



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

**ESTUDIO Y SIMULACIÓN DE ONDAS DE TRÁFICO: COLISIÓN DE
JAMITONES**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SEBASTIÁN ALBERTO TAPIA MANDIOLA

PROFESOR GUÍA:
Claudio Muñoz Cerón

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
Raimund Bürger
André de Laire Peirano
Hanne Van Den Bosch
José Soto San Martín

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:
FONDECYT 1231250, ANID Basal CMM FB210005

SANTIAGO DE CHILE
2024

RESUMEN DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO
DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS Y
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO
DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: SEBASTIÁN ALBERTO TAPIA MANDIOLA
FECHA: 2024
PROF. GUÍA: CIAUDIO MUÑOZ CERÓN

ESTUDIO Y SIMULACIÓN DE ONDAS DE TRÁFICO: COLISIÓN DE JAMITONES

El objetivo principal del presente trabajo es estudiar numéricamente las colisiones de jamitones en una ruta circular. La motivación del estudio de estos eventos es el comportamiento fractal de las velocidades de salida que se obtiene en el modelo ϕ^4 al colisionar una onda *kink* con un *antikink*, dos ondas viajeras que se mueven con misma velocidad pero en sentidos opuestos. Se exploraron tres métodos distintos para colisionar *kinks* con *antikinks*: Métodos de diferencias finitas explícito, implícito y método pseudoespectral. Entre estos se escogió el método con menor coste y error computacional, para así calcular las velocidades de salida y obtener el comportamiento fractal deseado. Un jamiton corresponde a una solución tipo onda viajera que aparece cuando la densidad vehicular rompe la condición sub-carácterística en modelos de ecuaciones de tráfico y que se encuentran caracterizados por su *densidad sónica*. Para esto se estudia teóricamente la aparición de jamitones, sus principales cualidades y ecuaciones que describen su comportamiento, para luego explorar métodos numéricos que simulen a los jamitones con buena precisión. Bajo este contexto es que se decide ocupar el método de volúmenes finitos, en particular con el método de Godunov y el aproximador HLL para resolver el problema de Riemann asociado. En el estudio de la colisión de jamitones se define primero una condición de compatibilidad que permite seleccionar jamitones que se puedan colisionar entre sí. Luego, se escoge un jamiton de prueba tal que posea mayor rango de jamitones compatibles, de modo que sea colisionado con varios otros jamitones de distintos tamaños y velocidades. Un primer resultado a observar es que la colisión de jamitones produce un nuevo jamiton con velocidad distinta a los iniciales. Al graficar este fenómeno para varias colisiones, se obtiene que las velocidades de salida suavizan las rectas dadas por la velocidad del jamiton de prueba y las velocidades iniciales de los jamitones colisionados. También se exploran otras propiedades como la amplitud de los jamitones de salida, largos y densidad máxima. En cada caso se obtienen distintos resultados: En el caso de la amplitud y densidad máxima de salida, ocurre que en un rango amplio de densidades sónicas los valores de salida superan o igualan a los valores de entrada, mientras que en los largos el jamiton resultante posee mayor longitud que los entrantes. Por último se exploran los comportamientos a distintos tiempo de reacción de los conductores, obteniendo que algunas propiedades no dependen de tal tiempo como la amplitud, velocidad de salida o densidad máxima, mientras que el largo de salida si.

Sé la mejor versión de ti mismo.

Agradecimientos

Quisiera agradecer primero que todo a mi familia que me ha apoyado durante toda la carrera y desde muy lejos. A mis padres Rosa y Nelson por siempre apoyarme en todo lo que necesitaba y siempre darme ánimos para poder seguir adelante en todo. A mis hermanos Joaquín y Javiera que también fueron parte fundamental de mi crecimiento personal. A mi abuela Rosa que falleció hace 4 años pero que siempre estuvo atenta a mi y que más de alguna vez me mencionó lo orgullosa que se sentía de mis logros.

Agradezco a mis amigos que conocí en el colegio: Benja, Cris, Maxi, Matthías, Kevin, Manuel, Sebastián, etc., gracias por hacer ameno mi paso por el colegio. Agradecer especialmente a mi mejor amiga Constanza que me ha apoyado en todo hasta el día de hoy, aún estando a kilómetros de distancia. También agradecer a todos los amigos que he hecho durante mi paso en la universidad, desde plan común hasta ahora. Agradecer especialmente a Tomás Valencia y Tomás Laengle a quienes conocí desde segundo año y que desde ahí han sido mas que solos amigos, unos consejeros de vida, se les quiere y aprecia un montonazo. Agradecer también a Cristóbal, Jaime, Javiera, Mario, Elvis, etc. por haberme hecho pasar una gran época en los primeros dos años de carrera.

Quiero agradecer a todos los amigos que hice estando en especialidad, en particular al grupo *les otros* compuesta de mucha gente a quien tengo mucha confianza y gente muy buena onda y apañadora, especialmente a Joaquito quien nos ayudó un montonazo durante la U online. Agradecer al grupo de *matraqueadores*: Jotape, Vale, Panchito, Clemun y Tomate, quienes fueron mucho más cercanos y con quienes compartía tanto dentro como fuera de la universidad. Fueron un pilar fundamental para mi en esta etapa universitaria. Por último quisiera agradecer a Guti, Lucho y Lechuga quienes me acompañaron en los duros tiempos de pandemia cuando todo era online y nos veíamos sólo a través de la camara, además de ser grandes personas que me enseñaron un montón de lecciones para toda mi vida.

Por último agradecer a todos los profesores que he tenido en mi vida: A Roberto Carvajal por despertar en mí el gusto por las matemáticas y presentarme esta hermosa carrera que estudié. A mi profesor guía Claudio Muñoz quien me hizo interesarme en el área de las EDP, por tenerme como alumno de tesis y por siempre tener disposición en ayudarme cuando lo necesitaba. Y a André por la práctica realizada en Lille y por estar disponible para responder dudas y explicarme con lujo de detalles todo lo que necesitara.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Introducción a modelos de tráfico	2
1.1.1. Modelos microscópicos	2
1.1.2. Modelos celulares	3
1.1.3. Modelos macroscópicos	5
2. Motivación: Colisión Kink-antikink en ecuación ϕ^4	6
2.1. Diferencias finitas	7
2.1.1. Esquema explícito	7
2.1.1.1. Resultados	8
2.1.2. Método de Crank-Nicolson (CN)	8
2.1.2.1. Resultados	9
2.2. Método pseudo-espectral	10
2.2.1. Resultados	11
3. Modelos macroscópicos	14
3.1. Diagrama fundamental	15
3.2. Modelo LWR	16
3.3. Modelo PW	17
3.4. Modelo ARZ no homogéneo	17
3.4.1. Condición sub-característica	20
4. Jamitones	22
4.1. Funciones del modelo	22
4.2. Análisis de ondas viajeras	23
4.3. Construcción de jamitones	25
4.4. Jamitones en el diagrama fundamental	27
4.5. Estabilidad	29
5. Volúmenes finitos	30
5.1. Método de Godunov	32
5.1.1. Flujo de Godunov simplificado	33
5.1.2. Linealizadores	33
5.1.3. Lax-Friedrichs	34
5.1.4. Esquema de Rusanov	35
5.1.5. Esquema Engquist–Osher	35
5.1.6. Comparación esquemas de volúmenes finitos	36
5.2. Solver HLL para sistemas de leyes de conservación	37
6. Simulación modelo ARZ	39

6.1.	Simulación modelo homogéneo	39
6.1.1.	Solución con aproximador	40
6.2.	Simulación con término de relajación	40
6.3.	Resultados	41
6.3.1.	Precisión esquema numérico	41
6.3.2.	Formación de jamitones	43
6.4.	Aproximación de m y s	45
7.	Colisión de jamitones	47
7.1.	Preliminares	47
7.2.	Resultados	49
7.3.	Variación τ	52
8.	Conclusiones	55
8.1.	Trabajo futuro	55
	Bibliografía	57
	Anexos	61
A.	Obtención condiciones de Rankine-Hugoniot	61
A.1.	Caso homogéneo	61
A.2.	Caso no homogéneo.	62
B.	Cambio a variables lagrangeanas	62

Índice de Tablas

6.1.	Errores para distintos τ con $t_{\text{final}} = 0.5$	42
6.2.	Errores para distintos τ con $t_{\text{final}} = 2$	43
6.3.	Errores de s y m para distintos τ con $t_{\text{final}} = 2$	46

Índice de Ilustraciones

1.1.	Simulaciones con $dt = dx = 1$, $N = 100$ y hasta tiempo final $T = 100$	4
1.2.	Condición inicial con $p_s = 0.2$	4
2.1.	Ejemplos de colisiones.	8
2.2.	Energías para cada colisión	8
2.3.	Ejemplos de colisiones. Se observa que el esquema falla en simular un triple rebote.	9
2.4.	Energía para cada colisión.	9
2.5.	Ejemplos de colisiones.	11
2.6.	Energías para cada colisión. Se observa que las diferencias son mayores que en los esquemas anteriores.	12
2.7.	Gráfico de velocidades de salida	12
3.1.	Ejemplo de diagrama fundamental con sus fases.	15
3.2.	Diagrama fundamental usado en [33] y comparativa de algunos flujos.	16
4.1.	Gráficos de las funciones Q y U	22
4.2.	Gráficos de h e intervalo donde se rompa CSC para ARZ.	23
4.3.	Funciones w y r con un jamiton maximal y otro de ejemplo.	24
4.4.	Ejemplo de una cadena de jमितones para v , ρ y u , junto a un jamiton maximal.	25
4.5.	Cadena de jमितones en la variable ρ	26
4.6.	Jamiton medio con $\rho_s = 0.525\rho_{\max}$, de largo $L \approx 231.70$ y con $N \approx 14.05$ vehículos.	26
4.7.	Jamiton grande con $\rho_s = 0.6\rho_{\max}$, de largo $L \approx 1507.27$ y con $N \approx 93.65$ vehículos.	27
4.8.	Jamiton chico con $\rho_s = 0.45\rho_{\max}$, de largo $L \approx 15.27$ y con $N \approx 0.91$ vehículos.	27
4.9.	Jamiton maximal y un jamiton en el plano $q - \rho$. Ambos yacen en la misma línea que pasa por $(\rho_s, Q(\rho_s))$	28
4.10.	Región jamitónica compuesta por varios jमितones maximales, junto con la envoltura jamitónica.	28
4.11.	Gráficos de estabilidad obtenidos de [45]	29
5.1.	Esquema de volúmenes finitos extraída de [52, p.65].	31
5.2.	Flujo de Godunov para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.	33
5.3.	Flujo linealizado para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.	34
5.4.	Esquema de L-F para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.	35
5.5.	Esquema de Rusanov para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.	35
5.6.	Esquema Engquist–Osher para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.	36
5.7.	Comparación de los distintos métodos presentados para la ecuación de Burgers con distintas condiciones iniciales para $t = 0.4$ y $t = 0.5$ respectivamente.	36
5.8.	Errores en norma L^1 en escala logarítmica de cada método para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.	37

6.1.	Ejemplo comparativo entre la simulación numérica y jamiton teórico con $\rho_s = 0.433\rho_{\max}$, $v_- = 26$ y $N = 200$, hasta $t_{\text{final}} = 1.01$	41
6.2.	Número de vehículos en la simulación y zoom en el shock para visualizar las diferencias. Se verifica la simulación observando que el número de vehículos efectivamente se mantiene constante.	42
6.3.	Ejemplo con baja densidad inicial	43
6.4.	Ejemplo con alta densidad inicial.	44
6.5.	Formación de jamitinos en una ruta larga.	44
6.6.	Solución es gobernada por regimen jamitónico.	45
7.1.	Densidades compatibles con jamiton de prueba.	48
7.2.	Ejemplo de colisión entre un jamiton con $\rho_s = 0.425\rho_{\max}$ y otro con $\rho_s = 0.443\rho_{\max}$, ambos con $v_- = 25$	49
7.3.	Segmento y conservación vehicular. El primer gráfico verifica la aparición de un jamiton post-colisión y el segundo verifica que el algoritmo de colisión no rompe la ley de conservación.	49
7.4.	Gráfico de velocidades de salida post-colisión. El dato en $\rho/\rho_{\max} \approx 0.44$ corresponde a jamitones que no colisionaron por tener valores de ρ_s muy cercanos.	50
7.5.	Largos y amplitudes obtenidos luego de cada colisión.	50
7.6.	Valores de ρ_+ luego de cada colisión.	51
7.7.	Comparación con función $s(\rho_s)$	51
7.8.	Gráfico de velocidades de salida post-colisión con distintos τ 's	52
7.9.	Largos y amplitudes para distintos τ 's.	53
7.10.	Valores de ρ_+ para distintos τ 's	53
7.11.	Largos y amplitudes para distintos τ 's.	54
7.12.	Error largos para $\tau = 1$	54

Capítulo 1

Introducción

En los últimos siglos el automóvil ha sido uno de los principales avances tecnológicos del ser humano. Desde su invención en 1886 por Karl Friedrich Benz, el automóvil ha sido el responsable de agilizar y mejorar cientos de actividades cotidianas del ser humano que antes eran solventadas de maneras más rudimentarias. Por ejemplo el transporte de cargas pesadas, conexión con sectores alejados de ciudades industrializadas y, principalmente, la movilización de personas de un lugar a otro en el menor tiempo posible. Actualmente, es común observar cientos de vehículos de todo tipo transitar por las calles, desde autos comunes y corrientes hasta camiones de cargas voluminosas.

En los últimos años, ha aumentado el uso del automóvil dado el aumento per-cápita en países como EEUU o Japón [1]. En Chile el año 2022 más del 70% de los hogares tenían al menos un auto [2]. Esto genera problemas tanto en la infraestructura de las ciudades (aumento de calles o expansión de las existentes) como también problemas sociales con los atochamientos vehiculares o *tacos* a ciertas horas del día que dificultan y ralentizan el traslado de personas, algo incompatible con uno de los objetivos principales del automóvil.

En el presente trabajo se busca hacer un estudio matemático mediante simulaciones numéricas de la colisión de *tacos* o llamados, desde un punto de vista matemático, *jamitones* y que surgen en modelos de tráfico vehicular. Más precisamente, se analizarán esquemas numéricos para simular atochamientos vehiculares, como se desplazan en tiempo y espacio, para luego observar que ocurre si colisionan dos de estos. Este tipo de estudio no se ha realizado con anterioridad, al menos entre los autores y trabajos conocidos, y se buscará establecer como base para futuros estudios posteriores en el tema.

El aporte de esta tesis será en dar un entendimiento de las colisiones de *jamitones*, cuál es el comportamiento de un *jamiton* luego de su colisión, estudiar su tamaño, velocidad de salida y cómo esto podría ser aplicado en la vida cotidiana, que puede ser, por ejemplo, disminuir el tamaño de los *tacos* en carretera colisionándolos con otros de menor magnitud o establecer modelos de control rigurosos con demostraciones matemáticas para desatochar el tráfico.

En el Capítulo 2 se mostrará la motivación principal en el estudio de colisiones: La colisión kink-antikink en la ecuación ϕ^4 , explorando diversos esquemas numéricos para realizar simulaciones lo más precisa posibles. De estos métodos se escogerá el que tenga buena precisión y bajo coste computacional, pues se requiere simular una gran cantidad de colisiones para observar de buena forma el efecto fractal deseado.

Luego, en el Capítulo 3 se explorarán algunos modelos macroscópicos del tráfico. Se discutirán sus propiedades y condiciones, así como también su origen a partir del diagrama fundamental. En el Capítulo 4 se presentará la construcción matemática de los jamitones, vale decir, su definición matemática, obtención a partir del modelo de tráfico y varias propiedades que cumple.

En el Capítulo 5 se estudiarán varios esquemas numéricos para simular leyes de conservación escalar. Se compararán con ejemplos sencillos y se escogerá el método a utilizar para la simulación de jamitones del Capítulo siguiente.

En el Capítulo 6 se implementará el esquema numérico para así simular un jamiton. El esquema será validado comparando con el jamiton teórico y se replicarán resultados observados en la bibliografía, como la aparición de jamitinos en una ruta larga, esencialmente infinita.

Finalmente, en el Capítulo 7 se dará a conocer el procedimiento seguido para colisionar jamitones. Esto incluye la configuración inicial, condiciones que deben cumplir los jamitones para poder colisionar y elección de jamitones. Los jamitones elegidos serán colisionados y se estudiarán posibles propiedades que surgan de la colisión.

1.1. Introducción a modelos de tráfico

Realizando un acercamiento desde el punto de vista matemático, en los últimos años se han desarrollado y estudiado varios modelos de tráfico, caracterizados por su propio enfoque particular. Dado esto, se destacan tres perspectivas en la teoría de flujo vehicular: Microscópico, modelos celulares y macroscópicos.

Estos enfoques no funcionan de manera independiente pues resultan ser equivalentes tanto en sus formulaciones como en fenómenos que engloban. Por ejemplo el modelo más simple de autómatas celulares resulta ser un caso particular de discretización numérica del modelo macroscópico LWR.

1.1.1. Modelos microscópicos

Los modelos microscópicos describen el comportamiento individual de los vehículos y como interactúan entre sí. Sea $N > 0$ el total de vehículos en una carretera. Para el vehículo $j \in \{1, \dots, N\}$ se definen su posición, velocidad y aceleración en función del tiempo como $x_j(t)$, $v_j(t)$ y $a_j(t)$, respectivamente y que cumplen los siguientes principios físicos elementales:

- $v_j = \dot{x}_j, \forall j \in \{1, \dots, N\}$, es decir que la velocidad es la tasa de cambio de la posición.
- $a_j = \dot{v}_j = \ddot{x}_j, \forall j \in \{1, \dots, N\}$, es decir que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad.

Este tipo de modelos se puede generalizar por el sistema de EDOs de segundo orden siguiente:

$$a_j(t) = f(t, x_1, v_1, x_2, v_2, \dots, x_N, v_N), \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad (1.1)$$

donde f representa la interacción entre los vehículos. Ejemplos de modelos microscópicos son el modelo *follow the leader* [3], *optimal velocity* [4] y combinaciones los anteriores.

Los tipo *follow the leader* reduce las interacciones entre todos los vehículos a solo interacciones con el vehículo siguiente, acelerando o desacelerando en función del vehículo de adelante. Se resumen en la siguiente EDO:

$$a_j(t) = f(t, x_j, v_j, x_{j+1}, v_{j+1}), \quad j \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.2)$$

Donde f puede ser, por ejemplo, $f(t, x_j, v_j, x_{j+1}, v_{j+1}) = \frac{v_{j+1} - v_j}{x_{j+1} - x_j}$.

Los modelos *optimal velocity* resultan de una elección particular de f en el modelo *follow the leader*. Se define $f(t, x_j, v_j, x_{j+1}, v_{j+1}) = V(x_{j+1} - x_j) - v_j$ donde V representa la velocidad óptima del vehículo j . Es decir, los vehículos aceleran o desaceleran para alcanzar una velocidad óptima en relación a la distancia con el vehículo de delante.

La desventaja principal de este tipo de modelos es su baja eficiencia computacional al momento de generar simulaciones numéricas, dada la alta cantidad de ecuaciones que se deben resolver en simultáneo. De todas formas, existen librerías de código abierto y programas que permiten su simulación, como por ejemplo la librería `PySPH` de `Python`.

1.1.2. Modelos celulares

En este tipo de modelos se trabaja con autómatas celulares (deterministas o probabilísticas) donde cada célula del autómata representa un vehículo en movimiento con cierta velocidad v o bien un espacio vacío.

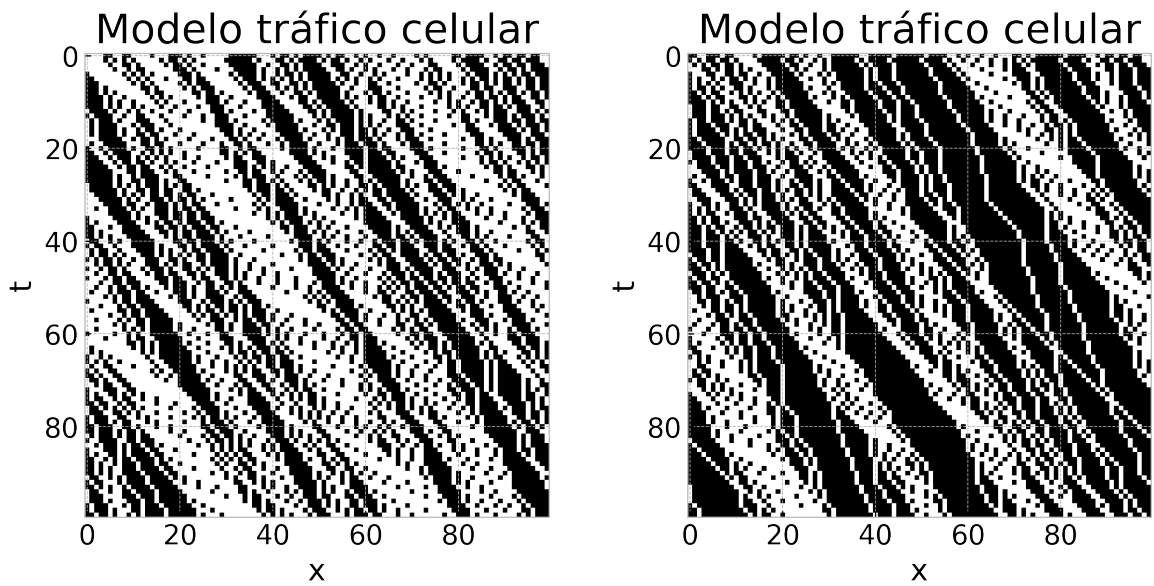
El modelo *Nagel-Schreckenberg* [5] es un tipo de modelo celular autómata basado en un algoritmo con cuatro reglas de actualización. Se definen $dx > 0$ y $dt > 0$ el tamaño de las celdas en que se divide la autopista y el paso temporal, junto con $N = L/dx$ con $L > 0$ el largo de la autopista. Sea $0 < M \leq N$ el total de vehículos y $p \in (0, 1)$. En cada instante temporal, se actualiza la posición y velocidad de cada vehículo en base al siguiente algoritmo:

Algorithm 1 Nagel-Schreckenberg

```

 $v \leftarrow v + 1$ 
 $v \leftarrow \min\{v, b\}$  con  $b$  celdas vacías al frente
if  $v \geq 2$  then
     $v \leftarrow \max\{v - 1, 0\}$  con probabilidad  $p$ 
end if
 $x \leftarrow x + v$ 

```



(a) Condición inicial con $p_s = 0.5$

(b) Condición inicial con $p_s = 0.7$

Figura 1.1: Simulaciones con $dt = dx = 1$, $N = 100$ y hasta tiempo final $T = 100$.

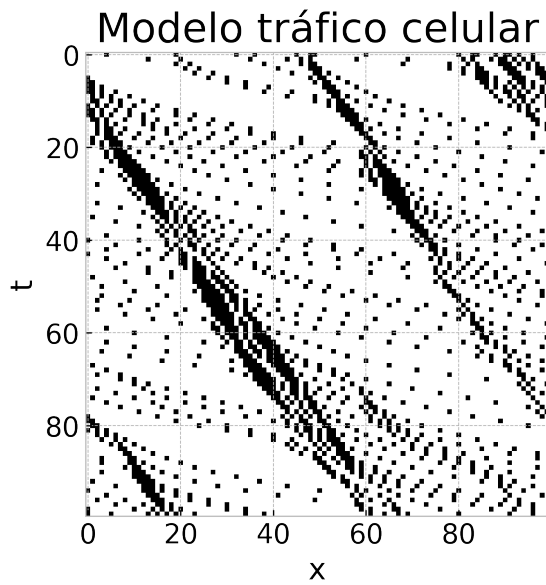


Figura 1.2: Condición inicial con $p_s = 0.2$

En las Figuras 1.1.a, 1.1.b y 1.2 la cantidad inicial de autos fue elegida de manera aleatoria, donde cada celda tiene probabilidad $p_s \in (0, 1)$ de contener o no un vehículo. En cada Figura se observan franjas negras que representan la acumulación de vehículos, es decir, atascos vehiculares o tacos, que además se desplazan en el tiempo. Se observa además otro comportamiento de la vida real: la aceleración de un vehículo cuando tiene el camino despejado (más apreciable en la Figura 1.2).

Una de las ventajas de este tipo de modelos es su sencillez y formación de fenómenos observables en la vida real, como lo son los atascos vehiculares. En particular el modelo *Nagel-Schreckenberg* corresponde a un modelo vehicular de primer orden, equivalente al modelo LWR [6, 7] que se verá en detalle en el Capítulo 3. También se pueden formular modelos de

transmisión celular equivalentes a ecuaciones macroscópicas de segundo orden, como ARZ [8, 9] o PW [10, 11].

1.1.3. Modelos macroscópicos

Este tipo de modelos serán los utilizados en este trabajo y se presentarán más en detalle en el Capítulo 3. En resumen, los modelos macroscópicos o continuos consideran un enfoque continuo del tráfico vehicular, pues ya no se observa el comportamiento individual de vehículos, si no en la densidad vehicular y en el campo de velocidades (velocidad que se tiene en un momento y lugar).

Si bien es un enfoque distinto a los ya presentados, los modelos macroscópicos se encuentran relacionados con los microscópicos o de autómatas celulares. Por ejemplo, en [12] se establecen equivalencias entre modelos continuos y microscópicos, o en [13] se ven equivalencias con autómatas celulares.

Este tipo de modelos presenta varias ventajas para el estudio del tráfico vehicular, por ejemplo son preferidos en términos de seguridad y privacidad de datos pues no accede individualmente a los vehículos, poseen buena precisión y estimación a gran escala para datos con ruido o dispersos [14, 15], pueden ser extendidos a rutas con más carriles o a problemas de control [16].

Capítulo 2

Motivación: Colisión Kink-antikink en ecuación ϕ^4

En este Capítulo se presentará la principal motivación del estudio de colisión de ondas viajeras. El objetivo principal de este Capítulo es simular la ecuación ϕ^4 y observar el comportamiento fractal de las velocidades de salida luego de la colisión, en función de las velocidades de entrada. Para esto, se exploran tres métodos distintos, de los cuáles dos corresponden a esquemas de diferencias finitas y un tercero correspondiente a un esquema espectral.

