horizonte artificial. Como esta tarea requiere que el piloto sea diligente, la mayoría de los aviones sofisticados cuentan con un piloto automático de actitud que realiza esta labor. Con esto se logra:

- a) Relevar al piloto de la manipulación de los mandos disminuyendo las cargas que se desarrollan sobre el avión, mejorando así, la exactitud en la navegación.
- b) Volar el avión sin un control directo sobre las superficies de control longitudinal (timón de profundidad o elevador de cola).

## **1.3. Hipótesis de trabajo**

La hipótesis de trabajo en la que se basa esta propuesta de investigación es la siguiente:

Los esquemas que involucran controladores adaptables con leyes de ajuste basadas en ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, en un sistema de control longitudinal de una aeronave (control del ángulo de cabeceo), permite obtener resultados más ventajosos con respecto a los esquemas adaptivos no fraccionarios o clásicos. Además, los controladores de orden fraccionario presentan mejores prestaciones frente a perturbaciones externas y

variaciones paramétricas. Además, los controladores para plantas de grado relativo  $n^* = 2$  presentan mejor desempeño que los controladores generales diseñados para plantas cuyo grado relativo es  $n^* \geq 2$ .

## 1.4. Objetivos

### Objetivo general

- El objetivo general del presente trabajo es analizar, desarrollar y comparar, tanto a nivel teórico como a través de simulaciones numéricas, estrategias de control para mantener constante el ángulo de cabeceo de un avión (actitud), durante una trayectoria de vuelo determinada, a través del control del ángulo del elevador de cola. Este estudio se realizará mediante desarrollos teóricos y simulaciones computacionales de las estrategias de control adaptable por referencia a modelo directo (CAMRD) tanto entero como de orden fraccionario, utilizando, las derivadas e integrales comúnmente usadas como son las de Riemann- Louville y Caputo, para luego llevar a cabo un análisis comparativo entre ellas. Para ello se usaron herramientas recientemente desarrolladas en el Grupo de Control del Departamento de Ingeniería Eléctrica (DIE) de la Universidad de Chile, las cuales se han plasmado en publicaciones de impacto internacional.

### Objetivos específicos

- Analizar, desde el punto de vista analítico y de simulaciones, controladores adaptivos de orden fraccionario aplicado al control longitudinal de una aeronave civil como es el caso del avión Cessna-182 ampliamente utilizado como aeronave de instrucción, considerando órdenes de derivación e integración pertenecientes al intervalo  $0 < \alpha < 1$ .
- Determinar valores óptimos de los parámetros del controlador adaptivo fraccionario usando la técnica PSO (Particle Swarm Optimization) considerando diferentes órdenes de derivación  $\alpha$  y ganancias  $\gamma$  para cada ley de ajuste.
- Realizar un estudio comparativo de los controladores CAMRD y CAMRD-OF para cuantificar las mejoras obtenidas, medidas a través de índices de desempeño usualmente utilizados en los procesos de optimización.
- Extender los resultados obtenidos de los controladores adaptivos por referencia a modelo de orden fraccionario, y aplicarlos a aeronaves de mayores prestaciones como es el avión de combate F-16 construido por Lockheed Martin Co.
- Realizar un análisis de sensibilidad de los parámetros de los esquemas CAMRD fraccionarios propuestos, con el fin de determinar los valores óptimos de los parámetros

adaptables (ganancias, condiciones iniciales, etc.) y del orden de las derivadas para las leyes de ajuste que permitan obtener mejores resultados que con los esquemas CAMRD tradicionales.

- Realizar análisis de robustez de todos los controladores propuestos y verificar su comportamiento general frente a variaciones paramétricas y perturbaciones externas.

## 1.5. Contribuciones

Las contribuciones más destacadas de este trabajo de tesis son el desarrollo de controladores adaptivos de orden fraccionario nunca antes aplicado al control longitudinal de aeronaves los cuales presentan buenos resultados y similar o mejor comportamiento en algunos casos, ante variaciones paramétricas que los controladores adaptivos clásicos. Además, otra contribución importante de la tesis, es la constatación a nivel de simulación por ahora, que es más conveniente, en la medida que se pueda, implementar el esquema de control particular para el caso en que el grado relativo de la planta sea igual a 2 en vez de usar el esquema general de control adaptivo ( $n^* \geq 2$ ) el cual considera errores adicionales en su implementación. Esto se debe a que la salida de la planta  $y_p(t)$ , para el sistema general, presenta más oscilaciones en el transiente que para el caso de la implementación particular ( $n^* = 2$ ). En síntesis, si se debe controlar un sistema de grado relativo 2 o mayor, es conveniente aproximar la planta a un sistema de grado relativo 2 (en la medida de lo posible por supuesto) y aplicar la implementación fraccionaria propuesta en esta tesis. Finalmente, se ha contribuido a nivel teórico, con un nuevo lema (Lema 5) que permite relajar una hipótesis importante del Teorema 1 el cual es la base de análisis de estabilidad para el caso en que la planta es de orden entero pero la ley de ajuste es de orden fraccionaria. Además, se ha simplificado el Teorema 1 definiendo un nuevo corolario (Corolario 3) para el caso bajo estudio.

## 2. Estado del Arte

Para el desarrollo de la Tesis se hizo principal énfasis en la búsqueda de resultados recientes en WoS desde los años 1975 a 2022 de control longitudinal de orden fraccionario de aeronaves (aircraft longitudinal fractional control y longitudinal aircraft fractional order control) no encontrándose artículos de investigación al respecto. Además, se desarrolló una búsqueda de áreas relacionadas como es el control auto-sintonizado de orden fraccionario aplicados al control longitudinal de aeronaves o self-tuning fractional PID control (otra técnica de control adaptivo) y sólo aparecen 24 registros que están más bien ligados al control de sistemas de potencia y energías renovables, y otros en combinación con lógica difusa aplicados a manipuladores robóticos principalmente, pero no a control longitudinal de aeronaves.

En [12], se estudia el control de aterrizaje de un avión caza F-18 sobre un portaaviones basado en un controlador PID con un sistema activo de rechazo de perturbaciones (ARD por sus siglas en inglés). En [13] se diseña un controlador LQR basado en algoritmos genéticos para el control longitudinal de un avión caza F-16 para diferentes regímenes de vuelo. En [22] se analiza el control longitudinal de un bombardero B-1 usando un enfoque de control multivariable óptimo [23, 24, 25] del tipo LQG/LTR basado en un observador adaptivo [29, 30].

En [1, 2] se estudia el control PID clásico a una aeronave Cessna 182 cuyo control, servirá como base de comparación con las técnicas de control adaptivo de orden fraccionario a desarrollar en esta Tesis. También, en [3, 10] se estudia el control longitudinal de un avión caza F-16 Falcon Figther aplicando técnicas de control avanzado como es el control adaptivo por referencia a modelo en su variante combinado (CAMRC) el cual también servirá como base de comparación para una extensión de las técnicas de control avanzado, pero de orden fraccionario (CAMRD-OF).

En [12] se estudia el control longitudinal del tipo backstepping aplicado a un avión de aerodelismo X-plane similar al NexStar de alas rectangulares. En [13] se estudia el control longitudinal y lateral de vehículos no tripulados como helicópteros. El enfoque de control es del tipo adaptivo basado en una continua linealización de diferentes puntos de operación de la aeronave para luego aplicar el control adaptivo por referencia a modelo o CAMR.

En [14, 15] también se usa un controlador no lineal del tipo adaptivo el cual elimina las oscilaciones de alta frecuencia por medio de un filtro pasabajos denominado Control Adaptivo L1. Además, se han estudiado otros enfoques de control longitudinal a nivel de simulación, como son el control no lineal por modos deslizantes [17] y en el dominio de la frecuencia, el control Quantitative Feedback Theory (QFT) [18] aplicado al control del pitch rate del modelo de una aeronave de combate avanzada para dos puntos de operación o estados de vuelo constantes como son a nivel del mar y a 33.000 pies aproximadamente a una velocidad de 0,7 Mach. Este tipo de control es similar al tipo  $H_\infty$ . Además, se realiza una comparación con dicho control  $H_\infty$ , mostrando algunas ventajas del QFT sobre  $H_\infty$ .

En [32] se aplica control estabilizante a la razón de cambio del ángulo de cabeceo  $\dot{\theta}(t)$  (ó razón de cambio del pitch angle) de un avión de combate que, por su naturaleza, es inherentemente inestable para mejorar maniobrabilidad en el caso que tenga que evadir un misil o en el combate aire-aire (ó dog figth del acrónimo en inglés). Este control combina varias técnicas, las cuales consideran la realimentación del estado, control integral en la trayectoria directa y un filtro de prealimentación para reducir el sobrepaso.

En [55] se aplica control longitudinal al ángulo de cabeceo de un avión de combate F-15 usando control adaptivo por modelo de referencia, pero lo único fraccionario, es la función de transferencia, no obstante, las leyes de ajuste siguen siendo enteras a diferencia de esta Tesis.



Finalmente, en [33] se utiliza una combinación de control  $H_\infty$  y control óptimo (LQG) para llevar a cabo el control longitudinal de una aeronave de combate del tipo Grippen sueco (ala pequeña anterior al ala principal).

En resumen, varios estudios se han llevado a cabo para el control longitudinal de aeronaves, sin embargo, en ningún caso aplican el enfoque propuesto en esta Tesis. Es así, como esta Tesis pretende llenar el vacío existente, basando las estrategias de control longitudinal de aeronaves, con el nuevo enfoque del control que hace uso de los conceptos del cálculo fraccionario aplicado a los algoritmos de control avanzados.

De esta manera, se pretende dotar al controlador con un mayor número de grados de libertad permitiendo eventualmente, una mejora considerable en las características de desempeño frente a sus contrapartes enteras como se muestran en el análisis a nivel de simulación de la Sección 6 (Simulaciones y análisis de resultados). En esta sección se compara el desempeño del control longitudinal de un avión Cessna 182 usando un CAMR clásico [1,2] versus su contraparte de orden fraccionario (CAMR-OF). El objetivo como siempre en cualquier sistema de control es que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y_p(t) - y_m(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (2.1)$$

En que  $y_p(t)$  es la salida de la planta que se desea controlar e  $y_m(t)$  es la salida del modelo de referencia que se desea seguir en el caso del control adaptivo.

## 2.1. Conceptos generales del control adaptable.

En términos generales, un sistema de control adaptable es aquel que se aplica cuando existe desconocimiento de la planta como por ejemplo parámetros parcialmente desconocidos [4]. En el caso de las aeronaves, el desconocimiento parcial del sistema se debe a que los parámetros cinéticos son inciertos, varían con el tiempo y están sometidos a perturbaciones externas sobre la aeronave. Por esta razón, el control adaptable permite obtener mejores resultados que si se utilizaran técnicas de control convencionales, debido a la capacidad del controlador de adaptarse frente a incertezas.

Entre los esquemas más populares del control adaptable, se encuentra el control adaptable por modelo de referencia (MRAC, por sus siglas en inglés) [4].

En el esquema de la de la Figura 2.1 se tiene la planta cuya salida es  $y_p(t)$  y un modelo de referencia cuya salida es  $y_m(t)$ . El objetivo del CAMR es determinar los parámetros ajustables del controlador  $\{\theta(t), k(t)\}$ , de forma tal que para una entrada de referencia  $r(t)$  y una señal de control convenientemente diseñada  $u(t)$ , el error  $e(t)$  entre la salida de la planta  $y_p(t)$  y la salida del modelo  $y_m(t)$  converja a cero.

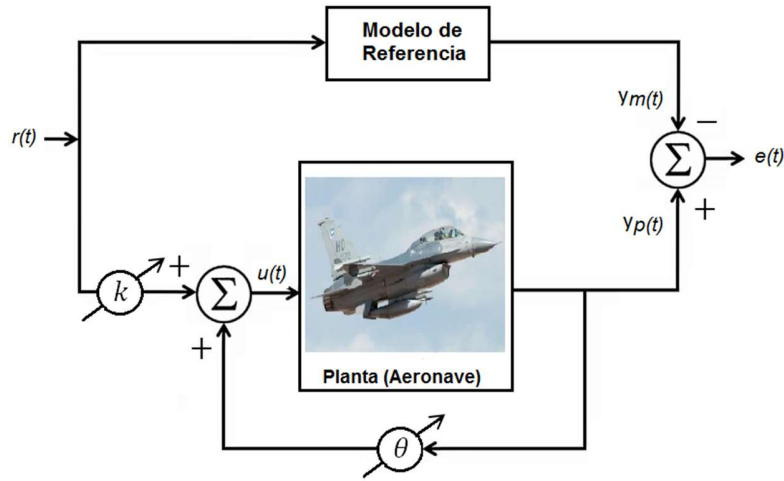


Figura 2.1: Esquema de controlador adaptable por modelo de referencia.

Según [4], para que el CAMR tenga solución en el caso lineal, es necesario que se cumplan las siguientes hipótesis:

- Conocimiento del signo de la ganancia de alta frecuencia de la planta.
- Conocimiento del grado relativo de la planta.
- Conocimiento del orden (o de una cota superior) de la planta.
- Que los ceros de la planta sean estables.

Hoy en día existen métodos para relajar las hipótesis, los cuales le añaden un nivel de complejidad mayor a la solución básica, pero permiten resolver el CAMR con menos restricciones [4].

Dentro del CAMR, existen varios enfoques de diseño, donde se pueden mencionar el control adaptivo directo, control indirecto con enfoque algebraico, control indirecto con enfoque dinámico y el control adaptivo combinado [4, 28, 29, 30, 31].

El enfoque directo es uno de los más utilizados y es aquel donde se considera que los parámetros desconocidos del controlador se ajustan a partir del error de control, sin estimar ningún parámetro de la planta.

A modo de ejemplo, para el caso particular de una planta lineal de primer orden del tipo

$$\dot{y}_p(t) = -a_p y_p(t) + k_p u(t), \quad (2.2)$$

con  $a_p, k_p \in \mathfrak{R}$  constantes desconocidas,  $y_p(\cdot): [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $u(\cdot): [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ , y un modelo de referencia lineal también de primer orden de la forma

$$\dot{y}_m(t) = -a_m y_m(t) + b_m r(t), \quad (2.3)$$

con  $a_m, b_m \in \mathfrak{R}$  constantes conocidas con  $a_m > 0$ ,  $x_m(\cdot): [t_o, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  y  $r(\cdot): [t_o, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  una referencia acotada y continua por tramos, el problema consiste en aplicar una señal de control al sistema de la ecuación (14) de la forma

$$u(t) = \theta(t)y_p(t) + kr(t). \quad (2.4)$$

cuyos parámetros deben ajustarse. Notar que si  $a_p$  y  $k_p$  son conocidas, entonces

$$\theta^* = \frac{-a_m + a_p}{k_p}, \quad (2.5)$$

$$k^* = \frac{b_m}{k_p}. \quad (2.6)$$

son los parámetros ideales del controlador.

La solución de este problema conduce al denominado Modelo de Error 2 definido como

$$\dot{e}_2(t) = -a_m e_2(t) + k_p \phi_\theta(t) y_p(t) + k_p \phi_k(t) r(t), \quad (2.7)$$

donde  $\phi_\theta = \theta - \theta^*$  y  $\phi_k = k - k^*$ .

Los errores paramétricos  $\phi_\theta$  y  $\phi_k$  se ajustan a partir del conocimiento de la entrada  $r(t)$ , la salida  $y_p(t)$  y el error de control  $e_2(t)$ , de tal forma que  $\phi(t)$  tienda a cero, es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ . En general, las leyes de ajuste de los parámetros se basan en ecuaciones diferenciales generadas mediante el empleo de funciones de Lyapunov y tienen la forma

$$\dot{\theta}(t) = -\text{sgn}(k_p) e_2(t) y_p(t), \quad (2.8)$$

$$\dot{k}(t) = -\text{sgn}(k_p) e_2(t) r(t). \quad (2.9)$$

Sin embargo, existen otros modelos de error debido a que existen diferentes formulaciones de problemas que conllevan a la elección de diferentes leyes de ajuste y por ende, a diferentes modelos de error.

En la Tabla 2.1 se presentan en forma sucinta, los modelos de error que aparecen comúnmente en problemas de control adaptivo.

Tabla 2.1: Resumen de modelos de error y leyes de ajuste para sistemas adaptivos

Modelos de error	Ecuación de error	Ley de Ajuste
Modelo 1	$\dot{e}_1(t) = \phi^T(t)\omega(t)$	$\dot{\phi}(t) = -\gamma e_1(t)\omega(t)$
Modelo 2	$\dot{e}_2(t) = Ae_2 + b\phi^T(t)\omega(t)$	$\dot{\phi}(t) = -\gamma e_2^T(t)Pb\omega(t)$
Modelo 3	$\dot{e}_3(t) = A(t)e_3(t) + b\phi^T(t)\omega(t)$ $\dot{e}_4(t) = h^T e_3(t)$	$\dot{\phi}(t) = -\gamma e_4(t)\omega(t)$
Modelo 4	$\varepsilon_4(t) = e_5(t) + e_6(t)$ $\dot{e}_5(t) = W(s)\phi^T(t)\omega(t)$ $\dot{e}_6(t) = \phi^T(t)W(s)I - W(s)\phi^T(t)\omega(t) + \delta(t)$	$\dot{\phi}(t) = -\frac{\varepsilon_4(t)\zeta(t)}{1 + \zeta^T(t)\zeta(t)}$ $\zeta(t) = W(s)I \omega(t)$

En esta tabla,  $\omega(t)$  representa el vector de entradas supuestamente conocido,  $\gamma$  es una ganancia adaptiva que puede ser constante o variante en el tiempo,  $W(s)$  es una función de transferencia conocida y asintóticamente estable. El parámetro  $\delta(t)$  es un término desconocido pero que decrece exponencialmente con el tiempo.

## 2.2. Conceptos generales de cálculo fraccionario.

El cálculo fraccionario es una disciplina matemática que estudia las derivadas e integrales de orden real o incluso complejo. En la actualidad el cálculo fraccionario se aplica en modelación y control en áreas tales como las redes eléctricas, la teoría del caos y fractales, la electrónica y la identificación de sistemas, entre otras [5].

Existen varios operadores de derivadas e integrales fraccionarias. En el dominio del tiempo, dichos operadores se definen por la operación de convolución de funciones, por lo que están especialmente destinados a describir fenómenos con memoria. En el caso del dominio de Laplace, las operaciones corresponden al operador  $s^\alpha$  con  $\alpha \in \mathfrak{R}$ .

Entre las integrales fraccionarias más utilizadas podemos mencionar la integral fraccionaria según Riemann-Liouville, y entre las derivadas fraccionarias podemos mencionar las derivadas fraccionarias según Riemann- Liouville y la de Caputo, entre muchas otras.

### 2.2.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

De acuerdo a [5] la integral de Riemann-Liouville se define de la siguiente manera. Sea  $\Omega = [a, b](-\infty < a < b < \infty)$  un intervalo finito en el eje real. La integral de orden  $\alpha \in \mathbb{C}(\text{Re}(\alpha) > 0)$  se define de la siguiente forma

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > a, \text{Re}(\alpha) > 0, \quad (2.10)$$

donde  $\Gamma(\alpha)$  es la función gamma definida como

$$I_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t < b, \mathcal{R}e(\alpha) > 0, \quad (2.11)$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad (2.12)$$

### 2.2.2. Derivada fraccionaria según Riemann-Liouville.

La derivada de orden  $\alpha \in \mathbb{C}(\mathcal{R}e(\alpha) > 0)$  se define de la siguiente forma [5]:

$${}^R D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad t > a, n-1 < \alpha < n, \quad (2.13)$$

$$n \in \mathbb{Z}^+.$$

$${}^R D_{b-}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad t < b, n-1 < \alpha < n, \quad (2.14)$$

$$n \in \mathbb{Z}^+.$$

### 2.3.3. Derivada fraccionaria según Caputo.

La derivada, según Caputo, de orden  $\alpha \in \mathbb{C}(\mathcal{R}e(\alpha) > 0)$  se define de la siguiente forma [5]:

$${}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad t > a, n-1 < \alpha < n, \quad (2.15)$$

$$n \in \mathbb{Z}^+,$$

$${}^C D_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{-1^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^n(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad t < b, n-1 < \alpha < n, \quad (2.16)$$

$$n \in \mathbb{Z}^+.$$

### 3. Modelación de la dinámica de una aeronave.

A continuación, se presenta el modelo matemático general de la dinámica de una aeronave, el cual ha sido estudiado por varios autores quedando bien establecidas sus ecuaciones que relacionan las fuerzas y momentos con las variables cinemáticas de interés, las cuales representan un sistema de ecuaciones no lineales. Sin embargo, el presente trabajo, se enfocará en el desarrollo, análisis y diseño de las estrategias de control aplicadas al movimiento longitudinal de aeronaves, es decir, al movimiento en el eje solidario al fuselaje o eje x y la rotación respecto del eje lateral y (ángulo y velocidad angular de cabeceo).

En el Anexo I de [1] se encuentra una introducción a los términos aerodinámicos que se ocupan en el desarrollo de esta Tesis, que, sin ser muy extenso, trata de cubrir los mínimos conocimientos físicos que están relacionados durante el modelamiento de la aeronave.

La dinámica de un avión puede ser descrita de diferentes formas. Varios autores han derivado diferentes modelos para aeronaves [1,2,3,7,8,10,13,18]. Un avión en vuelo es un sistema de seis grados de libertad. Las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de una aeronave son 3 ecuaciones de fuerza, 3 ecuaciones de cantidad de movimiento y una séptima ecuación que relaciona la energía cinética [13].

Es importante mencionar que, para todos los efectos prácticos, el centro de gravedad (CG) y el centro de masa (CM) de la aeronave, coinciden bajo el supuesto que la gravedad no cambia a lo largo de todo el cuerpo de la aeronave. Así entonces, si consideramos un sistema de coordenadas de ejes perpendiculares (XYZ) cuyo origen es el centro de gravedad de la aeronave (o punto P de la Figura 3.1), solidarios al cuerpo de la aeronave que giran con velocidad angular  $\vec{\omega}$  como se muestra en la Figura 3.1, las ecuaciones que describen el movimiento son,

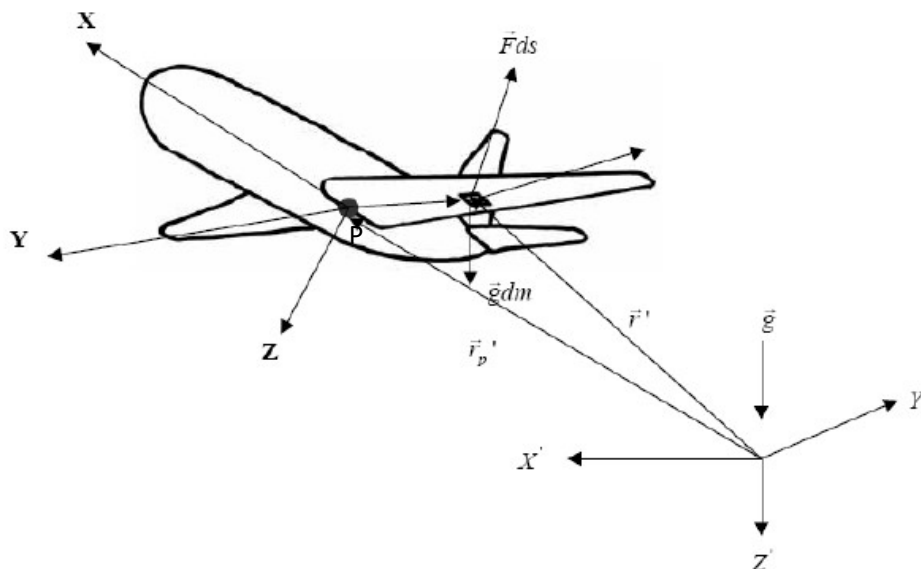


Figura 3.1: Sistema de ejes considerados para una aeronave en vuelo.

$$\vec{F} = m \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{V} \right) \quad (2.17)$$

en que  $\vec{V}$  es la velocidad del centro de masa con respecto a los ejes de rotación y  $m$  representa la masa del cuerpo. Además, la ecuación de momento es

$$\vec{M} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (2.18)$$

donde  $\vec{H}$  representa el momento cinético del cuerpo con respecto a los ejes rotatorios fijos a la aeronave.

### 3.1. Sistema de coordenadas

Las ecuaciones (2.17) y (2.18) pueden tomar formas explícitas diferentes según sea el sistema de coordenadas que se use. Entre los sistemas ortogonales más usados para simular el avión en el computador consideraremos: ejes relativos a la tierra o ejes terrestres (sistema de ejes X'Y'Z'), y ejes relativos al cuerpo o ejes móviles (sistema de ejes XYZ) como se muestran en la Figura 3.1.

Lo importante que se ha considerado al elegir los ejes terrestres es que sean válidas las leyes de Movimiento de Newton. En [57] se muestra que es despreciable la velocidad de rotación de la tierra en aviones subsónicos y supersónicos, pero no así en vehículos hipersónicos (el cual no es el caso de las aeronaves estudiadas en esta Tesis).

En la Figura 3.1 se define un elemento diferencial de masa continuo,  $dm$ . La ubicación de este elemento de masa continuo esta descrito por un vector  $\vec{r}'$ , que tiene su origen en el CG o CM del sistema de ejes X'Y'Z' solidario a la Tierra. En el caso de aviones rígidos este elemento de masa mantiene la distancia relativa con otros elementos de masa, no así para elementos de masa que son parte de máquinas rotatorias como compresores, turbinas, etc. Cada elemento de masa está sujeto a la aceleración de gravedad,  $\vec{g}$ . Este vector se asume orientado a lo largo del eje positivo Z'. Como consecuencia una fuerza  $\zeta_A \cdot \vec{g} \cdot dv = \vec{g} \cdot dm$  actúa en cada elemento de masa. La cantidad  $\zeta_A$  representa la densidad de masa local del avión y  $dv$  el volumen diferencial del elemento de masa  $dm$ .

También, otros elementos de masa localizados en la superficie del avión son sujetos a la combinación de fuerzas aerodinámicas y fuerzas de empuje por unidad de área ( $\vec{F}$ ).

Los sistemas ortogonales más utilizados para describir el comportamiento del avión son los ejes terrestres (sistema de coordenadas X'Y'Z' fijos a la tierra) y los ejes de rotación solidarios a la aeronave (sistema de coordenadas XYZ) o ejes cuerpo, también representados con el subíndice  $b$  correspondiente a la palabra body del inglés (X<sub>b</sub>Y<sub>b</sub>Z<sub>b</sub>). Supondremos que la masa total de la aeronave y la distribución de masa, permanecen constantes. Esta es una suposición razonable para la masa que cambia menos del cinco por ciento dentro de los primeros 30 a 60 segundos de vuelo, con respecto al consumo de combustible.

Luego, aplicando la segunda ley de Newton al perfil de un ala sobre los ejes de rotación no inerciales XYZ solidarios a la aeronave (Figura 3.1), se puede luego, caracterizar cada componente del vector en dicho sistema de ejes de coordenadas (como se muestra en la Figura 3.2).

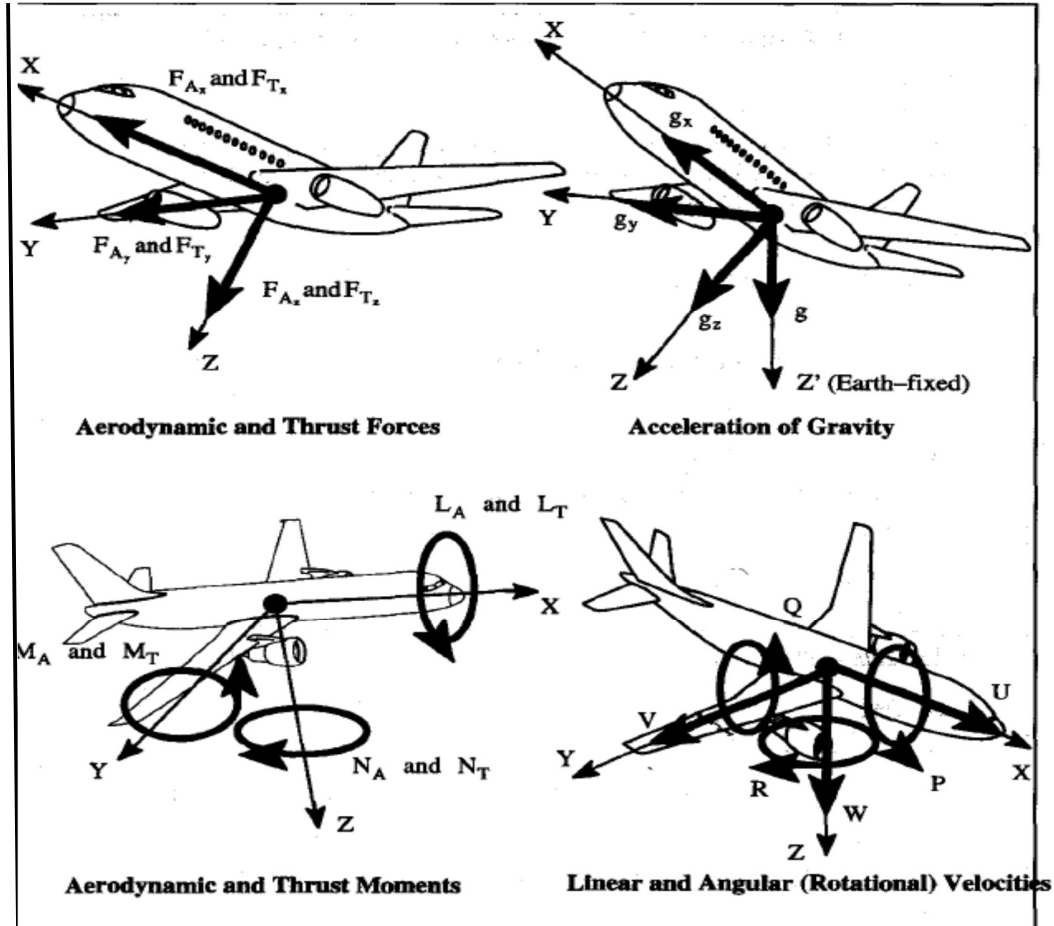


Figura 3.2: Caracterización de cada componente vectorial con respecto a los ejes XYZ (Figura subida del libro *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls* de Jon Roskam).

Notar que los productos de inercia  $I_{xy} = I_{yz} = 0$ , debido a la simetría de la aeronave en el plano XZ. Luego, se obtienen las siguientes ecuaciones de momento lineal y angular [13].

- Ecuaciones escalares del momento lineal

$$m(\dot{U} - VR + WQ) = mg_x + F_{Ax} + F_{Tx}$$

$$m(\dot{Y} - UR + WP) = mg_y + F_{Ay} + F_{Ty}$$

$$m(\dot{W} - UQ + VP) = mg_z + F_{Az} + F_{Tz}$$



- Ecuaciones escalares del momento angular

$$\begin{aligned}\dot{P}I_{xx} - \dot{R}I_{xz} - I_{xz}PQ + (I_{zz} - I_{yy})RQ &= L_A + L_T \\ \dot{Q}I_{yy} + (I_{xx} - I_{zz})PR + I_{xz}(P^2 - R^2) &= M_A + M_T \\ \dot{R}I_{zz} - \dot{P}I_{xz} + (I_{yy} - I_{xx})PQ + I_{xz}QR &= N_A + N_T\end{aligned}$$

donde  $I_{ij}$  representa el producto de inercia respecto de los ejes  $ij$ .

Las fuerzas, momentos y velocidades de la aeronave en cada eje XYZ se definen como,

- **Fuerzas**

Componentes de las fuerzas aerodinámicas: Fuerzas de arrastre longitudinal, lateral y sustentación respectivamente.

$$\vec{F}_A = F_{A_x}\hat{i} + F_{A_y}\hat{j} + F_{A_z}\hat{k}$$

Componentes de las fuerzas de empuje longitudinal, lateral y sustentación respectivamente.

$$\vec{F}_T = F_{T_x}\hat{i} + F_{T_y}\hat{j} + F_{T_z}\hat{k}$$

Componentes de la aceleración gravitacional

$$\vec{g} = g_x\hat{i} + g_y\hat{j} + g_z\hat{k}$$

- **Momentos**

Componentes de los momentos aerodinámicos: momentos de alabeo (o roll del inglés), cabeceo (pitch del inglés) and guiñada (o yaw del inglés) respectivamente.

$$\vec{M}_A = L_A\hat{i} + M_A\hat{j} + N_A\hat{k}$$

Componentes de los momentos de empuje: momentos de alabeo (o roll del inglés), cabeceo (pitch del inglés) and guiñada (o yaw del inglés) respectivamente.

$$\vec{M}_T = L_T\hat{i} + M_T\hat{j} + N_T\hat{k}$$

- **Velocidades**

Componentes de la velocidad angular: razones de cambio de alabeo (roll rate), cabeceo (pitch rate) and guiñada (yaw rate) respectivamente.

$$\vec{\omega} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$$

Componentes de la velocidad lineal: velocidades hacia adelante, lateral y hacia abajo respectivamente.

$$\vec{V}_p = U\hat{i} + V\hat{j} + W\hat{k}$$

- **Distancia (o Posición)**

Componente para la posición a cada elemento de masa local de la aeronave respecto de su centro de gravedad.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

### 3.2. Ejes relativos a la tierra (X'Y'Z') y ejes relativos al cuerpo (XYZ)

Para definir la orientación del avión relativo al sistema de ejes terrestres X'Y'Z', es suficiente definir la orientación del avión con respecto a los ejes relativos del cuerpo XYZ. Para esto trasladamos paralelamente el eje X'Y'Z' al centro de masa del avión o punto P y lo renombramos como ejes X<sub>1</sub>Y<sub>1</sub>Z<sub>1</sub>. Sobre él, se precisan 3 rotaciones sucesivas a través de los ángulos de Euler  $\psi$ ,  $\theta$  y  $\phi$  (Ver Figura 3.3). La primera transformación consiste en hacer girar el sistema de ejes de coordenadas X<sub>1</sub>Y<sub>1</sub>Z<sub>1</sub> alrededor del eje Z<sub>1</sub>, dando un ángulo  $\psi$  denominado ángulo de guiñada. Este sistema, renombrado como X<sub>2</sub>Y<sub>2</sub>Z<sub>2</sub>, es luego rotado alrededor del eje Y<sub>2</sub>, dando un ángulo  $\theta$  llamado ángulo de actitud de cabeceo. Este nuevo sistema, renombrado como X<sub>3</sub>Y<sub>3</sub>Z<sub>3</sub>, se gira alrededor del eje X<sub>3</sub>, dando un ángulo  $\phi$  llamado ángulo de balanceo. Del estudio de la curva de vuelo del avión relativo a los ejes terrestres, se obtienen las ecuaciones cinemáticas del avión, descritas según los ángulos de Euler [11].

$$\dot{\phi} = P + Q \sin \phi \tan \theta + R \cos \phi \tan \theta$$

$$\dot{\theta} = Q \cos \phi - R \sin \phi$$

$$\dot{\psi} = (Q \sin \phi + R \cos \phi) \sec \theta$$

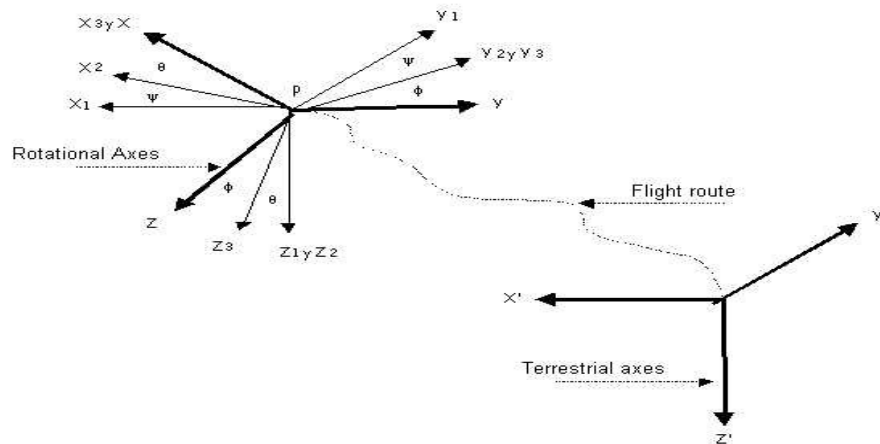


Figura 3.3: Orientación de la aeronave con respecto a los ángulos de Euler.

