UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Metodología para la asignación de espacio óptimo en góndolas

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER
EN GESTION DE OPERACIONES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

TADASHI ALBERTO TAKAOKA CAQUEO

PROFESOR GUIA:
SR. RENÉ CALDENTEY

PROFESOR CO-GUÍA:
SR. LUIS ABURTO
SR. RICARDO MONTOYA

PROFESOR INVITADO:
SR. FABIÁN MEDEL

SANTIAGO DE CHILE
JULIO 2010

1 **Índice**

2 Resumen ejecutivo

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar una metodología para la asignación óptima de espacio en góndolas de las tiendas de Pronto Copec. El proyecto está enfocado en crear una herramienta de apoyo a la decisión de qué productos colocar en las góndolas, debido a que el gran número de categorías y SKU's disponibles ha ido complejizando la decisión de qué productos utilizar, y qué espacio del total disponible asignarles.

Para llevar a cabo esta tarea, se realiza una investigación acerca de las herramientas actuales que existen en el área. Analizando las características del problema y de los datos disponibles, se construye un algoritmo basado en el modelo de Corstjean y Doyle, donde se maximiza la utilidad percibida por la tienda en la categoría, y se trabaja con un modelo de demanda creciente, con retornos decrecientes. Se trabaja primero de manera teórica, resolviendo la optimización para el caso general, posteriormente para el caso con restricción de asignación mínima de espacio a ciertos productos, y finalmente para el caso donde el producto recibe un bono por posición asignada. Posterior a ello, se aplicó el algoritmo al caso real de la tienda Pronto Ciudad La Florida, para la categoría snacks, realizando optimizaciones para el caso general, el caso con bono por posición, y optimizando grupos de productos para decidir qué productos eliminar del mix de opciones a colocar en las góndolas. Finalmente se realizó un análisis de sensibilidad de la solución, tanto para la demanda como para la función objetivo.

Entre los resultados destacados está el hecho de que los productos con alto nivel de venta tienen un mayor aporte a la función objetivo que los productos que tienen alto margen por unidad. Además, se observa que la lógica detrás de la decisión de colocar un producto en la góndola es el desempeño de este producto por espacio utilizado. Por otra parte, el factor que más afecta al valor de la función objetivo es la elasticidad espacio, disminuyendo el margen total alcanzado cuando aumenta la elasticidad.

Se recomienda a futuro obtener datos reales de factores sensibles como la elasticidad espacio o el desempeño de los productos por espacio utilizado, ya que conocer bien estos valores de forma empírica permitirá tener resultados más confiables y aplicables a la realidad, mejorando los resultados de la investigación en el retail.

3 Introducción

La industria del Retail es actualmente un área de amplio atractivo dentro de la economía chilena. Prueba de esto es la fusión que se llevó a cabo entre D&S y el gigante del retail mundial, WalMart, lo que demuestra la confianza y atractivo que ha ido generando la industria nacional en Latinoamérica y el resto del mundo.

Se ha visto una gran evolución desde los primeros almacenes de barrio, hasta los grandes supermercados y tiendas de marca. Esto ha generado un mayor nivel de cantidad y diversidad de productos, que implica un mayor número de variables a tener en cuenta al momento de decidir qué surtido de productos se ofrecerá.

En Chile, el liderazgo en retail ha estado dado por conglomerados como Cencosud, Falabella y Ripley. Estas han tenido un crecimiento sostenido, como se puede ver en las evoluciones de ingresos:

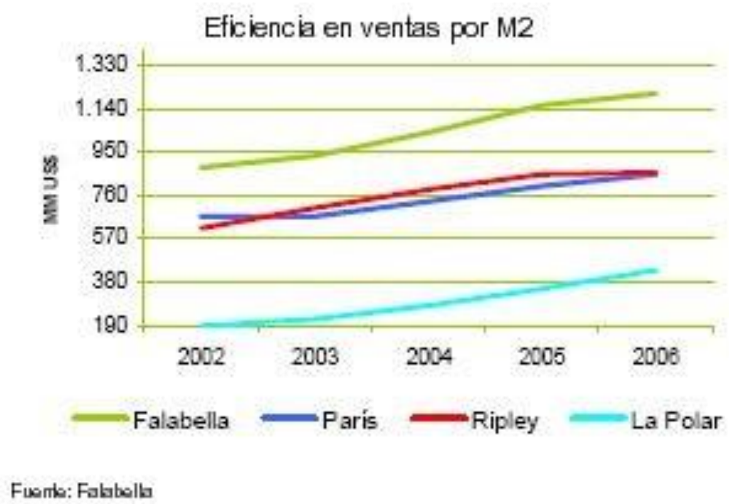
Evolución ingresos Falabella 2000-2006

Evolución ingresos Cencosud 2002-2006

Evolución ingresos Ripley 2004-2006

Participación de mercado Conglomerados del Retail

Pero junto con este crecimiento, se ha provocado que la selección del mix de productos que se ofrece y muestra en las góndolas haya aumentando su nivel de complejidad, provocado que el manejo de estas tiendas ya no sea una labor trivial. Para responder a esta situación, los retailers han utilizado softwares de gestión de inventario, con métodos que permiten prever y adaptarse a los cambios del medio y las necesidades de los clientes, y tomar con mayor facilidad la decisión de surtido y variedad de productos. En este sentido, se ha vuelto estrictamente necesario el lograr un desempeño óptimo en las ventas, y esto va directamente de la mano del desempeño de las góndolas y salas de venta de las tiendas. A continuación se muestra un gráfico con el desempeño en ventas por M^2 de las distintas empresas del retail:



Eficiencias en ventas por M^2 Conglomerados del Retail

Dentro del mundo del retail, se tienen las tiendas de conveniencia, las cuales nacen durante la década de los 70. Se define como tienda de conveniencia a los establecimientos con menos de 500 m^2, con un horario comercial superior a las 18 horas y un periodo de apertura de 365 días del año. Tienen un amplio surtido de productos, centrado en bebidas, alimentación, bazar, etc. A cambio de la amplitud de horarios y la variedad de productos, sus precios suelen ser ligeramente superiores a los de los supermercados. Generalmente, se ubican en el centro de las ciudades, aunque también se engloban bajo esta denominación otros locales como, por ejemplo: los situados junto a estaciones de servicio o las tiendas situadas en los aeropuertos.

Uno de los principales exponentes mundiales de este tipo de tiendas es Seven-7, cadena que nace en Texas, Estados Unidos, y que es desde Marzo del 2007 la cadena de tiendas más grande del planeta en todas las categorías, con más de 36.500 locales repartidos en 18 países. Anualmente, las tiendas de 7-eleven generan ventas por US$ 36 billones en conjunto. Parte del secreto del éxito de esta compañía está en la fuerte capacitación que entrega a sus trabajadores, un sistema de franquicias que permite replicar fácilmente el modelo de la tienda, y un constante estudio del inventario que manejan y del comportamiento del cliente.

Dentro de Chile, se encuentran principalmente las tiendas de conveniencia asociadas a gasolineras, como son Pronto y Punto Copec, Select y Express Market de Shell, Va&Ven de Terpel, y Espaciol de Petrobras, así como también asociadas a farmacias, como es el caso de Salcobrand y su cadena Ok Market, o especialmente dedicadas a este rubro, como es el caso de las tiendas de conveniencia Big John. Estas tiendas nacen como un gancho para atraer clientes a las estaciones de servicio, y así aumentar el número de personas que cargan combustible, pero con el paso del tiempo se han vuelto negocios atractivos por sí solos.

Pronto Copec se ha perfilado como una de las empresas más grande dentro de este mercado, con más de 45 locales Punto Copec y 70 tiendas Pronto Copec distribuidos desde Arica a Punta Arenas. Durante el 2007, vendieron más de 141 MM de unidades, lo que significó más de $30 MMM en ventas.

Las primeras tiendas de conveniencia Copec comenzaron en la década de los 70 con el objetivo de satisfacer las necesidades de las personas en la carretera. Bajo el nombre de RutaCentros, estas tiendas tenían entre 160 y 250 m2 de superficie construida, contaban con pocos productos como confites, cigarrillos y servicios higiénicos. En 1985 Copec instauró el primer Minimarket en las estaciones de servicio de ciudad en Manuel Montt esquina Alférez Real. En 1992 nacieron los Pronto Copec, reemplazando a los RutaCentros, ya que se detectó la necesidad por parte de los clientes de soluciones más sofisticadas de baños y una oferta de comida rápida asociada a la higiene, rapidez y calidad. En 1998, se comprobó la existencia de estas mismas necesidades por parte de los clientes en la ciudad, por lo que Copec asoció con especialistas en el negocio, creando dos filiales Arco y Prime. Arco nació con una asociación con la empresa española Areas, se dedicó a manejar los locales de carretera. Por otra parte Prime nació de una asociación con la empresa norteamericana Strasburger, se dedicó a manejar los locales de ciudad. En ambos casos las empresas asociadas a Copec poseían un 30% y Copec poseía un 70%. La administración era compartida, de manera de mantener una consistencia en la entrega de productos y servicios. En el año 2004 ambas empresas se fusionaron, creando Administradora de Ventas al Detalle Ltda., conocida también como ArcoPrime. Esta empresa actualmente administra los locales

Pronto tanto en ciudad como en carretera. Además, para asegurar productos de la máxima calidad en sus puntos de venta, esta empresa posee una fábrica de alimentos frescos, Arco Alimentos. Esta empresa desarrolla productos bajo las marcas Fres&Co y Be Ready. Durante el periodo 2005, se inauguró un nuevo formato de tiendas de alimentación fuera de las estaciones de servicio Copec, bajo la marca Fres&Co, ubicados en centros de alta concentración de oficinas.

Actualmente Pronto Copec cuenta con cinco formatos de tiendas: Puente Restaurante, Pronto Barra, Pronto Kiosko, Pronto Ciudad y Punto. De los 618 puntos de venta con que cuenta Copec, el 27% cuenta con tiendas de conveniencia, con las marcas Pronto y Punto.

Los formatos de estos establecimientos van entre los 60 y los 1350 m2 y son los siguientes:

Pronto Restaurante: Se trata de un establecimiento de 1350 m^2 situado en la Autopista del Sol, ofrece una gran variedad de comida, desde platos hasta sandwicheria, helados, comida para llevar, tienda, baños zona de niños teléfonos públicos y cajeros automáticos abre las 24 horas los 365 días del año.

Pronto Barra: Son locales ubicados en todo Chile con una superficie de 700 m^2, ofrece platos, sándwiches, zona de niños, baños, teléfonos públicos y cajeros automáticos. Abre las 24 horas los 365 días del año.

Pronto Kiosco: Tienen menor tamaño (60 m^2) se ubican en todo Chile y ofrecen completos, sándwiches, helados, café, teléfonos públicos, cajeros automáticos, tiendas y baños. Esta abierto las 24 horas los 365 días del año.

Pronto Ciudad: Están en el rango de 60 a 330 m^2 y ofrecen una gran variedad de productos las 24 horas, cuentan con los mismos servicios de los Prontos Barra a lo que suman servicios como fax y fotocopia, música, pan fresco y otros, permanecen abiertos los 365 días del año.

Punto: Existen 105 y no son administrados por ArcoPrime sino que por los concesionarios de las estaciones de servicio, tienen entre 9 y 12 m^2 y responden a necesidades de paso y de compra de alimentos en forma impulsiva, su oferta esta dada por completos, pizzas, café de grano, galletas y snacks y bebidas. Se ubican donde la baja afluencia de público no justifica la presencia de un Pronto.

El interés de esta tesis está centrado en el formato Pronto Ciudad, trabajando en el desarrollo de una nueva herramienta que permita facilitar la decisión de qué surtido se mostrará a los clientes en las góndolas, buscando un mix óptimo, y definiendo qué productos están teniendo un buen desempeño, y cuales son los que menos aportan.

4 Objetivos

Objetivo principal:

Definir una metodología que apoye la toma de decisiones acerca de qué productos colocar en góndolas y qué cantidad del espacio disponible asignarles

Objetivos secundarios:

- Definir el porcentaje de espacio a asignar a cada producto a colocar en góndolas, a través de una heurística.
- Estimar parámetros y variables relevantes de este tipo de problemas, pues estas no sólo servirán para determinar una solución a este problema, sino que además darán luces acerca de qué es lo que realmente importa observar al momento de tomar decisiones, además de facilitar el inicio de futuras mejoras y perfeccionamiento del sistema.
- Evaluar distintos escenarios de ubicación de productos y analizar los resultados desde un punto de vista teórico.
- Entregar una recomendación acerca de qué productos deben ser eliminados de la matriz de productos.
- Contrastar la solución actual de Pronto Copec para este problema con el modelo propuesto, y generar recomendaciones de acuerdo a los resultados.

5 Realidad actual y motivación

La industria del retail en Chile ha ido dando los primeros pasos en la utilización de nuevas herramientas de gestión para mejorar la competitividad dentro del rubro. Casos a través del mundo sobran acerca de la efectividad de estas herramientas: Zara, la empresa española de ropa con más de mil tiendas propias, ha producido una revolución con su modelo logístico y manejo de inventario. WalMart, el gigante del retail estadounidense se ha posicionado como una de las empresas más fuertes y exitosas en el mercado mundial, en gran parte a su política de manejo óptimo en la cadena de valor, y el exitoso relanzamiento de 7 Eleven, la cadena de tiendas de conveniencia más grande del mundo, con más de 30.000 tiendas alrededor del mundo, y que ha dedicado grandes esfuerzos en conocer a sus clientes y estudiar sus comportamientos, para posteriormente poder influir en ellos y sus modelos de compra, así como en el ofrecimiento de productos especialmente adaptados a sus necesidades. Todos ellos son casos de modelos de negocios que sorprendieron por ser de éxito arrollador.

Particularmente, ArcoPrime ha querido dar un paso adelante en el tema, y ha formado una alianza con el Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile y con Fondef para generar nuevas herramientas para el manejo de las categorías en sus distintas tiendas. Este ha sido un desarrollo que partió el año 2006, y que incluye a otros gigantes del retail nacional como lo son Preunic y CMR Falabella.

La realidad actual de ArcoPrime en su labor de determinar el surtido de productos y los inventarios a manejar para las góndolas de sus tiendas Pronto Copec funcionan de manera poco eficiente, con un apoyo en tecnología de nivel medio, pero con baja utilización de sistemas de vanguardia en el apoyo de toma de decisiones. Los principales métodos que se utilizan son la experiencia y experimentación, en conjunto con compromisos y presiones comerciales que provienen de parte de los proveedores. Esto era suficiente hasta mediados de la década de los años 90, pero a partir de ahí en adelante el mercado se volvió extremadamente competitivo, debido a la llegada de nuevos actores, lo que ha obligado a buscar nuevos métodos para mantenerse como una empresa de alto nivel.

El sistema actual de selección y llenado de góndolas de Pronto Copec depende principalmente de dos tipos de trabajadores: Los category managers y el administrador del local. Cada uno de ellos está encargado de una parte del problema: Los category managers seleccionan el surtido de productos con los que trabajará Pronto Copec (lo que implica seleccionar qué productos se van eliminando de la nómina de disponibles para colocar en góndolas), y los administradores de local toman la decisión de qué productos colocar en las góndolas, su ubicación y el espacio que se les asignará.

Para tomar su decisión, los category managers realizan estudios acerca del comportamiento de los productos con los que trabajan actualmente. Para ello, se fijan principalmente en tres indicadores: Venta del producto, unidades vendidas del producto y contribución, normalizados con respecto al total de la categoría. Luego ponderan con valores predefinidos por ellos estas tres variables (30%, 40% y 30% respectivamente), y van analizando los resultados, para decidir qué productos debiesen salir del listado con el que trabajan y cuales se quedan. Para realizar este análisis, utilizan la regla conocida como “80/20”, es decir, que el 20% de los productos cubren el desempeño del 80% de la tienda.

Por parte de los administradores, la elección de los contenidos de las góndolas, en cuanto a productos a colocar, espacio a asignarles y posición no tienen ningún tipo de cálculo ni análisis metodológico que los apoye, sino que se basa principalmente en tres factores: Los compromisos con proveedores, los productos a trabajar que determinan los category managers, y condiciones del local (Ej.: Locales especializados en comidas, o que no pueden colocar artículos de mucho precio cerca de la puerta porque son hurtados). Esto se complementa con la experiencia que tenga el administrador.

Como dato adicional, el administrador de local se encarga de estar revisando mediante inspección visual el stock de productos. Pronto Copec cuenta con sistema SAP para poder revisar el stock que supuestamente debiese existir en góndolas, sin embargo, este no es confiable, por dos motivos:

- Al momento de ingresar los valores de stock iniciales, ya ha transcurrido un periodo importante de tiempo en que el stock ha estado en góndola, por lo que este se ha reducido, y esta reducción no se ha hecho visible en el sistema SAP. Por ello es que ocurren incoherencias como que el stock teórico que se muestra en el sistema es negativo.
- Dentro de las mismas tiendas ocurren una serie de irregularidades como robos, merma de productos, destrucción de los mismos dentro del local, etc. Con ello, existen productos que jamás se registran como salidos de la tienda, pues nunca se vendieron, pero han dejado de existir en las góndolas. Es por eso que el valor teórico y el valor real de producto difiere.

Actualmente lo que se hace es que el administrador de local revisa las góndolas, y realiza pedidos a medida que va notando que van quedando pocas unidades de un producto. Como es de esperar, este sistema es altamente ineficiente y provoca muchos quiebres de stock.

6 Definición del problema

El problema al que se enfrenta actualmente Pronto Copec es la falta de una metodología que apoye la decisión que toma el administrador en cuanto al surtido de productos que pondrá en góndola, la posición, y el espacio que le asignará a cada uno.

Esta situación presenta la desventaja de que no se está dando suficiente importancia al análisis de factores como la rotación de los productos, preferencias del público, desempeño del producto por espacio asignado, etc., siendo que esta decisión no es trivial, debido al número de combinaciones posibles de mix de productos, teniendo al menos 100 SKU's combinables, por categoría (siendo una categoría Snacks por ejemplo).

Como resultado de esta falta de metodología y complejidad de la elección, es muy probable que el mix seleccionado por el administrador no sea el óptimo, llamando mix óptimo a aquel que entrega la mayor rentabilidad por venta de productos, respetando las restricciones políticas y de espacio de la sucursal de Pronto Copec. A continuación se muestra un diagrama de los procesos de elección en Pronto Copec:

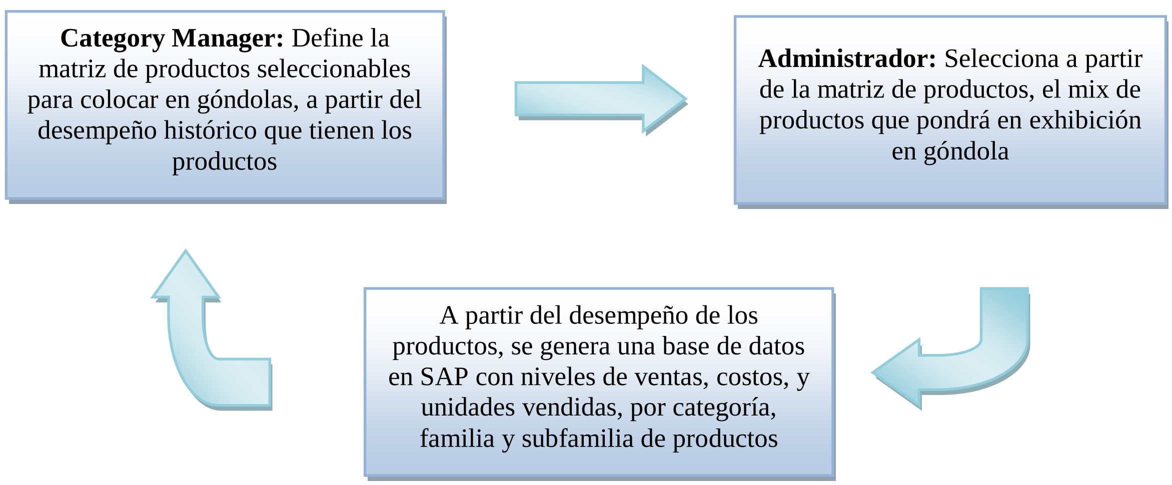


Diagrama de proceso de elecciones en Pronto Copec

Dado lo anterior, Pronto Copec tiene la oportunidad de buscar un mejor escenario, incorporando herramientas de gestión como una metodología de selección de mix que les permita aproximarse a una solución óptima. Es así como se quiere enfrentar este problema a través de la construcción de un algoritmo, que permita aproximarse a una solución de manera simplificada, ajustándose a las necesidades y capacidades actuales de la empresa.

Un punto a destacar es que se busca que la metodología propuesta incluya la utilización de una herramienta de optimización, pero que sea utilizada sólo para ejecutar un programa ya diseñado y automatizado. Esto tiene la ventaja de que Pronto Copec sólo deberá invertir en la licencia para utilizar el programa (en este caso se utilizó GAMS, el cual tiene un costo de licencia de USD$ 3.200).

Dentro de las restricciones políticas de Pronto Copec, existen ciertos compromisos adquiridos con los proveedores que serán examinados por ellos, pues escapan del interés de esta tesis, y los resultados serán adaptados con estos compromisos, según Pronto Copec lo estime conveniente. Para tener una noción de qué compromisos son, estos se pueden definir como:

- Mínimo de porcentaje de exhibición en góndolas: Esto se refiere principalmente a marcas con mucho poder de mercado, con las cuales se tienen compromisos de ocupación y muestra en góndolas. Un ejemplo es Coca-Cola que pide un 35% de ocupación como mínimo.
- Cabeceras de góndolas sólo para promociones: Algunas cabeceras están destinadas sólo para colocar productos en promoción, por lo que siempre se ocuparan sólo con ese fin.
- Espacio en mesón de la caja es pagado: El espacio sobre mesón es vendido, por lo que este se utiliza sólo para poner a proveedores que paguen por él.

También es importante recalcar que la restricción de espacio en este caso es una restricción mucho más fuerte que en otros problemas similares a este (como por ejemplo, la selección de surtido en un supermercado). Hay que mantener en vista que el más grande de los Pronto Copec tiene solamente 330 mts^2, lo que incentiva aún más a encontrar un modelo que permita determinar de manera correcta cómo se ocupará cada espacio de las góndolas, dado que el valor por metro cuadrado es mucho más alto debido a la poca disponibilidad que existe.

Son todos estos puntos los que hacen de este problema atractivo para el estudio, lo que conlleva una justificación en el proceso de investigación y desarrollo de nuevo conocimiento dentro del mismo ámbito.

7 Alcance

Para poder llevar a cabo un estudio en profundidad del proceso de selección de un mix y conclusiones al respecto, se ha decidido enfocar el estudio en la categoría snacks de la tienda Pronto Ciudad La Florida.

El alcance de esta tesis es construir una heurística que permita apoyar la decisión del mix de snacks que se colocará en las góndolas del Pronto Ciudad seleccionado. Lo que se determinará con esta heurística serán dos tópicos:

- Grupos de productos a colocar en las góndolas: Llamaremos grupos de productos a productos que cuentan con características similares, como por ejemplo dos envases de papas fritas de distintas marcas
- Espacio que se les asignará: Porcentaje asignado a cada grupo de productos, del espacio total disponible para snacks en la tienda

Por un tema de no contar con datos reales de la influencia de la posición en el desempeño de los productos en Pronto Ciudad La Florida, no se entregará como resultado la posición en que deba ir el producto, aunque se realizarán análisis teóricos con este dato.

Se trabajará con grupos de productos y no con SKU's debido a que muchos productos son sustitos, y se deja la libertad de elección de SKU por grupo a Pronto Copec, de modo que la solución propuesta no esté ligada a negociaciones con un proveedor en particular.

Se entregará además como resultado una propuesta acerca de qué grupos de productos no están mostrando un buen desempeño dentro de la categoría.

En cuanto a los datos a utilizar, se cuenta con una base de datos entregada por ArcoPrime, correspondientes a datos reales del año 2007.

Las herramientas computacionales a utilizar para desarrollar la heurística serán Excel para ordenar y preparar los datos que se ingresarán al programa de optimización, y GAMS, que será la herramienta de optimización que se utilizará.

Cabe destacar que el mix resultante que nacerá de la aplicación de la heurística no ha sido pensado como una solución de aplicación directa a la realidad, sino que se perfila como una propuesta de mix a colocar en las góndolas, y Pronto Copec debe tomar este resultado como una guía, que deberá adecuarse a la realidad que se tenga en ese momento con los proveedores y con las necesidades del local.

Por último, se explicita que esta tesis tomará la demanda como determinística, y por ende no toma en cuenta el hecho de que pueden producirse quiebres de stock, pues se busca entender el proceso de selección de mix óptimo en las góndolas, pero no su reposición.

8 Requerimiento de información y manejo de datos

ArcoPrime facilitó la información acerca de las transacciones que registró durante el año 2007, en sus distintas tiendas Pronto Copec. Esta información contiene los datos de todas las tiendas con que cuenta Pronto Copec en Chile, más los productos que corresponden a las cuatro categorías a revisar. Esta información se presenta en una tabla dinámica Excel que permite revisar los datos para las siguientes especificaciones:

- Nombre Tienda: Corresponde a la sede de Pronto Copec sobre la cual se quieren los datos. En total existe información acerca de 78 puntos de venta a lo largo del país (5 de estos corresponden a tiendas “Fresco”).
- Año: Corresponde al año acerca del cual se quieren obtener los datos. Para la base de datos tomada del año 2007.
- Categoría: Corresponde a la división más grande que existe para los productos en las tiendas. Estas se dividen en: Comida, cooler, insumo, retail y servicio.
- Familia: Segunda división de productos, dentro de cada categoría. Dentro de esta división existen 37 divisiones, que en términos del enfoque de esta tesis no es necesario mencionar.
- Sub Familia: División más específica dentro de la categorización anterior. Acá existen 115 especificaciones más, pero lo más relevante es que dentro de este nivel es donde se encuentra la sub familia snacks.

Con las especificaciones anteriores, se pueden obtener una serie de datos que corresponden a tales características. Los datos que entrega la tabla dinámica corresponden a datos mensuales (Enero a Diciembre) y una columna final con datos anuales (la agregación de los mensuales). Para cada mes y año entrega el código del producto (bajo la columna “Material”), el nombre del producto (“Descripción del material”), y tres filas: Precio venta (Total), costo (Total) y total de unidades vendidas en el periodo. Estos tres términos aparecen en la tabla con los nombres de “Suma de Vta. Neta Nominal”, “Suma de Costo Vta. Nominal” y “Suma de Ctd. Facturada” respectivamente. Esto fue la totalidad de datos entregados por ArcoPrime.

En términos de las necesidades de datos del problema, los datos entregados sin duda aportan una información muy valiosa para llevar a cabo el estudio, sin embargo son insuficientes para poder generar un modelo que tome en cuenta las variables más fuertes del manejo del mix de góndolas. Cabe destacar que dentro de este tema, uno de los principales puntos que definen al problema es el espacio con el que cuentan las tiendas para colocar sus productos, tanto en tamaño como en distribución, además de conocer también ojalá el valor monetario que se le asigna a cada espacio. Otro punto que sería muy relevante para poder realizar un trabajo de esta magnitud de manera completa es conocer los espacios o distribuciones que han ido ocupando los productos a través del tiempo, pues es interesante revisar el comportamiento que han tenido los productos según su posición en las góndolas, y así poder determinar si es que una posición es en la práctica más favorable que otra, y dando un paso más adelante, poder valorar ese “premio” que puede otorgar una posición, ya sea provocando que un producto tenga más ventas, o que genere una mayor atracción para los otros productos. Lamentablemente, de los puntos expresados anteriormente, sólo se pudo obtener los espacios asignados a los productos, datos con los cuales no contaba ArcoPrime, sino que debieron ser calculados en las mismas salas de venta para poder contar con ellos y llevar a cabo la metodología que se explicará un poco más adelante en este documento. Es deseable que en un futuro ArcoPrime vaya registrando continuamente las posiciones y espacios designados a los productos, pues a partir de esta información es posible generar mucho conocimiento acerca de la valoración real que tiene el espacio que se está ocupando, y así poder desarrollar teoría acerca de que posición es la más adecuada para un producto, según las características de este. Lamentablemente, por la extensión temporal de esta tesis, no se pudo empezar a controlar este punto.

Por otra parte, para poder generar los modelos de optimización, se requiere conocer el tamaño de los productos: Altura, ancho y profundidad. Estos fueron solicitados a ArcoPrime quién los pidió directamente a sus proveedores. Todos estos datos fueron recopilados y entregados en su totalidad.

Otro dato necesario para poder evaluar la posición y cantidad de los productos a exhibir es conocer las características de los productos. Cuando se habla de características se refiere a puntos específicos que presentan los productos y que la gente puede percibir o que influyen en la elección de un producto por sobre otro. Para clarificar esto, por ejemplo en el caso de una categoría cualquiera como galletas, estas pueden presentar distintas características: Si tienen sabor a chocolate, vainilla u otro, el tamaño, si son dulces o saladas, si pertenecen a cierta marca, etc. Son características que diferencian a un producto de otro. Para cada producto de la categoría se definirá si es que cuenta con tal característica o no. Esto se hará mediante una variable dummy, que determinará a qué valor corresponde tal característica. Particularmente, si un producto posee una característica, no poseerá otra. Por ejemplo, si una galleta fuese marca "Dos en Uno", inmediatamente no sería "McKay" o "Costa". Todos estos datos se utilizan para agrupar los productos en grupos homogéneos en sus características y atributos. La utilidad de esto se explicará más adelante.

Finalmente, es necesario construir indicadores que definan el rol del producto dentro de su categoría y dentro del mix. Esto se explicará más adelante con mayor profundidad, pero por ahora se definen indicadores para este propósito: Share y % de variación del margen por unidad con respecto al promedio de margen por unidad de la categoría. El indicador Share se construye como la división del ingreso por venta logrado por un producto dividido por el ingreso por venta total logrado en la categoría, dando como resultado el aporte del producto a la categoría. El último indicador, % de variación del margen por unidad, se construye a partir del ingreso anual de un producto y del costo anual del mismo producto, dividido por las unidades vendidas en un año. Este valor se compara con el valor promedio de margen por unidad de la categoría, y se establece la diferencia porcentual entre ambos, que corresponde al indicador.

Con todos estos datos ya definidos es posible llevar a cabo la elaboración del modelo de optimización y colocación de productos en góndolas, definiendo así el mix óptimo de productos a exhibir.

9. Marco Teórico

Para el desarrollo de esta tesis, se reunieron tres temas que engloban la metodología utilizada. Primero se realizó un estudio de los métodos enfocados en la decisión de asignación de espacio en góndolas para distintos productos. Luego se estudiaron los indicadores y factores que influyen en el comportamiento y definición del producto y la categoría, y finalmente la resolución del problema de optimización utilizando un modelo de optimización no lineal, donde se busca encontrar a partir de los datos con los que se cuenta un mix óptimo bajo las características y restricciones que se fueron recopilando con las dos teorías anteriores. Veamos ahora un desarrollo del marco teórico visto para los tres puntos anteriores:

9.1 Revisión bibliográfica

Dentro de los documentos estudiados, los papers de modelos y experimentación en el ámbito de determinación del espacio asignado a productos en góndolas fueron los más importantes en el desarrollo de la metodología de solución del problema de optimización.

La variedad de temas tocados en los papers es bastante grande, pero se dio un enfoque principalmente a aquellos que buscaban realizar optimización del espacio disponible en las góndolas. Muchos de los papers también hablaban de la importancia del surtido para afectar el comportamiento de compra del cliente, sin embargo, este tema no se abordó para esta tesis, dejándose para estudios futuros.

Los modelos de optimización del espacio en góndolas han coincidido en su gran mayoría en el hecho de que la función de demanda es una función creciente, con retornos decrecientes. Esto fue postulado por primera vez por Lee (1961), y probado experimentalmente por Curhan (1973) y Dreze et. Al (1994). Esto quiere decir que si q_i es la demanda por un producto i, entonces q_i se puede definir de la siguiente forma:

$$q_i = \alpha_i s_i^{\beta_i}$$

Función de demanda creciente a retornos decrecientes

α_i : Parámetro de la demanda

S_i : Espacio que se le otorga al producto i (Puede estar en porcentaje o en unidades de área o volumen)

β_i : Elasticidad espacio del producto i (Cuánto aumenta o disminuye la demanda por el producto i, si aumento en un 1% el espacio que le asigno)

Asumir esto fue primordial para la confección de la función de demanda, pues de otro modo, cualquier tipo de optimización podría dar como resultado, bajo condiciones generales, que la solución óptima es buscar el producto con mejor desempeño dentro de la categoría, y llenar el espacio disponible con ese producto.

Posteriormente se construye el modelo de optimización de la utilidad total generada por la categoría puesta en la góndola, por parte de Corstjeans y Doyle (1981). Este modelo toma en cuenta el hecho de que existen elasticidades cruzadas que afectan a los productos, además de la elasticidad espacio. Se muestra a continuación la ecuación que modela el margen total obtenido por demanda de productos, para K productos. Más adelante se explicará el modelo, incluyendo costos, con más detalle:

$$\sum_{i=1}^{K} w_i q_i = \sum_{i=1}^{K} w_i \alpha_i (s_i)^{\beta_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} s_j^{\delta_{ij}}.$$

Modelo de Corstjeans y Doyle

W_i : Margen obtenido por venta de producto i

$б_{ij}$: Elasticidad cruzada entre productos i y j

El modelo utilizado por Corstjeans y Doyle toma en cuenta tanto ingresos como costos, y se somete a las restricciones de que existe un límite de espacio disponible para poner los productos, existe un límite de producto a solicitar, y existen limites superiores e inferiores de espacio a asignar para cada producto. Este modelo fue resuelto a través de programación geométrica con variables continuas, pero tenía el inconveniente de que constantemente la solución del problema violaba las restricciones de espacio. Aún así, el modelo de Corstjean y Doyle es uno de los más citados en la literatura referente al tema. Posteriormente se construyó un modelo de optimización para variables enteras, por parte de Armstrong et. al (1982).

Debido a la alta complejidad de la resolución de problemas mediante resoluciones geométricas y problemas no lineales de variables enteras, se empezó con el desarrollo de metaheurísticas. Estas metaheurísticas buscaban encontrar una solución construida especialmente para el problema de estimación de espacio óptimo en góndolas. El modelo de Yang y Chen (1999), y el modelo de Yang (2001) son modelos que buscaron simplificar el problema no lineal de optimización que plantearon Corstjean y Doyle. Para ello, plantearon una solución similar a la programación lineal para resolver el problema "multiknapsack problem", en donde se obvian las elasticidades cruzadas, y se toma la demanda por productos como lineal, limitando la cantidad de stock que se puede poner en las góndolas con una cota superior y una inferior.

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} p_{ik} x_{ik}$$

Modelo de Yang y Chen

P_{ik} : Margen obtenido por venta de producto i en cara K

X_{ik} : Producto i que se coloca en cara K

El problema que presentaba la solución propuesta por Yang y Chen tenía la primera limitante de que asumía una buena logística que soportara el modelo, pues este suponía que no se producían quiebres de stock. Además, al resolver el problema, las soluciones entregaban que con aproximadamente tres tipos distintos de productos se llenaba la góndola.
Otro modelo basado en el modelo de Corstjean y Doyle fue propuesto por Martínez-de-Alvéniz y Roels (2001), en el cual se simplifican varios supuestos del modelo original, entre ellos, el hecho de que las elasticidades espacio eran diferentes para cada producto, pero tiene su enfoque en estudiar la negociación que se produce entre los proveedores y el retailer, por lo que su enfoque es distinto al que se quiere utilizar en esta tesis.
Posteriormente, se realiza el desarrollo de un modelo que linealiza el modelo no lineal de Corstjean y Doyle. Este modelo es postulado por Jens Irion (2004). Este modelo incorporaba los costos y las elasticidades, tanto cruzadas como de espacio. El problema con este modelo fue que al manejar un modelo lineal, entregaba un buen valor en la función objetivo, pero entregaba como resultado que gran parte de la góndola se llenaba con dos o tres productos.

Se muestra a continuación un cuadro comparativo entre las distintas soluciones:

Autor	Año	Aporte	Desventaja del modelo
Lee	1961	Definió la demanda como una función creciente con retornos decrecientes	
Curhan y Dreeze	1973 y 1994	Comprobaron empíricamente lo postulado por Lee	
Corstjean y Doyle	1981	Construyó el modelo de optimización de la utilidad total	Modelo muy complejo, resuelto con programación geométrica, que constantemente violaba restricciones de espacio
Armstrong	1982	Construyó un modelo similar al de Corstjean y Doyle, pero para variables enteras	Problema no lineal de variables enteras, que no ayudó con el tema de complejidad de resolución
Yang y Chen	1999 y 2001	Redefinieron el problema de Corstjean y Doyle como un multiknapsack lineal, bajando su complejidad	Obviaba elasticidades cruzadas, suponía no tener quiebres de stock y tendía a llenar la góndola con a lo más tres productos
Martínez de Álvarez y Roels	2001	Definió la elasticidad espacio como igual para todos los productos	Se limita a estudiar la negociación entre proveedores y retailers
Jens Iron	2004	Linealizó el problema de Corstjean y Doyle	Privilegiaba en exceso a unos pocos productos, dando una solución con 2 o 3 productos distintos en góndola

A pesar de que ninguna de las soluciones propuestas es totalmente correcta, fueron estas investigaciones las que ayudaron en la confección de una nueva heurística para resolver el problema de optimización. Este algoritmo se explica más adelante.

9.2 Administración de categorías

La administración de categorías se define como el proceso mediante el cual se administran las categorías como unidades estratégicas de negocio, con el objeto de generar mejores resultados comerciales al concentrarse en entregar mayor valor al consumidor. Este proceso consta de los siguientes pasos:

- **9.2.1- Definición de la Categoría:** En este punto se deciden que productos incluir dentro de la categoría. Preferentemente se incluyen los productos sustitutos o altamente relacionados en su consumo. La definición de qué productos se incluirán dentro de la categoría ya fue definido por Pronto Copec.
- **9.2.2- Rol de la Categoría:** Define como la categoría contribuirá a la estrategia del retailer. Existen distintas clasificaciones para los roles de categoría.

    9.2.2.a-Clasificación según Comportamiento: Clasificación popular usada por el Food Marketing Institute (FMI) en la cual se utilizan roles basados en el consumidor, definidos de acuerdo a la penetración de la categoría (porcentaje de hogares que han consumido la categoría al menos en una ocasión) y la frecuencia con la cual la ha consumido. Según este criterio, los productos se dividen en: productos de nicho, básicos, de complemento y de especialidad.

