



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

**MÁXIMA TRANSFERENCIA DE CALOR EN CAVIDADES CON
PAREDES HORIZONTALES CONDUCTORAS**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

BÁRBARA ALEJANDRA GONZÁLEZ GONZÁLEZ

**PROFESOR GUÍA:
RAMÓN FREDERICK GONZÁLEZ**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALVARO VALENCIA MUSALEM
CARLOS GHERARDELLI DEREZEGA**

**SANTIAGO DE CHILE
ABRIL 2008**

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO
POR: BÁRBARA GONZÁLEZ GONZÁLEZ.
FECHA: 01 DE ABRIL 2008
PROF. GUÍA: SR. RAMÓN FREDERICK.

“MÁXIMA TRANSFERENCIA DE CALOR EN CAVIDADES CON PAREDES HORIZONTALES CONDUCTORAS.”

El objetivo de esta memoria es encontrar la Razón de Aspecto $A=H/L$ que produce la máxima transferencia de calor en cavidades rectangulares de altura H y ancho L con paredes verticales de temperatura impuesta T_H y T_C , con $T_H > T_C$, y paredes horizontales perfectamente conductoras, con una distribución lineal de temperatura en éstas. Se consideró aire ($Pr = 0,71$) al interior de la cavidad y tres números de Rayleigh: 10^4 , 10^5 y 10^6 . La razón de Aspecto fue variada en el rango $[0.4, 2.3]$, que permitió ubicar la presencia de máximos en el Nusselt en las paredes y en el centro.

El problema se resolvió mediante la resolución numérica del sistema Navier Stokes-Energía y se usó un código basado en el método SIMPLER incorporando la fórmula de transformación de coordenadas que permite afinar la malla cerca de todos los bordes del recinto y variar la Razón de Aspecto sin la necesidad de cambiar el número de nodos. De este modo se admite la utilización de soluciones convergidas como condición inicial para A levemente distintas, acortando los tiempos de simulación. El código resuelve las ecuaciones mencionadas en forma transiente, lo cual permite controlar la estabilidad variando el paso de tiempo. La malla seleccionada para encontrar las soluciones tiene 122 nodos en la dirección X y 122, 182 o 242 en la dirección Y según sea necesario.

Las soluciones fueron descritas por sus valores del Nu en las paredes y en el centro, la distribución del Nusselt local en las paredes inferior y superior e izquierda y derecha, velocidades máximas según los ejes, modos de flujo descritos por la función corriente y campos de temperatura descritos por diagramas de isoterms.

Para cada caso se llegó a un régimen permanente y se encontró la geometría que maximiza el $Nu_{central}$ y el Nu_{pared} . Para $Ra=10^4$ se tiene que $A_{centro}^*=[1.6, 1.65]$ y $A_{pared}^*=[1.98, 2.1]$, para $Ra=10^5$ $A_{centro}^*=0.76$ y $A_{pared}^*=1.97$ y para $Ra=10^6$ $A_{centro}^*=0.42$ y $A_{pared}^*=1.24$. Además se vio que la Razón de Aspecto que maximiza el Nu en las paredes y en el centro disminuye si el Rayleigh aumenta, que para todo Ra la Razón de Aspecto que maximiza el Nusselt central es siempre menor que la Razón de Aspecto que maximiza el Nusselt de pared y que la velocidad del fluido siempre aumenta con el Número de Rayleigh.

A mi Madre y Abulela

Índice General

Índice de Figuras	IV
Índice de Tablas	VIII
1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo General	3
1.2.2. Objetivos Específicos	3
1.3. Alcances	3
2. Antecedentes	5
2.1. Caso Paredes Horizontales Adiabáticas	6
2.2. Caso Paredes Horizontales Perfectamente Conductoras	10
2.3. Benchmarks y Soluciones Experimentales	15
2.4. Otros Antecedentes	16
3. Formulación del Problema	17
3.1. Formulación Física del Problema	17
3.2. Ecuaciones que Gobiernan el Problema	18
3.2.1. Ecuaciones de fluidodinámica	18
3.2.2. Flujo de calor	19
3.2.3. Números adimensionales	19
3.3. Condiciones de Borde	20
4. Metodología	21
4.1. Método Numérico	21
4.1.1. Algoritmo de Discretización	21
4.1.2. Método SIMPLER	28
4.1.3. Código Computacional	29
4.2. Procedimiento	32

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
4.3. Verificación del Código	33
4.4. Campos Iniciales Permanentes	34
4.5. Selección de Malla	36
5. Resultados y Análisis	39
5.1. Caso $Ra=10^3$	39
5.2. Efecto del Número de Rayleigh	41
5.3. Razón de Aspecto Óptima	42
5.4. Velocidades Máximas	47
5.5. Digramas de Isotermas y Función Corriente	50
5.5.1. $A=1.0$	50
5.5.2. Nusselt Central y Pared Máximo	51
5.6. Distribución de Nusselt en Plano Medio, $X=0.5$	58
5.7. Distribución de Nusselt en las Paredes para A^*	60
6. Conclusiones	65
6.1. El Problema y Su Enfoque Numérico	65
6.2. Comportamiento General del Fenómeno.	66
6.3. Características del Máximo.	67
A. Flujos de Calor	70
B. Obtención de un Régimen Permanente	75
Bibliografía	79

Índice de Figuras

1.1. Esquema del problema	2
2.1. Sumario de teorías de transferencia de calor en cavidades rectangulares con fluido de Boussinesq [3]	8
2.2. Nu v/s A para $Ra=30.000$ [6]	9
2.3. Diagrama de isothermas para $A=1.0$ (izq) y $A=1.52$ (der)[6]	10
2.4. Nu v/s t para $Ra=10^6$ y $A=1.0$	11
2.5. Distribución final del número de Nusselt en paredes izquierda y derecha, para $Ra=10^6$ y $A=1.0$	11
2.6. Distribución final del número de Nusselt en paredes inferiores y superiores, para $Ra=10^6$ y $A=1.0$	12
2.7. Flujo de calor en la cavidad, para $Ra=10^6$ y $A=1.0$	12
2.8. Diagrama de isothermas final para $Ra=10^6$	13
2.9. Diagrama de isothermas para $Ra=10^4$ y Tasa de Conductividad Térmica $R_k=10$	14
2.10. Perfil de Temperatura en la Pared inferior para $Ra=10^4$. Curvas de arriba hacia abajo: $R_k=100$, 10, 1 y 0	14
4.1. Esquema del Volumen de Control	22
4.2. Esquema de Malla Desplazada	25
4.3. Esquema de Algoritmo SIMPLER utilizado	29
4.4. Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^4$ y $A=1.0$	35

4.5. Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^5$ y $A=1.0$	35
4.6. Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^6$ y $A=1.0$	35
4.7. Nusselt Pared Derecha v/s A para distintas mallas	37
5.1. Diagrama de Isotermas $Ra=10^3$ y $A=1.0$	40
5.2. Diagrama Función Corriente $Ra=10^3$ y $A=1.0$	40
5.3. Nusselt v/s Ra , $A=1.0$	41
5.4. Razón de Aspecto v/s Número de Nusselt Final, $Ra=10^4$	42
5.5. Detalle de evolución de Nu en torno al máximo, $Ra=10^4$	43
5.6. Razón de Aspecto v/s Número de Nusselt Final, $Ra=10^5$	44
5.7. Detalle de evolución de Nu en torno al máximo, $Ra=10^5$	44
5.8. Razón de Aspecto v/s Número de Nusselt Final, $Ra=10^6$	45
5.9. Detalle de evolución de Nu en torno al máximo, $Ra=10^6$	45
5.10. Razón de Aspecto v/s Velocidades Máximas, $Ra=10^4$	48
5.11. Razón de Aspecto v/s Velocidades Máximas, $Ra=10^5$	48
5.12. Razón de Aspecto v/s Velocidades Máximas, $Ra=10^6$	48
5.13.	50
5.14.	50
5.15.	51
5.16. Maximo Nusselt Central, $Ra=10^4$	52
5.17. Maximo Nusselt Pared, $Ra=10^4$	52
5.18. Máximo Nusselt Central, $Ra=10^5$	53
5.19. Máximo Nusselt Pared, $Ra=10^5$	53

5.20. Máximo Nusselt Central, $Ra=10^6$	54
5.21. Máximo Nusselt Pared, $Ra=10^6$	54
5.22. Diagrama de Isotermas $Ra=10^6$ y $A=1.0$	56
5.23. Distribución de Nusselt Plano Medio $Ra=10^4$	58
5.24. Distribución de Nusselt Plano Medio $Ra=10^5$	58
5.25. Distribución de Nusselt Plano Medio $Ra=10^6$	59
5.26. Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^4$ y $A=1.61$	60
5.27. Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^4$ y $A=2.0$	60
5.28. Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^5$ y $A=0.76$	61
5.29. Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^5$ y $A=1.97$	61
5.30. Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^6$ y $A=0.42$	62
5.31. Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^6$ y $A=1.24$	62
5.32. Diferencia entre Nu_{inf} y Nu_{sup} para $Ra = 10^4$	63
5.33. Diferencia entre Nu_{inf} y Nu_{sup} para $Ra = 10^5$	64
5.34. Diferencia entre Nu_{inf} y Nu_{sup} para $Ra = 10^6$	64
A.1. Flujos de Calor en la Cavidad	71
B.1. Evolución temporal del número de Nusselt Central para $Ra=10^4$ y $A=1.61$	75
B.2. Evolución temporal del número de Nusselt de Pared para $Ra=10^4$ y $A=1.61$	76
B.3. Evolución temporal del número de Nusselt Central para $Ra=10^4$ y $A=2.0$	76
B.4. Evolución temporal del número de Nusselt de Pared para $Ra=10^4$ y $A=2.0$	76
B.5. Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^5$ y $A=0.76$	77
B.6. Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^5$ y $A=1.97$	77

B.7. Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^6$ y $A=0.42$ 78

B.8. Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^6$ y $A=1.24$ 78

Índice de Tablas

2.1. Resultados de la investigación.	9
4.1. Validación con caso adiabático, $Ra=10^4$	33
4.2. Validación con caso adiabático, $Ra=10^5$	33
4.3. Validación con caso adiabático, $Ra=10^6$	34
4.4. Diferencia porcentual entre valores obtenidos con 122 nodos y 182 nodos en la dirección Y, para $Ra = 10^6$	36
4.5. Diferencia porcentual entre valores obtenidos con 122, 182 y 242 nodos en la dirección Y, para $Ra = 10^5$	37
4.6. Diferencia porcentual entre valores obtenidos con 122, 182 y 242 nodos en la dirección Y, para $Ra = 10^4$	38
5.1. Resultados $Ra=10^3$ y $A=1.0$	39
5.2. Diferencia Porcentual de Nu para distinto Ra	41
5.3. Diferencia Porcentual con respecto a valores de $A=1.61$	43
5.4. Diferencia Porcentual con respecto a valores de $A=2.0$	43
5.5. Diferencia Porcentual con respecto a valores de $A=0.76$	44
5.6. Diferencia Porcentual con respecto a valores de $A=1.97$	45
5.7. Diferencia Porcentual con respecto a valores de $A=0.42$	45
5.8. Diferencia Porcentual con respecto a valores de $A=1.24$	46

5.9. Resultados.	46
5.10. Razón de Aspecto Óptima.	46
5.11. Diferencia Porcentual c/r a valores de A=1.0.	46
A.1. Propiedades del aire a 300 K.	72
A.2. Flujo de Calor, Ra=10 ⁴	72
A.3. Flujo de Calor Neto que entra o sale de la cavidad, Ra=10 ⁴	72
A.4. Flujo de Calor, Ra=10 ⁵	73
A.5. Flujo de Calor Neto que entra o sale de la cavidad, Ra=10 ⁵	73
A.6. Flujo de Calor, Ra=10 ⁶	73
A.7. Flujo de Calor Neto que entra o sale de la cavidad, Ra=10 ⁶	73

Nomenclatura

Símbolo	Descripción	Unidad
L	Ancho de la cavidad	Longitud
H	Altura de la cavidad	Longitud
A	Razón de aspecto de la cavidad	
A*	Razón de Aspecto que maximiza el Número de Nusselt	
g	Aceleración de gravedad	m/s^2
α	Difusividad térmica del aire	m^2/s
β	Coefficiente de expansión térmica	K^{-1}
ν	Viscosidad cinemática del aire	m^2/s
k	Coefficiente de conductividad térmica	W/mK
Ra	Número de Rayleigh	
Pr	Número de Prandtl	
Nu	Número de Nusselt	
u	Velocidad en dirección x	m/s
v	Velocidad en dirección y	m/s
T	Temperatura	K
q	Densidad de flujo de calor	W/m^2
T_H	Temperatura de la pared caliente	K
T_C	Temperatura de la pared fría	K
T_M	Temperatura media, $(T_H+T_C)/2$	K
X	Posición adimensional en la coordenada x	
Y	Posición adimensional en la coordenada y	
U	Velocidad adimensional en la dirección X	
V	Velocidad adimensional en la dirección Y	
ΔT	Diferencia de temperatura, (T_H-T_C)	K

Capítulo 1

Introducción

Actualmente, debido a la gran crisis energética que atraviesa el planeta, existe gran preocupación por desarrollar máquinas y procesos industriales eficientes, que maximicen el uso de combustibles y electricidad, y así disminuir los gastos de producción y contribuir a la preservación del medio ambiente.

Uno de los fenómenos de mayor importancia en los procesos industriales y de nuestra vida diaria es la transferencia de calor y movimiento de aire en recintos cerrados. Este fenómeno ha sido ampliamente estudiado desde los años 60, pero muy pocas investigaciones están enfocadas a la optimización de la transferencia de calor y solo entregan una descripción de la naturaleza del fenómeno o resultados experimentales. Además la mayoría estudia el caso de paredes adiabáticas, situación que es muy difícil de cumplir si el fluido es aire, ya que su conductividad térmica es muy baja y cualquier material de las paredes será altamente conductor con respecto a este fluido.

En el presente tema de memoria se estudia numéricamente el problema de convección natural bidimensional en cavidades (recintos cerrados) rectangulares con paredes verticales de temperatura impuesta y paredes horizontales perfectamente conductoras. En la figura 1.1 se muestra un esquema del problema.

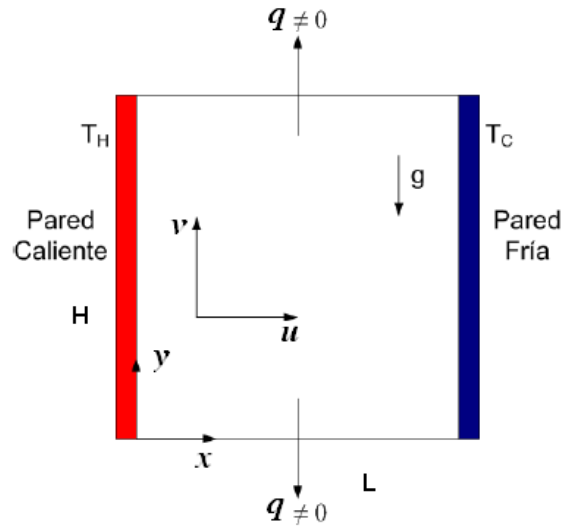


Figura 1.1: Esquema del problema

La idea central es encontrar la Razón de Aspecto A (H/L) para la cual la transferencia de calor, medida por el número de Nusselt medio, es máxima para números de Rayleigh de 10^4 , 10^5 y 10^6 , utilizando un programa de fluidodinámica computacional.

La Razón de Aspecto óptima será encontrada en función del comportamiento de los números adimensionales que rigen las características del flujo y la distribución de temperatura, que son el Número de Prandtl, el Número de Rayleigh y especialmente el número de Nusselt, que representa la transferencia de calor entre las paredes caliente y fría.

Para validar el código computacional utilizado se obtendrán resultados para el caso adiabático y serán comparados con soluciones benchmark ([1] y [2]).

1.1. Motivación

Como se dijo anteriormente el problema de convección natural tiene numerosas aplicaciones en el ámbito industrial, sin embargo, existen muy pocas investigaciones enfocadas a la optimización de la transferencia de calor en recintos cerrados, y en especial existe muy poco desarrollo de situaciones no ideales como es el caso de paredes conductoras. Igualmente se observa muy pocos estudios publicados sobre la influencia de la geometría del recinto sobre la transferencia de calor.

Con el propósito de desarrollar soluciones más realistas y útiles para la industria se plantea como comportamiento para las paredes no activas, el de paredes perfectamente conductoras. Las paredes horizontales que unen aquellas de temperatura impuesta tendrán entonces una distribución lineal de temperatura a lo largo

de la coordenada X.

Por otra parte analizar el problema no adiabático para varias razones de aspectos y distintos números de Rayleigh genera la necesidad de programas flexibles y algoritmos más elaborados que resuelvan situaciones complejas con confiabilidad y precisión.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Encontrar numéricamente las Razones de Aspecto $A=H/L$ de una cavidad rectangular, que producen la máxima transferencia de calor en un espacio con paredes horizontales perfectamente conductoras para números de Rayleigh de 10^4 , 10^5 y 10^6 , utilizando el programa Busca Max, ejecutable en Fortran.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Seleccionar un código y verificarlo con soluciones benchmark existentes para el caso adiabático.
- Correr el código para distintos números de Rayleigh y Razones de Aspecto y :
 - De las simulaciones obtener para los Ra estudiados, la variación del número de Nusselt en las paredes verticales y en el plano vertical central en función de la Razón de Aspecto A para encontrar la Razón de Aspecto que maximiza la Transferencia de Calor.
 - Determinar y analizar velocidades máximas según los ejes y modos de flujo descritos por campos de Corriente.
 - Encontrar y analizar campos de temperatura descritos por diagramas de isothermas.
 - Calcular el flujo neto de calor en las paredes horizontales.

1.3. Alcances

El siguiente tema de memoria contempla el estudio de cavidades rectangulares bidimensionales con aire para números de Rayleigh de 10^4 , 10^5 y 10^6 ya que para estos Rayleigh el régimen final que se obtiene es permanente.

Se excluye el caso $Ra=10^3$ ya que en este caso predomina un régimen conductivo y los casos adiabáticos y perfectamente conductores resultan prácticamente iguales [1]

No serán analizados recintos con fluidos no Newtonianos y números de Rayleigh mayores a 10^6 , para los cuales hay flujos no permanentes [9] (periódicos o aperiódicos), debido a que esto significaría tiempos de simulación muy elevados.

Se restringe el estudio a casos bidimensionales. La tridimensionalidad, que demanda gran cantidad de recursos computacionales, será estudiada en memorias futuras.

Tampoco serán tratados casos donde el fluido interior no sea aire.

Capítulo 2

Antecedentes

La convección natural en una cavidad cuadrada con aire ha tenido por muchos años un lugar central en la fluidodinámica computacional, ya que se trata del problema más simple de convección no lineal con acoplamiento entre las ecuaciones de Navier Stokes y energía. Ya desde mediados de los años 60 han estado en estudio los problemas de convección natural debido a su gran importancia en aplicaciones industriales como por ejemplo: Flujos en cámaras frigoríficas, en espacios habitables, (donde las ventanas y los dispositivos de calefacción son las fuentes térmicas), colectores solares planos y sistemas de enfriamiento de componentes electrónicos.

Estas aplicaciones exigen considerar fluidos de diferentes número de Prandtl, espacios de diferente Razón de Aspecto ($A > 1$ ó $A < 1$), ángulos de inclinación de las paredes respecto a la aceleración de gravedad, presencia de otros sólidos en el recinto (como aletas), zonas activas que no cubren completamente las paredes donde se ubican o que sobresalen de éstas y superficies calientes con flujo de calor impuesto, entre otras cosas.

En todas las situaciones antes mencionadas las características del flujo y de la distribución de temperatura dependen principalmente de las propiedades físicas del fluido, de la diferencia de temperatura entre las paredes que generan empuje (ΔT) y de las dimensiones (altura H y ancho L) del recinto. Estos efectos se resumen en tres grupos adimensionales independientes:

- Número de Rayleigh: Parámetro asociado al régimen del flujo en convección natural.

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha} \quad (2.1)$$

Donde β es el coeficiente de expansión térmica, ν la viscosidad cinemática, α la difusividad térmica, g es la gravedad, ΔT es la diferencia de temperatura y L es el largo característico.

Cuando el número de Rayleigh está por debajo del valor crítico para un determinado fluido, la transferencia de calor es principalmente por conducción, mientras que si el número de Rayleigh excede el valor crítico, la transferencia de calor es por convección.

- Número de Prandtl: Parámetro del fluido.

Representa la relación que existe entre la difusividad molecular de la cantidad de movimiento y la difusividad molecular del calor. El número de Prandtl es del orden de 1 para gases, lo que indica que tanto la cantidad de movimiento como de calor se difunden por el fluido a una velocidad similar.

Se define en función de la viscosidad cinemática del fluido ν y el coeficiente de difusividad térmica α , mediante la expresión:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.2)$$

- Razón de Aspecto: Cuociente entre la altura H y el ancho L .

$$A = \frac{H}{L} \quad (2.3)$$

A estos se agrega el grupo adimensional dependiente, llamado número de Nusselt, que representa la transferencia de calor entre las paredes caliente y fría, en términos adimensionales.

- Número de Nusselt.

$$Nu = \frac{qL}{\Delta T k} \quad (2.4)$$

Donde L es el largo característico, ΔT es la diferencia de temperatura entre las paredes, k es la conductividad térmica y q es el flujo de calor entre estas.

Una definición alternativa del número de Nusselt es que representa la relación que existe entre el calor transferido por convección a través del fluido y el que se transferiría si sólo existiese conducción.

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (2.5)$$

Donde h es el coeficiente convectivo.

2.1. Caso Paredes Horizontales Adiabáticas

El problema más básico ya analizado es el de convección natural bidimensional de un fluido confinado en un recinto rectangular, con paredes verticales a temperaturas impuestas y paredes horizontales adiabáticas.

Cuando las paredes horizontales son adiabáticas la imposición de temperatura en las paredes verticales genera una fuerza de empuje por diferencia de densidades entre el fluido cercano a la pared y el fluido lejos

de ésta. Dicha fuerza provoca un flujo ascendente del fluido en la vecindad de la pared caliente, al mismo tiempo que esta pared cede calor al fluido que asciende. La fuerza de empuje negativa que experimenta el fluido cerca de la pared fría causa su descenso frente a ésta.

Por inercia se desarrollan velocidades de flujo hacia la pared fría en el borde superior y hacia la pared caliente en el inferior. Las paredes adiabáticas tienen una condición de flujo impuesto nulo, por lo que su temperatura es dependiente y no entrega fuerzas de empuje al fluido. Esto define una circulación cerrada, mediante la cual el calor cedido por la pared caliente al fluido es entregado por éste a la pared fría. La tasa de circulación está determinada por el balance entre las fuerzas de flotabilidad y de fricción en las paredes.

Al aumentar Ra se produce un aumento de la circulación para todo A . El aumento de la circulación se genera por un desplazamiento de la isoterma caliente hacia la parte superior de la pared fría y un desplazamiento de la isoterma fría hacia la parte inferior de la pared caliente. Esto genera cambios de densidad que se traducen en un aumento considerable de la circulación.

Al crecer el largo de las paredes activas se produce un aumento de la aceleración vertical y por lo tanto de la velocidad vertical \vec{v} . Por inercia también existe un aumento de la velocidad horizontal \vec{u} intensificando el flujo horizontal. El aumento de \vec{u} tiene un máximo ya que las fuerzas de fricción en las esquinas y la geometría de la cavidad impiden que la velocidad \vec{u} siga desarrollándose, por lo que una vez alcanzado el máximo la velocidad horizontal comienza a disminuir con el aumento de A . De esta forma ocurre un cambio en el régimen del flujo pasando de predominantemente horizontal a predominantemente vertical.

La velocidad horizontal \vec{u} es la responsable del desplazamiento de las isotermas de la pared caliente a la fría y viceversa (flujo horizontal). El desplazamiento de las isotermas genera mayor transferencia de calor debido a la mayor incidencia de la corriente caliente sobre la pared fría. De esta forma para la velocidad horizontal máxima se obtiene una configuración de isotermas óptima que genera el Nu_o (overall Nusselt number) máximo. Cuando la velocidad horizontal disminuye el nuevo régimen de flujo vertical genera un flujo paralelo a la corriente fría y caliente con una distribución vertical de las isotermas por lo que la transferencia de calor decrece provocando una disminución del número de Nusselt.

En cavidades bajas ($A < 1$), la velocidad horizontal y vertical tienden a ser débiles debido a que las fuerzas de flotabilidad producidas por las superficies activas son pequeñas y la fricción horizontal es considerable, por lo tanto, el Nusselt es bajo. El número de Nusselt y la tasa de circulación crecen con el aumento de A . La circulación aumenta por el crecimiento simultáneo de la velocidad horizontal y vertical y la dirección del flujo es principalmente horizontal.

En cavidades altas ($A > 1$), para razones de aspecto 2 o mayores, el número de Nusselt disminuye con el aumento de la razón de aspecto A . Esta disminución es acompañada por un fuerte aumento de la tasa de circulación a causa del incremento continuo de la velocidad vertical, ocasionado por el alargamiento de las

paredes activas. La velocidad horizontal disminuye.

La variación del comportamiento del número de Nusselt con A para cavidades altas y bajas sugiere que para distintos números de Rayleigh debe haber una razón de aspecto para la cual el Nu_o se maximiza.

Desde la década del 70 diversos estudios se han enfocado a la existencia de un máximo en la transferencia de calor en cavidades cerradas de paredes horizontales adiabáticas. Adrian Bejan [3] muestra una síntesis y comparación de distintos resultados analíticos encontrados para cavidades altas y bajas. Dentro de las soluciones estudiadas destaca el Nu_o encontrados por Gill [4]

$$Nu_o = 0,364\left(\frac{Ra}{A}\right)^{1/4}$$

que demuestra que para razones de aspecto entre 10 y 100 el número de Nusselt disminuye si A crece. Para cavidades bajas fue analizada y mejorada la relación encontrada por Cormack [5]

$$Nu = 1 + 2,86 \times 10^{-6} Ra^2 A^8$$

que muestra la dependencia positiva del número de Nusselt con la razón de aspecto y con el número de Rayleigh. En la figura 2.1 se expone la evolución del número de Nusselt para distintos números de Ra y A.