### 3.3. Modelo de perturbación o linealizado de la aeronave

Los 2 tipos de condiciones de vuelo más estudiados son:

- a) Condición de vuelo de estado estable.
- b) Condición de vuelo de estado perturbado.

- **Condición de vuelo de estado estable.**

La condición de vuelo estado estable se puede definir como una condición para el cual todas las variables de movimiento permanecen constantes en el tiempo relativas al sistema de coordenadas XYZ (solidarias al cuerpo del avión). Matemáticamente esto significa:

$$\dot{\vec{V}}_p = 0 \text{ y } \dot{\vec{\omega}} = 0$$

Existen 3 condiciones típicas de vuelo de estado estable, a saber,

- a.1) Vuelo recto y nivelado.
- a.2) Viraje coordinado.
- a.3) Ascenso y descenso.

La condición de vuelo de estado estable es válida para aquellas condiciones en que la densidad atmosférica es constante, es decir, donde la altura es constante. Se ha estudiado que, durante los primeros sesenta segundos de una perturbación pequeña en la densidad atmosférica, esta no varía más de cinco por ciento, motivo por el cual, es aceptable considerar las 3 condiciones de vuelo anteriores como condiciones de vuelo estables.

En esta Tesis, se abordará principalmente la condición de vuelo recto y nivelado y las perturbaciones relativas a dicho estado, la cual es la condición prevalente de las aeronaves.

- **Condición de vuelo perturbado**

Un estado de vuelo perturbado se puede definir como uno para el cual todas las variables de movimiento se pueden definir relativas a la condición de vuelo de estado estable, es decir, cada variable de movimiento se puede definir como la suma de una cantidad de variable estable más una cantidad de variable perturbada (Ver Figura 3.4).

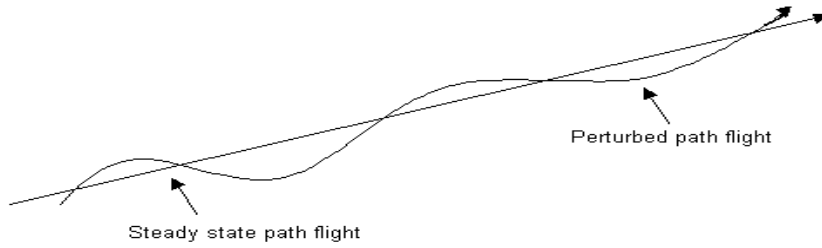


Figura 3.4: Ejemplo de una condición de vuelo perturbado rectilíneo.

Para el caso de este estudio, solo interesa estudiar la condición de vuelo de estado perturbado o linealizado en torno del estado estable de vuelo recto y nivelado, motivo por el cual, a cada variable del sistema de ecuaciones que describen el comportamiento general del avión y a cada fuerza aerodinámica como a los momentos aerodinámicos, los redefiniremos como *variables perturbadas* de la siguiente manera:

- Variables de movimiento

$$\begin{aligned}
 U &= U_1 + u & V &= V_1 + v & W &= W_1 + w \\
 P &= P_1 + p & Q &= Q_1 + q & R &= R_1 + r \\
 \psi &= \psi_1 + \psi & \theta &= \theta_1 + \theta & \phi &= \phi_1 + \phi
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

- Fuerzas

$$\begin{aligned}
 F_{A_X} &= F_{A_{X_1}} + f_{A_X} & F_{A_Y} &= F_{A_{Y_1}} + f_{A_Y} & F_{A_Z} &= F_{A_{Z_1}} + f_{A_Z} \\
 F_{T_X} &= F_{T_{X_1}} + f_{T_X} & F_{T_Y} &= F_{T_{Y_1}} + f_{T_Y} & F_{T_Z} &= F_{T_{Z_1}} + f_{T_Z}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

- Momentos

$$\begin{aligned}
 L_A &= L_{A_1} + l_A & M_A &= M_{A_1} + m_A & N_A &= N_{A_1} + n_A \\
 L_T &= L_{T_1} + l_T & M_T &= M_{T_1} + m_T & N_T &= N_{T_1} + n_T
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

El subíndice 1 indica la condición de estado estacionario estable, las letras mayúsculas indican el valor de las variables en estado perturbado y las minúsculas corresponden a la perturbación. Para obtener un modelo adecuado del comportamiento dinámico de la aeronave, se introducirán las siguientes suposiciones:

1. Las perturbaciones realizadas sobre los ángulos de Euler son aceptables para el estudio dinámico del avión si estos no superan los  $\pm 15$  grados. Al hacer esta suposición se logra hacer una aproximación en las funciones trigonométricas seno y coseno para pequeños ángulos. A saber,

Si  $\beta$  es un ángulo pequeño  $\Rightarrow \text{sen}(\beta) \approx \beta$  y  $\text{cos}(\beta) \approx 1$

2. El producto cruz entre las variables de movimiento perturbado, hacen que las ecuaciones contengan términos no lineales, pero la experiencia ha mostrado que, ante pequeñas perturbaciones, los términos no lineales son despreciables con respecto a los términos lineales.
3. Suponer que las perturbaciones deben ser pequeñas es un supuesto aceptable sobre todo en aeronaves de pasajeros puesto que el avión debe volar con la máxima comodidad posible para el pasajero, es decir, este debe sentir lo menos posible cualquier cambio brusco sufrido por el avión.
4. Para diferentes condiciones de vuelo determinada (vuelo recto y nivelado, viraje, etc.), respecto a una curva de vuelo pequeñamente perturbada según un ángulo de Euler, se pueden utilizar las siguientes condiciones iniciales [57] para afrontar de mejor forma su estudio:
  - La velocidad lateral en estado estable es igual a cero.
  - El ángulo de alabeo inicial es igual a cero.
  - Las velocidades angulares iniciales son todas iguales a cero, es decir,

$$P_1(0) = Q_1(0) = R_1(0) = \dot{\psi}_1(0) = \dot{\theta}_1(0) = \dot{\phi}_1(0) = 0$$

Finalmente, las ecuaciones que describen las variables del modelo perturbado y linealizado, pueden ser definidas como

- **Fuerzas**

$$\begin{aligned} \text{Eje X: } m(\dot{u} + W_1 q) &= -mg\theta \cos\theta_1 + f_{Ax} + f_{Tx} \\ \text{Eje Y: } m(\dot{v} - U_1 r - W_1 p) &= mg\phi \cos\theta_1 + f_{Ay} + f_{Ty} \\ \text{Eje Z: } m(\dot{w} - U_1 q) &= -mg\theta \sin\theta_1 + f_{Az} + f_{Tz} \end{aligned} \quad (3.4)$$

- **Momentos**

$$\begin{aligned} \text{Eje X: } p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin\theta_1 \\ \text{Eje Y: } q &= \dot{\theta} \\ \text{Eje Z: } r &= \dot{\psi} \cos\theta_1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

- **Cinemática**

$$\begin{aligned} \text{Eje X: } I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} &= +l_A + l_T \\ \text{Eje Y: } I_{yy}\dot{q} &= m_A + m_T \\ \text{Eje Z: } I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} &= n_A + n_T \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que las fuerzas y momentos aerodinámicos en estado estable pueden ser despreciadas.

En el Anexo II de [1] se puede encontrar el desarrollo completo que se realiza para describir las *ecuaciones de vuelo de un avión*. Estas ecuaciones tienen su origen en las leyes de Newton, para luego, de una serie de desarrollos matemáticos y aproximaciones, llegar a las *ecuaciones perturbadas* del avión, las cuales permiten el desarrollo de estrategias más generalizadas de control. Finalmente, a estas ecuaciones, se les introduce una serie de suposiciones fundamentales, como las mencionadas en los puntos 1 a 4, transformándolas en las *ecuaciones dinámicas perturbadas linealizadas de un avión*. Las ecuaciones dinámicas generales de un avión consideran las fuerzas y momentos que actúan en el avión, como también, la cinemática que se establece según cada eje de coordenadas.

Es importante hacer notar que las ecuaciones (3.1) a (3.6) representan la dinámica perturbada general del avión, pero para su total comprensión y por la complejidad del análisis de las fuerzas y momentos que actúan en cada eje de coordenadas, se remite al lector al Anexo III de [1] donde se presenta en extenso la modelación matemática de la dinámica de una aeronave.

### 3.4. Modelo longitudinal de perturbación y linealizado de una aeronave

Para simplificar el análisis, en la Figura 3.5 se muestra la geometría y los ángulos de interés longitudinales de la aeronave que es el objetivo de este estudio.

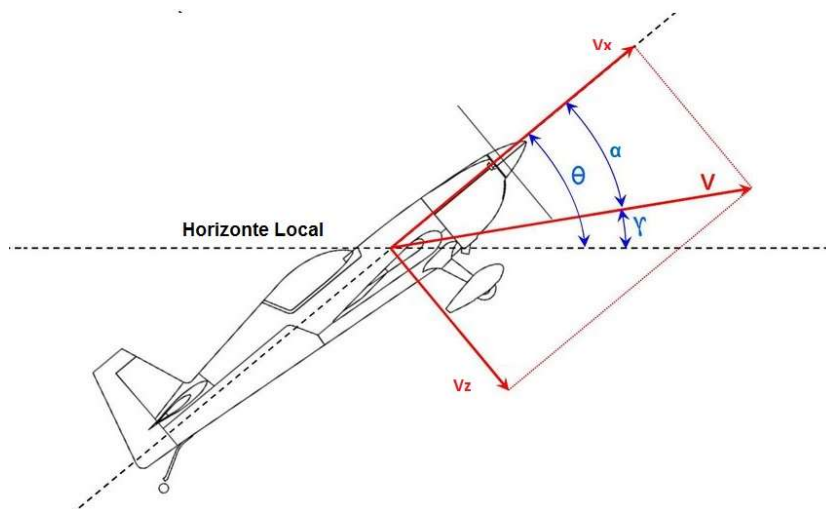


Figura 3.5: Ángulos fundamentales del movimiento longitudinal de una aeronave (figura subida por Baron Johnson y modificada por mi autoría).

$V$  es la velocidad del viento relativo a la aeronave (trayectoria de vuelo).

$\theta$ : Ángulo de cabeceo (pitch angle del inglés).

$\alpha$ : Ángulo de ataque (attack angle del inglés).

$\gamma$ : Ángulo de la trayectoria de vuelo.

Notar que,  $\gamma = \theta - \alpha$ .

La planta utilizada como base de las simulaciones para llevar a cabo el control adaptivo directo en sus versiones entera y fraccionaria es la aeronave utilitaria Cessna-182 la cual es muy popular por su bajo coste y alto rendimiento. Además, esta aeronave es muy utilizada en el proceso de instrucción de pilotos civiles.

El desarrollo y la realización del modelo lineal que describe el movimiento longitudinal perturbado del avión se presenta en extenso en el Anexo IV de [1]. El resumen de ecuaciones que describen este movimiento es:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -g\theta(t) \cos \theta_1 + X_u \cdot u(t) + X_{T_u} \cdot u(t) + X_\alpha \cdot \alpha(t) + X_{\delta_e} \cdot \delta_e(t) \\ U_1 \cdot \dot{\alpha}(t) - U_1 \cdot \dot{\theta}(t) &= -g \cdot \theta(t) \sin \theta_1 + Z_u \cdot u(t) + Z_\alpha \cdot \alpha(t) + Z_{\dot{\alpha}} \cdot \dot{\alpha}(t) + Z_q \cdot \dot{\theta}(t) + Z_{\delta_e} \cdot \delta_e(t) \\ \ddot{\theta}(t) &= (M_u + M_{T_u}) \cdot u(t) + (M_\alpha + M_{T_\alpha}) \cdot \alpha(t) + M_{\dot{\alpha}} \cdot \dot{\alpha}(t) + M_q \cdot \dot{\theta}(t) + M_{\delta_e} \cdot \delta_e(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

En que  $u(t)$  es la velocidad lineal según el eje longitudinal de la aeronave,  $\alpha(t)$  el ángulo de ataque,  $\theta(t)$  el ángulo de cabeceo (o pitch angle),  $\delta_e(t)$  el ángulo del elevador de cola y los  $X_i(t)$ ,  $Z_i(t)$  y  $M_i(t)$  son las derivadas con respecto a las variables de interés  $i$ .

Luego, se puede definir un modelo lineal que nos otorga la posibilidad de introducir los conceptos básicos de control para nuestro sistema dinámico.

Pero antes, es conveniente hacer un cambio de variables para poder llevar el conjunto de las ecuaciones 3.7 a una forma matricial representada en variables de estado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= A \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{u} \\ \vec{y} &= C \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

Luego, definiendo las siguientes variables de estado,

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta(t), \\ x_2 &= \dot{\theta}(t), \\ x_3 &= u(t), \\ x_4 &= \alpha(t). \end{aligned}$$

y realizando manipulación algebraica, se puede llegar al siguiente sistema de ecuaciones de estado,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= -\frac{g \sin \theta_1 M_{\dot{\alpha}}}{Z_{\dot{\alpha}} + U_1} x_1(t) + \left( M_q + M_{\dot{\alpha}} \frac{Z_q + U_1}{Z_{\dot{\alpha}} + U_1} \right) x_2(t) + \left( M_u + M_{T_u} \frac{M_{\dot{\alpha}} \cdot Z_u}{Z_{\dot{\alpha}} + U_1} \right) x_3(t) \\
 &\quad + \left( M_{\alpha} + M_{T_{\alpha}} \frac{M_{\dot{\alpha}} \cdot Z_{\alpha}}{Z_{\dot{\alpha}} + U_1} \right) x_4(t) + \left( M_{\delta_e} + \frac{M_{\dot{\alpha}} \cdot Z_{\delta_e}}{Z_{\dot{\alpha}} + U_1} \right) \delta_e(t) \\
 \dot{x}_3(t) &= -g \cos \theta_1 x_1(t) + (X_u + X_{T_u}) x_3(t) + X_{\alpha} x_4(t) + X_{\delta_e} \delta_e(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= -\frac{g \sin \theta_1}{Z_{\dot{\alpha}} + U_1} x_1(t) + \left( \frac{Z_q + U_1}{Z_{\dot{\alpha}} + U_1} \right) x_2(t) + \left( \frac{Z_u}{Z_{\dot{\alpha}} + U_1} \right) x_3(t) + \left( \frac{Z_{\alpha}}{Z_{\dot{\alpha}} + U_1} \right) x_4(t) + \left( \frac{Z_{\delta_e}}{Z_{\dot{\alpha}} + U_1} \right) \delta_e(t)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Luego, llevando este sistema a su forma matricial, se tendrá que

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{14} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & \cdots & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \delta_e(t) \\
 \vec{y}(t) &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ donde } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \text{ vector de estado.}
 \end{aligned}$$

En que los coeficientes  $a_{ij}$  están relacionadas con los términos de la ecuación (3.8).



### 3.4.1. Modelo longitudinal de perturbación linealizado del avión Cessna-182

Como en esta Tesis, se desarrollará principalmente un control adaptivo directo de orden fraccionario (CAMRD-OF) para luego compararlo con su contraparte de orden entero (CAMRD), las condiciones de vuelo serán aquellas del vuelo recto y nivelado, considerando condiciones de operación (o punto de operación) típica que se muestran en la Tabla 3.1, a saber

Tabla 3.1: Condiciones de operación del Cessna 182 en vuelo recto y nivelado.

Altitud [pies]	5.000
Velocidad [m.p.h.]	130
Peso [libras]	2.650
Presión dinámica [p.s.i]	49,6
Centro de gravedad en porcentaje [%]	26,4

Para mayor información de las características operativas y técnicas de esta aeronave, éstas pueden ser consultadas en [19].

Adicionalmente, en la Tabla 3.2 se muestran los valores de los coeficientes derivados de las ecuaciones (3.7) o (3.8) para las condiciones de operación de la Tabla 3.1, a saber,

Tabla 3.2: Coeficientes derivados del Cessna 182.

Coeficiente Derivativo	Unidades	Coeficiente Derivativo	Unidades
$X_u = -0,95$	$\frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$ $\frac{\text{pies}}{\text{seg}}$	$Z_{\delta_e} = 0$	$\frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$ $\text{rad}$
$X_{T_u} = 0,47$	$\frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$ $\frac{\text{pies}}{\text{seg}}$	$M_u = 0$	$\frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ $\frac{\text{pies}}{\text{seg}}$
$X_\alpha = 605,76$	$\frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$ $\text{rad}$	$M_{T_u} = 0$	$\frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ $\frac{\text{pies}}{\text{seg}}$
$X_{\delta_e} = 0$	$\frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$ $\text{rad}$	$M_\alpha = 19259,39$	$\frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ $\text{rad}$

$Z_u = -9,09$	$\frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$ $\frac{\text{pies}}{\text{seg}}$	$M_{r_\alpha} = 0$	$\frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$
$Z_\alpha = -14258,07$	$\frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$ $\text{rad}$	$M_{\dot{\alpha}} = 2542,51$	$\frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$
$Z_{\dot{\alpha}} = -61,63$	$\frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$ $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$	$M_q = 4336,60$	$\frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$
$Z_q = -181,38$	$\frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$ $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$	$M_{\delta_e} = 35251,27$	$\frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ $\text{rad}$

Haciendo un análisis del espacio de estado, se aprecia que el modelo de sistemas dinámicos del movimiento longitudinal del avión para pequeñas perturbaciones tiene una variable de entrada  $\delta_e(t)$  y una salida  $y(t) \in \mathbb{R}$ .

A continuación, en la ecuación (3.9), se muestra el modelo del Cessna-182 representado en variables de estado para la condición de operación de la Tabla 3.1.

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6,8485 & 0 & -19,2591 \\ -32,17 & 0 & -0,0456 & -19,4588 \\ 0 & 0,9877 & -0,0014 & -2,2329 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 34,7012 \\ 0 \\ 0,2162 \end{bmatrix} \delta_e(t) \quad (3.9)$$

$$\vec{y}(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Además, como el análisis de interés es aquel del modelo longitudinal, y en particular, se desea controlar el ángulo de cabeceo (rotación respecto del eje Y) de la aeronave, entonces la función de transferencia será,

$$W_p(s) = \frac{x_1(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \quad (3.10)$$

por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (3.8), la salida será  $y(t) = \theta(t) = x_1(t)$ .

Luego, aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones (3.9) y (3.10) e imponiendo condiciones iniciales nulas, se obtiene la matriz de funciones de transferencia

$$W_p(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.11)$$

donde

$A =$  matriz de  $n \times n$

$B =$  matriz de  $n \times r$

$C =$  matriz de  $m \times n$

$D =$  matriz de  $m \times r = [0]$ .

Con

$n = 4$

$r = 1$

$m = 4$ .

Luego, bajo estas condiciones de operación, la función de transferencia entre el ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  y el ángulo del elevador de cola  $\delta_e(t)$  viene dada por,

$$W_p(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{34,7012(s + 0,0589)(s + 2,0996)}{(s^2 + 0,0444s + 0,02533)(s^2 + 9,0826s + 34,3275)} \quad (3.12)$$

o bien,

$$W_p(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{34,7012s^2 + 74,9025s + 4,2914}{s^4 + 9,127s^3 + 34,7561s^2 + 1,7542s + 0,8695} \quad (3.13)$$

Es decir, la planta es de orden 4 ( $n = 4$ ) y grado relativo 2 ( $n^* = 2$ ).

Es interesante notar que se ha considerado la entrada  $\delta_e(t)$  positiva, cuando el elevador de cola gira hacia arriba, de tal manera de tener el numerador con signo positivo en la ecuación (3.13).

El controlar el ángulo de cabeceo o actitud de la aeronave  $\theta(t)$  es muy importante en la industria aeronáutica puesto que parte importante de las tareas de los pilotos, es mantener una actitud específica, es decir, lograr un vuelo recto horizontal (vuelo recto y nivelado), como también ascender o descender con un cierto grado  $\theta$  de actitud respecto al *horizonte artificial*. Como esta tarea requiere que el piloto sea diligente, la mayoría de los aviones sofisticados cuentan con un piloto automático de actitud que realiza esta labor. Con esto se logra:

- c) Releva al piloto de la manipulación de los mandos disminuyendo las cargas que se desarrollan sobre el avión, mejorando así, la exactitud en la navegación.
- d) Volar el avión sin un control directo sobre las superficies de control longitudinal (timón de profundidad o elevador de cola) permitiendo un mayor descanso a los pilotos y que estos se puedan concentrar en otras tareas de interés.

Es precisamente este tipo de control que se aborda en esta Tesis, cuya hipótesis fundamental es probar que el control adaptivo de orden fraccionario tiene mejores prestaciones que el control

adaptivo clásico o entero aplicado a una aeronave. Es preciso indicar que, en la revisión del estado del arte, no se han encontrado implementaciones de controladores de actitud (control del ángulo de cabeceo), aplicado a aeronaves que sean de orden fraccionario.

### 3.4.2. Modelo longitudinal de perturbación linealizado del avión de combate F-16

En el caso del avión polivalente (multifunción) F-16 Falcon Figther, es más deseable controlar la razón de cambio del ángulo de cabeceo  $q(t) = \dot{\theta}(t)$  (pitch rate) que el ángulo mismo. Para llevar a cabo esta simulación, se utilizó el modelo matemático [3,10] el cual considera condiciones de vuelo recto y nivelado a nivel del mar o baja altitud y representado en variables de estado tal como se indica en la ecuación (3.14). Por otro lado, la ecuación (3.15) da cuenta de la función de transferencia del sistema entre  $q(t)$  y el ángulo del deflector de cola  $\delta_e(t)$ .

A continuación, se presentan los modelos matemáticos de ambas representaciones (variables de estado y función de transferencia) de la dinámica longitudinal del avión F-16 para las condiciones de vuelo nivelado. A saber,  $V=502$  [pies/s] y Altitud = 0 [pies] (avión volando a nivel del mar o cerca de la superficie terrestre).

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0189 & 0,9051 \\ 0,8223 & -1,0774 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0022 \\ -0,1756 \end{bmatrix} \delta_e(t) \quad (3.14)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$$

en que  $y(t) = q(t)$  o pitch rate.

Luego, de la ecuación (3.13), se puede obtener fácilmente la función de transferencia entre la salida de interés  $q(t)$  y la entrada  $\delta_e(t)$  puesto que

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Q(s)}{\delta_e(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{-0,175s - 0,1807}{s^2 + 2,096s + 0,3535} \quad (3.15)$$

En que la matriz  $A = \begin{bmatrix} -1,0189 & 0,9051 \\ 0,8223 & -1,0774 \end{bmatrix}$ , el vector  $B = \begin{bmatrix} -0,0022 \\ -0,1756 \end{bmatrix}$  y el vector

$C = [0 \quad 1]$ .

Es importante hacer notar que no es fácil encontrar modelos más complejos del F-16 como es el caso del Cessna-182. Es razonable suponer que como el F-16 es un avión de combate relativamente moderno y por razones de seguridad, los autores de trabajos similares no muestran modelos de mayor complejidad. Así entonces, el modelo que se dispone del F-16 es un sistema de segundo orden 2 ( $n = 2$ ) y grado relativo 1 ( $n^* = 1$ ).

#### 4. Marco teórico

Para facilidad del lector, se presentan teoremas y lemas fundamentales útiles en el análisis de estabilidad y deducción de las leyes de ajuste para el caso entero o clásico, para extender estos resultados al caso adaptivo fraccionario.

Es bien sabido que si la planta es de orden  $n$  y su grado relativo es de orden  $n^* = 1$ , entonces las ecuaciones diferenciales de la planta en conjunto con el controlador adaptivo directo CAMRD son

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + b_p u(t) & y_p(t) &= h_p^T x_p(t) \\ \dot{\omega}_1(t) &= \Lambda \omega_1(t) + l u(t); \\ \dot{\omega}_2(t) &= \Lambda \omega_2(t) + l y_p(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(t) &= [r(t) \quad \omega_1^T(t) \quad y_p(t) \quad \omega_2^T(t)]^T; \\ \theta(t) &= [k(t) \quad \theta_1^T(t) \quad \theta_0(t) \quad \theta_2^T(t)]^T \end{aligned}$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \phi_1(t) \\ \phi_0(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(t) - k^* \\ \theta_1(t) - \theta_1^* \\ \theta_0(t) - \theta_0^* \\ \theta_2(t) - \theta_2^* \end{bmatrix} : \text{vector de errores paramétricos del controlador} \quad (4.1)$$

y cuya ley de control es,

$$u(t) = \theta^T(t)\omega(t) = \phi^T(t)\omega(t) + \theta^* \omega(t), \text{ en que } \theta^* = \begin{bmatrix} k^* \\ \theta_1^* \\ \theta_0^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix} \text{ son los parámetros}$$

ideales del controlador.

Con leyes de ajuste dadas por

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= -\text{sgn}(k_p) e_1(t) r(t) \\ \dot{\theta}_0(t) &= -\text{sgn}(k_p) e_1(t) y_p(t) \\ \dot{\theta}_1(t) &= -\text{sgn}(k_p) e_1(t) \omega_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) &= -\text{sgn}(k_p) e_1(t) \omega_2(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

son tales que el sistema controlado, resulta ser asintóticamente estable en el sentido que se cumple que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ .

Estas leyes de ajuste se basan en los Lemas 1 y 2 que se presentan a continuación.

**Lema 1 (Barbalat):** Si  $e: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua para  $t \geq 0$ , y si el límite de la integral

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |e(\tau)| d\tau \text{ existe y es finito, entonces } \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

**Corolario 1:** Si  $e \in \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^\infty$  y  $\dot{e}$  es acotado, entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . El hecho de que  $e \in \mathcal{L}^2$  es equivalente a decir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e(\tau)^2 d\tau$  existe y es finito.

**Lema 2:** Considere el sistema dinámico descrito por las ecuaciones de estado y estado-salida como

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) + b\phi^T(t)\omega(t) \\ e_1(t) &= h^T e(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde la matriz  $A$  es Hurwitz, el par  $(A, b)$  es estabilizable y  $(h^T, A)$  es detectable (es decir, los modos que no son controlables u observables son estables) cuya función de transferencia del sistema  $H(s) = h^T(sI - A)^{-1}b$  es estrictamente real positiva (e.r.p) y  $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  un vector de parámetros ajustables con  $\omega: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función variante en el tiempo que puede ser medida.

Si  $\phi(t)$  es ajustada como

$$\dot{\phi}(t) = -\gamma e_1(t)\omega(t) \quad (4.4)$$

con  $\gamma > 0$  denominada ganancia adaptiva, la cual puede ser útil en modificar la rapidez de convergencia de los parámetros del controlador. Por simplicidad se supondrá  $\gamma = 1$ .

Entonces, el estado de equilibrio ( $e = 0, \phi = 0$ ) es uniformemente estable y  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ . Más aún, si  $\omega(t)$  es de excitación persistente (o suficientemente rica en armónicos) [4], entonces también se cumplirá que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| = 0$  [4].

Para el caso de esta Tesis, en la cual la técnica de control será el control adaptivo directo, el interés se limita a que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$  y no es de mayor interés la convergencia paramétrica, la cual si es relevante en problemas de control adaptivo indirecto o combinado que requieren identificación.

**Demostración:** Por Lema de Meyer-Kalman-Yakubovich (Lema MKY) [4], se sabe que si  $H(s)$  es e.r.p, y dada una matriz  $Q = Q^T > 0$  entonces existe una matriz  $P = P^T > 0$  tal que

$$A^T P + PA = -Q$$

$$Pb = h.$$

Luego, la prueba es directa utilizando la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(e, \phi) = e^T P e + \frac{1}{\gamma} \phi^T \phi$$

y evaluando su derivada  $\dot{V}$  a través de las ecuaciones 4.3 y 4.4, lo cual nos lleva a la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \phi) &= e^T (PA + A^T P)e + 2e^T P b \phi^T \omega - 2\phi^T y \omega \\ &= -e^T Q e \leq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el origen ( $e = 0$ ,  $\phi = 0$ ) es uniformemente estable y tanto  $e(t)$  como  $\phi(t)$  son acotados (considerando por supuesto que  $e(t_0)$  y  $\phi(t_0)$  son acotados) y por tanto  $e_1(t)$  también será acotado. Además, como  $e(t)$  aparece en  $\dot{V}$  entonces  $e(t)$  es de cuadrado integrable. A estas alturas, es útil mencionar, para efectos de simplificación de la escritura, que en la notación clásica del control adaptivo, decir que  $e(t)$  es uniformemente acotado equivale a decir que  $e(t) \in \mathcal{L}^\infty$  y que  $e(t)$  sea de cuadrado integrable es equivalente a decir  $e(t) \in \mathcal{L}^2$ .

Así entonces, como  $e(t)$  es acotado, por la ecuación (4.4),  $\dot{e}(t)$  también será acotado (y  $\dot{e}_1(t)$  será acotado ya que  $e_1(t) = h^T e(t)$ ). Además, como  $\phi(t)$  es acotado, entonces  $\omega(t)$  debe ser acotada. Luego, por Lema 1,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ .

También, se puede probar que el error de salida viene dado por

$$e_1(t) = \frac{k_p}{k_m} W_m(s) \phi^T(t) \omega(t) \quad (4.5)$$

del cual, es fácil deducir las leyes de ajuste por simple inspección sin necesidad de recurrir al Lema 2. Así entonces, utilizando las ecuaciones de la planta en conjunto con las ecuaciones del controlador (ecuación (4.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + b_p \left( \theta^T(t) \omega(t) \right) \\ \dot{\omega}_1(t) &= \Lambda \omega_1(t) + l \left( \theta^T(t) \omega(t) \right) \\ \dot{\omega}_2(t) &= \Lambda \omega_2(t) + l \left( h_p^T x_p(t) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

y como los errores paramétricos son

$$\psi(t) = k(t) - k^*, \quad \phi_0(t) = \theta_0(t) - \theta_0^*, \quad \phi_1(t) = \theta_1(t) - \theta_1^*, \quad \phi_2(t) = \theta_2(t) - \theta_2^*$$

$\phi(t) = [\psi(t) \quad \phi_1^T(t) \quad \phi_0(t) \quad \phi_2^T(t)]^T$ , la ecuación (4.6) puede ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{mn} x(t) + b_{mn} [\phi^T(t) \omega(t) + k^* r(t)] \\ y_p(t) &= h_{mn}^T x(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

En que,

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} A_p + b_p \theta_0^* h_p^T & b_p \theta_1^{*T} & b_p \theta_2^{*T} \\ l \theta_0^* h_p^T & \Lambda + l \theta_1^{*T} & l \theta_2^{*T} \\ l h_p^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad b_{mn} = \begin{bmatrix} b_p \\ l \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{mn} = \begin{bmatrix} h_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } x(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix}.$$

Luego, puesto que la función de transferencia de la planta en conjunto con el controlador  $W_o(s) = W_m(s)$  cuando  $\theta(t) = \theta^*$ , el modelo de referencia puede ser descrito por la ecuación diferencial de orden  $(3n - 2)$  como,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{mn}(t) &= A_{mn}x_{mn}(t) + b_{mn}k^*r(t) \\ y_m(t) &= h_{mn}^T x_{mn}(t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde,

$$x_{mn}(t) = \begin{bmatrix} x_p^*(t) \\ \omega_1^*(t) \\ \omega_2^*(t) \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$h_{mn}^T [sI - A_{mn}]^{-1} b_{mn} k^* = W_m(s)$$

O bien,

$$h_{mn}^T [sI - A_{mn}]^{-1} b_{mn} = \frac{k_p}{k_m} W_m(s) \quad (4.9)$$

Las señales  $x_p^*(t)$ ,  $\omega_1^*(t)$  y  $\omega_2^*(t)$  pueden ser consideradas como señales en el modelo de referencia aumentado correspondientes a  $x_p(t)$ ,  $\omega_1(t)$  y  $\omega_2(t)$  del sistema completo (planta + controlador). Finalmente, restando la ecuación (4.8) de la ecuación (4.7), la ecuación del error de estado  $e(t)$  en conjunto con el error de salida  $e_1(t)$  serán

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_{mn}e(t) + b_{mn}[\phi^T(t)\omega(t)] \\ e_1(t) &= h_{mn}^T e(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde,

$$e(t) = x(t) - x_{mn}(t) \text{ y } e_1(t) = y_p(t) - y_m(t).$$

Finalmente, la ecuación (4.10) cumple todas las condiciones para aplicar el Lema 2 ya que la matriz  $A_{mn}$  es Hurwitz puesto que es la matriz del modelo de referencia aumentada simplemente y el modelo de referencia por definición, debe ser estable.

Más aún, utilizando el hecho de que la función de transferencia del error de salida está dada por  $W_{e_1}(s) = h_{mn}^T [sI - A_{mn}]^{-1} b_{mn} = \frac{k_p}{k_m} W_m(s)$  o ecuación (4.9), el error de salida  $e_1(t)$  también se puede expresar como

$$e_1(t) = \frac{k_p}{k_m} W_m(s) \phi^T(t) \omega(t) \quad (4.11)$$

Lo cual prueba que la ecuación (4.5) es correcta. Así entonces, de las ecuaciones (4.10) o (4.11) es fácil obtener las leyes de ajuste



$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= -\text{sgn}(k_p)e_1(t)r(t) \\
\dot{\theta}_0(t) &= -\text{sgn}(k_p)e_1(t)y_p(t) \\
\dot{\theta}_1(t) &= -\text{sgn}(k_p)e_1(t)\omega_1(t) \\
\dot{\theta}_2(t) &= -\text{sgn}(k_p)e_1(t)\omega_2(t)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

También, es importante notar que, a las leyes de ajuste, se las puede ponderar por una ganancia denominada ganancia adaptiva  $\gamma > 0$  sin afectar el análisis de estabilidad del sistema con control. Más aún, estas ecuaciones en su forma más compacta, pueden ser ponderadas por una matriz  $\Gamma = \Gamma^T > 0$ , es decir

$$\dot{\theta}(t) = -\Gamma \text{sgn}(k_p)e_1(t)\omega(t) \tag{4.13}$$

En este caso, lo único que cambia para la prueba de estabilidad de la implementación del controlador con sus respectivas leyes de ajuste, es la función de Lyapunov candidata, a saber, esta función es modificada como

$$V(e, \phi) = e^T P e + \phi^T \Gamma^{-1} \phi$$

y evaluando su derivada  $\dot{V}$  a través de las ecuaciones (4.10) y (4.13), nos lleva a la ecuación

$\dot{V}(e, \phi) = -e^T Q e \leq 0$ , la cual es idéntica a la obtenida para el caso simple de ganancia adaptiva  $\gamma = 1$ , por lo tanto, las conclusiones respecto de la acotación de señales y estabilidad de los errores, usando las leyes de ajuste (ecuación (4.12) o (4.13)) son similares.

