



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

METODOLOGÍA PARA LA GENERACIÓN DE ALTERNATIVAS DE PIT
FINAL EN MINERÍA A CIELO ABIERTO QUE CONSIDEREN
INCERTIDUMBRE GEOLÓGICA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN MINERÍA

NINIBETH BEATRIZ SAAVEDRA MIRANDA

PROFESOR GUÍA:
ENRIQUE JÉLVEZ MONTENEGRO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
NADIA MERY GUERRERO
ASIEH HEKMAT
MOHAMMAD MALEKI TEHRANI

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Fondo Basal
AFB220002, AFB230001 y Fondecyt de Iniciación N°112213 52

SANTIAGO DE CHILE
2024

**RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAGÍSTER EN MINERÍA
POR: NINIBETH BEATRIZ SAAVEDRA MIRANDA
FECHA: 2024
PROF. GUÍA: ENRIQUE JÉLVEZ MONTENEGRO**

METODOLOGÍA PARA LA GENERACIÓN DE ALTERNATIVAS DE PIT FINAL EN MINERÍA A CIELO ABIERTO QUE CONSIDEREN INCERTIDUMBRE GEOLÓGICA

Este trabajo aborda el proceso de toma de decisiones en planificación de minas a cielo abierto que consideran incertidumbre geológica, específicamente el problema del pit final, el cual consiste en determinar la porción del yacimiento que maximiza el valor económico no descontado, respetando las restricciones de ángulos de talud seguros en las paredes del pit. El enfoque tradicional de esta metodología considera un único modelo de bloques, cuyas variables geológicas fueron estimadas mediante información limitada del yacimiento. En el último tiempo, los esfuerzos realizados buscan cuantificar la incertidumbre geológica e incorporarla en el proceso de planificación utilizando medidas de riesgo para mejorar la toma de decisiones, por ejemplo, mediante la generación de alternativas de pit final que consideren distintas promesas de captura de valor esperado y riesgo de pérdidas. No obstante, estos esfuerzos se traducen en metodologías que absorben mayoritariamente el tiempo en determinar un conjunto de soluciones, que podrían interesar o no al inversor. Este trabajo incorpora una metodología a priori el criterio que utiliza un inversor para elegir una solución a partir de un conjunto de alternativas de pit final óptimas, evitando así el proceso secuencial de generar varias alternativas factibles para finalmente seleccionar una de ellas. Para ello, se determina un único pit final óptimo a partir de la relación valor esperado y valor condicional en riesgo minimizando la distancia a un punto de referencia conocido como *pit ideal*.

Los resultados obtenidos muestran que se reduce el tiempo de cómputo al definir de una sola vez la mejor alternativa de pit final en base al riesgo/retorno. Dicho pit final es óptimo para el inversionista y pertenece al conjunto de soluciones no dominadas (frontera eficiente). Esta solución se compara con metodologías estocásticas que generan soluciones óptimas extremas que no gestionan el riesgo, o bien, que generan un conjunto de soluciones que requieren la aplicación de criterios posteriores. El pit final óptimo obtenido representa la solución con el mejor balance de mayor ganancia esperada y menor riesgo de pérdida, y reduce en más de un 90 % los tiempos de cómputo respecto a la metodología secuencial. La metodología propuesta permite al tomador de decisiones tener un pit robusto que considera la incertidumbre geológica representando el mejor escenario esperado, permitiendo al inversor tomar mejores decisiones de planificación.

**ABSTRACT OF THE THESIS TO OBTAIN GRADE OF
MASTER IN MINING ENGINEERING
BY: NINIBETH BEATRIZ SAAVEDRA MIRANDA
DATE: 2024
THESIS ADVISOR: ENRIQUE BORIS JÉLVEZ MONTENEGRO**

METHODOLOGY FOR THE GENERATION OF FINAL PIT ALTERNATIVES IN OPEN PIT MINING THAT CONSIDER GEOLOGICAL UNCERTAINTY

This work addresses the decision-making process in open-pit mine planning that considers geological uncertainty, specifically the final pit problem, which involves determining the portion of the deposit that maximizes the undiscounted economic value while respecting the safe slope angle constraints of the pit walls. The traditional approach to this methodology considers a single block model, whose geological variables are estimated using limited information from the deposit. Recently, efforts have focused on quantifying geological uncertainty and incorporating it into the planning process using risk measures to improve decision-making, for example, by generating final pit alternatives that consider different expected value capture promises and loss risk. However, these efforts result in methodologies that largely consume time in determining a set of solutions that may or may not interest the investor. This work incorporates a priori methodology that uses criteria employed by an investor to choose a solution from a set of optimal final pit alternatives, thereby avoiding the sequential process of generating multiple feasible alternatives to ultimately select one. To this end, a single optimal final pit is determined based on the expected value and conditional value at risk, minimizing the distance to a reference point known as the ideal pit.

The results obtained show that computation time is reduced by defining the best final pit alternative in terms of risk/return all at once. This final pit is optimal for the investor and belongs to the set of non-dominated solutions (efficient frontier). This solution is compared with other approaches; after applying this methodology, it is validated that the knee pit belongs to the Efficient Frontier and does not depend on it for calculation. In comparison with other approaches, the knee pit generates an optimal solution, while traditional approaches generate feasible solutions. Additionally, it is compared with stochastic methodologies that produce extreme optimal solutions that do not manage risk or generate a set of solutions requiring subsequent criteria application. The optimal final pit obtained represents the solution with the best balance of maximum expected gain and minimum loss risk, reducing computation times by over 90 % compared to the sequential methodology. The proposed methodology enables the decision-maker to have a robust pit that considers geological uncertainty, representing the best expected scenario, allowing the investor to make better planning decisions.

“No hay escapatoria posible al huir de nosotros mismos; el caos de adentro se proyecta siempre hacia afuera; la evasión es un camino hacia ninguna parte”
El patio cuadrado, Amparo Dávila

AGRADECIMIENTOS

En este punto, quiero agradecer a todas aquellas personas que formaron parte de esta etapa, a través de conocimientos, consejos, alojamientos, paciencia y guía, gracias por acompañarme en esta aventura.

Mamá, papá, gracias por estar en cada etapa de mi vida, por ser mi soporte y entregarme su amor inmensurable.

Dios, gracias por permitirme existir y escoger aprender a vivir cada momento.

A mi Familia; Matthy, Noly y Chuno; pilar de risas, consejos y tirones de oreja, gracias, gracias, gracias.

A mi Red, por estar incluso cuando yo misma no supe hacerlo, gracias por ser luz y silencio en un vacío lleno.

A mi profe Enrique Jélvez, en especial su paciencia, comprensión y aguante en todo este proceso, gracias por su guía y ayuda constante, sus palabras y consejos en los momentos más críticos, gracias por aceptarme como tesista y confiar en mí.

Al Laboratorio Delphos, por su apoyo, sugerencias y soporte durante todo este proceso, han sido una guía extraordinaria.

A mi grupo "Los sin lab" por estos años de apañe constante, son geniales cabros.

Finalmente, agradezco al Advanced Mining Technology Center - AMTC de la Universidad de Chile, por el apoyo mediante el Fondo Basal AFB220002 y AFB230001. Además, agradezco al Proyecto Fondecyt de Iniciación en Investigación N° 11221352, el cual financió parcialmente este trabajo.

Tabla de contenido

1. Antecedentes	1
1.1. Introducción	1
1.2. Planificación de la producción minera	3
1.3. Incertidumbre en planificación de la producción de minas a cielo abierto	6
1.3.1. Fuentes de incertidumbre en minería	6
1.3.2. Incertidumbre geológica	8
1.4. Medidas de riesgo para cuantificar incertidumbre en minería	9
1.5. Descripción del problema	10
1.6. Revisión del estado del arte	11
1.6.1. Enfoques heurísticos	11
1.6.2. Enfoques estocásticos	14
1.7. Preguntas de investigación e Hipótesis	18
1.8. Objetivos	19
1.8.1. Objetivo general	19
1.8.2. Objetivos específicos	19
1.9. Alcances	19
1.10. Contribución del estudio	20
1.11. Estructura de la tesis	20
2. Marco Teórico	21
2.1. Simulaciones condicionales	21
2.2. Optimización	23
2.2.1. Fundamentos	24
2.2.2. Programación lineal entera	24
2.2.3. Programación Heurística	25
2.2.4. Programación estocástica	25
2.2.5. Optimización biobjetivo	26
2.2.6. Frontera eficiente y punto ideal	26
2.3. Medidas de distancia en espacios métricos: Manhattan	29
3. Metodología	31
3.1. Modelamiento del problema	31
3.1.1. Punto ideal	31
3.1.2. Distancia Mínima de Manhattan	32
3.1.3. Modelo de optimización	32
3.2. Esquema de implementación	34
4. Caso de estudio I	35

4.1.	Antecedentes	35
4.1.1.	Modelo de bloques	35
4.1.2.	Modelo económico	38
4.1.3.	Modelo geomecánico	39
4.1.4.	Recurso computacional	39
4.2.	Etapa 1: Frontera óptima de Pareto	40
4.3.	Etapa 2: Pit óptimo rodilla	41
5.	Caso de estudio II	43
5.1.	Antecedentes Caso Estudio	43
5.1.1.	Modelo de bloques - Caso Estudio	43
5.1.2.	Parámetros económicos	47
5.1.3.	Parámetros de control geomecánico	47
5.2.	Pit rodilla	47
5.3.	Comparación con metodología tradicional	49
5.4.	Análisis de estrés	53
6.	Análisis y Discusión	56
6.1.	Distancia entre el pit ideal y pit rodilla	56
6.2.	Análisis de estrés: impacto del número de bloques y el número de escenarios en la metodología propuesta	56
6.3.	Comparación de la metodología propuesta con otros enfoques	57
7.	Conclusiones y Trabajo Futuro	59
7.1.	Conclusiones	59
7.2.	Trabajo futuro	61
	BIBLIOGRAFÍA	62
	ANEXOS	67
	Anexo A. Medidas de distancia	67
	Anexo B. Estadística descriptiva Caso sintético	69
	Anexo C. Estadística descriptiva Caso estudio	71
	Anexo D. Demostración de optimalidad	73

Índice de figuras

1.	Ciclo de vida de un proyecto según riesgo y tiempo. Fuente: Clegg (2005).	1
2.	Ejemplo de reglas de secuencias para remover bloques de sobrecarga. Fuente: Newman et al. (2010).	5
3.	Origen de incertidumbre geológica. Fuente: Mayer & Kazakidis (2007).	8
4.	Metodología híbrida para determinar pit final. (a) representa las simulaciones condicionales, (b) proceso de optimización para cada simulación, (c) soluciones de pit final y (d) pit final considerando cada solución. Fuente: Jelvez et al. (2021).	12
5.	Determinación de pit final respecto a un modelo de probabilidad. Fuente: Deutsch et al. (2015).	13
6.	Metodología estocástica para determinar pit final. (a) representa las simulaciones condicionales, (b) proceso de optimización que considera todas las simulaciones y (c) solución de pit final. Fuente: Jelvez et al. (2021).	14
7.	Frontera óptima de Pareto donde (a) representa una solución infactible, (b) una solución óptima y (c) una solución factible	18
8.	Representación gráfica de nubes de correlación para para validar el proceso de anamorfosis. (Elaboración propia)	22
9.	Representación gráfica de nubes de dispersión de valores reales respecto a los valores simulados para un depósito de hierro. (Elaboración propia)	23
10.	Ejemplo Frontera Eficiente de Pareto. Fuente: Chiu et al. (2016).	27
11.	Representación visual del punto ideal y la frontera eficiente en el plano valor-riesgo. Cada punto en la frontera representa un pit final óptimo para el par (riesgo, valor).	31
12.	Representación gráfica de la Distancia Mínima de Manhattan	33
13.	Esquema de implementación para determinar pit rodilla a partir de MMD	34
14.	Vista de sección cota 168, de la variable cobre del modelo de bloques 3D: Leyes promedio de simulaciones.	36
15.	Vista de sección cota 168, de la variable cobre en el modelo de bloques 3D: Simulación 1.	36
16.	Vista de sección cota 168, de la variable cobre en el modelo de bloques 3D: Simulación 25.	37
17.	Vista de sección cota 168, de la variable cobre en el modelo de bloques 3D: Simulación 50.	37
18.	Histograma leyes de cobre de modelo de bloques 3D.	38
19.	Frontera Eficiente valor esperado respecto al riesgo con un nivel de confianza del 95%.	41
20.	Gráfica de valor esperado y riesgo con un nivel de confianza del 95%.	42

21.	Vista de sección cota 1995 de la ley de cobre en el modelo de bloques 3D Caso de estudio variable estimada por Kriging.	44
22.	Vista de sección cota 1995 de la ley de cobre en el modelo de bloques 3D Caso de estudio: Ley promedio simulaciones.	44
23.	Vista de sección cota 1995 de la ley de cobre en el modelo de bloques 3D Caso de estudio: Simulación 1.	45
24.	Vista de sección cota 1995 de la ley de cobre en el modelo de bloques 3D Caso de estudio: Simulación 20.	45
25.	Vista de sección cota 1995 de la ley de cobre en el modelo de bloques 3D Caso de estudio: Simulación 40.	46
26.	Histograma leyes de cobre de modelo de bloques 3D.	46
27.	Comparación de resultados obtenidos entre enfoques estocásticos y tradicio- nales	50
28.	Variación horizontal pit tradicional respecto un pit factible	50
29.	Variación vertical pit tradicional respecto un pit factible	51
30.	Vista planta pit rodilla	52
31.	Vista planta pit tradicional	53
32.	Comparación curva tonelaje versús ley	53
33.	Análisis de estrés modelo 2D, 50 simulaciones	54
34.	Análisis de estrés caso de estudio I	54
35.	Variación del tiempo de cómputo respecto a la cantidad de simulaciones, caso de estudio II	55
B.1.	Gráficos boxplot para cada escenario simulado.	70
B.2.	Gráficos boxplot para cada escenario simulado.	70
B.3.	Comparación curva tonelaje versus ley, asociados a ley estimada por kriging y ley promedio de simulaciones	71
C.1.	Gráficos boxplot para cada escenario simulado.	72
C.2.	Gráficos boxplot para cada escenario simulado.	73

Índice de tablas

1.	Tabla de frecuencias de leyes del modelo de bloques sintético	38
2.	Parámetros que definen el valor económico del modelo de bloques	39
3.	Resultados de la Frontera eficiente obtenida para un nivel de confianza 95 %	40
4.	Resultados del Pit Óptimo Rodilla para un nivel de confianza del 95 %	42
5.	Tabla de frecuencias de leyes del modelo de bloques:caso estudio	47
6.	Resultados pit ideal y pit rodilla	48
7.	Cuadro comparativo soluciones Frontera Eficiente y pit rodilla	51
A.1.	Cuadro comparativo medidas de distancia	68
B.1.	Estadística descriptiva básica	69
C.1.	Estadística descriptiva básica	72

1. Antecedentes

1.1. Introducción

A lo largo de la historia, la industria minera se ha enfrentado a un constante cambio, con el paso del tiempo los depósitos minerales presentan leyes más bajas y ubicadas espacialmente a mayor profundidad, cuya extracción requiere de un mayor costo y mejor estimación de los recursos. Los avances tecnológicos ayudan a comprender las características del yacimiento y, a su vez, promueven el desarrollo continuo de proyectos mineros (Darling, 2011; Runge, 1998).

Hustrulid *et al.* (2013) definen tres fases de un proyecto minero: planificación, implementación y producción. La fase de planificación es la fase inicial de un proyecto y contempla desde el estudio conceptual hasta el estudio de factibilidad, es la encargada de evaluar el atractivo económico que posee el proyecto, mediante la definición de los alcances del yacimiento, acorde a su extensión y las variables que posee.

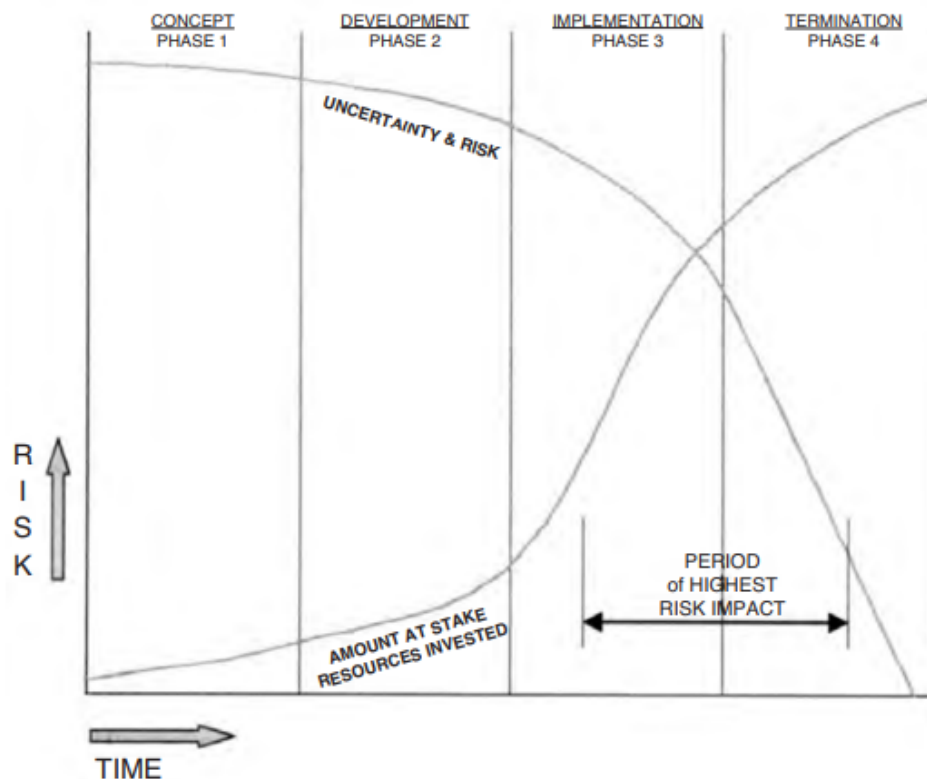


Figura 1: Ciclo de vida de un proyecto según riesgo y tiempo. Fuente: Clegg (2005).

La Figura 1 muestra la relación entre la incertidumbre y el tiempo que involucra un proyecto, en ella se observa que la fase inicial de un proyecto minero representa un alto grado de incertidumbre, la cual va disminuyendo a medida que sus variables se vuelven conocidas (Clegg, 2005). Martínez (2009) menciona que esta fase contiene un alto nivel de desconocimiento influenciado por variables económicas como precios de los commodities, costos de producción, y variables físicas subyacentes tales como leyes, tonelajes, entre otras. Por otro lado, dado que la información de entrada proviene de muestras dispersas que buscan modelar el yacimiento mediante estimación, existe una diferencia entre el retorno real de inversión y el valor estimado del proyecto (Runge, 1998). Esta diferencia es asociada a errores de muestreo, estimación de los costos de capital, estimación de recursos, afectando costos operativos, ingresos por venta y la productividad operativa (Mayer y Kazakidis, 2007).

Los proyectos mineros buscan optimizar un objetivo estratégico de la compañía (vida útil, beneficio económico, etc.) mediante la definición del o los métodos de explotación factibles que permiten extraer estratégicamente los recursos geológicos (Nicholas, 1993). Estos métodos definen los lineamientos que se ejecutan en las operaciones unitarias y los procesos aguas abajo del proyecto, los que son clasificados como métodos de explotación subterránea y métodos de explotación a cielo abierto. Los métodos de explotación subterránea desarrollan labores subterráneas para acceder y extraer el mineral, son diferenciados entre ellos por el tratamiento de la cavidad una vez extraído el material, cantidad de material a extraer y el costo asociado a la inversión y operación. Por otro lado, los métodos de explotación a cielo abierto se reconocen como sistemas de explotación cuyo yacimiento aflora en la superficie, siendo uno de los métodos más antiguo y productivo, caracterizado por extraer grandes volúmenes de material a menor costo; este método de explotación se desarrolla por niveles horizontales, conocidos como bancos, que dan forma a un conoide invertido denominado pit (Darling, 2011). Uno de los principales desafíos de este método radica en cómo seleccionar eficazmente los límites del pit.

En minería a cielo abierto, tener buenas estimaciones del yacimiento permite determinar los límites del pit de mejor manera, logrando obtener evaluaciones de capital y procesos de operación más realistas. Es por ello que predecir el comportamiento del yacimiento mejora la toma de decisiones sobre un proyecto minero, sobre todo en etapas tempranas cuando se tiene gran incertidumbre en los datos y condiciones para desarrollar el mejor negocio productivo (Dimitrakopoulos, 2018; Van Brunt y Rossi, 1999).

Este trabajo se enfoca en la definición de los límites de explotación en minería a cielo abierto cuando se considera que la información que se tiene del yacimiento, como la concentración del metal de interés, está sujeta a incertidumbre. A continuación, se presentan

de forma introductoria las ideas principales que sustentan los fundamentos de este estudio. En la Sección 1.2 se revisan los principios del proceso de planificación de minas a cielo abierto para contextualizar la etapa de definición de los límites de explotación en el proceso productivo. Luego, en la Sección 1.3 se aborda el concepto de incertidumbre en planificación y se entregan algunos ejemplos, abordando particularmente la incertidumbre geológica, de interés en el presente estudio. La Sección 1.4 entrega un resumen de las medidas de riesgo, necesarias para cuantificar el impacto de las fuentes de incertidumbre en el proceso de planificación. La Sección 1.5 define específicamente el problema a abordar en este trabajo de tesis. A continuación, 1.6 se presenta una completa revisión del estado del arte sobre este problema. Con esto, 1.7 aborda las preguntas de investigación e hipótesis del estudio. Finalmente, las Secciones 1.8, 1.9 y 1.10 definen los objetivos de este trabajo, sus alcances y la contribución del mismo, y 1.11 muestra su organización en lo que sigue.

1.2. Planificación de la producción minera

Las compañías mineras tienen por objetivo maximizar el valor de un proyecto y generar el mejor negocio productivo (Mwangi *et al.*, 2020). La planificación de la producción minera es un proceso iterativo que considera las características del mercado delimitadas por el recurso geológico, su objetivo principal es extraer el yacimiento para maximizar los beneficios económicos, manteniendo una operación viable, segura y sostenible (Johnson, 1968; Asr *et al.*, 2019). En ese sentido, la planificación de la producción minera se transforma en un cronograma estratégico que define la mejor secuencia productiva para extraer el material. Newman *et al.* (2010) categorizan el proceso de planificación según las características de las decisiones empleadas: estratégicas, tácticas y operacionales. La planificación estratégica tiene por objetivo conjugar los objetivos de la compañía con los recursos geológicos y las características del mercado. Las decisiones tácticas permiten definir dónde, cuándo y cómo se extraerán los recursos cumpliendo los programas de producción. Las decisiones operativas son ejecutadas diariamente según los procesos operativos de la mina.

Diversos autores como Johnson (1968), Osanloo *et al.* (2008), Hustrulid *et al.* (2013) y Asr *et al.* (2019) definen la planificación como una secuencia de extracción según el horizonte de tiempo: largo, mediano y corto plazo. Un plan a largo plazo evalúa el potencial técnico y económico de un proyecto, define los límites económicos del pit considerando la forma y tamaño del yacimiento, perfiles de leyes y características del mercado para establecer el ritmo de producción a lo largo de la vida útil de la mina, evaluando detalladamente los escenarios de planificación sobre cómo se debe desarrollar la mina.

La planificación de mediano plazo busca ajustar los objetivos trazados en el largo plazo (diseño, ritmos de producción, leyes, etc.) con la realidad operacional para mejorar el proceso de toma de decisiones, enfocándose en sectores específicos de explotación de la mina. Finalmente, la planificación de corto plazo se encarga de cumplir los objetivos de producción planificados en periodos de un año subdivididos en meses, semanas o incluso días. La información obtenida en el corto plazo retroalimenta al plan de mediano plazo, y éste, a su vez, hace lo propio con el plan de largo plazo.

El proceso de planificación de la producción minera a cielo abierto es construido tradicionalmente por un único modelo estimado del depósito, discretizado en unidades regulares conocidas como bloques, que representan, en un espacio tridimensional, la distribución espacial, el comportamiento de sus variables, continuas y categóricas, y el volumen del material. El modelo de bloques es estimado mediante técnicas de interpolación como kriging (Journel y Huijbregts, 1976), a partir de muestras obtenidas por sondajes en ciertas locaciones, definidas por una malla. Una vez caracterizado el depósito y obtenido el modelo geológico de bloques, que es uno de los principales insumos para la etapa de planificación, corresponde transformar dicho modelo geológico de bloques en un modelo económico, por lo que cada bloque del modelo es valorizado mediante la estimación de los ingresos que se obtendrían por la venta de su contenido metálico, descontando los costos asociados a todo el proceso de recuperación de dicho metal desde la roca. Definido el modelo económico del yacimiento se determina la envolvente económica del yacimiento denominado en minería a cielo abierto como pit final.