    9.2.2.b.- Clasificación según Decisiones de Marketing:

        <u>a. Destino</u>: El retailer busca diferenciarse con esta categoría y atraer público a la sala por esta vía, quiere ofrecer en forma

constante un valor superior al cliente en relación al resto de la industria.

b. Rutina: El retailer provee al consumidor lo que usualmente compra, por lo que entrega constantemente un valor competitivo al consumidor.

c. Ocasional/Estacional: El retailer provee al consumidor productos que compra en forma esporádica por lo que quiere entregar frecuentemente un valor competitivo al cliente.

d. Conveniencia: El retailer ofrece un buen valor al cliente basado en la rapidez de compra o el surtido, por ejemplo. Este es el segmento al que corresponden las categorías dentro de Pronto Copec, donde se busca atraer al cliente por la disponibilidad de productos en cualquier horario.

- **9.2.3- Evaluación de la categoría:** Corresponde al análisis de la información de la categoría, sub-categorías y marcas a nivel de sala, cadena y mercado con el objeto de adquirir conocimientos de manera de orientar la gestión de categoría. Esta evaluación actualmente se realiza a través de indicadores que solo miden un aspecto de la categoría y no consideran los roles que a ellas se les han asignado. Por lo anterior, se ha realizado en esta tesis un estudio un poco más profundo acerca del rol de la categoría, buscando ver su comportamiento en cuanto a share, margen por unidad comparado con el margen por unidad promedio de la categoría y las unidades que se venden al año, además de los atributos que definen a cada producto.
- **9.2.4- *Scorecard* de la categoría**: Es un instrumento (Carta de Objetivos) a través de la cual se definen los indicadores y las metas que se usarán para el control de gestión.
- **9.2.5- Estrategias de la categoría:** En este paso se resume todo lo analizado hasta este momento, determinando cual es la estrategia indicada para lograr los objetivos propuestos en el paso anterior.

- **9.2.6- Tácticas de la categoría:** Se toman las decisiones de precio, espacio, surtido promoción, *display* y *feature* que llevarán a lograr la estrategia diseñada en el punto anterior. Cabe señalar que dentro de esta tesis se busca sólo dar propuestas del surtido a colocar en las góndolas. Las otras decisiones de la categoría son de los category managers.
- **9.2.7- Implementación del Plan**: Se ponen en práctica la totalidad de los puntos anteriores.
- **9.2.8- Decisiones que enfrentan los administradores de categorías**

  Actualmente las tiendas de conveniencia y la industria del retail en general enfrentan día a día el desafío de tomar decisiones para decenas de miles de productos en cuanto a sus variables de precio, espacio, variedad, surtido, promoción, *display*, *feature* y frecuencia de reposición. A continuación se explicará a que se refiere cada una de estas decisiones dentro de este proyecto:

  a. **Precio**: Esta decisión se refiere al precio al cual se vende cada producto. Conceptualmente se define como la suma de todos los valores que los consumidores dan para recibir los beneficios del producto. Generalmente las empresas fijan el precio de acuerdo al posicionamiento que desean ocupar en el mercado, pero dentro de un rango definido por la competencia. Esta decisión es importante dado que el precio de referencia que tiene el consumidor afecta la frecuencia de compra del producto. El precio está definido dentro de los datos entregados por Pronto Copec.

  b. Espacio: Esta decisión se refiere al espacio disponible para cada producto dentro de una góndola en una sala de venta. Al asignar un mayor espacio se influye en las ventas del producto al tener una mayor exposición. En esta tesis el espacio asignado es fijo y se mide en centímetros lineales.

  c. Variedad y Surtido: Esta decisión se refiere al ancho (Variedad; Nº de marcas) y a la profundidad (Surtido; Nº SKU) del surtido de una categoría. El ofrecer un surtido amplio atrae más visitas a la sala y estimula la compra tanto dentro de la categoría como en otras categorías dentro del local. Es por esto que se espera que un retailer ofrezca un surtido amplio. La percepción de variedad está influenciada por tres distintos factores: el espacio total que se le asigna a la categoría, el número de SKU en la categoría y la inclusión del producto favorito para el cliente dentro del surtido.

d. Promoción: Esta decisión se refiere al componente del marketing mix que usa materiales o técnicas diseñadas para acelerar la compra del producto por parte de los clientes. Ejemplos de promoción son los descuentos en precios, ofertas de empaque tales como promociones jirafa, multipack, concurso/sorteo o pack de regalo.

e. Display: Se refiere a todo material visual que estimule la compra de productos para consumidores que ya se encuentran dentro de la sala. Ejemplos de *display* son el número de cabeceras de góndola, número de islas /botaderos, presencia en muro de valor o pasillo oferta, número de canales de salida, materiales POP (*Point of Purchase*): presencia en carteles promocionales (góndola o afuera del supermercado) y presencia de promotoras.

f. Feature: Se refiere a todo material visual que estimule la compra al aumentar el tráfico dentro de la sala por lo que se mide a través del número de boletas que contengan el producto publicado. Principalmente el *feature* se refiere a la presencia en catálogos promocionales.

g. Frecuencia de Reposición: Se refiere a la cantidad de veces en un intervalo de tiempo en la cual se reabastece el stock. Existe una relación inversa entre el tamaño del lote a reponer y la frecuencia de reposición. Ésta afecta directamente en los costos ya sea financieros, seguros, espacio en góndola asignado al producto, almacenamiento, entre otros. El desafío se encuentra en minimizar el costo de reposición sin perjudicar la calidad de servicio al aumentar la cantidad de faltantes en góndola.

9.3 Optimización no lineal y no lineal entera (NLP y MINLP)

Los problemas de optimización no lineal (llamados NLP por sus siglas en inglés) han tomado mucha importancia en los últimos tiempos. Estos problemas matemáticos de optimización manejan variables continuas o enteras (en cuyo caso sería un problema MINLP), y manejan una función objetivo y/o restricciones no lineares.

Estos problemas nacen dada la necesidad de su aplicación en distintas áreas de la ciencia, como selecciones de portafolios en finanzas, o la industria automotriz y aeronáutica. Hasta el día de hoy están en constante mejora del algoritmo, pues este es de alta complejidad y aún existen problemas que no puede resolver cuando existe una alta cantidad de variables y relaciones.

La forma general de los problemas tipo NLP es:

$$\begin{gathered} \text{Min } f(x,y) \\ \text{s.a. } g(x,y) \leq 0 \\ x \in X \\ y \in Y \end{gathered}$$

Donde f(x,y) y g(x,y) son la función objetivo y restricciones no lineales respectivamente, y las variables x e y son de naturaleza continua.

Los problemas MINLP son especialmente difíciles de resolver porque combinan las dificultades de sus dos subclases: La combinatoria de la naturaleza mixta de los programas enteros (MIP) y la dificultad de resolver problemas no-convexos (o incluso convexos) no lineales (NLP). Debido a que los problemas tipo MIP y NLP se encuentran entre los problemas con mayores dificultades para resolverse en la teoría (NP-Completo), es normal que la conjunción de ambos problemas y su posterior resolución sea un desafío no menor. Aún así, las componentes de los problemas MIP y PNL proveen una colección de algoritmos de solución naturales que permiten explotar las fortalezas de cada subcomponente.

Los algoritmos para resolver los problemas tipo MINLP son generalmente expansiones de algoritmos de problemas tipo MIP. Entre los más utilizados se pueden contar los algoritmos de aproximación exterior (OA), algoritmos tipo Branch and Bound (B&B), métodos de corte de planos extendido, y la descomposición generalizada de Bender (GBD). Estos algoritmos se han discutido desde principios de los 80's. Estos enfoques se basan principalmente en las sucesivas soluciones de los problemas estrechamente relacionados con los problemas tipo NLP. Por ejemplo, los problemas tipo B&B empiezan formando un problema continuo de NLP, dejando de lado la restricción de número enteros para las variables discretas (Se le llama el problema tipo MINLP o RMINLP). Incluso, cada nodo del emergente árbol B&B representa una solución del RMINLP con límites ajustados a las variables discretas.

Además, los algoritmos OA y GBD requieren de soluciones sucesivas del problema MIP relacionado. Ambos algoritmos descomponen el MINLP en un subproblema tipo NLP que tiene sus variables discretas fijas y un problema MIP maestro. La principal diferencia entre GBD y OA es se define un problema tipo MIP maestro. OA se apoya en los planos tangenciales (o linealizaciones), reduciendo efectivamente cada subproblema a un problema más pequeño y factible, donde el problema maestro MIP generado por GBD está dado por una representación dual en el espacio continúo.

Las aproximaciones descritas arriba sólo garantizan un óptimo global bajo convexidad (generalizada). Algoritmos determinísticos para resolver y encontrar máximos globales de problemas no-convexos requieren la solución a un subproblema obtenido vía relajaciones convexas del problema original en un contexto Branch and Bound, y han sido bastante exitosas en la resolución de problemas tipo MINLP.

10. Construcción de datos para optimización

La metodología a seguir en esta tesis combina elementos de administración de categorías y optimización no lineal. La construcción de datos para la optimización se compone de 6 etapas:

10.1. Recopilación de datos tamaño de góndolas
10.2. Ordenamiento y limpieza de datos de productos
10.3. Construcción de indicadores
10.4. Recopilación de datos tamaño de los productos
10.5. Atributos de cada producto
10.6. Construcción de grupos de productos

Se muestra a continuación qué se pretende con cada parte, y qué se quiere lograr.

10.1. Recopilación de datos tamaño de góndolas

El primer paso correspondió al levantamiento de datos en terreno acerca del tamaño del espacio disponible para cada categoría. Pronto Copec contaba con un layout general de las góndolas, pero no contaba con datos específicos de espacio. Por ello, se fue a la tienda que compete a esta tesis y se procedió a tomar las mediciones para cada espacio. Además, se revisó cuales eran los espacios que le correspondían a cada categoría, las cuales se consideraron como fijas para el estudio. Cada góndola está divida en distintos niveles, desde un nivel solamente hasta cuatro. Las medidas se tomaron para cada nivel en particular, siendo las tres dimensiones consideradas bajo los nombres de alto, ancho y profundo, las cuales se midieron en cms. A continuación se muestra un ejemplo de como se modeló la góndola:

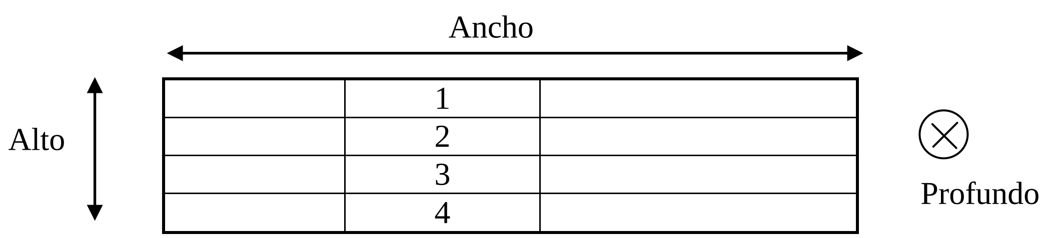


Fig. 1 – Modelo de góndola con 4 niveles

10.2. Ordenamiento y limpieza de datos de productos

La primera parte corresponde a revisar los datos con los que se cuenta. Estos datos fueron entregados por ArcoPrime y corresponden a las ventas realizadas en las tiendas que corresponden al estudio durante el año 2007. Ya se explicó en el capítulo "Requerimientos de información y manejo de datos" el contenido de la información entregada. Cabe destacar que para un manejo más rápido de los datos se procedió a utilizar macros para poder manipular más fácil y rápidamente las tablas. A pesar de no tener un valor de aprendizaje directo con el tema de esta tesis, se incluirán las macros utilizadas en los anexos de este trabajo. Ahora se explicará un poco más en detalle la manipulación de estos datos.

- ***Limpieza y ordenamiento de datos:*** Es importante mencionar que el programa de optimización y la utilización de los datos depende en gran parte de que los datos estén ordenados y que existan matrices que guarden los datos de las características de los productos. El programa utilizado para la optimización (GAMS) interactúa directamente con los archivos Excel, por lo que la construcción del contenido de estos archivos es un primer paso a realizar. Además, por un tema de facilitar la manipulación de los datos, se procede en una primera etapa a eliminar todo el contenido que no aporta datos relevantes al momento de realizar la optimización. Básicamente, lo que se realiza en una primera limpieza es eliminar las celdas que se encuentran repetidas (Algunos títulos de filas estaban repetidos), y eliminar aquellos productos que se encuentran discontinuados, que correspondían a promociones particulares, o que se encontraban con datos ingresados erróneos. Tras la eliminación de todas estas incoherencias, se procede a manipular los datos.
- ***Construcción de márgenes:*** El segundo paso corresponde a construir los márgenes mensuales y anuales promedio generados por producto. Para ello, se trabaja con los datos mensuales entregados por ArcoPrime: Ventas en cantidad de dinero en total para un mes, costos en cantidad de dinero en total para un mes, y cantidad de unidades vendidas en un mes. Luego, se procede a calcular el valor promedio mensual de cada uno de los ítems anteriores, y se calcula la utilidad mensual promedio por unidad, de la fórmula (ventas – costos) / (unidades vendidas). Con esto se tienen los márgenes mensuales para cada uno de los productos.
- ***Promedio anual:*** Para los datos de ventas, costos, unidades vendidas, y margen por unidad, se calculan los promedios del año para cada uno de los productos dentro de las categorías.

Con todos los datos anteriores, se tienen los datos básicos para comenzar a trabajar en los siguientes pasos.

10.3. Construcción de indicadores

Se necesita conocer el nivel de importancia dentro de la categoría que tiene cada producto, por lo que fue necesario calcular el share de cada producto por categoría, y también un porcentaje de utilidad mayor o menor que el promedio de la categoría, para ver cuales son los productos que dejan mayores ganancias por unidad vendida. Ahora, existen una serie de indicadores financieros que podrían haber sido tomados en cuenta al momento de entender el desempeño y rol del producto dentro de su categoría, sin embargo se eligieron los tres indicadores antes mencionados principalmente porque explican gran parte de lo que aportarían otros indicadores, y que para términos de esta tesis guardan la información necesaria para desarrollar el trabajo de buena forma. Los indicadores considerados inicialmente fueron (anuales):

- Margen
- Ventas
- Rotación
- Unidades vendidas promedio
- GMROII = (Ventas – Costos) / Nivel de inventario promedio
- ROI = (Ventas – Costos) / Costos
- ROS = (Ventas – Costos) / Ventas
- Share = Ventas(sku) / Ventas(Categoría)
- Contribución = Margen(sku) / Margen (Categoría)

De los indicadores anteriores, no se utilizó GMROII debido a que se prefirió reemplazar por (Ventas – Costos) / Unidad, que es un indicador que explica también margen por unidad de producto. Tampoco se utilizaron ROI y ROS porque particularmente no aportaban nuevos datos o tendencias del margen. Y finalmente el indicador Contribución se transformó en otro indicador más aplicable a este caso, donde se trabajó con margen por unidad de producto, calculado en promedio a nivel anual. Básicamente esto se realizó así porque existían tres temas que no se podían dejar pasar al momento de trabajar con indicadores para el armado del mix óptimo: Saber qué productos son los que tenían mayores ventas (Share), saber qué productos tenían una mayor utilidad que el promedio por unidad (% variación del margen con respecto al promedio), y conocer la cantidad de producto que se vende anualmente para saber el nivel de importancia del producto. Con estos puntos claros, se procedió a armar los indicadores:

a. **Share:** Se construye a partir de las ventas totales anuales, donde lo que se calcula son las ventas totales para un producto en particular, partido por las ventas totales de la categoría, lo que entrega un porcentaje.
b. **% Variación con respecto al margen por unidad promedio:** Para armar este indicador simplemente se tomaron los márgenes por unidad de todos los productos de una misma categoría, se sacó el promedio, y se calculó la variación de cada uno con respecto al promedio.
c. **Unidades vendidas al año:** Originalmente se buscaba trabajar con el indicador de rotación, sin embargo, esto fue imposible dado que no se conoce ni el costo ni el inventario promedio por categoría o tienda, por el sencillo motivo de que Pronto Copec no guarda datos acerca del inventario o costos promedio de los productos que colocan en sus góndolas. Por ello, se decidió trabajar con un dato con el que sí cuentan, las unidades vendidas durante el año 2007 por SKU. Con estos valores se obtuvo una dimensión aproximada de la demanda que se tendría por un producto colocado en las góndolas.

Con estos indicadores construidos, se procedió a definir los "productos estrella". Con esto se quiere señalar que existen ciertos productos que cuentan con características particulares que le otorgan mayor relevancia que otros productos dentro de su misma categoría. Así, primero se vio aquellos productos para los cuales el nivel de ventas es alto con respecto al total de la categoría, por lo que productos con alto share se mostraron como particularmente atractivos. Para la elección de qué productos eran considerados con share importante y qué productos no, se ordenaron los share de cada producto de mayor a menor, y se seleccionaron aquellos productos que tenían un desempeño muy superior al resto. Por ejemplo, en el caso de Snacks de La Florida, se eligió a aquellos productos que aportaban un share de más de 2% al total, porque hasta ese nivel de share se veía una clara diferencia con respecto a los productos siguientes. Además, entre todos los productos que recaían dentro de la categoría de share importante, formaban el 40% del share de la categoría. Por otra parte, también se tomó en cuenta el porcentaje de variación con respecto al margen por unidad promedio, y se seleccionó a aquellos productos que tenían un porcentaje de diferencia muy alto. Para seleccionar a los “productos estrella” por estos términos, se revisó también que los productos con alta variación en el margen con respecto al promedio también tuviesen un share importante, porque si no se cumplía esto, podía ocurrir que fuese un producto con alto potencial de margen por venta, pero que en la práctica no se vendiesen al público en una cantidad considerable, haciendo del producto margen multiplicado por unidades vendidas un valor muy bajo.

10.4. *Tamaños de los productos*

Uno de los datos más importantes dentro de la optimización es el tamaño de los productos, pues al ser una tienda de conveniencia, el espacio disponible es uno de los temas más sensibles. Por ello, se rescataron los productos que son considerados como utilizables en las góndolas de Pronto Copec y se solicitó a las empresas proveedoras, por intermedio de la ayuda de los Category Managers, que entregaran los valores de tamaño de los productos. Para términos de esta tesis, se trabajó siempre en las mismas tres dimensiones: Alto del producto (extensión vertical), largo del producto (extensión horizontal) y profundidad del producto (extensión perpendicular a la horizontal y la vertical). Todos los datos de tamaño se manejaron en cms. No se realizó ningún tipo de especificación especial acerca de la forma de los productos, pues para realizar la optimización, no se perdía demasiado espacio si se aproximaban las formas cilíndricas a un rectángulo, por un tema de apilamiento de los productos.

10.5. *Atributos de cada producto*

Para cada atributo en la categoría se definen distintos niveles que tendrán valores binarios, que determinará si ese producto posee ese atributo o no. A continuación se muestran los atributos y niveles asignados para la categoría snacks:

i. Sabor: - Dulce
- Salado

ii. Marca: - Evercrisp

- Marco Polo
- Otro

iii. Empaque: - Sobre
- Tarro

iv. Tamaño: - Pequeño
- Grande

Este paso finaliza cuando se le asigna a cada producto de la categoría snacks un atributo en cada uno de los ítems definidos.

10.6. *Construcción de grupo de productos*

Una vez que se definieron todos los puntos anteriores para todos los productos de la categoría, se procede a construir grupos de productos que posean atributos similares entre sí. Antes de cualquier tipo de agrupación, se separan los llamados "productos estrella" explicados en el punto de "Construcción de indicadores". La separación consiste en definir que estos productos no se agruparán con ningún otro, y que además deberán estar presentes en forma obligatoria dentro de lo que es el mix óptimo de productos. Posteriormente a esta separación, se procede a agrupar los productos restantes afines por atributos. El proceso es el siguiente:

- **Reunir por nivel de atributos:** Se procede a agrupar productos que posean exactamente los mismos valores en cada uno de los distintos niveles. Si tras realizar esta acción, alguno de los productos se encuentra sin grupo y no tiene ningún otro par similar, se le agrega al grupo que presente la mayor afinidad posible en sus atributos, es decir, aquel grupo que presente una única diferencia en un nivel del atributo que se considere menos relevante. Así se forman los grupos, más los "Productos Estrella", que en conjunto corresponden al total de opciones de productos a colocar en las góndolas.
- **Calcular valores promedio por grupo:** Para cada uno de los grupos se toman los elementos que componen el conjunto y se procede a calcular sus valores promedio para: Venta anual, costo anual, unidad anual, margen por unidad, Share, % de margen con respecto al promedio y número de unidades

promedio vendidas al año. Dado que los productos cuentan con atributos similares, generalmente los valores por separado no varían en gran manera de los valores promedio. Estos valores serán los que finalmente determinarán el tipo de comportamiento que ofrece ese grupo de productos.

- **Calcular tamaño por grupo:** De la misma forma que se hizo anteriormente, se procede a calcular el tamaño por grupo a partir de los productos (Alto, ancho y profundo) que lo componen, sin embargo, acá el promedio no es una buena aproximación pues si se asignara ese valor como el valor del grupo, estaría la posibilidad de que algún producto no cupiera en el espacio asignado para el promedio del grupo. Por ende, el tamaño del grupo corresponde a los máximos de las dimensiones de los productos, asegurando así que todos tendrán cabida. Al ser el tamaño uno de los atributos por los cuales se agrupa, es común que las dimensiones de los productos dentro de un grupo sean bastante similares.

Un punto que es discutible es que al agrupar los productos y calcular sus indicadores como promedio, se induce a errores por temas de aproximaciones. La idea de conformar grupos para realizar la optimización es principalmente por dos motivos:

- Permite que al momento de tener que armarse la góndola en la tienda se pueda elegir entre varios productos de un mismo grupo, permitiendo negociar con distintos proveedores.
- Permite facilitar el análisis del problema y de su solución, permitiendo generar conclusiones no tan evidentes para problemas con una mayor cantidad de productos.

11. Metodología de optimización

La metodología seguida para aplicar la optimización se compone de las siguientes etapas:

11.1 Definición del modelo de optimización
11.2 Adaptaciones al modelo
11.3 Resolución del modelo de optimización
11.4 Comentarios acerca de los resultados

11.1 Definición del modelo de optimización

El problema de surtido óptimo de productos en góndolas ha sido enfrentado de diversas formas. Cada uno de estos modelos tiene sus ventajas y desventajas, y se aproxima de manera distinta a un óptimo, sin embargo, existe un problema de optimización que es citado y aceptado con mayor frecuencia que las otras variaciones. Este corresponde al planteamiento general que propone Marcel Corstjean y Peter Doyle en su paper "A model for optimizing retail space allocations" (Vol. 27, N°7, Julio 1981), donde el problema general considera maximizar la función de margen por producto multiplicado por demanda del producto, sujeto a que el espacio total asignado para todos los productos debe ser igual al espacio disponible en las góndolas. Una de las características de este modelo es que la función de demanda que utilizan está determinada no sólo por el porcentaje de espacio asignado al producto, sino que también toma en cuenta la elasticidad espacio del producto (Cuanto varía la venta del producto si se aumenta en un 1% el espacio que se le asigna) y la elasticidad cruzada (Cuanto varía la venta del producto i si se asigna un 1% más de espacio al producto j). Un supuesto importante es que la demanda crece a medida que crece el espacio que se le asigna al producto, pero que el crecimiento es de retornos decrecientes. El modelo genérico tiene la siguiente forma:

$$\max \sum_{i=1}^{K} w_i \left[\alpha_i s_i^{\beta_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} s_j^{\delta_{ij}} \right] - \sum_{i=1}^{K} \gamma_i \left[\alpha_i^{\tau_i} s_i^{\beta_i \tau_i} \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{K} s_j^{\delta_{ij} \tau_i} \right]$$

$$\sum_{i=1}^{K} s_i \leqslant S^*$$

$$\alpha_i s_i^{\beta_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} s_j^{\delta_{ij}} \leqslant Q_i^*, \qquad i = 1, \ldots, K,$$

$$s_i^L \leqslant s_i \leqslant s_i^U, \qquad i = 1, \ldots, K,$$

$$s_i \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, K.$$

La ecuación que se maximiza corresponde al margen que se obtiene por la cantidad de producto demandada, menos los costos de contar con tales productos. Las variables y parámetros son:

Variable Si: Corresponde al porcentaje de espacio que se le asigna al producto i dentro del total de espacio disponible en las góndolas. Este valor va entre 0 y 1.
β_i: Elasticidad espacio del producto i.
$б_{ij}$: Elasticidad cruzada entre productos i y j.
α_i: Parámetro de la demanda.
Wi: Margen asociado al producto i.
Υ_i: Costo de inventario asociado al producto i. Este costo es distinto al costo con el que se calcula el margen en este modelo. El costo del margen es el costo por adquirir el producto, no por almacenarlo.
T_i: Elasticidad del costo de operación asociado al incremento en ventas del producto i.

Como se puede observar, la ecuación tiene restricciones también, las que corresponden a cuatro limitaciones con las que debe cumplir el modelo:

- La primera restricción implica el hecho de que el porcentaje ocupado por el total de productos debe ser menor o igual al 100% del espacio disponible, dado que no se puede utilizar más espacio del disponible.
- La segunda restricción tiene relación con el hecho de que puede existir la posibilidad de que la disponibilidad de producto a obtener de los proveedores esté limitado, por lo que se pueda conseguir como máximo una cantidad Qi* de producto, y que por ende, no se pueda ofrecer al público más que esa cantidad en las góndolas para el producto i.
- La tercera restricción tiene relación con una cota mínima (Si^L) o una cota máxima (Si^U). Estas cotas nacen del hecho que puede suceder que el retailer quiera tener control sobre un mínimo o máximo de porcentaje de la góndola que sea ocupado por un producto. La cota mínima se puede deber a que un producto i es visto por el retailer como un producto que está directamente relacionado con su imagen, independiente del margen que aporta el producto, o porque el producto es nuevo y se requiere darle una oportunidad para que cause impacto en

el mercado. La cota superior se puede establecer para productos que se encuentran en la etapa tardía del ciclo de vida para mantener el stock al día con nuevos productos.

- Finalmente, la cuarta restricción es que Si debe ser mayor o igual a 0.

11.2 Adaptaciones al modelo

El modelo seleccionado es el modelo general del problema de optimización de asignación de espacio en el retail, y será el utilizado en términos de esta tesis. Ahora, existen ciertas simplificaciones que se harán para poder llegar a conclusiones con respecto a los estudios. Esto se hará principalmente para poder concluir a partir de los datos disponibles. Del modelo que se presenta, se tomarán las siguientes simplificaciones:

- $б_{ij}$ es igual a 0 para todo i y todo j. Es discutible si esta imposición es correcta, sobre todo tomando en cuenta que se está trabajando con productos dentro de una misma categoría, lo que implica que es muy probable que exista un tipo de efecto entre el espacio asignado para uno y el espacio asignado para otro, pues seguramente serán complementarios o suplementarios. Lamentablemente, no existe forma de estimar este efecto entre productos con los datos aportados por ArcoPrime, por lo que se asume un valor general para la elasticidad cruzada igual a 1.
- El costo de un producto en el modelo utilizado incorporará los costos por adquirir el producto, pero también incorporará los costos de inventario, por lo que el valor de Υ_i será 0, pero no desaparecerá del modelo, sino que estará incorporado en el margen Wi. Esto se hizo de esta manera debido a que los datos entregados por Pronto Copec incorporaban todos los costos para un producto como un único valor, sin separar los costos por inventario de los costos por adquirir un producto de los proveedores. Se asumirá también que los costos de inventario son por unidad, por lo que se aplicará a cada unidad vendida. Con esto, la segunda parte de la ecuación desaparece.
- Para términos de obtener una solución más general, se quitará la imposición de que existe una cota máxima de producto a exhibir, o una cota máxima de producto que se puede adquirir de los proveedores. En otras palabras, Qi* será infinito, al igual que Si^U (Lo que es equivalente a eliminar ambas restricciones). Esto se realizará de esta forma debido a que permite obtener un resultado óptimo, y en caso de que la realidad indique que no se puede

obtener tal nivel de producto, entonces se debe intentar obtener un número lo más cercano posible al óptimo obtenido para ese producto. Así se le otorga mayor libertad al retailer también. Además, de los resultados obtenidos en el paper de Corstjean y Doyle, se obtuvo como resultado que los valores óptimos, para el caso aplicado a la realidad en ese experimento, nunca sobrepasaban las cotas superiores. Se piensa que esto deriva del hecho que los productos a los que se les imponen restricciones de cota superior son productos que se encuentran en sus etapas finales de ciclo de vida, lo que implica también que son productos que han pasado su madurez, y por ende la demanda por tales productos debiese tender a estabilizarse o a bajar.

o Como se trabajará con Si como porcentaje, se impondrá que la cota superior de Si* será igual a 1. La intuición además da a entender que el óptimo debiese encontrarse cuando la sumatoria de los Si es igual a 1, dado que al quedar espacio disponible, debiese encontrarse un valor menor en margen total que el óptimo. Es discutible el hecho de que puede que al quedar un espacio disponible, no queden productos que quepan en tal posición que no reduzcan el margen total del mix de productos, sin embargo, si se asume que todos los márgenes son mayores o iguales que 0, entonces siempre el óptimo se encuentra cuando se llena la góndola completa. Por lo anterior, la sumatoria de Si* siempre será igual a 1.

o Tal como se hizo en el paper de Víctor Martínez-de-Albéniz y Guillaume Roels, "Competing for Shelf Space" (April 20, 2007), se asume que todos los productos dentro de una misma categoría tienen la misma elasticidad espacio, es decir, bi = b. Este supuesto no es muy restrictivo, siempre que los productos se encuentren dentro de una misma categoría.

La restricción de un mínimo de porcentaje de ocupación de un producto será considerado, dado que es un problema muy contingente a la realidad de Pronto Copec, sin embargo, no se abordará de la misma forma que en el modelo de Corstjean y Doyle.

Con todas las restricciones anteriores, el nuevo problema de optimización es:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i{}^{b}]$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{K} S_i = 1$$

$$S_i^L \leq S_i \; , \qquad i = 1,..., K$$

$$S_i \geq 0 \; , \qquad i = 1,..., K$$

Ahora, como se dijo anteriormente, se tomará en cuenta el hecho de que existe una cota mínima que poner a ciertos productos. En el caso de Pronto Copec, esto nace del hecho de que existen ciertos productos que no pueden faltar dentro del mix mostrado en las góndolas, debido a que son productos por los que las personas visitan un local, o al menos asumen que estarán dentro de los productos que se venden (S_i^L). Un ejemplo de esto son los productos Coca-Cola, que al ser una bebida ampliamente consumida dentro del mercado, si es que no se encuentran dentro de las bebidas de fantasía ofrecidas en el mix, puede afectar negativamente la demanda. Al imponer estas restricciones, pueden existir diferencias con el resultado de optimización general, dándose el caso por ejemplo de que al imponer que un producto i debe tener un porcentaje de participación mayor a S_i^L, al resolver el problema de optimización general se obtenga como solución $Si^* < S_i^L$. Esto no sería una solución factible en el nuevo problema. Por tal motivo es que se ha debido construir un algoritmo de resolución del problema de optimización, que permita ir acercándose a una solución que maximice la función objetivo, pero que a su vez vaya respetando las restricciones.

11.3 Resolución del modelo de optimización

11.3.1 Caso General

Para poder llegar al algoritmo, primero se optimizó el problema general planteado mediante la metodología de optimización no lineal de Karush Kuhn Tucker (KKT). Este método tiene relación con la resolución de problemas de optimización no lineales. La lógica que sigue esta teoría es que si se pueden comprobar las condiciones de KKT (o condiciones necesarias de KKT) para una solución factible para el problema, entonces la solución del problema de optimización no lineal es óptima, siempre que se cumplan además algunas reglas de regularidad. Esta teoría corresponde a una generalización del método de los multiplicadores de Lagrange, y las condiciones que se deben cumplir provienen de los creadores del método: William Karush, Harold W. Kuhn, y Albert W. Tucker, a quienes se les debe el nombre del método.

Supongamos que se tiene el siguiente modelo de optimización:

$$\text{Min } f(x)$$
$$\text{s.a. } g_j(x) \leq 0, \text{ con } j = 1 \ldots K$$

Se asume entonces que f(x) y $g_j(x)$ son diferenciables, y que satisfacen ciertas condiciones de regularidad. Si se da lo anterior, entonces $\overline{X}$ puede ser una solución óptima para el problema de programación no lineal, ssi. existen números $\mu 1, \ldots, \mu m$ que cumplen con las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} & = \dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \dfrac{\partial g_j(\bar{x})}{\partial x_i} & \geq 0 \\ \bar{x}_i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} & = \bar{x}_i \left(\dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \dfrac{\partial g_j(\bar{x})}{\partial x_i} \right) & = 0 \\ \bar{x}_i & \geq 0 & \end{array}\right\} \forall i = 1, .., n$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j} = g_j(\bar{x}) - b_j \leq 0 \\ \mu_j \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j} = \mu_j \Big(g_j(\bar{x}) - b_j \Big) = 0 \\ \mu_j \geq 0 \end{array}\right\} \forall j = 1, .., m$$

Con la resolución del sistema de ecuaciones anterior, se comprueba que existen $\mu 1, \ldots, \mu m$ que cumplen con las restricciones, y por ende se tiene una solución que es óptima. Será esta parte del método KKT la que se utilizará en la resolución de este problema de optimización. Ahora, se muestra a continuación el problema general, sin restricciones de número mínimo de espacio asignado a un producto:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}]$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{K} S_i = 1$$

$$S_i \geq 0 \,, \qquad i = 1,..., K$$

Este problema se puede reescribir como:

$$\text{Min} - \sum_{i=1}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}]$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{K} S_i = 1$$

$$S_i \geq 0 \,, \qquad i = 1,..., K$$

Lo que equivalente al planteamiento anterior. Con esta nueva forma de presentar el problema, el Lagrangeano es:

$$L = -\sum_{i=1}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}] + u_1 * \left(\sum_{i=1}^{K} S_i - 1\right)$$

Se ven ahora las condiciones KKT:

$$\frac{\partial L}{\partial Si} = - b*Wi* \alpha_i * S_i^{\,b-1} + u_1 \geq 0 \qquad (1)$$

$$S_i * \left(\frac{\partial L}{\partial Si}\right) = S_i*(- b*Wi* \alpha_i * S_i^{\,b-1} + u_1) \geq 0 \qquad (2)$$

$$S_i \geq 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial ui} = \sum_{i=1}^{K} S_i - 1 \geq 0 \qquad (4)$$

$$u_1*(\frac{\partial L}{\partial ui}) = u_1*(\sum_{i=1}^{K} S_i - 1) = 0 \qquad (5)$$

$$u_1 \geq 0 \qquad (6)$$

De la ecuación (5) se puede decir que siempre (según se dijo antes) $\sum_{i=1}^{K} S_i - 1 = 0$. Por ende, se tiene que $u_1 > 0$.

De la ecuación (2) se tiene que si Si > 0, entonces:

$$b*Wi*\alpha_i*S_i^{b-1} = u_1$$

$$\Leftrightarrow S_i = (\frac{u1}{b*Wi*ai})^{(\frac{1}{b-1})}$$

De esta ecuación se puede sacar un primer resultado para el caso general. Se tiene el resultado para S_i, se verá ahora que sucede si se divide por S_j, con $j \neq i$, i y j cualquier valor entre 1 y K. Al realizar la división se obtiene lo siguiente:

$$\frac{Si}{Sj} = \frac{(\frac{u1}{b*Wi*ai})^{(\frac{1}{b-1})}}{(\frac{u1}{b*Wj*aj})^{(\frac{1}{b-1})}}$$

Simplificando y ordenando términos:

$$\boxed{\frac{Si}{Sj} = (\frac{Wi*ai}{Wj*aj})^{(\frac{1}{1-b})}}$$

Este resultado es bastante interesante, pues nos muestra claramente que para los valores óptimos de Si y Sj, existe una relación directa que se tiene que cumplir entre ambos, y que depende directamente de sus márgenes (W) y el parámetro de la demanda (α). Asimismo, depende del valor de la elasticidad espacio, pero al ser el mismo para ambos, no da información acerca de cómo afecta el comportamiento de uno por sobre el otro. Si se asume que W y α son dados, al igual que b, entonces se tiene que la relación entre Si y Sj siempre debe tener una misma proporcionalidad en el óptimo. Además, se puede decir que dado que W es el margen, y por ende depende del precio de venta y el costo de adquisición, entonces serán estas negociaciones con el proveedor para conseguir un costo más bajo, los manejos en logística para que los costos de transporte y reposición desciendan, y el manejo del pricing de los productos lo que finalmente irá determinando cual deberá ser la relación del espacio ocupado de un producto por sobre el otro.

Se sigue ahora con el resultado para Si. Se puede ver que como se cumple que $\sum_{i=1}^{K} S_i = 1$, entonces se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{K} Si = 1 = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{u1}{b*Wi*ai}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u1}{b}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} * \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{1}{Wi*ai}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} = 1$$

$$\Leftrightarrow u1 = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} * \sum_{i=1}^{K}\left(\frac{1}{Wi*ai}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}}\right)^{(b-1)}$$

$$\Leftrightarrow u1 = \left(\left(\frac{1}{b}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} * \sum_{i=1}^{K}\left(\frac{1}{Wi*ai}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}\right)^{(1-b)}$$

Reemplazando u1 en la ecuación de Si, se tiene que:

$$S_i = \left(\frac{\left(\left(\frac{1}{b}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} * \sum_{i=1}^{K}\left(\frac{1}{Wi*ai}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}\right)^{(1-b)}}{b*Wi*ai}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}$$

Simplificando y ordenando, se llega a un resultado final:

$$\boxed{S_i = \frac{(Wi*ai)^{\left(\frac{1}{1-b}\right)}}{\sum_{i=1}^{K}(Wi*ai)^{\left(\frac{1}{1-b}\right)}}}$$

Se puede ver en primer lugar que el valor asignado a un producto i depende del total que se está dando a todos los productos, siendo el valor $Wi*ai$ el indicador de cuanto espacio se le dará al producto por sobre la suma de todos los demás. Es destacable también ver que a medida que b se aproxima a 1, entonces el valor del producto i en el espacio asignado también empieza a crecer. Este resultado también nos muestra algo interesante, pues se puede apreciar, asumiendo que W_i y a_i son siempre mayores que 0, que en el óptimo siempre se le asigna un espacio a cada producto i. Asumir en teoría que W_i y a_i son siempre mayores que 0 es razonable dado que es de esperar que un producto con el que se trabaja deje un margen positivo (dado que el precio final lo maneja la tienda) y tenga una demanda positiva también. En la realidad, puede darse el caso que se trabaje con un producto que deje margen cercano a 0, cercano a vender al costo, pero que su presencia en el mix de productos en góndolas tenga otro fin, como por ejemplo, ser un producto atractivo para el público, que con su bajo costo atraiga compradores, y que en su proceso de compra adquieran productos extras al encontrarse ya en el local. Para este caso es que se imponen límites mínimos de presencia de productos en góndola, donde la optimización general daría por resultado una presencia más baja de la deseada en el producto especificado. Por otra parte, podría darse el caso que a_i fuese muy cercano a 0, en cuyo caso, al asignársele un poco de espacio a tal producto, siempre se tuviese una demanda muy baja por el mismo. En estos casos debiese ser eliminado directamente el producto del mix óptimo que se coloca en góndolas. Como se dijo anteriormente, el resultado da a entender que todos los productos debiesen tener algo de espacio asignado en el resultado óptimo, sin embargo, en el proceso de optimización general esto debiese tender a no ser cierto, ya que no es el caso de lo que ocurre en la realidad. Se verán los resultados y análisis más adelante.