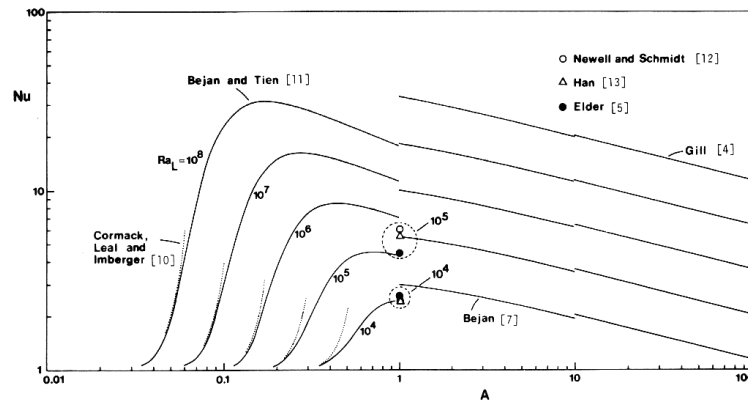


Figura 2.1: Sumario de teorías de transferencia de calor en cavidades rectangulares con fluido de Boussinesq [3]

La figura 2.1 muestra que los problemas para $A > 1$ y $A < 1$ han sido estudiados separadamente por ser considerados problemas diferentes.

En 1999 Ramón Frederick [6] determinó la razón de aspecto óptima considerando paredes horizontales adiabáticas y números de Ra iguales a 10^3 , 10^4 y 3×10^4 . Las principales conclusiones del trabajo de Frederick fueron:

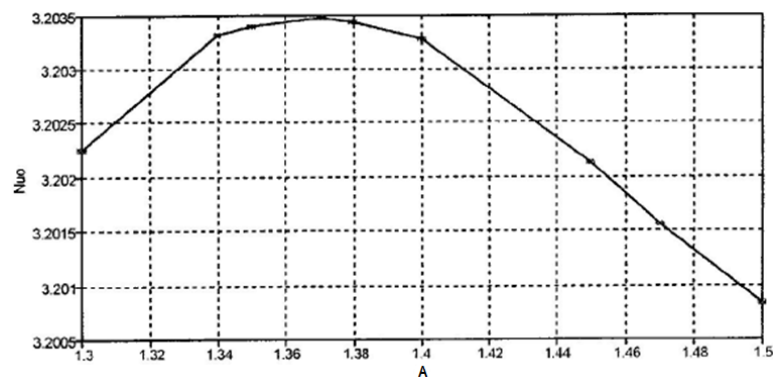
- Para el rango de Rayleighs considerados el número de Nusselt máximo se encuentra entre $1 < A < 2$.

- El número de Nusselt crece con el aumento de la razón de aspecto, y una vez alcanzado el máximo, el Nu_o decrece rápidamente con A.
- El número de Nusselt máximo aumenta con el número de Ra.
- Mientras mayor es el Ra el máximo Nu_o se encuentra para razones de aspecto menores.

Tabla 2.1: Resultados de la investigación.

Ra	$Nu_{o_{max}}$	A_{optimo}	Nu_o para A=1.0
1000	1.98797	1.66	1.118691
10000	2.377306	1.58	2.249985
30000	3.203466	1.37	3.150249

En la figura 2.2 se muestra la evolución del número de Nusselt en función de A obtenida por el profesor Frederick

Figura 2.2: Nu_o v/s A para $Ra=30.000$ [6]

En esta investigación se ve que para $A > 1$ y $Ra < 10^4$ las isothermas presentan una desviación positiva (hacia arriba) a diferencia de las cavidades cuadradas donde las isothermas centrales son esencialmente horizontales. Esta desviación positiva produce mayor incidencia de la corriente caliente en la parte superior de la pared fría, donde la transferencia de calor es muy alta generando un máximo para el número de Nusselt. En la figura 2.3 se ven las isothermas para $A=1.0$ y $A=1.52$.

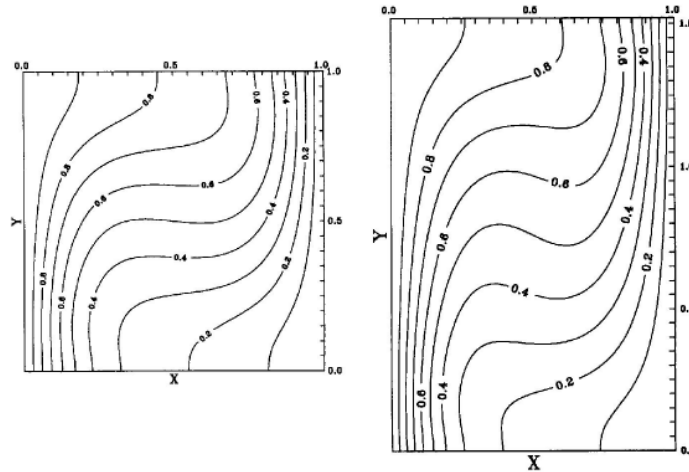


Figura 2.3: Diagrama de isotermas para $A=1.0$ (izq) y $A=1.52$ (der)[6]

Para Rayleigh bajos las velocidades y los gradientes de velocidades son menores debido a que la fricción en todas las paredes juega un papel importante. La velocidad horizontal, responsable del desplazamiento de las isotermas, decrece al aumentar A por el aumento de la fricción.

Es importante destacar que los resultados de este trabajo fueron limitados por el uso de una malla uniforme de 200×200 para el caso $A=1.0$ y la razón de aspecto fue variada cambiando el número de nodos en dirección vertical. Con este sistema, solo se podían producir variaciones discretas en la razón de aspecto, de 0.02 como máximo entre dos ensayos, lo cual conducía a máximos aproximados.

2.2. Caso Paredes Horizontales Perfectamente Conductoras

Para el caso de paredes perfectamente conductoras y $A=1.0$ se pueden describir las principales características del fenómeno de convección natural en base a la memoria de Sergio Courtin [7]

El estado final de $Ra=10^6$ es permanente. Las curvas finales de número de Nusselt, figura 2.4, muestran un valor final constante de cada número de Nusselt. Los Nusselt en las paredes verticales son prácticamente iguales, con una diferencia de $0,025\%$, que no alcanza a apreciarse en el gráfico. Sin embargo el Nusselt central es mayor, lo que indica que existe transferencia de calor a través de las paredes horizontales.

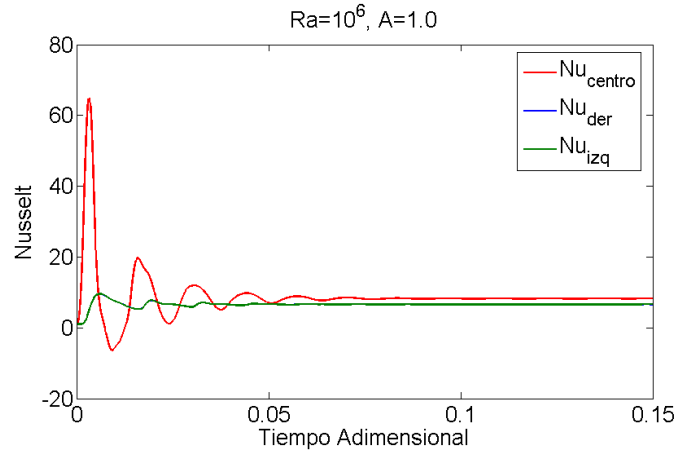


Figura 2.4: Nu v/s t para $Ra=10^6$ y $A=1.0$

La curva de Número de Nusselt local en la pared vertical versus la coordenada vertical Y (figura 2.5) muestra que el perfil de número de Nusselt, a diferencia del caso adiabático, es unitario en la vecindad de $Y=0$ e $Y=A$, creciendo rápidamente con la coordenada Y a medida que se aleja de la pared horizontal. El valor bajo en las esquinas se debe a que en éstas, el perfil local de temperatura se aproxima a la distribución lineal que predomina en la pared horizontal. Nusselt locales de las paredes vertical y horizontal que se intersectan en la esquina $Y=0$, son aproximadamente iguales. El rápido ascenso de Nusselt local con Y se debe a que la pared recibe el flujo frío proveniente de la pared opuesta. Más arriba el Nusselt local decrece, tomando nuevamente el valor unitario.

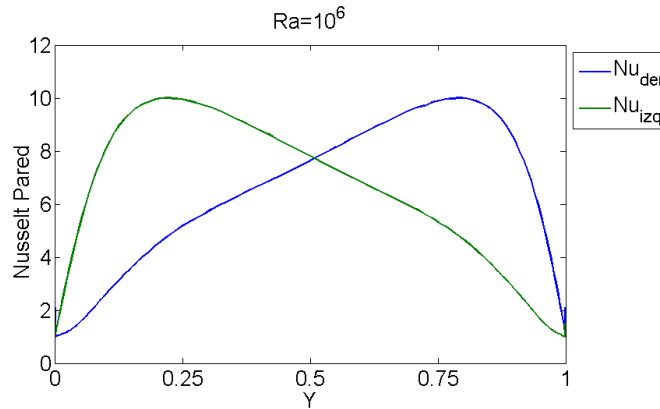


Figura 2.5: Distribución final del número de Nusselt en paredes izquierda y derecha, para $Ra=10^6$ y $A=1.0$

La figura 2.6 muestra la distribución final de número de Nusselt vertical local en las paredes inferior y superior. El Nusselt de la pared inferior es cero en $X=0$, debido a que en esa posición la temperatura de la pared vertical es constante. Debido al perfil lineal de temperatura impuesto, las paredes horizontales son calientes respecto a la T media del fluido para $X<0.5$ o frías para $X>0.5$, por lo que a mayor X , la

pared transfiere calor al fluido frío que viene de la pared en $X=1$. A mayores valores de X la pared toma temperaturas más bajas debido al perfil lineal impuesto, disminuye la diferencia de temperatura pared-fluido y, por lo tanto, el Número de Nusselt cae. En la pared superior el Nusselt es cercano a cero en $X=0$ ya que en esa pared hay contacto de fluido caliente con la zona caliente de la pared superior, y crece al pasar a mayores valores de X , en que la temperatura de la pared es menor.

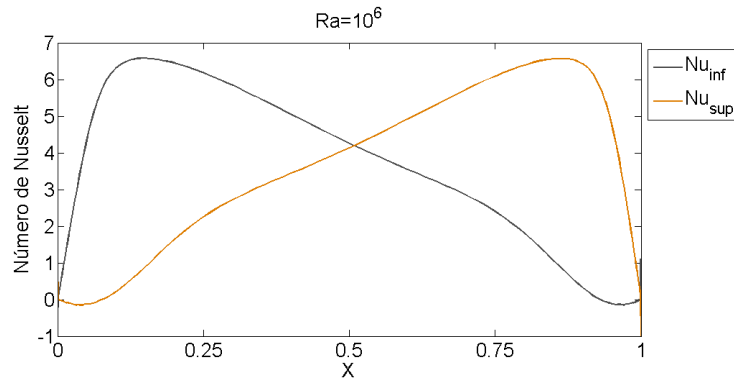


Figura 2.6: Distribución final del número de Nusselt en paredes inferiores y superiores, para $Ra=10^6$ y $A=1.0$

La diferencia entre el Nusselt local inferior y superior representa el flujo de calor neto que entra y sale de la cavidad. La figura 2.7 muestra que para $X < 0.5$ ingresa calor a la cavidad y para $X > 0.5$ la cavidad entrega calor al exterior.

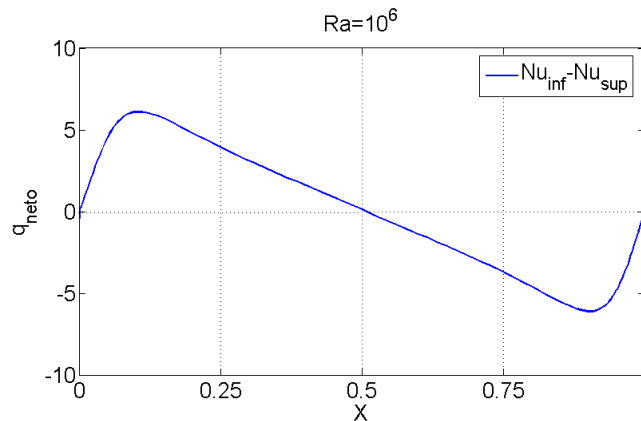


Figura 2.7: Flujo de calor en la cavidad, para $Ra=10^6$ y $A=1.0$

De las figuras anteriores se desprende la existencia de Números de Nusselt diferentes en las paredes verticales y en el centro. El Nusselt de pared izquierda está asociado al calor que entra a la cavidad por la pared vertical caliente, mientras que el de pared derecha al calor que sale de la cavidad por la pared vertical fría. El Nusselt en el plano medio está ligado al calor total movido en el interior de la cavidad, es decir, al

calor traspasado desde la zona izquierda, donde ingresa calor a la cavidad, hacia la zona derecha, donde sale calor de la cavidad.

El diagrama de isotermas final, figura 2.9, muestra un núcleo estratificado, con capas calientes y frías bastante gruesas y un flujo caliente y uno frío generados por las paredes activas. Estos flujos se descargan diagonalmente en la cavidad.

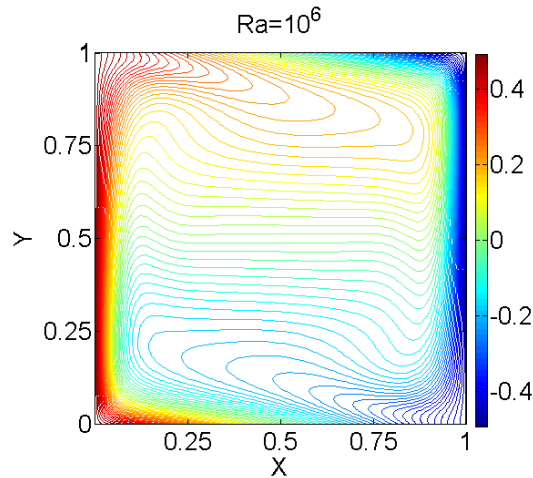


Figura 2.8: Diagrama de isotermas final para $Ra=10^6$

Por otro lado, diferentes estudios han probado que el problema bidimensional con paredes horizontales conductoras es menos estable que el de paredes adiabáticas. Le Quéré y Behnia [8] demostraron que en el caso adiabático la transición a régimen impermanente para $A=1.0$ ocurre aproximadamente a $Ra=1.8 \times 10^8$, mientras que Henkes y Le Quéré [9] publicaron un estudio de simulación numérica en dos y tres dimensiones, usando aire como fluido de trabajo, donde determinaron que la frontera entre el régimen permanente y el régimen dependiente del tiempo para el caso bidimensional y $A=1.0$, bajo la condición de paredes horizontales perfectamente conductoras aparece para número de Rayleigh cercanos a 2.3×10^6 . Esto permite asegurar la existencia de un régimen permanente hasta $Ra=10^6$ (límite utilizado en esta memoria) y $A=1.0$, sin embargo, como en este trabajo se usan diferentes razones de aspecto, se usará un algoritmo dependiente del tiempo para detectar eventuales regímenes impermanentes finales en otros casos.

En relación a situaciones intermedias, donde las paredes horizontales no son ni adiabáticas ni perfectamente conductoras, se tiene la investigación realizada por Frederick [19] el año 2001, donde se estudió el perfil de temperatura en las paredes horizontales y la configuración de isotermas obtenida en una cavidad con paredes de distinta Tasa de Conductividad Térmica R_k .

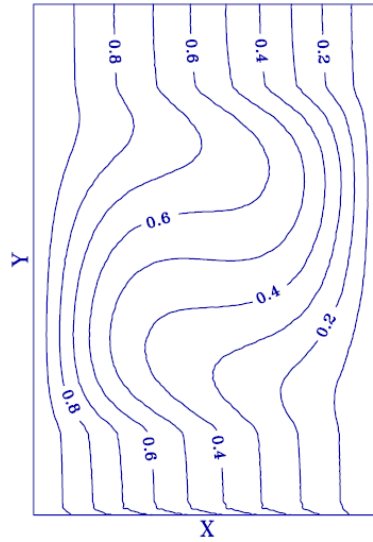


Figura 2.9: Diagrama de isotermas para $Ra=10^4$ y Tasa de Conductividad Térmica $R_k=10$

La figura anterior muestra que el comportamiento de las isotermas en la interfaz del aire con las paredes horizontales es distinto al caso adiabático, donde las isotermas llegan de manera perpendicular, y al caso perfectamente conductor, donde las isotermas están equiespaciadas a lo largos de las paredes. También demostró que considerar paredes perfectamente conductoras es una buena aproximación si la tasa de conductividad térmica R_k es mayor a 100 (figura 2.10)

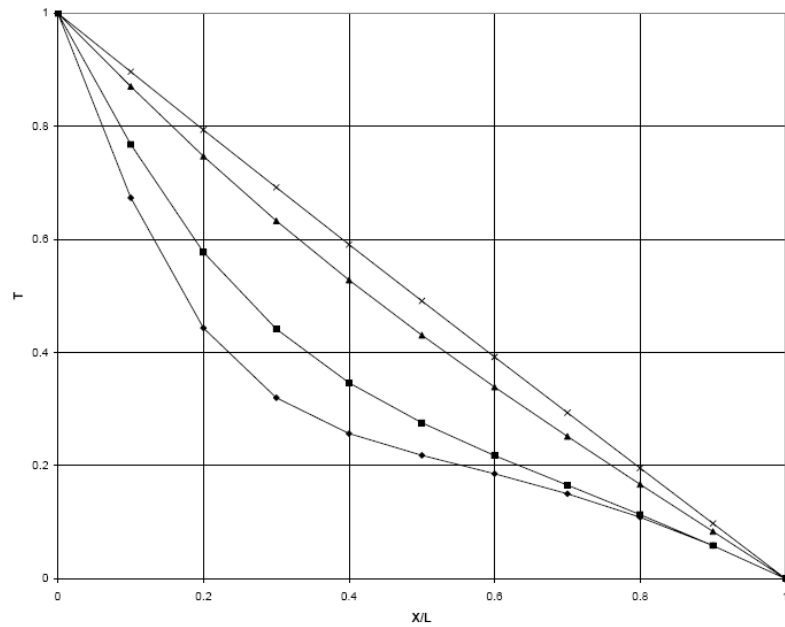


Figura 2.10: Perfil de Temperatura en la Pared inferior para $Ra=10^4$. Curvas de arriba hacia abajo: $R_k=100, 10, 1$ y 0

De estas características del fenómeno con paredes horizontales perfectamente conductoras, que son totalmente diferentes al mismo fenómeno con paredes aisladas, se puede esperar un comportamiento diferente del número de Nusselt en función de la razón de aspecto y en particular al ser diferentes los Nu de pared y en el centro, se esperan máximos de ellos a distintas razones de aspecto.

2.3. Benchmarks y Soluciones Experimentales

Para validar los métodos numéricos y evaluar su precisión se utilizan los llamados problemas Benchmark que describen una situación representativa de las complejidades de una familia de problemas. De Vahl-Davis [1] produjo en 1983 una solución de referencia (benchmark) basada en la aproximación de Boussinesq, que ha sido usada por muchos investigadores para validar sus algoritmos de resolución del problema de convección no lineal con acoplamiento entre las ecuaciones de Navier Stokes y energía. Esta solución consiste en un conjunto de valores de parámetros globales (Número de Nusselt y velocidades máximas) así como en un conjunto de campos de flujo y temperatura, que representan la solución en todo detalle y que se presentaron gráficamente en forma de curvas de nivel.

G. De Vahl-Davis [1] describe un método computacional para obtener una solución precisa de las ecuaciones que describen la convección natural de dos dimensiones en una cavidad cuadrada con paredes laterales diferencialmente calentadas, usando aproximaciones de diferencias centrales de segundo orden. El refinamiento de malla y la extrapolación condujeron a las soluciones para $10^3 < Ra < 10^6$ y se consideró el problema de un flujo de aire ($Pr=0.71$) en dos dimensiones, al interior de una cavidad cuadrada de lado L , asumiendo la aproximación de Boussinesq. Las dos componentes de la velocidad son cero en los bordes. Se aíslan las paredes horizontales, y los lados verticales están a temperatura T_H y T_C . Las soluciones de este problema, velocidades, temperaturas y tasas de transferencia de calor, se obtuvieron para números de Rayleigh de 10^3 , 10^4 , 10^5 y 10^6 .

Otras soluciones Benchmark fueron obtenidas por E. Tric et al [2] y Fusegi [10] para el caso tridimensional con dos paredes verticales opuestas a distintas temperaturas y el resto de las paredes adiabáticas. Tric et al.[2] entrega también una solución benchmark 2D para una cavidad cuadrada con paredes horizontales adiabáticas hasta $Ra= 10^8$

Para el problema en estudio y sus variantes también existen soluciones experimentales y numéricas. Almayer et al [11] y Raithby et al [13] realizaron investigaciones numéricas para el caso 2D y paredes horizontales adiabáticas. D.G. Briggs [14] desarrolló un estudio experimental para Ra entre 2.5×10^6 y 8.5×10^6 considerando aire como fluido y paredes verticales a diferente temperatura, paredes horizontales con una distribución lineal de temperatura y $A=1.0$.

2.4. Otros Antecedentes

En el ámbito computacional del problema Patankar [15] en 1980 elaboró un libro que contiene el desarrollo de métodos numéricos para la discretización de ecuaciones diferenciales para problemas de transferencia de calor y fluidos. El libro entrega un método para resolver ecuaciones de transporte de una magnitud escalar y campos de flujo, considerando el acoplamiento entre los campos de presión y de velocidades. El método divide la región del problema en volúmenes de control disjuntos y luego sobre estos volúmenes se integran las ecuaciones del problema para generar las ecuaciones discretizadas. Estas ecuaciones discretizadas entregan la dependencia de la variable estudiada en un nodo genérico con respecto a los valores de la misma variable en los nodos aledaños. Patankar [15] da dos algoritmos: el SIMPLE y el SIMPLER que es un refinamiento del primero.

Las mayores dificultades del método SIMPLER se generan para altos números de Ra , donde se desarrolla un flujo similar al de la capa límite, con fuertes gradientes de velocidad y temperatura en las paredes. G.B Brassington [16] ejemplifica el problema estableciendo que el espesor de la capa límite térmica en las paredes verticales δ/L es proporcional a $Ra^{-\frac{1}{4}}$, lo que impone fuertes exigencias al paso de malla en esas regiones. Debido a que en este trabajo se utilizaran números de Ra no mayores a 10^6 no se producen inconvenientes con el método SIMPLER.

Finalmente se investigó el trabajo realizado por Zhong et al [17] en el cual se discute la validez de la aproximación de Boussinesq para el aire en una cavidad. Esta investigación justifica aplicar la aproximación de Boussinesq en el presente trabajo. Zhong comparo la fuerza impulsora bajo las condiciones de gas perfecto compresible y bajo la condición hipotética de Boussinesq y encontró que si bien hay diferencias notables entre los máximos de velocidad con el uso o no uso de la aproximación, las diferencias son menores en el número de Nusselt, pudiendo ser ignoradas si las diferencias de temperatura son menores de 60°C entre las paredes activas.

Capítulo 3

Formulación del Problema

3.1. Formulación Física del Problema

Se consideró una cavidad rectangular de lado basal L y altura H con aire en su interior ($Pr=0.71$). La pared vertical caliente está a temperatura T_H , y la pared vertical fría está a T_C (ver figura 1.1). Las paredes horizontales que unen aquellas de temperatura impuesta tienen una distribución lineal de temperatura a lo largo de la coordenada X .

Las bases sobre las cuales se resuelve el problema planteado son las siguientes:

- Se asumió el fluido como medio continuo.
- Se consideró el aire como un fluido incompresible.
- El fluido responde a la aproximación de Boussinesq (propiedades del fluido no cambian con la temperatura, excepto en el término de empuje). Se usó esta aproximación ya que produce un problema mejor formulado, no dependiente de la elección de fórmulas para la variación de propiedades físicas, entre las cuales hay varias opciones. Además se mantiene la simetría entre las mitades caliente y fría de la cavidad, lo cual es imprescindible para la validación con los benchmarks numéricos existentes, todos los cuales se basan en esta aproximación.
- No existen fuerzas externas actuando sobre el fluido, a excepción de la gravitatoria y el roce viscoso del fluido, en el interior y en las paredes.
- La disipación viscosa es despreciable, por lo tanto, no existe calor generado por roce.
- El flujo es bidimensional, laminar y transiente.

3.2. Ecuaciones que Gobiernan el Problema

Las ecuaciones adimensionales que rigen el problema de convección natural bidimensional son:

3.2.1. Ecuaciones de fluidodinámica

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.1)$$

Ecuación de conservación de Momentum o Navier Stokes

Según X:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (3.2)$$

Según Y:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + RaPr\Theta \quad (3.3)$$

Conservación de Energía

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \quad (3.4)$$

Con

$$X = \frac{x}{L} \quad Y = \frac{y}{L} \quad (3.5)$$

$$U = \frac{u}{(\alpha/L)} = \frac{uL}{\alpha} \quad (3.6)$$

$$V = \frac{v}{(\alpha/L)} = \frac{vL}{\alpha} \quad (3.7)$$

Temperatura adimensional

$$\Theta = \frac{T(x) - T_M}{T_H - T_C} \quad (3.8)$$

Donde T_M corresponde a la temperatura media entre T_H y T_C .

Presión adimensional

$$P = \frac{p}{\rho(\alpha/L)^2} \quad (3.9)$$

3.2.2. Flujo de calor

Según X

$$q = u\rho c(T - T_M) - k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.10)$$

Según Y

$$q = v\rho c(T - T_M) - k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.11)$$

3.2.3. Números adimensionales

El número de Nusselt local en cualquier punto se define como:

$$Nu = \frac{hL}{k} = \frac{qL}{(T_H - T_C)k} \quad (3.12)$$

Lo que en términos de las variables adimensionales para cada dirección:

$$Nux_{local} = U\Theta - \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (3.13)$$

$$Nuy_{local} = V\Theta - \frac{\partial\Theta}{\partial Y} \quad (3.14)$$

Los promedios espaciales del número de Nusselt se pueden evaluar como:

$$\overline{Nux} = \int_0^A Nux_{local} dY \quad (3.15)$$

$$\overline{Nuy} = \int_0^1 Nuy_{local} dX \quad (3.16)$$

3.3. Condiciones de Borde

Condiciones de borde dinámicas.

Se consideró velocidad nula del fluido en las paredes, $\vec{u} = 0$ y $\vec{v} = 0$, con lo que se impone la condición de no deslizamiento, causada porque el flujo tiene características viscosas.