Para lo anterior, se considera el valor v_b de un bloque b , dependiendo de su ley de interés, como:

$$v_b = \begin{cases} T_b[(L_b \times R_b \times (P - C_{VyR})) - C_M - C_P] & \text{si } L_b \geq L^* \\ -C_M \times T_b & \text{si } L_b \leq L^* \end{cases} \quad (1)$$

donde T_b , L_b y R_b , representan el tonelaje, la ley y la recuperación metalúrgica del bloque b . Los parámetros económicos se representan mediante el precio P del metal de interés, el costo de venta y refinación C_{VyR} , el costo de mina C_M y el costo de planta C_P . A grandes rasgos, la decisión sobre qué hacer con los bloques extraídos depende de una ley de referencia conocida como ley de corte L^* , que permite clasificar el mineral que es enviado a procesamiento, y el estéril, que es enviado a botadero.

Una vez determinado el modelo económico, se debe asegurar que el pit que se quiere explotar cumpla requerimientos de seguridad en sus paredes. Para ello, la extracción de cada bloque está sujeta a un modelo geométrico del depósito (basado en la información

geomecánica del yacimiento). Es así como para extraer un bloque dado, primero se debe extraer otros bloques que (i) den acceso al bloque de interés, y (ii) aseguren paredes resultantes del pit que se va generando de forma segura. Esto es codificado tradicionalmente como relaciones de precedencia entre los bloques que respetan ángulos de talud en las paredes del pit (Newman *et al.*, 2010).

La forma en que se definen estas relaciones de precedencia tiene impacto en la geometría del pit final resultante, esta acción se realiza a partir de las referencias espaciales que posee cada bloque (Newman *et al.*, 2010; Mwangi *et al.*, 2020). Un bloque es caracterizado a partir de tres componentes: (1) roseta: representa la inclinación del talud que entrega estabilidad a las paredes del pit, (2) vértice: corresponde al centro de un bloque, y (3) altura, permite definir la cantidad de bancos superiores al vértice. La Figura 2 representa dos ejemplos utilizados para remover la sobrecarga que posee un bloque, forma de cruz (figura ubicada a la izquierda) en la cual para acceder al bloque 6 se requiere remover 5 bloques, el que se encuentra sobre el bloque 6 y los bloques que se encuentran ubicados en el banco anterior indicando las cuatro direcciones cardinales, mientras que en la figura de la derecha, la forma llegar al bloque inferior es removiendo 9 bloques que se encuentran sobre el bloque 10.

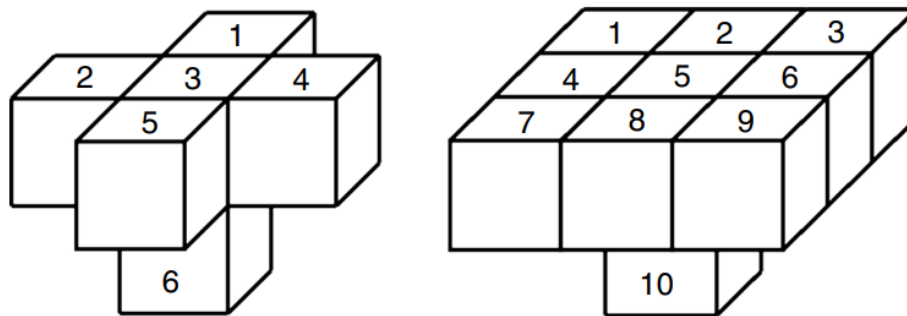


Figura 2: Ejemplo de reglas de secuencias para remover bloques de sobrecarga. Fuente: Newman *et al.* (2010).

Este tipo de metodología es utilizada actualmente por las compañías mineras para definir sus reservas, los límites del pit, y el valor del proyecto. Sin embargo, se ha reportado extensamente (Journel y Huijbregts, 1976; Johnson, 1968; Runge, 1998; Van Brunt y Rossi, 1999; Osanloo *et al.*, 2008; Dimitrakopoulos, 2018; Mayer y Kazakidis, 2007; Mwangi *et al.*, 2020) que la utilización de un enfoque tradicional que considera un único modelo estimado del yacimiento para las variables de interés, por ejemplo, ley de cobre, genera un efecto de suavizamiento de los valores extremos sin representar la variabilidad local de los datos y no reproduce la variabilidad geológica del depósito, ya que son construidos con mediciones dispersas, generando una fuente de riesgo para el negocio, obteniendo

en consecuencia planes de producción poco realistas, que conducen a soluciones del valor presente neto subóptimo, cuya probabilidad de ejecutarse bajo los objetivos planteados es baja (Osanloo *et al.*, 2008; Dimitrakopoulos, 2018).

Es así como la estimación de recursos y la evaluación económica del mismo, son partes esenciales del proceso de planificación, que dependen de la precisión y la confiabilidad de la información. Considerar ajustes globales de las variables de interés del modelo de bloques sin considerar su incertidumbre puede generar que la operación se vuelva inviable, dado que no permite evaluar la sensibilidad económica de la extracción, obteniendo reportes sesgados de reservas mineras, leyes y tonelajes esperados (Van Brunt y Rossi, 1999).

1.3. Incertidumbre en planificación de la producción de minas a cielo abierto

1.3.1. Fuentes de incertidumbre en minería

Anteriormente vimos que en el proceso de planificación de la producción de minas a cielo abierto se estiman una serie de parámetros, lo que permite definir modelos deterministas que buscan representar las distintas características relacionadas a la operación minera. Algunos ejemplos simples de observar en la valorización de los bloques:

- Precio del commodity: se considera un valor referencial, una proyección de largo plazo para tomar importantes definiciones como la estimación de ingresos futuros producto de la venta del metal. Sin embargo, este valor presenta alta variabilidad y es imposible conocerlo de antemano.
- Atributos geológicos/metalúrgicos: se realizan estimaciones para interpolar información asociada a distintos atributos del bloque, tales como ley del mineral, tipo de roca, densidad, características mineralógicas, entre otros, a partir de un conjunto de muestras obtenidas en los sondeos. Sin embargo, estas estimaciones están sujetas a error producto del desconocimiento que tenemos del depósito. El valor real del atributo de un bloque no se conocerá con certeza hasta que éste sea extraído y se pueda medir directamente. Nabavi *et al.* (2024) aborda la incertidumbre geológica según la ley del mineral y su influencia en la proyección de precio de los commodities, afectando directamente la rentabilidad de los proyectos. Presentan a su vez las potenciales pérdidas y ganancias asociadas a los escenarios de producción considerando la fluctuación de precios, entregando estrategias de producción y ajustes en la programación de la extracción, que pueden impactar los ingresos por commodities.

Sin embargo, este estudio se implementa en modelos de estudio acotados, además, podría implementar técnicas de validación cruzada para evaluar la robustez del modelo propuesto en diferentes escenarios de incertidumbre y con ello determinar las variables que presentan un mayor impacto en las decisiones de planificación.

- **Costos del proceso:** abarca desde la extracción hasta la venta del material de interés, involucrando los costos asociados a la extracción del mineral y los bloques que lo sobrecargan (lastre), el costo de procesar el mineral dependiendo del tratamiento que este reciba y la comercialización del producto. Kamel *et al.* (2023) evalúa mediante simulación de Monte Carlo y el método del árbol binomial el impacto de la incertidumbre asociada a los precios de los commodities, condiciones del mercado y costos operativos. Identifican el impacto de las variables críticas que afectan el valor del proyecto como los precios de commodities y costos operativos impactando significativamente la rentabilidad del proyecto.
- **Recuperación metalúrgica:** sujeto al tipo de procesamiento, la recuperación metalúrgica mide la cantidad de mineral recuperado respecto a la cantidad de mineral procesado. Esta se ve afectada por la variabilidad en la composición del material de entrada. Quelopana *et al.* (2023) busca predecir el comportamiento del mineral en la planta combinando la geología y la metalurgia para optimizar la extracción y procesamiento de minerales, facilitando la asignación de recursos y la optimización de la producción a largo plazo y el impacto que estos pueden generar en los costos, ayudando a mitigar estos riesgos y mejorar la gestión de costos, no obstante, requiere incluir más casos de estudio que validen los resultados obtenidos.

La metodología tradicional empleada en los procesos de planificación genera soluciones deterministas bajo el supuesto de variables conocidas, reales y fijas, no obstante, la planificación minera debe considerar fuentes de incertidumbre y los factores de riesgo que generen pérdidas de ingresos (Runge, 1998). Dada la naturaleza del negocio productivo, la información utilizada en la planificación minera posee distintos grados de incertidumbre y el proceso de toma de decisiones depende del grado de conocimiento que se tenga.

Mayer y Kazakidis (2007) clasifican las fuentes de incertidumbre según condiciones de origen endógenas y exógenas. La Figura 3 muestra las fuentes de incertidumbre asociadas a un proyecto. Las variables externas representan aquellas fuentes de incertidumbre ajenas a la empresa. Las características del mercado se consideran como la mayor fuente de incertidumbre exógena, asociado a los precios inciertos y un mercado mundial impredecible, lo que genera un gran impacto en el negocio productivo. Las variables internas corresponden a las que involucran directamente a la empresa, entre ellas, la incertidumbre geológica y la incertidumbre operacional, entre otras, ambas de origen endógeno, afectando directamente el beneficio económico que se puede obtener de un bloque. La

incertidumbre geológica, al ser interna, se puede controlar mediante la inversión en sondajes.

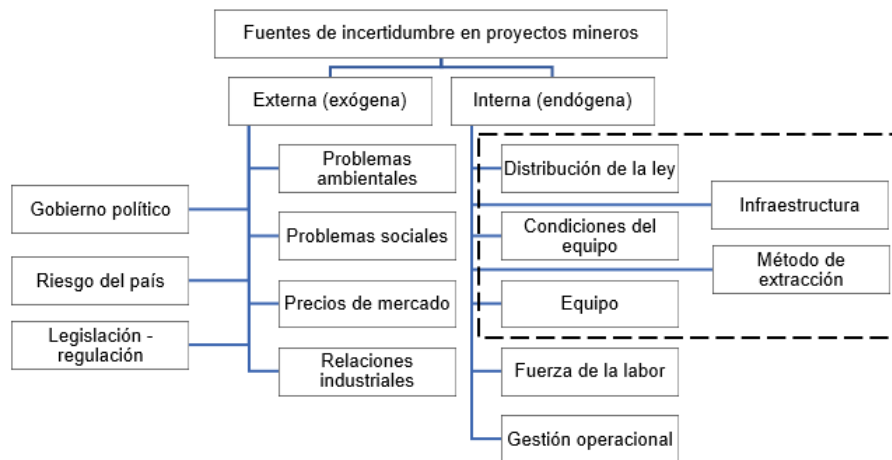


Figura 3: Origen de incertidumbre geológica. Fuente: Mayer & Kazakidis (2007).

Toda fuente de incertidumbre implica riesgo (pérdida en las metas de producción, pérdida económica, etc). La incertidumbre puede variar con el paso del tiempo y sus variables pueden llegar a ser conocidas, sin embargo, el resultado tangible de la incertidumbre se traduce en el riesgo que este conlleva (Mun, 2006). En particular, cuantificar la incertidumbre geológica y el riesgo asociado puede impactar la viabilidad de un proyecto mediante decisiones como los límites del pit, ya que impacta el diseño de la mina y la programación de la producción. Tener un conocimiento más detallado del modelo de bloques permite flexibilizar las decisiones de planificación en etapas tempranas de un proyecto minero (Osanloo *et al.*, 2008; Dimitrakopoulos, 2011, 2018; Amankwah *et al.*, 2013).

1.3.2. Incertidumbre geológica

La incertidumbre geológica es definida como las desviaciones imprevistas entre la realidad del yacimiento y los recursos predichos por los modelos de estimación (Emery y Séguret, 2020). Representa el desconocimiento de las propiedades geológicas (cantidad y calidad del material) que definen el yacimiento (Amankwah *et al.*, 2013) generadas por la forma discreta en la que son obtenidos los datos.

La variabilidad que no representa ni integra un modelo estimado genera una gran diferencia entre los recursos reportados y lo que realmente contiene el yacimiento, aumenta el grado de incertidumbre de un proyecto afectando tanto a variables exógenas como en-

dógenas. No obstante, el uso de herramientas de simulación geoestadística han permitido cuantificar la incertidumbre y con ello, reproducir la variabilidad de variables categóricas y continuas.

La geoestadística es una disciplina que posee una gama de herramientas y técnicas que miden la incertidumbre geológica. Algunas de estas herramientas se basan en utilizar simulaciones condicionales cuyo objetivo es crear escenarios aleatorios de una variable de interés (Emery y Séguret, 2020). Estos escenarios proporcionan realizaciones múltiples y equiprobables de variables continuas y categóricas, reproduciendo los valores conocidos muestreados. La simulación condicional permite cuantificar la variabilidad espacial del yacimiento (Journel y Huijbregts, 1976; Van Brunt y Rossi, 1999; Dimitrakopoulos *et al.*, 2002; Emery y Séguret, 2020) y con ello lograr imitar una distribución de las variables en el espacio, recuperando la variabilidad local de los datos (Madani y Emery, 2015; Mery *et al.*, 2017).

1.4. Medidas de riesgo para cuantificar incertidumbre en minería

Como se mencionó en secciones 1.1. y 1.3., todo proyecto posee una gran fuente de incertidumbre y como resultado siempre existirá un riesgo asociado que impacte el valor de un proyecto; conocerlo e integrarlo en el proceso de toma de decisiones permite analizar, gestionar y minimizar su valor.

El riesgo puede ser medido a través de diversas herramientas estadísticas: desviación estándar, varianza, coeficiente de variación, etc. Para un proyecto minero, no todas estas medidas permiten la gestión oportuna del riesgo. Un ejemplo de ello, es la desviación estándar, dado que a pesar de ser una de las medidas más populares genera penalizaciones cuando existen variaciones a la alza y a la baja (Mun, 2006). Una medida utilizada por instituciones financieras para minimizar las pérdidas asociadas a la incertidumbre es el Valor en Riesgo (VaR), que se define como la máxima pérdida esperada, en un horizonte de tiempo y un nivel de confianza dado en el rendimiento de un proyecto (Venegas-Martínez *et al.*, 2008).

$$VaR(z; n) = \inf(y | Prob(z \leq y) \geq n) \quad (2)$$

donde z representa el riesgo asociado a la variable y n el nivel de confianza. No obstante, el VaR es una medida de riesgo no lineal y no coherente, dado que presenta un riesgo mayor cuando se unen riesgos individuales, además, no presenta una función convexa,

dificultando su aplicación para distribuciones no normales (Artzner *et al.*, 1999; Arbeláez y Ceballos, 2005).

Dados los inconvenientes que presenta el VaR, investigadores han ido en la búsqueda de nuevos modelos y variaciones del VaR, obteniendo como medida el Valor Condicional en Riesgo CVaR (Arbeláez y Ceballos, 2005). Se define como el valor condicional de las pérdidas esperadas mayores o iguales que el VaR, dado por:

$$CVaR_{\alpha}(\xi) = \lambda VaR + (1 - \lambda)CVaR_{\alpha}(\xi) \quad (3)$$

$$\lambda = (\psi(\zeta_{\alpha}) - \alpha)/(1 - \alpha) \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (4)$$

donde ξ representa la variable aleatoria de pérdida, ψ la distribución acumulada de la variable aleatoria y $(\psi - \alpha)/(1 - \alpha)$ toda variable aleatoria de pérdida mayor o igual que el VaR.

1.5. Descripción del problema

El primer problema que enfrenta la planificación de la producción minera a cielo abierto consiste en determinar la envolvente económica a extraer, es decir, el problema del pit final, el cual consiste en determinar el subconjunto de bloques del yacimiento que maximiza el valor económico no descontado, considerando las relaciones de precedencia de cada bloque, el cual restringe la geometría de extracción del pit.

Los proyectos mineros son considerados como una fuente de inversión que posee un alto nivel de riesgo asociado a las fuentes de incertidumbre que afectan el proceso de planificación (Hartman *et al.*, 1992; Dimitrakopoulos, 2011; Hustrulid *et al.*, 2013). Cuantificar la incertidumbre geológica en etapas iniciales de un proyecto minero permite a las/los ingenieros de mina mejorar el proceso de toma de decisiones de planificación y tener un mayor control sobre los reportes de reservas, leyes esperadas, y las inversiones, comprometiendo la viabilidad económica y operacional de un proyecto (Marcotte y Caron, 2013).

Durante las últimas décadas se han establecido metodologías que permiten cuantificar la incertidumbre en base al riesgo, sin embargo, éstas implican un proceso de iteración tedioso, con un alto requerimiento computacional y tiempo invertido, y que dependen de la experiencia de un tomador de decisiones.

Para calcular el pit final, como se menciona en secciones anteriores, la metodología tradicional considera como input un único modelo de bloques estimado, el cual no captura

la variabilidad real del depósito. Es por ello que se torna cada vez más necesario incorporar fuentes de incertidumbre en el proceso de toma de decisiones de planificación y, en consecuencia, cuantificar el beneficio esperado asociado a un riesgo que la empresa esté dispuesto a asumir. En este trabajo incorporaremos distintos escenarios como representación de la variabilidad geológica, en particular, de la ley del elemento de interés, los que serán utilizados simultáneamente para calcular un único pit robusto en el plano riesgo vs retorno que considere un criterio de decisión para evitar tener que computar un conjunto de soluciones no dominadas.

1.6. Revisión del estado del arte

Existen diversos enfoques de cómo utilizar la información generada por una familia de escenarios geológicos que capturan la variabilidad de la ley. En las últimas décadas evaluar la sensibilidad y el valor esperado del pit final a partir de un modelo de incertidumbre geológica se ha transformado en un tópico de interés en minería a cielo abierto. Diversos autores han establecido técnicas que buscan incorporar esta fuente de incertidumbre en el proceso mediante información que proviene de simulaciones condicionales. En esta sección se realiza una revisión bibliográfica para identificar la contribución de distintos autores en esta problemática, diferenciados en dos enfoques: (i) Enfoque heurístico, los cuales utilizan cada escenario de manera individual para después evaluar un resultado común; y (ii) Enfoques estocásticos, los cuales utilizan toda la información disponible para alimentar un modelo y obtener un único resultado que considera de manera robusta la variabilidad de todos los escenarios. Este trabajo utilizará un modelo de bloques que incorpora incertidumbre geológica mediante un enfoque estocástico.

1.6.1. Enfoques heurísticos

Este enfoque se basa en técnicas que permiten determinar un pit final para cada escenario simulado, los cuales permiten por un lado resolver el problema de pit final de forma rápida y por otro, cuantificar el impacto de la incertidumbre en la decisión de pit final, pero no necesariamente asegura que dicha solución sea robusta frente a todos los escenarios.

La Figura 4 ejemplifica este enfoque. En la primera sección (a) se muestran las simulaciones condicionales que representan la variabilidad geológica del depósito, posteriormente, cada una de estas simulaciones es sometida a un proceso de optimización de pit final determinista (b), obteniendo como resultado un pit final para cada uno de éstos (c), finalmente, a partir de todos los pit finales obtenidos se selecciona en base a distintos criterios un único pit. Por lo tanto, el criterio utilizado genera una versión propia de este

enfoque.

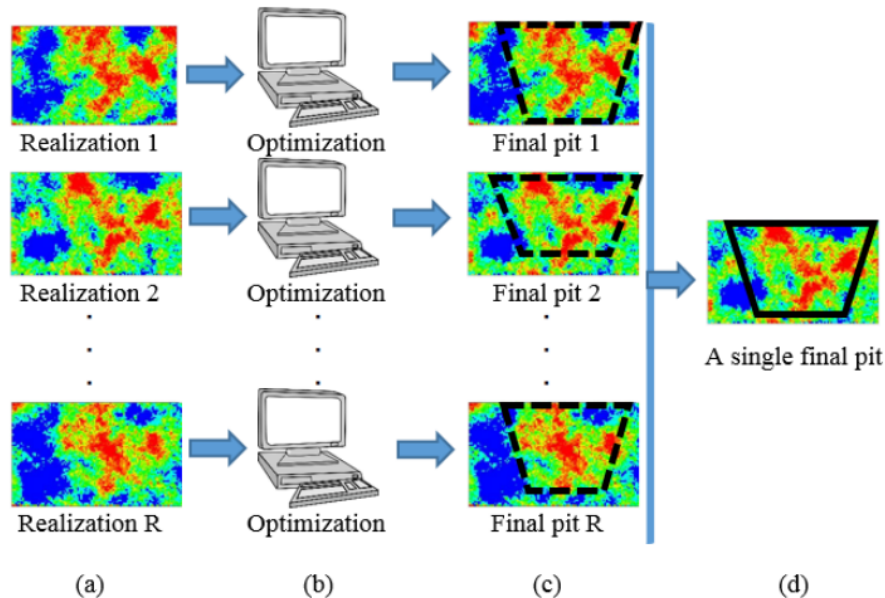


Figura 4: Metodología híbrida para determinar pit final. (a) representa las simulaciones condicionales, (b) proceso de optimización para cada simulación, (c) soluciones de pit final y (d) pit final considerando cada solución. Fuente: Jelvez et al. (2021).

Whittle y Bozorgebrahimi (2004) son reconocidos como pioneros en implementar metodologías que determinen los límites del pit sujeto a incertidumbre geológica en base a un criterio heurístico. Su enfoque consiste en la construcción de pit híbridos. Determina la forma del pit final involucrando un menor riesgo asociado a la incertidumbre geológica, respecto a la probabilidad de ocurrencia, basados en la teoría de conjuntos formado por todos los bloques del modelo, en el cual, se analiza si un bloque pertenece al pit final obtenido a lo largo de las simulaciones. Sin embargo, este enfoque no establece de forma clara la selección y posición del pit óptimo, debido a que solo establece el rango de variabilidad en el que éste se encuentra.

Dimitrakopoulos *et al.* (2007) cuantifican el efecto de la incertidumbre geológica en la determinación del pit final planteando un flujo de trabajo basado en la simulación de Monte Carlo y el análisis paramétrico de las variables de incertidumbre como solución a los problemas de la planificación de largo plazo, considerando tres parámetros de entrada: modelos simulados geoestadísticamente equiprobables, distribución de los parámetros geotécnicos que puede considerar diferentes definiciones de ángulos de talud o por zonas y la distribución de los parámetros económicos. El análisis paramétrico es aplicado principalmente a la función de valor de bloque económico estocástico y definición de

parámetros geotécnicos. Este estudio permite visualizar los efectos generados por la incertidumbre geológica y cómo afecta en la toma de decisiones de un proyecto minero. No obstante, este flujo de trabajo no incorpora en su metodología procedimientos que permitan maximizar el valor del pit final. La Figura 5 indica la probabilidad de que un bloque se encuentre dentro del pit final basado la cantidad de veces que ese bloque perteneció al pit final simulado en cada escenario, logrando visualizar el espacio de incertidumbre, no obstante, este flujo de trabajo no incorpora en su metodología procedimientos que permitan maximizar el valor del pit final.

M. Deutsch *et al.* (2015) cuantifican el efecto de la incertidumbre geológica en la determinación del pit final planteando un flujo de trabajo basado en la simulación de Monte Carlo y el análisis paramétrico de las variables de incertidumbre como solución a los problemas de la planificación de largo plazo. La Figura 5 indica la probabilidad de que un bloque se encuentre dentro del pit final basado la cantidad de veces que ese bloque perteneció al pit final simulado en cada escenario, logrando visualizar el espacio de incertidumbre, no obstante, este flujo de trabajo no incorpora en su metodología procedimientos que permitan maximizar el valor del pit final.

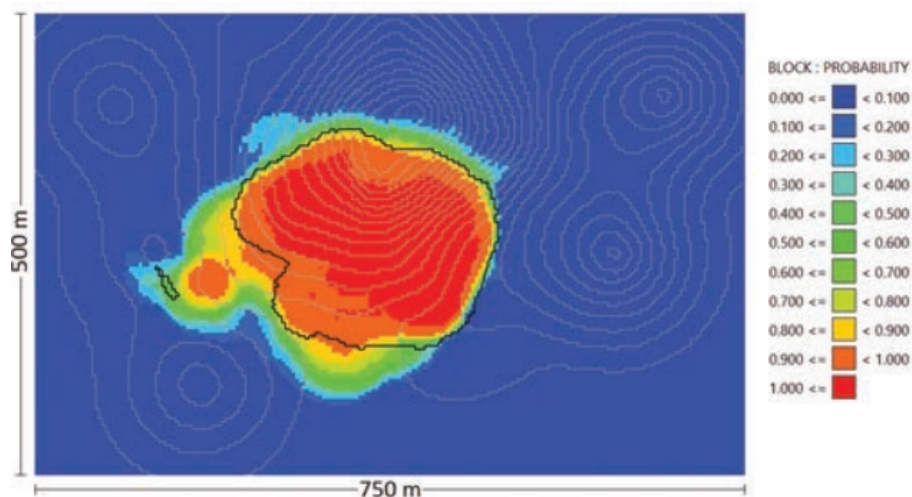


Figura 5: Determinación de pit final respecto a un modelo de probabilidad.
Fuente: Deutsch et al. (2015).