11.3.2 Caso con límite inferior

El caso anterior es el caso general de optimización del espacio en góndolas, pero se verá ahora qué sucede con los resultados al optimizar un caso similar, salvo que se incluye un límite inferior de participación mínima que deben tener ciertos productos en las góndolas. Sin pérdida de generalidad, se separa la función objetivo en productos i sin restricción de espacio mínimo a asignárseles, y productos j, que tendrán una restricción. Se verá ahora la optimización de este problema:

$$\text{Max} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} Wj * [\alpha_j * S_j^{\,b}]$$

s.a.

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{K} S_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} S_j = 1$$

$$S_j^L \leq S_j \,, \qquad j = 1,\dots, K$$

$$S_i , S_j \geq 0 , \quad i,j = 1,..., K , i \neq j$$

En este caso se ha establecido un límite inferior (S_j^L) para todos los productos j. Si a algún producto j no se le quiere asociar un límite inferior, entonces basta con que el valor S_j^L sea igual a 0 para ese producto, y así se puede plantear el problema. En este sentido, se puede ver que el problema que se ha llamado problema general, es en realidad un subproblema de este, donde todos los valores S_j^L son iguales a 0. Al igual que en el caso anterior, el problema se puede reescribir como:

$$\text{Min} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} Wj * [\alpha_j * S_j^{\,b}]$$

s.a.

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{K} S_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} S_j = 1$$

$$S_j^L \leq S_j \,, \quad j = 1,..., K$$

$$S_i , S_j \geq 0 , \quad i,j = 1,..., K , i \neq j$$

Con este planteamiento, el lagrangeano vendría a ser:

$$L = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}] - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} Wj * [\alpha_j * S_j^{\,b}] + u_1*(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{K} S_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} S_j - 1) + u_2*(S_j^L - S_j)$$

Se verás ahora las condiciones KKT:

$$\frac{\partial L}{\partial Si} = - b*Wi* \alpha_i* S_i^{\,b-1} + u_1 \geq 0 \qquad (7)$$

$$S_i * \left(\frac{\partial L}{\partial Si}\right) = S_i*(- b*Wi* \alpha_i* S_i^{\,b-1} + u_1\ ) = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Sj} = - b*Wj* \alpha_j* S_j^{\,b-1} + u_1 - u_2 \geq 0 \qquad (9)$$

$$S_j*\left(\frac{\partial L}{\partial Sj}\right) = S_j*(- b*Wj* \alpha_j* S_j^{\,b-1} + u_1 - u_2) = 0 \qquad (10)$$

$$S_i,\ S_j \geq 0 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u1} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{K} S_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{K} S_j - 1 \geq 0 \qquad (12)$$

$$u_1*\left(\frac{\partial L}{\partial u1}\right) = u_1*\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{K} S_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{K} S_j - 1\right) = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u2} = S_j^{\,L} - S_j \geq 0 \qquad (14)$$

$$u_2*\left(\frac{\partial L}{\partial u2}\right) = u_2*(S_j^{\,L} - S_j) = 0 \qquad (15)$$

$$u_1,\ u_2 \geq 0 \qquad (16)$$

Tomando directamente la ecuación (8), y asumiendo que Si es mayor que 0 (En el caso que fuese igual a 0, entonces es la solución óptima), entonces se tiene que:

$$b*Wi* \alpha_i* S_i^{\,b-1} = u_1 \qquad (17)$$

$$\Leftrightarrow \ Si = \left(\frac{u1}{b*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}} \qquad (18)$$

Ahora, asumiendo que $S_j^{\,L} > 0$ para todo valor de j, lo que es natural dado que si $S_j^{\,L}$ fuese igual a 0, se debería asignar como Si (por un tema de notación simplemente), entonces, de la ecuación (10) se puede decir que:

$$b*Wj* \alpha_j* S_j^{\,b-1} = u_1 - u_2$$

Remplazando el valor de la ecuación (17) encontrado para u_1, se tiene que:

$$u_2 = b*Wi* \alpha_i* S_i^{\,b-1} - b*Wj* \alpha_j* S_j^{\,b-1} \qquad (19)$$

Ahora, se debe analizar el valor de u_2. De la ecuación (15) se puede deducir que se pueden dar dos casos. En un caso $S_j = S_j^{L}$, por lo que se tendría que $u_2 > 0$. El otro caso es que $S_j > S_j^{L}$, con lo que $u_2 = 0$. Se ven a continuación los dos casos:

Caso $S_{jk} = S_{jk}^{L}$

Entonces se tiene que la ecuación (19) se puede reescribir como:

$$u_2 = b*Wi*\alpha_i*S_i^{b-1} - b*Wj*\alpha_j*(S_j^{L})^{b-1}$$

donde el valor de S_j^{L} es un valor entre 0 y 1 conocido. Dado lo anterior, es posible reordenar la ecuación de la siguiente forma:

$$S_i = \left(\frac{u_2 + b*Wj*aj*(S_j^L)^{b-1}}{b*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}} \qquad (20)$$

Aplicando sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{K} S_i = 1 - \sum_{j=1}^{K} S_j^{L} = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{u_2 + b*Wj*aj*(S_j^L)^{b-1}}{b*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sum_{j=1}^{K} S_j^{L} = (u_2 + b*Wj*aj*(S_j^L)^{b-1})^{\frac{1}{b-1}} \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{1}{b*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sum_{j=1}^{K} S_j^{L}}{\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{1}{b*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}}} = (u_2 + b*Wj*aj*(S_j^L)^{b-1})^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\Leftrightarrow u_2 = \left(\frac{1 - \sum_{j=1}^{K} S_j^{L}}{\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{1}{b*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}}}\right)^{b-1} - b*Wj*aj*(S_j^L)^{b-1} \qquad (21)$$

Tomando la ecuación (21) y reemplazando el valor de u_2, se tiene el siguiente resultado:

$$S_i = \left(\frac{\left(\frac{1-\sum_{j=1}^{K} S_j^L}{\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{1}{b*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}}}\right)^{b-1} - b*Wj*aj*(S_j^L)^{b-1} + b*Wj*aj*(S_j^L)^{b-1}}{b*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\Leftrightarrow S_i = \left(\frac{\left(\frac{1-\sum_{j=1}^{K} S_j^L}{\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{1}{b*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}}}\right)^{b-1}}{b*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\Leftrightarrow S_i = \left(\left(\frac{1-\sum_{j=1}^{K} S_j^L}{\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{1}{b*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}}}\right)^{b-1} * (b*Wi*ai)\right)^{\frac{1}{1-b}}$$

$$\Leftrightarrow S_i = \frac{(1-\sum_{j=1}^{K} S_j^L)*(b*Wi*ai)^{\frac{1}{1-b}}}{\sum_{i=1}^{K}(b*Wi*ai)^{\frac{1}{1-b}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S_i = \frac{(1-\sum_{j=1}^{K} S_j^L)*(Wi*ai)^{\frac{1}{1-b}}}{\sum_{i=1}^{K}(Wi*ai)^{\frac{1}{1-b}}}}$$

Este resultado nos da indicios de que el óptimo se obtiene de la misma forma que el caso general, y que las condiciones no cambian. Como se puede ver, el resultado de la optimización no lineal cuando se establece que ciertos valores S_j son iguales a S_j^L, entonces se tiene el mismo resultado para el caso general, salvo que se restringe el espacio en $1-\sum_{j=1}^{K} S_j^L$ (Cabe recordar que $\sum_{j=1}^{K} S_j^L \leq 1$), que corresponde al factor por el que está multiplicado el resultado S_i del problema general. En otras palabras, es el resultado general para S_i ponderado por el espacio ya ocupado por los valores S_j^L (o el espacio que queda disponible, que es lo mismo). Esto de cierta forma era de esperarse, pues no existen condiciones que cambien al reducirse el espacio disponible, por lo que la solución del problema mantiene las mismas características.

Retomando el problema, se verá ahora el otro caso en que $S_j > S_j^{L}$, con lo que $u_2 = 0$.

Caso $S_{jk} > S_{jk}^{L}$

De la ecuación (19) se tendría el siguiente resultado:

$$b*Wi*\alpha_i*S_i^{b-1} = b*Wj*\alpha_j*S_j^{b-1}$$

$$\Leftrightarrow Wi*\alpha_i*S_i^{b-1} = Wj*\alpha_j*S_j^{b-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{S_i}{S_j}\right)^{b-1} = \frac{Wj*a_j}{Wi*a_i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_i}{S_j} = \left(\frac{Wj*a_j}{Wi*a_i}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{S_i}{S_j} = \left(\frac{Wi*a_i}{Wj*a_j}\right)^{\left(\frac{1}{1-b}\right)}}$$

Como se puede observar, el resultado es el mismo que se obtuvo para el problema general. Esto se explica porque si el valor de S_j óptimo es mayor que S_j^{L}, entonces se está en un caso similar al de S_i, que no está limitado inferiormente. De allí que el resultado sea exactamente el mismo. Al ser igual al resultado del caso del problema general, las conclusiones y comentarios son también aplicables a este caso.

Con estos casos se ha resuelto el problema de optimización cuando existe un límite inferior de espacio a asignarle a ciertos productos. Ahora, cabe la posibilidad de preguntarse acerca de si están considerados todos los casos con estos resultados. Se podría tener la sensación de que no, pues en el caso anterior, se asumió o que todos los valores S_j eran iguales a S_j^{L}, o que todos los valores de S_j eran mayores que S_j^{L}, por lo que vale la pena preguntarse que pasa con los casos mixtos, donde algunos S_j pertenecen al primer caso, y algunos al segundo. Lo cierto es que no es necesario rehacer cálculos, pues tal como se dijo anteriormente, cuando S_j es mayor que S_j^{L}, este se comporta como si fuese un S_i. De hecho, en un sentido más práctico, si el espacio para un producto se define como S_i o S_j es netamente una notación. Basta con notar que si se pusieran todos los espacios asignados como $S_j \geq S_j^L$, y algunos S_j^L tomasen el valor 0, entonces se está ante el mismo planteamiento de problema anterior. El punto de la discusión anterior es que la solución óptima para cualquier valor, ya sea S_i o S_j será $S_i = \frac{(Wi*ai)^{(\frac{1}{1-b})}}{\sum_{i=1}^{K}(Wi*ai)^{(\frac{1}{1-b})}}$ o $S_j = \frac{(Wj*aj)^{(\frac{1}{1-b})}}{\sum_{j=1}^{K}(Wj*aj)^{(\frac{1}{1-b})}}$, y cuando se tenga que algunos valores óptimos se fijan en $S_j = S_j^L$, el resultado será el mismo, pero estará ponderado por el espacio que queda disponible, es decir, $S_i = \frac{(1-\sum_{j=1}^{K} S_j^L)*(Wi*ai)^{\frac{1}{1-b}}}{\sum_{i=1}^{K}(Wi*ai)^{\frac{1}{1-b}}}$. En este sentido, da la impresión que el problema se podría estar resolviendo por etapas, es decir, enfrentar un problema general, asignar ciertos productos a un espacio específico, y una vez que se tiene esta solución, volver a resolver el problema, pero ahora teniendo en cuenta que ciertos productos ya tienen un espacio asignado, y que por ende el espacio disponible para utilización es menor. Más aún, este principio es de bastante utilidad, pues en la vida real, es muy posible que al momento de establecer qué productos irán en las góndolas de los Pronto Copec, se tenga que algunos espacios ya están asignados ya sea por compromisos con ciertos proveedores, o porque el armado de góndolas se hace con distintas frecuencias, y por ende no se trabaja con todo el espacio disponible. Bajo estas condiciones, el problema a resolver es el mismo, siempre que se tenga en cuenta el espacio reducido con el que se trabaja, según se ha visto con los resultados obtenidos. Es este principio el que se retomará al momento de construir el algoritmo de resolución del problema de optimización con el que se trabajará en esta tesis. Como se puede observar, el caso está resuelto para cualquier combinación de resultados de S_j, ya sea que este es mayor que S_j^L o igual a S_j^L, para todo valor de j.

Sólo como una forma de reforzar lo dicho, y demostrar que si $S_j > S_j^L$, se tiene el mismo resultado que para S_i (que no tiene límite inferior), veamos un caso más que se puede encontrar en este tipo de problema de optimización. Antes se asumió que S_i era positivo, pero se verá ahora que sucede si S_i es igual a 0. En el caso que se cumpliese lo anterior y además $S_j > S_j^L$, se esperaría que S_j tuviese un comportamiento similar al de S_i. Veamos esta resolución:

$S_i = 0,\ S_j > S_j^L$

Si se cumple esto, se tiene de la ecuación (8) que:

$$- \quad b*Wi*\alpha_i*S_i^{\,b-1} + u_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow u_1 > 0$$

Por otra parte, de la ecuación (15), dado que $S_j > S_j^L$, se tiene que $u_2 = 0$. Con lo anterior, de la ecuación (10) se observa que:

$$b*Wj*\alpha_j*S_j^{\,b-1} = u_1$$

$$\Leftrightarrow S_j = \left(\frac{u_1}{b*Wj*a_j}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

Se aplica ahora sumatoria:

$$\sum_{j=1}^{k} S_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{u_1}{b*Wj*a_j}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} S_j = 1 = u_1^{\frac{1}{b-1}} * \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{b*Wj*a_j}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{k} (b*Wj*a_j)^{\frac{1}{1-b}}}\right)^{b-1}$$

Reemplazando el término u_1 anterior en la ecuación de S_j, se obtiene que:

$$S_j = \left(\frac{\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{k} (b*Wj*a_j)^{\frac{1}{1-b}}}\right)^{b-1}}{b*Wj*a_j}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\Leftrightarrow S_j = \left(\frac{\left(\sum_{j=1}^{k} (b*Wj*a_j)^{\frac{1}{1-b}}\right)^{1-b}}{b*Wj*a_j}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\Leftrightarrow S_j = \left(\frac{b*Wj*a_j}{\left(\sum_{j=1}^{k} (b*Wj*a_j)^{\frac{1}{1-b}}\right)^{1-b}}\right)^{\frac{1}{1-b}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S_j = \frac{(b*Wj*a_j)^{\frac{1}{1-b}}}{\sum_{j=1}^{k}(b*Wj*a_j)^{\frac{1}{1-b}}}}$$

Como se puede observar, se cumple lo esperado. El valor que se obtiene para S_j es el mismo que se obtiene para el problema general, donde se tiene un S_i sin cota inferior de producto a colocar en las góndolas. Como se puede ver, si S_j no toca su límite inferior, su óptimo es exactamente el mismo que el de una variable sin límite.

11.3.3 Caso con límite inferior y bono por posición

Finalmente, antes de empezar a trabajar con el algoritmo nombrado, se quiere revisar un último caso, donde se tiene un problema similar al anterior, donde se estipulan límites inferiores, pero ahora se quiere resolver cuando se tiene un bono por posición. Este bono por posición se conlleva con la idea de que existen posiciones en las góndolas, como por ejemplo aquellas que están a la altura de los ojos o de las manos del comprador, que influyen positivamente en la compra de un producto. Es decir, cuando un producto se coloca en esas posiciones, el número de unidades que se venden del producto crece. Bajo este concepto, se construye un tercer modelo, donde se establece que cuando un producto se le asigna espacio a cierta altura, este puede recibir una bonificación en la demanda que afronta, aumentando su venta en término de unidades. Cabe destacar que el bono es por altura y no por si el producto se encuentra a los lados o en el centro. Para términos prácticos, las góndolas pueden tener hasta 4 filas de productos, donde la fila superior está a la altura de los ojos. En este sentido, el bono es mayor en la fila superior, y va descendiendo a medida que se baja a la fila inferior. Para establecer lo anterior, para la variable S_i se ha establecido un nuevo subíndice k que corresponde a la posición (o altura) a la que se encuentra el producto colocado. En las ecuaciones siguientes, B es un parámetro que pondera la demanda por el producto. Por ejemplo, si cuando se coloca un producto i en la posición k este aumenta en un 10% su venta, entonces $B_{ik} = 1,1$. Se muestra el problema de optimización:

$$\text{Max} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{I} \sum_{k=1}^{K} B_{ik}*Wi * [\alpha_i * S_{ik}{}^{b}] + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{J} \sum_{k=1}^{K} B_{jk}*Wj * [\alpha_j * S_{jk}{}^{b}]$$

s.a.

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{I} \sum_{k=1}^{K} S_{ik} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{J} \sum_{k=1}^{K} S_{jk} = 1$$

$$S_{jk}{}^{L} \leq S_{jk} \;, \qquad j = 1,..., J \;;\; k = 1,...,K$$

$$S_{ik} \,,\, S_{jk} \geq 0 \,, \quad i = 1,...,I,\; j = 1,..., J \,,\; i \neq j; \quad k = 1,...,K$$

Para aplicar las condiciones de KKT, se replantea el problema de la siguiente forma:

$$\text{Min} \; -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{I} \sum_{k=1}^{K} B_{ik}*Wi * [\alpha_i * S_{ik}{}^{b}] - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{J} \sum_{k=1}^{K} B_{jk}*Wj * [\alpha_j * S_{jk}{}^{b}]$$

s.a.

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{I} \sum_{k=1}^{K} S_{ik} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{J} \sum_{k=1}^{K} S_{jk} = 1$$

$$S_{jk}{}^{L} \leq S_{jk} \;, \qquad j = 1,..., J \;;\; k = 1,...,K$$

$$S_{ik} \,,\, S_{jk} \geq 0 \,, \quad i = 1,...,I,\; j = 1,..., J \,,\; i \neq j; \quad k = 1,...,K$$

Con lo anterior, el Lagrangeano vendría a ser:

$$L = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{I} \sum_{k=1}^{K} B_{ik}*Wi*[\alpha_i * S_{ik}^{\ b}] - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{J} \sum_{k=1}^{K} B_{jk}*Wj*[\alpha_j * S_{jk}^{\ b}] +$$

$$u_1*(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{I} \sum_{k=1}^{K} S_{ik} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{J} \sum_{k=1}^{K} S_{jk} - 1) + u_2*(S_{jk}^{L} - S_{jk})$$

Se verán ahora las condiciones de KKT:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathrm{Sik}} = -b*B_{ik}*Wi*\alpha_i*S_{ik}^{\ b-1} + u_1 \geq 0 \qquad (22)$$

$$S_i * (\frac{\partial L}{\partial \mathrm{Si}}) = S_{ik}*(-b*B_{ik}*Wi*\alpha_i*S_{ik}^{\ b-1} + u_1) = 0 \qquad (23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathrm{Sjk}} = -b*B_{ik}*Wj*\alpha_j*S_{jk}^{\ b-1} + u_1 - u_2 \geq 0 \qquad (24)$$

$$S_j*(\frac{\partial L}{\partial \mathrm{Sj}}) = S_j*(-b*B_{jk}*Wj*\alpha_j*S_{jk}^{\ b-1} + u_1 - u_2) = 0 \qquad (25)$$

$$S_{ik}, S_{jk} \geq 0 \qquad (26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u1} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{I} \sum_{k=1}^{K} S_{ik} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{J} \sum_{k=1}^{K} S_{jk} - 1 \geq 0 \qquad (27)$$

$$u_1*(\frac{\partial L}{\partial u1}) = u_1*(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{I} \sum_{k=1}^{K} S_{ik} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{J} \sum_{k=1}^{K} S_{jk} - 1) = 0 \qquad (28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u2} = S_{jk}^{L} - S_{jk} \geq 0 \qquad (29)$$

$$u_2*(\frac{\partial L}{\partial u2}) = u_2*(S_{jk}^{L} - S_{jk}) = 0 \qquad (30)$$

$$u_1, u_2 \geq 0 \qquad (31)$$

Se parte ahora observando la ecuación (23), si se asume que Si es mayor que 0 (En el caso que fuese igual a 0, entonces esa es la solución óptima), entonces se tiene que:

$$b*B_{ik}*Wi*\alpha_i*S_{ik}^{\ b-1} = u_1 \qquad (32)$$

$$\Leftrightarrow S_{ik} = \left(\frac{u1}{b*B_{ik}*Wi*ai}\right)^{\frac{1}{b-1}} \quad (33)$$

Si se tiene que $S_{jk}{}^{L} > 0$ para todo valor de j, lo que es natural dado que si $S_j{}^{L}$ fuese igual a 0, entonces sería equivalente a que la variable no tuviese límite inferior, se puede asumir de la ecuación (25) que:

$$b*B_k*Wj*\alpha_j*S_{jk}{}^{b-1} = u_1 - u_2$$

Remplazando u_1, según se vio en la ecuación (32):

$$u_2 = b*B_{ik}*Wi*\alpha_i*S_{ik}{}^{b-1} - b*B_{jk}*Wj*\alpha_j*S_{jk}{}^{b-1} \quad (34)$$

Al igual que en el problema anterior, se tienen dos posibilidades: Que S_{jk} sea igual a $S_{jk}{}^{L}$, o que S_{jk} sea mayor que $S_{jk}{}^{L}$. Se analizan los casos:

<u>Caso $S_{jk} > S_{jk}{}^{L}$</u>

Para este caso se tiene que u_2 es igual a 0. Se ve a continuación como queda la ecuación (34) en este caso:

$$b*B_{ik}*Wi*\alpha_i*S_{ik}{}^{b-1} = b*B_{jk}*Wj*\alpha_j*S_{jk}{}^{b-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{ik}^{b-1}}{S_{jk}^{b-1}} = \frac{b*B_{jk}*Wj*a_j}{b*B_{ik}*Wi*a_i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{ik}}{S_{jk}} = \left(\frac{B_{jk}*Wj*a_j}{B_{ik}*Wi*a_i}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{S_{ik}}{S_{jk}} = \left(\frac{B_{ik}*Wi*a_i}{B_{jk}*Wi*a_j}\right)^{\frac{1}{1-b}}}$$

Como se puede observar, este resultado es muy similar al del problema de optimización anterior, donde cuando se cumple que $S_{jk} > S_{jk}{}^{L}$, se tiene el mismo resultado, pero sin las multiplicaciones por los bonos B_{ik} y B_{jk}. Es algo más bien lógico pensar que el resultado será el mismo que del problema anterior, multiplicado por los bonos por posición correspondiente a cada tipo de producto (i o j). Como se vio antes para el primer problema de optimización, la relación entre un par de productos i y j está dada por la multiplicación del margen que deja el producto (w_i), por el ponderador de la demanda (a_i o a_j), y por ende, al ser B_{ik} un escalar que pondera a a_i, entonces la ecuación se mantiene. Bastaría con definir a $A_{ik}' = B_{ik} * a_i$ para darse cuenta que sería el mismo caso de los dos problemas anteriores, sólo que con un nuevo parámetro ponderador de la demanda. Por ende, los mismos resultados y conclusiones que los problemas anteriores se aplican a este caso.

Algo interesante de observar es que la relación entre productos i y j se complejiza un poco, pues cambia la relación que debe existir entre ambos dependiendo de la posición. De esta misma forma, se podría pensar que si se cuenta con una demanda específica para un producto, o se tiene que el margen que deja cierto producto no se puede variar en demasía, entonces variando la posición del producto en la góndola se podría obtener la relación óptima que entrega la fórmula que se muestra arriba, al modificar el numerador o el denominador con B_{ik} o B_{jk} según sea el caso.

Se muestra ahora el segundo caso posible para el valor de S_{jk}.

Caso $S_{jk} = S_{jk}^L$

Al tener este caso, se tiene de la ecuación (30) que $u_2 > 0$, y por ende, de la ecuación (34) se tiene que:

$$u_2 = b*B_k*Wi*\alpha_i*S_{ik}^{\,b-1} - b*B_k*Wj*\alpha_j*(\underline{S_{jk}}^L)^{\,b-1}$$

$$\Leftrightarrow S_{ik} = \left(\frac{u_2 + b*B_k*Wj*a_j*(S_{jk}^L)^{\,b-1}}{b*B_k*Wi*a_i}\right)^{\frac{1}{b-1}} \qquad (35)$$

Como se puede observar, esta ecuación es similar a la obtenida en el problema anterior (Ecuación (20)), con la salvedad de que aquí está el subíndice k y además existe el bono B_k. Para hacer más parecida la ecuación (35) a la (20), basta definir $A_{ik}' = B_k*a_i$, y $A_{jk}' = B_k*a_j$, con lo que el problema se reescribiría como:

$$S_{ik} = \left(\frac{u_2 + b*Wj*A_{jk}'*(S_{jk}^L)^{\,b-1}}{b*Wi*A_{ik}'}\right)^{\frac{1}{b-1}} \qquad (36)$$

Así, se tiene una ecuación más parecida a la ecuación (20), y dado que al definir el nuevo parámetro A_{ik}' y A_{jk}' se tienen ecuaciones similares en forma al problema de optimización anterior, entonces es natural pensar que los resultados son los mismos para S_{ik}. Con este argumento, se tiene que el resultado bajo estas condiciones sería:

$$\boxed{S_{ik} = \frac{\left(1-\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} S_{jk}^{L}\right)*(Wi*A_{ik}^{\prime})^{\frac{1}{1-b}}}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}(Wi*A_{ik}^{\prime})^{\frac{1}{1-b}}}}$$

El resultado es el mismo que el encontrado para el problema anterior de optimización con límite inferior de producto a colocar en góndola. Como se puede observar, ahora el límite de espacio ocupado $(1-\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} S_{jk}^{L})$ está dado también por el nivel k que es la posición del producto en las góndolas. Aparte de lo anterior, las conclusiones son similares a las encontradas para el problema de optimización visto antes.

11.4 Comentarios acerca de los resultados:

Ya se ha visto y analizado el modelo de optimización de góndolas, y los casos posibles. Ahora es necesario revisar la aplicación de los modelos teóricos a los casos reales. Para llevar la optimización al caso práctico, se trabajará con el segundo modelo, donde se tiene el caso general con la restricción de cantidad mínima de producto a colocar en las góndolas. Es claro observar que si el resultado óptimo de este problema es aquel que resuelve el problema general (pues es el que menos limitaciones impone), entonces se debiese tener un algoritmo que buscase aproximarse lo mejor posible a ese resultado. En la práctica, existen limitantes de cantidad mínima de producto a colocar, y por ende se deben establecer estos límites a pesar de que alejan un poco el resultado del óptimo general. Bajo este mismo razonamiento, si seguimos con la notación de que los productos con límite inferior de cantidad de producto a colocar en góndolas se denominan S_j, entonces es claro que al resolver el problema general, cabe la posibilidad de que los resultados óptimos entreguen valores S_j menores que el valor límite inferior S_j^L. Por lo tanto, se busca resolver el problema con límite inferior de productos a colocar en las góndolas, pero alejándose lo menos posible del óptimo del problema general. Es así como el algoritmo que se utiliza para resolver el problema con límite inferior de producto parte desde el problema general, y va adaptando la solución para que respete los valores mínimos de las restricciones. Es un proceso de repetición, donde se parte de un caso base sin restricción, y mediante iteraciones busca aproximarse a la solución con restricción. Surge la duda acerca de si un algoritmo que resuelve el problema con límite inferior de producto a colocar en góndolas mediante iteraciones que parten del problema general es una buena aproximación. Según lo que se ha revisado, si debiese serlo. Entre las conclusiones que se obtuvieron en el análisis de la solución de los problemas de optimización teóricos, se encontró que resolver el problema cuando ciertas variables S_j ya están fijadas (es decir, sectores de la góndola ya han sido ocupados), es exactamente igual a resolver el problema cuando la góndola completa está disponible para ser utilizada. El resultado cuando se tenía que los valores de S_j eran iguales a S_j^L, y S_i era mayor a 0, entregaba como conclusión que el resultado para S_i óptimo era el mismo que para el caso general, ponderado por un factor que correspondía al espacio total disponible, menos el espacio ya ocupado por los S_j^L ya fijados. El resultado de S_i para el problema de optimización con límite inferior de producto a colocar en góndolas, cuando se tenía que $S_j = S_j^L$, y $S_i > 0$, era el siguiente:

$$S_i = \frac{(1-\sum_{j=1}^{K} S_j^L) * (Wi * ai)^{\frac{1}{1-b}}}{\sum_{i=1}^{K} (Wi * ai)^{\frac{1}{1-b}}}$$

Donde se puede observar que la solución para S_i es la solución para el problema general, multiplicado por un ponderador que muestra el espacio que queda disponible, dado que se han fijado cantidades de productos a colocar S_j^L. Se define a continuación el algoritmo.

11.5 **Definición del algoritmo de optimización**

Para partir con el algoritmo, se definen primero dos conjuntos, Io e Io^C. Estos conjuntos están compuestos por las variables S_j. Los conjuntos se definen como:

$$Io = \{j, S_j < S_j^L\} \text{ e } Io^C = \{j, S_j \geq S_j^L\}$$

donde el primer conjunto contiene a todos los elementos S_j que violan la restricción de mínimo de producto a colocar en la góndola, y el grupo dos es el complemento del primero, es decir, contiene a todos los elementos S_j que cumplen con la restricción. Cabe destacar que los elementos S_i serán considerados como elementos del conjunto Io^C, pues dado que su límite inferior es 0, entonces siempre cumplen con la restricción. Bajo condiciones iniciales, ambos conjuntos se encuentran vacíos.

Antes de continuar, se debe realizar una especificación acerca de la manera en que está definido Si. Es claro pensar que cuando se colocan los productos en las góndolas, la variedad o productos presentes que se observan son aquellos que se encuentran en la parte frontal de la góndola o en la cara de la góndola. Por ende, no es lo mismo decir que un producto i tiene una presencia del 10% en la góndola, pero el 10% está agrupado hacia el fondo de la góndola, a que el producto tiene una presencia del 10% en la góndola, pero ese 10% está en la cara frontal de la góndola. Es por este motivo que S_i se define de la siguiente forma para este algoritmo:
S_i y S_j : Porcentaje de espacio que ocupan los productos i y j en la góndola, donde el espacio se mide sólo en la cara frontal de las góndolas.

Con esta especificación, se asegura que cuando se pide que un producto tenga una participación del 50%, entonces quiere decir que 50% de las caras de la góndola estarán ocupadas por ese producto, y que por ende serán visibles por los compradores.

Ya que se han definido ambos grupos y S_i, se explican los pasos del algoritmo:

Paso 0:

Se definen los límites inferiores Sj^L para los casos que corresponda. Una vez definidos, se plantea y resuelve el caso general de optimización de productos en góndolas. El problema se plantea de la siguiente manera:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}]$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{K} S_i = 1$$

$$S_i \geq 0 , \qquad i = 1,..., K$$

En este paso, los S_j se toman simplemente como S_i, pues aunque los límites inferiores han sido definidos, no se utilizan como restricciones. Tras obtener los resultados de la optimización, debe revisar qué elementos pertenecen a Io y qué elementos pertenecen a Io^c, o en otras palabras, se debe revisar qué valores óptimos respetan los límites inferiores, y que valores óptimos no. Tras el final de este paso, todos los elementos debiesen estar en alguno de los dos conjuntos.

Antes de pasar al siguiente paso, es posible que en el resultado general se tenga como solución que un producto tiene asignado menos del espacio que ocupa por una unidad, lo que haría esa solución infactible. Dado que no se puede imponer que todos los productos deben tener asignado un porcentaje de espacio mayor al que ocupan por unidad, pues eso obligaría al modelo a darle a todos los productos al menos el espacio que ocupan por unidad, entonces se impone que al obtener los resultados del algoritmo, se deben revisar los porcentajes de espacio asignado a cada producto en el óptimo (S_i^o) y se ocupa la siguiente regla de decisión antes de avanzar al paso 1: Si S_i^0 < % de espacio que ocupa el producto i por unidad, entonces $S_i^0 = 0$. Si no se cumple esto, entonces S_i^0 conserva su valor.

Acá termina el paso 0 y se da paso a la iteración del algoritmo.

Paso 1. Iteración:

Se revisa el conjunto Io. Según sea el caso, se realiza una acción:

- Si se cumple que $Io = \emptyset$, entonces se salta el paso 2 y se termina el algoritmo.

- Si se cumple que Io $\neq \varnothing$, entonces se realiza lo siguiente: Para todo aquel valor Sj que pertenezca a Io, se impone que Sj = $S_j^{1} = S_j^{L}$ que es un valor fijo de ahora en adelante. Estos valores pasan a ser parte del conjunto Io^C. Cabe destacar que si un producto dio como resultado en el paso anterior que tenía asignado menos del espacio que ocupa por unidad, y por ende su valor de presencia en la góndola se hizo 0, si tiene un límite inferior cae dentro de esta categoría de producto que no cumple con el mínimo de espacio que debe tener en la góndola, y por ende pasa de tener valor Sj = 0 a Sj = $S_j^{1} = S_j^{L}$. Una vez fijados estos valores, se pasa al paso 2.

<u>Paso 2. Iteración:</u>

Se resuelve ahora nuevamente el problema de optimización general, pero con la variante de que en las restricciones se ha impuesto que ciertos productos deben tener su valor de porcentaje de presencia en la góndola fijo. Asimismo, se debe tener en cuenta que el espacio disponible para el resto de los productos se ha reducido, por lo que se debe expresar esto en el modelo. Los productos ya fijos son los que se han ido denominando S_j^1. Cuando se vuelve a resolver el problema general, este se plantea de la siguiente manera:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\ b}] + \sum_{j=1}^{K} Wj * [\alpha_j * S_j^{\ b}]$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{K} S_i + \sum_{j=1}^{K} S_j = 1 - \sum_{j=1}^{K} S_j^1$$

$$S_j = S_j^1, \text{ para todo j fijado en paso 1}$$

$$S_i \geq 0 , \qquad i = 1,..., K$$

Al resolver este problema y obtener las soluciones para S_i y S_j, se asignan los elementos que correspondan al conjunto Io, y aquellos que correspondan al conjunto Io^C. Se utiliza también la misma regla de decisión que el paso 0 en caso de que el porcentaje de espacio asignado para un producto sea menor al porcentaje de espacio que ocupa una unidad del producto. Tras realizar esto, se vuelve al Paso 1.

Con el algoritmo anterior, nos aseguramos que se irá tendiendo a la solución donde todas las variables cumplan con las restricciones del problema de optimización de góndolas con límite inferior de productos a colocar. Ahora, es discutible el hecho de que la solución sea óptima, pues esto no se demuestra sólo aplicando el algoritmo. Para establecer una forma de demostrar la optimalidad de la solución, se utiliza la "Condición Suficiente de Lagrange", que permite decir que si un punto $\overline{x}$ es mínimo local para el problema de optimización y cumple con ciertas características, entonces es un mínimo global del problema.

Para partir con la demostración de que los resultados obtenidos son óptimos globales, se explica primero las condiciones a cumplir. Se define un problema de minimización de una función objetivo con restricciones

$$\text{Min } f(x)$$
$$\text{s.a. } g_i(x) \leq 0$$
$$h_j(x) = 0$$

y supongamos que $\overline{x}$ es un mínimo local para este problema. Si se cumple que:

- $f(x)$, $g_i(x)$, $h_j(x) \in C^1$ (tienen primera derivada y la derivada es continua)
- $f(x)$ es convexa
- $h_j(x)$ son afines, es decir, se pueden representar de la forma $h_j(x) = a_j^T * x + b$, con $a_j \in \Re^n$ y $b \in \Re$
- Si $\overline{x}$ cumple con la condición de Lagrange, es decir, existen $u_i \in \Re$ tal que $\nabla f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{P} u_i * \nabla h_i(\overline{x})$

entonces $\overline{x}$ es el mínimo global del problema.

Existen condiciones también para las variables $g_i(x)$, pero por el momento, no son del interés del lector, pues el problema de optimización para el cual se busca demostrar que tiene solución que es óptimo global, sólo tiene restricciones activas.

Una vez que ya está definida la condición suficiente de Lagrange, procedamos a demostrar que la solución del modelo del algoritmo es óptimo global. Reescribamos el problema de optimización de la siguiente forma:

$$\text{Min } f(S_i,S_j) = -\sum_{i=1}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}] - \sum_{j=1}^{K} Wj * [\alpha_j * S_j^{\,b}]$$

s.a.

$$h_1: \sum_{i=1}^{K} S_i + \sum_{j=1}^{K} S_j - 1 + \sum_{j=1}^{K} S_j^{1} = 0$$

$$h_2: S_j^{1} - S_j = 0$$

$$S_i \geq 0\,, \qquad i = 1,\ldots, K$$

Se revisa a continuación si el problema y la solución factible cumplen con las condiciones planteadas. Se supone además que existe una solución $\overline{S_i} \in \Re^n$ que es factible para el problema anterior. Por un tema de facilitar la demostración, y dado que la separación de variables en subíndices i y j es meramente de notación, pues tienen un mismo comportamiento, se reescribirá la ecuación $\sum_{i=1}^{K} S_i + \sum_{j=1}^{K} S_j - 1 + \sum_{j=1}^{K} S_j^{1} = 0$ como $\sum_{i=1}^{K} S_i - 1 + \sum_{j=1}^{K} S_j^{1} = 0$, donde los valores S_j y S_j se juntaron en una misma sumatoria, y se les puso el índice i como genérico. Con el problema ya planteado, se revisan las condiciones. Se estudia primero si $f(x), g_i(x), h_j(x) \in C^1$:

- $\dfrac{\partial f(S_i, S_j)}{\partial S_i} = -\, b*Wi*\alpha_i*S_i^{\,b-1}$
- $\dfrac{\partial f(S_i, S_j)}{\partial S_j} = -\, b*Wj*\alpha_j*S_j^{\,b-1}$
- $\dfrac{\partial h_1(S_i)}{\partial S_i} = 1$

- $\dfrac{\partial h_1(S_j)}{\partial \mathrm{S_j}} = 1$
- $\dfrac{\partial h_2(S_i)}{\partial \mathrm{S_i}} = 0$
- $\dfrac{\partial h_2(S_j)}{\partial \mathrm{S_j}} = -1$

Como se puede observar, las seis ecuaciones anteriores muestran que tanto $f(S_i, S_j)$, como h_1 y h_2 son diferenciables y sus derivadas son continuas, para todo valor de S_j y S_j. Se revisa ahora la convexidad de $f(S_i, S_j)$:

- $\dfrac{\partial^2 f(S_i, S_j)}{\partial \mathrm{S_i}^2} = - b*(b-1)*Wi*\ \alpha_i*\ S_i^{\,b-2} \geq 0$, recordando que $b \leq 1$
- $\dfrac{\partial^2 f(S_i, S_j)}{\partial \mathrm{S_j}^2} = - b*(b-1)*Wj*\ \alpha_j*\ S_j^{\,b-2} \geq 0$, recordando que $b \leq 1$
- $\dfrac{\partial^2 f(S_i, S_j)}{\partial \mathrm{S_i} \partial \mathrm{S_j}} = 0$

Se puede ver claramente que el Hessiano de $f(S_i, S_j)$ es semidefinido positivo, y por lo tanto, la función es convexa, para todo valor de S_i y S_j.

