



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TURBULENCIA DE PATRONES MEDIADA POR DEFECTOS EN EL CONTEXTO  
DEL EXPERIMENTO DE LA VÁLVULA ÓPTICA.

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

SIMÓN FELIPE NAVIA RAFIDE

PROFESOR GUÍA:  
MARCEL CLERC GAVILÁN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
CLAUDIO FALCÓN BEAS  
STEFANIA RESIDORI  
NICOLÁS VERSCHUEREN VAN REES

SANTIAGO DE CHILE  
2024

# Resumen

En los sistemas extendidos, un comportamiento complejo puede ser caracterizado a través de sus propiedades dinámicas (caos espacio temporal) y estadísticas (comportamiento tipo turbulento). En el contexto de las observaciones experimentales halladas en el experimento de la válvula de cristal líquido con retroinyección óptica, las cuales muestran una transición a un comportamiento tipo turbulento desde un patrón estático, surge la pregunta acerca del mecanismo por el cual este se produce: Turbulencia de fase, mediada por defectos o intermitencia. Esta tesis cumple con el objetivo de caracterizar este mecanismo y dar cuenta de sus propiedades estadísticas.

En el Capítulo 1, se introducen conceptos y herramientas esenciales para el correcto entendimiento de esta tesis como la turbulencia, el espectro de Lyapunov y la transformada de Hilbert entre otros.

En el Capítulo 2, se presentan los resultados experimentales principales obtenidos en el experimento de la válvula óptica de cristal líquido con retroinyección óptica para un canal cuasiunidimensional. Se explica en detalle la transición encontrada en función del largo de difracción libre  $L$ , además de una caracterización del estado turbulento encontrado.

En el Capítulo 3, se presenta el modelo de Turing-Swift-Hohenberg varicional y su versión no variacional, la que está estrechamente relacionada con el experimento de la válvula óptica de cristal líquido. Se muestra el trabajo anterior en sus propiedades dinámicas, en donde fue obtenido y caracterizado el caos espacio temporal. Luego, se presentan las simulaciones numéricas realizadas, las cuales sirvieron para calcular las propiedades estadísticas. Además se explican los valores de los exponentes del espectro original y como es posible mejorar los resultados en función de un filtro al patrón base presente.

En el Capítulo 4, se presenta en primer lugar la ecuación de Ginzburg-Landau con coeficientes complejos en una dimensión. Este modelo permite una fenomenología de los estados turbulentos observados, la que se explora mediante el cálculo de sus propiedades estadísticas. Después, se introduce el modelo de Coulet-Iooss, el cual es una variación del modelo anterior ya que introduce una ecuación acoplada para la fase local del patrón en estudio. Se investigó el espacio de parámetros de este modelo, además de caracterizar estadísticamente los diferentes espectros de potencia de los nuevos estados.

Finalmente, el Capítulo 5 presenta los resultados preliminares de la ampliación de nuestro estudio a dos dimensiones espaciales. Fue posible encontrar en las simulaciones nuevos estados en dos dimensiones que se asemejan a su contraparte experimental.

# Agradecimientos

Mi paso por el magíster en Física no fue un proceso fácil. Esto en su momento me desmotivó pensando en darme por vencido en sacar adelante lo que me faltaba: la tesis. En este contexto, conocí al profesor Marcel Clerc en el curso de Física No Lineal, quien además de ser un docente muy apasionado y motivante con sus clases, tuvo la empatía y confianza para darme una oportunidad que nunca olvidaré de ser parte de su Laboratorio de Fenómenos Robustos y sacar adelante un trabajo de tesis en un tiempo acotado. Por esto, quiero agradecerle a mi tutor Marcel Clerc por sus valiosos consejos, científicos y personales, por su guía y su modo de ver la ciencia y el mundo, los cuales siempre llevaré en mí.

En segundo lugar, quiero agradecer a mis compañeros del laboratorio de Fenómenos Robustos quienes fueron muy gentiles incluyéndome en las actividades, además de ayudarme con ideas siempre que necesite una segunda opinión o consejo y estoy seguro que seguiremos en contacto como colegas y amigos. En particular, agradecer a Pedro Aguilera por su ayuda en las mediciones experimentales y a Youri Soupart por las fructíferas discusiones teóricas.

En tercer lugar, agradecer a mi familia: Mis padres Juan Carlos y Carol quienes estuvieron presentes dándome su apoyo y motivándome a no rendirme con el magíster en un momento en el que no veía una salida y mis hermanos Juanca y Matías por sus palabras de aliento.

También, quiero agradecer a mis amigos personales, quienes siempre estuvieron ahí en cualquier problema, además de su grata compañía.

Finalmente, agradecer a mi pareja Karla por su amor incondicional y compañía, y que ha tenido paciencia y comprensión en todo este proceso.

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.0.1. Objetivos . . . . .	3
<b>2. Conceptos preliminares</b>	<b>4</b>
2.1. Sistemas variacionales . . . . .	4
2.2. Caos espaciotemporal . . . . .	5
2.3. Análisis del espectro de Lyapunov . . . . .	6
2.4. Defectos . . . . .	7
2.5. Transformada de Hilbert . . . . .	7
2.6. Densidad espectral . . . . .	8
2.7. Turbulencia . . . . .	9
2.8. Comportamientos tipo turbulencia . . . . .	10
<b>3. Experimento de la válvula de luz de cristal líquido</b>	<b>12</b>
3.1. Cristales líquidos . . . . .	13
3.1.1. Descripción de un cristal líquido y sus mesofases . . . . .	13
3.2. Configuración del experimento . . . . .	16
3.2.1. Componentes ópticos relevantes . . . . .	17
3.2.2. Válvula de retroinyección . . . . .	18
3.3. Experimento de patrones unidimensionales con comportamiento tipo turbulento	18
<b>4. Modelo de Turing-Swift-Hohenberg no variacional</b>	<b>23</b>

4.1.	Ecuación variacional . . . . .	23
4.1.1.	Análisis lineal . . . . .	24
4.2.	Relación con el LCLV . . . . .	26
4.3.	Propiedades dinámicas en una dimensión . . . . .	29
4.4.	Propiedades estadísticas del sistema: Dinámica de defectos tipo turbulencia .	31
4.4.1.	Condiciones de borde fijas . . . . .	35
4.4.2.	Simulación cuasi unidimensional . . . . .	37
<b>5.</b>	<b>Modelo de Coulet-IoOss para patrones unidimensionales</b>	<b>39</b>
5.1.	Ecuación de Ginzburg-Landau con coeficientes complejos . . . . .	39
5.1.1.	Comportamientos caóticos . . . . .	41
5.2.	Derivación del modelo: Incidencia de la fase . . . . .	44
5.3.	Nuevos estados en el estado tipo turbulencia de defectos . . . . .	45
<b>6.</b>	<b>Extensión del problema a dos dimensiones</b>	<b>54</b>
6.0.1.	Simulaciones de la ecuación Turing-Swift-Hohenberg no variacional en dos dimensiones . . . . .	54
6.0.2.	Experimento en dos dimensiones . . . . .	59
<b>7.</b>	<b>Conclusión</b>	<b>62</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>
	<b>Anexo</b>	<b>70</b>

# Índice de Ilustraciones

1.1.	Compendio de patrones complejos observados en diferentes escalas. De izquierda a derecha: Patrón observado en cloroplastos(Recuperado de Wikipedia: <a href="https://es.wikipedia.org/wiki/Cloroplasto##/media/Archivo:Plagiomnium_affine_laminazellen.jpeg">https://es.wikipedia.org/wiki/Cloroplasto##/media/Archivo:Plagiomnium_affine_laminazellen.jpeg</a> ), reacción química de Belousov-Zhabotinsky (Imagen de Arthur Winfree <a href="https://sciencephotogallery.com/featured/belousov-zhabotinsky.html">https://sciencephotogallery.com/featured/belousov-zhabotinsky.html</a> ), patrones en animales (Imagen superior recuperada de <a href="https://www.nationalgeographic.es/animales/leopardo">https://www.nationalgeographic.es/animales/leopardo</a> , Imagen inferior recuperada de <a href="https://www.reddit.com/r/ReefTank/comments/hr5frq/the_ornate_boxfish_aracana_ornata/">https://www.reddit.com/r/ReefTank/comments/hr5frq/the_ornate_boxfish_aracana_ornata/</a> ), patrones tipo rayas y <i>fairy circles</i> en Australia y Namibia respectivamente (Imagen superior recuperada de Meron (2019) [63], imagen inferior recuperada de <a href="https://www.smithsonianmag.com/smart-news/what-causes-namibias-fairy-circles-probably-not-termites-180951534/">https://www.smithsonianmag.com/smart-news/what-causes-namibias-fairy-circles-probably-not-termites-180951534/</a> ) y patrones observados en nubes tipo rayas y Mammatus (Imagen superior propia, imagen inferior recuperada de <a href="https://weather.com/sports-recreation/news/sky-watching-mammatus-20130227">https://weather.com/sports-recreation/news/sky-watching-mammatus-20130227</a> ) . . . . .	2
2.1.	Representación del movimiento de una partícula en un potencial. Imagen recuperada de <i>Force and potencial energy - Physics Libretexts</i> . <a href="https://phys.libretexts.org/">https://phys.libretexts.org/</a> . . . . .	5
2.2.	Patrón climático similar divergiendo uno respecto al otro observado por Lorenz. Recuperado de Gleick (1987)[41] . . . . .	5
2.3.	Mapeo conforme de la transformada de Hilbert desde una esfera al plano. Recuperado de Wietzke <i>et al.</i> (2008) [90] . . . . .	8
2.4.	Transición a la turbulencia en un fluido bajo la presencia de un cilindro circular. a) Flujo con $Re = 1.54$ . b) Flujo con $Re = 26$ . c) Flujo con $Re = 140$ . d) Flujo con $Re = 10000$ . Recuperado de Van Dyke (1982) [89]. . . . .	10
2.5.	Cascada de energía en un flujo turbulento. Recuperado de Zikanov (2010) [92].	10
2.6.	Diagramas espaciotemporales correspondientes a <b>a)</b> Modelo Bruselator <b>b)</b> Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky. Imagen a) recuperada de Kuramoto (1984) [54]. Imagen b) recuperada de <a href="https://chaosbook.org/extras/KSEproject/html/index.html">https://chaosbook.org/extras/KSEproject/html/index.html</a> . . . . .	11

2.7.	Espectro correspondiente a los datos espaciales estacionarios $\varphi(x, t)$ de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky. Recuperado de Kuramoto (1984) [54] . . . . .	11
3.1.	Observaciones de campo cercano (arriba) y lejano (abajo) (a-d) líneas (b-e) Hexágonos (c-f) Coexistencia de líneas y hexágonos. Imagen recuperada de Residori (2005) [75] . . . . .	12
3.2.	a) Forma con alta anisotropía de una molécula de cristal líquido junto su vector $\vec{n}(\vec{x}, t)$ que da cuenta de su orientación. b) Representación pedagógica de las diferentes mesofases observadas en un cristal líquido. Fase colestérica no posee capas. Imagen b) recuperada de <a href="https://www.dakenchem.com/liquid-crystal-types/">https://www.dakenchem.com/liquid-crystal-types/</a> . . . . .	13
3.3.	Deformaciones elásticas de la variable global $\vec{n}(\vec{x}, t)$ en un cristal líquido. <b>a)</b> Splay <b>b)</b> Bend y <b>c)</b> Twist (Representación pedagógica de la deformación). Recuperado de (Simoni F. 1997). [83] . . . . .	14
3.4.	<b>a)</b> Diagrama correspondiente al setup actual montado del LCLV en el laboratorio de fenómenos robustos (LAFER) <b>b)</b> Setup real del experimento. . . . .	17
3.5.	Imagen del experimento para valores $V_0 = 0$ V, $I_0 = 1.13$ mW/cm <sup>2</sup> y $L = 0$ cm en donde se aprecia un canal de dimensiones $l_x = 2550$ $\mu$ m, $l_y = 431$ $\mu$ m en un estado homogéneo. . . . .	18
3.6.	<b>a)</b> Patrón observado en el experimento con aumento de contraste para fines ilustrativos para valores $V_0 = 9.72$ V, $I_0 = 1.13$ mW/cm <sup>2</sup> y $L = -6$ cm en donde se aprecia un canal de dimensiones $l_x = 1440$ $\mu$ m, $l_y = 352$ $\mu$ m <b>b)</b> Perfil de intensidad correspondiente a la línea blanca segmentada de la imagen a) <b>c)</b> Evolución temporal del patrón experimental. En donde $k_0$ y $k^*$ corresponden a la longitud del patrón y a la longitud de una fluctuación del patrón más pequeña. . . . .	19
3.7.	<b>a)</b> Densidad espectral espacial de la intensidad de la luz $I(x, t)$ (azul), y los campos envolvente (rojo) y fase (verde). <b>b)</b> Densidad espectral temporal de la intensidad de la luz $I(x, t)$ (azul), y los campos envolvente (rojo) y fase (verde). Los puntos corresponden a los resultados experimentales mientras que la línea negra da cuenta de la ley de potencia obtenida. . . . .	20
3.8.	<b>a)</b> Exponentes espaciales de la función de estructura $S_p(r)$ en función del índice $p$ . <b>b)</b> Exponentes temporales de la función de estructura $S_p(\tau)$ en función del índice $p$ . . . . .	21
3.9.	Patrón observado en el experimento con aumento de contraste para fines ilustrativos para valores $V_0 = 8.48$ V, $I_0 = 0.98$ mW/cm <sup>2</sup> y $L = -6$ cm en donde se aprecia un canal de dimensiones $l_x = 2550$ $\mu$ m, $l_y = 431$ $\mu$ m. . . . .	21

3.10. <b>Segundo experimento: a)</b> Densidad espectral espacial de la intensidad de la luz $I(x, t)$ (azul), y los campos envolvente (rojo) y fase (verde). <b>b)</b> Densidad espectral temporal de la intensidad de la luz $I(x, t)$ (azul), y los campos envolvente (rojo) y fase (verde). Los puntos corresponden a los resultados experimentales mientras que la línea negra da cuenta de la ley de potencia obtenida. . . . .	22
4.1. Estados en la ecuación de TSH en una dimensión. Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. A la izquierda una estructura localizada junto al estado homogéneo para parámetros $\eta = -0.04$ , $\mu = -0.03$ , $\nu = 1.00$ . A la derecha un patrón estático para parámetros $\eta = 0.0$ , $\mu = -0.1$ , $\nu = 1.0$ . . . . .	24
4.2. <b>a)</b> Curva representando a $\sigma_k$ para su valor crítico. Notar como presenta simetría respecto a $k_c$ positivo y negativo dado por la relación (4.17). <b>b)</b> Zoom al máximo de la curva. Curva azul con $\mu = -0.5$ siendo $\sigma_k$ negativo para todo $k$ , por lo tanto, estado homogéneo estable. Curva roja con valor crítico de $\mu = \nu/2$ , justo antes de la inestabilidad. Curva verde con valor $\mu = -0.05$ mayor al valor crítico. . . . .	26
4.3. <b>a)</b> Función $\theta_0(V_0, I_0)$ , las regiones de color gris marcadas en el plano representan los nacimientos de la biestabilidad. <b>b)</b> Proyección de la curva al plano $V_0 - \theta_0$ . Recuperado de Clerc et al. (2017) . . . . .	28
4.4. Diagrama espaciotemporal del campo $u(x, t)$ para la ecuación (4.27), $\eta = -0.04$ , $\mu = -0.0921$ , $\nu = -1$ , $\kappa = -3.5$ , (a) $c = 4.5$ , (b) $c = 5.5$ y (c) $c = 10$ los que muestran estado patrón estático, oscilatorio y caos espaciotemporal respectivamente. Los gráficos inferiores muestran las series de tiempo de cada uno de estos estados. Recuperado de Clerc & Verschueren (2013) [24]	30
4.5. a) Diagrama de bifurcación y exponente de Lyapunov más elevado $\lambda_1$ en función del parámetro no variacional $c$ . b) Evolución de los cinco más elevados exponentes de Lyapunov. Parámetros de la ecuación: $\eta = -0.02$ , $\mu = -0.092$ , $\nu = -1.000$ y $\kappa = -3.000$ . Recuperado de Clerc & Verschueren (2013) [24] . .	30
4.6. Ruta cuasi-periódica al caos espacio-temporal en función del parámetro $c$ junto con los correspondientes espectros de potencia de la transformada de Fourier. Se puede apreciar la aparición de frecuencias inconmensurables distintas a los armónicos en el espectro del centro. Recuperado de Clerc & Verschueren (2013) [24] . . . . .	31
4.7. <b>a)</b> Evolución temporal de la simulación del modelo de Lifshitz no variacional para $u(x, t)$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. <b>b)</b> Perfil espacial del campo $u(x, t)$ . <b>c)</b> Densidad espectral $S_2(r)$ asociado a múltiples perfiles espaciales de $u(x, t)$ . Parámetros de la ecuación: $\eta = -0.04$ , $\mu = -0.092$ , $\nu = -1.000$ , $c = 10.4$ y $\kappa = -3.05$ . . . . .	32



4.8. <b>a)</b> Perfil espacial del campo diferencia $\zeta(x, t)$ <b>b)</b> Evolución temporal del patrón. Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . .	32
4.9. Densidad espectral $S_2(r)$ para el campo $\zeta(x, t)$ y los campos fase y envolvente de la misma obtenidos a partir de la señal analítica. . . . .	33
4.10. Densidad espectral $S_2(\tau)$ para el campo $\zeta(x, t)$ y los campos fase y envolvente de la misma obtenidos a partir de la señal analítica. . . . .	33
4.11. Densidad espectral correspondiente a la resta directa de los modos de Fourier correspondientes a $k_c$ . . . . .	34
4.12. Espectros de potencia de $u(x, t)$ luego de ser filtrar los máximos correspondientes al número de onda crítico y sus armónicos. <b>a)</b> Filtro de Butterworth <b>b)</b> Filtros elipsoidal y de Chebyshev respectivamente. . . . .	34
4.13. a) Densidad espectral de $u(x, t)$ para condiciones de borde fijas con un valor de $u_0 = 0.0$ . b) Densidad espectral luego de filtrar usando el filtro de Butterworth. Resultados obtenidos de simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . . . .	36
4.14. a) Densidad espectral de $u(x, t)$ para condiciones de borde fijas con un valor de $u_0 = 0.7$ . b) Densidad espectral luego de filtrar usando el filtro de Butterworth. Resultados obtenidos de simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . . . .	36
4.15. a) Densidad espectral de $u(x, t)$ para condiciones de borde fijas con un valor de $u_0 = 1.2$ . b) Densidad espectral luego de filtrar usando el filtro de Butterworth. Resultados obtenidos de simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . . . .	37
4.16. a) Evolución temporal de un perfil de intensidad obtenido de la simulación. Este perfil corresponde a un valor de $y_0 = 8$ . b) Simulación de la ecuación 4.28 para $u(x, y, t)$ en un canal con dimensiones $l_x = 256$ y $l_y = 16$ en unidades de código. Parámetros: $\eta = -0.33$ , $\mu = -0.52$ , $\nu = -2.00$ , $c = 14.0$ , $\kappa = -1.42$ y $u_0 = 0.25$ . Simulación numérica utilizando el método pseudoespectral combinado con Runge-Kutta orden cuatro en dos dimensiones espaciales. . .	38
4.17. Densidad espectral de $u(x, y_0, t)$ para una caja en dos dimensiones $l_x \gg l_y$ . . .	38
5.1. Diagrama de fase de la ecuación CCGLE en una dimensión. Recuperado de Chaté (1994) [19] . . . . .	41
5.2. Turbulencia de fase observada en $(\alpha, \beta) = (-1.5, 0.88)$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. a) Evolución temporal del patrón observado b) Perfil espacial c) Densidad espectral del módulo $ A $ . . .	42

5.3. Intermitencia espaciotemporal observada en $(\alpha, \beta) = (0, -3)$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. a) Evolución temporal del patrón observado b) Perfil espacial c) Densidad espectral del módulo $ A $ .	43
5.4. Turbulencia de defectos observada en $(\alpha, \beta) = (-1, 2)$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. a) Evolución temporal del patrón observado b) Perfil espacial c) Densidad espectral del módulo $ A $ . . .	43
5.5. Evolución temporal de $\phi(x, t)$ en función del parámetro $\delta$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . . . .	46
5.6. Evolución temporal y perfil asociado del estado $\gamma_1 = -1$ & $\gamma_2 = 1$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . . . .	47
5.7. Densidad espectral para las variables $ A(x, t) , u(x, t), \phi(x, t)$ y $\varphi(x, t)$ para parámetros $\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$ y $\varepsilon = 0.2$ . . . . .	48
5.8. Evolución temporal y perfil asociado al estado $\gamma_1 = -2$ & $\gamma_2 = 2$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . . . .	48
5.9. Densidad espectral para las variables $ A(x, t) , u(x, t), \phi(x, t)$ y $\varphi(x, t)$ para parámetros $\gamma_1 = -2, \gamma_2 = 2$ y $\varepsilon = 0.2$ . . . . .	49
5.10. Evolución temporal y perfil asociado al estado $\gamma_1 = 0$ & $\gamma_2 = 2$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . . . .	49
5.11. Densidad espectral para las variables $ A(x, t) , u(x, t), \phi(x, t)$ y $\varphi(x, t)$ para parámetros $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 2$ y $\varepsilon = 0.2$ . . . . .	50
5.12. Evolución temporal y perfil asociado al estado $\gamma_1 = 1$ & $\gamma_2 = 1$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . . . .	50
5.13. Densidad espectral para las variables $ A(x, t) , u(x, t), \phi(x, t)$ y $\varphi(x, t)$ para parámetros $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$ y $\varepsilon = 0.2$ . . . . .	51
5.14. Evolución temporal y perfil asociado al estado $\gamma_1 = -2$ & $\gamma_2 = -2$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . . . .	51
5.15. Densidad espectral para las variables $ A(x, t) , u(x, t), \phi(x, t)$ y $\varphi(x, t)$ para parámetros $\gamma_1 = -2, \gamma_2 = -2$ y $\varepsilon = 0.2$ . . . . .	51
5.16. Evolución temporal y perfil asociado al estado $\gamma_1 = 2$ & $\gamma_2 = 0$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . . . .	52
5.17. Evolución temporal y perfil asociado al estado $\gamma_1 = 2$ & $\gamma_2 = -2$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. . . . .	52
5.18. Densidad espectral para las variables $ A(x, t) , u(x, t), \phi(x, t)$ y $\varphi(x, t)$ para parámetros $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 0$ y $\varepsilon = 0.2$ . . . . .	52

5.19. Densidad espectral para las variables $ A(x, t) , u(x, t), \phi(x, t)$ y $\varphi(x, t)$ para parámetros $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = -2$ y $\varepsilon = 0.2$ . . . . .	53
6.1. <b>a)</b> Diagrama de fase para la ecuación TSH en dos dimensiones en donde la zona blanca interior corresponde a un patrón laberíntico, las zonas de líneas intermitentes a un patrón circular y las líneas continuas a una zona de coexistencia con un patrón circular alargado. Recuperado de Bordeau & Clerc (2015) [15] <b>b)</b> Estado base variacional de tipo patrón circular en la ecuación TSH en dos dimensiones con parámetros $\eta = -0.29, \nu = -2, \mu = 0.13, \kappa = 0, c = 0$ . Simulación numérica utilizando el método pseudoespectral junto con Runge-Kutta orden cuatro en dos dimensiones espaciales. . . . .	55
6.2. Estados en la ecuación TSH no variacional en dos dimensiones con parámetros $\eta = -0.21, \mu = 0.1, \nu = -1.6, c = 0$ variando el parámetro $\kappa$ . <b>a)</b> Estado con $\kappa = -2.6$ <b>b)</b> Estado con $\kappa = -2.9$ <b>c)</b> Estado con $\kappa = -3.2$ . Simulación numérica utilizando el método pseudoespectral junto con Runge-Kutta orden cuatro en dos dimensiones espaciales. . . . .	55
6.3. Simulación de estados en la ecuación TSH no variacional en dos dimensiones a través del método pseudoespectral junto al método de Runge-Kutta orden cuatro con parámetros $\eta = -0.25, \mu = 0.17, \nu = -1.6, \kappa = -0.36$ variando el parámetro $c$ . <b>a)</b> Estado base con $c = 0.0$ <b>b)</b> $c = 3.0$ <b>c)</b> $c = 6.1$ <b>d)</b> $c = 15.0$ . . . . .	56
6.4. Transformada de Fourier en dos dimensiones del estado $\eta = -0.25, \mu = 0.17, \nu = -1.6, \kappa = -0.36$ y $c = 6.1$ representado en términos de $\log(F(u) + 1)$ para mejor visualización. En la esquina superior derecha se presenta un zoom del centro de la transformada de Fourier. . . . .	57
6.5. Evolución temporal de un corte en la grilla bidimensional lo que da como resultado un perfil unidimensional. Simulación numérica utilizando el método pseudoespectral junto con Runge-Kutta orden cuatro en dos dimensiones espaciales. . . . .	57
6.6. <b>Estado complejo:</b> $\eta = -0.25, \mu = 0.17, \nu = -1.6, \kappa = -0.36, c = 15$ . <b>a)</b> Transformada de Fourier en dos dimensiones representada como $\log(F(u) + 1)$ para mejor visualización donde se observa dinámica en un amplio rango de números de onda. <b>b)</b> Densidad espectral espacial en la variable polar $\ k\ $ . . . . .	58
6.7. Densidad espectral temporal correspondiente al estado complejo de parámetros $\eta = -0.25, \mu = 0.17, \nu = -1.6, \kappa = -0.36, c = 15$ . . . . .	59
6.8. Transición en dos dimensiones en función del largo de difracción libre $L$ para parámetros $V_0 = 8.48V$ e $I_0 = 0.41 mW/cm^2$ . <b>a)</b> Estado homogéneo en el dominio completo visto por la cámara para $L = 0$ cm <b>b)</b> Estado de frentes formados por patrones en el Dominio completo para $L = -3$ cm <b>c)</b> Estado complejo de destrucción/creación de defectos en un dominio reducido respecto al original formado por mayoritariamente patrones circulares para $L = -6$ cm. . . . .	60

- 6.9. Espectros de potencia para la intensidad de la luz medida en los datos experimentales obtenidos con  $L = -6$  cm **a)** Densidad espectral radial de la transformada de Fourier en dos dimensiones **b)** Densidad espectral temporal. 60

# Capítulo 1

## Introducción

En la naturaleza es posible observar una gran variedad de fenómenos, los cuales desde siempre han cautivado la capacidad de sorpresa del ser humano llevándolo a sugerir diferentes creencias e ideas como forma de explicación. Desde el punto de vista de las ciencias físicas, se realizó un intento, con mucho éxito, por explicar algunos de estos sucesos en términos de una tendencia al equilibrio. De esta manera, un sistema dado, se considerará en equilibrio si su comportamiento se mantiene constante para un tiempo infinitamente largo, y además, este será un equilibrio estable si es que bajo cualquier perturbación o fluctuación, el sistema es capaz de mantenerse en su estado sin ser afectado. Sin embargo, el Universo nos presenta no sólo fenómenos en equilibrio, sino una diversidad entre objetos que se encuentran en este y aquellos que no. Así, tenemos objetos altamente organizados, lejos del equilibrio, como la vida, y también objetos que están en equilibrio, y por lo tanto son desorganizados, lo que equivale a la imposibilidad de una sólo descripción universal basada en el principio del equilibrio, o como lo llamaremos en esta tesis, variacional. Esto no significa en ningún caso que Newton esté equivocado, sino que lo que nos decía se aplicaba a situaciones particularmente simples como el movimiento de un péndulo o el de la Tierra alrededor del Sol y corresponden por lo tanto a simplificaciones.

Hoy estamos convencidos de que la mayoría de fenómenos complejos que encontramos sólo puede producirse lejos del equilibrio porque lejos de este ya no existe principio variacional, y entonces no habrá un estado ideal hacia el cual el sistema debe necesariamente tender, sino nos acercamos a un régimen de perturbaciones y bifurcaciones, en donde surgen naturalmente nuevas soluciones, las cuales llamaremos estructuras disipativas, idea introducida por Prigogine [72]. Este régimen corresponderá al de interacciones complejas, las cuales son estudiadas y modeladas bajo el lente de la física no lineal.

En este contexto de no linealidad es donde la formación de patrones complejos emerge como una nueva solución en los sistemas lejos del equilibrio [75]. Ejemplos en nuestro diario vivir existen en diferentes escalas. Desde patrones presentes en reacciones químicas, pasando por los pelajes de diferentes animales y patrones vegetales en el desierto hasta las estructuras formadas por las nubes bajo diferentes condiciones climáticas [47, 61, 35, 76]. Estos patrones presentan características complejas e impredecibles que los vuelven imposibles de describir en términos simples y deterministas, lo que nos lleva a estudiar la emergencia de estos en

sistemas que puedan dar cuenta de la rica complejidad que presentan estas estructuras.

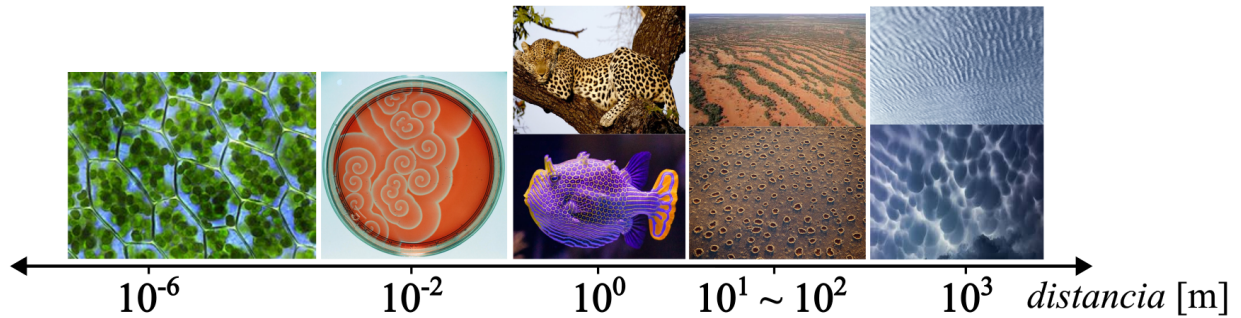


Figura 1.1: Compendio de patrones complejos observados en diferentes escalas. De izquierda a derecha: Patrón observado en cloroplastos (Recuperado de Wikipedia: [https://es.wikipedia.org/wiki/Cloroplasto#/media/Archivo:Plagiomnium\\_affine\\_laminazellen.jpeg](https://es.wikipedia.org/wiki/Cloroplasto#/media/Archivo:Plagiomnium_affine_laminazellen.jpeg)), reacción química de Belousov-Zhabotinsky (Imagen de Arthur Winfree <https://sciencephotogallery.com/featured/belousov-zhabotinsky-reaction-in-dish-prof-arthur-winfreescience-photo-library.html>), patrones en animales (Imagen superior recuperada de <https://www.nationalgeographic.es/animales/leopardo>, Imagen inferior recuperada de [https://www.reddit.com/r/ReefTank/comments/hr5frq/the\\_ornate\\_boxfish\\_aracana\\_ornata/](https://www.reddit.com/r/ReefTank/comments/hr5frq/the_ornate_boxfish_aracana_ornata/)), patrones tipo rayas y *fairy circles* en Australia y Namibia respectivamente (Imagen superior recuperada de Meron (2019) [63], imagen inferior recuperada de <https://www.smithsonianmag.com/smart-news/what-causes-namibias-fairy-circles-probably-not-termites-180951534/>) y patrones observados en nubes tipo rayas y Mammatus (Imagen superior propia, imagen inferior recuperada de <https://weather.com/sports-recreation/news/sky-watching-mammatus-20130227>)

Se describirá un experimento basado en una celda de cristal líquido nemático con retroinyección óptica en donde se utilizará un campo eléctrico para alinear las moléculas del cristal líquido en una dirección determinada. Junto con ello, un haz de luz proveniente de un láser de Helio-Neón incidirá en la celda de cristal líquido polarizándose de una determinada manera dependiendo de los índices de refracción presentes en el cristal, los cuales son función de la organización molecular o director promedio del cristal. Para finalizar, se suma una válvula de retroinyección, la cual entregará un campo eléctrico adicional dependiente de la luz incidente. En síntesis, este experimento se conoce como el *experimento de la válvula óptica de cristal líquido* (LCLV), el cual puede exhibir una gran variedad de fenómenos robustos fuera del equilibrio. Al cambiar los parámetros de retroinyección de la luz en el experimento es posible agregar dinámica no variacional al sistema, la cual ha mostrado generar dinámica permanente, estados caóticos y estructuras localizadas. Por otro lado, los resultados preliminares sugieren la existencia de una dinámica caótica espacio temporal, la cual aún no ha sido analizada en términos estadísticos para categorizarla según el criterio propuesto para la ecuación de Ginzburg-Landau con coeficientes complejos por Chaté (1994) [19, 20].

La incidencia de esta dinámica no variacional relacionada a la variación de la válvula de

retroinyección de la luz ha sido estudiado en el contexto del experimento [75, 6, 22] y ha sido derivada una ecuación tipo forma normal de Lifshitz desde la ecuación original que modela la dinámica del experimento. Esta forma normal presenta una región de caos espacio temporal en su versión unidimensional [24]. Sin embargo, no se conoce su comportamiento estadístico en una dimensión ni tampoco sus propiedades generales en dos dimensiones.

### 1.0.1. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo de tesis es estudiar y caracterizar los patrones espacio temporales en una válvula óptica fuera del equilibrio, desde perspectivas teóricas, experimentales y numéricas.

- Definir, desde el punto de vista físico y matemático, el patrón espacio temporal, que nos permita caracterizarlo para estudiarlo y poder aplicar el conocimiento adquirido a otros contextos físicos.
- Participar activamente en conjunto con otros investigadores en formación en el estudio experimental de patrones complejos observados en la válvula óptica con retro inyección.
- Caracterizar estadística, teórica y experimentalmente, leyes de comportamientos tales como leyes de espectro de modos, caracterización de los factores de estructura, los cuales permiten distinguir intermitencia espacio temporal o auto-similitud [38]. Identificar el origen de estas leyes y caracterizarlas como función de los parámetros físicos.
- Caracterizar teórica y experimentalmente la dinámica de los comportamientos complejos de los patrones espacio temporal por medio de la determinación del espectro de Lyapunov, entropía de Sinai-Komogorov, dimensión de Kaplan-York y espectros temporales.
- Caracterizar la dinámica de defectos de los patrones y modos espaciales.
- Caracterizar los mecanismos de emergencia o rutas de patrones complejos espacio temporales. Verificar estos mecanismos experimentales.

# Capítulo 2

## Conceptos preliminares

### 2.1. Sistemas variacionales

La forma más intuitiva de entender un sistema físico simple de la forma  $\dot{x} = f(x)$ , es a través de definir una cantidad escalar llamada energía potencial  $V(x)$ . Gráficamente podemos entenderlo, con la imagen de una bolita deslizando a través de un riel, la cual siempre tenderá el movimiento a las partes del riel que se encuentran a menor altura, siendo imposible para la bolita acceder a las zonas mayor altura sino es a través de la adquisición de velocidad. De esta manera, podemos escribir una ecuación variacional para el movimiento de la bolita

$$\dot{x} = -\frac{dV}{dx}. \quad (2.1)$$

En donde se usó la convención estándar del signo negativo para dar cuenta de que la bolita siempre "va hacia abajo" mientras ocurre el movimiento. Como la variable  $x$  es dependiente del tiempo, es posible usar la regla de la cadena de la derivación para obtener

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt}. \quad (2.2)$$

De esta forma, y luego de reemplazar la relación  $\dot{x} = -\frac{dV}{dx}$ , se obtendrá

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0 \quad (2.3)$$

Por lo tanto,  $V(t)$  siempre decae a través de la trayectoria, y la partícula se moverá de manera de llegar a zonas de potencial más bajo. Sin embargo, si la partícula encuentra un punto en donde  $dV/dx = 0$ , entonces  $V$  se mantiene constante y llamaremos a estos puntos equilibrios del sistema. Ahora, estos puntos en la noción pedagógica de la bolita en un riel serán inestables si fueran máximos de la curva del riel, y estables, y por lo tanto puntos fijos del sistema, si corresponden a mínimos en la curva del riel (potencial).