Alarcón *et al.* (2015) extienden la metodología anterior para el caso de un agendamiento en el tiempo, proponiendo un enfoque basado en la confiabilidad relacionada con la probabilidad de que un bloque se extraiga en un período de tiempo determinado, a lo largo de todos los escenarios, evaluando así el impacto generado por la variabilidad de la recuperación metalúrgica en el cálculo del plan.

Los enfoques híbridos logran cuantificar el espacio donde puede estar ubicado el pit

final y obtener rápidamente soluciones factibles. Sin embargo, estas soluciones no cuantifican el riesgo asociado a la incertidumbre ni maximizan el valor esperado del pit final dado que dependen de criterios para escoger el pit final.

1.6.2. Enfoques estocásticos

Los enfoques estocásticos utilizan como entrada el conjunto de escenarios de simulación de forma simultánea y, a partir de ellos, determinan un único pit final robusto (Jelvez *et al.*, 2021). La Figura 6 representa esquemáticamente esta metodología, en la cual obtiene un único resultado a partir de un conjunto de simulaciones condicionales.

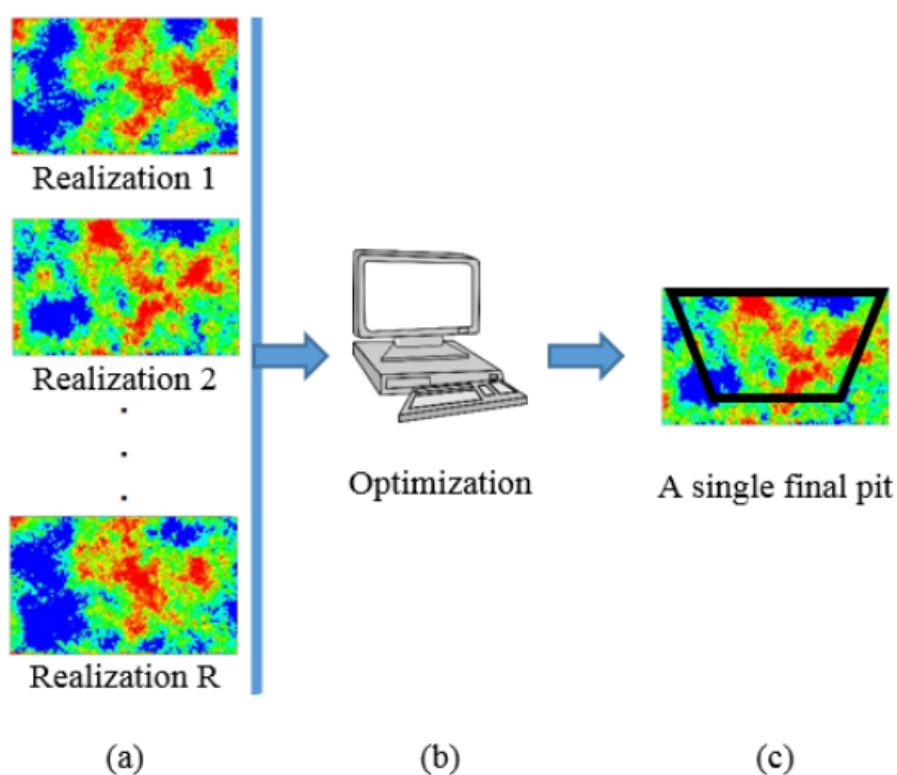


Figura 6: Metodología estocástica para determinar pit final. (a) representa las simulaciones condicionales, (b) proceso de optimización que considera todas las simulaciones y (c) solución de pit final. Fuente: Jelvez *et al.* (2021).

Vielma *et al.* (2009) proponen una metodología que permite incorporar el control del riesgo asociado a la incertidumbre geológica mediante un número finito de simulaciones condicionales. Este enfoque considera una restricción probabilística al problema de pit final basado en el nivel de confianza, asegurando que cada bloque perteneciente al pit sea un valor mayor o igual al valor esperado, utilizando el VaR como medida de ries-

go. Sin embargo, los resultados obtenidos y la cuantificación del riesgo se ven afectados y condicionados por la cantidad de simulaciones utilizadas generando un problema de probabilidad restringido, además que toma mucho tiempo generar las alternativas para distintos niveles de confianza.

Marcotte y Caron (2013) establecen un enfoque basado en los beneficios esperados de cada bloque y no respecto a la ley esperada, calculados a partir de simulaciones condicionales. Sus principales resultados obtenidos corresponden a una mayor cantidad de tonelaje asociado a mayores beneficios en comparación al enfoque tradicional, identificando el nivel de información como el factor principal que controla el beneficio.

Amankwah *et al.* (2013) presentan un enfoque basado en el riesgo condicional asociado a la incertidumbre, modelos de inversión y diseño mediante un modelo de programación comprendido en tres etapas de la planificación: decisión de inversión, diseño del pit final y secuencia de extracción. Sin embargo, esta metodología se establece para un modelo de bloques de pequeña escala, lo cual solo establece un caso hipotético de sus resultados.

Espinoza *et al.* (2013) proponen una metodología estocástica que permite controlar el riesgo en la toma de decisiones de planificación, mediante dos enfoques: minimizar el valor condicional en riesgo CVaR y minimizar la diferencia entre el valor esperado y el CVaR. De este estudio se obtiene principalmente que el nivel del riesgo controla la posibilidad de obtener una mala pérdida en los resultados, por otro lado, minimizar la pérdida esperada entrega mejores resultados proporcionando soluciones más riesgosas. Los modelos de riesgo permiten mejorar el proceso de toma de decisiones logrando asumir las pérdidas no deseadas, sin embargo, en este estudio no es clara la forma de seleccionar un cierto nivel de riesgo.

Wilson *et al.* (2019) cuantifican el riesgo asociado a la incertidumbre geológica mediante la construcción de la Frontera Óptima de Pareto y la probabilidad relativa de cada escenario mediante técnicas de agrupación. Utiliza como medida de riesgo la desviación estándar, el cual no asegura un resultado robusto dado que asume un comportamiento normal, penalizando el valor del proyecto. Por otro lado, la agrupación de las realizaciones depende de la interpretación del planificador basado en la ubicación de las realizaciones, sin considerar un análisis mediante contactos, medidas de tendencia y de posición.

Canessa *et al.* (2021) establecen una metodología que determina pits anidados utilizando como medida de riesgo la entropía, la cual respeta dos propiedades que sustenta dicho estudio: anidamiento y aditividad. Estos autores afirman que el valor de riesgo con-

dicional no es una medida apropiada para su trabajo dado que esta medida no cumple con la propiedad de anidamiento. Esta metodología fue aplicada en un caso de estudio pequeño y no discute sobre los requerimientos computacionales ni tiempos empleados para su ejecución.

Jelvez *et al.* (2021) desarrolla un modelo multiobjetivo de pit final estocástico, el cual considera una compensación entre el valor máximo esperado del proyecto no descontado a un menor riesgo de pérdida. Este trabajo compara la metodología propuesta con el enfoque tradicional, obteniendo como resultado una serie de soluciones óptimas que forman la Frontera Eficiente de Pareto, mientras que el resultado obtenido por un enfoque tradicional entrega soluciones subóptimas del problema. Los autores proponen una serie de criterios para la selección del pit final, sin embargo, esta selección depende de la experiencia de un tomador de decisiones y la pérdida que el inversor esté dispuesto a asumir. Por otro lado, esta metodología requiere de una alta capacidad computacional y tiempo para la generación de la frontera de alternativas de pit final, de la cual se elegirá posteriormente una única solución.

Los enfoques estocásticos propuestos entregan una solución óptima que permite definir los límites del pit, sin embargo, en su mayoría, consideraron modelos de estudio sintéticos y pequeños. Estos enfoques requieren una alta dificultad de aplicación, requerimiento computacional y tiempo requerido para implementarlos. Al igual que en un enfoque híbrido, la selección del pit final dependen de un tomador de decisiones y la experiencia que éste posea, afectando la toma de decisiones en la planificación de la producción.

Una metodología multiobjetivo busca determinar un pit final que presente la mejor relación entre beneficio económico esperado y el riesgo a la pérdida. Como se mencionó en la sección anterior, una solución a esta problemática se encuentra en el Frente de Pareto como fue definido por Wilson *et al.* (2019) y Jelvez *et al.* (2021). En las secciones 1.2.2 y 2.2.2. se mencionan diversas herramientas que permiten medir el riesgo, sin embargo, no todas son aplicables en un problema minero:

- La utilización de la desviación estándar para determinar la Frontera de Pareto obtiene resultados rápidos, sin embargo, este tipo de metodología penaliza el valor cuando existen variaciones que tienen a altas y bajas de las variables, dado que asume un comportamiento normal.
- Considerar el valor en riesgo (VaR) como herramienta puede llegar a sobrestimar el riesgo y su aplicación es compleja cuando se trabaja con distribuciones no normales.
- El valor en riesgo condicional (CVaR) nace como una medida complementaria al VaR que logra satisfacer las propiedades del riesgo (subaditividad). Además, al ser con-

vexa facilita su implementación en algoritmos de optimización (Arbeláez y Ceballos, 2005).

A continuación se muestra un modelo que permite generar un pit final que considera maximizar el valor esperado sujeto a un riesgo acotado medido por el CVar. La Ecuación (5) presenta la función objetivo que maximiza el beneficio esperado a lo largo de todos los escenarios $s \in S$. La Ecuación (6) restringe las relaciones de precedencias entre bloques: para extraer el bloque b , primero se debe extraer el bloque a . $PREC_b$ representa al subconjunto de bloques que deben extraerse para obtener acceso al bloque b . Las Ecuaciones (7)-(8) limita el riesgo máximo, donde μ representa el ponderador del riesgo medido como el CVaR y δ el nivel de confianza $\in (0,1]$ para todas las simulaciones condicionales. Note que ζ representa al VaR, y $f(x, g^s)$ representa una función de pérdida, que depende del vector de decisión x y del contenido de metal g^s en el escenario s . Finalmente, las Ecuaciones (9)-(10) muestran la naturaleza de las variables: x_b representa la variable de decisión en la cual toma valores de 1 si el bloque pertenece al pit final y 0 para caso contrario. Por su parte, y_s muestra la contribución del escenario/simulación condicional s en el CVaR.

$$(P_\mu) \quad \max \quad \frac{1}{|S|} \sum_{b \in B} \sum_{s \in S} v_{bs} \cdot x_b \quad (5)$$

$$s.a. \quad x_b \leq x_a \quad \forall b \in B, a \in PREC_b \quad (6)$$

$$\zeta + \frac{1}{|S|(1-\delta)} \sum_{s \in S} y_s \leq \mu \quad (7)$$

$$y_s \geq f(x, g^s) - \zeta \quad \forall s \in S \quad (8)$$

$$y_s \geq 0 \quad \forall s \in S \quad (9)$$

$$x_b \in \{0, 1\} \quad \forall b \in B \quad (10)$$

La Figura 7 ejemplifica las posibles soluciones que entrega la Frontera de Pareto al problema de pit final sujetos a un ponderador del riesgo máximo aceptable y nivel de confianza dados. Se define como solución óptima aquel pit que se encuentra en la frontera, denominado como pit ótimo. Las soluciones que se encuentran debajo de la frontera representan una solución factible del problema (pit final factible), la cual satisface todas las restricciones, pero no entrega la mejor solución. Finalmente, aquellas soluciones que se encuentran sobre la frontera serán soluciones infactibles (pit infactible).

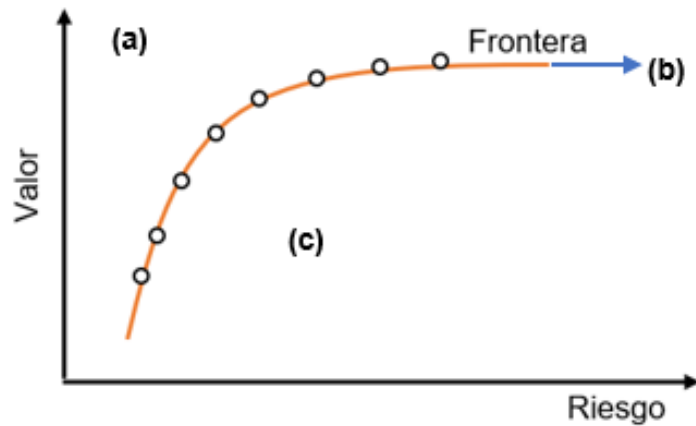


Figura 7: Frontera óptima de Pareto donde (a) representa una solución infactible, (b) una solución óptima y (c) una solución factible

Este tipo de metodología es susceptible al valor que tome el nivel de máximo riesgo aceptable y el nivel de confianza empleado, dado que presenta una dependencia de la solución obtenida (para un nivel de riesgo o valor dado). Lamentablemente, el costo de calcular dicho frente es altísimo, en términos de tiempo de cómputo y recursos. Más aún, cuando consideramos que de todos los puntos de la Frontera de Pareto que representan pits óptimos se debe seleccionar solo uno como solución final. Generalmente, esta decisión es ejecutada por un tomador de decisión considerando algún criterio relacionado a los objetivos estratégicos de la empresa.

1.7. Preguntas de investigación e Hipótesis

En etapas tempranas de un proyecto minero, cuando la incertidumbre es alta, se hace necesario desarrollar herramientas que asistan a los planificadores en la toma de decisión de cómo explotar un yacimiento, maximizando el valor del negocio, pero al mismo tiempo, minimizando el riesgo de incumplimiento de las metas de producción. Es por ello que, durante las últimas décadas, se han establecido metodologías que permiten cuantificar las múltiples fuentes de incertidumbre que afectan al negocio minero, mediante enfoques cuya toma de decisión depende de una serie de criterios propuestos por un *decision-maker* y su experiencia. Dos grandes dificultades que enfrenta este tipo de metodología, es que requiere un alto nivel computacional y tiempo para ejecutar el procesamiento de los datos.

Como se ha mencionado, existen distintas metodologías que integran la incertidumbre geológica en una selección de pit final, sin embargo ¿Cuál es el pit final que se recomien-

da al inversor para evaluar la rentabilidad del proyecto en etapas tempranas?, ¿Es posible disminuir los tiempos de cómputo y el proceso de toma de decisiones en planificación? ¿Se puede asegurar que un pit final de tales características sea óptimo, es decir, que pertenezca a la Frontera Eficiente de Pareto?

En base a lo anterior, se plantea la siguiente hipótesis:

La integración de un modelo de optimización que considere múltiples escenarios geológicos simultáneamente para definición de alternativas de pit final robusto en minería a cielo abierto, en el espacio 2D, valor económico esperado vs. riesgo de pérdidas, junto con los criterios que utiliza un tomador de decisión para seleccionar el pit final entre múltiples alternativas, permitirá generar una herramienta que asistirá a planificadores a generar automáticamente un único pit final bajo incertidumbre geológica, ahorrando tiempo y recursos de cómputo en el proceso de planificación.

1.8. Objetivos

1.8.1. Objetivo general

Desarrollar e implementar una metodología para determinar un pit óptimo considerando incertidumbre geológica en el proceso de toma de decisiones para planificación de minas a cielo abierto.

1.8.2. Objetivos específicos

- Evaluar y seleccionar una métrica que permita identificar un pit óptimo con incertidumbre geológica.
- Implementar un modelo de programación para determinar un pit óptimo con incertidumbre geológica.
- Comparar los resultados de planificación entre un enfoque tradicional y el propuesto.
- Generar análisis de estrés al modelo de programación para evaluar su rendimiento.

1.9. Alcances

- El horizonte de la planificación es a largo plazo para minas a cielo abierto, específicamente para cálculo de reservas.
- Se considera sólo la incertidumbre geológica respecto a la ley del elemento de interés del yacimiento, obtenida mediante simulación condicional, representada por un conjunto finito de escenarios.

- La formulación de este estudio no considera la operativización de la mina.
- Se asumen fijos los parámetros económicos, geometalúrgicos y geomecánicos.

1.10. Contribución del estudio

Este estudio aborda el problema de la planificación de la producción en minas a cielo abierto, centrándose en la definición y selección del pit final en el contexto de la incertidumbre geológica relacionada con las leyes minerales. Se analizan múltiples escenarios equiprobables que representan la variabilidad geológica del yacimiento, los cuales se integran para identificar un único pit óptimo. Este proceso se fundamenta en la relación entre el valor esperado y el valor condicional en riesgo, con el objetivo de maximizar la ganancia esperada y, a su vez, minimizar el riesgo de pérdidas. Además, este enfoque mejora la toma de decisiones en la planificación a largo plazo, considerando tanto la gestión del riesgo como la rentabilidad del proyecto.

1.11. Estructura de la tesis

La estructura de este trabajos se organiza de la siguiente forma:

En el segundo capítulo se presenta la definición del problema de pit final y las técnicas que diversos autores han propuesto para solucionar y automatizar la determinación del pit final con incertidumbre geológica.

En el tercer capítulo se establece la metodología y el modelo propuesto para determinar el pit final con incertidumbre geológica.

En el cuarto capítulo se aplica el modelo propuesto a un caso sintético 3D y, con ello, realizar los ajustes necesarios al modelos antes de ejecutar las pruebas en casos de estudio real.

En el quinto capítulo se aplica el modelo propuesto a un caso de estudio real, muestra los resultados obtenidos comparando el modelo propuesto con metodologías expuestas en el segundo capítulo, además se presenta un análisis de estrés al modelo propuesto.

Finalmente, en el último capítulo se presentan las conclusiones y posibles extensiones para trabajos futuros.

2. Marco Teórico

2.1. Simulaciones condicionales

Como se observo en la sección 1.3.2 las fases iniciales de un proyecto minero están sujetas a riesgos debido a una variedad de fuentes de incertidumbre derivadas de información limitada y segmentada que buscan caracterizar y predecir el comportamiento de las variables de un yacimiento que no pueden ser controladas.

La estimación de recursos es un paso fundamental en la evaluación de un proyecto minero y los procesos aguas abajo de este; implica evaluar la cantidad y el grado de mineral presente en el yacimiento. Sin embargo, las técnicas convencionales, como el kriging, producen un efecto de suavizamiento de las variables del modelo sin mostrar la variabilidad de las variables (Journel y Huijbregts, 1976; Emery, 2012). Esta metodología depende de la calidad de la estimación, la densidad, distribución espacial y la precisión de las muestras, además, es influenciado por valores extremos generando estimaciones sesgadas (Emery, 2012). El resultado de este efecto se traduce en la discrepancia entre el recurso y la reserva estimada respecto a lo que realmente posee el yacimiento .

La variabilidad geológica es crucial para comprender el comportamiento del yacimiento y, con ello, tomar mejores decisiones en etapas iniciales de un proyecto, logrando reconocer: la distribución del recurso mineral, las regiones que poseen distintas composiciones de rocas y minerales, sus estructuras geológicas y los procesos geológicos a los que se ha sometido el yacimiento.

La simulación geoestadística busca reproducir la distribución espacial de la función aleatoria, para ello, utiliza las realizaciones de una función aleatoria $Y(x)$ que describe las características espaciales de la variable regionalizada para replicar su variabilidad espacial X_α , $\alpha = 1..n$. La base matemática de este proceso combina técnicas de simulación estocástica y métodos geoestadísticos. En otras palabras, las realizaciones son simulaciones condicionales de la variable regionalizada si la distribución espacial de $Z_{sc}(x)$ coincide con la distribución de $Z(x)$ (Emery y Séguret, 2020). Por otro lado, Emery (2012) define una metodología considerando un modelo Gausseano

1. Utilizar ponderadores de desagrupamiento para ordenar los datos de forma creciente y determinar su probabilidad de ocurrencia y con ello disminuir el efecto de que pueda general cualquier posible muestreo preferencial.
2. Transformar la variable original en una variable con una distribución gaussiana es-

tandar utilizando los ponderadores de desagrupamiento. La Figura 8 muestra el resultado de la validación de los datos transformados a partir del test de nubes de correlación diferida, en la cual se indican los gráficos de nivel de correlación para distancias pequeñas y grandes (a) considera grandes distancias, obteniendo como resultado una nube que se vuelve circular, esto indica que ya no existe correlación entre datos, mientras que (b) representa el caso inverso, donde se selecciona un número de lag pequeño, la nube se torna diagonal en torno a la bisectriz.

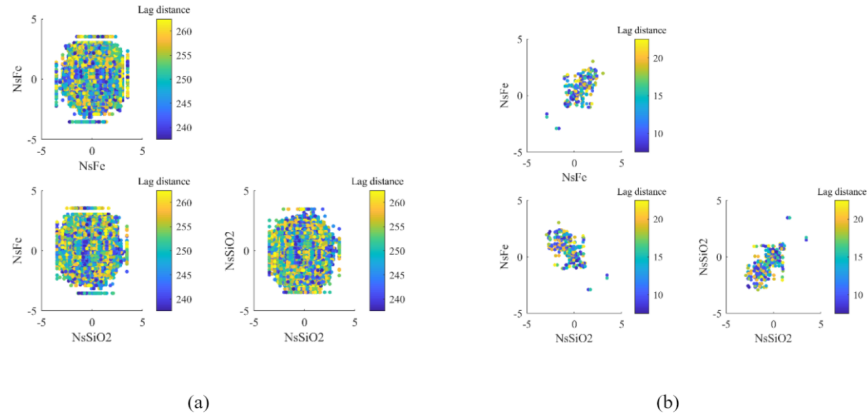


Figura 8: Representación gráfica de nubes de correlación para para validar el proceso de anamorfosis. (Elaboración propia)

3. La simulación condicional busca restituir los valores en los sitios de muestro a partir de la distribución espacial de la función aleatoria para ello, se realiza un condicionamiento de la estructura espacial de la variable aleatoria se modela a partir del variograma experimental utilizando los datos gaussianos mediante la expresión:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N=h} [Z(x_i + h) - Z(X_i)]^2 \quad (11)$$

4. Simular la variable aleatoria multigaussiana disponible en (x_1, \dots, x_n) , de media 0 utilizando el variograma $\gamma(h)$ para los escenarios (u_1, \dots, u_k) . C. V. Deutsch *et al.* (1992); Viera y González (2002); Emery y Séguret (2020) establecen una comparación de los algoritmos de simulación a partir de su condicionalidad, tipo de malla y tratamiento de la variable aleatoria.
5. Validar las simulaciones generadas utilizando metodologías como la validación cruzada, la cual permite comparar un punto del espacio de valor conocido respecto a la media de los valores simulados y la cercanía en este como se observa en la Figura 9.

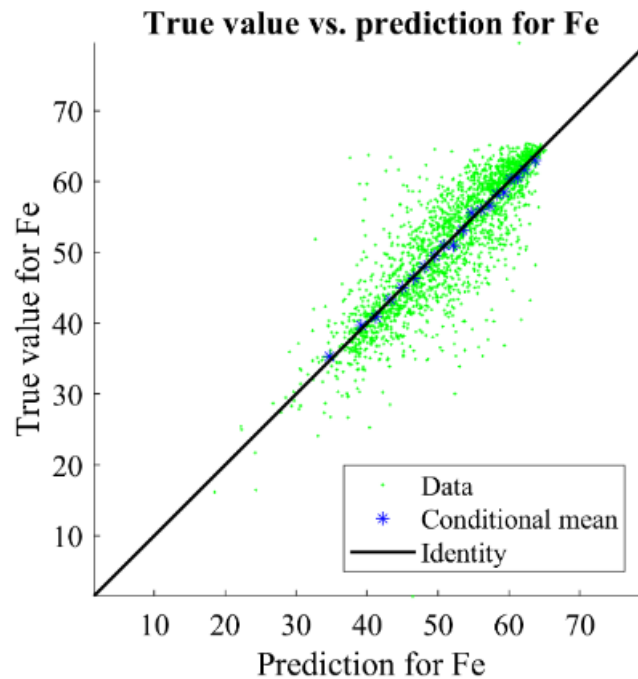


Figura 9: Representación gráfica de nubes de dispersión de valores reales respecto a los valores simulados para un depósito de hierro. (Elaboración propia)

6. Generar anamorfosis inversa, es decir volver a la variable original en una escala continua, permitiendo el uso de métodos de interpolación que permitan mantener la relación espacial de los datos.

Con la adopción de nuevas metodologías de simulación (Mery *et al.*, 2017; Sebacher *et al.*, 2017; Rezaei *et al.*, 2023), como el modelamiento plurigaussiano que define una variable categórica mediante el truncamiento de campos aleatorios gaussianos, diversos autores reconocen actualmente el riesgo relacionado con la incertidumbre geológica.

2.2. Optimización

El objetivo de la optimización es determinar la mejor manera de completar una tarea y obtener los mejores resultados de un problema. Como se ha discutido ampliamente en las secciones anteriores de este trabajo, la optimización del pit se realiza utilizando la información disponible dada la existencia de diversas fuentes de incertidumbre para obtener límites del pit rentables que disminuyan la variación entre lo planificado y lo real. La optimización de minas a cielo abierto es una herramienta que ayuda a definir y diseñar minas y que éstas tengan valores altos y sean estables frente a los cambios económicos

(Mwangi *et al.*, 2020).