A continuación, se revisa si las restricciones h_1 y h_2 son afines. Cabe recordar que las restricciones son afines si se pueden representar de la forma forma $h_j(S_j) = a_j^T * S_j + b$, con $a_j \in \Re^n$ y $b \in \Re$.

- $h_1(S_i)$: $\sum_{i=1}^{K} S_i - 1 + \sum_{j=1}^{K} S_j^1 = 0 \Leftrightarrow a_j^T * S_j^v + b$, donde a_j^T es un vector de K elementos, donde todos los elementos tienen valor 1, $b = \sum_{j=1}^{K} S_j^1 - 1 \in \Re$. S_i^v sólo se escribe de esa manera para denotar que es el vector que contiene a todos los valores de S_i (y S_j, recordar que se unieron sólo para facilitar la operación)
- $h_2(S_j)$: $S_j^1 - S_j = 0 \Leftrightarrow S_j - S_j^1 = 0 \Leftrightarrow a_j^T * S_j^v + b$, donde a_j^T es nuevamente un vector donde todos los valores son iguales a 1, Sj^v es nuevamente el vector de valores para S_j, y finalmente, $b = - S_j^1 \in \Re$.

Así, se ha demostrado que h_1 y h_2 son afines. Finalmente, veamos si para un $\overline{S}$ óptimo local, se cumplen las condiciones de Lagrange:

- $\nabla f(\overline{S}) = \begin{pmatrix} -b * Wi * \alpha_i * \overline{S}_i^{\,b-1} \\ -b * Wj * \alpha_j * \overline{S}_j^{\,b-1} \end{pmatrix}$
- $\nabla h_1(\overline{S}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\nabla h_2(\overline{S}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Se debe probar ahora que existen $u_i \in \Re$ tal que:

$$\begin{pmatrix} -b * Wi * \alpha_i * \overline{S}_i^{\,b-1} \\ -b * Wj * \alpha_j * \overline{S}_j^{\,b-1} \end{pmatrix} = u_1 * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lo anterior puede rescribirse como dos nuevas ecuaciones:

$$-b * Wi * \alpha_i * \overline{S}_i^{\,b-1} = u_1 \qquad (37)$$

$$-b * Wj * \alpha_j * \overline{S}_j^{\,b-1} = u_1 - u_2 \qquad (38)$$

La ecuación (37) indica claramente que el valor de $u_1 = -b * Wi * \alpha_i * \overline{S}_i^{\,b-1}$. Reemplazando el valor de u_1 en la ecuación (38) se tiene que:

$$-b * Wj * \alpha_j * \overline{S}_j^{\,b-1} = -b * Wi * \alpha_i * \overline{S}_i^{\,b-1} - u_2$$

$$\Leftrightarrow u_2 = b * Wj * \alpha_j * \overline{S}_j^{\,b-1} - b * Wi * \alpha_i * \overline{S}_i^{\,b-1}$$

$$u_2 = b * (Wj * \alpha_j * \overline{S}_j^{\,b-1} - b * Wi * \alpha_i * \overline{S}_i^{\,b-1})$$

Luego, se ha demostrado que existen $u_1, u_2 \in \Re$, tal que se cumple que:

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{P} u_i * \nabla h_i(\bar{x}),$$

$$u_1 = - b*Wi* \alpha_i * \bar{S}_i^{b-1}$$

$$u_2 = b*(Wj* \alpha_j * \bar{S}_j^{b-1} - b*Wi* \alpha_i * \bar{S}_i^{b-1})$$

y por ende, se cumplen las condiciones de Lagrange.

Dado que se cumplen todas las condiciones pedidas para el mínimo local $\bar{x}$, entonces se puede concluir que para el algoritmo planteado, si se encuentra una solución factible que es mínimo local, entonces se cumple que $\bar{x}$ es mínimo global. Dado que el Hessiano de f(x) es semidefinido positivo, no se puede asegurar que ese mínimo global es único.

El resultado demostrado comprueba que existe un mínimo global, pero no se puede decir que este es único. En caso de no ser único, esto trae consecuencias en la práctica. Lo interesante del resultado es que si existe más de un valor para los S_i y S_j óptimos que entregan el máximo global para el problema, entonces es posible encontrar distintas (al menos dos) combinaciones que bajo las condiciones del problema de optimización entregan un valor máximo para la función objetivo. Esto implica que para el caso real, es posible tener un mayor poder de negociación con los proveedores, pues al ser la variable simplemente el espacio asignado a cada producto, entonces el resultado indica que con distintas combinaciones de productos puedo tener un mismo margen total. Si se logran definir estas combinaciones de productos, entonces es posible saber de qué productos no se depende tanto en las góndolas, pues son sustituibles por otros y se alcanza un mismo margen global, lo que otorgaría al retailer mayor holgura para negociar con el proveedor precios y condiciones de compra más convenientes.

11.6 **Ejemplo de aplicación del algoritmo**

Para mostrar el funcionamiento del algoritmo, se procede ahora a mostrar un pequeño ejemplo con 5 productos distintos sobre los cuales se debe tomar la decisión de cuales irán en la góndola, y cuanto espacio se les asignará. Los parámetros del problema se muestran en la siguiente tabla:

	Wi ($)	a_i	b	% espacio ocupado por unidad	S_j^L
Producto 1	60	10	0,5	1%	10,0%
Producto 2	40	50	0,5	0,7%	3,5%
Producto 3	50	75	0,5	0,5%	10,0%
Producto 4	20	100	0,5	0,3%	6,0%
Producto 5	30	200	0,5	0,1%	30,0%

Tabla 1 – Datos ejemplo algoritmo

Se siguen los pasos establecidos en el algoritmo:

Paso 0: Se resuelve el problema general:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{5} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}]$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{K} S_i = 1$$

$$S_i \geq 0 , \qquad i = 1,..., 5$$

Se muestra a continuación la solución al problema general al optimizar el modelo en GAMS:

Solución a problema general (Paso 0)	Si	S_j^L	% espacio por unidad
Producto1	0,7%	10,0%	1%
Producto2	6,8%	3,5%	0,7%
Producto3	24,1%	10,0%	0,5%
Producto4	6,8%	6,0%	0,3%
Producto5	61,6%	30,0%	0,1%

Tabla 2 – Paso 0 ejemplo algoritmo

Como se puede observar, los productos cumplen con las restricciones, salvo el producto 1, quien además de tener asignado un porcentaje de espacio muy lejano del mínimo de presencia que se pide para él, no tiene asignado ni siquiera el espacio que ocupa una unidad de producto. Por ende, se le asigna a este producto un valor de 0% de presencia en la góndola, como se explicó en el paso 0. Con este mix de productos en las góndolas, el valor óptimo de la función objetivo es $F(S_i)$ = $7.643.

Dado lo anterior, se tiene que:

Io = { Producto 1}
Ioc = { Producto 2, Producto 3, Producto 4, Producto 5}

Se sigue a continuación con el paso 1.

Paso 1: Se revisa el cumplimiento de las restricciones (Primera iteración):

Dado que Io $\neq \emptyset$, se debe seguir iterando. Tal como se explicó, en el paso 1 se debe imponer la restricción de presencia mínima, dando el valor de presencia en góndola a ese producto igual a su límite inferior. En otras palabras, para el producto 1, se impone que:

$S_1 = S_1^1 = 10\%$

Como todos los otros productos cumplen con las restricciones, se pasa al siguiente paso.

Paso 2: Solución problema con nuevas restricciones (Primera iteración):

Se busca resolver el siguiente problema:

$$\text{Max} \sum_{i=2}^{5} (Wi * \alpha_i * S_i^{\,b}) + W1 * (\alpha_1 * (S_1^1)^b)$$

s.a.

$$\sum_{i=2}^{5} S_i = 1 - S_1^1$$

$$S_1 = S_1^1$$

$$S_i \geq 0, \qquad i = 1,..., K$$

Se muestra a continuación la solución al nuevo problema al optimizar el modelo en GAMS:

Solución a problema optimización (Iteración 1)	Si	S_j^L	% espacio por unidad
Producto1	10,0%	10,0%	1%
Producto2	6,2%	3,5%	0,7%
Producto3	21,8%	10,0%	0,5%
Producto4	6,2%	6,0%	0,3%
Producto5	55,8%	30,0%	0,1%

Tabla 3 – Iteración 1 ejemplo algoritmo

Ahora se tiene que todos los productos cumplen con las restricciones impuestas, por lo que podemos decir que estamos ante una solución factible, y como se demostró en la optimización del problema mediante KKT, esta solución es óptima para las condiciones del problema. Además, esta será siempre global, dado lo probado con la condición suficiente de Lagrange. Con este mix de productos en las góndolas, el valor óptimo de la función objetivo es $F(S_i) = \$7.418,59$.

Dado lo anterior, se tiene que:

Io = { ∅ }

Ioc = {Producto 1, Producto 2, Producto 3, Producto 4, Producto 5}

Se regresa al paso 1.

Paso 1 (Segunda iteración):

Se cumple que Io = $\emptyset$, entonces se salta el paso 2 y se termina el algoritmo.

De este ejemplo se puede observar el funcionamiento del algoritmo. Se ha visto que el algoritmo funciona correctamente en encontrar una solución que es óptimo global del problema, aproximándose desde el problema general al problema con restricciones de espacio mínimo para ciertos productos. Además, se muestra que existe una leve baja en la función objetivo que se maximiza con la imposición de que ciertos productos tienen un valor fijo de presencia en la góndola igual a su límite inferior permitido. Esto es lógico bajo la óptica de que el problema general no impone casi ninguna restricción (salvo la de no ocupar más del espacio disponible), y por ende tiene mayor holgura para aproximarse a un valor óptimo del problema. En este sentido, se puede decir que el problema general entrega una solución que es cota máxima para el óptimo de la función objetivo, y que cualquier restricción que se agregue sólo tiende a reducir el valor de la función objetivo.

11.7 **Comparación de resultado de heurística versus aplicación directa**

Un tema que es discutible es el hecho de la aplicación misma de este algoritmo. Es natural pensar que un algoritmo busca ofrecer una mejor solución, o al menos, una solución más rápida que algún otro método. En este caso, el algoritmo mostrado se establece como una opción a la aplicación directa de la solución del problema de optimización con restricción de porcentaje mínimo de presencia que debe tener un producto. Como una forma de validar este algoritmo como mecanismo de solución simple, fácil de entender, y/o más cercano a la cota máxima impuesta por el problema general, se resolverá el problema anterior, pero optimizando directamente la función con límite inferior (S_i^1) de producto a poner en las góndolas, que es el mismo modelo utilizado por Corstjean y Doyle, pero con los supuestos explicados al principio de este capítulo. Se muestra a continuación el planteamiento de este problema, con los datos del ejemplo anteriormente resuelto:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{5} (Wi * \alpha_i * S_i^{\,b})$$

s.a.

$$\sum_{i=2}^{5} S_i = 1$$

$$S_i \geq S_i^1, \ \forall i$$

$$S_i \geq 0, \qquad i = 1,..., K$$

Se aplica la optimización al problema anterior, utilizando GAMS para que optimice la función no lineal, con las restricciones mostradas, de manera directa. Se muestra a continuación el resultado de la optimización:

Solución a problema general directo	Si	S_j^L	% espacio por unidad
Producto1	10,0%	10,0%	1%
Producto2	7,0%	3,5%	0,7%
Producto3	21,6%	10,0%	0,5%
Producto4	6,1%	6,0%	0,3%
Producto5	55,3%	30,0%	0,1%

Tabla 4 – Solución directa ejemplo algoritmo

Como se puede observar, los valores han cambiado con respecto a la solución entregada por el algoritmo. Esto da indicios de que ambas formas de resolver el problema pueden ser similares, pero no idénticas. Veamos un cuadro comparativo con los resultados

Solución entregada por el programa	Si algoritmo	Si problema con límite inferior	Diferencia primera - segunda solución
Producto1	10,0%	10,0%	0,0%
Producto2	6,2%	7,0%	0,8%
Producto3	21,8%	21,6%	-0,2%
Producto4	6,2%	6,1%	-0,1%
Producto5	55,8%	55,3%	-0,5%
Valor función objetivo	$ 7.418,59	$ 7.417,53	-$ 1,05

Tabla 5 – Comparación solución ejemplo

El cuadro comparativo muestra resultados interesantes:

- Primero, se puede apreciar que el producto que tuvo originalmente problemas para cumplir con la restricción de límite inferior, y que fue forzado a tener un valor igual a tal límite, presenta en la solución directa del problema justamente como valor óptimo el límite inferior. Es decir, se puede deducir que ambos modelos funcionan bajo la lógica que dado que no se le puede asignar un bajo porcentaje de espacio a ese producto, pues no aporta mucho al mix, entonces lo mejor es asignársele el mínimo. En este sentido, al menos se muestra que el algoritmo sigue una lógica correcta.
- En segundo lugar, se puede observar que aquellos productos que no fueron forzados a un valor particular, presentan valores dispares en ambos casos. A pesar de no ser cambios muy grandes (en el caso de los productos 3 y 4, ni siquiera corresponde a una variación suficiente para poner una unidad más de producto), es importante el resultado de que modificando levemente la combinación de productos 2, 3, 4 y 5, se pueda obtener un resultado mayor que en el modelo simplificado de Corstjean y Doyle. Para este modelo, el resultado de la función objetivo es de $7.417,53, mientras que para el algoritmo, el resultado es de $7.418,59. Con esto, la diferencia entre ambos es de sólo -$1,05. Se debe tener en cuenta que el problema no tiene una gran cantidad de productos, y por ende, en problemas con una mayor cantidad de combinación u opciones, se podría tener un resultado más determinante en cuanto a diferencias. Aún así, es un resultado a tener en cuenta el hecho de que exista una diferencia en la función objetivo. Se podría pensar que, dado que la solución del caso general sin restricción es la cota máxima del valor que puede tomar la función objetivo, el algoritmo muestra un mejor desempeño que la versión simplificada del problema de optimización con límite inferior de producto a colocar en góndolas, debido a que toma como solución inicial la solución del problema general y empieza a buscar la solución aproximándose en iteraciones que van transformando la solución en factible, mientras que el segundo modelo busca una solución factible directamente, sin realizar el paso de tomar uno que se aproxime al problema general.
- Como último punto, sólo se quiere comentar que en cuanto a tiempo de resolución, no existió diferencia (diferencia de menos de 1 segundos entre ambos).

Ya que se ha visto este ejemplo, se espera que el funcionamiento del algoritmo haya sido explicado y entendido para el lector. Con esta información, se da por cerrado el capítulo de presentación del algoritmo, y se procede a realizar la solución numérica del problema de optimización de las góndolas de Pronto Copec Florida.

12. Aplicación del modelo

Como se dijo anteriormente, se aplicará el algoritmo de resolución del problema de asignación de espacio en góndolas para la tienda Pronto Copec La Florida. Se utilizará esta tienda como modelo base para generar resultados y conclusiones acerca del desempeño de la góndola de acuerdo al modelo de optimización utilizado. Se trabajará con la categoría snacks para testear el algoritmo y realizar estudios de sensibilidad de la solución. La elección de la tienda Pronto Ciudad La Florida se realizó debido a que es una tienda que se encuentra en un sector urbano que durante la noche recibe a jóvenes que van en busca de snacks para llevar a sus reuniones sociales, debido a que no existen muchas otras opciones donde comprar a partir de las 10 pm. De ahí que esta tienda sea particularmente fuerte en la presencia de snacks. Es por esto que se realizará el estudio de la categoría snacks en esta tienda. Se muestra a continuación los resultados de la aplicación del modelo:

Categoría Snacks

Para la categoría snacks se contó con 95 SKU válidos. Dentro de esta tienda, se contaba con 2.452.812 cm^3 de volumen disponible para la colocación de los productos de esta categoría. Se estudiaron primero los datos de cada uno de los productos por separado. Los datos revisados fueron ventas anuales, costos anuales, unidades anuales vendidas, y margen por unidad de producto. Dado que poner todos los datos es demasiado extenso, se muestran los gráficos para revisar algún tipo de dato que sea digno de destacar entre los productos.

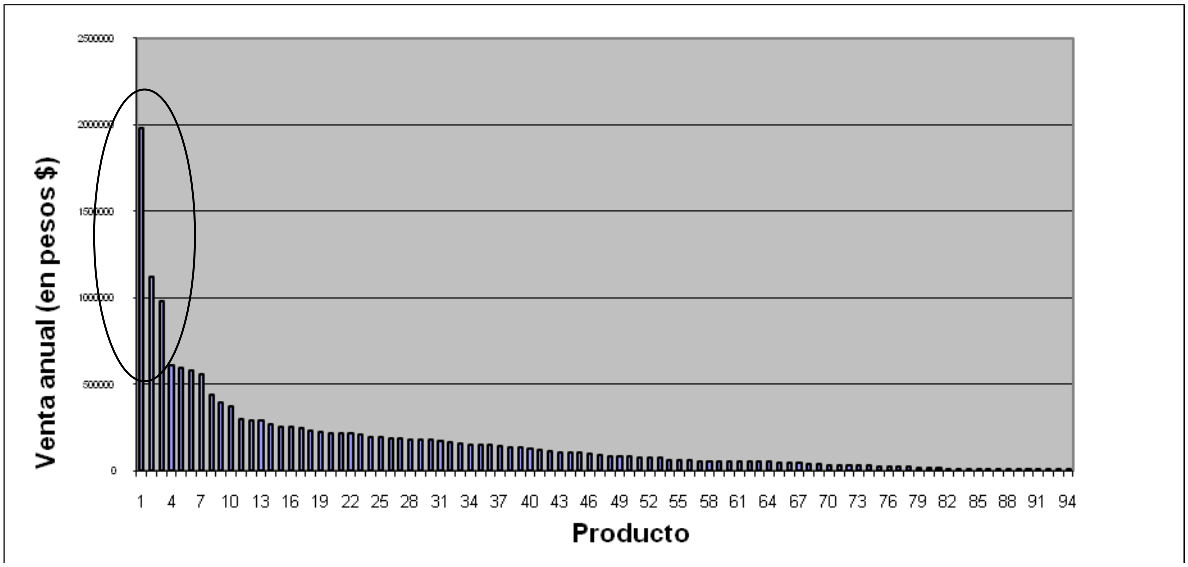


Fig. 2 – Ventas anuales por producto

Como se puede observar, existen tres productos que tienen un nivel de ventas bastante alto y diferenciado con respecto al resto (encerrados en un óvalo). Estos tres productos son:

- Pack fiesta de 162 grs., con $977.039 vendidos al año
- Papitas Lay's americano de 270 grs., con $1.980.815 vendidos al año
- Papitas Lay's americano de 38 grs., con $1.119.663 vendidos al año

Como se puede apreciar, estos tres productos tienen un rendimiento bastante superior al resto (el cuarto producto con mayores ventas tiene $591.595 ventas anuales, un poco más de la mitad del tercer producto con mayores ventas). Es claro que esto va alineado con el hecho de que Pronto Copec Florida es una tienda que tiene una gran cantidad de compradores jóvenes que buscan productos snack para comer en las fiestas y reuniones sociales, sin embargo, llama la atención la presencia del producto Papitas Lay's americano de 38 grs., que es un producto más bien para comer de forma individual, por lo que su alta venta no estaría justificada como un producto que se lleve a reuniones sociales (asumiendo que cuando se busca un producto para fiestas, se prefiere el empaque familiar al personal). Una explicación podría ser que los empaques personales son percibidos como un producto de rápido consumo, que se puede comprar cuando se tiene hambre y no existen muchas otras opciones, como por ejemplo, cuando se compran productos tras volver de fiestas en la madrugada, lo que sería creíble dado el tipo de cliente que posee esta tienda.

Se verá ahora el gráfico de las unidades totales vendidas al año

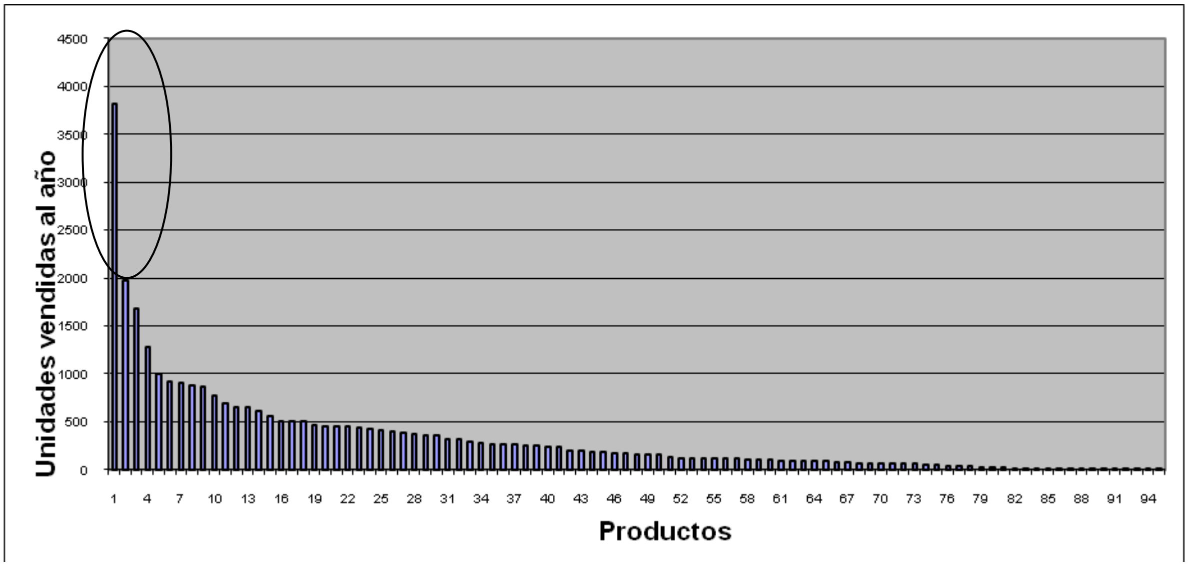


Fig. 2 – Unidades vendidas anuales por producto

En general se cumple que los productos con mayores ventas son también aquellos con mayor número de unidades vendidas, salvo algunos casos como por ejemplo el producto Pack fiesta de 162 grs, que es uno de aquellos que en el gráfico anterior presentaba las mayores ventas, pero en este gráfico no está entre los que venden más unidades. El producto 5 (Papitas Lay's americano de 38 grs.) si es efectivamente un producto con muchas ventas, e incluso es el producto que más ventas tuvo durante el año 2007, con 3.816 unidades al año. Por otra parte, a pesar de que el producto 4 (Papitas Lay's americano de 270 grs.) es el tercero en ventas, vende mucho menos que el producto 5. Aún así esto no es de extrañar debido a que el producto 4 es de mucho mayor tamaño que el 5, y por ende tiene un mayor costo y valor de venta por unidad. Los tres productos marcados en el gráfico son:

- Papitas Lay's americano de 270 grs., con 1.678 unidades vendidas al año
- Papitas Lay's americano de 38 grs., con 3.816 unidades vendidas al año
- Cacahuate japonés de 42 grs., con 1.976 unidades vendidas al año

Los dos primeros productos se espera que sean productos con alto número de unidades vendidas, sin embargo, el Cacahuate japonés sorprende en su aparición dentro de las tres primeras mayorías. Revisando el gráfico anterior, se puede ver que es un producto que se encuentra dentro de la mayoría en ventas, y es un producto que se presenta como una opción no tradicional a los snacks. Al revisar los datos no se tiene completa claridad de el por qué este producto tiene tan buen desempeño. Una hipótesis que se plantea dado el mix total de productos que se observa es que el cacahuate japonés puede ser considerado como un snack no tradicional de bajo precio. Si se considera como snacks tradicionales a las papas fritas, ramitas, nachos, chester, etc., este producto podría verse como una opción "de lujo" frente a otras opciones de productos. La respuesta automática a esta hipótesis es que existen productos no tradicionales que se pueden considerar como "de lujo" que no están entre los mejores desempeños, como los pistachos por ejemplo, sin embargo, el cacahuate japonés de 42 grs. se caracteriza por tener un costo mucho más bajo que otras opciones no tradicionales. Con un precio de $294 por unidad, es mucho más económico que una lata de pistachos salados de 128 grs. a $1.588. En este sentido, se puede pensar que es la opción "de lujo" más económica disponible, lo que podría explicar su buen desempeño.

Se muestra finalmente el gráfico de márgenes de los productos por unidad.

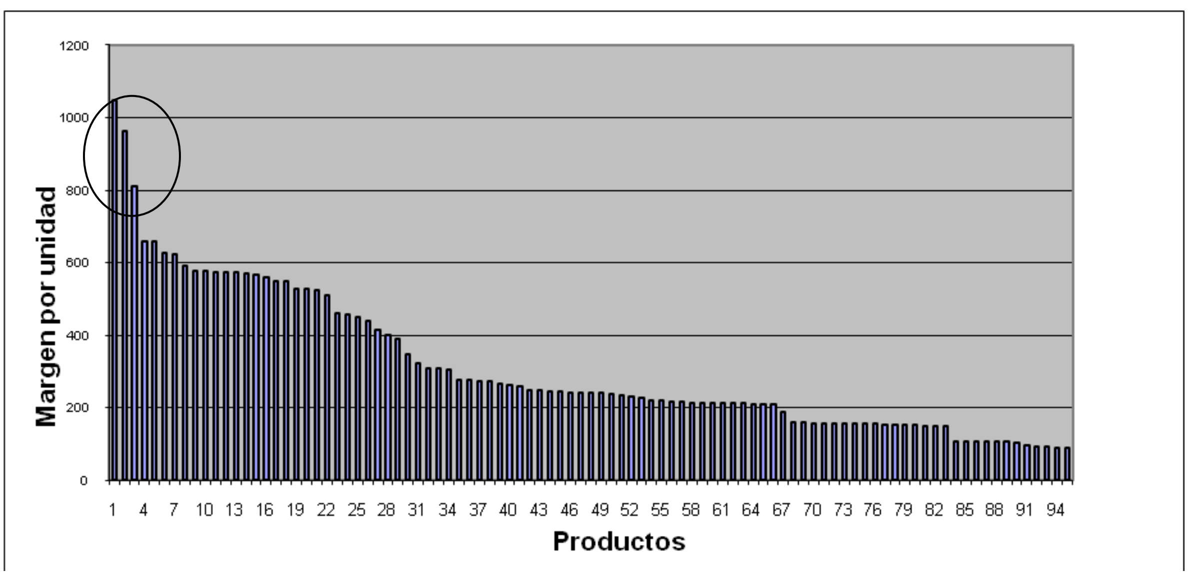


Fig. 3 – Margen por unidad por producto

Como se puede apreciar, la correlación entre margen y los otros indicadores anteriores no tiene un patrón claro, pues los tres productos que aparecen en primer lugar no son los primeros en margen de ventas. Estos son:

- Lata almendra salada de 42 grs., con $963 de margen por unidad
- Lata castañas de cajú de 38 grs., con $1.048 de margen por unidad
- Lata maní de almendras y castañas de cajú de 142 grs., con $811 de margen por unidad

A continuación se muestra un cuadro comparativo entre los tres productos con mejor desempeño en ventas, unidades vendidas, y margen:

Productos	Ventas	Posición	Unidades	Posición	Margen	Posición
Papitas Lay's americano 270 g	$1.980.815	1	1.678	3	$ 459	23
Papitas Lay's americano 38 g	$1.119.663	2	3.816	1	$ 150	81
Pack Fiesta 362 g	$977.039	3	690	12	$ 511	22
Cacahuate Japones 42g	$580.538	6	1.976	2	$ 103	90
Lata castañas de caju 142 g	$27.196	77	13	82	$ 1.048	1
Lata almendra salada 142 g	$18.828	80	9	85	$ 963	2
Lata mani almendras castañas caju 142 g	$8.360	84	5	89	$ 812	3

Cuadro 1 - Comparación productos con mejor desempeño en ventas, unidades y margen

Se puede apreciar una relación entre ventas y unidades vendidas mucho más directa que entre margen y los otros dos indicadores. El hecho de que un producto entregue un alto margen por unidad vendida no garantiza el éxito del producto, pues se puede ver que el nivel de ventas para los productos con los tres mayores márgenes es bastante bajo, estando en las posiciones 77, 80 y 84 de desempeño en ventas.

Tras haber revisado los indicadores de los 95 productos con los que se puede contar para armar las góndolas, se procede con el ordenamiento y limpieza de los datos, donde se realizó la construcción de los indicadores para cada SKU: Tras este primer ordenamiento, se produjo la conformación del ranking de los productos con mejor desempeño en share (Por ejemplo, un producto que aporta el 3% de las ventas totales de la categoría se considera alto) y en porcentaje de variación del margen por unidad con respecto al margen promedio (Por ejemplo, un producto tiene un 100% de variación del margen por unidad con respecto al promedio, si el margen de ese producto es 100, y el margen promedio es 50).

Tras ordenar y revisar los datos, se tomaron las siguientes definiciones para definir si un producto tenía un alto desempeño en share y/o en margen:

- Se consideran productos con share alto aquellos que poseen un share de más del 2% de la categoría. Tal vez podría sonar poco como aporte único, pero se eligió hasta este valor porque en conjunto este grupo de productos aportan el 45% (47,2% precisamente) de las ventas totales de la categoría.
- Para el caso de la variación porcentual con respecto al margen promedio, se eligieron los productos que tenían más de un 100% de porcentaje de variación con el promedio, sin embargo, como puede ocurrir que un producto tenga un margen alto por unidad, pero no aporte mucho a la categoría (por ejemplo, si se vendiera sólo un SKU de ese producto durante todo un año), entonces se decidió que dado que el producto debía además aportar a la categoría, se considerarían como "Productos Estrellas" aquellos productos que además de la condición anterior, poseían también un share mayor al 1% de la categoría.

Con estos criterios, se obtuvo que los productos que clasificaban como "Productos Estrellas" en total fueron 15, donde 10 ingresaron por su alto share, 5 por su alto margen por sobre el promedio, y 2 compartían ambas características. Los "Productos Estrellas" fueron:

Material	Descripcion Material	Share = Ventas totales sku/Ventas totales categoría	% variación margen unidad con respecto al promedio = (Margen por unidad sku/ Margen por unidad promedio categoría) - 1	Unidades promedio vendidas al año	Share importante (Sobre 2% y en total 40%)	Margen por unidad importante (100% sobre el promedio, con share sobre el 1%)
130820	Lay's artesanas 270 g	1,29%	143%	159		X
130823	Lay's stax original 163 g	3,67%	-3%	655	X	
130838	Pack Fiesta 362 g	6,07%	127%	690	X	X
130842	Papitas Lay's americano 270 g	12,30%	104%	1678	X	X
130843	Papitas Lay's americano 38 g	6,95%	-33%	3816	X	
130844	Papitas Lay's americano 80 g	3,79%	21%	1006	X	
130849	Snack mix 130 g	3,48%	17%	926	X	
130909	Castañas de caju aluminizada 80 g	1,16%	134%	160		X
130936	Papas Marco Polo 500 g	1,19%	178%	139		X
130941	Pistacho alum 80 g	1,46%	133%	202		X
131506	Pringles original 170 g	2,47%	149%	290	X	
131508	Pringles queso 170 g	1,06%	151%	125		X
132819	Snack mix 50 g	2,32%	-31%	1281	X	
132820	Mani Ever 200 g	2,75%	35%	772	X	
140281	Cacahuate Japones 42g	3,60%	-54%	2635	X	

Tabla 5 – Indicadores "Productos Estrella"

De esta primera observación, se puede ver que los dos productos más exitosos (Debido a que tienen un share y margen por unidad importantes) son aquellos que corresponden a snacks de gran tamaño. Seguramente, debido a que esta tienda se caracteriza por recibir a compradores que están en busca de productos que sirvan como snacks para reuniones sociales o fiestas, lo cual es una característica de la tienda, según conversaciones con el administrador del local.

Por otra parte, se procedió a agrupar al resto de los productos en grupos que compartieran los mismos atributos. Al realizar esta acción se formaron 11 grupos, los cuales compartían ciertas características por lo que se les pudo dar nombre. Estos atributos se seleccionaron porque son aquellos que definen a la categoría, según conversaciones con el adminsitrador de Pronto Copec La Florida. Cabe recordar que de estos grupos se eliminaron los "Productos Estrella", que no se agruparon. Los grupos fueron (El número del grupo no representa ningún efecto):

- Grupo 1: Snacks salados pequeños de otra marca
- Grupo 2: Snacks grandes salados en tarro de Evercrisp
- Grupo 3: Snacks dulces pequeños de otra marca
- Grupo 4: Snacks pequeños salados de Evercrisp
- Grupo 5: Snacks grandes salados de Evercrisp
- Grupo 6: Snacks pequeños salados de marco polo
- Grupo 7: Snacks grandes salados de marco polo
- Grupo 8: Snacks pequeños salados de otras marca
- Grupo 9: Snacks pequeños salados en lata de otras marca
- Grupo 10: Snacks grandes salados en tarro de Evercrisp
- Grupo 11: Snacks grandes salados en tarro de otra marca

Cabe destacar que el criterio para decir si un producto era grande o pequeño es si su volumen está por sobre o debajo de los 1.140 cms^3. Esto se obtuvo de la inspección de los tamaños de los productos y sus formas. Una vez que se realiza la separación de productos, entre los "productos estrella" y los grupos de productos, es necesario estimar dos parámetros: S_j^L (Presencia mínima que debe tener un producto en el mix de góndolas) y b (Elasticidad espacio de la categoría). En este sentido, sólo los productos "estrellas" presentan un límite inferior S_j^L, pues son productos que dada su importancia, se requiere que estén en la góndola. Para calcular S_j^L, se utilizaron los datos del año 2007. Se cuenta con datos acerca de las unidades vendidas para cada producto, así como el tamaño de cada producto. Además, se cuenta con los datos del tamaño total disponible en las góndolas para los productos snacks. Dado que no se tienen datos acerca del inventario específico que se tenía en las góndolas para cada mes del año 2007, se tuvo que tomar como supuesto que las unidades de productos vendidas tienen directa relación con el porcentaje de proporción que deberá presentar el producto en las góndolas. Este supuesto nace del hecho que para este estudio S_j^L representa el límite mínimo de presencia que debe tener el producto, y esta presencia en el mix se justifica por su participación. Dado esto, se calculó la presencia mínima S_j^L como la cantidad de espacio que ocuparían las unidades vendidas en un mes con respecto al espacio total disponible en las góndolas. Con esto, se tienen los datos acerca del porcentaje de espacio ocupado en las góndolas mes a mes, y para calcular los S_j^L de los "productos estrella", se calculó el promedio del espacio ocupado en las góndolas para un año.

Una vez que se determinaron los porcentajes mínimos de presencia de los "productos estrella", se procede a determinar el valor de b, la elasticidad espacio. Lamentablemente, no se tienen datos acerca de cómo se afecta la demanda cuando se le asigna un 1% más de espacio a un producto, pero dado que este factor sólo se puede mover entre 0 y 1, y es el mismo para todos los productos dentro de la categoría, se buscó de manera teórica el valor del parámetro b. Para ello, se estudiaron papers donde se resuelve en la práctica un problema de exhibición de productos en góndolas, para revisar la elasticidad espacio que mostraba la categoría. Dentro del paper de Corstjean y Doyle, "a model for optimizing retail space allocations", se realiza un ejemplo para una tienda pequeña, donde se estima el parámetro b para cinco productos distintos: Chocolates, toffee, caramelos, tarjetas de saludos, y helados. Ninguno de estos productos cumple exactamente las mismas características que el snack, sin embargo, como regla de decisión de cual será la línea de productos de la cual se elegirá la elasticidad espacio, se seleccionó la que tuviese la elasticidad espacio más pequeña. Esta decisión se tomó debido a que una elasticidad espacio demasiado alta podría corresponder a características especiales de la tienda, o a una campaña de marketing externa, y principalmente, a que una elasticidad espacio sobrevalorada para los snacks podría causar un resultado en la función objetivo demasiado alto para lo que sería en realidad el desempeño del mix de productos propuesto. Se prefiere utilizar un valor de b más bajo, que aunque pueda castigar el resultado de la demanda por el producto, al menos se asegura que es una elasticidad de demanda real, que existe para un producto de una tienda pequeña, y que es la más probable que posea una categoría que posee un efecto moderado sobre la demanda. Bajo estos conceptos, se tiene que los resultados del paper fueron:

Línea de producto	b: Elasticidad espacio
Chocolates	0,16
Toffees	0,11
Caramelos	0,05
Tarjetas de saludos	0,08
Helados	0,03

Tabla 6 – Elasticidades espacio (Fuente: Paper "A model for optimizing retail allocations")

Revisando los resultados, se selecciona la elasticidad espacio de los helados como aquella que representará a la elasticidad espacio de los snacks, y por ende, se tiene que para la categoría snacks, se utilizará la elasticidad espacio b = 0,03.

Con lo anterior, ya se han definido los parámetros S_j^L y b. Para determinar la ecuación de la demanda de cada producto y grupo, se hace necesario establecer una fórmula para determinar el valor de a_i, que corresponde al parámetro que multiplica a la función de demanda. Cabe recordar que la función de demanda se estima de la siguiente manera: Sea D_i la demanda para el producto i, entonce se define D_i como:

$$D_i = a_i * (Si)^b$$

donde a_i es el parámetro que multiplica a la demanda y que representa un valor en unidades que se venderán dado un nivel de presencia del producto i en la góndola. S_i corresponde al porcentaje de espacio que ocupa el producto i en la góndola, y b representa la elasticidad espacio. Dado lo anterior, es posible despejar a_i, lo que entregaría que:

$$a_i = \frac{D_i}{(S_i)^b}$$

Para construir el parámetro a_i, se utilizarán los valores de S_i para el año 2007, y el valor de b determinado más atrás. Para determinar D_i, se utilizarán las unidades vendidas para cada producto durante el año 2007, que corresponde justamente a la demanda de ese año.