No obstante, y como ya se indicó, para efectos de mayor simplicidad en el análisis de estabilidad, se supondrá que  $\gamma = 1$ .

En la Figura 4.1 se muestra un diagrama en bloques de la estructura del controlador CAMRD de orden entero para el caso general en que el grado relativo de la planta es  $n^* = 1$ .

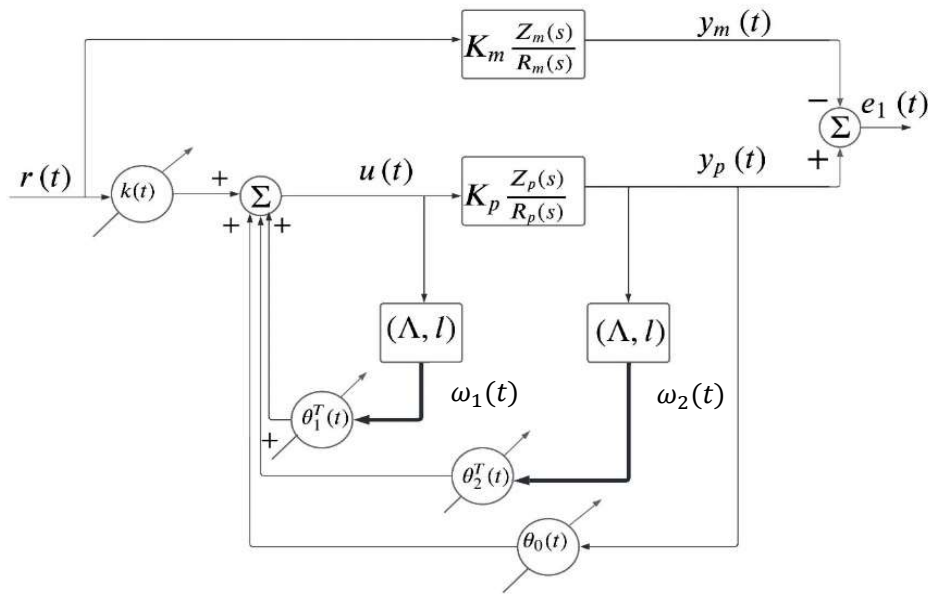


Figura 4.1: Estructura del caso general del controlador adaptivo directo (CAMRD) de grado relativo  $n^* = 1$ .

Además, en la Figura 4.2 se muestra el diagrama en bloques asociado al error de salida.

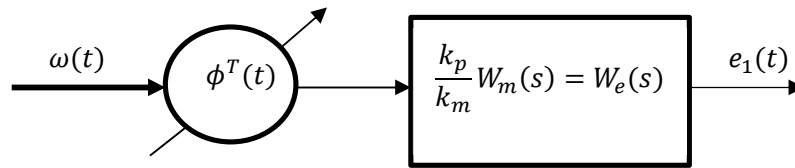


Figura 4.2: Diagrama en bloques del error de salida en el caso de CAMRD cuyo grado relativo es  $n^* = 1$ .

Ahora bien, en el caso en que  $n^* = 2$  la función de transferencia del modelo de referencia  $W_m(s)$  ya no es e.r.p., y por tanto ya no es evidente deducir por simple inspección de la ecuación del error de salida (ecuación (4.5) o (4.11)) las leyes de ajuste que garanticen la estabilidad del sistema de control adaptivo directo. Tampoco, es posible usar el Lema 2 de manera directa. En este caso, una posibilidad, para no recurrir a los errores aumentados y auxiliares (caso  $n^* \geq 2$ ) para la implementación del controlador, los cuales hacen más compleja tanto la implementación como el análisis de estabilidad, es poder realizar una modificación a la estructura del controlador en caso que el grado relativo es exactamente igual a 2 ( $n^* = 2$ ), de tal manera que en la nueva ecuación del error de salida  $e_1(t)$ , se tenga una función de transferencia e.r.p lo cual nos permita usar tanto el Lema 2 como la ecuación del error de salida, para determinar las leyes de ajusten que permitan que la planta en conjunto con el controlador, sean estables, de tal manera que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ .

A saber, se debe reemplazar  $\theta(t)$  por el operador lineal  $P_L(\theta) = L(s)\theta(t)L^{-1}(s)$  [53] con  $L(s)$  un polinomio Hurwitz. En el caso de  $n^* = 2$ ,  $L(s)$  es Hurwitz de grado 1, es decir,  $L(s) = (s + a)$  con  $a > 0$ .

Como la ecuación de error de salida es,

$$e_1(t) = \frac{k_p}{k_m} W_m(s) \phi^T(t) \omega(t) \quad (4.14)$$

donde  $W_m(s)$  ya no es e.r.p., con la modificación propuesta, de reemplazar  $\theta(t)$  por el operador  $P_L(\theta^T) = L(s)\theta^T(t)L^{-1}(s) = (s + a)\theta^T(t) \frac{1}{(s+a)}$ , la nueva entrada a la planta  $u(t)$  modificada será

$$u(t) = (s + a)\theta^T(t) \frac{1}{(s+a)} \omega(t) \quad (4.15)$$

En la Figura 4.3 se muestra la modificación a la entrada de control propuesta.

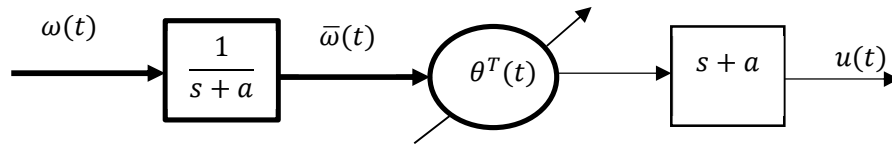


Figura 4.3: Diagrama en bloques de la entrada de control modificada para el caso en que la planta presente un grado relativo  $n^* = 2$ .

Está modificación de la entrada también significa una modificación del error de salida, por lo tanto, el nuevo error de salida será

$$e_1(t) = \frac{k_p}{k_m} W_m(s) L(s) \phi^T(t) L^{-1}(s) \omega(t) = \frac{k_p}{k_m} \bar{W}_m(s) \phi^T(t) \bar{\omega}(t) \quad (4.16)$$

En que  $\bar{\omega}(t) = L^{-1}(s)\omega(t) = \frac{1}{s+a}\omega(t)$  y la función de transferencia modificada  $\bar{W}_m(s) = W_m(s)L(s) = W_m(s)(s + a)$  ahora sí es e.r.p., por lo tanto, se puede aplicar el Lema 1 y 2, y además, las leyes de ajuste se pueden determinar por simple inspección de la ecuación del error (ecuación (4.16)).

Es decir,

$$\dot{\phi}(t) = \dot{\theta}(t) = -\text{sgn}(k_p) e_1(t) \bar{\omega}(t) = -e_1(t) \bar{\omega}(t) \quad (4.17)$$

Notar que en las leyes de ajuste se ha reemplazado  $\omega(t)$  por  $\bar{\omega}(t)$ . Recordar además que,

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} k(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_0(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}, \omega(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \omega_1(t) \\ y_p(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} \text{ y por tanto, } \bar{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \bar{r}(t) \\ \bar{\omega}_1(t) \\ \bar{y}_p(t) \\ \bar{\omega}_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{s+a} \begin{bmatrix} r(t) \\ \omega_1(t) \\ y_p(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix}.$$

y la entrada de control modificada (ecuación (4.15) también puede ser expresada como

$$u(t) = (s + a)\theta^T(t) \frac{1}{(s+a)} \omega(t) = (s + a)[\theta^T(t)\bar{\omega}(t)] = s[\theta^T(t)\bar{\omega}(t)] + a[\theta^T(t)\bar{\omega}(t)] \quad (4.18)$$

Es decir,

$$u(t) = \dot{\theta}^T(t)\bar{\omega}(t) + \theta^T(t)\dot{\bar{\omega}}(t) + a\theta^T(t)\bar{\omega}(t) = \dot{\theta}^T(t)\bar{\omega}(t) + \theta^T(t)\omega(t) \quad (4.19)$$

ya que  $\theta^T(t)\dot{\bar{\omega}}(t) + a\theta^T(t)\bar{\omega}(t) = \theta^T(t)(s + a)\bar{\omega}(t)$ . Así entonces, como

$$u(t) = \dot{\theta}^T(t)\bar{\omega}(t) + \theta^T(t)\omega(t) \quad (4.20)$$

y luego, reemplazando la ecuación (4.17) en la ecuación (4.20), se llega a que

$$u(t) = \theta^T(t)\omega(t) - e_1(t)\bar{\omega}^T(t)\bar{\omega}(t) \quad (4.21)$$

En la Figura 4.4 se muestra un diagrama en bloques de la implementación del sistema de control modificado para el caso en que  $n^* = 2$  en el cual se puede hacer uso de los lemas 1 y 2 para obtener las leyes de ajuste garantizando que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ . Considerar que la nueva ecuación de error de estado y error de salida vienen dadas por

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_{mn}e(t) + b_{mn}[P_L(\phi^T)\omega(t)] \\ e_1(t) &= h_{mn}^T e(t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

O bien,

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_{mn}e(t) + b_{pr}[\phi^T(t)\bar{\omega}(t)] \\ e_1(t) &= h_{mn}^T e(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

En que  $b_{pr} = L(s)b_{mn}$  y  $\bar{\omega}(t) = L^{-1}(s)\omega(t)$ .

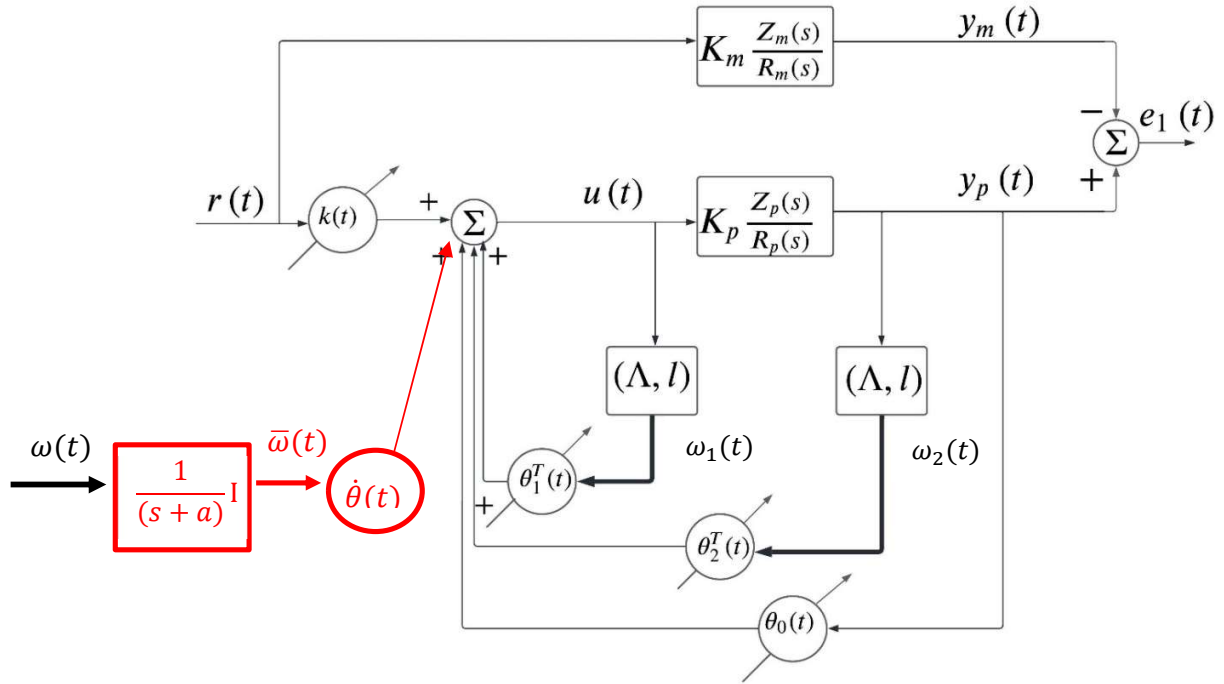


Figura 4.4: Estructura modificada del controlador adaptativo directo (CAMRD) para el caso particular de grado relativo  $n^* = 2$ .

En la Figura 4.5 se muestra el diagrama en bloques asociado al error de salida.

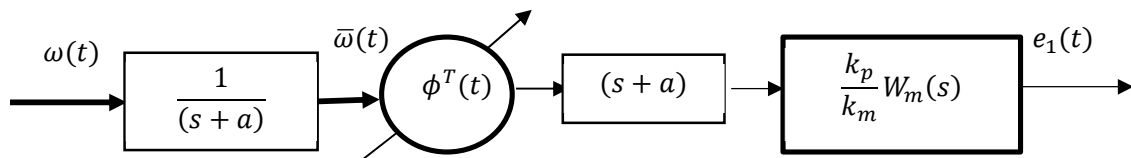


Figura 4.5: Diagrama en bloques del error de salida en el caso de CAMRD cuyo grado relativo es  $n^* = 2$ .

Así entonces, la adecuada elección de  $L(s)$ , la realización de  $P_L(\theta)$  libre de derivadores y la posterior prueba de estabilidad del sistema de control modificado, forman la esencia de la solución al problema de control cuando el grado relativo de la planta es exactamente igual a 2 ( $n^* = 2$ ).

Para finalizar este apartado, es interesante mostrar algunas propiedades del operador lineal en  $\theta(t)$  utilizado en la nueva ley de ajuste y control  $P_L(\theta) = L(s)\theta(t)L^{-1}(s)$  [54].

- i)  $P_L(\theta^T) = L(s)\theta^T(t)L^{-1}(s)$ .
- ii)  $P_L(\theta^*) = \theta^*$  si  $\theta^*$  es constante.
- iii)  $P_L(\theta) - \theta = P_L(\phi) - \phi$ , donde  $\theta(t) = \theta^* + \phi(t)$ .

Para probar estabilidad de esta implementación, se puede definir una función candidata de Lyapunov tal que,

$V(e, \phi) = e^T(t)Pe(t) + \phi(t)^T\phi(t)$ , con  $P = P^T > 0$ , luego derivando con respecto al tiempo y evaluando la derivada  $\dot{V}$  a través de la ecuación de error (ecuación (4.23)) y ley de ajuste (ecuación (4.17)) se tendrá,

$$\dot{V}(e, \phi) = \dot{e}^T(t)Pe(t) + e(t)^T(t)P\dot{e}(t) + \dot{\phi}(t)^T\phi(t) + \phi(t)^T\dot{\phi}(t) \quad (4.24)$$

y como

$$\dot{e}(t)^T = [A_{mn}e(t)]^T + \{b_{pr}[\phi^T(t)\bar{\omega}(t)]\}^T = e(t)^T A^T_{mn} + \{b_{pr}[\phi^T(t)\bar{\omega}(t)]\}^T \text{ y además,}$$

$$\dot{\phi}(t)^T\phi(t) + \phi(t)^T\dot{\phi}(t) = -e_1(t)\bar{\omega}^T(t)\phi(t) - \phi(t)^T e_1(t)\bar{\omega}(t) = -2e_1(t)\phi(t)^T\bar{\omega}(t)$$

Luego, reemplazando estas igualdades en la ecuación (4.24) se llega a que

$$\dot{V}(e, \phi) = [e^T(t)A^T_{mn} + \bar{\omega}^T(t)\phi(t)b^T_{pr}]Pe(t) + e(t)^T P[A_{mn}e(t) + b_{pr}\phi^T(t)\bar{\omega}(t)] - 2e_1(t)\phi^T(t)\bar{\omega}(t) \quad (4.25)$$

O bien,

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \phi) = e^T(t)[A^T_{mn}P + PA_{mn}]e(t) + [b_{pr}\phi^T(t)\bar{\omega}(t)]^T Pe(t) \\ + e(t)^T Pb_{pr}\phi^T(t)\bar{\omega}(t) - 2e_1(t)\phi^T(t)\bar{\omega}(t) \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\text{pero } [b_{pr}\phi^T(t)\bar{\omega}(t)]^T P = P^T [b_{pr}\phi^T(t)\bar{\omega}(t)]^T = P [b_{pr}\phi^T(t)\bar{\omega}(t)]^T = h_{mn}\phi^T(t)\bar{\omega}(t)$$

ya que  $\bar{\omega}^T(t)\phi(t) = \phi^T(t)\bar{\omega}(t)$  y  $P^T = P$ , por lo tanto, el término  $[b_{pr}\phi^T(t)\bar{\omega}(t)]^T Pe(t) = h_{mn}\phi^T(t)\bar{\omega}(t)e(t) = h_{mn}e(t)\phi^T(t)\bar{\omega}(t) = e_1(t)\phi^T(t)\bar{\omega}(t)$  ya que  $\phi^T(t)\bar{\omega}(t)$  es un escalar. De igual modo, el término  $e(t)^T Pb_{pr}\phi^T(t)\bar{\omega}(t) = e_1(t)\phi^T(t)\bar{\omega}(t)$ . Finalmente, reemplazando todas estas igualdades en la ecuación (4.26) se llega a que

$$\dot{V}(e, \phi) = e^T(t)[A^T_{mn}P + PA_{mn}]e(t) \quad (4.27)$$

Entonces, por Lema 2, dada una matriz  $P = P^T > 0$  existe una matriz  $Q = Q^T > 0$  tal que

$$A^T_{mn}P + PA_{mn} = -Q \text{ y}$$

$$Pb_{pr} = h_{mn}.$$

luego, la ecuación (4.27) queda de la forma

$$\dot{V}(e, \phi) = -e^T(t)Qe(t) \leq 0 \quad (4.28)$$

Por lo tanto, el origen  $(e, \phi) = (0,0)$  es uniformemente estable y  $e(t)$  y  $\phi(t)$  son acotadas. Además, si  $\omega(t)$  es acotada, entonces  $\bar{\omega}(t)$  también lo es ya que  $\bar{\omega}(t) = L^{-1}(s)\omega(t) = \frac{1}{(s+a)}\omega(t)$  y  $L(s)$  es Hurwitz, entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  y como  $e_1(t) = h_{mn}^T e(t)$  en que  $h_{mn}^T$  es simplemente un vector de coeficientes constantes,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ , lo cual garantiza que la implementación especial del controlador para el caso en que el grado relativo es exactamente igual a 2 ( $n^* = 2$ ), es asintóticamente estable respecto del error de control  $e_1(t)$  y estado  $e(t)$  (aunque éste, no esté accesible).

Es importante destacar que la prueba de estabilidad de esta implementación es muy útil a la hora de tener que escoger un modelo de referencia para la planta, ya que permite escoger un modelo de referencia que si bien, este debe ser asintóticamente estable, no necesita ser e.r.p. (con igual grado relativo que la planta por supuesto) por medio del filtraje de la señal  $\omega(t)$  utilizando un simple filtro de primer orden  $L^{-1}(s) = \frac{1}{(s+a)}$  haciendo más fácil la implementación del controlador en el sentido que no es necesario recurrir a señales adicionales como son el error auxiliar y error aumentado usados generalmente, en los casos en que el grado relativo de la planta es  $n^* \geq 2$ .

**Observación 1:** Es interesante notar que si se aplica el Lema 1 (Lema de Barbalat) a las consecuencias de la ecuación (4.28), es decir acotamiento del error  $e(t)$  y  $\phi(t)$ , etc., no es necesario exigir que la señal auxiliar  $\omega(t)$  o  $\bar{\omega}(t)$  sea acotada para demostrar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  o  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ . Más aún, la acotación de las señales auxiliares  $\omega(t)$  o  $\bar{\omega}(t)$ , las cuales dependen de la señal de entrada a la planta  $u(t)$  y la salida  $y_p(t)$ , están garantizadas puesto que la salida de la planta  $y_p(t)$  debe ser acotada dado que el error  $e(t)$  (y por tanto  $e_1(t) = y_p(t) - y_m(t)$ ) son acotados e  $y_m(t)$  es acotada por definición.

A continuación, presentaremos algunas definiciones, en ningún caso exhaustivas, de la derivada e integral de orden fraccionario que serán usadas en el análisis de estabilidad de la implementación del control CAMRD-OF.

#### 4.1. Definiciones y propiedades útiles del cálculo fraccionario aplicados al control adaptivo

**Definición 1 [5]:** La Integral fraccionaria de Riemann -Liouville de orden  $\alpha > 0$  de una función  $f(t) \in \mathbb{R}$  está definida por

$$I_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, t > t_0 \text{ y } \Re(\alpha) > 0 \quad (4.29)$$

donde  $\Gamma(\alpha)$  es la función gamma definida como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (4.30)$$

**Definición 2** [5]: Sea  $\alpha \geq 0$  y  $[n] = \alpha$ . La derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$  de una función  $f(t) \in \mathbb{R}$  está definida como

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (4.31)$$

en que  $f^{(n)} \in L_1[t_0, t]$ .

De igual modo, a continuación, también se presentan algunas herramientas adicionales (lemas y teorema) útiles para el análisis de sistemas de control adaptivo de orden fraccionario.

**Lema 3 (Principio de comparación fraccionaria)**: Sea  $e(t) \in \mathbb{R}^n$  un vector de funciones diferenciables. Luego,  $\forall t \geq t_0$ , se cumple la siguiente desigualdad

$\frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \{e^T(t) P e(t)\} \leq e^T(t) P {}^c D_t^\alpha e(t)$ ,  $\forall \alpha \in (0, 1]$ , donde  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz cuadrada de coeficientes constantes, simétrica y definida positiva. En [51] se encuentra una demostración de este lema.

Ahora bien, otro lema que es de utilidad en el estudio de la evolución del error de salida en modelos de orden fraccionario es el siguiente.

**Lema 4**: Sea  $e(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función uniformemente continua y acotada. Si existe un  $\alpha \in (0, 1]$  tal que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{e(\tau)^2}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau < M, \quad \forall t \geq t_0, \text{ con } M \in (0, \infty), \text{ entonces}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{\alpha-\varepsilon} \frac{\int_{t_0}^t e(\tau)^2 d\tau}{t} \right] = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

En [53] se encuentra una demostración de este Lema.

**Teorema 1**: Sea el error de estado  $e(t)$  y el error de salida  $e_1(t)$  representados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\beta e(t) &= A_{mn} e(t) + b_{mn} [\phi^T(t) \omega(t)], & e(t_0) &= e_0 \\ e_1(t) &= k h_{mn}^T e(t), & e_1(t_0) &= e_{10} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Donde la matriz  $A_{mn} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es Hurwitz y el sistema es tal que dada una matriz  $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  entonces existe una matriz  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$A_{mn}^T P + P A_{mn} = -Q$$

$$P b_{mn} = h_{mn}.$$

lo cual implica que la tripleta  $\{A_{mn}, b_{mn}, h_{mn}\}$  satisface las condiciones del Lema de Kalman-Yakubovich-Popov [4]. Además,  $k$  es una constante desconocida, pero de signo conocido,



$e(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  corresponde al vector de estados no accesible,  $e_1(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es el error de salida (accesible),  $b_{mn}, h_{mn} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\phi(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es el vector de error de parámetros definido como  $\phi(t) = \theta(t) - \theta^*$  con  $\theta(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  los parámetros estimados (del controlador) y  $\theta^*: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  los parámetros ideales desconocidos del controlador.  $\omega(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un vector de señales auxiliares disponibles y  $\beta \in (0,1]$ , cuyas leyes de ajuste adaptivas, para estimar los parámetros desconocidos del controlador, estén dadas por

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha \phi(t) = {}_{t_0}^C D_t^\alpha \theta(t) = -\gamma \text{sgn}(k) e_1(t) \omega(t), \quad \phi(t_0) = \phi_0 \quad (4.33)$$

con  $\alpha < \beta$  con  $\alpha \in (0,1]$ . Entonces, bajo el supuesto que  $e(t)$  y  $\phi(t)$  sean funciones diferenciables y uniformemente continuas, se cumple que:

- i) El error paramétrico  $\phi(t)$ , el error de estado  $e(t)$  y el error de salida  $e_1(t)$  permanecen acotados.
- Más aún, si la señal auxiliar  $\omega(t)$  es acotada, entonces
- ii)  ${}_{t_0}^C D_t^\alpha \phi(t)$  y  ${}_{t_0}^C D_t^\beta e(t)$  también permanecen acotadas y,
- iii) El valor medio de la norma cuadrada del error de estado  $\overline{\|e(t)\|^2}$  es  $o(t^{\varepsilon-\alpha}) \forall \varepsilon > 0$ .

Es útil poder deducir que si  $\overline{\|e(t)\|^2}$  es  $o(t^{\varepsilon-\alpha}) \forall \varepsilon > 0$  poder establecer un corolario que explique el comportamiento del error de salida  $e_1(t)$  que es al cual se tiene acceso.

**Corolario 2:** Del teorema anterior, es evidente que si se cumple (iii) también se debe cumplir que el valor medio de la norma cuadrada del error de salida  $e_1(t)$  es  $o(t^{\varepsilon-\alpha}) \forall \varepsilon > 0$  puesto que  $e_1(t) = kh_{mn}^T e(t)$  con  $h_{mn}^T$  vector cuyas componentes son constantes.

Aunque la prueba de este teorema se puede encontrar en [40], pero dada la importancia en el análisis de estabilidad del problema de control abordado en esta Tesis, se esbozará la demostración. Además, en [39 a 48, 53 y 55] se encuentra buena parte de los avances relacionados con la estabilidad de los sistemas de orden fraccionario.

### Demostración:

**Prueba parte (i).** Dado que por definición se asume que tanto  $e(t)$  como  $\phi(t)$  son funciones diferenciables y haciendo uso del Lema 3, la siguiente expresión puede ser escrita  $\forall t > t_0$ ,

$$\left[ \begin{array}{l} {}_{t_0}^C D_t^\beta \{e^T P e\}(t) + \\ {}_{t_0}^C D_t^\alpha \{\phi^T \phi\}(t) \end{array} \right] \leq \left[ \begin{array}{l} 2e^T(t) P {}_{t_0}^C D_t^\beta e(t) + \\ 2 \frac{|k|}{\gamma} \phi(t)^T {}_{t_0}^C D_t^\alpha \phi(t) \end{array} \right] \quad (4.34)$$

Luego, reemplazando las ecuaciones (4.32) y (4.33) en lado derecho de la ecuación (4.34) y considerando el hecho de que  $A_{mn}^T P + P A_{mn} = -Q$ ,  $P b_{mn} = h_{mn}$ ,  $e_1(t) = kh_{mn}^T e(t)$  se tiene que

$${}^c_0D_t^\beta \{e^T P e\}(t) + {}^c_0D_t^\alpha \left\{ \frac{|k|}{\gamma} \phi^T \phi \right\}(t) \leq e^T(t) [A_{mn}^T P + P A_{mn}] e(t) \quad (4.35)$$

O bien,

$${}^c_0D_t^\beta \{e^T P e\}(t) + {}^c_0D_t^\alpha \{\phi^T \phi\}(t) \leq -e^T(t) Q e(t) \quad (4.36)$$

Luego, aplicando la integral fraccionaria de orden  $\beta$  (además de usar la definición 3.1, Corolario 2.3 de [49]), se puede obtener la siguiente expresión,

$$e^T(t) P e(t) - e_0^T P e_0 + I^\beta \{e^T Q e\}(t) + \frac{|k|}{\gamma} I^{\beta-\alpha} \{\phi^T \phi - \phi_0^T \phi_0\}(t) \leq 0 \quad (4.37)$$

Ahora bien, analizando la ecuación (4.37), probaremos que  $\phi(t)$  y  $e(t)$  son acotadas por contradicción. Supongamos que  $\phi(t)$  no es acotada. Puesto que  $\phi(t)$  es uniformemente continua, entonces existen intervalos de longitud crecientes donde  $\phi^T(t)\phi(t) > L > \phi_0^T \phi_0$ , por lo tanto, la integral fraccionaria  $I^{\beta-\alpha} \{\phi^T \phi - \phi_0^T \phi_0\}(t)$  diverge conforme  $t \rightarrow \infty$ . Esto contradice el hecho de que la expresión en la ecuación (4.37), debe ser siempre no positiva ( $\leq 0$ ), puesto que los términos  $e^T(t) P e(t)$  y  $I^\beta \{e^T Q e\}(t)$  son siempre no negativos ( $\geq 0$ ) y el término no positivo  $-e_0^T P e_0$  es acotado, contradiciendo la hipótesis de que  $\phi(t)$  no es acotada. Así entonces,  $\phi(t)$  debe ser acotada  $\forall t > t_0$ .

Por otro lado, el menor valor que puede adquirir la integral fraccionaria  $\frac{|k|}{\gamma} I^{\beta-\alpha} \{\phi^T \phi - \phi_0^T \phi_0\}(t)$  en la ecuación (4.37) es para el caso en que  $\phi^T \phi = 0 \forall t \geq t_0$ . Por lo tanto, en ese caso, la ecuación (4.37) se puede convertir en la expresión siguiente,

$$e^T(t) P e(t) - e_0^T P e_0 + I^\beta \{e^T Q e\}(t) \leq \frac{|k| \phi_0^T \phi_0}{\gamma \Gamma(\beta-\alpha)} (t - t_0)^{\beta-\alpha} \quad (4.38)$$

Así entonces, Supongamos que  $e(t)$  es no acotado. Puesto que  $e(t)$  es uniformemente continua, entonces existen intervalos de longitud crecientes donde  $\phi^T(t)\phi(t) > C > 0$ , por lo tanto, la integral fraccionaria dada por  $I^\beta \{e^T Q e\}(t)$  en la Ecuación 4.38 diverge conforme  $t \rightarrow \infty$ . Puesto que la integral fraccionaria es de orden  $\beta$ , su rapidez de crecimiento a lo menos, será de orden  $t^\beta$ , lo cual establece una contradicción con el lado derecho de la ecuación (4.38) conforme  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, se puede concluir que  $e(t)$  permanece acotado  $\forall t \geq t_0$  con lo cual se completa la prueba de la parte (i) del teorema.

**Prueba parte (ii).** Puesto que ya está demostrado que tanto  $e(t)$  como  $\phi(t)$  son acotados y asumiendo que  $\omega(t)$  es acotada, por hipótesis del teorema, entonces, basado en las ecuaciones 4.32 y 4.33, se concluye que  ${}^c_0D_t^\beta e(t)$  y  ${}^c_0D_t^\alpha \phi(t)$  también son acotados.

**Prueba parte (iii).** Dado que  $e(t)$  como  $\phi(t)$  son funciones diferenciables, haciendo uso del Lema 3, se puede obtener la siguiente expresión

$$2e^T(t)P_{t_0}^c D_t^\beta e(t) + {}_t^c D_t^\alpha \left\{ \frac{|k|}{\gamma} \phi^T \phi \right\} (t) \leq -e^T(t)Qe(t) \quad (4.39)$$

Luego, si aplicamos a integral fraccionaria de orden  $\alpha$  a la ecuación (4.39), y reordenando términos, se llega a la siguiente desigualdad

$$I^\alpha \{e^T Qe\}(t) \leq \left[ \begin{array}{l} \frac{|k_p|}{\gamma} \{\phi_0^T \phi_0 - \phi^T \phi\}(t) - \\ I^\alpha \{2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e\}(t) \end{array} \right] \quad (4.40)$$

Puesto que  $I^\alpha \{e^T(t)Qe(t)\}(t) \geq 0$  y  $\phi(t)$  es acotada, entonces de la ecuación (4.40) se concluye que  $I^\alpha \{2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e\}(t)$  es acotada superiormente. Además, dado que como  $e(t)$  y  ${}_t^c D_t^\beta e(t)$  son acotados, se concluye de la proposición 1 de [40] que la integral fraccionaria  $I^\alpha \{2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e\}(t)$  es uniformemente continua.

Ahora bien, supongamos que el término  $I^\alpha \{2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e\}(t)$  diverge. Puesto que este término es acotado superiormente, entonces la divergencia implica que  $I^\alpha \{2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e\}(t)$  tiende a  $-\infty$ . Luego, dado que  $I^\alpha \{2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e\}(t)$  es uniformemente continua, se puede establecer que  $I^{\beta-\alpha} \left\{ I^\alpha \{2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e\} \right\} (t)$  tiende a  $-\infty$ , lo cual, de acuerdo al Lema 2.3 de [49], esta expresión puede ser reescrita como,  $I^\beta \{2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e\}(t) \rightarrow -\infty$ .

Recordar que puesto que  $e(t)$  es diferenciable, entonces, de acuerdo al Lema 3, se tiene que  ${}_t^c D_t^\beta \{e^T P e\} \leq 2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e(t)$ , lo cual implica que

$$I^\beta \left\{ {}_t^c D_t^\beta \{e^T P e\} \right\} (t) \leq I^\beta \{2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e\}(t) \rightarrow -\infty \quad (4.41)$$

De acuerdo al Lema 2.22 de [5], el lado izquierdo de la ecuación (4.41) puede ser reescrita como

$$I^\beta \left\{ {}_t^c D_t^\beta \{e^T P e\} \right\} (t) = e^T(t)Pe(t) - e_0^T P e_0 \rightarrow -\infty \quad (4.42)$$

Lo cual contradice el hecho que  $e(t)$  es acotada, por lo tanto, se puede concluir que  $I^\alpha \{2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e\}(t)$  es acotada inferiormente.

Más aún, dado que  $\phi(t)$  y  $I^\alpha \{2e^T P_{t_0}^c D_t^\beta e\}(t)$  son acotados, se puede concluir de la Ecuación 4.40 que  $I^\alpha \{e^T Qe\}(t)$  también es acotada. Esto, a su vez, implica que  $I^\alpha \{\|e(t)\|^2\}(t)$  es acotado  $\forall t \geq t_0$ .

Basado en este resultado y utilizando el hecho de que  $\|e(t)\|^2$  es no negativo y acotado, podemos aplicar el Lema 4, el cual nos permite concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{\alpha-\varepsilon} \frac{\int_{t_0}^t \|e(\tau)\|^2 d\tau}{t} \right] = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.43)$$

O bien, y dado que  $e_1(t) = kh_{mn}^T e(t)$ , también se puede concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{\alpha-\varepsilon} \frac{\int_{t_0}^t |e_1(\tau)|^2 d\tau}{t} \right] = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.44)$$

Es decir, el valor medio del cuadrado de la norma del error de estado  $e(t)$  y, por tanto, también el valor medio del cuadrado de la norma del error de salida  $e_1(t)$  es  $o(t^{\varepsilon-\alpha}) \forall \varepsilon > 0$ , lo cual significa que dichos errores convergen asintóticamente a cero con una rapidez de convergencia mayor que  $t^{-\alpha}$ , lo cual concluye la prueba.