Un problema de optimización se compone como sigue:

1. Función objetivo, representa la medida cuantitativa que se desea optimizar, como reducir los costos de un proyecto o maximizar el beneficio de éste.
2. Variables, pueden ser variables dependientes o independientes y se refieren a las decisiones que afectan la función objetivo.
3. Las relaciones que deben cumplir con las variables se denominan restricciones.

Finalmente, la optimización busca determinar el valor que deben tomar las variables para que se maximice/minimice la función objetivo respetando las restricciones propuestas.

2.2.1. Fundamentos

2.2.2. Programación lineal entera

Se basa en que todas o algunas de las variables de decisión están condicionadas a tomar valores enteros no negativos, clasificados en:

1. Programación entera pura, si todas las variables son enteras. Lerchs-Grossmann (1965) quienes incorporan técnicas de programación lineal, creando la teoría de grafos, que crea un modelo de bloques como un árbol con vértices para representar los bloques y arcos para representar las restricciones de precedencias mostrando la adherencia entre los vértices (Zhao, 1992). Las técnicas que se han examinado previamente en la sección 1.6 responden al problema del pit final desde una perspectiva determinista, sin tener en cuenta las incertidumbres geológicas o otros tipos de incertidumbres. A fines del siglo XX diversos autores buscan definir los límites del pit considerando estas variables.
2. Programación entera binaria, considera que todas sus variables son binarias, son utilizados comúnmente para agendamiento de bloques que involucran restricciones de periodo y capacidad.
3. Programación lineal entera mixta, considera variables enteras o binarias y variables continuas. Un ejemplo de cómo se utiliza este tipo de trabajo es el de Dimitrakopoulos y Ramazan (2004) quienes reducen las desviaciones de las leyes planificadas sujetas a restricciones de capacidad al incluir el riesgo de la tasa de descuento según el tiempo. Sin embargo, este método no toma en cuenta una ley de corte variable por período y el caso de estudio utilizado es pequeño.

2.2.3. Programación Heurística

Como se menciona en el capítulo anterior, este tipo de metodología no asegura soluciones óptimas tras considerar la incertidumbre. Dimitrakopoulos *et al.* (2007) proponen un nuevo enfoque para determinar el pit final logrando capturar la variabilidad del depósito cuando se genera un alza en el precio del metal minimizando el riesgo asociado a la baja de este, donde cada escenario posee la misma probabilidad de ocurrencia. Esta metodología incorpora criterios alternativos de toma de decisiones estratégicas respecto a la variación del valor del metal, la producción de metales, movimientos de material y flujos de caja descontados, los cuales permiten descartar los escenarios que no cumplan los criterios establecidos inicialmente por la empresa sin asegurar el mejor diseño, debido a que la optimización es generada como una función no lineal, lo que torna imposible seleccionar un pit que represente un escenario optimista o pesimista, además no considera un contraste de escenarios basado en la probabilidad de ocurrencia de cada bloque que pertenece al pit.

2.2.4. Programación estocástica

Este tipo de metodología involucra la incertidumbre a partir de variable aleatorias correlacionadas incorporando parámetros de riesgo en el proceso de optimización. Espinoza *et al.* (2013) proponen una metodología estocástica que permite controlar el riesgo en la toma de decisiones de planificación, mediante dos enfoques: minimizar el valor condicional CVar (minimizar la peor pérdida) y minimizar la diferencia entre el valor esperado y el CVar. De este estudio se obtiene principalmente que el nivel del riesgo controla la posibilidad de obtener una mala pérdida en los resultados, por otro lado, minimizar la pérdida esperada entrega mejores resultados proporcionando soluciones más riesgosas. Los modelos de riesgo permiten mejorar el proceso de toma de decisiones logrando asumir las pérdidas no deseadas, sin embargo, en este estudio no es clara la forma de seleccionar un cierto nivel de riesgo.

Dimitrakopoulos y Ramazan (2004) compara un enfoque heurístico utilizando la metodología de recocido simulado con la programación entera estocástica (SIP); descubren que SIP da un mayor valor a los programas de producción con pit más grandes que los presentados por la metodología de recocido simulado. Además, compara los resultados de ambas metodologías con los de las metodologías tradicionales, que contienen el pit obtenido determinísticamente.

2.2.5. Optimización biobjetivo

Este tipo de optimización toma en cuenta la aplicación simultánea de dos o más funciones objetivo para obtener resultados del problema óptimos y sólidos. El objetivo de esta metodología es encontrar la mejor relación entre el beneficio económico esperado y el riesgo a la pérdida. Una solución a esta problemática se encuentra en el Frente de Pareto como fue definido por Wilson *et al.* (2019) y Jelvez *et al.* (2021). Definen el riesgo a partir de la pérdida económica asociada a la estimación de la reserva, logrando maximizar el beneficio esperado mientras minimiza el riesgo. No obstante, ambos trabajos muestran un grupo de posibles soluciones que pueden ser preferentes o no para un tomador de decisiones, transformando el problema presentado en una guía para el inversor que considera altos tiempos de cómputo y comprensión de la solución.

2.2.6. Frontera eficiente y punto ideal

En los procesos de búsqueda y toma de decisión existen tres tipos de metodologías que permiten al inversor seleccionar una solución. Estas metodologías son definidas como métodos: (a) a priori, (b) interactivos o progresivos y (c) a posteriori (Van Veldhuizen y Lamont, 2000; Petchrompo *et al.*, 2022). Los métodos a priori permiten determinar el punto óptimo de la frontera sin necesidad de determinar la frontera completa. Los métodos progresivos conjugan la toma de decisiones y el proceso de optimización simultáneamente. Finalmente, los métodos a posteriori determinan el conjunto óptimo de Pareto, para su posterior selección de alternativa basado en las preferencias del inversor, un ejemplo de ello son las metodologías propuestas por Wilson *et al.* (2019) y Jelvez *et al.* (2021).

Los métodos progresivos y a posteriori tienen por objetivo ayudar al inversor a seleccionar una única solución, basado en las preferencias de estos, lo cual presenta un problema para el tomador de decisiones dado que tener muchas opciones pueden ser difíciles de comprender y visualizar (Petchrompo *et al.*, 2022). En la práctica las empresas mineras no están interesadas en determinar todo el frente de Pareto, ni encontrar las mejores soluciones globales o porciones de estas basados en sus preferencias (Bechikh *et al.*, 2011). Los profesionales están interesados en determinar aquellas soluciones que son menos sensibles a las perturbaciones de las variables de decisión (Deb y Gupta, 2005). Se ha demostrado que la región de preferencia por los inversores se relaciona con una zona de protuberancia que posee el frente de Pareto denominado “regiones rodillas”, ya que presentan compensaciones máximas entre las funciones objetivos (Branke *et al.*, 2004; Bechikh *et al.*, 2011).

Los puntos rodillas se encuentran en la protuberancia máxima del conjunto de puntos

de la frontera eficiente o que pertenecen a las regiones rodillas (Das, 1999). Chiu *et al.* (2016) y Li *et al.* (2020). De acuerdo a un plano de referencia y una métrica bien definida, debe existir un punto que sea el que presenta la mejor compensación entre objetivos, por ejemplo, medido como aquel que minimiza la distancia a un punto de referencia. Este punto suele llamarse, por simplicidad, *rodilla*, o de forma más completa, *punto rodilla*.

La Figura 10 muestra una Frontera Eficiente de Pareto, en ella, cada punto que posee la curva interpolada representa un valor específico obtenido según la variación de una función objetivo f_1 . El punto E, es el punto que se reconoce como rodilla y aquel preferente por el inversor. Los puntos A y H, son puntos óptimos de la frontera no preferibles por los inversionistas dado que son valores límites de la frontera.

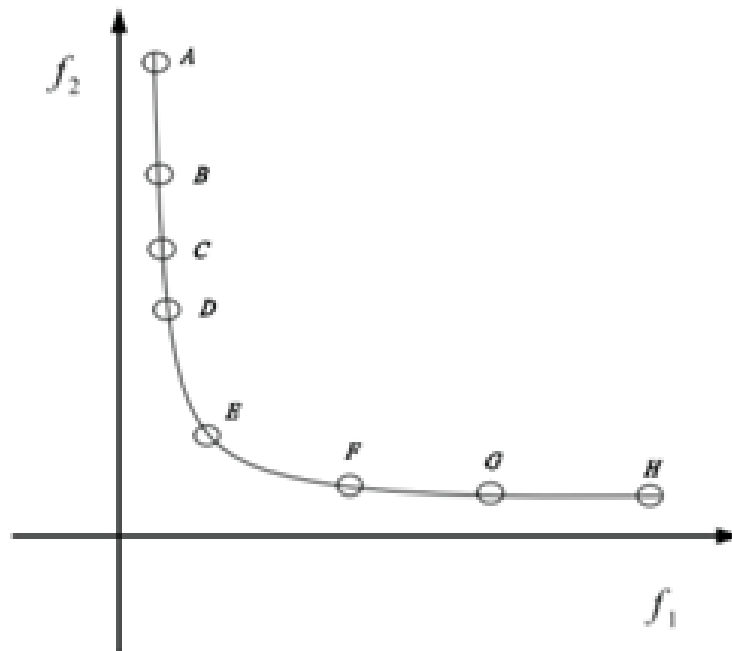


Figura 10: Ejemplo Frontera Eficiente de Pareto. Fuente: Chiu et al. (2016).

Actualmente, los investigadores plantean distintas metodologías para determinar el punto rodilla de la frontera:

Rachmawati y Srinivasan (2009) proponen un enfoque de sumas ponderadas lineales basado en preferencias del inversor. Este enfoque considera una compensación de intercambio en el desempeño de los objetivos, donde la mejora de un objetivo evalúa el deterioro del otro, sin embargo, el proceso depende del criterio de un tomador de decisiones.

Bechikh *et al.* (2011) establecen una metodología para determinar las regiones ópti-

mas de la rodilla de pareto basados en la compensación de intercambio propuesta por Rachmawati y Srinivasan (2009) mediante regiones de rodillas móviles, disminuyendo el tamaño de la frente y con ello el requerimiento computacional de este. Sin embargo, esta metodología continua dependiendo de las preferencias del inversor. La principal desventaja de estos métodos es que dependen de la forma que posee la Frontera Óptima de Pareto y la ubicación del minimizador de la suma ponderada.

Chiu *et al.* (2016) plantean una metodología basado en la distancia mínima de manhattan, su enfoque se basa en minimizar la distancia entre el punto rodilla y punto ideal construido a partir de los valores extremos de la frontera, evitando considerar las preferencias del inversor, entregando soluciones geoméricamente viables.

Yu *et al.* (2019) proponen un enfoque basado en la curvatura que representan los puntos de rodilla, para ello, establecen una estrategia que busca las regiones rodillas respecto a α -dominancia a partir de vectores de referencia para cada subregión del espacio, sin embargo, no se especifican los criterios utilizados para vectorizar ni dividir la región.

Li *et al.* (2020) determinan el punto rodilla para la gestión dinámica de energía de microrredes utilizando el enfoque de distancia mínima de Manhattan y distancia euclidiana. Esta metodología considera un problema de pequeña escala, lo cual puede presentar problemas computacionales al aumentar sus dimensiones. Por otro lado, a pesar de que la distancia euclidiana posee una formulación matemática sencilla de implementar, el formulismo genera un problema no lineal, además, este tipo de métrica presenta un problema de escalamiento dado que otorga un mayor peso al eje más grande.

Las metodologías que involucran modelos de preferencia pueden requerir una cuidadosa normalización de la función afectando la forma de la frontera de Pareto (Das, 1999). Por otro lado, este tipo de metodologías pueden depender de entradas subjetivas del tomador de decisión, lo cual puede generar pérdidas que sensibilicen la frontera, además, cuantificar las preferencias del tomador de decisión depende de la experiencia que éste posea y la cantidad de objetivos que defina (Chiu *et al.*, 2016). Por otro lado, metodologías que permitan interpretaciones geométricas como la Distancia Mínima de Manhattan, permiten identificar la rodilla perteneciente a una región rodilla y tienden a ser soluciones preferentes por los inversores. Existen otras métricas utilizadas para determinar el punto rodilla como la Distancia Euclidiana o el Índice de Coseno, sin embargo, éstas medidas de distancia vuelven el problema no lineal, en el Anexo A (Medidas de distancia) se muestra la comparación de las principales medidas utilizadas para determinar rodillas pertenecientes a la Frontera Óptima de Pareto.

2.3. Medidas de distancia en espacios métricos: Manhattan

Como se expone en la sección anterior, las metodologías que involucran modelos de preferencia pueden requerir una cuidadosa normalización de la función, afectando la forma de la frontera de Pareto (Das, 1999). Por otro lado, este tipo de metodologías pueden depender de entradas subjetivas del tomador de decisión, lo cual puede generar pérdidas que sensibilicen la frontera. Además, cuantificar las preferencias del tomador de decisión depende de la experiencia que éste posea y la cantidad de objetivos que defina (Chiu *et al.*, 2016).

Existen distintas métricas utilizadas para determinar la rodilla, tales como la Distancia Euclidiana, el Índice de Coseno, Distancia de Manhattan, etc. Sin embargo, estas medidas pueden tener un impacto importante en la definición de la metodología de optimización y planificación, ya que, por ejemplo, algunas de ellas vuelven el problema no lineal (ver Anexo A).

Entre las alternativas de métricas de distancia, una que se vuelve particularmente de interés en este trabajo es la Distancia de Manhattan: se puede incorporar directamente en un esquema de optimización que minimice la distancia a un punto de referencia, al presentar valores absolutos se puede linealizar, y permite entender la contribución de cada objetivo separadamente. Esta métrica corresponde a la distancia entre dos vectores/puntos $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n$, $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^n$, medida a lo largo o paralelo a sus ejes de referencia. Se define como la suma de las diferencias absolutas de sus coordenadas cartesianas, a saber:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (12)$$

Greche *et al.* (2017) en su trabajo aplicado a redes neuronales que identifican las emociones compara dos tipos de métricas: Euclidiana y Manhattan, obteniendo como resultados principalmente que la distancia Euclidiana obtiene resultados óptimos utilizando menor información, sin embargo, transforma el problema de programación en un problema no lineal, mientras que Manhattan obtiene mismos resultados sin estresar el problema, sin embargo, la distancia euclidiana requiere una normalización de sus variables, dado que la escala de cada objetivo puede afectar la ponderación de cada uno (Malkauthekar, 2013).

Sharma y Kumar (2016) menciona que una de las principales ventajas de la metodología que aplica la distancia de Manhattan es el cálculo rápido de todos los parámetros. La simpleza de esta métrica permite el cálculo simple de la distancia, generando modelos

restringidos para obtener el punto que se encuentre más cercano a un punto esperado. Además, posee una naturaleza lineal que permite obtener resultados más eficientes y rápidos que otras métricas. La distancia de Manhattan se basa en la distancia de valor absoluto entregando valores robustos aplicados a conjuntos de datos grandes (Mohibullah *et al.*, 2015).

3. Metodología

En esta sección se revisará el flujo de trabajo que define la metodología de esta investigación de tesis.

3.1. Modelamiento del problema

En adelante, se denominará como *punto rodilla* al pit óptimo perteneciente a la Frontera de Pareto que se encuentra a la menor distancia de un punto de referencia (ver subsección 3.1.1) en el plano bidimensional de valor esperado de pit final vs. riesgo de pérdidas por una mala estimación de leyes.

3.1.1. Punto ideal

El pit ideal es definido como un punto de referencia que representa aquel pit infactible que contiene el mismo valor del pit óptimo obtenido de acuerdo a (Marcotte y Caron, 2013), es decir, que contiene el mayor valor esperado sin considerar riesgo, y que al mismo tiempo, se encuentra libre de riesgo, o sea, riesgo igual a cero, como se muestra en la Figura 11. Decimos que es infactible porque es imposible que el pit ideal se pueda llevar a cabo en la realidad, dadas las fuentes de incertidumbre que presenta el problema real. Es por esto, que los tomadores de decisiones buscan aquel pit factible que se encuentre más cercano al pit ideal, buscando un equilibrio entre las medidas de valor y riesgo. Por otro lado, los límites de la frontera son referencias que potencialmente no llaman la atención de los tomadores de decisión por no equilibrar apropiadamente ambos criterios.

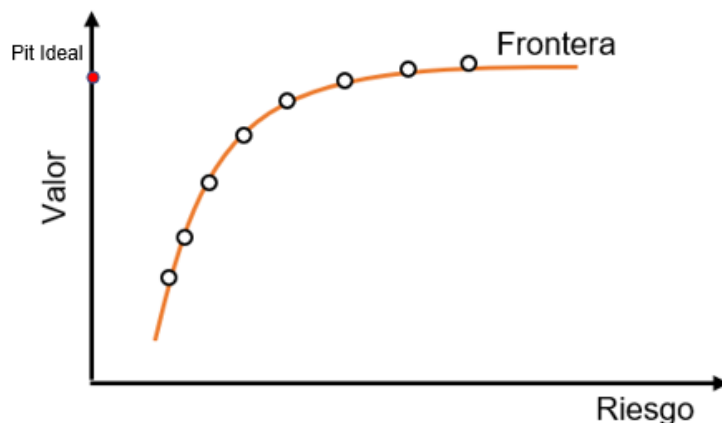


Figura 11: Representación visual del punto ideal y la frontera eficiente en el plano valor-riesgo. Cada punto en la frontera representa un pit final óptimo para el par (riesgo, valor).

Para determinar el punto ideal se utiliza la metodología propuesta por Marcotte y Caron (2013) mediante técnicas de programación lineal, la cual establece el pit final como aquel

que maximiza el valor esperado a lo largo de todas las simulaciones, donde v_{bs} representa el valor del bloque b de acuerdo a la simulación s . $PREC_b$ es el modelo de precedencias del bloque b .

$$\max \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} v_{bs} \cdot x_b \quad (13)$$

$$s.a. \quad x_b \leq x_a \quad b \in B, a \in PREC_b \quad (14)$$

$$x_b \in \{0, 1\} \quad \forall b \in B \quad (15)$$

donde al igual que en el modelo P_μ , la variable x_b es una variable binaria de decisión, la cual toma valores de 1 si el bloque pertenece al pit final y 0 para el caso contrario.

3.1.2. Distancia Mínima de Manhattan

Como se menciona anteriormente, una metodología que se puede aplicar para seleccionar un punto de la frontera que minimice la distancia a un pit ideal, definido este último como aquel pit infactible que presenta el mayor valor esperado y, a la vez, el mínimo riesgo, de forma independiente.

En otras palabras, el problema se traduce en encontrar:

$$\min \quad d(X(u_1, u_2), X^*) \quad (16)$$

$$s.a \quad X \text{ es un pit} \quad (17)$$

donde u_1 representa el riesgo del pit (CVaR) X , u_2 corresponde al valor esperado del pit X , y d representa una métrica que mide la distancia entre un pit óptimo X y el pit ideal X^* .

La Distancia Mínima de Manhattan otorga al problema visualizaciones geométricas al momento de determinar el pit óptimo, basado en el cálculo de distancia entre dos vectores de valor real moviéndose en ángulos rectos entre los ejes, logrando evitar la asignación de ponderadores a criterios preferenciales por un tomador de decisiones, lo que conlleva a determinar de forma sencilla el punto rodilla.

3.1.3. Modelo de optimización

Utilizando la métrica de Distancia Mínima de Manhattan $d_m(X, X^*)$ para medir la distancia entre el pit óptimo y el pit ideal, se obtiene:

$$(PPO) \quad \min \quad w_1 + w_2 \quad (18)$$

$$s.a \quad x_b \leq x_a \quad \forall b \in B, a \in PREC_b \quad (19)$$

$$y_s \geq f(x, g^s) - \zeta \quad \forall s \in S \quad (20)$$

$$f(x, g^s) = \sum_{b \in B} (\bar{v}_b - v_{bs}) x_b \quad (21)$$

$$w_1 \geq \zeta + \frac{1}{S(1-\delta)} \sum_{s \in S} z_s \quad (22)$$

$$w_1 \geq -\zeta - \frac{1}{S(1-\delta)} \sum_{s \in S} z_s \quad (23)$$

$$w_2 \geq \frac{1}{S} \sum_{s \in S} v_{bs} \cdot x_b - v^* \quad (24)$$

El problema se define como un cálculo de distancia vectorizada entre X y X^* , como se muestra en la Figura 12, donde w_1 y w_2 son variables auxiliares que representan la distancia de manhattan entre el pit ideal y el mejor pit factible, $f(x, g^s)$ representa la función de pérdida de cada bloque del problema asociadas a las desviaciones entre los escenarios de leyes simuladas y ley estimada.

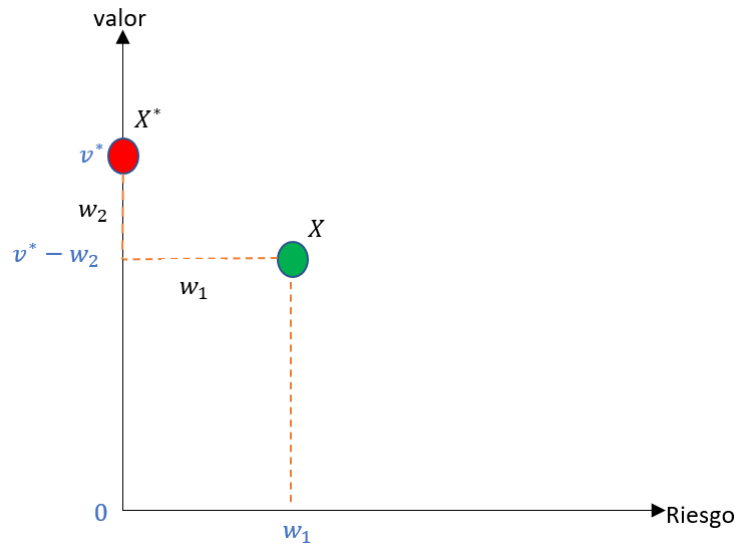


Figura 12: Representación gráfica de la Distancia Mínima de Manhattan

3.2. Esquema de implementación

En esta sección se visualiza el esquema de implementación del modelo que se empleará para determinar el pit rodilla. La Figura 13 muestra el diagrama de trabajo en el que se visualizan niveles de trabajo necesarios para obtener el pit rodilla.

1. Calcular el valor económico de cada bloque
2. Determinar el pit ideal libre de riesgo, obteniendo los bloques que pertenecen al pit ideal y el valor máximo esperado
3. Crear variables auxiliares que permitan ubicar espacialmente (plano bidireccional de valor esperado respecto al CVaR)
4. Aplicar modelo de optimización considerando restricciones: precedencias, linealidad y minimización del riesgo
5. Determinar el pit rodilla, estableciendo los bloques que pertenecen a este pit, valor esperado y riesgo asociado

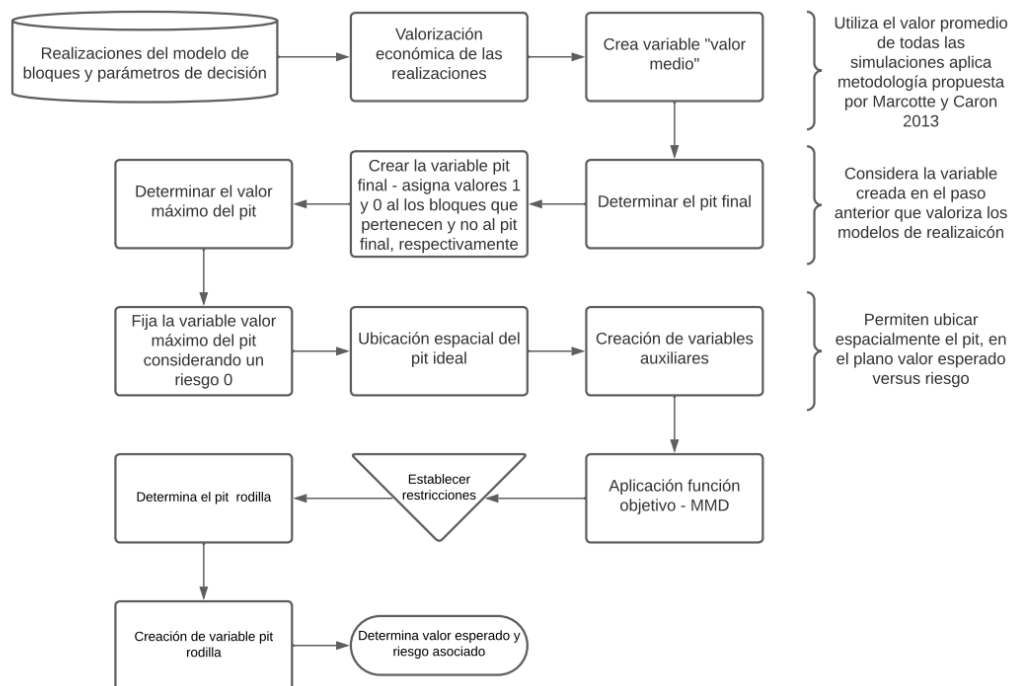


Figura 13: Esquema de implementación para determinar pit rodilla a partir de MMD

4. Caso de estudio I

En este capítulo se mostrará el modelo de bloques y los parámetros económicos y geomecánicos aplicados en un caso de estudio sintético, con el objetivo de validar la metodología propuesta en la sección anterior. El proceso de validación se basará en determinar si el pit óptimo pertenece a la Frontera Eficiente de Pareto. Para ello, se trabajará en dos etapas: (i) determinar la frontera eficiente aplicando variaciones al ponderador del riesgo y, (ii) aplicando la metodología propuesta en el capítulo anterior para determinar el pit rodilla.