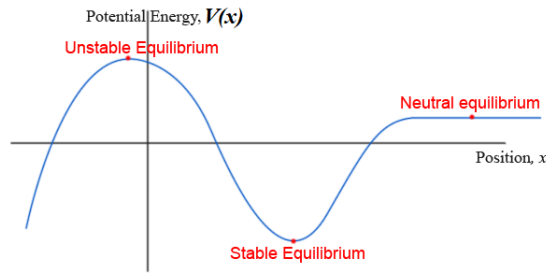


Figura 2.1: Representación del movimiento de una partícula en un potencial. Imagen recuperada de *Force and potencial energy - Physics Libretexts*. <https://phys.libretexts.org/>

## 2.2. Caos espaciotemporal

Un sistema determinista caracterizado por una ecuación diferencial puede llegar a presentar una dinámica errática y persistentemente irregular. Esta dinámica, a la cual llamaremos **caos**, estará caracterizada por una sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales [58].

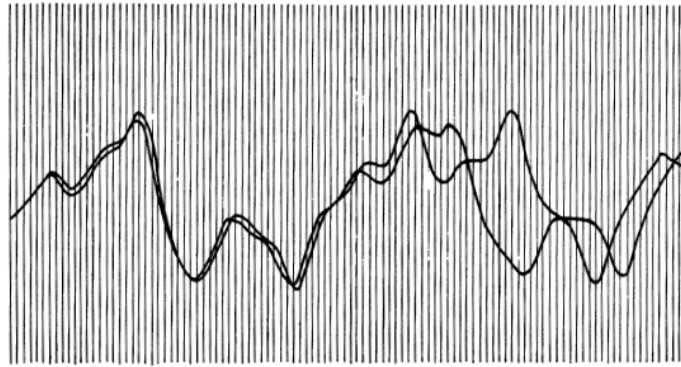


Figura 2.2: Patrón climático similar divergiendo uno respecto al otro observado por Lorenz. Recuperado de Gleick (1987)[41]

Estos sistemas caóticos pueden ser representados por un pequeño número de grados de libertad como el mapa logístico  $u_{t+1} = ru_t(1 - u_t)$  o como el modelo de Lorenz [58], el cual presenta términos no lineales para tres ecuaciones diferenciales acopladas. Recientemente, sin embargo, se han estudiado sistemas caóticos que no pueden ser reducidos a un modelo con pocos grados de libertad [65]. Estos sistemas los llamaremos extendidos, y por lo tanto, su descripción requiere de un gran número de elementos caóticos distribuidos en el espacio. De esta forma, esta nueva descripción de sistemas extendidos la llamaremos **caos espaciotemporal**.

## 2.3. Análisis del espectro de Lyapunov

Al observar un fenómeno aparentemente complejo, la primera impresión es invocar la presencia de caos aunque en realidad no sea el caso. Tal es el ejemplo de (poner caso de topicos de fisica no lineal). En consecuencia, es necesario introducir una medida cuantitativa del caos y complejidad de un sistema mas allá de la mera impresión humana, lo que se traducirá en el análisis del espectro de Lyapunov, la dimensión de Yorke-Kaplan, entropía de Kolmogorov-Sinai.

Si consideramos un sistema dinámico que presenta comportamiento caótico, entonces sus trayectorias desde dos condiciones iniciales separadas por  $\delta Z_0$ , se separarán exponencialmente acorde a un tiempo característico llamado tiempo de Lyapunov, resultando para un tiempo  $t$ , una separación igual a  $\delta Z(t) = e^{\lambda t} \delta Z_0$ , en donde  $\lambda$  corresponde al primer exponente de Lyapunov. Formalmente, este puede escribirse como:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta Z_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta Z(t)}{\delta Z_0} \quad (2.4)$$

Si el sistema no es caótico y presenta un atractor, entonces  $\lambda < 0$ . Así mismo, si el sistema presenta un comportamiento periódico, entonces  $\lambda = 0$ . Mientras que si  $\lambda > 0$ , el sistema presenta un atractor extraño y las trayectorias divergirán exponencialmente. Esta evolución exponencial de las trayectorias estará caracterizada por  $N$  exponentes asociados a los  $N$  grados de libertad del sistema, lo que en el caso de un sistema extendido, como revisamos en el apartado anterior, al presentar estos infinitos grados de libertad espaciales conllevará un infinito número de exponentes, lo que se conoce como **espectro de Lyapunov** [85, 70].

Otro punto a considerar es la dimensión de Yorke-Kaplan, la que da cuenta de la dimensión (fractal en el caso del caos) del sistema dinámico. La conjetura de Yorke-Kaplan [51] señala que la dimensión del sistema esta relacionada con el espectro de Lyapunov como:

$$D_{YK} = j + \frac{\sum_{i=0}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}. \quad (2.5)$$

Donde  $\sum \lambda_j \approx 0$ . Luego, se marcará una diferencia entre el caos temporal de baja dimensión y el caos espacio-temporal en la manera en que la dimensión de Yorke-Kaplan se comporta cuando el tamaño del sistema aumenta es diferente, lo que se conoce como una cantidad extensiva. Por un lado, si la dimensión de Yorke-Kaplan es constante *vs* el tamaño del sistema, estamos en presencia de caos temporal de baja dimensionalidad. En cambio si  $D_{YK}$ , y por lo tanto el espectro de Lyapunov, escala junto al tamaño del sistema entonces el sistema presenta caos espacio-temporal. En esta tesis se estudiará la emergencia del caos espacio-temporal en un sistema óptico extendido y no el caos temporal de baja dimensionalidad.

## 2.4. Defectos

En el contexto del experimento de la válvula y el estudio teórico de las propiedades de este, un defecto corresponderá a una imperfección o irregularidad en el patrón distintivo del sistema [30]. La aparición de estas imperfecciones da cuenta de una dinámica compleja y con nuevas reglas.

Los defectos para dimensiones  $D \geq 1$ , presentan propiedades topológicas, ya que dan cuenta de una discontinuidad en el campo de ángulos de un espacio dado, y presentan una carga topológica, la cual para destruir un defecto topológico debe encontrarse a otro con una carga opuesta. De esta manera, los defectos son soluciones muy robustas al presentar esta protección de carga.

En el contexto del grueso del trabajo con campos complejos de esta tesis nos enfrentamos a defectos no topológicos. Estos defectos corresponden a un agujero de valor nulo en el sistema. Por otro lado, estos defectos pueden crearse y destruirse no sólo mediante la interacción de un par sino también a través de la misma dinámica presente en el sistema, lo que dará paso a una dinámica dominada por la creación/anihilación de estos [56, 66].

## 2.5. Transformada de Hilbert

Al enfrentarse a una ecuación diferencial con términos no lineales de la forma  $\dot{u} = f(u)$ , en donde  $u$  corresponde a una variable dependiente del tiempo y del espacio, mientras que  $f$  es algún operador no lineal. Vemos que no es posible determinar una solución analítica para  $u(x, t)$ , además de muchas veces ni siquiera ser capaces de resolver en ningún caso para la ecuación de  $u$ . Debido a esta problemática es que surge la necesidad de separar las dinámicas de la variable, de tal forma de reescribir la ecuación en términos de su envolvente  $A$  y su fase  $\phi$ :

$$u(x, t) = A(x, t)e^{\phi} \quad (2.6)$$

Por consiguiente, ahora existirá una ecuación correspondiente para la envolvente y una para la fase, estando separadas su evolución temporal aunque con la posibilidad de estar acopladas.

En este contexto dado es donde surge la utilidad y uso de la transformada de Hilbert, la que permite hacer el mismo análisis teórico hecho en (2.3) en las simulaciones numéricas y datos experimentales obtenidos. Formalmente, la transformada de Hilbert corresponde a una convolución (operación entre dos funciones) definida por :

$$H(u)(t) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (2.7)$$

En donde  $p.v.$  corresponde al valor principal de Cauchy para una integral impropia [50] y  $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ .

La transformada de Hilbert, de la forma en la que se presenta en (2.4), no está bien definida matemáticamente para señales en dos dimensiones, por lo que para el análisis de datos en dos dimensiones  $u(x, y, t)$  de la envolvente y la fase nos encontramos con un problema de

implementación. Afortunadamente, *Wietzke et al.* (2008) [90] desarrolló un algoritmo para mapear la transformada de Hilbert bien definida desde una esfera un plano, lo que soluciona el problema en dos dimensiones. Aunque el grueso de este trabajo de tesis fue en una dimensión,

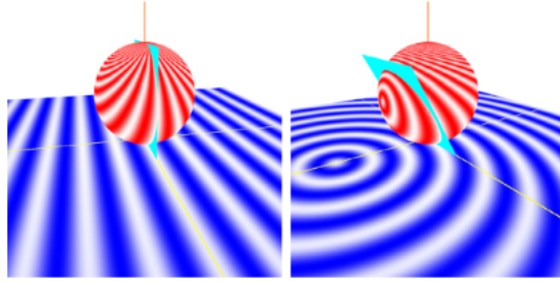


Figura 2.3: Mapeo conforme de la transformada de Hilbert desde una esfera al plano. Recuperado de *Wietzke et al.*(2008) [90]

en el capítulo 6 se abordará los avances en el desarrollo de un programa computacional elaborado en base al algoritmo de *Wietzke et al.*[90] que soluciona esta problemática para datos en dos dimensiones.

## 2.6. Densidad espectral

En el contexto de análisis de señales, surge el concepto de densidad espectral  $S_2(\tau)$  como una forma de cuantificar la distribución de energía por unidad de tiempo en cada frecuencia  $\omega$  de la señal. Usando la transformada de Fourier es posible acceder al espacio de frecuencias, en donde el promedio de la contribución de cada una de estas corresponderá al espectro. De esta manera, es posible definir espectros para los diferentes momentos  $E(y(t)^r)$  de grado  $r$ . En particular, es de interés analizar la densidad espectral asociado al momento de grado dos, ya que la energía de un sistema en análisis de señales se define en función de este como [67]

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt. \quad (2.8)$$

La cual esta relacionada con la energía física de un sistema real como

$$E = \frac{E_s}{Z}. \quad (2.9)$$

En donde  $Z$  corresponde a la magnitud en unidades apropiadas.

Consideremos  $y(t)$  como los datos deterministas en unidades de tiempo discreto. Comúnmente,  $y(t)$  puede ser obtenida discretizando una señal de tiempo continua. De esta manera, sin perdida de generalidad se considera que  $t = t \cdot T_s$ , en donde  $T_s$  será el intervalo de discretización. Asumiendo las condiciones de existencia y convergencia de la señal, es posible definirle su transformada de Fourier temporal discreta (DTFT) [86]

$$Y(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t} \quad (2.10)$$

En donde  $Y(\omega)$  corresponde a la DTFT, la cual se puede usar para calcular la densidad espectral dada por

$$S_2(\tau) = |Y(\omega)|^2 \quad (2.11)$$

Esta cantidad, a pesar de vivir en el espacio de frecuencias  $\omega$  será equivalente a obtener la contribución de orden dos de los datos  $y(t)$ , la cual se relaciona a través del teorema de Parseval [67].

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |y(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_2(\tau) d\omega \quad (2.12)$$

Finalmente, al considerar un número de datos  $N$ , la densidad espectral a calcular finalmente será

$$S_2(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N y(t) e^{-i\omega t} \right|^2 \right\} \quad (2.13)$$

En donde E representa el promedio en  $N$  mediciones. La fórmula anterior considera ciertas asunciones para su validez. En particular, la discretización debe ser lo suficientemente espaciada como para que no exista correlación entre las diferentes mediciones de  $y(t)$ , y por lo tanto, la correlación expresada a través de los términos no diagonales en la matriz de covarianza del sistema decaiga lo suficientemente rápido [86] para que no aparezca en la fórmula anterior.

## 2.7. Turbulencia

En el contexto de la mecánica de fluidos surge el concepto de turbulencia al observar un flujo irregular, a simple vista complejo y que muchas veces presenta estructuras coherentes en su composición llamadas vórtices. Para definir una caracterización apropiada y fidedigna de este estado, es posible definir el número de Reynolds ( $Re = \frac{\rho u L}{\mu}$ ) [38, 37], el cual relaciona las fuerzas inerciales con las viscosas que actúan sobre el fluido y que puede ser usado como parámetro de orden para diferenciar entre un fluido en estado no turbulento (laminar) y uno turbulento. Concretamente, para un  $Re$  bajo el fluido será no turbulento mientras que un  $Re$  dará paso a un regimen turbulento.

Otro punto a tener en consideración en la turbulencia es la existencia de de una cascada en el espectro de energía  $S_2(r)$ . Esto significa que existen dos escalas: Una de inyección y otra de disipación de energía. Estas escalas estarán unidas mediante una escala intermedia que permitirá el flujo de energía desde la escala de inyección hasta la de disipación. Esta unión entre escalas se produce a través de la formación, deformación y aniquilación de los vórtices. Estos aparecen en distintas escalas espaciales en el fluido y actuaran como intermediarios en el traspaso de energía hasta la escala disipativa, la cual es suficientemente pequeña como para que la viscosidad del fluido empiece a disipar la energía en forma de calor. De aquí surge la famosa caracterización de la densidad espectral  $S_2(r)$  de Kolmogorov [38], el cual entrega una ley de potencia  $k^{-5/3}$ , lo que da cuenta de la cascada de energía.

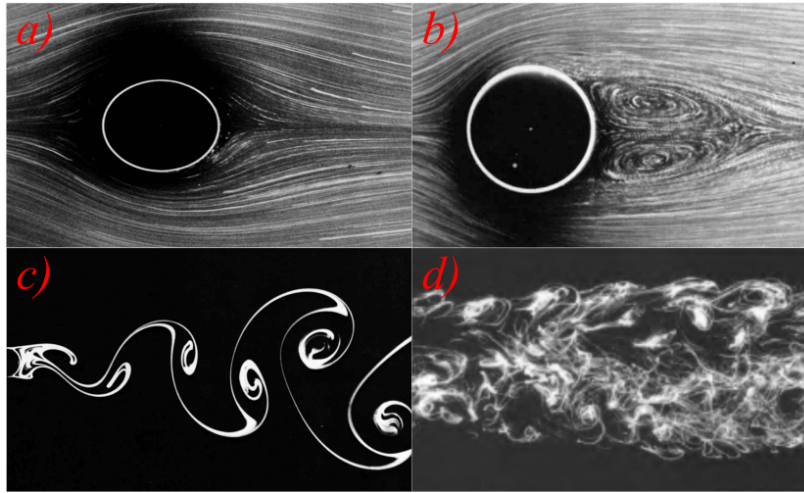


Figura 2.4: Transición a la turbulencia en un fluido bajo la presencia de un cilindro circular. a) Flujo con  $Re = 1.54$ . b) Flujo con  $Re = 26$ . c) Flujo con  $Re = 140$ . d) Flujo con  $Re = 10000$ . Recuperado de Van Dyke (1982) [89].

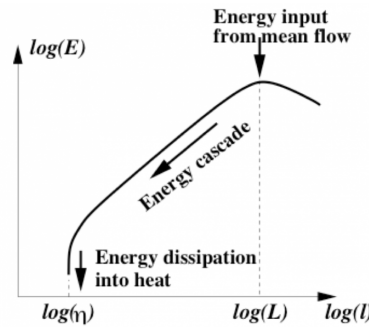


Figura 2.5: Cascada de energía en un flujo turbulento. Recuperado de Zikanov (2010) [92].

## 2.8. Comportamientos tipo turbulencia

Los sistemas extendidos representados a través del campo  $u(x, t)$  pueden presentar caos espaciotemporal al considerar en su dinámica términos no variacionales, los que además son no lineales. Estadísticamente, la presencia de soluciones caóticas espaciotemporales conllevarán la aparición en el campo de un comportamiento tipo turbulento. Este comportamiento presentará cualidades de la turbulencia clásica de fluidos como la sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales, presencia de caos y un acoplamiento de diferentes escalas. Sin embargo, a diferencia del fenómeno observado en fluidos, en sistemas dinámicos extendidos de manera general, la formación de estructuras en diferentes escalas dependerá de la ecuación parcial diferencial a estudiar. De esta manera, surgen comportamientos emblemáticos en el contexto de los sistemas extendidos tales como turbulencia de fase [54], turbulencia de amplitud o mediada por defectos [56] e intermitencia [20], además de la observación de fenómenos turbulentos en otros contextos como turbulencia activa [5] y turbulencia en mercados financieros [39].

Se debe pensar este comportamiento tipo turbulencia bajo un lente de patrones caóticos

espatiotemporales recurrentes, los cuales aparecen y desaparecen. De esta manera, aunque el sistema tipo turbulento evolucione, a priori, desordenadamente, se observará un patrón familiar en este desorden. La dinámica tipo turbulenta será entonces un recorrido por los diferentes patrones caóticos espatiotemporales permitidos. Estos sistemas tipo turbulentos

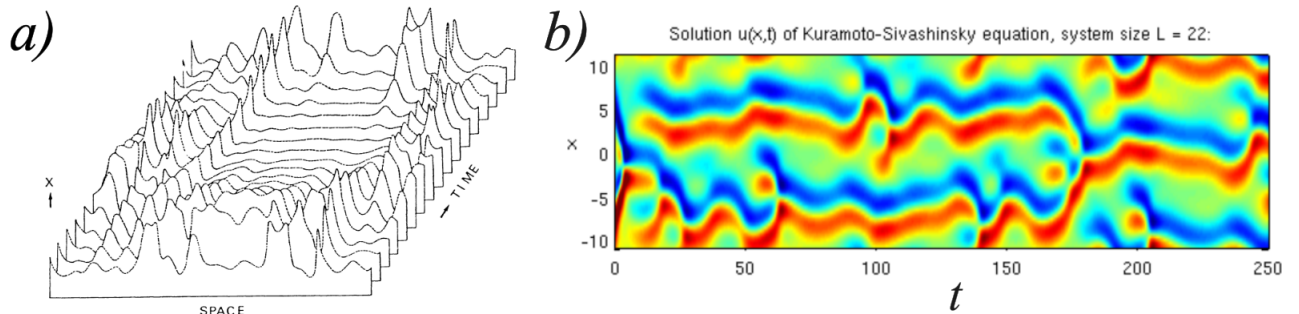


Figura 2.6: Diagramas espatiotemporales correspondientes a **a)** Modelo Bruselator **b)** Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky. Imagen a) recuperada de Kuramoto (1984) [54]. Imagen b) recuperada de <https://chaosbook.org/extras/KSEproject/html/index.html>

son caracterizados al igual que la turbulencia en fluidos por su densidad espectral, el cual acoplará diferentes escalas, con la diferencia de que las escalas que se acoplan serán de una década o poco más, debido a la permanencia de los modos acoplados en una escala específica. Kuramoto fue pionero en calcular este espectro para datos espaciales de la ecuación Kuramoto-Sivashinsky, obteniendo una relación para  $k$  pequeños de  $k^{-2}$ .

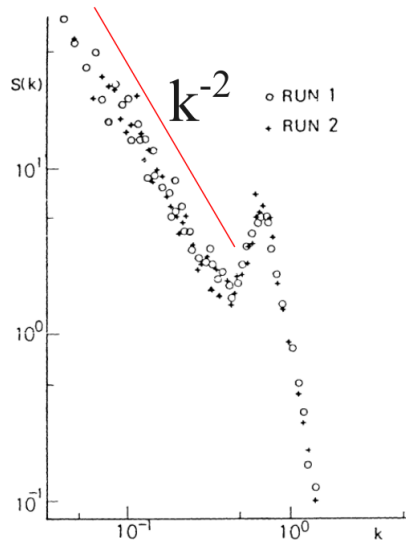


Figura 2.7: Espectro correspondiente a los datos espaciales estacionarios  $\varphi(x, t)$  de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky. Recuperado de Kuramoto (1984) [54]

## Capítulo 3

# Experimento de la válvula de luz de cristal líquido

El experimento de la válvula de luz de cristal líquido (LCLV en su sigla en inglés) es un montaje que funciona gracias a las propiedades ópticas de los cristales líquidos nemáticos, permitiendo la posibilidad de observar una vasta gama de fenómenos en dos dimensiones tales como patrones de diferentes hexagonales y laberínticos, caos espaciotemporal y estructuras localizadas, entre otros [75]. Comenzaremos por una introducción a los cristales líquidos, pieza fundamental en el experimento. Después, en el transcurso de este capítulo se detallará el mecanismo de funcionamiento del LCLV. Luego, se presentará el problema experimental de interés para este trabajo de investigación y su ejecución, finalizando con la presentación de los resultados experimentales obtenidos.

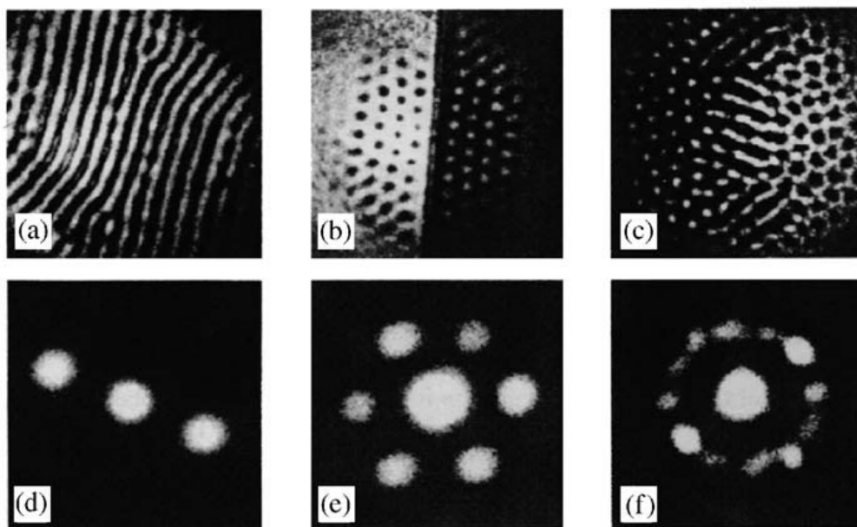


Figura 3.1: Observaciones de campo cercano (arriba) y lejano (abajo) (a-d) líneas (b-e) Hexágonos (c-f) Coexistencia de líneas y hexágonos. Imagen recuperada de Residori (2005) [75]



## 3.1. Cristales líquidos

Dependiendo del valor de diferentes parámetros como volumen, temperatura e interacciones la materia macroscópica se constituye en *estados de agregación*. Algunos ejemplos clásicos serían sólido, líquido y gaseoso pero pueden existir otros exóticos como el plasma y el condensado de Bose-Einstein.

En particular, cuando nos referimos a un cristal estamos haciendo referencia a un caso particular del estado sólido, en el cual las moléculas que lo conforman se encuentran ordenadas espacialmente en una configuración periódica, además de no poseer libertad traslacional. Por el contrario, un líquido no posee orden de ningún tipo y sus moléculas que lo conforman tienen libertad de movimiento. De esta manera, un cristal líquido será un estado intermedio entre estos dos estados con características de cristales y líquidos: Posee un orden en su orientación pero sólo posee un orden en sus posiciones en corto alcance (libertad de movimiento) [73, 18, 68].

### 3.1.1. Descripción de un cristal líquido y sus mesofases

Las moléculas que componen un cristal líquido están caracterizadas por tener una forma que presenta una elevada anisotropía, lo que se traduce esquemáticamente en unas moléculas con forma de varilla o grano de arroz aunque también existen otras formas de moléculas de cristal líquido [71, 18, 73, 68]. Cabe señalar que dependiendo de la cantidad de orden que existe en el sistema (el cual puede variar a través de la temperatura o la composición del cristal líquido) ya sea imponiendo orden en alguna de las dimensiones espaciales o entregándole un grado de libertad traslacional es posible observar subfases en el cristal líquido, las que se conocen como mesofases en la bibliografía [73, 18, 68]. En relación a las mesofases descritas se conoce

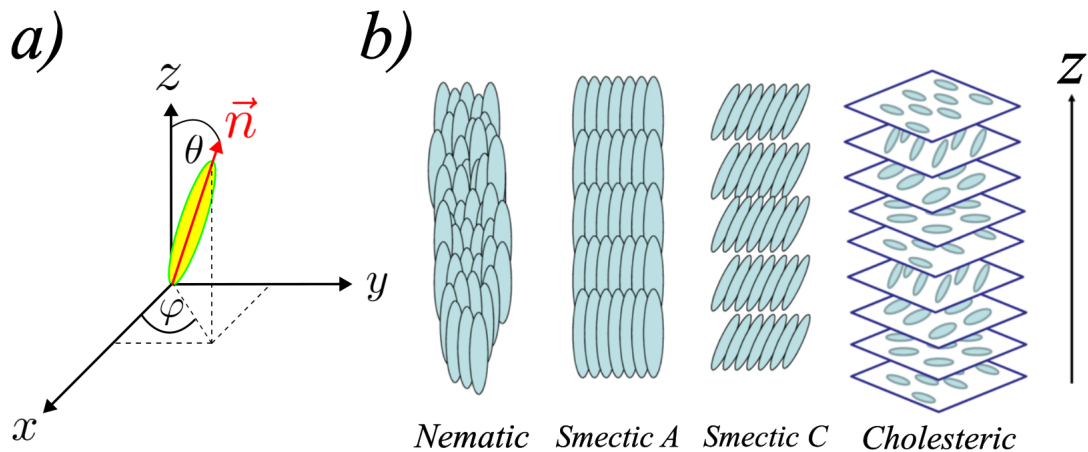


Figura 3.2: a) Forma con alta anisotropía de una molécula de cristal líquido junto su vector  $\vec{n}(\vec{x}, t)$  que da cuenta de su orientación. b) Representación pedagógica de las diferentes mesofases observadas en un cristal líquido. Fase colestérica no posee capas. Imagen b) recuperada de <https://www.dakenchem.com/liquid-crystal-types/>.

la existencia de las fases nemática, la cual está caracterizada por su grado de libertad en la

posición de las moléculas pero con un orden de corto alcance en su dirección de orientación general. Por otro lado, existe una fase esméctica, la cual además de un orden en su dirección de orientación general posee un orden periódico en su posición en forma de capas. Finalmente, existe la fase colestérica, la cual es localmente igual a la nemática, esto es, los centros de masa de las moléculas están completamente desordenados, mientras que sus orientaciones se concentran preferentemente en torno a un eje marcado por un director. Sin embargo, en esta fase  $\vec{n}$  no es constante en el espacio, como ocurre en la fase nemática; sino que adopta una configuración helicoidal.

Lo dicho hasta aquí supone la existencia de una variable macroscópica que de cuenta de la orientación de las moléculas del cristal para ser capaces de dar una descripción al cristal líquido. Para esto, se define el vector director  $\vec{n}(\vec{x}, t)$ , el cual corresponde a un promedio de la orientación de cada una de las moléculas que conforman el sistema. Este vector evolucionará según una ecuación de tipo variacional [29], por lo que la dinámica provendrá de una energía libre  $\mathcal{F}_K$  lo que significa que la dinámica es constante al momento de alcanzar el equilibrio. En el caso de los cristales líquidos, este funcional da cuenta de las interacciones elásticas internas y corresponderá a las variaciones básicas que puede sufrir la orientación del director: *splay* (oblicuado), *bend* (doblamiento) y *twist* (torcedura). La energía libre elástica se conoce como energía libre de Frank y se escribe como [83]

$$\mathcal{F}_K = \frac{K_1}{2} (\nabla \cdot \vec{n})^2 + \frac{K_2}{2} (\vec{n} \cdot \nabla \times \vec{n})^2 + \frac{K_3}{2} (\vec{n} \times \nabla \times \vec{n})^2. \quad (3.1)$$

En general, la energía libre a considerar debe depender del vector de orientación  $\vec{n}(\vec{x}, t)$  junto con los parámetros del material e interacciones físicas externas como lo son campos eléctricos y magnéticos, de manera que un cristal líquido presenta propiedades ópticas.

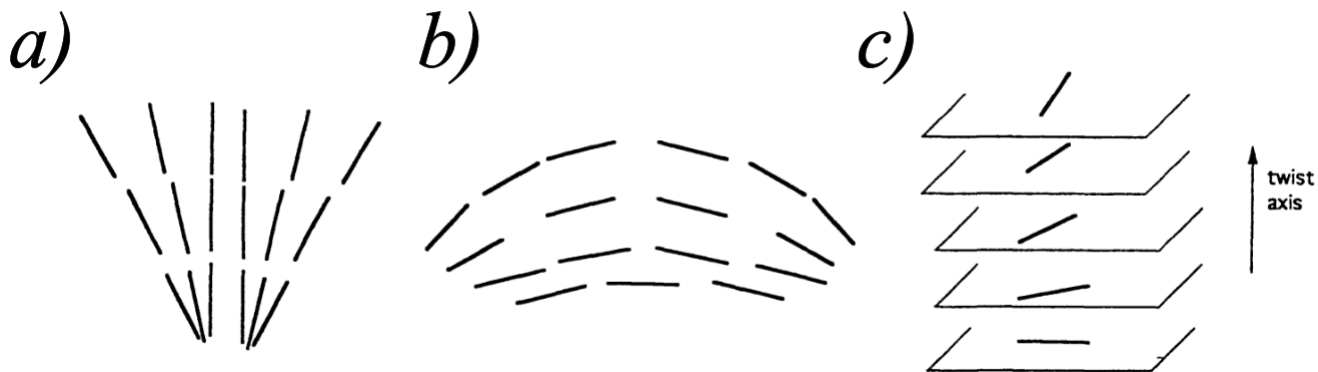


Figura 3.3: Deformaciones elásticas de la variable global  $\vec{n}(\vec{x}, t)$  en un cristal líquido. **a)** Splay **b)** Bend y **c)** Twist (Representación pedagógica de la deformación). Recuperado de (Simoni F. 1997). [83]

### Propiedades eléctricas y ópticas

Como fue señalado anteriormente, las moléculas de un cristal líquido presentan una gran anisotropía en su forma espacial. Esto conllevará al desarrollo de anisotropía en cualquier

propiedad física del cristal líquido. Por lo tanto, también se encontrará anisotropía en la permitividad eléctrica, la que tendrá una forma tensorial [83]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{\perp} \delta_{ij} + \Delta\varepsilon n_i n_j. \quad (3.2)$$

En donde  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$  es la anisotropía en la permitividad, y  $\varepsilon_{\parallel}$  y  $\varepsilon_{\perp}$  corresponden a la permitividad paralela y perpendicular al vector director  $\vec{n}$ , las que se conocen como eje extraordinario y ordinario respectivamente. Puesto que un sistema de cristal líquido se encuentra sometido a la deformación del campo vectorial  $\vec{n}(\vec{x}, t)$ , las diferentes cantidades físicas tienen un valor local que varía acorde al vector director.

Consideremos las relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \underline{\varepsilon} \vec{E}, \\ \vec{B} &= \underline{\mu} \vec{H}, \\ \vec{J} &= \underline{\sigma} \vec{E}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En donde  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{\mu}$  y  $\underline{\sigma}$  representan los tensores simétricos que dan cuenta de la anisotropía en los ejes. Si reemplazamos la ecuación (3.2) en la relación constitutiva del desplazamiento eléctrico obtendremos

$$\vec{D} = \underline{\varepsilon} \vec{E} = \varepsilon_{ij} E_i = \varepsilon_{\perp} E_i + \Delta\varepsilon E_i n_i n_j. \quad (3.4)$$

Lo que reemplazando en la densidad volumétrica de energía de un campo eléctrico para un medio material [1]

$$u_E = -\frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E}) = -\varepsilon_0 \left( \varepsilon_{\perp} \vec{E} + \Delta\varepsilon (\vec{E} \cdot \vec{n}) \vec{n} \right) \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\perp} |\vec{E}|^2 - \frac{1}{2} \Delta\varepsilon (\vec{E} \cdot \vec{n})^2. \quad (3.5)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (4.2) es independiente de la orientación del vector director, y por lo tanto, puede ser despreciado. En cambio, el segundo término depende de la orientación del director, por lo que cuando  $\vec{n}$  es perpendicular a  $\vec{E}$  se cumplirá que  $(\vec{E} \cdot \vec{n})^2 = 0$ . En contraste, cuando  $\vec{n}$  es paralelo o antiparalelo a  $\vec{E}$  se cumplirá  $(\vec{E} \cdot \vec{n})^2 = |\vec{E}|^2$ . Si el cristal líquido posee un anisotropía positiva ( $\Delta\varepsilon > 0$ ), la energía eléctrica se minimizará cuando el vector director  $\vec{n}$  tienda a alinearse paralela o antiparalelamente con el campo aplicado. Por el contrario, si ( $\Delta\varepsilon < 0$ ), entonces la energía se minimizará cuando el director del cristal líquido sea perpendicular al campo aplicado, y por lo tanto, el el vector director tenderá a alinearse perpendicularmente al campo.

Respecto a las propiedades ópticas, consideremos un medio anisótropo en donde el vector director  $\vec{n}$  no tiene una dependencia respecto a la posición, lo que correspondería a un volumen local del cristal líquido. Además, un estudio de la propagación de la luz debe partir desde las ecuaciones de Maxwell junto con las relaciones de constitutivas (3.3)

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{J}, \\ \nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Estas ecuaciones describen la evolución en el tiempo y el espacio de las ondas electromagnéticas. En su propagación estas tendrán una contribución de densidad de energía eléctrica, la cual si nos encontramos en el sistema de referencia local en donde un eje es paralelo a  $\vec{n}$ , al expresión estará dada por:

$$u_E = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E}). \quad (3.7)$$

Como en este sistema de referencia el tensor  $\underline{\varepsilon}$  es simétrico y diagonal, la densidad de energía quedará

$$u_E = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\perp} E_X^2 + \varepsilon_{\perp} E_Y^2 + \varepsilon_{\parallel} E_Z^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{D_X^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{D_Y^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{D_Z^2}{\varepsilon_{\parallel}} \right). \quad (3.8)$$

En donde  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son las coordenadas locales principales respecto al vector  $\vec{n}$ . Si definimos las variables espaciales  $x' = D_X^2/(2u_E)^{1/2}$ ,  $y' = D_Y^2/(2u_E)^{1/2}$ ,  $z' = D_Z^2/(2u_E)^{1/2}$  obtendremos la ecuación de un elipsoide

$$\frac{x'^2}{n_X^2} + \frac{y'^2}{n_Y^2} + \frac{z'^2}{n_Z^2} = 1. \quad (3.9)$$

Donde aparecen los índices de refracción principales del sistema de referencia local  $n_X = (\varepsilon_{\perp})^{1/2}$ ,  $n_Y = (\varepsilon_{\perp})^{1/2}$  y  $n_Z = (\varepsilon_{\parallel})^{1/2}$  representando los semiejes del elipsoide. La intersección entre el frente de onda lumínica y la elipsoide definida anteriormente es una elipse en el plano que tiene como propiedad que sus semiejes corresponderán a las orientaciones de polarización de dos ondas que resultantes de la separación producida por el medio anisótropo en la luz entrante [16]. Es más, el largo de estos serán proporcionales a los índices de refracción que experimentan estas dos ondas resultantes. Por consiguiente, el índice de refracción en un medio anisótropo como un cristal líquido dependerá no sólo de la dirección de propagación sino también de su polarización. Si observamos la expresión (3.9) nos podemos dar cuenta que  $n_X = n_Y = n_0$  y  $n_Z = n_e$ . La existencia de dos índices de refracción en el sistema se conoce como **birrefringencia** [10], lo que cambiará la velocidad de propagación del frente de ondas al separarse en los ejes locales definidos en función del vector  $\vec{n}$ .

Para el desarrollo del experimento realizado en esta tesis se considerará un cristal líquido nemático, el cual se encuentra interactuando eléctrica y ópticamente.