Es interesante notar que dado que  $-e^T(t)Qe(t)$  en la ecuación (4.36) es por definición no positivo, es decir,  $-e^T(t)Qe(t) \leq 0$ , el Teorema 1 se puede modificar de tal manera que la ecuación (4.37) se exprese de una manera más simple. Así entonces, se propondrá un nuevo corolario denominado Corolario 3, el cual como se indicó, es una versión más simple del Teorema 1. En este caso, solo enunciaremos lo más relevante de la modificación, cuya demostración es idéntica a la del Teorema 1 pero en este caso, se puede omitir el análisis del término  $I^\beta\{e^T Q e\}(t)$  que aparece en la ecuación (4.37).

### **Corolario 3 (modificación simplificatoria del Teorema 1):**

Sea el error de estado  $e(t)$  y el error de salida  $e_1(t)$  representados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} {}_t^c D_t^\beta e(t) &= A_{mn} e(t) + b_{mn} [\phi^T(t) \omega(t)], & e(t_0) &= e_0 \\ e_1(t) &= kh_{mn}^T e(t), & e_1(t_0) &= e_{10} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Donde la matriz  $A_{mn} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es Hurwitz y el sistema es tal que dada una matriz  $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  entonces existe una matriz  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$A_{mn}^T P + P A_{mn} = -Q$$

$$P b_{mn} = h_{mn}.$$

lo cual implica que la tripleta  $\{A_{mn}, b_{mn}, h_{mn}\}$  satisface las condiciones del Lema de Kalman-Yakubovich-Popov [4]. Además,  $k$  es una constante desconocida, pero de signo conocido,  $e(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  corresponde al vector de estados no accesibles,  $e_1(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es el error de salida (accesible),  $b_{mn}, h_{mn} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\phi(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es el vector de error de parámetros definido como  $\phi(t) = \theta(t) - \theta^*$  con  $\theta(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  los parámetros estimados (del controlador) y  $\theta^*: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  los parámetros ideales desconocidos (del controlador).  $\omega(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un vector de señales auxiliares disponibles y  $\beta \in (0,1]$ , cuyas leyes de ajuste adaptivas, para estimar los parámetros desconocidos del controlador, estén dadas por

$${}^c D_t^\alpha \phi(t) = {}^c D_t^\alpha \theta(t) = -\gamma \text{sgn}(k) e_1(t) \omega(t), \quad \phi(t_0) = \phi_0 \quad (4.46)$$

con  $\alpha < \beta$  con  $\alpha \in (0,1]$ . Entonces, bajo el supuesto que  $e(t)$  y  $\phi(t)$  sean funciones diferenciables y uniformemente continuas, se cumple que:

- i) El error paramétrico  $\phi(t)$ , el error de estado  $e(t)$  y el error de salida  $e_1(t)$  permanecen acotados.
- Más aún, si la señal auxiliar  $\omega(t)$  es acotada, entonces
- ii)  ${}^c D_t^\alpha \phi(t)$  y  ${}^c D_t^\beta e(t)$  también permanecen acotadas y,
- iii) El valor medio de la norma cuadrada del error de estado  $\overline{\|e(t)\|^2}$  es  $o(t^{\varepsilon-\alpha}) \forall \varepsilon > 0$ .

### **Demostración:**

Entonces, como la ecuación (4.36) establece que

$${}^c D_t^\beta \{e^T P e\}(t) + {}^c D_t^\alpha \{\phi^T \phi\}(t) \leq -e^T(t) Q e(t) \quad (4.47)$$

y como por hipótesis  $-e^T(t) Q e(t) \leq 0$ , entonces la ecuación (4.37) se puede modificar para obtener la expresión más simple,

$${}^c D_t^\beta \{e^T P e\}(t) + {}^c D_t^\alpha \{\phi^T \phi\}(t) \leq 0 \quad (4.48)$$

y la demostración es idéntica a la del Teorema 1, pero nos evitamos explicar las condiciones que se establecen sobre el término  $I^\beta \{e^T Q e\}(t)$  ya que no aparece en la ecuación (4.48), simplificando el análisis de la demostración.

El anterior desarrollo teórico será aplicado al modelo de la aeronave Cessna 182, obtenida en la Sección 3, la cual es una planta de orden 4 y grado relativo 2.

En nuestro caso, las ecuaciones del sistema de control adaptivo CAMRD de orden fraccionario (o CAMRD-OF) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\beta e(t) &= A_{mn} e(t) + b_{mn} [\bar{\phi}^T(t) \bar{\omega}(t)], & e(t_0) &= e_0 \\ e_1(t) &= h_{mn}^T e(t), & e_1(t_0) &= e_{10} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Además, considerar que  $\beta = 1$  en este estudio. Pero las leyes de ajuste serán fraccionarias, es decir,

$${}^c D_t^\alpha \phi(t) = {}^c D_t^\alpha \theta(t) = -\gamma \text{sgn}(k_p) e_1(t) \bar{\omega}(t), \quad \phi(t_0) = \phi_0 \quad (4.50)$$

Con  $\alpha \in (0,1]$  y  $k_p$  es la ganancia de la planta cuyo valor es desconocido, pero se conoce su signo. Sin pérdida de generalidad, se puede considerar  $t_0 = 0$ . Notar que en la ecuación (4.46) se ha cambiado la señal auxiliar  $\omega(t)$  del caso  $n^* = 1$  por  $\bar{\omega}(t)$  para el caso  $n^* = 2$ .

Luego, para poder demostrar que el error de estado  $e(t)$ , error de salida  $e_1(t)$  y error paramétrico del controlador adaptivo  $\phi(t)$  de la implementación propuesta en este trabajo son acotados, se deben identificar y asociar los coeficientes y señales de esta estructura (ecuaciones (4.45) y (4.46)) con los coeficientes y señales de las ecuaciones del Teorema 1.

En principio, como el signo de  $k_p$  para la planta bajo estudio es conocido y positivo, por lo tanto, la ecuación (4.46) se reduce a

$${}^c D_t^\alpha \phi(t) = {}^c D_t^\alpha \theta(t) = -\gamma e_1(t) \bar{\omega}(t), \quad \phi(t_0) = \phi_0 \quad (4.51)$$

Además, la constante  $k$  que aparece en las ecuaciones del Teorema 1, se puede considerar igual a  $k_p$  la cual puede ser absorbida por el vector  $h_{mn}^T$  ya que no aparece en forma explícita en la ecuación (4.45) del modelo de error de nuestro sistema de control, sin embargo, aparecen los términos  $\bar{\phi}^T(t)$  y  $\bar{\omega}(t)$  en vez de  $\phi^T(t)$  y  $\omega(t)$ . Luego, al igual que en la demostración de estabilidad realizada para el caso de control adaptivo de orden entero CAMRD, visto en la Sección 1, se puede reescribir la ecuación (4.45) como

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\beta e(t) &= A_{mn} e(t) + b_{rp} [\phi(t) \bar{\omega}(t)], & e(t_0) &= e_0 \\ e_1(t) &= h_{mn}^T e(t), & e_1(t_0) &= e_{10} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Finalmente, en el caso particular del modelo de error de nuestra planta, como esta ecuación diferencial es de orden entero ( $\beta = 1$ ), entonces la ecuación (4.52), se puede reescribir como,

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_{mn} e(t) + b_{rp} [\phi(t) \bar{\omega}(t)], & e(t_0) &= e_0 \\ e_1(t) &= h_{mn}^T e(t), & e_1(t_0) &= e_{10} \end{aligned} \quad (4.53)$$

En que  $b_{rp} = b_{mn} L(s)$  y por tanto, se puede aplicar el Teorema 1 con la única salvedad que la condición impuesta de acotamiento para la señal  $\omega(t)$  ahora debe ser impuesta a las señal  $\bar{\omega}(t)$ , sin embargo, dado que  $\bar{\omega}(t) = L^{-1}(s)\omega(t) = \frac{1}{(s+a)}\omega(t)$  y  $\frac{1}{(s+a)}$  es Hurwitz, basta con mantener la condición del Teorema 1 de que  $\omega(t)$  sea acotada, puesto que si  $\omega(t)$  es acotada, entonces también lo será  $\bar{\omega}(t)$ . Por lo tanto, imponiendo las condiciones del Teorema 1 a las señales de error  $e(t)$  y  $\phi(t)$ , es decir, que estas cumplan con las condiciones de que sean señales uniformemente continuas y diferenciables, se cumplirá que tanto  $\phi(t)$  como el error  $e(t)$  (y por ende  $e_1(t)$ ) serán acotados. Además, si se garantiza que la señal auxiliar  $\omega(t)$  sea acotada (por tanto  $\bar{\omega}(t)$  también será acotada), por el mismo Teorema 1, se cumplirá que las derivadas

fraccionarias  ${}^c D_t^\beta e(t)$  y  ${}^c D_t^\alpha \phi(t)$  también serán acotadas. Notar que en nuestro caso  $\beta = 1$  y por tanto  $\dot{e}(t)$  (y por ende,  $\dot{e}_1(t)$ ) serán acotados.

A modo ilustrativo entonces, las ecuaciones (4.36) y (4.37) del Teorema 1, se transforman en

$$\frac{d\{e^T(t)Pe(t)\}}{dt} + {}^c D_t^\alpha \{\phi^T \phi\}(t) \leq e^T(t)Qe(t) \quad (4.54)$$

$$\left[ \begin{array}{c} e^T(t)Pe(t) - e_0^T P e_0 + \int_{\tau=t_0}^t e^T(\tau)Qe(\tau) d\tau + \\ \frac{1}{\gamma} I^{1-\alpha} \{\phi^T \phi - \phi_0^T \phi_0\}(t) \end{array} \right] \leq 0 \quad (4.55)$$

para el caso analizado en esta Tesis.

Finalmente, debido a la prueba de la parte (iii) del Teorema 1, también se cumplirá que el valor medio del cuadrado de la norma del error de estado  $e(t)$  (y por tanto, también el valor medio del cuadrado de la norma del error de salida  $e_1(t)$ ) es  $o(t^{\varepsilon-\alpha}) \forall \varepsilon > 0$ , lo cual significa que dichos errores convergen asintóticamente a cero con una rapidez de convergencia mayor que  $t^{-\alpha}$ .

En conclusión, está demostrada la estabilidad de nuestro esquema de control CAMRD-OF cuya planta es de grado relativo 2. La única condición a tener cuenta es que tanto  $\phi(t)$  como  $e(t)$ , deben ser uniformemente continuas y diferenciables y que la señal auxiliar  $\omega(t)$  sea acotada.

**Observación 2:** Desde el punto de vista teórico, solo está garantizada la estabilidad de nuestro esquema para  $\alpha < \beta$  en que, para nuestro caso,  $\beta = 1$ , por lo tanto,  $\alpha$  debe  $\in (0,1]$ . El caso en que  $\alpha > \beta$  (por ejemplo,  $\alpha \in (1,2]$ ) no está resuelto analíticamente hasta ahora.

Ahora bien, para demostrar que el controlador propuesto es estable, en el sentido que todas las señales son acotadas, se debe cumplir que en la ecuación del error (4.49), la matriz  $A_{mn}$  sea Hurwitz, es decir, todos sus valores propios deben pertenecer al semiplano izquierdo del plano complejo s. Para llevar a cabo dicha demostración, se deben determinar los parámetros ideales del controlador adaptivo directo  $\theta^*$ , los cuales son constantes. Estos parámetros se obtienen haciendo uso de la identidad de Bezout. En [4] se explica en forma extensa como determinar dichos parámetros. Estos parámetros están relacionados tanto con la planta como con el modelo de referencia.

## 5. Diseño de estrategias de control adaptivo directo fraccionario

En este capítulo se analizarán las estrategias de control adaptivo directo de orden fraccionario aplicado a la aeronave de instrucción civil Cessna-182 y el avión de combate F-16 Falcon Figther. El marco teórico que se desarrollará será aplicable a ambos casos con las simplificaciones respectivas para el caso del F-16 puesto que el modelo disponible, es de menor orden y grado relativo que el del Cessna-182.

### 5.1. Control adaptivo por modelo de referencia directo de orden entero y fraccionario (CAMRD y CAMRD-OF) aplicados al Cessna-182 cuyo grado relativo es $n^* = 2$

En términos generales, el objetivo principal del Control Adaptivo por Modelo de Referencia (CAMR) es minimizar el error entre la salida de la planta  $y_p(t)$  y la salida del modelo de referencia  $y_m(t)$  como se muestra en la Figura 5.1. En el caso del Control Adaptivo por Modelo Referencia Directo (CAMRD), el ajuste de los parámetros del controlador se basa en el error de control  $e(t)$  [17].

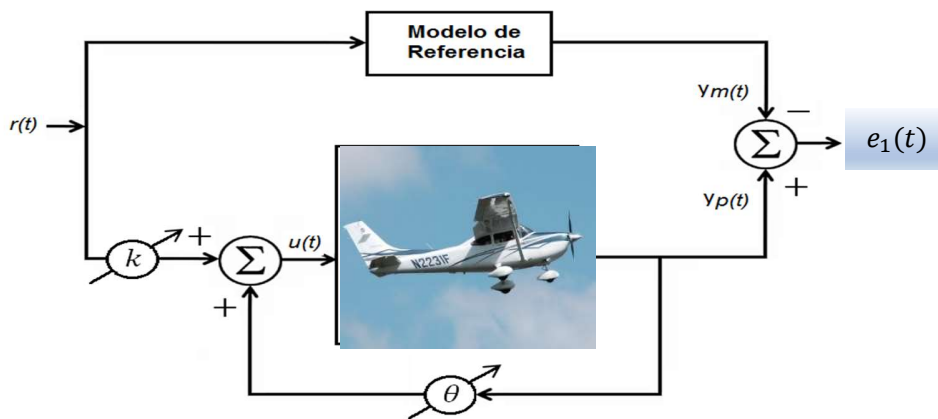


Figura 5.1: Diagrama en bloques del controlador CAMRD.

Para el caso particular del movimiento longitudinal del avión bajo investigación, utilizaremos un modelo de cuarto orden para la planta alrededor de un punto de operación definido por la ecuación (4.9) o (4.10). Bajo hipótesis bien conocidas, la ley de control para el CAMRD tiene la forma [15,24].

$$u(t) = \theta^T(t) \cdot \omega(t)$$

donde,

$\theta(t) = [k(t), \theta_1^T(t), \theta_0(t), \theta_2^T(t)]^T \in \mathfrak{R}^8$  y  $\omega(t) = [r(t), \omega_1^T(t), y_p(t), \omega_2^T(t)]^T \in \mathfrak{R}^8$  son el vector de parámetros del controlador y señales auxiliares respectivamente.



El vector de las señales auxiliares está definido por las siguientes ecuaciones representadas en variables de estado, a saber,

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1(t) &= \Lambda\omega_1(t) + lu(t) \\ \dot{\omega}_2(t) &= \Lambda\omega_2(t) + ly_p(t)\end{aligned}$$

con  $k(t), \theta_0(t), r(t), y_p(t) \in \mathfrak{R}$ , y  $\theta_1(t), \theta_2(t), w_1(t), w_2(t) \in \mathfrak{R}^3$ .  $(\Lambda, l)$  es un par controlable arbitrario, en que  $\Lambda \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  es una matriz asintóticamente estable o Hurwitz y  $l \in \mathfrak{R}^3$ . Por simplicidad, podemos escoger  $(\Lambda, l)$  en su forma canónica controlable.

En este caso, la ecuación de error de salida puede ser expresada como.

$$e_1(t) = \frac{k_p}{k_m} W_m(s) \phi^T(t) \omega(t) \quad (5.1)$$

En el capítulo de análisis de estabilidad se desarrolla en extenso la determinación del error de control  $e_1(t)$  de la ecuación (5.1).

cuyo vector de error de parámetros del controlador  $\phi^T(t)$  viene dado por,

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \phi_1(t) \\ \phi_0(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(t) - k^* \\ \theta_1(t) - \theta_1^* \\ \theta_0(t) - \theta_0^* \\ \theta_2(t) - \theta_2^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8$$

en que  $k^*, \theta_1^*, \theta_0^*$  y  $\theta_2^*$  son los valores ideales de los parámetros del controlador adaptivo que hacen que la planta en conjunto con el controlador sea idéntica a la función de transferencia del modelo de referencia  $W_m(s)$  que es lo que se desea conseguir, puesto que, en ese caso, el error de control  $e_1(t) = y_p(t) - y_m(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Notar que  $\psi(t), \phi_0(t) \in \mathbb{R}$  y  $\phi_1(t), \phi_2(t) \in \mathbb{R}^3$ .

El problema en determinar leyes de ajuste estables, para el caso en que la planta tiene grado relativo  $n^* \geq 2$ , se debe a que en la ecuación del error (ecuación (5.1)),  $W_m(s)$  no es estrictamente real positiva (e.r.p.), por lo tanto las leyes de ajuste que son aplicables para el caso en que  $n^* = 1$  deben ser modificadas. No obstante, existe la posibilidad, y solo en el caso de que  $n^* = 2$ , que dichas modificaciones no impliquen agregar señales de errores adicionales como son el error aumentado y error auxiliar entre otras que hacen más compleja la implementación del control adaptivo.

Así entonces, si se considera la posibilidad de poder agregar diferenciadores, se puede escoger una función del tipo  $L(s) = (s + a)$  con  $a > 0$  tal que  $W_m(s)L(s)$  sea función de transferencia e.r.p. y con esta modificación, poder establecer leyes de ajuste similares al caso en que  $n^* = 1$ . Luego, si se define una nueva señal auxiliar como  $\bar{\omega}(t) = L^{-1}(s)\omega(t)$  entonces el vector de parámetros del controlador  $\theta(t)$  se puede reemplazar por  $L(s)\theta(t)L^{-1}(s)$ . Así, la nueva señal de error de control o salida puede ser redefinida como,

$$e_1(t) = \frac{k_p}{k_m} W_m(s)L(s)\phi^T(t)\bar{\omega}(t) \quad (5.2)$$

Luego, la señal de control se puede expresar como,

$$u(t) = \dot{\theta}^T(t)\bar{\omega}(t) + \theta^T(t)\dot{\bar{\omega}}(t) + a\theta^T(t)\bar{\omega}(t) \quad (5.3)$$

O bien,

$$u(t) = \dot{\theta}^T(t)\bar{\omega}(t) + \theta^T(t)\omega(t) \quad (5.4)$$

Ahora bien, si  $\dot{\theta}(t)$  se puede reemplazar por una ley de ajuste adecuada, la salida del controlador  $u(t)$  puede quedar libre de derivadores lo cual es deseable. Así entonces, si se escoge la ley de ajuste de los parámetros del controlador  $\dot{\theta}(t)$  considerando el nuevo error de control dada por la ecuación (5.2), tal que,

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\phi}(t) = -sgn(k_p)e_1(t)\bar{\omega}(t) \quad (5.5)$$

Entonces se puede demostrar, al igual que el caso en que  $n^* = 1$ , que el sistema con control adaptivo es estable y  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . Luego, la ley de control quedará expresada como

$$u(t) = \theta^T(t)\omega(t) - sgn(k_p)e_1(t)\bar{\omega}^T(t)\bar{\omega}(t) \quad (5.6)$$

la cual está libre de derivadores.

En resumen, las leyes de ajuste de los parámetros del controlador adaptivo directo de orden entero y fraccionario serán:

Leyes de ajuste adaptivas de orden entero,

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\phi}(t) = -sgn(k_p)e_1(t)\bar{\omega}(t) \quad (5.7)$$

Leyes de ajuste adaptivas de orden fraccionario,

En este caso, se utilizará la derivada fraccionaria de Caputo, es decir,

$${}_0^C D_t^\alpha \theta(t) = {}_0^C D_t^\alpha \phi(t) = -sgn(k_p)e_1(t)\bar{\omega}(t) \quad (5.8)$$

## 5.2. Análisis de estabilidad del control adaptivo CAMRD-OF aplicado al Cessna-182

Sea la planta de orden  $n$  y grado relativo  $n^* = 2$  modelada por las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + b_p u(t) \\ y_p(t) &= h_p^T x_p(t)\end{aligned}\quad (5.9)$$

donde  $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , es la matriz de estado de la planta  $x_p \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $b_p$  y  $h_p$  son vectores  $\in \mathbb{R}^n$  cuya entrada  $u(t)$  y salida  $y_p(t) \in \mathbb{R}$ . Además, la función de transferencia de la planta puede ser representada como

$$\frac{Y_p(s)}{U(s)} = W_p(s) = h_p^T (sI - A_p)^{-1} b_p = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (5.10)$$

En que  $Z_p(s)$  y  $R_p(s)$  son polinomios mónicos de orden  $n - 2$  y  $n$  respectivamente.  $k_p$  es un parámetro de ganancia constante, cuyo signo es conocido y sin pérdida de generalidad, lo consideraremos positivo a lo largo de todo el análisis ( $k_p > 0$ ) y  $Z_p(s)$  es Hurwitz. Además, se supone que los parámetros de la planta (ganancia  $k_p$  y coeficientes de los polinomios  $Z_p(s)$  y  $R_p(s)$ ) son desconocidos.

Por otro lado, la función de transferencia del modelo de referencia  $W_m(s)$ , la cual tiene una entrada de referencia  $r(t)$  y salida  $y_m(t) \in \mathbb{R}$  la cual se desea que siga la salida de la planta  $y_p(t)$  se puede representar como

$$\frac{Y_m(s)}{R(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (5.11)$$

cuyo grado relativo es igual al de la planta, es decir,  $n_m^* = 2$  con  $Z_m(s)$  y  $R_m(s)$  polinomios mónicos también de orden  $n - 2$  y  $n$  respectivamente. Entonces, el objetivo de diseñar un controlador adaptivo es tal que el error de salida  $e_1(t) = y_p(t) - y_m(t)$  tienda a cero conforme  $t$  tiende a infinito, es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ .

En la subsección siguiente se presenta el marco teórico, sin ser exhaustivo, al menos fundamental, para llevar a cabo las pruebas de estabilidad asintótica del error de estado  $e(t)$  y de salida  $e_1(t)$  en el caso entero y estabilidad en el caso fraccionario. Este marco teórico fundamental será considerado para probar estabilidad y acotamiento de las señales del controlador adaptivo directo de orden fraccionario (CAMRD-OF) aplicado por vez primera, a un modelo de aeronave (Cessna-182 en nuestro caso), para el control del ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  (o pitch angle del inglés) el cual es considerado como parte del control longitudinal de una aeronave.

El modelo longitudinal de la aeronave se dedujo en la Sección 3 el cual fue representado por las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6,8485 & 0 & -19,2591 \\ -32,17 & 0 & -0,0456 & -19,4588 \\ 0 & 0,9877 & -0,0014 & -2,2329 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 34,7012 \\ 0 \\ 0,2162 \end{bmatrix} \delta_e(t) \quad (5.12)$$

$$y_p(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

en que

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6,8485 & 0 & -19,2591 \\ -32,17 & 0 & -0,0456 & -19,4588 \\ 0 & 0,9877 & -0,0014 & -2,2329 \end{bmatrix}, \quad b_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 34,7012 \\ 0 \\ 0,2162 \end{bmatrix} \quad y \quad (5.13)$$

$$h_p^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad y \quad x_p(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ u(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix}$$

Y cuya función de transferencia es

$$W_p(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{34,7012s^2 + 74,9025s + 4,2914}{s^4 + 9,127s^3 + 34,7561s^2 + 1,7542s + 0,8695} \quad (5.14)$$

O bien

$$W_p(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = 34,7012 \frac{s^2 + 2,1585s + 0,1234}{s^4 + 9,127s^3 + 34,7561s^2 + 1,7542s + 0,8695} \quad (5.15)$$

En que

$$k_p = 34,7012,$$

$$Z_p(s) = s^2 + 2,1585s + 0,1234 \quad y$$

$$R_p(s) = s^4 + 9,127s^3 + 34,7561s^2 + 1,7542s + 0,8695.$$

Luego, dependiendo de los requerimientos del sistema de control (máximo sobrepaso, tiempo de asentamiento, etc.) el diseñador puede escoger el modelo de referencia más adecuado para sus propósitos. El modelo de referencia utilizado para nuestro caso, es un modelo simple de segundo orden el cual sí debe tener el mismo grado relativo ( $n^* = 2$ ) de la planta, sin embargo, se escogió un modelo que no presenta sobrepaso para evitar en lo posible, el sobrepaso en el ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  (pitch angle del inglés) que es la variable que se desea controlar. A saber, el modelo de referencia escogido es

$$W_m(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \quad (5.16)$$

en que

$$k_m = 2$$

$$Z_m(s) = 1 \text{ y}$$

$$R_m(s) = s^2 + 3s + 2 .$$

Entonces, los parámetros ideales del controlador que se obtienen son [4]

$$\theta^* = \begin{bmatrix} k^* \\ \theta_{11}^* \\ \theta_{12}^* \\ \theta_{13}^* \\ \theta_0^* \\ \theta_{21}^* \\ \theta_{22}^* \\ \theta_{23}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05764 \\ 6,0155 \\ 11,4455 \\ 3,9685 \\ 0,075 \\ -0,7989 \\ -1,959 \\ -1,9953 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Luego, formando la matriz y vectores de la ecuación de error (4.49), se tiene que

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} A_p + b_p \theta_0^* h_p^T & b_p \theta_1^{*T} & b_p \theta_2^{*T} \\ l \theta_0^* h_p^T & \Lambda + l \theta_1^{*T} & l \theta_2^{*T} \\ l h_p^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, b_{mn} = \begin{bmatrix} b_p \\ l \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$h_{mn} = \begin{bmatrix} h_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

en que

$$k^* = \frac{k_m}{k_p} = 0,05764, \theta_0^* = 0,075, \theta_1^* = \begin{bmatrix} \theta_{11}^* \\ \theta_{12}^* \\ \theta_{13}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,0155 \\ 11,4455 \\ 3,9685 \end{bmatrix}, \theta_2^* = \begin{bmatrix} \theta_{21}^* \\ \theta_{22}^* \\ \theta_{23}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7989 \\ -1,959 \\ -1,9953 \end{bmatrix}$$

Además, la matriz  $\Lambda$  debe ser Hurwitz, y el par  $(\Lambda, l)$  controlable, por tanto, se escogió

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La cual está en su forma canónica controlable y cuyo polinomio característico es

$$|sI - \Lambda| = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s + 1)(s + 2)(s + 3)$$

Luego reemplazando los parámetros, vectores y matrices obtenidos, en la ecuación (5.18), se llega a que

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,6062 & -6,8485 & 0 & -19,2591 & 208,7471 & 397,1726 & 137,7117 & -27,7228 & -67,9797 & -69,2393 \\ -32,17 & 0 & -0,0456 & 19,4588 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0162 & 0,9877 & -0,0014 & -2,2329 & 1,3006 & 2,4745 & 0,858 & -0,1727 & -0,4235 & -0,4314 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,075 & 0 & 0 & 0 & 0,0155 & 0,4455 & -2,0315 & -0,7989 & -1,959 & -1,9953 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$b_{mn} = \begin{bmatrix} b_p \\ l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 34,7012 \\ 0 \\ 0,2162 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad h^T_{mn} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Se puede verificar que la matriz  $A_{mn}$  es Hurwitz ya que todos sus valores propios  $\lambda_i$  con  $i = 1, 2, \dots, 10$  pertenecen al semiplano izquierdo del plano complejo s.

Dada la gran dimensión de la matriz aumentada  $A_{mn}$ , se utilizó el comando `eig(Amn)` de Matlab el cual se encarga de calcular los valores propios de dicha matriz. Así entonces,

$$eig(A_{mn}) = \lambda = \begin{bmatrix} -3,9871 \\ -2,643 + j1,6149 \\ -2,643 - j1,6149 \\ -3 \\ -2 \\ -0,6696 + j0,9422 \\ -0,6696 - j0,9422 \\ -1 \\ -0,4864 \\ -0,0597 \end{bmatrix}.$$

Lo cual verifica que la Matriz  $A_{mn}$  es Hurwitz y por tanto se cumplen las exigencias del Teorema 1 (o Corolario 3), asegurando la estabilidad del sistema de control adaptivo propuesto.

A continuación, y como parte de trabajo teórico de esta Tesis, se propondrá un nuevo lema para abordar el análisis de estabilidad de la implementación particular propuesta que relaja la hipótesis (ii) del Teorema 1 (o Corolario 3), aplicada a la planta bajo estudio.

**Lema 5:** Sea un sistema o planta de orden  $n$  y grado relativo  $n^* = 2$  la cual está representada por las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + b_p u(t) \\ y_p(t) &= h_p^T x_p(t)\end{aligned}\quad (5.19)$$

Cuya ley de ajuste de los parámetros del controlador viene dada por,

$${}^c D_t^\alpha \phi(t) = {}^c D_t^\alpha \theta(t) = -\gamma \text{sgn}(k_p) e_1(t) \bar{\omega}(t) = -\gamma e_1(t) \bar{\omega}(t), \quad \phi(t_0) = 0$$

donde  $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , es la matriz de estado de la planta  $x_p \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $b_p$  y  $h_p$  son vectores  $\in \mathbb{R}^n$  cuya entrada  $u(t)$  y salida  $y_p(t) \in \mathbb{R}$ , en que  $Z_p(s)$  y  $R_p(s)$  son polinomios mónicos de orden  $n - 2$  y  $n$  respectivamente.  $k_p$  es un parámetro de ganancia constante, cuyo signo es conocido y sin pérdida de generalidad, lo consideraremos positivo a lo largo de todo el análisis ( $k_p > 0$ ) y  $Z_p(s)$  es Hurwitz. Además, se supone que los parámetros de la planta (ganancia  $k_p$  y coeficientes de los polinomios  $Z_p(s)$  y  $R_p(s)$ ) son desconocidos y cuyo modelo de referencia es también de grado relativo 2 ( $n_m^* = 2$ ) y Hurwitz, y cuya ecuación de error viene dada por,

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= A_{mn} e(t) + b_{rp} [\phi(t) \bar{\omega}(t)], & e(t_0) &= e_0 \\ e_1(t) &= h_{mn}^T e(t), & e_1(t_0) &= e_{10}\end{aligned}\quad (5.20)$$

en que  $A_{mn}$  es Hurwitz. Luego, dado que  $e(t)$  y  $\phi(t)$  son acotadas por parte (i) del Teorema 1, entonces las señales auxiliares  $\omega(t)$  (y  $\bar{\omega}(t)$ ) también serán acotadas.

**Demostración:** Suponiendo que  $e(t)$  y  $\phi(t)$  son uniformemente continuas y diferenciables, y basado en el Teorema 1 (o Corolario 3), en el cual se demostró que tanto  $e(t)$  y  $\phi(t)$  son acotados, entonces,  $\dot{e}(t)$  también será acotado ya que  $e(t)$  es acotado, diferenciable y uniformemente continuo. Así entonces, como las señales auxiliares  $\omega(t)$  (y  $\bar{\omega}(t)$ ) son parte de la ecuación para  $\dot{e}(t)$  (ecuación (5.20)), entonces  $\omega(t)$  debe ser acotada y  $\bar{\omega}(t)$  también será acotada puesto que  $\bar{\omega}(t) = \frac{1}{(s+a)} \omega(t)$  dado que  $\frac{1}{(s+a)}$  es Hurwitz, lo cual concluye la prueba.

Este lema nos permite relajar la hipótesis que se debe considerar en el Teorema 1, en que para probar que las derivadas fraccionarias sean acotadas, se debe imponer que la señal auxiliar  $\omega(t)$  sea acotada, cosa que no es necesario establecer en el caso en que  $\beta = 1$ . Otros casos, en los que  $\beta \in (0,1)$  se debe recurrir al Teorema 1 por ahora.

Más aún, si la señal auxiliar  $\omega(t)$  es acotada como se demuestra en el Lema 5, entonces, el Teorema 1, nos garantiza que la norma al cuadrado del error de estado  $\|e(t)\|^2$  y salida  $|e_1(t)|^2$  tienden a 0 conforme  $t$  tiende a infinito.

Así entonces, se ha logrado probar la estabilidad del sistema de control adaptivo fraccionario propuesto.

**Observación 3:** Este lema también es válido para el caso general en que  $n \geq 2$  siempre y cuando  $\beta = 1$  o las ecuaciones de error sean del tipo de la ecuación (5.20).

### 5.3. Control adaptivo por modelo de referencia directo de orden entero y fraccionario (CAMRD y CAMRD-OF) aplicados al F-16 cuyo grado relativo es $n^* = 1$

Dado que, para este caso, se dispone de un modelo más simple de la planta el cual es un modelo de segundo orden y grado relativo 1 ( $n^* = 1$ ), entonces el análisis es más sencillo que el caso del Cessna-182 visto en el apartado anterior. Este hecho de la simpleza del modelo de aviones de combate se debe por lo general, a restricciones en la información cuando se trata de asuntos de seguridad nacional.

Así entonces, el modelo matemático del F-16 [3] visto en la sección 4 es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1,0189 & 0,9051 \\ 0,8223 & -1,0774 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0022 \\ -0,1756 \end{bmatrix} \delta_e(t) \\ y(t) &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.21)$$

en que  $y(t) = q(t)$  o pitch rate.

y la matriz  $A = \begin{bmatrix} -1,0189 & 0,9051 \\ 0,8223 & -1,0774 \end{bmatrix}$ , el vector  $B = \begin{bmatrix} -0,0022 \\ -0,1756 \end{bmatrix}$  y el vector

$C = [0 \quad 1]$ .

Además, la función de transferencia entre la salida de interés  $q(t)$  y la entrada  $\delta_e(t)$  viene dada por

$$\frac{Q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-0,1756s - 0,1807}{s^2 + 2,0963s + 0,3535} \quad (5.22)$$

Sin embargo, al igual que en el caso de avión Cessna-182, cambiaremos el signo del numerador de tal manera que la salida  $q(t) = \dot{\theta}(t)$  sea positiva cuando el ángulo del deflector de cola  $\delta_e(t)$  gire hacia arriba (al revés de la notación clásica que considera positivo el ángulo del deflector de cola cuando esta gira hacia abajo). Con esto, se logra tener un sistema positivo, es decir

$$\frac{Q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{0,1756s + 0,1807}{s^2 + 2,0963s + 0,3535} = 0,1756 \frac{s + 1,02904}{s^2 + 2,0963s + 0,3535} \quad (5.23)$$

Luego, la ley de control es

$$u(t) = \theta^T(t) \cdot \omega(t)$$

donde,

$\theta(t) = [k(t), \theta_1^T(t), \theta_0(t), \theta_2^T(t)]^T \in \mathfrak{R}^4$  y  $\omega(t) = [r(t), \omega_1^T(t), y_p(t), \omega_2^T(t)]^T \in \mathfrak{R}^4$  son el vector de parámetros del controlador y señales auxiliares respectivamente.



El vector de las señales auxiliares está definido por las siguientes ecuaciones representadas en variables de estado, a saber,

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1(t) &= \Lambda\omega_1(t) + lu(t) \\ \dot{\omega}_2(t) &= \Lambda\omega_2(t) + ly_p(t)\end{aligned}$$

con  $k(t)$ ,  $\theta_0(t)$ ,  $r(t)$ ,  $y_p(t) \in \mathfrak{R}$ , y  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ ,  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t) \in \mathfrak{R}$ .  $(\Lambda, l)$  es un par controlable arbitrario, en que  $\Lambda \in \mathfrak{R}$  es un escalar asintóticamente estable o Hurwitz y  $l \in \mathfrak{R}$ . Por simplicidad, podemos escoger  $(\Lambda, l)$  en su forma canónica controlable.