Condiciones de borde térmicas.

La temperatura adimensional Θ toma valores de 0,5 y $-0,5$ en las paredes caliente y fría respectivamente:

- Paredes horizontales.

$$\Theta(X, Y = 0, t) = 0,5 - X \quad (3.17)$$

$$\Theta(X, Y = A, t) = 0,5 - X \quad (3.18)$$

- Paredes Verticales.

$$\Theta(X = 0, Y, t) = 0,5 \quad (3.19)$$

$$\Theta(X = 1, Y, t) = -0,5 \quad (3.20)$$

Las condiciones de borde de temperatura para las paredes horizontales expresan la linealidad de esta temperatura con la coordenada X.

Capítulo 4

Metodología

4.1. Método Numérico

4.1.1. Algoritmo de Discretización

La resolución analítica de las ecuaciones que gobiernan el problema en estudio presenta varias limitaciones, por lo que es necesario utilizar métodos numéricos que discreticen las ecuaciones diferenciales involucradas, convirtiéndolas en un sistema de ecuaciones algebraicas que contiene la misma información física que las diferenciales.

La solución numérica de una ecuación diferencial es un conjunto de valores de la variable dependiente que corresponden a puntos de una malla definida de modo tal que cubre toda la región de análisis (discretización de la región), por lo que se reemplaza la información continua por valores discretos, de los cuales se pueden obtener los valores en todo el dominio por interpolaciones globales o locales.

El método numérico de discretización utilizado en este trabajo es el de volúmenes de control (VC), el cual divide el dominio de cálculo en volúmenes de control disjuntos que contienen un punto o nodo de la malla en su interior. Para obtener la ecuación discretizada se integra la ecuación diferencial sobre cada VC, lo que permite obtener las ecuaciones discretizadas del problema para los valores nodales de la variable en estudio.

El algoritmo de discretización usado en este trabajo es el elaborado por Patankar [15] en su libro “*Numerical heat transfer and fluid flow*”. El método permite resolver problemas no lineales, dependientes del tiempo, usando mallas uniformes o de paso variable, por lo tanto es muy adecuado al problema por su gran generalidad. A continuación se presenta una descripción general del algoritmo.

La Figura 4.1 muestra un esquema de los nodos pertenecientes a un determinado VC bidimensional.

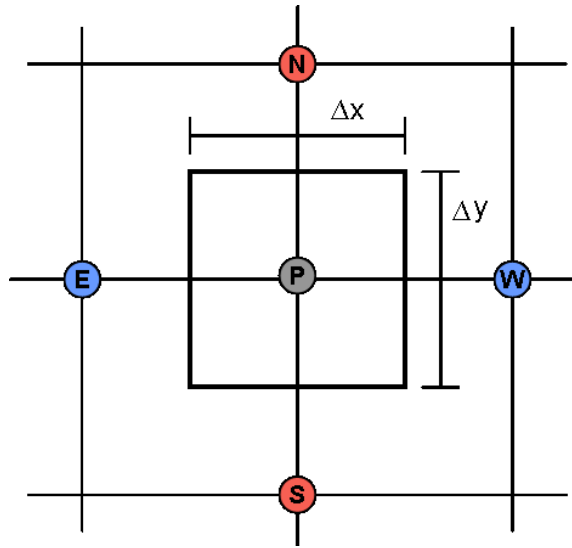


Figura 4.1: Esquema del Volumen de Control

En el diagrama anterior se reconocen los siguientes elementos

- P: Nodo genérico de la malla.
- N: Nodo ubicado al norte del nodo P, en el eje Y
- S: Nodo ubicado al sur del nodo P, en el eje Y
- E: Nodo ubicado al este del nodo P, en el eje X
- W: Nodo ubicado al oeste del nodo P, en el eje X
- Δx : Ancho del Volumen de Control
- Δy : Alto del Volumen de Control
- n, s, e y w : Caras norte, sur, este y oeste del V.C.

Las ecuaciones de transporte tienen una forma general que es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S \quad (4.1)$$

Donde ϕ representa una variable escalar, por ejemplo temperatura, o una componente de un campo vectorial, por ejemplo una velocidad, u_j representa el campo de flujo, Γ representa el coeficiente de difusión y S el término fuente.

Entonces la ecuación 4.1 representaría Navier Stokes si ϕ es una velocidad o la ecuación de la Energía si ϕ es temperatura. En el primer caso el término fuente más importante es el gradiente de presión.

La forma discretizada de esta ecuación en dos dimensiones es la siguiente:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (4.2)$$

Cada a_i representa los coeficientes de la discretización de la variable ϕ y tienen partes difusiva y convectiva, b representa el término fuente.

Cada coeficiente de discretización, con sus componentes difusivas y convectivas, se define de la siguiente manera:

$$a_E = D_e \cdot A (|P_e|) + \|F_e, 0\| \quad (4.3)$$

$$a_W = D_w \cdot A (|P_w|) + \|F_w, 0\| \quad (4.4)$$

$$a_N = D_n \cdot A (|P_n|) + \|F_n, 0\| \quad (4.5)$$

$$a_S = D_s \cdot A (|P_s|) + \|F_s, 0\| \quad (4.6)$$

El coeficiente total a_P se define como:

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 \quad (4.7)$$

El coeficiente temporal a_P^0 es :

$$a_P^0 = \frac{\rho \Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (4.8)$$

Y el término fuente b:

$$b = S \Delta x \Delta y + a_P^0 \phi_P^0 \quad (4.9)$$

F y D representan los flujos y conductancias en las caras de los volúmenes de control. Los términos a_P^0 y ϕ_P^0 de las ecuaciones 4.7, 4.8 y 4.9 sólo se utilizan en el caso transiente.

Cada P_i corresponde al número de Peclet en la dirección i y están definidos por el cociente entre los términos convectivos y difusivos en la cara del volumen de control:

$$P_i = \frac{F_i}{D_i} \quad (4.10)$$

F_i y D_i están definidos de la siguiente manera:

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y \quad D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \quad (4.11)$$

$$F_w = (\rho u)_w \Delta y \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \quad (4.12)$$

$$F_n = (\rho v)_n \Delta x \quad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \quad (4.13)$$

$$F_s = (\rho v)_s \Delta x \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \quad (4.14)$$

La parte difusiva en las expresiones de los coeficientes a_i contiene la función $A(|P|)$, que refleja el esquema de interpolación del flujo total de la variable en estudio. Patankar [15] la define como:

$$A(|P|) = \left\| 0, \left(1 - 0, 1 |P|^5 \right) \right\| \quad (4.15)$$

Donde el operador $\|a, b\|$ entrega el mayor valor entre a y b .

Consideraciones especiales

El método descrito anteriormente sirve para discretizar todas las ecuaciones de transferencia utilizadas en este trabajo, Continuidad, Conservación de Momentum y Conservación de Energía, mediante simple identificación de cada término (ρ , ϕ , Γ , u_j y S) en la ecuación general 4.1. Sin embargo el gradiente de presión en las ecuaciones de Navier-Stokes es la causa de dos problemas: es un término fuente que influye directamente en la forma del flujo, ya que interactúa con éste, y es una derivada de primer orden. Estas dos cosas dificultan la resolución del campo de velocidad.

Si el gradiente de presión integrado sobre el volumen de control se expresa como:

$$p_e - p_w = \frac{p_E - p_P}{2} - \frac{p_P - p_W}{2} = \frac{p_E - p_W}{2} \quad (4.16)$$

La ecuación de movimiento contiene diferencias de presión entre puntos por medio, lo que haría tomar como campos de presión constante a campos oscilantes, lo que destruye la solución.

Como solución se utilizó una malla desplazada que se basa en que no es obligatorio calcular todas las variables en los mismos nodos, por lo que se puede emplear una malla diferente para cada variable dependiente. Se crean volúmenes de control para las velocidades que estarán desplazados respecto a los volúmenes de control principales en $\Delta/2$ en la dirección positiva de cada velocidad, como se ve en la figura 4.2, y de esta forma los nodos de velocidad están en las caras de los volúmenes de control para variables escalares como la presión y la temperatura.

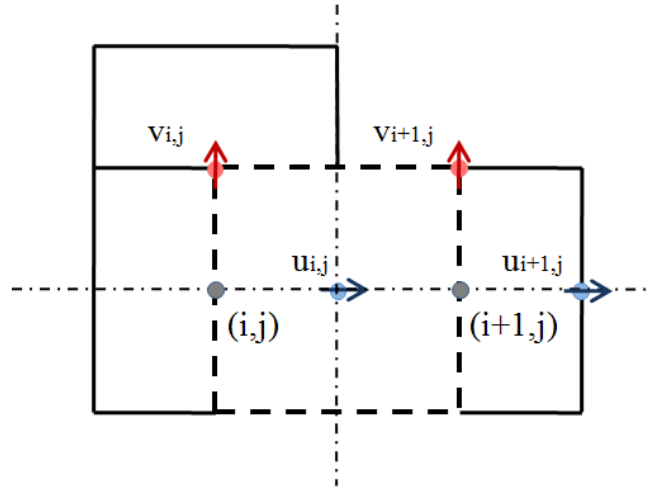


Figura 4.2: Esquema de Malla Desplazada

En consecuencia, los flujos en las caras del volumen de control para la presión se pueden obtener sin interpolación, ya que hay velocidades definidas en sus caras, lo que es muy útil porque existen ecuaciones simples para la interpolación de velocidades, pero no para la interpolación de presiones.

Las ecuaciones de movimiento en 2D se discretiza de manera usual:

$$a_e u_e = \sum a_{ec} u_{ec} + b + (p_P - p_E) A_e \tag{4.17}$$

$$a_n v_n = \sum a_{ec} v_{ec} + b + (p_P - p_N) A_n \tag{4.18}$$

Los términos $(p_P - p_E) \Delta A_e$ y $(p_P - p_N) A_n$ representan la fuerza de presión que actúa sobre el VC, siendo $A_e = \Delta y$ y $A_n = \Delta x$. El término b está definido igual que en la ecuación 4.9, pero el gradiente de presión no está incluido en el término fuente S . El subíndice ec se refiere a todos los nodos que rodean al nodo de velocidad en cuestión.

Las ecuaciones para las velocidades pueden resolverse si se dispone de un campo de presión dado o estimado. Si no se tiene el campo correcto de presión, el campo de velocidades resultante no cumplirá la ecuación de continuidad.

Para encontrar un campo de presión y resolver las ecuaciones de Navier-Stokes es necesario estimar un campo de presión “provisorio” p^* con el que se obtiene un campo de velocidades provisorio, u^* y v^* , por aplicación de las ecuaciones de movimiento discretizadas 4.17 y 4.18. Luego se puede decir que el campo de presión correcto es de la forma:

$$p = p^* + p' \quad (4.19)$$

Donde p' es la corrección de presión.

Al corregir la presión se espera que las velocidades se acerquen más a cumplir la ecuación de continuidad. Se introducen entonces las correcciones de velocidad:

$$u = u^* + u' \quad v = v^* + v' \quad (4.20)$$

El campo correcto de velocidad se obtiene mediante las siguientes ecuaciones:

$$u_e = u_e^* + (p'_P - p'_E)A_e/a_e \quad (4.21)$$

$$v_n = v_n^* + (p'_P - p'_N)A_n/a_n \quad (4.22)$$

Para obtener la corrección de presión se integra la ecuación de continuidad sobre un volumen de control principal, en el cual las velocidades están en las caras (malla desplazada) y se asume que la densidad ρ no depende directamente de la presión.

Integrando la ecuación de continuidad en todo el VC se obtiene la expresión:

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0)\Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w]\Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s]\Delta x = 0 \quad (4.23)$$

El primer término de la ecuación 4.23 es el que se obtiene al integrar el término $\partial\rho/\partial t$, para lo cual se asume que el nuevo valor de la densidad ρ_P en $t + \Delta t$ es constante en todo el VC. El término ρ_P^0 es la densidad en el tiempo t .

Luego para obtener la corrección de presión se sustituyen en la ecuación anterior las velocidades obtenidas en la ecuación 4.21 y 4.22 resultando la siguiente ecuación para p' :

$$a'_P p_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + b \quad (4.24)$$

Los coeficientes de esta ecuación se forman de la siguiente manera:

$$a_E = \frac{\rho(\Delta y)^2}{a_e} \quad (4.25)$$

En que a_e es el coeficiente total de la velocidad u en la cara derecha del volumen de control principal.

De la misma manera se forman los restantes coeficientes, considerando que en las caras del volumen de control de presión hay nodos de velocidad.

$$a_W = \frac{\rho(\Delta y)^2}{a_w} \quad (4.26)$$

$$a_N = \frac{\rho(\Delta x)^2}{a_n} \quad (4.27)$$

$$a_S = \frac{\rho(\Delta x)^2}{a_s} \quad (4.28)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (4.29)$$

El término fuente de masa es el residuo de continuidad:

$$b = \frac{(\rho_P - \rho_P^0)\Delta x\Delta y}{\Delta t} + [(\rho u^*_e - (\rho u^*)_w)\Delta y + [(\rho v^*)_n - (\rho v^*)_s]\Delta x \quad (4.30)$$

El término fuente debe ser reducido bajo una cota dada, para garantizar un nivel de precisión, por la corrección de presión. Si b está bajo la cota, significa que las velocidades iniciales en conjunto con el valor de $(\rho_P - \rho_P^0)$, satisfacen la ecuación de continuidad, por lo que no es necesario corregir el campo de presiones.

4.1.2. Método SIMPLER

Para simular la transferencia de calor y el flujo al interior de la cavidad se utilizó el algoritmo SIMPLER [15], que resuelve a partir de su forma discretizada y con sus condiciones de borde iniciales las ecuaciones de Continuidad (ec 3.1), de Conservación de Momentum (ec 3.2 y ec 3.3) y de Energía (3.4).

En este caso se usó el método SIMPLER estándar con discretizaciones de segundo orden en el tiempo y en el espacio realizadas con el método de volúmenes de control finitos.

El método SIMPLER adopta una discretización para velocidades y temperaturas. Esto quiere decir que en cada iteración, los términos de la variable dependiente son expresados en términos de los valores al final de la iteración anterior.

La discretización espacial en el método SIMPLER asegura también la estabilidad incondicional respecto al paso de malla. De esta manera, los pasos espaciales pueden ser definidos únicamente en base a las necesidades impuestas por el problema.

Resumen del algoritmo

1. Estimar un campo de velocidad inicial
2. Calcular los coeficientes de la ecuación discretizada de momentum y calcular las “pseudo velocidades” u_s y v_s de las ecuaciones de momentum sin campo de presión, substituyendo los valores de velocidades en los puntos vecinos.
3. Calcular los coeficientes de la ecuación de presión y resolver ésta para obtener un campo de presión.
4. Considerando este campo de presión como imperfecto, p^* , resolver las ecuaciones de momentum para obtener velocidades imperfectas u^* , v^* .
5. Calcular el término de fuente de masa en cada volumen de control (en base a las velocidades recién calculadas) y resolver la ecuación de corrección de presión (p').
6. Corregir el campo de velocidades mediante las correcciones de presión, sin corregir la presión.
7. Resolver la ecuación de discretización para la temperatura (Ecuación de energía).
8. Volver al punto 2 y repetir hasta que se obtenga una solución convergida.

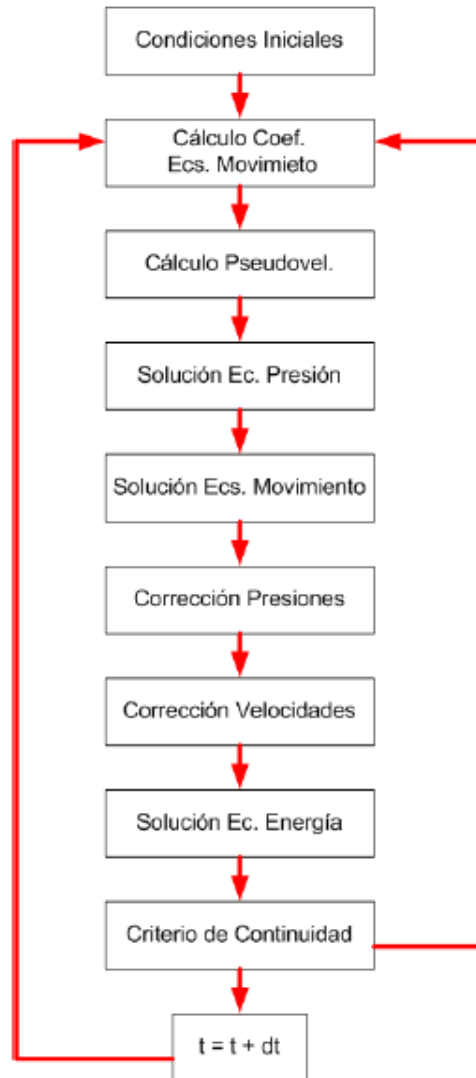


Figura 4.3: Esquema de Algoritmo SIMPLER utilizado

4.1.3. Código Computacional

El código utilizado en este trabajo es un resultado evolutivo del algoritmo SIMPLER STANDAR, antes mencionado. Se considera una malla variable de acuerdo a la formula de transformación de malla propuesta por Janssen and Henkes [18]. Esta función permite afinar la malla cerca de todos los bordes del recinto, a expensas de un aumento del paso de malla en las regiones centrales de éste, y permite variar la Razón de Aspecto sin la necesidad de cambiar el número de nodos, lo que permite la utilización de soluciones obtenidas para una Razón de Aspecto levemente diferente, acortando los tiempos de simulación.

$$X = X' - \frac{1}{2\Pi} \cdot \sin(2\Pi X') \quad (4.31)$$

$$Y = A \left(Y' - \frac{1}{2\Pi} \cdot \sin(2\Pi Y') \right) \quad (4.32)$$

En estas fórmulas X' e Y' representan las coordenadas de nodos de una malla equiespaciada. El factor A para las coordenadas Y permite correr el código imponiendo una razón de aspecto cualquiera usando siempre el mismo número de nodos.

La transformación de malla usada en el código computacional de este trabajo es la siguiente:

$$X_u(i) = \frac{(i-1)}{(n-2)} - \frac{1}{2\Pi} \cdot \sin\left(2\Pi \frac{(i-1)}{(n-2)}\right) \quad (4.33)$$

$$Y_v(j) = A \left[\frac{(j-1)}{(m-2)} - \frac{1}{2\Pi} \cdot \sin\left(2\Pi \frac{(j-1)}{(m-2)}\right) \right] \quad (4.34)$$

En la ecuación 4.33 $X_u(i)$ representa a la coordenada paralela a la dirección X donde se ubica el i-ésimo nodo de velocidad, y n corresponde al número total de nodos utilizados en esa dirección. De igual forma $Y_v(i)$ en la ecuación 4.34 representa a la coordenada paralela a la dirección Y donde se ubica el j-ésimo nodo de velocidad, y m corresponde al número total de nodos utilizados.

Para el caso de los nodos de presión y temperatura, se ha definido que estos se ubiquen a media distancia entre nodos de velocidad. Por este motivo se utiliza el desplazamiento de malla para determinar la ubicación del i-ésimo o j-ésimo nodo de presión y temperatura:

$$X_i(i) = \frac{X_u(i) + X_u(i-1)}{2} \quad (4.35)$$

$$Y_i(j) = \frac{Y_v(j) + Y_v(j-1)}{2} \quad (4.36)$$

De esta forma el código resuelve las ecuaciones que rigen el sistema utilizando el algoritmo SIMPLER descrito anteriormente utilizando la forma discretizada de las ecuaciones de movimiento y energía obtenidas

de la discretización de la ecuación general de transferencia 4.1 La resolución de las ecuaciones de presión, corrección de presión y de energía se realiza en los volúmenes de control de temperatura, y la resolución de las ecuaciones de movimiento, en los volúmenes de control de velocidad, los cuales están desplazados medio volumen de control en la dirección positiva de la velocidad correspondiente.

Las razones principales para utilizar un código con malla de paso variable son las siguientes:

1. Al usar una solución para una A levemente diferente se parte de una solución permanente ya convergida. Esto significa que todas las características de los campos finales están ya desarrolladas (estratificación de temperatura, capas límites formadas en las paredes, formación de un núcleo central relativamente en reposo). En la nueva razón de aspecto, los campos serán modificados levemente para adecuarse a la diferente altura de la región, pero se mantendrán, sin embargo, todas las características del campo de flujo y del de temperatura.

Si se parte de un fluido en reposo a temperatura uniforme, se debe construir todo el transiente inicial. Este consta de varias etapas, que han sido descritas por Courtin [7]:

- Generación de un gradiente de temperatura adyacente a las paredes.
 - Por efecto de este gradiente se forman flujos ascendentes y descendentes en las paredes caliente y fría respectivamente.
 - Después del período de formación de estos flujos, estos se descargan horizontalmente en la cavidad.
 - Después de la descarga, se tienen que reconstruir las capas límite, y el flujo ascendente y descendente, seguidos de una nueva descarga.
 - Este proceso cíclico se renueva muchas veces hasta que todo el fluido haya circulado, la descarga horizontal haya extendido su influencia a toda la extensión vertical de la cavidad, y la temperatura en la cavidad está completamente estratificada.
 - Este proceso toma un tiempo físico considerable, y su simulación numérica toma también un tiempo computacional considerable.
2. Presencia altos gradientes de Temperatura y velocidad en las paredes, especialmente a altos Ra .
 3. Existe un excesivo costo computacional de las soluciones con malla de paso uniforme que se ve agravado al buscar un máximo, lo que implica muchas corridas.
 4. Necesidad de imponer Razones de Aspecto a voluntad dado que este es el parámetro que se varía.

4.2. Procedimiento

- Se obtuvieron soluciones iniciales desde $t=0$ hasta encontrar un régimen permanente utilizando una malla específica, según sea el Rayleigh y la Razón de Aspecto. Para $A=1.0$ y todo Ra se utilizó una malla de 122×122 , para $A=1.5$ y $Ra=10^6$ una de 122×182 y para Ra igual a 10^4 y 10^5 y $A=2.0$ se usó una malla de 122×182 y 122×242 . Al final de cada corrida se graban los campos completos de presión, velocidad y temperatura.
- Los campos obtenidos de las corridas iniciales se usaron como condición inicial para una corrida con una razón de aspecto levemente superior o inferior (máximo 10 % de diferencia), con el mismo número de nodos y número de Rayleigh. Las soluciones obtenidas en cada Razón de Aspecto debían presentar un régimen final permanente.
- Se varió la Razón de Aspecto según fue necesario hasta encontrar la geometría que presenta el Nusselt central y pared máximo, para cada Rayleigh.

Se definió en el código un criterio de convergencia en presión poco exigente, pero suficiente para que la solución se desarrolle en un proceso transiente verdadero (convergencia de los campos antes de pasar al siguiente instante de tiempo). Se impuso, en cambio, un criterio muy exigente en temperatura (entre 10^{-12} y 10^{-15}), lo que aseguró una buena evaluación del término de empuje, que es el que mueve al fluido, ya que al correr la solución en el tiempo, se va obteniendo un residuo de continuidad muy pequeño. El buen grado de satisfacción de la ecuación de continuidad permite reproducir los benchmarks con un alto grado de aproximación.

Para determinar el criterio de convergencia temporal se corrieron las soluciones hasta obtener valores invariantes de los tres números de Nusselt. Si al final de una corrida estos tres Nusselt todavía variaban con el tiempo, se continuaba la corrida hasta que no cambiaran. De este modo, se aseguró que los resultados reportados sean de régimen permanente. (ver sección 4.4 y anexo B)

Aunque interesa solo el estado estacionario final, el cálculo realizado en forma transiente permite controlar oscilaciones por reducción del paso de tiempo.

Por otra parte, es razonable suponer que la precisión de la solución disminuye a medida que se aumenta la Razón de Aspecto, por lo que después de encontrar el óptimo se compararon los resultados obtenidos con 182 o 242 nodos con los de 122 en la dirección Y e interceptaron las mallas en un punto donde la diferencia porcentual entre ambos resultados sea menor a 0.2 %, ya que esa es la cota de precisión que permite el algoritmo, según se ve en la sección (sec:4.3).

De esta forma también se encontró la Razón de Aspecto para la cual la formula de malla variable deja de entregar soluciones que caen dentro del criterio del 0,2% interceptando las soluciones provenientes de $A=1.0$ y $A=1.65$ ó $A=2.0$ según corresponda.

4.3. Verificación del Código

Para validar el código con el que se implementó el algoritmo SIMPLER con malla de paso variable, se compararon los resultados que arroja este código con una malla de 122×122 , para el caso de una cavidad cuadrada con paredes horizontales adiabáticas y $Pr=0.71$, con los resultados de dos soluciones benchmark conocidas [1] y [2] para el problema adiabático.

Se compararon los valores de números de Nusselt en las paredes verticales y en el plano vertical medio, y las velocidades máximas horizontal y vertical en los ejes de simetría vertical y horizontal de la región respectivamente, ya que estos resultados son los más significativos para cuantificar el nivel de precisión de las soluciones.

Los resultados se presentan en las siguientes tablas:

- $Ra=10^4$

Tabla 4.1: Validación con caso adiabático, $Ra=10^4$.

Variable	Tric et al [2]	Vahl-Davis [1]	Este trabajo	Diferencia % c/r a [2]	Diferencia % c/r a [1]
U_{max}	16.18	16.178	16.22437	0.27	0.28
V_{max}	19.63	19.617	19.66808	0.19	0.26
Nu_{izq}	2.245	2.238	2.242728	-0.10	0.21
$Nu_{central}$	2.245	2.243	2.244806	0.009	0.08
Nu_{der}	-	-	2.241694	-	-

- $Ra=10^5$

Tabla 4.2: Validación con caso adiabático, $Ra=10^5$.

Variable	Tric et al [2]	Vahl-Davis [1]	Este trabajo	Diferencia % c/r a [2]	Diferencia % c/r a [1]
U_{max}	34.70	34.73	34.81827	0.34	0.25
V_{max}	68.61	68.59	68.6527	0.06	0.09
Nu_{izq}	4.522	4.509	4.51757	-0.10	0.19
$Nu_{central}$	4.522	4.519	4.51817	-0.08	-0.02
Nu_{der}	-	-	4.51935	-	-

- $Ra=10^6$

Tabla 4.3: Validación con caso adiabático, $Ra=10^6$.