Con lo anterior, más los datos obtenidos y armados a partir de la data entregada por Pronto Copec, como son ventas, costos y unidades vendidas, está completo el proceso de preparación y análisis de datos para poder realizar la optimización.

Ahora, para este capítulo de aplicación del modelo, se revisarán particularmente tres casos. El primer caso será la aplicación del algoritmo para el modelo general, con restricciones de cantidad de participación mínima de los productos en las góndolas. En segundo lugar, se realizará una nueva aplicación del modelo, pero en esta ocasión se resolverá el problema de optimización tomando en cuenta que ciertas posiciones en la góndola entregan un mejor resultado de demanda sobre el producto, por lo que se ocupará el mismo algoritmo, pero con pequeñas modificaciones que se explican dentro del mismo caso. Por último lugar, se revisará un último modelo, en el cual se realizará una optimización con el algoritmo, similar a la optimización hecha para el primer caso, pero ahora realizada para cada grupo, es decir, el universo de productos disponibles para poner en góndolas serán los productos de un mismo grupo, y el espacio disponible será el porcentaje de espacio que dio como resultado para ese grupo en el primer caso de optimización. Si se diera la situación que el primer caso entregue como resultado que ese grupo de productos no tendrá participación en el mix óptimo de productos, entonces se obviará este caso para ese grupo. Esta última optimización se realiza para poder dar recomendaciones acerca de qué productos no debiesen tenerse dentro de las opciones a colocar en la góndola para cada grupo.

Antes de mostrar los resultados de la aplicación del modelo, se muestran algunos datos previos de los productos que se utilizaron como inputs. Tal como se dijo anteriormente, se debieron conformar los grupos de productos, así como definir qué productos serían definidos como “productos estrella”. Para ello, se utilizaron los indicadores de share, porcentaje de diferencia con respecto al margen promedio de la categoría, y unidades totales vendidas al año. Los productos que componen cada grupo serán mostrados en la sección de anexos. La tabla con estos datos se puede revisar al principio de este capítulo.

Por otra parte, se muestra a continuación una tabla resumen con los datos de ventas anuales, costos anuales, unidades anuales y margen de los grupos y “productos estrellas”. Cabe recordar que para el caso de los grupos, las ventas, costos y unidades anuales vendidas corresponden a la suma de las ventas, costos y unidades anuales vendidas de cada producto, debido a que ese es el valor que tendrían en forma agregada como grupo. La tabla es la siguiente:

Grupo	Venta anual	Costo anual	Unidades al año	Margen por unidad
1	$ 397.582	$ 224.043	969	$ 179
2	$ 165.782	$ 97.105	124	$ 554
3	$ 467.721	$ 258.783	1.018	$ 205
4	$ 1.828.719	$ 876.339	7.186	$ 133
5	$ 2.551.461	$ 1.491.261	3.874	$ 274
6	$ 760.860	$ 399.276	1.823	$ 198
7	$ 507.697	$ 311.949	752	$ 260
8	$ 123.494	$ 63.963	142	$ 419
9	$ 137.473	$ 74.915	86	$ 727
10	$ 394.893	$ 227.052	707	$ 237
11	$ 141.379	$ 68.433	369	$ 198

Producto destacado	Venta anual	Costo anual	Unidades al año	Margen por unidad
Lay's artesanas 270 g	$ 208.121	$ 121.092	159	$ 547
Lay's stax original 163 g	$ 591.595	$ 449.016	655	$ 218
Pack Fiesta 362 g	$ 977.039	$ 624.149	690	$ 511
Papitas Lay's americano 270 g	$ 1.980.815	$ 1.210.466	1.678	$ 459
Papitas Lay's americano 38 g	$ 1.119.663	$ 546.149	3.816	$ 150
Papitas Lay's americano 80 g	$ 610.352	$ 336.907	1.006	$ 272
Snack mix 130 g	$ 560.853	$ 317.638	926	$ 263
Castañas de caju aluminizada 80 g	$ 186.880	$ 102.444	160	$ 528
Papas Marco Polo 500 g	$ 192.302	$ 119.539	116	$ 627
Pistacho alum 80 g	$ 234.768	$ 128.697	202	$ 525
Pringles original 170 g	$ 398.237	$ 235.544	290	$ 561
Pringles queso 170 g	$ 170.392	$ 99.656	125	$ 566
Snack mix 50 g	$ 374.331	$ 174.401	1.281	$ 156
Mani Ever 200 g	$ 442.917	$ 208.950	772	$ 303
Cacahuate Japones 42g	$ 580.538	$ 377.034	1.976	$ 103

Tabla 7 – Datos grupos y “productos estrella”

Vale la pena recordar que al tratarse de grupos que incorporan varios productos que son sustitutos entre sí, se deben tomar los valores agregados, pues es la participación conjunta la que define la participación del grupo. Por ejemplo, si se tuviese un grupo que se compone por tres tipos distintos de papas fritas, entonces el total de unidades vendidas que se puede esperar para ese grupo es la suma de las unidades vendidas para cada uno de esos tipos de papas fritas.

Para la aplicación del modelo, se debió obtener primero los valores que permiten calcular la demanda en la función objetivo y los límites inferiores de S_j^L que marca el porcentaje mínimo de presencia que debe tener un "producto estrella" en la góndola, por lo que se obtuvieron los valores de S_i del año 2007, a_i, b y S_j^L para cada uno de los grupos de productos y "productos estrella". A continuación se muestra la tabla con los resultados de cada uno de estos valores:

Grupo	Si para el año 2007	b:Elasticidad espacio	Ai
1	3,31%	3,00%	1.073,2752
2	1,38%	3,00%	141,0147
3	5,52%	3,00%	1.110,4499
4	15,27%	3,00%	7.602,7315
5	4,84%	3,00%	4.242,3312
6	3,04%	3,00%	2.024,3435
7	5,55%	3,00%	820,1246
8	0,18%	3,00%	171,6741
9	0,24%	3,00%	103,0339
10	1,30%	3,00%	805,4422
11	0,86%	3,00%	425,5487

Producto destacado	S_j^L	b: Elasticidad espacio	Ai
Lay's artesanas 270 g	2,01%	3,00%	178,7860
Lay's stax original 163 g	1,36%	3,00%	745,1920
Pack Fiesta 362 g	11,43%	3,00%	736,3834
Papitas Lay's americano 270 g	20,61%	3,00%	1.759,4280
Papitas Lay's americano 38 g	8,68%	3,00%	4.106,3894
Papitas Lay's americano 80 g	6,55%	3,00%	1.091,7250
Snack mix 130 g	4,42%	3,00%	1.016,8422
Castañas de caju aluminizada 80 g	0,10%	3,00%	196,6735
Papas Marco Polo 500 g	1,40%	3,00%	131,8599
Pistacho alum 80 g	0,14%	3,00%	246,2456
Pringles original 170 g	0,59%	3,00%	338,3568
Pringles queso 170 g	0,25%	3,00%	149,5381
Snack mix 50 g	1,72%	3,00%	1.447,1477
Mani Ever 200 g	0,76%	3,00%	893,7131
Cacahuate Japones 42g	2,69%	3,00%	2.202,4271

Tabla 8 – Datos para cálculo demanda de grupos y "productos estrella"

Además, se debieron tomar en cuenta los tamaños de los productos y grupos, tal como se explicó en el capítulo de metodología. A continuación se muestra la tabla con los tamaños de los productos en distancia de alto, largo y ancho, y en volumen:

Grupo	Alto (cms)	Ancho (cms)	Profundo (cms)	Volumen (cms3)
1	20,0	13,0	4,0	1040,0
2	23,4	7,9	7,9	1460,4
3	20,0	13,0	4,0	1040,0
4	21,0	15,0	5,0	1575,0
5	37,0	24,0	10,0	8880,0
6	18,0	13,0	3,0	702,0
7	35,0	20,0	9,0	6300,0
8	18,0	13,0	3,0	702,0
9	10,0	6,8	6,8	462,4
10	8,7	7,6	7,6	502,5
11	18,0	9,0	3,0	486,0

Producto destacado	Alto (cms)	Ancho (cms)	Profundo (cms)	Volumen (cms3)
Lay's artesanas 270 g	38	24	10	9120,0
Lay's stax original 163 g	23	8	8	1472,0
Pack Fiesta 362 g	30	40	10	12000,0
Papitas Lay's americano 270 g	37	24	10	8880,0
Papitas Lay's americano 38 g	20	13,5	6	1620,0
Papitas Lay's americano 80 g	32	21	7	4704,0
Snack mix 130 g	29	17	7	3451,0
Castañas de caju aluminizada 80 g	14,5	13	2,5	471,3
Papas Marco Polo 500 g	40	22	10	8800,0
Pistacho alum 80 g	14,5	13	2,5	471,3
Pringles original 170 g	23,4	7,9	7,9	1460,4
Pringles queso 170 g	23,4	7,9	7,9	1460,4
Snack mix 50 g	20	12	4	960,0
Mani Ever 200 g	18,0	13,0	3,0	702,0
Cacahuate Japones 42g	20	12	4	960,0

Tabla 9 – Datos tamaño de grupos y “productos estrella”

Con estas medidas, divididas por la medida total del espacio disponible en las góndolas para snack, fue posible establecer los porcentajes de espacio que tuvieron los productos para los meses del año 2007. Cabe recordar que los valores S_i de porcentaje de espacio a destinar a cada producto en las góndolas tomará en cuenta sólo las caras de la góndola (es decir, la primera línea de productos visibles para el cliente), sin embargo, en términos del total de utilidades que percibe la tienda para un año, basta con tener el porcentaje de caras asignado a cada producto, pues este porcentaje inmediatamente entrega a través de la fórmula de la demanda, la demanda total que habrá por producto para ese año con esa disposición en las góndolas. Lo que se quiere expresar con esta idea es que no es necesario calcular cuantas veces cabe el producto hacia atrás en la góndola a partir de la cantidad de productos que tiene presente en la cara de la góndola. Lo que sí se debe tener presente es que para que este supuesto sea efectivo, se impone que nunca se quiebra el stock en la góndola (es decir, si alguien va a compra un producto, siempre lo encuentra, si es que este producto quedó seleccionado para estar en el mix óptimo a colocar en las góndolas), y que la reposición del producto requiere un costo adicional.

Con los temas anteriores ya claros, se procede a realizar la optimización. Se resuelve primero el caso general con límite inferior de producto a poner en góndolas:

12.1 Problema de optimización con restricciones de participación mínima de producto

Se realizó un ejemplo del funcionamiento del algoritmo para este modelo en el capítulo anterior, por lo que se pasará directamente a la resolución del modelo para la categoría snacks de Pronto Copec La Florida. Para realizar la optimización, se utilizan los datos de margen por producto (w_i), a_i, b y S_j^L. A continuación se muestra la tabla con los valores para cada grupo y "producto estrella":

Producto	Wi	Ai	b	% espacio unidad	S_j^L
Grupo 1	$ 179	1.073,28	0,03	0,042%	0%
Grupo 2	$ 554	141,01	0,03	0,060%	0%
Grupo 3	$ 205	1.110,45	0,03	0,042%	0%
Grupo 4	$ 133	7.602,73	0,03	0,064%	0%
Grupo 5	$ 274	4.242,33	0,03	0,362%	0%
Grupo 6	$ 198	2.024,34	0,03	0,029%	0%
Grupo 7	$ 260	820,12	0,03	0,257%	0%
Grupo 8	$ 419	171,67	0,03	0,029%	0%
Grupo 9	$ 727	103,03	0,03	0,019%	0%
Grupo 10	$ 237	805,44	0,03	0,020%	0%
Grupo 11	$ 198	425,55	0,03	0,020%	0%
Lay's artesanas 270 g	$ 547	178,79	0,03	0,372%	2,01%
Lay's stax original 163 g	$ 218	745,19	0,03	0,060%	1,36%
Pack Fiesta 362 g	$ 511	736,38	0,03	0,489%	11,43%
Papitas Lay's americano 270 g	$ 459	1.759,43	0,03	0,362%	20,61%
Papitas Lay's americano 38 g	$ 150	4.106,39	0,03	0,066%	8,68%

Papitas Lay's americano 80 g	$ 272	1.091,73	0,03	0,192%	6,55%
Snack mix 130 g	$ 263	1.016,84	0,03	0,141%	4,42%
Castañas de caju aluminizada 80 g	$ 528	196,67	0,03	0,019%	0,10%
Papas Marco Polo 500 g	$ 627	131,86	0,03	0,359%	1,40%
Pistacho alum 80 g	$ 525	246,25	0,03	0,019%	0,14%
Pringles original 170 g	$ 561	338,36	0,03	0,060%	0,59%
Pringles queso 170 g	$ 566	149,54	0,03	0,060%	0,25%
Snack mix 50 g	$ 156	1.447,15	0,03	0,039%	1,72%
Mani Ever 200 g	$ 303	893,71	0,03	0,029%	0,76%
Cacahuate Japones 42g	$ 103	2.202,43	0,03	0,039%	2,69%

Tabla 10 – Datos caso 1 demanda de grupos y "productos estrella"

Cabe recordar que la elasticidad espacio utilizada (b) es aquella obtenida del ejemplo mostrado en el paper de Corstjean y Doyle, "a model for optimizing retail space allocations", según lo explicado anteriormente.

Se debe recordar además que el porcentaje de espacio por unidad que posee un grupo es el espacio que ocupa en promedio una unidad de producto que pertenece a ese grupo del total de espacio asignado a snacks. Por ejemplo, una unidad de producto del grupo 1 ocupa en promedio un 0,042% del espacio total asignable a snacks en góndolas.

Con los datos anteriores, se resuelven los pasos del algoritmo:

Paso 0

Se resuelve el problema general:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}]$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{K} S_i = 1$$

$$S_i \geq 0 , \qquad i = 1,..., K$$

Los resultados con los datos establecidos en la tabla son:

N°	Solución Problema general caso 1 (Paso 0)	Si	S_j^L	% espacio por unidad	¿Cumple con cota mínima?
1	Grupo 1	2,46%	0,0%	0,04%	SI
2	Grupo 2	0,97%	0,0%	0,06%	SI
3	Grupo 3	2,93%	0,0%	0,16%	SI
4	Grupo 4	13,56%	0,0%	0,13%	SI
5	Grupo 5	15,69%	0,0%	0,36%	SI
6	Grupo 6	5,25%	0,0%	0,03%	SI
7	Grupo 7	2,74%	0,0%	0,26%	SI
8	Grupo 8	0,89%	0,0%	0,03%	SI
9	Grupo 9	0,93%	0,0%	0,02%	SI
10	Grupo 10	2,44%	0,0%	0,02%	SI
11	Grupo 11	1,05%	0,0%	0,02%	SI
12	Lay's artesanas 270 g	1,22%	2,01%	0,37%	NO
13	Lay's stax original 163 g	2,06%	1,36%	0,06%	SI
14	Pack Fiesta 362 g	4,90%	11,43%	0,49%	NO
15	Papitas Lay's americano 270 g	10,76%	20,61%	0,36%	NO
16	Papitas Lay's americano 38 g	8,15%	8,68%	0,07%	NO
17	Papitas Lay's americano 80 g	3,83%	6,55%	0,19%	NO
18	Snack mix 130 g	3,44%	4,42%	0,14%	NO
19	Castañas de caju aluminizada 80 g	1,30%	0,10%	0,02%	SI
20	Papas Marco Polo 500 g	1,03%	1,40%	0,36%	NO
21	Pistacho alum 80 g	1,63%	0,14%	0,02%	SI
22	Pringles original 170 g	2,42%	0,59%	0,06%	SI
23	Pringles queso 170 g	1,05%	0,25%	0,06%	SI
24	Snack mix 50 g	2,89%	1,72%	0,04%	SI
25	Mani Ever 200 g	3,49%	0,76%	0,03%	SI
26	Cacahuate Japones 42g	2,91%	2,69%	0,04%	SI
	F	$ 7.019.900			

Tabla 11 – Datos caso 0 grupos y "productos estrella"

Lo primero que se nota en el resultado es que existen 7 productos para los cuales no se cumple la restricción de cota mínima. Lo otro que llama la atención es que absolutamente todos los productos y grupos se hacen presentes en la góndola, por lo que se da a entender que dado que el crecimiento en ventas es decreciente, existe el claro punto de que no se debe llenar la góndola con el producto con mejor desempeño, sino que se debe explotar el hecho de que llega un punto en el cual el valor que aporta a la función objetivo una unidad más de un producto, aunque este sea el que tenga mejor desempeño, es menor al de colocar una nueva unidad de otro producto con menor desempeño, pero que tiene menos presencia en la góndola hasta ese momento.

Se observa también que el valor de la función objetivo, es decir, el margen total anual que le queda a la tienda es de $7.019.900. Este valor es superior al que logró Pronto Copec La Florida durante el 2007, que tuvo un margen total anual de $6.960.817, lo que muestra que con este modelo se puede lograr un aumento en el margen total de un 0,85%. Esta será la cota superior del valor que puede tomar la función objetivo.

Finalmente, ningún producto viola la restricción de que el porcentaje de espacio asignado que se le otorga debe ser mayor al porcentaje de espacio que ocupa una unidad de ese producto. Se sigue ahora con la primera iteración.

Paso 1 (Iteración 1)

Como se dijo anteriormente, Io contiene 7 elementos, e Ioc contiene 19 elementos. Se fijan los valores para los 7 elementos de Io. :

Valores fijados	
S_{12}	2,01%
S_{14}	11,43%
S_{15}	20,61%
S_{16}	8,68%
S_{17}	6,55%
S_{18}	4,42%
S_{20}	1,40%

Tabla 12 – Valores fijados paso 1 Iteración 1

Paso 2 (Iteración 1)

Se vuelve a resolver el problema general, pero imponiendo que ciertos valores están fijos, y que el espacio disponible ya no es el 100%, sino que el total menos el ocupado por los valores fijados. Ahora el modelo a optimizar es:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}] + \sum_{j=1}^{K} Wj * [\alpha_j * S_j^{\,b}]$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{K} S_i + \sum_{j=1}^{K} S_j = 1 - \sum_{j=1}^{K} S_j^1$$

$$S_j = S_j^1, \text{ para todo j fijado en paso 1}$$

$$S_i \geq 0 , \qquad i = 1,..., K$$

Resolviendo el problema anterior con las restricciones pedidas, el resultado es:

N°	Solución Problema general caso 1 (Iteración 1)	Si	S_j^L	% espacio por unidad	¿Cumple con cota mínima?
1	Grupo 1	1,66%	0,0%	0,04%	SI
2	Grupo 2	0,65%	0,0%	0,06%	SI
3	Grupo 3	1,97%	0,0%	0,16%	SI
4	Grupo 4	9,13%	0,0%	0,13%	SI
5	Grupo 5	10,57%	0,0%	0,36%	SI
6	Grupo 6	3,54%	0,0%	0,03%	SI
7	Grupo 7	1,84%	0,0%	0,26%	SI
8	Grupo 8	0,60%	0,0%	0,03%	SI
9	Grupo 9	0,63%	0,0%	0,02%	SI
10	Grupo 10	1,65%	0,0%	0,02%	SI
11	Grupo 11	0,71%	0,0%	0,02%	SI
12	Lay's artesanas 270 g	2,01%	2,01%	0,37%	SI
13	Lay's stax original 163 g	1,39%	1,36%	0,06%	SI
14	Pack Fiesta 362 g	11,43%	11,43%	0,49%	SI
15	Papitas Lay's americano 270 g	20,61%	20,61%	0,36%	SI
16	Papitas Lay's americano 38 g	8,68%	8,68%	0,07%	SI
17	Papitas Lay's americano 80 g	6,55%	6,55%	0,19%	SI
18	Snack mix 130 g	4,42%	4,42%	0,14%	SI
19	Castañas de caju aluminizada 80 g	0,87%	0,10%	0,02%	SI
20	Papas Marco Polo 500 g	1,40%	1,40%	0,36%	SI
21	Pistacho alum 80 g	1,10%	0,14%	0,02%	SI
22	Pringles original 170 g	1,63%	0,59%	0,06%	SI
23	Pringles queso 170 g	0,71%	0,25%	0,06%	SI
24	Snack mix 50 g	1,95%	1,72%	0,04%	SI
25	Mani Ever 200 g	2,35%	0,76%	0,03%	SI
26	Cacahuate Japones 42g	1,96%	2,69%	0,04%	NO
	F	$ 6.997.700			

Tabla 13 – Solución problema general caso 1 Iteración 1 grupos y “productos estrella”

Como se puede apreciar, el resultado se aproxima cada vez más a cumplir con todas las restricciones, pues sólo un producto no cumple con la restricción de presencia mínima en la góndola.

Además, se puede observar que el valor de la función objetivo bajó levemente, como era de esperarse, aunque sigue siendo superior al resultado obtenido por la tienda durante el 2007. El resultado para esta nueva optimización fue de $6.997.700, que comparado al resultado de la tienda de $6.960.817, lo que da una diferencia de 0,53%. Aún se debe aproximar más el problema para cumplir con las restricciones, por lo que se realiza una nueva iteración.

Paso 1 (Iteración 2)

Ahora el programa dio como resultado que Io contiene 1 elemento, e Ioc contiene 25 elementos. Se fija el valor para el único elemento de Io. :

Valores fijados	
S_{26}	2,69%

Tabla 14 – Valores fijados Iteración 2

Paso 2 (Iteración 2)

Se procede a resolver el problema de optimización con la nueva variable fijada. El resultado se muestra a continuación:

N°	Solución Problema general caso 1 (Iteración 2)	Si	S_j^L	% espacio por unidad	¿Cumple con cota mínima?
1	Grupo 1	1,63%	0,0%	0,04%	SI
2	Grupo 2	0,64%	0,0%	0,06%	SI
3	Grupo 3	1,94%	0,0%	0,16%	SI
4	Grupo 4	8,98%	0,0%	0,13%	SI
5	Grupo 5	10,39%	0,0%	0,36%	SI
6	Grupo 6	3,48%	0,0%	0,03%	SI
7	Grupo 7	1,81%	0,0%	0,26%	SI
8	Grupo 8	0,59%	0,0%	0,03%	SI
9	Grupo 9	0,62%	0,0%	0,02%	SI

10	Grupo 10	1,62%	0,0%	0,02%	SI
11	Grupo 11	0,69%	0,0%	0,02%	SI
12	Lay's artesanas 270 g	2,01%	2,01%	0,37%	SI
13	Lay's stax original 163 g	1,36%	1,36%	0,06%	SI
14	Pack Fiesta 362 g	11,43%	11,43%	0,49%	SI
15	Papitas Lay's americano 270 g	20,61%	20,61%	0,36%	SI
16	Papitas Lay's americano 38 g	8,68%	8,68%	0,07%	SI
17	Papitas Lay's americano 80 g	6,55%	6,55%	0,19%	SI
18	Snack mix 130 g	4,42%	4,42%	0,14%	SI
19	Castañas de caju aluminizada 80 g	0,86%	0,10%	0,02%	SI
20	Papas Marco Polo 500 g	1,40%	1,40%	0,36%	SI
21	Pistacho alum 80 g	1,08%	0,14%	0,02%	SI
22	Pringles original 170 g	1,60%	0,59%	0,06%	SI
23	Pringles queso 170 g	0,70%	0,25%	0,06%	SI
24	Snack mix 50 g	1,92%	1,72%	0,04%	SI
25	Mani Ever 200 g	2,31%	0,76%	0,03%	SI
26	Cacahuate Japones 42g	2,69%	2,69%	0,04%	SI
	F	$ 6.997.400			

Tabla 15 – Solución problema general caso 1 Iteración 2 grupos y "productos estrella"

Finalmente se llega a una solución óptima. La variación de la función objetivo ha sido bastante pequeña con respecto a la solución anterior, siendo aproximadamente $300.

Antes de sacar conclusiones con respecto al resultado, se grafican los porcentajes de participación que se calcularon para los grupos y productos para el año 2007, y los resultados de la optimización mediante el algoritmo. Se muestra el gráfico a continuación:

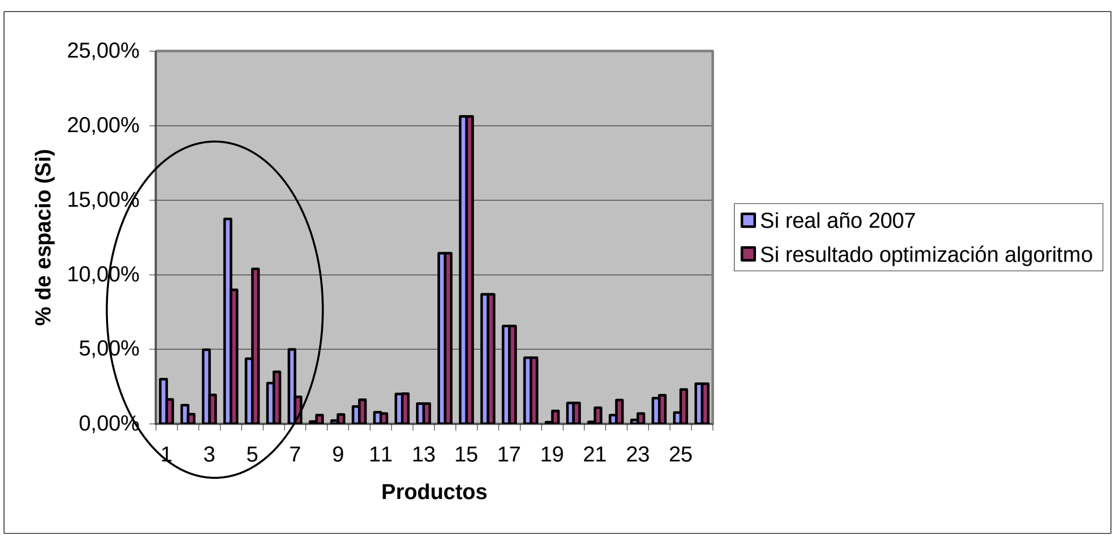


Fig. 5 – Comparación Si solución caso 1 y real 2007

Como se puede observar, de los "productos estrella" se obtuvo un resultado igual para los productos del 12 al 18 (Desde el producto 12 al 26 son "productos estrella"). Para todo el resto de productos existió una variación, siendo las variaciones de los grupos 1 al 7 las más evidentes (Se marcaron con un óvalo). Estos grupos son:

- Grupo 1: Snacks salados pequeño de otra marca
- Grupo 2: Snacks grandes en tarro de Evercrisp
- Grupo 3: Snacks dulces pequeño de otra marca
- Grupo 4: Snacks pequeño salados de Evercrisp
- Grupo 5: Snacks grandes salados de Evercrisp
- Grupo 6: Snacks pequeño salados de Marco Polo
- Grupo 7: Snacks grandes salados de Marco Polo

Como se puede observar, en los grupos 1, 2, 3, 4 y 7, el modelo determinó que era mejor tener una menor participación de estos productos. Este resultado podría tener una explicación lógica en el hecho de que se están forzando a tener una mayor participación a los productos sustitutos Papitas Lay's americano de 270 grs. (producto 15), al Pack Fiesta de 362 grs. (producto 14), y a las Papitas Lay's americano de 38 grs., por lo que es natural pensar que en el óptimo, se deberán sacar del mix otros snacks grandes e pequeño que cumplen una función similar a los tres productos antes descritos.

Por otra parte, los grupos 5 y 6 suben en su participación al optimizarse el problema, lo que podría indicar que el modelo tiende a colocar una opción de compra a las papas pequeñas Evercrisp (con Marco Polo) y a fortalecer el mix de productos salados grandes de Evercrisp. Al no haber involucrados indicadores de características físicas del producto en la optimización (como por ejemplo tamaño, marca, color, etc.), es difícil pensar que el programa se fijase en atributos para definir que un producto es sustituto de otro, y así balancear el mix en góndolas para entregar más surtido. Más bien se estima que este efecto se produce debido a que comercialmente los productos Papitas Lay's americano de 38 grs. y el grupo 6 de Snacks pequeño salados de Marco Polo tienen resultados que el modelo ve como que puede sustituir al tener disponible un espacio similar en tamaño. En otras palabras, el modelo busca rentar lo más posible el espacio asignado, por lo que si dos productos tienen tamaños similares, el que rente más por espacio será el elegido para establecerse en una posición de la góndola, y como a medida que crece la presencia del producto en la góndola, tiene menor demanda, en algún momento el modelo prefiere poner papas Marco Polo a Evercrisp de tamaño pequeño. Una explicación similar se le puede dar al aumento en presencia de los snacks salados Evercrisp grandes. Cabe recordar que estos son snacks distintos de papas fritas (Cheetos, Ramitas, etc.) y por ende, el programa busca los snacks grandes de Evercrisp que tienen un buen comportamiento en las góndolas, colocando primero las papas fritas, y posteriormente, cuando la demanda por el producto empieza a tener retornos decrecientes, prefiere optar por otro producto grande de Evercrisp. Eso podría explicar en parte el por qué ese cambio de participación en las góndolas de snacks.

Finalmente, se muestra el resultado cuando se aplica el modelo simplificado de Corstjean y Doyle con límite inferior de presencia de un producto en las góndolas directamente. El modelo del que se habla es el siguiente:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{K} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}]$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{K} S_i = 1$$

$$S_i^L \leq S_i \;, \qquad i = 1,\ldots, K$$

$$S_i \geq 0 \;, \qquad i = 1,\ldots, K$$

Se muestra a continuación el resultado cuando se aplica la optimización:

N°	Solución Problema general caso 1 (Modelo Corstjean y Doyle simple)	Si	S_j^L	% espacio por unidad	¿Cumple con cota mínima?
1	Grupo 1	1,63%	0,0%	0,04%	SI
2	Grupo 2	0,64%	0,0%	0,06%	SI
3	Grupo 3	1,94%	0,0%	0,16%	SI
4	Grupo 4	8,98%	0,0%	0,13%	SI
5	Grupo 5	10,39%	0,0%	0,36%	SI
6	Grupo 6	3,48%	0,0%	0,03%	SI
7	Grupo 7	1,81%	0,0%	0,26%	SI
8	Grupo 8	0,59%	0,0%	0,03%	SI
9	Grupo 9	0,62%	0,0%	0,02%	SI
10	Grupo 10	1,62%	0,0%	0,02%	SI
11	Grupo 11	0,69%	0,0%	0,02%	SI
12	Lay's artesanas 270 g	2,01%	2,01%	0,37%	SI
13	Lay's stax original 163 g	1,36%	1,36%	0,06%	SI
14	Pack Fiesta 362 g	11,43%	11,43%	0,49%	SI
15	Papitas Lay's americano 270 g	20,61%	20,61%	0,36%	SI
16	Papitas Lay's americano 38 g	8,68%	8,68%	0,07%	SI
17	Papitas Lay's americano 80 g	6,55%	6,55%	0,19%	SI
18	Snack mix 130 g	4,42%	4,42%	0,14%	SI
19	Castañas de caju aluminizada 80 g	0,86%	0,10%	0,02%	SI
20	Papas Marco Polo 500 g	1,40%	1,40%	0,36%	SI
21	Pistacho alum 80 g	1,08%	0,14%	0,02%	SI
22	Pringles original 170 g	1,60%	0,59%	0,06%	SI
23	Pringles queso 170 g	0,70%	0,25%	0,06%	SI
24	Snack mix 50 g	1,92%	1,72%	0,04%	SI
25	Mani Ever 200 g	2,31%	0,76%	0,03%	SI
26	Cacahuate Japones 42g	2,69%	2,69%	0,04%	SI
	F	$ 6.983.400			

Tabla 16 – Solución directa problema general caso 1 grupos y "productos estrella"

Como se puede observar, a pesar de tener un resultado bastante similar al del algoritmo, es levemente menor, en $14.000. Aún así, este resultado es mejor que el valor obtenido por Pronto Copec La Florida durante el año 2007. En este sentido, se cumple que:

Resultado Pronto: $6.960.817 < Resultado Resolución Directa: $ 6.983.400 < Resultado Algoritmo: $6.997.700

Surge la pregunta acerca de si vale la pena aplicar el algoritmo dado que se muestran resultados tan similares, teniendo sólo una diferencia de $37.000 más de ganancia aproximada con respecto al desempeño real de Pronto Copec La Florida. Lo cierto es que este modelo ha alcanzado un valor más alto que el logrado en la realidad, pero a partir de los mismos datos con los que operó la tienda el año pasado. El mérito está en que bajo las mismas condiciones, el algoritmo pudo postular un mix distinto que lograba un mejor resultado utilizando los mismos recursos. Si el resultado en la aplicación del modelo en la realidad otorga más ganancias, depende netamente de las condiciones del negocio, pero al menos se sabe que propondrá un mejor mix que el que se arma de forma subjetiva o a través de la experiencia. En todo caso, durante el capítulo de análisis de sensibilidad de la solución, se revisará que factores del negocio podrían afectar de mayor o menor forma el resultado del ejercicio.

Por otra parte, la pequeña diferencia con el modelo simplificado de Corstjean y Doyle no justifica una efectividad muy distinta del algoritmo, siendo incluso una buena señal que un mecanismo de solución probado a través del tiempo, como lo es la resolución del problema de Corstjean y Doyle, entregue un resultado tan solo levemente menor, y valide en cierta forma la lógica detrás del algoritmo. La diferencia entre ambas soluciones es bastante leve, siendo sólo de un 0,2%. Aún así, se piensa que existe una leve ventaja en aplicar el algoritmo y no el modelo de Corstjean y Doyle, pues al parecer existe una influencia, aunque pequeña, en el hecho de que el algoritmo busque partir de la solución general, que otorga el mayor margen anual posible a la tienda, y desde esa solución tomada como punto inicial, comience la iteración en búsqueda de cumplir las restricciones. Puede que la leve diferencia entre ambos mecanismos se deba sólo al punto de inicio que toman para la optimización. Además, el algoritmo tiene como ventaja también que permite entregar una cota superior para el valor de la función objetivo, que corresponde al resultado del problema general.

De las soluciones obtenidas para el porcentaje de producto a colocar en las góndolas, destaca el hecho de que hasta el final se mantuvo como óptimo el hecho de entregarle espacio a todos los productos. Destacan en el resultado los grupos 4 y 5 (Grupo 4: Snacks pequeño salados de Evercrisp, Grupo 5: Snacks grandes salados de Evercrisp) pues tienen una alta presencia sin tener particularmente un share o margen demasiados altos como productos individuales. Mucho tiene que ver en el resultado el cómo se agrupan los productos, pues un grupo con muchos elementos debiese tener mayores posibilidades de tener presencia en las góndolas, al tener un margen acumulado más alto que un grupo con pocos elementos que no han sido seleccionados como elementos con un alto desempeño en margen o aporte al share. Por otra parte, se vio del resultado general que los productos asignados como "productos estrella" al ser optimizado el modelo sin restricciones no presentaban una participación tan alta como se esperaría. En este sentido se podría decir que la forma en que se construye el valor del límite inferior de presencia de los "productos estrella" en la góndola no es necesariamente el correcto a aplicar en la vida real. Sin embargo, esto no es gran problema, pues muchas de las restricciones de participación mínima de producto se deben principalmente a negociaciones con los proveedores, y no a estimaciones propias de la tienda, por lo que en el futuro este dato será un factor externo. Además, el hecho de que se estipulen límites inferiores al realizar la optimización permite simular la pérdida de eficiencia del resultado al imponérsele restricciones a las variables, estudio que se profundizará un poco más en el análisis de sensibilidad.

Con esto se da por terminada la optimización del problema general con límite inferior con el algoritmo creado para esta tesis. Se verá a continuación el segundo caso a estudiar: El mix óptimo de la góndola cuando existen bonos por posición.

12.2 Problema de optimización con bono por posición del producto en la góndola:

Se revisa el segundo caso de optimización del espacio en góndolas. En esta ocasión, existirá un bono ligado a la posición en que se ponga el producto, siendo la posición en la primera, segunda, tercera, o cuarta fila. En el caso de Pronto Copec La Florida, existen distintas góndolas con distinto número de filas, por lo que es necesario establecer claramente a qué góndola y posición irá asignado el producto, para conocer el bono que recibe. En este sentido, dentro de la ecuación, se escribirá el bono como B_{ik}, que corresponde al bono en la demanda que recibe el producto i al estar en la fila k.

El bono B_{ik} tendrá cuatro valores distintos para una góndola. Si se piensa que la góndola tiene 4 filas, entonces la fila superior se conoce como fila uno, y de ahí se avanza hacia abajo: La segunda fila es la fila 2, la tercera la 3, y la cuarta la fila 4. En caso de tener tres filas, es la misma idea. Siguiendo esta misma lógica, se estima que los productos colocados en la fila 1 son los que más bono reciben, mientras que los que están en la fila 4, reciben castigo o bono negativo, al encontrarse lejos de la percepción del cliente al ver la góndola. Los valores de los bonos no han podido ser encontrados empíricamente en ningún estudio de los revisados, sin embargo, solamente se toma el estudio como una forma de ver el efecto de los bonos en la elección del mix a mostrar en las góndolas. Es por esto que lo importante es tener bonos diferenciados entre las posiciones, y no tanto el estimar correctamente cuales serán los valores de acuerdo a estudios empíricos. Se deja para futuros trabajos este estudio.

De acuerdo a lo anterior, se han definido cuatro bonos distintos para una góndola de 4 filas:

B_{i1} = +10%. Bono de 10% más en demanda del producto en fila 1	**Fila 1 Altura de los ojos**
B_{i2} = +5%. Bono de 5% más en demanda del producto en fila 2	**Fila 2 Altura de las manos**
B_{i3} = +0%. Bono de 0% más en demanda del producto en fila 3	**Fila 3 Altura de las piernas**
B_{i4} = -5%. Bono negativo de -5% más en demanda del producto en fila 4	**Fila 4 Altura de los pies**

Tabla 16 – Bonos posición

Como se puede apreciar, los bonos van decreciendo a medida que se pone más abajo el producto en la góndola. En el caso de tratarse de una góndola con tres filas, se considera que las filas siguen el mismo patrón que en una góndola de cuatro filas, llegando sólo hasta la fila 3, la cual no tendrá bono. Por ende, recibirá los mismos bonos: +10%, +5% y 0%. Se ve a continuación cual será el modelo a resolver para este problema:

$$\text{Max} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{I} \sum_{k=1}^{4} B_{ik} {*} Wi * [\alpha_i * S_{ik}{}^{b}] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{J} \sum_{k=1}^{4} B_{jk} {*} Wj * [\alpha_j * S_{jk}{}^{b}]$$

s.a.