En este caso, la ecuación de error de salida puede ser expresada como.

$$e_1(t) = \frac{k_p}{k_m} W_m(s) \phi^T(t) \omega(t) \quad (5.24)$$

cuyo vector de error de parámetros del controlador  $\phi^T(t)$  viene dado por,

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \phi_1(t) \\ \phi_0(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(t) - k^* \\ \theta_1(t) - \theta_1^* \\ \theta_0(t) - \theta_0^* \\ \theta_2(t) - \theta_2^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

en que  $k^*$ ,  $\theta_1^*$ ,  $\theta_0^*$  y  $\theta_2^*$  son los valores ideales de los parámetros del controlador adaptivo que hacen que la planta en conjunto con el controlador sea idéntica a la función de transferencia del modelo de referencia  $W_m(s)$  que es lo que se desea conseguir, puesto que como ya se mencionó en el apartado anterior (Cessna-182), de ese modo, se consigue que el error de control  $e(t) = y_p(t) - y_m(t)$  tienda a cero ( $e(t) = 0$ ) conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Notar que  $\psi(t)$ ,  $\phi_0(t)$ ,  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t) \in \mathbb{R}$ .

Dado que el grado relativo de la planta es 1, determinar las leyes de ajuste es sencillo y pueden obtenerse directamente de la ecuación de error. Además, en este caso,  $W_m(s)$  es estrictamente real positiva (e.r.p.),

$$e_1(t) = \frac{k_p}{k_m} W_m(s) \phi^T(t) \omega(t) \quad (5.25)$$

Luego, la señal de control es simplemente,

$$u(t) = \theta^T(t) \omega(t) \quad (5.26)$$

Cuyas leyes de ajuste para el caso entero o clásico son

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\phi}(t) = -\text{sgn}(k_p) e_1(t) \omega(t) \quad (5.27)$$

Entonces se puede demostrar (ver sección 4), que el sistema con control adaptivo es asintóticamente estable y  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  para el caso entero.

Ahora bien, en el caso fraccionario, las leyes de ajuste serán

$${}^C_0D_t^\alpha \theta(t) = {}^C_0D_t^\alpha \phi(t) = -\text{sgn}(k_p) e_1(t) \omega(t) \quad (5.28)$$

Para las cuales se debe demostrar estabilidad, lo cual se analiza en la sección siguiente.

#### 5.4. Análisis de estabilidad del control adaptivo CAMRD-OF aplicado al F-16

Para facilidad del lector, reescribiremos las ecuaciones del error para el caso del F-16 (planta de segundo orden y grado relativo igual a 1).

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_{mn} e(t) + b[\phi(t) \omega(t)], & e(t_0) &= e_0 \\ e_1(t) &= h_{mn}^T e(t), & e_1(t_0) &= e_{10} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Cuya ley de ajuste de los parámetros del controlador viene dada por,

$${}^C_{t_0}D_t^\alpha \phi(t) = {}^C_{t_0}D_t^\alpha \theta(t) = -\gamma e_1(t) \omega(t), \quad \phi(t_0) = 0$$

Al igual que el caso de la demostración de estabilidad del Cessna-182, aplicando el Teorema 1 o su simplificación (Corolario 3) se concluye que el sistema de F-16 es estable según Lyapunov. Las ecuaciones de la planta para el F-16 difieren en las del Cessna-182 en que no es necesario usar el vector  $\bar{\omega}(t) = \frac{1}{s+1} \omega(t)$  el cual permitía que la ecuación de error fuera estrictamente real positiva (e.r.p.), sino que se utiliza directamente  $\omega(t)$  y dado que el grado relativo de la planta, en el caso del F-16, es 1 ( $n^* = 1$ ), se garantiza que la ecuación de error es e.r.p. Además, también por Teorema 1, se garantiza que el valor medio de la norma cuadrada del error de estado  $\overline{\|e(t)\|^2}$  es  $o(t^{\varepsilon-\alpha}) \forall \varepsilon > 0$ , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{\alpha-\varepsilon} \frac{\int_{t_0}^t \|e(\tau)\|^2 d\tau}{t} \right] = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.20)$$

Además, utilizando el Lema 5 se puede demostrar que las señales que componen el vector de señales auxiliares  $\omega(t)$  son acotadas.

Luego, como la función de transferencia es

$$W_p(s) = \frac{Q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{0,1756s + 0,1807}{s^2 + 2,096s + 0,3535} \quad (5.21)$$

O bien,

$$W_p(s) = \frac{Q(s)}{\delta_e(s)} = 0,1756 \frac{s + 1,02904}{s^2 + 2,0963s + 0,3535} \quad (5.22)$$

En que

$$k_p = 0,1756,$$

$$Z_p(s) = s + 1,02904 \text{ y}$$

$$R_p(s) = s^2 + 2,0963s + 0,3535.$$

Luego, dependiendo de los requerimientos del sistema de control (máximo sobrepaso, tiempo de asentamiento, etc.) el diseñador puede escoger el modelo de referencia más adecuado para sus propósitos. El modelo de referencia utilizado para nuestro caso, es un modelo simple de primer orden de dinámica relativamente rápida ya que el polo se ubicará en  $s = -2$ . A saber, el modelo de referencia escogido es

$$W_m(s) = \frac{Q(s)}{R(s)} = \frac{2}{s + 2} \quad (5.23)$$

en que

$$k_m = 2$$

$$Z_m(s) = 1 \text{ y}$$

$$R_m(s) = s + 2 .$$

Entonces, los parámetros ideales del controlador que se obtienen son [4]

$$\theta^* = \begin{bmatrix} k^* \\ \theta_1^* \\ \theta_0^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,43 \\ -0,0326 \\ -5,1657 \\ -4,24286 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

en que la matriz  $\Lambda$  debe ser Hurwitz, y el par  $(\Lambda, l)$  controlable y, por tanto, se escogieron

$$\Lambda = -1, l = 1.$$

Luego, formando la matriz y vectores de la ecuación de error (4.49), se tiene que

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} A_p + b_p \theta_0^* h_p^T & b_p \theta_1^{*T} & b_p \theta_2^{*T} \\ l \theta_0^* h_p^T & \Lambda + l \theta_1^{*T} & l \theta_2^{*T} \\ l h_p^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, b_{mn} = \begin{bmatrix} b_p \\ l \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$h_{mn} = \begin{bmatrix} h_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

en que

$$k^* = \frac{k_m}{k_p} = 11,43, \theta_0^* = -0,0326, \theta_1^* = -5,1657 \text{ y } \theta_2^* = -4,24286$$

La cual está en su forma canónica controlable y cuyo polinomio característico es

$$|sI - \Lambda| = (s + 1)$$

Luego reemplazando los parámetros, vectores y matrices obtenidos, en la ecuación (5.25), se llega a que

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} -1,0189 & 0,8937 & -0,0001 & -0,0093 \\ 0,8223 & -1,9845 & -0,0057 & -0,7450 \\ 0 & -5,1657 & -1,0326 & -4,2429 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b_{mn} = \begin{bmatrix} b_p \\ l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0022 \\ 0,1756 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad h^T_{mn} = [0 \ 1 \ 0 \ 0].$$

Se puede verificar que la matriz  $A_{mn}$  es Hurwitz ya que todos sus valores propios  $\lambda_i$  con  $i = 1, 2, \dots, 4$  pertenecen al semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ .

Luego, utilizando el comando `eig(Amn)` de Matlab se calculan los valores propios de dicha matriz. Así entonces,

$$\text{eig}(A_{mn}) = \vec{\lambda} = \begin{bmatrix} -2,0532 \\ -1,0265 + j0.2162 \\ -1,0265 - j0.2162 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Lo cual verifica que la Matriz  $A_{mn}$  es Hurwitz y por tanto se cumplen las exigencias del Teorema 1, asegurando la estabilidad del sistema de control adaptivo propuesto.

## 6. Simulaciones y análisis de resultados

Adicionalmente, y para efectos de comparación de los diferentes controladores diseñados, definiremos una funcional de costo cuadrática del tipo usada en problemas de optimización, es decir,

$$J = \int_{t_0=0}^t (\omega_e \cdot e^2(t) + \omega_u \cdot u^2(t)) dt \quad (6.1)$$

El cual contiene los clásicos índices de desempeño, a saber, el  $ISE = \int_{t_0=0}^t e^2(t) dt$  e  $ISI = \int_{t_0=0}^t u^2(t) dt$ . En esta Tesis, dependiendo del caso, también se usarán funcionales de costo normalizadas de tal manera que las contribuciones del error  $e(t)$  y el esfuerzo de control  $u(t)$  sean equivalentes en magnitud o, dicho de otra manera, tengan el mismo peso a la hora de evaluar la integral. A saber, el ISE e ISI normalizados  $(\int_{t_0=0}^t \frac{e^2(t)}{\sigma_e(t)} dt$  e  $\int_{t_0=0}^t \frac{u^2(t)}{\sigma_u(t)} dt)$  respectivamente. Sin embargo, se debe tener cuidado con el uso estas expresiones puesto que  $\sigma_e(t)$  o  $\sigma_u(t)$  pueden ser cero para algún tiempo  $t$  indefiniendo con ello las integrales. En esos casos, se recurre a las clásicas expresiones de las funcionales de costo (las cuales no consideran el término de normalización  $\sigma(t)$ ). Además, no olvidar que el diseñador puede cambiar la importancia de cada variable cambiando el valor de los ponderadores  $\omega_e$  y  $\omega_u$ . Finalmente, se incluirán otros términos que amplían el alcance de la funcional de costo recalcando siempre que estos términos adicionales también son parte del criterio del diseñador.

Luego, la funcional de costo a utilizar será,

$$J_{norm} = \omega_{ess} e_{ss} + \omega_{du} \int_{t_0=0}^t \left| \frac{du}{dt} \right| dt + \int_{t_0=0}^t \left( \omega_e \cdot \frac{e^2(t)}{\sigma_e(t)} + \omega_u \cdot \frac{u^2(t)}{\sigma_u(t)} \right) dt \quad (6.2)$$

en la cual se ha incorporado la ponderación del error de control en régimen permanente  $e_{ss}$  y la integral de la magnitud de la razón de cambio  $\left| \frac{du}{dt} \right|$  del esfuerzo de control. Finalmente, para la implementación de los controladores adaptivos de orden fraccionario (CAMRD-OF), se escogieron diversos valores para el operador de derivación  $\alpha$  de las constantes del controlador en forma arbitraria obteniéndose buenos resultados. Esto inspiró posteriormente, la aplicación de un algoritmo de optimización denominado optimización por enjambre de partículas (PSO o Particle Swarm Optimization del inglés) por su facilidad de implementación en sistemas complejos y adecuada velocidad de convergencia aplicado a los órdenes de derivación  $\alpha$ 's de las leyes de ajuste adaptivas junto a las ganancias  $\gamma$ 's (igual a 1 en un principio), las cuales están relacionadas con la velocidad de convergencia de los parámetros  $k$  y  $\theta$  del controlador CAMRD-OF.

En un principio y para facilidad en la comparación de los diferentes controladores, se consideró que las ecuaciones de ajuste tuvieran el mismo orden de derivación  $\alpha$  y las mismas ganancias  $\gamma_i$  en el proceso de optimización (usando la técnica PSO). Luego, este mismo proceso de optimización se realizará para el controlador de orden entero, en el cual, lo único que se

optimizará, serán las ganancias  $\gamma_i$  las cuáles serán iguales en todas las leyes de ajuste, al igual que el caso fraccionario con la diferencia que en este caso  $\alpha = 1$ .

### 6.1. Pruebas de simulación del control CAMRD-OF aplicado al modelo longitudinal de la aeronave Cessna 182

Para mejor comprensión del lector, reescribiremos las ecuaciones de la planta a controlar (modelo longitudinal de la aeronave Cessna-182) las cuales fueron deducidas en la Sección 3 y vienen dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6,8485 & 0 & -19,2591 \\ -32,17 & 0 & -0,0456 & -19,4588 \\ 0 & 0,9877 & -0,0014 & -2,2329 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 34,7012 \\ 0 \\ 0,2162 \end{bmatrix} \delta_e(t) \quad (6.3)$$

$$y_p(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

en que,

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6,8485 & 0 & -19,2591 \\ -32,17 & 0 & -0,0456 & -19,4588 \\ 0 & 0,9877 & -0,0014 & -2,2329 \end{bmatrix}, \quad b_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 34,7012 \\ 0 \\ 0,2162 \end{bmatrix} \quad y \quad (6.4)$$

$$h_p^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad y \quad x_p(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ u(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix}$$

cuya función de transferencia es

$$W_p(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = 34,7012 \frac{s^2 + 2,1585s + 0,12337}{s^4 + 9,127s^3 + 34,7561s^2 + 1,7542s + 0,8695} \quad (6.5)$$

en que

$$k_p = 34,7012,$$

$$Z_p(s) = s^2 + 2,1585s + 0,1233 \quad y$$

$$R_p(s) = s^4 + 9,127s^3 + 34,7561s^2 + 1,7542s + 0,8695.$$

Por tanto, la planta es un sistema de orden 4 ( $n = 4$ ) y grado relativo 2 ( $n^* = 2$ ). Además, el modelo de error asociado a este sistema es precisamente el modelo de error tipo 3 dado por la ecuación (5.20), es decir

$$e_1(t) = \frac{k_p}{k_m} \bar{W}_m(s) \phi^T(t) \bar{\omega}(t) \quad (6.6)$$

en que  $\bar{W}_m(s) = W_m(s)L(s)$  y  $\bar{\omega}(t) = L(s)^{-1}\omega(t)$  con  $L(s) = (s + a)$  Hurwitz.

Por otro lado, en el caso particular de la implementación de este controlador, en que la planta es de grado relativo 2, el modelo de referencia, no necesita ser e.r.p. (estrictamente real positivo) y puede ser escogido con la única condición, que su grado relativo sea igual o mayor al de la planta ( $n_m^* \geq 2$ ) y por supuesto, que éste, sea Hurwitz o asintóticamente estable.

Así entonces, realizaremos pruebas de simulación de los controladores CAMRD y CAMRD-OF considerando un modelo simple de segundo orden y grado relativo  $n_m^* = 2$ . A saber,

$$W_m(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \quad (6.7)$$

En que

$$k_m = 2$$

$$Z_m(s) = 1 \text{ y}$$

$$R_m(s) = s^2 + 3s + 2 .$$

Es importante notar que la respuesta de la planta al escalón en lazo abierto presenta una característica marcadamente oscilatoria de larga duración (300 seg. aproximadamente) antes de lograr el estado estable. Esto se debe a que los 2 pares de polos de la función de transferencia, son complejos conjugados. Un par de polos contiene una frecuencia de oscilación rápida (oscilación corta o short oscillation del inglés) y el otro par de polos presenta una frecuencia de oscilación más lenta (oscilación pugoide o phugoid oscillation del inglés). Por lo tanto, es conveniente escoger un modelo de referencia que no presente sobrepaso.

En la Figura 6.1, se muestra la respuesta al escalón de la planta en lazo abierto.

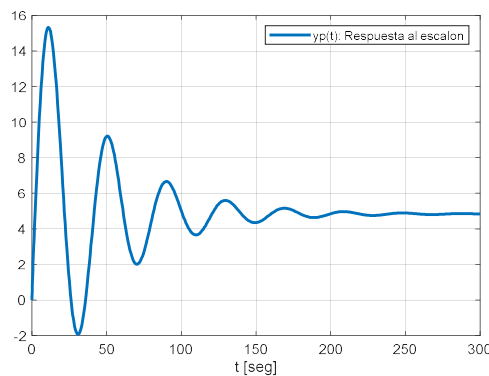


Figura 6.1: Respuesta al escalón unitario de la planta en lazo abierto.

A continuación, en la Tabla 6.1 se muestran los detalles de la implementación de los controladores CAMRD y CAMRD-OF.

Tabla 6.1: Detalles de la implementación del CAMRD y CAMRD-OF

Modelo de referencia	$W_m(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$
Planta	$W_p(s) = \frac{34,7012s^2 + 74,9025s + 4,2914}{s^4 + 9,127s^3 + 34,7561s^2 + 1,7542s + 0,8695}$
Ley de control	$\theta(t) = [k(t) \quad \theta_1^T(t) \quad \theta_0(t) \quad \theta_2^T(t)]^T \in \mathbb{R}^8$ $\omega(t) = [r(t) \quad \omega_1^T(t) \quad y_p(t) \quad \omega_2^T(t)]^T \in \mathbb{R}^8$ $u(t) = \theta^T(t)\omega(t) - e_1(t)\bar{\omega}^T(t)\bar{\omega}(t)$
Señales auxiliares	$\dot{\omega}_1(t) = \Lambda\omega_1(t) + lu(t)$ $\dot{\omega}_2(t) = \Lambda\omega_2(t) + ly_p(t)$ $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ $l = [0 \ 0 \ 1]^T$
Filtro de primer orden L(s) con a=1.	$L(s) = \frac{1}{(s+a)} = \frac{1}{(s+1)}$
Error de salida	$e_1(t) = \frac{k_p}{k_m} \bar{W}_m(s)\phi^T(t)\bar{\omega}(t)$ $\bar{W}_m(s) = (s+1)W_m(s) \text{ y } \bar{\omega}(t) = \frac{1}{(s+1)}\omega(t)$
Leyes de ajuste entera	$\dot{\theta}(t) = -\gamma e_1(t)\bar{\omega}(t)$
Leyes de ajuste fraccionarias	${}_{t_0}^C D_t^\alpha \theta(t) = -\gamma e_1(t)\bar{\omega}(t)$

Las leyes de ajuste fraccionaria fueron implementadas utilizando la Toolbox Ninteger para Matlab [50]. Específicamente, se utilizó el bloque NID, el cual está basado en el método de aproximación de Oustaloup [51]. En este caso, se utilizaron 5 polos, 5 ceros y el intervalo de frecuencia fue  $f \in [0,01, 100]$  rad/seg. Es importante mencionar que se logran mejores aproximaciones si se amplía el ancho de banda (ej:  $f \in [0,010, 1000]$ ) pero a costa de aumentar el tiempo de simulación.

### 6.1.1. Resultados preliminares de las simulaciones para el Cessna 182

En esta sección, se presentan resultados preliminares de comparación entre el CAMRD y CAMRD-OF escogiendo en forma directa, algunos valores del orden de derivación fraccionario  $\alpha$  en las leyes de ajuste, pero que servirán como base para posteriores análisis comparativos de los controladores.

Además, se consideraron los siguientes valores para los ponderadores o pesos;  $\omega_e = 2$  and  $\omega_u = 1$ ,  $\omega_{du} = 1$  y  $\omega_{es} = 1$ . Es útil mencionar que estos valores pueden ser escogidos a gusto del diseñador. El tiempo de simulación fue de 100 segundos ( $T_{sim} = 100$ ).

Es importante notar que la funcional de costo también es escogida por el diseñador y puede incluir más o menos términos de diseño.



En la Figura 6.2, se muestran las respuestas de la planta con control para diferentes valores de  $\alpha$ .

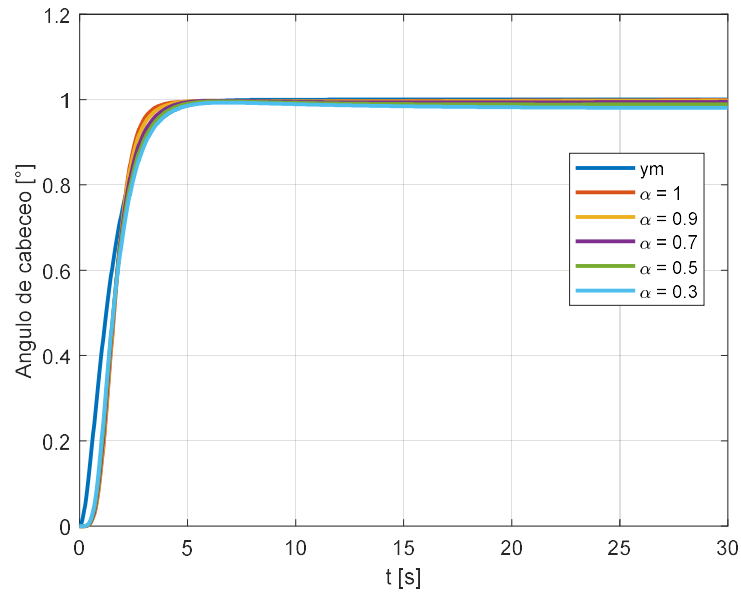


Figura 6.2: Ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF para diversos órdenes de derivación  $\alpha$ .

Para notar mejor el comportamiento transiente y estacionario de la repuesta o ángulo de cabeceo  $\theta(t)$ , se realizaron acercamientos, los cuales se muestran en las figuras 6.3 y 6.4 respectivamente.

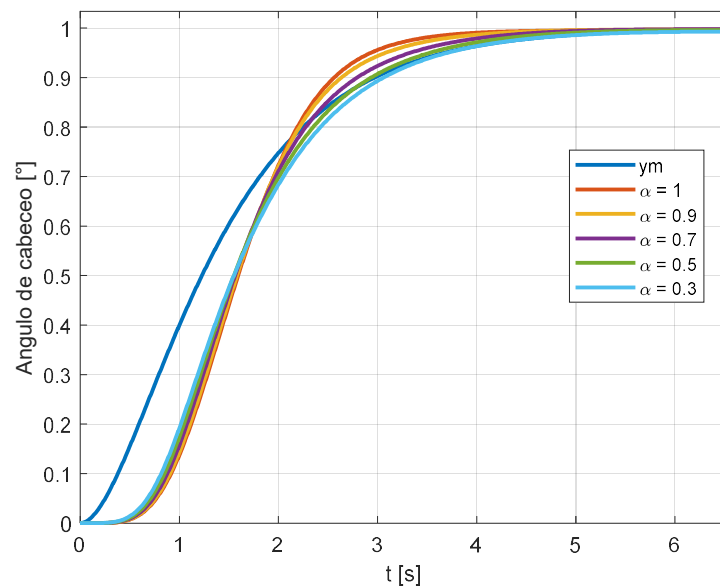


Figura 6.3: Ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF para diversos órdenes de derivación  $\alpha$  durante el período transiente de la respuesta.

De la Figura 6.3, se aprecia un comportamiento similar de las respuestas, sin embargo, la que presenta mayor diferencia con la referencia es para el caso de orden entero ( $\alpha = 1$ ). Se nota un mayor pronunciamiento de la respuesta en los primeros instantes. Por otro lado, si el caso fuera seguir un escalón y no el modelo de referencia, entonces presentaría un mejor desempeño respecto de los demás casos. No olvidar que se desea alcanzar un mínimo de la funcional de costo (es decir, un menor  $J_{norm}$ ) y, por tanto, también es importante mantener un esfuerzo de control lo más reducido posible.

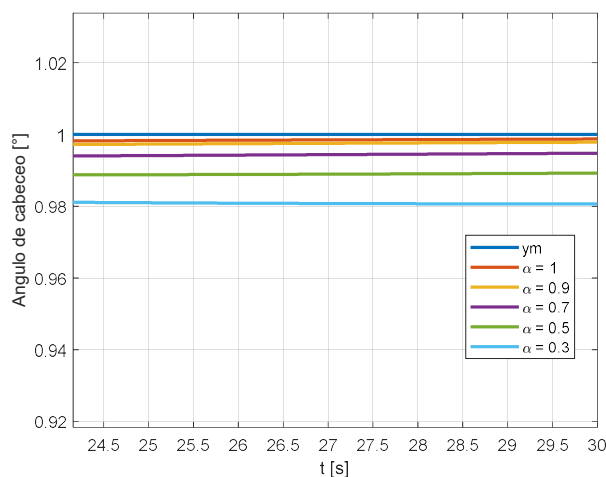


Figura 6.4: Ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF para diversos órdenes de derivación  $\alpha$  cercano al estado estacionario de la respuesta.

En este caso, se aprecia que a medida que  $\alpha$  disminuye, la respuesta comienza a deteriorarse en el sentido que el error de control aumenta. Esto es más evidente para el caso en  $\alpha = 0,5$  y  $\alpha = 0,3$ . Para el caso de  $\alpha = 0,9$  y  $\alpha = 0,7$ , estos errores se mantienen dentro de límites aceptables, en particular el caso de  $\alpha = 0,9$  el cual es muy similar al caso entero. También, es importante considerar el caso en que el sistema se vea sujeto a perturbaciones, y por lo tanto, será importante no tan solo considerar el error de estado estacionario, sino también, la robustez que pueda presentar el controlador.

A continuación, en la Tabla 6.2, se muestra el resultado de las simulaciones preliminares.

Tabla 6.2: Funcional de costo  $J_{norm}$  para el control CAMRD y CAMRD-OF para diversos órdenes de derivación  $\alpha$  y ganancia de convergencia adaptiva  $\gamma = 1$ .

	$\gamma$	$\alpha$	$ISE + ISI$	$J_{norm}$
CAMRD	1	1	3,2249	11,25
CAMRD-OF	1	0,9	3,2157	10,96
	1	0,7	3,1925	10,40
	1	0,5	3,1616	9,977
	1	0,3	3,1218	9,781

De la Tabla 6.2 se puede apreciar que el mínimo  $J_{norm}$  se logra con órdenes de derivación  $\alpha$  menores, lo que nos lleva a suponer que debe existir un óptimo de la funcional de costo distinto del caso entero ( $\alpha = 1$ ) o simplemente CAMRD clásico.

### 6.1.2. Resultados usando optimización PSO para el Cessna 182

En el proceso de optimización, el cual es definido por el diseñador, usaremos el algoritmo de optimización denominado optimización por enjambre de partículas (Particle Swarm Optimization del inglés o PSO) [20, 21] dada su facilidad de implementación para la optimización de sistemas complejos. Además, con el objetivo de minimizar el tiempo de ejecución del algoritmo, supondremos en una primera instancia, que todos los órdenes de derivación de las leyes de ajuste  $\alpha$ 's son idénticos al igual que todas las ganancias adaptativas  $\gamma$ 's, por lo tanto, tendremos solo 2 valores de los parámetros a optimizar. Más adelante, realizaremos una optimización completa en la cual ajustaremos los 16 parámetros para el CAMRD-OF, a saber, 8 ganancias adaptativas más 8 órdenes de derivación correspondientes a las leyes de ajuste. De igual manera, para el caso de optimización para CAMRD entero o clásico, solo se deben optimizar 8 parámetros.

Recordando la funcional de costo

$$J_{norm} = \omega_{ess} e_{ss} + \omega_{du} \int_{t_0=0}^t \left| \frac{du}{dt} \right| dt + \int_{t_0=0}^t \left( \omega_e \cdot \frac{e^2(t)}{\sigma_e(t)} + \omega_u \cdot \frac{u^2(t)}{\sigma_u(t)} \right) dt \quad (6.8)$$

En general, los pesos que acompañan a cada termino, son definidos por el diseñador. Así, por ejemplo, si el diseñador considera que es más relevante mantener valores más moderados del esfuerzo de control, entonces aumenta las ponderaciones o pesos que acompañan a dichos términos.

Para este proceso de optimización, se escogieron los siguientes pesos,

$\omega_{es} = 1$ ,  $\omega_{du} = 1$ ,  $\omega_e = 2$  y  $\omega_u = 1$  y cuyo tiempo de simulación fue de 100 [s].

En un primer proceso de optimización el cual denominaremos optimización simple, consideraremos que las ganancias adaptativas  $\gamma$  serán idénticas entre si al igual que los órdenes de derivación  $\alpha$ .

En la Tabla 6.3 se aprecian los valores óptimos obtenidos para  $\gamma$  y  $\alpha$ .

Tabla 6.3: Funcional de costo  $J_{norm}$  optimizada por PSO para control CAMRD y CAMRD-OF.

	$\gamma$	$\alpha$	$ISE + ISI$	$J_{norm}$
DMRAC-PSO	4,2596	1	3,2001	10,6495
DMRAC-OF-PSO	4,6618	0,3	3,1433	9,2980

De la Tabla 6.3 se puede notar un menor valor de la funcional de costo para el caso del control adaptivo fraccionario versus el control adaptivo de orden entero o clásico.

A continuación, se muestran gráficas de los ángulos de cabeceo para los casos de control adaptivo fraccionario y entero o clásico optimizados con sus respectivas ganancias óptimas para cada caso.

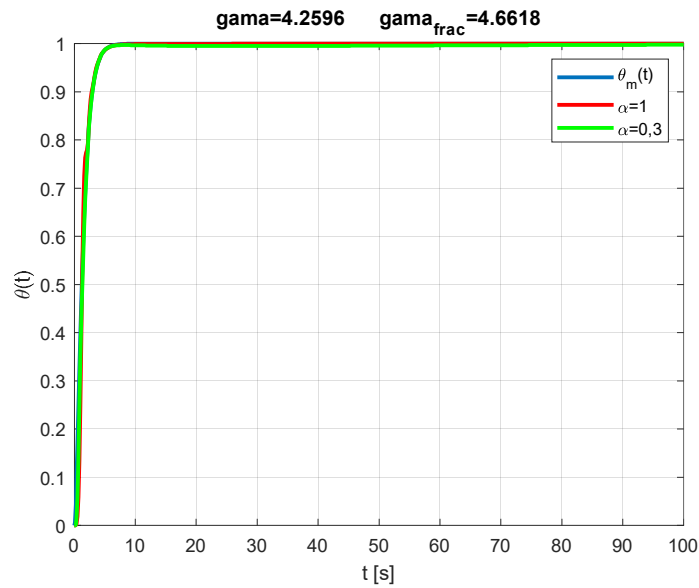


Figura 6.5: Angulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD optimizados.

De la Figura 6.5 se aprecia un comportamiento similar de la salida  $\theta(t)$ . Sin embargo, si consideramos el periodo transiente (Figura 6.6), vemos que la salida en el caso del control clásico no se ajusta tan bien a la salida al modelo de referencia, presentando menos suavidad respecto a la convergencia de como lo hace el control fraccionario.

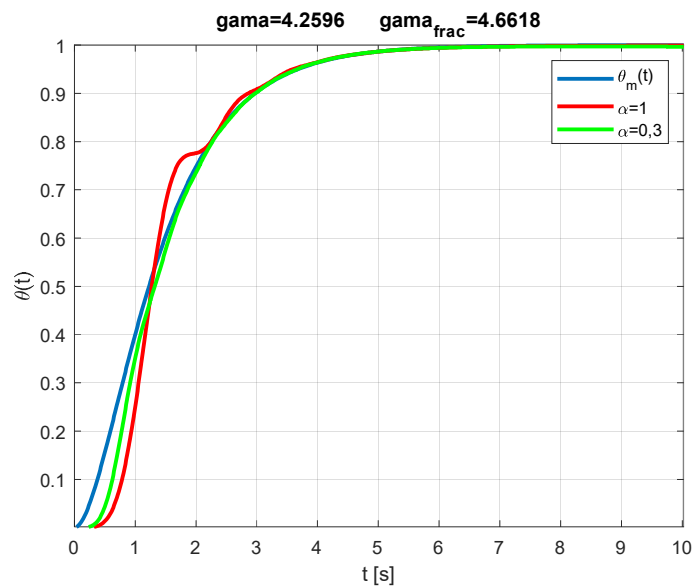


Figura 6.6: Angulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF CAMRD optimizados durante el período transiente.

Más aún, si observamos el esfuerzo de control graficado en las figura 6.7 y 6.8, nos podemos dar cuenta que si bien, en el régimen permanente las curvas son similares, se nota un peak más pronunciado, en el régimen transiente, para el caso entero o CAMRD, lo cual es una observación interesante en el sentido que, si bien los comportamientos de las salidas controladas pueden ser similares (aunque con más brusquedad en el periodo transiente para el caso clásico), el esfuerzo de control es mayor en el caso entero o clásico.

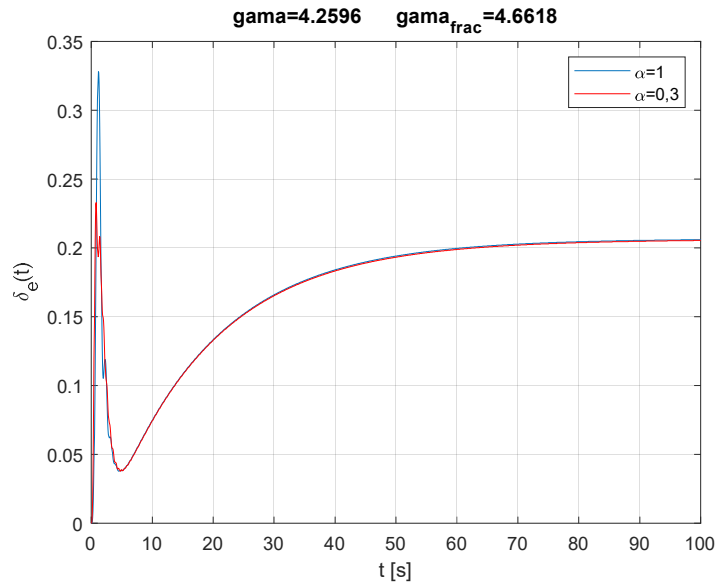


Figura 6.7: Esfuerzo de control  $\delta_e(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD optimizados.

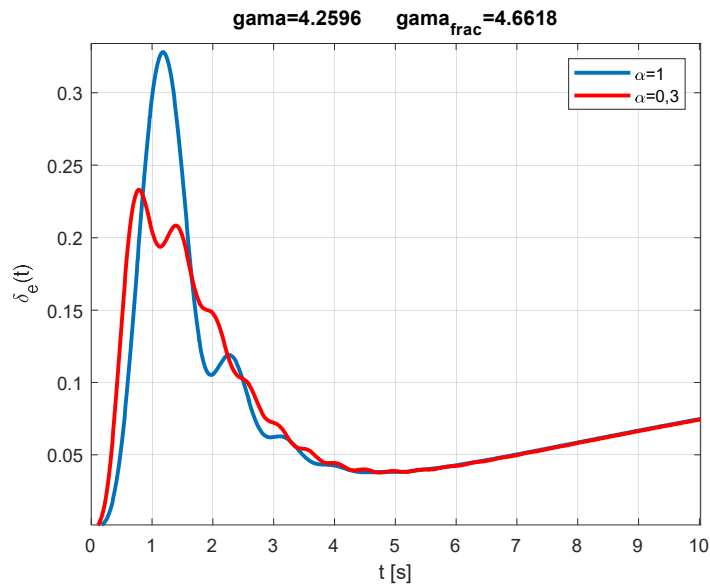


Figura 6.8: Esfuerzo de control  $\delta_e(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD optimizados en el período transiente.

En la Figura 6.8 se aprecia de mejor manera el peak más pronunciado del esfuerzo de control para el caso entero.