Variable	Tric et al [1]	Vahl-Davis [1]	Este trabajo	Diferencia % c/r a [2]	Diferencia % c/r a [1]	Dif entre [2] y [1]
U_{max}	64.84	64.63	64.93874	0.15	0.48	-0.32
V_{max}	220.50	219.36	220.2548	-0.11	0.41	-0.52
Nu_{izq}	8.825	8.817	8.807712	-0.19	-0.11	-0.09
$Nu_{central}$	8.825	8.799	8.806889	-0.20	0.09	-0.29
Nu_{der}	-	-	8.809700	-	-	-

Para los tres Ra usados, las diferencias máximas con respecto a los benchmarks son del orden de 0.5 %, aunque mayoritariamente son del orden de 0.2 %. El grado de acuerdo con la solución de Tric et al [2] es levemente mayor al de Vahl-Davis [1].

Para verificar la consistencia interna de la solución se compararon entre sí los dos números de Nusselt de pared, encontrando que difieren en 0.077 %, 0.039 % y 0.023 % para $Ra=10^4$, 10^5 y 10^6 respectivamente. Esto da una medida de la precisión con que el código impone la conservación de la energía.

Además se puede comprobar que los dos benchmarks arrojan resultados que difieren entre sí tanto como la solución obtenida con el código usado en este trabajo difiere de cada uno de los benchmarks. Por lo tanto, se considera que el código presenta la precisión suficiente para el estudio.

La malla de 122×122 se considera adecuada para la resolución de casos con $A=1.0$ y levemente superior a 1.0 . Para $A < 1$, la fineza de la malla en dirección vertical es mayor, por lo cual su precisión no será afectada.

4.4. Campos Iniciales Permanentes

Para el caso $A=1.0$ se obtuvo un régimen permanente para cada Ra , lo que resulta de gran importancia ya que la solución para esta Razón de Aspecto se utilizó como base para el resto de las simulaciones. Las discrepancias con lo visto en los antecedentes, [7] donde el Nusselt de pared era mayor al Nusselt central en un comienzo, se deben a que en este trabajo se impuso desde un comienzo el ΔT y el perfil lineal de temperaturas en las paredes horizontales y en toda la región fluida, por lo que el transiente necesario para alcanzar dicha condición no fue simulado.

A continuación se muestra la evolución temporal del Nusselt para Rayleigh igual a 10^4 , 10^5 y 10^6 .

■ $Ra = 10^4$

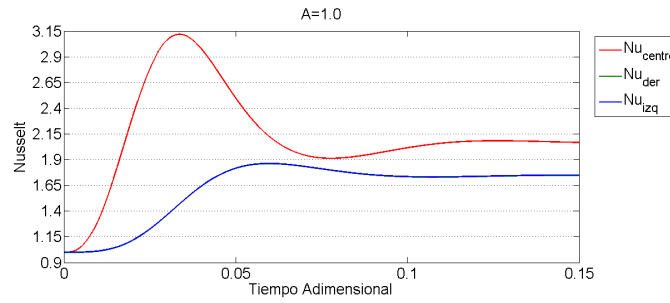


Figura 4.4: Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^4$ y $A=1.0$

■ $Ra = 10^5$

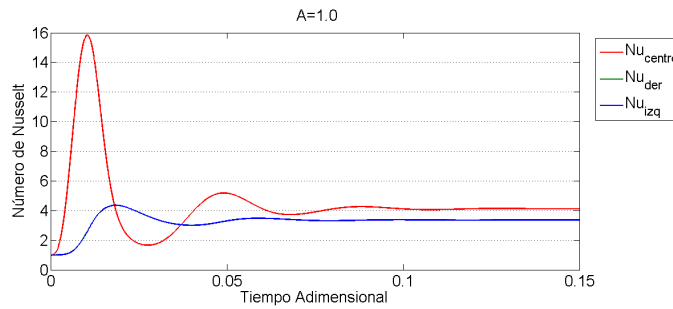


Figura 4.5: Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^5$ y $A=1.0$

■ $Ra = 10^6$

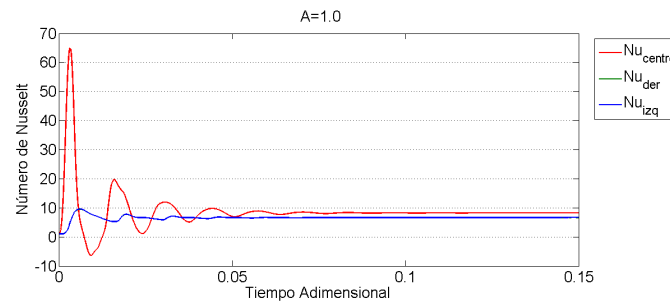


Figura 4.6: Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^6$ y $A=1.0$

En las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 se ve una clara diferencia en el comportamiento del número de Nusselt antes de alcanzar el régimen permanente. Al comenzar el programa sin campos iniciales de presión, temperatura y velocidad el Nusselt parte siempre de uno, sin embargo, a medida que el número de Ra aumenta, el número de oscilaciones y la amplitud de estas son mucho mayores. Por ejemplo para $Ra=10^4$ se ve claramente que

le Nusselt central y de pared crecen una vez hasta 3.15 y 1.9 respectivamente para luego disminuir y estabilizarse completamente, en cambio para $Ra=10^6$ se aprecian varias oscilaciones del Nusselt central y de pared antes de alcanzar el régimen estacionario y los valores que alcanzan dichos números son considerablemente mayores comparados con $Ra=10^4$ y $Ra=10^5$, aproximadamente 65 para el $Nu_{central}$ y 10 para el Nu_{pared} . En todos los casos el $Nu_{central}$ presenta amplitudes de oscilación más grandes y mayores dificultades para estabilizarse debido a que en el centro la malla es menos fina por lo que el algoritmo tiene mayores dificultades para converger.

4.5. Selección de Malla

Con el fin de obtener resultados fiables se realizó una selección de la malla apropiada para cada Número de Rayleigh y para cada rango de Razones de Aspecto.

Se comenzó utilizando una malla de 122 nodos por lado y $A=1.0$ variando la Razón de Aspecto hasta encontrar el Nusselt máximo de pared y en el centro. A continuación, se aumentó el número de nodos en la dirección vertical para aumentar la precisión y se realizaron nuevas corridas.

Para el caso $Ra=10^6$ se efectuaron nuevas corridas a partir de $A=1.5$ ya que la Razón de Aspecto que maximiza la transferencia de calor obtenida en primera instancia era menor a 1.5. La diferencia porcentual de los nuevos resultados con respecto a los conseguidos con la malla de 122x122 es:

Tabla 4.4: Diferencia porcentual entre valores obtenidos con 122 nodos y 182 nodos en la dirección Y, para $Ra = 10^6$.

A	Nu_{izq} [%]	Nu_{centro} [%]	Nu_{der} [%]
1.4	-0.053	0.008	-0.032
1.5	-0.087	-0.136	-0.060

En la tabla 4.4 se aprecia que las mayores diferencias se producen en el Nusselt central producto del ensanchamiento de la malla en esta zona por el afinamiento de la malla en las paredes, sin embargo, para $A=1.4$ se considera despreciable la diferencia por lo que los resultados conseguidos con la malla de 122x122 son válidos desde 1.4 hacia abajo.

Para $Ra=10^5$ se realizaron nuevas corridas para $A=2.0$ considerando 182 y 242 nodos en la dirección Y. Sin embargo, los valores del Nusselt de pared de $A=2.0$ fueron menores a los de $A=2.1$, por lo que se tenía un máximo local. Para aumentar la precisión de los resultados se disminuyó en 3 órdenes de magnitud el residuo de temperatura en el algoritmo, lo que incide directamente en la precisión de la solución de la ecuación de energía y por lo tanto en los resultados finales. Con este procedimiento los resultados fueron los esperados, es decir, el Nu_{pared} para $A=2.1$ es menor al de $A=2.0$. Además se corroboró que los resultados obtenidos para razones de aspecto menores fueran consistentes realizando corridas con la nueva malla para

A=1.9, A=1.95 y A=1.97.

Los resultados obtenidos son:

Tabla 4.5: Diferencia porcentual entre valores obtenidos con 122, 182 y 242 nodos en la dirección Y, para $Ra = 10^5$.

N° nodos	A	Nu_{izq}	Nu_{centro}	Nu_{der}	$dif Nu_{izq} c/r a 122$ [%]	$dif Nu_{centro} c/r a 122$ [%]	$dif Nu_{der} c/r a 122$ [%]
122	1.9	3.5470	3.9222	3.5469	-	-	-
122	2.0	3.5480	3.9033	3.5486	-	-	-
122	2.1	3.5472	3.8848	3.5457	-	-	-
182	1.9	3.5468	3.9236	3.5460	0.006	-0.0361	0.0228
182*	1.9	3.5468	3.9234	3.5461	0.006	-0.0307	0.0225
182*	2.0	3.5487	3.9039	3.5479	-0.017	-0.0149	0.0194
182*	2.1	3.5479	3.8851	3.5469	-0.019	-0.0077	-0.0349
242	1.9	3.5491	3.9233	3.5495	-0.059	-0.0289	-0.0736
242	2.0	3.5496	3.9055	3.5487	-0.044	-0.0574	-0.0034
242	2.1	3.5479	3.8863	3.5476	-0.018	-0.0397	-0.0556

Los valores con * son los conseguidos con el aumento de precisión en la temperatura.

Las diferencias porcentuales entre los valores obtenidos con 182 y 122 y los obtenidos con 242 y 122 son muy pequeñas, sin embargo, se decidió utilizar la malla de 182 nodos sin aumento de precisión para valores da A menores a 2.0 y con aumento de precisión para A mayores ya que de este modo se logró suprimir el mínimo local mencionado anteriormente. Dicha malla se considera necesaria hasta $A=1.7$ donde la diferencia porcentual entre los valores de la nueva malla y la malla de 122x122 son inferiores a 0.1 % en todos los casos, (Nu_{pared} y Nu_{centro}).

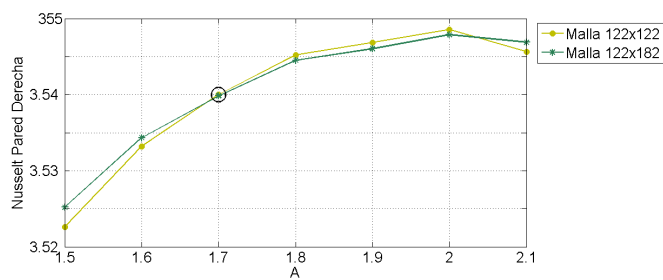


Figura 4.7: Nusselt Pared Derecha v/s A para distintas mallas

El caso $Ra=10^4$ fue mucho más complejo debido a que los valores del Nusselt son menores y la diferencia entre cada Razón de Aspecto también, por lo que es necesario una precisión aún más exigente.

El valor del Nusselt central de $A=2.0$ obtenido con 182 resultó mayor que el obtenido para Razones de Aspecto menores, incluso mayor al obtenido para $A=1.5$, convirtiéndose un nuevo máximo. Se optó por

utilizar la malla de 182 nodos con disminución del residuo de temperatura de 10^{-12} a 10^{-15} para toda Razón de Aspecto superior a 1.5 con lo que se eliminó el problema antes mencionado.

También se realizaron corridas con una malla de 122x242, con una disminución del Δt de 10^{-6} a 10^{-7} porque el aumento en el número de nodos generaba oscilaciones numéricas en la solución. También se disminuyó el residuo de temperatura de 10^{-12} a 10^{-15} pero la disminución en el Δt fue predominante y la diferencia entre las soluciones era inferior a 0.07 %, por lo tanto, no se disminuyó el residuo para evitar excesivo tiempo computacional.

Los resultados obtenidos se muestran a continuación en la tabla :

Tabla 4.6: Diferencia porcentual entre valores obtenidos con 122, 182 y 242 nodos en la dirección Y, para $Ra = 10^4$.

N° nodos	A	Nu_{izq}	Nu_{centro}	Nu_{der}	$dif Nu_{izq} c/r a 122$ [%]	$dif Nu_{centro} c/r a 122$ [%]	$dif Nu_{der} c/r a 122$ [%]
122	1.9	1.9692	2.2033	1.9684	-	-	-
122	2.0	1.9763	2.1581	1.9770	-	-	-
122	2.1	1.9783	2.1480	1.9767	-	-	-
182	1.9	1.9715	2.1665	1.9707	-0.116	1.672	-0.115
182	2.0	1.9745	2.1595	1.9737	0.095	-0.066	0.164
182	2.1	1.9762	2.1528	1.9752	0.108	-0.224	0.077
242	1.9	1.9729	2.1656	1.9734	-0.189	1.713	-0.251
242	2.0	1.9772	2.1534	1.9783	-0.042	0.216	-0.066
242	2.1	1.9765	2.1531	1.9756	0.091	-0.240	0.056

Se decidió utilizar la malla de 242 nodos en dirección Y con $\Delta t = 10^{-7}$ desde A=1.55 ya que el aumento de nodos genera mayor exactitud y los valores de Nusselt máximo en las paredes y el centro se encuentran sobre A=1.5.

Capítulo 5

Resultados y Análisis

El objetivo de este trabajo consistía en simular numéricamente el fenómeno de convección natural en una cavidad rectangular con paredes horizontales perfectamente conductoras y paredes verticales con temperatura impuesta, para tres números de Rayleigh (10^4 , 10^5 , 10^6), y de esta forma obtener una descripción del flujo y encontrar la razón de aspecto $A=H/L$ que maximiza la transferencia de calor al interior de la cavidad. A continuación se exponen los resultados obtenidos para cada caso.

5.1. Caso $Ra=10^3$

Con el algoritmo utilizado en este programa se corrió el caso $A=1.0$ con paredes horizontales adiabáticas y perfectamente conductoras y los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Tabla 5.1: Resultados $Ra=10^3$ y $A=1.0$.

	Adiabático [1]	Perfectamente Conductor [2]	Dif % [2] c/r a [1]
U_{max}	3.652120	3.788266	3.59
V_{max}	3.700761	3.813683	2.96
Nu_{izq}	1.117371	1.043276	-7.10
$Nu_{central}$	1.117626	1.070625	-4.39
Nu_{der}	1.117456	1.045445	-6.89

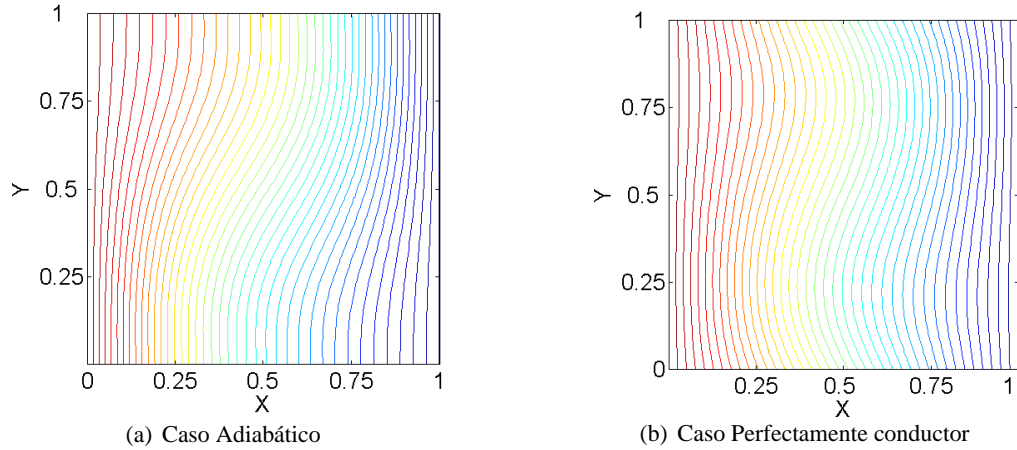


Figura 5.1: Diagrama de Isotermas $Ra=10^3$ y $A=1.0$.

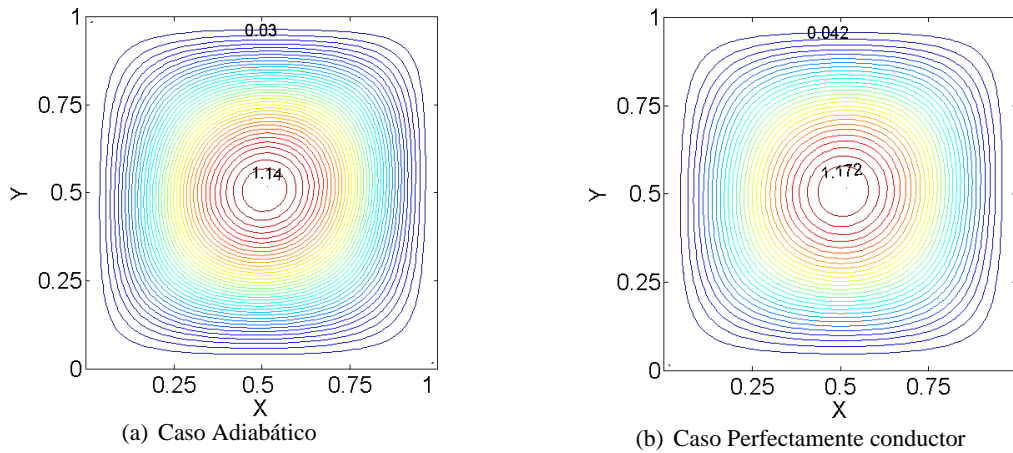


Figura 5.2: Diagrama Función Corriente $Ra=10^3$ y $A=1.0$.

En la tabla 5.1 se ve que los valores del Nusselt adiabático y perfectamente conductor son muy parecidos, con diferencias cercanas al 7 %, al igual que la velocidad horizontal y vertical del aire donde existen diferencias menores al 4 %. En las figuras 5.1 y 5.2 se ve que la forma y los valores de las isotermas y de la función corriente son también muy similares. En el caso de las isotermas se nota que en ambas situaciones éstas llegan prácticamente verticales a la pared horizontal y sólo se aprecia una mayor curvatura en la zona central de la cavidad en el caso perfectamente conductor.

Por lo tanto, en este trabajo no se justifica analizar el caso $Ra=10^3$ ya que la conducción es predominante (isotermas verticales) y el caso adiabático es muy semejante al de paredes horizontales perfectamente conductoras.

5.2. Efecto del Número de Rayleigh

El Número de Rayleigh representa la intensidad con que ocurre la convección natural. Mientras mayor sea este número, se está imponiendo la convección por sobre la conducción, lo cual generalmente aumenta la cantidad de calor transferido, representada en este trabajo por el Número de Nusselt.

A continuación se muestra un gráfico del Número de Nusselt versus el Número de Rayleigh para $A=1.0$.

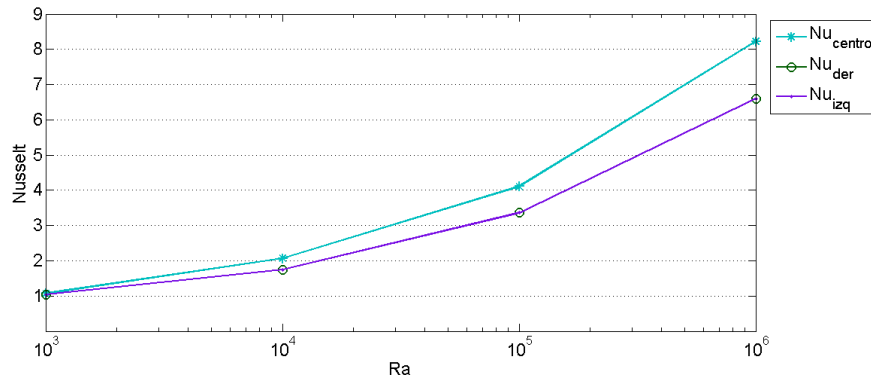


Figura 5.3: Nusselt v/s Ra, A=1.0

En la figura 5.3 se ve que el Nusselt siempre aumenta con el Número de Rayleigh para $A=1.0$, lo que es consistente por la dependencia de ΔT y el largo característico de ambos números. La tabla 5.2 muestra el aumento porcentual de la transferencia de calor asociada sólo al número de Rayleigh.

Tabla 5.2: Diferencia Porcentual de Nu para distinto Ra

Ra		Nusselt	Dif %		
10 ³	Central	1.071	-	-	-
	Izq	1.043	-	-	-
	Der	1.045	-	-	-
10 ⁴	Central	2.067	48.2	-	-
	Izq	1.748	40.3	-	-
	Der	1.750	40.3	-	-
10 ⁵	Central	4.111	74.0	49.7	-
	Izq	3.358	68.9	47.9	-
	Der	3.360	68.9	47.9	-
10 ⁶	Central	8.226	87.0	74.9	50.0
	Izq	6.602	84.2	73.5	49.1
	Der	6.604	84.2	73.5	49.1

Del gráfico 5.3 y de la tabla 5.2 se desprende que el aumento en la transferencia de calor está fuertemente

asociada al número de Rayleigh y mientras mayor éste es mayor es la diferencia. Por ejemplo el aumento entre $Ra=10^3$ y $Ra=10^4$ es de un 40 %, mientras que entre $Ra=10^5$ y $Ra=10^6$ alcanza un 50 %. Esto se relaciona con el cambio en el flujo producido al crecer el Rayleigh.

5.3. Razón de Aspecto Óptima

Para cada Número de Rayleigh se ha encontrado la razón de aspecto que genera la máxima transferencia de calor al interior de la cavidad. Para cada Rayleigh existen dos geometrías importantes: la Razón de Aspecto para la que el Nusselt Central es máximo y la Razón de Aspecto para la que el Nusselt de pared es máximo.

En las figuras 5.4, 5.6 y 5.8 se aprecia la evolución del Nusselt Central y de Pared con la Razón de Aspecto.

- $Ra=10^4$

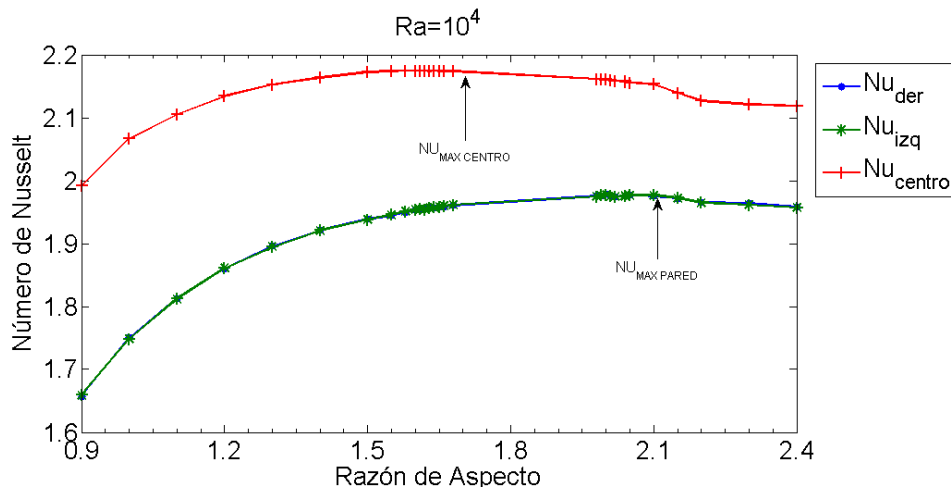


Figura 5.4: Razón de Aspecto v/s Número de Nusselt Final, $Ra=10^4$

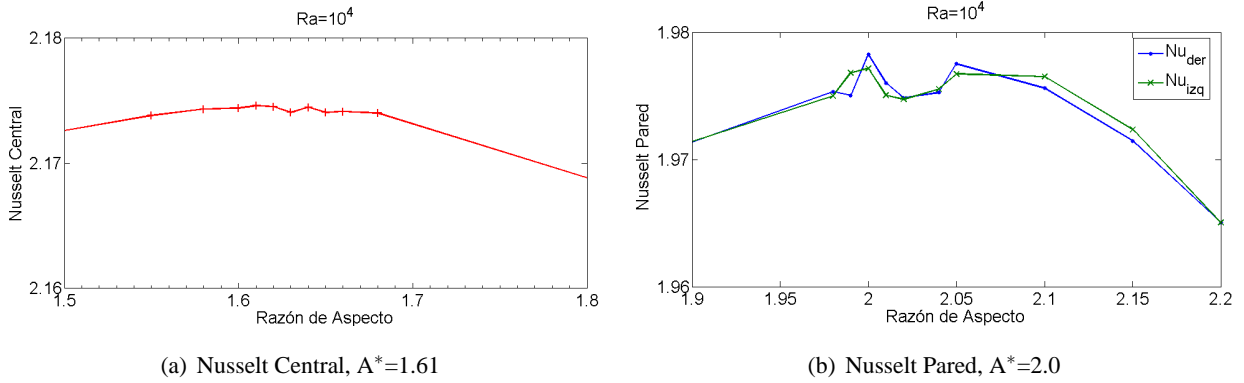


Figura 5.5: Detalle de evolución de Nu en torno al máximo, $Ra=10^4$

La diferencia porcentual entre los valores del número de Nusselt en la Razón de Aspecto óptima y los valores en las Razones de Aspecto próximas son:

Tabla 5.3: Diferencia Porcentual con respecto a valores de $A=1.61$.

A	$Dif\% Nu_{centro}$
1.5	0.23
1.8	0.15

Tabla 5.4: Diferencia Porcentual con respecto a valores de $A=2.0$.

A	$Dif\% Nu_{izq}$	$Dif\% Nu_{der}$
1.9	0.287	0.383
2.1	0.051	0.156
2.2	0.613	0.669

En la figura 5.5 el comportamiento oscilante del Nusselt en torno al máximo muestra máximos locales en las paredes verticales y en el plano central de la cavidad. Además la diferencia porcentual entre el máximo y los Nusselt de las Razones de Aspecto vecinas no son muy significativas, por lo que se determinó para el caso $Ra=10^4$ que existe un intervalos de A que maximiza la transferencia de calor.

Para Nusselt Central se considera el intervalo $A_{central}^*=[1.6,1.65]$ y para el Nusselt de pared se considera el intervalo $A_{pared}^*=[1.98,2.1]$.