## 3.2. Configuración del experimento

El experimento de la válvula de cristal líquido fue originalmente introducido por Akhmanov *et al.* [4] y consiste en la aplicación de un voltaje a una celda de cristal líquido, el cual es de tipo AC para evitar la acumulación de cargas en las paredes del cristal junto a un sistema óptico de tipo 4-f [43].

Para nuestro caso, esta válvula se encuentra acoplada con un circuito de retroinyección. La celda se encuentra entre un vidrio y un espejo. En el inicio del circuito óptico, un láser de Helio-Neón rojo es modulado en alguna configuración espacial de interés a través de un *Spatial Light Modulator* (SLM) para luego atravesar un *Polarized Beam Splitter* (PBS), lo que entrega al rayo una polarización dada, además de separar el haz de luz para crear un circuito de retroinyección. Luego, el haz pasa por un *Transverse Slit* (TSL), el cual nos permite eliminar modos de onda directamente desde el espacio de Fourier. El rayo atraviesa

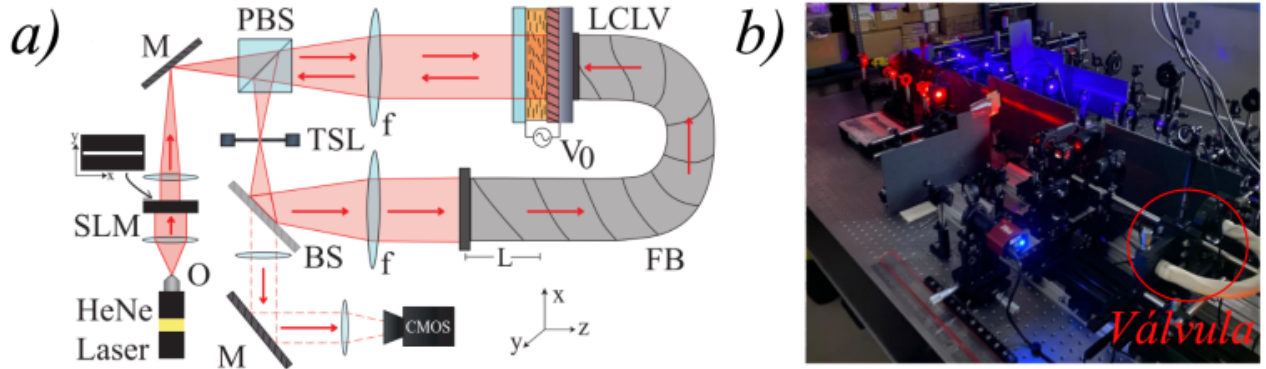


Figura 3.4: **a)** Diagrama correspondiente al setup actual montado del LCLV en el laboratorio de fenómenos robustos (LAFER) **b)** Setup real del experimento.

la celda de cristal líquido para dirigirse a la válvula de retroinyección, la que consiste en un espejo a través de una fibra óptica, de esta manera, la luz interactúa consigo misma siendo traducida para afectar al cristal líquido a través de un fotoconductor acoplado a la celda. Una revisión completa de la configuración de este experimento puede encontrarse en (Residori, 2005) [75].

### 3.2.1. Componentes ópticos relevantes

#### Spatial light modulator (SLM)

Un modulador de luz espacial (SLM) es un dispositivo óptico que permite controlar diferentes propiedades del haz de luz inyectado tales como intensidad, fase y polarización a través de pequeñas variaciones en el camino óptico de la luz. En nuestro caso, este dispositivo ayudará en la creación de configuraciones espaciales con una geometría dada en una o dos dimensiones, además de definir las condiciones de borde del experimento [60].

#### Transverse Slit (TSL)

Los slits consisten en pequeñas aberturas que permiten filtrar las longitudes de ondas mayores que el largo de abertura. Existen slits circulares (iris) y rectangulares los que dependiendo de su configuración permitirán filtrar en cualquier dirección del plano  $xy$  del experimento. Para nuestro caso, se utilizó un slit rectangular para filtrar longitudes de onda en el eje  $x$ .

#### Polarized Beam Splitter (PBS)

Un PBS consiste en un dispositivo óptico que permite dar una polarización en específico al haz de luz entrante además de separar el haz en una parte transmitida y otra reflejada. En el

experimento cumple un rol primordial al ser el instrumento que permite el cierre del circuito de retroinyección junto con una interferencia de polarización al incidir la luz retroalimentada a través de este.

### 3.2.2. Válvula de retroinyección

La válvula de retroinyección consiste en una canal de fibra óptica rotada en  $\pi$  radianes por donde la luz que ha sido reflejada por el espejo unido a la celda de cristal líquido entra por el extremo libre luego de pasar nuevamente por el PBS para atravesar la fibra óptica y alcanzar el fotocondtor cerrando finalmente el circuito de retroinyección. El canal de fibra óptica puede ser desplazado una distancia  $L$ , lo que aumentará/disminuirá la difracción libre del sistema [7].

## 3.3. Experimento de patrones unidimensionales con comportamiento tipo turbulento

Para la realización del experimento en el LCLV se utilizó una celda de cristal líquido nemático LC-654 (NIOPIK), el cual posee una anisotropía en su constante de permitividad eléctrica de  $\varepsilon_a = 10.4\varepsilon_0$  y se encuentra recluida entre dos capas de vidrio separadas por una distancia  $d = 15 \mu\text{m}$ . En una de estas capas de vidrio hay un fotoconductor y electrodos de óxido de Indio-Estaño, mientras que en la otra capa hay un espejo de Bragg con reflectividad optimizada para  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ . Para la aplicación de un campo eléctrico a la celda de cristal líquido se aplicó un voltaje alterno  $V_0$  ajustable de frecuencia  $f_0 = 1.0 \text{ kHz}$  entre las capas de vidrio. Por otro lado, el haz de luz corresponde un láser de He-Ne con longitud de onda  $\lambda_0 = 632.8 \text{ nm}$  y una intensidad de luz  $I_0$  ajustable. Es importante señalar que existe equivalencia entre el uso de  $V_0$  y  $I_0$  como parámetros de control del experimento. No obstante, para evitar la saturación de medida del fotoconductor y/o cámara se utilizará  $V_0$  dejando  $I_0$  constante en general, siendo sólo modificado este parámetro en el caso en el que para un valor de voltaje de interés se alcance la saturación de los instrumentos de medida.

En lo referente al experimento realizado este consistió en la implementación a través del SLM de un canal rectangular cuasiunidimensional de dimensiones  $l_x$  y  $l_y$  ajustable, esto con la finalidad de captar solamente la dinámica en una dimensión. Para valores de  $V_0 = 0 \text{ V}$  y  $L = 0 \text{ mm}$ , se observará un estado homogéneo en la configuración con pequeñas perturbaciones propias en un cristal líquido. [83].

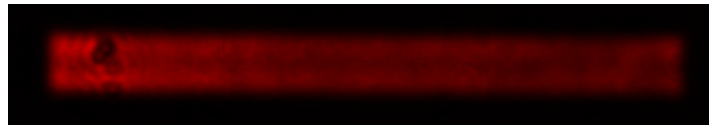


Figura 3.5: Imagen del experimento para valores  $V_0 = 0 \text{ V}$ ,  $I_0 = 1.13 \text{ mW/cm}^2$  y  $L = 0 \text{ cm}$  en donde se aprecia un canal de dimensiones  $l_x = 2550 \mu\text{m}$ ,  $l_y = 431 \mu\text{m}$  en un estado homogéneo.

Seguidamente, al momento de encender el voltaje  $V_0$  en la celda de cristal líquido, el sistema adquiere un patrón espacial, el que se aglutinará en forma de pequeños círculos rodeados. Sin embargo, al momento de cerrar el slit (TSL) hasta un punto en donde no se pierda el estado tipo patrón se puede observar un patrón alargado limpio cuasiunidimensional. En el momento en el que se encuentra este patrón estático, se procede a mantener constante el valor de  $V_0$ , se procede a variar el parámetro de difracción libre  $L$ , el cual puede variar en un intervalo de  $[0, -100]$  mm. En particular, fue observado experimentalmente en un valor de  $L = -35$  mm como el patrón adquiere dinámica, la cual aparece inicialmente de manera oscilatoria ( $\omega \neq 0$ ) en ciertas zonas del patrón. Esta oscilación es local, presentando una frecuencia no bien definida.

Posteriormente para valores  $L > |-55 \text{ mm}|$ , el patrón adquiere un comportamiento tipo turbulento, el cual se sustenta en la creación y destrucción de defectos ( $I(x, t) = 0$ ) aunque conservando también pequeñas oscilaciones. Este comportamiento tiene una dirección privilegiada (derecha), lo que puede ser explicado debido a inclinaciones propias en la válvula.

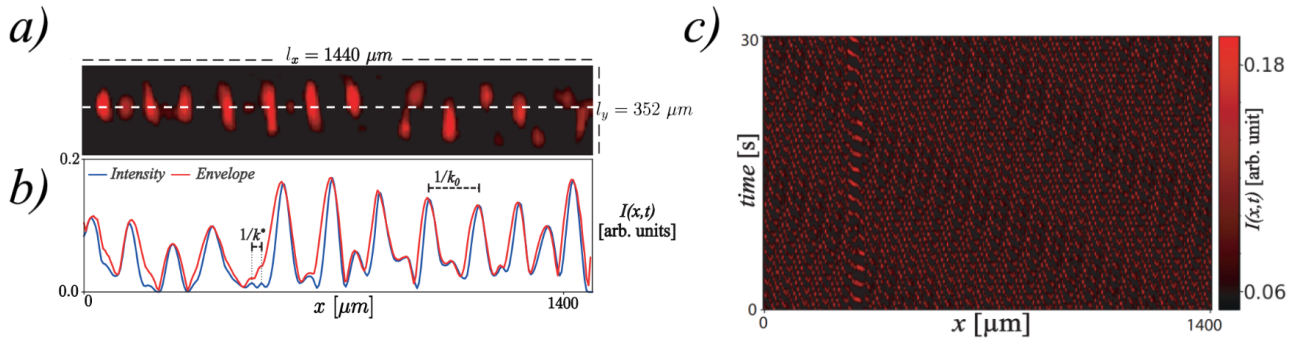


Figura 3.6: **a)** Patrón observado en el experimento con aumento de contraste para fines ilustrativos para valores  $V_0 = 9.72 \text{ V}$ ,  $I_0 = 1.13 \text{ mW/cm}^2$  y  $L = -6 \text{ cm}$  en donde se aprecia un canal de dimensiones  $l_x = 1440 \mu\text{m}$ ,  $l_y = 352 \mu\text{m}$  **b)** Perfil de intensidad correspondiente a la línea blanca segmentada de la imagen **a)** **c)** Evolución temporal del patrón experimental. En donde  $k_0$  y  $k^*$  corresponden a la longitud del patrón y a la longitud de una fluctuación del patrón más pequeña.

Finalmente, al alcanzar valores elevados de longitud de difracción libre ( $L > |-90 \text{ mm}|$ ) se alcanza una saturación en el sistema, en donde se observa como zonas del patrón se *pinnean* adquiriendo un mayor tamaño, ya no siendo posible observar el comportamiento turbulento.

En síntesis, la dinámica unidimensional del experimento de un canal unidimensional en el LCLV consiste en la transición inicial a través de  $V_0$  desde un estado homogéneo a un patrón espacial para luego a través del parametro de control  $L$  observar, primero, la aparición de una oscilación, después un comportamiento tipo turbulento, finalizando en la saturación del fenómeno para valores altos de  $L$ .

En lo particular, experimentalmente nos interesa entender las propiedades estadísticas del sistema en su estado tipo turbulencia, siendo las propiedades dinámicas como el caos espaciotemporal ya documentado en el experimento para valores intermedios de  $L$  en una

configuración cuasiunidimensional [23]. Para ello, se analizó la densidad espectral  $S_2(r)$  y  $S_2(\tau)$  para la intensidad y la envolvente y la fase a través de la transformada de Hilbert en términos de su señal analítica correspondiente en dos diferentes valores de  $l_y/l_x$ , en donde se presentan a continuación los espectros en espacio y tiempo para un ratio  $l_y/l_x = 0.24$

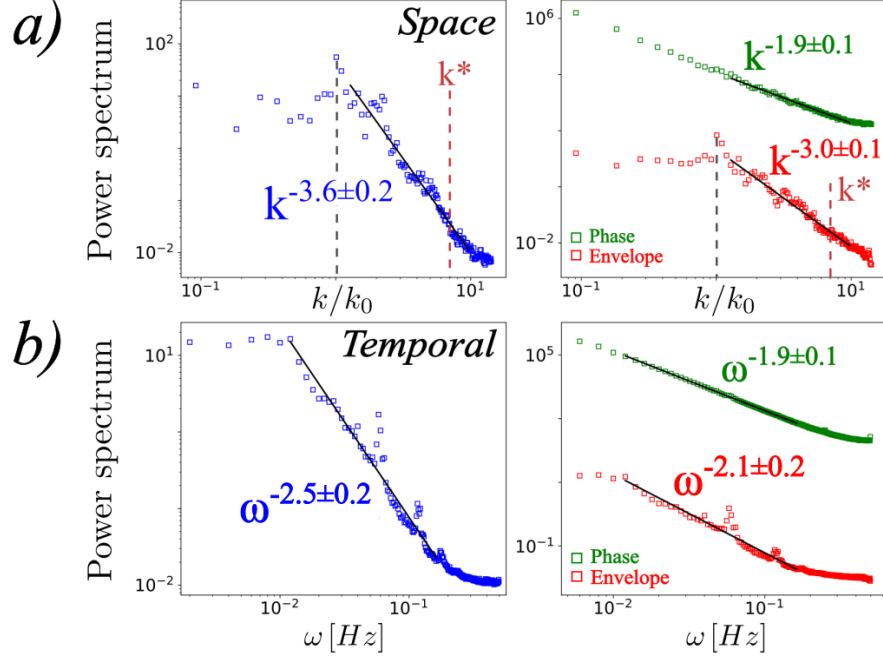


Figura 3.7: **a)** Densidad espectral espacial de la intensidad de la luz  $I(x, t)$  (azul), y los campos envolvente (rojo) y fase (verde). **b)** Densidad espectral temporal de la intensidad de la luz  $I(x, t)$  (azul), y los campos envolvente (rojo) y fase (verde). Los puntos corresponden a los resultados experimentales mientras que la línea negra da cuenta de la ley de potencia obtenida.

Se puede observar una marcada tendencia lineal, la cual sirve de unión entre la longitud de onda del patrón  $k_0$  y longitudes de onda pequeñas representadas por  $k^*$ , aunque con la presencia de máximos dados por los armónicos del patrón de fondo. En un gráfico de escala logarítmica la tendencia lineal implica una dependencia de tipo potencia  $k^{-\alpha}/\omega^{-\beta}$ . En este caso, para la intensidad de la luz se encontró leyes de potencia aproximadamente de  $k^{-3.6}$  y  $\omega^{-2.5}$ , lo que deja en evidencia un comportamiento tipo turbulento [38] [57] [55] caracterizado, en este caso, por una dinámica de defectos la cual se observa en el diagrama espaciotemporal. Asimismo, debido a las fluctuaciones inherentes del experimento en forma de ruido se puede apreciar como para número de onda elevados el espectro tiende a aplanarse [82].

Para entender el comportamiento turbulento, es posible descomponer la dinámica en términos de su pseudoenvolvente y pseudofase a través de la transformada de Hilbert [21], método usado para estudiar formación de patrones en diferentes contextos en óptica y otros tópicos [91, 3, 13]. En el caso de la fase, se puede observar que posee exponentes cercanos a  $k^{-2}$  y  $\omega^{-2}$ , los que son característicos de un comportamiento tipo turbulencia de fase [54]. El origen de este exponente corresponde a transiciones abruptas no correlacionadas de dominio entre dos valores en la fase. Por otro lado, para la envolvente se encontró exponentes cercanos a  $k^{-3}$  y  $\omega^{-2}$ , los que en este caso darán cuenta de una dinámica mediada por defectos.



Además del análisis anterior, es posible estudiar las correlaciones superiores del sistema  $S_p(\tau) \equiv \langle \|I(t) - I(t + \tau)\|^p \rangle$  [38] donde los símbolos  $\| \cdot \|$ ,  $\langle \rangle$  corresponden a la norma y al promedio respectivamente. Esta medida nos entregará información respecto a si el sistema posee una escala característica. Para turbulencia en fluidos **auto similar**, Kolmogorov en su teoría [38] predice un escalamiento de la forma  $S_p(\tau) \propto \tau^{\zeta_p^\tau}$ , donde  $\zeta_p^\tau$  corresponde al exponente de la ley de potencia de la función de estructura  $S_p(\tau)$ . De la misma forma, se puede definir el factor de estructura espacial  $S_p(r)$ , el cual para dinámica autosimilar recuperamos  $S_p(r) \propto r^{\zeta_p^r}$ . Diferente es el caso si el factor de estructura escalara sublinealmente con  $p$ , lo que implicaría una dinámica **intermitente**. En el contexto del experimento se calculó el factor de estructura temporal y espacial de la intensidad  $I(x, t)$ , obteniendo una relación lineal lo que nos asegura que el sistema es autosimilar.

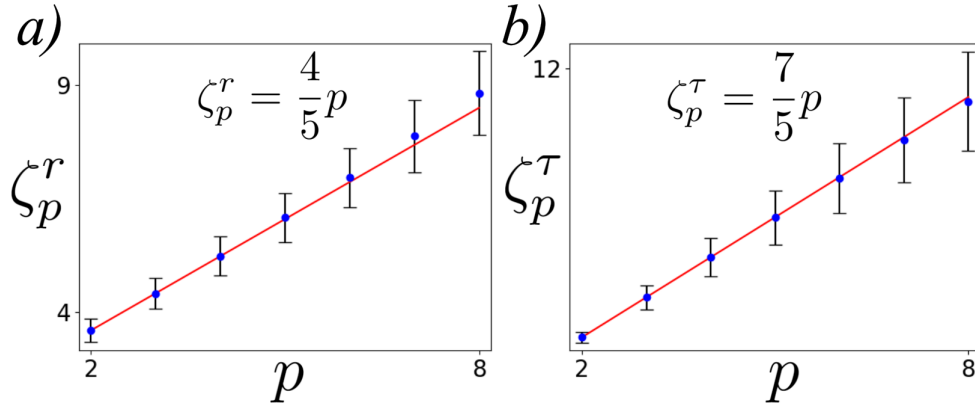


Figura 3.8: **a)** Exponentes espaciales de la función de estructura  $S_p(r)$  en función del índice  $p$ . **b)** Exponentes temporales de la función de estructura  $S_p(\tau)$  en función del índice  $p$ .

Aunque los resultados anteriores muestran un comportamiento turbulento en una dimensión, la Figura 3.6 a) deja entrever la aparición de pequeñas dislocaciones en la dinámica en su extremo derecho, las que corresponden a defectos en dos dimensiones [62]. Por esta razón, cabe preguntarse si la dinámica y los exponentes estarán influenciados por estas estructuras. Debido a esto, se procedió a repetir el experimento para un canal de ratio en sus dimensiones  $l_y/l_x = 0.17$ . Es importante señalar que en esta nueva realización se buscó que el patrón sea lo más limpio posible de estructuras bidimensionales (dislocaciones).

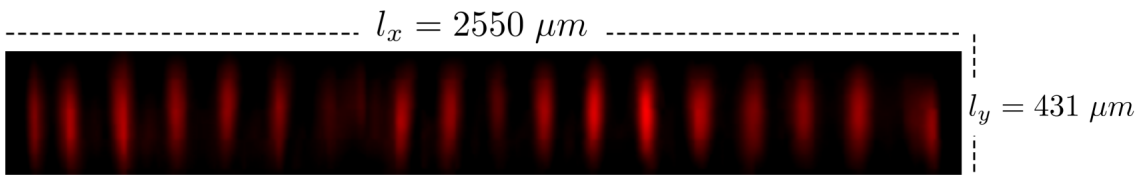


Figura 3.9: Patrón observado en el experimento con aumento de contraste para fines ilustrativos para valores  $V_0 = 8.48$  V,  $I_0 = 0.98$  mW/cm<sup>2</sup> y  $L = -6$  cm en donde se aprecia un canal de dimensiones  $l_x = 2550$   $\mu$ m,  $l_y = 431$   $\mu$ m.

Al analizar las densidades espectrales espacial  $S_2(r)$  y temporal  $S_2(\tau)$  podemos observar como se mantiene la ley de potencia después del número de onda crítico del patrón pero

cambian los exponentes característicos de esta. Inesperadamente, se obtuvo un valor cercano a  $k^{-2}$  para la intensidad  $I(x, t)$ , mientras que se obtuvieron valores de  $k^{-2}$  en los campos de la envolvente y la fase para el espectro espacial. Respecto al espectro temporal, para la intensidad se obtuvo  $\omega^{-3.5}$  pero, si observamos su descomposición mediante la transformada de Hilbert, recuperamos valores bien parecidos a lo estudiado en el experimento pasado (Envolvente:  $\omega^{-2.4}$ , Fase:  $\omega^{-2.2}$ ). Estos resultados sugieren que pareciera no haber un exponente único que sea característico del sistema sino que pueden depender ya sea de la forma de los defectos [69] o de la dinámica en longitudes de onda pequeñas que como se ve en la Figura 3.6 c), también posee un comportamiento complejo, el cual en este caso variará en función de la razón  $l_y/l_x$ .

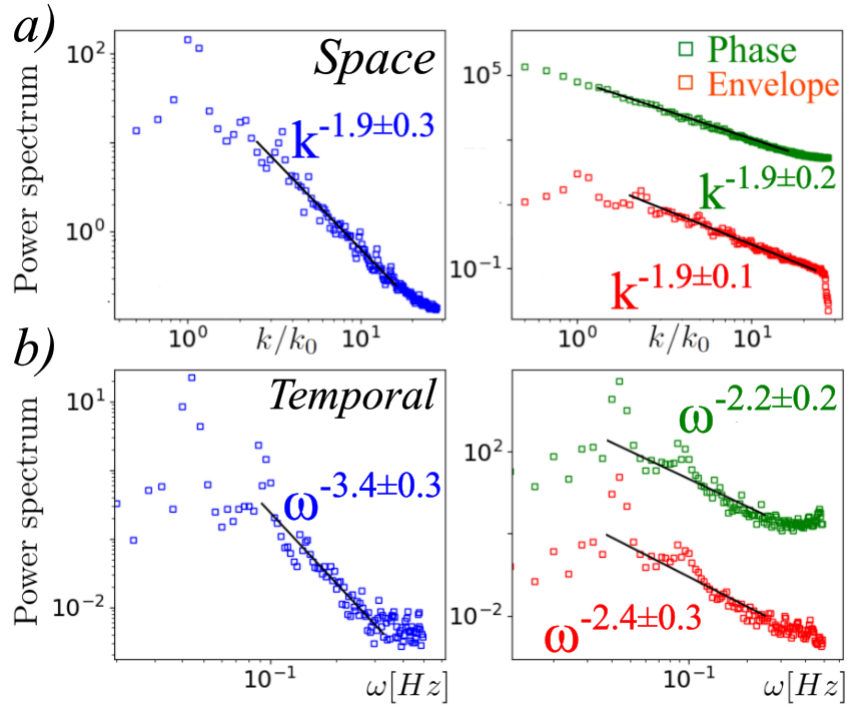


Figura 3.10: **Segundo experimento:** **a)** Densidad espectral espacial de la intensidad de la luz  $I(x, t)$  (azul), y los campos envolvente (rojo) y fase (verde). **b)** Densidad espectral temporal de la intensidad de la luz  $I(x, t)$  (azul), y los campos envolvente (rojo) y fase (verde). Los puntos corresponden a los resultados experimentales mientras que la línea negra da cuenta de la ley de potencia obtenida.

# Capítulo 4

## Modelo de Turing-Swift-Hohenberg no variacional

### 4.1. Ecuación variacional

En el estudio y observación de la formación de patrones en sistemas extendidos surgen estructuras y patrones complejos que no pueden ser replicados a través de modelos lineales. Debido a esto, en la búsqueda de un modelo minimal que pueda describir la convección de Rayleigh-Bénard aparece el modelo de Turing-Swift-Hohenberg (TSH) [87], el cual fue descrito por Swift y Hohenberg y da cuenta de la dinámica de modos lineal corregida por un término no lineal fenomenológico cúbico en 1977 pero que fue inicialmente derivado por Alan Turing en sus notas personales en los 50s [31] aunque nunca fue publicado oficialmente. Este modelo ha probado ser exitoso en el modelamiento de una gran variedad de fenómenos en física, química, óptica y biología [6] [52], y esta representado por una ecuación con sólo un factor escalar libre que actúa como parámetro de orden  $u(x, t)$ , la cual es,

$$\partial_t u = \mu u - u^3 - \nu \nabla^2 u - \nabla^4 u. \quad (4.1)$$

Donde  $\mu$  es el parámetro de bifurcación y  $\nu$  corresponde al coeficiente de difusión ( $\nu < 0$ ) o antidifusión ( $\nu > 0$ ). La ecuación anterior puede ser escrita como la evolución de una energía libre  $\mathcal{F}$ , la que estará determinada por una ecuación tipo gradiente de la forma:

$$u_t = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u}. \quad (4.2)$$

En donde  $u_t$  representa la derivada respecto al tiempo  $t$  y la energía libre  $\mathcal{F}$  estará dada por:

$$\mathcal{F}[u] = \int \left( -\mu \frac{u^2}{2} + u^4 + \nu \frac{(\nabla u)^2}{2} + \frac{(\nabla^2 u)^2}{2} \right) dV. \quad (4.3)$$

Considerando condiciones de borde periódicas, podemos asegurar que  $\mathcal{F}$  evolucionará de la forma,

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = - \int \int dx dy (\partial_t u)^2 \leq 0. \quad (4.4)$$

La ecuación (4.4) implica que mientras exista una evolución temporal del sistema ( $\partial_t u \neq 0$ ), el potencial disminuirá. Mas aún, puede demostrarse que las energía libre o potencial está acotada inferiormente por la cantidad  $\frac{1}{4}\varepsilon^2 S$ , en donde  $S$  es el área del dominio, lo que supone que  $\mathcal{F}$  no puede disminuir por siempre y la dinámica es constante para tiempos largos. Estas restricciones propias de dinámica variacional conllevan que el sistema es independiente del tiempo, por lo que no podrá existir en esta ecuación dinámica permanente del tipo periódica, cuasiperiódica/caos espaciotemporal. Siendo así, los equilibrios de la energía libre corresponderán a las soluciones de la ecuación, siendo posible observar biestabilidad de estados homogéneos, patrones y soluciones localizadas [27].

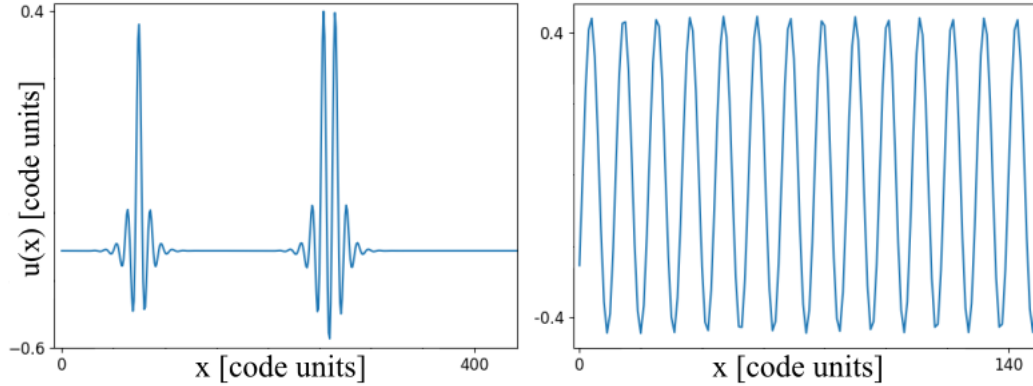


Figura 4.1: Estados en la ecuación de TSH en una dimensión. Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. A la izquierda una estructura localizada junto al estado homogéneo para parámetros  $\eta = -0.04$ ,  $\mu = -0.03$ ,  $\nu = 1.00$ . A la derecha un patrón estático para parámetros  $\eta = 0.0$ ,  $\mu = -0.1$ ,  $\nu = 1.0$ .

#### 4.1.1. Análisis lineal

Para caracterizar los diferentes estados que presenta la ecuación de TSH y su estabilidad, podemos encontrar el valor de  $k_c$  y  $\omega_c$  que dan cuenta del nacimiento de una inestabilidad para el estado  $u = 0$  (homogéneo). Para llevar adelante este procedimiento, denotaremos como  $u = 0$  al **estado base**  $u_b$  y analizaremos, sin pérdida de generalidad, el campo diferencia en una dimensión espacial, correspondiente a la perturbación en el sistema

$$u_p(x, t) = u(x, t) - u_b. \quad (4.5)$$

entre una solución arbitraria  $u(x, t)$  y el estado base  $u_b$ , y como esta evoluciona en el tiempo. La perturbación evolucionará siguiendo la ecuación original (4.1)

$$\partial_t u_p = \hat{W} [u_b + u_p] - \hat{W} [u_b]. \quad (4.6)$$

En donde el operador  $\hat{W}$  corresponde al lado derecho de la ecuación (4.1), siendo este función de  $u$ :

$$\hat{W} [u] = \mu u - u^3 - \nu \partial_{xx} u - \partial_{xxx} u. \quad (4.7)$$

Si  $u_p$  es lo suficientemente pequeño, podemos aproximar  $\hat{W}[u_b + u_p]$  linealizando en la vecindad de  $u_b$ , lo que significa quedarnos sólo con los términos que contienen un factor lineal de  $u_p$  o de sus derivadas espaciales

$$\partial_t u_p = \mu u_p - \nu \partial_x^2 u_p - \partial_x^4 u_p - \cancel{3u_p^2 u_b} - 3u_p u_b^2. \quad (4.8)$$

De esta manera encontramos la ecuación lineal para la perturbación  $u_p$ , la que al momento de reemplazar el estado base  $u_b = 0$  obtenemos

$$\partial_t u_p = (\mu - \nu \partial_x^2 - \partial_x^4) u_p. \quad (4.9)$$

Esta es una ecuación diferencial con coeficientes constantes, y por lo tanto, podemos usar el ansatz de solución exponencial para tiempo y espacio

$$u_p(x, t) = A e^{\sigma t} e^{\alpha x}. \quad (4.10)$$

Las constantes  $\sigma$  y  $\alpha$  pueden ser números complejos. Por otro lado, sustituyendo el ansatz anterior en la ecuación linealizada (4.9) obtendremos la tasa de crecimiento de modos

$$\sigma = \mu - \nu \alpha^2 - \alpha^4. \quad (4.11)$$

El significado de la constante  $\alpha$  puede ser deducido usando la invariancia traslacional o considerando las condiciones de borde que se le aplica a los campos  $u(x, t)$  y  $u_p$ . El desarrollo completo puede ser encontrado en (Cross & Greenside, 2009) [29] obteniendo que el modo exponencial tiene la forma dada por:

$$u_p = A e^{\sigma t} e^{ikx}. \quad (4.12)$$

En donde  $k$  corresponde a un número real. La dependencia espacial de  $u_p$  es entonces periódica con número de onda  $k$ . Si sustituimos  $\alpha = ik$  en la relación (4.11) obtenemos

$$\sigma_k = \mu + \nu k^2 - k^4. \quad (4.13)$$

Dado que  $\sigma_k$  es real para cualquier valor de  $k$ , la frecuencia crítica  $\omega_c$  es nula, y por lo tanto, la inestabilidad que surja no presentará oscilaciones temporales. Por el otro lado, para obtener el  $k_c$  es posible argumentar que como el sistema resuelto es lineal se puede escribir el campo perturbación  $u_p$  como la suma de diferentes  $k$  particulares, lo que nos entrega una solución general de la forma

$$u_p(x, t) = \sum_k A_k e^{\sigma_k t} e^{ikx}. \quad (4.14)$$

Por lo tanto, la solución base  $u_b = 0$  será linealmente estable sólo si cada uno de los modos de (4.14) tiene un valor propio  $\lambda$  real negativo, los cuales harán decaer la exponencial a cero en el límite  $t \rightarrow \infty$ , lo que se cumplirá sólo si el máximo de la parte real de cada uno de  $\sigma_k$  es negativo:

$$\max_k \Re(\sigma_k) < 0. \quad (4.15)$$

Lo que nos permite encontrar un valor crítico  $k_c$  para el cual la curva dada por  $\sigma_k$  pasa desde los valores negativos a tener un máximo por encima del eje  $x$ , lo que nos asegura dejará de ser linealmente estable.

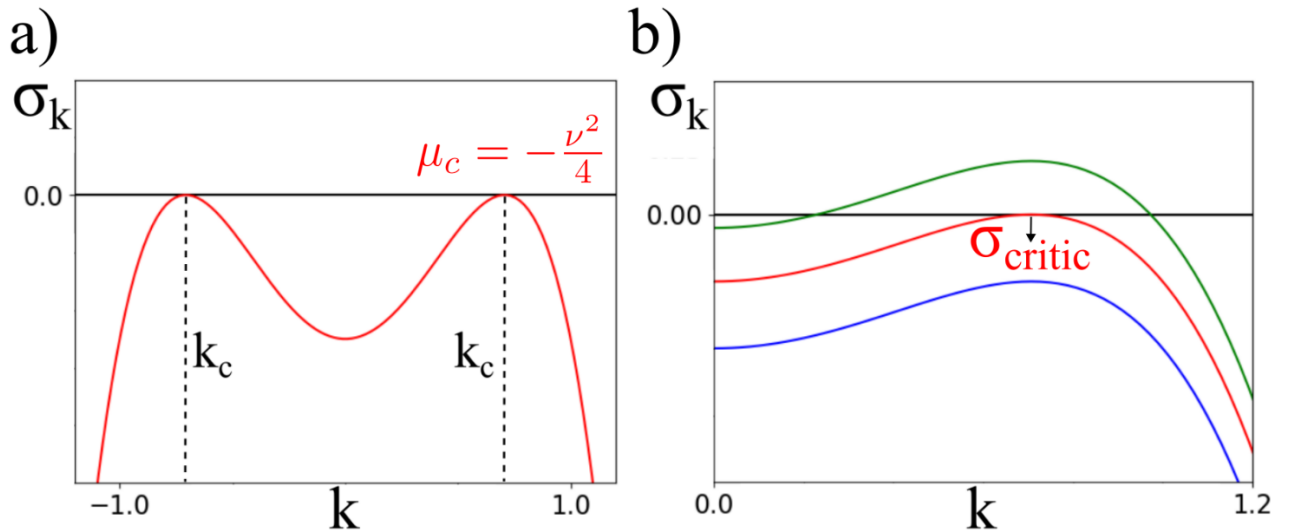


Figura 4.2: **a)** Curva representando a  $\sigma_k$  para su valor crítico. Notar como presenta simetría respecto a  $k_c$  positivo y negativo dado por la relación (4.17). **b)** Zoom al máximo de la curva. Curva azul con  $\mu = -0.5$  siendo  $\sigma_k$  negativo para todo  $k$ , por lo tanto, estado homogéneo estable. Curva roja con valor crítico de  $\mu = \nu/2$ , justo antes de la inestabilidad. Curva verde con valor  $\mu = -0.05$  mayor al valor crítico.