Finalmente, llevando a cabo el proceso de optimización más completo, el cual denominaremos optimización exhaustiva, es decir, considerando ordenes de derivación y ganancias adaptivas diferentes para las leyes de ajuste del CAMRD-OF. Además, se consideraron 50 iteraciones y  $\alpha \in (0, 1]$ . Para efectos prácticos de la optimización, se consideró una cota inferior de  $\alpha = 0,3$  en el orden de derivación puesto que, para valores menores de  $\alpha$ , la convergencia del algoritmo de derivación fraccionaria aplicado al caso adaptivo, se hace muy difícil en cuanto a tiempo y costo computacional y a medida que  $\alpha$  se acerca a 0, puede no converger. Así entonces, los parámetros obtenidos fueron los siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 0,3 & \alpha_{11} &= 0,5315 & \alpha_{12} &= 1 & \alpha_{13} &= 1 \\ \alpha_0 &= 0,3 & \alpha_{21} &= 0,3 & \alpha_{22} &= 1 & \alpha_{23} &= 0,8608. \\ \gamma_k &= 5,6173 & \gamma_{11} &= 0,03 & \gamma_{12} &= 0,03 & \gamma_{13} &= 33,5375 \\ \gamma_0 &= 0,03 & \gamma_{21} &= 10,0493 & \gamma_{22} &= 0,03 & \gamma_{23} &= 0,11957. \end{aligned}$$

En la Figura 6.9 se puede apreciar la evolución de la función de fitness o función objetivo  $J_{norm}$  respecto al número de iteraciones del enjambre de partículas utilizadas en el algoritmo de optimización PSO.

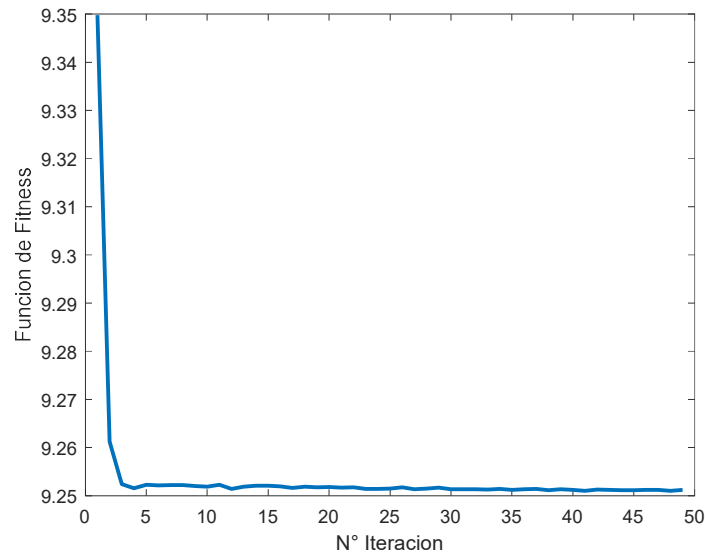


Figura 6.9: Evolución de la función objetivo o funcional de costo  $J_{norm}$  a medida que aumenta el número de iteraciones usando PSO y CAMRD-OF.

De la Figura 6.9 se puede apreciar que la disminución de la función de costo no es tan significativa a partir de la iteración 30. Esto nos da un indicio de la eficiencia y simplicidad del algoritmo PSO puesto que la convergencia al valor mínimo es relativamente rápida.

Por otro lado, los valores de los parámetros o ganancias adaptativas optimizadas para el caso CAMRD de orden entero o simplemente CAMRD, resultaron ser

$$\begin{aligned} \gamma_k &= 5,3633 & \gamma_{11} &= 0,1 & \gamma_{12} &= 0,1 & \gamma_{13} &= 49,58 \\ \gamma_0 &= 0,1 & \gamma_{21} &= 0,1 & \gamma_{22} &= 7,6837 & \gamma_{23} &= 0,1. \end{aligned}$$

Al igual que el caso anterior, en la Figura 6.9 se muestra la evolución de la función objetivo o fitness para cada nueva iteración del enjambre de partículas para el caso de CAMRD de orden entero.

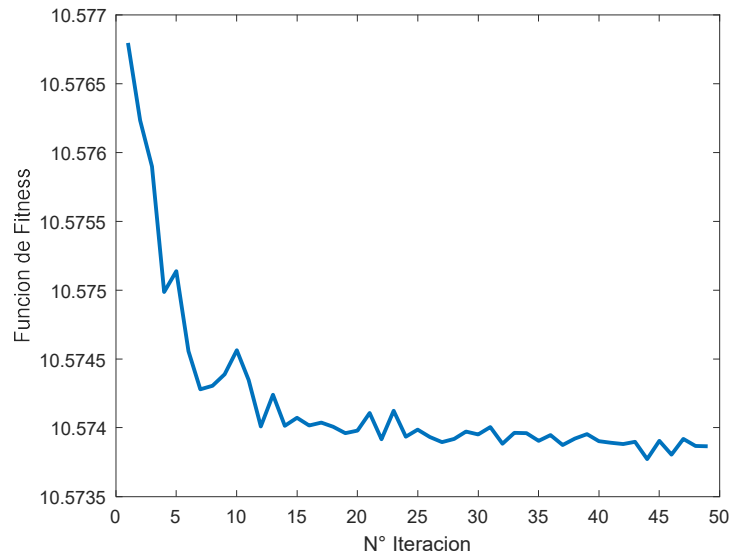


Figura 6.10: Evolución de la función objetivo o funcional de costo  $J_{norm}$  a medida que aumenta el número de iteraciones usando PSO y CAMRD.

De las figuras 6.9 y 6.10, es interesante notar una mayor rapidez de convergencia, a un valor estable de la función objetivo, en el caso fraccionario (Figura 6.9) respecto del caso entero (Figura 6.10), a pesar que se deben optimizar el doble de parámetros. Esto pareciera ser un indicativo que, al existir más grados de libertad en el controlador, el comportamiento puede ser modificado de mejor manera que en el caso más restrictivo o entero.

A continuación, en las figuras 6.11 y 6.12 se muestran las respuestas de ambos controladores adaptativos respecto del seguimiento de la señal de referencia (en color verde). Ambas respuestas son similares y si observamos el transiente (Figura 6.11), el análisis es similar al caso de optimización simple (en que se suponen que todas las ganancias adaptativas

son iguales y todos los órdenes de derivación  $\alpha$  también son iguales), es decir, la respuesta del CAMRD-OF se aproxima de manera más precisa y suave a la referencia que el caso entero o CAMRD.

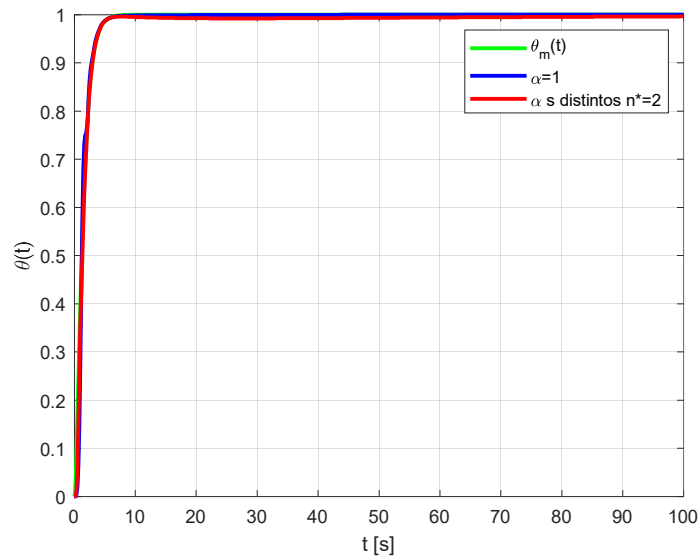


Figura 6.11: Ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD con optimización exhaustiva.

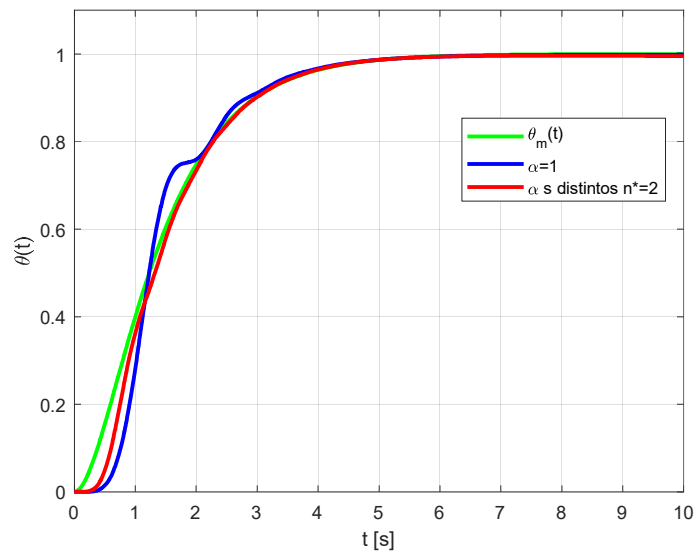


Figura 6.12: Ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD con optimización exhaustiva durante el período transiente de la respuesta



De igual modo, en las figuras 6.13 y 6.14 se aprecia nuevamente, que el esfuerzo de control es mayor en el caso entero que fraccionario. En particular, este esfuerzo es mayor, en el período transiente.

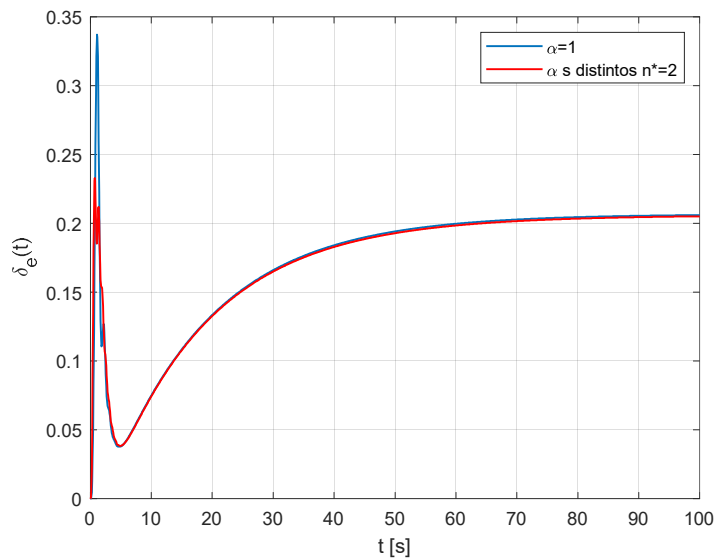


Figura 6.13: Esfuerzo de control  $\delta_e(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD con optimización exhaustiva.

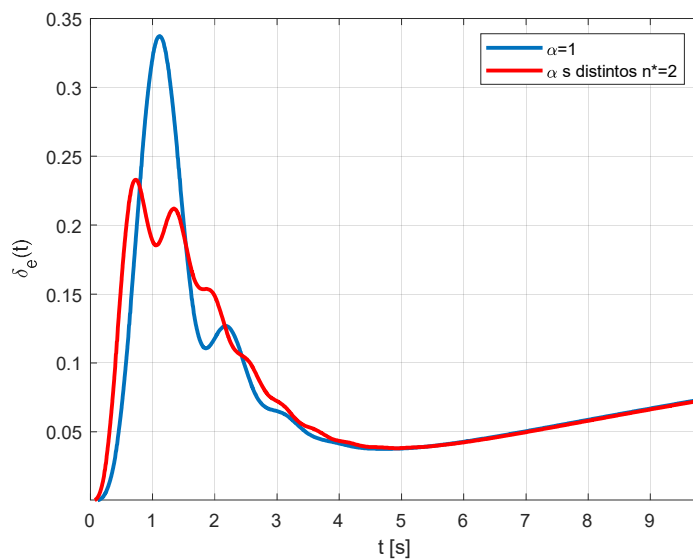


Figura 6.14: Esfuerzo de control  $\delta_e(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD con optimización exhaustiva en el período transiente.

A continuación, en la Tabla 6.4 se muestran los valores óptimos de la funcional de costo  $J_{norm}$  para los casos en que se varían todos los parámetros del controlador.

Tabla 6.4: Funcional de costo  $J_{norm}$  con optimización completa por PSO para el control CAMRD y CAMRD-OF.

	$ISE + ISI$	$J_{norm}$
CAMRD-PSO	3,19773	10,5738
CAMRD-OF-PSO	3,13314	9,251

Ahora bien, es interesante notar que la diferencia entre la optimización exhaustiva versus la simple no es tan distinta puesto que los valores de la función objetivo son similares. Es útil notar este aspecto, ya que, para el caso del sistema analizado en esta Tesis, no se gana mucho (menor valor de la funcional de costo o función objetivo) con optimizar todos los parámetros (16 para el caso fraccionario y 8 para el caso entero) versus optimizar suponiendo que todas las ganancias adaptivas  $\gamma$ 's son idénticas al igual que todos los órdenes de derivación  $\alpha$ 's para las leyes de ajuste adaptivas (optimización simple). Así entonces, bastaría con realizar una optimización simple, la cual requiere menos tiempo de simulación para tener valores adecuados de los parámetros más o menos ideales de las leyes de ajuste sin una pérdida elevada del comportamiento de la salida controlada del sistema.

**Observación 4:** En el caso en que los  $\alpha$ 's puedan tomar valores mas allá de 1, es decir,  $\alpha \in (0,2)$  podríamos tener un nuevo conjunto de parámetros óptimos, a saber

$$\alpha_k = 0,3 \quad \alpha_{11} = 0,3 \quad \alpha_{12} = 0,3 \quad \alpha_{13} = 1,99$$

$$\alpha_0 = 0,3 \quad \alpha_{21} = 0,3 \quad \alpha_{22} = 1,99 \quad \alpha_{23} = 0,3.$$

$$\gamma_k = 5,4842 \quad \gamma_{11} = 26,1357 \quad \gamma_{12} = 0,03 \quad \gamma_{13} = 0,03$$

$$\gamma_0 = 0,03 \quad \gamma_{21} = 14,0865 \quad \gamma_{22} = 0,03 \quad \gamma_{23} = 46,2364.$$

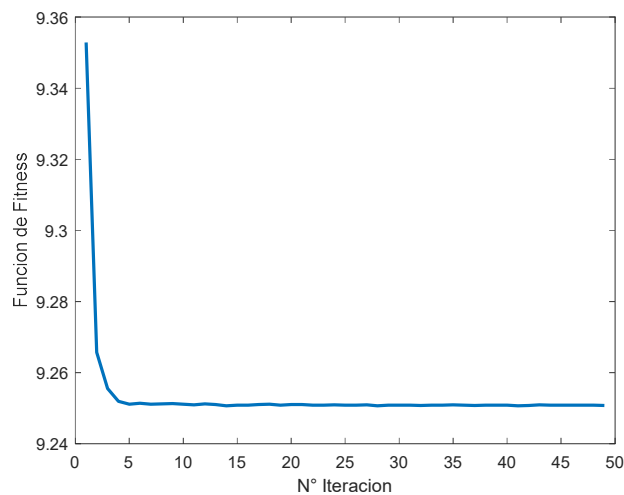


Figura 6.15: Función objetivo en cada iteración para el caso CAMRD-OF en que el orden de derivación del parámetro  $\alpha \in (0,2)$ .

cuyo  $J_{norm} = 9,2507$ , el cual es muy similar al caso en que  $\alpha \in (0, 1]$ . En resumen, tampoco se mejora ostensiblemente el desempeño del controlador fraccionario si se extiende el rango de los valores que podría adoptar el parámetro  $\alpha$  más allá de 1.

Ahora bien, sería interesante analizar el comportamiento de la respuesta del sistema controlado si se considera la implementación general del controlador adaptativo directo para el caso en que el grado relativo es mayor o igual a 2 ( $n^* \geq 2$ ), y así poder comparar este comportamiento con el implementado en esta Tesis que como se ha mencionado, solo sirve para el caso en que el grado relativo es exactamente igual a 2 ( $n^* = 2$ ).

En la Figura 6.16 se muestra un diagrama en bloques del controlador adaptativo CAMRD generalizado cuando  $n^* \geq 2$ . En este caso, se deben considerar errores adicionales como son el error auxiliar  $e_2(t)$  y error aumentado  $\varepsilon(t)$  además de una ganancia adicional  $k_1(t)$ . En este caso,  $W_m(s)$  y  $W_p(s)$  son las funciones de transferencia del modelo de referencia y planta respectivamente.

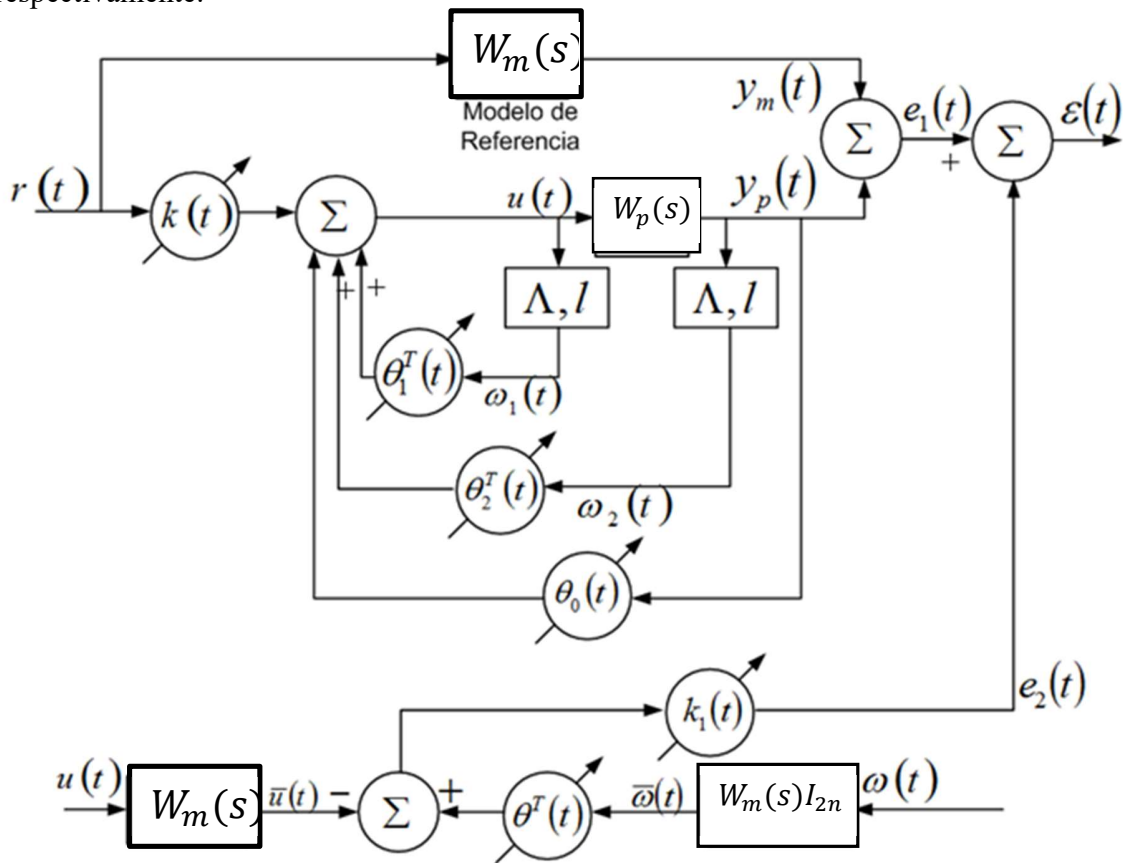


Figura 6.16: Estructura del controlador adaptativo directo (CAMRD) generalizado para el caso en que el grado relativo de la planta es  $n^* \geq 2$ .

Luego, para hacer una primera comparación, consideraremos los mismos valores de los  $\gamma$ 's y  $\alpha$ 's obtenidos en el caso de optimización exhaustiva considerados para  $n^* = 2$ , a la implementación generalizada vista en la Figura 6.16. A continuación se muestran nuevamente los valores de las ganancias adaptivas optimizadas para el caso entero

$$\begin{aligned} \gamma_k &= 5,3633 & \gamma_{11} &= 0,1 & \gamma_{12} &= 0,1 & \gamma_{13} &= 49,58 \\ \gamma_0 &= 0,1 & \gamma_{21} &= 0,1 & \gamma_{22} &= 7,6837 & \gamma_{23} &= 0,1 \end{aligned}$$

y para el caso fraccionario

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 0,3 & \alpha_{11} &= 0,5315 & \alpha_{12} &= 1 & \alpha_{13} &= 1 \\ \alpha_0 &= 0,3 & \alpha_{21} &= 0,3 & \alpha_{22} &= 1 & \alpha_{23} &= 0,8608. \\ \gamma_k &= 5,6173 & \gamma_{11} &= 0,03 & \gamma_{12} &= 0,03 & \gamma_{13} &= 33,5375 \\ \gamma_0 &= 0,03 & \gamma_{21} &= 10,0493 & \gamma_{22} &= 0,03 & \gamma_{23} &= 0,11957 \end{aligned}$$

En la Tabla 6.5 se muestran los parámetros de diseños para el caso del CAMRD y CAMRD-OF Generalizado, es decir, esta es la implementación general del CAMRD cuando el grado relativo es mayor o igual a 2 ( $n^* \geq 2$ ).

Tabla 6.5: Detalles de la implementación del CAMRD y CAMRD-OF Generalizada ( $n^* \geq 2$ )

Modelo de referencia	$W_m(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$
Planta	$W_p(s) = \frac{34,7012s^2 + 74,9025s + 4,2914}{s^4 + 9,127s^3 + 34,7561s^2 + 1,7542s + 0,8695}$
Ley de control Generalizada	$\begin{aligned} \theta(t) &= [k(t) \quad \theta_1^T(t) \quad \theta_0(t) \quad \theta_2^T(t)]^T \in \mathbb{R}^8 \\ \omega(t) &= [r(t) \quad \omega_1^T(t) \quad y_p(t) \quad \omega_2^T(t)]^T \in \mathbb{R}^8 \\ u(t) &= \theta^T(t)\omega(t) \end{aligned}$
Señales auxiliares	$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= \Lambda\omega_1(t) + lu(t) \\ \dot{\omega}_2(t) &= \Lambda\omega_2(t) + ly_p(t) \\ \Lambda &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \\ l &= [0 \ 0 \ 1]^T \\ \bar{u}(t) &= W_m(s)u(t) \\ \bar{\omega}(t) &= W_m(s)\omega(t) \end{aligned}$
Errores	$\begin{aligned} e_1(t) &= y_p(t) - y_m(t) \\ e_2(t) &= \theta^T(t)\bar{\omega}(t) - \bar{u}(t) \\ \varepsilon(t) &= e_1(t) + k(t)e_2(t) \end{aligned}$
Leyes de ajuste enteras	$\begin{aligned} \dot{k}_1(t) &= -\gamma_i \frac{\varepsilon(t)e_2(t)}{1 + \bar{\omega}(t)\bar{\omega}^T(t)} \\ \dot{\theta}(t) &= -\gamma_i \frac{\varepsilon(t)\bar{\omega}(t)}{1 + \bar{\omega}(t)\bar{\omega}^T(t)} \end{aligned}$
Leyes de ajuste fraccionarias	$\begin{aligned} {}_{t_0}^C D_t^\alpha k_1(t) &= -\gamma_i \frac{\varepsilon(t)e_2(t)}{1 + \bar{\omega}(t)\bar{\omega}^T(t)} \\ {}_{t_0}^C D_t^\alpha \theta(t) &= -\gamma_i \frac{\varepsilon(t)\bar{\omega}(t)}{1 + \bar{\omega}(t)\bar{\omega}^T(t)} \end{aligned}$

En la Figura 6.17 se muestra una gráfica del ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  para el caso entero y fraccionario de la implementación del CAMRD y CAMRD-OF generalizado junto a la señal de salida del modelo de referencia  $\theta_m(t)$ .

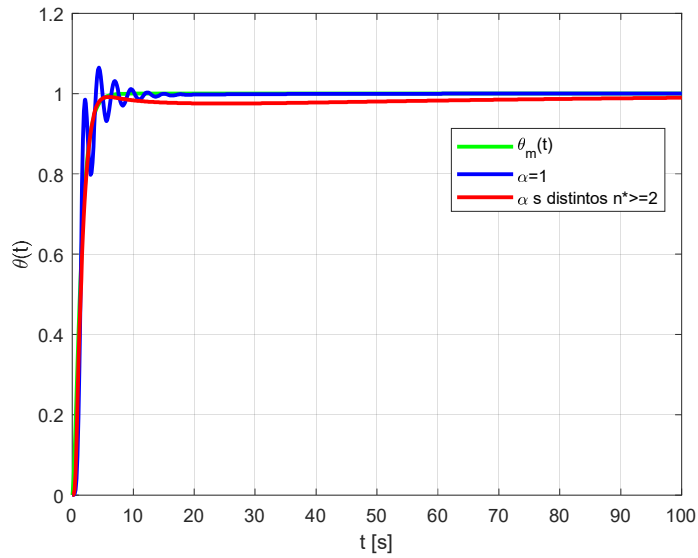


Figura 6.17: Angulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD generalizados.

Se puede apreciar que la salida del caso adaptivo generalizado entero presenta oscilaciones en el período transiente, cosa que no sucede con el caso fraccionario y tampoco con el caso adaptivo entero y fraccionario de la implementación de control adaptivo no generalizado ( $n^* = 2$ ), lo que sugiere que la implementación propuesta en esta Tesis (la cual es una extensión del caso entero clásico), presenta un mejor comportamiento que la del caso general del control adaptivo ( $n^* \geq 2$ ).

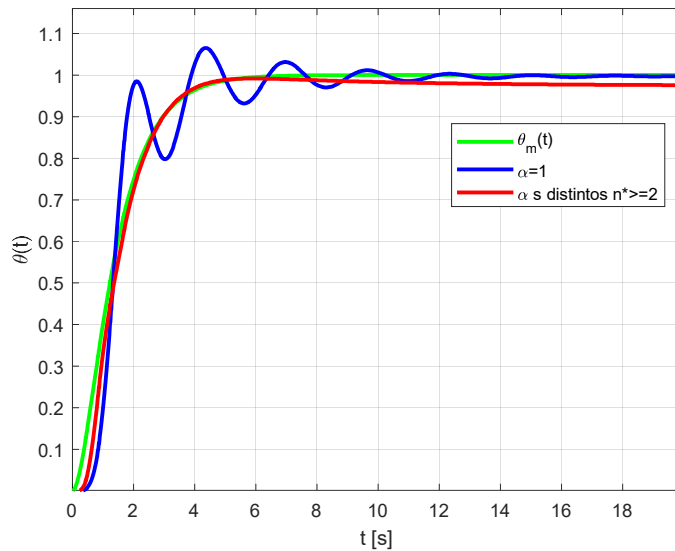


Figura 6.18: Angulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF CAMRD generalizados durante el período transiente.

En la Figura 6.18 se aprecian las oscilaciones que presenta la variable controlada  $\theta(t)$  en el período transiente del control adaptivo de orden entero generalizado. Es evidente el mejor comportamiento que presenta el caso de orden fraccionario y cuyo error en régimen permanente, va disminuyendo con el tiempo, aunque no de una manera tan rápida como en el caso de orden entero.

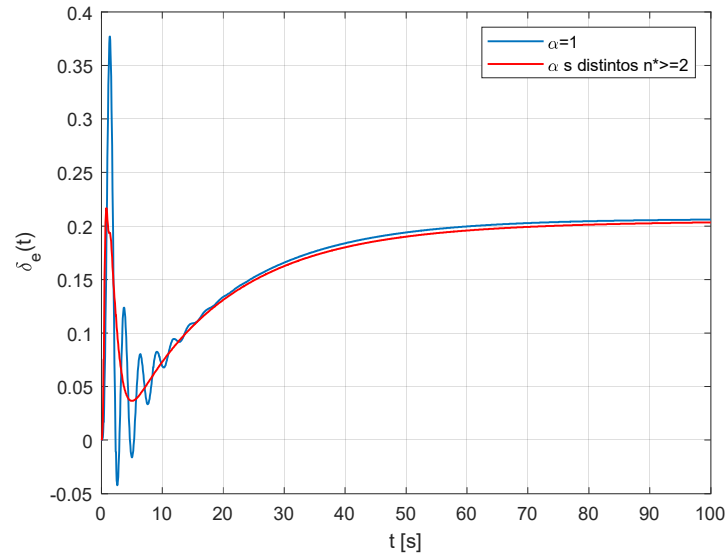


Figura 6.19: Esfuerzo de control  $\delta_e(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD generalizado.

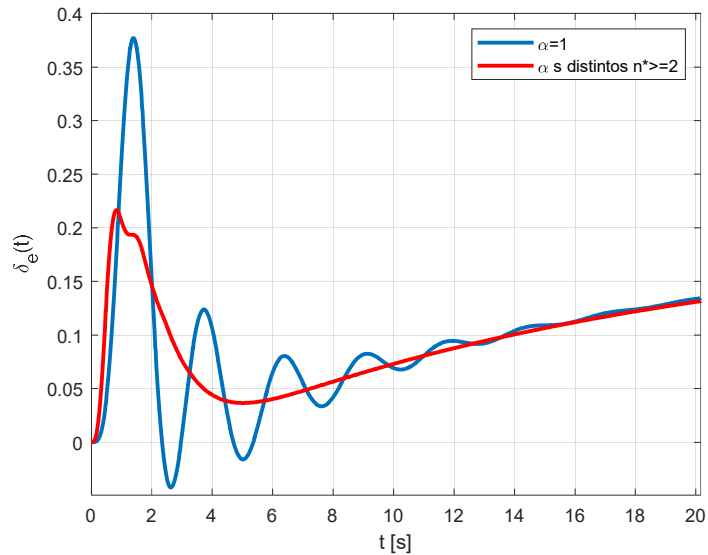


Figura 6.20: Esfuerzo de control  $\delta_e(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD generalizado en el período transiente.

Lo mismo sucede con el esfuerzo de control. En las Figura 6.19, se aprecia un peak menos pronunciado para el caso fraccionario con respecto al caso entero y en particular, en el período transiente (Figura 6.20). Además, el caso entero presenta varias oscilaciones antes de alcanzar un estado más estable.

Finalmente, en las figuras 6.21 y 6.22, se muestran todas las respuestas de los controladores adaptivos implementados con sus respectivos esfuerzos de control (figuras 6.23 y 6.24).

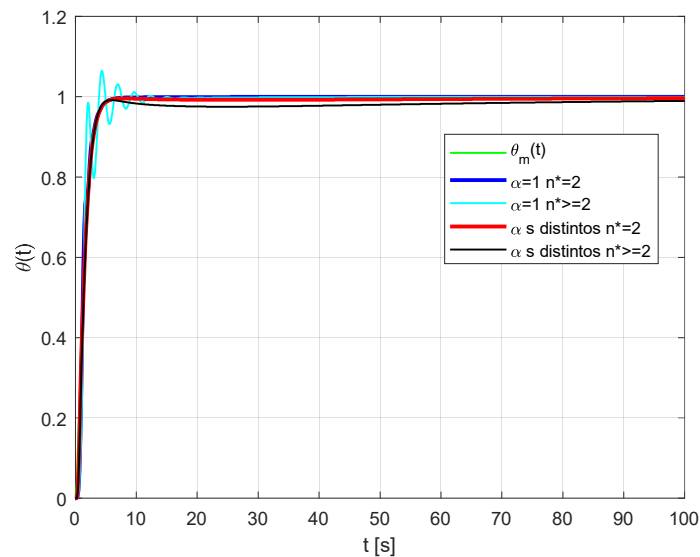


Figura 6.21: Ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD.

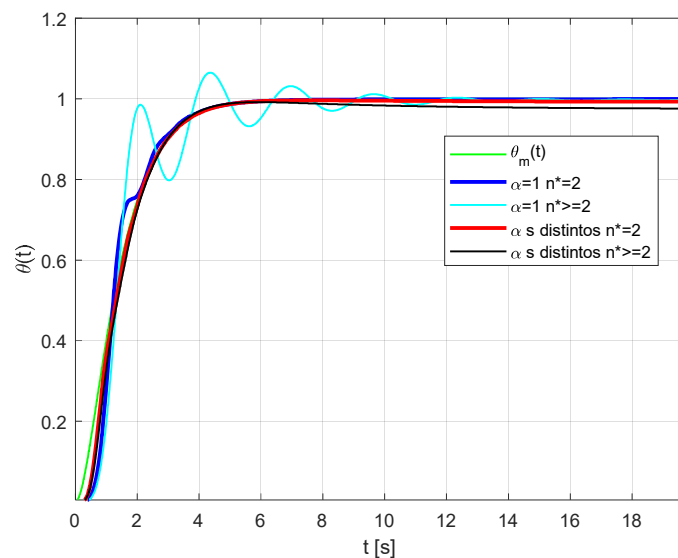


Figura 6.22: Zoom ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD en parte del período transiente.



De las figuras anteriores es más o menos evidente que el controlador con mejor comportamiento es el CAMRD-OF optimizado con PSO y  $n^* = 2$  ya que el comportamiento transiente es el más cercano a la señal de salida del modelo de referencia sin presentar oscilaciones y, además, el error en régimen permanente es cercano a cero tal como el caso entero. Esto era de esperarse dado que este caso presenta la menor funcional de costo  $J_{norm}$ , lo cual se muestra en la Tabla 6.4.

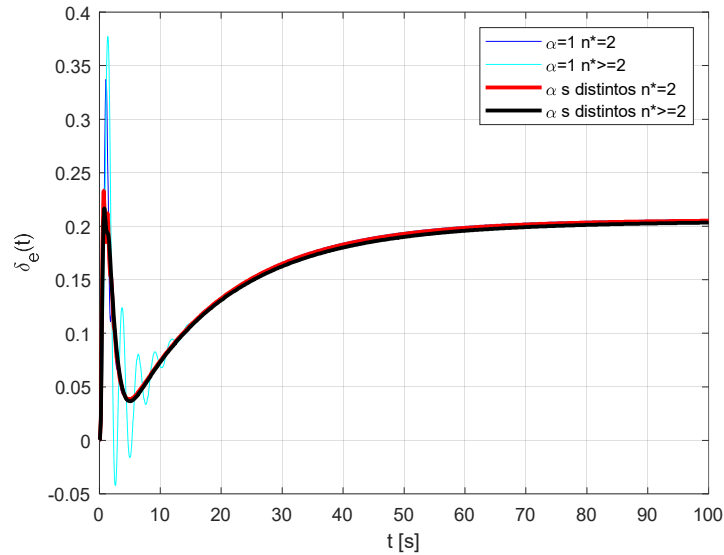


Figura 6.23: Esfuerzo de control  $\delta_e(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD.

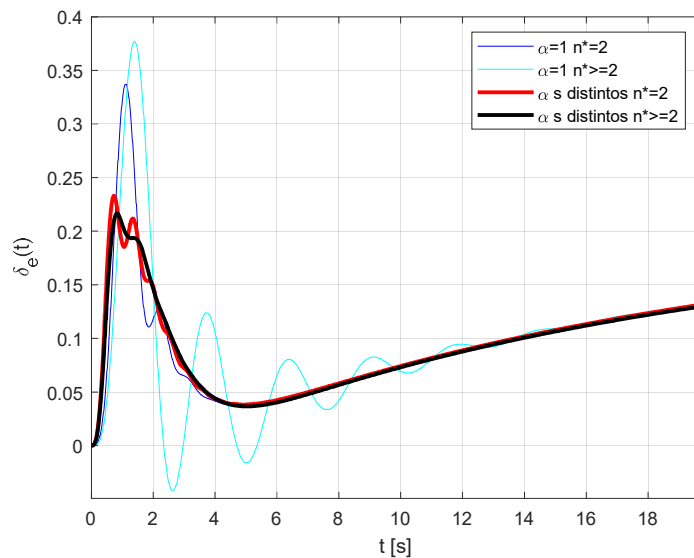


Figura 6.24: Zoom esfuerzo de control  $\delta_e(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD en el período transiente.