4.1. Antecedentes

4.1.1. Modelo de bloques

El modelo de bloques es una matriz tridimensional de tipo pórfido cuprífero. Su extensión equivale a 460 [m] de largo, 660 [m] de ancho y 204 [m] de alto en coordenadas este, norte y cota, respectivamente. Está compuesto de 31,872 bloques de 10 [m] × 10 [m] × 12 [m]. Se dispone de un conjunto de 50 simulaciones que será utilizadas para reproducir la variabilidad de la variable ley de cobre. El modelo cuenta para cada bloque la siguiente información:

- Coordenadas espaciales x, y, z.
- Tonelaje total.
- 50 simulaciones condicionales de la ley.
- Ley promedio entre los 50 escenarios.

En las Figuras 14 a 17 se muestra a modo de referencia a las diferencias visuales de la variable ley simulada mediante vistas en planta del modelo de bloque para las variables ley promedio, simulación 1, simulación 20 y simulación 40. Se observa que existe una tendencia de leyes mayor a 0.4 % en dirección sureste del yacimiento.

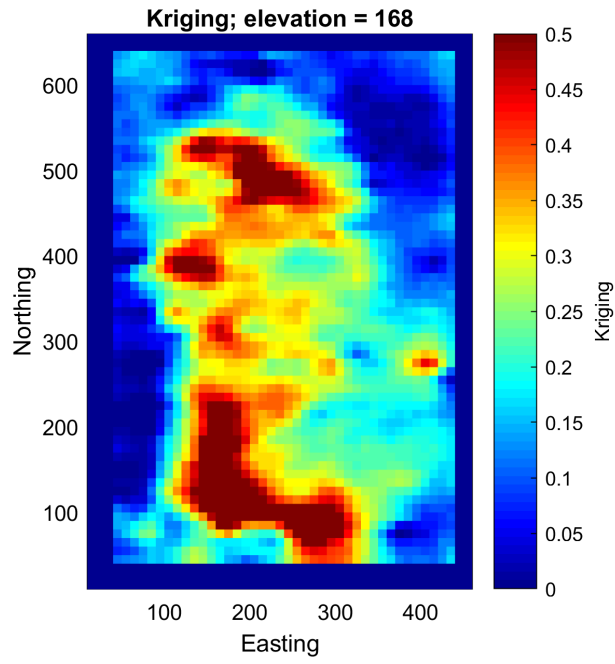


Figura 14: Vista de sección cota 168, de la variable cobre del modelo de bloques 3D: Leyes promedio de simulaciones.

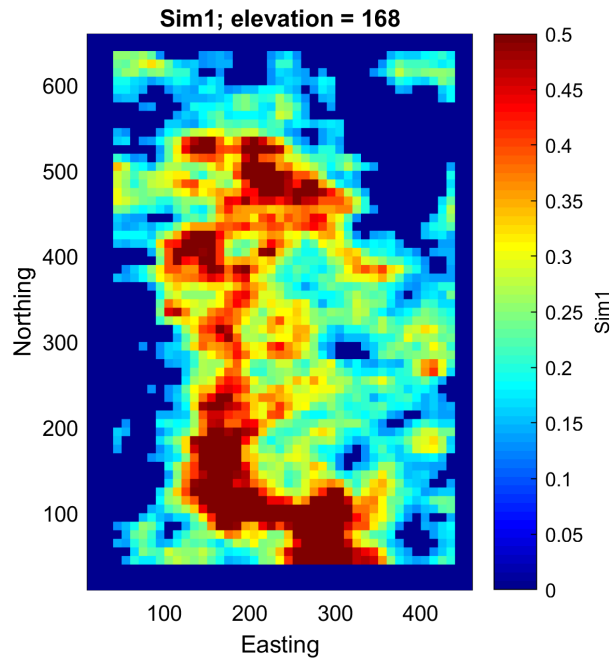


Figura 15: Vista de sección cota 168, de la variable cobre en el modelo de bloques 3D: Simulación 1.

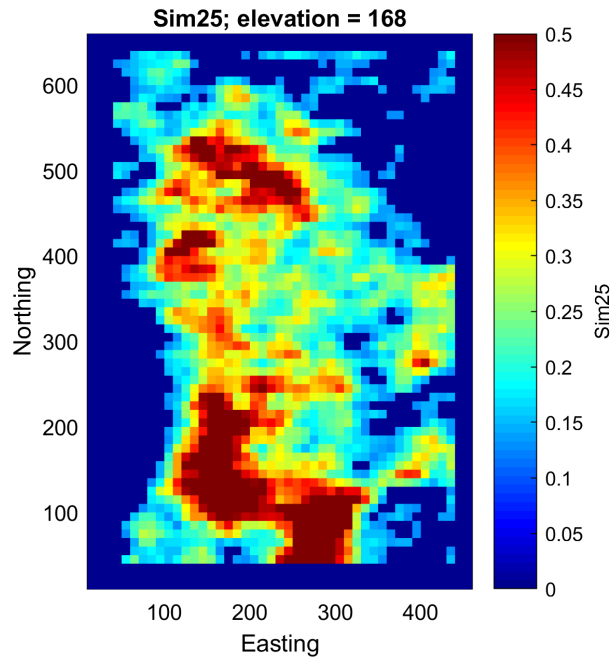


Figura 16: Vista de sección cota 168, de la variable cobre en el modelo de bloques 3D: Simulación 25.

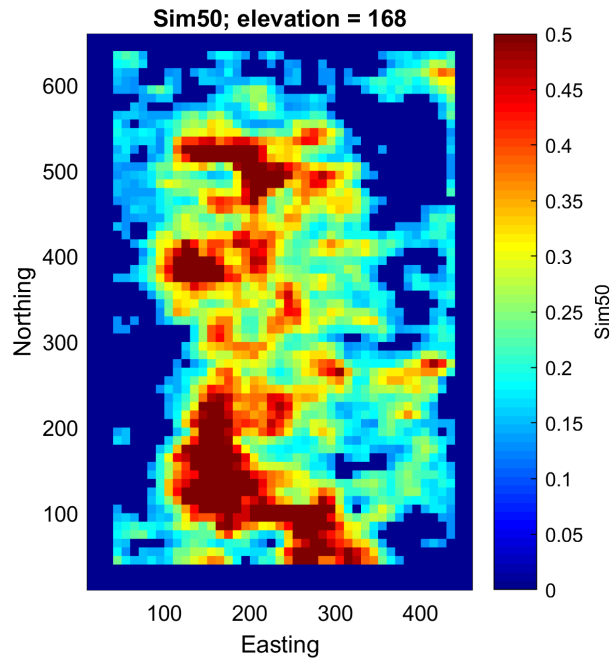


Figura 17: Vista de sección cota 168, de la variable cobre en el modelo de bloques 3D: Simulación 50.

En la Tabla 1 se detalla la distribución de las leyes. Por otro lado, la Figura 18 muestra el histograma de las leyes promedio y el error asociado a cada intervalo que considera todos los escenarios simulados, mediante un rango de valores mínimo y máximo. En Anexo

B: Modelo de bloques sintético, se muestra el análisis estadístico descriptivo del modelo de bloques sintético.

Tabla 1: Tabla de frecuencias de leyes del modelo de bloques sintético

Marca de clase	Frecuencia esperada	Frecuencia mínima	Frecuencia máxima
0.05	18,783	18,488	19,128
0.15	888	694	1,134
0.25	4,786	4,165	5,273
0.35	4,305	3,757	4,902
0.45	1,988	1,610	2,290
0.55	672	543	888
0.65	235	162	305
0.75	98	56	143
0.85	51	8	75
0.95	27	9	62
1.05	15	3	32
1.15	10	0	25
1.25	7	0	16

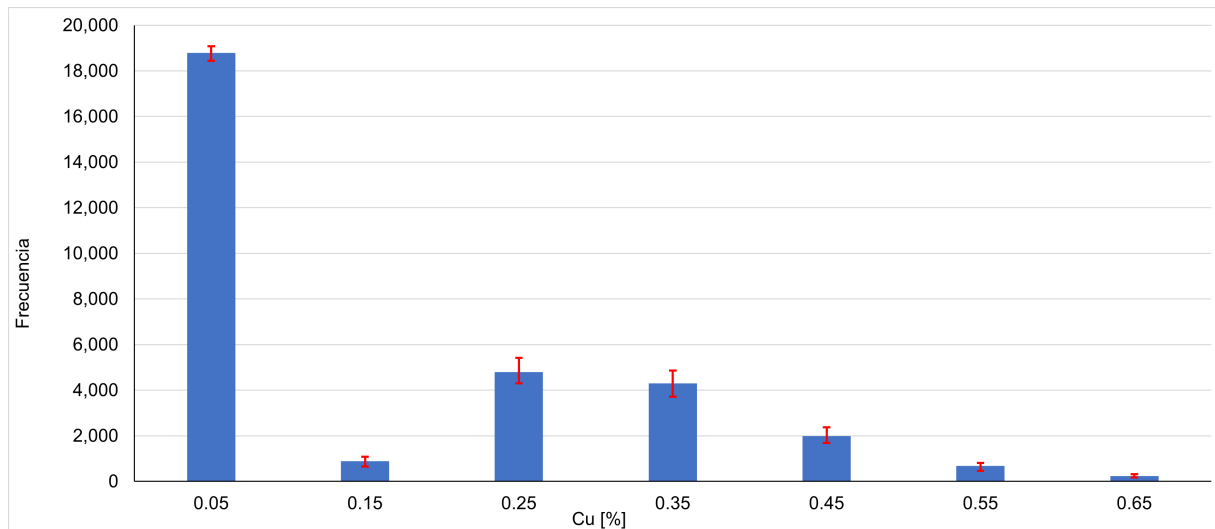


Figura 18: Histograma leyes de cobre de modelo de bloques 3D.

4.1.2. Modelo económico

En este ítem se muestran los parámetros (ver Tabla 2) utilizados en la valorización de cada bloque según la ley del escenario. Estos parámetros serán utilizados tanto en el caso de estudio sintético como en el caso de estudio final.

Tabla 2: Parámetros que definen el valor económico del modelo de bloques

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Precio	P	3.0	USD/lb
Recuperación Metalúrgica	Rec	90	%
Costo Mina	Cm	3.1	USD/t
Costo Proceso	Cp	9.5	USD/t
Costo venta, fund. Y refin.	Cv	0.4	USD/lb
Factor de conversión	f	2,204.6	

4.1.3. Modelo geomecánico

El modelo de precedencias que se utilizará en ambos casos de estudio será de 45° y 5 niveles, lo cual significa que para extraer un bloque b , primero deben ser extraídos todos los bloques cuyo centroide se encuentre dentro de un cono invertido con altura de 5 bancos y un ángulo de 45°.

4.1.4. Recurso computacional

Para determinar el pit óptimo se hará uso del lenguaje de programación Python, versión 3.6.8. Además, se utilizarán las siguientes librerías y software:

1. MineLink: librería desarrollada en C++, implementa estructuras de datos para planificación minera, almacenar y trabajar modelos de bloques y arcos de precedencias. Desarrollada por el Laboratorio de Planificación Minera Delphos de la Universidad de Chile.
2. PuLP: es un modelador matemático de programación lineal, entera o mixta escrito en Python.
3. Gurobi: versión 9.1.2. es el software de optimización que resolverá de manera eficaz el modelo implementado.
4. Andes: es un software de estimación y simulación geoestadística creado por el Laboratorio Alges de la Universidad de Chile. Este software es utilizado para crear visualizaciones del modelo de bloques y los análisis estadísticos respectivos.
5. GSLIB: software geoestadístico aplicado en este trabajo, en el análisis estadísticos, visualizaciones del modelo y variabilidad de los escenarios.

Finalmente, los experimentos serán ejecutados en una CPU Intel Xeon E5-2660 v3, 256 Gb de memoria ram y sistema window 10 Pro.

4.2. Etapa 1: Frontera óptima de Pareto

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos para pit final utilizando un 95 % nivel de confianza en la evaluación del riesgo medido por el CVaR, basado en la metodología propuesta por Jelvez *et al.* (2021). Para ello, se realizan variaciones del ponderador μ en la Ecuación (7) de este trabajo, de acuerdo al Procedimiento 1 (Ecuación (18)) definido en Jelvez *et al.* (2021).

La Tabla 3 muestra los resultados numéricos correspondientes a 17 pit óptimos que forman la Frontera Eficiente. En la primera columna se obtienen los resultados del Valor en Riesgo (VaR), la segunda columna muestra el Valor Condicional en Riesgo (CVaR), en la tercera columna se observa el valor esperado, y finalmente, la cuarta columna muestra los tiempos de cómputos para determinar cada punto de la frontera.

Tabla 3: Resultados de la Frontera eficiente obtenida para un nivel de confianza 95 %

VaR [USD]	CVaR [USD]	Valor esperado [USD]	Tiempo [s]
13,442,123	16,023,635	53,227,141	302
13,442,123	16,023,635	53,227,141	307
9,552,112	15,844,581	53,219,676	333
9,823,551	14,430,474	52,844,854	352
9,736,633	14,293,328	52,774,249	366
9,826,288	14,237,152	52,742,412	401
10,954,481	14,065,349	52,635,068	312
10,866,170	13,986,908	52,582,366	324
9,810,395	13,951,861	52,556,811	369
10,117,254	13,493,338	52,201,075	326
10,052,999	13,300,349	52,029,800	330
8,488,042	8,780,152	44,576,016	593
6,446,969	6,446,969	38,496,485	1,000
5,113,948	5,113,948	33,878,723	1,359
4,320,985	4,321,408	30,419,222	28,549
2,887,940	2,888,064	22,680,402	27,840
2,707,534	2,708,264	21,497,880	47,169

La Figura 19 muestra la Frontera eficiente en el plano valor esperado vs. riesgo (medido por CVaR) con un nivel de confianza del 95 %. Se observa una zona de protuberancia para aquellos pit óptimos cuyo CVaR varía entre 13 y 15 MUSD. Esta zona es un indicador en el cual potencialmente se puede ubicar el pit rodilla, pero no necesariamente, ya que se debe considerar la escala de los ejes.

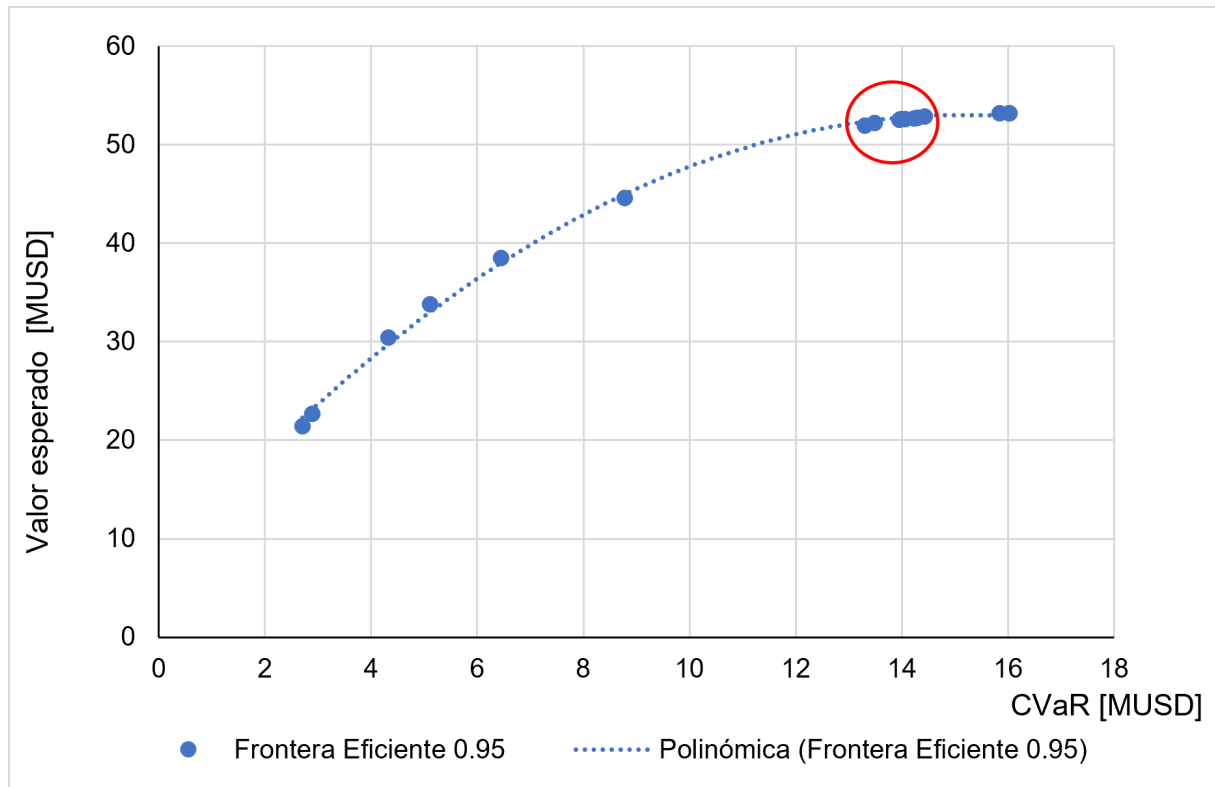


Figura 19: Frontera Eficiente valor esperado respecto al riesgo con un nivel de confianza del 95%.

4.3. Etapa 2: Pit óptimo rodilla

Para determinar el pit óptimo rodilla es necesario establecer el pit ideal, para esto se utilizará la metodología propuesta en la sección 3.2.1. que define el pit ideal como aquel pit que alcanza el mayor valor esperado a menor riesgo, es decir, se asume un riesgo igual a 0, obteniendo como resultado un valor esperado equivalente a 53,227,239 [USD].

Conocido el pit ideal, éste es utilizado como punto de referencia para aplicar la metodología propuesta en este trabajo de tesis mediante Distancia Mínima de Manhattan (MMD), cuyo objetivo es minimizar la distancia entre el pit ideal (conocido) y el pit óptimo rodilla (punto que estamos buscando). La Tabla 4 muestra los resultados obtenidos para el pit rodilla. Se obtiene un Valor Esperado equivalente a 52,029,800 [USD] y un Valor Condicional en Riesgo (CVaR) de 13,300,349 [USD]. El tiempo de procesamiento obtenido es de 472 segundos. Cabe destacar que en este caso el pit rodilla representado por (μ_R, V_R) coincide con un punto de la frontera eficiente, aunque este es un caso particular. Se podría validar la pertenencia de este punto en la frontera resolviendo un modelo (P_μ) dado por las Ecuaciones (5)-(10), con $\mu = \mu_R$. En Anexo D se presenta una demostración

de que el pit rodilla pertenece a la frontera eficiente de Pareto.

Tabla 4: Resultados del Pit Óptimo Rodilla para un nivel de confianza del 95 %

Indicador	Valor
CVaR [USD]	13,300,349
Valor esperado [USD]	52,029,800
Tiempo [s]	472

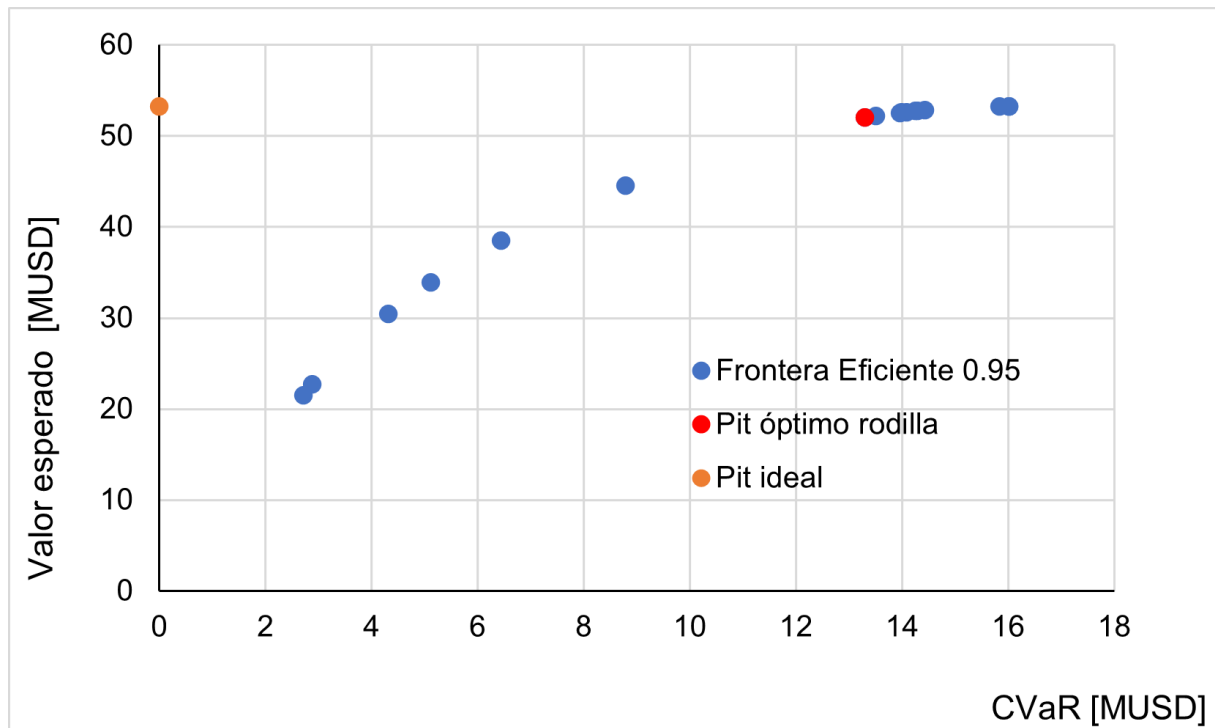


Figura 20: Gráfica de valor esperado y riesgo con un nivel de confianza del 95 %.

La Figura 20 muestra la frontera eficiente generada en la Etapa 1 (subsección 4.2) más el pit ideal y el pit óptimo rodilla. Se observa que el pit óptimo rodilla pertenece a la frontera y además, para este caso, toma el mismo valor que uno de los pits pertenecientes a la frontera. El pit rodilla, es aquel pit que obtiene la mayor ganancia esperada (diferencia entre Valor Esperado y el Valor en Riesgo Condicional). Por otro lado, se logra una reducción en los tiempos de procesamiento entre la frontera eficiente y el pit óptimo rodilla, para este caso, en un 99,6 %. Finalmente, se valida la pertenencia del pit rodilla a la Frontera Eficiente (ver Anexo D para una demostración formal).

5. Caso de estudio II

En esta sección se aplicará la metodología propuesta en el capítulo 3 que considera la incertidumbre geológica para determinar el pit rodilla, basado en la Distancia Mínima de Manhattan hasta un pit ideal.

En la sección 5.1 se entregan los antecedentes generales que permiten definir el caso de estudio, asociados al modelo de bloques, parámetros económico y geomecánicos. En la sección 5.2 se determina el pit rodilla aplicando la metodología propuesta en la sección 3.2.2. Posteriormente, en la sección 5.3 se valida el pit rodilla mediante la Frontera Eficiente y se identifica el sector en que se genera el pit rodilla. En la sección 5.4 se comparan los resultados obtenidos con otras metodologías. Finalmente, en la sección 5.5 se genera un análisis de estrés a la metodología propuesta.

5.1. Antecedentes Caso Estudio

5.1.1. Modelo de bloques - Caso Estudio

Para evaluar la metodología propuesta se consideró un modelo de bloques tridimensional de tipo pórfido cuprífero. El modelo está compuesto por 344,159 bloques de 10[m] x 10[m] x 10 [m]. Su extensión equivale a 1,300 [m] de largo, 950 [m] de ancho y un profundidad de 470 [m] en las coordenadas este, norte y cota respectivamente. Se dispone de un conjunto de 40 simulaciones condicionales que se utilizarán para reproducir la variabilidad de la variable ley de cobre. Por otro lado, se asume que 40 simulaciones son suficientes para reproducir dicha variabilidad de la ley (Emery y Séguret, 2020). Este modelo cuenta, para cada bloque, con información de:

- Centroides en x, y, z.
- Tonelaje total.
- Densidad.
- 40 simulaciones condicionales de la ley.
- Ley promedio entre los 40 escenarios.
- Ley estimada mediante Kriging

De la Figuras 21 a la 25 se observan vistas de sección en la cota 1995 de la variable ley de cobre, ley estimada por kriging, ley promedio de los escenarios, escenario simulado 1, escenario simulado 20 y escenario simulado 40 respectivamente. En ellas se puede observar que la variable ley de cobre estimada tiende a sobreestimar las leyes altas. Como se menciona en los capítulos introductorios de este trabajo, considerar solo un modelo de bloques que no represente la variabilidad de las variables cuantitativas y cualitativas puede generar planes de producción poco realistas.