El fenómeno de las velocidades de salida en la ecuación ϕ^4 ha sido estudiado en [17–22], donde se describe matemáticamente el fenómeno conocido como resonancia *two-bounce*, que corresponde a un efecto de doble rebote producto de la colisión entre un kink y un antikink que viajan a velocidades específicas; junto a las debidas simulaciones numéricas.

La ecuación ϕ^4 está dada por

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \phi + \phi^3 = 0. \quad (2.1)$$

Esta ecuación admite una familia de soluciones tipo ondas viajeras llamadas *kinks* y dadas por

$$\phi(x, t) = \phi_K(x - vt) = \tanh\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{2(1 - v^2)}}\right), \quad (2.2)$$

donde v corresponde a la velocidad de entrada (fija) tal que $-1 < v < 1$. Por otro lado, la solución *antikink* corresponde a la misma onda pero viajando en sentido opuesto, $\phi_{\bar{K}}(x) = -\phi_K(x)$. Para las simulaciones numéricas se considerará la ecuación (2.1) con condiciones de borde especificadas para cada caso y con condiciones iniciales de modo tal que un kink y un antikink se aproximen entre ellos a una velocidad v , es decir

$$\phi(0, x) = \phi_K(x + x_0) + \phi_{\bar{K}}(x - x_0) - 1 \quad (2.3)$$

y

$$\phi_t(0, x) = -v\phi'_K(x + x_0) - v\phi'_{\bar{K}}(x - x_0). \quad (2.4)$$

Los esquemas numéricos a abordar serán: Diferencias finitas explícito, método de Crank-Nicolson y método pseudo-espectral, programados en `Python`. A modo de validación de los

esquemas, se calcularán para cada uno la energía total del sistema, dada por la expresión

$$E(t) = \int \frac{1}{2} |\phi_t|^2 + \frac{1}{2} |\phi_x|^2 + \frac{1}{4} (1 - \phi^2)^2 dx. \quad (2.5)$$

Notar que si ϕ es solución de (2.1) entonces E es constante en el tiempo ya que $\frac{dE}{dt} = 0$. Luego, se debe cumplir que $E(t) = E(0)$ para todo $t > 0$ y por tanto los esquemas numéricos deben ser capaces de preservar la energía del sistema.

Para calcular (2.5) se usó una regla de cuadratura adecuada e inspirada en la energía discreta del θ -esquema en [23, p.62] añadiendo el término no lineal de (2.1):

$$E^{n+1} = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 + a_h(\phi^{n+1}, \phi^n) + \theta a_h(\phi^{n+1} - \phi^n, \phi^{n+1} - \phi^n) + \psi(\phi^n), \quad (2.6)$$

donde $a_h(u, v) = \sum_{j=0}^N \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right) \left(\frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right)$ y $\psi(u) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N (1 - u_j^2)^2$. En cada simulación se obtendrá la diferencia de la energía a tiempo t_n y la energía inicial (obtenida numéricamente) cuyo valor es $E(0) \approx 0.96$.

2.1. Diferencias finitas

Los esquemas de diferencias finitas se caracterizan por aproximar las derivadas a través de discretizar su serie de Taylor, obviando los términos restantes. Para derivadas de segundo orden normalmente se consideran dos puntos vecinos para aproximar el valor de la función en un punto x_j , aunque el esquema puede ser extendido para considerar más de dos vecinos.

Un esquema de diferencias finitas explícito se distingue por poseer actualizaciones simples, donde el paso siguiente ϕ_j^{n+1} corresponde a una función del paso anterior ϕ_j^n , mientras que en un esquema implícito el paso siguiente además depende de si mismo, por lo que es necesario resolver un sistema lineal del tipo $Ax = b$ en cada paso temporal.

2.1.1. Esquema explícito

Este esquema fue utilizado en [20]. Sea $N > 0$ el total de puntos en la grilla espacial y $T > 0$ el tiempo final. Se definen $x_r > 0$ y $x_l = -x_r$ los extremos, y $h = (x_r - x_l)/N$ el paso espacial. Con esto, se define $x_j = hj$ con $j \in \{0, \dots, N + 1\}$ los puntos a evaluar.

Por otro lado, se define el paso temporal $\Delta t > 0$, $N_T = T/\Delta t$ y $t_n = \Delta t \cdot n$ con $n \in \{0, \dots, N_T\}$. Los esquemas explícitos en general deben cumplir con una condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), que en este caso está dada por:

$$\Delta t/h < 1, \quad (2.7)$$

por lo que los pasos temporal y espacial deben ser elegidos de manera apropiada para que la solución numérica sea estable. La ecuación (2.1) discretizada queda como:

$$\frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{h^2} + f(\phi_j^n) = 0, \quad (2.8)$$

donde $f(\phi) = -\phi + \phi^3$ y ϕ_j^n corresponde a la aproximación de la solución ϕ en el punto x_j a tiempo t_n . En este esquema se consideran condiciones de borde periódicas, que pueden ser implementadas imponiendo la condición de periodicidad en los extremos de la grilla, es decir

$$\phi_0^n = \phi_N^n, \quad \forall n \in \{0, \dots, N_T\}. \quad (2.9)$$

2.1.1.1. Resultados

Para las simulaciones se utilizaron $h = 0.01$ y $\Delta t = 0.009$, mismos utilizados en [20] y $\theta = 0$ para el cálculo de la energía (2.6).

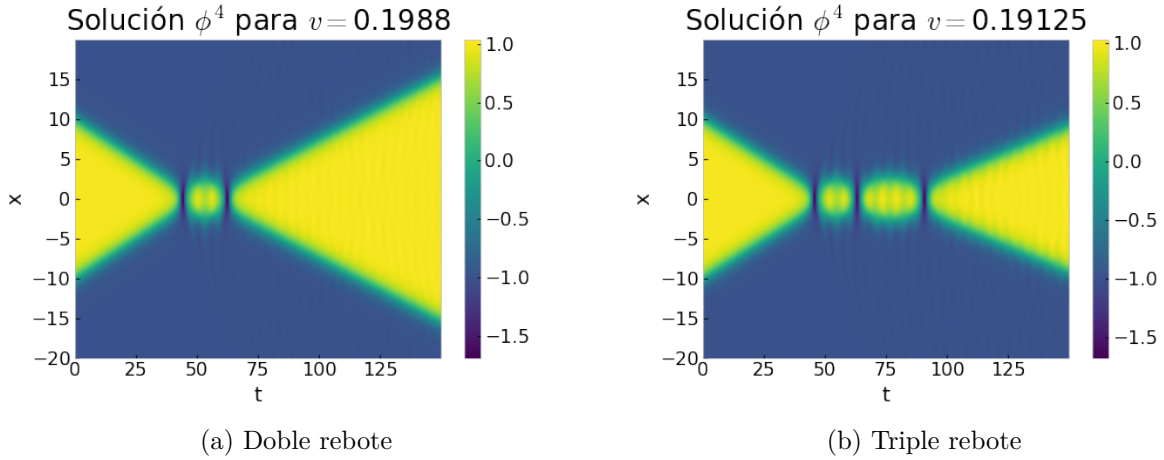


Figura 2.1: Ejemplos de colisiones.

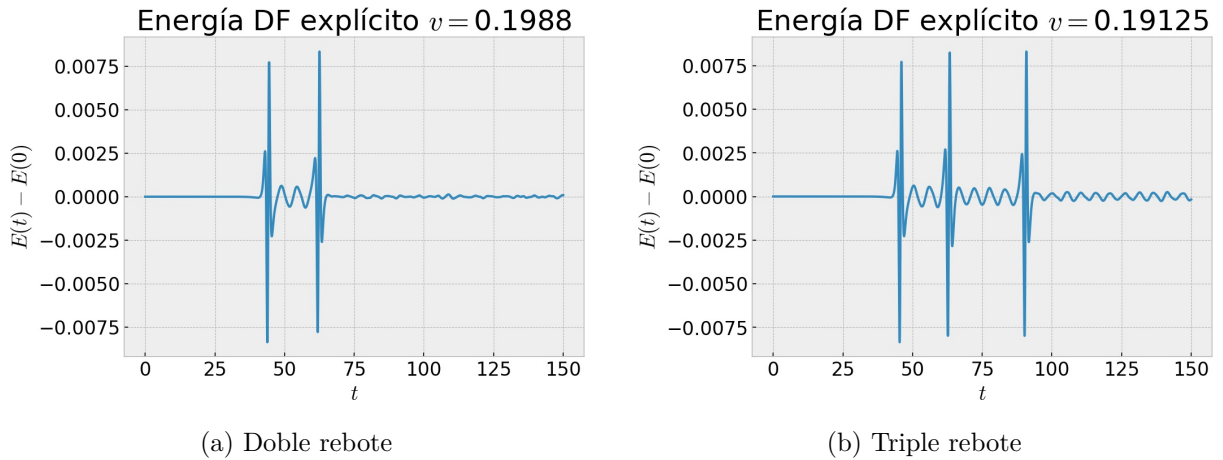


Figura 2.2: Energías para cada colisión

La Figura 2.1 muestra que el esquema explícito logra simular con precisión dobles y triples colisiones, además de que logra conservar (con saltos de pequeña magnitud en las colisiones) la energía del sistema en el tiempo, como se observa en la Figura 2.2. El problema principal de este método es que requiere de pasos temporales y espaciales pequeños para lograr una buena precisión en la solución. Esto aumenta los tiempos de ejecución y vuelve inviable obtener las velocidades de salida para distintas colisiones.

2.1.2. Método de Crank-Nicolson (CN)

Se utilizan los mismos parámetros de discretización del esquema anterior, salvo por Δt que en este caso puede ser escogido libremente dado que este esquema es incondicionalmente

estable.

Se utiliza el esquema de Crank-Nicolson en espacio presentado en [23, p.60] para la ecuación de onda con $\theta = 1/2$ y modificado para incluir la no linealidad del sistema. En este caso, la parte no lineal es evaluada en el paso n y por lo tanto considerada de manera explícita. La ecuación (2.1) discretizada queda como

$$\frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\phi_{j+1}^{n+1} - 2\phi_j^{n+1} + \phi_{j-1}^{n+1}}{2h^2} - \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - 2\phi_j^{n-1} + \phi_{j-1}^{n-1}}{2h^2} + f(\phi_j^n) = 0. \quad (2.10)$$

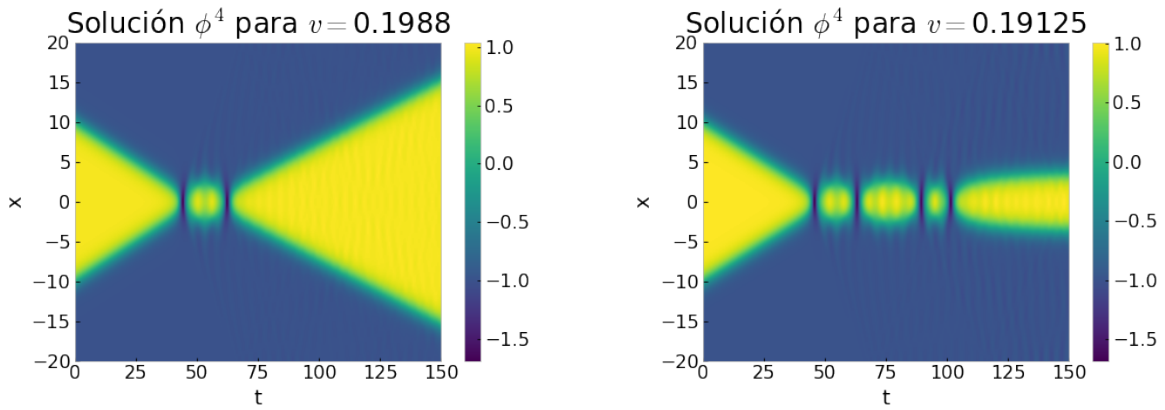
En este caso en cada instante temporal se debe resolver un sistema lineal del tipo

$$A\phi^{n+1} = b\phi^n \quad (2.11)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $b \in \mathbb{R}^N$ corresponden a las matrices de actualización del sistema.

2.1.2.1. Resultados

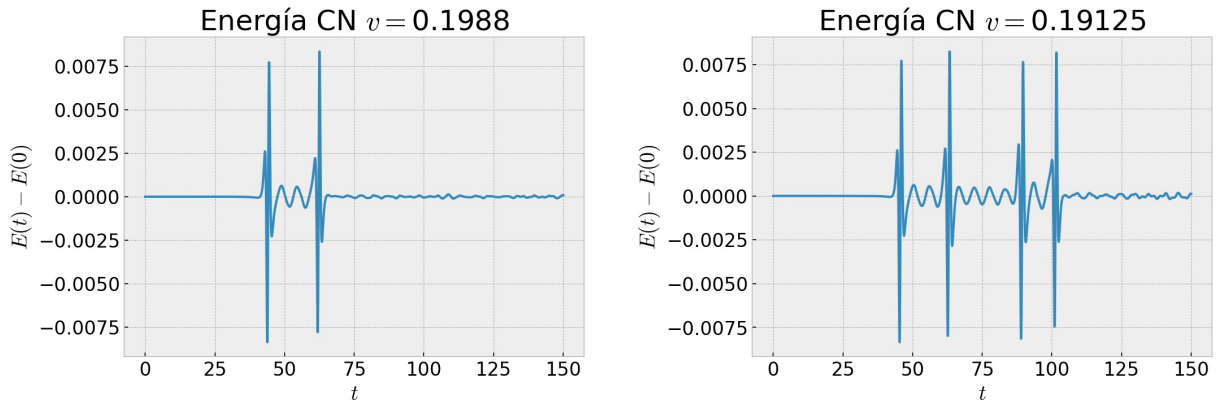
Se usó $h = 0.01$, $\Delta t = 0.009$ y $\theta = 1/2$ para la energía discreta (2.6).



(a) Doble rebote

(b) Esquema falla

Figura 2.3: Ejemplos de colisiones. Se observa que el esquema falla en simular un triple rebote.



(a) Doble rebote

(b) Esquema falla

Figura 2.4: Energía para cada colisión.

Un problema importante con este esquema es la falta de precisión a largo plazo debido a que la parte cúbica se considera explícita y por tanto se disminuye su precisión en tiempo, como se observa en la Figura 2.3.b. De todas formas el esquema es capaz de preservar la energía del sistema como se ve en 2.4, al igual que el esquema explícito. Otro problema es el coste computacional al tener que resolver sistemas matriciales en cada instante temporal y la necesidad de pasos temporales y espaciales pequeños para que la solución converja. Esto conlleva a altos tiempos de ejecución como en el esquema explícito y no resulta de interés para el cálculo de velocidades de salida.

2.2. Método pseudo-espectral

Se replica el método en [17] usando el método de colocación o pseudo-espectral mostrado en [24]. Los métodos de colocación consisten en aproximar las derivadas espaciales de la ecuación mediante combinaciones lineales de funciones continuas. En el caso de una ecuación estacionaria, se busca aproximar $\phi(x)$ definiendo ϕ^N como una combinación lineal finita:

$$\phi^N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{\phi}_j \varphi_j(x), \quad (2.12)$$

donde $\widehat{\phi}_j$ corresponden a los coeficientes y $\varphi_j(x)$ funciones suficientemente continuas. Un método se dice que es espectral si las funciones $\varphi_j(x)$ constituyen una base de funciones continuas para el dominio espacial que se desea estudiar. Ejemplos de bases pueden ser los polinomios de Legendre o polinomios de Fourier. Un método se dice pseudo-espectral cuando las funciones φ_j se evalúan en puntos especiales x_n (también llamados puntos de colocación) a determinar según la base que se escoja.

En el caso de la ecuación (2.1) se puede notar que se preserva la paridad espacial de las soluciones, por lo que resulta conveniente trabajar con la serie de cosenos y sólo considerar el dominio $[0, L]$, dado que la solución se puede extender de manera par a todo el dominio $[-L, L]$. Se consideran $\varphi_j(x_n) = \cos(k_j x_n)$ donde los valores de k_j y x_n se escogen de manera que las sumas parciales (2.12) coincidan con la definición de la transformada discreta del coseno, dada por

$$\text{DCT}(\phi)_n = \frac{2}{N} \left(\frac{\phi_0}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} \phi_n \cos \left(\frac{j\pi(2n+1)}{2N} \right) \right). \quad (2.13)$$

Se escogen $k_j = \frac{\pi j}{2Nh}$ y $x_n = h(2n+1)$ donde $h > 0$ corresponde al paso espacial. Dada las propiedades de la transformada del coseno, implícitamente se está considerando condiciones de borde Neumann homogéneas.

Hasta el momento sólo se ha tenido en cuenta la variable espacial. Para incorporar la dependencia temporal de la solución, basta tomar transformada del coseno en espacio a (2.1) solo en los sumandos lineales y aplicar propiedades para la derivada en x , para así obtener el sistema de EDO's

$$\partial_{tt} \text{DCT}(\phi)_j = -k_j^2 \text{DCT}(\phi)_j + \text{DCT}(\phi)_j - \text{DCT}(\phi_j^3), \quad j \in \{0, \dots, N-1\}, \quad (2.14)$$

o bien, aplicando DCT^{-1} la inversa de la transformada del coseno discreta dada por

$$\text{DCT}^{-1}(\phi)_j = \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n \cos\left(\frac{j\pi(2n+1)}{2N}\right) \quad (2.15)$$

se obtiene el sistema

$$\partial_{tt}(\phi)_j = \text{DCT}^{-1}\left(-k_j^2 \text{DCT}(\phi)_j\right) + \phi_j - \phi_j^3, \quad j \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (2.16)$$

En este caso, el término no lineal fue trasladado entre el espacio de Fourier (asociado al coseno) y el espacio usual mediante la transformada del coseno. Para resolver las ecuaciones (2.16) se utiliza el método de Runge-Kutta de orden 4.

Observación En algunos casos la EDO obtenida luego de aplicar transformada se puede resolver explícitamente, como es el caso de la ecuación de Schrödinger [25].

La principal razón para usar métodos espectrales en ϕ^4 es que los demás métodos realizados necesitan un mallado muy fino para tener simulaciones confiables y esto incurre en tiempos de ejecución elevados, mientras que los espectrales en general poseen buena precisión y con muchos menos puntos de discretización.

2.2.1. Resultados

Se usó $N = 128$ (total puntos de colocación) y $\Delta t = 1/20$. Para la energía se usó $\theta = 0$ en (2.6) dado que el esquema es explícito en espacio.

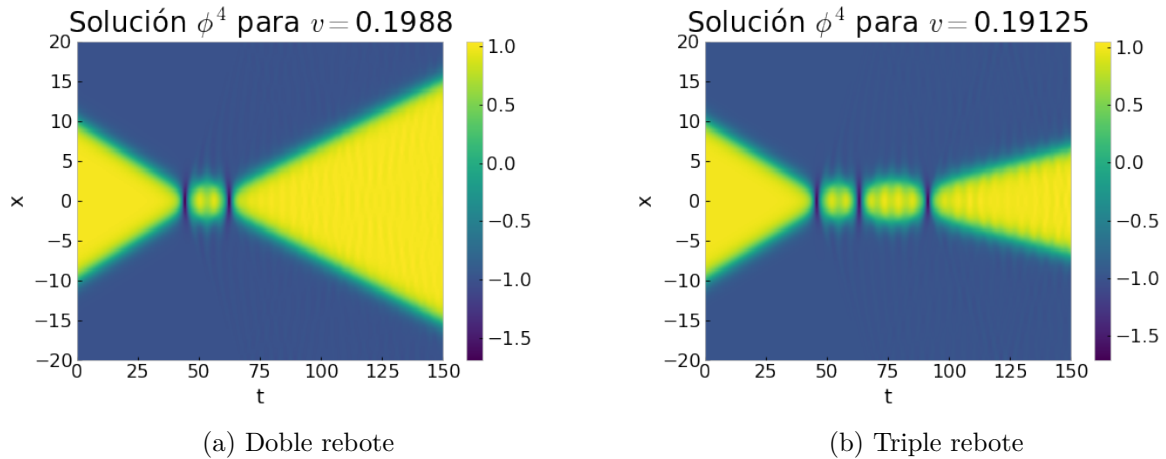


Figura 2.5: Ejemplos de colisiones.

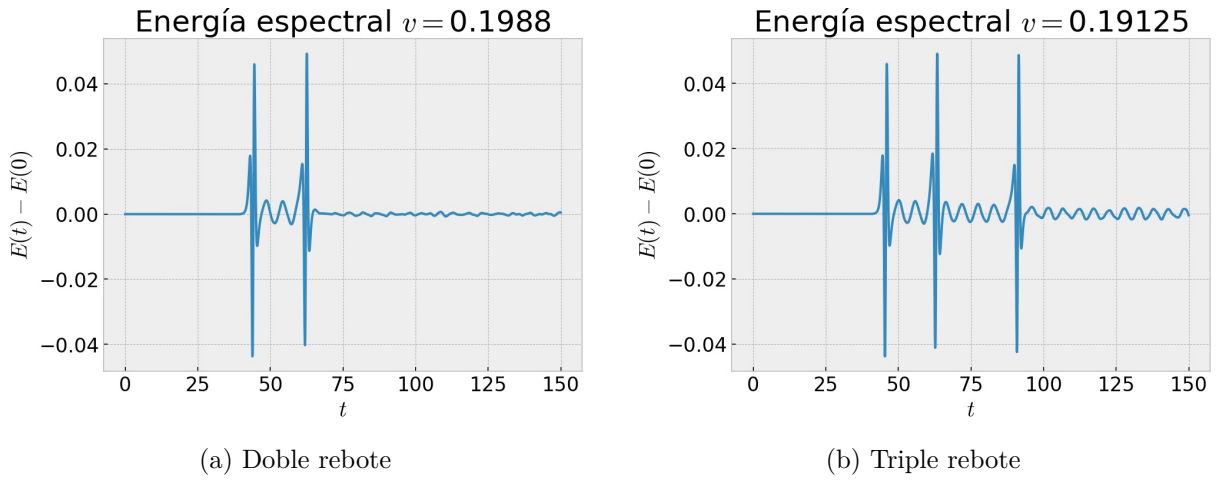


Figura 2.6: Energías para cada colisión. Se observa que las diferencias son mayores que en los esquemas anteriores.

Un defecto de los métodos espectrales es que, en general, no preservan la energía de los sistemas, como por ejemplo en la ecuación de Schrödinger no lineal [25]. En este caso particular para la ecuación ϕ^4 el esquema presenta diferencias en la energía más elevadas en comparación a los demás esquemas y no se podría concluir directamente que el método preserva la energía, debido posiblemente a las resonancias que surgen, como se ve en la Figura 2.6. Una posible solución a este efecto es considerar un esquema Runge-Kutta especializado en sistemas no lineales, como lo hecho en [17] y explicado con mayor detalle en [26]. De todas formas, los resultados en general no varían mucho entre esquemas, salvo en CN donde no se logran reproducir triples rebotes. Luego, dado el menor tiempo de ejecución del método pseudo-espectral, se elige este para calcular las velocidades de salida para 800 colisiones con velocidades de entradas distintas.

Para obtener las velocidades de salida se determina en primer lugar el instante en que la solución deja de rebotar. Luego, se calcula numéricamente el tiempo que demora la onda entre dos puntos para varios instantes de tiempo y por último se toma el promedio de las velocidades en cada ventana de tiempo. En caso de que hayan infinitos rebotes se tomará como velocidad de salida nula. Las velocidades obtenidas se observan en la Figura 2.7.

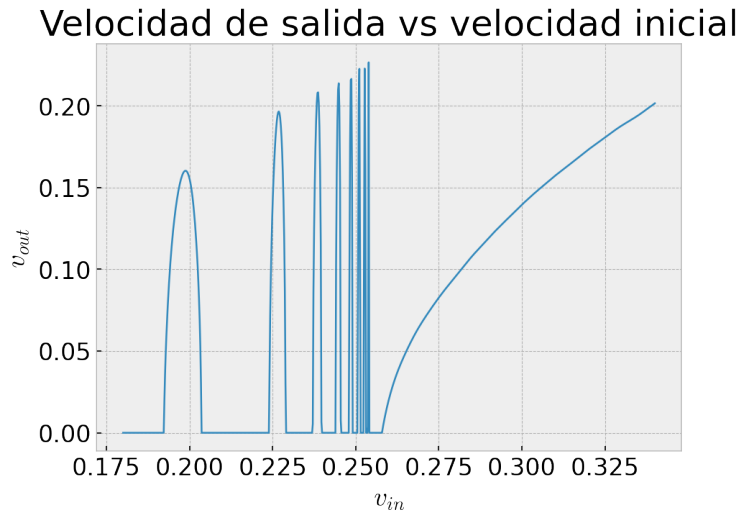


Figura 2.7: Gráfico de velocidades de salida

La particularidad de este tipo de colisiones se observa en la Figura 2.7 antes mencionada, donde las velocidades de salida parecen seguir un comportamiento fractal a medida que se aproximan a una velocidad crítica $v_c \approx 0.2598$. El objetivo en los Capítulos siguientes será explorar y encontrar algún comportamiento similar al colisionar jamitones.

Capítulo 3

Modelos macroscópicos

Como se mencionó en la introducción, los modelos macroscópicos describen el comportamiento vehicular como un continuo y es el tipo de modelo que se utilizará en este trabajo. Este tipo de ecuaciones describe la evolución espacio temporal de la densidad vehicular a través de ecuaciones tipo leyes de conservación escalar.

Las variables principales en este tipo de modelos son:

- Densidad $\rho = \rho(x, t)$, que representa el número de vehículos por unidad de largo y que se asumirá siempre positivo,
- campo de velocidades $u = u(x, t)$, que representa la velocidad a la que irá un auto en la posición x a tiempo t y
- tasa de flujo vehicular $q = \rho u$, que indica la cantidad de vehículos que pasan por un punto fijo por una unidad de tiempo.