Si derivamos la relación (4.13) respecto a  $k$  e igualamos a cero para obtener el máximo de la curva

$$-4k^3 + 2\nu k = 0. \quad (4.16)$$

$$k_c = \pm \sqrt{\frac{\nu}{2}}. \quad (4.17)$$

Por lo que la inestabilidad hará surgir un patrón con longitud de onda característica  $2\pi/k_c$ , el cual aparecerá para un valor crítico del parámetro de orden  $\mu = \mu_c$ . Para encontrar el valor de  $\mu_c$ , reemplazamos el número de onda crítico obtenido en (4.17) en la relación (4.15) para la tasa de crecimiento, lo que nos permitirá escribir  $\mu$  en términos del parámetro de orden,

$$\sigma_{k_c} = \mu_c + \nu k_c^2 - k_c^4 = 0. \quad (4.18)$$

$$\mu_c = -\frac{\nu^2}{4}. \quad (4.19)$$

## 4.2. Relación con el LCLV

El experimento de la válvula [22, 75] de luz con cristal líquido puede ser descrito proponiendo una descripción de campo medio basada en la orientación promedio de las partículas que componen el cristal líquido. Estas moléculas estarán definidas en función de su vector director  $\vec{n}(x, y, z)$  [18, 32, 68], pero para el experimento de la válvula, sólo es importante el plano perpendicular de la celda del LCLV correspondiente al eje  $z$ , ya que las componentes

del cristal tendrán una dinámica en el plano  $xy$ .

$$\theta = \langle \varphi \rangle = \frac{1}{d} \int_C \vec{n}(x, y, z) dz. \quad (4.20)$$

En donde  $\theta$  dará cuenta del promedio en toda la dirección  $z$  y  $d$  al espesor del cristal líquido en la misma dirección. Notar que el espesor es pequeño en comparación a las otras dimensiones ( $d \ll L_x/L_y$ ). De esta manera, un modelo simple de dinámica de relajación respecto a un valor de equilibrio da cuenta de la complejidad necesaria para describir el experimento en función del ángulo de dirección en el plano  $xy$  del experimento [22]:

$$\partial_t \theta = -(\theta - \theta_0(x, y)) + l^2 \nabla^2 \theta. \quad (4.21)$$

$l$  da cuenta de la longitud de acoplamiento y  $\theta_0$  corresponde al ángulo de equilibrio de la transición de Freédericksz. El cual estará dado por la expresión:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\Gamma V_{FT}}{\Gamma V_0 + \alpha I_w(\theta)}} \right). \quad (4.22)$$

En donde  $\Gamma$  corresponde a la impedancia de la válvula óptica,  $V_{FT}$  al voltaje de Freédericksz,  $V_0$  al voltaje aplicado a la válvula,  $\alpha$  el parámetro de respuesta lineal del fotoconductor e  $I_w$  a la intensidad de luz retroinyectada, la cual depende no localmente del operador de difracción [75],

$$I_w = \frac{I_0}{4} \left| e^{i \frac{-L}{2k} \nabla_{\perp}^2} \left( 1 - e^{-i\beta \cos^2 \theta(x,y)} \right) \right|. \quad (4.23)$$

De tal manera que al reemplazar (4.21) en la ecuación (4.20) de la válvula de luz se obtiene para una dimensión espacial la ecuación no local de la forma,

$$\partial_t \theta = l \partial_{xx} \theta - \theta + \frac{\pi}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\Gamma V_{FT}}{\Gamma V_0 + \alpha I_w(\theta)}} \right). \quad (4.24)$$

Si no contemplamos el término espacial dado por la difracción libre presente en  $I_w$ , lo que significa no considerar ( $L = 0$ ), la intensidad retroinyectada será

$$I_w = I_0 [1 + \cos \beta \cos^2 \theta]. \quad (4.25)$$

En donde  $\cos \beta \cos^2 \theta$  es el cambio de fase general experimentado por la luz que viaja y se devuelve a través de la celda de cristal líquido y  $\beta = 2kd\Delta n$ , donde  $k = 2\pi/\lambda$  es el número de onda óptico,  $d$  corresponde al espesor de la celda y  $\Delta n$  es la diferencia entre el índice de refracción paralelo y perpendicular del cristal líquido. Debido a esto, es posible encontrar una expresión analítica para la solución de equilibrio homogénea para  $V > V_{FT}$  cuando no existe difracción en la válvula

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{\Gamma V_{FT}}{\Gamma V_0 + \alpha [1 + \cos \beta \cos^2 \theta]} \right). \quad (4.26)$$

Las soluciones homogéneas presentes en la ecuación (4.22) se señalan en la Figura 4.3, la que muestra una superficie en donde existen regiones con la presencia de biestabilidad y el nacimiento de una solución inestable (biestabilidad) [24]. Cerca de este punto de nacimiento

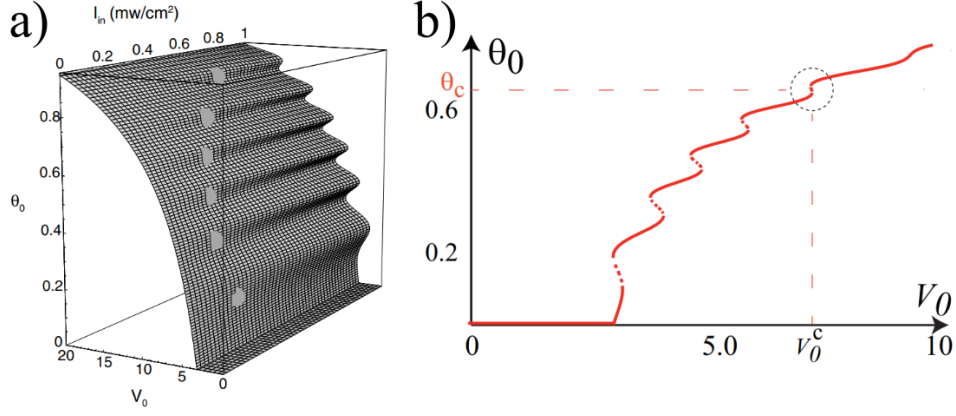


Figura 4.3: **a)** Función  $\theta_0(V_0, I_0)$ , las regiones de color gris marcadas en el plano representan los nacimientos de la biestabilidad. **b)** Proyección de la curva al plano  $V_0 - \theta_0$ . Recuperado de Clerc et al. (2017)

de una biestabilidad y descartando las derivadas espaciales, se puede desarrollar una expansión en serie de Taylor respecto a al valor de equilibrio para la perturbación  $u(x, t)$ , la que tendrá la forma de  $\theta = \theta_0 + u + \dots$ , lo que permite derivar una ecuación para la perturbación  $u$  de la forma [6, 88],

$$\partial_t u = \eta + \mu u - u^3 + h.o.t. \quad (4.27)$$

Donde  $\mu$  es el parámetro de bifurcación y  $\eta$  da cuenta de la asimetría entre dos estados homogéneos (lo que es equivalente a escribir un término dependiente de  $u^2$ ). Este parámetro  $\eta$  controla el tamaño de la biestabilidad. Los términos de orden mayores son desechados por análisis de multiescala [29], ya que  $u \sim \mu^{1/2}$ ,  $\eta \sim \mu^3/2$  y  $\partial_t \sim \mu$  para  $\mu \ll 1$ . Por otra parte, si consideramos ahora los términos espaciales, el sistema muestra una inestabilidad espacial en función del largo de difracción libre ( $L$ ).

La intersección entre el nacimiento de una biestabilidad y la de una inestabilidad espacial se conoce como punto de Lifshitz [46, 28], el cual posee codimensión tres lo que significa que para caracterizar el espacio de fase de este sistema se necesitan tres parámetros independientes. En la vecindad de este punto, es posible derivar una ecuación de amplitud simplificada asociada a la ecuación original (4.18) [6, 34]. Si se expande el término  $I_w(\theta, L)$  que representa la intensidad de la luz que llega al fotoconductor para una longitud de propagación libre baja ( $L \ll 1$ )

$$I_w(\theta, L) = \frac{I_0}{2} \left\{ 1 + \cos(\beta \cos^2 \theta) + \frac{L}{k} \left[ 1 + \cos(\beta \cos^2 \theta) \partial_{xx} \sin(\beta \cos^2 \theta) - \frac{L}{k} \sin(\beta \cos^2 \theta) \partial_{xx} \cos(\beta \cos^2 \theta) \right] \right\}. \quad (4.28)$$

Al introducir esta expresión en la ecuación (4.21) y al mismo tiempo usar el ansatz  $\theta = \theta_c + u$  para desarrollar una serie de Taylor dejando sólo hasta el término cúbicos se llegará finalmente a una ecuación tipo forma normal de Lifshitz [22, 52]

$$\partial_t u = \eta + \mu u - \nu \partial_{xx} u - \partial_{xxx} u + \kappa (u \partial_{xx} u) + c (\partial_x u)^2. \quad (4.29)$$



En donde los parámetros de la ecuación anterior dependen explícitamente de los parámetros del experimento, lo que para  $\kappa$  y  $c$  significa una dependencia explícita de la longitud de propagación libre.

### 4.3. Propiedades dinámicas en una dimensión

La ecuación tipo TSH no variacional expuesta en la ecuación (4.27) describe la dinámica del sistema en la vecindad del punto de Lifshitz [64]. Esta ecuación posee una dinámica no variacional, esto implica que no es posible definir una energía libre que cumpla una ecuación tipo gradiente, con la excepción del caso  $\kappa = 2c$ , en donde la energía libre  $\mathcal{F}$  quedará con un término adicional equivalente a  $cu(\nabla u)^2$ . Sin embargo, para cualquier otra configuración de parámetros  $\kappa$  y  $c$ , el sistema evolucionará sin minimizar la energía libre. Además, la ecuación es invariante a traslaciones temporales y espaciales. Asimismo, posee simetría espacial ( $x \rightarrow -x$ ). La adición de estos nuevos términos agregará bifurcaciones y nuevos tipos de dinámica al sistema ya estudiado en su versión variacional. A nuestro pesar, resultados teóricos se vuelven difíciles de obtener debido a la complejidad de los nuevos términos, y sólo es posible obtenerlos en aproximaciones o para casos límites [30][29]. Por ello, un tratamiento numérico se vuelve necesario y eficaz, el cual consistió en la exploración del sistema a través de un método espectral, lo que facilita la búsqueda de fenómenos gracias a la rapidez de simulación del método, y un método Runge-Kutta orden cuatro de diferencias finitas para simulaciones largas de fenómenos ya establecidos a través del método anterior.

En el apartado (4.1.1) a través de un análisis lineal de la ecuación TSH variacional se obtuvo la transición desde un estado homogéneo a un patrón estático ( $\omega_c = 0$ ). La inclusión de los términos no variacionales a la ecuación permitirá la emergencia de nuevos estados tales como oscilaciones y caos espaciotemporal, los que en este caso (unidimensional), se considerará sólo el barrido del parámetro  $c$  mientras que  $\kappa$  se mantendrá en un valor constante distinto de cero. Se debe agregar que en la transición entre el estado homogéneo y el patrón estático, los parámetros no variacionales ( $\kappa$  y  $c$ ) no presentan un rol por lo que su variación no afecta lo señalado anteriormente [30]. En función de lo planteado, usando un enfoque numérico para resolver la ecuación (4.27) y utilizando el parámetro no variacional  $c$  para estudiar la dinámica de este sistema desde un patrón estático como estado base, surgen nuevas bifurcaciones: Para  $c < c_{AH} \equiv 5.440 \pm 0.005$  el patrón sigue siendo estático, sin embargo, al momento de traspasar este valor el sistema sufre una bifurcación de Andronov-Hopf [8, 45] lo que implica que dos autovalores complejos conjugados del sistema atraviesan el eje imaginario del plano complejo [24].

Al momento de traspasar el valor crítico para esta bifurcación, el sistema queda caracterizado por oscilaciones  $\omega_c \neq 0$ , las que estarán dominadas por la frecuencia crítica y sus armónicos, y en donde el espectro de Lyapunov estará caracterizado por  $\lambda_1 = 0$  y los siguientes exponentes siendo negativos. Finalmente, el sistema pasa por una segunda bifurcación para un valor  $c_{QP} = 6.350 \pm 0.005$ , el cual cuando el parámetro  $c$  lo supera, el primer exponente de Lyapunov  $\lambda_1$  se vuelve positivo seguido por los siguientes exponentes [24]. Este complejo comportamiento puede ser entendido al analizar el espectro de la transformada de Fourier de la frecuencia del sistema  $S_2(\tau)$ , en donde emergen frecuencias inconmensura-

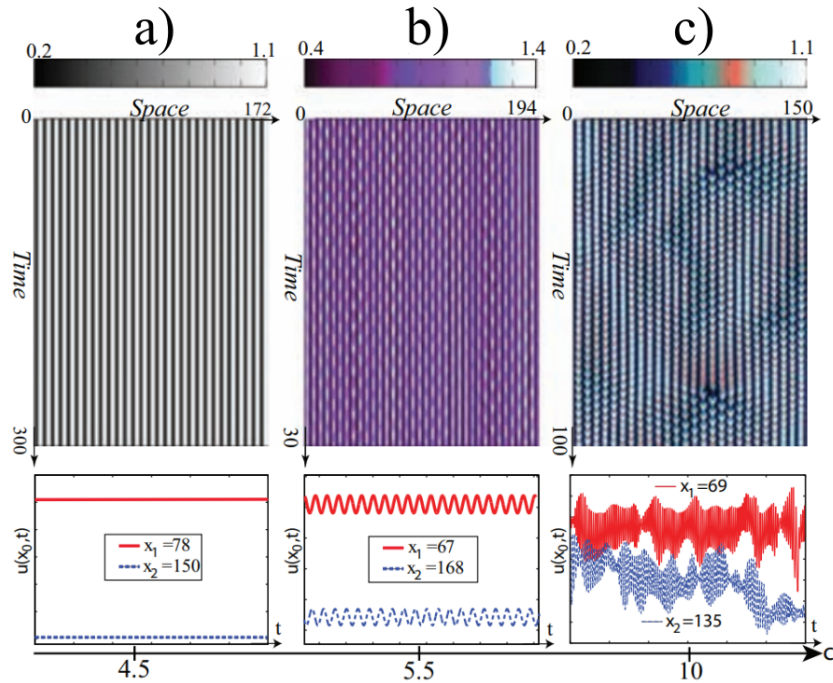


Figura 4.4: Diagrama espaciotemporal del campo  $u(x, t)$  para la ecuación (4.27),  $\eta = -0.04$ ,  $\mu = -0.0921$ ,  $\nu = -1$ ,  $\kappa = -3.5$ , (a)  $c = 4.5$ , (b)  $c = 5.5$  y (c)  $c = 10$  los que muestran estado patrón estático, oscilatorio y caos espaciotemporal respectivamente. Los gráficos inferiores muestran las series de tiempo de cada uno de estos estados. Recuperado de Clerc & Verschuere (2013) [24]

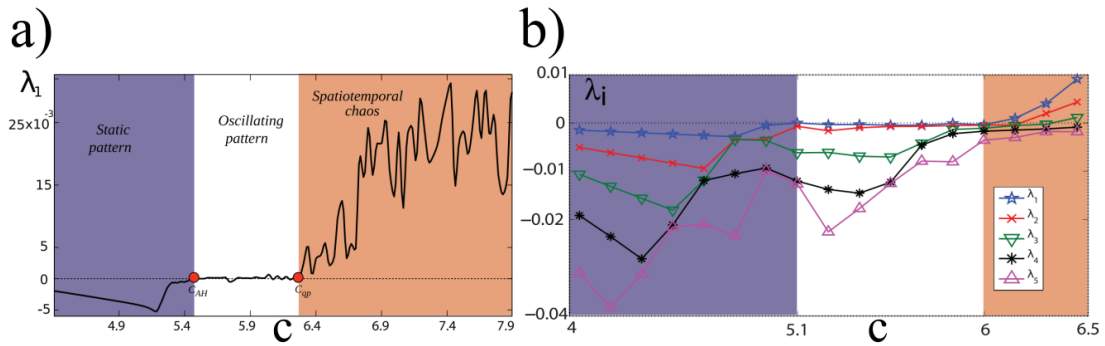


Figura 4.5: a) Diagrama de bifurcación y exponente de Lyapunov más elevado  $\lambda_1$  en función del parámetro no variacional  $c$ . b) Evolución de los cinco más elevados exponentes de Lyapunov. Parámetros de la ecuación:  $\eta = -0.02$ ,  $\mu = -0.092$ ,  $\nu = -1.000$  y  $\kappa = -3.000$ . Recuperado de Clerc & Verschuere (2013) [24]

bles, las que terminan desestabilizando el patrón oscilatorio para dar paso a un estado de caos espacio-temporal caracterizado por una densidad espectral [24]. Esto es una extensión espacial de la ruta al caos por cuasiperiodicidad [12, 77].

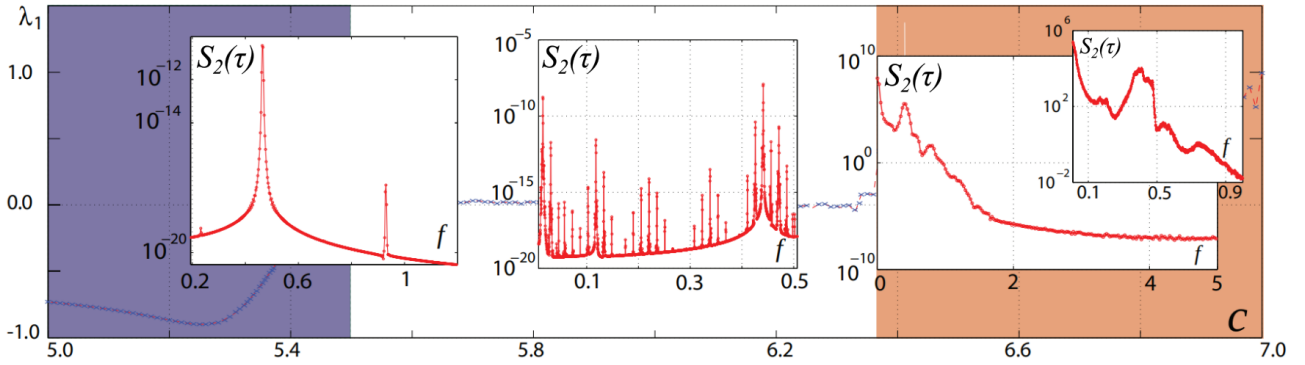


Figura 4.6: Ruta cuasi-periódica al caos espacio-temporal en función del parámetro  $c$  junto con los correspondientes espectros de potencia de la transformada de Fourier. Se puede apreciar la aparición de frecuencias inconmensurables distintas a los armónicos en el espectro del centro. Recuperado de Clerc & Verschueren (2013) [24]

#### 4.4. Propiedades estadísticas del sistema: Dinámica de defectos tipo turbulencia

Ya establecido el comportamiento dinámico del sistema no variacional, por medio del espectro de Lyapunov y espectro de frecuencias en donde emerge un estado caótico espacio-temporal [24], surge la pregunta respecto a las propiedades estadísticas del sistema [59]. En particular, la Figura 4.6 da cuenta de la emergencia de una densidad espectral para el estado de caos espacio-temporal característico de un estado turbulento, por lo que es posible caracterizar este espectro para obtener respuestas respecto a los mecanismos que empujan esta dinámica y a que tipo de complejidad nos enfrentamos.

En primer lugar, se analizó  $S_2(r)$  para el campo  $u(x, t)$  y su señal analítica dada por la transformada de Hilbert del campo original la que entregará la fase  $\phi$  y la envolvente  $A$  asociadas al campo  $u$  original [21]. A pesar que el espectro muestra una tendencia decreciente desde el máximo alcanzado en  $k_c$ , la ley de potencia  $k^{-\alpha}$  no queda manifestada transparentemente debido a la incidencia de la solución base  $u_b$ , la que en este sistema corresponde a un patrón oscilatorio. Para poder limpiar el espectro de la solución base se utilizaron diferentes enfoques basados en filtrar el patrón base. El primer acercamiento consistió en considerar la solución diferencia entre el campo original  $u(x, t)$  y un campo clon  $u'(x, t)$  que corresponde al campo original más una pequeña perturbación espacial [24]

$$\zeta(x, t) = u(x, t) - u'(x, t). \quad (4.30)$$

Este campo aunque no elimina completamente el patrón original si deja entrever el comportamiento complejo que presenta el campo  $\zeta(x, t)$ , el cual posee dinámica permanente debido a la creación y destrucción de los defectos que aparecen en el sistema. La densidad espectral  $S_2(r)$  asociado a la diferencia  $\zeta(x, t)$  muestra una tendencia lineal clara, lo que da cuenta de una ley de potencia de  $k^{-3.5 \pm 0.8}$  para el campo  $\zeta(x, t)$  en su distribución espacial y para los campos de la fase y la envolvente, un exponente de  $1.98 \pm 0.06$ , característico del fenómeno de turbulencia de fase y  $2.58 \pm 0.32$  para la envolvente, lo que puede ser atribuido a un comportamiento tipo turbulencia mediada por defectos [69].

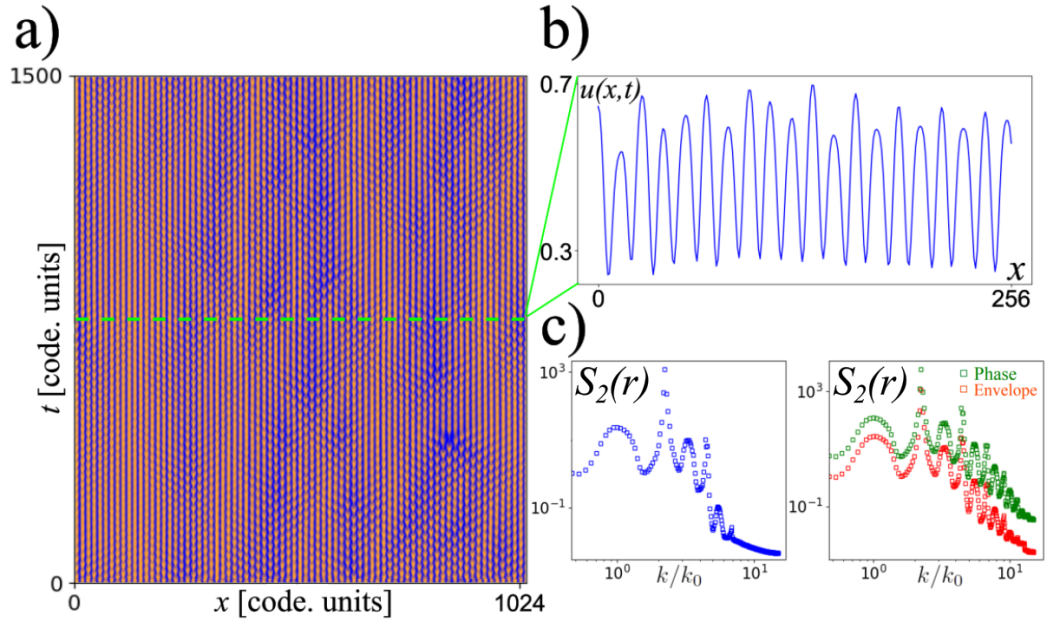


Figura 4.7: **a)** Evolución temporal de la simulación del modelo de Lifshitz no variacional para  $u(x,t)$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. **b)** Perfil espacial del campo  $u(x,t)$ . **c)** Densidad espectral  $S_2(r)$  asociado a múltiples perfiles espaciales de  $u(x,t)$ . Parámetros de la ecuación:  $\eta = -0.04$ ,  $\mu = -0.092$ ,  $\nu = -1.000$ ,  $c = 10.4$  y  $\kappa = -3.05$ .

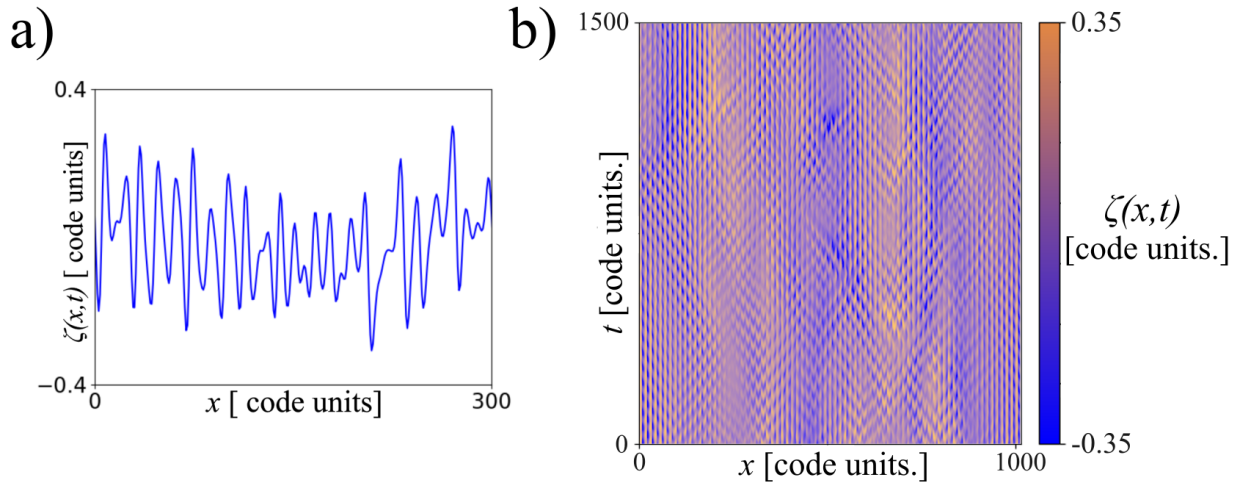


Figura 4.8: **a)** Perfil espacial del campo diferencia  $\zeta(x,t)$  **b)** Evolución temporal del patrón. Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

Por otro lado, en el caso del comportamiento temporal del campo de diferencia, se obtuvo una densidad espectral  $S_2(\tau)$  con precisos exponentes que dan cuenta de una ley de potencia para longitudes de onda menores a la longitud crítica del patrón ( $\omega > \omega_c$ ) muy cercanos a  $\sim \omega^{-2}$  para  $\zeta(x,t)$  y su descomposición en la envolvente y fase, el cual es característico de un sistema tipo turbulencia de fase [59]. Este exponente nace naturalmente al considerar un salto entre dominios, en el caso de la fase este salto de dominios es entre  $-\pi$  y  $\pi$  [54].

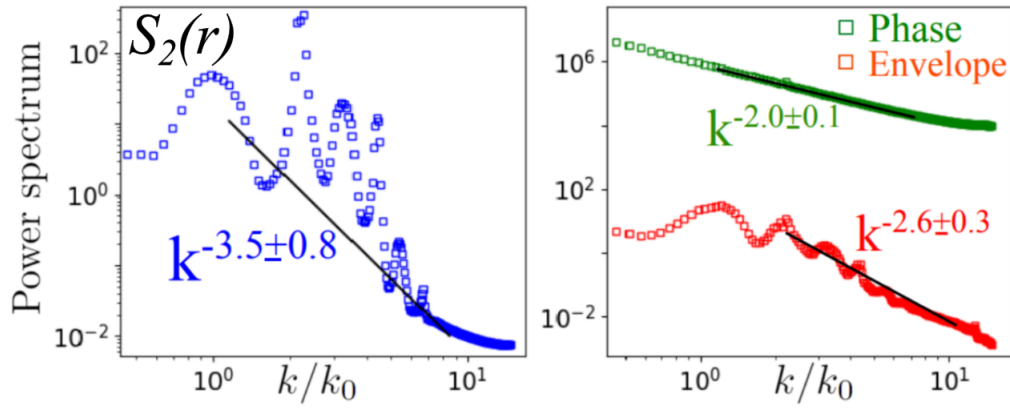


Figura 4.9: Densidad espectral  $S_2(r)$  para el campo  $\zeta(x, t)$  y los campos fase y envolvente de la misma obtenidos a partir de la señal analítica.

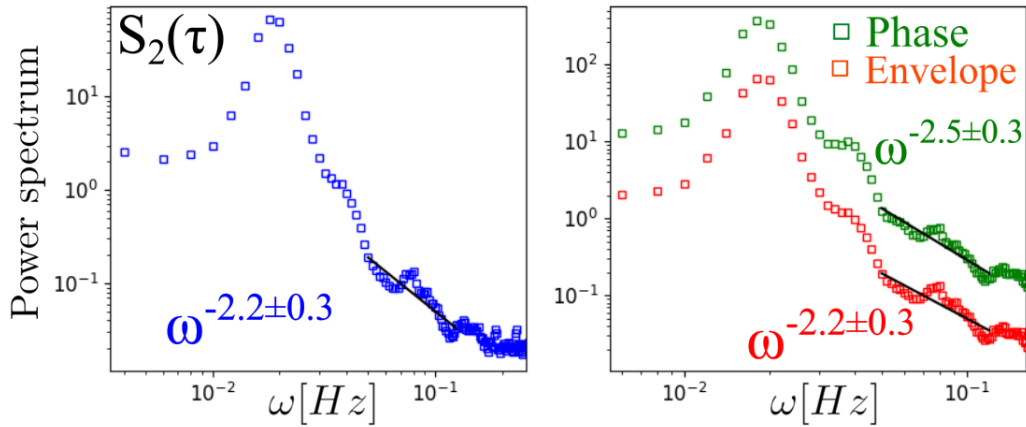


Figura 4.10: Densidad espectral  $S_2(\tau)$  para el campo  $\zeta(x, t)$  y los campos fase y envolvente de la misma obtenidos a partir de la señal analítica.

La idea de restar la solución base  $u_b$  correspondiente al patrón oscilatorio para mantener sólo el comportamiento complejo del sistema, es en sí mismo, un tipo de filtro a los datos obtenidos que permite acceder a una dinámica presente en el sistema pero eclipsada ó apantallada por el patrón oscilatorio que es dominante. En efecto, la Figura 4.9 exhibe como el patrón oscilatorio domina la dinámica para tiempos cortos, siendo observable el comportamiento tipo turbulento sólo después de seguir la evolución luego de muchas iteraciones. No obstante, se puede realizar un análisis de filtro mas exhaustivo al utilizar herramientas de análisis de señales [93]. De esta manera, se implementó filtros de tipo *bandstop* [93] al campo original  $u(x, t)$ , lo que consistió en identificar los peaks originados por el número de onda crítico  $k_c$  y sus armónicos y filtrar el aporte que realizaban estos al campo  $u(x, t)$ . Para ello, se utilizó dos perspectivas:

1. Restar de manera directa la transformada de Fourier de los máximos caracterizados en la densidad espectral correspondientes al número de onda crítico  $k_c$  y sus armónicos en el espacio de Fourier  $u(k)$ . Después de esto, se recupera una función  $u^*(x, t)$ , la cual corresponderá al campo  $u(x, t)$  original menos la contribución de los máximos

relacionados a  $k_c$  aislados mediante su transformada de Fourier.

$$u^*(x, t) = F.T^{-1} [u(k) - u(k_c)]. \quad (4.31)$$

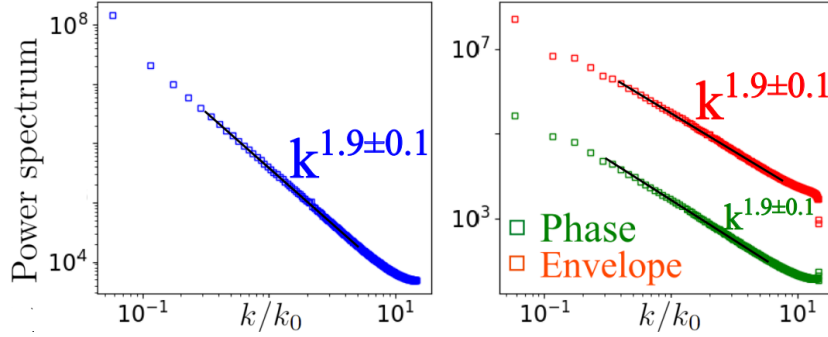


Figura 4.11: Densidad espectral correspondiente a la resta directa de los modos de Fourier correspondientes a  $k_c$

2. Aplicar filtros ya diseñados de tipo bandstop usados en análisis de señales, en donde se probó el efecto de diferentes ejemplares en  $u(x, t)$ . Los filtros experimentados fueron: Butterworth, elipsoidal y de Chebyshev [93]; obteniendo los mejores resultados para el primero.

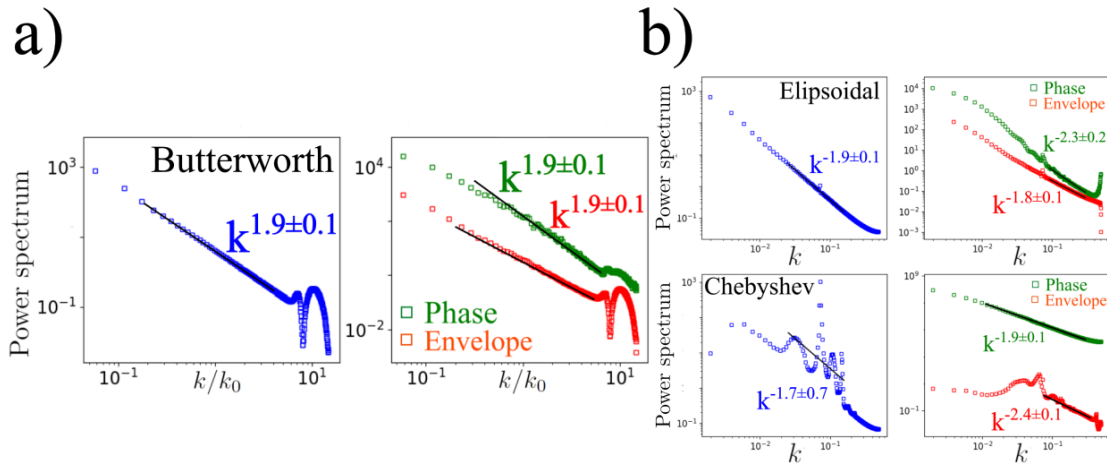


Figura 4.12: Espectros de potencia de  $u(x, t)$  luego de ser filtrar los máximos correspondientes al número de onda crítico y sus armónicos. **a)** Filtro de Butterworth **b)** Filtros elipsoidal y de Chebyshev respectivamente.

El uso de herramientas de filtrado permitió llegar a exponentes limpios para el parámetro de orden, la envolvente y la fase que dan cuenta en su mayoría de la dinámica caótica espaciotemporal del sistema. Esta dinámica presenta un espectro típico de una ley de potencia. Además, permite caracterizar al sistema bajo los fenómenos de dinámica tipo turbulencia

mediada por defectos y turbulencia de fase, por lo que este es un sistema en biturbulencia (leyes de potencia para  $A$  y  $\phi$ ). Gracias a esto, es posible concluir que el análisis anterior permite caracterizar la compleja dinámica observada en el patrón .

#### 4.4.1. Condiciones de borde fijas

En la sección anterior, las simulaciones analizadas corresponden a realizaciones de la ecuación 4.28 con condiciones de borde periódicas, las cuales no son realistas experimentalmente ya que en un problema real siempre existirá una dinámica proveniente de la influencia de los paredes del dominio. En el caso periódico, el sistema sólo evoluciona debido a la naturaleza de la ecuación y no se ve perturbado por los valores de los bordes que no corresponden a valores dados por la ecuación sino por la geometría y topología de las superficies  $\Gamma$ . A pesar de la utilidad de esto, cabe preguntarse si los bordes juegan algún rol preponderante en la dinámica del sistema, y si es que lo juega, su efecto en los exponentes de la densidad espectral estudiado ya que el experimento realizado se realiza con un canal de dimensiones finitas que tiene condiciones de borde bien definidas.

Al tener en cuenta que la densidad de espectro temporal presentado en la Figura 4.10 presenta ya una buena concordancia con la relación de ley de potencia experimental, se analizó solamente el efecto de los bordes en el espectro de la dinámica espacial. Se consideró la experimentación con condiciones de borde de Cauchy, o explicado de forma más simple, una condición para el valor del campo  $u(x, t)$  y otra para sus derivadas en el borde  $\partial\Gamma$ .

$$u(x, t) = u_0 \wedge \partial_x u(x, t) = 0 \wedge \partial_{xx} u(x, t) = 0 \wedge \partial_{xxx} u(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Gamma. \quad (4.32)$$

Para este caso, se utilizó tres diferentes valores de  $u_0$  que tuvieran sentido físico en el contexto del experimento realizado en la válvula.