De las figuras 6.23 o 6.24 también se puede apreciar que los menores esfuerzos de control se consiguen con los controladores de orden fraccionario.

En la Tabla 6.6 se muestra un resumen del desempeño de los controladores implementados tanto para el caso no generalizado ( $n^* = 2$ ) como generalizado ( $n^* \geq 2$ ).

Tabla 6.6: Funcional de costo  $J_{norm}$  para los controladores CAMRD y CAMRD-OF generalizados y no generalizados.

	<b><i>ISE + ISI</i></b>	<b><i>J<sub>norm</sub></i></b>
CAMRD-PSO	3,19773	10,5738
<b>CAMRD -OF-PSO</b>	<b>3,13314</b>	<b>9,251</b>
CAMRD -Generalizado	3,29046	13,5
CAMRD -OF-Generalizado	3,08819	9,396

Así entonces, como conclusión, podemos decir que el controlador que presenta el mejor desempeño es el CAMRD-OF no generalizado ( $n^* = 2$ ), el cual se destaca en color azul, aunque si solo se considera el índice ISE + ISI, el CAMRD-OF-Generalizado sería muy levemente superior, pero con una mayor complejidad en su implementación.

Por último, realizaremos la optimización de los parámetros del controlador adaptivo generalizado de tal manera que las comparaciones sean aún más equivalentes. Luego, los parámetros óptimos obtenidos para el caso fraccionario generalizado son

$$\alpha_k = 0,3 \quad \alpha_{11} = 0,3 \quad \alpha_{12} = 1 \quad \alpha_{13} = 1$$

$$\alpha_0 = 0,3 \quad \alpha_{21} = 0,3301 \quad \alpha_{22} = 1 \quad \alpha_{23} = 0,3.$$

$$\gamma_k = 8,0272 \quad \gamma_{11} = 4,0692 \quad \gamma_{12} = 0,03 \quad \gamma_{13} = 0,03$$

$$\gamma_0 = 4,8543 \quad \gamma_{21} = 163,1845 \quad \gamma_{22} = 16,2021 \quad \gamma_{23} = 39,0482.$$

y para el caso entero generalizado

$$\gamma_k = 5,3364 \quad \gamma_{11} = 0,03 \quad \gamma_{12} = 31,2447 \quad \gamma_{13} = 57,489$$

$$\gamma_0 = 0,03 \quad \gamma_{21} = 0,03 \quad \gamma_{22} = 1,2051 \quad \gamma_{23} = 124,5065.$$

En la Tabla 6.7 se muestra un resumen del desempeño de los controladores optimizados con PSO e implementados tanto para el caso no generalizado ( $n^* = 2$ ) como generalizado ( $n^* \geq 2$ ).

Tabla 6.7: Funcional de costo  $J_{norm}$  para los controladores CAMRD y CAMRD-OF generalizados y no generalizados.

	<b><i>ISE + ISI</i></b>	<b><i>J<sub>norm</sub></i></b>
CAMRD-PSO	3,19773	10,5738
<b>CAMRD -OF-PSO</b>	<b>3,13314</b>	<b>9,251</b>
CAMRD -PSO-Generalizado	3,2734	12,88
CAMRD -OF-PSO-Generalizado	3,13	9,203

De la Tabla 6.7 se puede notar que, considerando todos los casos optimizados, los controladores que presentan el mejor desempeño son los controladores de orden fraccionario CAMRD-OF-PSO y CAMRD-OF-PSO-Generalizado. Nuevamente, aunque se optimice el caso entero, este presenta oscilaciones en el período transiente, cosa que no sucede con los casos fraccionarios. Este es un resultado muy relevante en el área de control de aeronaves ya que demuestra un mejor desempeño que se puede lograr al implementar un control adaptivo de orden fraccionario versus el clásico control adaptivo de orden entero, el cual es común en aeronaves de alto desempeño como son los aviones civiles de pasajeros y de combate. Sería interesante entonces, como parte del trabajo futuro, poder extender estos resultados a aeronaves de pasajeros (Boeing y Airbus por ejemplo) y no tan solo aplicarlos a aeronaves de instrucción como es el caso del Cessna-182 visto en esta Tesis de Doctorado para el caso de aviones civiles.

Finalmente, es útil mencionar que si bien el controlador CAMRD-OF-PSO-Generalizado presenta un valor de  $J_{norm}$  levemente menor que el CAMRD-OF-PSO, esto es producto también de un valor levemente menor en el peak del período transiente del esfuerzo de control, pero como contraparte, la respuesta no es tan cercana a la del modelo de referencia como si lo es la respuesta del CAMRD-OF-PSO en todo el intervalo restante hasta considerar los 100 segundos. Más aún, la simpleza de la implementación CAMRD-OF-PSO (del tipo  $n^* = 1$ ) y el menor tiempo de procesamiento de la acción de control supera a la del caso generalizado, aunque ambas respuestas son muy similares con diferencias que podrían considerarse insignificantes como se puede apreciar en las figuras 6.25 y 6.26.

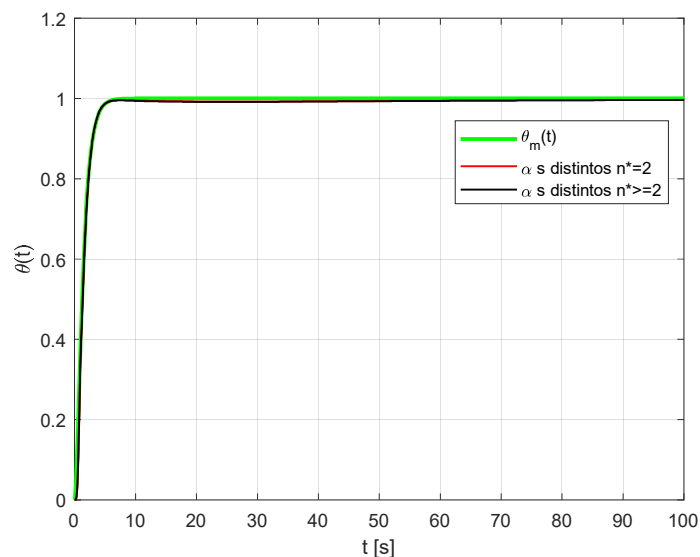


Figura 6.25: Ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD-OF-Generalizado.

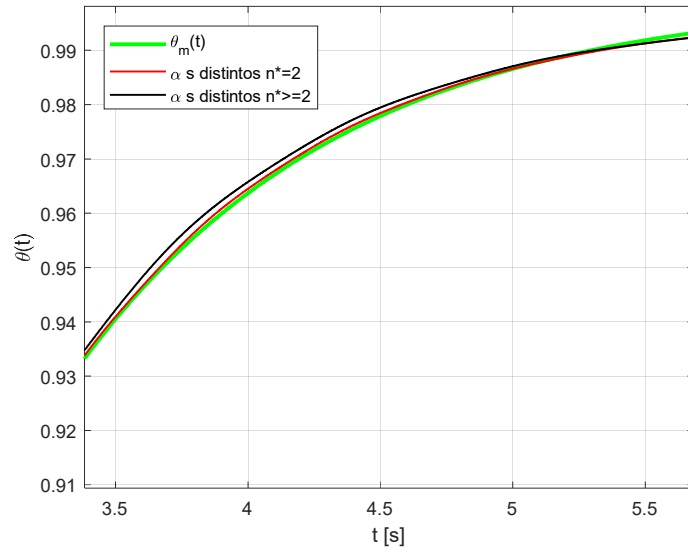


Figura 6.26: Ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  en parte del transiente con control CAMRD-OF y CAMRD-OF-Generalizado.

Así entonces, de las figuras 6.25 y 6.26 se puede notar que las respuestas son prácticamente idénticas para ambos controladores fraccionarios, aunque con un seguimiento levemente mejor de la salida del modelo de referencia para el caso CAMRD-OF respecto al caso CAMRD-OF-Generalizado.

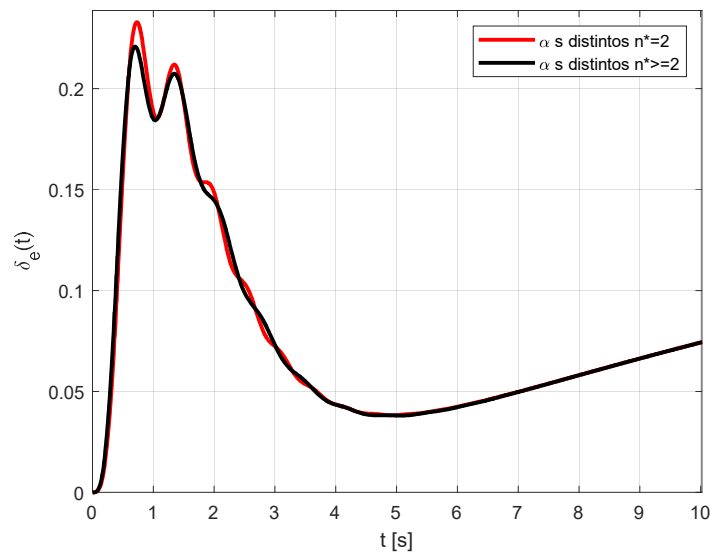


Figura 6.27: Esfuerzo de control  $\delta_e(t)$  con control CAMRD-OF y CAMRD en el período transiente.

Finalmente, en la Figura 6.27 se muestran la gran similitud de las señales de los esfuerzos de control para ambos controladores en el período transiente y con un leve menor peak del caso generalizado lo cual explica el menor  $J_{norm}$  obtenido.

También es útil señalar que, en la medida de lo posible, es conveniente reducir el orden y más aún, el grado relativo de la planta a  $n^* = 2$  aproximando la función de transferencia original de la planta de tal manera de aprovechar el comportamiento del tipo de controlador diseñado en esta tesis evitando entre otras cosas, tener que incorporar señales y errores auxiliares, además que se reduce el número de parámetros que se deben ajustar en el proceso de optimización y evitando sobrepasos u oscilaciones, en el período transiente.

### **6.1.2. Análisis del comportamiento del CAMRD-OF aplicado al modelo longitudinal del Cessna 182 ante cambios en los parámetros de la planta**

A continuación, se llevarán a cabo pruebas de robustez debido a cambios paramétricos de la planta. Para ello, realizaremos una comparación entre el CAMRD de orden entero y CAMRD-OF optimizados con PSO usando el esquema de control adaptivo simplificado para el caso de grado relativo igual a 2 ( $n^* = 2$ ) ya que este controlador fue el de mejor desempeño (junto al CAMRD-OF generalizado), pero de mejor respuesta respecto de seguimiento del modelo de referencia, mayor simpleza en la implementación y por tanto, mayor rapidez en la acción de control.

El principal parámetro para el cual analizar la robustez del controlador será un cambio de un 5% adicional en el parámetro constante del denominador el cual es la multiplicación de las frecuencias naturales de largo (oscilación fugoide o phugoide oscillation del inglés) y corto período (oscilación corta o short oscillation del inglés). Estas frecuencias dependen principalmente a las condiciones de vuelo del avión (velocidad longitudinal menor a la de crucero con cambios bruscos en el deflector de cola  $\delta_\epsilon(t)$ ).

El fugoide tiene un ángulo de ataque casi constante pero un cabeceo variable, causado por un intercambio repetido de velocidad y altitud. Puede ser excitado por un único efecto elevador (una desviación corta y aguda seguida de un retorno a la posición centrada) que resulta en un aumento del cabeceo sin cambios en el ajuste de las condiciones de crucero. A medida que la velocidad disminuye, la nariz cae por debajo del horizonte; y cuando la velocidad aumenta, la nariz sube por encima del horizonte. Los períodos pueden variar de menos de 30 segundos para aviones ligeros a minutos para aviones más grandes. Por tanto, es un parámetro cuyo cambio puede ser peligroso si dichas oscilaciones aumentan y persisten en el tiempo.

Son varios los casos de accidente por este fenómeno de subida y bajada continua de la nariz de una aeronave. Solo por nombrar uno, en el año 1972, un Fokker F-27 Friendship de la compañía Aero Transporti Italiani, en ruta desde Roma Fiumicino a Foggia, mientras ascendía a 13.500 pies, entró en un área de mal tiempo con actividad de tormenta local. A casi 15.000 pies, el avión perdió repentinamente 1200 pies de altitud y su velocidad disminuyó desarrollando oscilaciones fugoides,

de las que los pilotos no pudieron recuperar el aparato. El avión golpeó el suelo a una velocidad de 340 nudos. Tres tripulantes y los quince pasajeros de a bordo resultaron fallecidos [52].

En la Figura 6.28 se muestra el fenómeno de oscilación fugoide y oscilación de período corto.

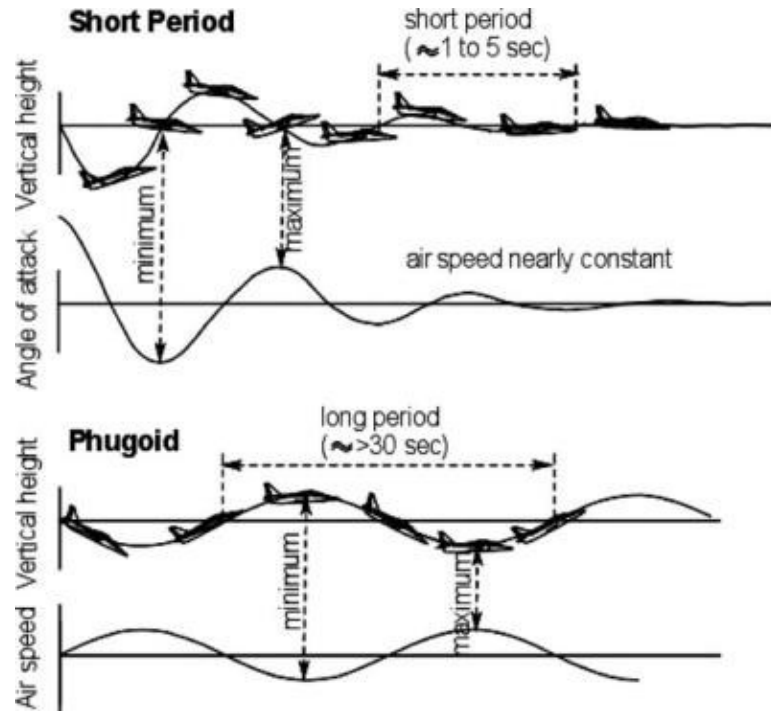


Figura 6.28: Oscilaciones de período corto y largo o fugoide (Figura subida del libro Aircraft Design de Ajoy Kumar).

Ahora bien, en la Figura 6.29 se muestra la simulación de un cambio en el parámetro constante cuando este aumenta un 5% a los 100 segundos, es decir, cambia de 0,8695 a 0,913. El tiempo total de simulación es de 200 segundos.

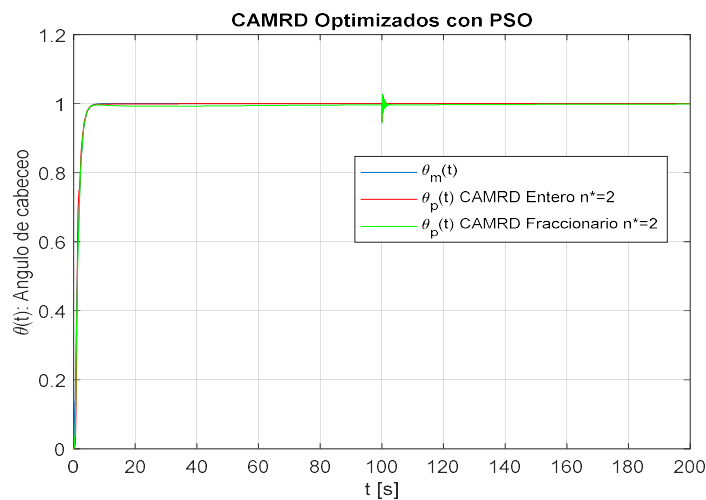


Figura 6.29: Angulo de cabeceo  $\theta(t)$  ante cambio del parámetro constante del denominador.

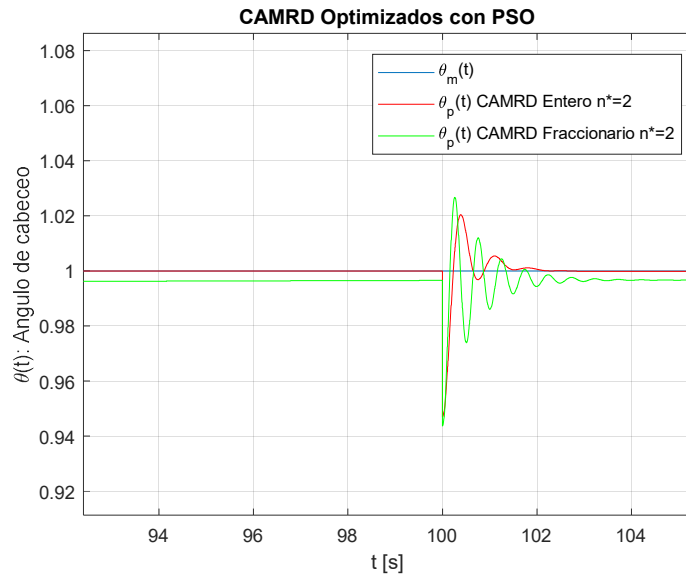


Figura 6.30: Zoom de  $\theta(t)$  ante cambio del parámetro constante del denominador.

De las figuras 6.29 y 6.30 se aprecia que ambos controladores presentan un buen comportamiento de la estabilización del ángulo de cabeceo de la aeronave ante un cambio del parámetro constante ya que a los 2 a 3 segundos de producido el cambio paramétrico, el controlador lo estabiliza presentando oscilaciones de muy pequeña amplitud respecto de la referencia. Es importante destacar que las oscilaciones fugoides son aceptables hasta por un período de 30 segundos para aviones livianos como es el caso del Cessna-182.

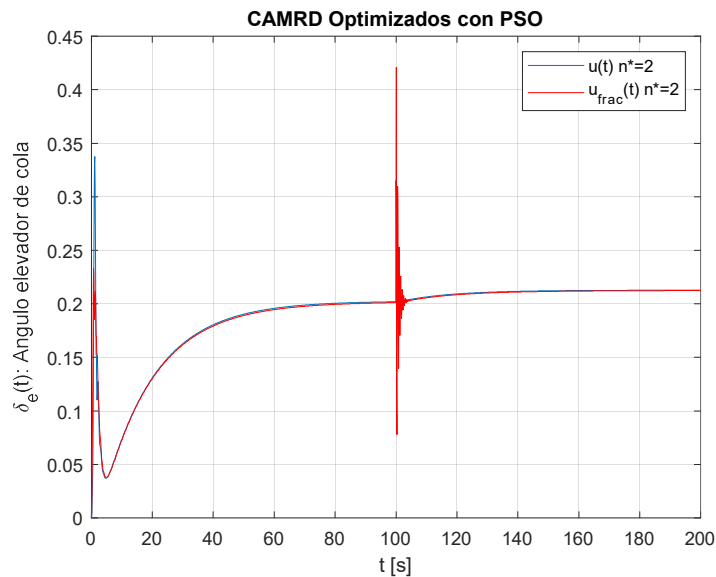


Figura 6.31: Esfuerzo de control  $u(t) = \delta_e(t)$  ante cambio del parámetro constante del denominador.

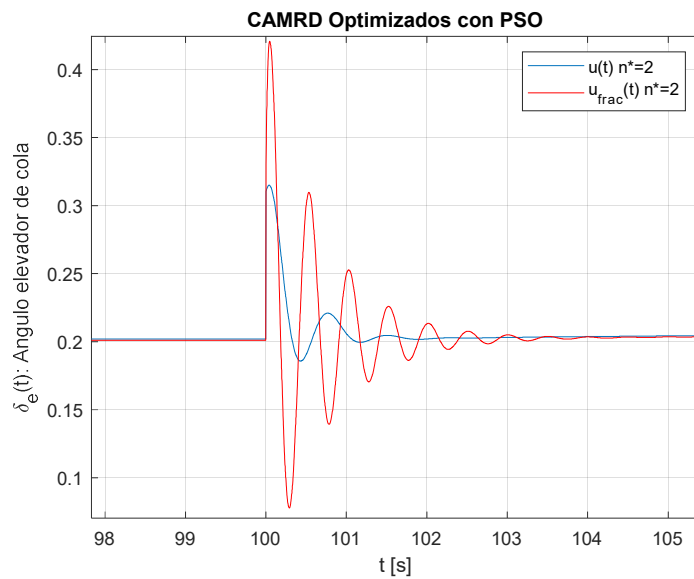


Figura 6.32: Zoom del esfuerzo de control  $\mathbf{u}(t) = \delta_e(t)$  ante cambio del parámetro constante del denominador.

En las figuras 6.31 y 6.32 se aprecia el esfuerzo de control realizado para estabilizar el ángulo de cabeceo luego del cambio paramétrico, el cual es algo mayor en el caso del CAMRD-OF respecto de su contraparte entera, no obstante, dicho esfuerzo mayor es eliminado a los 4 segundos aproximadamente.

Aunque todos los cambios paramétricos son importantes, hay unos que inciden más que otros como es el caso visto anteriormente. Otro cambio paramétrico a tener en cuenta sería aquel que acompaña al término de segundo orden en el denominador ( $s^2$ ) ya que este considera entre otros, la suma de las frecuencias fugoide y de corta duración elevadas al cuadrado, además de la multiplicación entre ellas y los factores de amortiguamiento relativo respectivamente.

Luego, supongamos que se produce un aumento de un 10% de este parámetro a los 100 segundos, es decir, pasa de 34,756 a 38,2316.

En la Figura 6.33 se muestran el comportamiento del ángulo de cabeceo  $\theta(t)$  ante el cambio paramétrico, el cual es prácticamente imperceptible. Es decir, ambos controladores son muy robustos ante dicho cambio, a pesar de ser un cambio tan importante como un 10%.



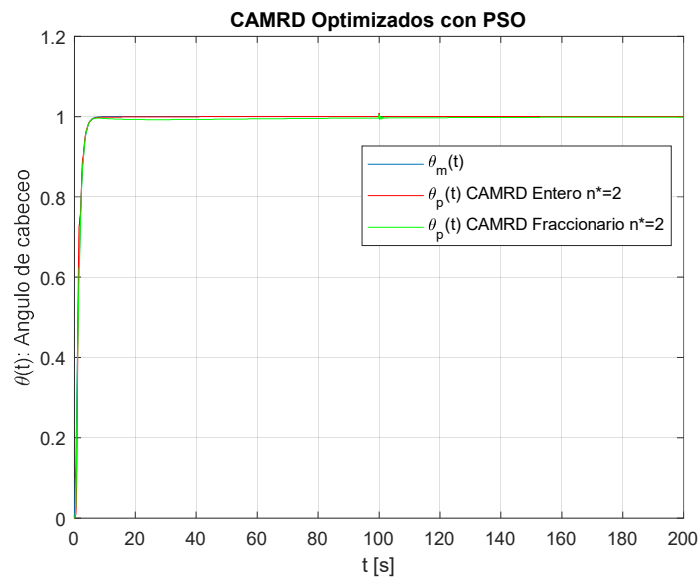


Figura 6.33: Angulo de cabeceo  $\theta(t)$  ante cambio del parámetro que acompaña a  $s^2$  en el denominador.

Algo similar sucede con el esfuerzo de control (ver Figura 6.34). Este es levemente mayor para el caso CAMRD-OF respecto del CAMRD de orden entero como se aprecia de mejor manera en la Figura 6.35.

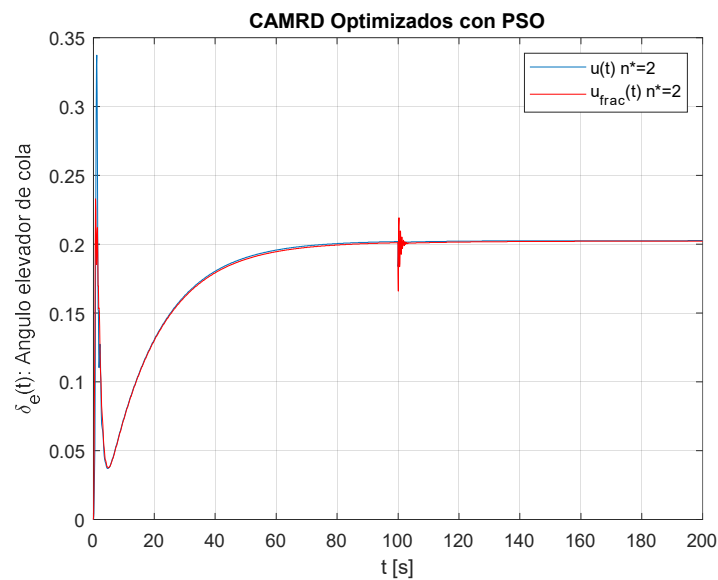


Figura 6.34: Esfuerzo de control  $u(t) = \delta_e(t)$  ante cambio ante cambio del parámetro que acompaña a  $s^2$  en el denominador.

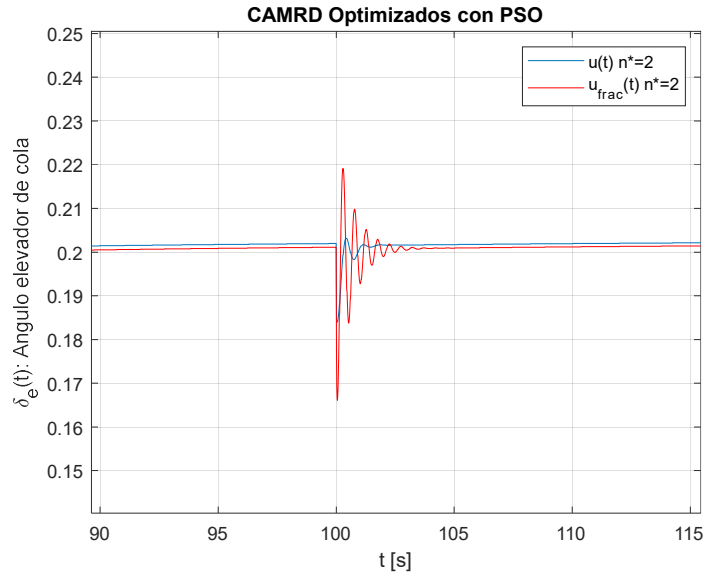


Figura 6.35: Zoom del esfuerzo de control  $\mathbf{u}(t) = \delta_e(t)$  ante cambio ante cambio del parámetro que acompaña a  $s^2$  en el denominador.

En resume, ambos controladores presentan gran robustez ante cambios en los parámetros de la planta.

## 6.2. Pruebas de simulaciones del control CAMRD-OF del pitch rate (o razón de cambio del ángulo de cabeceo) aplicados al avión de combate F-16

En el caso del avión polivalente (multifunción) F-16 Falcon Figther, es más deseable controlar la razón de cambio del ángulo de cabeceo  $q(t) = \dot{\theta}(t)$  (pitch rate) que el ángulo mismo. Para llevar a cabo esta simulación, se utilizó el modelo matemático [34, 35] el cual considera condiciones de vuelo nivelado y representado en variables de estado tal como se indica en la ecuación (6.9), para luego, obtener la función de transferencia entre la razón del ángulo de cabeceo  $q(t) = \dot{\theta}(t)$  y el ángulo del alerón de cola  $\delta_e(t)$  como se muestra en la ecuación (6.10). A continuación, se presentan los modelos matemáticos de ambas representaciones (variables de estado y función de transferencia) de la dinámica longitudinal del avión F-16 para las condiciones de vuelo nivelado. A saber,  $V=502$  [pies/s] y Altitud = 0 [pies] (avión volando a nivel del mar o cerca de la superficie terrestre).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1,0189 & 0,9051 \\ 0,8223 & -1,0774 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0022 \\ -0,1756 \end{bmatrix} \delta_e(t) \\ y(t) &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.9)$$

en que  $y(t) = q(t)$  o pitch rate.

Luego, de la ecuación (6.9), se puede obtener fácilmente la función de transferencia entre la salida de interés  $q(t)$  y la entrada  $\delta_e(t)$  puesto que

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Q(s)}{\delta_e(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{-0,1756s - 0,1807}{s^2 + 2,096s + 0,3535} \quad (6.10)$$

En que la matriz  $A = \begin{bmatrix} -1,0189 & 0,9051 \\ 0,8223 & -1,0774 \end{bmatrix}$ , el vector  $B = \begin{bmatrix} -0,0022 \\ -0,1756 \end{bmatrix}$  y el vector

$$C = [0 \quad 1].$$

Sin embargo, al igual que en el caso de avión Cessna-182, cambiaremos el signo del numerador de tal manera que la salida  $q(t) = \dot{\theta}(t)$  sea positiva cuando el ángulo del deflector de cola  $\delta_e(t)$  gire hacia arriba (al revés de la notación clásica que considera el ángulo del deflector de cola positivo cuando este gira hacia abajo). Con esto, se logra tener un sistema positivo, es decir

$$\frac{Q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{0,175s + 0,1807}{s^2 + 2,096s + 0,3535} = 0,1756 \frac{s + 1,02904}{s^2 + 2,096s + 0,3535} \quad (6.11)$$

El esquema de control se muestra en la Figura 6.36 el cual es típico esquema de control adaptivo directo para el caso  $n^* = 1$ .

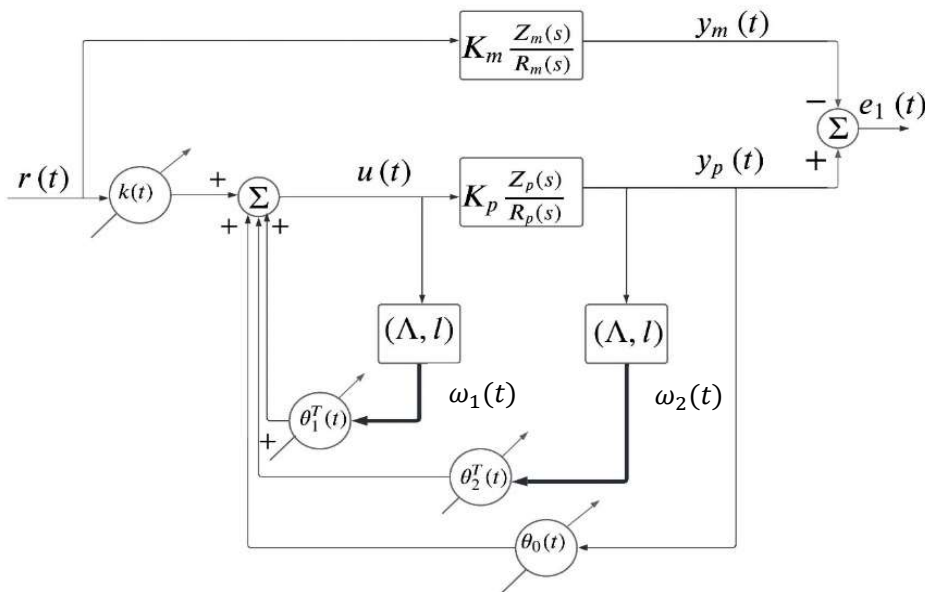


Figura 6.36: Estructura del caso general del controlador adaptivo directo (CAMRD) de grado relativo  $n^* = 1$ .

A continuación, en la Tabla N°6.8 se muestran los parámetros y ecuaciones de la implementación del controlador CAMRD y CAMRD-OF.

Tabla 6.8: Detalles de la implementación del CAMRD y CAMRD-OF ( $n^* = 1$ )

Modelo de referencia	$W_m(s) = K_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} = \frac{2}{s+2}$
Planta	$W_p(s) = K_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} = 0,1756 \frac{s+1,02904}{s^2+2,096s+0,3535}$
Ley de control	$\theta(t) = [k(t) \ \theta_1^T(t) \ \theta_0(t) \ \theta_2^T(t)]^T \in \mathbb{R}^4$ $\omega(t) = [r(t) \ \omega_1^T(t) \ y_p(t) \ \omega_2^T(t)]^T \in \mathbb{R}^4$ $u(t) = \theta^T(t)\omega(t)$
Señales auxiliares	$\dot{\omega}_1(t) = \Lambda\omega_1(t) + lu(t)$ $\dot{\omega}_2(t) = \Lambda\omega_2(t) + ly_p(t)$ $\Lambda = -1$ $l = 1$
Errores	$e_1(t) = y_p(t) - y_m(t)$
Leyes de ajuste fraccionarias	${}^c D_t^\alpha \theta(t) = -\gamma e_1(t)\omega(t)$

Se escogió un modelo de referencia con una dinámica relativamente rápida (también se podría haber escogido  $W_m(s) = \frac{1}{s+1}$  pero dado que este es un avión de combate, se requieren mayores exigencias en cuanto a tiempos de respuesta. De hecho, como tiempo de simulación se escogió solo  $T_{sim} = 5$  [s].

También, es interesante notar que como lo más importante es seguir lo más fielmente la referencia, se usó una funcional de costo que considerara únicamente el error de control  $e$ , es decir,

$$J = \omega_e \int_{t_0=0}^t e^2(t) dt \quad (6.11)$$

Recordar que la funcional de costo y sus parámetros pueden ser escogidas por el diseñador.

En la próxima sección, se lleva a cabo el proceso de optimización de los controladores fraccionarios y enteros con PSO y se analizan los resultados.

### 6.2.1. Resultados usando optimización PSO para el F-16

En este caso, el proceso de optimización es más rápido debido al menor orden del sistema. Además, el valor de  $\omega_e = 50$  para ponderar de manera importante el error de control. Luego, los valores obtenidos para el caso fraccionario fueron

$$\gamma_k = 477,3457 \quad \gamma_1 = 576,3984 \quad \gamma_0 = 23,0385 \quad \gamma_2 = 0,03$$

$$\alpha_k = 0,3 \quad \alpha_1 = 0,3 \quad \alpha_0 = 1 \quad \alpha_2 = 0,3.$$

En la Figura 6.37 se muestra la evolución de la funcional de costo (o función de fitness) en cada iteración del algoritmo de optimización PSO.

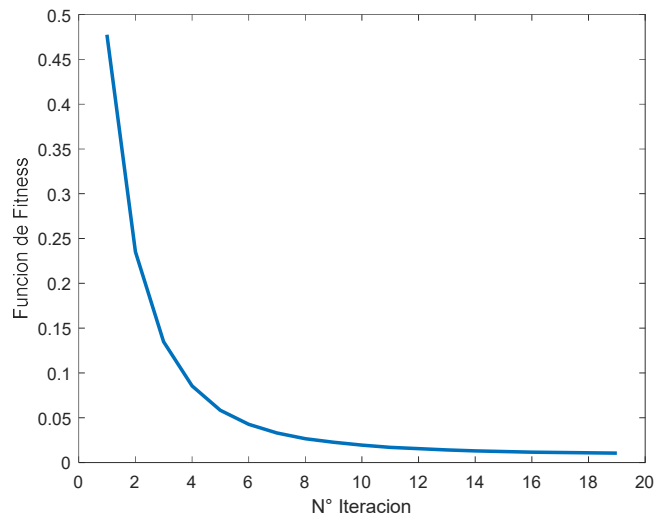


Figura 6.37: Funcional de costo para el caso optimizado con PSO del controlador CAMRD-OF. y para el caso entero

$$\gamma_k = 605,4839 \quad \gamma_1 = 248,9360 \quad \gamma_0 = 60,2778 \quad \gamma_2 = 301,4298$$

y cuya evolución de la funcional de costo se muestra en la Figura 6.38.