Con estas se puede deducir la **ecuación de continuidad**. Para x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ dos puntos en el espacio se define

$$m(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \quad (3.1)$$

como el total de vehículos entre los puntos x_1 y x_2 . El cambio en el total de vehículos entre ambos puntos estará dado por la diferencia entre el flujo vehicular entrante por x_1 y el flujo saliente por x_2 , es decir que

$$\frac{d}{dt} m(t) = q(x_1, t) - q(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} q_x(x, t) dx.$$

Pero $\frac{d}{dt} m(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho_t(x, t) dx$. Juntando ambas ecuaciones, se obtiene que

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho_t(x, t) + q_x(x, t) dx = 0,$$

y dado que x_1 y x_2 son arbitrarios, se concluye la ecuación de continuidad:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (3.2)$$

que indica que los vehículos no se crean ni se destruyen. Escrito de esta manera el modelo se encuentra incompleto al tener dos incógnitas (ρ y u) y una ecuación. El modelo *Lighthill-Whitham-Richards* (LWR) arregla este problema considerando $u = u(\rho)$ para así reducir el

total de incógnitas. En cambio, los modelos de segundo orden tales como *Aw-Rasclé-Zhang* (ARZ) y *Payne-Whitham* (PW) agregan una segunda ecuación para el campo de velocidades que independiza ambas variables.

Antes de continuar, es necesario introducir el concepto de *diagrama fundamental* que constituye una base importante para los modelos de tráfico tanto de primer orden como de segundo orden, pues en él se condensan las principales propiedades que se pretenden encapsular en los modelos macroscópicos, como por ejemplo las congestiones vehiculares o el flujo libre a bajas densidades.

3.1. Diagrama fundamental

El diagrama fundamental es el gráfico de medidas empíricas de la tasa de flujo vehicular versus la densidad. En los modelos macroscópicos se intenta aproximar mediante una función de flujo, estrictamente cóncava, dada por $Q(\rho) = \rho U(\rho)$, donde $U(\rho)$ se conoce como *velocidad deseada* y que es decreciente en función de ρ (mayor densidad vehicular implica menor libertad de movimiento para los vehículos).

En la Figura 3.1 se observa un ejemplo de diagrama fundamental obtenido de una base de datos del año 2003 del departamento de transporte de Minnesota [27] de un sensor de autopista.

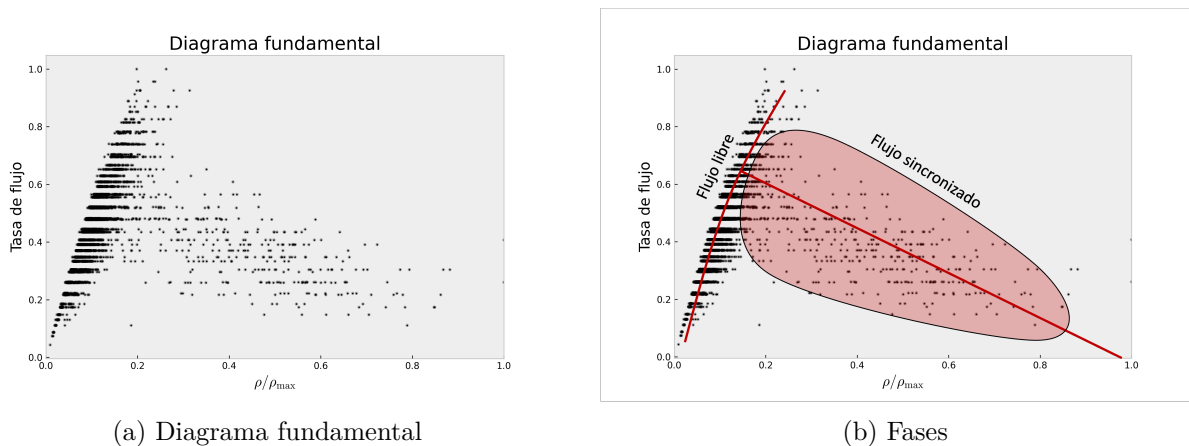


Figura 3.1: Ejemplo de diagrama fundamental con sus fases.

La primera medición de un DF fue hecha en 1930 por Greenshields [28] y donde el flujo $Q(\rho)$ resultaba ser cuadrático con respecto a ρ (con $U(\rho)$ dado por (3.5)). Estudios posteriores revelaron que una aproximación cuadrática no sería adecuada y desde entonces se han propuesto varias funciones, como por ejemplo funciones lineales por pedazos [29, 30] o bien bi-cuadrático [31].

Usualmente el diagrama fundamental se clasifica en dos o tres fases, dependiendo de la teoría. La teoría de dos fases divide el DF en flujo libre y flujo sincronizado, como se aprecia en la Figura 3.1.b. La teoría de tres fases identifica el flujo para baja densidad (flujo libre), densidad media (flujo sincronizado) o alta densidad (*tacos* en movimiento) [32].

Un ejemplo de función $Q(\rho)$ puede ser el flujo de Newell-Daganzo [29, 30] que corresponde a un flujo lineal por pedazos dado por

$$Q(\rho) = \begin{cases} \frac{Q_{\max}\rho}{\rho_c} & \text{si } 0 < \rho < \rho_c, \\ Q_{\max} \frac{\rho_{\max} - \rho}{\rho_{\max} - \rho_c} & \text{si } \rho_c < \rho < \rho_{\max}, \end{cases} \quad (3.3)$$

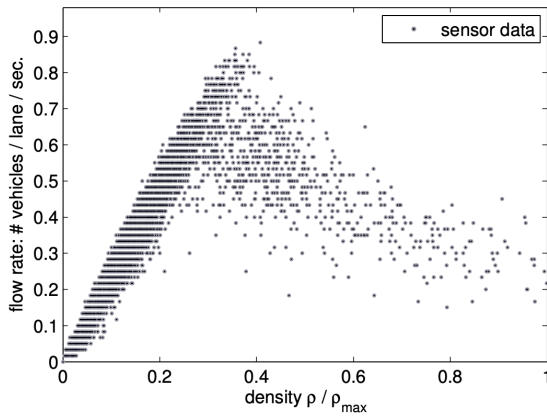
donde $Q_{\max} = u_{\max}\rho_c$ y ρ_c se conoce como *densidad crítica* que corresponde a la densidad cuyo flujo es máximo.

Otro ejemplo es el flujo propuesto en [33] dado por

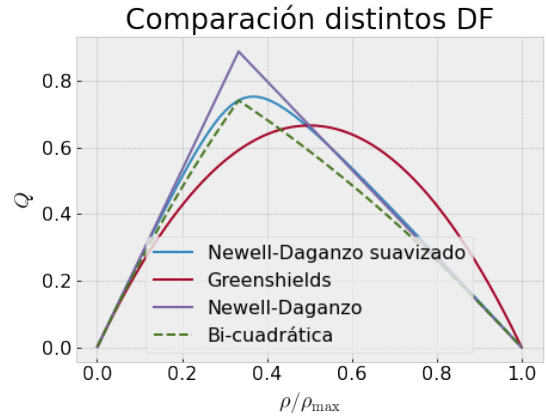
$$Q(\rho) = c \left(g(0) + (g(1) - g(0)) \frac{\rho}{\rho_{\max}} - g \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \right), \quad (3.4)$$

con $g(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{y-b}{\lambda}\right)^2}$, que corresponde a una versión suavizada del flujo de Newell-Daganzo (3.3) y cuyos parámetros pueden ser ajustados usando mínimos cuadrados con un conjunto de datos para aproximar a cualquier diagrama fundamental [34].

En la Figura 3.2.b se aprecia una comparativa entre los distintos flujos mencionados, con $\rho_c = \rho_{\max}/3$.



(a) Diagrama fundamental



(b) Comparativa entre varios flujos distintos.

Figura 3.2: Diagrama fundamental usado en [33] y comparativa de algunos flujos.

Se prefiere usar el flujo (3.4) antes que (3.3) ya que esta última no es derivable en $\rho = \rho_c$ y para el desarrollo del trabajo es necesario que las funciones involucradas en los modelos tengan un mínimo de suavidad.

3.2. Modelo LWR

Como se dijo anteriormente, este modelo asume una relación fundamental entre ρ y u . Se define $u(\rho) = U(\rho)$ con $U(\rho)$ definida a partir del diagrama fundamental. Una primera elección para U puede ser

$$U(\rho) = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right), \quad (3.5)$$

es decir, una interpolación lineal entre la máxima velocidad a la que puede ir un vehículo individualmente y el flujo vehicular a densidad máxima (tal que los vehículos no puedan

moverse). Esta elección lleva a una aproximación cuadrática del DF, como se observa en 3.2.b. Sin embargo, se pueden definir otras alternativas más complejas a partir de flujos $Q(\rho)$ que aproximen mejor el DF y con la relación $U(\rho) = Q(\rho)/\rho$ (recordar que $\rho > 0$). Luego, LWR corresponde a la ecuación

$$\rho_t + Q(\rho)_x = 0. \quad (3.6)$$

Si bien este modelo reproduce de buena manera el comportamiento del tráfico vehicular a bajas densidades, no logra capturar el efecto dispersivo que se aprecia en el DF en el régimen congestionado o de flujo sincronizado. Además, tampoco logra reproducir el *fenómeno de congestión fantasma* [35], que consiste en la aparición de atochamientos vehiculares o *tacos* sin influencia de factores externos y que ocurren por la propagación de pequeñas perturbaciones en el tráfico. Este último problema es crítico pues los *jamitones* nacen precisamente de este fenómeno y que, vale decir, son el enfoque principal de este trabajo.

3.3. Modelo PW

El modelo *Payne-Whitham* fue el primer modelo de segundo orden propuesto y está dado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p(\rho)_x &= \frac{U(\rho) - u}{\tau}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $p(\rho)$ es una función estrictamente creciente y corresponde a la *presión del tráfico* que modela la conducción preventiva, y τ es el *tiempo de relajación* que representa el tiempo en que los conductores ajustan su velocidad a la velocidad deseada. Una elección posible para $p(\rho)$ puede ser $p(\rho) = \beta\rho^\gamma$ [36], llamada presión regular, o bien una versión más compleja dada por:

$$p(\rho) = -\beta \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} + \ln \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \right) \quad (3.8)$$

conocida como *presión singular*.

En [33] se demuestra que este modelo posee soluciones gobernadas por ondas viajeras no lineales auto-sustentadas (*jamitones*). Sin embargo, este modelo ha sido criticado en [37] pues, bajo ciertas condiciones, admite soluciones con flujos y velocidades negativas (vehículos yendo en sentido contrario). Es por esto que se prefieren otros modelos de tráfico de segundo orden, aunque manteniendo el término de relajación en la segunda ecuación.

3.4. Modelo ARZ no homogéneo

El modelo ARZ no homogéneo escrito en las variables ρ y u está dado por:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (u + h(\rho))_t + u(u + h(\rho))_x &= \frac{U(\rho) - u}{\tau}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $h(\rho)$ se conoce como *función de duda*, es estrictamente creciente y cumple un rol similar a la presión en PW.

Este modelo es un *sistema hipérbolico de leyes de conservación con término de relajación* y originalmente fue propuesto en su versión homogénea, pero la adición del término de relajación en la segunda ecuación es lo que permite la aparición de los *jamitones*.

Las funciones $U(\rho)$ y $h(\rho)$ deben ser dos veces diferenciable y deben cumplir las siguientes condiciones:

- a) $\frac{dU}{d\rho} < 0$ y $\frac{d^2U}{d\rho^2} > 0$, es decir que $U(\rho)$ sea decreciente y $Q(\rho)$ sea cóncava.
- b) $\left(\frac{dh}{d\rho} > 0\right)$ y que $\rho h(\rho)$ sea estrictamente convexa, de modo que $\frac{d\rho h(\rho)}{d\rho} > 0$. Estas dos hipótesis aseguran que las ecuaciones estén bien puestas en presencia de soluciones tipo *shocks* [38] y resuelven el problema de PW.

En [39] se comprueba que el sistema es efectivamente hiperbólico. Para esto, se multiplica la primera ecuación de (3.9) por $h'(\rho)$ y se resta a la segunda, llegando al sistema

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ u_t + u_x(u - \rho h'(\rho)) &= \frac{h'(\rho)}{\tau}(U(\rho) - u). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se definen

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, L(W) = \begin{pmatrix} u & \rho \\ 0 & u - \rho h'(\rho) \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h'(\rho)}{\tau}(U(\rho) - u) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

para así escribir el sistema ARZ linealizado

$$W_t + L(W)W_x = f. \quad (3.12)$$

Los valores propios de la matriz $L(W)$ están dados por

$$\lambda_1 = u - \rho h'(\rho), \quad \lambda_2 = u, \quad (3.13)$$

que por b) cumplen que $\lambda_1 < \lambda_2$ si $\rho > 0$ y por lo tanto el sistema (3.9) es estrictamente hiperbólico. Los valores propios del sistema se conocen como *velocidades características* y serán de utilidad más adelante para describir la condición de existencia de los *jamitones*.

Dependiendo de las variables que se defina, el modelo ARZ puede tener otras formulaciones. A continuación se presentan dos y la utilidad que tiene cada una. La primera de ellas es la **forma conservativa**. Se define la variable $y = \rho(u + h(\rho))$, de donde $u = y/\rho - h(\rho)$. Reemplazando en la primera ecuación de (3.9) se obtiene

$$\rho_t + (y - \rho h(\rho))_x = 0. \quad (3.14)$$

Para la segunda relación, se multiplica la primera ecuación de (3.9) por $(u + h(\rho))$ y se suma a la segunda ecuación multiplicada por ρ , quedando el sistema

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ (\rho(u + h(\rho)))_t + (u\rho(u + h(\rho)))_x &= \frac{\rho}{\tau}(U(\rho) - u) \end{aligned}$$

y que escrito en variables conservativas se lee como:

$$\begin{aligned} \rho_t + (y - \rho h(\rho))_x &= 0 \\ y_t + \left(\frac{y^2}{\rho} - yh(\rho) \right)_x &= \frac{1}{\tau} (\rho (U(\rho) + h(\rho)) - y). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Definiendo

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ y \end{pmatrix}, F(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} y - \rho h(\rho) \\ \frac{y^2}{\rho} - yh(\rho) \end{pmatrix}, S(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} (\rho (U(\rho) + h(\rho)) - y) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

el sistema se puede reescribir como

$$\mathbf{Q}_t + F(\mathbf{Q})_x = S(\mathbf{Q}). \quad (3.17)$$

Esta forma de escribir el modelo será esencial para realizar simulaciones numéricas en el Capítulo 6, como también es útil para calcular las velocidades características (3.13) a través del Jacobiano de F , aunque se requiere un poco más de trabajo algebraico.

La segunda forma de escribir el modelo ARZ es la forma **Lagrangeana** [40, 41]. En este caso, se definen las variables $v(\sigma, t)$ y $u(\sigma, t)$ donde $v = 1/\rho$ y σ es el número de vehículos, que cumple

$$d\sigma = \rho dx - \rho u dt. \quad (3.18)$$

Con estas variables, el modelo se lee como

$$\begin{aligned} v_t &= u_\sigma, \\ (u + \hat{h}(v))_t &= \frac{\hat{U}(v) - u}{\tau}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $\hat{h}(v) = h(1/v)$ y $\hat{U}(v) = U(1/v)$ y que satisfacen

$$\frac{d\hat{U}}{dv} > 0, \frac{d^2\hat{U}}{dv^2} < 0, \frac{d\hat{h}}{dv} < 0 \text{ y } \frac{d^2\hat{h}}{dv^2} > 0, \quad (3.20)$$

a partir de las hipótesis a) y b). En el Anexo B se presenta en detalle la derivación del sistema. Esta formulación será útil en la construcción teórica de los jamitones, como también se puede usar en el método SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) (ver [42, 43]) para realizar simulaciones numéricas como en [36], pero que no fue utilizado en este trabajo.

Ambas formas tienen asociadas condiciones de *Rankine-Hugoniot* (ver el Anexo A para más información sobre la derivación de estas condiciones). Para variables conservativas se tiene que $[F(\mathbf{Q})] = s[\mathbf{Q}]$ y por lo tanto se tienen

$$\begin{aligned} [y - \rho h(\rho)] &= s[\rho], \\ [y^2/\rho - yh(\rho)] &= s[y]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde $[u] = u^+ - u^-$ es el valor del salto de la variable u a través de un shock y s la velocidad de propagación del shock. Para variables Eulerianas basta recordar que $y = \rho(u + h(\rho))$ para

así tener que

$$\begin{aligned} [\rho u] &= s[\rho], \\ [\rho u^2 + \rho u h(\rho)] &= s[\rho(u + h(\rho))]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para la forma Lagrangeana se tienen las condiciones

$$\begin{aligned} [u] &= m[v], \\ [u] &= -[\hat{h}(v)], \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde $-m$ es la velocidad de propagación del shock pero en variables Lagrangeanas (en el esquema euleriano m representa el flujo vehicular que pasa a través de un shock). En el Capítulo 4 se verá que ambas cantidades s y m están relacionadas de alguna forma.

3.4.1. Condición sub-característica

Los modelos macroscópicos comparten un tipo de solución llamadas *estado base* donde $\rho(x, t) = \tilde{\rho} = \text{cte.}$ y $u(x, t) = \tilde{u} = \text{cte.}$, es decir que el flujo vehicular se mueve de manera uniforme: Los vehículos se encuentran siempre a la misma distancia y se mueven a su velocidad deseada $\tilde{u} = U(\tilde{\rho})$.

Por otro lado el término de relajación introducido en los modelos de segundo orden provoca que la velocidad del tráfico u converja a $U(\rho)$ cuando $\tau \rightarrow 0^+$. En este caso, las soluciones tanto de ARZ como de PW estarían dominadas por la ecuación de continuidad (3.2) con $u = U(\rho)$, que corresponde precisamente al modelo LWR. Notar además que (3.6) posee una velocidad característica dada por $\mu(\rho) = Q'(\rho) = \rho U'(\rho) + U(\rho)$.

Sea $\rho(x, t) = \tilde{\rho}$ y $u(x, t) = \tilde{u} = U(\tilde{\rho})$ un estado base para algún modelo de segundo orden. Se definen las siguientes condiciones:

Definición 3.1 (Estabilidad lineal (EL)) *El estado base $(\tilde{\rho}, \tilde{u})$ es linealmente estable si toda pequeña perturbación decae en tiempo.*

Definición 3.2 (Condición sub-característica (CSC)) *El estado base $(\tilde{\rho}, \tilde{u})$ cumple la condición sub-característica si la velocidad característica $\mu = \mu(\tilde{\rho})$ del modelo LWR (3.6) se encuentra entre las dos velocidades características $\lambda_1 = \lambda_1(\tilde{\rho}, \tilde{u})$, $\lambda_2 = \lambda_2(\tilde{\rho}, \tilde{u})$ con $\lambda_1 < \lambda_2$ del modelo de segundo orden, es decir*

$$\lambda_1 < \mu < \lambda_2. \quad (3.24)$$

El teorema de Whitham relaciona ambas condiciones:

Teorema 3.1 (Whitham) *El estado base $(\tilde{\rho}, \tilde{u})$ es linealmente estable si y solo si cumple la condición sub-característica.*

La demostración del teorema 3.1 fue realizada por Whitham en [44]. Cómo se mencionó con anterioridad, los modelos de segundo orden son capaces de reproducir inestabilidades en el tráfico y que, por lo tanto, el teorema de Whitham se vuelve importante para poder distinguir entre estados base estables e inestables de una manera más sencilla a través de la CSC. De todas formas, se pueden estudiar las inestabilidades de manera directa, calculando

el factor de crecimiento para perturbaciones de la forma e^{ikx} como en [45] y concluyendo la misma desigualdad de CSC.

Usando las velocidades características calculadas en (3.13) para el modelo ARZ se tiene que su condición CSC corresponde a

$$\tilde{u} - \tilde{\rho}h'(\tilde{\rho}) < \tilde{\rho}U'(\tilde{\rho}) + U(\tilde{\rho}) < \tilde{u},$$

pero $\tilde{u} = U(\tilde{\rho})$ quedando que

$$-\tilde{\rho}h'(\tilde{\rho}) < \tilde{\rho}U'(\tilde{\rho}) < 0.$$

Por a) la segunda desigualdad siempre se cumple. Así, se obtiene que el estado base $(\tilde{\rho}, \tilde{u})$ es linealmente estable si y solo si

$$0 < h'(\tilde{\rho}) + U'(\tilde{\rho}) \tag{3.25}$$

para el modelo ARZ.

El teorema 3.1 ha sido investigado y extendido en varios trabajos [11, 44, 46–48] con principal enfoque en la CSC e incluso en sistemas hiperbólicos de N ecuaciones más generales que los modelos de tráfico. Algunos de estos resultados son, por ejemplo:

- El teorema (3.1) puede ser extendido a relacionar la CSC con la estabilidad de las soluciones: Una solución de estado base con pequeñas perturbaciones converge al estado base inicial cuando $t \rightarrow \infty$,
- las soluciones a modelos de segundo orden que satisfacen la CSC en todo punto convergen a soluciones de LWR cuando $\tau \rightarrow 0$,
- más general, si τ no es lo suficientemente pequeño, las soluciones a modelos de segundo orden convergen a soluciones de LWR pero con un término de viscosidad no lineal adicional y de magnitud $\mathcal{O}(\tau)$, y
- análisis de casos degenerados para CSC: $\lambda_1 = \mu < \lambda_2$ o viceversa y que han sido estudiados en [49, 50].

Una pregunta interesante que fue estudiada en [33, 36, 45], es ¿cómo evolucionan las soluciones a estados base constantes en modelos de segundo orden cuando no se cumple la CSC?. En los trabajos mencionados y en estudios numéricos en PW y ARZ [36, 40] se muestra que este tipo de soluciones convergen a regímenes dominados por jamitones, que será el foco principal de este trabajo.

Capítulo 4

Jamitones

4.1. Funciones del modelo

Se considerarán las siguientes funciones específicas para el modelo ARZ (3.9):

- La función de diagrama fundamental Q dada por (3.4) y con parámetros $b = 1/3$, $c = 0.078u_{\max}\rho_{\max}$, $\lambda = 1/10$ y $u_{\max} = 20m/s^2$ que se escogen para ajustar datos reales [33],
- el valor de ρ_{\max} se ajusta asumiendo un tamaño de 5 metros por vehículo más un 50% extra de distancia segura entre estos. Luego, en ρ_{\max} habrá exactamente un vehículo en $7.5m$ y por lo tanto $\rho_{\max} = 1/7.5m$,
- la velocidad deseada estará dada por $U(\rho) = Q(\rho)/\rho$ y
- la función de duda será $h(\rho) = \beta \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}-\rho}\right)^\gamma$ con $\beta = 8$ y $\gamma = 1/2$.

El tiempo de relajación τ para testear y obtener resultados generales será $\tau = 5s$ pero en el Capítulo 7 se estudiarán efectos para otros valores de τ . Los gráficos de las funciones se presentan en las Figuras 4.1 y 4.2.

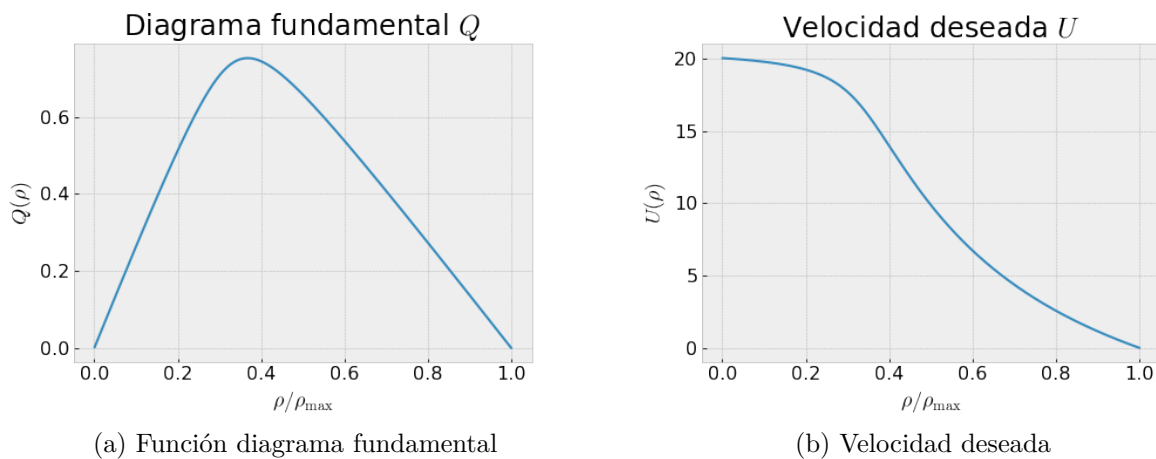
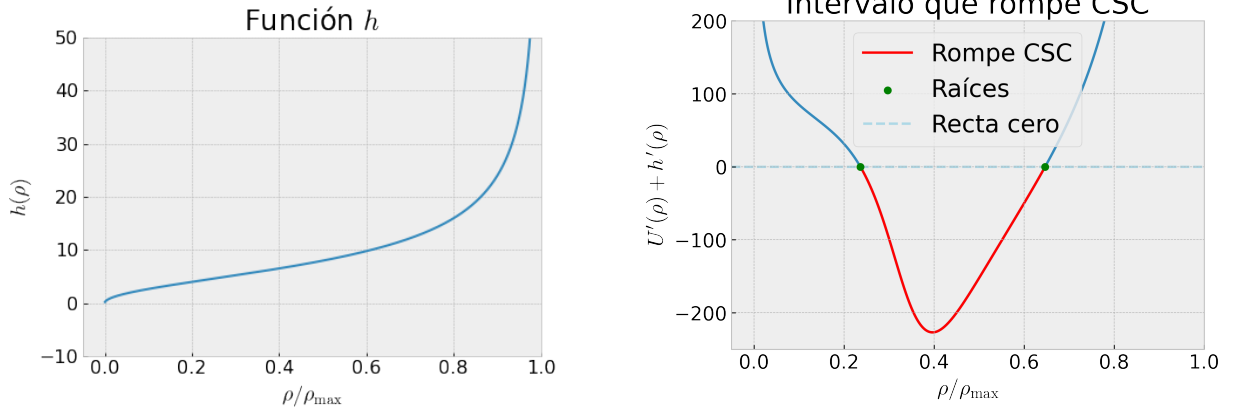


Figura 4.1: Gráficos de las funciones Q y U .