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{I} S_{ik} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{J} S_{jk} = L_k , \; k = 1,...,4$$

$$S_j^L \leq S_j$$

$$S_{ik} , S_{jk} \geq 0 , \quad i = 1,...,I, \; j = 1,..., J , \; i \neq j;$$
$$k = 1,...,4$$

Este modelo es bastante similar al modelo anterior que se utilizó para el algoritmo original, con la variación que aparecen multiplicados los bonos (B_{ik} y B_{jk}) en la función objetivo, y que a la variable ahora se le agrega el subíndice k (S_{ik}) pues se necesita saber en qué posición estará. Se modificó un poco la restricción de espacio con respecto al modelo planteado en el capítulo anterior de explicación del algoritmo debido a que en este modelo se deben respetar las restricciones de espacio no sólo en el total, sino que por filas, por lo que L_k es una porción del 100% de espacio disponible. Por ejemplo, si se tuviesen sólo góndolas del mismo tamaño y con cuatro filas cada una, entonces el valor de L_k sería igual para todos y sería igual a 0,25 o 25%. Obviamente, la suma de L_k sobre K debe ser igual a 1.
Finalmente, se especifica que para resolver el problema de optimización, se utilizarán los mismos datos que en el caso anterior, y se utilizará el mismo algoritmo de optimización. Se muestra el proceso a continuación:

Paso 0

Se resuelve el problema general, sin restricciones de límite inferior de producto a poner en las góndolas, es decir, se resuelve:

$$\text{Max} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{I} \sum_{k=1}^{4} B_{ik}*Wi * [\alpha_i * S_{ik}{}^{b}] + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{J} \sum_{k=1}^{4} B_{jk}*Wj * [\alpha_j * S_{jk}{}^{b}]$$

s.a.

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{I} S_{i1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{J} S_{j1} = 25{,}00\%$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{I} S_{i2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{J} S_{j2} = 29{,}17\%$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{I} S_{i3} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{J} S_{j3} = 37{,}50\%$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{I} S_{i4} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{J} S_{j4} = 8{,}33\%$$

$$S_{ik}, S_{jk} \geq 0, \quad i = 1,\ldots,I,\ j = 1,\ldots, J,\ i \neq j;$$
$$k = 1,\ldots,4$$

El cálculo de los L_k se construyó calculando el espacio total utilizable de cada fila, partido por el total del espacio utilizable. Se debe tener en cuenta que existe 26*4 = 104 variables distintas S_{ik}, por lo que sólo se mostrarán como outputs los valores de S_i, que corresponden a $\sum_{k=1}^{4} S_{ik}$. Se muestra a continuación el resultado para la solución del problema general:

N°	Solución Problema general caso 1 (Paso 0)	Si	S_j^L	% espacio por unidad	¿Cumple con cota mínima?
1	Grupo 1	2,45%	0,0%	0,04%	SI
2	Grupo 2	0,97%	0,0%	0,06%	SI
3	Grupo 3	2,92%	0,0%	0,16%	SI
4	Grupo 4	13,54%	0,0%	0,13%	SI
5	Grupo 5	15,67%	0,0%	0,36%	SI
6	Grupo 6	5,24%	0,0%	0,03%	SI
7	Grupo 7	2,73%	0,0%	0,26%	SI
8	Grupo 8	0,89%	0,0%	0,03%	SI
9	Grupo 9	0,93%	0,0%	0,02%	SI
10	Grupo 10	2,44%	0,0%	0,02%	SI
11	Grupo 11	1,05%	0,0%	0,02%	SI
12	Lay's artesanas 270 g	1,22%	2,01%	0,37%	NO
13	Lay's stax original 163 g	2,06%	1,36%	0,06%	SI
14	Pack Fiesta 362 g	4,91%	11,43%	0,49%	NO
15	Papitas Lay's americano 270 g	10,78%	20,61%	0,36%	NO
16	Papitas Lay's americano 38 g	8,17%	8,68%	0,07%	NO
17	Papitas Lay's americano 80 g	3,84%	6,55%	0,19%	NO
18	Snack mix 130 g	3,44%	4,42%	0,14%	NO
19	Castañas de caju aluminizada 80 g	1,30%	0,10%	0,02%	SI
20	Papas Marco Polo 500 g	1,03%	1,40%	0,36%	NO
21	Pistacho alum 80 g	1,63%	0,14%	0,02%	SI
22	Pringles original 170 g	2,42%	0,59%	0,06%	SI
23	Pringles queso 170 g	1,05%	0,25%	0,06%	SI
24	Snack mix 50 g	2,90%	1,72%	0,04%	SI
25	Mani Ever 200 g	3,49%	0,76%	0,03%	SI
26	Cacahuate Japones 42g	2,91%	2,69%	0,04%	SI
	F	$ 7.068.879			

Tabla 18 – Solución problema general caso 2 Paso 0 grupos y "productos estrella"

Como se puede observar, se tiene un resultado en la función objetivo de $7.068.879 con los bonos impuestos, lo que supera al resultado obtenido por Pronto Ciudad La Florida de $6.960.817.

Con respecto a la solución del problema, se puede ver que existen 7 productos que no cumplen con la restricción de mínimo producto a colocar en las góndolas. Lo que es aún más interesante, es que estos productos son exactamente los mismos que no cumplen con la restricción cuando se busca resolver el problema general para el caso 1. Esto da luces acerca de que a pesar del bono por posición, la elección de cantidad de producto no cambia, aunque esto aún no se puede confirmar. Se prosigue con el paso 1.

Paso 1 (Iteración 1)

Se observa que el conjunto Io contiene a 7 elementos, por lo que se fija el valor de esos elementos en el mínimo admisible de presencia en la góndola:

Valores fijados	
S_{12}	2,01%
S_{14}	11,43%
S_{15}	20,61%
S_{16}	8,68%
S_{17}	6,55%
S_{18}	4,42%
S_{20}	1,40%

Tabla 19 – Valores fijados iteración 1

Con estos nuevos valores, se pasa al siguiente paso.

Paso 2 (Iteración 1)

Se vuelve a correr el modelo de optimización. El resultado es el siguiente:

N°	Solución Problema general caso 1 (Iteración 1)	Si	S_j^L	% espacio por unidad	¿Cumple con cota mínima?
1	Grupo 1	1,63%	0,0%	0,04%	SI
2	Grupo 2	0,64%	0,0%	0,06%	SI
3	Grupo 3	1,94%	0,0%	0,16%	SI
4	Grupo 4	8,97%	0,0%	0,13%	SI
5	Grupo 5	10,38%	0,0%	0,36%	SI
6	Grupo 6	3,47%	0,0%	0,03%	SI
7	Grupo 7	1,81%	0,0%	0,26%	SI
8	Grupo 8	0,59%	0,0%	0,03%	SI
9	Grupo 9	0,62%	0,0%	0,02%	SI

10	Grupo 10	1,62%	0,0%	0,02%	SI
11	Grupo 11	0,69%	0,0%	0,02%	SI
12	Lay's artesanas 270 g	2,01%	2,01%	0,37%	SI
13	Lay's stax original 163 g	1,36%	1,36%	0,06%	SI
14	Pack Fiesta 362 g	11,43%	11,43%	0,49%	SI
15	Papitas Lay's americano 270 g	20,61%	20,61%	0,36%	SI
16	Papitas Lay's americano 38 g	8,68%	8,68%	0,07%	SI
17	Papitas Lay's americano 80 g	6,55%	6,55%	0,19%	SI
18	Snack mix 130 g	4,42%	4,42%	0,14%	SI
19	Castañas de caju aluminizada 80 g	0,86%	0,10%	0,02%	SI
20	Papas Marco Polo 500 g	1,40%	1,40%	0,36%	SI
21	Pistacho alum 80 g	1,08%	0,14%	0,02%	SI
22	Pringles original 170 g	1,60%	0,59%	0,06%	SI
23	Pringles queso 170 g	0,70%	0,25%	0,06%	SI
24	Snack mix 50 g	1,92%	1,72%	0,04%	SI
25	Mani Ever 200 g	2,32%	0,76%	0,03%	SI
26	Cacahuate Japones 42g	2,69%	2,69%	0,04%	SI
	F	$ 7.046.300			

Tabla 20 – Solución problema general caso 2 Iteración 1 grupos y "productos estrella"

Acá se hace evidente un fenómeno que se había mencionado antes. No sólo se repiten los productos que cumplen y no cumplen con las restricciones de espacio, sino que además los valores de porcentaje de presencia de los productos en la góndola son exactamente los mismos a los que arrojó el modelo para el primer caso. Esto es bastante interesante desde el punto de vista de armado de góndolas. Se puede ver además que la función objetivo tiene un valor de $7.046.300, lo que es un descenso con respecto al resultado del paso 0, lo que es esperable dado que se está restringiendo aún más el problema.

Solución caso general	Solución caso bono	Diferencia
1,63%	1,63%	0,00%
0,64%	0,64%	0,00%
1,94%	1,94%	0,00%
8,97%	8,98%	-0,01%
10,38%	10,39%	-0,01%
3,47%	3,48%	0,00%
1,81%	1,81%	0,00%
0,59%	0,59%	0,00%
0,62%	0,62%	0,00%
1,62%	1,62%	0,00%
0,69%	0,69%	0,00%
2,01%	2,01%	0,00%
1,36%	1,36%	0,00%
11,43%	11,43%	0,00%
20,61%	20,61%	0,00%

8,68%	8,68%	0,00%
6,55%	6,55%	0,00%
4,42%	4,42%	0,00%
0,86%	0,86%	0,00%
1,40%	1,40%	0,00%
1,08%	1,08%	0,00%
1,60%	1,60%	0,00%
0,70%	0,70%	0,00%
1,92%	1,92%	0,00%
2,32%	2,31%	0,01%
2,69%	2,69%	0,00%

Tabla 21 – Comparación soluciones casos 1 y 2

El hecho de que se mantenga el mismo nivel de presencia de los productos (variaciones pequeñas de menos de 0,01% no se consideran), y que se obtenga una mayor función objetivo, es claro indicio de la importancia de seleccionar bien la posición de los productos, debido a que muestra claramente que con un mismo mix es posible obtener un mayor margen, si se cumplen los supuestos planteados. Llevándolo a la vida real, no es prematuro pensar que existe efectivamente un efecto sobre el cliente cuando un producto se coloca en posiciones que ve primero, o que son más accesibles, por lo que una recomendación a las tiendas es que determinen cuales son exactamente esos espacios y experimenten con los productos en distintas posiciones para revisar que posiciones son las más convenientes para cada tipo de producto.

Se muestra a continuación el resultado para los valores de S_{ik}, que a pesar de ser extenso, puede servir de guía para ver qué productos son los que se seleccionaron para qué posiciones:

	1	2	3	4	Suma	Max
1	0,45%	0,48%	0,53%	0,18%	1,63%	0,41%
2	0,18%	0,19%	0,21%	0,07%	0,64%	0,16%
3	0,53%	0,57%	0,63%	0,21%	1,94%	0,48%
4	2,46%	2,63%	2,91%	0,98%	8,98%	2,24%
5	2,85%	3,05%	3,37%	1,13%	10,39%	2,60%
6	0,95%	1,02%	1,13%	0,38%	3,48%	0,87%
7	0,50%	0,53%	0,59%	0,20%	1,81%	0,45%
8	0,16%	0,17%	0,19%	0,06%	0,59%	0,15%
9	0,17%	0,18%	0,20%	0,07%	0,62%	0,15%
10	0,44%	0,47%	0,52%	0,18%	1,62%	0,40%
11	0,19%	0,20%	0,22%	0,08%	0,69%	0,17%
12	0,47%	0,58%	0,83%	0,12%	2,01%	0,50%

13	0,37%	0,40%	0,44%	0,15%	1,36%	0,34%
14	2,38%	3,16%	5,39%	0,50%	11,43%	2,86%
15	4,63%	5,89%	9,02%	1,07%	20,61%	5,15%
16	2,26%	2,57%	3,15%	0,70%	8,68%	2,17%
17	1,53%	1,90%	2,75%	0,37%	6,55%	1,64%
18	1,11%	1,31%	1,69%	0,31%	4,42%	1,11%
19	0,24%	0,25%	0,28%	0,09%	0,86%	0,21%
20	0,35%	0,41%	0,55%	0,09%	1,40%	0,35%
21	0,30%	0,32%	0,35%	0,12%	1,08%	0,27%
22	0,44%	0,47%	0,52%	0,17%	1,60%	0,40%
23	0,19%	0,20%	0,23%	0,08%	0,70%	0,17%
24	0,52%	0,56%	0,62%	0,21%	1,92%	0,48%
25	0,63%	0,68%	0,75%	0,25%	2,31%	0,58%
26	0,71%	0,80%	0,94%	0,24%	2,69%	0,67%
Suma	25,00%	29,00%	38,00%	8,00%	100,00%	
Max	4,63%	5,89%	9,02%	1,13%		

Tabla 23 – Solución posición caso 2 grupos y “productos estrella”

El producto con mayor presencia en la primera fila es el producto 15, que corresponde a Papitas Lay’s Americano de 270 grs. A pesar de que podría parecer un número alto, sorprende el hecho de que aunque es un producto con alto share en ventas y margen por unidad, no se le potencia principalmente en la posición superior, sino que se le asigna la mayor cantidad de producto a la fila 3, donde no recibe bono por posición. De hecho, es el producto con mayor presencia en esa fila, con 9,02%. De la misma forma, es el producto con principal presencia en la segunda fila, con un 5,89%, que representa aún más presencia que en la fila 1. Es esperable que sea uno de los productos con mayor presencia, dado que ocupa en total gran cantidad de la góndola, sin embargo, sorprende el hecho de que el resultado contradice a la intuición con respecto a donde sería mejor colocar este producto. Se podría tender a pensar que dado que este producto margina mucho por unidad vendida, entonces sería una buena opción darle la más alta rotación posible para ganar la mayor cantidad de dinero al año, sin embargo el resultado es claro en mostrar que esa no es la estrategia óptima, sino que se prefiere colocar más de este producto en la fila 3.

Para revisar un poco más este punto, se verá el comportamiento del producto que más margina por unidad en el mix de productos posibles a colocar en góndolas: Castañas de Cajú Aluminizada, el cual corresponde al producto 19. Como se puede ver en los resultados, para este producto también se prefiere darle más espacio en la fila 3 de las góndolas. A pesar de que tiene una diferencia pequeña en las proporciones para las filas 1, 2 y 3 (0,24%, 0,25% y

0,28%), es más pequeña la diferencia entre las filas 1 y 2, que entre las filas 1 y 2 con respecto a 3. Nuevamente se prefiere dejar a un producto con gran margen por unidad en la fila 3 y no en la fila 1. Ahora, puede que este resultado sea netamente un hecho circunstancial, debido al espacio disponible que tiene cada fila, y que obliga a los productos a tener mayor presencia en una fila que en otra. Si se revisa detenidamente el resultado, se puede observar que ningún producto o grupo coloca más productos en la fila 1 que en la fila 2, y que ningún producto o grupo coloca más productos en la fila 2 que en la fila 3. Puede que esto se deba a que el espacio total disponible en la fila 1 es menor al de la fila 2, y el de la 2 es menor al de la 3 (25%, 29% y 38% respectivamente), sin embargo, esto no explicaría que un producto en particular no pudiese asignarse más espacio en la fila 1 que en la 3. Al parecer, lo que se busca en esta organización es ordenar los productos de tal forma que se mantenga un equilibrio en el comportamiento del margen que obtiene el producto, ya que debido a que tienen una demanda con retornos decrecientes, se busca compensar con los bonos de las filas superiores a los productos extras que se quieren vender gracias a esta ventaja, dejando los productos en su gran mayoría en la fila 3, donde tienen un desempeño regular, y colocando las unidades extras de producto que se pueden vender en las filas superiores, de manera que el bono extra que logran en tales posiciones compense el retorno decreciente en demanda que empiezan a tener. Otro punto que podría apuntar en la misma dirección es que como se dijo anteriormente, el stock total que se pone en la góndola sigue siendo el mismo que en el caso 1, donde no existe bonificación, por lo que el resultado que se mostró es simplemente el ordenamiento óptimo de la solución que se tuvo para el caso 1.

Con respecto a la fila 4, los productos con mayor presencia en esa posición fueron los del grupo 5, que corresponde a snacks grandes salados de Evercrisp. No es mucho lo que se puede inferir a partir de que este grupo es mayoría en la fila 4. Se podría pensar que se da este caso debido a que las Papitas Lay’s Americano de 270 grs. tienen una mayor presencia en las filas 1, 2 y 3, y al ser competencia directa de los productos del grupo 5, tanto en precio como en tamaño, estos quedan relegados a una posición peor, que corresponde a la fila 4.

Con esto se da por finalizado el análisis del caso 2, correspondiente a optimización con bonos por posición del producto. Se prosigue con la resolución y análisis del caso 3.

12.3 Optimización de asignación de producto en góndola, por grupo:

La idea de tomar este tercer caso es hacerse cargo del hecho de que existen grupos que poseen muchos productos, y es un aporte más en el análisis y entendimiento de la asignación de espacio en góndolas a los productos, el definir qué productos dentro de cada grupo son recomendables colocar, y qué productos no. Se muestra a continuación una tabla con los grupos que se armaron y el número de elementos que posee.

Grupo	Nombre grupo	N° de productos
1	Snacks salados pequeño de otra marca	7
2	Snacks grande salados en tarro de evercrisp	5
3	Snacks dulces pequeño de otra marca	6
4	Snacks pequeño salados de evercrisp	15
5	Snacks grande salados de evercrisp	22
6	Snacks pequeño salados de marco polo	5
7	Snacks grande salados de marco polo	2
8	Snacks pequeño salados de otras marca	3
9	Snacks pequeño salados en lata de otras marca	6
10	Snacks pequeño salados en tarro de evercrisp	7
11	Snacks pequeño salados en tarro de otra marca	2

Tabla 24 – Nombre grupos y número de elementos

Dado que la idea es asistir con una recomendación acerca de qué productos eliminar del mix, o al menos en qué proporción se les recomienda colocarse, se eliminan de este caso los grupos con menos de 5 productos, es decir, para los grupos 7, 8 y 11, no se realizará el proceso de optimización, pues tienen muy pocos elementos y es fácil discernir entre ellos.

Para realizar la optimización, se plantea el problema general y se resuelve directamente, con la única variante que el espacio total utilizable por ese grupo será aquel que se le asignó como espacio óptimo en la resolución del caso 1. Para decidir la recomendación sobre los productos, la regla será que si dado el mix óptimo que se encuentre para ese grupo, la asignación de porcentaje de espacio para un producto de ese grupo es menor que el porcentaje de espacio que ocupa una unidad del producto, entonces la recomendación es que ese producto se elimine. Se muestra el problema de optimización:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{G} Wi * [\alpha_i * S_i^{\,b}]$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{G} S_i = O_G$$

$$S_i \geq 0 \;, \qquad i = 1,\ldots, G$$

Donde el subíndice i corresponde a cada uno de los productos que componen un grupo, G corresponde al total de elementos en el grupo y O_G corresponde al porcentaje de espacio óptimo asignado en la resolución del caso 1. Cabe destacar que dado que son los productos pertenecientes a los grupos, ninguno de ellos tiene límite mínimo de espacio a ocupar en las góndolas, y por ende, no es necesaria la utilización del algoritmo para resolver este problema. Antes de partir, se muestran los espacios óptimos asignados a cada grupo en la resolución del caso 1.

Solución Problema general caso 1	Espacio asignado (Si)	% espacio por unidad
Grupo 1	1,63%	0,04%
Grupo 2	0,64%	0,06%
Grupo 3	1,94%	0,16%
Grupo 4	8,98%	0,13%
Grupo 5	10,39%	0,36%
Grupo 6	3,48%	0,03%
Grupo 7	1,81%	0,26%
Grupo 8	0,59%	0,03%
Grupo 9	0,62%	0,02%
Grupo 10	1,62%	0,02%
Grupo 11	0,69%	0,02%

Tabla 25 – Solución problema general caso 1 para asignación de espacio

Se muestran a continuación los resultados para cada grupo:

Grupo 1

Se muestran los datos de los productos del grupo 1:

Producto Grupo 1	Unidades	Wi	Ai	b	Si 2007
Bagettinis Queso 40 grs	39	90,72	45,74	0,03	0,49%
Mini Selz jamon 40 g	71	88,15	86,31	0,03	0,15%
Mini Selz queso 40 g	91	91,92	103,12	0,03	1,55%
Almendras confitadas 90 g	180	211,81	220,36	0,03	0,12%
Mani pasas almendras 80 g	270	264,91	311,13	0,03	0,89%
Mani salado 22 g	197	89,83	250,18	0,03	0,03%
Mix Bora Bora 80g	121	231,64	149,63	0,03	0,08%

Tabla 26 – Datos Productos Grupo 1

Con los datos vistos, se resuelve el modelo que muestra los siguientes resultados.

N°	Producto Grupo 1	Si	% ocupado por unidad	Recomendación
1	Bagettinis Queso 40 grs	0,03%	0,04%	eliminar
2	Mini Selz jamon 40 g	0,06%	0,04%	mantener
3	Mini Selz queso 40 g	0,07%	0,04%	mantener
4	Almendras confitadas 90 g	0,37%	0,02%	mantener
5	Mani pasas almendras 80 g	0,66%	0,02%	mantener
6	Mani salado 22 g	0,17%	0,01%	mantener
7	Mix Bora Bora 80g	0,27%	0,02%	mantener

Tabla 27 – Datos Productos Eliminados Grupo 1

Se puede apreciar en la optimización, que la recomendación es eliminar el producto Bagettinis, debido a su bajo nivel de venta en relación a los otros productos.

Grupo 2

Se muestran los datos de los productos del grupo 2:

N°	Producto Grupo 2	Unidades	Wi	Ai	b	Si 2007
1	Cre-ceb Kryspo 191	2	591,50	2,57	0,03	0,02%
2	Jam Ahu Kryspo 191	4	576,75	5,36	0,03	0,01%
3	Pizza Kryspo 191 g	2	577,50	2,62	0,03	0,01%
4	Queso Kryspo 191	10	573,90	12,59	0,03	0,05%
5	Pringles crema/cebolla 170 g	106	549,93	120,78	0,03	1,29%

Tabla 28 – Datos Productos Grupo 2

Con los datos vistos, se resuelve el modelo que muestra los siguientes resultados.

N°	Producto Grupo 2	Si	% ocupado por unidad	Recomendación
1	Cre-ceb Kryspo 191	0,01%	0,06%	eliminar
2	Jam Ahu Kryspo 191	0,02%	0,06%	eliminar
3	Pizza Kryspo 191 g	0,01%	0,06%	eliminar
4	Queso Kryspo 191	0,05%	0,06%	eliminar
5	Pringles crema/cebolla 170 g	0,54%	0,06%	mantener

Tabla 29 – Datos Productos Eliminados Grupo 2

La recomendación es mantener sólo el producto Pringles. Se puede observar en la tabla de datos que los productos Kryspo de 191 grs. tuvieron una venta casi nula durante el 2007.

Grupo 3

Se muestran los datos de los productos del grupo 3:

N°	Producto Grupo 3	Unidades	Wi	Ai	b	Si 2007
1	Cabritas 150 g	357	321,50	392,03	0,03	4,41%
2	Cabritas 40 g	457	106,54	543,62	0,03	0,31%
3	Cereal chocapic 32 g	8	159,00	10,30	0,03	0,02%
4	Chocapic 100 g	107	218,12	127,19	0,03	0,31%
5	Zucosos 100 g	84	209,15	99,01	0,03	0,42%
6	Pop corn microondas caramelo 184 g	5	658,60	6,32	0,03	0,04%

Tabla 30 – Datos Productos Grupo 3

Con los datos vistos, se resuelve el modelo que muestra los siguientes resultados.

N°	Producto Grupo 3	Si	% ocupado por unidad	Recomendación
1	Cabritas 150 g	1,05%	0,04%	mantener
2	Cabritas 40 g	0,47%	0,04%	mantener
3	Cereal chocapic 32 g	0,01%	0,01%	mantener
4	Chocapic 100 g	0,22%	0,04%	mantener
5	Zucosos 100 g	0,16%	0,04%	mantener
6	Pop corn microondas caramelo 184 g	0,03%	0,01%	mantener

Tabla 31 – Datos Productos Eliminados Grupo 3

La recomendación de mantener todos los productos se puede ver justificada por le hecho de que la cantidad de snacks dulces en el mix es muy bajo, por lo que es deseable que se mantenga todo el mix.

Grupo 4

Se muestran los datos de los productos del grupo 4:

N°	Producto Grupo 4	Unidades	Wi	Ai	b	Si 2007
1	Cheetos palitos 36 g	658	106,85	748,65	0,03	1,35%
2	Dorito pizza 38 g	243	107,01	288,52	0,03	0,33%
3	Dorito queso 36 g	615	106,66	710,00	0,03	0,83%
4	Lay's artesanas 38 g	367	149,98	437,83	0,03	0,28%
5	Mediterranea crema ciboullette 38 g	174	155,20	206,11	0,03	0,35%
6	Mediterranea jamon serrano 38 g	510	152,45	628,80	0,03	0,09%
7	Mediterranea oregano 38 g	413	151,17	482,69	0,03	0,55%
8	Ramitas queso 38 g	876	106,89	997,23	0,03	1,33%
9	Ramitas saladas 38 g	909	106,43	1.042,25	0,03	1,05%
10	Twistos Jamón 40 gr	862	156,85	947,16	0,03	4,33%
11	Twistos Queso 40 gr	460	156,67	506,67	0,03	3,99%
12	Twistos Mantequilla 40 gr	117	157,02	143,21	0,03	0,12%
13	Twistos Tomate Hierbas 40 gr	169	157,00	200,06	0,03	0,36%
14	Twistos Ciboulette 40 gr	257	157,01	314,49	0,03	0,12%
15	Papas Marco Polo 50 g	556	153,48	671,32	0,03	0,19%

Tabla 32 – Datos Productos Grupo 4

Con los datos vistos, se resuelve el modelo que muestra los siguientes resultados.

N°	Producto Grupo 4	Si	% ocupado por unidad	% ocupado por unidad
1	Cheetos palitos 36 g	0,65%	0,04%	mantener
2	Dorito pizza 38 g	0,24%	0,04%	mantener
3	Dorito queso 36 g	0,61%	0,04%	mantener
4	Lay's artesanas 38 g	0,53%	0,04%	mantener
5	Mediterranea crema ciboullette 38 g	0,25%	0,04%	mantener
6	Mediterranea jamon serrano 38 g	0,78%	0,04%	mantener
7	Mediterranea oregano 38 g	0,59%	0,04%	mantener
8	Ramitas queso 38 g	0,87%	0,03%	mantener
9	Ramitas saladas 38 g	0,91%	0,03%	mantener
10	Twistos Jamón 40 gr	1,23%	0,04%	mantener
11	Twistos Queso 40 gr	0,64%	0,04%	mantener
12	Twistos Mantequilla 40 gr	0,18%	0,04%	mantener
13	Twistos Tomate Hierbas 40 gr	0,25%	0,04%	mantener
14	Twistos Ciboulette 40 gr	0,39%	0,04%	mantener
15	Papas Marco Polo 50 g	0,84%	0,04%	mantener

Tabla 33 – Datos Productos Eliminados Grupo 4

La recomendación para este grupo es que se mantengan todos los productos dentro del mix. El hecho de que todos tengan una alta cantidad de ventas, y que posean un margen por unidad similar, provoca que no se pueda descartar ninguno debido a su utilidad y alta sustitución en caso de que algún producto empiece a mostrar retornos decrecientes de demanda muy altos.

Grupo 5

Se muestran los datos de los productos del grupo 5:

N°	Producto Grupo 5	Unidades	Wi	Ai	b	Si 2007
1	Cheetos palito queso 65 g	266	160,94	311,12	0,03	0,54%
2	Dorito pizza 90 g	155	208,15	188,27	0,03	0,15%
3	Dorito queso 90 g	426	210,62	497,31	0,03	0,57%
4	Doritos tostitos 90 g	1	241,00	1,40	0,03	0,00%
5	Lay's artesanas 70 g	38	210,97	48,73	0,03	0,03%
6	Mediterranea oregano 70 g	55	211,71	66,49	0,03	0,18%
7	Mediterranea crema ciboullette 70 g	47	210,96	55,11	0,03	0,50%
8	Papas Lay's med jamon serrano 70 g	11	211,00	13,49	0,03	0,11%
9	Lay's stax queso cheddar 156 g	276	218,25	344,74	0,03	0,06%
10	Lay's stax sour cream & onion 156 g	245	246,62	305,68	0,03	0,06%
11	Mediterranea crema ciboullette 170 g	29	572,00	35,71	0,03	0,10%
12	Mediterranea jamon serrano 170 g	88	573,24	107,95	0,03	0,11%
13	Mediterranea oregano 170 g	85	569,04	110,33	0,03	0,02%
14	Ramitas queso 150 g	446	308,20	518,13	0,03	0,68%
15	Ramitas saladas 150 g	387	307,78	451,52	0,03	0,59%
16	Twistos Jamón 110 gr	500	273,78	586,50	0,03	0,49%
17	Twistos Queso 110 gr	361	277,23	427,66	0,03	0,35%
18	Twistos Mantequilla 110 gr	76	277,34	95,55	0,03	0,05%
19	Papas Fritas Bajas en Sodio 200g	34	401,12	43,74	0,03	0,02%
20	Papas Fritas Onduladas 270g	61	439,67	77,23	0,03	0,04%
21	Twistos Tomate Hierbas 110 gr	105	237,22	130,53	0,03	0,07%
22	Twistos Ciboulette 110 gr	182	259,50	222,05	0,03	0,13%

Tabla 34 – Datos Productos Grupo 5

Con los datos vistos, se resuelve el modelo que muestra los siguientes resultados.

N°	Producto Grupo 5	Si	% ocupado por unidad	% ocupado por unidad
1	Cheetos palito queso 65 g	0,40%	0,09%	mantener
2	Dorito pizza 90 g	0,31%	0,09%	mantener
3	Dorito queso 90 g	0,86%	0,09%	mantener
4	Doritos tostitos 90 g	0,00%	0,09%	eliminar
5	Lay's artesanas 70 g	0,08%	0,09%	eliminar
6	Mediterranea oregano 70 g	0,11%	0,06%	mantener
7	Mediterranea crema ciboullette 70 g	0,09%	0,06%	mantener
8	Papas Lay's med jamon serrano 70 g	0,02%	0,09%	eliminar
9	Lay's stax queso cheddar 156 g	0,61%	0,30%	mantener
10	Lay's stax sour cream & onion 156 g	0,61%	0,09%	mantener
11	Mediterranea crema ciboullette 170 g	0,16%	0,30%	eliminar
12	Mediterranea jamon serrano 170 g	0,50%	0,09%	mantener
13	Mediterranea oregano 170 g	0,51%	0,09%	mantener
14	Ramitas queso 150 g	1,33%	0,08%	mantener
15	Ramitas saladas 150 g	1,15%	0,08%	mantener
16	Twistos Jamón 110 gr	1,34%	0,14%	mantener
17	Twistos Queso 110 gr	0,98%	0,14%	mantener
18	Twistos Mantequilla 110 gr	0,21%	0,14%	mantener
19	Papas Fritas Bajas en Sodio 200g	0,14%	0,26%	eliminar
20	Papas Fritas Onduladas 270g	0,27%	0,36%	eliminar
21	Twistos Tomate Hierbas 110 gr	0,25%	0,14%	mantener
22	Twistos Ciboulette 110 gr	0,46%	0,14%	mantener

Tabla 35 – Datos Productos Eliminados Grupo 5

Dentro de las recomendaciones para este grupo, está eliminar 6 de los 22 elementos que lo componen. El elemento de decisión al parecer es la cantidad de unidades del producto, más que su utilidad total. Si se observan los datos, los elementos eliminados son justamente los productos que tienen algunas de las menores ventas en unidades al año. Cabe destacar el caso de los productos 6 y 7, que a pesar de que tienen niveles de unidades vendidas en un año muy bajos, se mantienen en el stock por el poco espacio que ocupan, lo que indica que más allá de la utilidad en sí, lo que importa es la utilidad por porcentaje de espacio ocupado por el producto.

Grupo 6

Se muestran los datos de los productos del grupo 6:

N°	Producto Grupo 6	Unidades	Wi	Ai	b	Si 2007
1	Mani salado 80 g	323	243,31	375,65	0,03	0,65%
2	Almendras Marco Polo 80 g	134	528,84	162,35	0,03	0,17%
3	Mani Marco Polo 25 g	508	94,20	582,21	0,03	1,06%
4	Mani Marco Polo 80 g	403	241,26	465,45	0,03	0,82%
5	Mani Marco Polo 200g	455	147,36	539,49	0,03	0,34%

Tabla 36 – Datos Productos Grupo 6

Con los datos vistos, se resuelve el modelo que muestra los siguientes resultados.

N°	Producto Grupo 6	Si	% ocupado por unidad	Recomendación
1	Mani salado 80 g	0,75%	0,02%	mantener
2	Almendras Marco Polo 80 g	0,70%	0,02%	mantener
3	Mani Marco Polo 25 g	0,44%	0,01%	mantener
4	Mani Marco Polo 80 g	0,93%	0,02%	mantener
5	Mani Marco Polo 200g	0,65%	0,03%	mantener

Tabla 37 – Datos Productos Eliminados Grupo 6

Como se puede observar, todos los productos son recomendables de mantener. Era esperable este resultado ya que son productos que ocupan poco espacio, y que tienen una gran rentabilidad con respecto al espacio que ocupan.

Grupo 9

Se muestran los datos de los productos del grupo 9:

N°	Producto Grupo 9	Unidades	Wi	Ai	b	Si 2007
1	Lata almendra salada 142 g	9	963,00	11,84	0,03	0,01%
2	Lata castañas de caju 142 g	13	1048,31	16,47	0,03	0,04%
3	Lata mani almendras castañas caju 142 g	5	811,80	6,56	0,03	0,01%
4	Lata mani pasas almendras 142 g	21	660,00	26,20	0,03	0,06%
5	Lata mani salado 156 g	8	449,88	10,28	0,03	0,02%
6	Lata pistacho salado 128 g	30	624,83	36,95	0,03	0,10%

Tabla 38 – Datos Productos Grupo 9

Con los datos vistos, se resuelve el modelo que muestra los siguientes resultados.

N°	Producto Grupo 9	Si	% ocupado por unidad	% ocupado por unidad
1	Lata almendra salada 142 g	0,09%	0,02%	mantener
2	Lata castañas de caju 142 g	0,14%	0,02%	mantener
3	Lata mani almendras castañas caju 142 g	0,04%	0,02%	mantener
4	Lata mani pasas almendras 142 g	0,14%	0,02%	mantener
5	Lata mani salado 156 g	0,03%	0,02%	mantener
6	Lata pistacho salado 128 g	0,18%	0,02%	mantener

Tabla 39 – Datos Productos Eliminados Grupo 9

Nuevamente, la recomendación es que se mantengan todos los productos. A pesar de que son productos que no venden muchas unidades al año, su nivel de margen es bastante alto, lo que podría justificar su presencia en el mix óptimo.

Grupo 10

Se muestran los datos de los productos del grupo 10:

N°	Producto Grupo 10	Unidades	Wi	Ai	b	Si 2007
1	Papas Pringles cebolla 50 g	2	242,00	2,64	0,03	0,01%
2	Papas Pringles queso 50 g	98	247,10	115,01	0,03	0,48%
3	Pringles crema/cebolla 50 g	94	241,87	110,43	0,03	0,47%
4	Pringles original 50 g	265	242,94	319,17	0,03	0,20%
5	Pringles original 43 g	121	233,41	149,67	0,03	0,08%
6	Papas Pringles queso 43 g	68	225,07	89,00	0,03	0,01%
7	Pringles crema/cebolla 43 g	59	211,47	74,64	0,03	0,04%

Tabla 40 – Datos Productos Grupo 10

Con los datos vistos, se resuelve el modelo que muestra los siguientes resultados.

N°	Producto Grupo 10	Si	% ocupado por unidad	% ocupado por unidad
1	Papas Pringles cebolla 50 g	0,00%	0,02%	eliminar
2	Papas Pringles queso 50 g	0,22%	0,02%	mantener
3	Pringles crema/cebolla 50 g	0,21%	0,02%	mantener
4	Pringles original 50 g	0,63%	0,02%	mantener
5	Pringles original 43 g	0,28%	0,02%	mantener
6	Papas Pringles queso 43 g	0,16%	0,02%	mantener
7	Pringles crema/cebolla 43 g	0,12%	0,02%	mantener

Tabla 41– Datos Productos Eliminados Grupo 10

Como se puede apreciar, sólo un elemento fue eliminado, correspondiente al producto 1 de este grupo, quién vendía una cantidad de unidades anuales visiblemente menor que el resto del grupo.

Del total de productos a elegir entre los distintos grupos estudiados, 12 han sido definidos como eliminables. A partir de lo observado, se puede inferir que el gran tema de decisión al momento de definir qué producto se queda y qué producto no, es el margen por porcentaje de espacio ocupado por el producto. Así, un producto se puede quedar si tiene un alto margen, si vende muchas unidades (alta rotación), o si en relación al resto de los productos en su grupo tiene un buen comportamiento para el espacio que está ocupando. Dado que el factor de eliminación era si se le asignaba espacio suficiente para que pusiera al menos un producto en la cara de la góndola, se podría decir que en este caso la permanencia del producto en la góndola depende también de la elasticidad espacio que posea. Además, dado que a_i se construyó a partir de $a_i = \frac{D_i}{(S_i)^b}$, es claro que la demanda por el producto influye en la posibilidad del producto en quedarse, pero también depende del comportamiento que haya tenido cuando se le colocó en góndola, y cuanto espacio se le haya asignado. A mayor valor de a_i, mayor es la demanda que percibe el producto. Así, a medida que D_i crece, la posibilidad del producto i de estar en el mix óptimo crece. Por otra parte, a medida que S_i crece (en la fórmula, S_i es el porcentaje de espacio asignado al producto durante el periodo de estudio) se reduce el valor de a_i, lo que demuestra que si a un producto se le otorga más espacio, se espera también que su demanda crezca a una velocidad que justifique el espacio asignado. Asimismo, se ve a través de la ecuación que a medida que la elasticidad espacio (b) crece, bajan las posibilidades del producto i de estar en la góndola.

Se han revisado ya los tres casos de optimización que se querían estudiar: Optimización general con restricciones de límite inferior de producto a poner en góndolas, optimización cuando existe un bono por posición, y optimización cuando se estudian los productos que componen los grupos. Con los puntos anteriores se tiene mayor claridad acerca de las recomendaciones a realizar con respecto al mix de productos. Se da por cerrado este capítulo, y en el capítulo siguiente se hará estudio de la sensibilidad de la solución.