■ $Ra=10^5$

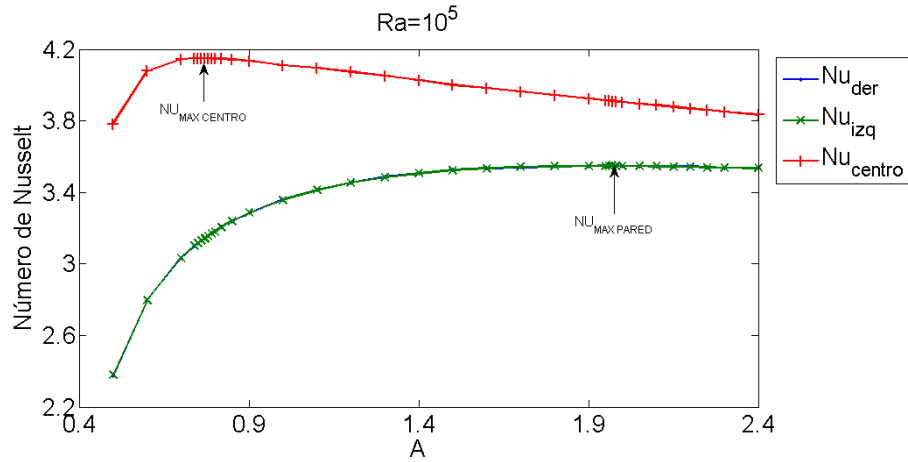
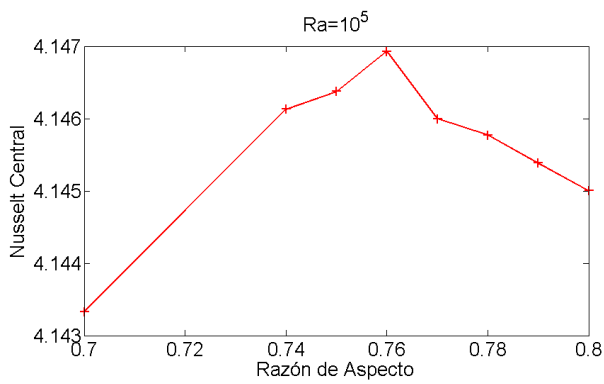
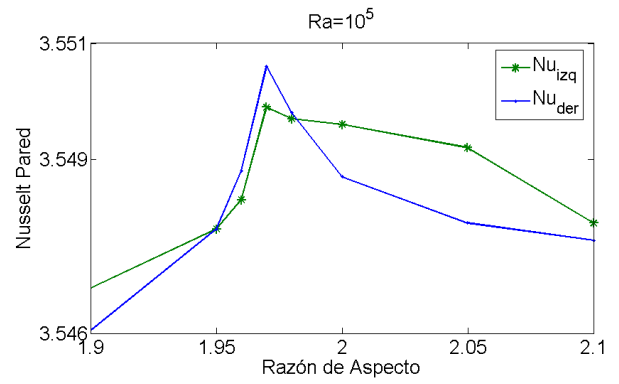


Figura 5.6: Razón de Aspecto v/s Número de Nusselt Final, $Ra=10^5$



(a) Nusselt Central, $A^*=0.76$



(b) Nusselt Pared, $A^*=1.97$

Figura 5.7: Detalle de evolución de Nu en torno al máximo, $Ra=10^5$

La diferencia porcentual entre los valores del número de Nusselt en la Razón de Aspecto óptima y los valores en las Razones de Aspecto vecinas son:

Tabla 5.5: Diferencia Porcentual con respecto a valores de $A=0.76$.

A	Dif% Nu_{centro}
0.7	0.14
0.8	0.06

Tabla 5.6: Diferencia Porcentual con respecto a valores de A=1.97.

A	Dif% Nu_{izq}	Dif% Nu_{der}
1.9	0.087	0.107
2.1	0.054	0.082

■ $Ra=10^6$

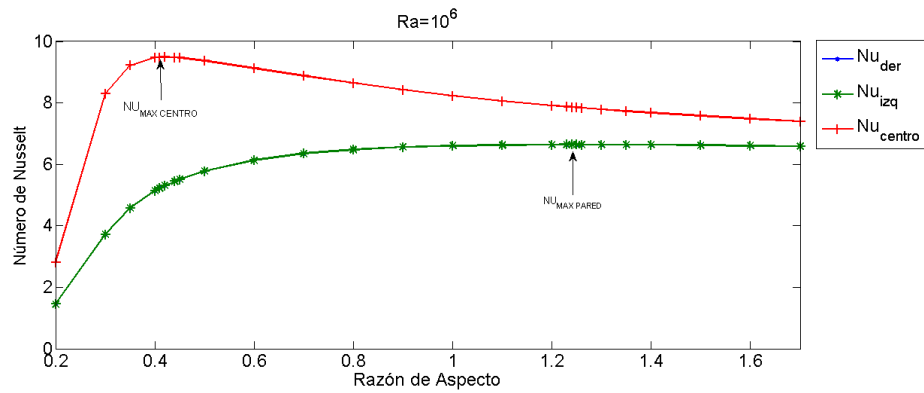
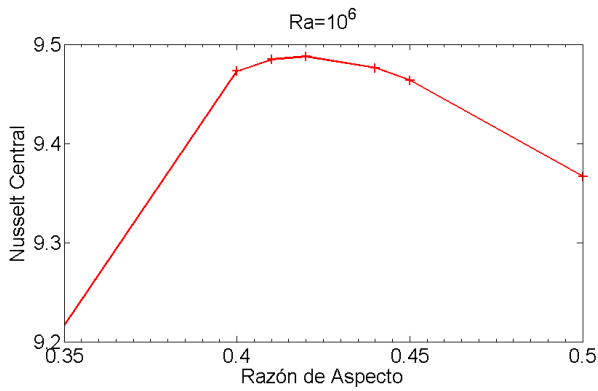
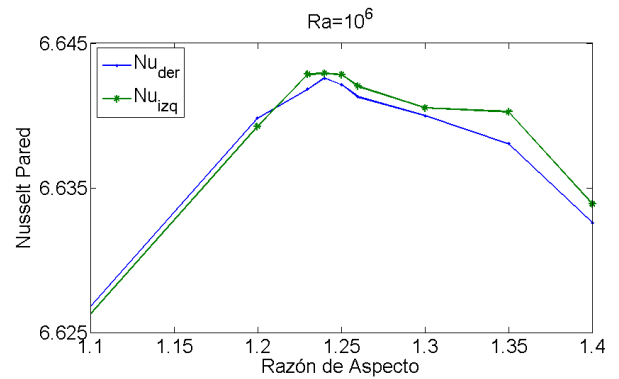


Figura 5.8: Razón de Aspecto v/s Número de Nusselt Final, $Ra=10^6$



(a) Nusselt Central, $A^*=0.42$



(b) Nusselt Pared, $A^*=1.24$

Figura 5.9: Detalle de evolución de Nu en torno al máximo, $Ra=10^6$

Tabla 5.7: Diferencia Porcentual con respecto a valores de A=0.42.

A	Dif% Nu_{centro}
0.3	12.59
0.5	1.276

Tabla 5.8: Diferencia Porcentual con respecto a valores de A=1.24.

A	Dif% Nu_{izq}	Dif% Nu_{der}
1.1	0.250	0.231
1.4	0.135	0.144

La tabla 5.9 muestra un resumen de los valores en cada óptimo ¹(A que maximiza la transferencia de calor) y los valores obtenidos para A=1.0.

Tabla 5.9: Resultados.

Ra	A	Nu_{izq}^*	Nu_{centro}^*	Nu_{der}^*
10 ⁴	1.61	1.9547	2.1746	1.9541
10 ⁴	1.0	1.7482	2.0668	1.7503
10 ⁴	2.0	1.9772	2.1534	1.9783
10 ⁵	0.76	3.1301	4.1509	3.1310
10 ⁵	1.0	3.3578	4.1105	3.3599
10 ⁵	1.97	3.5499	3.9094	3.5498
10 ⁶	0.42	5.3043	9.4878	5.3056
10 ⁶	1.0	6.6020	8.2265	6.6041
10 ⁶	1.24	6.6429	7.8594	6.6421

En Resumen

Tabla 5.10: Razón de Aspecto Óptima.

Ra	A_{centro}^*	$Nu_{central}^*$	A_{pared}^*	Nu_{izq}^*	Nu_{der}^*
10 ⁴	1.61 ¹	1.9547	2.0 ¹	1.9772	1.9783
10 ⁵	0.76	4.1509	1.97	3.5499	3.5498
10 ⁶	0.42	9.4878	1.24	6.6429	6.6421

La diferencia porcentual entre los valores en cada máximo y los valores para A=1.0 son:

Tabla 5.11: Diferencia Porcentual c/r a valores de A=1.0.

Ra		$Nu_{izq}[\%]$	$Nu_{centro}[\%]$	$Nu_{der}[\%]$
10 ⁴	1.61 ¹ c/r a 1.0	11.81	5.22	11.64
10 ⁴	2.0 ¹ c/r a 1.0	13.10	4.19	13.03
10 ⁵	0.76 c/r a 1.0	-7.28	0.97	-7.31
10 ⁵	1.97 c/r a 1.0	5.41	-5.15	5.35
10 ⁶	0.42 c/r a 1.0	-24.47	13.29	-24.47
10 ⁶	1.24 c/r a 1.0	0.62	-4.67	0.57

¹En Ra=10⁴ se consideró un intervalo de A donde la transferencia de calor es máxima, por lo que este valor es solo representativo

De los resultados anteriores se desprende que la Razón de Aspecto donde el $Nu_{central}$ es máximo es siempre menor que la Razón de Aspecto para la que el Nu_{pared} es máximo. Esta discrepancia en el comportamiento del Nusselt central y el Nusselt de pared se debe a que para Razones de Aspecto bajas la influencia de las paredes horizontales conductoras es alta, ya que a diferencia de las paredes adiabáticas, aquellas presentan flujos de calor que se suman al de las paredes verticales, haciendo que el número de Nusselt en el plano medio aumente. En cambio a Razones de Aspecto altas la influencia de las paredes verticales es mucho más importante, por lo que el Nusselt en las paredes se maximiza, mientras que el calor transferido por las paredes horizontales es menor.

También se aprecia que a mayor número de Rayleigh el valor de A^* disminuye. Esto se explica más adelante en la sección 5.6.

En las figuras 5.4, 5.6 y 5.8 se ve que la Razón de Aspecto que maximiza el Nusselt central es mucho más fácil distinguir que la que maximiza el Nusselt en las paredes, y que la diferencia entre el $Nu_{central}$ y el Nu_{pared} se reduce a medida que la Razón de Aspecto aumenta. Esta diferencia representa el calor que recibe la cavidad a través de las paredes conductoras, el cual disminuye con el largo de las paredes horizontales.

Las figuras 5.5, 5.7 y 5.9 muestran poca sensibilidad en torno a A^* , indicando la existencia de un máximo.

Las tablas anteriores muestran también que las diferencias porcentuales entre los valores del número de Nusselt en cada máximo y en razones de aspectos vecinas son mayores a medida que el número de Rayleigh crece.

En la tabla 5.11 se observa el aumento de la transferencia de calor en los máximos relativo a una cavidad cuadrada ($A=1.0$). Las diferencias del Nusselt de pared son siempre más significativo que las del Nusselt central producto de la influencia directa que ejercen las paredes. El mayor aumento de transferencia se obtiene para $Ra=10^6$ donde la diferencia en el Nusselt central alcanza un 13.29 %.

5.4. Velocidades Máximas

La velocidad vertical V y horizontal U del fluido están directamente relacionadas con la circulación al interior de la cavidad y con el movimiento de las isotermas desde la pared caliente hacia la fría en la parte superior y desde las pared fría a la caliente en la zona inferior, por tanto resulta importante conocer la variación de la velocidad máxima horizontal y vertical alcanzadas por el aire en la geometría estudiada. Los resultados obtenidos en cada caso se presentan en las figuras 5.10, 5.11 y 5.12:

■ $Ra=10^4$

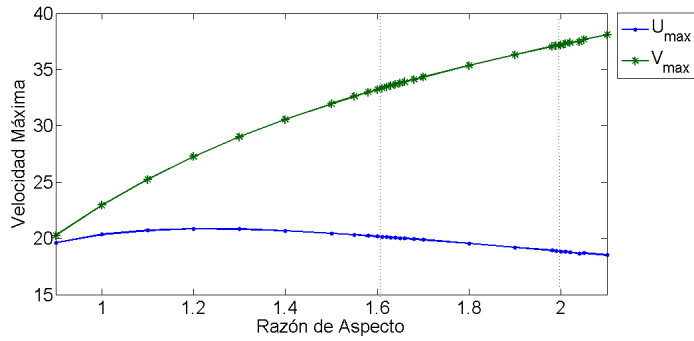


Figura 5.10: Razón de Aspecto v/s Velocidades Máximas, $Ra=10^4$

■ $Ra=10^5$

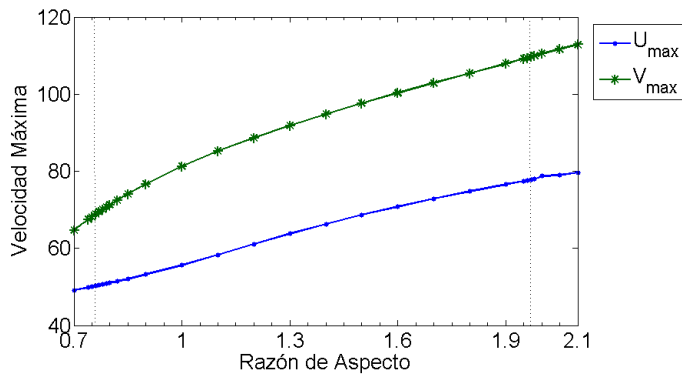


Figura 5.11: Razón de Aspecto v/s Velocidades Máximas, $Ra=10^5$

■ $Ra=10^6$

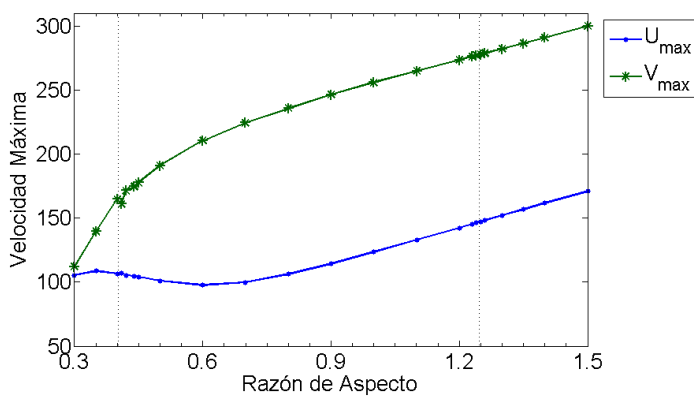


Figura 5.12: Razón de Aspecto v/s Velocidades Máximas, $Ra=10^6$

En las figuras anteriores se aprecia que la velocidad vertical máxima (V_{max}) siempre aumenta con la Razón de Aspecto debido a la mayor acción de las paredes activas de la cavidad que aceleran el fluido. Este comportamiento concuerda con la definición de V (ec 3.7) y es equivalente al obtenido en el caso adiabático.

La velocidad horizontal máxima del fluido (U_{max}) tiene un comportamiento diferente en cada caso y distinto al caso adiabático donde disminuye después de alcanza el máximo, por lo que no puede asociarse directamente la existencia de un máximo al cambio de régimen del fluido, de predominantemente horizontal a predominantemente vertical. Esto era esperable ya que las paredes horizontales presentan flujos de calor hacia dentro y fuera de la cavidad por lo que el desarrollo de U no depende exclusivamente de V .

Para $Ra=10^5$ (figura 5.11) la velocidad horizontal siempre aumenta a medida que A crece, mientras que para $Ra=10^6$ (figura 5.12) la velocidad horizontal tiene un máximo local en $A=0.41$ muy cercano a la Razón de Aspecto óptima del Nusselt central para luego seguir aumentando.

Para $Ra = 10^4$ (figura 5.10) se ve que U_{max} tiene un máximo absoluto en $A=1.2$ que no coincide con ninguno de los dos óptimos ($A=1.61$ y $A=2.0$), sin embargo la presencia de dicho máximo tiene sentido por ser el número de Rayleigh bajo, ya que a bajos Ra el régimen conductivo de transferencia de calor adquiere relevancia.

Claramente el valor de V_{max} y U_{max} crecen con el número de Rayleigh producto del aumento en la circulación que este genera.

5.5. Diagramas de Isotermas y Función Corriente

5.5.1. $A=1.0$

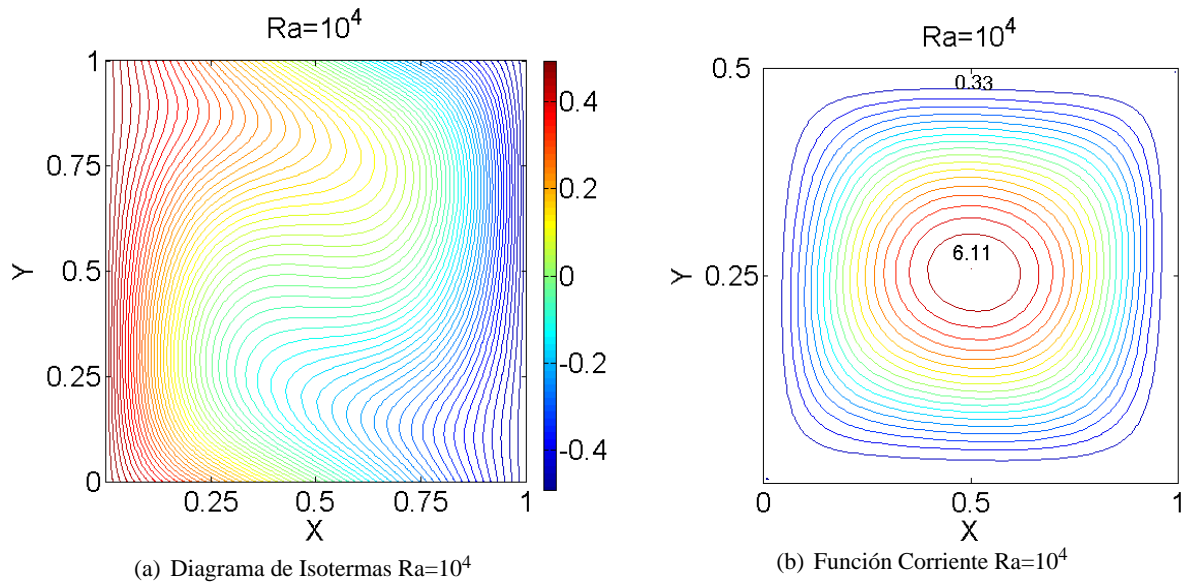


Figura 5.13:

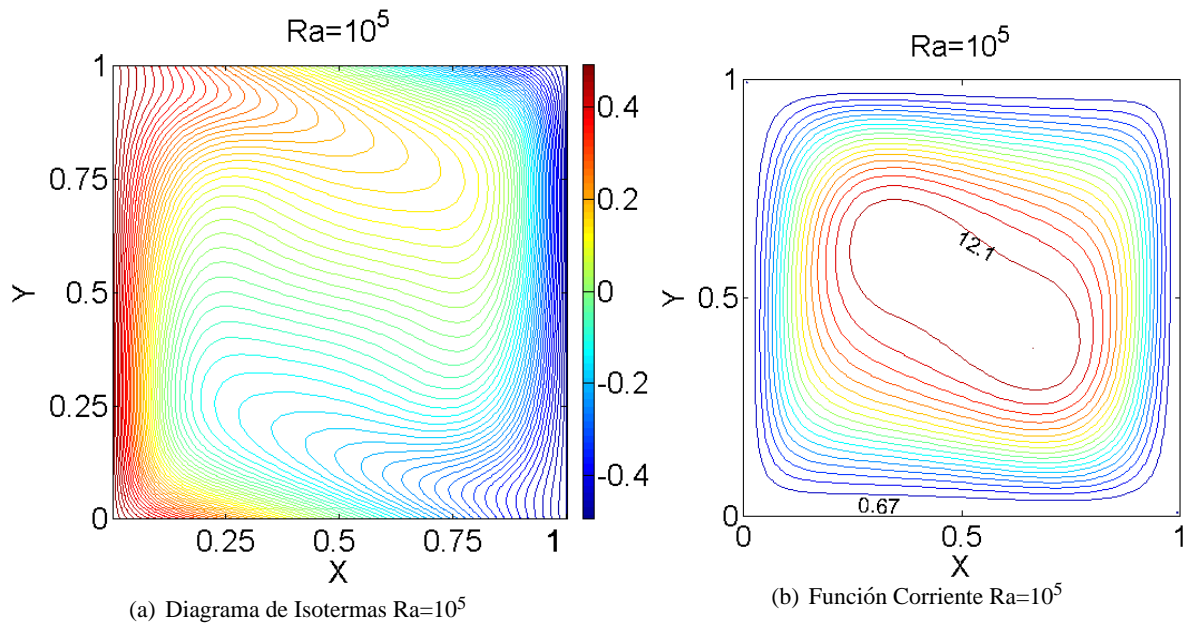


Figura 5.14:

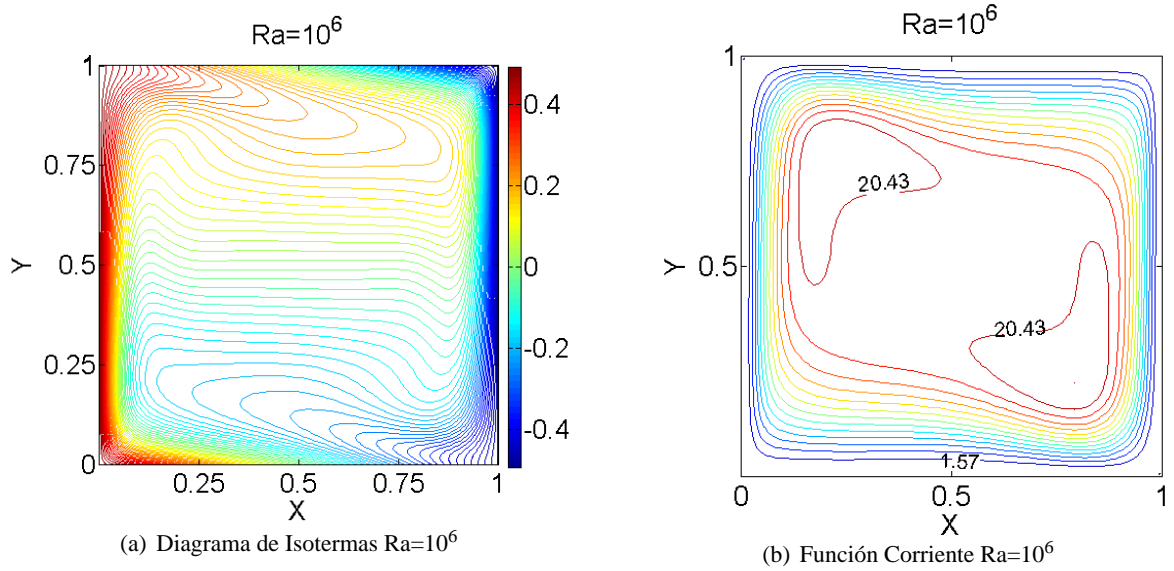


Figura 5.15:

En las figuras 5.13, 5.14, 5.15 se observa que a mayor Ra el flujo se apega más a las paredes verticales y horizontales, aumentando la altura y ancho de la región de temperatura estratificada y velocidad baja.

5.5.2. Nusselt Central y Pared Máximo

Las siguientes figuras muestran diagramas de isotermas y función corriente para cada Rayleigh y A que maximiza el Nusselt en el plano vertical medio y en las paredes verticales.