(a) Función de duda

(b) Gráfico $U'(\rho) + h'(\rho)$ Figura 4.2: Gráficos de h e intervalo donde se rompe CSC para ARZ.

4.2. Análisis de ondas viajeras

Los jamitones se definen como ondas viajeras auto sustentadas que surgen en modelos de segundo orden. Estos pueden ser construidos siguiendo la teoría Zel'dovich-von Neumann-Döring (ZND) [51] ya que poseen misma estructura matemática que las ondas de detonación.

Se realiza un ansatz de ondas viajeras para obtener una expresión para los jamitones. Se hará la construcción con la formulación Lagrangeana (3.19) pero las expresiones finales y simulaciones se traducirán a variables eulerianas al tener mejor visualización física. Sea $\chi = \frac{m\tau + \sigma}{\tau}$. El objetivo será encontrar soluciones $v(\sigma, t) = v(\chi)$ y $u(\sigma, t) = u(\chi)$ de (3.19). Reemplazando estas expresiones en (3.19) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{m}{\tau}v'(\chi) - \frac{1}{\tau}u'(\chi) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{m}{\tau}u'(\chi) + \hat{h}'(v(\chi))\frac{m}{\tau}v'(\chi) = \frac{\hat{U}(v(\chi)) - u(\chi)}{\tau}. \quad (4.2)$$

Integrando directamente (4.1) se tiene que

$$mv - u = -s, \quad (4.3)$$

donde s es una constante de integración. En variables Lagrangeanas $-m$ corresponde a la velocidad de propagación del jamiton, mientras que s corresponde al flujo de masa de vehiculos que pasa a través de la onda. En variables eulerianas ambas constantes invierten sus significados (s corresponde a la velocidad y $-m$ al flujo de masa). La ecuación (4.3) implica

$$u = s + mv, \quad (4.4)$$

y reemplazando (4.4) en (4.2) se obtiene la EDO del jamiton

$$v'(\chi) = \frac{w(v(\chi))}{r'(v(\chi))}, \quad (4.5)$$

donde $w(v) = \hat{U}(v) - (mv + s)$ y $r(v) = m\hat{h}(v) + m^2v$. Dado que $\hat{h}'(v) < 0$ y $\hat{h}''(v) > 0$, $r'(v)$ tendrá a lo más una raíz v_s tal que $\hat{h}'(v_s) = -m$. La EDO (4.5) puede ser integrada a través

de v_s si $w(v)$ tiene una raíz en v_s también, es decir que

$$\hat{U}(v_s) = mv_s + s. \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) se conoce como *condición de Chapman-Jouguet* [51] en la teoría ZND y el punto v_s es llamado *punto sónico*. Luego, las soluciones tipo ondas viajeras suaves de la EDO (4.5) se pueden parametrizar por v_s , donde las constantes m y s estarán dadas por

$$m = -\hat{h}'(v_s) \text{ y } s = \hat{U}(v_s) - mv_s. \quad (4.7)$$

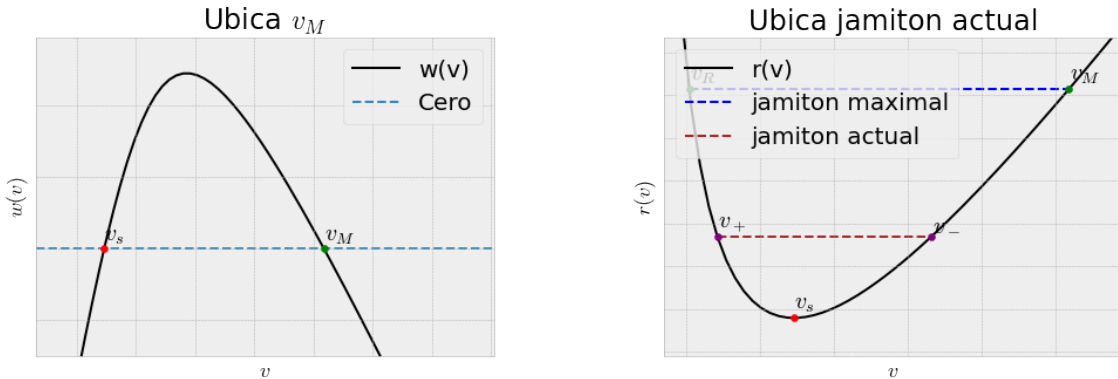
Los shocks que se muevan a velocidad $-m$ pueden ser añadidos al perfil suave encontrado usando las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.23). La primera condición en (3.23) muestra que la cantidad $mv - u$ se conserva a través de un shock, que se condice con la condición (4.4) para la parte suave de la onda viajera. Combinando ambas condiciones en (3.23) y multiplicando por m se obtiene que

$$[m^2v + \hat{h}(v)] = 0, \quad (4.8)$$

es decir que $r(v)$ se conserva a través de un shock. Luego, al integrar (4.5) se puede incorporar un shock en algún valor v^- que salte a un valor v^+ tal que $r(v^-) = r(v^+)$ y continuar integrando desde ahí. Más aún, para que el shock satisfaga las condiciones de entropía de Lax se debe cumplir que el volumen específico decrezca a través del shock, es decir que $v^+ < v_s < v^-$, por lo que el perfil suave del jamiton $v(\chi)$ debe ser creciente. Usando L'Hopital en (4.5) en el punto v_s y que v debe ser creciente, se tiene que

$$\frac{\hat{U}'(v_s) + \hat{h}'(v_s)}{\hat{h}'(v_s)\hat{h}''(v_s)} < 0, \quad (4.9)$$

es decir que $\hat{U}'(v_s) + \hat{h}'(v_s) > 0$ y por lo tanto se rompe la CSC en v_s , por lo que los jamitones con shocks existen si y solo si la condición CSC se rompe. Como consecuencia de esto, la función $w(v)$ tendrá una segunda raíz v_M para $v > v_s$ y, dado que (4.5) no puede ser integrado más allá de v_M , este perfil corresponderá a un *jamiton maximal* que conecta los puntos v_M con v_R , donde $r(v_R) = r(v_M)$. Vale decir que la aparición de un jamiton maximal es puramente teórico ya que es infinitamente largo.



(a) Función $w(v)$ con una segunda raíz v_M .

(b) Función $r(v)$ con un jamiton maximal y uno de ejemplo. El punto v_s corresponde al mínimo de r .

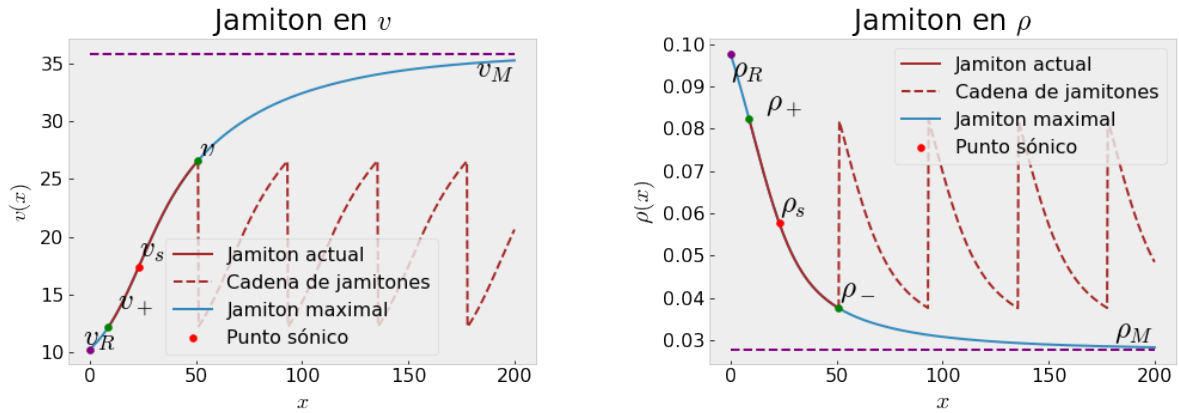
Figura 4.3: Funciones w y r con un jamiton maximal y otro de ejemplo.

Observación El mismo procedimiento se puede realizar en variables eulerianas para (3.15) definiendo $\eta = \frac{x-st}{\tau}$.

4.3. Construcción de jamitones

En base a los aspectos teóricos discutidos, se pueden construir jamitones de la siguiente forma:

1. Se escoge ρ_s que rompa la condición SCC y se define $v_s = 1/\rho_s$,
2. se definen $m = -h'(v_s)$ y $s = U(v_s) - mv_s$,
3. se busca $v_M > v_s$ tal que $w(v_M) = 0$ y se definen $r_{\min} = r(v_s)$ y $r_{\max} = r(v_M)$,
4. se busca $v_R < v_s$ tal que $r(v_R) = r_{\max}$,
5. se escoge v^- tal que $v_s < v^-$ y $r(v^-) \in (r_{\min}, r_{\max})$,
6. se busca v^+ tal que $v^+ < v_s$ y $r(v^-) = r(v^+)$, y
7. se resuelve la EDO (4.5) desde v^+ a v^- para obtener la ecuación del jamiton en la variable χ .



(a) Ejemplo de una cadena de jamitones entre v^+ y v^- .

(b) Cadena de jamitones en la variable ρ .

Figura 4.4: Ejemplo de una cadena de jamitones para v, ρ y u , junto a un jamiton maximal.

En las Figuras 4.4 y 4.5 se presentan ejemplos de jamitones en las variables ρ, v y u , recordando que $v = 1/\rho$ y u se obtiene de (4.4). En tales casos se integró en la variable x usando que

$$d\eta = \frac{1}{\tau}(x - s dt) = \frac{1}{\tau}(dx + mv dt - u dt) = \frac{1}{\tau}(v d\sigma + mv dt) = v d\chi \quad (4.10)$$

y regla de la cadena en la EDO (4.5).

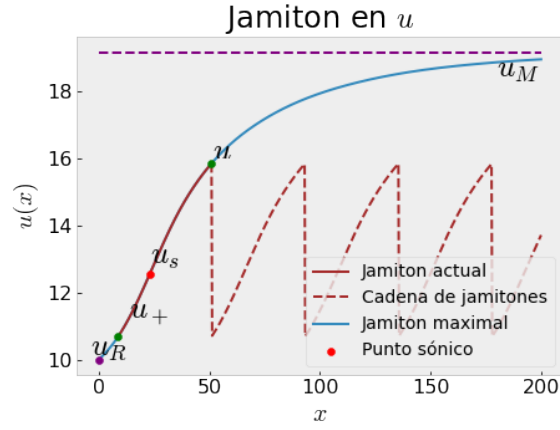


Figura 4.5: Cadena de jamitones en la variable ρ .

Con esta construcción se pueden calcular algunas propiedades del jamiton en la coordenada x como:

- Largo L

$$L = \tau \int_{v^+}^{v^-} v \frac{r'(v)}{w(v)} dv, \quad (4.11)$$

- total de vehículos en el jamiton

$$N = \tau \int_{v^+}^{v^-} \frac{r'(v)}{w(v)} dv \quad (4.12)$$

y

- Amplitud A

$$A = \rho_+ - \rho_-. \quad (4.13)$$

En las Figuras 4.7, 4.6 y 4.8 se muestran jamitones de distintos tamaños y velocidades, junto con su largo y total de vehículos. En este caso la cantidad de vehículos podría no ser natural al ser un modelo continuo.

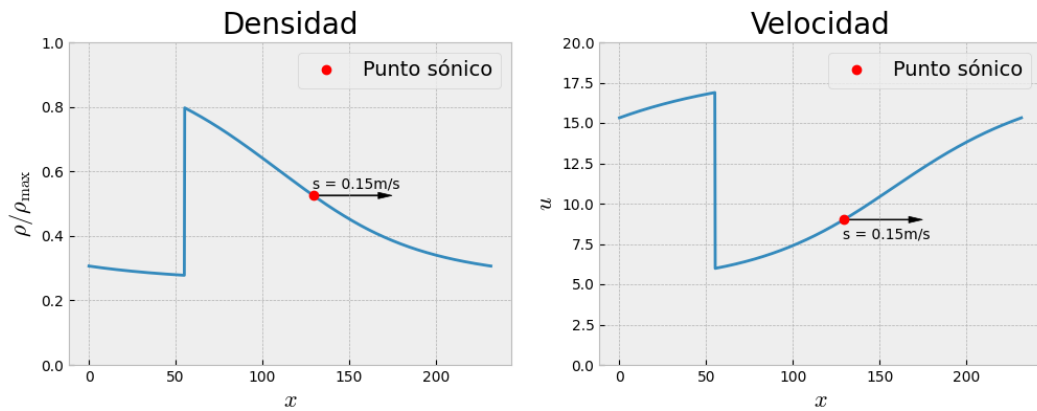


Figura 4.6: Jamiton medio con $\rho_s = 0.525\rho_{\max}$, de largo $L \approx 231.70$ y con $N \approx 14.05$ vehículos.

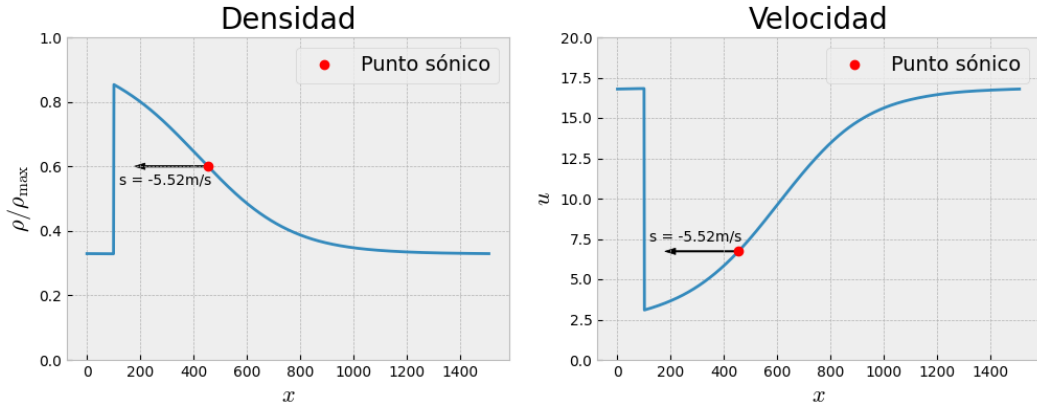


Figura 4.7: Jamiton grande con $\rho_s = 0.6\rho_{\max}$, de largo $L \approx 1507.27$ y con $N \approx 93.65$ vehículos.

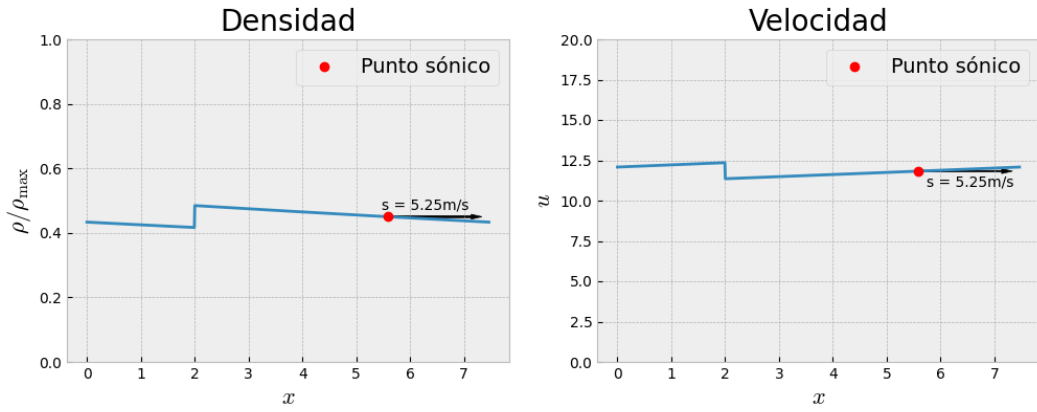


Figura 4.8: Jamiton chico con $\rho_s = 0.45\rho_{\max}$, de largo $L \approx 15.27$ y con $N \approx 0.91$ vehículos.

4.4. Jamitones en el diagrama fundamental

Gracias a la construcción de jamitones, estos se pueden graficar en el diagrama fundamental. Dado que los jamitones no son soluciones constantes, estos no pueden ser puntos en el DF. Multiplicando la relación (4.4) por ρ y definiendo $q = \rho u$ se tiene que

$$q = s\rho + m, \quad (4.14)$$

es decir que un jamiton es un segmento de línea en el plano (ρ, q) de tasa de flujo vs densidad y cuya pendiente corresponde a la velocidad de propagación del jamiton. Más aún, por la condición de Chapman-Jouguet (4.6) para $v_s = 1/\rho_s$ y las igualdades (4.7), la ecuación (4.14) se puede reescribir como

$$q = s(\rho - \rho_s) + \rho_s U(\rho_s) \quad (4.15)$$

y evaluando en $\rho = \rho_s$ se tiene que $q(\rho_s) = \rho_s U(\rho_s) = Q(\rho_s)$ por definición de Q y por lo tanto el segmento de jamiton intersecta al flujo de equilibrio en ρ_s . En la Figura 4.9 se ve un ejemplo de jamiton en el diagrama fundamental, donde los extremos del segmento $(\rho^+, \rho^+ u^+)$ y $(\rho^-, \rho^- u^-)$ representan los dos estados del jamiton a través del shock.

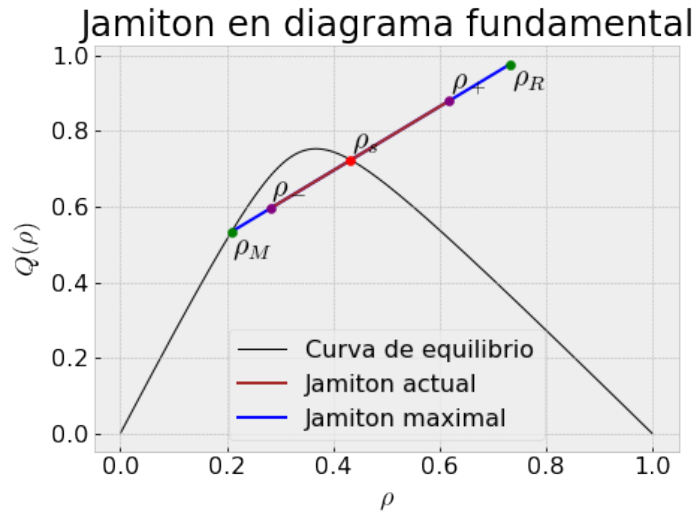


Figura 4.9: Jamiton maximal y un jamiton en el plano $q - \rho$. Ambos yacen en la misma línea que pasa por $(\rho_s, Q(\rho_s))$.

Para cada ρ_s que rompe la CSC, el jamiton maximal correspondiente es el segmento de línea que une los puntos $(\rho_M, m + s\rho_M)$ y $(\rho_R, m + s\rho_R)$ donde $\rho_M = 1/v_M$ y $\rho_R = 1/v_R$ construidos siguiendo los pasos de la Sección 4.3. Se puede notar que, como $w(v_M) = 0$ por construcción, entonces $\hat{U}(v_M) = mv_M + s$ y multiplicando por ρ_M se tiene que $Q(\rho_M) = m + s\rho_M$, es decir que ρ_M también pertenece a la curva de equilibrio.

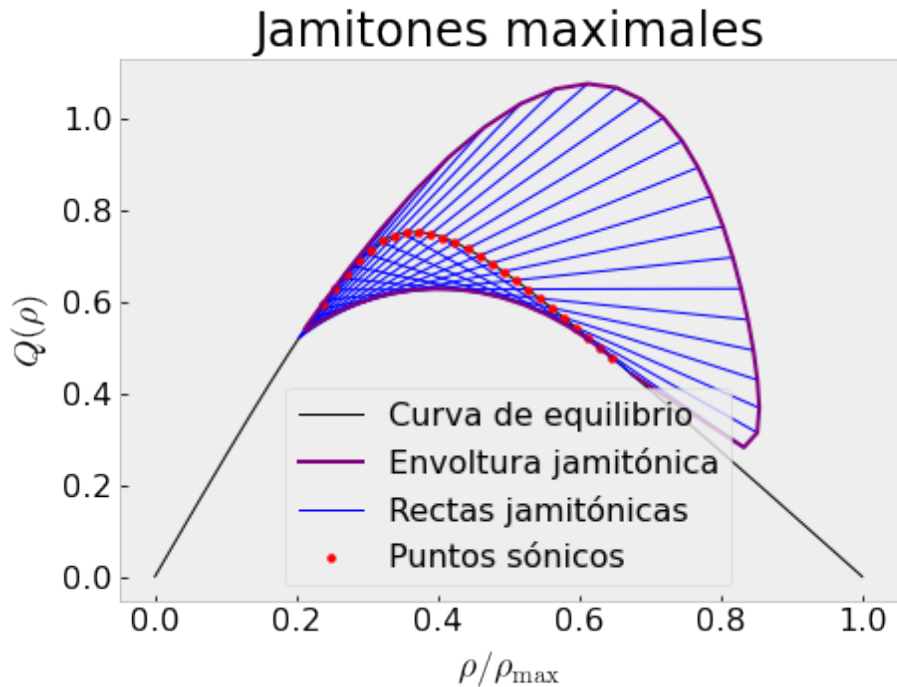


Figura 4.10: Región jamitónica compuesta por varios jamitones maximales, junto con la envoltura jamitónica.

La Figura 4.10 muestra algunos jamitones maximales para varios ρ_s que rompen la CSC, junto con la envoltura jamitónica. Esta envoltura indica el borde en el cuál los jamitones deben caer, llamada *región jamitónica*. La envoltura superior corresponde a la curva generada por

unir los puntos $(\rho_R, m+s\rho_R)$. Por otro lado, los segmentos de jamitones también se intersectan por debajo de la línea de equilibrio, por lo que también forman una envoltura inferior. Esta curva está dada por los puntos (ρ^*, q^*) que cumplen

$$\rho^*(\rho_s) = -\frac{m'(\rho_s)}{s'(\rho_s)}, \quad q^*(\rho_s) = m(\rho_s) + s(\rho_s)\rho^*(\rho_s). \quad (4.16)$$

Un resultado interesante demostrado en [33, 45] es que la velocidad de un jamiton está determinado solo por la densidad sónica ρ_s . Más aún, s es decreciente con respecto a ρ_s . En efecto, de (4.7) escrito en variables eulerianas se tiene que

$$s(\rho_s) = U(\rho_s) - \rho_s h'(\rho_s). \quad (4.17)$$

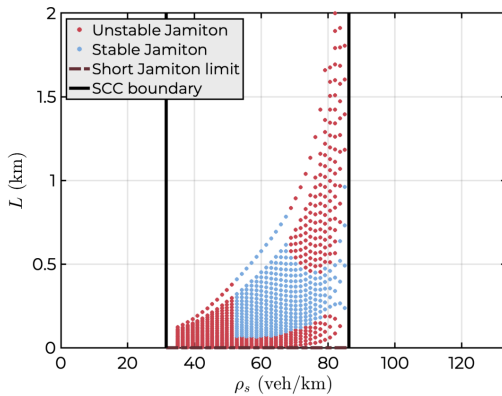
Luego, calculando la derivada de $s(\rho_s)$ con respecto a ρ_s se cumple que

$$s'(\rho_s) = U'(\rho_s) - h'(\rho_s) - \rho_s h''(\rho_s) = U'(\rho_s) + h'(\rho_s) - (\rho_s h(\rho_s))'', \quad (4.18)$$

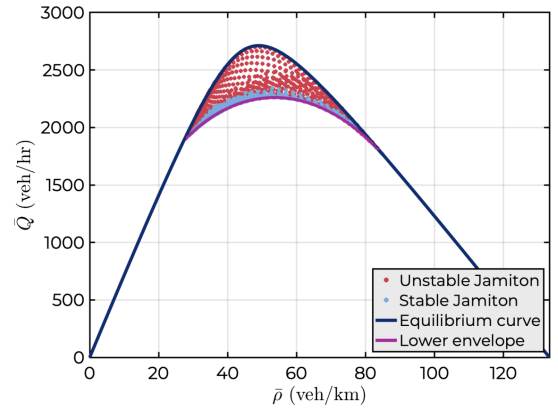
de donde el primer término es negativo suponiendo que ρ_s rompe la CSC (si no, no existiría jamiton) mientras que el término $(\rho_s h(\rho_s))''$ es positivo pues en b) se supuso que $\rho h(\rho)$ es convexa. De esta forma $s'(\rho_s) < 0$ y entonces s es decreciente con respecto a ρ_s . En la Figura 4.10 se observa cómo decrece la pendiente de cada segmento de jamiton maximal a medida que aumenta ρ_s .

4.5. Estabilidad

En [45] fue estudiada numéricamente la estabilidad dinámica de los jamitones bajo pequeñas perturbaciones. En tal caso, se determinó que la estabilidad depende del tamaño del jamiton: Jamitones muy pequeños resultan inestables pues colisionan con nuevos jamitones que surgen de las perturbaciones, mientras que jamitones de mayor tamaño también son inestables pero en este caso se separaban en dos o más jamitones. Ambos casos son visibles en el plano de fase (ρ_s, L) , así como también en el diagrama fundamental, observables en la Figura 4.11.



(a) Jamitones estables e inestables en el plano (ρ_s, L) .



(b) Jamitones estables e inestables en el diagrama fundamental.

Figura 4.11: Gráficos de estabilidad obtenidos de [45]

Capítulo 5

Volúmenes finitos

En este Capítulo se mostrarán algunos esquemas numéricos de primer y segundo orden para simular sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. Se seguirán principalmente los procedimientos descritos en [52, cap.4] y [53]

Los sistemas de leyes de conservación hiperbólica unidimensional son de la forma

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{q})_x = 0, \quad (5.1)$$

donde \mathbf{q} corresponde al vector de variables conservativas y \mathbf{F} las funciones de flujo específicas para cada ley de conservación. Este tipo de sistemas establece que la cantidad \mathbf{q} en un dominio Ω cambia en el tiempo debido únicamente al flujo a través del borde $\partial\Omega$ del dominio.