En primer lugar, un valor nulo  $u_0 = 0.0$  que emula el efecto de la máscara creada por el SLM, la cual crea una zona rectangular iluminada en un fondo sin iluminación. Se puede apreciar como en este caso, la dinámica de la fase se limpia comparado al caso con condiciones periódicas, obteniendo un exponente de  $-2$  correspondiente a un comportamiento tipo turbulencia de fase sin necesidad de filtrar. Por otro lado, aunque hay un efecto en los exponentes, el campo  $u(x, t)$  sigue siendo dominado por el patrón base, por lo cual al usar el filtro Butterworth de tipo bandstop para desprestigiar el efecto de este recuperamos los exponentes obtenidos para las condiciones de borde periódicas. Es posible observar la aparición de picos en el espectro filtrado, estos pueden deberse al efecto del filtro tipo bandstop, el cual se aplica sobre un intervalo específico centrado en  $k_0$ , lo que puede conllevar un salto al acercarnos a los límites de este intervalo. En el caso del límite inferior, este no se percibirá debido a la diferencia significativa entre el tamaño del patrón para  $k$  pequeño y el filtro, mientras que será relevante para  $k$  grande.

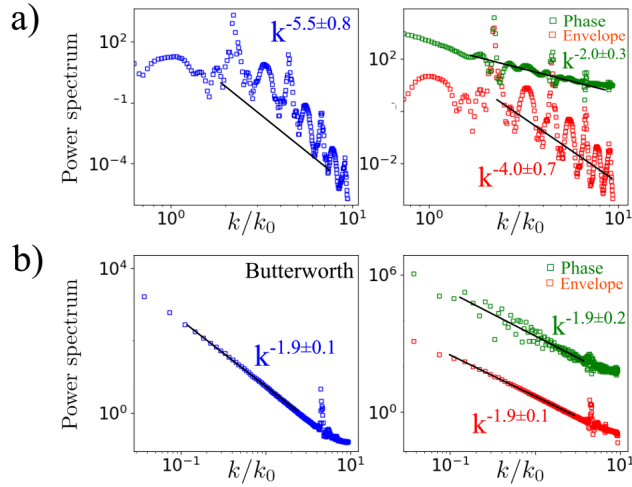


Figura 4.13: a) Densidad espectral de  $u(x,t)$  para condiciones de borde fijas con un valor de  $u_0 = 0.0$ . b) Densidad espectral luego de filtrar usando el filtro de Butterworth. Resultados obtenidos de simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

También, se probó un valor medio  $u_0 = 0.7$  ya que esta transición en la máscara creada por el SLM es, en la realidad, una transición suave. Para este caso, al usar el filtro igualmente recuperamos los exponentes anteriores.

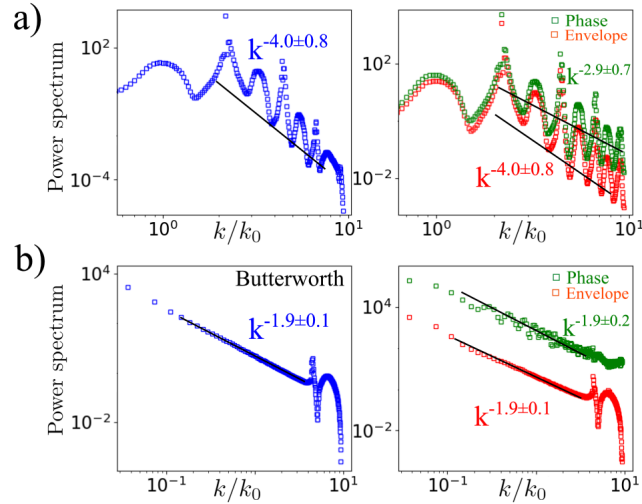


Figura 4.14: a) Densidad espectral de  $u(x,t)$  para condiciones de borde fijas con un valor de  $u_0 = 0.7$ . b) Densidad espectral luego de filtrar usando el filtro de Butterworth. Resultados obtenidos de simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

Finalmente, se utilizó un valor  $u_0 = 1.2$  que da cuenta del encapsulamiento dentro de la máscara creada por el SLM del patrón experimental unidimensional. En este caso la simulación presentaba saltos continuos originados en los bordes, por lo que era una configuración inestable, por eso, para poder realizar el espectro solamente se analizó las posiciones intermedias del campo  $u(x,t)$  para disminuir el efecto del borde.

En conclusión, la dinámica ejercida por los bordes no presenta un impacto significativo



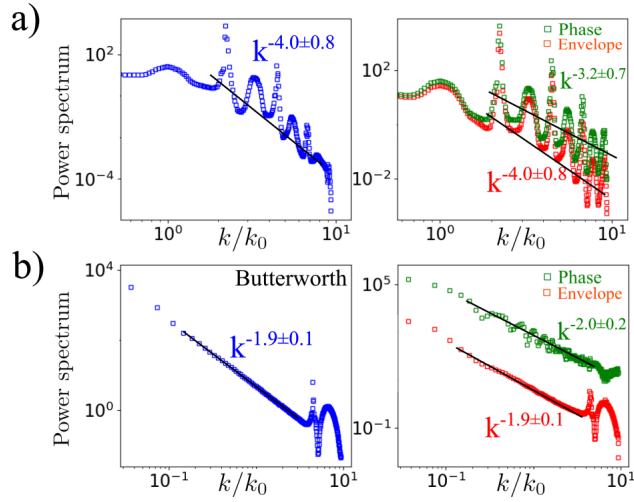


Figura 4.15: a) Densidad espectral de  $u(x,t)$  para condiciones de borde fijas con un valor de  $u_0 = 1.2$ . b) Densidad espectral luego de filtrar usando el filtro de Butterworth. Resultados obtenidos de simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

en la dinámica compleja del sistema, ya que no emula el comportamiento del experimento expresado en los exponentes obtenidos experimentalmente ni tampoco recupera exponentes distintos al momento de filtrar el patrón base.

#### 4.4.2. Simulación cuasi unidimensional

Con base en el estudio del experimento, cabe señalar que este no es un sistema unidimensional. De hecho, la influencia del ratio  $l_y/l_x$  muestra ser significativa para el desarrollo del experimento. Con la finalidad de dar cuenta de la existencia de un canal se realizó una simulación de la ecuación 4.28 en dos dimensiones, considerando largos  $l_y \gg l_x$ . Para ser capaces de crear el canal fue necesario dar condiciones de borde a la simulación, las que fueron periódicas para el eje vertical y de Cauchy (iguales a las definidas en 4.31) para el eje horizontal. De esta manera, se logró llegar a un estado tipo turbulento cualitativamente parecido al experimento con la diferencia de que la simulación es simétrica en el sentido de propagación de los defectos propagándose estos a izquierda y derecha por igual, mientras que el experimento rompe esa simetría presentando una dirección de propagación de los defectos privilegiada (derecha). En la Figura 4.16 se puede observar como se recupera la dinámica de pequeños círculos en un canal, además de la creación y destrucción de defectos por parte de la dinámica del sistema. A pesar de la similitud cualitativa entre experimento y simulación cuasi-1D, es de interés el comportamiento estadístico cuantitativo expresado en la densidad espectral asociado. Se puede observar como existe una clara ley de potencia asociada a las longitudes de ondas más pequeñas de la simulación, quedando en evidencia la existencia de dos regímenes de evolución. Esta partición de la dinámica en dos no se observa en el experimento. Además, los exponentes de los dos regímenes están alejados de lo estudiado experimentalmente y a través del modelo unidimensional anterior. De todas maneras, el primer regimen presenta exponentes tipo turbulencia de defectos.

Para explicar esta discrepancia en los exponentes entre el experimento y este modelo,

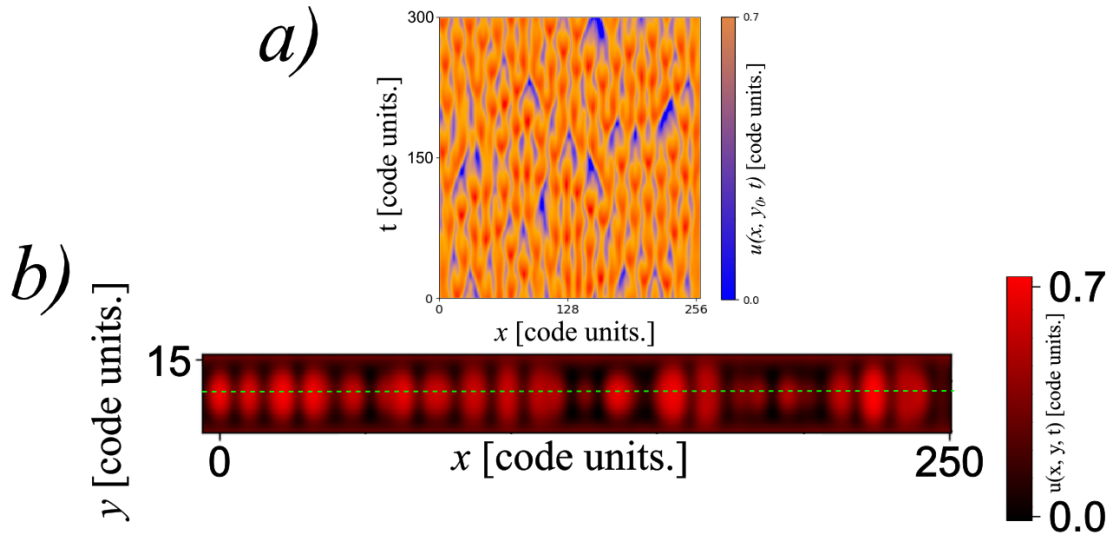


Figura 4.16: a) Evolución temporal de un perfil de intensidad obtenido de la simulación. Este perfil corresponde a un valor de  $y_0 = 8$ . b) Simulación de la ecuación 4.28 para  $u(x, y, t)$  en un canal con dimensiones  $l_x = 256$  y  $l_y = 16$  en unidades de código. Parámetros:  $\eta = -0.33$ ,  $\mu = -0.52$ ,  $\nu = -2.00$ ,  $c = 14.0$ ,  $\kappa = -1.42$  y  $u_0 = 0.25$ . Simulación numérica utilizando el método pseudoespectral combinado con Runge-Kutta orden cuatro en dos dimensiones espaciales.

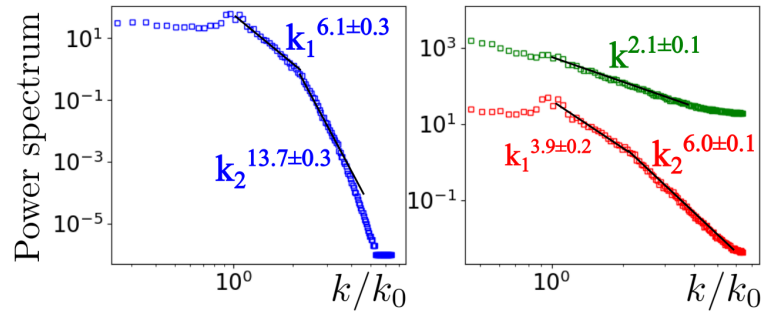


Figura 4.17: Densidad espectral de  $u(x, y_0, t)$  para una caja en dos dimensiones  $l_x \gg l_y$ .

que en teoría debiera ser más cercano a la realidad se propone la existencia de dinámica en dos dimensiones que esté interfiriendo en la dinámica del canal como defectos en forma de pequeñas dislocaciones. Para solucionar esto, es imperante reducir la razón  $l_y/l_x$  además de la posible incidencia de las condiciones de borde elegidas en la implementación de la simulación. No obstante, numéricamente el sistema en el estado de parámetros en el que se encuentra es muy sensible a la variación del ratio entre dimensiones no pudiendo recuperar la dinámica observada para  $l_y/l_x < 0.0625$ . Por el otro lado, el cambio en las condiciones de borde no fue explorado.

# Capítulo 5

## Modelo de Coulet-Iooss para patrones unidimensionales

### 5.1. Ecuación de Ginzburg-Landau con coeficientes complejos

La ecuación de Ginzburg-Landau con coeficientes complejos (CCGLE) se escribe como:

$$\partial_t A = \mu A - (1 + i\beta)|A|^2 A + (1 + i\alpha)\nabla^2 A. \quad (5.1)$$

En donde  $\mu$  es el parámetro de bifurcación,  $\beta$  es la respuesta no lineal de frecuencia y  $\alpha$  el coeficiente de dispersión. Esta ecuación corresponde a una forma normal, por lo que sólo se podrá agregar términos que sean múltiplos de los ya presentes. En este caso, la ecuación 5.1 representa la versión cúbica de esta, la que describirá la variación lenta de la amplitud  $A$  de un sistema al pasar por una inestabilidad de Turing ( $\alpha = 0, \beta = 0$ ) o una inestabilidad oscilatoria (Andronov-Hopf) de manera supercrítica en presencia de mecanismos no lineales débiles, y que posee simetría traslacional ( $x \rightarrow x + x_0$ ) y de reflexión ( $x \rightarrow -x$ ). La ecuación fue introducida inicialmente por Landau cuando desarrollaba una teoría que explicará el fenómeno de superconductividad [40], mientras que Ginzburg añadió el término correspondiente al laplaciano, eso sí, se realizó en un contexto en donde la ecuación era independiente del tiempo. Una versión con dependencia temporal fue introducida más tarde por Schmid [78] y derivada formalmente por Gorkov y Eliashberg [44]. Pero la versión descrita en (5.1) fue derivada en el contexto de fluidos por Stuart y Stewerson [49], aunque esta ecuación ha mostrado gran versatilidad e independencia del fenómeno físico al poder ser derivada en otros contextos como: Convección de Rayleigh-Benard [79], electroconvección en cristales líquidos [53] y sistemas de láseres [25]. Aunque la ecuación (5.1) presenta una variada dinámica, según sus parámetros  $\mu$ ,  $\beta$  y  $\alpha$ , esta ecuación tiene limitaciones [9] y es por eso que surgen alternativas como modificaciones traducidas en términos superiores de tipo  $|A|^2 A$  o ecuaciones acopladas a la original.

En nuestro caso nos interesa estudiar los diferentes estados y propiedades estadísticas de

la ecuación CCGLE en una dimensión:

$$\partial_t A = \mu A - (1 + i\beta)|A|^2 A + (1 + i\alpha) \partial_{xx} A. \quad (5.2)$$

Para empezar, analicemos que sucede en el caso en el cual la ecuación (5.2) posee soluciones periódicas,

$$A(x, t) = R(x, t)e^{i\omega t}e^{\phi(x, t)}. \quad (5.3)$$

Si imaginamos al sistema descrito por la variable continua  $A(x, t)$  en términos del límite  $N \rightarrow \infty$  de múltiples osciladores, los que no necesariamente se encuentran oscilando sincronizadamente (o en fase), nos permitirá tener una descripción basada en términos de 1 fase. De esta manera, reescribiendo la ecuación (5.2) usando el ansatz (5.3) se obtendrá

$$\partial_t R + i\partial_t \phi = (1 + i\alpha) (\partial_{xx} R + 2i \partial_x \phi \partial_x R + R (i\partial_{xx} \phi - (\partial_x \phi)^2)) + R - (1 + i\beta) R^3 \quad (5.4)$$

Separando la ecuación en sus partes real e imaginaria

$$\partial_t R = \partial_{xx} R - R (\partial_x \phi)^2 - \alpha (2\partial_x \phi \partial_x R + R \partial_{xx} \phi) + R - R^3, \quad (5.5)$$

$$\partial_t \phi = \alpha \left( \frac{1}{R} \partial_{xx} R - (\partial_x \phi)^2 \right) + \frac{2}{R} \partial_x \phi \partial_x R + \partial_{xx} \phi - \beta R^2. \quad (5.6)$$

Para poder encontrar solución a este sistema de ecuaciones no lineal acoplado, consideremos pequeñas perturbaciones en la fase alrededor de las oscilaciones uniformes de la forma  $A = R e^{i\Omega t}$ ,

$$\phi = -ct + \varepsilon \Phi(X, T) \wedge R = R_0 + \varepsilon^\gamma r(X, T). \quad (5.7)$$

En donde  $X$  y  $T$  representan variables de dinámica lenta. Por otro lado, como la fase  $\phi$  no tiene un efecto en la dinámica de la ecuación (5.7), se espera una ecuación de la forma:

$$\partial_T \Phi = F(\partial_X \Phi, \partial_{XX} \Phi, \dots). \quad (5.8)$$

sin dependencia de la variable  $\phi$  en sí misma. Debido a la simetría de reflexión espacial, la que no afecta la derivada temporal de la fase, todos los términos en la ecuación de la fase deben contener un número par de derivadas espaciales. Por lo tanto, esperamos que se cumpla  $\partial_T \approx \partial_{XX}$ , lo que sugiere un escalamiento de la forma

$$X = \varepsilon x \quad \wedge \quad T = \varepsilon^2 t. \quad (5.9)$$

Si realizamos un análisis multiescala insertando (5.10) en (5.6) y (5.7)

$$\mathcal{O}(\varepsilon^0): \quad 0 = R_0 - R_0^3 \implies R_0 = 1. \quad (5.10)$$

Las primeras contribuciones no triviales ocurren en  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ , lo que sugiere escoger  $\gamma = 3$ .

$$\mathcal{O}(\varepsilon^3): \quad 0 = -\alpha R_0 \partial_{XX} \Phi + r - 3R_0^2 r \implies r = -\frac{1}{2} \alpha \partial_{XX} \Phi, \quad (5.11)$$

$$\partial_T \Phi = \partial_{XX} \Phi - 2\beta R_0 r \quad (5.12)$$

Lo que al reemplazar la expresión para  $r$  en la ecuación para la fase nos conduce a:

$$\partial_T \Phi = (1 + \alpha\beta) \partial_{XX} \Phi \quad (5.13)$$

Se puede concluir que la fase evoluciona difusivamente con un coeficiente de difusión dado por:

$$D = 1 + \alpha\beta. \quad (5.14)$$

La evolución de la ecuación será inestable si estamos en presencia de un coeficiente de difusión negativo ( $D < 0$ ), lo que conducirá a una antidifusión. En este caso se cumple la relación

$$\alpha\beta < -1. \quad (5.15)$$

Esta condición se conoce como la inestabilidad de Benjamin-Feir [11], la cual da origen a la turbulencia de fase [55].

### 5.1.1. Comportamientos caóticos

La ecuación (5.2) presenta soluciones exóticas que dan cuenta de diferentes formas de caos espaciotemporal o estados desordenados. En particular, Shraiman (1992) [81] distinguió dos formas de comportamiento caóticos: Comportamiento tipo turbulencia mediada por defectos y comportamiento tipo turbulencia de fase. A lo que luego Chaté (1994) [19] extendió al identificar el estado de intermitencia espaciotemporal. Estos diferentes comportamientos estarán representados en un diagrama de fase de la ecuación CCGLE en función de los parámetros  $(\alpha, \beta)$ .

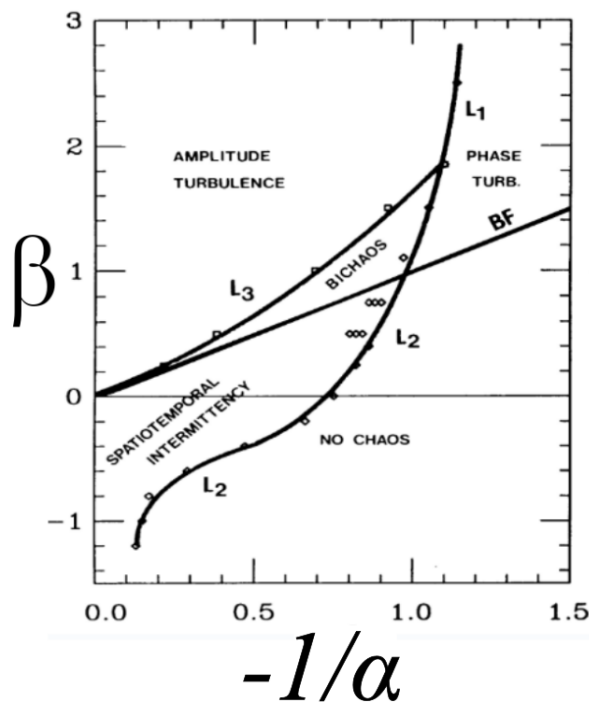


Figura 5.1: Diagrama de fase de la ecuación CCGLE en una dimensión. Recuperado de Chaté (1994) [19]

Se puede observar la existencia de líneas divisorias entre los estados caóticos [19]. En particular se puede observar la línea BF, la cual corresponde a la inestabilidad de Benjamin-Feir caracterizada anteriormente. Por otro lado, la línea  $L_1$  es encontrada a través de un

análisis cuantitativo de la densidad de defectos creada en el sistema [74], la cual se irá a cero al moverse hacia la derecha de  $L_1$ , sin embargo, la transición no exhibe comportamiento crítico [33]. La línea  $L_2$ , definida como el límite de la existencia del estado de desorden espaciotemporal es difícil de determinar de una manera precisa [19]. Esto se debe a la aparición de estados 'congelados', los que dificultan las medidas de correlación que puedan dar un análisis cuantitativo de la transición al enmascarar con estructuras deterministas el fenómeno caótico espaciotemporal [20]. Finalmente, la línea  $L_3$  delimita la región del espacio de fase en donde la turbulencia de fase deja de coexistir con la turbulencia mediada por defectos. Esta transición ocurre por una 'invasión' por parte de los defectos al estado de turbulencia de fase, representada por la adquisición de una velocidad por una de las colas en la turbulencia de fase [19].

## Turbulencia de fase

En este estado de caos espaciotemporal,  $|A|$  nunca llegará al valor de cero y la fase se conserva. Este comportamiento ocurre en la región por encima de la línea  $BF$  (inestabilidad de Benjamin-Feir) y a la derecha de  $L_1$  de la Figura 5.1.

Este comportamiento implica un dominio de la dinámica por parte de la fase en desmedro de  $|A|$  lo que permite una descripción de la dinámica formulada en una expansión del gradiente de la fase para el límite no difusivo  $D \ll 1$ , lo que da nacimiento a la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky [55] [84], la que es una ecuación prototipo del caos espaciotemporal.

$$\partial_t \phi = -\phi \partial_x \phi + \varepsilon \partial_{xx} \phi - \partial_{xxxx} \phi. \quad (5.16)$$

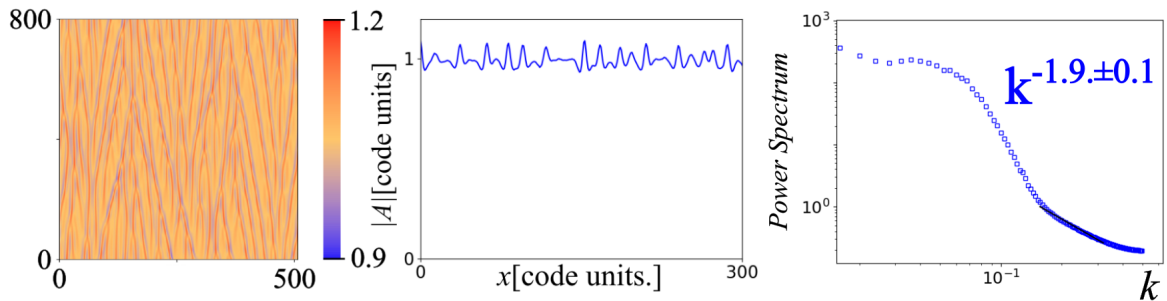


Figura 5.2: Turbulencia de fase observada en  $(\alpha, \beta) = (-1.5, 0.88)$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. a) Evolución temporal del patrón observado b) Perfil espacial c) Densidad espectral del módulo  $|A|$ .

## Intermitencia espaciotemporal

En la región del diagrama de fase por debajo de la línea  $BF$  y a la izquierda de  $L_2$  de la Figura 5.1, en general viven soluciones de tipo onda plana pero al elegir una condición

inicial favorable, la que generalmente se construye a partir de soluciones localizadas, es posible encontrar el estado de intermitencia espaciotemporal, el que estará caracterizado por la presencia de agujeros que evolucionan de una manera compleja temporalmente y dejan una reminiscencia a los triángulos de Zarspinki [36] en su diagrama espaciotemporal.

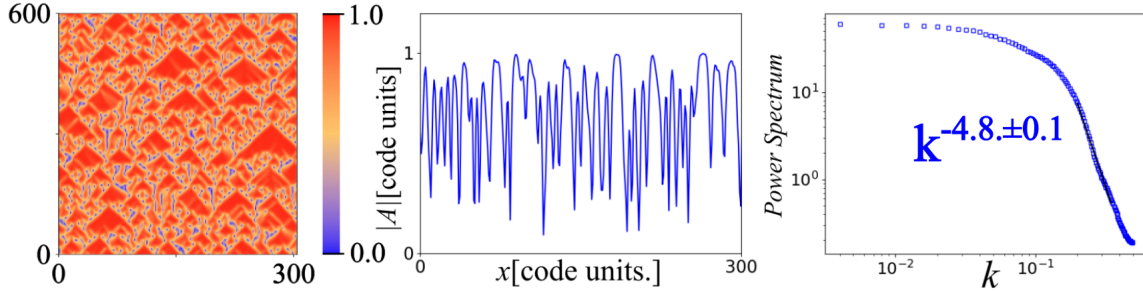


Figura 5.3: Intermitencia espaciotemporal observada en  $(\alpha, \beta) = (0, -3)$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. a) Evolución temporal del patrón observado b) Perfil espacial c) Densidad espectral del módulo  $|A|$ .

### Turbulencia mediada por defectos

En esta región, arriba de la línea  $L_3$  y a la izquierda de  $L_1$  de la Figura 5.1, el sistema estará caracterizado por la presencia de defectos (puntos en el espacio-tiempo en donde  $A = 0$ ). En estos puntos, la fase no estará definida e irá variando en múltiplos de  $2\pi/L$  cuando pase por los defectos ( $L$  es el largo de la caja).

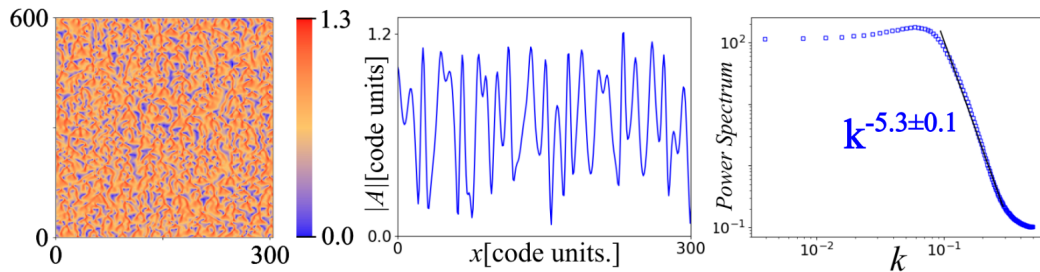


Figura 5.4: Turbulencia de defectos observada en  $(\alpha, \beta) = (-1, 2)$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro. a) Evolución temporal del patrón observado b) Perfil espacial c) Densidad espectral del módulo  $|A|$ .

### Bicaos

Finalmente, esta región da cuenta de la posibilidad de emergencia del estado tipo turbulencia mediada por defectos y turbulencia de fase por igual dependiendo de las condiciones iniciales dadas.

## 5.2. Derivación del modelo: Incidencia de la fase

Como fue señalado en la sección anterior, la ecuación (5.2) presenta una gran variedad de fenómenos interesantes en el contexto del estudio de comportamientos complejos en los sistemas extendidos como estados localizados y soluciones con dinámica permanente. Sin embargo, no es un modelo perfecto por lo que, por ejemplo, no puede dar cuenta de la emergencia de ondas viajeras.

En nuestro caso, cabe preguntarse si la aparición de una inestabilidad de Andronóv-Hopf, y la siguiente inestabilidad que da paso al caos espaciotemporal de nuestro sistema, teniendo como solución base  $u_b$  un patrón oscilatorio, justifica el uso del ansatz en términos de su amplitud  $A$  y su fase  $\phi$ , con la finalidad de recuperar los exponentes obtenidos experimentalmente que la ecuación CCGLE en el estado tipo turbulencia de defectos no puede. Para ello, Coulet & Iooss (1990) [26] desarrollan un modelo en términos de la amplitud  $A$  que considera el nacimiento de esta inestabilidad desde una solución base periódica.

Si se parte de la base que la ecuación diferencial parcial que describe un sistema físico extendido en una dimensión es de la forma general:

$$\partial_t U = f_\mu(U, \nabla). \quad (5.17)$$

Donde  $\mu$  representa algún parámetro de control. De esta forma, para dar cuenta de la existencia de esta solución base periódica y con frecuencia  $\omega$  se asume una solución  $u_0$  que tiene simetría de traslación en el espacio ( $x \rightarrow x + x_0$ ), de reflexión ( $x \rightarrow -x$ ) y de traslación en el tiempo ( $t \rightarrow t + t_0$ ). Debido a la simetría de traslación en el espacio,  $u_0(x + \phi)$  también será solución, por lo que  $\xi_0(x) = \partial u_0 / \partial x$  aparece como un modo de Goldstone [42] del problema lineal asociado a la estabilidad de  $u_0$  y describe las perturbaciones de la fase del patrón base. Este nuevo grado de libertad estará acoplado con las inestabilidades que experimente el patrón.

Considerando una perturbación de  $u_0$  de la forma

$$U(x, t) = u_0(x + \phi) + u(x + \phi, t). \quad (5.18)$$

En donde  $u$  fue escogido para ser ortogonal a  $\xi_0$  lo que implica que  $(u, \xi_0) = 0$ , para  $(f, g)$  representando el producto escalar en el espacio de fase. Luego de linealizar la ecuación 5.4, esta se reduce a

$$\partial_t \phi = (\mathcal{L}u, \chi_0), \quad (5.19)$$

$$\partial_t u = \mathcal{L}(x)u - (\mathcal{L}u, \chi_0) \xi_0(x) \equiv L(x)u. \quad (5.20)$$

En donde  $\chi_0 \equiv \xi_0(x) / \|\xi_0\|^2$  y  $\mathcal{L}(x) = \partial f / \partial u|_{u_0}$ . Además,  $\mathcal{L}$  y  $L$  son operadores lineales con coeficientes periódicos que conmutan con las relaciones de simetría. De esta forma, el surgimiento de la inestabilidad para  $u_0$  se reduce a un problema de valores propios  $LV = \sigma V$ .

Si se asume que para un valor de  $\mu = 0$  ocurre una inestabilidad, entonces el valor propio tomará los valores  $\sigma_0 = 0$  o  $\sigma_0 = \pm i\omega$ . Luego, considerando las condiciones de borde periódicas del problema, surge una solución acotada tipo onda de Bloch [14]:

$$V_0(x) = e^{ikx} \hat{V}_0(x). \quad (5.21)$$



En donde  $\hat{V}_0(x+a) = \hat{V}_0(x)$  y  $k$  es una constante real. Si definimos  $V_0^j$  como el vector propio crítico en la vecindad de la inestabilidad ( $\mu = 0$ ), la solución a la ecuación 5.4 será de la forma

$$U(x, t) = u_0(x + \phi) + u(x + \phi, X, t, T) + h.o.t. \quad (5.22)$$

$$u(x, X, t, T) = \sum_j A_j e^{\sigma_0 t} V_0^j(x). \quad (5.23)$$

En donde  $A_j$  y  $\phi$  son funciones de las variables lentas  $(X, T)$ . La solución será finalmente representada bajo las condiciones de solubilidad:

$$\partial_T A_i = \mathcal{A}(\{|A_j|^n A_j\}, \phi) \quad \partial_T \phi = \Phi(\{A_j\}, \phi). \quad (5.24)$$

Coullet y Iooss [26] elaboran esta idea para los diez posibles casos que pueden ocurrir en una inestabilidad. Para nuestro caso de interés, consideramos sólo la opción de una inestabilidad **oscilatoria** y **simétrica**, lo que se traduce en la consideración de un valor propio  $\sigma_0 = \pm i\omega$  en la ecuación 5.10, en donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación en el tiempo y de la condición de simetría de reflexión ( $S$ ).

$$u(x, X, t, T) = A(X, T) e^{i\omega t} V_0(x), \quad (5.25)$$

$$S\hat{V}_0 = \hat{V}_0. \quad (5.26)$$

Al considerar estas condiciones se puede encontrar la forma específica de las ecuaciones para  $A(X, T)$  y  $\phi(X, T)$ , la que corresponde a dos ecuaciones diferenciales parciales acopladas:

$$\partial_T A = \mu A - (1 + i\beta)|A|^2 A + (1 + i\alpha) \partial_{XX} A + \xi_1 \partial_X \phi A, \quad (5.27)$$

$$\partial_T \phi = \partial_X (|A|^2) + i\delta (\partial_X A \bar{A} - A \partial_X \bar{A}) + \partial_{XX} \phi. \quad (5.28)$$

En donde  $\xi_1$  es una constante compleja y  $\delta$  una constante real.

### 5.3. Nuevos estados en el estado tipo turbulencia de defectos

Partiendo desde la base del estado tipo turbulencia mediada por defectos obtenido usando la ecuación (5.1) con parámetros  $\alpha = -1$  y  $\beta = 2$ , se procederá estudiar la dinámica del sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas dado por (5.14) y (5.15). Para ello, se realizaron simulaciones numéricas del sistema acoplado usando el método de Runge-Kutta orden cuatro [17], en donde se debió resolver tres ecuaciones acopladas al considerar que  $A = A_r + iA_i$ . Es necesario que el acoplamiento con la nueva dinámica dada por el nuevo término en (5.14) respecto a la ecuación CCGLE y la ecuación para la fase sea débil. Esto se logrará usando una constante de acoplamiento  $\varepsilon$  en el término de acoplamiento con la fase de la ecuación (5.14).

$$\partial_T A = \mu A - (1 + i\beta)|A|^2 A + (1 + i\alpha) \partial_{XX} A + \varepsilon(\gamma_1 + i\gamma_2) \partial_X \phi A, \quad (5.29)$$

$$\partial_T \phi = \partial_X (|A|^2) + i\delta (\partial_X A \bar{A} - A \partial_X \bar{A}) + \partial_{XX} \phi. \quad (5.30)$$

En donde  $\varepsilon$  variará entre los valores de cero (sin acoplamiento) a uno (máximo acoplamiento),  $\gamma_1$  da cuenta de la constante real del término de acoplamiento y  $\gamma_2$  es la constante imaginaria de este. Este modelo descrito en las ecuaciones (5.16) y (5.17) se le nombrará como modelo Coulet-Iooss.

En primer lugar, se analizó el caso  $\varepsilon = 0$ , el que implica una evolución sin acoplamiento para la ecuación de la amplitud  $A(x, t)$  con la fase  $\phi(x, t)$ , recuperando para esta ecuación el modelo de Ginzburg-Landau [40] con coeficientes complejos. Sin embargo, la ecuación para la fase si evolucionará acoplada a la amplitud, la que se encuentra en el estado tipo turbulencia mediada por defectos, por lo que se investigó su diagrama de bifurcación en función del parámetro  $\delta$ .

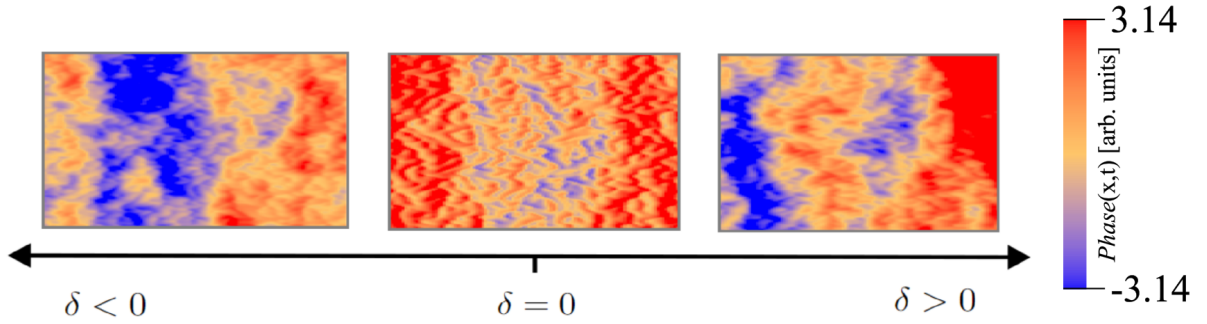


Figura 5.5: Evolución temporal de  $\phi(x, t)$  en función del parámetro  $\delta$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

Se puede apreciar como para un valor  $\delta = 0$ , se recupera una dinámica tipo turbulencia de defectos en la fase  $\phi(x, t)$  lo que es esperado considerando que esta evolucionará sólo con un término difusivo y uno dependiente del módulo  $|A|^2$ , el que presenta un simil de evolución temporal. Por otro lado, para valores  $\delta \neq 0$  se puede apreciar simetría en el estado alcanzado al variar el parámetro para valores  $\delta > 0$  y  $\delta < 0$ . Este estado presenta una distribución en el espacio entre dos dominios.