■ $Ra=10^4$

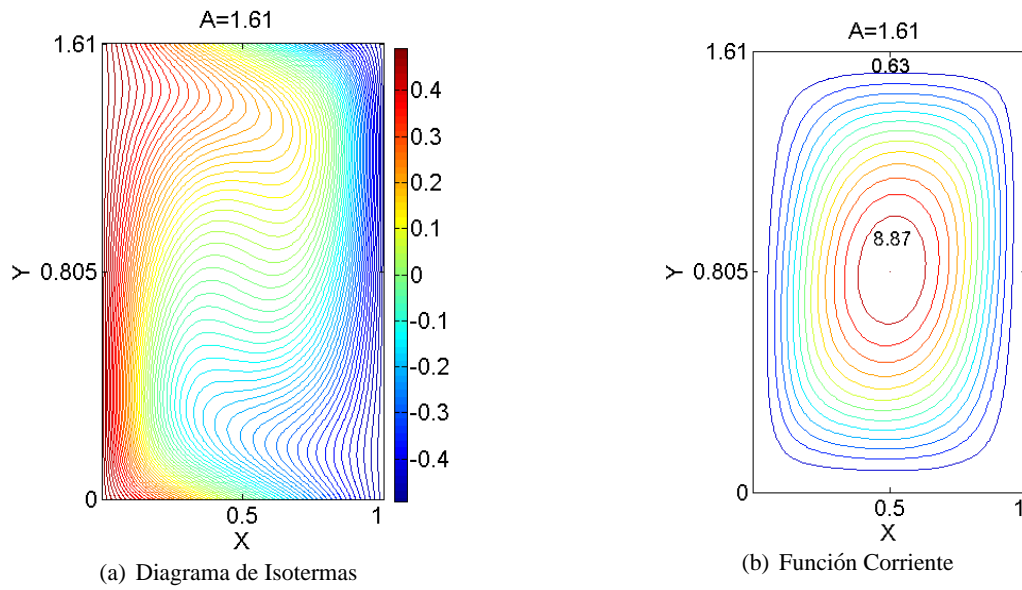


Figura 5.16: Maximo Nusselt Central, $Ra=10^4$

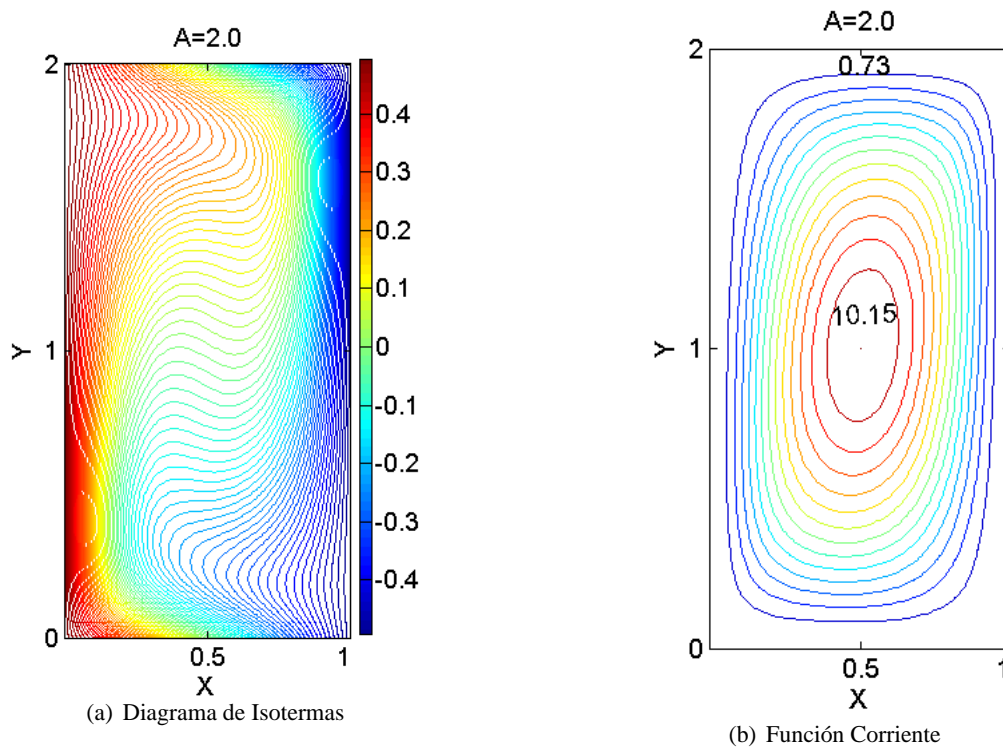


Figura 5.17: Maximo Nusselt Pared, $Ra=10^4$

■ $Ra=10^5$

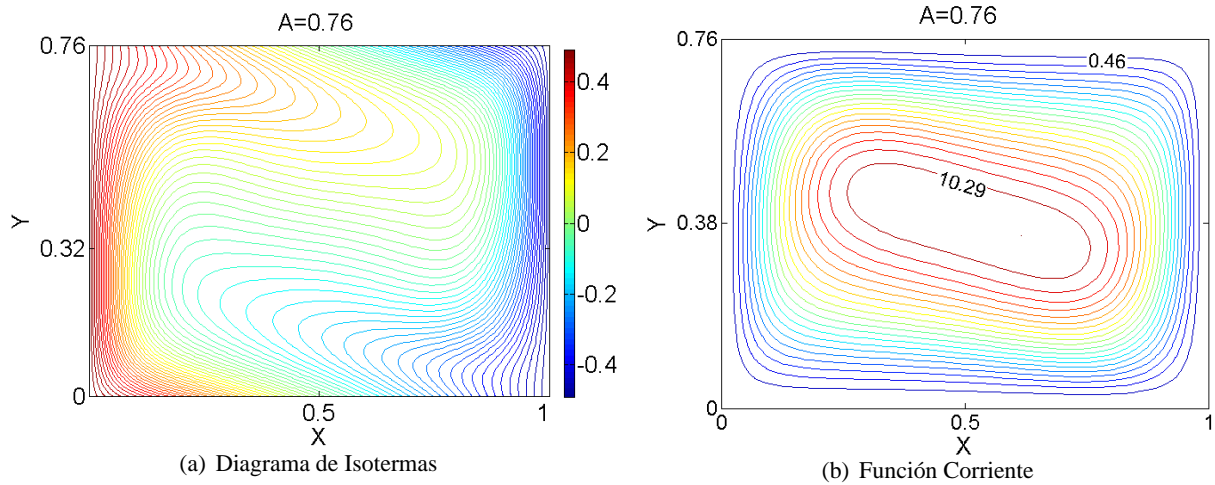


Figura 5.18: Máximo Nusselt Central, $Ra=10^5$

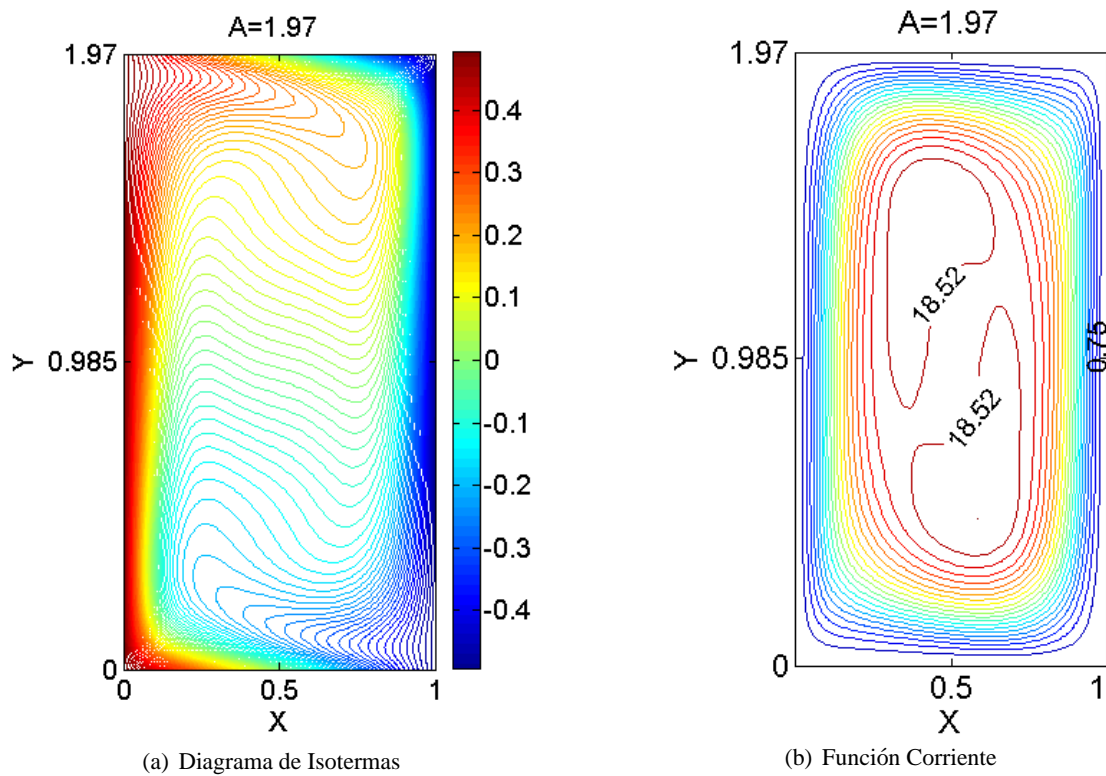
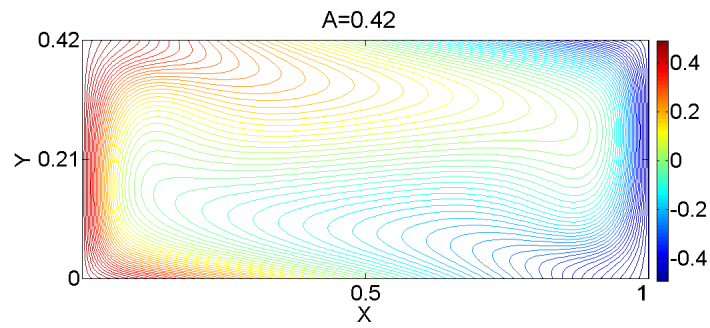
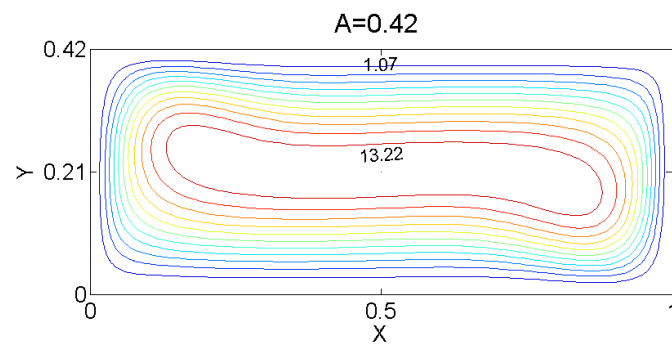


Figura 5.19: Máximo Nusselt Pared, $Ra=10^5$

■ $Ra=10^6$

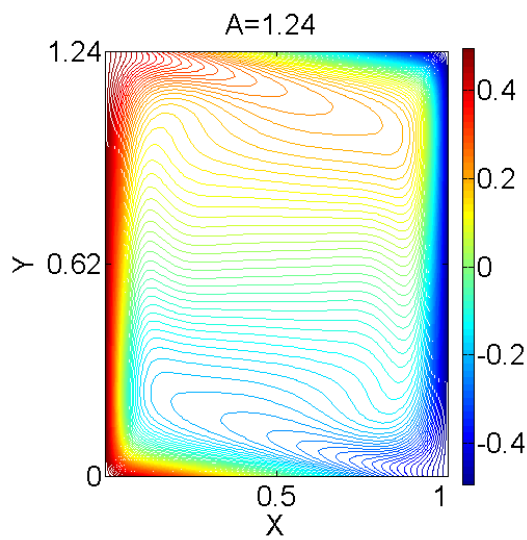


(a) Diagrama de Isotermas

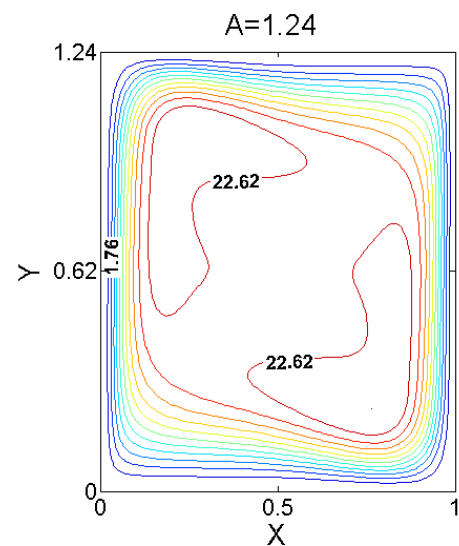


(b) Función Corriente

Figura 5.20: Máximo Nusselt Central, $Ra=10^6$



(a) Diagrama de Isotermas



(b) Función Corriente

Figura 5.21: Máximo Nusselt Pared, $Ra=10^6$

En las figuras anteriores se observa que los valores de la función corriente aumentan con el Número de Rayleigh y con la Razón de Aspecto, de esta forma para un mismo Ra los valores máximos son siempre mayores a medida que A crece, como se puede ver en las figuras anteriores.

También se aprecia una clara dependencia de la configuración de isothermas con el número de Rayleigh independiente de la Razón de Aspecto.

Mientras menor es el Ra se ve una mayor zona al interior de la cavidad ocupada por isothermas paralelas a las paredes verticales, lo que indica que mientras menor es el número de Rayleigh la conducción juega un papel importante en la transferencia de calor. Por ejemplo, para $A=1.0$ y $Ra=10^4$ (figura 5.13(a)) casi 1/4 de la cavidad por lado se encuentra ocupado por isothermas verticales, mientras que para $A=1$ y $Ra=10^6$ (figura 5.15(a)) las isothermas verticales están presente en menos de 1/8 de cada lado de la cavidad.

A medida que el número de Rayleigh aumenta, las isothermas se vuelven cada vez más horizontales, apareciendo un núcleo más estratificado de líneas de isotemperatura en la zona central de la cavidad, mientras que en las zonas cercanas a las paredes activas, las isothermas continúan siendo verticales y se distinguen capas frías y calientes en las paredes verticales cada vez más delgadas. Además a medida que el Ra aumenta las líneas horizontales de isotemperatura frías están más cercanas a la esquina inferior izquierda y las de isotemperatura calientes están más próximas a la esquina superior derecha por lo que el gradiente de temperatura en las paredes verticales es mayor. Esto genera que el número de Nusselt aumente con el número de Rayleigh al ser mayor la influencia de las isothermas calientes en la pared fría y de las isothermas frías en la pared caliente produciéndose mayor transferencia de calor.

Por otra parte el Número de Nusselt Local para cada dirección se define como:

$$Nux_{local} = U\Theta - \frac{\partial\Theta}{\partial X} \quad (5.1)$$

$$Nuy_{local} = V\Theta - \frac{\partial\Theta}{\partial Y} \quad (5.2)$$

Al existir una estratificación de las isothermas en el centro de la cavidad la derivada $\partial\Theta/\partial X$ se anula aumentando el Nusselt en la dirección X, por tanto la mayor estratificación y el aumento de U con el número de Ra explican que los valores del número de Nusselt sean mayores a medida que Ra crece.

En la zona estratificada el gradiente horizontal de temperatura es nulo (lo que suprime la conducción) y la velocidad es muy baja (lo que suprime la convección). Luego la zona estratificada no aporta una cantidad significativa de calor en el plano $X=0.5$.

También se observa una correlación entre la dirección de las isotermas y la dirección de la función corriente. Mientras mayor es la estratificación horizontal de las isotermas predomina el sentido vertical en la función corriente y viceversa. La menor cantidad de líneas de corriente en el centro indica que el movimiento en esa zona es limitado.

El comportamiento de las isotermas demuestra que con el aumento del número de Rayleigh el régimen se vuelve cada vez más convectivo, y que existe un flujo de calor desde la zona caliente hacia la fría por la parte superior de la cavidad que retorna por la parte inferior con una temperatura menor. Además a medida que el número de Rayleigh aumenta, las líneas de flujo tienden a unirse en las zonas cercanas a las paredes laterales, lo que demuestra que el flujo es más rápido en estas zonas, por lo que la convección natural se vuelve cada vez más intensa, ocasionando que las isotermas muestren una desviación cada vez más pronunciada.

Para un mismo Ra las isotermas se desdoran a mayor distancia de las esquina inferior izquierda y superior derecha cuando A es menor, lo que explica que el máximo del Nusselt de pared izquierda o derecha se produzca cercano a $Y/2$ para A bajos, como se aprecia en la sección 5.7.

En cavidades bajas (A_{centro}^*) la concentración de las isotermas en las paredes verticales disminuye, ya que la velocidad vertical es menor. La descarga de las isotermas se produce a una distancia mayor de la esquina

A continuación se muestran la distribución de isotermas del caso adiabático y perfectamente conductor para $A=1$ y $Ra=10^6$ para observar la influencia de las paredes horizontales.

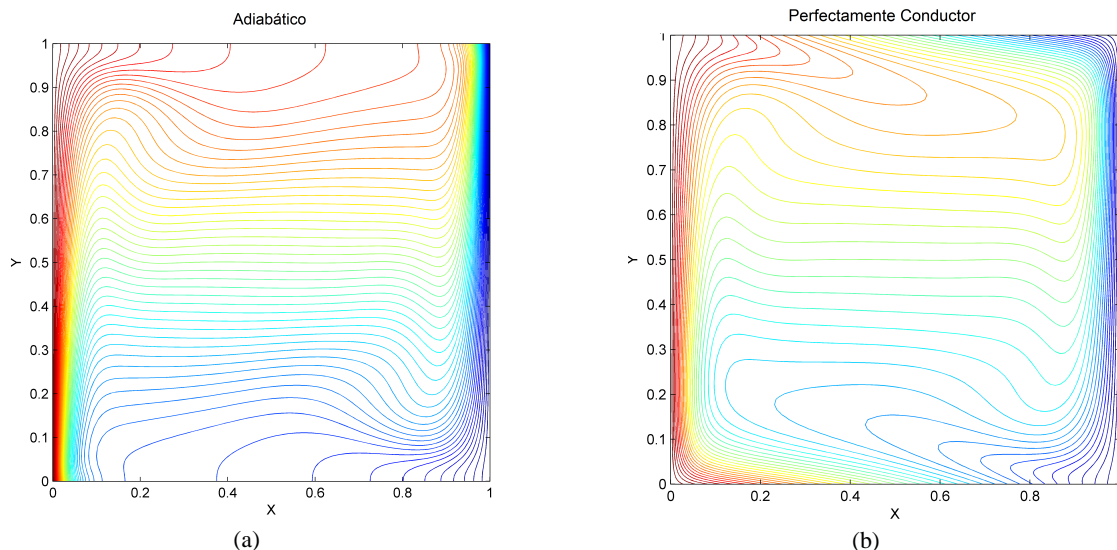


Figura 5.22: Diagrama de Isotermas $Ra=10^6$ y $A=1.0$.

En el caso adiabático, figura 5.22(a), las isothermas llegan perpendiculares a las paredes horizontales, lo que implica $\partial T / \partial y = 0$, y luego se presentan fuertemente desplazadas en la dirección del flujo. El flujo frío se mueve hacia la izquierda por la pared inferior en forma horizontal, ya que la distribución de temperatura en esas paredes no es lineal y no aportan flujos de calor, y al incidir sobre la pared caliente vertical causa un fuerte gradiente de temperatura y por lo tanto un Nusselt de pared muy alto en la zona baja de esta pared. Algo muy similar ocurre en la esquina diagonalmente opuesta. Los flujos forman una capa límite en las paredes activas (verticales) en que se concentran los flujos frío y caliente. Hay un núcleo central de temperatura estratificada y esencialmente en reposo.

En el caso perfectamente conductor, figura 5.22(b), las isothermas están inclinadas respecto a las paredes horizontales. Las isothermas también están fuertemente desplazadas en la dirección del flujo, pero el flujo frío se mueve hacia la izquierda por la pared inferior, en forma oblicua y ascendente, ya que recibe empuje de la parte caliente de la pared horizontal conductora ($X < 0.5$), donde existe un flujo de calor hacia el interior de la cavidad. Al incidir sobre la pared caliente vertical (lo que ocurre con mayor intensidad a cierta altura Y) causa un fuerte gradiente de temperatura, y un Nusselt de pared muy alto en una zona intermedia de esta pared. Algo muy similar ocurre en la esquina diagonalmente opuesta. Los flujos forman una capa límite en las paredes activas (verticales) en que se concentran los flujos frío y caliente, pero estas capas límite han empezado en la pared horizontal, $X < 0.5$ para la capa límite de fluido caliente (abajo) y $X > 0.5$ para la capa límite de fluido frío (arriba). Hay un núcleo central de temperatura estratificada y esencialmente en reposo.

Los vórtices presentes las figuras 5.21(b) y 5.19(b) se deben a la gran velocidad adquirida por el aire en la pared vertical y el posterior choque con la pared horizontal por lo que el cambio de dirección del flujo no se realiza de manera suave.

5.6. Distribución de Nusselt en Plano Medio, X=0.5

■ $Ra = 10^4$

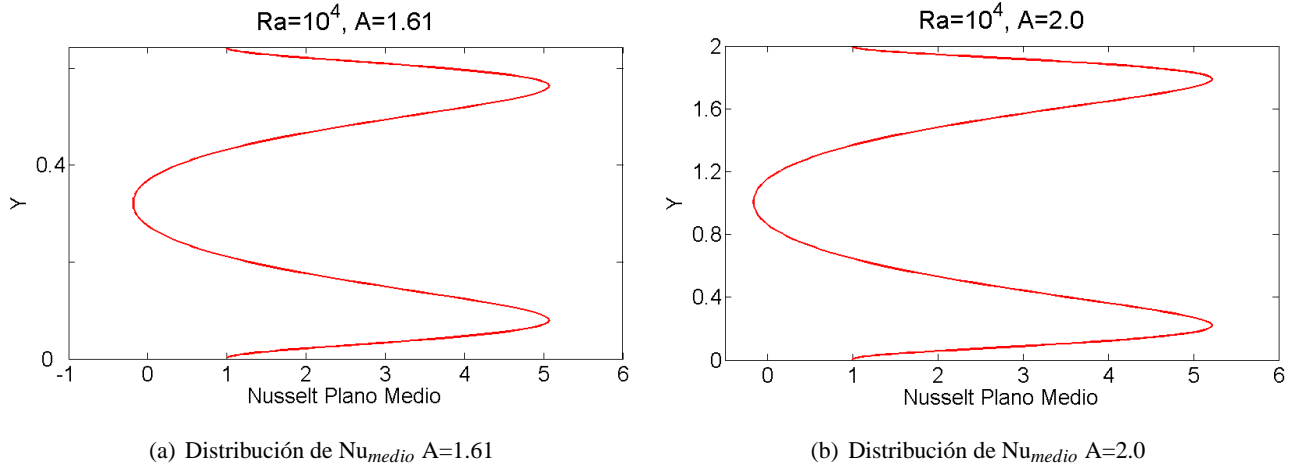


Figura 5.23: Distribución de Nusselt Plano Medio $Ra=10^4$

■ $Ra = 10^5$

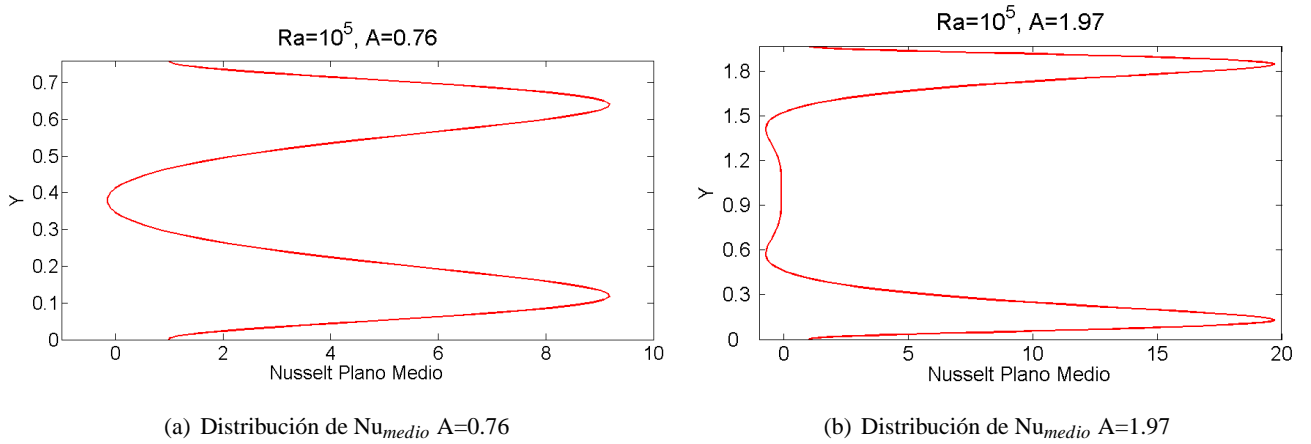


Figura 5.24: Distribución de Nusselt Plano Medio $Ra=10^5$

■ $Ra = 10^6$

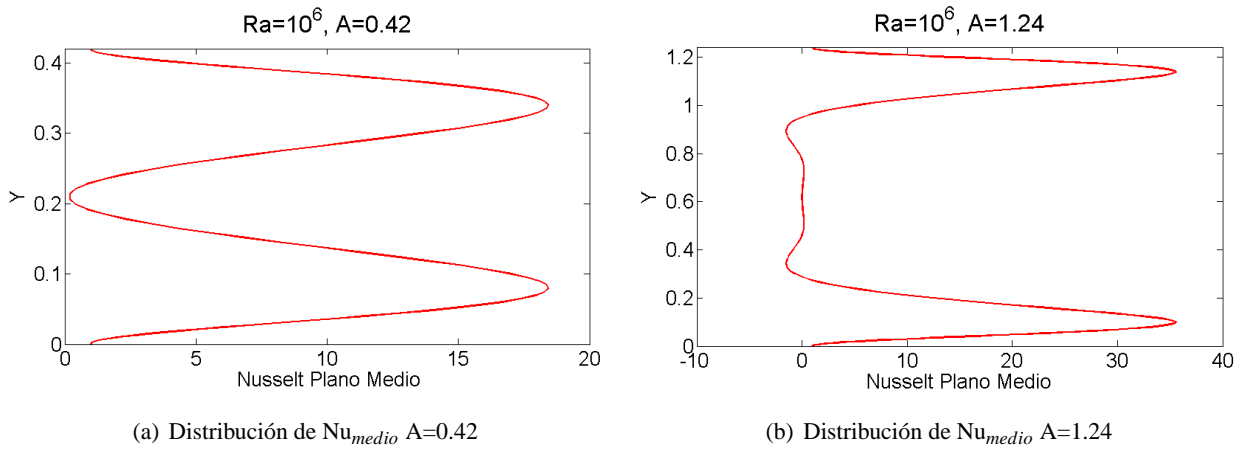


Figura 5.25: Distribución de Nusselt Plano Medio $Ra=10^6$

En las figuras anteriores se ve que para todo Rayleigh a Razones de Aspecto grandes el Nusselt central tiene una zona de valores pequeños mucho más extensa que para A bajas, lo que explica la localización del $Nu_{central}^*$ a Razones de Aspecto menores. A Razones de Aspecto altas el máximo valor del Nusselt en el Plano medio es mayor comparado con el máximo valor alcanzado a Razones de Aspecto bajas, sin embargo la extensa zona de Nusselt bajos provoca que en promedio el Nusselt en el plano central medio sea menor si A es mayor.

El caso $Ra=10^4$ es menos notorio porque la diferencia entre las Razones de Aspecto que maximizan el Nusselt central y el Nusselt de pared es menor y también porque los valores del Nusselt son bajos.

La zona de valores bajos para A grandes se explica por la estratificación de las isothermas en el centro de la cavidad como se mostró en la sección 5.5.