En este tipo de sistemas se suele trabajar en su forma integral para así considerar soluciones débiles y que especialmente contengan discontinuidades. Para $a < b$ la forma integral de (5.1) está dada por

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \mathbf{q}(x, t) dx = \mathbf{F}(\mathbf{q}(a, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{q}(b, t)). \quad (5.2)$$

La relación (5.2) es la base para definir el esquema de volúmenes finitos. Se discretiza el espacio en celdas C_i para $i \in \{0, \dots, N\}$ con $N > 0$ el total de celdas y cada una con tamaño $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, aunque se puede tomar una grilla no uniforme. Cada C_i está dada por el intervalo

$$C_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), \quad (5.3)$$

donde $x_{i-1/2} = a + i\Delta x$ y $x_{i+1/2} = x_{i-1/2} + \Delta x$. Por otro lado, el tiempo se discretiza tomando Δt y definiendo $t_n = n\Delta t$ para $n \in \{0, \dots, N_t\}$ con $N_t = T/\Delta t$ y $T > 0$ un tiempo final. Para el instante t_n se define \mathbf{Q}_i^n como el valor promedio de \mathbf{q} en la celda C_i dado por

$$\mathbf{Q}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathbf{q}(x, t_n) dx. \quad (5.4)$$

Trabajar con los promedios por celda permite utilizar más fácilmente propiedades de leyes de conservación para derivar esquemas numéricos, como por ejemplo asegurar que el método sea conservativo tal que imite la solución real y que es importante para aproximar de manera más precisa los shocks.

Usando $a = x_{i-1/2}$ y $b = x_{i+1/2}$ en (5.2) se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i} \mathbf{q}(x, t) dx = \mathbf{F}(\mathbf{q}(x_{i-1/2}, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{q}(x_{i+1/2}, t)), \quad (5.5)$$

expresión que se puede utilizar para generar un algoritmo de actualización temporal, es decir, dado Q_i^n calcular el paso siguiente Q_i^{n+1} . Para esto la ecuación (5.5) se integra entre t_n y t_{n+1} y se obtiene que

$$\int_{C_i} \mathbf{q}(x, t_{n+1}) dx - \int_{C_i} \mathbf{q}(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{q}(x_{i-1/2}, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{q}(x_{i+1/2}, t)) dt. \quad (5.6)$$

Dividiendo la relación (5.6) por Δx se obtiene

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{q}(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{q}(x_{i+1/2}, t)) dt \quad (5.7)$$

que sugiere una forma de actualizar \mathbf{Q}_i^{n+1} a partir de \mathbf{Q}_i^n . El problema es que las integrales del lado derecho no se pueden evaluar de manera exacta pues $\mathbf{q}(x_{i\pm 1/2}, t)$ puede variar temporalmente a lo largo del borde de cada celda. En cualquier caso, se puede estudiar el sistema de la forma

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) \quad (5.8)$$

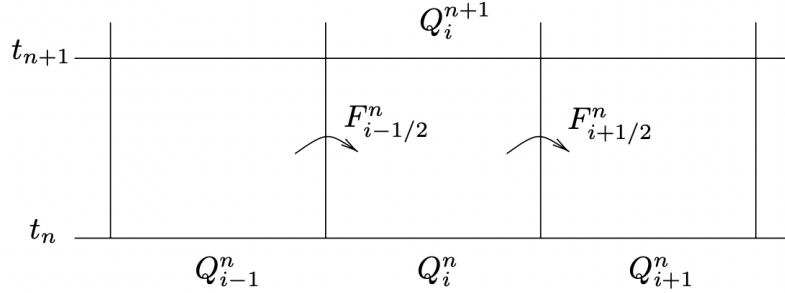


Figura 5.1: Esquema de volúmenes finitos extraída de [52, p.65].

donde $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^n$ es una aproximación del flujo medio a lo largo de $x = x_{i\pm 1/2}$ dado por

$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{q}(x_{i\pm 1/2}, t)) dt. \quad (5.9)$$

La Figura 5.1 ilustra el proceso de actualización. Notar que $\mathbf{F}_{i-1/2}^n$ depende tanto de \mathbf{Q}_{i-1}^n como de \mathbf{Q}_i^n , es decir que $\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{i-1}^n, \mathbf{Q}_i^n)$ y donde \mathcal{F} es alguna función de flujo numérico que puede variar según el método que se requiera ocupar.

Observación El método de volúmenes finitos (VF) se encuentra muy relacionado al de elementos finitos (EF o FEM en inglés). Más aún, VF se puede obtener de la formulación variacional usual de FEM [23] considerando funciones test $\varphi = 1$.

5.1. Método de Godunov

El esquema o método de Godunov fue introducido por Sergei Godunov el año 1959 [54] como método para resolver las ecuaciones de Euler no lineal de dinámica de gases. El método se basa principalmente en el *algoritmo REA* (*reconstruct - evolve - average*) que consiste de tres pasos:

- Reconstruir una función polinómica por pedazos $\tilde{\mathbf{q}}^n(x, t_n)$ a partir de los promedios \mathbf{Q}_i^n de cada celda. Una elección sencilla es una función constante por pedazos tal que

$$\tilde{\mathbf{q}}^n(x, t_n) = \mathbf{Q}_i^n, \quad \text{para todo } x \in C_i. \quad (5.10)$$

- Evolucionar el sistema hiperbólico con condición inicial $\tilde{\mathbf{q}}^n(x, t_n)$ para obtener $\tilde{\mathbf{q}}^n(x, t_{n+1})$.
- Promediar esta función sobre cada celda para obtener nuevos promedios

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \tilde{\mathbf{q}}^n(x, t_{n+1}) dx. \quad (5.11)$$

La solución $\tilde{\mathbf{q}}^n$ (que se considerará constante por pedazos) dada por el algoritmo REA resulta tener un comportamiento similar a la solución del problema de Riemann en la celda C_i y resulta ser constante para $t_n < t < t_{n+1}$. Además, la integral (5.9) puede ser resuelta exactamente si se reemplaza \mathbf{q} por $\tilde{\mathbf{q}}^n$. Esto sugiere que el flujo \mathcal{F} esté dado por

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) = \mathbf{F}(q^\downarrow(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R)) \quad (5.12)$$

donde $q^\downarrow(Q_l, Q_r)$ denota la solución al problema de Riemann entre los estados Q_l y Q_r . El esquema reduce el problema de resolver la integral (5.9) a resolver el problema de Riemann en cada celda espacial. De todas formas, el método está sujeto a la condición CFL

$$\frac{s_{\max} \Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}, \quad (5.13)$$

donde s_{\max} corresponde a la velocidad de onda más grande que haya. En el caso de un sistema hiperbólico con velocidades características $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ se tiene que $s_{\max} = \max_p |\lambda_p|$. En lo que sigue se mostrarán algunos aproximadores presentados en [53] para el problema de Riemann para leyes de conservación escalar unidimensional y algunos resultados experimentales en la ecuación de Burgers:

$$q_t + \left(\frac{q^2}{2} \right)_x = 0, \quad (5.14)$$

con condiciones iniciales

$$q_0^1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad q_0^2(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}. \quad (5.15)$$

La solución exacta a la condición q_0^1 corresponde a un shock que conecta 1 y 0 con velocidad de propagación 1/2. En cambio, la solución a q_0^2 corresponde a una onda de rarefacción dada por

$$q(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -t \\ x/t & \text{si } -t < x \leq t \\ 1 & \text{si } x > t. \end{cases} \quad (5.16)$$

5.1.1. Flujo de Godunov simplificado

Para el caso de leyes de conservación escalar de la forma

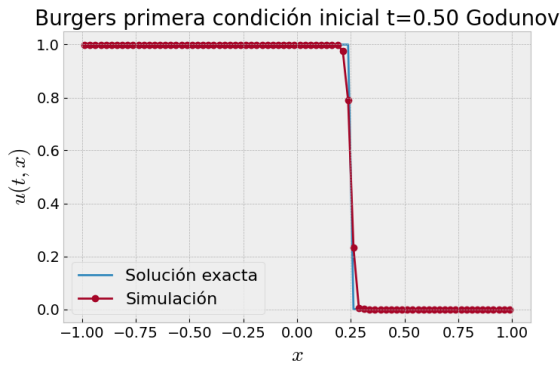
$$q_t + f(q)_x = 0, \quad (5.17)$$

el flujo de Godunov (5.12) se puede escribir explícitamente como

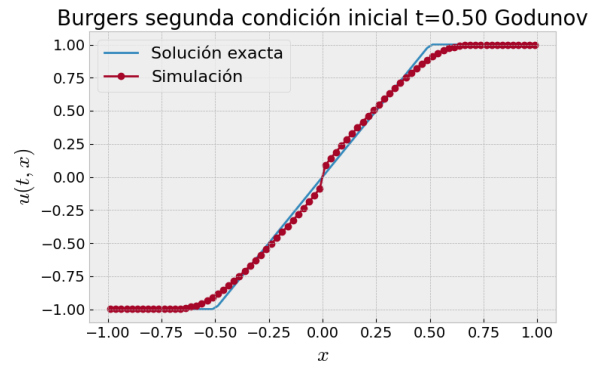
$$\mathcal{F}(Q_L, Q_R) = \begin{cases} \min_{Q_L \leq \theta \leq Q_R} f(\theta) & \text{si } Q_L \leq Q_R \\ \max_{Q_R \leq \theta \leq Q_L} f(\theta) & \text{si } Q_L > Q_R \end{cases}, \quad (5.18)$$

más aún, si f posee un único mínimo en \bar{x} el flujo se puede simplificar a

$$\mathcal{F}(Q_L, Q_R) = \max \{f(\max\{Q_L, \bar{x}\}), f(\min\{Q_R, \bar{x}\})\}. \quad (5.19)$$



(a) Condición inicial q_0^1 a tiempo $t = 0.5$



(b) Condición inicial q_0^2 a tiempo $t = 0.5$

Figura 5.2: Flujo de Godunov para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.

5.1.2. Linealizadores

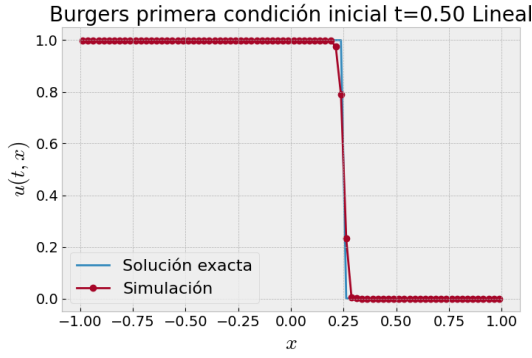
En este esquema se busca linealizar la función de flujo f tal que $\hat{A} \approx f'$. Una posible elección para \hat{A} puede ser

$$\hat{A}(Q_L, Q_R) = \begin{cases} \frac{f(Q_R) - f(Q_L)}{Q_R - Q_L} & \text{si } Q_L \neq Q_R \\ f'(Q_L) & \text{si } Q_L = Q_R \end{cases}. \quad (5.20)$$

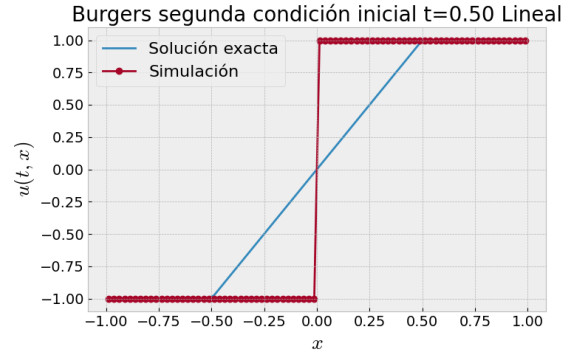
Con esta elección para \hat{A} la función de flujo \mathcal{F} , también llamada *flujo de Roe* queda como

$$\mathcal{F}(Q_L, Q_R) = \begin{cases} f(Q_L) & \text{si } \hat{A}(Q_L, Q_R) \geq 0 \\ f(Q_R) & \text{si } \hat{A}(Q_L, Q_R) < 0 \end{cases}. \quad (5.21)$$

Como se aprecia en la Figura 5.3.b el esquema falla al simular una onda de rarefacción, persistiendo en una solución estacionaria. Esto ocurre porque las ondas de rarefacción pueden viajar en ambas direcciones, a diferencia de los shocks que viajan en una sola dirección. Este efecto no logra ser capturado por el esquema de Roe.



(a) Condición inicial q_0^1 a tiempo $t = 0.5$



(b) Condición inicial q_0^2 a tiempo $t = 0.5$

Figura 5.3: Flujo linealizado para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.

5.1.3. Lax-Friedrichs

El esquema de Lax-Friedrichs corresponde a un tipo de esquema de volúmenes finitos llamados esquemas centrales. En estos métodos se arregla el problema de la linealización aproximando el problema de Riemann en cada celda a través de una solución con dos ondas, una viajando a la izquierda con velocidad $s_L = s_L(Q_L, Q_R)$ y la otra hacia la derecha con velocidad $s_R = s_R(Q_L, Q_R)$. En esta solución aparece naturalmente un estado intermedio Q^* junto con un flujo intermedio f^* y, por lo tanto, el flujo \mathcal{F} adquiere la siguiente forma:

$$\mathcal{F}(Q_L, Q_R) = f^*(Q_L, Q_R) \quad (5.22)$$

El flujo intermedio f^* se obtiene mediante las condiciones de Rankine-Hugoniot [53]. Manipulando algebraicamente se llega a que f^* debe estar dado por

$$f^*(Q_L, Q_R) = \frac{s_R f(Q_L) - s_L f(Q_R) + s_R s_L (Q_R - Q_L)}{s_R - s_L}. \quad (5.23)$$

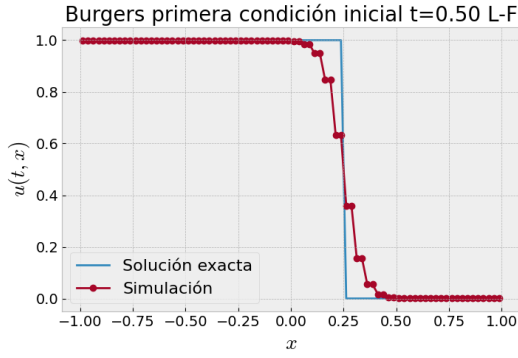
Para el esquema de Lax-Friedrichs se consideran

$$s_L = -\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad s_R = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (5.24)$$

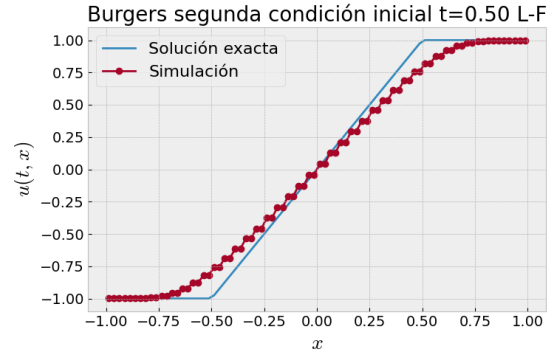
obteniendo así el flujo de Lax-Friedrichs dado por

$$\mathcal{F}(Q_L, Q_R) = \frac{f(Q_L) + f(Q_R)}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (Q_R - Q_L). \quad (5.25)$$

Los resultados para la ecuación de Burgers se encuentran en la Figura 5.4. Se observan en ambas Figuras que el esquema es estable, no posee oscilaciones y se aproxima a la solución, salvo que las soluciones aproximadas poseen difusión y, en comparación con el flujo de Godunov, la precisión es menor.



(a) Condición inicial q_0^1 a tiempo $t = 0.5$



(b) Condición inicial q_0^2 a tiempo $t = 0.5$

Figura 5.4: Esquema de L-F para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.

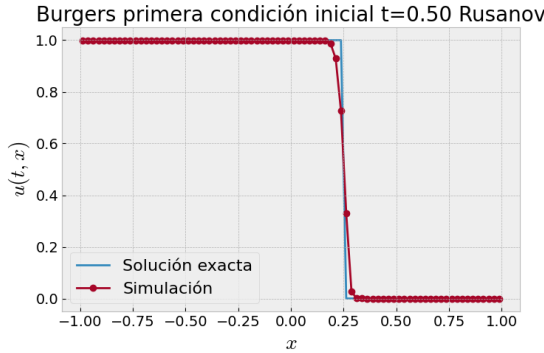
5.1.4. Esquema de Rusanov

Este esquema también corresponde a un esquema central. Las velocidades de propagación en este caso están dadas por

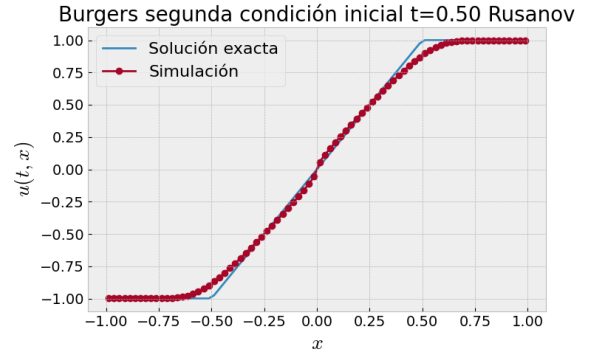
$$s_L = -s, \quad s_R = s, \quad (5.26)$$

donde $s = s(Q_L, Q_R) = \max\{|f'(Q_L)|, |f'(Q_R)|\}$, resultando en el flujo

$$\mathcal{F}(Q_L, Q_R) = \frac{f(Q_L) + f(Q_R)}{2} - \frac{s(Q_L, Q_R)}{2}(Q_R - Q_L). \quad (5.27)$$



(a) Condición inicial q_0^1 a tiempo $t = 0.5$



(b) Condición inicial q_0^2 a tiempo $t = 0.5$

Figura 5.5: Esquema de Rusanov para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.

En este caso se mejora bastante la solución a comparación con el esquema de Lax-Friedrichs, siendo incluso bastante similar al flujo de Godunov.

5.1.5. Esquema Engquist–Osher

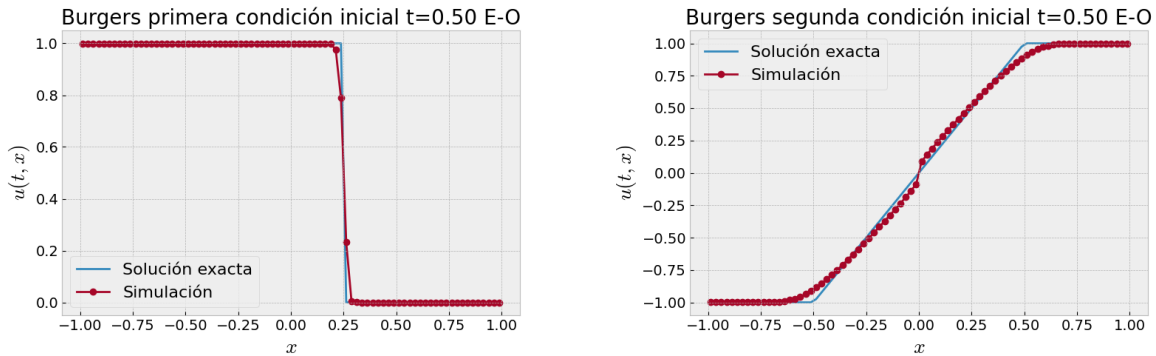
El esquema Engquist–Osher (E-O) posee función de flujo \mathcal{F} dada por

$$\mathcal{F}(Q_L, Q_R) = \frac{f(Q_L) + f(Q_R)}{2} - \frac{1}{2} \int_{Q_L}^{Q_R} |f'(x)| dx. \quad (5.28)$$

Si la función f posee un único mínimo en \bar{x} y ningún máximo, el flujo de (E-O) se puede escribir explícitamente como

$$\mathcal{F}(Q_L, Q_R) = f(\max\{Q_L, \bar{x}\}) + f(\min\{Q_R, \bar{x}\}) - f(\bar{x}). \quad (5.29)$$

Este esquema se conoce como *esquema de división de flujo* ya que separa el flujo en parte positiva y negativa.



(a) Condición inicial q_0^1 a tiempo $t = 0.5$

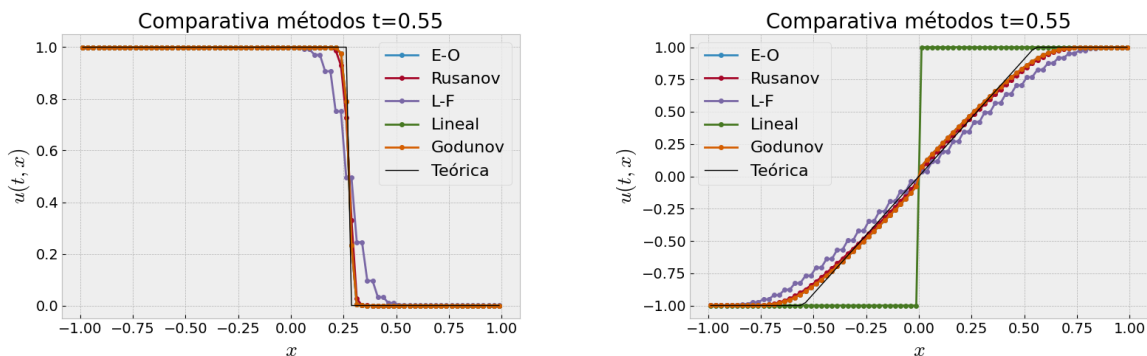
(b) Condición inicial q_0^2 a tiempo $t = 0.5$

Figura 5.6: Esquema Engquist–Osher para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.

En la Figura 5.6 se observa que el esquema E-O, al igual que Rusanov y Godunov, aproxima de buena forma a la solución teórica.

5.1.6. Comparación esquemas de volúmenes finitos

En la Figura 5.7 se observan los métodos vistos hasta el momento para un tiempo $t = 0.55$. En la Figura 5.7.a se observa mejor la diferencia entre el esquema L-F y los demás métodos. Además, los esquemas E-O, Godunov y lineal en la Figura 5.7.a casi no poseen diferencias. Esto ocurre porque en realidad los tres flujos son equivalentes para este caso de prueba. No así en la Figura 5.7.b donde el esquema lineal falla en aproximar.



(a) Condición inicial q_0^1 a tiempo $t = 0.4$

(b) Condición inicial q_0^2 a tiempo $t = 0.5$

Figura 5.7: Comparación de los distintos métodos presentados para la ecuación de Burgers con distintas condiciones iniciales para $t = 0.4$ y $t = 0.5$ respectivamente.

En la Figura 5.8 se observan los errores relativos en norma L^1 para cada método con

mallas cada vez más finas. El error usado fue

$$\varepsilon_{\Delta x} = 100 \frac{\|q_{\Delta x} - q_{\text{teo}}\|_{L^1}}{\|q_{\text{teo}}\|_{L^1}}, \quad (5.30)$$

donde $q_{\Delta x}$ corresponde a la solución aproximada con paso espacial Δx y q_{teo} a la solución teórica.

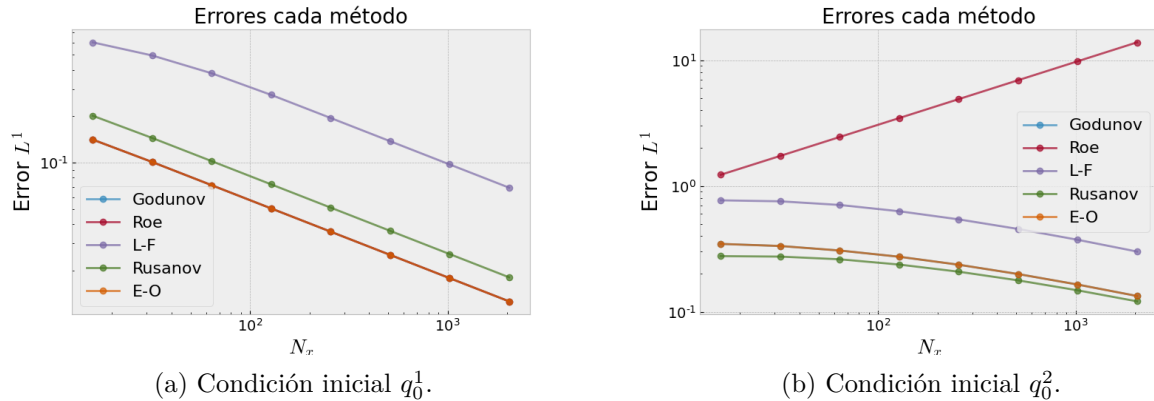


Figura 5.8: Errores en norma L^1 en escala logarítmica de cada método para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales distintas.

Para la primera condición inicial (Figura 5.8.a) se observa que Godunov tiene mejor desempeño que los demás métodos, pero para la segunda condición inicial (Figura 5.8.b) el esquema con mejor desempeño resulta ser Rusanov. Esto indica que el esquema óptimo depende sustancialmente del problema que se esté trabajando.

5.2. Solver HLL para sistemas de leyes de conservación

Los métodos presentados hasta ahora son para leyes de conservación escalar. De cualquier forma, la expresión (5.12) se encuentra generalizada para sistemas no lineales, donde igualmente se necesita encontrar el valor de $q^\pm(Q_l, Q_r)$ en cada celda. En general, el proceso de resolución del problema de Riemann exacto es caro, dada la cantidad de condiciones que posee, la cantidad de veces que se debe resolver (en cada celda de la grilla) y repetir para cada instante temporal, por lo que muchas veces basta solo con aproximar la solución para obtener buenos resultados.