Luego de inspeccionar el espacio de fase de (5.17) para  $\varepsilon = 0$ , lo que implica una condición de no acoplamiento, se estudió el comportamiento del sistema con acoplamiento débil para  $\delta > 0$ , lo que se traduce en un valor de  $\varepsilon = 0.2$ . Este tipo de acoplamiento se justifica ya que se requiere obtener un estado tipo turbulencia de defectos alterado, en donde la fase tenga un papel en la dinámica pero no de paso a un estado completamente nuevo sino que tenga una incidencia modulando los exponentes registrados en la ecuación CCGLE. De esta manera, ahora es necesario recorrer el nuevo diagrama de fase para la ecuación (5.16) fijado en  $(\alpha, \beta) = (-2, 2)$  correspondiente a un estado base de turbulencia mediada por defectos para los nuevos parámetros reales  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ .

Al mismo tiempo, para el estudio de la densidad espectral  $S_2(r)$  a obtener y con la finalidad de comparar los resultados con el modelo de TSH se necesita una poder construir una función de prueba  $u(x, t)$  en términos de las variables del modelo de Coulet-Iooss  $|A(x, t)$  y  $\phi(x, t)$ . En donde definiremos a  $\phi(x, t)$  como la fase del patrón base  $u_b$ , mientras que  $\varphi(x, t)$  corresponderá a la fase asociada al modo con amplitud  $A(x, t)$ , obtenida mediante la relación

$\varphi(x, t) = \arctan(A_y/A_x)$ . La función de prueba escogida  $u(x, t)$  será una representación básica de un modo oscilatorio base más uno asociado a la amplitud  $A(x, t)$ .

$$u(x, t) = \cos(nx + \phi(x, t)) + A(x, t) \cos(nx + \varphi(x, t)) \quad (5.31)$$

A continuación se presentan los nuevos estados explorados en el modelo Coulet-Ioss para diferentes valores de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  con parámetro  $\delta > 0$ . Es importante señalar que este análisis fue repetido para valores de  $\delta < 0$ , obteniendo los mismos estados pero con parámetros  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  antisimétricos.

**Estado:**  $\gamma_1 = -1$  &  $\gamma_2 = 1$

En este estado vemos un comportamiento que se asemeja al tipo turbulencia de defectos pero con ciertos picos persistentes en el tiempo y una estructura de los defectos y los máximos diferente a la observada en la ecuación CCGLE.

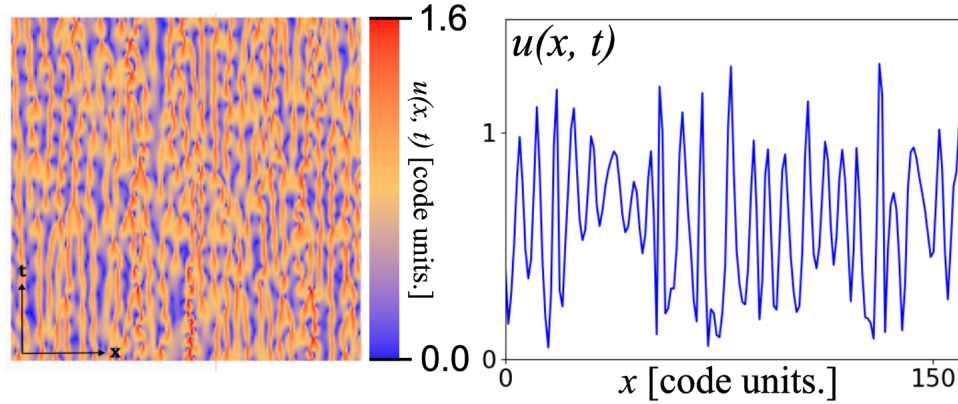


Figura 5.6: Evolución temporal y perfil asociado del estado  $\gamma_1 = -1$  &  $\gamma_2 = 1$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

Respecto al espectro se observan dos regímenes, obteniendo valores cercanos en los exponentes para el primero de estos en comparación al experimento. Sin embargo, la existencia de estos dos regímenes no coincide con lo observado experimentalmente.

**Estado:**  $\gamma_1 = -2$  &  $\gamma_2 = 2$

De manera similar, surge este estado, el cual correspondería al mismo signo de parámetros usados en el caso anterior pero con valores más elevados. Se diferencia del caso anterior ya que se puede observar una forma de los picos y defectos más pronunciada y un comportamiento más errático (en el sentido de impredecible), además de una densidad de defectos menor, los cuales no tienden a invadir el espacio contiguo como en el estado anterior.

Respecto al espectro podemos observar un régimen marcado alejado completamente del experimento caracterizado por exponentes que no coinciden en ningún caso respecto a  $|A(x, t)|$  y  $u(x, t)$ .

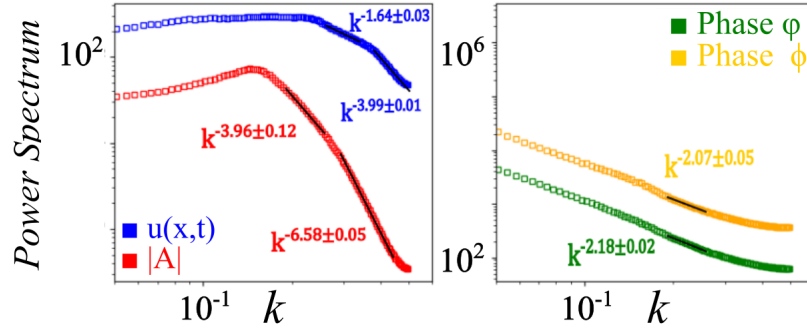


Figura 5.7: Densidad espectral para las variables  $|A(x,t)|, u(x,t), \phi(x,t)$  y  $\varphi(x,t)$  para parámetros  $\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$  y  $\varepsilon = 0.2$ .

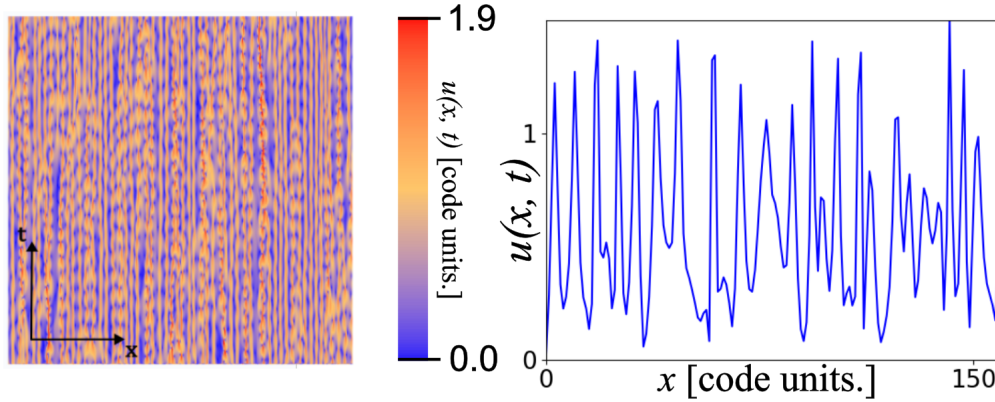


Figura 5.8: Evolución temporal y perfil asociado al estado  $\gamma_1 = -2$  &  $\gamma_2 = 2$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

**Estado:**  $\gamma_1 = 0$  &  $\gamma_2 = 2$

Este estado recuerda al tipo turbulencia de defectos observado en la ecuación (5.2), con la diferencia de que los defectos que surgen en este nuevo estado pueden ser más prolongados en el tiempo

Respecto al espectro, se recupera un exponente  $-2$  para el campo  $u(x,t)$  y la fase, pero la variable  $|A|$  presenta un escalamiento igual al obtenido para la turbulencia de defectos de la ecuación CCGLE (5.2), por lo que no cumple el propósito de buscar una modulación en este exponente.

**Estado:**  $\gamma_1 = 1$  &  $\gamma_2 = 1$

Este estado también recuerda al estado de turbulencia de defectos original pero la prolongación de los defectos es mayor, además de la existencia de máximos también prolongados. Por otro lado, la cantidad de defectos creados/destruidos disminuye respecto al estado base.

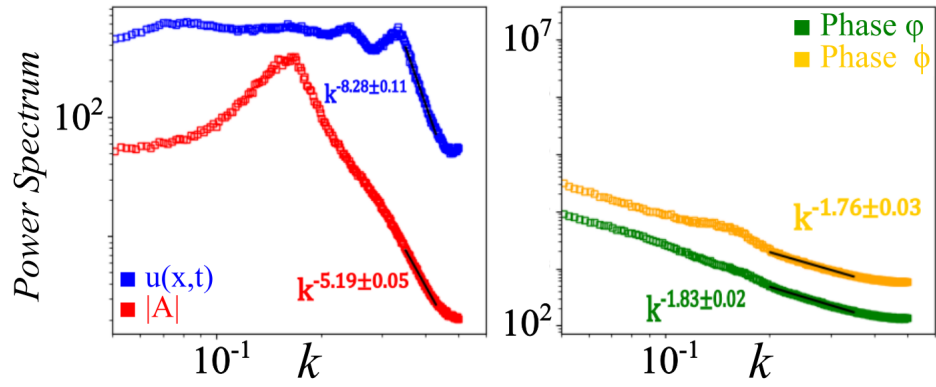


Figura 5.9: Densidad espectral para las variables  $|A(x,t)|, u(x,t), \phi(x,t)$  y  $\varphi(x,t)$  para parámetros  $\gamma_1 = -2, \gamma_2 = 2$  y  $\varepsilon = 0.2$ .

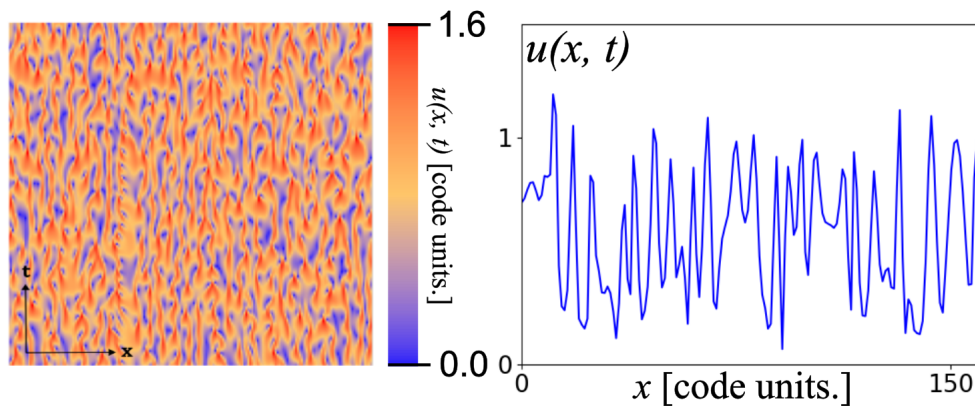


Figura 5.10: Evolución temporal y perfil asociado al estado  $\gamma_1 = 0$  &  $\gamma_2 = 2$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

Respecto a la densidad espectral, aunque se observa un exponente que tiende a  $-2$  para el campo  $u(x,t)$  coincidiendo con resultados experimentales, la  $|A|$  aumenta su pendiente, adquiriendo un valor de  $-6$ , lo que se aleja aún más que el estado base obtenido de turbulencia de defectos en la ecuación CCGLE.

**Estado:**  $\gamma_1 = -2$  &  $\gamma_2 = -2$

Comparado con los casos anteriores en donde observábamos estados que recordaban al tipo turbulencia de defectos original, en este caso se aprecia un estado nuevo que tiene características del tipo turbulencia de fase, ya que es posible observar los caminos creados por los picos al viajar por el espacio y destruirse con otros pero también la existencia de una dinámica de defectos ( $|A| = 0$ ). Cabe señalar también que la forma de los picos resulta extrañamente afilada.

En lo referente a la densidad espectral, se puede apreciar la existencia de dos regímenes para  $u(x,t)$ . No obstante, ninguno de estos logra emular los exponentes obtenidos experimentalmente. Por otro lado, la amplitud  $|A|$  presenta un exponente entre  $-3$  y  $-4$ , lo que

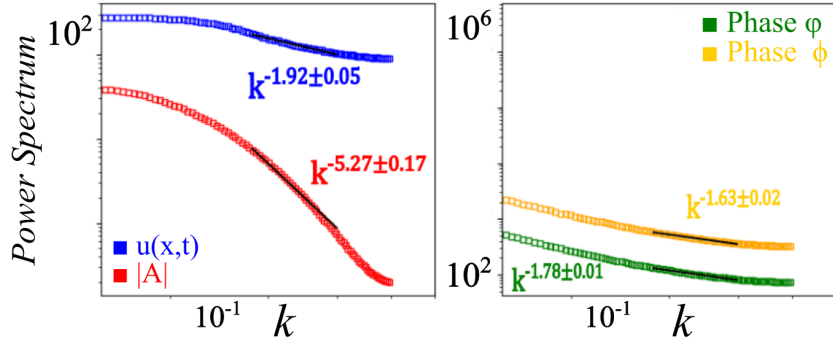


Figura 5.11: Densidad espectral para las variables  $|A(x,t)|, u(x,t), \phi(x,t)$  y  $\varphi(x,t)$  para parámetros  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 2$  y  $\varepsilon = 0.2$ .

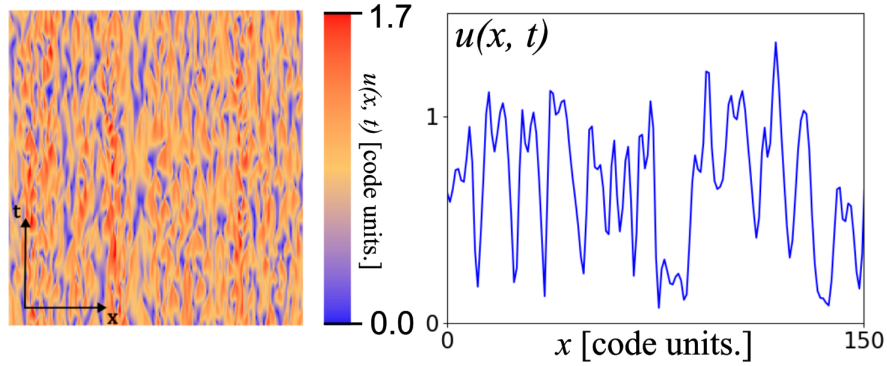


Figura 5.12: Evolución temporal y perfil asociado al estado  $\gamma_1 = 1$  &  $\gamma_2 = 1$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

no se ajusta de la mejor forma a los resultados experimentales.

**Estado:**  $\gamma_1 = 2$  &  $\gamma_2 = 0$  **y estado:**  $\gamma_1 = 2$  &  $\gamma_2 = -2$

Finalmente, estos últimos estados llevan al sistema a un comportamiento intermitente, lo que queda de manifiesto al observar la evolución temporal de estos estados en donde se observan estructuras parecidas a triángulos de Zarspinski [36]. Este paso a la intermitencia resulta particularmente interesante ya que se puede interpretar la adición de la ecuación para la fase en su parámetro  $\gamma_1$  como una traslación en el espacio de fase correspondiente a la Figura 5.1 desarrollada por Chaté [19] ya que los parámetros  $(\alpha, \beta)$  siguen siendo los correspondientes al estado tipo turbulencia mediada por defectos.

El espectro obtenido en ambos casos muestra una buena concordancia en su primer régimen con los exponentes del experimento, salvo la aparición de un segundo régimen de ley de potencia en la amplitud  $|A|$ . Sin embargo, el análisis realizado en el capítulo 1 para probar la existencia de intermitencia o autosimilaridad [38] muestra que el fenómeno experimental estudiado no corresponde al estado de intermitencia.

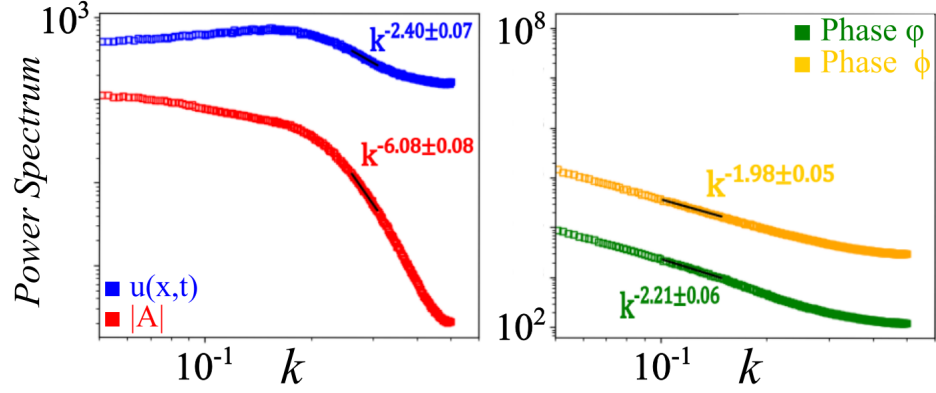


Figura 5.13: Densidad espectral para las variables  $|A(x,t)|$ ,  $u(x,t)$ ,  $\phi(x,t)$  y  $\varphi(x,t)$  para parámetros  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 1$  y  $\varepsilon = 0.2$ .

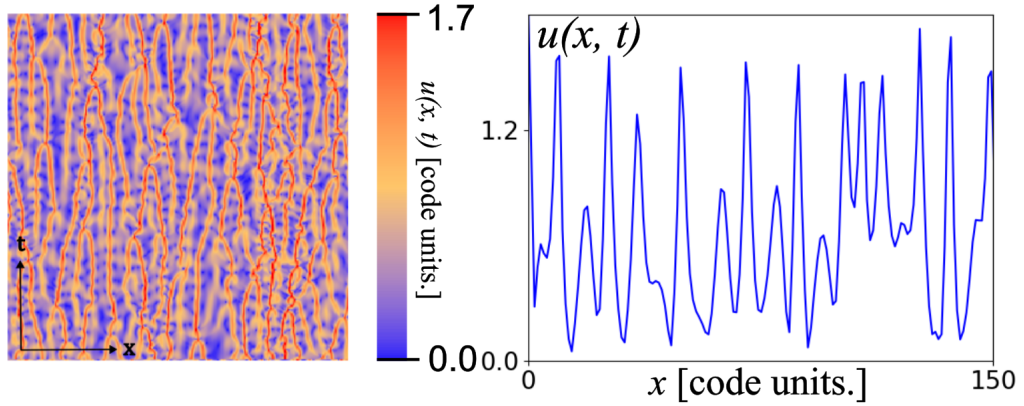


Figura 5.14: Evolución temporal y perfil asociado al estado  $\gamma_1 = -2$  &  $\gamma_2 = -2$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

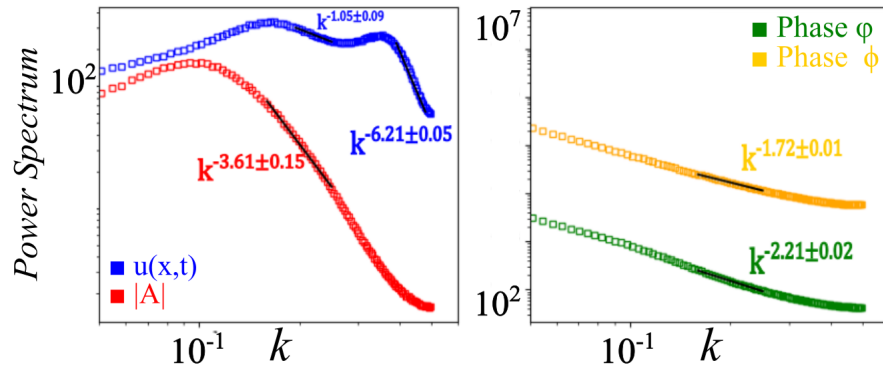


Figura 5.15: Densidad espectral para las variables  $|A(x,t)|$ ,  $u(x,t)$ ,  $\phi(x,t)$  y  $\varphi(x,t)$  para parámetros  $\gamma_1 = -2$ ,  $\gamma_2 = -2$  y  $\varepsilon = 0.2$ .

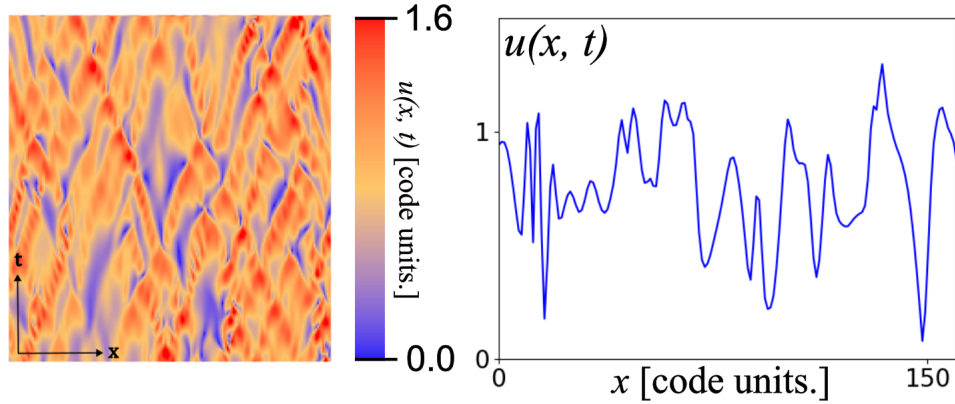


Figura 5.16: Evolución temporal y perfil asociado al estado  $\gamma_1 = 2$  &  $\gamma_2 = 0$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

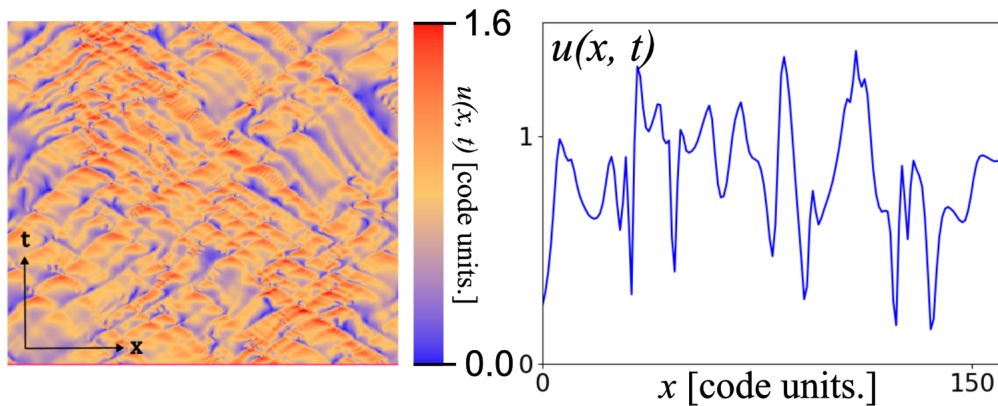


Figura 5.17: Evolución temporal y perfil asociado al estado  $\gamma_1 = 2$  &  $\gamma_2 = -2$ . Simulación numérica utilizando el método de Runge-Kutta orden cuatro.

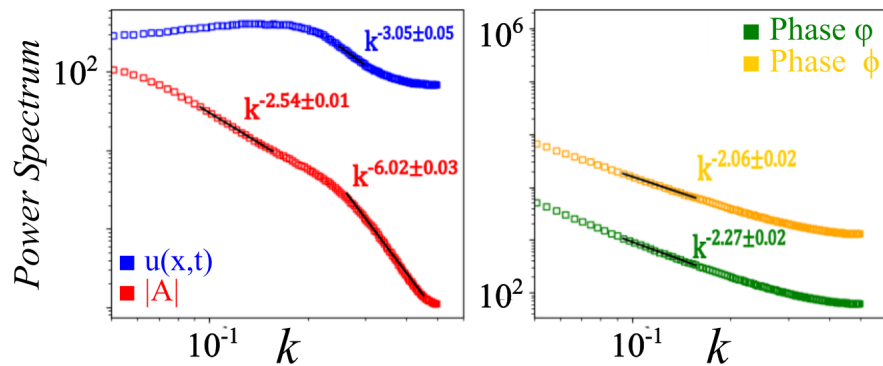


Figura 5.18: Densidad espectral para las variables  $|A(x,t)|$ ,  $u(x,t)$ ,  $\phi(x,t)$  y  $\varphi(x,t)$  para parámetros  $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 0$  y  $\varepsilon = 0.2$ .



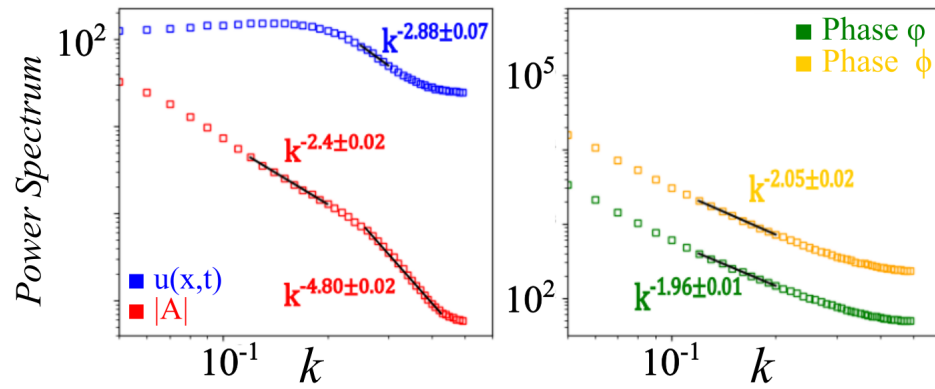


Figura 5.19: Densidad espectral para las variables  $|A(x,t)|$ ,  $u(x,t)$ ,  $\phi(x,t)$  y  $\varphi(x,t)$  para parámetros  $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = -2$  y  $\varepsilon = 0.2$ .

# Capítulo 6

## Extensión del problema a dos dimensiones

En los capítulos anteriores se investigó el fenómeno de la emergencia del comportamiento tipo turbulencia de un patrón en una dimensión espacial desde un punto de vista experimental, teórico y computacional. Ahora, nos adentraremos en un territorio más complejo al extender nuestro problema de estudio a dos dimensiones espaciales. El paso de una dimensión a dos introduce desafíos adicionales en todos los aspectos de investigación ya que los fenómenos tendrán un grado de libertad adicional, el cual puede complejizar lo entendido hasta ahora en una dimensión. Asimismo, defectos en una dimensión que se encuentren en dos dimensiones espaciales adquieren propiedades topológicas. En este capítulo se presentarán los avances realizados hasta ahora en esta dirección sobre los experimentos y simulaciones.

### 6.0.1. Simulaciones de la ecuación Turing-Swift-Hohenberg no variacional en dos dimensiones

Consideremos la ecuación de TSH no variacional en dos dimensiones

$$\partial_t u = \eta + \mu u - \nu \nabla^2 u - \nabla^4 u + \kappa (u \nabla^2 u) + c (\vec{\nabla} u)^2. \quad (6.1)$$

En su forma variacional ( $\kappa = c = 0$ ) ó ( $\kappa = 2c$ ) esta ecuación presenta la aparición de patrones, los cuales en dos dimensiones pueden ser de tipo laberíntico, circulares o alargados siendo estos estados estables y estacionarios [2]. Además, como resultado de la inestabilidad espacial del estado uniforme, el sistema presenta coexistencia entre los diferentes patrones y el estado homogéneo. En particular, nos interesa usar como estado base el correspondiente a un patrón formado por estructuras circulares. Si consideramos ahora la presencia de los términos no variacionales ( $\kappa \neq 0$  &  $c \neq 0$ ), el sistema presentará nuevas transiciones que darán nacimiento a nuevos estados, los cuales podrán ser trazados en función de  $\kappa$  y  $c$ . Para confirmar esto, se llevaron a cabo simulaciones numéricas de la ecuación (6.1) a través de un método pseudoespectral en una grilla de  $256 \times 256$ , los cuales fueron contrastados con un método de Runge-Kutta orden 4 en un grilla de  $512 \times 512$  para evitar malinterpretaciones numéricas.

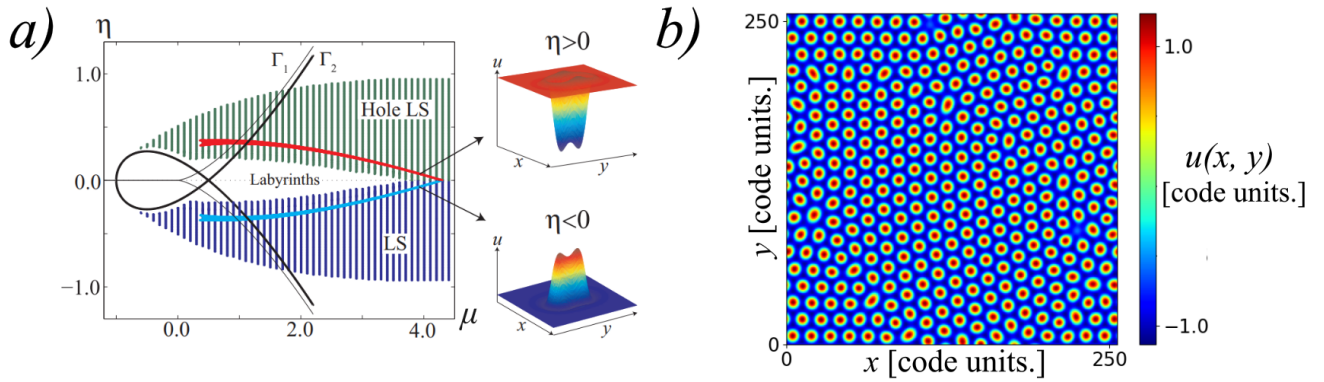


Figura 6.1: **a)** Diagrama de fase para la ecuación TSH en dos dimensiones en donde la zona blanca interior corresponde a un patrón laberíntico, las zonas de líneas intermitentes a un patrón circular y las líneas continuas a una zona de coexistencia con un patrón circular alargado. Recuperado de Bordeau & Clerc (2015) [15] **b)** Estado base variacional de tipo patrón circular en la ecuación TSH en dos dimensiones con parámetros  $\eta = -0.29$ ,  $\nu = -2$ ,  $\mu = 0.13$ ,  $\kappa = 0$ ,  $c = 0$ . Simulación numérica utilizando el método pseudoespectral junto con Runge-Kutta orden cuatro en dos dimensiones espaciales.

Para explorar el espacio de fase  $(\kappa, c)$  en dos dimensiones se intentó emular las transiciones encontradas en una dimensión por Clerc & Vershciuren (2013) [24], lo que equivale a para un valor constante de  $\kappa$  utilizar el parámetro  $c$  como variable de control. Específicamente, para el caso en una dimensión se utilizó un valor constante de  $\kappa = -3.11$ . No obstante, se ha comprobado que en dos dimensiones el sistema cambia sustancialmente su comportamiento en función de este parámetro, siendo este un valor elevado en lo que sería la contribución de  $\kappa$ . Por este motivo se hizo realizó primero un barrido en  $\kappa$  para ver el intervalo en el que es posible mover este parámetro sin aniquilar los estados ni obtener errores numéricos. Se presenta a continuación los resultados de este barrido manteniendo  $c = 0$ .

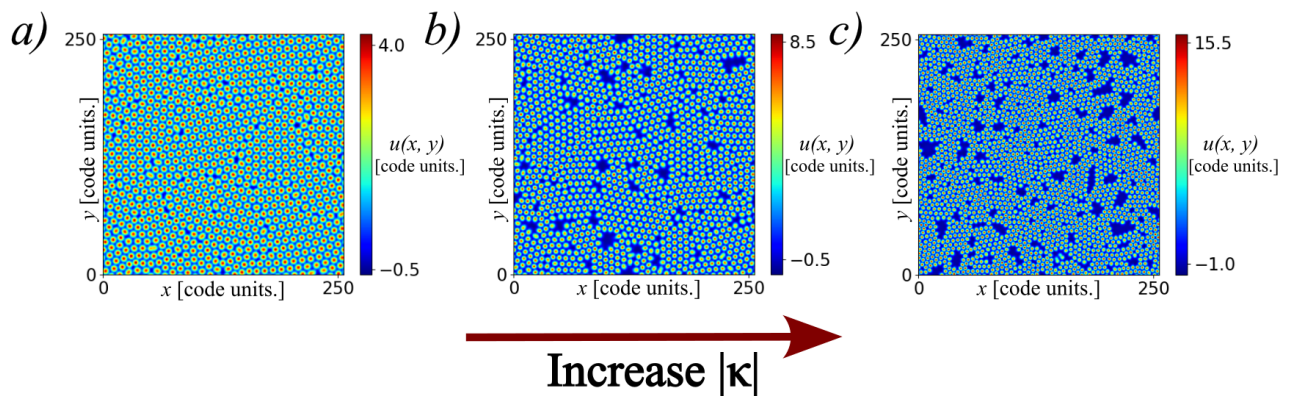


Figura 6.2: Estados en la ecuación TSH no variacional en dos dimensiones con parámetros  $\eta = -0.21$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\nu = -1.6$ ,  $c = 0$  variando el parámetro  $\kappa$ . **a)** Estado con  $\kappa = -2.6$  **b)** Estado con  $\kappa = -2.9$  **c)** Estado con  $\kappa = -3.2$ . Simulación numérica utilizando el método pseudoespectral junto con Runge-Kutta orden cuatro en dos dimensiones espaciales.

Se puede apreciar como aumentando el valor de  $|\kappa|$  el sistema adquiere la presencia de

defectos, sin embargo, el sistema es estático aunque faltan análisis por hacer ya que puede que el tiempo característico de la creación/destrucción de estos sea muy elevado en comparación al tiempo de simulación. De esta manera, existe una relación entre el parámetro de  $\kappa$  y el número de defectos, además de su tamaño. También cabe señalar que los valores máximos del patrón se ven alterados significativamente al mover este parámetro, lo que puede desencadenar errores numéricos en el método de integración. Por este motivo, para las simulaciones se utilizará un valor constante  $\kappa = -0.36$  con la finalidad de no llegar a valores altos de  $u(x, y)$  que puedan desencadenar fenómenos numéricos no deseados.

Ya fijado el parámetro  $\kappa$  en un valor acorde al sistema, se varió  $c$ , obteniendo un paso desde el estado base de patrones circulares a un dilatamiento de estos ( $c = 3$ ), lo que conlleva la emergencia de defectos en el patrón junto con la creciente aparente configuración hexagonal, la cual queda de manifiesto en un valor de  $c = 6.1$ . El estado hexagonal encontrado se mantiene estable hasta un valor de  $c = 15$ , en donde se pierde la forma hexagonal de los patrones y empieza a haber un comportamiento complejo. Notar que en dos dimensiones no se ha observado oscilaciones en el sistema al realizar el barrido en el parámetro  $c$ .