5.7. Distribución de Nusselt en las Paredes para A^*

■ $Ra = 10^4$

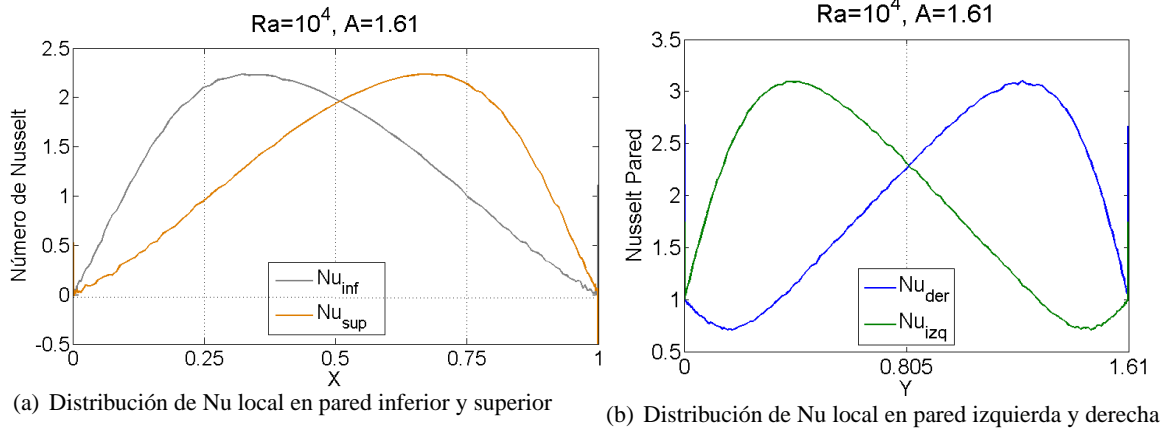


Figura 5.26: Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^4$ y $A=1.61$

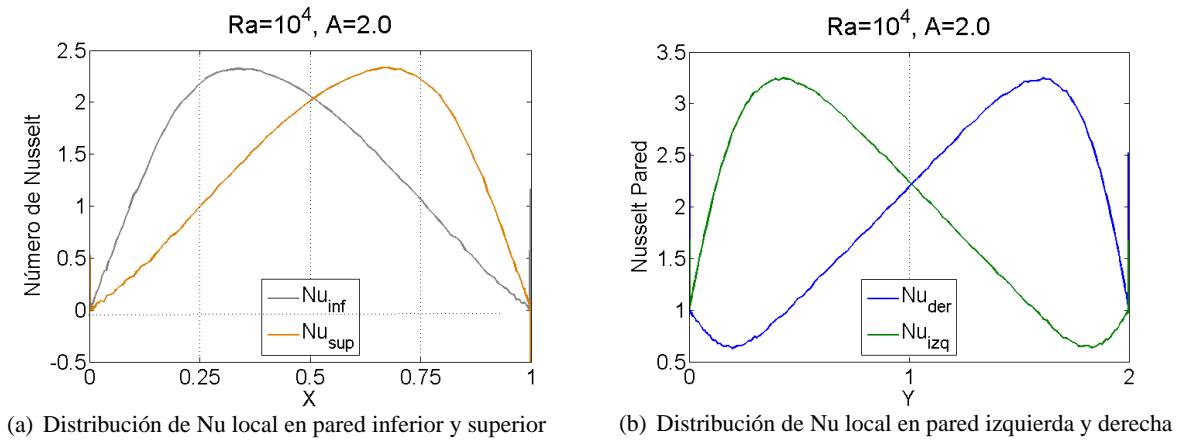
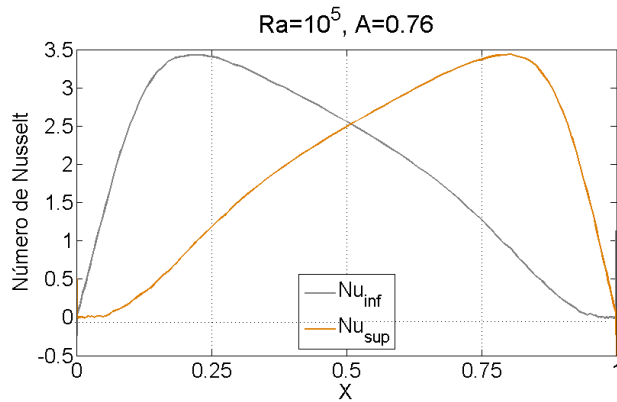
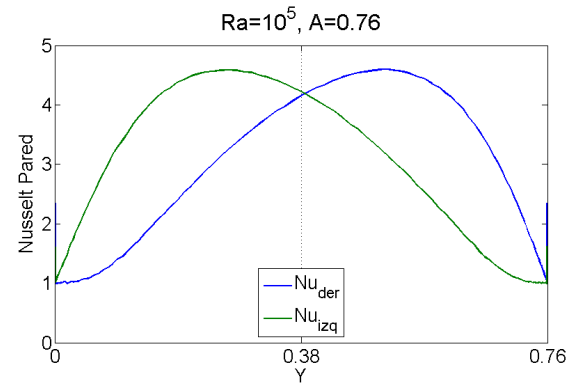


Figura 5.27: Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^4$ y $A=2.0$

■ $Ra = 10^5$

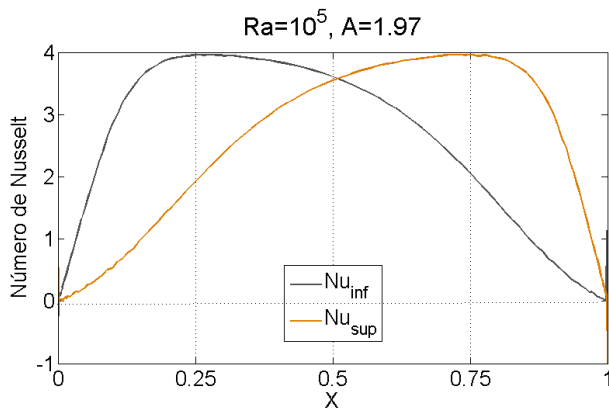


(a) Distribución de Nu local en pared inferior y superior

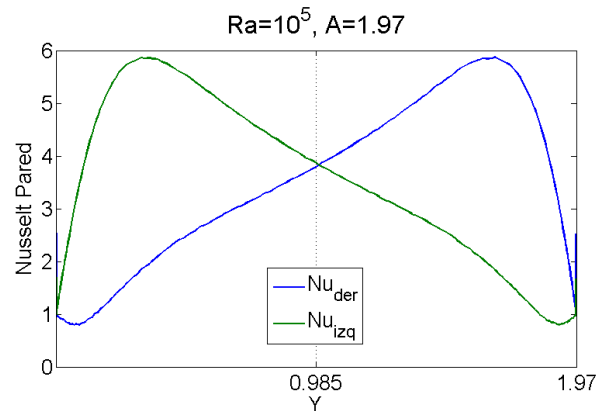


(b) Distribución de Nu local en pared izquierda y derecha

Figura 5.28: Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^5$ y $A=0.76$



(a) Distribución de Nu local en pared inferior y superior



(b) Distribución de Nu local en pared izquierda y derecha

Figura 5.29: Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^5$ y $A=1.97$

■ $Ra = 10^6$

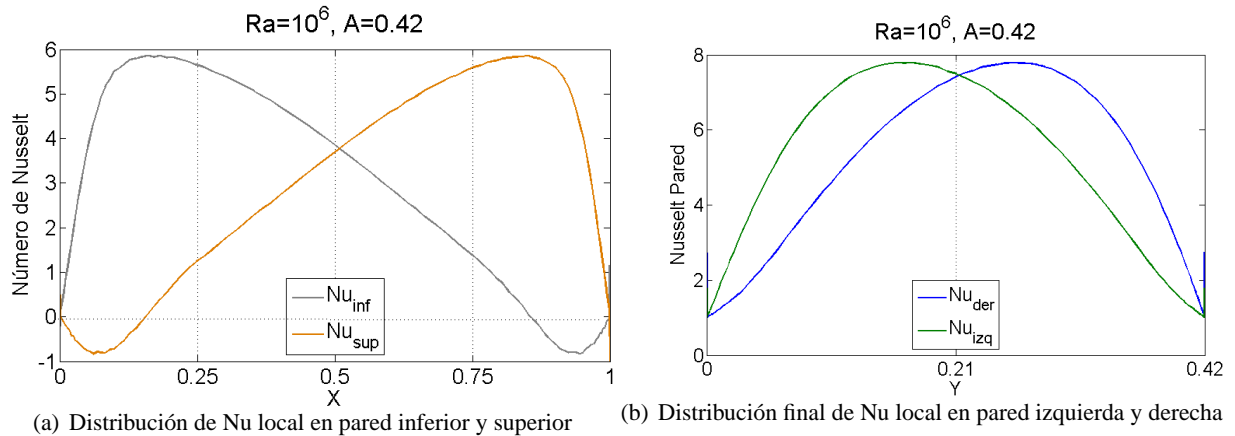


Figura 5.30: Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^6$ y $A=0.42$

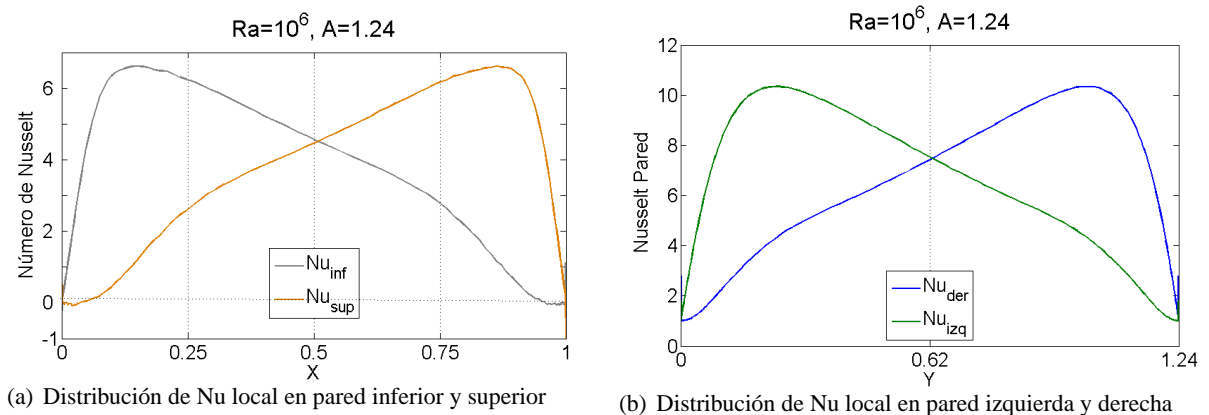


Figura 5.31: Distribución de Nusselt de pared para $Ra=10^6$ y $A=1.24$

Los resultados obtenidos para todos los Rayleigh y para cada Razón de aspecto utilizada concuerdan con los antecedentes. El Nusselt Local inferior y superior es igual a cero en $X=0$ y $X=1$ por la influencia de la temperatura impuesta en las paredes verticales y la influencia de las paredes horizontales perfectamente conductoras. El Nusselt inferior aumenta rápidamente al crecer X ya que existe un flujo de calor hacia la cavidad a través de la pared inferior para $X < 0.5$ por lo que esta transfiere calor al fluido frío que viene de $X=1$ en dicha zona. A mayores valores de X , la pared toma temperaturas más bajas debido al perfil lineal impuesto, disminuyendo la diferencia de temperatura pared-fluido, y por lo tanto el Número de Nusselt cae. En la pared superior el Nusselt es cercano a cero en $X=0$ ya que en esa zona hay contacto de fluido caliente con la zona caliente de la pared superior, y crece al pasar a mayores valores de X , en que la temperatura de la

pared es menor. Finalmente baja por la pérdidas de calor presente en la zona superior izquierda que provoca que el ΔT entre el aire y la pared disminuya.

También se observa que mientras mayor es el Ra el máximo del Nusselt inferior se encuentra más cercano a la pared caliente, mientras que el máximo del Nusselt superior se ubica próximo a la pared fría. Para $Ra = 10^4$ el máximo del Nusselt inferior se sitúa después de $X=0.25$, para $Ra = 10^5$ se ubica cerca de $X=0.25$ mientras que para $Ra = 10^6$ está antes de $X=0.25$. El comportamiento del Nusselt inferior es simétrico en relación al Nusselt superior debido a la simetría del problema.

En relación al Nusselt de pared vertical, en las figuras anteriores se observa que para todo Ra en $Y=0$ e $Y=A$ el valor del Nusselt local es uno debido que el perfil local de temperatura se aproxima a la distribución lineal impuesta en la pared horizontal ($\partial T/\partial x = 1$). El rápido ascenso del Nusselt local izquierdo con Y se debe a que la pared caliente recibe el flujo frío proveniente de la pared opuesta. Más arriba el Nusselt local decrece ya que el fluido tiende a adquirir la temperatura de la pared vertical.

El máximo valor alcanzado por el Nusselt local izquierdo se encuentra en $Y \ll Y/2$ en cavidades altas y próximo a $Y/2$ en cavidades bajas, ya que para un mismo número de Rayleigh la temperatura alcanzada por el fluido al llegar a la pared vertical es prácticamente la misma por lo que la extensión de la pared activa necesaria para producir cambios en la temperatura del fluido es también muy parecida. El comportamiento del Nusselt local derecho es simétrico al izquierdo.

Las figuras 5.32, 5.33 y 5.34 muestran la diferencia entre el Nusselt local inferior y superior, lo que da cuenta del flujo de calor neto que entra y sale de la cavidad.

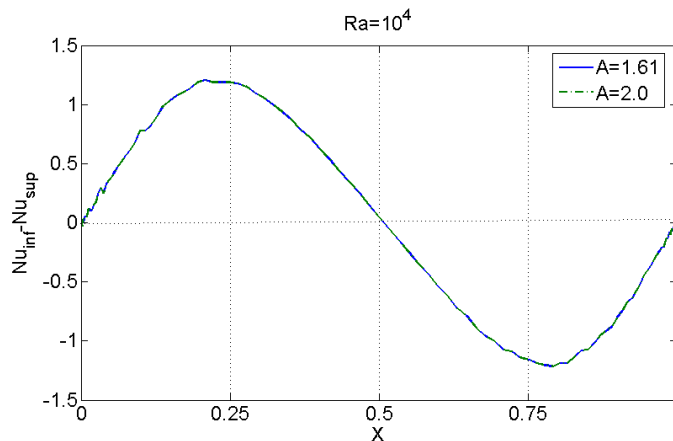


Figura 5.32: Diferencia entre Nu_{inf} y Nu_{sup} para $Ra = 10^4$

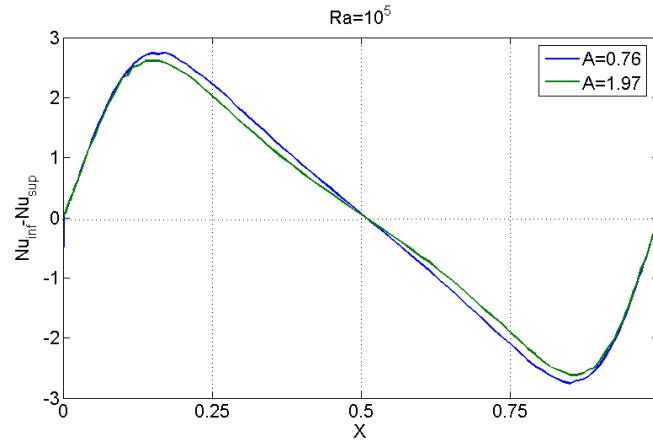


Figura 5.33: Diferencia entre Nu_{inf} y Nu_{sup} para $Ra = 10^5$

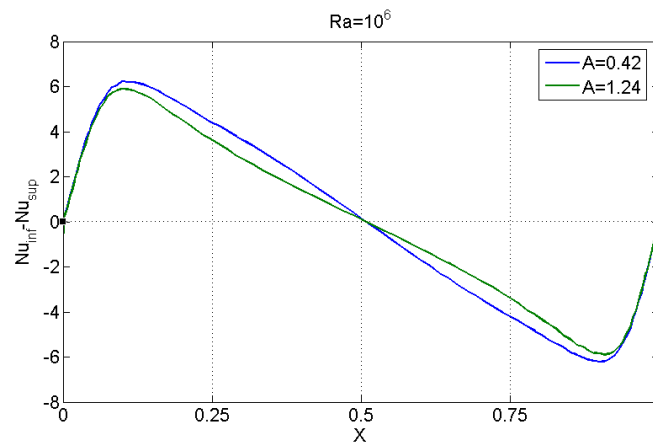


Figura 5.34: Diferencia entre Nu_{inf} y Nu_{sup} para $Ra = 10^6$

En $0 < X < 0.5$ la diferencia entre el Nusselt inferior y superior es positiva, lo que indica que hay un flujo de calor que entra a la cavidad por la parte inferior principalmente. Para $0.5 < X < 1$ la diferencia es negativa, por lo tanto la cavidad entrega calor al exterior por la pared superior. En $X=0.5$ los flujos de calor se compensan provocando que no existe flujo de calor entre la cavidad y el exterior.

Finalmente se observa que en el caso $Ra=10^4$ el calor neto de entra y sale de la cavidad es prácticamente el mismo para $A=1.61$ y $A=2.0$ por causa de los bajos valores que tiene el Nusselt y su poca sensibilidad con la Razón de Aspecto. Para $Ra=10^5$ y $Ra=10^6$ la diferencia entre el Nu_{inf} y el Nu_{sup} es mayor para la razón de Aspecto que maximiza el Nusselt central, por lo que desde el punto de vista ingenieril se trataría de la configuración más útil, ya que el calor total movido al interior de la cavidad es mayor.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. El Problema y Su Enfoque Numérico

El problema de convección natural en cavidades rectangulares con gradiente de temperatura horizontal tiene numerosas aplicaciones en el ámbito industrial y ha sido largamente estudiado desde los años 70'. Sin embargo muy pocas investigaciones han sido orientadas a la optimización del problema desde el punto de vista geométrico, por lo que existen muy pocos antecedentes sobre la existencia de una geometría específica que maximiza la transferencia de calor en su interior, y en general, sobre el fenómeno para Razones de Aspecto distintas a uno. Por lo tanto los resultados de este trabajo pretenden ser un aporte significativo en el ámbito científico. Se considera una cavidad rectangular con paredes horizontales perfectamente conductoras, y que contiene aire.

Se encontraron las razones de aspecto que maximizan el calor transferido. Para este efecto se obtienen datos mediante la resolución numérica del sistema Navier Stokes-Energía. Dado que el tratamiento de la geometría variable se facilita usando mallas de paso variable, para la resolución del problema principal se usó un código basado en el método SIMPLER incorporando la fórmula de transformación de malla propuesta por Janssen and Henkes [18]. Ésta genera una transformación de coordenadas que permite afinar la malla cerca de todos los bordes del recinto, a expensas de un aumento del paso de malla en las regiones centrales de éste. La transformación tiene dos efectos: mejora la predicción de los altos gradientes de Temperatura y velocidad en las paredes, y permite variar la Razón de Aspecto en forma continua sin la necesidad de cambiar el número de nodos. De este modo se admite la utilización de soluciones convergidas como condición inicial para Razones de Aspecto levemente distintas, acortando los tiempos de simulación. El código resuelve las ecuaciones mencionadas en forma transiente, lo cual permite controlar la estabilidad variando el paso de tiempo. La verificación del código fue realizada considerando el caso adiabático y $A=1$, ya que no existen benchmarks numéricos bidimensionales para el caso perfectamente conductor y Razones de Aspecto distintas a uno. Se compararon los resultados obtenidos con los trabajos de G. De Vahl-Davis [1] y E. Tric et al [2] obteniendo diferencias máximas del orden del 0.2 % en el número de Nusselt, que se estimaron aceptables para los propósitos del estudio, y además son muy cercanas a las diferencias entre ambos benchmarks.

Además la mínima diferencia observada entre los valores del Nusselt de Pared derecha e izquierda para todo Ra y A verifican un alto grado de cumplimiento de la conservación de energía por el código a todos los Ra estudiados.

Los resultados obtenidos con el código confirman que para $Ra=10^3$ el caso adiabático es muy similar al caso perfectamente conductor y demuestran que a bajos Rayleigh la conducción es predominante. Esto se observa en la semejanza de los valores del Número de Nusselt, las Velocidades Máximas, en la forma de la función corriente, y particularmente en la distribución de las isoterms, que llegan a las paredes horizontales de forma aproximadamente vertical, al igual que en el caso adiabático donde se impone $\partial T/\partial y = 0$ para cumplir la condición de paredes aisladas.

Por otra parte, resultados de Henkes y Le Quéré [9] muestran que a $Ra=2.3 \times 10^6$ para $A=1$, se obtiene un régimen impermanente periódico. De este modo se acota el estudio a los casos que entregan un régimen final permanente para $Ra=10^4$, 10^5 y 10^6 . Este régimen permanente se alcanzó en todos los casos estudiados, lo que confirma que para Rayleigh no mayores a 10^6 no se presentan flujos periódicos o aperiódicos independiente de la Razón de Aspecto.

6.2. Comportamiento General del Fenómeno.

La distribución del Nusselt local en las paredes inferior y superior muestra la influencia de las paredes horizontales perfectamente conductoras. En los gráficos se ve que existe un flujo de calor hacia la cavidad en la pared inferior desde $X=0$ hasta $X=0.5$ y un flujo de calor que escapa de la cavidad en la pared superior desde $X=0.5$ y $X=1$. Los flujos de calor que entran y salen por las paredes horizontales son iguales.

En las esquinas de la cavidad, $X=0$ y $X=1$ se ve que el Nusselt local vertical es cero ya que las temperaturas impuestas uniformes en las paredes activas implican $\partial T/\partial y = 0$. Por otro lado el Nusselt local horizontal es unitario en $Y=0$ e $Y=A$ ya que el perfil lineal de Temperatura impuesto en las paredes horizontales implica $\partial T/\partial x = 1$ en su vecindad.

El Nusselt local vertical aumenta con X en la zona baja por la diferencia de temperatura entre el flujo frío proveniente de $X=1$ y la pared horizontal. Después de alcanzar un máximo disminuye ya que el ΔT pared-fluido disminuye debido al perfil de temperatura impuesto a las paredes horizontales. En la zona superior el comportamiento es simétrico.

El Nusselt local horizontal aumenta con Y en la pared izquierda, también por causa del ΔT existente entre la pared y el fluido, hasta que alcanza un máximo y comienza a bajar ya que el aire aumenta su temperatura en contacto con la pared, reduciendo la transferencia de calor.

Los diagramas de isotermas generados muestra el sentido del fluido al interior de la cavidad por la deflexión de las líneas de isotemperatura. A menor Ra, independiente de A, existe una mayor zona de la cavidad ocupada por isotermas aproximadamente verticales lo que muestra la importancia de la conducción para Rayleigh bajos.

A mayor Ra y también independientemente de la Razón de Aspecto las isotermas se vuelven cada vez más horizontales y aparece un núcleo estratificado de isotermas en el centro de la cavidad, mientras que en las zonas cercanas a las paredes activas, las isotermas continúan siendo verticales y se distingue una mayor concentración de ellas, provocando mayores gradientes de temperatura en las zonas cercanas las paredes y por consiguiente un aumento del Nusselt de pared a medida que Ra crece.

En la zona estratificada el gradiente horizontal de temperatura es nulo, $\partial\Theta/\partial X = 0$, lo que suprime la conducción, y la velocidad es muy baja lo que suprime la convección. Luego la zona estratificada no aporta una cantidad significativa de calor

Las paredes perfectamente conductoras provocan un movimiento oblicuo de las isotermas en la zona superior izquierda e inferior derecha, causando una descarga diagonal de estas en la pared contraria. Esto se debe al empuje causado por la pared caliente sobre la corriente fría que se aproxima en la parte inferior ($0 < X < 0.5$) y por el empuje negativo causado por la parte fría de la pared superior ($0.5 < X < 1$) sobre el fluido calentado.

Los valores de la función corriente aumentan con el Número de Rayleigh y con la Razón de Aspecto, debido al aumento de la circulación y por lo tanto del caudal volumétrico entre un punto determinado de la cavidad y la pared. Al igual que en los diagramas de isotermas.

Mientras mayor es la estratificación horizontal de las isotermas predomina el sentido vertical en la función corriente y viceversa. Al igual que la isotermas, a medida que el número de Rayleigh aumenta las líneas de flujo se unen en las zonas cercanas a las paredes laterales, por lo que el flujo es mas rápido en estas zonas provocando que la convección natural sea mas intensa.

Los vórtices presentes para $Ra=10^6$ se deben a la gran velocidad adquirida por el aire en la pared vertical y el posterior choque con la pared horizontal por lo que el cambio de dirección del flujo no se realiza de manera suave.

6.3. Características del Máximo.

En este trabajo se logró mostrar probar la existencia de una geometría que maximiza la transferencia de calor, medida por el Número de Nusselt. Se mostró también la existencia de una Razón de Aspecto que

maximiza el Nusselt de pared distinta a la Razón de Aspecto que maximiza el Nusselt central. Se realizaron 134 corridas numéricas en busca de los máximos para los tres Ra investigados.

EL caso $Ra=10^4$ resultó mucho más complejo de determinar producto de los bajos valores del Nusselt. Se optó por considerar $A_{centro}^*=[1.6,1.65]$ y $A_{pared}^*=[1.98,2.1]$. Para $Ra=10^5$ se encontró que $A_{centro}^*=0.76$ y $A_{pared}^*=1.97$ y para $Ra=10^6$ $A_{centro}^*=0.42$ y $A_{pared}^*=1.24$.

Además fue posible determinar que:

- Mientras mayor es el número de Rayleigh mayor es el Número de Nusselt de pared y en el centro obtenido para toda A, lo que genera un aumento en la transferencia de calor asociada netamente a la variación del Ra. Esto se debe al aumento de la convección natural al interior de la cavidad producto del aumento del empuje y a la dependencia de ΔT de ambos números.
- La Razón de Aspecto que maximiza el Nusselt de pared y en el centro disminuye si el Número de Rayleigh aumenta. Si el Número de Ra es bajo la influencia de las paredes activas es más notoria ya que la convección natural se desarrolla con menor facilidad y las velocidades son menores, por lo que es necesario paredes verticales de mayor tamaño que generen un aumento en la circulación que logre vencer la fricción en las paredes.
- Para todo Ra la Razón de Aspecto que maximiza el Nusselt central es siempre menor que la Razón de Aspecto que maximiza el Nusselt en las paredes verticales, por causa de la mayor influencia (o mayor aporte de calor) de las paredes horizontales en cavidades de baja razón de Aspecto, y de las paredes verticales para A mayores a 1. Las paredes horizontales presentan flujos de calor que contribuyen a la circulación y al movimiento de isotermas provocando que el Nusselt central se maximice, mientras que la mayor influencia de las paredes verticales al crecer la Razón de Aspecto incide directamente en el valor del Nusselt de pared ocasionado la existencia de un máximo al compensarse las fuerzas de fricción en las paredes y de flotabilidad. Además de los gráficos Nu v/s Y se ve que para todo número de Rayleigh a Razones de Aspecto grandes el Nusselt central tiene una zona de valores pequeños que es mucho más extensa que para A bajas.
- El Nusselt de Pared y Central exhiben una baja sensibilidad a A en torno al Máximo, por lo que la diferencia entre los valores óptimos y los obtenidos con una Razón de Aspecto levemente inferior son muy pequeñas, llegando incluso a valores de 0.01 %, lo que está bajo la precisión del código (evaluada contra referencias externas). Sin duda el código puede discriminar entre números similares mientras su diferencia porcentual no sea menor que la que se da entre los dos números de Nusselt de pared (0.15 % en promedio). Las diferencias son más notorias en el Plano vertical medio y crecen con el aumento de Ra.