Un aproximador sencillo que produce buenos resultados y que verifica que el flujo numérico satisfaga la condición de entropía [55] es el solver HLL [45]. La idea es similar a los esquemas centrales para sistemas escalares. Se consideran dos ondas que se propagan a velocidades s_L y s_R , de donde aparecerá un estado intermedio \mathbf{q}^* y un flujo intermedio \mathbf{F}^* . El flujo en este caso está dado por

$$\mathcal{F}(Q_L, Q_R) = \begin{cases} \mathbf{F}(Q_L) & \text{si } s_L \geq 0 \\ \mathbf{F}^*(Q_L, Q_R) & \text{si } s_L < 0 < s_R, \\ \mathbf{F}(Q_R) & \text{si } s_R \leq 0 \end{cases}, \quad (5.31)$$

donde el flujo intermedio \mathbf{F}^* está dado por

$$\mathbf{F}^*(Q_L, Q_R) = \frac{s_R \mathbf{F}(Q_L) - s_L \mathbf{F}(Q_R) + s_R s_L (Q_R - Q_L)}{s_R - s_L}. \quad (5.32)$$

Las velocidades s_L y s_R se pueden estimar de varias formas. En el caso de un sistema con m velocidades características $\lambda_1 < \dots < \lambda_m$ se pueden elegir [56]

$$s_R = \max\{\lambda_m(Q_L), \lambda_m(Q_R)\}, \quad s_L = \min\{\lambda_1(Q_L), \lambda_1(Q_R)\}, \quad (5.33)$$

que esencialmente sirven para sistemas de dos ecuaciones.

Observación Eligiendo $s_L = -s_R = s$ y

$$s(Q_L, Q_R) = \max\{|\lambda_1(Q_L)|, |\lambda_1(Q_R)|, |\lambda_m(Q_L)|, |\lambda_m(Q_R)|\} \quad (5.34)$$

[56] se generaliza el esquema de Rusanov 5.1.4 para sistemas de leyes de conservación.

Capítulo 6

Simulación modelo ARZ

En este Capítulo se mostrarán dos formas de poder simular el modelo ARZ. El primer método consiste en utilizar volúmenes finitos resolviendo el problema de Riemann analíticamente en cada grilla espacial, mientras que el segundo método consiste en utilizar un aproximador del problema de Riemann llamado HLL.

Dado que el modelo ARZ posee un término de relajación que lo vuelve no homogéneo este se simula con un esquema en dos etapas, siguiendo el esquema presente en [52, cap.17] llamado *time splitting*: En primer lugar se resuelve el modelo homogéneo con volúmenes finitos (5.8) y en segundo lugar se resuelve una EDO dada por

$$\mathbf{Q}_t = \psi(\mathbf{Q}), \quad (6.1)$$

donde ψ corresponde al término fuente adicional al sistema. Ambos pasos se componen, es decir, la actualización de la EDO utiliza como paso anterior la solución obtenida de volúmenes finitos. La mayor dificultad de implementación ocurre cuando el término fuente que se agrega a las ecuaciones es, por ejemplo, no lineal o posee derivadas de órdenes superiores (términos de difusión o dispersión).

6.1. Simulación modelo homogéneo

El modelo ARZ homogéneo corresponde al sistema (3.9) sin el término de relajación:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ (u + h(\rho))_t + u(u + h(\rho))_x &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

y escrito en su forma conservativa (3.17) se lee

$$\mathbf{Q}_t + F(\mathbf{Q})_x = 0. \quad (6.3)$$

De esta forma se puede aplicar el esquema de volúmenes finitos (5.8) con el flujo de Godunov (5.12). En general resolver el problema de Riemann de forma analítica es costoso computacionalmente y produce comportamientos no deseados. Es por esto que se trabajará con un aproximador.

6.1.1. Solución con aproximador

Se utiliza el aproximador HLL de la Sección 5.2 y con flujo dado por (5.31). Las velocidades s_L y s_R se escogen como en (5.33) con las velocidades características de ARZ (3.13):

$$s_R = \max\{\lambda_1(\mathbf{Q}_L), \lambda_1(\mathbf{Q}_R)\}, \quad s_L = \max\{\lambda_2(\mathbf{Q}_L), \lambda_2(\mathbf{Q}_R)\}. \quad (6.4)$$

y flujo

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) = \begin{cases} F(\mathbf{Q}_L) & \text{si } s_L \geq 0 \\ F^*(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) & \text{si } s_L < 0 < s_R \\ F(\mathbf{Q}_R) & \text{si } s_R \leq 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\text{con } \mathbf{Q}_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ y_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ y_R \end{pmatrix} \text{ y } F^*(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R) = \frac{s_R F(\mathbf{Q}_L) - s_L F(\mathbf{Q}_R) + s_R s_L (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L)}{s_R - s_L}.$$

De esta forma, el esquema de actualización para el modelo homogéneo queda como

$$\mathbf{Q}_i^* = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_{i+1}^n) - \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{i-1}^n, \mathbf{Q}_i^n) \right). \quad (6.6)$$

6.2. Simulación con término de relajación

Como se mencionó anteriormente, para agregar el término fuente al modelo basta resolver la EDO (6.1) numéricamente, donde la actualización considera el término \mathbf{Q}_i^* obtenido de simular el esquema homogéneo. El modelo ARZ no homogéneo escrito en variables conservativas (3.17) se lee

$$\mathbf{Q}_t + F(\mathbf{Q})_x = S(\mathbf{Q}), \quad (6.7)$$

donde

$$S(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} (\rho(U(\rho) + h(\rho)) - y) \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Luego se debe resolver

$$\mathbf{Q}_t = S(\mathbf{Q}), \quad (6.9)$$

y dado que el término de relajación sólo aparece en la segunda ecuación, por lo que bastará actualizar en la variable y . La EDO (6.9) se resuelve usando un esquema implícito en tiempo ya que no es deseable imponer condiciones CFL extras a los saltos espacial y temporal, además de aprovechar que no hay término de relajación para la variable ρ , simplificando la implementación computacional.

Discretizando la EDO (6.9) se tiene que

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^*}{\Delta t} = \frac{\rho_i^{n+1} U(\rho_i^{n+1}) + h(\rho_i^{n+1}) - y_i^{n+1}}{\tau}, \quad \rho_i^{n+1} = \rho_i^* \quad (6.10)$$

donde la segunda ecuación se tiene pues no hay término de fuente para ρ . Así, definiendo $\alpha = \Delta t/\tau$ y manipulando algebraicamente la ecuación (6.10) se tiene el siguiente esquema de actualización para la variable y_i^{n+1} :

$$y_i^{n+1} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} (\rho_i^* U(\rho_i^*) + h(\rho_i^*)) + \frac{1}{\alpha + 1} y_i^*, \quad (6.11)$$

donde ρ_i^* y y_i^* se obtienen de resolver (6.6) en el mismo instante temporal.

6.3. Resultados

En [57] se muestran varias simulaciones de jamitones en rutas circulares y la aparición de jamitinos en una ruta infinita. A modo de validar el esquema, se emularán los resultados obtenidos en [57], así como también se presentarán Tablas de error entre la simulación con un jamiton como condición inicial y su solución teórica.

En todas las simulaciones se consideraron condiciones de borde periódicas (ruta circular). El beneficio de este tipo de condiciones es la preservación de la masa vehicular en el tiempo al no existir salidas ni entradas de vehículos, es decir que el número de vehículos N dado por

$$N = \int_0^L \rho(x, t) dx, \quad (6.12)$$

es constante para todo tiempo t . Esto da otra forma de validar las simulaciones numéricas.

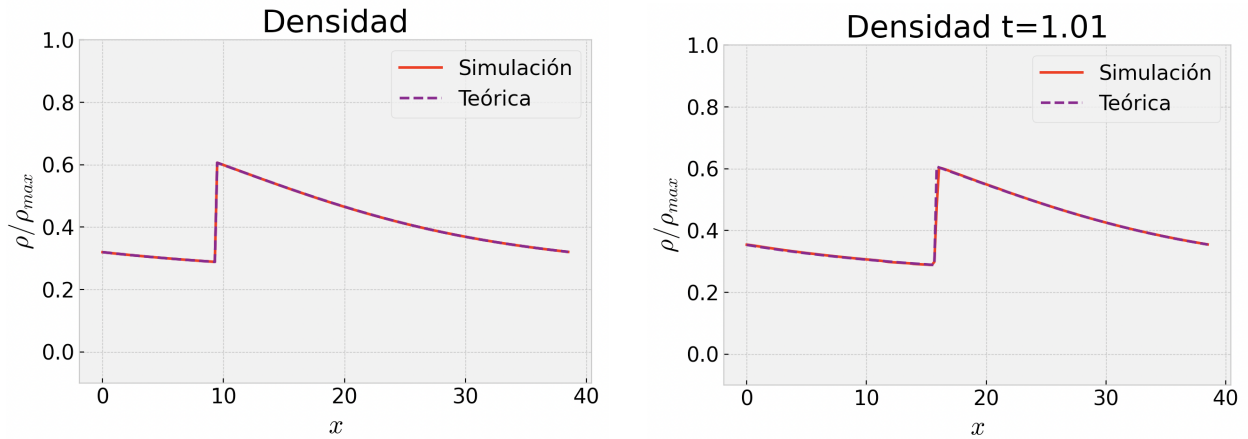
6.3.1. Precisión esquema numérico

Para el esquema 6.2 se consideró una solución inicial tipo jamiton dada por la construcción del Capítulo 4. La simulación se deja corriendo hasta un tiempo t_{final} y se compara con la solución teórica dada por

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_{\text{jam}} \left(\frac{x - st}{\tau} \right), \quad (6.13)$$

donde \mathbf{Q}_{jam} se obtiene de la construcción en 4.3. Para comparar se calculan los errores relativos de la simulación en norma L^1 para distintos refinamientos de la grilla y distintos τ . El error es el mismo que (5.30) dado por

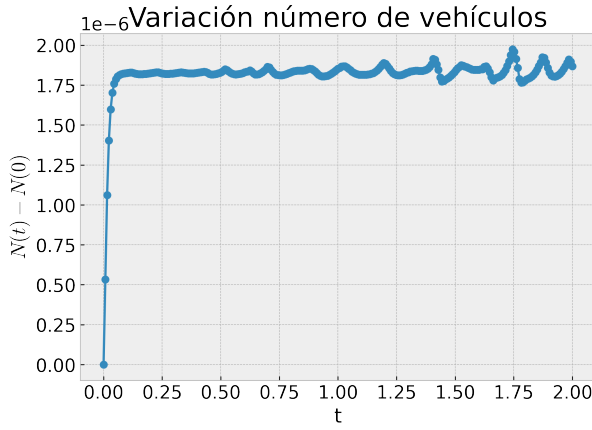
$$\varepsilon^{\Delta x} = 100 \frac{\|\mathbf{Q}_{\Delta x} - \mathbf{Q}_{\text{teo}}\|_{L^1}}{\|\mathbf{Q}_{\text{teo}}\|_{L^1}}. \quad (6.14)$$



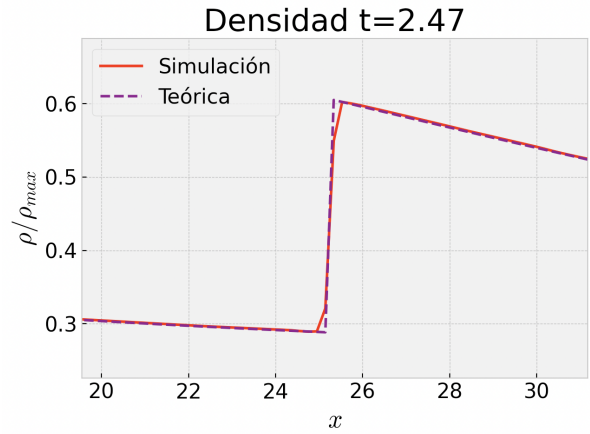
(a) Condición inicial tipo jamiton

(b) Comparación después de un tiempo.

Figura 6.1: Ejemplo comparativo entre la simulación numérica y jamiton teórico con $\rho_s = 0.433\rho_{\text{max}}$, $v_- = 26$ y $N = 200$, hasta $t_{\text{final}} = 1.01$.



(a) Integral de densidad o número de vehículos.



(b) Zoom en la discontinuidad.

Figura 6.2: Número de vehículos en la simulación y zoom en el shock para visualizar las diferencias. Se verifica la simulación observando que el número de vehículos efectivamente se mantiene constante.

En las Tablas 6.1 y 6.2 se encuentran los errores obtenidos para $t_{\text{final}} = 0.5$ y $t_{\text{final}} = 2$, respectivamente, para tres valores de τ distintos y para un jamiton fijo con $\rho_s = 0.433\rho_{\text{max}}$ y $v_- = 26$. Se observa lo esperable: a medida que la malla se vuelve más fina, la solución se aproxima mejor a la solución teórica. De todas formas, para $\tau = 1$ es donde se encuentran los errores mayores para ambos tiempos finales en comparación a $\tau = 5$ y $\tau = 10$. Esto podría indicar que la simulación no aproximaría de buena forma a la solución real cuando τ sea pequeño, especialmente si se desea estudiar la convergencia de ARZ a LWR con τ yéndose a 0. Este caso no será abarcado en este trabajo pero en [52, cap.17] se aborda y se propone una actualización de paso fraccional cuando $\tau \rightarrow 0$.

Tabla 6.1: Errores para distintos τ con $t_{\text{final}} = 0.5$

N	Errores $\tau = 1$		Errores $\tau = 5$		Errores $\tau = 10$	
	$\varepsilon_{\rho}^{\Delta x}$	$\varepsilon_u^{\Delta x}$	$\varepsilon_{\rho}^{\Delta x}$	$\varepsilon_u^{\Delta x}$	$\varepsilon_{\rho}^{\Delta x}$	$\varepsilon_u^{\Delta x}$
20	5.908	2.661	2.519	1.205	1.779	0.862
40	3.079	1.445	1.992	0.874	1.187	0.526
80	1.437	0.667	0.594	0.296	0.957	0.402
160	1.028	0.503	0.350	0.170	0.290	0.143
320	0.649	0.304	0.203	0.111	0.179	0.088
640	0.244	0.123	0.103	0.051	0.131	0.072
1280	0.099	0.048	0.070	0.034	0.086	0.046
2560	0.055	0.026	0.050	0.025	0.073	0.039

Tabla 6.2: Errores para distintos τ con $t_{\text{final}} = 2$

N	Errores $\tau = 1$		Errores $\tau = 5$		Errores $\tau = 10$	
	$\varepsilon_{\rho}^{\Delta x}$	$\varepsilon_u^{\Delta x}$	$\varepsilon_{\rho}^{\Delta x}$	$\varepsilon_u^{\Delta x}$	$\varepsilon_{\rho}^{\Delta x}$	$\varepsilon_u^{\Delta x}$
20	19.760	9.725	6.055	2.690	3.524	1.663
40	11.521	5.495	2.837	1.251	2.589	1.226
80	7.052	3.282	1.308	0.622	1.092	0.491
160	4.473	2.021	0.722	0.363	0.493	0.246
320	2.834	1.235	0.337	0.187	0.217	0.127
640	1.207	0.538	0.186	0.106	0.140	0.088
1280	0.487	0.235	0.094	0.064	0.120	0.067
2560	0.295	0.144	0.065	0.044	0.094	0.053

6.3.2. Formación de jamitones

En las Figuras 6.3, 6.4 y 6.5 se observan formaciones de jamitones con condiciones iniciales que emulan una pequeña perturbación. El tamaño y desplazamiento de los jamitones obtenidos depende en cierto grado de la densidad inicial, que en todos los casos fue escogida para romper la CSC.

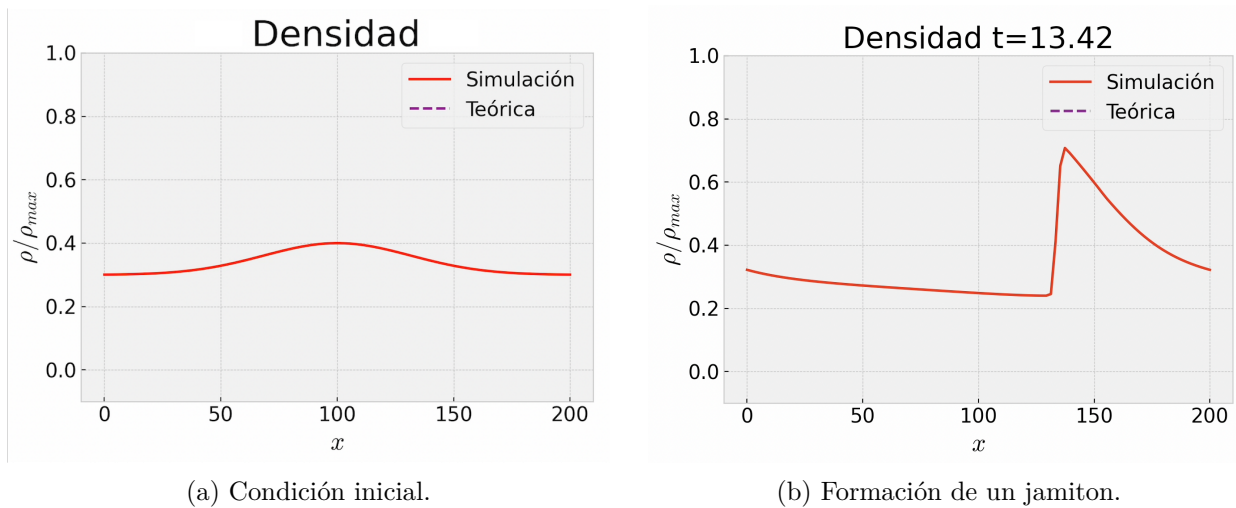
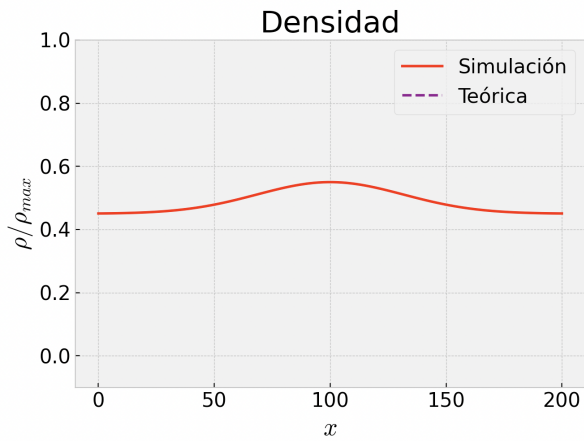
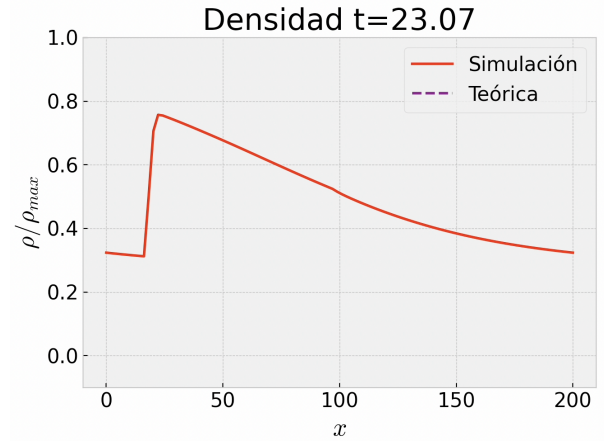


Figura 6.3: Ejemplo con baja densidad inicial

En el caso de la Figura 6.3 el jamiton viaja con velocidad positiva hacia la derecha.



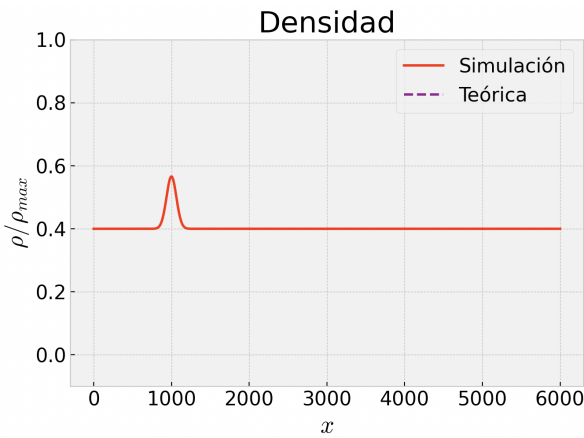
(a) Condición inicial.



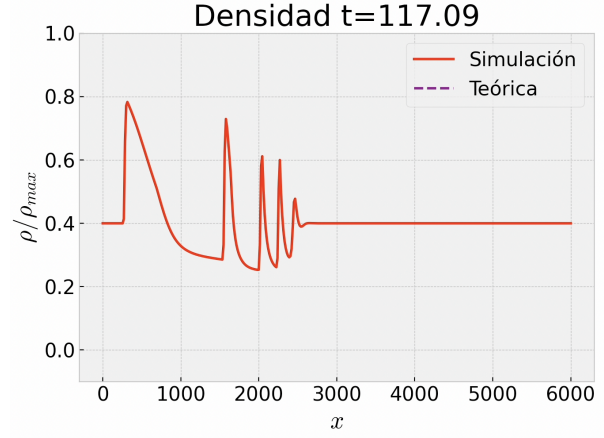
(b) Formación de un jamiton.

Figura 6.4: Ejemplo con alta densidad inicial.

En cambio, en la Figura 6.4 el jamiton resultante, además de ser más largo, se mueve con velocidad negativa, es decir, hacia la izquierda.



(a) Condición inicial.



(b) Formación de un jamiton grande y varios jami-
tinos.

Figura 6.5: Formación de jami-
tinos en una ruta larga.

En la Figura 6.5 se aprecia la formación de jami-
tinos mostrada en [57], a partir de una
condición inicial gaussiana más pronunciada y en una ruta circular de seis kilómetros de
largo, que esencialmente aproxima una ruta infinita. Después de un tiempo, se forma una
cadena de jami-
tinos con velocidad positiva, a partir de un jamiton de mayor magnitud y con
velocidad negativa. Al ser una ruta circular, naturalmente el jamiton grande colisiona con
algunos jami-
tinos y lo que se aprecia es que el resultado de colisionar dos jami-
tinos es otro
jamiton pero de largo y velocidad distintas a los iniciados antes de la colisión. Esto se verá
en mayor detalle en el Capítulo 7.

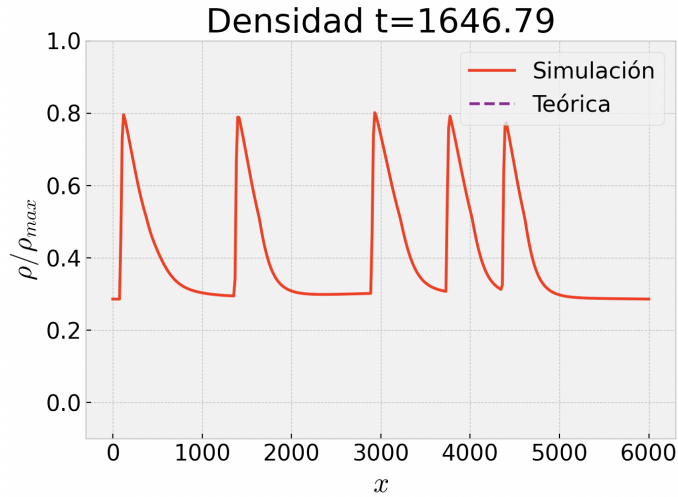


Figura 6.6: Solución es gobernada por regimen jamitónico.

En la Figura 6.6 se corrió la simulación de jamitinos hasta un tiempo grande. Se observa que la solución se encuentra dominada por un régimen jamitónico, con varios jamitones unidos por shocks y de igual amplitud pero aparentemente de distintos largos, situación que se puede dar si cada jamiton tuviese una densidad sónica ρ_s distinta. Se puede notar además que todos los jamitones en 6.6, al estar unidos mediante shocks, comparten el parámetro ρ_- . Esta observación será importante para establecer el esquema de colisiones del Capítulo 7.

6.4. Aproximación de m y s

Un valor de interés a obtener a partir de la simulación de jamitones es la velocidad de propagación, especialmente si se desea estudiar jamitones obtenidos de manera numérica y se desconocen los parámetros teóricos del jamiton. Una primera aproximación sería obtener ρ_+ y ρ_- a partir de la simulación, dado que se cumplen $\rho_+ = \max_x \{\rho(x)\}$ y $\rho_- = \min_x \{\rho(x)\}$ para una solución tipo jamiton. Con estos parámetros, se puede aproximar el valor de ρ_s a partir de la construcción de un jamiton.

El problema de este método es que posee alta tasa de error pues depende solo de dos puntos de la simulación y el error del esquema numérico podría propagarse en la obtención de ρ_s . Por lo tanto, es necesario buscar otra forma de aproximar s y m que tenga mayor precisión.

En el Capítulo 4 se analizaron los jamitones en el diagrama fundamental, concluyendo que correspondían a segmentos de línea que intersectan a la curva de equilibrio en $(\rho_s, Q(\rho_s))$ y m y s correspondían al intersección y pendiente de la recta que pasa por el segmento, respectivamente.

Este resultado entrega una forma de poder aproximar la velocidad de propagación de un jamiton recurriendo al plano (ρ, q) . El método de obtención fue presentado en [45]. Consiste en tomar una solución tipo jamiton obtenida a partir de la simulación ρ_{jam} y u_{jam} y graficar los datos obtenidos en el plano (ρ, q) (es decir, graficar $(\rho_{jam}, \rho_{jam}u_{jam})$). El resultado esperado correspondería a un segmento de recta con los parámetros del jamiton. Así, se pueden obtener m_{jam} y s_{jam} a partir de una regresión lineal del gráfico mencionado.

Para observar la eficacia del método, se tomó como condición inicial un jamiton con

$\rho_s = 0.433\rho_{\max}$ y $v_- = 26$, mismo utilizado en las Tablas 6.1 y 6.2. Se calculó el error relativo entre s y m del jamiton y el obtenido por la regresión lineal, dados por

$$\varepsilon_s^{\Delta x} = 100 \frac{|s_{\Delta x} - s_{\text{teo}}|}{|s_{\text{teo}}|}, \quad \varepsilon_m^{\Delta x} = 100 \frac{|m_{\Delta x} - m_{\text{teo}}|}{|m_{\text{teo}}|}. \quad (6.15)$$

Para este jamiton particular, se tiene que $m_{\text{teo}} \approx 0.356$ y $s_{\text{teo}} \approx 6.374$. Se probó la eficacia del método corriendo la simulación hasta $t_{\text{final}} = 2$ y para $\tau = 1, 5, 10$ para mallas cada vez más finas. Los resultados se encuentran en la Tabla 6.3.