13. Análisis de sensibilidad

En este capítulo se busca analizar como reaccionan los resultados a variaciones en distintos parámetros. Es un buen ejercicio el entender como va reaccionando la función objetivo y la solución óptima a medida que se van cambiando los factores, pues permiten determinar qué factores son los más importantes al momento de encontrar una solución óptima al problema. Se parte entonces con el análisis de sensibilidad del problema de optimización del espacio asignado a productos en la góndola.

13.1 Sensibilidad de la demanda

La demanda se definió en esta tesis como una fórmula con retornos decrecientes, de la forma $Di = a_i*(S_i)^b$. Un primer ejercicio para ver el comportamiento de la demanda ante variaciones de los parámetros se realizará a continuación. En este ejercicio, se impondrán valores arbitrarios a los componentes de la fórmula de demanda, y se estudiará como su variación afecta al resultado final. Se muestra a continuación este ejercicio y sus resultados.

Variación de b (Elasticidad espacio)

Se imponen los valores base de los componentes de la fórmula de demanda. Estos son arbitrarios, y sólo sirven para tener un parámetro de comparación. Como base se asume que:

- $a_i = 100$
- $S_i = 0,5$
- $b = 0,5$
- $D_i = a_i*(S_i)^b = 70,71$

Estos valores serán tomados como base de aquí en adelante. Se revisa ahora cómo varía la demanda cuando se mueve el valor de b. Se toman cuatro valores distintos para b: 0; 0,25; 0,75; y 1, además del caso base. A continuación se muestra la tabla y un gráfico con los resultados:

Ai	b	Si	Demanda	Variación
100	0	0,5	100,00	0,00
100	0,25	0,5	84,09	-15,91
100	0,5	0,5	70,71	-13,38
100	0,75	0,5	59,46	-11,25
100	1	0,5	50,00	-9,46

Tabla 42– Valores sensibilidad demanda

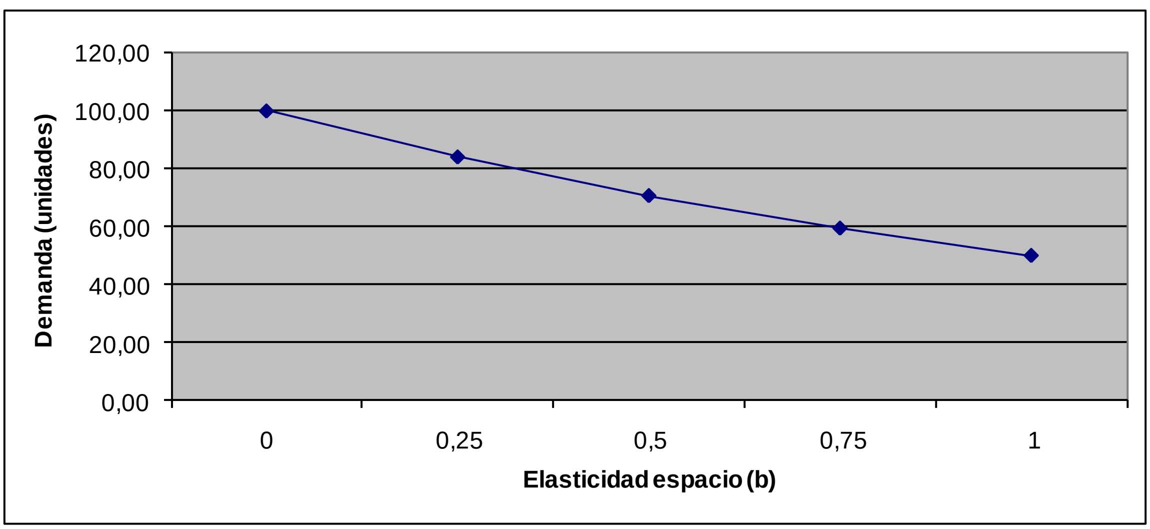


Fig. 6 – Gráfico efecto elasticidad espacio

Lo que se muestra en el gráfico anterior no es nada sorpresivo, mostrando un descenso casi lineal en la demanda a medida que crece b, o en otras palabras, a medida que el producto tiene una mayor elasticidad espacio, menor es la demanda percibida si se mantiene el factor a_i y el espacio otorgado al producto i.

Variación de S_i (Porcentaje espacio ocupado por producto)

Utilizando la misma lógica anterior, se muestra qué sucede cuando lo que se modifica es el espacio asignado al producto i, y se mantienen los otros parámetros. Se tomarán valores de S_i de 0; 0,25; 0,75; y 1.

Ai	b	Si	Demanda	Variación
100	0,5	0	0,00	0,00
100	0,5	0,25	50,00	50,00
100	0,5	0,5	70,71	20,71
100	0,5	0,75	86,60	15,89
100	0,5	1	100,00	13,40

Tabla 43– Valores variación Si

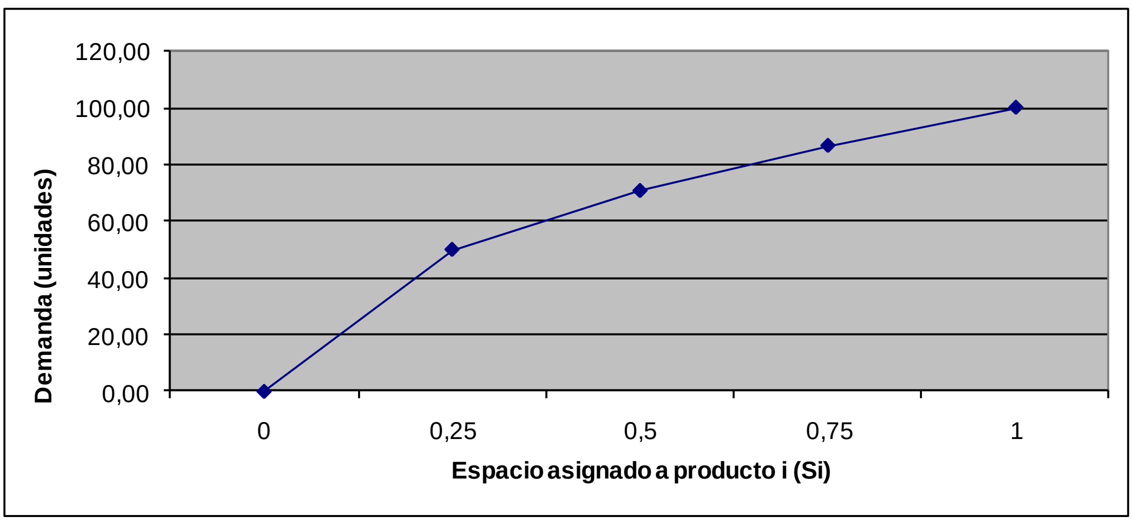


Fig. 7 – Gráfico efecto espacio asignado

Se puede observar que el gráfico pierde su comportamiento lineal al crecer el espacio asignado al producto. La curva es similar a la de las raíces cuadradas, debido a que el valor de S_i está siendo elevado a b, que corresponde a un valor menor a 1. En este gráfico se puede ver cómo la función de la demanda es directamente proporcional a la asignación de espacio a i, aunque se puede observar también que el crecimiento es decreciente. Por último, se puede ver que en comparación al efecto de b sobre la demanda, S_i tiene un efecto más fuerte, ya que mueve la demanda entre rangos de 0 a 100, mientras que el parámetro b mueve la demanda sólo entre 50 y 100, y las variaciones son más altas cada 25% de movimiento, aunque en ambos casos el efecto es decreciente.

Variación de S_i para distintos b

En esta parte se quiere estudiar el comportamiento de la demanda cuando existen ambos efectos, el movimiento de S_i y el movimiento de b. Para realizar esto, se escogen los mismos 4 casos para b (más el base), y los mismos 4 casos para Si. Con estos, se tendrán cinco gráficos distintos para Si vs. Demanda, donde la variación en los gráficos estará dado por el nivel de b utilizado. Se muestra el resultado a continuación:

Ai	b	Si	Demanda	Variación
100	0	0	0,00	0,00
100	0	0,25	100,00	100,00
100	0	0,5	100,00	0,00
100	0	0,75	100,00	0,00
100	0	1	100,00	0,00
100	0,25	0	0,00	0,00
100	0,25	0,25	70,71	70,71
100	0,25	0,5	84,09	13,38
100	0,25	0,75	93,06	8,97
100	0,25	1	100,00	6,94
100	0,5	0	0,00	0,00
100	0,5	0,25	50,00	50,00
100	0,5	0,5	70,71	20,71
100	0,5	0,75	86,60	15,89
100	0,5	1	100,00	13,40
100	0,75	0	0,00	0,00
100	0,75	0,25	35,36	35,36
100	0,75	0,5	59,46	24,11
100	0,75	0,75	80,59	21,13
100	0,75	1	100,00	19,41
100	1	0	0,00	0,00
100	1	0,25	25,00	25,00
100	1	0,5	50,00	25,00
100	1	0,75	75,00	25,00
100	1	1	100,00	25,00

Tabla 44– Valores variación Si y b

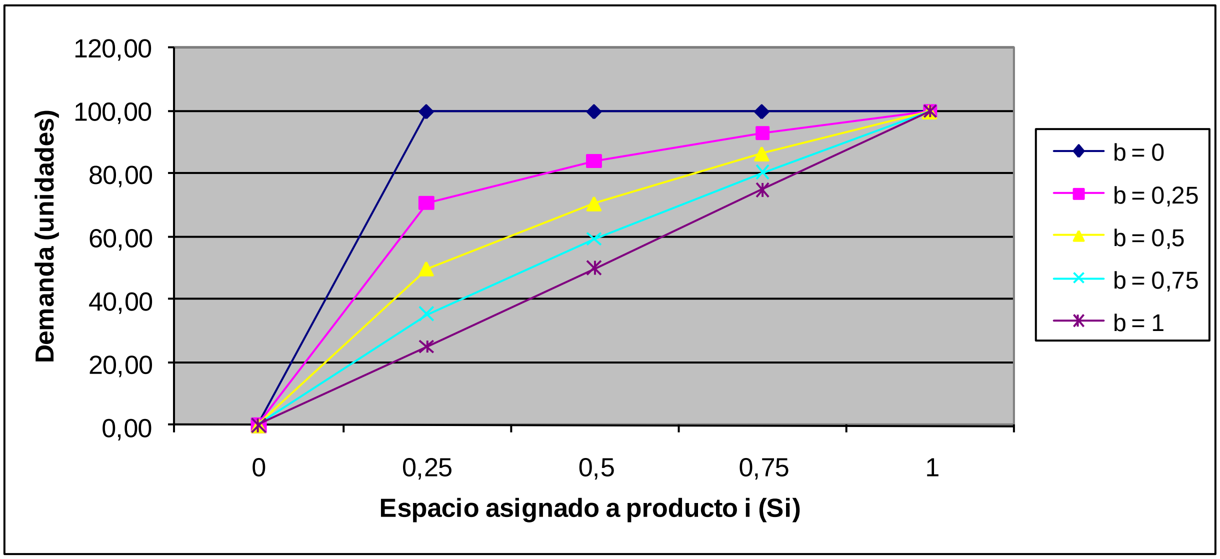


Fig. 8 – Gráfico efecto elasticidad - Si

Como se puede observar en el gráfico, claramente se ve el efecto de b sobre la curva de demanda al modificar el espacio asignado al producto. A medida que la elasticidad espacio se va haciendo más alta, la curva de demanda se va linealizando, o lo que sería lo mismo, a menor elasticidad espacio, mayor es el efecto de los retornos decrecientes en la curva de demanda.

De lo anterior, se puede concluir que el efecto del espacio asignado al producto es más fuerte que el efecto de modificar la elasticidad espacio, y a la vez se pudo observa que la elasticidad espacio está directamente ligada al nivel de retornos decrecientes que afecta a la curva de demanda. No se estudiará el efecto de la a_i sobre la demanda, debido a que es un multiplicador lineal, y por ende es claro que aumenta la demanda en forma lineal.

Se muestra a continuación el análisis de sensibilidad para la función objetivo.

13.2 Sensibilidad de la función objetivo

Para poder analizar los cambios en una función objetivo al moverse los parámetros del problema, se utilizará como caso base la solución del caso 1, que corresponde al problema simplificado de Corstjean y Doyle, con restricciones de porcentaje mínimo de participación de un producto en las góndolas. Dado que el objetivo de este capítulo es revisar el efecto sobre la función objetivo al cambiar parámetros de la optimización, sólo se revisará la optimización general del problema, y no la optimización a través del algoritmo, cuando existen límites inferiores de presencia de los productos en la góndola, salvo para un caso particular donde se quiere revisar el efecto de cambios en la cantidad mínima de producto que debe haber en las góndolas. Se muestran a continuación los distintos resultados obtenidos para distintos parámetros que variaron.

Variación de función objetivo cuando varía b

Se realiza la optimización del caso general nuevamente. Se debe recordar que el resultado original que se obtuvo para ese problema fue de $7.019.900, marcado en amarillo.

b	Valor función objetivo	Variación porcentual
1%	$ 7.436.700	0%
3%	$ 7.019.900	-6%
5%	$ 6.628.600	-6%
10%	$ 5.751.200	-13%
30%	$ 3.348.600	-42%
50%	$ 2.088.200	-38%
70%	$ 1.464.200	-30%
100%	$ 1.164.700	-20%

Tabla 45– Valores variación b

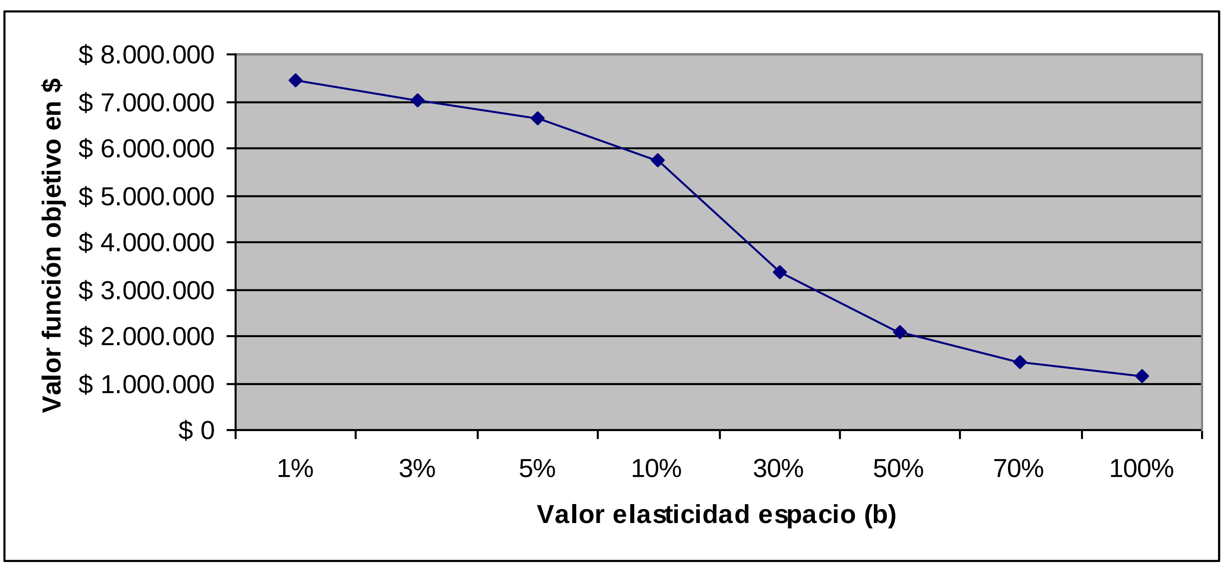


Fig. 9 – Gráfico efecto elasticidad espacio

Como se puede observar, el valor de la función objetivo va cayendo a medida que b va aumentado su valor. El valor mínimo que puede obtener la función objetivo al tenerse b = 1 es de $1.164.700. Como se puede apreciar, el efecto de b sobre la función objetivo provoca una variación desde $7,5 MM a $1,1MM, lo que en su totalidad correspondería a una variación de -85% aproximadamente. Se puede observar que en términos monetarios es bastante fuerte el efecto de la elasticidad espacio sobre los productos, pudiendo mermar gran parte de las utilidades de la tienda.

Un hecho curioso es que a medida que la b va tendiendo a 1, el número de productos distintos en la góndola va disminuyendo, llegando al caso límite de que cuando b es igual a 1, el único elemento que se pone en góndolas son los elementos del grupo 5, el cual corresponde a snacks grandes salados de Evercrisp. El único indicador que se tiene con respecto a este producto que destaque por sobre los demás es que tiene el nivel de ventas anual (en $) más alto de todos los grupos y "productos estrella". Además de ello, es el grupo que más elementos posee, con 22 elementos en total. Esto podría indicar que a medida que va aumentando la elasticidad espacio, más castigada se va viendo la demanda, y el modelo de optimización busca dejar en las góndolas a los productos que poseen un mayor share.

Variación de función objetivo cuando se aumenta el límite inferior de presencia de un producto en las góndolas (S_j^L)

Se busca estudiar el efecto de una mayor proporción de producto i mínimo pedido en góndolas. Para llevar a cabo este ejercicio, se amplificarán los límites mínimos originales por un factor que los haga crecer a todos en un mismo nivel. Por ejemplo, si un producto tenía límite mínino $S_j^L = 100$, y se aumenta en un 10% con el ponderador, entonces ahora $S_j^L = 110$. Se aumentarán los límites inferiores en dos casos: en el primero se aumenta un único límite inferior de un producto, y en el segundo caso se aumentan todos los límites inferiores por igual. Se muestran los efectos en la función objetivo a continuación.

Variación de S_j^L de un único producto:

Se escogió como elemento para experimentar al “producto estrella” Papitas Lay's americano 270 grs. por lo que ha este elemento se le realizarán aumentos en su límite inferior de presencia en góndola, y se verá el efecto de esto en la función objetivo. Al aplicar el aumento, se obtuvieron los siguientes resultados:

Aumento S_j^L	Valor Función Objetivo	Variación
0%	$ 6.983.400	0,00%
20%	$ 6.982.600	-0,01%
50%	$ 6.981.300	-0,02%
70%	$ 6.980.300	-0,01%
100%	$ 6.978.800	-0,02%
200%	$ 6.973.100	-0,08%

Tabla 46 – Valores variación Sj^L

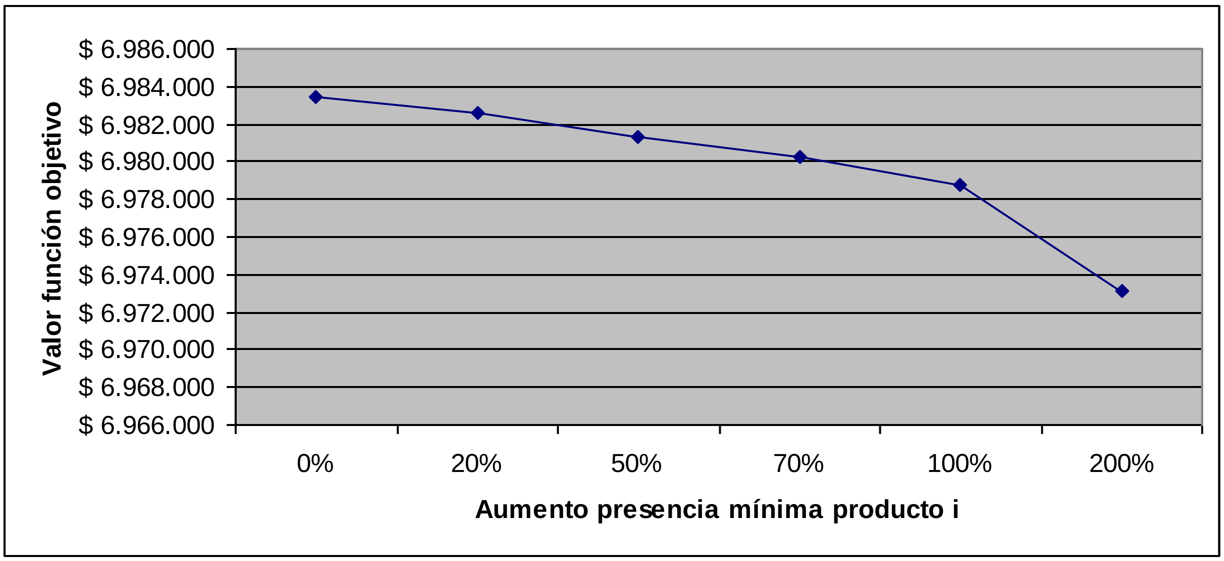


Fig. 10 – Gráfico efecto Si

Como se puede observar, el efecto de aumentar la presencia en góndola para un único producto es bastante bajo. Cabe destacar que la presencia en góndolas cuando se le otorga un crecimiento del 200% al producto Papitas Lay's americano 270 grs., este llega a tener un nivel de participación de un 60%, y aún así la caída del valor de la función objetivo no llega a superar el 0,29% (alrededor de $10.000). Puede que esto se deba a que este producto es particularmente bueno, por lo que un aumento en la cota mínima de producto a poner de este tipo no dañará en demasía el mix, aunque es claro que se aleja del óptimo al imponerse esta restricción. Realizar el experimento con otro producto que tenga límite inferior debiese entregar un resultado similar, dado que los productos que tienen límite inferior en esta tesis corresponden a los llamados productos estrellas, aunque no se puede obviar el hecho de que dependiendo del desempeño del producto será el efecto negativo que tendrá sobre la función objetivo. Por otra parte, el daño al margen obtenido en la góndola se minimiza, pues como se vio en el capítulo de algoritmo de resolución, resolver el problema de optimización con menos espacio disponible, es igual a resolver el problema de optimización con todo el espacio disponible, por lo que aunque crezca el valor de este producto en presencia, los otros productos seguirán manteniendo las mismas presencias relativas en la góndola, y seguirán buscando obtener un margen óptimo con el espacio que va quedando disponible.

Para revisar un poco más el tema, se estudia el caso cuando todos los productos con límite inferior van aumentando su tamaño.

Variación de S_j^L de todos los productos con límite inferior:

Se realizar ahora el experimento para todos los productos con límite inferior, o lo que es equivalente, con todos los "productos estrella". El resultado es el siguiente:

Aumento S_j^L	Valor Función Objetivo	Variación
0%	$ 6.983.400	0,00%
10%	$ 6.971.100	-0,18%
20%	$ 6.954.000	-0,25%
30%	$ 6.930.200	-0,34%
40%	$ 6.894.900	-0,51%
50%	$ 6.830.600	-0,93%

Tabla 47– Valores variación Sj^L

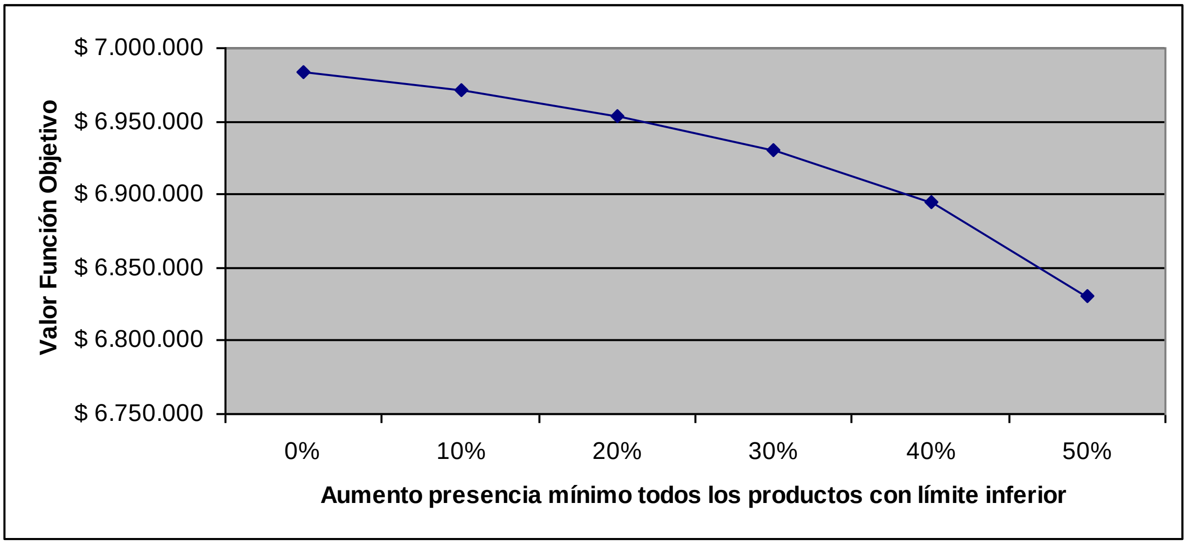


Fig. 11 – Gráfico efecto S_j^L

Como se puede observar, el resultado es bastante similar en cuanto a tendencia al obtenido para el caso donde sólo una variable aumentaba su valor mínimo. Eso sí, es bastante claro que la velocidad a la que tiende es levemente mayor, aunque aún no es un cambio brusco que afecte en demasía la función objetivo. Si se toma en cuenta que con un aumento del 50% en el límite inferior de todos los productos que lo poseen se tiene una participación total de estos productos en góndola de 94%, queda bastante claro que la función objetivo es poco sensible a cambios en los montos de presencia mínimos que deberá tener un producto. La variación entre el escenario base y un 94% de presencia en total es de aproximadamente $150.000, que representa una variación de -2,18%, lo que se puede considerar poco dado el gran nivel de cambio que sufrieron los límites inferiores.

De estos dos ejemplos se puede ver que los cambios en el valor del límite inferior del producto i no representa una gran amenaza al retailer, ya que la influencia sobre la función objetivo es baja. Llevándolo al campo de la vida real, generalmente son los proveedores de marcas exitosas como Coca-Cola los que imponen por contrato una presencia mínima en las góndolas, y dado que es un producto que se podría considerar como “Producto Estrella”, no es un gran daño para el margen total de la tienda un aumento en el monto mínimo solicitado de presencia, aunque es sin duda un descenso con respecto a la situación óptima.

Con respecto a los valores de S_i (% de presencia en góndola de los productos), es claro que para estos productos a los que se les ha aumentado el límite inferior, tienen un valor de $S_j = S_j^L$, mientras que el resto de los productos remanentes tienen una repartición del espacio restante equivalente al obtenido en el resultado del caso general. Esto debido a lo que se observó en el capítulo de "Algoritmo de Resolución" donde se llegó a la conclusión de que cuando se optimiza una góndola, sin importar si está toda o parte de la góndola disponible, el proceso de optimización es el mismo, dando como solución las mismas proporciones de presencia, aunque disminuidos en resultado por el espacio menor disponible.

Variación de función objetivo cuando aumenta el espacio disponible a utilizarse

En este otro caso, se estudia el efecto sobre la función objetivo de agregar más espacio al total disponible. Se resolverá nuevamente el caso general, imponiendo ahora que la sumatoria de los porcentajes de espacio designados a cada producto no sumarán 1, sino que sumarán 1 + %, con % el porcentaje de aumento del espacio disponible para los productos en la góndola. Se muestran los resultados a continuación.

Espacio disponible	Valor función objetivo	Variación
100%	$ 7.019.900	0,00%
101%	$ 7.022.000	0,03%
110%	$ 7.040.000	0,26%
130%	$ 7.075.400	0,50%
150%	$ 7.105.900	0,43%
170%	$ 7.132.600	0,38%
200%	$ 7.167.500	0,49%
300%	$ 7.255.200	1,22%

Tabla 48– Valores variación Si

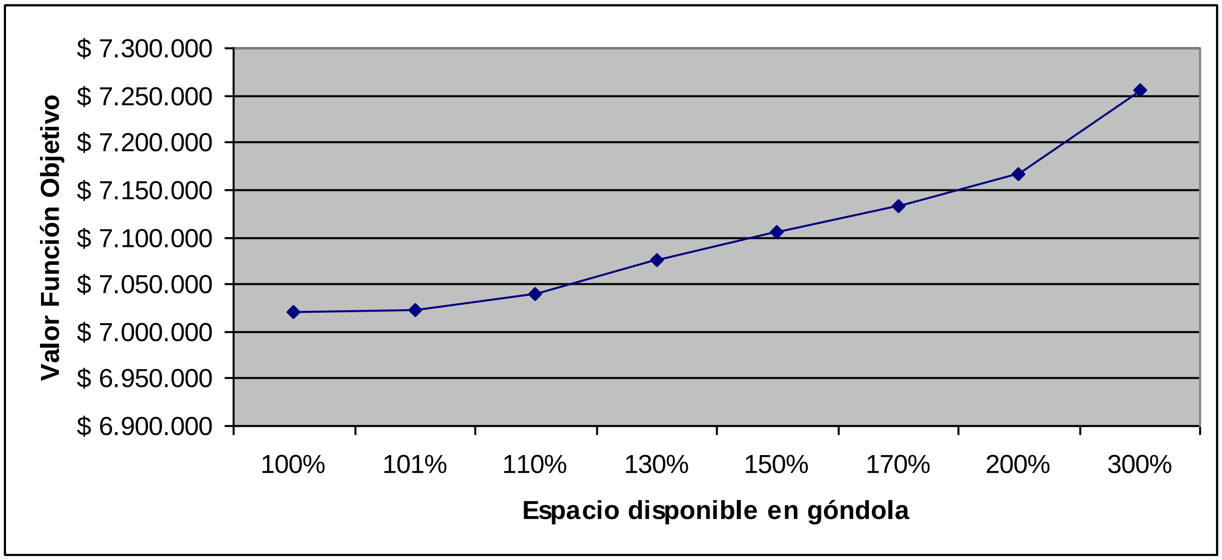


Fig. 12 – Gráfico efecto aumento espacio

Con este resultado se puede observar que el efecto de poner más espacio disponible en al góndola es que la función objetivo empieza a tasas de aproximadamente un 0,25%. La forma del gráfico se debe a que el eje X no tiene intervalos constantes, pero debiese tender a ser de forma lineal.

Un efecto que vale la pena destacar es que al tener una expansión en el espacio disponible del 200%, a diferencia de la solución del caso base, la primera solución que se logra para el problema general respeta todas las restricciones de límite inferior de producto a colocar en góndolas para los "productos estrella". El motivo es bastante lógico, ya que al haber más espacio disponible, los distintos productos pueden aumentar su participación en la góndola, pudiendo así rebasar el límite mínimo de producto presente en el mix de productos a exhibir. Por otra parte, a pesar de que se podría pensar que dado que es netamente una expansión de una restricción del problema, la nueva solución mantendría las proporciones entre los productos, sin embargo, al revisar la solución óptima cuando el espacio disponible es del 300%, cambian totalmente las cifras de repartición de productos en la góndola, otorgando mucha más participación a los productos que poseen un mayor valor de venta acumulado anual, o lo que es lo mismo, aportan gran parte del share de la categoría. Es así como en el óptimo cuando el espacio disponible se ha triplicado, se tiene que los grupos y productos que tienen la mayor parte del espacio en la góndola son el grupo 4 y el grupo 5, quienes tienen el mayor share del mix de productos total, y los productos Papitas Lay's americano 270 grs. y Papitas Lay's americano 38 grs., quienes también tienen un alto nivel de ventas.

Variación de función objetivo cuando aumenta el margen

Por último, se estudiará el efecto de que aumente el margen de un producto. Es claro ver, por la forma de la función objetivo del problema de optimización, que si a todos los productos les aumentase el margen en un mismo grado, entonces el valor de la función objetivo aumentaría en el mismo grado, pues se multiplica el cambio porcentual directamente en la ecuación de margen por demanda. Es por esta razón que sólo se revisará el caso cuando un producto aumenta su margen por unidad. Para analizar de mejor manera el efecto, se revisaran tres tipos de productos distintos: uno de bajo margen (Cacahuate japonés con un -54% de margen con respecto al promedio), uno de margen promedio (grupo 10 de productos, con un 4,26% de margen por sobre el promedio), y uno de margen superior (grupo 9 de productos, con un 237,23% de margen por sobre el promedio). El grupo 9 corresponde a Snacks pequeños salados en lata de otras marcas, y el grupo 10 corresponde a Snacks pequeños salados en tarro de Evercrisp. Se muestran los resultados a continuación:

	Aumento de margen	Valor función objetivo	Variación
Cacahuate Japonés 42g	0%	$ 7.019.900	0,00%
	1%	$ 7.022.000	0,03%
	10%	$ 7.040.400	0,26%
	50%	$ 7.122.600	1,17%
	100%	$ 7.226.300	1,46%
Grupo 10	0%	$ 7.019.900	0,00%
	1%	$ 7.021.700	0,03%
	10%	$ 7.037.100	0,22%
	50%	$ 7.106.300	0,98%
	100%	$ 7.193.600	1,23%
Grupo 9	0%	$ 7.019.900	0,00%
	1%	$ 7.020.600	0,01%
	10%	$ 7.026.500	0,08%
	50%	$ 7.052.800	0,37%
	100%	$ 7.086.100	0,47%

Tabla 49– Valores variación margen

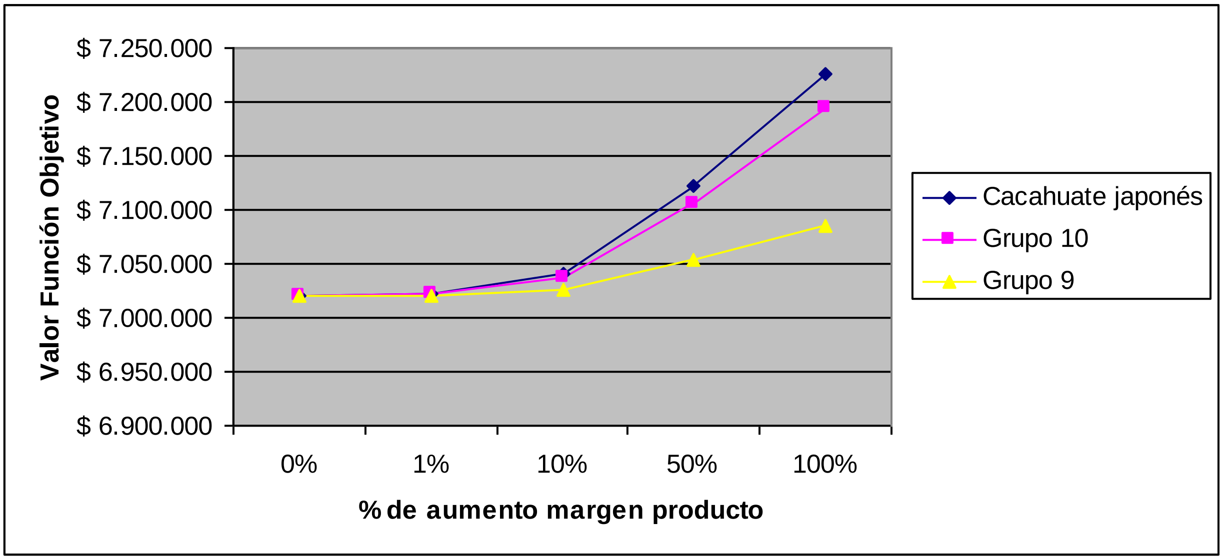


Fig. 13 – Gráfico efecto aumento margen

Se produce un resultado interesante, pues se puede ver que el producto que tiene mejor margen por unidad es aquel que afecta en menor manera a la función objetivo a medida que crece su margen (Productos del Grupo 9), mientras que el producto que menos margen deja por unidad, es el que más afecta el valor de la función objetivo (Cacahuate Japonés). La idea tras esto al parecer es el hecho de que un producto con muy alto margen tendería a ser un producto "de lujo", por lo que su compra no sería un hecho común o de gran flujo, mientras que el cacahuate japonés tiene una mayor venta, y al hacer que cada producto se venda con un mejor margen, manteniendo el número de unidades, produce un efecto más fuerte en la función objetivo. Además, se debe notar que la variación en margen afecta de gran manera a la función objetivo, en comparación con las variaciones de otros factores, superado sólo por el efecto de la elasticidad espacio.

14. Análisis solución propuesta versus opción actual

Al momento de justificar la implementación de la solución propuesta en esta tesis, se debe comparar el resultado con la solución actual, y con las soluciones alternativas del mercado.

Pronto Copec no cuenta con una herramienta particular para seleccionar los productos que estarán en las góndolas. El sistema actual es simplemente una mezcla entre compromisos con proveedores (quienes piden cierto % de ocupación en las góndolas), experiencia del administrador del local (quién toma la decisión final de los productos que pondrá en góndolas), y datos históricos de venta que se tienen registrados en Excel (Total de ventas por producto, unidades vendidas y costos)

Tomando esto en cuenta, la solución propuesta en esta tesis es más objetiva que el criterio utilizado por los administradores, pues da una solución óptima basada en datos históricos, y no se basa en percepciones.

La implementación de la solución propuesta requeriría de dos cambios relevantes. Primero, la utilización de un nuevo software, GAMS, el cual es necesario debido a que el algoritmo de optimización utiliza una ecuación no lineal, la cual no puede ser resuelta con la versión básica de Excel con la que cuenta Pronto Copec.

En segundo lugar, requeriría de tomar datos constantemente de las transacciones realizadas, pues se requiere conocer datos como la elasticidad espacio de los productos (b_i), analizar la demanda por productos para conocer el valor del parámetro de demanda (A_i), medir el porcentaje de espacio exacto que ocupará cada producto, y definir claramente el espacio total con el que se cuenta para cada categoría. Realizar este trabajo para todas las categorías y productos puede ser un trabajo no menor, además de requerir capacitación de la fuerza laboral.

En cuanto al tiempo de solución requerido para esta optimización, este es bajísimo, requiriendo 0,3 segundos para entregar un resultado con los datos ingresados.

Cabe tener en cuenta que el sistema está semi-automatizado, pues como se explicó anteriormente, para utilizar el algoritmo se debe ejecutar la optimización las veces que sea necesario para que se cumplan todas las restricciones. Para los casos vistos en esta tesis, nunca se requirió más de 3 veces. Suponiendo un sistema ya alimentado con los datos necesarios para correr la optimización, y una persona que tenga práctica en la ejecución del modelo, la optimización para una categoría no debería tomar más de 10 minutos en llevarse a cabo, más que nada debido a que ciertos datos deberán ser copiados manualmente en tablas Excel a través de las cuales se ingresan los datos.

En la categoría trabajada, Snacks, se debían modificar a lo más 26 datos distintos, lo que no significa una gran inversión de tiempo para realizar los cambios necesarios.