- La velocidad del fluido siempre aumenta con el Número de Rayleigh por lo que las velocidades máximas horizontales y verticales son mayores si Ra es mayor.
- V_{max} siempre aumenta con A para todo Ra, al igual que en el caso adiabático, por la influencia directa de las paredes activas, mientras que U_{max} tiene un comportamiento distinto para cada Ra y muy diferente al observado en el caso adiabático, donde la existencia de un máximo estaba directamente relacionada con una disminución de la velocidad horizontal que generaba un cambio en el régimen del fluido, de predominantemente horizontal a predominantemente vertical.

El comportamiento descrito en el primer y segundo ítem es el mismo obtenido por Frederick [6] para el caso de paredes horizontales adiabáticas.

Por todo lo anterior se considera que los objetivos del estudio han sido plenamente cumplidos.

Anexo A

Flujos de Calor

Para resolver el problema planteado en este trabajo se adimensionalizaron las ecuaciones de Navier-Stokes y Energía, con lo que se logró adaptar el problema a distintas geometrías y obtener resultados generales.

En esta sección se dimensionaliza el problema y se obtiene el flujo de calor que entra a la cavidad para tres Razones de Aspecto: A que maximiza el Nusselt central, $A=1.0$ y A que maximiza el Nusselt de pared. Esto para los tres Ra estudiados, 10^4 , 10^5 y 10^6 .

Para calcular el flujo de calor que entra a la cavidad en la mitad izquierda se consideró que el calor que recibe la cavidad más el flujo neto de calor que ingresa por las paredes horizontales es igual al calor que pasa por el plano vertical medio hacia la otra mitad, donde la cavidad pierde calor. En la mitad derecha el calor que se pierde por la pared derecha es igual al calor que pasa por el plano medio menos el calor que sale a través de las paredes horizontales.

$$q_{pared-izq} + q_{in} = q_{planomedio} \quad (A.1)$$

$$q_{planomedio} + q_{out} = q_{pared-der} \quad (A.2)$$

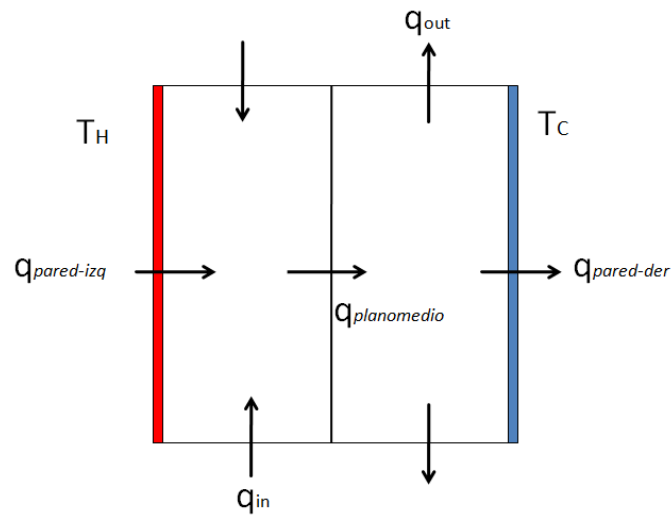


Figura A.1: Flujos de Calor en la Cavidad

El Número de Rayleigh se define como:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha} \quad (\text{A.3})$$

Por lo tanto:

$$L = \left[\frac{Ra\nu\alpha}{g\beta\Delta T} \right]^{(1/3)} \quad (\text{A.4})$$

Por otra parte se tiene que:

$$Nu = \frac{qL}{\Delta Tk} \Rightarrow q = Nu\Delta T \frac{k}{L} \quad (\text{A.5})$$

Finalmente

$$q = Nu\Delta Tk \left[\frac{g\beta\Delta T}{Ra\nu\alpha} \right]^{(1/3)} \quad (\text{A.6})$$

Para calcular el flujo de calor se consideró las propiedades del aire a 300 K (en promedio):

Tabla A.1: Propiedades del aire a 300 K.

Conductividad Térmica k	0.026 [W/mK]
Coefficiente de Expansión β	$3.42 [1/K] \cdot 10^{-3}$
Viscosidad Cinemática ν	$16.136 [m^2/s] \cdot 10^{-6}$
Difusividad Térmica α	$23.997 [m^2/s] \cdot 10^{-6}$

El número de Rayleigh depende de L y ΔT por lo que cada Nusselt calculado adimensionalmente se puede conseguir de muchas formas. Para obtener resultados comparables se mantuvo L constante y ΔT fue variado proporcionalmente con el Ra. Esto es: para $Ra=10^4$ se consideró $\Delta T = 0,5$, para $Ra=10^5$ ΔT es igual a 5 y para $Ra=10^6$ se tomo $\Delta T = 50$. La razón para tomar estas diferencias de temperatura es que para que el problema cumpla con la aproximación de Boussinesq la diferencia de temperatura entre las paredes activas debe ser menor a 60°C .

Los resultados obtenidos son:

■ $Ra=10^4$

Tabla A.2: Flujo de Calor, $Ra=10^4$

A	Nu_{izq}	Nu_{centro}	Nu_{der}	$q_{izq} [W/m^2]$	$q_{centro} [W/m^2]$	$q_{der} [W/m^2]$
1.0	1.75	2.07	1.75	0.370	0.437	0.370
1.61	1.95	2.17	1.95	0.414	0.460	0.414
2.0	1.98	2.15	1.98	0.418	0.456	0.419

El calor que entra a la cavidad por las paredes horizontales en la mitad izquierda ($0 < X < 0.5$) es q_{in} y el calor que sale de la cavidad por la mitad derecha ($0.5 < X < 1.0$) es q_{out} :

Tabla A.3: Flujo de Calor Neto que entra o sale de la cavidad, $Ra=10^4$

A	$q_{in} [W/m^2]$	$q_{out} [W/m^2]$
1.0	0.067	0.067
1.61	0.047	0.047
2.0	0.037	0.037

- $Ra=10^5$

Tabla A.4: Flujo de Calor, $Ra=10^5$

A	Nu_{izq}	Nu_{centro}	Nu_{der}	$q_{izq} [W/m^2]$	$q_{centro} [W/m^2]$	$q_{der} [W/m^2]$
0.76	3.13	4.15	3.13	6.625	8.782	6.627
1.0	3.36	4.11	3.36	7.107	8.700	7.111
1.97	3.55	3.91	3.55	7.513	8.274	7.513

El calor que entra y sale por las paredes horizontales de la cavidad para $Ra=10^5$ es:

Tabla A.5: Flujo de Calor Neto que entra o sale de la cavidad, $Ra=10^5$.

A	$q_{in} [W/m^2]$	$q_{out} [W/m^2]$
0.76	2.157	2.155
1.0	1.593	1.588
1.97	0.761	0.761

- $Ra=10^6$

Tabla A.6: Flujo de Calor, $Ra=10^6$

A	Nu_{izq}	Nu_{centro}	Nu_{der}	$q_{izq} [W/m^2]$	$q_{centro} [W/m^2]$	$q_{der} [W/m^2]$
0.42	5.30	9.49	5.31	112.26	200.80	112.29
1.0	6.60	8.23	6.60	139.73	174.11	139.77
1.24	6.64	7.86	6.64	140.59	166.34	140.58

Tabla A.7: Flujo de Calor Neto que entra o sale de la cavidad, $Ra=10^6$

A	$q_{in} [W/m^2]$	$q_{out} [W/m^2]$
0.42	88.54	88.51
1.0	34.38	34.34
1.24	25.75	25.76

En las tablas anteriores se ve que el calor que traspasa el plano medio es siempre mayor que el flujo de calor que atraviesa las paredes verticales por el efecto de las paredes horizontales. Esto es muy importante ya que representa el calor movido a través de la cavidad

Las diferencias obtenidas entre el calor que entra (q_{in}) y el calor que sale (q_{out}) se deben a las desigualdades registradas entre el Nusselt de pared izquierda y pared derecha, que se ve reflejado directamente en el flujo de calor. Estas diferencias son mayores a menor $Ra=10^4$ donde los valores del Nusselt se encontraron con mayor dificultad.

Los flujos de calor aumentan con el incremento del número de Rayleigh. Esto debido a que se mantuvo L constante y ΔT fue variado linealmente con el Rayleigh.

Anexo B

Obtención de un Régimen Permanente

Los antecedentes recopilados afirman que el régimen final del Número de Nusselt para el caso de paredes perfectamente conductoras y $A=1.0$ es permanente para $Ra \leq 10^6$, por lo que era necesario verificar tal situación en cada caso con el fin de asegurar la existencia de un máximo absoluto y descartar la posibilidad que el valor encontrado corresponda a un peak de oscilación.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en los máximos para cada Rayleigh

■ $Ra = 10^4$

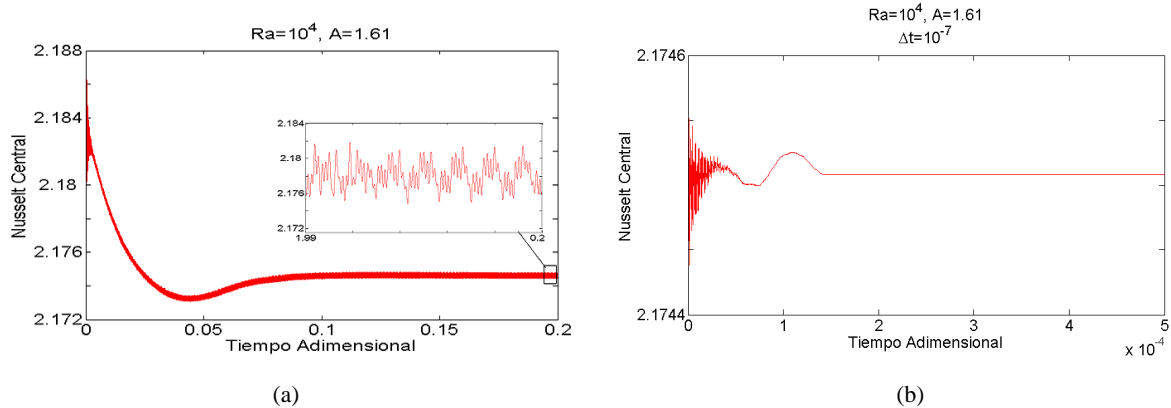


Figura B.1: Evolución temporal del número de Nusselt Central para $Ra=10^4$ y $A=1.61$

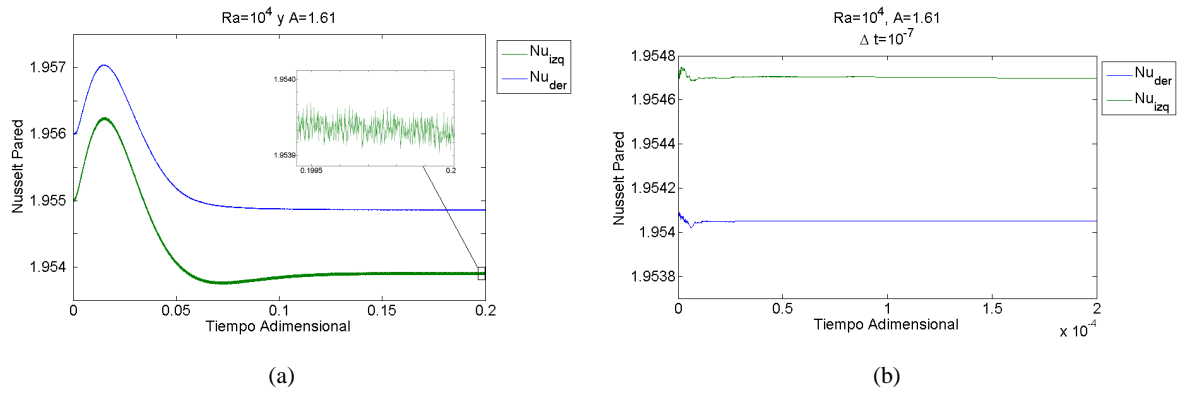


Figura B.2: Evolución temporal del número de Nusselt de Pared para $Ra=10^4$ y $A=1.61$

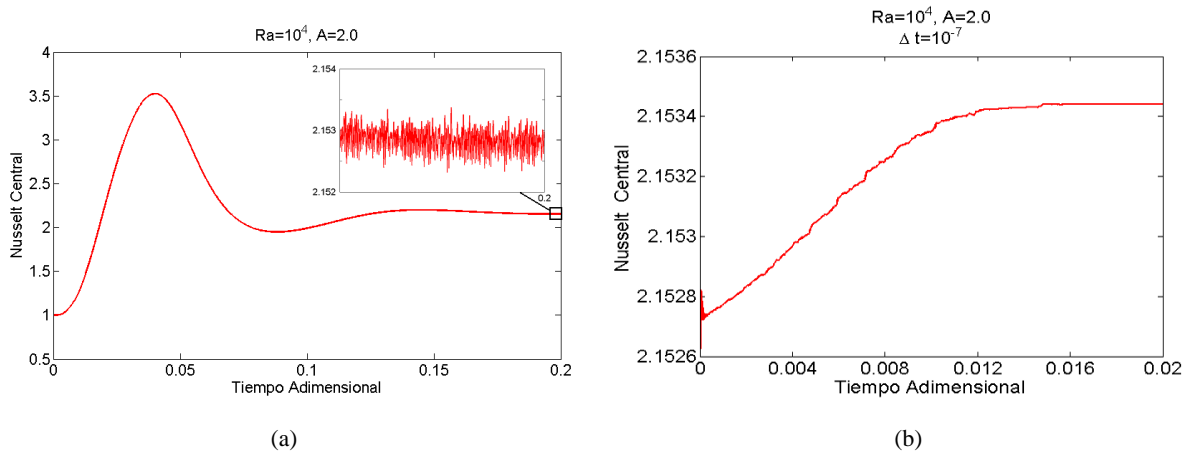


Figura B.3: Evolución temporal del número de Nusselt Central para $Ra=10^4$ y $A=2.0$

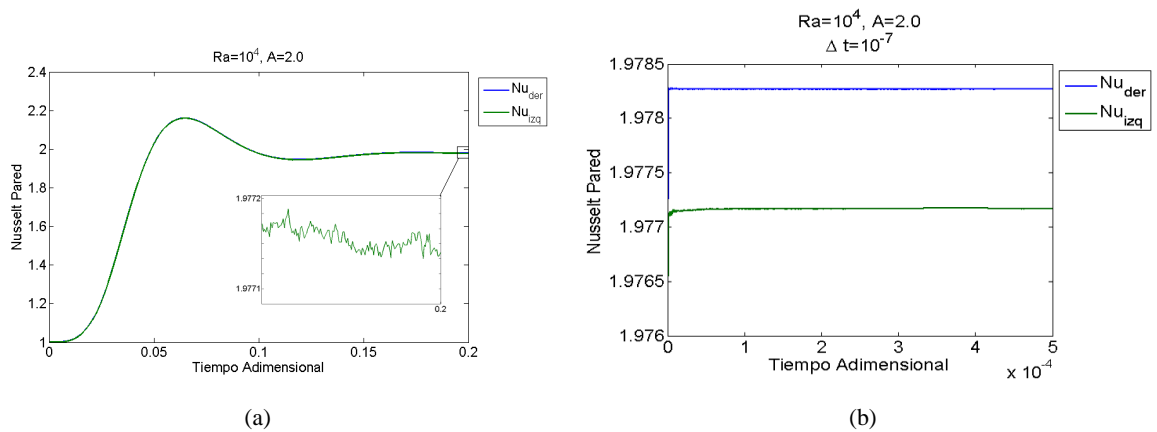


Figura B.4: Evolución temporal del número de Nusselt de Pared para $Ra=10^4$ y $A=2.0$

En las figuras B.1, B.2, B.3 y B.4 se muestra la evolución temporal del Numero de Nusselt. En las figuras (a) se distinguen las oscilaciones numéricas producidas por un Δt insuficiente para la cantidad de nodos en dirección Y (242), y las figuras (b) se aprecia el régimen permanente alcanzado por el Nusselt disminuyendo el Δt de 10^{-6} a 10^{-7} . Los casos con $\Delta t = 10^{-7}$ fueron corridos usando como condición inicial los campos de temperatura semiconvergidados obtenidos con el algoritmos con un $\Delta t = 10^{-6}$ para la misma Razón de Aspecto, lográndose un régimen permanente en un tiempo muy pequeño, lo que demuestra la utilidad de usar campos semiconvergidados como condición inicial.

Por último se ve que el Nusselt Central es más complicado que el Nusselt de Pared por el mayor paso de malla existente en el centro.

■ $Ra = 10^5$

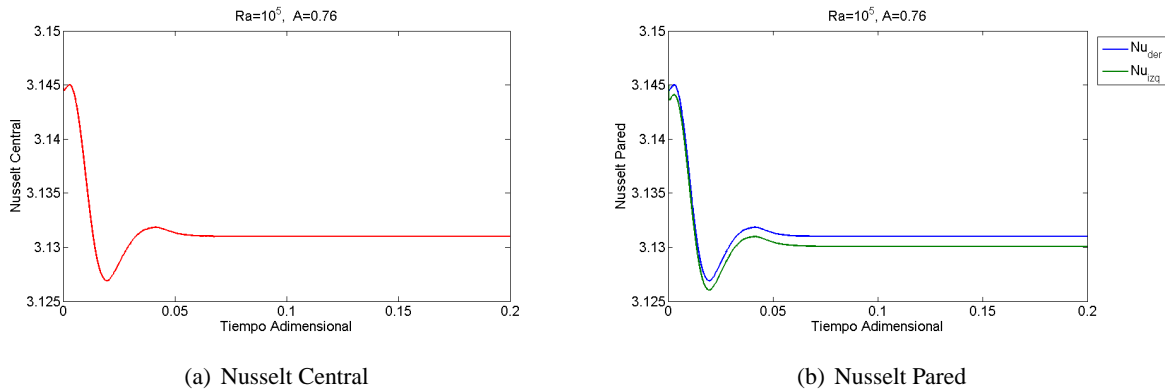


Figura B.5: Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^5$ y $A=0.76$

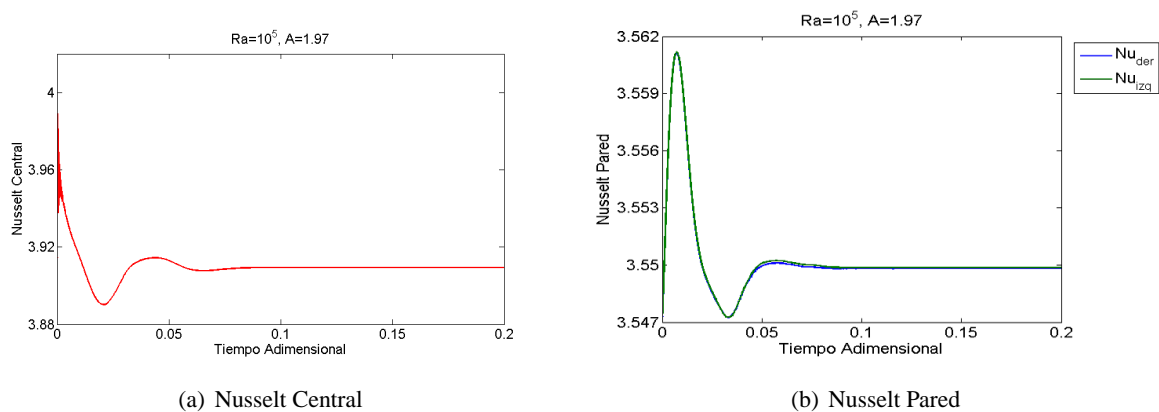
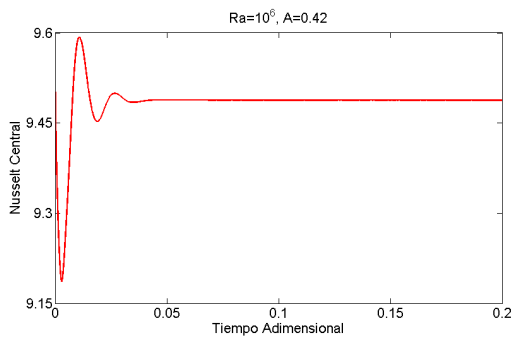
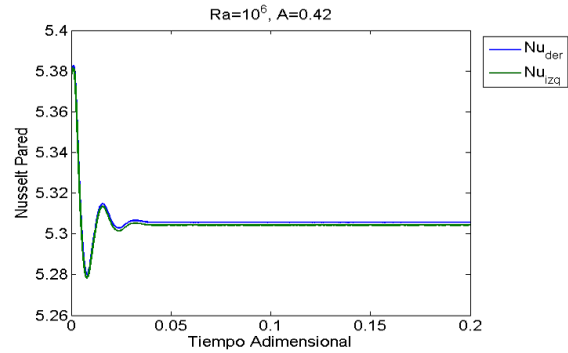


Figura B.6: Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^5$ y $A=1.97$

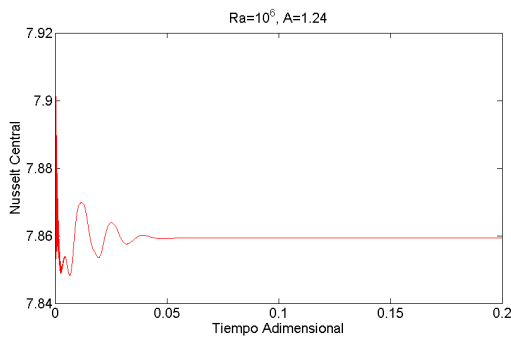
■ $Ra = 10^6$



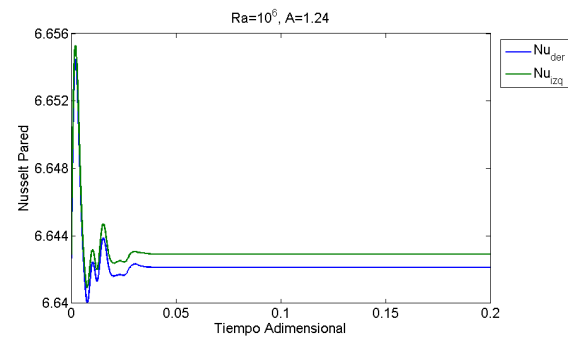
(a) Nusselt Central



(b) Nusselt Pared

Figura B.7: Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^6$ y $A=0.42$ 

(a) Nusselt Central



(b) Nusselt Pared

Figura B.8: Evolución temporal del número de Nusselt para $Ra=10^6$ y $A=1.24$

De las figuras anteriores también se observa que para $Ra=10^5$ y $Ra=10^6$ mientras mayor es la razón de aspecto las oscilaciones también aumenta, como se puede ver en las figuras B.7 y B.8 ($Ra=10^6$). Este mayor número de oscilaciones iniciales se deben a que a medida que la Razón de Aspecto disminuye ($A < 1$) la distancia entre nodo en la dirección vertical también lo hace, por lo que es más fácil para el programa encontrar las soluciones finales. El caso de $Ra=10^4$ es distinto ya que el óptimo se obtuvo a partir de una corrida nueva y con una malla con el doble de nodos en la dirección Y.

Bibliografía

- [1] G. De Vahl-Davis, *Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 3, pp. 249-264, 1983.
- [2] E. Tric, G. Labrosse, M. Betrui, *A first Incursion Into the 3D Structure of Natural Convection of Air in a Differentially Heated Cubic Cavity, From Accurate Numerical Solutions*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 4043-4056, 2000.
- [3] Adrian Bejan, *A syntesis of analytical results for natural convection heat transfer across rectangular enclosures*, Int. J Heat Mass Transfer, Vol.23, pp.723-726, 1979.
- [4] A.E.Gill, *The boundary layer regime for convection in a rectangular cavity* J Fluid Mech, Vol.26, pp.515-518, 1966.
- [5] D.E.Cormack et al, *Natural convection in a shallow cavity with differentially hated end wall*, J Fluid Mech, Vol.65 pp.209-215, 1974.
- [6] Ramón Frederick, *On the aspect ratio for wich the heat transfer in differentially heated cavities is maximum*, Int comm. Heat Mass Trasfer, Vol.26 pp.549-558, 1999.
- [7] Sergio Courtin, *Simulación bidimensional de la convección natural en cavidades cuadradas con paredes horizontales perfectamente conductoras a alto número de Rayleigh*, Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Mecánico, Universidad de Chile, 2006.
- [8] P. Le Quéré, M. Behnia, *From onset of unsteadiness to chaos in a differentially heated square cavity*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 359, pp. 81-107, 1998.
- [9] R.A.W.M. Henkes, P. Le Quéré, *Three dimensional transition of natural convection flows*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 319, pp. 281-303, 1996.
- [10] T. Fusegi, J.M. Hyun, K. Kuwahara, B.Farouk. *A numerical study of three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure* International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 34, pp. 1543-15557, 1991.

- [11] E.F.Altmayer, A.J.Gadgil, F.S.Bauman, RC Kammerud, *Correlations for convective heat transfer from room surfaces*,ASHRAE Trans, Vol.89, pp.61-77,1983.
- [12] D. Poulidakos, *Natural convection in a confined fluid-filled space driven by a single vertical wall with warm and cold regions*,ASME Trans, Vol.107, pp.867-876, 1985.
- [13] G.D. Raithby, H.H. Wong, *Heat Transfer by natural convection across vertical air layers*, Numerical Heat Transfer, Vol.4, pp.447-457, 1981.
- [14] D.G.Briggs, D.N.Jones, *Two dimensional periodic natural convection in a rectangular enclosure of aspect ratio one*,ASME Trans, Vol.105, pp.850-861, 1985.
- [15] A.V. Pantakar. *Numerical heat transfer and fluid flow*,Ed. Mc Graw Hill, 1980.
- [16] T.G.B. Brassington *Optimal numerical strategy for ustedy natural convection in two and three dimensions*,ANZIAM Journal,Vol. 42, pp. 291-316, 2000.
- [17] Z.Y. Zhong, J.R. Lloyd *Variable property effects in laminar natural convecion in a square enclose*, Journal of Heat Transfer,Vol. 107, pp. 133-138, 1988.
- [18] Janssen, R.A., Henkes, R.A.W.M., *Instabilities in three-dimensional differentially heated cavities with adiabatic horizontal walls*, Phys. Fluids, Vol. 8, pp. 62-74, 1996.
- [19] Ramón Frederick, *Temperature profiles in the walls of square cavities: adiabaticity or linear profile?*,The Fourth International Thermal Energy Congress, Julio 2001.