Tabla 6.3: Errores de s y m para distintos τ con $t_{\text{final}} = 2$

N	Errores $\tau = 1$		Errores $\tau = 5$		Errores $\tau = 10$	
	$\varepsilon_s^{\Delta x}$	$\varepsilon_m^{\Delta x}$	$\varepsilon_s^{\Delta x}$	$\varepsilon_m^{\Delta x}$	$\varepsilon_s^{\Delta x}$	$\varepsilon_m^{\Delta x}$
20	0.01623	0.03049	0.00371	0.01826	0.03326	0.02255
40	0.00312	0.01316	0.00522	0.00253	0.01849	0.01286
80	0.00410	0.00235	0.00566	0.00125	0.01087	0.00785
160	0.00429	0.00007	0.00526	0.00272	0.00701	0.00533
320	0.00423	0.00128	0.00487	0.00328	0.00473	0.00374
640	0.00171	0.00048	0.00248	0.00170	0.00209	0.00162
1280	0.00029	0.00008	0.00233	0.00179	0.00091	0.00070
2560	0.00025	0.00006	0.00165	0.00131	0.00063	0.00051

Se observa en la Tabla 6.3 que el método es eficaz incluso en mallados poco finos y aumenta la precisión mientras mas fina es la malla. Este método se utilizará en el Capítulo 7 para obtener las velocidades de salida de los jamitones resultantes de la colisión de jamitones.

Capítulo 7

Colisión de jamitones

7.1. Preliminares

Como se mencionó en el Capítulo 6, la colisión de jamitones fue observada en la aparición de jamitones en una ruta circular. En tal caso, la colisión de dos jamitones forma un nuevo jamiton con parámetros posiblemente distintos a los de los jamitones originales. Además, se observó que, para que dos jamitones puedan colisionar, deben compartir el valor de ρ_- pues necesariamente deben estar unidos por el shock entre ρ_- y ρ_+ (o en variables lagrangianas, entre v_+ y v_-).

En efecto, sean dos soluciones tipo jamiton Q_{jam}^1 y Q_{jam}^2 con parámetros ρ_s^1, v_-^1, v_+^1 y ρ_s^2, v_-^2, v_+^2 respectivamente. La idea será obtener una condición necesaria para que Q_{jam}^1 pueda unirse a Q_{jam}^2 . La parte suave de Q_{jam}^1 se obtiene de integrar la EDO (4.5) entre v_+^1 y v_-^1 . Pero el shock de Q_{jam}^2 une los valores v_-^2 con v_+^2 , por lo que si se quiere unir la parte suave de Q_{jam}^1 con el shock de Q_{jam}^2 necesariamente $v_-^1 = v_-^2$. Esta condición se le conocerá como *condición de compatibilidad* entre jamitones.

Definición 7.1 (Compatibilidad) *Dos jamitones Q_{jam}^1 y Q_{jam}^2 de parámetros v_-^1 y v_-^2 , respectivamente, se dirán compatibles si $v_-^1 = v_-^2$.*

Se puede notar que la condición de compatibilidad no restringe completamente los valores de ρ_s ni de v_+ , a pesar de que este último es dependiente tanto de ρ_s (pues $m = m(\rho_s)$ y $s = s(\rho_s)$) como de v_- . Dado que la familia de soluciones jamitónicas se encuentra parametrizada por ρ_s se puede estudiar la compatibilidad de varios jamitones de distintos tamaños y largos en base a su densidad sónica para un jamiton fijo dado por ρ_s .

En primer lugar, para se escogerá un ρ_{test} tal que el intervalo de elección para v_- sea el mayor entre las densidades que rompen la CSC y se escoge v_-^{test} como el punto medio del intervalo encontrado. Luego, se escogen densidades sónicas tales que el intervalo de jamiton maximal dado por $[v_R, v_M]$ contenga a v_-^{test} . Las densidades encontradas se observan en la Figura 7.1. El jamiton de prueba elegido posee parámetros $\rho_s \approx 0.4333$ y $v_-^{\text{test}} \approx 26.602$.

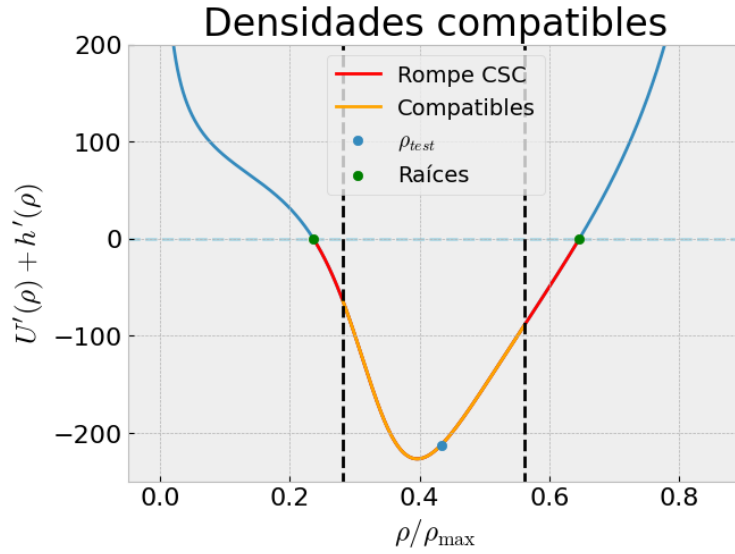


Figura 7.1: Densidades compatibles con jamiton de prueba.

De esta forma se asegura que el estudio de colisiones considera una cantidad variable de tamaños y largos distintos, además que los jamitones a colisionar resultan ser compatibles, pues v_{-}^{test} puede ser elegido en los jamitones a colisionar. De todas formas, el primer paso de elección para ρ_s^{test} se puede realizar para cualquier ρ_s que rompa la CSC. La elección particular hecha fue para hacer la mayor cantidad de colisiones posibles con un solo jamiton de prueba.

Como se mencionó en el Capítulo 6 en la simulación de aparición de jamitinos, se observan variadas colisiones entre jamitinos que poseen distintas velocidades, así como algunos fueron absorbidos por el jamiton inicial más grande. Esto da pie a la siguiente proposición, cuya validación por el momento es solo numérica y se puede observar en las Figuras 7.2 y 7.3.a.

Conjetura 7.1 *La colisión de dos jamitones compatibles origina un nuevo jamiton cuyos parámetros dependen de los jamitones originales.*

Esta proposición resulta fundamental pues las simulaciones se realizan esperando el surgimiento de un nuevo jamiton.

Los jamitones elegidos se unen con el jamiton de prueba y esto se impone como condición inicial en la simulación, para luego dejar correr el código hasta un tiempo lo suficientemente grande tal que se haya formado el jamiton resultante de la colisión. Dado que este jamiton fue obtenido de manera puramente numérica, para obtener sus propiedades, tales como m y s , se usa el método descrito en la Sección 6.4 a partir del comportamiento de un jamiton en el diagrama fundamental. En la Figura 7.2 se observa un ejemplo de cómo colisionan dos jamitones y el jamiton resultante después de pasado un tiempo t_{final} . En la Figura 7.3.a se observa el segmento que aproxima al jamiton post-colisión en el plano (ρ, q) .

Colisión de jमितones

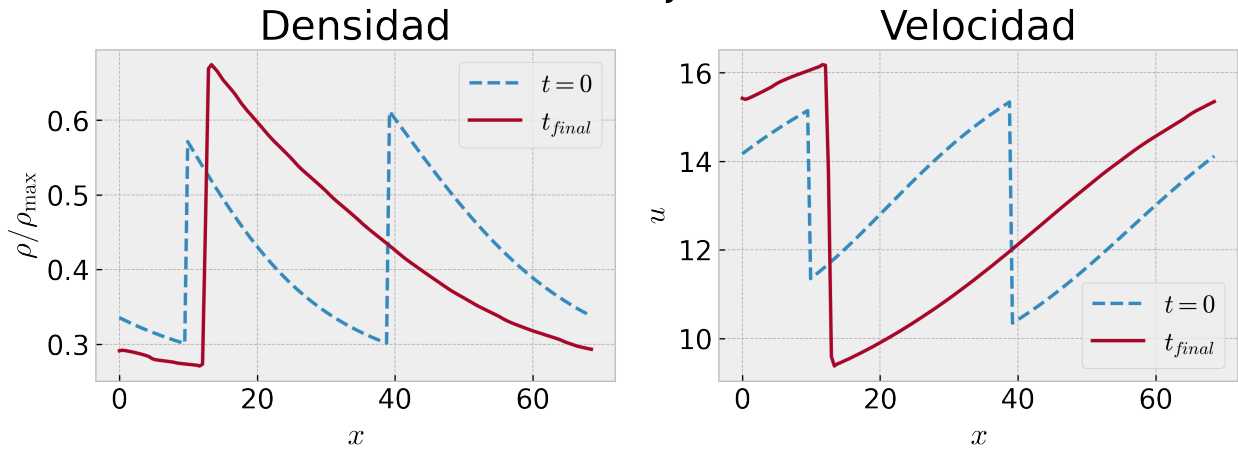
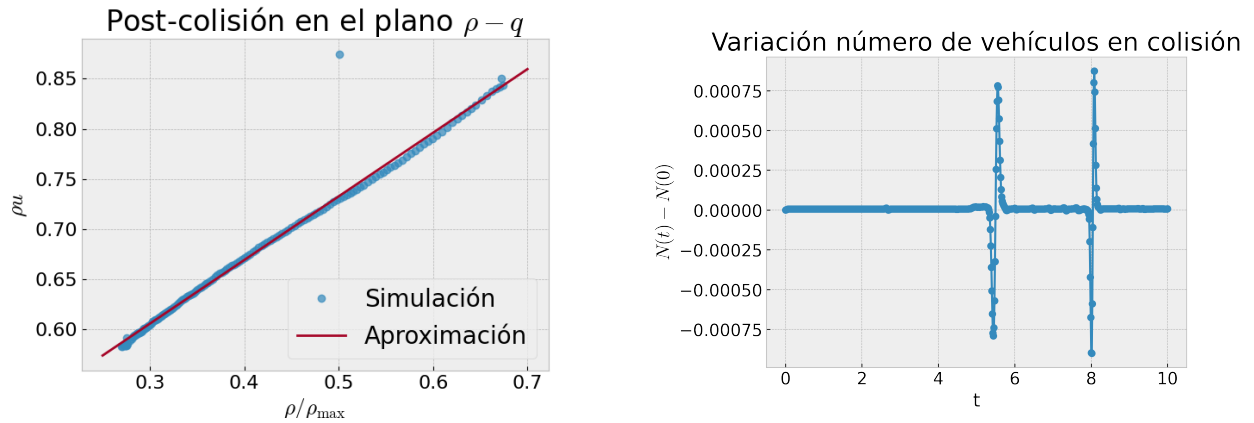


Figura 7.2: Ejemplo de colisión entre un jमितon con $\rho_s = 0.425\rho_{\max}$ y otro con $\rho_s = 0.443\rho_{\max}$, ambos con $v_- = 25$.



(a) Segmento que aproxima al jमितon obtenido de la colisión en la Figura 7.2.

(b) Amplitudes.

Figura 7.3: Segmento y conservación vehicular. El primer gráfico verifica la aparición de un jमितon post-colisión y el segundo verifica que el algoritmo de colisión no rompe la ley de conservación.

7.2. Resultados

Con el algoritmo planteado se realizan 274 colisiones distintas entre el jमितon de prueba y los jमितones compatibles, utilizando $\tau = 5$, $N = 160$ como total de puntos en la grilla y Δt tal que se cumpla la condición CFL (5.13). Las simulaciones de las distintas colisiones se realizaron en paralelo con 20 clusters HPC. A los jमितones resultantes de las colisiones se les calculan sus velocidades de propagación, que se observan en la Figura 7.4 en función de las densidades ρ_s compatibles con el jमितon de prueba.

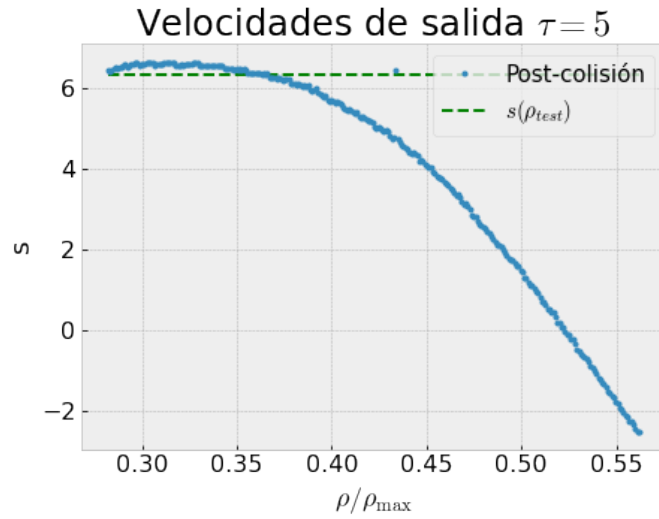
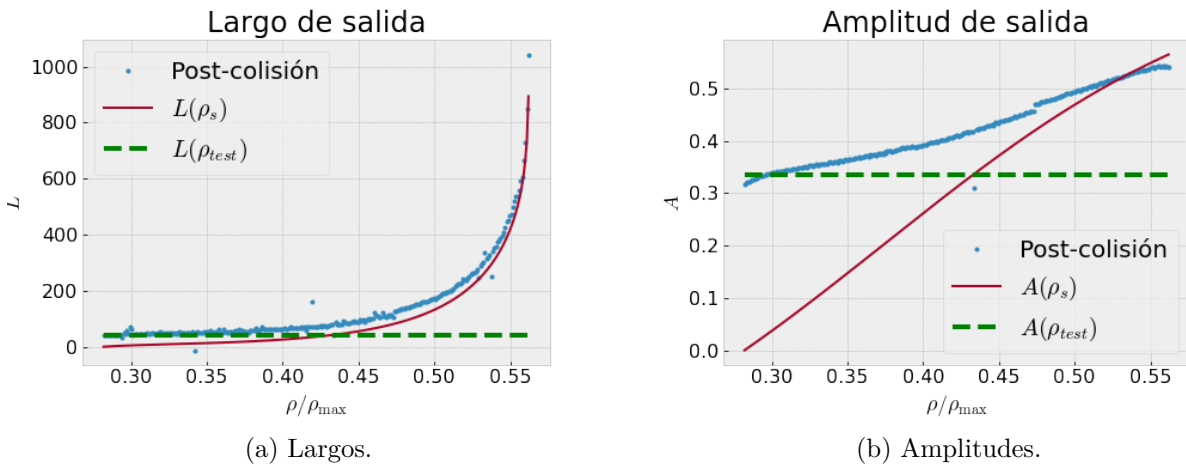


Figura 7.4: Gráfico de velocidades de salida post-colisión. El dato en $\rho/\rho_{\max} \approx 0.44$ corresponde a jamitones que no colisionaron por tener valores de ρ_s muy cercanos.

Se pueden calcular otras propiedades a partir de los jamitones post-colisión, como el largo y la amplitud dados por las ecuaciones (4.11) y (4.13). En la Figura 7.5 se muestran los largos y amplitudes de los jamitones resultantes en función de los ρ_s compatibles y comparados con los correspondientes a los jamitones previos a colisionar. La recta punteada representa el jamiton de prueba.



(a) Largos. (b) Amplitudes.
 Figura 7.5: Largos y amplitudes obtenidos luego de cada colisión.

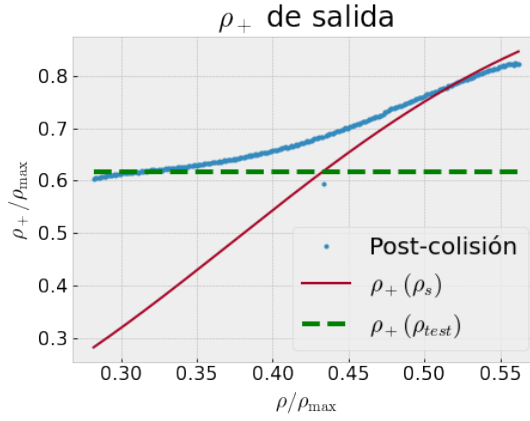


Figura 7.6: Valores de ρ_+ luego de cada colisión.

De igual manera se pueden comparar las velocidades de salida junto con la función $s(\rho_s)$, obteniendo el gráfico de la Figura 7.7.

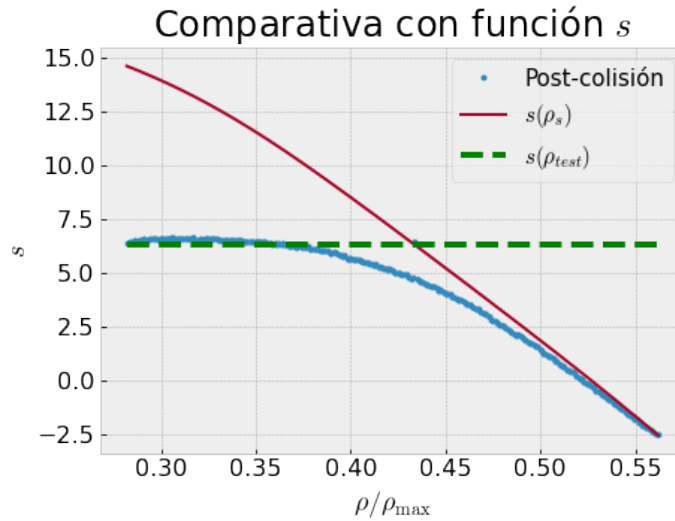


Figura 7.7: Comparación con función $s(\rho_s)$.

Un resultado interesante se puede observar en la Figura 7.4 para $\rho_s/\rho_{\max} \in [0.26, 0.35]$. Notar que para algunas colisiones las velocidades de salida aumentaron en relación al jamiton de prueba. Esto podría indicar que un jamiton se puede acelerar si se impacta con jamitones de menor tamaño y, en caso de que la relación entre velocidad-tamaño cumpla buenas propiedades, se podría disminuir el tamaño de un jamiton. Esto entrega una herramienta importante en la aplicación pues se podría desatacar el tráfico colisionando con cadenas de jamitones de menor tamaño.

Por otro lado en la Figura 7.7 se observa que las velocidades de salida corresponden a la suavización entre la constante ρ_{test} y la función $s(\rho_s)$. Esto indica que los jamitones predominantes post-colisión corresponden a los de mayor tamaño, es decir que los jamitones de menor largo y amplitud son absorbidos por aquellos más grandes. Sin embargo, en aquellas colisiones de jamitones con $\rho_s/\rho_{\max} \in [0.40, 0.45]$ se observa cierta aditividad en sus amplitudes, pues la amplitud obtenida post-colisión resulta ser mayor que las amplitudes pre-colisión. Un efecto contrario y observable en 7.7 ocurre con las velocidades de salida, que resultan disminuir con

respecto a los jamitones de entrada para el mismo rango de densidades. Este fenómeno se puede resumir en la siguiente conjetura:

Conjetura 7.2 (Cotas post-colisión) *Sea Q_{jam} un jamiton con densidad sónica ρ_s . Sea $\{Q_{jam}^\lambda\}_\lambda$ un conjunto no vacío de jamitones compatibles parametrizados por sus densidades sónicas $\{\rho_s^\lambda\}_\lambda$. Sea Q_{post} el jamiton obtenido al colisionar Q_{jam} con Q_{jam}^λ y con densidad sónica ρ_s^{post} . Se cumplen las siguientes:*

- Existe un λ_0 tal que $s(\rho_s^{post}) \leq s(\rho_s^\lambda)$ para todo $\rho_s^\lambda \geq \rho_s^{\lambda_0}$,
- Existe un λ_1 tal que $A(\rho_s^{post}) \geq A(\rho_s^\lambda)$ para todo $\rho_s^\lambda \leq \rho_s^{\lambda_1}$ y
- $L(\rho_s) \geq L(\rho_s^\lambda)$ para todo λ .

7.3. Variación τ

Una pregunta interesante de resolver es ¿se preserva el mismo fenómeno para distintos valores de τ ?, recordando que este parámetro aparece recurrentemente en el estudio teórico de los jamitones. Para responder esta pregunta se realiza el mismo experimento realizado con anterioridad pero con dos valores de τ distintos ($\tau = 1$ y $\tau = 10$) adicionales. El resultado de las colisiones se observa en la Figura 7.8.

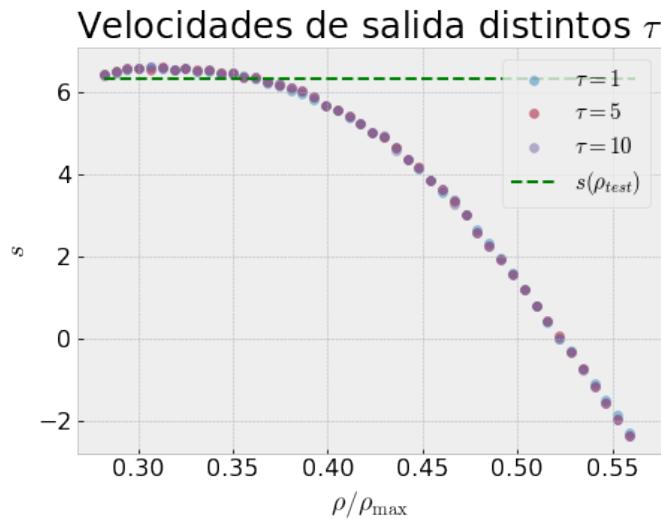


Figura 7.8: Gráfico de velocidades de salida post-colisión con distintos τ 's

Se puede ver que el comportamiento de las velocidades de salida es igual para los distintos τ . Esto tiene sentido pues tanto m como s dependen solamente de la densidad sónica, más no del valor de τ . Esto da origen a la siguiente proposición:

Conjetura 7.3 *La velocidad sónica del jamiton resultante de una colisión es independiente de τ .*

Las demás propiedades de un jamiton, tales como la amplitud, largo y ρ_+ , también pueden ser estudiadas variando τ . En las Figuras 7.9 y 7.10 se obtienen las amplitudes, largos y ρ_+ para τ igual a 1, 5 y 10.

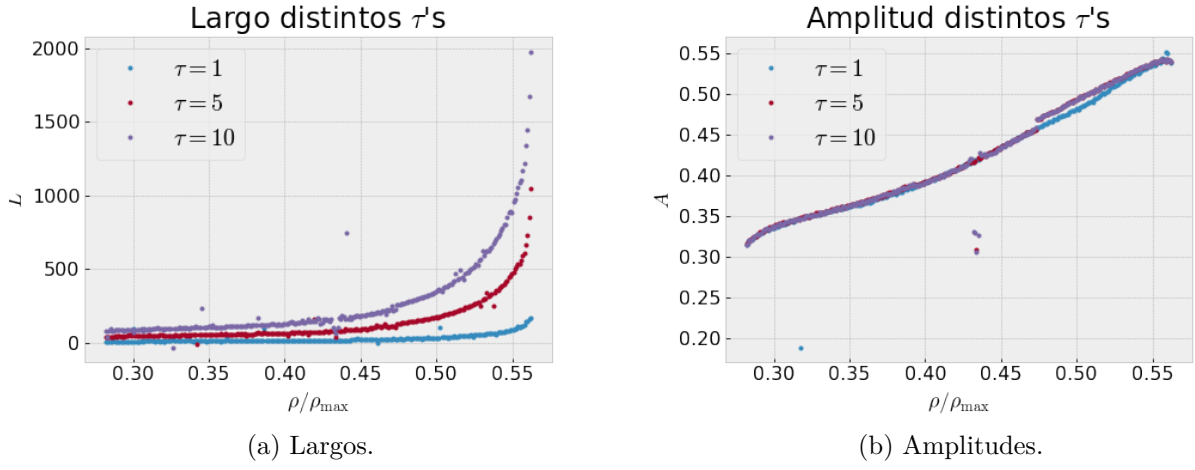


Figura 7.9: Largos y amplitudes para distintos τ 's.

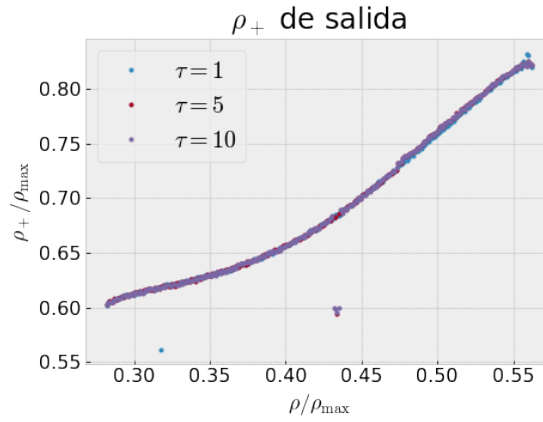


Figura 7.10: Valores de ρ_+ para distintos τ 's

En 7.9.b y 7.10 se observa que tales propiedades tampoco dependen de τ . Esto también es esperable pues tanto ρ_+ como ρ_- solo dependen de ρ_s , que a su vez es independiente de τ . Esto agrega más invarianzas a la colisión de jamitones:

Conjetura 7.4 *La amplitud y valor de ρ_+ del jamiton resultante de una colisión es independiente de τ .*

De todas formas, en la Figura 7.9.a se observa que el largo del jamiton post-colisión cambia, siendo mayor a medida que aumenta τ . Este efecto está relacionado a la fórmula para el largo dada en (4.11) que depende de τ . Esto da la siguiente conjetura

Conjetura 7.5 *El largo del jamiton resultante de una colisión es dependiente de τ .*

Es interesante estudiar si existe aditividad en los largos de los jamitones, es decir, si el largo jamiton post-colisión corresponde a la suma de los largos de los jamitones antes de colisionar. Para esto, se calculan los largos de los jamitones antes de la colisión, se suman y se comparan a los largos post-colisión. Se define el siguiente error normalizado:

$$E_L = \frac{L_{\text{col}} - (L + L_{\text{test}})}{\max_{\rho} (L + L_{\text{test}})}, \quad (7.1)$$

donde L_{col} corresponde al largo del jamiton post-colisión, L_{test} al largo del jamiton test y L

al largo del jamiton colisionado con el jamiton test. Las Figuras 7.11 y 7.12 muestran los resultados obtenidos.