Con respecto al resultado teórico obtenido en la tesis, comparado con el resultado obtenido en la práctica para snacks durante el año 2007, la variación no es muy relevante, lo que podría interpretarse como que el algoritmo no es de aporte para Pronto Copec, sin embargo, el motivo de este resultado es debido a que los datos que alimentan la optimización son el reflejo de las decisiones tomadas por los administradores, y esto genera que datos como la demanda de los productos esté alterada. Una forma de ejemplificar esto es el caso de las papas fritas Lays. La decisión del administrador fue que un 90% de los productos colocados en góndolas fueran papas fritas, lo que implica que obviamente serán los productos más demandados (Por ser la opción más presente al momento de comprar). Esto provoca que al ver los resultados obtenidos para el año, este producto sea el más vendido, y que al momento de optimizar con el algoritmo, vuelva a ser colocado como uno de los productos que debe ir en la góndola, con un alto nivel de presencia, gracias a su alto nivel de demanda mostrado en los datos. Una forma de eliminar este factor es rotando los productos que se colocan en góndolas, para poder determinar un verdadero desempeño de los productos frente a otras opciones. Los resultados numéricos y sus comparaciones frente al resultados obtenido en el año 2007 se encuentran en las conclusiones de este trabajo. Es además estrictamente necesario llevar un control de inventarios y rotación, pues con estos datos, es posible tener claridad acerca del desempeño de los productos de acuerdo al espacio asignado.

Para finalizar con el análisis, se realiza una evaluación acerca del tiempo que demora el programa en optimizar el problema general para distintos volúmenes de datos. Los resultados no son lo importante, sino que se evaluó lo robusto del problema. Para aumentar el número de datos, sólo se copiaron filas de la base de datos para tener un mayor volumen.

Los resultados observados, en cuanto a tiempo de resolución, fueron los siguientes:

Número de datos	Tiempo de resolución (seg)
26	0,3
100	0,4
1000	3,6
100.000	455,0

Tabla 50 – Tiempo de resolución según número de datos

15. Conclusiones

En esta tesis se logró comprobar la importancia de la investigación y desarrollo de una metodología para optimizar la asignación de espacios en góndola. El modelo desarrollado a partir del algoritmo de Corstjean y Doyle ha demostrado ser una metodología eficiente en la búsqueda del óptimo del problema y ha permitido descubrir propiedades de los productos que no son fáciles de determinar por simple inspección.

A partir de los primeros tres modelos de optimización derivados del modelo original de Corstjean y Doyle: El problema general, el problema con límite inferior de producto a colocar en góndola, y el problema con bono por posición, se han logrado obtener conclusiones con respecto al comportamiento de la solución óptima. Una de las primeras conclusiones que se obtuvo fue el hecho de demostrar que los porcentajes de espacio ocupados en góndolas por dos tipos distintos de productos están directamente relacionados a través de sus márgenes, ponderadores de demanda y la elasticidad espacio. Esta relación se vio a través de la ecuación:

$$\frac{Si}{Sj} = \left(\frac{Wi * ai}{Wj * aj}\right)^{\left(\frac{1}{1-b}\right)}$$

Esta ecuación se obtuvo a partir del problema general, y se pudo también a través de la misma obtener una ecuación para el valor óptimo de S_i el cual se muestra a continuación:

$$S_i = \frac{(Wi * ai)^{(\frac{1}{1-b})}}{\sum_{i=1}^{K} (Wi * ai)^{(\frac{1}{1-b})}}$$

Ambos resultados resaltan la importancia de los factores que influyen en la demanda (a_i y b), y del factor que denota cuanto margen se obtiene por cada unidad vendida (Wi). Es aún más interesante el ver que existe una relación entre cualquier S_i y S_j, que permite ver cual debe ser la relación entre ellos cuando la solución es óptima. También queda explícito de este resultado el hecho de que la solución óptima para un S_i depende del comportamiento de los otros productos, y de los márgenes y demanda que presentan, mostrando el valor óptimo de S_i como una proporción del margen multiplicado por el factor de la demanda, definido a través de $\sum_{i=1}^{K} (Wi * ai)^{(\frac{1}{1-b})}$. De este resultado se puede ver que a medida que crece el valor de Wj*aj, para todo j distinto de i, el valor de S_i va disminuyendo. Este fue uno de los primeros indicios acerca de la importancia del margen y del factor a_i, que se comprobaría más tarde a partir de los experimentos.

Al realizar la optimización a través de las condiciones de KKT para la segunda variación del problema de Corstjean y Doyle, con restricción de asignación mínima de producto en la góndola, se obtuvo otra conclusión interesante a partir de la fórmula resultante:

$$S_i = \frac{(1 - \sum_{j=1}^{K} S_j^L) * (Wi * ai)^{\frac{1}{1-b}}}{\sum_{i=1}^{K} (Wi * ai)^{\frac{1}{1-b}}}$$

Se muestra que esta fórmula es exactamente igual a la solución del problema general, pero ponderado por un factor $(1 - \sum_{j=1}^{K} S_j^L)$, que es justamente el espacio que queda disponible para el producto i si se fijan los valores de los productos j que tienen límite inferior. Esto dio a entender que era posible desarrollar una solución algorítmica que fuese optimizando el problema mediante iteraciones, buscando solucionar el problema con el espacio disponible hasta ese momento, que podía corresponder perfectamente al espacio disponible original, menos el espacio que ya ha sido ocupado. Esto también sirvió para concluir que cuando en una góndola se fijan espacios para productos específicos (como una promoción por ejemplo para un producto nuevo) el problema no cambia su forma de resolverse, sólo se debe tener en cuenta el espacio ya ocupado.

Finalmente, se vio que al otorgar un bono a la demanda, multiplicando el factor a_i por un bono B_{ik}, correspondiente al bono que recibe el producto i que está en el espacio k, se obtiene un resultado similar a los anteriores, salvo que el resultado está ponderado por el factor bono B_{ik}. Se obtuvo que la solución es:

$$S_{ik} = \frac{(1-\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} S_{jk}^{L}) * (Wi * B_{ik} * a_i)^{\frac{1}{1-b}}}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} (Wi * B_{ik} * a_i)^{\frac{1}{1-b}}}$$

Como se puede observar, la solución es básicamente similar en los tres casos, con leves diferencias dependiendo de si está todo el espacio disponible o si existe un ponderador que multiplique a la función.

Tras realizarse la revisión de los modelos, se dio a conocer el algoritmo que se utilizaría para resolver los problemas de optimización no lineal en esta tesis. Aplicando el teorema de "Condición suficiente de Lagrange" se pudo concluir que si existe un $\overline{X}$ que es óptimo local para el problema general de optimización, entonces este $\overline{X}$ es óptimo global, dado que al operarse el Lagrangeano del problema general, se cumplía con los requisitos del teorema. Así, se pudo validar el algoritmo en cuanto a que la solución entregada era un óptimo global.

A partir del mismo problema general de optimización, al revisar la función objetivo, se pudo observar que el Hessiano de la función objetivo es semidefinido positivo, y al ser la función objetivo convexa, se tiene que existe un mínimo global, pero que no se podía asegurar que este fuese único. De este resultado se concluyó además que si existían al menos dos mix de productos que entregaban los mismos resultados en la función objetivo, entonces el retailer ganaba poder de negociación, pues podía sustituir algunos productos por otros, en caso de que un proveedor le ofreciese una negociación poco atractiva, sin tener que sacrificar el valor de la función objetivo.

Desde el punto de vista de los datos que alimentaron al problema de optimización, se tuvieron grandes problemas para poder construir data que se aproximara a lo necesario para realizar un trabajo exhaustivo de análisis del comportamiento de la categoría en la tienda. A pesar de que se contaba con datos de ventas, costos y unidades vendidas anuales (que son datos de suma importancia, y se agradece a Arco Prime la facilitación de ellos), existen una serie de otros datos como el espacio asignado a un producto en particular o la asignación histórica de productos a las góndolas que son de suma importancia dentro de estos tipos de problemas. Tras realizar la parte de aplicación de los modelos a los problemas de optimización con datos reales, quedó claro que más allá de las ventas o margen que tiene un producto en particular o en comparación al resto, lo importante es determinar el comportamiento del producto con respecto al espacio que ocupa, y al carecer de datos que entreguen indicios del espacio ocupado en meses anteriores, no se puede estimar claramente tales desempeños, que a pesar de ser básicos, permiten construir nuevos indicadores a partir de los datos, como por ejemplo, la elasticidad espacio real de los productos trabajados.

A pesar de lo anterior, tras ver los resultados obtenidos, se piensa que las estimaciones y supuestos que se tomaron a través del trabajo fueron acertados, y cumplieron con su objetivo de entregar luces acerca del comportamiento de los productos y el mix que se coloca en góndolas, y sus reacciones al moverse algunos parámetros. Los supuestos que se tomaron con respecto al problema de optimización original de Corstjean y Doyle no implicaron que las soluciones obtenidas fueran deficientes o carentes de patrones a partir de los cuales poder detectar información relevante de la categoría en la tienda. Lo mismo es aplicable para la definición de los parámetros b, a_i y S_j^L, que aunque eran valores no obtenidos directamente a partir de la realidad de la categoría en la tienda, si permitieron llegar a respuestas y conclusiones a partir de los modelos.

Con respecto a la solución del problema de optimización con la aplicación del algoritmo, se concluyó que el algoritmo desarrollado es una herramienta que permite obtener mejores resultados que los logrados por Pronto Ciudad La Florida durante el año 2007, pues a partir del algoritmo se obtuvieron mayores márgenes totales en teoría con el mix de productos que se propuso, teniendo una mejora en el margen anual de aproximadamente 0,53%.

Además de la conclusión anterior, también se pudo concluir que el valor de la función objetivo es mejor en el caso de resolver el problema con el algoritmo desarrollado que con la resolución directa del modelo, cuando el problema de optimización tiene restricciones de espacio mínimos designado a ciertos productos. A pesar de que las diferencias en función objetivo no eran muy altas, la razón de trasfondo de la diferencia entre ambos resultados se piensa que es el tema del punto desde donde parte la optimización no lineal del problema. Mientras que el modelo de resolución directa ingresa inmediatamente los valores de restricciones inferiores, y busca el óptimo a partir de este modelo, el método del algoritmo se preocupa de establecer primero la solución para el problema general, y a partir de esa solución, ir ajustando los resultados para que las variables óptimas cumplan con las restricciones del problema. La diferencia a favor del algoritmo estaría en el hecho de que busca mantenerse lo más cercano posible a la solución del problema general, que al ser un problema irrestricto, corresponde a la cota superior que puede tomar el valor de la función objetivo, pues cualquier restricción que fuerce una mayor presencia de algún producto, provocará que el valor de la función objetivo descienda.

También se estudió el nivel de ventas, costos y unidades vendidas para la totalidad de 95 productos snacks que pertenecen a la Tienda Pronto Copec La Florida, para poder ver qué productos tenían desempeños muy superiores a lo normal. En cuanto a ventas, se tuvo que los 3 productos con mejor desempeño eran:

- Pack fiesta de 162 grs., con $977.039 vendidos al año
- Papitas Lay’s americano de 270 grs., con $1.980.815 vendidos al año
- Papitas Lay’s americano de 38 grs., con $1.119.663 vendidos al año

Lo anterior se sostiene del hecho de que la Tienda Pronto Copec de La Florida es una tienda donde la mayoría de los consumidores son jóvenes que compran productos para fiestas y reuniones sociales, lo que explica que productos como papas fritas de tamaño grande tengan un mayor valor en ventas totales que el resto.

Con respecto a los productos de Snacks con mayores costos para el 2007, se obtuvieron los mismos que tienen las mayores ventas:

- Pack fiesta de 162 grs., con $624.149 de costo acumulado al año
- Papitas Lay's americano de 270 grs., con $1.210.466 de costo acumulado al año
- Papitas Lay's americano de 38 grs., con $546.149 de costo acumulado al año

Este resultado fue más bien lógico, ya que se espera que un producto que venda mucho en dinero, también tenga costos altos, a menos que exista un valor agregado muy distinto para el producto, que lo haga muy valioso, y que permita que este tenga un margen muy alto por unidad vendida, aunque está claro que este no era el caso.

Posteriormente, al revisar los productos que tenían mayores unidades vendidas al año, se tenía como resultado:

- Papitas Lay's americano de 270 grs., con 1.678 unidades vendidas al año
- Papitas Lay's americano de 38 grs., con 3.816 unidades vendidas al año
- Cacahuate japonés de 42 grs., con 1.976 unidades vendidas al año

En un inicio se tendió a pensar que un producto con grandes ventas en dinero debería ser líder también en unidades vendidas, sin embargo este resultado desmintió en parte la hipótesis, pues a pesar que los dos primeros productos correspondientes a papas fritas sí cumplen con la hipótesis, el Cacahuate Japonés es un producto que no se destaca por sus ventas anuales, lo que muestra que no existe una relación tan directa entre ventas totales y unidades vendidas.

Finalmente, se estudiaron los productos que tenían mayor margen por unidad. Los resultados fueron:

- Lata almendra salada de 42 grs., con $963 de margen por unidad
- Lata castañas de cajú de 38 grs., con $1.048 de margen por unidad
- Lata maní de almendras y castañas de cajú de 142 grs., con $811 de margen por unidad

De los resultados obtenidos, se observó que estos productos en general tenían ventas bajas a través del año, vendiendo 9, 13 y 5 unidades a través del año respectivamente, lo que es un valor bastante bajo de ventas por producto. Un valor mayor en el margen por unidad no implica particularmente el éxito del producto dentro de su grupo, por lo que aumentar el precio de los productos para generar mayor margen por unidad no es una estrategia recomendable.

Por otra parte, se concluye que la conformación de grupos de productos es una opción que le da al retailer una mayor ventaja de negociación, pues al proponerle la asignación de un grupo de productos en la góndola, el retailer puede solicitar la negociación por cualquiera de los productos que se encuentre dentro del mismo grupo, haciendo que la presencia de algún producto en particular no sea altamente necesario, siempre que exista un sustituto para el mismo.

Al construirse los grupos y los productos destacados se tuvo como resultado que se armaron 11 grupos a partir del hecho que compartían los mismos atributos, y se denominaron 15 productos como "productos estrella". El hecho de conformar grupos de productos también permitió que el resultado arrojado por el modelo de optimización no favoreciera excesivamente a los "productos estrella" en cuanto a presencia en las góndolas. Esta situación se hubiese dado inevitablemente si es que se hubiesen comparado productos 1 a 1, y no por grupos vs. "productos estrella".

La forma en que se definió el límite mínimo de presencia en las góndolas de los "productos estrella" (S_j^L) permitió fijar un criterio con respecto a los productos que cuentan con un desempeño superior, y que se quieren tener en las góndolas, sin embargo, es discutible que este sea el mismo criterio que se siga en la vida real, dado que cuando se realiza el armado de góndolas, los productos a los que se les impone un límite inferior de presencia son aquellos que por contrato con el proveedor requieren tener esa restricción, ya sea porque son productos nuevos, o porque son productos cuyas marcas se deben asociar a la tienda para mantener o aumentar el flujo de cliente (como Coca-Cola por ejemplo). Al no contar con los datos de contratos, y ser estos dinámicos a través del tiempo, se prefirió establecer límites inferiores bajo el criterio explicado, lo que igualmente entregó resultados interesantes para el estudio.

Por otra parte, la construcción de la elasticidad espacio b fue un tema del cual no se logró completa conformidad. No se pudo tener acceso a los valores reales de la tienda, pues no se han calculado, y no se tuvo la visión temprana de realizar experimentos en las mismas tiendas para estimarlo, por lo que al final de esta tesis no se pudo realizar. A pesar de ser discutible el valor de b teórico que se utilizó, de igual forma este sirvió para llevar a cabo los ejercicios y obtener resultados. Una forma de validar este valor junto con las otras estimaciones es el hecho de que con estos valores se obtuvo de los ejercicios teóricos un resultado similar al obtenido en la práctica por Pronto Ciudad La Florida durante el año 2007. Si las estimaciones hubiesen sido demasiado alejadas de la realidad, entonces los resultados teóricos obtenidos también lo hubiesen sido.

Posteriormente, se realizó la resolución de los problemas de optimización utilizando los datos correspondientes a Pronto Ciudad La Florida. Como se puede recordar, se resolvieron tres casos: La solución del problema de optimización del problema de Corstjean y Doyle, con restricciones de cantidad de producto mínimo a colocar en las góndolas, la solución del problema de optimización con bono por posición en la góndola, y la solución del problema de optimización dentro de cada grupo de producto propuesto.

Una conclusión común para los tres casos es que el algoritmo de resolución es bastante eficiente en su ejecución, demorando menos de 5 segundos en arrojar respuesta al problema no lineal planteado. Además, la convergencia de la solución es bastante rápida, ya que en todos los casos llegó al óptimo global en no más de 2 iteraciones. Esto valida el método como una herramienta de apoyo a la decisión en el día a día, gracias a su rápida respuesta.

Con respecto a la solución del caso 1, con el algoritmo se obtuvo una solución en la función objetivo de $6.997.400, lo cual es un incremento en el margen con respecto a lo logrado por Pronto Copec durante el 2007 en un 0,53%. De este primer caso se puede concluir que los límites inferiores de presencia especificados para los "productos estrella" pueden ser un impedimento para lograr un mejor desempeño de la categoría más que una ayuda, debido a que el resultado dejó en evidencia que en casi todos los casos, la optimización determinó un valor más pequeño para el espacio asignado al producto de lo que se imponía, lo que da a entender que revisando los datos en conjunto y optimizando el modelo, los porcentajes de participación de los "productos estrella" debiesen ser más bajos. Se debe evaluar en la práctica si es mejor imponer límite inferior sólo a los productos que por contrato o marca requieren cierto nivel de presencia, y el resto debiese dejarse sin restricciones para que sea el modelo el que resuelva finalmente qué cantidad de productos colocar.

Por otra parte, se pudo ver que la lógica que sigue el modelo para optimizar la góndola es similar al problema de "llenado de la mochila" donde lo que hace el modelo es comparar el desempeño de productos que ocupen un espacio similar, y colocando el que permita obtener un mayor margen total. Al ser la demanda por el producto creciente a retornos decrecientes, se tiene que en algún momento el producto que siempre había sido seleccionado por el modelo como preferible, presenta un retorno menor, y es sustituido por otro producto de similares características, pero que hasta el momento no había sido utilizado en el mix óptimo. Esto se concluye a partir del hecho que todos los productos y grupos tienen presencia en las góndolas (si los retornos de demanda no fueran decrecientes, entonces la solución sería llenar la góndola del producto con mejor desempeño en margen multiplicado por demanda) y del hecho que el modelo tiende a sustituir productos similares en características (snacks Evercrisp por snacks de otra marca, de tamaños similares) sin que se le ingresen al modelo datos sobre los atributos físicos del modelo que pudiesen indicar que este se está fijando en las características del modelo y no en su desempeño. La idea importante a extraer de este resultado es que como recomendación a los administradores de tiendas, se tenga siempre en mente que los productos alcanzan un nivel de saturación de demanda (a partir de cierto nivel de presencia, la demanda no aumenta) y que es un buen ejercicio establecer a través de la experiencia cuales son estos niveles para distintos productos y categorías, lo que permitirá a futuro definir en que punto es mejor ocupar el espacio en las góndolas con otro producto distinto al que se ha estado colocando generalmente. En el caso de Pronto Ciudad La Florida, este efecto fue más fuerte entre los productos correspondientes a papas fritas, pues dadas las características de la tienda, estos productos son altamente demandados.

Con respecto a la resolución del caso 2, del modelo con bonos por posición, se tiene como conclusión que a pesar de que el resultado es mayor que el desempeño de Pronto Ciudad La Florida, esto depende mucho de los bonos que se asignen por espacio. Lo interesante de este resultado es el hecho de que a pesar de que se premiaban o castigaban ciertas posiciones, la combinación de productos y porcentajes de espacio asignados a cada uno fue el mismo que cuando no se establecen premios por posición. Lo importante a rescatar de este hecho es que si se toma en cuenta que en la realidad efectivamente se producen efectos positivos en la demanda sobre los productos que están en ciertas posiciones privilegiadas, entonces se puede obtener un desempeño superior del mix de productos que se está utilizando, sin necesidad de realizar mayores inversiones, sino que solamente identificando bien qué efecto tiene cada posición de las góndolas sobre los productos, y cuales son los productos más recomendados para esas posiciones. La recomendación es estudiar a través de la experiencia en la tienda cómo se va desempeñando un producto a medida que se va colocando en distintas posiciones, con el objeto de obtener una estimación del bono que tiene la posición sobre la demanda del producto.

Dentro del mismo caso, al revisar las posiciones en que se colocaron los productos en la solución óptima, se muestra que en las mejores posiciones el modelo prefiere colocar una mayor cantidad de productos que tienen un buen desempeño en margen total acumulado y en unidades, y no así en margen por unidad. Inicialmente se tenía la intuición de que la regla de decisión óptima era darle preferencia a los productos con margen por unidad alto en las mejores posiciones, así se aumentaba el nivel de ventas y se ganaba más por cada unidad vendida, sin embargo el modelo ha demostrado que no es esa lógica que se debe seguir, sino que se deben poner los productos que ya tienen un buen desempeño por sí solos en los ámbitos de ventas y unidades vendidas, para así potenciar aún más el margen total que le entregan a la tienda.

En la resolución del problema de optimización dentro de cada grupo, se logró establecer claramente cuales serían los productos que se debiesen eliminar del mix de opciones para colocar en las góndolas. Por un tema de tamaño no se colocan todas las soluciones y análisis de cada una de las optimizaciones realizadas, pero lo importante es destacar que la decisión de eliminación de un producto no pasa por su desempeño total (unidades totales vendidas multiplicadas por margen de cada unidad), sino que por el desempeño que tenga el producto por unidad de espacio utilizado. Esto se observa en el hecho que hubo ocasiones en que productos que tenían un desempeño total menor que otros que habían sido eliminados, no fueron eliminados debido a que ocupaban un espacio por unidad mucho menor.

Con respecto al análisis de sensibilidad, se estudiaron los efectos sobre la demanda al variar b, S_i, y ambos al mismo tiempo. El efecto más fuerte en la demanda está dado por S_i, que al crecer hace crecer de manera creciente a retornos decrecientes a la demanda. El efecto de la elasticidad espacio en este caso fue de hacer decrecer la demanda cuando crecía b. Esto se debió a que S_i fue tomado como un porcentaje, por lo que a medida que crecía b, decrecía S_i^b. Esto podría ser contrario a la intuición de que la demanda debiese crecer a medida que crece la elasticidad espacio, pero esto sólo se debe a la forma en que fue definido S_i, y no representa errores en el análisis.

El efecto más interesante fue al comparar la variación de ambos factores, lo que dio como resultado que a medida que b se aproximaba a 1, la función se demanda se volvía más lineal. Lo rescatable en este punto es que mientras más bajo sea b, más rápido se alcanza el punto de saturación de la demanda, por lo que el poder determinar la elasticidad espacio de un producto es de suma importancia para entender qué porcentaje de producto se debe colocar en la góndola.

Finalmente, con respecto al análisis de sensibilidad de la función objetivo, se revisaron los efectos de movimiento en la elasticidad espacio b, aumento en el límite inferior de producto a colocar en góndola, aumento en el espacio disponible para utilización y aumento en margen por unidad de producto. El efecto más fuerte de entre los cuatro factores fue el que se obtuvo de variar la elasticidad espacio b. A medida que crecía, el valor de la función objetivo caía de manera estrepitosa. La variación de b (de manera creciente) provocó una pérdida en la función objetivo de aproximadamente un 85%.

El aumento en S_j^L no provoca efectos muy fuertes en el valor de la función objetivo, ni cuando se toma para un producto en particular, ni cuando se toma para todos los productos que tienen límite inferior. La variación total no superó al 0,29%.

El efecto de aumento en espacio también es bajo en conjunto. Cuando se aumenta un 200%, el cambio es de 1,22%. El efecto de aumentar el espacio en un 1%, es de 0,03% de aumento en la función objetivo.

El efecto del margen se estudió para tres tipos distintos de productos, uno con alto margen por unidad, uno con margen promedio por unidad, y uno con margen bajo por unidad. El resultado fue que el producto que tenía menor margen por unidad producía el mayor efecto al aumentarse el espacio disponible, el cual, al aumentarse un 100% el espacio disponible, causaba un aumento de 2,92% en la función objetivo. En contraste, el producto que tenía mayor margen por unidad, producía el efecto de variación más bajo, mostrando un aumento en la función objetivo de sólo 0,93%. Este resultado vuelve a señalar que dentro del mix de productos, son más efectivos en aportar a la función objetivo los productos con bajo margen por unidad pero alto nivel de venta, más que los productos que tienen un alto margen por unidad vendida.

Pendientes a futuro queda dedicar esfuerzos a la investigación de los valores reales que tienen los parámetros que se utilizaron en este estudio de forma teórica, en la práctica. Particularmente, se quiere incentivar a realizar experimentos que permitan conocer el valor real de la elasticidad espacio (b) de las categorías, ponderador de la demanda (a_i), mantener un registro constante de los espacios ocupados en la góndola por cada producto, y revisar los valores de desempeño de los productos en la categoría, pero enfocados desde el punto de vista de desempeño por espacio utilizado. Además, se quiere dejar en claro que a pesar de que los datos y resultados utilizados acá son teóricos, no es lo más importante para el retailer conocer los números resultantes, sino que a partir de lo mostrado, poder rescatar las recomendaciones hechas en esta tesis, acerca de lo que importa y afecta de mayor manera el desempeño de los productos y la categoría dentro de la tienda. Lo formulado aquí no debe ser tomado como una verdad empírica, sino que como una herramienta de apoyo que permite al retailer establecer condiciones y enfocarse en factores que le permitan tomar una decisión de manera más rápida, confiable y con menor riesgo.

Es necesario conocer el verdadero comportamiento de los productos en las salas de venta, por lo que también se propone realizar experimentos que permitan revisar cómo se comporta un mismo producto en distintas posiciones, para poder calcular bonos por posición, y establecer el desempeño de los productos, pero por espacio asignado. Por ende, se debe mantener control sobre el inventario con el que se trabaja, y el espacio ocupado por los distintos SKU's.

Una limitante que tenía esta tesis es que los atributos bajo los cuales se agrupaban los productos eran sólo cuatro, los que correspondían a los que se utilizan actualmente por los administradores. Es de esperar que para futuros estudios se trabaje en cómo otros atributos influyen en la forma de agrupar productos y en el comportamiento de compra de las personas. Dentro de esta misma línea, cabe destacar que esta tesis sólo investigó acerca de la optimización del espacio a asignar en góndolas para los productos, pero no ahondó en cómo las posiciones u otros elementos incrementan las ventas del local.

Otro tema que es en particular interesante observar es la elasticidad cruzada entre productos, ya que esto fomentará la construcción de un mix que genere sinergias entre los productos que lo componen, dado que ciertos productos puestos en conjuntos tienen un mejor desempeño que por separado.

Finalmente, se propone agregar otros componentes del modelo de Corstjean en el futuro, como el costo por inventario o las elasticidades del costo, además de probar optimizaciones con otros modelos y otras heurísticas.

16. **Bibliografía**

Papers

- Corstjens, Marcel y Doyle, Peter. 1981. A model for optimizing space retail allocations. Publicación Management Science. Volumen 27, No. 7.

- Oppewal, Harmen y Koelemeijer, Kitty. 1999. More choice is better: Effects of assortment size and composition on assortment evaluation. International Journal of Research in Marketing 22. Pág.45 – 60.

- Yang, M- H y Chen, W-C. 1999. A study of shelf space allocation and management, International Journal of Production Economics. Pág. 60-61 y 309-317

- Bookbinder, James y Zarour, Feyrouz. 2001. Direct product profitability and retail shelf-space allocation models. Jorunal of Business Logistic. Vol. 22, No.2.

- Lim, Andrew; Rodrigues, Brian y Zhang, Xingwen. 2004. Metaheuristics with local search techniques for retail shelf-space allocation. Publicación Management Science. Volumen 50, No. 1. Pág. 117-131.

- Kahn, Barbara y Wansink, Brian. 2004. The Influence of assortment Structure on Perceived Variety and Consumption Quantities. Journal of Consumer Research, Inc. Vol. 30

- Martínez-de-Albéniz, Víctor y Roels, Guillaume. 2007. Competing for shelf space. Submitted to manuscript.

Tesis y documentos académicos

- Pieber, Werner. 2006. “Asignación de espacio en góndola de un supermercado”. Tesis para postular al título de ingeniero civil industrial. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento Ingeniería Civil Industrial

- Piña, Pamela. 2007. “Metodología para apoyar la toma de decisiones en surtido de supermercados”. Tesis para postular al título de ingeniero civil industrial , Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento Ingeniería Civil Industrial

- Nahum, Paola. 2007. “Metodología para la toma de decisiones de surtido de categoría en una tienda de conveniencia”, Tesis para postular al título de ingeniero civil industrial. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento Ingeniería Civil Industrial

- Passalacqua, Andrés. 2008. “Metodología de apoyo a la toma de decisiones en surtido, espacio y ubicación de productos en una cadena de supermercados”. Tesis para postular al título de ingeniero civil industrial. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento Ingeniería Civil Industrial

- Bosch, Máximo y Goic, Marcel. 2005. Modelos de Posicionamiento

- Bosch, Máximo y Musalem, Andrés. 2005. Presentación sobre Administración de Categorías.

17. Anexos

Anexo 1: Código programa ejemplo de 5 productos

```
SETS
        I productos /1*5/;

parameters

W(i) Margen de producto i en pesos

/1      60
2       40
3       50
4       20
5       30/

A(i) Ponderador de demanda

/1      10
2       50
3       75
4       100
5       200/

E(i) Porcentaje de espacio ocupado por producto del total disponible

/1      0.010
2       0.007
3       0.005
4       0.003
5       0.001/
```

```
SCALAR b  Elasticidad espacio  /0.5/ ;

VARIABLES
     S(I)    Porcentaje del espacio total disponible que se le asigna al producto i
     F       Margen total por mix de productos;
  EQUATIONS
     FO           Función objetivo
     LIMESP       El espacio a ocupar está limitado
     LIMVARINF(I) Límite inferior variable S(I)
     LIMVARSUP(I) Límite superior variable S(I)
;



  FO ..           F  =E=  SUM((I), W(I)*A(I)*(S(I)**b));
  LIMESP..        SUM(I, S(I)) =E= 1;
  LIMVARINF(I)..   S(I) =G= 0;
  LIMVARSUP(I)..   S(I) =L= 1;



MODEL GONDOLA /ALL/ ;
SOLVE GONDOLA USING NLP MAXIMIZING F;
```

Anexo 2: Código programa resultado caso 1

```
SETS
       I productos /1*26/;

parameters
```

W(i) Margen de producto i en pesos

/1 179.09

2 553.85

3 205.24

4 132.53

5 273.67

6 198.35

7 260.30

8 419.23

9 727.42

10 237.40

11 197.69

12 547.35

13 217.68

14 511.43

15 459.09

16 150.29

17 271.81

18 262.65

19 527.73

20 627.27

21 525.10

22 561.01

23 565.89

24 156.07

25 303.07

26 102.99

/

A(i) Ponderador de demanda

/1 1076.70
2 141.46
3 1113.99
4 7626.98
5 4255.86
6 2030.80
7 822.74
8 172.22
9 103.36
10 808.01
11 426.91
12 178.79
13 745.19
14 736.38
15 1759.43
16 4106.39
17 1091.73
18 1016.84
19 196.67
20 131.86
21 246.25
22 338.36
23 149.54
24 1447.15
25 893.71
26 2202.43
/

E(i) Porcentaje de espacio ocupado por producto del total disponible

```
/1      0.0004
2       0.0006
3       0.0004
4       0.0006
5       0.0036
6       0.0003
7       0.0026
8       0.0003
9       0.0002
10      0.0002
11      0.0002
12      0.0037
13      0.0006
14      0.0049
15      0.0036
16      0.0007
17      0.0019
18      0.0014
19      0.0002
20      0.0036
21      0.0002
22      0.0006
23      0.0006
24      0.0004
25      0.0003
26      0.0004
/

SCALAR b  Elasticidad espacio  /0.03/ ;

VARIABLES
```

```
    S(I)    Porcentaje del espacio total disponible que se le asigna al producto i
    F       Margen total por mix de productos;
S.fx('12')=0.0201;
S.fx('14')=0.11434;
S.fx('15')=0.2061;
S.fx('16')=0.0868;
S.fx('17')=0.0655;
S.fx('18')=0.0442;
S.fx('20')=0.0140;
S.fx('26')=0.0269;

 EQUATIONS
    FO          Función objetivo
    LIMESP      El espacio a ocupar está limitado
    LIMVARINF(I) Límite inferior variable S(I)
    LIMVARSUP(I) Límite superior variable S(I)
;



  FO ..          F  =E=  SUM((I), W(I)*A(I)*(S(I)**b));
  LIMESP..        SUM(I, S(I)) =E= 1;
  LIMVARINF(I)..   S(I) =G= 0;
  LIMVARSUP(I)..   S(I) =L= 1;



MODEL GONDOLA /ALL/ ;
SOLVE GONDOLA USING NLP MAXIMIZING F;

*=== Export to Excel using GDX utilities
```

```
*=== First unload to GDX file (occurs during execution phase)
execute_unload "results.gdx" S.L

*=== Now write to variable levels to Excel file from GDX
*=== Since we do not specify a sheet, data is placed in first sheet
execute 'gdxxrw.exe results.gdx o=results.xls var=S.L'
```

Anexo 3: Código programa resultado caso 2

```
SETS
        I productos /1*26/;

parameters

W(i) Margen de producto i en pesos

/1       179.09
2        553.85
3        205.24
4        132.53
5        273.67
6        198.35
7        260.30
8        419.23
9        727.42
10       237.40
11       197.69
12       547.35
13       217.68
14       511.43
```

15 459.09

16 150.29

17 271.81

18 262.65

19 527.73

20 627.27

21 525.10

22 561.01

23 565.89

24 156.07

25 303.07

26 102.99

/

A(i) Ponderador de demanda

/1 1076.70

2 141.46

3 1113.99

4 7626.98

5 4255.86

6 2030.80

7 822.74

8 172.22

9 103.36

10 808.01

11 426.91

12 178.79

13 745.19

14 736.38

15 1759.43

16	4006.39
17	1091.73
18	1016.84
19	196.67
20	131.86
21	246.25
22	338.36
23	149.54
24	1447.15
25	893.71
26	2202.43

/

E(i) Porcentaje de espacio ocupado por producto del total disponible

/1	0.0004
2	0.0006
3	0.0004
4	0.0006
5	0.0036
6	0.0003
7	0.0026
8	0.0003
9	0.0002
10	0.0002
11	0.0002
12	0.0037
13	0.0006
14	0.0049
15	0.0036
16	0.0007

```
17      0.0019
18      0.0014
19      0.0002
20      0.0036
21      0.0002
22      0.0006
23      0.0006
24      0.0004
25      0.0003
26      0.0004
/

SCALAR b  Elasticidad espacio  /0.03/ ;

VARIABLES
    S(I)   Porcentaje del espacio total disponible que se le asigna al producto i
    F      Margen total por mix de productos;
 EQUATIONS
    FO          Función objetivo
    LIMESP      El espacio a ocupar está limitado
    LIMVARINF(I) Límite inferior variable S(I)
    LIMVARSUP(I) Límite superior variable S(I)
    LIM12       12
    LIM13       13
    LIM14       14
    LIM15       15
    LIM16       16
    LIM17       17
    LIM18       18
    LIM19       19
    LIM20       20
```

```
    LIM21      21
    LIM22      22
    LIM23      23
    LIM24      24
    LIM25      25
    LIM26      26
;


  FO ..           F  =E=  SUM((I), W(I)*A(I)*(S(I)**b));
  LIMESP..         SUM(I, S(I)) =E= 1;
  LIMVARINF(I)..   S(I) =G= 0;
  LIMVARSUP(I)..   S(I) =L= 1;
  LIM12..          S('12') =G= 0.0201;
  LIM13..          S('13') =G= 0.0136;
  LIM14..          S('14') =G= 0.1143;
  LIM15..          S('15') =G= 0.2061;
  LIM16..          S('16') =G= 0.0868;
  LIM17..          S('17') =G= 0.0655;
  LIM18..          S('18') =G= 0.0442;
  LIM19..          S('19') =G= 0.0010;
  LIM20..          S('20') =G= 0.0140;
  LIM21..          S('21') =G= 0.0014;
  LIM22..          S('22') =G= 0.0059;
  LIM23..          S('23') =G= 0.0025;
  LIM24..          S('24') =G= 0.0172;
  LIM25..          S('25') =G= 0.0076;
  LIM26..          S('26') =G= 0.0269;

MODEL GONDOLA /ALL/ ;
SOLVE GONDOLA USING NLP MAXIMIZING F;
```

```
*=== Export to Excel using GDX utilities

*=== First unload to GDX file (occurs during execution phase)
execute_unload "results.gdx" S.L

*=== Now write to variable levels to Excel file from GDX
*=== Since we do not specify a sheet, data is placed in first sheet
execute 'gdxxrw.exe results.gdx o=results.xls var=S.L'
```

Anexo 4: Código programa resultado caso 3, grupo 10 (Ejemplo)

```
SETS
        I productos /1*22/;

parameters

W(i) Margen de producto i en pesos

/1      242.00
2       247.10
3       241.87
4       242.94
5       233.41
6       225.07
7       211.47
/

A(i) Ponderador de demanda

/1      2.64
```

```
2        115.01
3        110.43
4        319.17
5        149.67
6        89.00
7        74.64
/

SCALAR b  Elasticidad espacio  /0.03/;

VARIABLES
       S(I)    Porcentaje del espacio total disponible que se le asigna al producto i
       F       Margen total por mix de productos;

EQUATIONS
       FO           Función objetivo
       LIMESP       El espacio a ocupar está limitado
       LIMVARINF(I) Límite inferior variable S(I)
       LIMVARSUP(I) Límite superior variable S(I)
;


  FO..             F =E= SUM((I), W(I)*A(I)*(S(I)**b));
  LIMESP..         SUM(I, S(I)) =E= 0.0162;
  LIMVARINF(I)..   S(I) =G= 0;
  LIMVARSUP(I)..   S(I) =L= 1;



MODEL GONDOLA /ALL/ ;
SOLVE GONDOLA USING NLP MAXIMIZING F;
```

```
*=== Export to Excel using GDX utilities

*=== First unload to GDX file (occurs during execution phase)
execute_unload "results.gdx" S.L

*=== Now write to variable levels to Excel file from GDX
*=== Since we do not specify a sheet. data is placed in first sheet
execute 'gdxxrw.exe results.gdx o=results.xls var=S.L'
```

Anexo 5: Ejemplo de Macro utilizada (Para armar márgenes mensuales por unidad)

```
Sub ArmarMárgenes()
Dim i
Dim j
i = 6
j = 4

While i < 290

j = 4

While j < 17

If Cells(i - 1, j).Value <> 0 Then
Cells(i, j).Value = (Cells(i - 3, j).Value - Cells(i - 2, j).Value) / Cells(i - 1, j).Value
Else
Cells(i, j).Value = 0
End If
```

```
j = j + 1

Wend

i = i + 4


Wend

End Sub
```