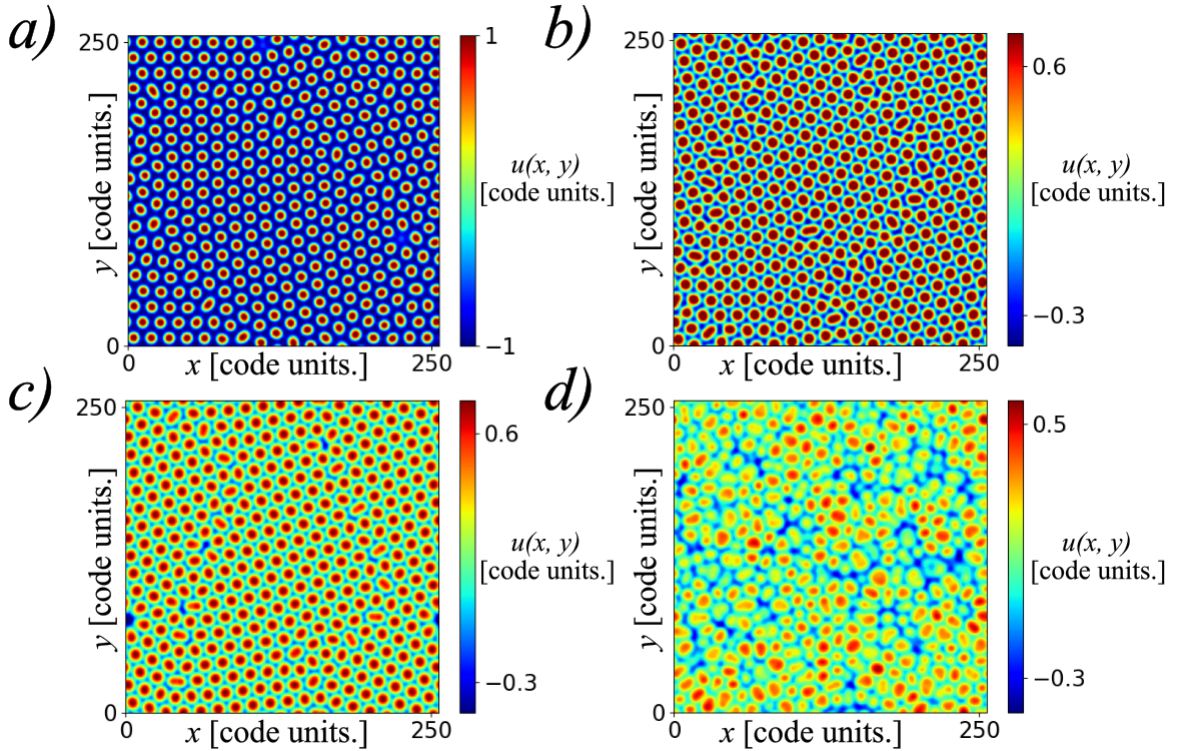


Figura 6.3: Simulación de estados en la ecuación TSH no variacional en dos dimensiones a través del método pseudoespectral junto al método de Runge-Kutta orden cuatro con parámetros  $\eta = -0.25$ ,  $\mu = 0.17$ ,  $\nu = -1.6$ ,  $\kappa = -0.36$  variando el parámetro  $c$ . **a)** Estado base con  $c = 0.0$  **b)**  $c = 3.0$  **c)**  $c = 6.1$  **d)**  $c = 15.0$

Para entender mejor los estados encontrados se buscó realizar un análisis de estos que diera cuenta de particulares en los estados correspondientes a  $c = 6.1$  y  $c = 15$ . De manera particular, se estudió la transformada de Fourier espacial en dos dimensiones del estado "hexágonos" para confirmar la configuración hexagonal de este, el cual arroja la aparición de

seis modos espaciales bien definidos junto con sus ármónicos correspondientes, los que van se van difuminando dando cuenta de su decreciente influencia.

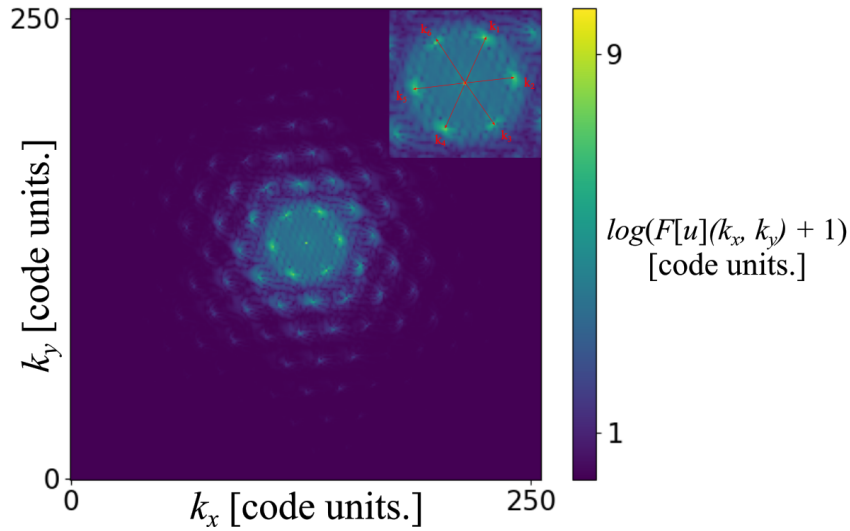


Figura 6.4: Transformada de Fourier en dos dimensiones del estado  $\eta = -0.25$ ,  $\mu = 0.17$ ,  $\nu = -1.6$ ,  $\kappa = -0.36$  y  $c = 6.1$  representado en términos de  $\log(F(u)+1)$  para mejor visualización. En la esquina superior derecha se presenta un zoom del centro de la transformada de Fourier.

Por otro lado, al analizar el comportamiento complejo observado para los valores de  $c = 15$  y  $\kappa = -0.31$  en el tiempo realizando un corte en el dominio rectangular de la Figura 6.3 d), es posible observar una dinámica mediada por la creación y destrucción de defectos al igual que en el caso unidimensional, con la salvedad de que los mecanismos con los cuales se produce este fenómeno son diferentes debido a la dimensionalidad. Además, esto sugiere la presencia de caos espaciotemporal [81], aunque no se ha realizado el cómputo del espectro de Lyapunov y su dimensión de Yorke-Kaplan correspondiente [51, 85] para verificarlo.

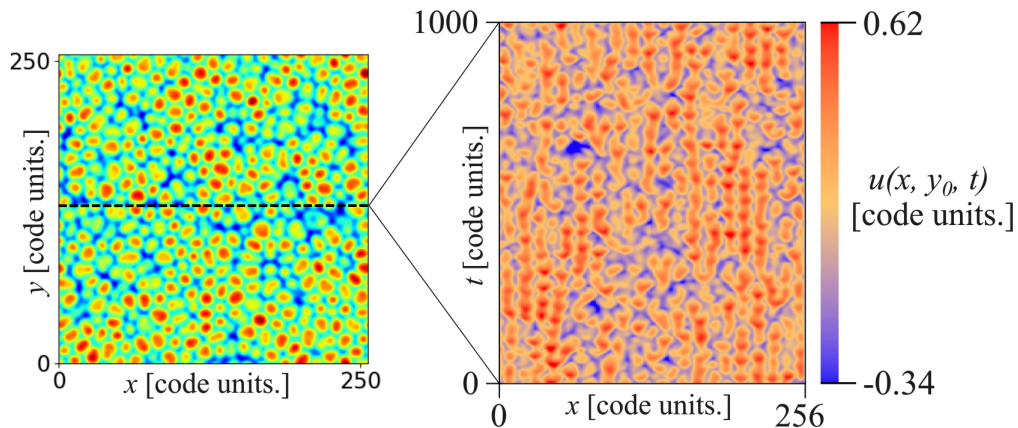


Figura 6.5: Evolución temporal de un corte en la grilla bidimensional lo que da como resultado un perfil unidimensional. Simulación numérica utilizando el método pseudoespectral junto con Runge-Kutta orden cuatro en dos dimensiones espaciales.

Siguiendo el hilo de desarrollo de este trabajo, se realizó una extensión del análisis estadístico realizado en los capítulos anteriores basado en el estudio de la transformada de Fourier del sistema, la cual nos da cuenta de la aparición de dinámica en un mayor dominio de modos  $(k_x, k_y)$ , además de los correspondientes a los armónicos. Nótese que la transformada de Fourier del sistema en la Figura 6.6 presenta simetría radial, lo que es una consecuencia de la isotropía del fenómeno de defectos, en otras palabras, la creación y aniquilación de los defectos no tiene una dirección privilegiada en el espacio. Si consideramos la transformada de Fourier en dos dimensiones rectangulares  $F(k_x, k_y)$ , existirá una transformación que nos permitirá escribirla en coordenadas polares  $F(\|k\|, \theta)$ . Luego, debido a la isotropía promediamos en la variable  $\theta$  al momento de calcular la densidad espectral, lo que puede ser escrito

$$F(\|k\|, \theta) \implies S_2(\|k\|) = \int_0^{2\pi} |F(k_x, k_y)|^2 \|k\| d\theta. \quad (6.2)$$

De esta forma, surge un término  $2\pi\|k\|$  debido al cálculo de este promedio, el cual debe ser considerado al momento de calcular este espectro

$$S_2(\|k\|) = \frac{|F(\|k\|)|^2}{2\pi\|k\|} \quad (6.3)$$

Esta simetría nos permitirá analizar la densidad espectral espacial  $S_2(r)$  en términos únicamente de su variable en el espacio de Fourier  $\|k\|$ . También, se calculó la densidad espectral

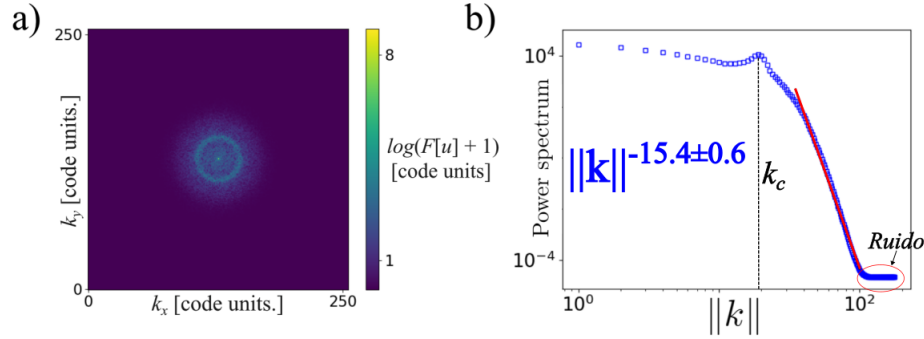


Figura 6.6: **Estado complejo:**  $\eta = -0.25$ ,  $\mu = 0.17$ ,  $\nu = -1.6$ ,  $\kappa = -0.36$ ,  $c = 15$ . **a)** Transformada de Fourier en dos dimensiones representada como  $\log(F(u) + 1)$  para mejor visualización donde se observa dinámica en un amplio rango de números de onda. **b)** Densidad espectral espacial en la variable polar  $\|k\|$ .

temporal del estado complejo observado. De esta manera, podemos observar en ambos espectros una marcada ley de potencia representada en el decaimiento lineal del gráfico  $\log\log$ . Respecto a los exponentes obtenidos  $k^{-15.4}$  y  $\omega$ , es difícil sacar conclusiones sólo con la información del campo original  $u(x, y, t)$ . Por ello, es necesario calcular la transformada de Hilbert para poder obtener una representación que sea más comprensible en términos de la amplitud y fase local.

En dos dimensiones, la transformada de Hilbert no está bien definida por lo que debe ser usada una proyección de la transformada de Radon de una esfera a un plano [90]. Este procedimiento se programó en el lenguaje de Python3, obteniendo resultados coherentes en

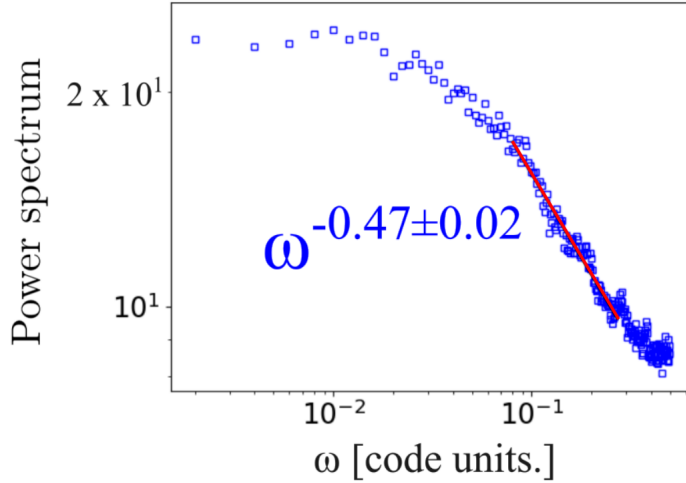


Figura 6.7: Densidad espectral temporal correspondiente al estado complejo de parámetros  $\eta = -0.25$ ,  $\mu = 0.17$ ,  $\nu = -1.6$ ,  $\kappa = -0.36$ ,  $c = 15$ .

las pruebas preliminares. No obstante, este lenguaje de programación posee una problemática clave: Su velocidad. Debido a esto, el código implementado es demasiado lento al momento de analizar el volumen de datos correspondientes a una dinámica en dos dimensiones. Para solucionar esto, se está trabajando en una implementación alternativa optimizada en el lenguaje de *C*.

## 6.0.2. Experimento en dos dimensiones

El estudio del experimento de un canal de patrones en cuasiunidimensional nos entregó novedosas e importantes revelaciones sobre el fenómeno del comportamiento tipo turbulento observado en la válvula de cristal líquido con retroinyección óptica (LCLV). Considerando esto, surge la motivación de realizar un experimento que entregué evidencia experimental del fenómeno en dos dimensiones, además de tener como diferencia importante el paso a dos dimensiones la adquisición de protección topológica en los defectos. Esto implicará el mecanismo de creación/destrucción de estos cambia rotundamente respecto al experimento en una dimensión realizado.

En lo referente al experimento en dos dimensiones este ocupa exactamente la misma configuración del experimento del canal unidimensional, sin embargo, en la creación de la máscara de luz inicial mediante el SLM es en donde reside la diferencia. Particularmente, se creó una máscara rectangular de dimensiones  $(l_x =, l_y =)$  con un voltaje  $V_0 =$  constante y una intensidad de la luz  $I_0 =$  también constante. Luego, se varió el parámetro  $L$  correspondiente al largo de difracción libre desde un valor de 0 cm a  $-10$  cm, grabando el comportamiento de la celda de cristal líquido durante 120 segundos. De esta forma, es posible encontrar diferentes estados empezando desde un estado homogéneo, pasando por una formación de frentes hasta llegar a un comportamiento tipo turbulento de patrones circulares entremezclado con un patrón laberíntico.

En el contexto del análisis estadístico a realizar, tomaremos una región del rectángulo

creado por el SLM en  $L = -6$  cm. Esta región se caracterizará por una constante creación y destrucción de defectos con solamente el patrón de células circulares de base.

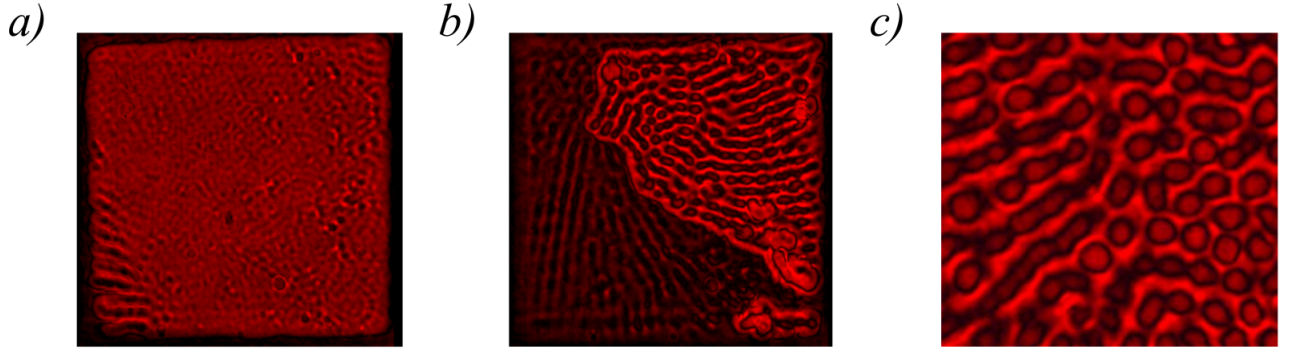


Figura 6.8: Transición en dos dimensiones en función del largo de difracción libre  $L$  para parámetros  $V_0 = 8.48V$  e  $I_0 = 0.41 \text{ mW/cm}^2$ . **a)** Estado homogéneo en el dominio completo visto por la cámara para  $L = 0$  cm **b)** Estado de frentes formados por patrones en el Dominio completo para  $L = -3$  cm **c)** Estado complejo de destrucción/creación de defectos en un dominio reducido respecto al original formado por mayoritariamente patrones circulares para  $L = -6$  cm.

Las grabaciones fueron procesadas mediante su separación en imágenes y posterior paso a escala de grises, siendo así posible analizar su transformada de Fourier espacial en dos dimensiones, la que muestra un comportamiento isotrópico y presenta dinámica en un amplio rango de números de onda. Junto con ello, se calculó su respectiva densidad espectral  $S_2(r)$ , el cual muestra para números de onda  $\|k\|$  superiores al valor crítico del patrón una ley de potencia  $k^{-4}$ . De igual manera, se calculó el espectro de potencia temporal  $S_2(\tau)$  obteniendo también una relación de ley de potencia con tendencia a  $\omega^{-2}$ . Estos exponentes dan cuenta

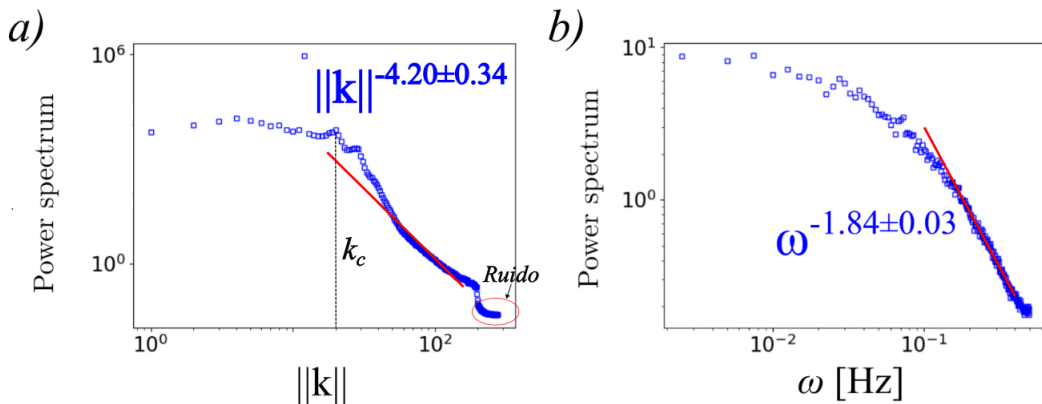


Figura 6.9: Espectros de potencia para la intensidad de la luz medida en los datos experimentales obtenidos con  $L = -6$  cm **a)** Densidad espectral radial de la transformada de Fourier en dos dimensiones **b)** Densidad espectral temporal.

de un comportamiento complejo. En el caso temporal, se recuperará un valor ya estudiado [54]



correspondiente a un comportamiento tipo turbulencia de fase, mientras que el espectro espacial tiene un valor muy inferior comparado a la simulación. Aunque no se puede descartar que el modelo TSH no variacional no de cuenta del fenómeno en estos parámetros del experimento debido a la lejanía del punto de Lifshitz, los datos presentan no son los mejores debido a la cantidad de patrones que se unen para formar estructuras alargadas, las cuales rompen la simetría radial en el espacio de Fourier  $(k_x, k_y)$ . Probablemente, los parámetros iniciales del experimento estaban en una zona del espacio de fase  $(V_0, I_0)$  muy cercana entre la aparición de patrones tipo células y laberíntico. Para nuevas mediciones se buscará la preponderancia del patrón celular.

Finalmente, para ser capaces de analizar el espectro de la intensidad de la luz en profundidad debemos separar la dinámica en términos de su envolvente y fase local. Esta separación se logrará a través del cálculo de su transformada de Hilbert correspondiente. Pero como fue señalado en la sección anterior, se está desarrollando una implementación optimizada de la transformada de Hilbert en dos dimensiones para analizar el gran volumen de datos correspondientes a la dinámica de un sistema en dos dimensiones que sea lo suficiente rápida y eficiente.

# Capítulo 7

## Conclusión

En resumen, este trabajo de investigación ha explorado en profundidad la emergencia de un comportamiento complejo en un dimensión espacial en el experimento de la válvula óptica de cristal líquido. Este experimento consistió en la creación usando el SLM de un canal cuasi unidimensional ( $l_x \gg l_y$ ) en la celda de cristal líquido, al cual se le aplica un voltaje para crear un patrón junto con el voltaje aplicado debido a la retroinyección óptica mediada por el fotoconductor del setup. Se estudió el comportamiento del canal creado en función de la difracción libre, la cual fue aumentada a través de la variación del parámetro del experimento  $L$  correspondiente al largo de difracción en un intervalo  $[0, -10]$  cm. Como resultado, se caracterizó una transición en función de  $L$ , la cual consiste en el paso por oscilaciones locales hasta un estado con dinámica permanente tipo turbulento mediado por defectos, el que finalmente, para valores terminales del largo de difracción libre  $L > |-9|$  cm se satura, perdiendo su dinámica.

A su vez, este experimento ha sido caracterizado como un comportamiento tipo turbulencia mediada por defectos. Esto se logró mediante el análisis de sus propiedades estadísticas a través de la inspección del desglose de los videos tomados del experimento, en donde destacan la evolución temporal de los defectos, los espectros de potencia espacial y temporal asociados a la intensidad de la luz, junto con su descomposición usando la transformada de Hilbert, la cual nos permite acceder a la fase  $(k^{-2}, \omega^{-2})$  y a la envolvente  $(k^{-3}, \omega^{-2})$  local, además de su factor de estructura. Notar que se encontró una relación entre el valor de los exponentes para distintas razones de  $l_y/l_x$ .

En adición al experimento, se utilizó y simuló un modelo teórico no variacional tipo forma normal para contrastar los resultados experimentales y ser capaz de predecir nuevos comportamientos, el cual ha mostrado su universalidad en fenómenos en biología, química y óptica. Este modelo presenta una transición hacia un estado caótico espacio temporal, el cual ha sido caracterizado junto con sus exponentes de la fase  $(k^{-2}, \omega^{-2})$  y la envolvente  $(k^{-2}, \omega^{-2})$  como turbulencia mediada por defectos. Esta caracterización tuvo como principal desafío la eliminación de la solución base tipo patrón oscilatoria, con la finalidad de obtener solamente el comportamiento turbulento caótico espacio temporal presente. Para ello, se utilizó diferentes filtros tipo bandstop en el espacio de Fourier, los cuales permitieron limpiar el espectro de la influencia de los armónicos del patrón oscilatorio, obteniendo los mejores resultados para el

filtro de Butterworth.

Luego, se amplió el problema de investigación a un sistema en dos dimensiones espaciales. Este se estudió experimentalmente a través de la creación de un dominio rectangular usando el SLM, el cual se somete a un voltaje  $V_0$  dado por una fuente de poder y la retroinyección óptica, la cual permite variar el parámetro de retroinyección libre. Se encontró en esta variación de  $L$  diferentes tipos de patrones como laberínticos y circulares, junto con la presencia de dinámica de frentes. En particular, nos interesó estudiar la aparición de dinámica permanente en el sistema 2D, la cual queda de manifiesto para un valor de  $L = -5.5$  cm. Se analizó una región particular del dominio en este valor, la que presenta una ley de potencia en la intensidad de la luz con valores cercanos a  $k^{-4}$  y  $\omega^{-2}$ .

Por el lado del modelo teórico, se simuló la ecuación de Turing-Swift-Hohenberg no variacional en dos dimensiones usando un método espectral y otro basado en diferencias finitas de tipo Runge-Kuta orden 4. Ambos métodos muestran resultados coherentes uno con el otro. Se exploró el espacio de fase del sistema encontrando diferentes estados. En donde destaca una región con la presencia de hexágonos, la que pudo ser caracterizada mediante su transformada de Fourier espacial, obteniendo seis modos principales y una región compleja que se asemeja al experimento al seguir aumentando el valor del parámetro  $c$ . Esta región fue caracterizada en términos de su densidad espectral, el cual presenta exponentes cercanos a  $k^{-15}$  y  $\omega^{-0.5}$ . Las discrepancias en dos dimensiones entre el experimento y la simulación aún son motivo de estudio.

Finalmente, es importante señalar las proyecciones del problema de investigación, el cual se empezará a estudiar a futuro su espectro de Lyapunov en dos dimensiones para determinar la naturaleza dinámica del sistema. Además de la implementación del código en lenguaje C de la transformada de Hilbert en dos dimensiones con fines de optimización del código ya desarrollado.

# Bibliografía

- [1] *Effects of Electric Field on Liquid Crystals*, chapter 4, pages 127–148. John Wiley Sons, Ltd, 2014.
- [2] P. J. Aguilera-Rojas, M. G. Clerc, S.ía-Alar@, Y. Soupart, and M. Tlidi. Fingerprint pattern bi-turbulence in a driven dissipative optical system. *Chaos Solitons and Fractals*, 182:114851, May 2024.
- [3] P.J. Aguilera-Rojas, M.G. Clerc, S. Echeverría-Alar, Y. Soupart, and M. Tlidi. Fingerprint pattern bi-turbulence in a driven dissipative optical system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 182(C), 2024.
- [4] S. Akhmanov, Mikhail Vorontsov, V. Ivanov, A. Larichev, and N. Zheleznykh. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: Generation and interaction of spatiotemporal structures. *Journal of The Optical Society of America B-optical Physics - J OPT SOC AM B-OPT PHYSICS*, 9, 01 1992.
- [5] Ricard Alert, Jaume Casademunt, and Jean-François Joanny. Active turbulence. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 13(1):143–170, March 2022.
- [6] A. J. Alvarez-Socorro, M. G. Clerc, G. González-Cortés, and M. Wilson. Nonvariational mechanism of front propagation: Theory and experiments. *Phys. Rev. E*, 95:010202, Jan 2017.
- [7] Alejandro Alvarez-Socorro, Camila Castillo Pinto, Marcel Clerc, Gregorio González Cortés, and Mario Wilson. Front propagation transition induced by diffraction in a liquid crystal light valve. *Optics Express*, 27:12391–12398, 04 2019.
- [8] A.A. Andronov. *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. NASA TT F-556. Israel Program for Scientific Translations; [available from the U.S. Department of Commerce, National Technical Information Service, Springfield, Va.], 1971.
- [9] Igor S. Aranson and Lorenz Kramer. The world of the complex ginzburg-landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 74:99–143, Feb 2002.
- [10] R. Bartholin. *Experimenta Crystalli Islandici disdiaclastici, quibus mira et insolita refractio detegitur*. 1669.
- [11] T. B. Benjamin and J. E. Feir. The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 27:417–430, January 1967.

- [12] P Berger, Yves Pomeau, and Christian Vidal. Order within chaos. *Hermann, Paris*, 1984.
- [13] Matthias Bertram, Carsten Beta, Michael Pollmann, Alexander S. Mikhailov, Harm H. Rotermund, and Gerhard Ertl. Pattern formation on the edge of chaos: Experiments with co oxidation on a pt(110) surface under global delayed feedback. *Phys. Rev. E*, 67:036208, Mar 2003.
- [14] Felix Bloch. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für Physik*, 52:555–600, 1929.
- [15] Ignacio Bordeu and Marcel G. Clerc. Rodlike localized structure in isotropic pattern-forming systems. *Phys. Rev. E*, 92:042915, Oct 2015.
- [16] Max Born and Emil Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier, 2013.
- [17] J.C. Butcher. Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125(1):1–29, 2000. Numerical Analysis 2000. Vol. VI: Ordinary Differential Equations and Integral Equations.
- [18] S. Chandrasekhar. *Liquid Crystals*. Cambridge monographs on physics. Cambridge University Press, 1992.
- [19] H Chate. Spatiotemporal intermittency regimes of the one-dimensional complex ginzburg-landau equation. *Nonlinearity*, 7(1):185, jan 1994.
- [20] Hugues Chaté and Paul Manneville. Role of defects in the transition turbulence via spatiotemporal intermittency. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 37(1):33–41, 1989.
- [21] J F Claerbout. Fundamentals of geophysical data processing with applications to petroleum prospecting. [textbook].
- [22] Marcel Clerc, Artem Petrossian, and Stefania Residori. Bouncing localized structures in a liquid-crystal light-valve experiment. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 71:015205, 02 2005.
- [23] Marcel G. Clerc, Gregorio González-Cortés, Vincent Odent, and Mario Wilson. Optical textures: characterizing spatiotemporal chaos. *Opt. Express*, 24(14):15478–15485, Jul 2016.
- [24] Marcel G. Clerc and Nicolas Verschueren. Quasiperiodicity route to spatiotemporal chaos in one-dimensional pattern-forming systems. *Phys. Rev. E*, 88:052916, Nov 2013.
- [25] P. Couillet, L. Gil, and F. Rocca. Optical vortices. *Optics Communications*, 73(5):403–408, 1989.
- [26] P. Couillet and G. Iooss. Instabilities of one-dimensional cellular patterns. *Phys. Rev. Lett.*, 64:866–869, Feb 1990.
- [27] M. Cross and Pierre Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. of Mod. Phys.*, 65:851–1112, 07 1993.

- [28] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65:851–1112, Jul 1993.
- [29] Michael Cross and Henry Greenside. Pattern formation and dynamics in nonequilibrium systems. *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems*, 01 2009.
- [30] Jonathan Dawes. Patterns and interfaces in dissipative dynamics. by I. M. Pismen. Springer, 2006. 369 pp. isbn 978-3-540-30430-2. £ 77 (hardback). *Journal of Fluid Mechanics*, 584:473 – 474, 08 2007.
- [31] Jonathan H.P. Dawes. After 1952: The later development of Alan Turing’s ideas on the mathematics of pattern formation. *Historia Mathematica*, 43(1):49–64, 2016.
- [32] P.G. de Gennes and J. Prost. *The Physics of Liquid Crystals*. International Series of Monographs on Physics. Clarendon Press, 1993.
- [33] David A. Egolf and Henry S. Greenside. Characterization of the transition from defect to phase turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 74:1751–1754, Mar 1995.
- [34] C. Elphick, E. Tirapegui, M.E. Brachet, P. Coulet, and G. Iooss. A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 29(1):95–127, 1987.
- [35] D. Escaff, C. Fernandez-Oto, M. G. Clerc, and M. Tlidi. Localized vegetation patterns, fairy circles, and localized patches in arid landscapes. *Physical Review E*, 91(2), February 2015. Publisher Copyright: © 2015 American Physical Society.
- [36] Kenneth Falconer. *Fractal geometry - mathematical foundations and applications*. Wiley, 1990.
- [37] Richard Phillips Feynman, Robert Benjamin Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman lectures on physics; New millennium ed.* Basic Books, New York, NY, 2010. Originally published 1963-1965.
- [38] U. Frisch. *Turbulence: The Legacy of AN Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [39] Shoaleh Ghashghaie, Henriette Breyman, Joachim Peinke, Peter Talkner, and Yadolah Dodge. Turbulent cascades in foreign exchange markets. *Nature*, 381:767–770, 06 1996.
- [40] V. Ginzburg and L. Landau. *On the Theory of Superconductivity*, volume 20. 01 2009.
- [41] James Gleick. *Chaos: Making a new science*. Viking, New York, 1987.
- [42] J. Goldstone. Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cim.*, 19:154–164, 1961.
- [43] Joseph W Goodman. Introduction to Fourier optics. *Introduction to Fourier optics, 3rd ed., by JW Goodman*. Englewood, CO: Roberts & Co. Publishers, 2005, 1, 2005.

- [44] L. P. Gor'kov and G. M. éLiashberg. Generalization of the Ginzburg - Equations for Non-Stationary Problems in the Case of Alloys with Paramagnetic Impurities. In *30 Years of the Landau Institute - Selected Papers. Edited by KHALATNIKOV ISAAK M ET AL. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd*, pages 16–22. 1996.
- [45] Eberhard Hopf. Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differentialsystems. *Ber. Math.-Phys. Kl Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, 94:1–22, 1942.
- [46] R.M. Hornreich. The lifshitz point: Phase diagrams and critical behavior. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 15-18:387–392, 1980.
- [47] J. L. Hudson and J. C. Mankin. Chaos in the Belousov–Zhabotinskii reaction. *The Journal of Chemical Physics*, 74(11):6171–6177, 06 1981.
- [48] Gerard Iooss and Alastair M. Rucklidge. Patterns and quasipatterns from the superposition of two hexagonal lattices. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 21(2):1119–1165, May 2022.
- [49] JT Stuart K Stewartson. A non-linear instability theory for a wave system in plane poiseuille flow. *Journal of Fluid Dynamics.*, 1971.
- [50] R.P. Kanwal. *Linear Integral Equations*. Birkhäuser Boston, 1996.
- [51] James L. Kaplan and James A. Yorke. *Chaotic behavior of multidimensional difference equations*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1979.
- [52] G. Kozyreff and M. Tlidi. Nonvariational real Swift-Hohenberg equation for biological, chemical, and optical systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 17(3):037103, 09 2007.
- [53] Lorenz Kramer and Werner Pesch. *Convection Instabilities in Nematic Liquid Crystals*, chapter 13, pages 260–294. John Wiley Sons, Ltd, 2000.
- [54] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Dover books on chemistry. Dover Publications, 2003.
- [55] Yoshiki Kuramoto. Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 64:346–367, 02 1978.
- [56] Joceline Lega. Defect-mediated turbulence. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89(1):419–424, 1991. Second World Congress on Computational Mechanics.
- [57] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids: Stochastic and Numerical Modelling*. Fluid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands, 2012.
- [58] Edward Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20(2):130–148, 1963.
- [59] Paul Manneville. Statistical properties of chaotic solutions of a one-dimensional model for phase turbulence. *Physics Letters A*, 84(3):129–132, 1981.

- [60] C. Maurer, A. Jesacher, S. Bernet, and M. Ritsch-Marte. What spatial light modulators can do for optical microscopy. *Laser & Photonics Reviews*, 5(1):81–101, 2011.
- [61] Hans Meinhardt. *Models of Biological Pattern Formation (Academic Press, London, 1982)*. 05 1982.
- [62] N. D. Mermin. The topological theory of defects in ordered media. *Rev. Mod. Phys.*, 51:591–648, Jul 1979.
- [63] Ehud Meron. Vegetation pattern formation: The mechanisms behind the forms. *Physics Today*, 72(11):30–36, 11 2019.
- [64] A C Newell, T Passot, and J Lega. Order parameter equations for patterns. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25(Volume 25, 1993):399–453, 1993.
- [65] G. Nicolis. *Introduction to Nonlinear Science*. Cambridge University Press, 1995.
- [66] K. Nozaki and N. Bekki. Solitons as attractors of a forced dissipative nonlinear schrödinger equation. *Physics Letters A*, 102(9):383–386, 1984.
- [67] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, and J.R. Buck. *Discrete-time Signal Processing*. Prentice Hall international editions. Prentice Hall, 1999.
- [68] P. Oswald and P. Pieranski. *Liquid Crystals: Concepts and Physical Properties Illustrated by Experiments, Two Volume Set*. Liquid Crystals Book Series. Taylor & Francis, 2006.
- [69] O. M. Phillips. The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 4(4):426–434, 1958.
- [70] Arkady Pikovsky and Antonio Politi. *Lyapunov Exponents: A Tool to Explore Complex Dynamics*. Cambridge University Press, 2016.
- [71] E. B. Priestly, Peter J. Wojtowicz, and Ping Sheng. Introduction to liquid crystals. 1976.
- [72] I. Prigogine. *Tan sólo una ilusión?: una exploración del caos al orden*. Cuadernos infimos : Metatemas. Tusquets, 1983.
- [73] J. Prost and C. E. Williams. *Liquid Crystals: Between Order and Disorder*, pages 289–315. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [74] A. Pumir, B. I. Shraiman, W. van Saarloos, P. C. Hohenberg, H. Chaté, and M. Holen. *Phase VS. Defect Turbulence in the 1D Complex Ginzburg-Landau Equation*, pages 173–177. Springer US, Boston, MA, 1992.
- [75] Stefania Residori. Patterns, fronts and structures in a liquid-crystal-light-valve with optical feedback. *Physics Reports-review Section of Physics Letters - PHYS REP-REV SECT PHYS LETT*, 416:201–272, 09 2005.
- [76] Juliane Rosemeier and Peter Spichtinger. Pattern formation in clouds via turing instabilities. *Mathematics of Climate and Weather Forecasting*, 6:75–96, 01 2021.