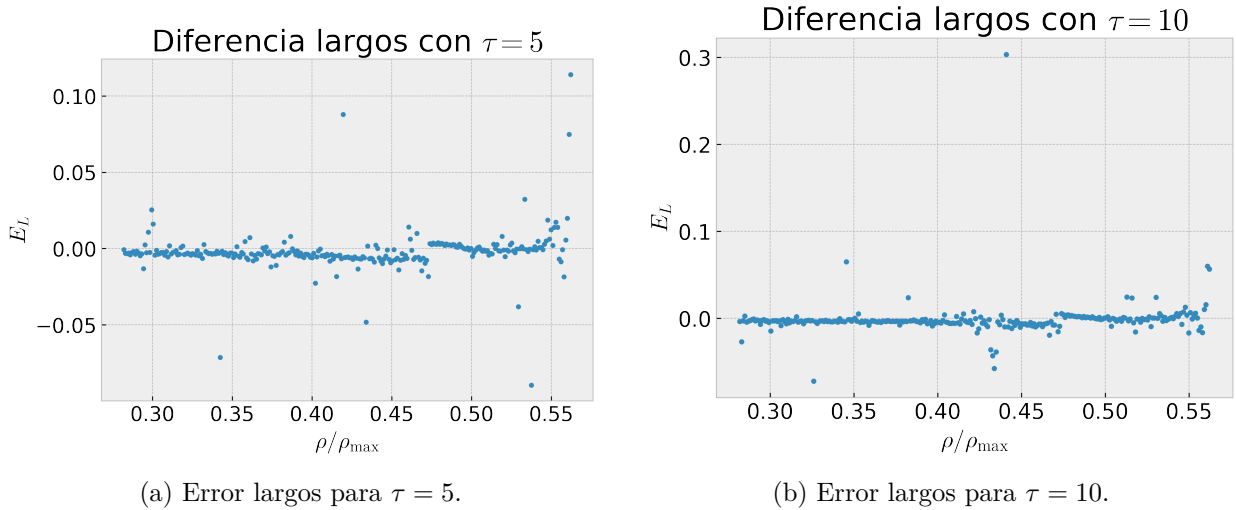


Figura 7.11: Largos y amplitudes para distintos τ 's.

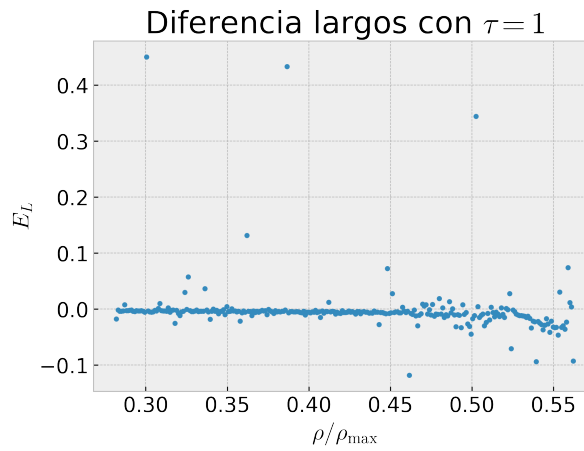


Figura 7.12: Error largos para $\tau = 1$.

Se observa que efectivamente el error es pequeño, especialmente para el caso $\tau = 5$. Además, las diferencias más apreciables pueden ser provocadas perfectamente por errores numéricos en la simulación. Esto da pie a la siguiente conjetura:

Conjetura 7.6 *El largo del jamiton luego de colisionar corresponde a la suma de los largos de los jamitones colisionados.*

Capítulo 8

Conclusiones

Para concluir este trabajo, se hará un resumen de lo expuesto y resultados en cada Capítulo, así como también líneas futuras que se pueden seguir desarrollando.

En el Capítulo 2 fueron explorados varios métodos numéricos para obtener el comportamiento fractal de las velocidades de salida al colisionar un *kink* con un *antikink* en la ecuación ϕ^4 . En el Capítulo 3 se introdujeron propiedades de los modelos de tráfico más utilizados. En el Capítulo 4 se observó la obtención teórica de jamitones y sus propiedades. En el Capítulo 5 se exploraron distintos métodos para simular sistemas de leyes de conservación y aplicarlos en el Capítulo 6 para simular Jamitones. En este Capítulo se validó el esquema numérico bajo errores numéricos y comparativas con jamitones teóricos. Por último en el Capítulo 7 se definieron y probaron numéricamente varios resultados en la colisión de jamitones: La colisión de jamitones origina un nuevo jamiton, las velocidades de salida corresponden a la suavización de dos funciones, los largos de salida aumentan, así como las amplitudes (en un rango de densidades) y se observaron propiedades dependientes e independientes de τ post-colisión.

8.1. Trabajo futuro

La colisión de jamitones deja varias preguntas abiertas por responder, especialmente en el ámbito teórico pues los resultados de esta tesis son sólo numéricos pero que pueden dar rumbo a eventuales demostraciones. Por tanto explicaciones teóricas o validaciones robustas matemáticamente son trabajos a realizar a futuro.

Por otro lado, se pueden experimentar aún más con las simulaciones numéricas y explorar más allá de las dobles colisiones. Por ejemplo simular triples, cuádruples colisiones o inclusive colisiones de N jamitones. Por supuesto los resultados en este punto deben ser analizados con cuidado pues corresponden a casos de mayor complejidad y cuyo resultado final es altamente no trivial. Casos similares se han estudiado en otro tipo de sistemas, como en la ecuación de Schrödinger donde existe solución explícita para la interacción de N solitones [58]. Siguiendo este hilo es que también se puede experimentar con *bombardeos* con cadenas de jamitones a un jamiton de mayor tamaño, esperando este disminuya su amplitud y, en palabras sencillas, se logre desatascar el tráfico. Es desconocida la veracidad de este efecto pero la Figura 7.4 sugiere que al menos se puede aumentar la velocidad del jamiton mayor.

Otro experimento que se puede realizar es colisionar utilizando otras funciones h , U o Q determinadas a partir de otro diagrama fundamental más localizado. Como por ejemplo rutas particulares en alguna ciudad o país. De esta forma las simulaciones numéricas se pue-

den ajustar a distintas realidades, así como poder aplicarlas en la vida real y poder resolver problemas cotidianos.

un último trabajo futuro que se puede realizar, aunque escapa un poco de la temática de la tesis, es implementar modelos de control para los atascos vehiculares a través de las simulaciones numéricas de jamitones. Como fue mencionado con anterioridad, se han realizado experimentos empíricos de control, más no existe rigidez matemática al respecto, por lo que un buen trabajo futuro sería experimentar bajo simulaciones numéricas estos casos y derivar resultados teóricos.

Bibliografía

- [1] Sommer, M., Dargay, J., y Gately, D., “Vehicle ownership and income growth, worldwide: 1960-2030”, *The Energy Journal*, vol. 28, pp. 143–170, 2007, [doi:10.2307/41323125](https://doi.org/10.2307/41323125).
- [2] CADEM, “El chile que viene: Automóviles”. <https://cadem.cl/wp-content/uploads/2022/03/Informe-Chile-que-Viene-Feb-2022-Automovil.-VF.pdf>, 2022. Accessed: 02-01-2024.
- [3] Gazis, D. C., Herman, R., y Rothery, R. W., “Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow”, *Operations Research*, vol. 9, no. 4, pp. 545–567, 1961, <http://www.jstor.org/stable/167126> (visitado el 2023-12-15).
- [4] Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A., y Sugiyama, Y., “Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation”, *Phys. Rev. E*, vol. 51, pp. 1035–1042, 1995, [doi:10.1103/PhysRevE.51.1035](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.1035).
- [5] Nagel, K. y Schreckenberg, M., “A cellular automaton model for freeway traffic”, *Journal de Physique I*, vol. 2, p. 2221, 1992, [doi:10.1051/jp1:1992277](https://doi.org/10.1051/jp1:1992277).
- [6] Lighthill, M. J. y Whitham, G. B., “On kinematic waves. ii. a theory of traffic flow on long crowded roads”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 229, no. 1178, pp. 317–345, 1955, <http://www.jstor.org/stable/99769> (visitado el 2023-12-20).
- [7] Richards, P. I., “Shock waves on the highway”, *Operations Research*, vol. 4, no. 1, pp. 42–51, 1956, <http://www.jstor.org/stable/167515> (visitado el 2023-12-20).
- [8] Aw, A. y Rascle, M., “Resurrection of "second order" models of traffic flow”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 60, no. 3, pp. 916–938, 2000, [doi:10.1137/S0036139997332099](https://doi.org/10.1137/S0036139997332099).
- [9] Zhang, H. M., “A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior”, *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 36, pp. 275–290, 2002, [doi:10.1016/S0191-2615\(00\)00050-3](https://doi.org/10.1016/S0191-2615(00)00050-3).
- [10] Payne, H., *Models of Freeway Traffic and Control*. Simulation Councils, Incorporated, 1971, <https://books.google.cl/books?id=1X4ZcgAACAAJ>.
- [11] Whitham, G., *Linear and Nonlinear Waves*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, Wiley, 1999, <https://books.google.cl/books?id=84Pulkf-Oa8C>.
- [12] Aw, A., Klar, A., Materne, T., y Rascle, M., “Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader models”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 63, no. 1, pp. 259–278, 2002, <http://www.jstor.org/stable/3648770> (visitado el 2024-01-01).
- [13] Alperovich, T. y Sopasakis, A., “Stochastic description of traffic flow”, *Journal of Sta-*

- tistical Physics, vol. 133, pp. 1083–1105, 2008, doi:10.1007/s10955-008-9652-6.
- [14] Work, D., Tossavainen, O.-P., Blandin, S., Bayen, A., Iwuchukwu, T., y Tracton, K., “An ensemble kalman filtering approach to highway traffic estimation using gps enabled mobile devices”, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, pp. 5062–5068, 2008, doi:10.1109/CDC.2008.4739016.
- [15] Wang, Y. y Papageorgiou, M., “Real-time freeway traffic state estimation based on extended kalman filter: a general approach”, Transportation Research Part B: Methodological, vol. 39, no. 2, pp. 141–167, 2005, doi:https://doi.org/10.1016/j.trb.2004.03.003.
- [16] Papageorgiou, M., “Some remarks on macroscopic traffic flow modelling”, Transportation Research Part A: Policy and Practice, vol. 32, no. 5, pp. 323–329, 1998, doi:https://doi.org/10.1016/S0965-8564(97)00048-7.
- [17] Goodman, R. y Haberman, R., “Kink-antikink collisions in the ϕ^4 equation: The n-bounce resonance and the separatrix map”, Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 4, pp. 1195–1228, 2005, doi:10.1137/050632981.
- [18] Campbell, D. K., Peyrard, M., y Sodano, P., “Kink-antikink interactions in the double sine-gordon equation”, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 19, no. 2, pp. 165–205, 1986, doi:https://doi.org/10.1016/0167-2789(86)90019-9.
- [19] Campbell, D. K. y Peyrard, M., “Solitary wave collisions revisited”, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 18, no. 1, pp. 47–53, 1986, doi:https://doi.org/10.1016/0167-2789(86)90161-2.
- [20] Campbell, D. K., Schonfeld, J. F., y Wingate, C. A., “Resonance structure in kink-antikink interactions in ϕ^4 theory”, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 9, no. 1, pp. 1–32, 1983, doi:https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90289-0.
- [21] Anninos, P., Oliveira, S., y Matzner, R. A., “Fractal structure in the scalar $\lambda(\varphi^2 - 1)^2$ theory”, Phys. Rev. D, vol. 44, pp. 1147–1160, 1991, doi:10.1103/PhysRevD.44.1147.
- [22] Peyrard, M. y Campbell, D. K., “Kink-antikink interactions in a modified sine-gordon model”, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 9, no. 1, pp. 33–51, 1983, doi:https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90290-7.
- [23] Allaire, G. y Craig, A., Numerical Analysis and Optimization: An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation. Numerical Mathematics and Scientific Computation, OUP Oxford, 2007, https://global.oup.com/academic/product/numerical-analysis-and-optimization-9780199205226?cc=cl&lang=en&.
- [24] Mendes, N., Chhay, M., Berger, J., y Dutykh, D., Spectral Methods, p. 167–209. Springer International Publishing, 2019, doi:10.1007/978-3-030-31574-0_8.
- [25] Antoine, X., Bao, W., y Besse, C., “Computational methods for the dynamics of the nonlinear schrödinger/gross-pitaevskii equations”, Computer Physics Communications, vol. 184, no. 12, pp. 2621–2633, 2013, doi:https://doi.org/10.1016/j.cpc.2013.07.012.
- [26] Kassam, A.-K. y Trefethen, L. N., “Fourth-order time-stepping for stiff pdes”, SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 26, no. 4, pp. 1214–1233, 2005, doi:10.1137/S1064827502410633.
- [27] Minnesota Department of Transportation, “Mn/DOT Traffic Data”, http://data.dot.state.mn.us/datatools/.
- [28] Greenshields, B. D., Bibbins, J. R., Channing, W., y Miller, H. H., “A study of traffic capacity”, American Journal of Computational Mathematics, 1935, https://api.semant

- [29] Newell, G., “A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part ii: Queueing at freeway bottlenecks”, *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 27, no. 4, pp. 289–303, 1993, doi:[https://doi.org/10.1016/0191-2615\(93\)90039-D](https://doi.org/10.1016/0191-2615(93)90039-D).
- [30] Daganzo, C. F., “The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory”, *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 28, no. 4, pp. 269–287, 1994, doi:[https://doi.org/10.1016/0191-2615\(94\)90002-7](https://doi.org/10.1016/0191-2615(94)90002-7).
- [31] Mammari, S., Lebacque, J.-P., y Salem, H. H., “Riemann problem resolution and godunov scheme for the aw-rascle-zhang model”, *Transportation Science*, vol. 43, no. 4, pp. 531–545, 2009, <http://www.jstor.org/stable/25769472> (visitado el 2023-12-24).
- [32] Kerner, B., *Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control: The Long Road to Three-Phase Traffic Theory*. Springer Berlin, Heidelberg, 2009, doi:[10.1007/978-3-642-02605-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-02605-8).
- [33] Seibold, B., Flynn, M. R., Kasimov, A. R., y Rosales, R. R., “Constructing set-valued fundamental diagrams from jamiton solutions in second order traffic models”, *Networks and Heterogeneous Media*, vol. 8, no. 3, pp. 745–772, 2013, doi:[10.3934/nhm.2013.8.745](https://doi.org/10.3934/nhm.2013.8.745).
- [34] Fan, S. y Seibold, B., “A comparison of data-fitted first order traffic models and their second order generalizations via trajectory and sensor data”, 2013.
- [35] Sugiyama, Y., Fukui, M., Kikuchi, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Nishinari, K., ichi Tadaki, S., y Yukawa, S., “Traffic jams without bottlenecks—experimental evidence for the physical mechanism of the formation of a jam”, *New Journal of Physics*, vol. 10, p. 033001, 2008, doi:[10.1088/1367-2630/10/3/033001](https://doi.org/10.1088/1367-2630/10/3/033001).
- [36] Flynn, M. R., Kasimov, A. R., Nave, J.-C., Rosales, R. R., y Seibold, B., “Self-sustained nonlinear waves in traffic flow”, *Physical Review E*, vol. 79, no. 5, 2009, doi:[10.1103/physreve.79.056113](https://doi.org/10.1103/physreve.79.056113).
- [37] Daganzo, C. F., “Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow”, *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 29, no. 4, pp. 277–286, 1995, doi:[https://doi.org/10.1016/0191-2615\(95\)00007-Z](https://doi.org/10.1016/0191-2615(95)00007-Z).
- [38] Leveque, R. J., *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Basel, 1992.
- [39] Aw, A. y Rascle, M., “Resurrection of "second order" models of traffic flow”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 60, no. 3, pp. 916–938, 2000, doi:[10.1137/S0036139997332099](https://doi.org/10.1137/S0036139997332099).
- [40] Greenberg, J., “Congestion redux”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 64, 2004, doi:[10.1137/S0036139903431737](https://doi.org/10.1137/S0036139903431737).
- [41] Courant, R. y Friedrichs, K., *Supersonic Flow and Shock Waves*. Applied Mathematical Sciences, Springer New York, NY, 2012, <https://books.google.cl/books?id=84Pulkf-Oa8C>.
- [42] Gingold, R. A. y Monaghan, J. J., “Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 181, pp. 375–389, 1977, doi:[10.1093/mnras/181.3.375](https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375).
- [43] Lucy, L. B., “Numerical approach to the testing of the fission hypothesis”, *Astron. J.*; (United States), vol. 82:12, 1977, doi:[10.1086/112164](https://doi.org/10.1086/112164).

- [44] Whitham, G. B., “Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 12, pp. 113–158, 1959, <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120425212>.
- [45] Ramadan, R., Rosales, R. R., y Seibold, B., *Structural Properties of the Stability of Jamitons*, p. 35–62. Springer International Publishing, 2020, [doi:10.1007/978-3-030-66560-9_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-66560-9_3).
- [46] Chen, G.-Q., Levermore, C. D., y Liu, T.-P., “Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 47, no. 6, pp. 787–830, 1994, [doi:https://doi.org/10.1002/cpa.3160470602](https://doi.org/10.1002/cpa.3160470602).
- [47] Liu, T.-P., “Hyperbolic conservation laws with relaxation”, *Communications in Mathematical Physics*, vol. 108, no. 1, pp. 153–175, 1987, [doi:10.1007/BF01210707](https://doi.org/10.1007/BF01210707).
- [48] Li, T. y Liu, H., “Stability of a Traffic Flow Model with Nonconvex Relaxation”, *Communications in Mathematical Sciences*, vol. 3, no. 2, pp. 101 – 118, 2005.
- [49] Li, T., “Global solutions and zero relaxation limit for a traffic flow model”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 61, no. 3, pp. 1042–1061, 2000, <http://www.jstor.org/stable/3061762> (visitado el 2023-12-31).
- [50] Li, T. y Liu, H., “Critical thresholds in a relaxation system with resonance of characteristic speeds”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 511–521, 2009, [doi:10.3934/dcds.2009.24.511](https://doi.org/10.3934/dcds.2009.24.511).
- [51] Fickett, W. y Davis, W., *Detonation: Theory and Experiment*. Dover Books on Physics, Dover Publications, 2012, <https://books.google.cl/books?id=QaejAQAQBAJ>.
- [52] Leveque, R. J., *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2004.
- [53] Mishra, S., “Numerical methods for conservation laws and related equations”, 2013.
- [54] Godunov, S. K. y Bohachevsky, I., “Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics”, *Matemativ ceskij sbornik*, vol. 47(89), no. 3, pp. 271–306, 1959, <https://hal.science/hal-01620642>.
- [55] Lax, P. D., 1. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, pp. 1–48. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987, [doi:10.1137/1.9781611970562.ch1](https://doi.org/10.1137/1.9781611970562.ch1).
- [56] Davis, S. F., “Simplified second-order godunov-type methods”, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 9, no. 3, pp. 445–473, 1988, [doi:10.1137/0909030](https://doi.org/10.1137/0909030).
- [57] “Traffic modeling - phantom traffic jams and traveling jamitons”, <https://math.mit.edu/traffic/>.
- [58] Hirota, R., “Exact envelope soliton solutions of a nonlinear wave equation”, *Journal of Mathematical Physics*, vol. 14, pp. 805–809, 1973, [doi:10.1063/1.1666399](https://doi.org/10.1063/1.1666399).
- [59] John, F., *Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, Springer New York, 1991, https://books.google.cl/books?id=cBib_bsGGLYC.

Anexos

Anexo A. Obtención condiciones de Rankine-Hugoniot

Se considera el siguiente problema a valores iniciales para un sistema de leyes de conservación, dado por

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = f(u) , & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g , & \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

A continuación, se derivarán las condiciones de Rankine-Hugoniot para el sistema homogéneo ($f(u) = 0$) y no homogéneo, presentada en [59, cap.1] y adaptadas para $f(u) \neq 0$.

A.1. Caso homogéneo

Sean $a < b, a, b \in \mathbb{R}$ cualquiera. Sea u una solución a la ecuación lo suficientemente suave. Integrando en $[a, b]$, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u dx + F(u(t, b)) - F(u(t, a)) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Sea $\xi(t)$ una curva característica donde la solución presenta un salto. Luego, el término con derivada temporal se puede reescribir como sigue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b u dx &= \frac{d}{dt} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{\xi(t)-\varepsilon} u dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{\xi(t)+\varepsilon}^b u dx \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{\xi(t)-\varepsilon} u dx \right] + \frac{d}{dt} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{\xi(t)+\varepsilon}^b u dx \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Aplicando la regla de integración de Leibniz en el primer sumando de la última igualdad de (A.3) se tiene que

$$\frac{d}{dt} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{\xi(t)-\varepsilon} u dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{d}{dt} \int_a^{\xi(t)-\varepsilon} u dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{\xi(t)-\varepsilon} u_t dx + u(t, \xi(t) - \varepsilon) \xi'(t) \right], \quad (\text{A.4})$$

Definiendo $\xi^- := \xi(t) - \varepsilon$, $u^- := u(t, \xi^-)$ y omitiendo el límite, se sigue que

$$\frac{d}{dt} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{\xi(t)-\varepsilon} u dx = u^- \xi' - \int_a^{\xi^-} F(u)_x dx = u^- \xi' + F(u(t, a)) - F(u^-) \quad (\text{A.5})$$

donde se utilizó (A.1). De la misma forma para el segundo sumando en (A.3) se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{\xi(t)+\varepsilon}^b u dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \left[\int_{\xi(t)+\varepsilon}^b u_t dx - u(t, \xi(t) + \varepsilon) \xi'(t) \right]. \quad (\text{A.6})$$

Definiendo $\xi^+ := \xi(t) + \varepsilon$ y $u^+ := u(t, \xi^+)$ y usando que $u_t = -F(u)_x$, se tiene

$$\frac{d}{dt} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{\xi(t)+\varepsilon}^b u dx = F(u^+) - F(u(t, b)) - u^+ \xi'. \quad (\text{A.7})$$

Juntando todo en (A.2) se obtiene

$$\xi'(u^+ - u^-) = F(u^+) - F(u^-), \quad (\text{A.8})$$

de donde se define $[u] = u^+ - u^-$ y $[F(u)] = F(u^+) - F(u^-)$ y se concluyen las condiciones de Rankine-Hugoniot:

$$[F(u)] = \xi'[u]. \quad (\text{A.9})$$

A.2. Caso no homogéneo.

Se procede de forma similar al caso anterior. Integrando en $[a, b]$ se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u dx + F(u(t, b)) - F(u(t, a)) = \int_a^b f(u) dx. \quad (\text{A.10})$$

Luego

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u dx = \frac{d}{dt} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{\xi(t)-\varepsilon} u dx \right] + \frac{d}{dt} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{\xi(t)+\varepsilon}^b u dx \right], \quad (\text{A.11})$$

donde $\xi(t)$ corresponde a una curva característica. Usando la regla de integración de Leibniz y que $u_t = f(u) - F(u)_x$ en (A.11)

$$\frac{d}{dt} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{\xi(t)-\varepsilon} u dx = \int_a^{\xi^-} u_t dx + u^- \xi'(t) = \int_a^{\xi^-} f(u) dx - F(u^-) + F(u(t, a)) + u^- \xi'. \quad (\text{A.12})$$

De la misma forma para el segundo sumando

$$\frac{d}{dt} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{\xi(t)+\varepsilon}^b u dx \right] = \int_{\xi^+}^b f(u) dx + F(u^+) - F(u(t, b)) - u^+ \xi', \quad (\text{A.13})$$

y juntando todo se concluye

$$F(u^+) - F(u^-) = \xi'(u^+ - u^-) \quad (\text{A.14})$$

o bien

$$[F(u)] = \xi'[u], \quad (\text{A.15})$$

obteniendo así que la no homogeneidad de la ecuación no altera las condiciones de Rankine-Hugoniot.

Anexo B. Cambio a variables lagrangeanas

Se tiene el siguiente sistema de EDP's dado por el modelo ARZ:

$$\rho_t + (u\rho)_x = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$(u + h(\rho))_t + u(u + h(\rho))_x = \frac{1}{\tau}(U(\rho) - u). \quad (\text{B.2})$$

Se propone el siguiente cambio de variables (formulación lagrangeana) asumiendo $\rho > 0$ siempre:

- $v = v(t, \sigma), \quad v = \frac{1}{\rho},$
- $\tilde{u} = \tilde{u}(t, \sigma)$ y
- $d\sigma = \rho(dx - udt).$

El objetivo será obtener la siguiente ecuación con las nuevas variables:

$$v_t = \tilde{u}_\sigma \tag{B.3}$$

$$(\tilde{u} + \hat{h}(v))_t = \frac{1}{\tau}(\hat{U}(v) - \tilde{u}) \tag{B.4}$$

donde $\hat{h}(v) = h(1/v)$ y $\hat{U}(v) = U(1/v)$. Sea $X = X(t)$ una característica tal que

- a) $v(t, \sigma) = \frac{1}{\rho(t, X)},$
- b) $\tilde{u}(t, \sigma) = u(t, X)$ y
- c) $\dot{X} = u(t, X),$

con condiciones iniciales $X(0, \sigma) = X_0(\sigma)$ tal que $\int_0^{X_0(\sigma)} \rho_0(s)ds = \sigma$, de modo que

$$\partial_\sigma X_0(\sigma) = \frac{1}{\rho_0(X_0(\sigma))} = v(0, \sigma).$$

De c), se tiene que

$$\partial_t(\partial_\sigma X) = \partial_\sigma(\partial_t X) = \partial_x u(t, X) \cdot \partial_\sigma X$$

y por otro lado, usando la característica y la ecuación de ρ ,

$$\partial_t v = \frac{-1}{\rho^2} \partial_t \rho(t, X) = \frac{-1}{\rho^2} (\partial_t \rho + u \partial_x \rho) = \frac{v}{\rho} u_x \rho = \partial_x u(t, X) v.$$

Luego, $\partial_\sigma X$ y v cumplen la misma EDO con condiciones iniciales y por lo tanto $\partial_\sigma X = v$. Usando esto en b) se cumple

$$\partial_\sigma \tilde{u} = \partial_x u \partial_\sigma X = v \partial_x u = \partial_t v,$$

concluyendo así la ecuación B.3.