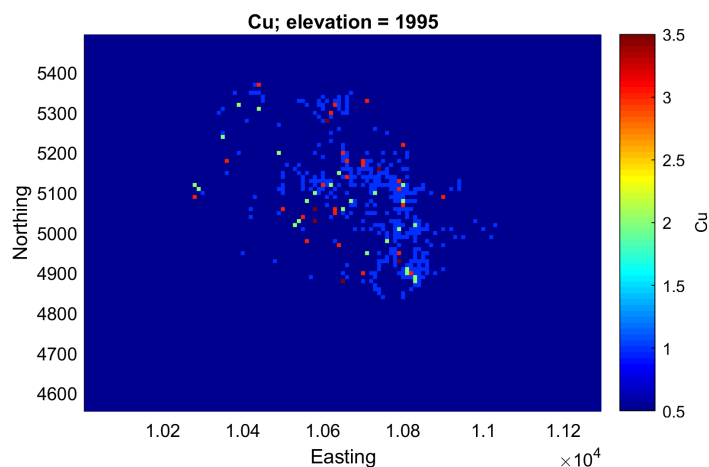


Figura 21: Vista de sección cota 1995 de la ley de cobre en el modelo de bloques 3D Caso de estudio variable estimada por Kriging.

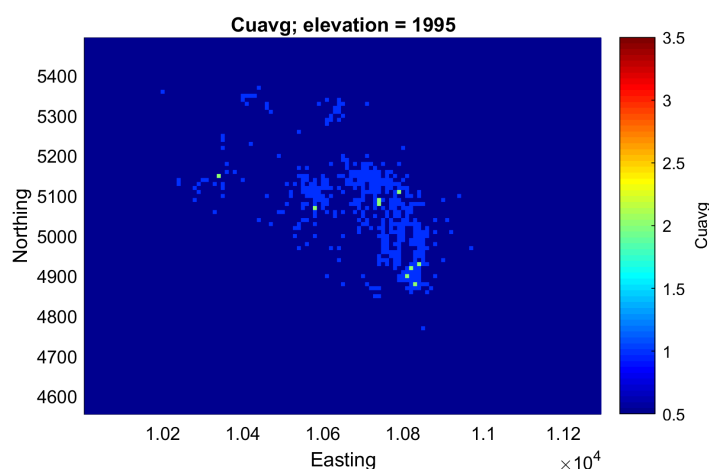


Figura 22: Vista de sección cota 1995 de la ley de cobre en el modelo de bloques 3D Caso de estudio: Ley promedio simulaciones.

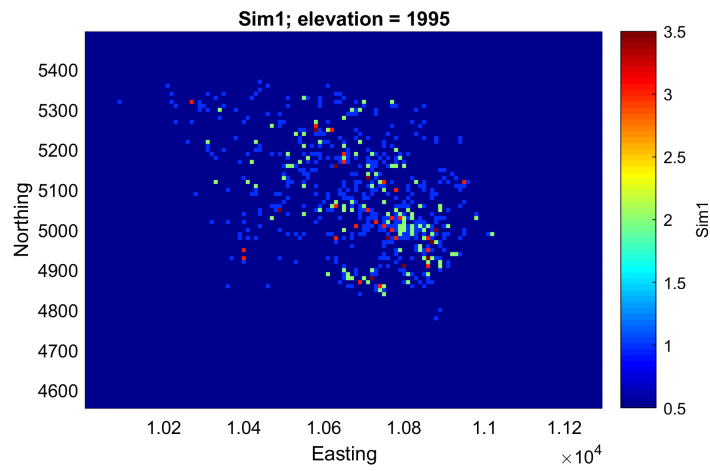


Figura 23: Vista de sección cota 1995 de la ley de cobre en el modelo de bloques 3D Caso de estudio: Simulación 1.

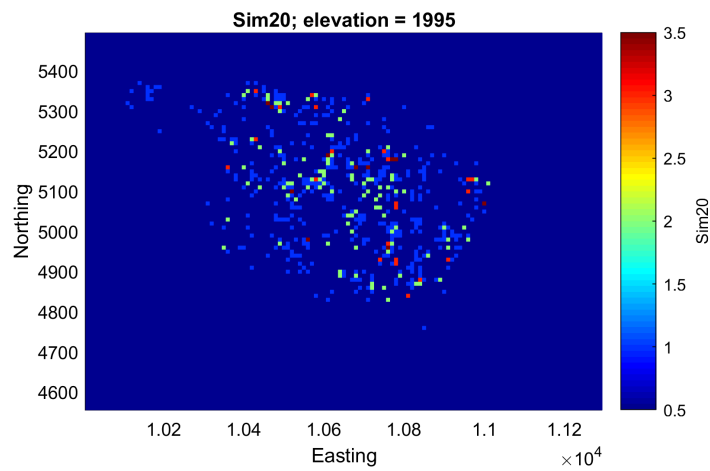


Figura 24: Vista de sección cota 1995 de la ley de cobre en el modelo de bloques 3D Caso de estudio: Simulación 20.

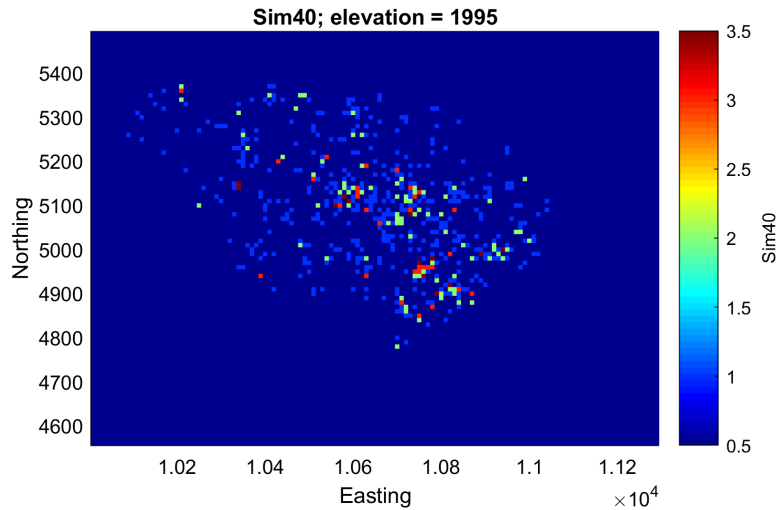


Figura 25: Vista de sección cota 1995 de la ley de cobre en el modelo de bloques 3D Caso de estudio: Simulación 40.

En la Tabla 5 se detalla la distribución de las leyes asociadas al modelo de bloque del caso de estudio. Por otro lado, la Figura 26 muestra el histograma de las leyes promedio y el error asociado a cada intervalo que considera todos los escenarios simulados, mediante un rango de valores mínimo y máximo. En Anexo C: Modelo de bloques caso de estudio, se muestra su análisis estadístico descriptivo.

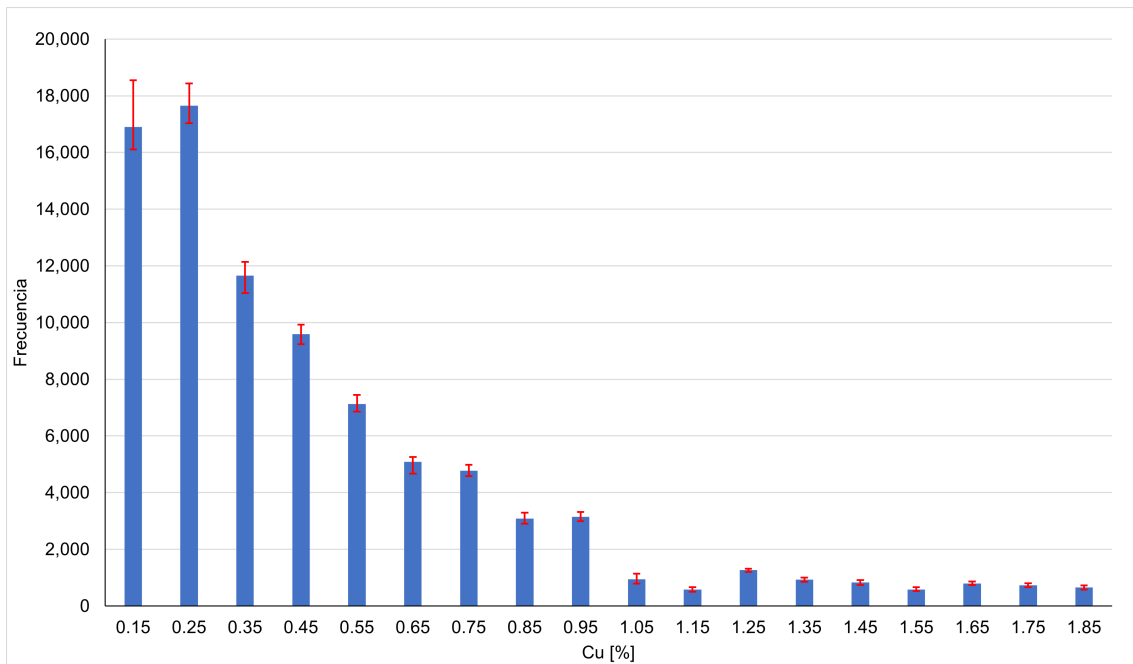


Figura 26: Histograma leyes de cobre de modelo de bloques 3D.

Tabla 5: Tabla de frecuencias de leyes del modelo de bloques: caso estudio

Marca de clase	Frecuencia esperada	Frecuencia mínima	Frecuencia máxima
0.05	234,566	233,922	235,353
0.15	16,897	16,105	17,515
0.25	17,647	17,165	18,255
0.35	11,652	11,318	12,009
0.45	9,591	9,262	9,854
0.55	7,121	6,946	7,540
0.65	5,081	4,872	5,264
0.75	4,768	4,555	4,953
0.85	3,083	2,913	3,230
0.95	3,143	2,948	3,294
1.05	939	847	1,012
1.15	578	534	650
1.25	1,269	1,201	1,342
1.35	928	839	1,013
1.45	828	748	890
1.55	586	525	650
1.65	798	729	864
1.75	728	658	809
1.85	655	593	744

5.1.2. Parámetros económicos

Cada bloque del modelo será valorizado utilizando la expresión de valorización v_{br} para cada bloque b perteneciente a cada escenario r de ley expresada en la Ecuación 1. Los parámetros económicos utilizados serán los que se muestran en la Tabla 2.

5.1.3. Parámetros de control geomecánico

Este modelo de bloques considera el mismo modelo de precedencias expuesto en la sección 4.3.1. con un ángulo de talud global de 45° y 5 niveles.

5.2. Pit rodilla

Para determinar el punto rodilla se consideran los parámetros geomecánicos expuestos en las secciones 5.1.3., luego se establece la relación entre el valor esperado y el riesgo asociado al tener múltiples escenarios con simulación de leyes. Además, se consi-

dera un nivel de confianza del 95 % y un gap de optimalidad de la solución obtenida igual a 0.1 %.

Etapa 1: Valorización del modelo de bloque v_{br} considerando los parámetros expuestos en la sección 5.1.2.

Etapa 2: Determinar el pit ideal maximizando el valor esperado sin restricción de riesgo.

Etapa 3: Aplicar variables auxiliares que representen la ubicación espacial del pit ideal (determinado en la etapa anterior) y el pit rodilla (desconocido) considerando un *trade-off* entre el valor esperado y el riesgo asociado a los escenarios de simulación.

Etapa 4: Aplicar función objetivo de la metodología a priori MMD, propuesta en la sección 3.2.2. Al finalizar la búsqueda del pit rodilla minimizando la distancia, se genera un reporte de los resultados.

En la Tabla 6 se muestran los resultados obtenidos tras aplicar la metodología propuesta, la cual arroja una distancia de 224 [MUSD] entre el pit ideal y el pit rodilla.

Tabla 6: Resultados pit ideal y pit rodilla

Indicador	Pit ideal	Pit Rorilla
CVaR [USD]	0	197
Valor esperado [MUSD]	3,424	3,397

5.3. Comparación con metodología tradicional

Una vez fijado un criterio de decisión para elegir un pit óptimo en planificación multi-objetivo, resulta interesante evaluar el desempeño de pits obtenidos mediante otras metodologías. Por ejemplo, aquellas que proponen cómo usar varios escenarios mediante simulaciones condicionales, o bien, se puede considerar la evaluación de la decisión de pit final considerando la metodología tradicional, la cual no considera incertidumbre geológica y hace uso de un único escenario de estimación de leyes utilizando técnicas tipo Kriging. Esto permite evaluar los métodos tradicionales utilizados en la actividad minera en términos de su aversión al riesgo de pérdidas, por ejemplo, al realizar preguntas como:

- ¿En qué sector de la Frontera se encuentra el pit final determinado con una metodología tradicional?
- ¿Cuál es el riesgo que genera un enfoque tradicional medido por CVaR?
- ¿Cuál es la diferencia económica entre ambas metodologías, en valor esperado a lo largo de todos los escenarios?
- ¿Como varían las reservas?

Para analizar este ítem se consideró el enfoque tradicional mediante las variables: ley de Cu estimada (kriging), ley promedio de las simulaciones (cuavg) y el enfoque estocástico propuesto por (Marcotte y Caron, 2013). Todos los enfoques consideran el mismo modelo económico y geomecánico.

En la Figura 27 se muestran los resultados obtenidos de los enfoques tradicionales y estocásticos. Los enfoques tradicionales que consideran un único modelo de bloques estimado mediante kriging o el promedio de las simulaciones generan soluciones factibles, pero dominados por la frontera. Para el caso del pit tradicional (estimación de ley mediante kriging) y para el pit etype (promedio de las leyes simuladas, cuavg) se obtienen soluciones subóptimas. Esto se traduce en que el inversor podría aceptar el valor esperado y tener un menor riesgo que el que presentan estos casos, obteniendo una solución óptima de la Frontera (ver Figura 28) o viceversa, podría asumir un riesgo y obtener un valor esperado mayor al que obtienen estos enfoques (ver Figura 29). Sin embargo, eso requiere de un alto costo computacional para calcular esos pit no dominados. La metodología propuesta por (Marcotte y Caron, 2013), presenta el máximo valor esperado y mayor valor Condicional en Riesgo que se puede obtener en el proyecto, sin embargo, para los inversionistas no es preferente escoger valores extremos de la frontera, ya que se obtienen sin control de riesgo que están dispuestos a asumir. Finalmente, el pit rodilla, representa la menor diferencia económica entre el pit ideal y un punto de la frontera, que

no depende de la construcción completa de ésta, lo cual entrega al inversor la mejor solución económica al menor tiempo de computo.

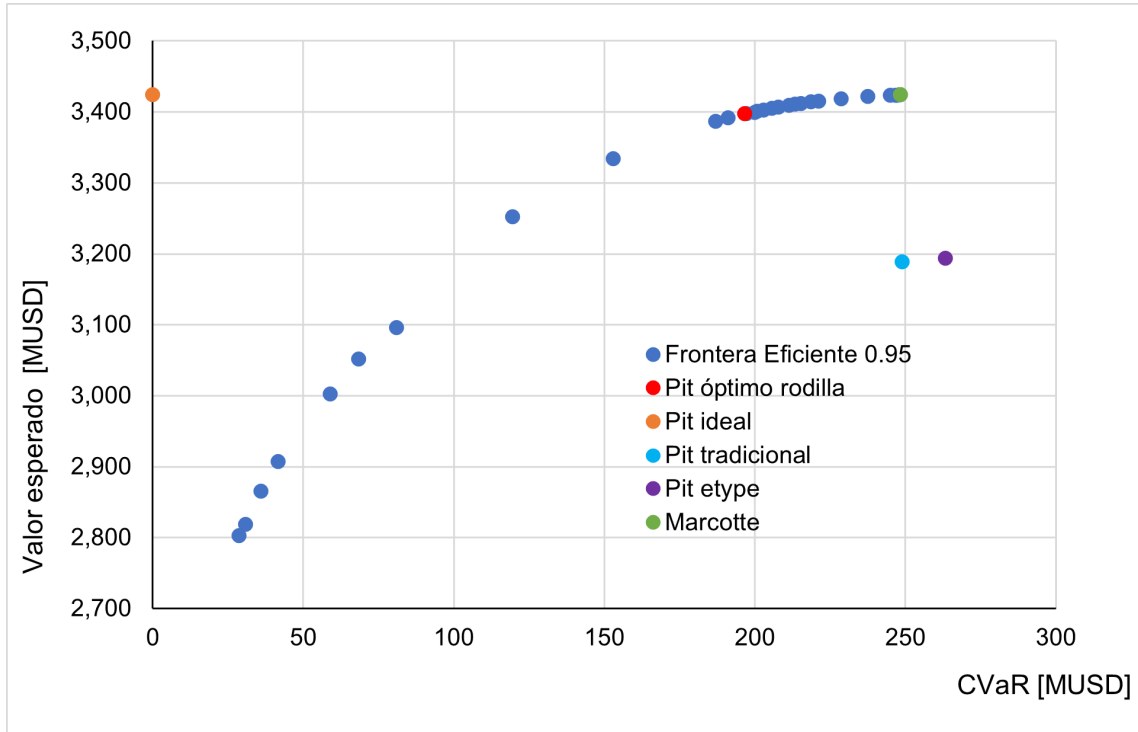


Figura 27: Comparación de resultados obtenidos entre enfoques estocásticos y tradicionales

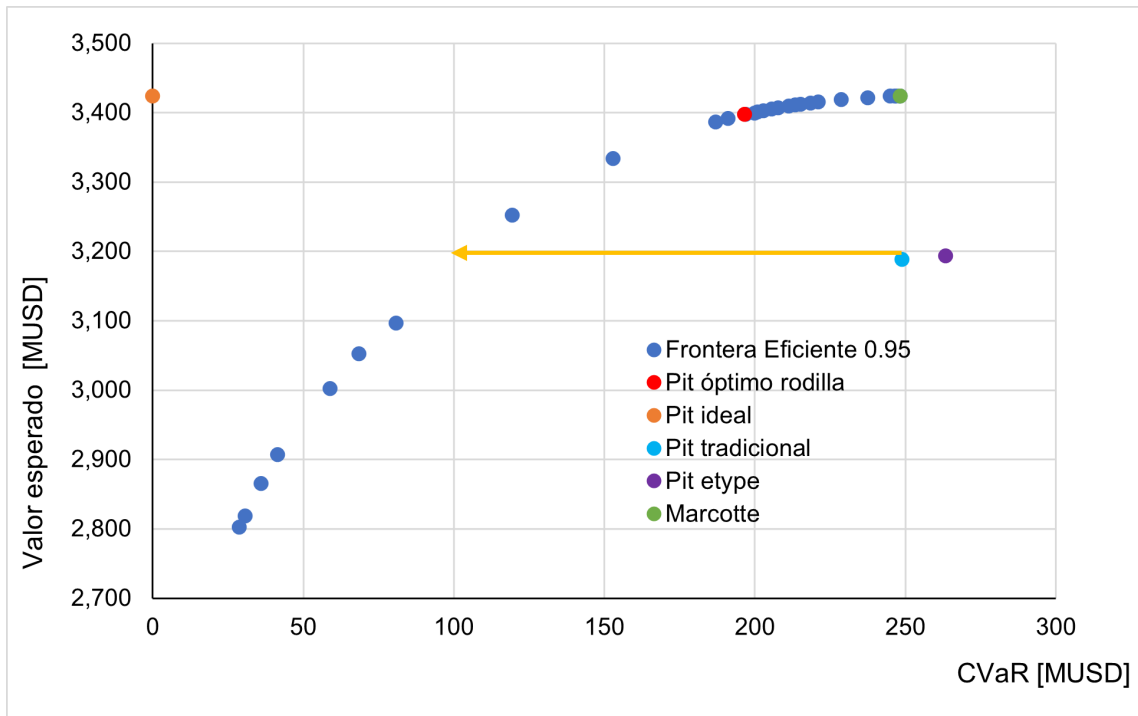


Figura 28: Variación horizontal pit tradicional respecto un pit factible

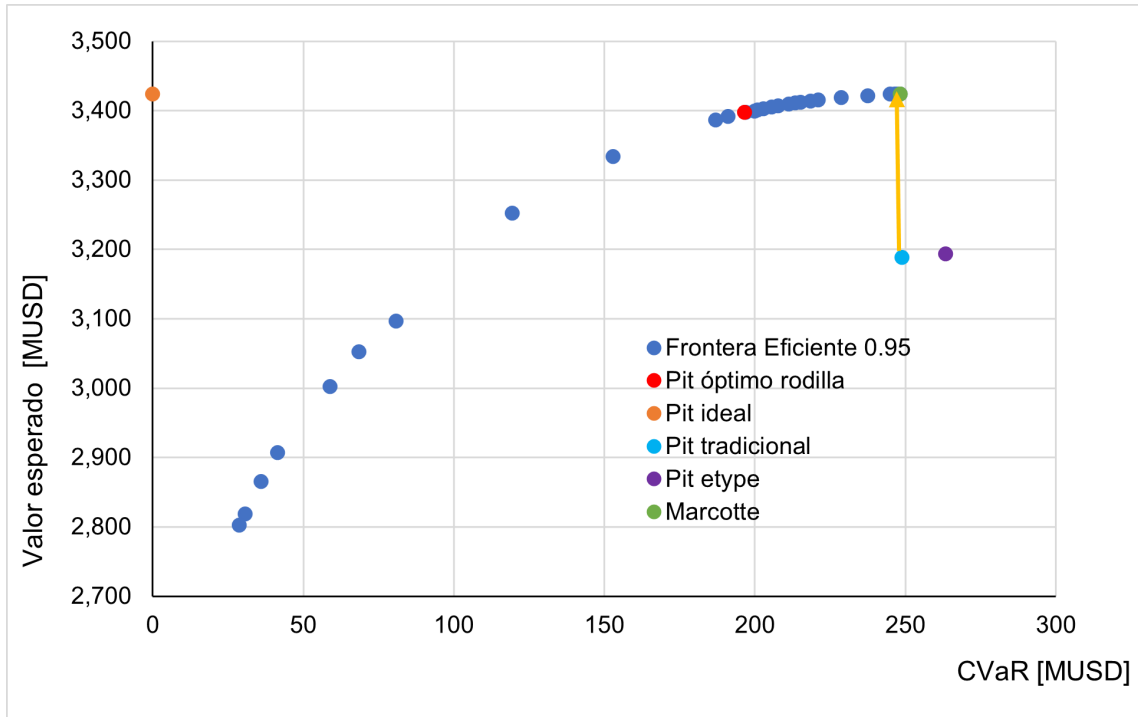


Figura 29: Variación vertical pit tradicional respecto un pit factible

Determinar el pit rodilla disminuye los tiempos de cómputos en un 92% cuando se compara con la generación de una frontera eficiente (que en este caso se calculó como referencia del estudio). También representa el mayor beneficio esperado como se muestra en la Tabla 7, la cual presenta un resumen de los parámetros Valor Condicional del Riesgo, valor esperado, el tiempo de cómputo para obtener las soluciones y ganancia esperada para las mejores soluciones obtenidas mediante la Frontera Eficiente (pits rodilla y sus vecinos como referencia).

Tabla 7: Cuadro comparativo soluciones Frontera Eficiente y pit rodilla

	Pit Frontera	Pit rodilla
CVaR [MUSD]	196,988	191,040
Valor esperado [MUSD]	3,397,465	3,391,579
Tiempo de cómputo [s]	197,403	213,154
Ganancia esperada [MUSD]	3,200,476	3,200,538

En las Figuras 30 y 31 se observa desde una vista planta la variación de tonelaje que presentan ambas metodologías, donde el pit rodilla extrae 298[Mt] mientras que el pit tradicional extrae 308[Mt], lo cual no representa grandes diferencias en tonelaje. Sin embargo, al analizar las reservas obtenidas en el pit rodilla mediante las curvas de tonelaje versus ley para leyes estimadas mediante kriging y el promedio de los escenarios simula-

dos asociados con un rango de variabilidad (mínimo y máximo) obtenidos del pit rodilla como muestra la Figura 32 se observa que el enfoque tradicional sobreestima las reservas al mismo tiempo que subestima las leyes, esto se asocia al efecto de suavizamiento de las leyes locales. Se observa que la ley media promedio de las simulaciones y el rango de variabilidad que posee se interceptan en leyes sobre 1.5 %, generando un reporte sesgado de la reserva. Un ejemplo es considerar una ley de corte de 0.5 %, utilizando un enfoque tradicional del pit rodilla se obtiene una ley media de 0.9 % y 88 [Mt], mientras que para un enfoque estocástico se obtiene una ley media de 1.2 % y 72 [Mt].