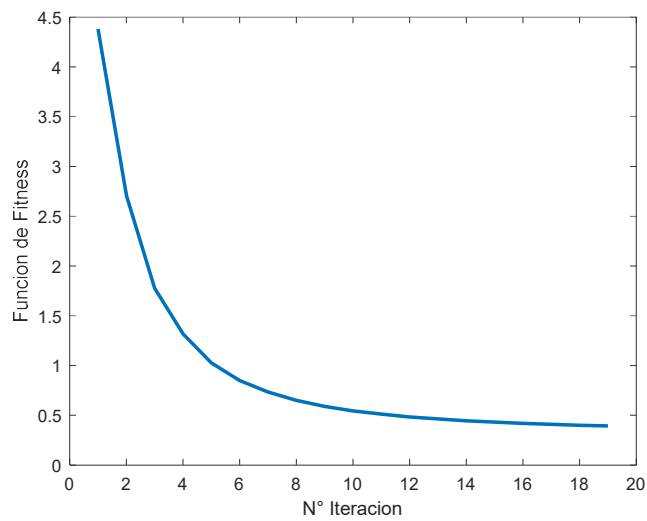


Figura 6.38: Funcional de costo para el caso optimizado con PSO del controlador CAMRD.

Además, en la Tabla 6.9 se muestra un resumen del desempeño de los controladores optimizados con PSO e implementados para el caso  $n^* = 1$  del F-16.

Tabla 6.9: Funcional de costo  $J$  para los controladores CAMRD y CAMRD-OF de grado relativo  $n^*$  igual a 1.

	$J$
CAMRD-PSO	0,3946
<b>CAMRD -OF-PSO</b>	<b>0,0104</b>

De la Tabla 6.9 se puede notar que, el controlador de mejor desempeño es sin duda el CAMRD-OF versus su contraparte entera. Este es un resultado muy relevante en el área de control de aeronaves ya que demuestra que se puede lograr un buen desempeño al implementar un control del pitch rate (o razón de cambio del ángulo de cabeceo en una aeronave de combate como es el caso del F-16) usando un controlador adaptivo de orden fraccionario.

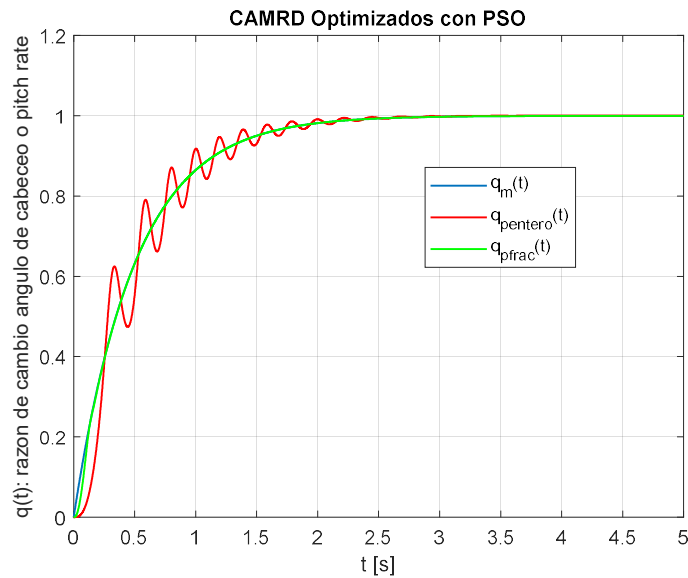


Figura 6.39: Razón de cambio del ángulo de cabeceo  $q(t) = \dot{\theta}(t)$  o pitch rate con control CAMRD y CAMRD-OF.

Es evidente de la Figura 6.39 que el seguimiento de la referencia (curva azul) del pitch rate usando el controlador CAMRD-OF (curva verde) es casi perfecto a diferencia del control de orden entero CAMRD (curva roja) el cual presenta varias oscilaciones antes de alcanzar el régimen permanente.

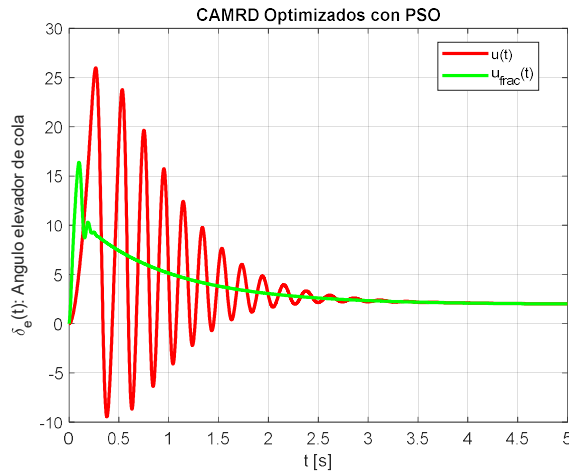


Figura 6.40: Esfuerzo de control  $u(t) = \delta_e(t)$  con control CAMRD y CAMRD-OF.

Además, la amplitud máxima del esfuerzo de control también es menor y con bastantes menos oscilaciones en el caso del CAMRD-OF como se puede apreciar en la Figura 6.40.

Es decir, el CAMRD-OF además de presentar una respuesta claramente superior (casi un perfecto seguimiento de la señal de referencia), también presenta un mucho menor esfuerzo de control que el caso CAMRD de orden entero.

Finalmente, si permitimos que el orden de derivación sea superior a 1, es decir  $\alpha \in (0,2)$  y procedemos a realizar la optimización por PSO se obtienen los siguientes parámetros

$$\gamma_k = 571,8539 \quad \gamma_1 = 201,7184 \quad \gamma_0 = 39,2932 \quad \gamma_2 = 49.6488$$

$$\alpha_k = 0,3 \quad \alpha_1 = 0,3 \quad \alpha_0 = 0,3 \quad \alpha_2 = 1,99.$$

En la Figura 6.41 se muestra similar desempeño al caso del controlador para  $\alpha \in (0,1)$ .

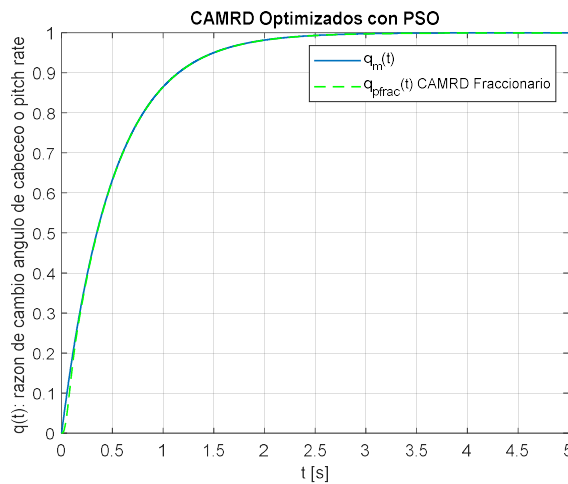


Figura 6.41: Razón de cambio del ángulo de cabeceo  $q(t) = \dot{\theta}(t)$  o pitch rate con control y CAMRD-OF con  $\alpha \in (0,2)$ .

En la Tabla 6.10 se aprecia una leve mejoría respecto del CAMRD-OF para  $\alpha \in (0,1)$ , la cual no es muy relevante ya que las respuestas son prácticamente idénticas.

Tabla 6.10: Funcional de costo  $J$  para los controladores CAMRD y CAMRD-OF de grado relativo  $n^*$  igual a 1 incluido  $\alpha \in (0, 2)$ .

	$J$
CAMRD-PSO	0,3946
<b>CAMRD -OF-PSO</b>	<b>0,0104</b>
CAMRD-OF-PSO- $\alpha \in (0,2)$	0,0095

### 6.2.2. Análisis del comportamiento del CAMRD-OF aplicado al modelo longitudinal del F-16 ante cambios en los parámetros de la planta

A continuación, y similar al caso del Cessna-182 realizaremos un análisis de robustez frente al cambio paramétrico más sensible de la planta, el cual corresponde al parámetro constante en el denominador de la función de transferencia del F-16. Así entonces, realizaremos un cambio del 10% (aumento del 10%) a los 5 segundos, por tanto, el tiempo total de simulación será de  $T_{sim} = 10$  [s]. Es importante hacer notar que un cambio del 10% es más o menos radical en el parámetro de una aeronave, sin embargo, la idea es poder probar el comportamiento de los controladores ante variaciones paramétricas importantes para mejorar los niveles de prestaciones en aeronaves de combate.

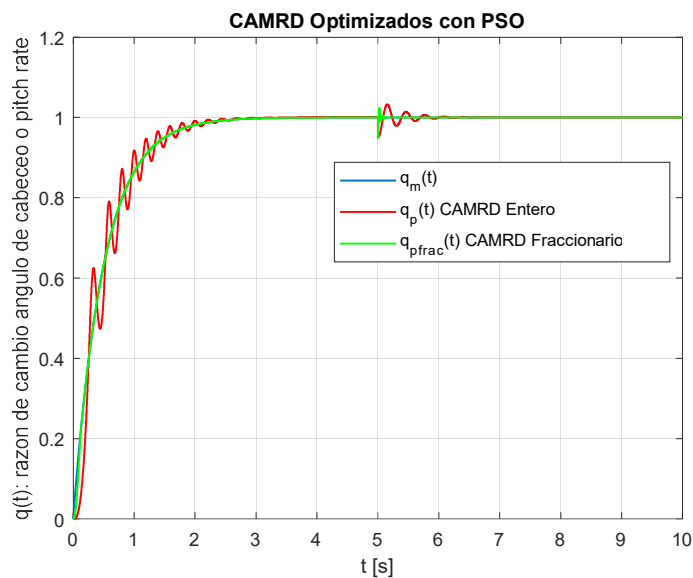


Figura 6.42: Pitch rate  $q(t)$  ante cambio del parámetro constante del denominador.



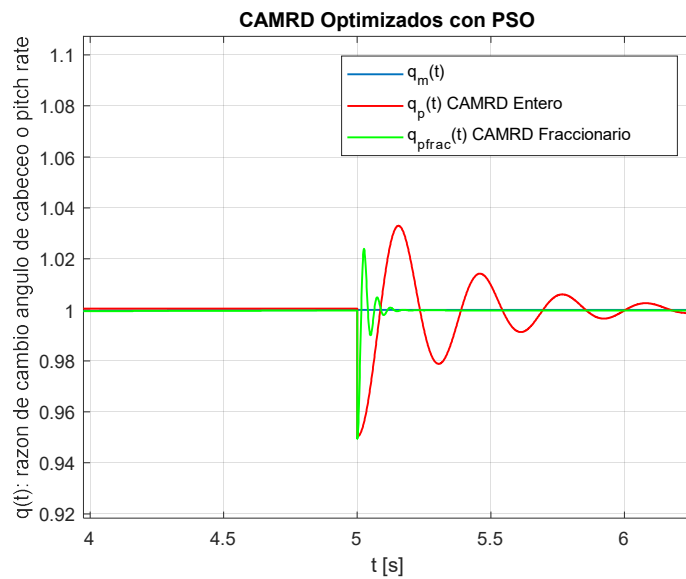


Figura 6.43: Zoom del pitch rate  $q(t)$  ante cambio del parámetro constante del denominador.

De las figuras 6.42 y 6.43 se nota una mejor robustez ante el cambio paramétrico del controlador CAMRD-OF. No obstante lo anterior, una vez alcanzado el régimen permanente, el CAMRD de orden entero también presenta un comportamiento adecuado, aunque con algunas oscilaciones de mayor amplitud y de más larga duración que el caso fraccionario antes de volver a la referencia.

Ahora bien, respecto del esfuerzo de control, el CAMRD-OF presenta un pico más pronunciado ante el cambio paramétrico, aunque de muy corta duración (ver Figura 6.44).

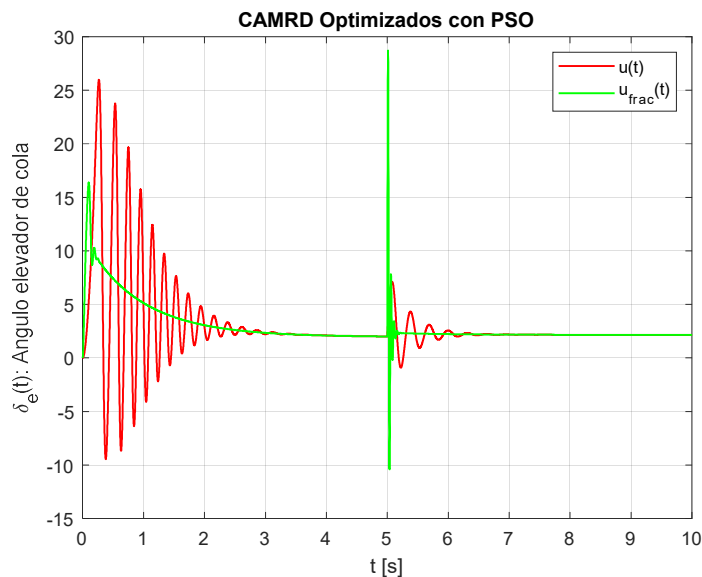


Figura 6.44: Esfuerzo de control  $u(t) = \delta_e(t)$  ante cambio del parámetro constante del denominador.

En resumen, el caso CAMRD-OF presenta un mejor comportamiento en el período transiente del inicio del control (seguimiento de la referencia) como así también, una adecuada robustez ante un importante cambio paramétrico (10%) del término constante.

Finalmente, es útil mostrar (figuras 6.45 y 6.46) que se cumple lo propuesto en el Lema 5 para el modelo del Cessna 182 en el sentido que todas las señales auxiliares  $\bar{\omega}(t)$  son acotadas.

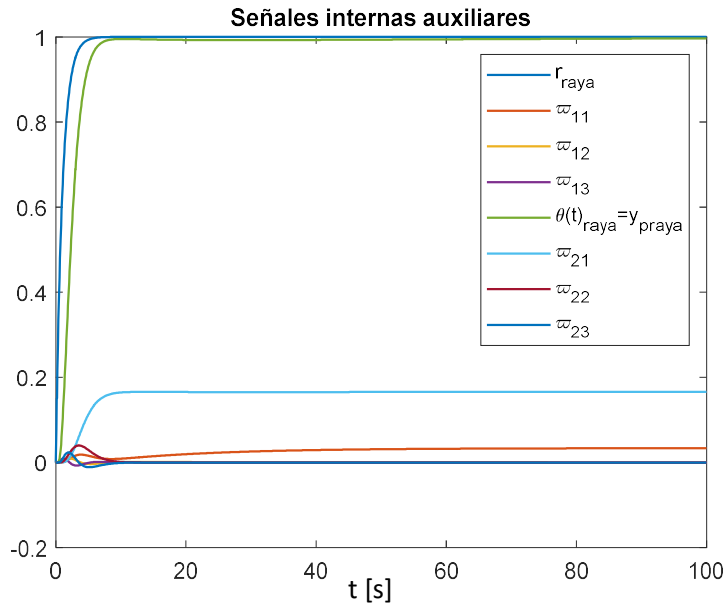


Figura 6.45: Señales auxiliares del sistema de control fraccionario con  $n^* = 2$ .

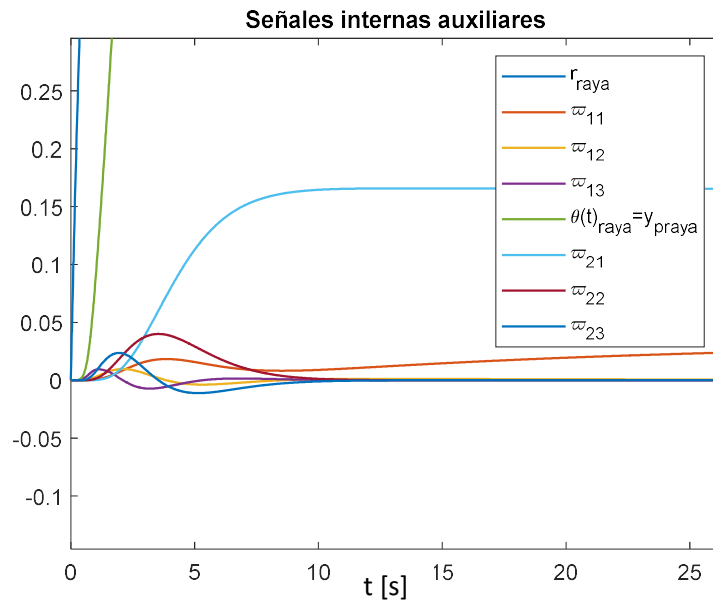


Figura 6.46: Zoom de parte del periodo transiente de las señales auxiliares del sistema de control fraccionario con  $n^* = 2$ .

Lo mismo sucede con las señales auxiliares (señales acotadas) del modelo del F-16 Falcon Figther, las cuales se muestran en la Figuras 6.47.

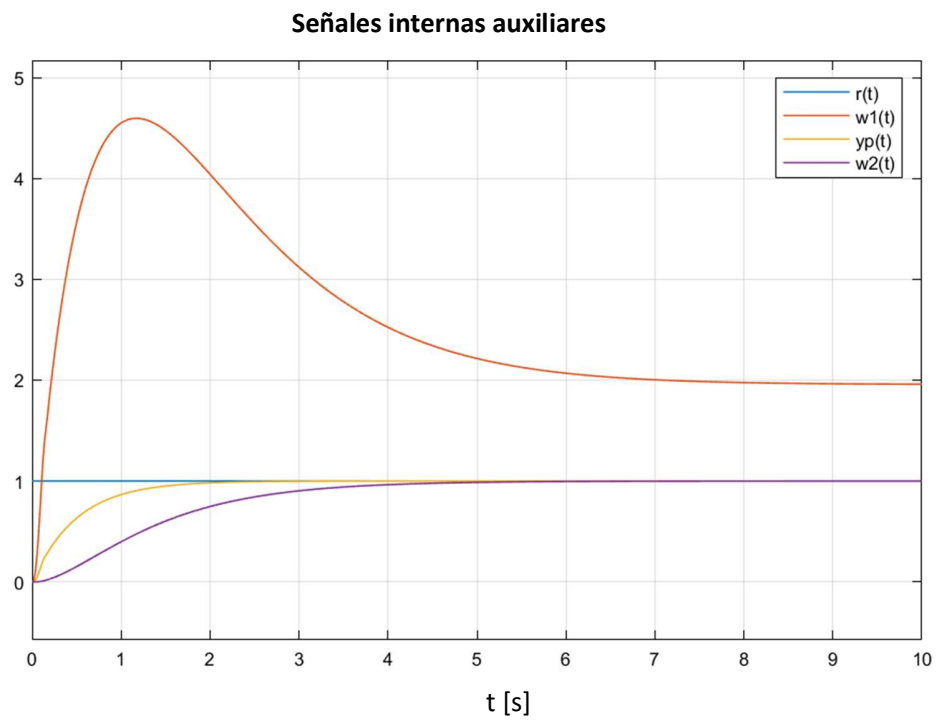


Figura 6.47: Señales auxiliares del sistema de control fraccionario con  $n^* = 1$ .

## 7. Conclusiones y trabajo futuro

La propuesta de Tesis se enfocó en el diseño de esquemas de control adaptivo directo de orden fraccionario (CAMRD-OF) aplicados al control del ángulo de cabeceo (o pitch angle del inglés) de una aeronave civil (Cessna -182) y la razón de cambio del ángulo de cabeceo (o pitch rate del inglés) para el caso de un modelo longitudinal simple de una aeronave de combate como es el F-16.

Los resultados obtenidos mostraron que para el control del ángulo de cabeceo de una aeronave de instrucción civil como es el caso del avión Cessna 182, usando un lazo de control adaptivo de orden fraccionario (CAMRD-OF), se logró un mejor desempeño (menor  $J_{norm}$ ) que con el CAMRD clásico o de orden entero optimizando en ambos casos, los parámetros y órdenes de derivación de las leyes de ajuste fraccionarias por medio del algoritmo de optimización PSO. Es importante hacer notar que el algoritmo que se use en el proceso de optimización depende de la elección del diseñador, por tanto, PSO no es el único que puede ser usado en dicho proceso.

También, se investigó la extensión de estos resultados al control del pitch rate (o razón de cambio del ángulo de cabeceo) de un modelo simple de la dinámica longitudinal de un avión caza F-16 Falcon Fighter, con buenos resultados. De hecho, se logró un mejor desempeño haciendo nuevamente uso del CAMRD-OF versus su contraparte entera o simplemente CAMRD.

Además, se logró demostrar teóricamente, la estabilidad de las implementaciones propuestas, por lo cual, el logro de los objetivos propuestos en esta Tesis será un aporte importante al conocimiento en el área del control de orden fraccionario aplicado al control de aeronaves, tanto civiles como de combate, donde existen pocos aportes relacionados con el control adaptivo por modelo de referencia o CAMR que hacen uso del cálculo fraccionario.

También, se llevaron a cabo los respectivos análisis de robustez de las implementaciones de controladores propuestas con buenos resultados, por lo tanto, se lograron todos los objetivos planteados en la Tesis.

Demás está decir que esta Tesis es la primera que aborda y hace uso de las nuevas teorías de estabilidad, incorporando lemas propios (Lema 5) y simplificando otro teorema (Teorema 1) para el caso en que la dinámica del error de salida y las leyes de ajuste tienen diferentes órdenes de derivación, lo que era un tema pendiente en el área del control fraccionario. Más aún, el caso estudiado en esta tesis es de la mayor relevancia puesto que en los casos más prácticos del control adaptivo, los modelos de error son por lo general, de orden entero ya que el modelo matemático de los sistemas dinámicos es de orden entero y por tanto distinto al orden de derivación que pudieran tener las leyes de ajuste fraccionarias. De hecho, es muy poco común que los modelos matemáticos de los sistemas físicos sean de orden fraccionario y menos aún, que el orden de derivación del modelo fraccionario coincida con el orden de las leyes de ajuste

fraccionarias. También, es importante señalar que es primera vez en la literatura del control adaptivo que se aplica este sistema de control adaptivo directo de orden fraccionario a una aeronave con mejores resultados que su contraparte entera como se demuestra en el reciente paper publicado por este autor y sus co-autores [55].

Además, y por lo comentado en el párrafo anterior, el caso analizado en esta tesis puede ser ampliamente extensible a la mayoría de los casos prácticos del control adaptivo fraccionario en los cuales los órdenes de derivación son distintos tanto para el modelo del sistema bajo estudio (orden entero por lo general) como para el orden de las leyes de ajuste, la cual puede ser fraccionaria. De hecho, quedó demostrado a nivel de simulación, que es ventajoso reducir el grado relativo de un sistema a  $n^* = 2$  ya que la implementación del controlador es más sencilla y se evitan oscilaciones o sobrepasos en el período transiente, tema que es relevante en el caso particular del control de aeronaves puesto que no se desea que ésta presente oscilaciones sostenidas por un período relativamente largo de tiempo. Es decir, los controladores de orden fraccionario suavizan la respuesta.

Finalmente, se pudo demostrar que usar ordenes de derivación fraccionarios más allá de 1 ( $\alpha \in (1, 2)$ ) no mejora sustantivamente el desempeño de los controladores, al menos para el avión Cessna-182 estudiado en esta Tesis.

Como trabajo futuro, se espera poder demostrar no tan solo estabilidad sino estabilidad asintótica del error de control utilizando una función de Lyapunov adecuada que permita, con las herramientas desarrolladas hasta ahora, poder llevar a cabo dicha prueba.

## Bibliografía

- [1] Jaime Rioseco, “*Modelación y control del ángulo de cabeceo de un avión subsónico bajo diferentes estrategias de control*”. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Electricista, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile, 2000.
- [2] M. A. Duarte et al., “*Control of longitudinal movement of a plane using combined model reference adaptive control,*” *Int. J. Aircraft Eng. and Aerosp. Technol.*, vol. 77, no. 3, pp. 199–213, 2005.
- [3] E. Lavretsky, *Combined/composite model reference adaptive control*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, pp. 2692 – 2697, October 2009.
- [4] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*. New York: Dover Publications Inc., 2005.
- [5] A. Kilbas, H. Srivastava, and J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, 2006.
- [6] B. M. Vinagre, C. A. Monje, *Introducción al control fraccionario*. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. Vol. 3, pp. 5–23, December 2009.
- [7] C. A. Monje, B. M. Vinagre, V. Feliu, Y. Chen, *Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications*. *Control Engineering Practice*, vol. 16, pp. 798–812, October 2007.
- [8] N. A. Camacho and M. A. Duarte Mermoud, *Improving the Control Energy in Model Reference Adaptive Controllers Using Fractional Adaptive Laws*. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, Vol. 3, No. 3, pp. 332-337, 2016, July 2016.
- [9] B. L. Stevens and F. L. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*, 2<sup>nd</sup> ed. New York: Wiley, 2003.
- [10] Yao Liang<sup>1</sup>, Xin Chen<sup>2</sup>, Ruizhen Xu, *Research on Longitudinal Landing Track Control Technology of Carrier-based Aircraft Chinese Control and Decision Conference (CCDC 2020)*, 2020.
- [11] Zheng Yuxing, Xia Jie, Chen Zhikuo, *LQR Controller for Longitudinal Control Augmentation System of Aircraft Based on Hybrid Genetic Algorithm*, *IEEE CSAA Guidance, Navigation and Control Conference (CGNCC)*, 2018.

- [12] I. Rosario-Gabriel and H. Rodríguez Cortés, Aircraft Longitudinal Control based on the Lanchester's Phugoid Dynamics Model. International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS) Dallas, TX, USA, June 12-15, 2018.
- [13] Sheng Shouzhao, Sun Chenwu, Duan Haibin, Jiang Xiaoliang, Zhu Yansong, Longitudinal and Lateral Adaptive Flight Control Design for an Unmanned Helicopter with Coaxial Rotor and Ducted Fan, Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference, 2014.
- [14] Chenggang Tao, Xiaoxiong Liu, Shaoshan Sun, Zhaoxu Yang, Longitudinal Control Law for Elastic Aircraft Based on L1 Adaptive. Control 2018 IEEE CSAA Guidance, Navigation and Control Conference (CGNCC), 2018
- [15] Qingyuan Ma, Xiaoxiong Liu, Chuang Li, Liangliang Wang, The Design of Longitudinal Control Augmentation System for Aircraft Based on L1 Adaptive Control. Proceedings of 2016 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference, 2016.
- [16] D.G. Rao, M.M. Kulkarni, J. Chandrasekhar, An MRAC System for Aircraft Longitudinal Control, IEEE American Control Conference, 1987.
- [17] Elbrous M. Jafarov and Ramazan Taltin, Design of Longitudinal Variable Structure Flight Control System for the F-18 Aircraft Model with Parameter Perturbations. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design, Kohala Coast-Island of Hawaii, USA -August 22-27, 1999.
- [18] S. G. Breslin 11. J. Grimble, Longitudinal Control of an Advanced Combat Aircraft using Quantitative Feedback Theory. Proceedings of the American Control Conference Albuquerque, New Mexico June 1997, 1997.
- [19] Franklin G., Powell J., Emami-Naeini A., Control de sistemas dinámicos con retroalimentación. (In Spanish). Addison-Wesley, 1991.
- [20] Kennedy and R. Eberhart, "Particle swarm optimization." Proc. IEEE International Conf. on Neural Networks (Perth, Australia), IEEE Service Center, Piscataway, NJ, 1995 (in press).
- [21] Maurice Clerc, Particle Swarm Optimization, ISTE Ltd, 2006.
- [22] Eugene Lavretsky, Adaptive Output Feedback Design Using Asymptotic Properties of LQG/LTR Controllers. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 57, N°. 6, June 2012.

- [23] J. C. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-26, no. 1, pp. 4–16, Feb. 1981.
- [24] M. G. Safonov, A. J. Laub, and G. L. Hurtmann, "Feedback properties of multivariable systems: The role and use of the return difference matrix," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-26, no. 1, pp. 47–65, Feb. 1981.
- [25] G. Stein and M. Athans, "The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-32, no. 2, pp. 105–114, Feb. 1987.
- [26] E. Rimon and K. S. Narendra, "A new adaptive estimator for linear systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 37, no. 3, pp. 410–412, 1992.
- [27] G. Kreisselmeier, *Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence*. *IEEE Transactions of Automatic Control*, Vol. AC-22, No.1, 1977.
- [28] M. A. Duarte and K. S. Narendra, *Combined Direct and Indirect Approach to Adaptive Control Center for Syst. Sci., Yale Univ., New Haven, CT, 1987, Tech. Rep. 8711*.
- [29] M. A. Duarte and K. S. Narendra, "Combined direct and indirect approach to adaptive control," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 34, no. 10, pp. 1071–1075, Oct. 1989.
- [30] M. A. Duarte and K. S. Narendra, "A new approach to model reference adaptive control," *Int. J. Adapt. Control and Signal Process.*, vol. 3, pp. 53–73, 1989.
- [31] M. A. Duarte et al., "Experimental evaluation of combined model reference adaptive controller in a pH regulation process," *Int. J. Adapt. Control and Signal Process.*, vol. 16, pp. 85–106, 2002.
- [32] S. Mansor; Yasser A. M. Nogoud Raheeg Alamin, *Longitudinal command stability augmentation system design for unstable aircraft using flying and handling qualities specifications International Conference on Computing, Control, Networking, Electronics and Embedded Systems Engineering (ICCNEEE), 2015*.
- [33] Fatima Shoaib; M. Arsalan Khawaja; Hafiz Zeeshan Iqbal Khan; M. Farooq Haydar; Jamshed Riaz, *Optimal and Robust Solutions for Longitudinal Flight Control of a Canard-Configured High Performance Aircraft. 16th International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology (IBCAST), 2019*.
- [34] Eugene Lavretsky, Kevin A. Wise, *Robust and Adaptive Control With Aerospace Applications*. Springer, 2012.



- [35] Eugene Lavretsky, Adaptive Output Feedback Design Using Asymptotic Properties of LQG/LTR Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 57, N<sup>o</sup>. 6, June 2012.
- [36] Javier A. Gallegos, Manuel A. Duarte-Mermoud, “Improved performance of identification and adaptive control schemes using fractional operators”, *Int. J. Robust Nonlinear Control*. Vol. 31, No. 9, pp. 4118–41303, 2021.
- [37] Javier A. Gallegos, Norelys Águila-Camacho, Manuel A. Duarte-Mermoud, “Robust adaptive passivity-based PI<sup>λ</sup>D control”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. Vol.34 , No.11, pp.1572-1589, 2020.
- [38] J.A. Gallegos, N. Aguila-Camacho, M. Duarte-Mermoud, “Vector Lyapunov-like functions for multi-order fractional systems with multiple time-varying delays”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. Vol. 83, April 2020, Article 105095, pp. 1113-1132, 2020.
- [39] M.A. Duarte-Mermoud, L. Bázquez, G. Ceballos-Benavides, “Mixed Fractional Order Adaptive Control: Theory and Applications”. *Proceedings of the 21st IFAC World Congress, (Virtual Congress)*. Berlin, Germany, 6 pp. 11-17, July, 2020.
- [40] N. Aguila-Camacho, J. Gallegos, M.A. Duarte-Mermoud, “Analysis of fractional order error models in adaptive systems: Mixed order cases”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*. Vol. 22, No. 4, 2019, pp 1113-1132, 2019.
- [41] J.A. Gallegos, M.A. Duarte-Mermoud, “Converse theorems in Lyapunov's second method and applications for fractional order systems”. *Turkish Journal of Mathematics*. Vol. 43, No. 3, 2019, pp. 1626-1639, 2019.
- [42] M.A. Duarte-Mermoud, G.E. Ceballos-Benavides, L. Bázquez, “On the Fractional Order Multiple Models Adaptive Control”. *Proceedings of the Nineteenth Yale Workshop on Adaptive and Learning Systems*. K.S. Narendra Ed., June 10 - 12, 2019, New Haven, Connecticut, USA. pp. 206-211, 2019.
- [43] J.A. Gallegos, M.A. Duarte-Mermoud, “Attractiveness and stability for Riemann-Liouville fractional systems”. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (EJQTDE)*. Vol. 2018, No. 73, 2018, pp. 1-16, 2018.
- [44] J.A. Gallegos, M.A. Duarte-Mermoud, “Robustness and convergence of fractional systems and their applications to adaptive schemes”. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. Vol. 20, No. 4, August 2017, pp. 895–913, 2017.

- [45] J.A. Gallegos, M.A. Duarte-Mermoud, “Convergence of fractional adaptive systems using gradient approach”. *ISA Transactions*. Vol. 69, No. 7, pp. 31-42, July 2017.
- [46] M.A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J.A. Gallegos, R. Castro-Linares, “Using General Quadratic Lyapunov Functions to Prove Lyapunov Uniform Stability for Fractional Order Systems”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 22, No. 1-3, pp. 650-659, May 2015.
- [47] N. Aguila-Camacho, M.A. Duarte-Mermoud, J.A. Gallegos, “Lyapunov Functions for Fractional Order Systems”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 19, No. 9, pp. 2951-2957, 2014.
- [48] N. Aguila-Camacho, M.A. Duarte-Mermoud, “Boundedness of the solutions for certain classes of fractional differential equations with application to adaptive systems. *ISA Trans.* 60 (2016), pp. 82-88; DOI:10.1016/j.isatra.2015.11.013, 2016.
- [49] K. Diethelm, “The Analysis of Fractional Differential Equations” Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2010.
- [50] Valerio, D. & da Costa, “Ninteger: a non-integer control toolbox for Matlab: In *Fractional Derivatives and Applications*. OIFAC, Bordeaux, France, 2004.
- [51] VSabatier, J., Aoun, M, Oustaloup, A., Gregoire, G., Ragot, E., & Roy, P., “Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation”. *Signal Processing*, vol. 86, pp. 2645-2657, 2006.
- [52] Ajoy Kumar Kundu, *Aircraft Design*, Queen’s University Belfast. Cambridge University Press, 2010. [www.cambridge.org/9780521885164](http://www.cambridge.org/9780521885164)
- [53] J. Gallegos, M.A. Duarte-Mermoud, “Boundedness and convergence on fractional order systems”. *Journal of Computer and Applied Math.* Vol. 296, pp. 815-826, 2016.
- [54] Narendra, K.S., and Valavani, L.S. “Stable adaptive controller design-Direct control”. *IEEE Transactions on Automatic Control* 23: pp. 570-583, Aug.1978.
- [55] Gustavo E. Ceballos Benavides, Manuel A. Duarte-Mermoud, Marcos E. Orchard and Juan Carlos Travieso-Torres. “Pitch Angle Control of an Airplane Using Fractional Order Direct Model Reference Adaptive Controllers”. *Journal of Fractal and Fractional MDPI*, 2023. <https://doi.org/10.3390/fractalfract7040342>.

- [56] Amani R. Ynineb, Samir Ladaci . “MRAC Adaptive Control Design for an F15 Aircraft Pitch Angular Motion Using Dynamics Inversion and Fractional-Order Filtering”, International Journal of Robotics and Control Systems Vol. 2, No. 2, 2022, pp. 240-252 ISSN 2775-2658
- [57] Jon Roskam, Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls, Part I. DARcorporation, 2001.