- [77] David Ruelle and Floris Takens. On the nature of turbulence. *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25*, 12:1–44, 1971.
- [78] Albert Schmid. A time dependent ginzburg-landau equation and its application to the problem of resistivity in the mixed state. *Physik der kondensierten Materie*, 1966.
- [79] Wolfgang Schöpf and Walter Zimmermann. Results on wave patterns in binary fluid convection. *Phys. Rev. A*, 41:1145–1148, Jan 1990.
- [80] Laurent Schwartz. Théorie des distributions à valeurs vectorielles. i. *Annales de l'Institut Fourier*, 7:1–141, 1957.
- [81] B.I. Shraiman, A. Pumir, W. van Saarloos, P.C. Hohenberg, H. Chaté, and M. Holen. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex ginzburg-landau equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 57(3):241–248, 1992.
- [82] David E. Sigeiti. Survival of deterministic dynamics in the presence of noise and the exponential decay of power spectra at high frequency. *Phys. Rev. E*, 52:2443–2457, Sep 1995.
- [83] F. Simoni. *Nonlinear Optical Properties of Liquid Crystals and Polymer Dispersed Liquid Crystals*. Coleccion Guaicaipuro. World Scientific, 1997.
- [84] G.I. Sivashinsky. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—i. derivation of basic equations. *Acta Astronautica*, 4(11):1177–1206, 1977.
- [85] Ch. Skokos. *The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation*, page 63–135. Springer Berlin Heidelberg, November 2009.
- [86] P. Stoica and R.L. Moses. *Spectral Analysis of Signals*. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [87] J. Swift and P. C. Hohenberg. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Phys. Rev. A*, 15:319, 1977.
- [88] M. Tlidi, Paul Mandel, and R. Lefever. Localized structures and localized patterns in optical bistability. *Phys. Rev. Lett.*, 73:640–643, Aug 1994.
- [89] M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Number parte 2 in An Album of Fluid Motion. Parabolic Press, 1982.
- [90] Lennart Wietzke, Oliver Fleischmann, and Gerald Sommer. 2d image analysis by generalized hilbert transforms in conformal space. pages 638–649, 2008.
- [91] Claudia Zenkova, M. Gorsky, and P.A. Ryabiy. Pseudo-phase mapping of speckle fields using 2d hilbert transformation. 46:153–162, 01 2016.
- [92] O. Zikanov. *Essential Computational Fluid Dynamics*. Wiley, 2010.
- [93] Hank Zumbahlen. *CHAPTER 8. Analog Filters*. 12 2008.

# Anexo

El resultado de este trabajo de tesis ha significado la publicación de la parte unidimensional de esta investigación en la revista Optics Letters.

# Optical feedback induced spatiotemporal patterns with power law spectra in a liquid crystal light valve

PEDRO J. AGUILERA-ROJAS<sup>1</sup>, MARCEL G. CLERC<sup>1</sup>, AND SIMON NAVIA<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física and Millennium Institute for Research in Optics, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile

\*simon.navia.sn@gmail.com

Compiled May 20, 2024

Pattern formation can be induced by coupling electromagnetic fields to a polarizable and lossy medium. Increasing energy injection patterns can exhibit aperiodic behaviors. We investigate the self-organization of unidimensional aperiodic patterns. Based on a liquid crystal light valve with optical feedback, we observed aperiodic one-dimensional patterns with power laws in the temporal and spatial spectrum density of the light intensity, and their pseudo envelope and phase characteristic of spatiotemporal complexity. Theoretically, a local model describes the system close to nascent bistability and spatial instability. Numerical simulations of this model show chaotic spatiotemporal patterns whose temporal and spatial spectra have exponents similar to those observed experimentally.

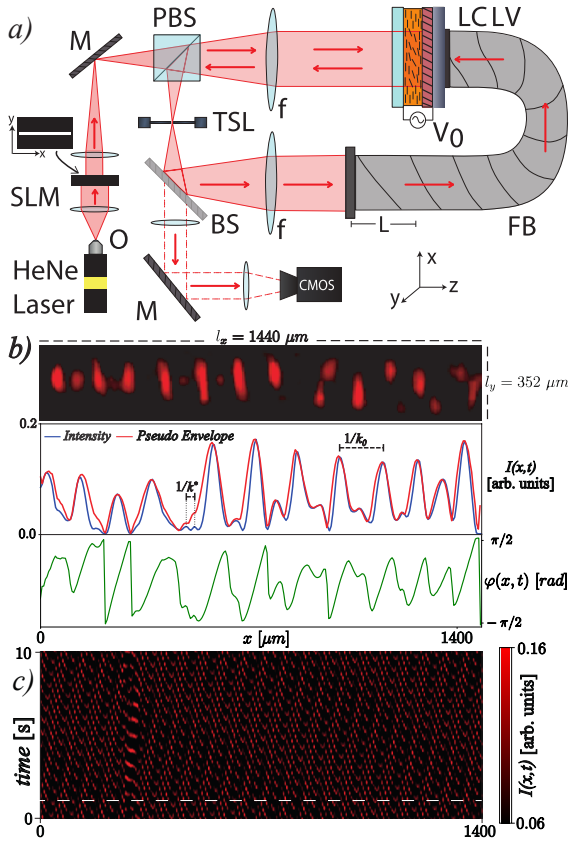
<http://dx.doi.org/10.1364/ao.XX.XXXXXX>

Non-equilibrium processes often lead to the emergence of patterns, which evolve from a homogeneous state by spontaneously breaking spatial symmetry [1, 2]. In optics, coupling an electromagnetic field to a polarizable medium and losses can induce a diffraction-diffusion mechanism of pattern formation [3]. For example, transverse patterns have been observed in gas [4, 5] and semiconductor laser [6], photorefractive media (see the textbook [7] and reference therein), sodium vapor [8] and liquid crystal cells [9] with single-mirror feedback, and liquid crystal light valve (LCLV) with optical feedback [10], to mention a few. As one injects energy, secondary instabilities can generate oscillations and complex spatiotemporal behaviors of optical patterns [5, 11]. Dissipative systems far from equilibrium can exhibit non-periodic spatiotemporal dynamics. These include fiber lasers [12, 13], nonlinear optics [14, 15], active matter [16], interfacial dynamics [17], chemical reactions [18], financial markets [19], and Bose-Einstein condensates [20], among others. In all of these systems, the observed dynamics from a statistical perspective are *turbulent-like*, that is, unpredictable (spatiotemporal chaos), and a wide range of spatial wavelengths participate in the permanent dynamics (power-law spectra). The power law spectrum density has been observed for different quantities such as kinetic energy, light intensity, information, intensity correlation, and phase gradient. A pioneering example of this type of

behavior is the phase turbulence [21]. In most of the previous systems where turbulence-like behavior is observed, a power law is typically observed for a decade or a few decades of wavenumber in the spectrum due to the absence of different structures or defects at different scales [12–20]. Spatiotemporal complexity of fingerprint patterns with turbulent-like behavior has recently been observed in an LCLV with optical feedback [15].

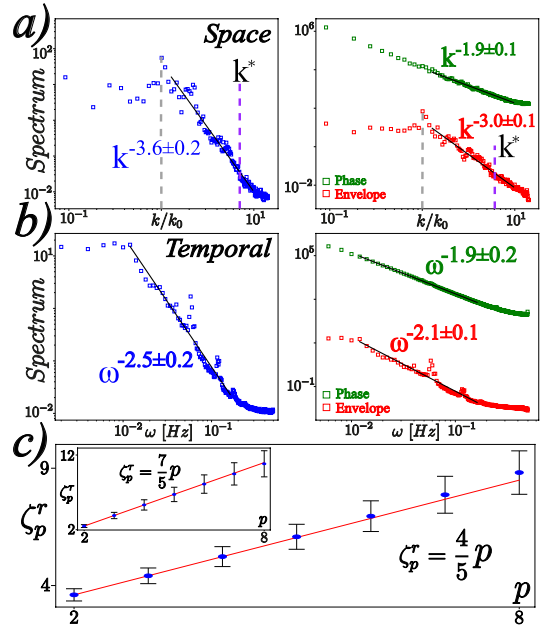
This letter aims to investigate spatiotemporal self-organization behaviors for one-dimensional aperiodic optical patterns. Based on a liquid crystal light valve with optical feedback and spatial light modulator, we observe aperiodic one-dimensional patterns, see Fig. 1, when one increases the intensity of the illumination light or the free propagation length  $L$  of the optical feedback. The temporal and spatial intensity spectra density exhibit power laws. The pattern's dynamical behavior is characterized by determining its pseudo envelope and phase using the Hilbert transform [22]. This pseudo phase field exhibit a spatial and temporal spectra with power laws. The phase exhibits  $k^{-2}$  and  $\omega^{-2}$  spectrum, which is typical of phase turbulence [21]. The amplitude (light intensity) and pseudo envelope of the pattern spatial and temporal spectra density show defect turbulence with an exponent close to -3 and -2, respectively. The structure functions of the amplitude fluctuations at different exponents allow us to conclude that the observed dynamics are self-similar. Theoretically, close to the nascent bistability and spatial instability, *Lifshitz point*, a local model describes the system. Numerical simulations of this model present spatiotemporal chaotic patterns [23]. The numerically observed dynamics are characterized by complex defect dynamics, whose temporal and spatial spectra tend to follow power laws. The envelope and phase of the observed patterns are characterized by spatial and temporal spectra with similar exponents to those observed experimentally.

The LCLV with optical feedback is a flexible setup that exhibits a wide range of dynamic behaviors, such as multistability, front propagation, pattern formation, localized states, and aperiodic spatiotemporal dynamics (see Rev. [10] and references therein). Figure 1a shows a schematic representation of the setup. The LCLV consists of a nematic liquid crystal LC-654 (NIOPIK) with dielectric anisotropy constant  $\epsilon_a = 10.7 \epsilon_0$  sandwiched between two glass layers separated by a distance  $d = 15 \mu\text{m}$ . To apply an electrical voltage to the liquid crystals, transparent indium tin oxide (ITO) electrodes and a photoconductive



**Fig. 1.** Experimental aperiodic patterns in a liquid crystal light valve with optical feedback. a) Schematic liquid crystal light valve (LCLV) representation with optical feedback. The setup is composed of a coherent light source (He-Ne laser) sent through a spatial light modulator (SLM) and a polarizing beam splitter (PBS) before hitting the LCLV. After reflection, the light is filtered in a transversal slit (TSL) placed in the Fourier plane, then the light is brought to the fiber bundle (FB) with a beam splitter (BS) and to a complementary metal-oxide-semiconductor (CMOS) with a mirror (M).  $f$  represents achromatic lenses, and  $L$  is the free propagation length. The applied voltage to LCLV is  $V_0 = 9.72$  Vrms. The red arrows indicate the propagation of light. The illuminated region of the LCLV is a quasi-one-dimensional region of dimensions  $1440 \times 352 \mu\text{m}^2$ . b) A snapshot and middle plane profile (pattern intensity and their pseudo envelope and phase  $\varphi$ ) of a one-dimensional pattern in which different colors account for different average inclinations of liquid crystal molecules.  $k_0$  and  $k^*$  are the pattern and characteristic coupling wavenumber ( $k_0 < k^*$ ). c) Spatiotemporal evolution of one-dimensional patterns.

layer are deposited on the glasses. The back layer of the liquid crystal cell contains a dielectric Bragg mirror with optimized reflectivity for 632.8 nm light. The molecules on the cell wall are anchored parallel to it, corresponding to a planar anchoring in the cell's diagonal direction. The LCLV can be electrically addressed by applying an oscillatory voltage  $V_0$  Vrms and frequency  $f_0 = 1.0$  kHz across the layer. The optical valve is optically forced with a He-Ne laser of intensity  $I_{in}$  and wavelength  $\lambda_0 = 632.8$  nm. The LCLV is placed in a  $4f$  optical configuration ( $f = 25$  cm) as shown in Fig. 1a. A transversal slit (TSL) is placed



**Fig. 2.** Experimental spatiotemporal complexity of patterns in a liquid crystal light valve with optical feedback. a) Spatial and b) temporal spectra of the light intensity  $I(x,t)$  (left panel), and pseudo phase and enveloped field (right panel). The points show the experimental results and the straight continuous curves help show the power law trend. Vertical dashed lines account for characteristic wave numbers. c) Spatial exponent  $\zeta_p^r$  of structure-function  $S_p(r)$  as a function of the  $p$  index. The inset accounts for temporal exponent  $\zeta_p^t$  as a function of the  $p$  index. The points and their respective error bars are the exponents obtained experimentally. The straight solid lines show the trend of the points.

in the Fourier plane to filter spatial modes. The optical feedback circuit is closed with a fiber bundle (FB) placed  $4f$  from the LCLV front surface. Depending on the local light intensity, the optical fiber bundle injects the light into the photoconductive layer and applies an additional local voltage to the liquid crystal material. The optical feedback loop is designed so that the light simultaneously undergoes diffraction propagation (characterized by the length  $L$ ) and polarization interference induced by the polarizing beam splitter (PBS). For one-dimensional experiments of dimensions,  $l_x = 1440 \mu\text{m}$  and  $l_y = 352 \mu\text{m}$ , a spatial light modulator (SLM) is considered. The SLM prevents optical feedback in unilluminated areas, thereby creating an absorbing boundary condition. The experiment is monitored by a complementary metal-oxide-semiconductor (CMOS) camera.

Figures 1b and 1c show a snapshot of a one-dimensional aperiodic pattern with  $k_0$  wavenumber and its respective spatiotemporal evolution. This chart shows that the pattern also exhibits other wavelengths ( $k^*$ ), which are coupled with the dynamics of the pattern's global mode ( $k_0$ ). Likewise, one infers an aperiodic complex dynamics the pattern defects. The patterns observed are chaotic in nature [11]. To characterize the dynamics statistically, we calculate the spatial and temporal spectrum density of light intensity  $I(x,t)$  defined in the spatial case by  $\langle \int e^{ikx} |I(x,t)|^2 dx \rangle / T$ , where  $x$  and  $t$  stand for the spatial coordinate and time,  $k$  is the wavenumber, and the symbol  $\langle \rangle$  accounts for temporal average in a long period  $T$ . The temporal spectrum is defined in a similar manner. Figure 2 shows the

spectrum densities obtained, characterized by tails with power laws of approximately  $k^{-3.5}$  and  $\omega^{-2.5}$ . This manifests the spatiotemporal complexity of the patterns [12–20], characterized by the dynamics of defects and coupling of modes with the different wavenumbers, which includes a decade of wavenumber. Note that the liquid crystal is a strongly overdamped waveless medium. Due to the inherent fluctuations of the experimental system, noise, the spectra for large wavenumbers or frequencies deviate from the power law and tend to flatten out [24].

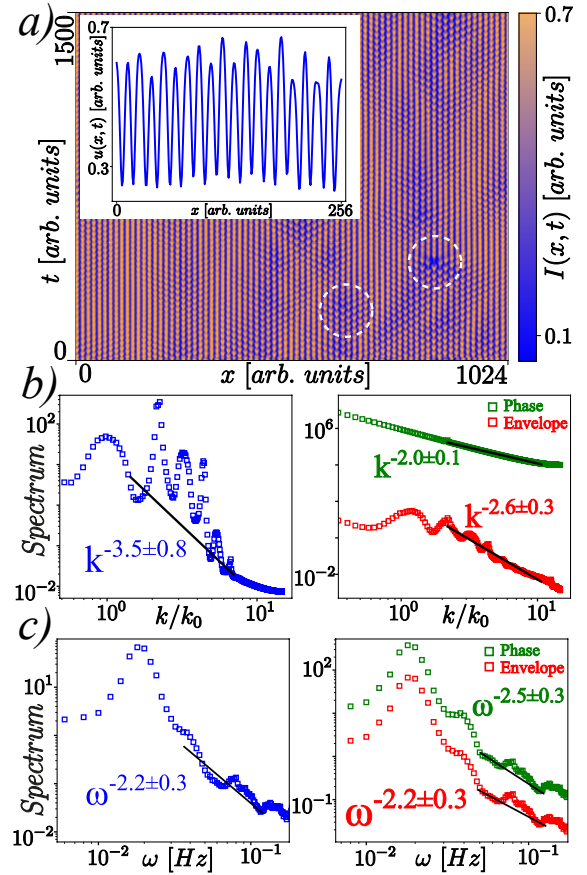
To understand complex dynamics, the pattern evolution can be decomposed into the pseudo envelope and phase of the patterns using the analytical signal buildup with the Hilbert transform [22, 25]. This type of method has been implemented to understand complex patterns in the catalytic oxidation of carbon monoxide [25], linear [26] and nonlinear optics [15]. Figure 2 shows the spectra density of the pseudo phase and envelope of the pattern. The spectrum of this phase has an exponent close  $k^{-2}$  and  $\omega^{-2}$ , which is characteristic of phase turbulence [21]. The origin of this exponent corresponds to non-correlated abrupt transitions between two typical values of the phase. For the pseudo envelope field, we find that the tails of the spectra are close to  $k^{-3}$  and  $\omega^{-2}$ , which accounts for the defect dynamics. In addition, one can study the higher-order correlations, also called *structure functions* [27], to better understand the pattern's dynamics and whether they have characteristic scales. Let us introduce temporal structure functions  $S_p(\tau) \equiv \langle \|I(t) - I(t + \tau)\|^p \rangle$ , where the symbols  $\| \cdot \|$  and  $\langle \cdot \rangle$  account for the spatial norm and the temporal average, respectively. For spatial self-similar turbulent fluid dynamics, Kolmogorov theory predicts a scaling law of type  $S_p(\tau) \propto \tau^{\zeta_p^t}$  [27], where  $\zeta_p^t$  is the exponent of structure function. Namely, the system does not have characteristic scales in the turbulent window. Analogously, one can introduce spatial structure functions  $S_p(r)$ . We also expect  $S_p(r) \propto r^{\zeta_p^r}$  for temporal self-similar turbulence. Figure 2c summarizes the results found. From this chart, we infer that the observed behavior is self-similar.

To account for the experimental observations, we consider the LCLV with optical feedback simultaneously close to the nascent bistability and spatial instability, *the Lifshitz point* [28], the dynamics of the system is described by

$$\partial_t u = \eta + \epsilon u - u^3 - \nu \partial_{xx} u - \partial_{xxxx} u + c(\partial_x u)^2 + \kappa u \partial_{xx} u, \quad (1)$$

where the order parameter  $u(x, t)$  accounts for the deviation of the average molecular orientation  $\theta(x, t)$  with respect to a critical value  $\theta_c$ , the light intensity  $I$  reaching the camera is related to  $u(x, t)$  by  $I(x, t) \approx I_{in}(1 - \cos[0.4d\lambda_0 \cos^2(\theta_c)(1 - 2 \tan(\theta_c)u/u_0)])$  with  $u_0$  a normalization constant [28].  $\epsilon$  is the bifurcation parameter, which is proportional to the voltage minus the critical one,  $\eta$  is a parameter that controls the size of bistability, which is proportional to the intensity of the input laser,  $\nu$  is the anti-diffusion coefficient, which is proportional to the elastic diffusion minus the square of the diffraction propagation length,  $c$  and  $\kappa$  account for the nonvariational advection and nonlinear diffusion; both are proportional to the diffraction propagation length. The detailed relationship between the parameters of Eq. (1) and the physical parameters of the LCLV with optical feedback is given in [29].

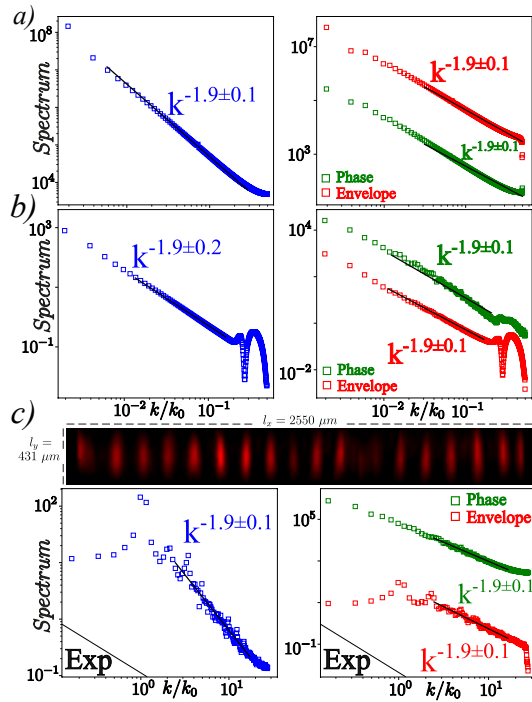
It is known that model Eq. (1) presents chaotic spatiotemporal patterns [23]. Figure 3a shows the typical spatiotemporal chaotic patterns, which present complex defect dynamics. Analogously to the experimental case, we have calculated the spatial and temporal spectrum density of the order parameter  $u$ , which is



**Fig. 3.** Numerical spatiotemporal complexity of patterns in model Eq. (1) by  $\eta = -0.04$ ,  $\epsilon = -0.092$ ,  $\nu = 1.0$ ,  $c = 10.4$ , and  $\kappa = -3.05$ . a) Spatiotemporal diagram of aperiodic pattern. Inset accounts for the profile of an extract of the pattern. Dashed circumferences show defects in the pattern. b) and c) spatial and temporal spectrum density of the order parameter  $u(x, t)$  (left panels) and pseudo phase and envelope field of the pattern (right panels). The points are the results obtained numerically, and the straight lines show the power law trend of the numerical data.

illustrated in Figs. 3b and 3c. In this case, the spectra have many oscillations related to the harmonics of the main wavenumber and frequency. However, the spectra follow a power law trend close to  $k^{-3.5}$  and  $\omega^{-2.2}$ , which are qualitatively in agreement with the experimental observations (see Fig. 2). We have determined the pseudo envelope and phase field to characterize the observed dynamics analogously to the experimental analysis. Figure 3b and 3c show the pseudo phase and envelope spatial and temporal spectra, respectively. This phase again exhibits a typical spectrum of phase turbulence [21]. On the other hand, the spectrum density of the envelope follows the behavior close to  $k^{-2.5}$  and  $\omega^{-2}$ . Hence, the dynamics presented by the local model Eq. (1) are qualitatively similar to those observed experimentally. However, the experiment is carried out far from the region where the model Eq. (1) is valid since, in that region, the inherent fluctuations and imperfections of the experiment make the experimental study a thorny task.

Because the effect of the wavenumber of the pattern  $k_0$  is dominant in the numerical simulation, we have filtered this wavelength from the spatial spectra. Figure 4a shows the spec-



**Fig. 4.** Spatial spectrum densities. The spatial spectra of the scalar, and pseudo phase and envelope field when a) the pattern wavenumber  $k_0$  is filtered in the model Eq. (1), and b) a Butterworth bandstop filter is applied to the pattern of the model Eq. (1). c) Spatial spectrum of the light intensity  $I(x, t)$  (left panel), and pseudo phase and envelope of the pattern (right panel) for an optical channel of dimensions  $l_x = 2550 \mu\text{m}$  and  $l_y = 431 \mu\text{m}$  with a voltage  $V_0 = 8.48 \text{ Vrms}$ . The points show the experimental results and the straight continuous curves help show the power law trend. Inset accounts for a snapshot of the observed pattern.

trum of the scalar, and pseudo phase and envelope field found when filtering. In this case, all the spectra tend to be close to  $k^{-2}$ . Alternatively, if one considers a bandstop filter [30], one obtains the result shown in Fig. 4b. Again, one obtains spectra close to  $k^{-2}$ . Therefore, all these filters allow us to detect the complex aperiodic patterns dynamics of the model Eq. (1).

Experimentally, it is not possible to study a one-dimensional pattern; one always considers a quasi-one-dimensional system of dimensions  $l_x \times l_y$  ( $l_x = 1440 \mu\text{m}$ ,  $l_x = 352 \mu\text{m}$ , and  $l_y \ll l_x$ ,  $l_y/l_x \approx 0.24$ ). To study the effect of the aspect ratio  $l_y/l_x$  of the optical channel, we have decreased the aspect ratio by  $l_x = 2550 \mu\text{m}$  and  $l_y = 431 \mu\text{m}$  ( $l_y/l_x \approx 0.17$ ). Unexpectedly, the tail of the spatial spectrum for the light intensity changes dramatically close to  $k^{-2}$ . Figure 4c illustrates the spatial spectrum density found. Likewise, we calculated the pseudo phase and envelope field associated with the pattern based on the Hilbert transform's analytical signal. Figure 4c summarizes the spectra found for these fields. Note that both spatial spectra present power laws close to  $-2$ . Hence, quasi-dimensional dynamics can significantly impact the complex dynamics established by aperiodic patterns by altering the structure of defects, as shown in Figs. 1b and 4c.

In conclusion, based on a liquid crystal light valve with optical feedback and spatial light modulator, we have observed aperiodic one-dimensional patterns with temporal and spatial

spectra with power laws. Likewise, through a valid mathematical model close to a Lifshitz point, we numerically find chaotic spatiotemporal patterns whose temporal and spatial spectra have exponents similar to those observed experimentally.

**Funding.** Fonds support of ANID-Millennium Science Initiative Program-ICN17\_012 (MIRO) and FONDECYT project 1210353.

**Acknowledgment.** The authors thank Y. Soupart for fruitful discussions.

**Disclosures.** The authors declare no conflicts of interest.

**Data availability.** Data underlying the results presented in this paper are not publicly available at this time but may be obtained from the authors upon reasonable request.

## REFERENCES

1. L. M Pismen, *Patterns and interfaces in dissipative dynamics* (Springer, Berlin, 2006).
2. M. Cross, H. Greenside, *Pattern formation and dynamics in non-equilibrium systems*, (Cambridge University Press, New York, 2009).
3. F. T. Arecchi, S. Boccaletti, and P. Ramazza, *Phys. Rep.*, **318**, 1 (1999).
4. D. Dangoisse, D. Hennequin, C. Lepers, E. Louvergneaux, and P. Glorieux, *Phys. Rev. A*, **46**, 5955 (1992).
5. G. Huyet, M.C. Martinoni, J.R. Tredicce, and S. Rica, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4027 (1995).
6. A. Bartolo, N. Vigne, M. Marconi, G., Beaudoin, K., Pantzas, I., Sagnes, G. Huyet, F. Maucher, S. V. Gurevich, J. Javaloyes, A. Garnache, and M. Giudici *Optica*, **9**, 1386 (2022).
7. C. Denz, M. Schwab, and C. Weillner, *Transverse-pattern formation in photorefractive optics* (Springer, Berlin, 2003).
8. T. Ackemann, and W. Lange, *Phys. Rev. A*, **50**, R4468 (1994).
9. G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, and E. Louvergneaux, *Phys. Rev. A*, **74**, 043814 (2006).
10. S. Residori, *Phys. Rep.* **416**, 201 (2005).
11. M. G. Clerc, González-Cortés, V. Odent, and M. Wilson, *Opt. Express*, **24**, 15478 (2016).
12. E.G. Turitsyna, et al., *Nat. Photon* **7**, 783 (2013).
13. I.R.R. Gonzalez, et al. *Nat. Comm.* **8**, 15731 (2017).
14. G. Xu, D. Vocke, D. Faccio, J. Garnier, T. Roger, S. Trillo, and A. Picozzi, *Nat. Comm.* **6**, 8131 (2015).
15. P.J. Aguilera-Rojas, M.G. Clerc, S. Echeverria-Alar, Y. Soupart, M. Tlidi, *Chaos, Solitons and Fractals* **182**, 114851 (2024).
16. R. Alert, J. Casademunt, J.F. Joanny, *Annu Rev Condens Matter Phys* **13**, 143 (2022).
17. K.A. Takeuchi, M. Sano, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 230601 (2010).
18. Q. Ouyang, H.L. Swinney, *Chaos* **1**, 411 (1991).
19. S. Ghashghaie, W. Breyman, J. Peinke, P. Talkner, Y. Dodge, *Nature* **381**, 767 (1996).
20. E.A.L. Henn, J.A. Seman, G. Roati, K.M.F. Magalhaes, V.S. Bagnato, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 045301 (2009).
21. Y. Kuramoto, *Chemical turbulence. In Chemical oscillations, waves, and turbulence* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1984).
22. J. Claerbout, *Fundamentals of Geophysical Data Processing* (McGraw-Hill, New York, 1976).
23. M. G. Clerc, and N. Verschuere, *Phys. Rev. E*, **88**, 052916 (2013).
24. D. E. Sigei, *Phys. Rev. E* **52**, 2443 (1995).
25. M. Bertram, C. Beta, M. Pollmann, A.S. Mikhailov, H.H. Rotermund, and G. Ertl, *Phys. Rev. E* **67**, 036208 (2003).
26. C.Y. Zenkova, M.P. Gorsky, and P.A. Ryabiy, *Opt. Appl.* **46**, 153 (2016).
27. U. Frisch, *Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
28. M. G. Clerc, A. Petrossian, and S. Residori, *Phys. Rev. E*, **71**, 015205 (2005).
29. A. J. Alvarez-Socorro, M. G. Clerc, G. González-Cortés, and M. Wilson, *Phys. Rev. E*, **95**, 010202 (2017).
30. S. Butterworth, *Wireless Engineer*, **7**, 536 (1930).

## REFERENCES

- 276
- 277 1. L. M Pismen, *Patterns and interfaces in dissipative dynamics* (Springer, Berlin, 2006).
- 278
- 279 2. M. Cross, H. Greenside, *Pattern formation and dynamics in non-equilibrium systems*, (Cambridge University Press, New York, 2009).
- 280
- 281 3. F. T. Arecchi, S. Boccaletti, and P. Ramazza, *Pattern formation and competition in nonlinear optics*, Phys. Rep., **318**, 1 (1999).
- 282
- 283 4. D. Dangoisse, D. Hennequin, C. Lepers, E. Louvergneaux, and P. Glorieux, *Two-dimensional optical lattices in a CO<sub>2</sub> laser*, Phys. Rev. A, **46**, 5955 (1992).
- 284
- 285
- 286 5. G. Huyet, M.C. Martinoni, J.R. Tredicce, and S.Rica, *Spatiotemporal dynamics of lasers with a large Fresnel number* Phys. Rev. Lett. **75**, 4027 (1995).
- 287
- 288
- 289 6. A. Bartolo, N. Vigne, M. Marconi, G., Beaudoin, K., Pantzas, I., Sagnes, G. Huyet, F. Maucher, S. V. Gurevich, J. Javaloyes, A. Garnache, and M. Giudici *Temporal localized Turing patterns in mode-locked semiconductor lasers*, Optica, **9**, 1386 (2022).
- 290
- 291
- 292
- 293 7. C. Denz, M. Schwab, and C. Weillnau, *Transverse-pattern formation in photorefractive optics* (Springer, Berlin, 2003).
- 294
- 295 8. T. Ackemann, and W. Lange, *Non- and nearly hexagonal patterns in sodium vapor generated by single-mirror feedback*, Phys. Rev. A, **50**, R4468 (1994).
- 296
- 297
- 298 9. G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, and E. Louvergneaux, *Two-dimensional noise-sustained structures in optics: Theory and experiments*, Phys. Rev. A, **74**, 043814 (2006).
- 299
- 300
- 301 10. S. Residori, *Patterns, fronts and structures in a liquid-crystal-light-valve with optical feedback*, Phys. Rep. **416**, 201 (2005).
- 302
- 303 11. M. G. Clerc, González-Cortés, V. Odent, and M. Wilson, *Optical textures: characterizing spatiotemporal chaos* Opt. Express, **24**, 15478 (2016).
- 304
- 305
- 306 12. E.G. Turitsyna, S.V. Smirnov, S. Sugavanam, N. Tarasov, X. Shu, S.A. Babin, E.V. Podivilov, D.V. Churkin, G. Falkovich, and S.K. Turitsyn. The laminar-turbulent transition in a fibre laser. Nat. Photon **7**, 783 (2013).
- 307
- 308
- 309 13. I.R.R. Gonzalez, B.C. Lima, P.I.R. Pincheira, A.A. Brum, A.M. S. Macedo, G.L. Vasconcelos, L.S. Menezes, E.P. Raposo, A.S.L. Gomes, and R. Kashyap, Turbulence hierarchy in a random fibre laser. Nat Comm **8**, 15731 (2017).
- 310
- 311
- 312
- 313 14. G. Xu, D. Vocke, D. Faccio, J. Garnier, T. Roger, S. Trillo, A. Picozzi, From coherent shocklets to giant collective incoherent shock waves in nonlocal turbulent flows. Nat. Comm. **6**, 8131 (2015).
- 314
- 315
- 316 15. P.J. Aguilera-Rojas, M.G. Clerc, S. Echeverria-Alar, Y. Soupart, M. Tlidi, Fingerprint pattern bi-turbulence in a driven dissipative optical system Chaos, Solitons and Fractals **182**, 114851 (2024).
- 317
- 318
- 319 16. R. Alert, J. Casademunt, J.F. Joanny, Active turbulence. Annu Rev Condens Matter Phys **13**, 143 (2022).
- 320
- 321 17. K.A. Takeuchi, M. Sano, Universal fluctuations of growing interfaces: evidence in turbulent liquid crystals. Phys. Rev. Lett. **104**, 230601 (2010).
- 322
- 323
- 324 18. Q. Ouyang, H.L. Swinney. Transition to chemical turbulence. Chaos **1**, 411 (1991).
- 325
- 326 19. S. Ghashghaie, W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner, Y. Dodge, Turbulent cascades in foreign exchange markets. Nature **381**, 767 (1996).
- 327
- 328 20. E.A.L. Henn, J.A. Seman, G. Roati, K.M.F. Magalhaes, V.S. Bagnato, Emergence of turbulence in an oscillating Bose-Einstein condensate. Phys. Rev. Lett. **103**, 045301 (2009).
- 329
- 330
- 331 21. Y. Kuramoto, *Chemical turbulence. In Chemical oscillations, waves, and turbulence* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1984).
- 332
- 333 22. J. Claerbout, *Fundamentals of Geophysical Data Processing* (McGraw-Hill, New York, 1976).
- 334
- 335 23. M. G. Clerc, and N. Verschueren, *Quasiperiodicity route to spatiotemporal chaos in one-dimensional pattern-forming systems*, Phys. Rev. E, **88**, 052916 (2013).
- 336
- 337
- 338 24. D. E. Sigeti, *Survival of deterministic dynamics in the presence of noise and the exponential decay of power spectra at high frequency*, Phys. Rev. E **52**, 2443 (1995).
- 339
- 340
- 341 25. M. Bertram, C. Beta, M. Pollmann, A.S. Mikhailov, H.H. Rotermund, and G. Ertl, Pattern formation on the edge of chaos: Experiments with CO oxidation on a Pt(110) surface under global delayed feedback Phys. Rev. E **67**, 036208 (2003)
- 342
- 343 26. C.Y. Zenkova, M.P. Gorsky, and P.A. Ryabiy, Pseudo-phase mapping of speckle fields using 2D Hilbert transformation. Opt. Appl. **46**, 153 (2016).
- 344
- 345 27. U. Frisch, *Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- 346
- 347 28. M. G. Clerc, A. Petrossian, and S. Residori, *Bouncing localized structures in a liquid-crystal light-valve experiment*, Phys. Rev. E, **71**, 015205 (2005).
- 348
- 349 29. A. J. Alvarez-Socorro, M. G. Clerc, G. González-Cortés, and M. Wilson, *Nonvariational mechanism of front propagation: Theory and experiments*, Phys. Rev. E, **95**, 010202 (2017).
- 350
- 351 30. S. Butterworth, *On the theory of filter amplifiers*, Wireless Engineer, **7**, 536 (1930).
- 352
- 353
- 354
- 355
- 356
- 357