Figura 30: Vista planta pit rodilla



Figura 31: Vista planta pit tradicional

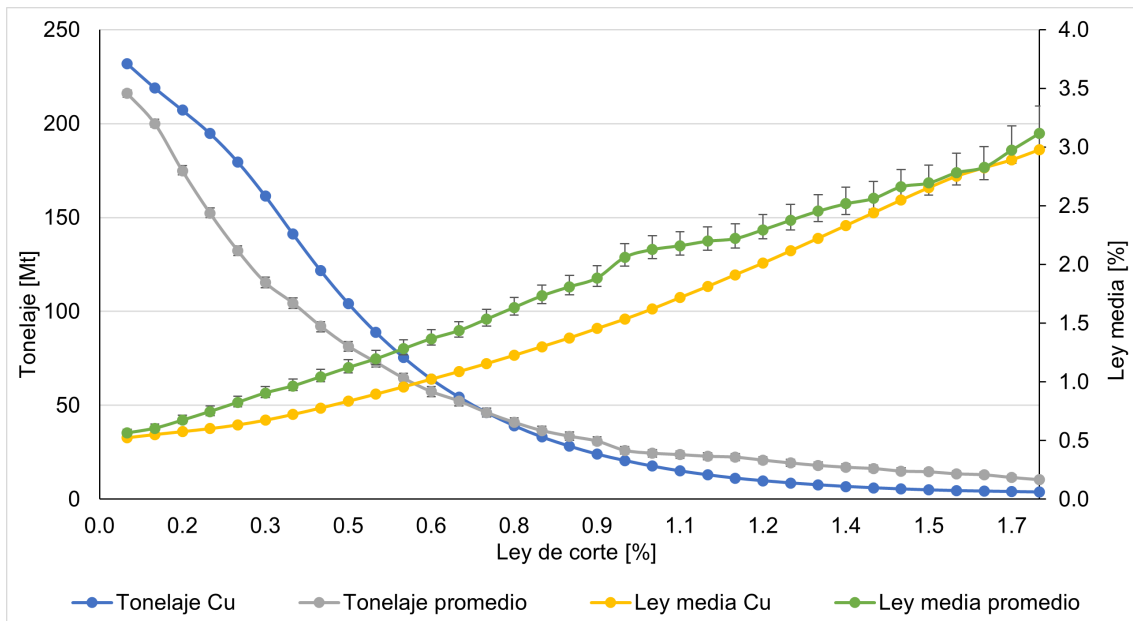


Figura 32: Comparación curva tonelaje versus ley

5.4. Análisis de estrés

Para realizar el análisis de estrés se consideraron 3 modelos de estudio: (i) modelo 2D con 3000 bloques aproximadamente, (ii) modelo de bloques caso sintético y, (iii) modelo de bloques caso estudio. Se consideraron 50 simulaciones para el modelo 2D. Para

el modelo de bloques caso sintético se realizaron 90 simulaciones, para ello, se genero 40 simulaciones restantes aplicando un ponderador a las simulaciones existentes, cuya única finalidad era agrandar el número de simulaciones y analizar el impacto de estas en el la determinación del pit rodilla. Se consideraron 100 iteraciones por cada 10 escenarios de simulación para los el modelo de bloques 2D y el modelo de bloques caso sintético.

La Figura 33 muestra el tiempo promedio de 100 iteraciones y el rango máximo y mínimo que estas presentan, el análisis se realizo cada 10 simulaciones, donde se observa que existe un aumento del tiempo de cómputo a medida que aumenta el número de simulaciones. La Figura 34 muestra el comportamiento de la metodología propuesta aplicado al modelo de bloques caso sintético, se observa que el comportamiento difiere en comparación del modelo 2D, ya que no presenta un comportamiento ascendente esperado y no se ajusta linealmente.

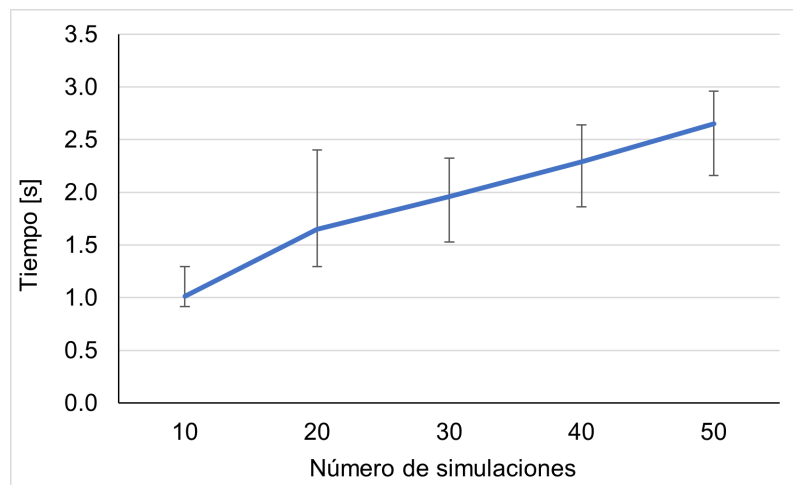


Figura 33: Análisis de estrés modelo 2D, 50 simulaciones

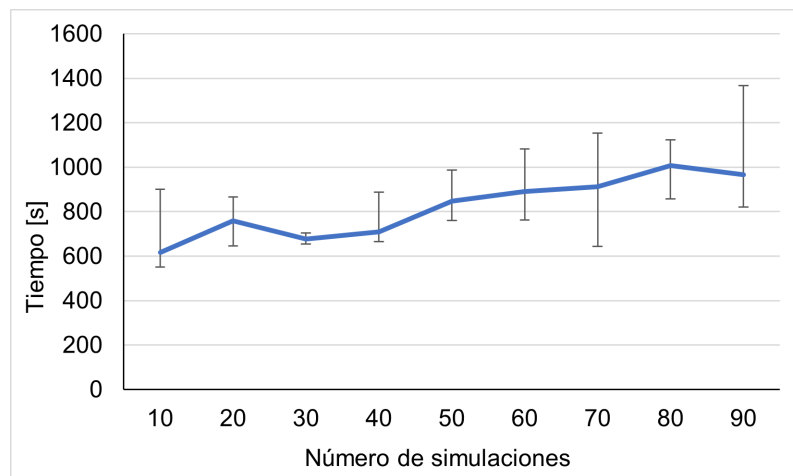


Figura 34: Análisis de estrés caso de estudio I

El modelo de bloques caso estudio contempla las 40 simulaciones descritas en la sección 5.1.1. más 40 simulaciones más obtenidas con un ponderador, Se realiza el análisis sin generar iteraciones con la finalidad de evaluar el comportamiento que presenta a medida que aumenta el número de simulaciones y el efecto que genera aumentar el número de bloques. En la Figura 35 se muestran los tiempos obtenidos del modelo de bloques caso de estudio sin generar iteraciones. Se observa el mismo comportamiento generado en el modelo de bloques caso sintético.

Por otro lado, a medida que aumenta el número de bloques aumenta directamente el tiempo de cómputo. La cantidad de bloques que poseen los modelos generan un mayor impacto en el tiempo de cómputo a diferencia del número de simulaciones.

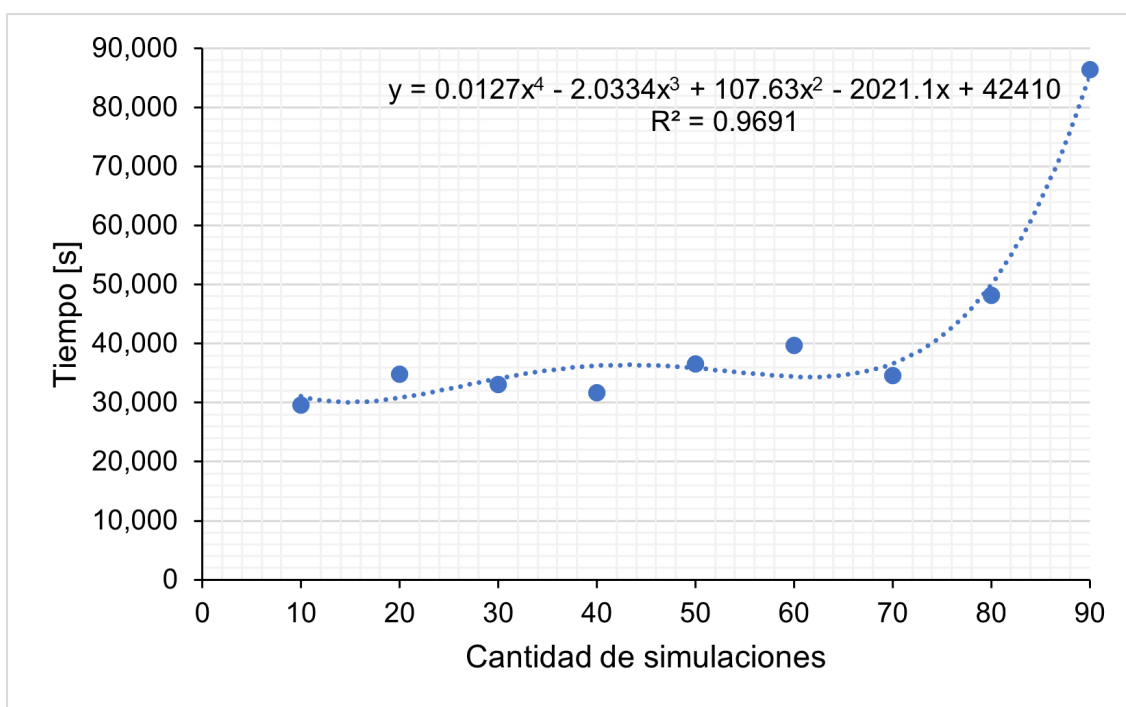


Figura 35: Variación del tiempo de cómputo respecto a la cantidad de simulaciones, caso de estudio II

6. Análisis y Discusión

En esta sección del trabajo se establece el análisis asociado a tres factores que se deben considerar dentro de la generación del pit rodilla y el impacto que genera en las decisiones de planificación minera a largo plazo.

6.1. Distancia entre el pit ideal y pit rodilla

Para abarcar este punto se torna necesario identificar los aspectos esenciales al momento de aplicar la metodología MMD. El modelo de optimización considera ciertos puntos cruciales para aplicar la metodología propuesta:

1. A partir del conjunto de realizaciones se determina el valor medio que toma el bloque en todas las simulaciones identificando aquellos bloques que forman parte del pit final,
2. posteriormente, se determina el valor máximo esperado el cual se encuentra libre de riesgo, es decir, se fija la variable X a un riesgo 0 y se determina la variable Y asociado al valor máximo que puede tener el pit respecto al conjunto de simulaciones,
3. considerando la relación valor esperado y riesgo asociado a las simulaciones de leyes, sumado a que la metodología propuesta basa su teoría en la distancia mínima absoluta entre dos puntos, es necesario generar variables auxiliares que permitan mantener la linealidad del problema y encontrar la solución, dado que una función de valor absoluto vuelve el PPL en un modelo no lineal.
4. por otro lado, se deben establecer restricciones que debe seguir el modelo para determinar el pit rodilla; minimizar el riesgo asociado a la incertidumbre, esta restricción es la que permite al modelo obtener una solución óptima, estableciendo que el pit rodilla debe pertenecer a la frontera de Pareto y además, permite buscar la solución a lo largo de esta frontera.

6.2. Análisis de estrés: impacto del número de bloques y el número de escenarios en la metodología propuesta

Como se menciona en el punto anterior, el pit rodilla es una solución que viaja a lo largo de la frontera de Pareto, por ello, llega un punto en el cual el modelo se tiende a estresar, este punto, si se compara con la frontera, generalmente se encuentra asociado

con ponderadores del riesgo cercanos a 1, ubicación espacial en la cual tiende a estar ubicado el pit rodilla.

Esta situación implica que el modelo se estresa según la cantidad de simulaciones que posea no así respecto a la cantidad de bloques. A pesar de esto, el modelo no mostró el comportamiento esperado, ya que se esperaba que al poseer una mayor cantidad de realizaciones, el tiempo de cómputo fuera mayor, sin embargo, el modelo presentó un comportamiento polinomial presentando fluctuaciones al incrementar la cantidad de realizaciones y no un comportamiento lineal creciente esperado.

También fue considerado un análisis asociado a la cantidad de bloques que posee el modelo, el cual mostró un crecimiento lineal, sin embargo, al ser aplicado en modelos de bloques mayores a 600.000 bloques el tiempo de cómputo aumentó exponencialmente, transformándose en un proceso que toma días.

6.3. Comparación de la metodología propuesta con otros enfoques

En esta sección se generará la comparación a partir de tres escenarios:

1. Enfoque tradicional: Como se observa en el capítulo anterior, un enfoque tradicional representa una solución subóptima del pit final, la cual tiende a entregar reservas de menor cantidad y un valor esperado inferior al obtenido tras aplicar la metodología MMD. Esto se asocia a la incertidumbre que no considera la metodología convencional. Por otro lado, un enfoque tradicional posee un mayor riesgo asociado que impacta en el proyecto y genera discrepancias entre lo planificado y lo real, alterando los procesos aguas abajo de la planificación.
2. Enfoques heurísticos: si bien, este tipo de metodología permite obtener resultados cercanos al óptimo en tiempos de cómputos menores, posee y requiere de interacción e interpretaciones de un tomador de decisiones que forme parte del proceso de selección del pit a partir de sus criterios y preferencias que se basan en la experiencia que el experto posea. Por otro lado, este tipo de enfoque no ha sido implementado hasta el momento en metodologías a priori, siendo implementadas en modelos progresivos.
3. Enfoques estocásticos: en este punto nos centraremos en la discusión asociada a dos metodologías utilizadas:
 - Modelo estocástico de Marcotte y Caron (2013), esta metodología permite es-

tablecer el valor máximo esperado, no obstante, se transforma en el punto más lejano del pit ideal, dado que para obtener el mayor valor esperado se requiere asumir el mayor riesgo asociado, transformando esta solución en una solución que no es preferente por el tomador de decisiones. Y tal como se ha considerado en este trabajo, nos permite identificar y guiar el estudio más no considerar como solución.

- Modelo multiobjetivo de Jelvez *et al.* (2021), al igual que el modelo anterior, la frontera de Pareto se establece como guía para minimizar el riesgo asociado la incertidumbre y obtener el mayor valor esperado. Sin embargo, y como se ha discutido a lo largo de este trabajo, este tipo de metodologías se torna en un problema computacional que entrega al tomador de decisiones múltiples opciones que requieren de criterios y experiencia del profesional. Esta metodología se torna en una metodología a posteriori. El pit rodilla, revoluciona en dos aspectos el modelo multiobjetivo (i) reduce los tiempos de cómputo y (ii) obtiene la solución óptima ubicada en zonas preferenciales del tomador de decisiones.

La implementación de una metodología a priori, permite obtener una solución inicial al problema del pit final que óptima sin considerar criterios que requieran grados de experiencia por parte de un tomador de decisiones, lo cual beneficia el proyecto entregando una solución que cuantifica el riesgo asociado y que no requiere de interpretaciones, más presenta la solución que posee el mayor beneficio esperado al menor riesgo asociado, cuantificado en reservas de mayor tamaño en comparación de otros enfoques no estocásticos.

Finalmente, el pit rodilla permite visualizar la zona preferente por el tomador de decisiones el rango del ponderador en el cual se podría ubicar el pit rodilla. El cual permite disminuir para una metodología multiobjetivo el rango de búsqueda de la frontera, permitiendo de ser necesario entregar nuevas opciones para el tomado de decisiones. Por otro lado, las diferencias que se muestran difieren en menos del 5 % del beneficio esperado.

7. Conclusiones y Trabajo Futuro

7.1. Conclusiones

El problema de la planificación de la producción a cielo abierto específicamente la selección del pit final es vital para el negocio minero y en especial en etapas tempranas de un proyecto, ya que a partir de los resultados obtenidos en esta etapa se decide avanzar o no en etapas posteriores.

En la práctica el uso de una metodología tradicional para definir los límites del pit que considera un único modelo de bloques con variables de leyes estimadas, genera evaluaciones de proyectos poco realistas que no se cumplen operacionalmente y que, además, no maximizan su valor esperado, en especial por la complejidad del depósito mineral y la incertidumbre que este posee.

El problema del pit final ha sido abordado a lo largo de la historia por distintos autores los cuales han generado grandes contribuciones, principalmente han enfocado sus esfuerzos en proponer nuevas metodologías que consideren la incertidumbre geológica obteniendo un abanico de posibles pit final como la Frontera de Pareto, donde la selección del pit final depende de políticas de gestión que relacionen el beneficio, riesgo y los objetivos de la compañía, cuya toma de decisiones recae en un tomador de decisiones y la expertís que este posea. En este trabajo se propone una nueva metodología para determinar el pit final considerando la incertidumbre geológica, mediante la relación entre Valor Esperado y Valor en Riesgo Condicional, enfocado en las posibles soluciones de pit final que suelen ser preferibles por el tomador de decisiones. La metodología propuesta es una metodología a priori para la selección del pit final basado en determinar la distancia mínima entre un punto ideal y un punto que pertenece a la Frontera de Pareto, dicho pit es denominado como Pir Rodilla, del cual se puede concluir:

- El pit rodilla pertenece a la Frontera Eficiente de Pareto, definido como una solución óptima. Se encuentra ubicado en la zona de pretuberancia de la frontera y se asocia a ponderadores del riesgo μ que varían entre 0.6 y 2. El pit rodilla no se ubica en los extremos de la frontera.
- El pit rodilla presenta la menor diferencia en valor respecto al pit ideal en comparación a los puntos que se pueden obtener en la Frontera Eficiente. Además, representa la mayor diferencia entre valor esperado y CVaR.
- El pit rodilla disminuye aproximadamente en un 90 % los tiempos de computos versús generar la frontera completa.

- El pit rodilla reporta una mejor valorización que el pit determinado con una metodología tradicional. Para el caso de estudio el Pit rodilla obtuvo un resultado de 3,200 [MUSD], mientras que el pit tradicional 2,940[MUSD].
- En comparación con la metodología propuesta por (Marcotte y Caron, 2013), el pit rodilla genera una mayor diferencia entre valor esperado y riesgo que el pit Marcotte, siendo que este último obtiene un mayor valor, pero asumiendo un mayor riesgo, sin embargo y dadas las características del pit rodilla, este asume un menor riesgo obteniendo un mayor valor esperado lo cual conlleva a obtener un resultado mejor.

La metodología propuesta en este trabajo basa su teoría en la Distancia Mínima de Manhattan cuya métrica posee composiciones geométricas que permiten calcular de manera sencilla la distancia, por otro lado, esta métrica no necesita ser normalizada para ser utilizada, no obstante, su resultado se ve influenciado por el eje que presente la mayor diferencia de sus vectores.

Una de las principales ventajas de esta metodología es que permite al tomador de decisión enfocar su tiempo en analizar los resultados obtenidos, dada la aplicación apriori en determinar el pit final óptimo (pit rodilla).

El tiempo de cómputo que tome el modelo en determinar el pit rodilla, dependerá de la cantidad de bloques que posea el modelo de bloques, llegando a triplicar los tiempos de cómputo. Caso contrario para el número de simulaciones, dado que presento variaciones del tiempo cada 10 simulaciones menores al 17 %.

La aplicación de modelos estocásticos permite cuantificar y reducir el riesgo, maximizando el valor esperado, sin embargo, entregan una amplia gama de opciones que debe ser analizada y gestionada por el tomador de decisiones, en su mayoría utilizando enfoques posteriori que abarcan criterios de selección que dependen del nivel de expertis que posea. Esta metodología es un primer acercamiento a la selección del pit final considerando incertidumbre utilizando una metodología apriori como es la selección del pit rodilla mediante la Distancia Mínima de Manhattan. Esta metodología permite al inversionista obtener un pit robusto que representa el mejor escenario esperado, permite disminuir sus tiempos de cómputo y cuantificar el riesgo asociado a la incertidumbre de leyes. Además, determinar el pit rodilla es un enfoque que no depende del ponderador del riesgo μ , lo cual le da al modelo la libertad de recorrer todos los puntos de la Frontera Eficiente.

7.2. Trabajo futuro

La investigación y el análisis deben ser desarrollados de manera continua por lo que se torna importante y necesario continuar con el desarrollo de nuevas metodologías que evalúen e incorporen los efectos generados por la incertidumbre. Para ello, se recomienda continuar:

- Evaluar nuevos criterios para seleccionar el pit final, como por ejemplo: el ángulo mínimo que se genera entre un punto y los dos más cercanos. Este ángulo representaría el punto con mayor pretuberancia y ese es asignado como rodilla. Con ello, se soluciona el efecto de la diferencia de los vectores de las variables y el impacto que generan en la selección del pit rodilla.
- Extender el alcances de este modelo, inicialmente considerar variables cualitativas utilizando modelos de bloques con simulaciones plurigaussianas. Además, considerar fuentes de incertidumbre externas a un proyecto como la incertidumbre económica, permitiría entregar un tercer eje.
- Sería interesante comparar esta metodología con enfoques progresivos que consideren los objetivos estratégicos de la compañía. La metodología empleada genera un sesgo frente a este ítem.
- Evaluar los procesos aguas abajo del pit final, generar la selección de pushbacks y el agendamiento directo de bloques y evaluar la operatividad del pit rodilla.
- Analizar el modelo generado con yacimientos que presentes distintas características geométricas, resulta interesante evaluar la forma del pit y como varía la ubicación del pit rodilla en la Frontera Eficiente.

BIBLIOGRAFÍA

- Alarcón, M., Emery, X., y Morales, N. (2015). Using simulation to assess the trade-off between value and reliability in open pit planning. En *Proceedings of the 37th international symposium apcom*.
- Amankwah, H., Larsson, T., y Textorius, B. (2013). Open pit mining with uncertainty: a conditional value at risk approach. En *Optimization theory, decision making, and operations research applications* (pp. 117–139). Springer.
- Arbeláez, L. C. F., y Ceballos, L. E. F. (2005). El valor en riesgo condicional cvar como medida coherente de riesgo. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 4(6), 43–54.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., y Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3), 203–228.
- Asr, E. T., Kakaie, R., Ataei, M., y Mohammadi, M. R. T. (2019). A review of studies on sustainable development in mining life cycle. *Journal of Cleaner Production*, 229, 213–231.
- Bechikh, S., Ben Said, L., y Ghédira, K. (2011). Searching for knee regions of the pareto front using mobile reference points. *Soft Computing*, 15(9), 1807–1823.
- Branke, J., Deb, K., Dierolf, H., y Osswald, M. (2004). Finding knees in multi-objective optimization. En *International conference on parallel problem solving from nature* (pp. 722–731).
- Canessa, G., Moreno, E., y Pagnoncelli, B. K. (2021). The risk-averse ultimate pit problem. *Optimization and Engineering*, 22(4), 2655–2678.
- Charfi, A., Bouhamed, S. A., Bossé, É., Kallel, I. K., Bouchaala, W., Solaiman, B., y Derbel, N. (2020). Possibilistic similarity measures for data science and machine learning applications. *IEEE Access*, 8, 49198–49211.
- Chiu, W.-Y., Yen, G. G., y Juan, T.-K. (2016). Minimum manhattan distance approach to multiple criteria decision making in multiobjective optimization problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 20(6), 972–985.
- Clegg, A. (2005). Risk in project preparation-‘determining the project needs and the effects on the management strategy’. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 105(2), 81–94.
- Dai, S., Bi, L., y Hu, B. (2019). Distance measures between the interval-valued complex fuzzy sets. *Mathematics*, 7(6), 549.
- Darling, P. (2011). *Sme mining engineering handbook* (Vol. 1). SME.

- Das, I. (1999). On characterizing the “knee” of the pareto curve based on normal-boundary intersection. *Structural optimization*, 18(2), 107–115.
- Deb, K., y Gupta, H. (2005). Searching for robust pareto-optimal solutions in multi-objective optimization. En *International conference on evolutionary multi-criterion optimization* (pp. 150–164).
- Deutsch, C. V., Journel, A. G., y cols. (1992). Geostatistical software library and user’s guide. *New York*, 119(147), 578.
- Deutsch, M., González, E., y Williams, M. (2015). Using simulation to quantify. *Mining Engineering*, 67(12), 49–55.
- Dimitrakopoulos, R. (2011). Stochastic optimization for strategic mine planning: a decade of developments. *Journal of Mining Science*, 47(2), 138–150.
- Dimitrakopoulos, R. (2018). Stochastic mine planning—methods, examples and value in an uncertain world. , 101–115.
- Dimitrakopoulos, R., Farrelly, C., y Godoy, M. (2002). Moving forward from traditional optimization: grade uncertainty and risk effects in open-pit design. *Mining Technology*, 111(1), 82–88.
- Dimitrakopoulos, R., Martinez, L., y Ramazan, S. (2007). A maximum upside/minimum downside approach to the traditional optimization of open pit mine design. *Journal of mining science*, 43(1), 73–82.
- Dimitrakopoulos, R., y Ramazan, S. (2004). Uncertainty based production scheduling in open pit mining. *SME transactions*, 316.
- Emery, X. (2012). Simulación estocástica y geoestadística no lineal. *Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería de Minas, Santiago*.
- Emery, X., y Séguret, S. A. (2020). *Geostatistics for the mining industry: Applications to porphyry copper deposits*. CRC Press.
- Espinoza, D., Lagos, G., Moreno, E., y Vielma, J. (2013). Risk averse approaches in open-pit production planning under ore grade uncertainty: an ultimate pit study. En *Proceedings of the 36th international symposium on the applications of computers and operations research in the mineral industry (apcom)* (pp. 492–501).
- Greche, L., Jazouli, M., Es-Sbai, N., Majda, A., y Zarghili, A. (2017). Comparison between euclidean and manhattan distance measure for facial expressions classification. En *2017 international conference on wireless technologies, embedded and intelligent systems (wits)* (pp. 1–4).
- Hartman, H. L., Britton, S. G., Mutmansky, J. M., Gentry, D. W., Schlitt, W. J., Karmis, M., y Singh, M. M. (1992). *Sme mining engineering handbook* (Vol. 2). Society for

Mining, Metallurgy, and Exploration Denver.

- Hustrulid, W. A., Kuchta, M., y Martin, R. K. (2013). *Open pit mine planning and design, two volume set & cd-rom pack*. CRC Press.
- Jelvez, E., Morales, N., y Ortiz, J. M. (2021). Stochastic final pit limits: An efficient frontier analysis under geological uncertainty in the open-pit mining industry. *Mathematics*, 10(1), 100.
- Johnson, T. B. (1968). *Optimum open pit mine production scheduling*. University of California, Berkeley.
- Journel, A. G., y Huijbregts, C. J. (1976). *Mining geostatistics*.
- Kamel, A., Elwageeh, M., Bonduà, S., y Elkarmoty, M. (2023). Evaluation of mining projects subjected to economic uncertainties using the monte carlo simulation and the binomial tree method: Case study in a phosphate mine in egypt. *Resources Policy*, 80, 103266.
- Li, W., Zhang, G., Zhang, T., y Huang, S. (2020). Knee point-guided multiobjective optimization algorithm for microgrid dynamic energy management. *Complexity*, 2020.
- Madani, N., y Emery, X. (2015). Simulation of geo-domains accounting for chronology and contact relationships: application to the río blanco copper deposit. *Stochastic environmental research and risk assessment*, 29(8), 2173–2191.
- Malkauthekar, M. (2013). Analysis of euclidean distance and manhattan distance measure in face recognition. En *Third international conference on computational intelligence and information technology (ciit 2013)* (pp. 503–507).
- Marcotte, D., y Caron, J. (2013). Ultimate open pit stochastic optimization. *Computers & Geosciences*, 51, 238–246.
- Martinez, L. (2009). Why accounting for uncertainty and risk can improve final decision-making in strategic open pit mine evaluation. En *Project evaluation conference* (p. 113).
- Mayer, Z., y Kazakidis, V. (2007). Decision making in flexible mine production system design using real options. *Journal of construction engineering and management*, 133(2), 169–180.
- Mery, N., Emery, X., Cáceres, A., Ribeiro, D., y Cunha, E. (2017). Geostatistical modeling of the geological uncertainty in an iron ore deposit. *Ore Geology Reviews*, 88, 336–351.
- Mohibullah, M., Hossain, M. Z., y Hasan, M. (2015). Comparison of euclidean distance function and manhattan distance function using k-medoids. *International Journal of Computer Science and Information Security*, 13(10), 61.

- Mun, J. (2006). *Modeling risk: Applying monte carlo simulation, real options analysis, forecasting, and optimization techniques* (Vol. 347). John Wiley & Sons.
- Mwangi, A., Jianhua, Z., Gang, H., Kasomo, R., y Innocent, M. (2020). Ultimate pit limit optimization methods in open pit mines: A review. *Journal of Mining Science*, 56, 588–602.
- Nabavi, Z., Mousavi, A., Mirzehi Kalate Kazemi, M., y Monjezi, M. (2024). Incorporating grade uncertainty into open-pit long-term production planning using loss and profit functions. *International Journal of Mining and Geo-Engineering*, 58(1), 59–67.
- Newman, A. M., Rubio, E., Caro, R., Weintraub, A., y Eurek, K. (2010). A review of operations research in mine planning. *Interfaces*, 40(3), 222–245.
- Nicholas, D. E. (1993). Selection procedure. *Mining Engineering Handbook, 2090*, 2105.
- Osanloo, M., Gholamnejad, J., y Karimi, B. (2008). Long-term open pit mine production planning: a review of models and algorithms. *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, 22(1), 3–35.
- Pandit, S., Gupta, S., y cols. (2011). A comparative study on distance measuring approaches for clustering. *International journal of research in computer science*, 2(1), 29–31.
- Petchrompo, S., Wannakrairot, A., y Parlikad, A. K. (2022). Pruning pareto optimal solutions for multi-objective portfolio asset management. *European Journal of Operational Research*, 297(1), 203–220.
- Quelopana, A., Órdenes, J., Araya, R., y Navarra, A. (2023). Geometallurgical detailing of plant operation within open-pit strategic mine planning. *Processes*, 11(2), 381.
- Rachmawati, L., y Srinivasan, D. (2009). Multiobjective evolutionary algorithm with controllable focus on the knees of the pareto front. En (Vol. 13, pp. 810–824). IEEE.
- Rezaei, M., Emami Niri, M., Asghari, O., Talesh Hosseini, S., y Emery, X. (2023). Seismic data integration workflow in pluri-gaussian simulation: Application to a heterogeneous carbonate reservoir in southwestern iran. *Natural Resources Research*, 32(3), 1147–1175.
- Runge, I. C. (1998). *Mining economics and strategy*. SME.
- Sebacher, B., Hanea, R., y Stordal, A. S. (2017). An adaptive pluri-gaussian simulation model for geological uncertainty quantification. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 158, 494–508.
- Sharma, S. K., y Kumar, S. (2016). Comparative analysis of manhattan and euclidean distance metrics using a* algorithm. *J. Res. Eng. Appl. Sci*, 1(4), 196–198.

- Van Brunt, B. H., y Rossi, M. E. (1999). Mine planning under uncertainty constraints. , 22–25.
- Van Veldhuizen, D. A., y Lamont, G. B. (2000). Multiobjective evolutionary algorithms: Analyzing the state-of-the-art. *Evolutionary computation*, 8(2), 125–147.
- Venegas-Martínez, F., Medina Hurtado, S., Jaramillo, J. A., y Ramírez Atehortúa, F. H. (2008). *Riesgos financieros y económicos*. Universidad de Medellín.
- Vielma, J. P., Espinoza, D., y Moreno, E. (2009). Risk control in ultimate pits using conditional simulations. *Proceedings of the APCOM*, 107–114.
- Viera, M. A. D., y González, R. C. (2002). Geoestadística aplicada. *Instituto de Geofísica, UNAM-Instituto de Geofísica y Astronomía, CITMA. Cuba*.
- Whittle, D., y Bozorgebrahimi, A. (2004). Hybrid pits-linking conditional simulation and lerchs-grossmann through set theory. *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning*, 14(November), 22–24.
- Wilson, B., Acorn, T., y Boisvert, J. (2019). Pit optimization on clustered realizations: Identifying functional scenarios. *Mining, Metallurgy & Exploration*, 36(6), 1221–1234.
- Yu, G., Jin, Y., y Olhofer, M. (2019). An a priori knee identification multi-objective evolutionary algorithm based on α -dominance. En *Proceedings of the genetic and evolutionary computation conference companion* (pp. 241–242).
- Zhao, Y. (1992). *Algorithms for optimum design and planning of open-pit mines*. The University of Arizona.

ANEXOS

Anexo A. Medidas de distancia

La métrica es una función de distancia que mide la diferencia entre dos objetos ubicados en el conjunto de puntos pertenecientes a un espacio métrico (Dai *et al.*, 2019). Las medidas de distancia determinan la longitud entre dos nodos. Si a y b son números reales y conocidos, la expresión $|a-b|$ representa la distancia que separa a de b . Las medidas de distancia deben cumplir con propiedades de subconjuntos (convexos), sucesiones (convergentes) y funciones (continuas) (Charfi *et al.*, 2020).

- No negatividad.
- Simetría.
- Límite superior.
- Límite inferior.

Pandit *et al.* (2011) definen 7 medidas de distancia, en su trabajo generan una comparación de estas y su aplicación. En este trabajo se establece una comparación entre seis de estas medidas.

Distancia Euclidiana: medida que refiere a la distancia entre dos puntos trazando una línea recta entre ellos.

$$D(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - X_y)^2} \quad (\text{A.1})$$

Distancia de Manhattan: distancia entre dos puntos medida a lo largo de sus ejes, formando un ángulo recto.

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^n |X_i - y_i| \quad (\text{A.2})$$

Índice de Coseno: es una medida de similitud entre dos vectores al encontrar el ángulo entre ellos.

$$D(x, y) = \cos(\theta) = \frac{x * y}{\|x\| \|y\|} \quad (\text{A.3})$$

Índice de Jaccard: valor estadístico que mide la similitud de conjuntos de muestras.

$$D(x, y) = 1 - \frac{|x \cap y|}{|y \cup x|} \quad (\text{A.4})$$

Vector Bits: medida que otorga valores de 0 y 1 a los vectores pertenecientes a una matriz. Si el número de la matriz es mayor respecto a su dimensión otorga un valor de 1.

Distancia de Haming: medida que determina un valor de coincidencia para dos cadenas de datos de igual longitud.

La Tabla A.1 muestra una comparación de las principales medidas de distancia considerando sus ventajas y desventajas, además, este análisis de basa en los trabajos realizados por Mohibullah *et al.* (2015); Dai *et al.* (2019); Charfi *et al.* (2020); Sharma y Kumar (2016) .

Tabla A.1: Cuadro comparativo medidas de distancia

Medida	Área de aplicación	Ventajas	Desventajas
Euclidiana	Análisis biológicos Salud Datos sectorizados en intervalos	Fácil de implementar Efectiva para conjuntos de datos pequeños	Los resultados están influenciados por las variables qu tienen mayor valor, por lo que se debe normalizar sus ejes
Manhattan	Circuitos integrados	Interpretaciones geométricas y visuales Reporta resultados más rápidos	No funciona con datos de imagen y clasificación de documentos
Índice de Coseno	Textos Mineros	Maneja variables continuas y categóricas	Difícil aplicación en datos etiquetados
Índice Jaccard	Clasificación de documentos	Maneja variables continuas y categóricas	Difícil aplicación en datos etiquetados
Vector Bits	Detección de errores	Maneja variables continuas y categóricas	Los resultados están influenciados por las variables qu tienen mayor valor, por lo que se debe normalizar sus ejes
Distancia de Haming	Detección de errores	Maneja variables continuas y categóricas	Los resultados están influenciados por las variables qu tienen mayor valor, por lo que se debe normalizar sus ejes

Anexo B. Estadística descriptiva Caso sintético

En esta sección se muestra el análisis estadístico descriptivo aplicado a las variables de leyes cobre estimado y la obtenida mediante los escenarios.

La Tabla B.1 muestra la estadística básica descriptiva de la variable ley estimada y el promedio de las simulaciones asociados al rango de error (mínimos y máximo). Se observa que la ley máxima varía entre 1.13% y 1.75%, no obstante, el 95% de las leyes analizadas no superan una ley de 0.44%. El 5% de los datos sobre este umbral no son modificados dado que: leyes de 1.7% son valores reales que puede tomar la variable cobre y, además, el 5% de la muestra no presenta una sobrestimación de las leyes.

Tabla B.1: Estadística descriptiva básica

	Ley estimada	Ley promedio	Ley mínima	Ley máxima
N° datos	31,872	31,872	31,872	31,872
Mínimo	0.00	0.00	0.00	0.00
Máximo	1.21	1.46	1.13	1.74
Media	0.12	0.12	0.11	0.13
Varianza	0.02	0.03	0.02	0.03
P5	0.00	0.00	0.00	0.00
P25	0.00	0.00	0.00	0.00
P50	0.00	0.00	0.00	0.00
P75	0.24	0.24	0.23	0.26
P95	0.40	0.42	0.40	0.44

En la Figura B.1 se observa la frecuencia de la ley media en los distintos escenarios simulados, donde existe una mayor probabilidad de tener escenarios con leyes promedio a 0.118%. No obstante, la media y la varianza es considerado un estadístico no robusto ya que es un valor que se ve afectado por la existencia de valores extremos.

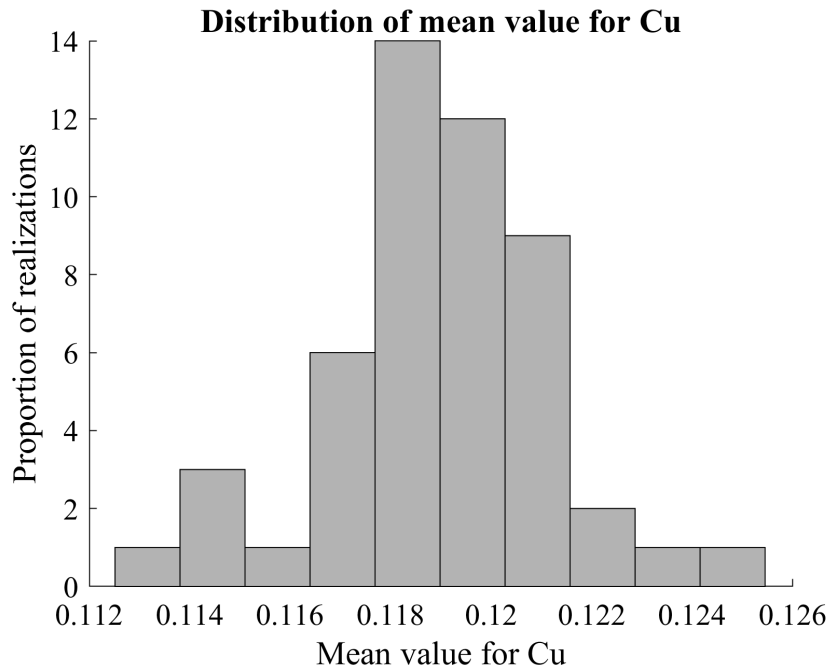


Figura B.1: Gráficos boxplot para cada escenario simulado.

La Figura B.2 muestra la distribución global de los 50 escenarios simulados. El 75% de los datos posee una ley igual o menor a aproximadamente 0.25%. No se observan valores extremos.

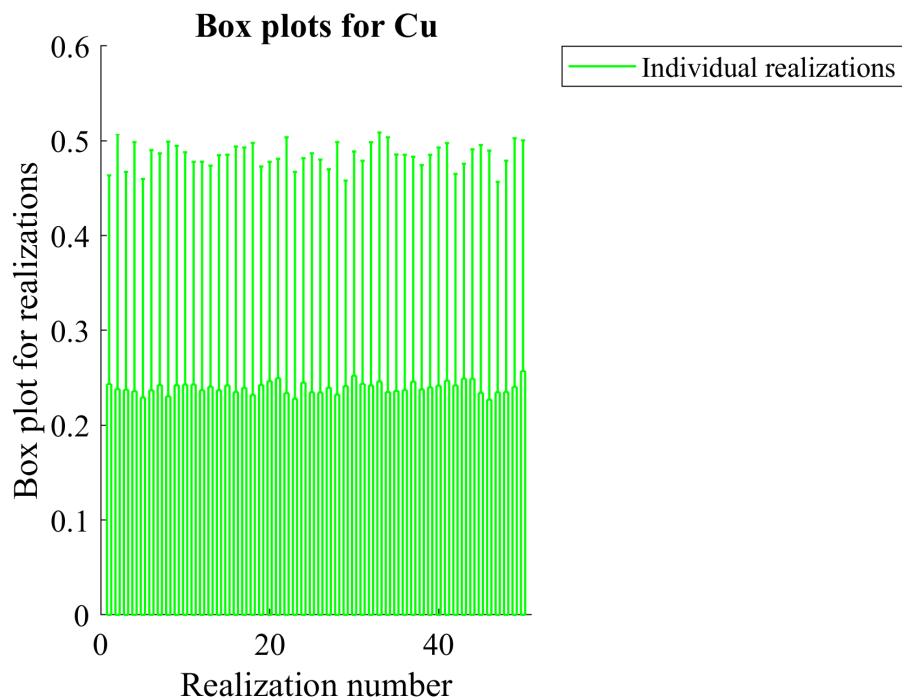


Figura B.2: Gráficos boxplot para cada escenario simulado.

La Figura B.3 muestra la curva tonelaje versus ley comparando la ley media obtenida para la variable ley estimada por kriging y el promedio de las leyes simuladas. Esta última muestra además, el rango de leyes promedio (mínimos y máximos).

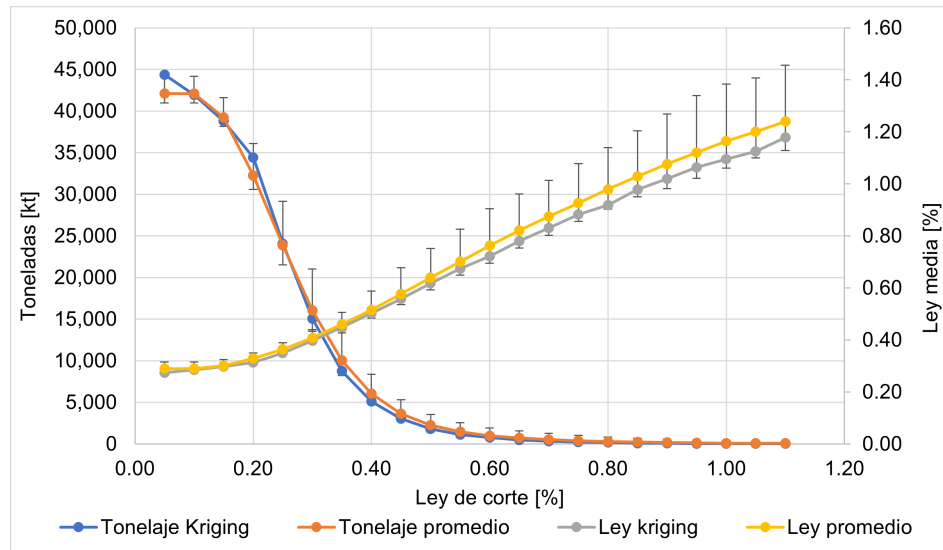


Figura B.3: Comparación curva tonelaje versus ley, asociados a ley estimada por kriging y ley promedio de simulaciones

Anexo C. Estadística descriptiva Caso estudio

En esta sección se muestra el análisis estadístico descriptivo aplicado a las variables ley de Cu (estimada mediante kriging), ley promedio de las simulaciones, ley mínima del promedio de simulaciones y ley máxima del promedio de simulaciones y leyes simuladas.

La Tabla C.1 describe la estadística descriptiva de las variables ley de cobre (ley estimada mediante kriging) y el promedio de las leyes simuladas asociadas al rango de variación (mínimo y máximo). Se obtiene a partir del promedio de leyes simuladas una ley máxima que varía entre 35.08 % y 35.15 % lo cual representa leyes poco realistas y extremas para un yacimiento porfido cuprífero, sin embargo, el 95 % de los datos posee leyes menores e igual a leyes que varían entre 0.76 % y 0.79 %. Dado que los valores extremos representan el 5 % de los datos, no se consideran valores que influyan la sobreestimación de las leyes.

Tabla C.1: Estadística descriptiva básica

	Ley Cu	Ley promedio	Ley mínima	Ley máxima
N° datos	324,159	324,159	324,159	324,159
Mínimo	0.00	0.00	0.00	0.00
Máximo	7.79	34.99	35.08	35.15
Media	0.15	0.15	0.15	0.16
Varianza	0.11	0.38	0.37	0.49
P5	0.00	0.00	0.00	0.00
P25	0.00	0.00	0.00	0.00
P50	0.00	0.00	0.00	0.00
P75	0.20	0.11	0.11	0.12
P95	0.75	0.76	0.76	0.79

En la Figura C.1 se observa la frecuencia de la ley media de los escenarios simulados. Se visualiza que existe una mayor probabilidad de obtener escenarios con leyes medias que varían entre 0.145% y 0.155%. Sin embargo, esta medida estadística tiende a ser afectado por valores extremos como los valores máximos presentados en la Tabla C.1.

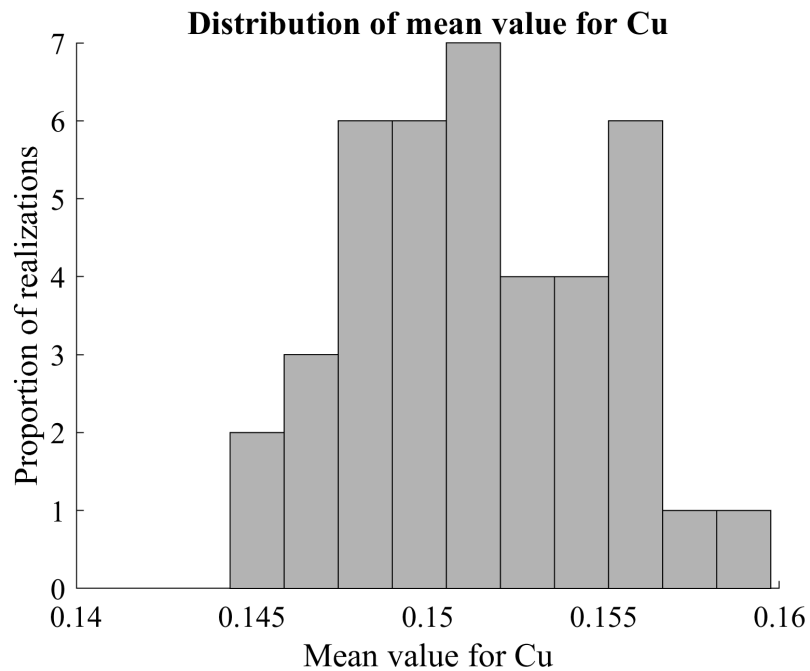


Figura C.1: Gráficos boxplot para cada escenario simulado.

La Figura C.2 muestra la distribución global de los 40 escenarios simulados. El 75 % de los datos posee una ley menor igual a 0.2 %. No se observan valores extremos.

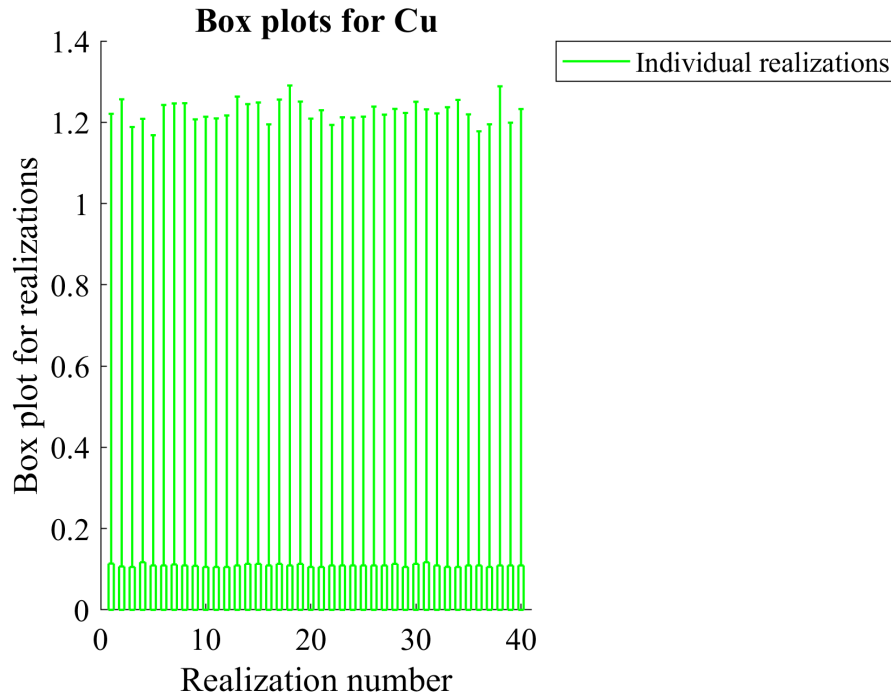


Figura C.2: Gráficos boxplot para cada escenario simulado.

Anexo D. Demostración de optimalidad

En este Anexo buscamos establecer que la solución de (PPO) es solución de (P_μ) , es decir, que la solución del modelo que minimiza la distancia a un punto ideal, a su vez, pertenece a la frontera eficiente. Seguiremos la notación y lenguaje dados en las Secciones 3.1.2 y 3.1.3. Llamemos u^* a la solución que minimiza la distancia de Manhattan del conjunto de objetivos X a un punto ideal X^* , es decir, $u^* = \operatorname{argmin}_u d_m(X(u), X^*)$. Para demostrar que $X(u^*)$ pertenece a la frontera eficiente, supongamos por contradicción que no lo hace. Esto significaría que existe al menos una solución u' que en la frontera eficiente domina a u^* , es decir, $X(u') \preceq X(u^*)$ y al menos un componente de $X(u')$ es menor que el correspondiente componente de $X(u^*)$. Sin embargo, dado que u^* minimiza la distancia a X^* , esto implicaría que existe una solución u' en la frontera eficiente más cercana al punto ideal, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, podemos concluir que la solución u^* que minimiza la distancia a un punto ideal también pertenece a la frontera eficiente.