



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

ESTUDIO EN RÉGIMEN IMPERMANENTE DEL VACIADO DE TUBOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

JORGE ROBERTO SEREY RODRIGUEZ

PROFESOR GUÍA:

RAMÓN FUENTES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

XIMENA VARGAS

HORACIO MERY

SANTIAGO DE CHILE

2008

RESUMEN

El vaciado de recipientes y ductos es un proceso frecuente en la operación de sistemas hidráulicos. Empero, salvo en el caso de las grandes protecciones de máquinas (chimeneas de equilibrio o tanques neumáticos) es un tema relativamente poco tratado o que se resuelve a veces en forma superficial, por no decir arbitraria.

En el presente trabajo se analiza el fenómeno del vaciado de diferentes sistemas, en cada uno de ellos se determinan los parámetros adimensionales relevantes, a partir de los cuales es posible comprender el fenómeno en cuestión y determinar la correcta aplicabilidad de diferentes modelos que estudian los transientes hidráulicos, ellos son: el modelo cuasiestático, el modelo inercial rígido y el modelo de columna elástica. En cada resolución se han determinado las velocidades experimentadas a lo largo del fenómeno, el itinerario de vaciado y su duración total. A continuación se resumen las consideraciones y resultados obtenidos para los sistemas estudiados.

Vaciado de un ducto inclinado: El fenómeno se ha caracterizado a través de parámetros adimensionales asociados a las pérdidas friccionales y singulares. Se han determinado las circunstancias para las cuales el modelo cuasiestático difiere del modelo de columna rígida. También se ha dado validez al uso de un coeficiente de fricción fijo y se ha determinado que el uso del modelo elástico no presenta diferencias significativas frente al modelo de columna rígida.

Vaciado de un ducto horizontal: Se ha estudiado la primera fase del vaciado, en la cual se produce una onda o cavidad que avanza hacia aguas arriba. Durante este vaciado parcial, la fracción de líquido vaciado con respecto al volumen total y el ángulo que se forma en la sección de salida del ducto están completamente determinados, los otros parámetros del escurrimiento son constantes y sólo dependen de dicho ángulo y del diámetro del ducto.

Vaciado de un tanque cilíndrico de sección constante: Aquí se han determinado las circunstancias necesarias para que la aproximación cuasiestática sea válida, en otras palabras bajo cuales condiciones la fórmula de Torricelli se cumple localmente en función de la razón entre el diámetro del tanque y el orificio de salida por donde se drena el líquido.

Vaciado de un tanque de sección variable: El estudio se limitó a tanques verticales de revolución que vierten por el fondo, esto está cerca de los relojes hidráulicos o clepsidras. Como ejemplo, se ha estudiado una parábola de cuarto grado, para la cual la velocidad del vaciado se mantiene notablemente constante. De esta forma, el itinerario puede verse que es una línea recta.

Vaciado de dos líneas que convergen a un drenaje común: El problema se ha solucionado con el modelo inercial rígido con un coeficiente de fricción constante. Los parámetros importantes que caracterizan el fenómeno se relacionan con la capacidad de evacuación de la válvula y la fricción en el sistema. Aquí se han mostrando diversos fenómenos que pueden darse en este tipo de drenajes.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por todo el apoyo entregado durante todos mis años de estudio, tanto escolar como universitario.

A mi profesor guía, el Sr. Ramón Fuentes por toda la dedicación colocada en el presente trabajo.

A mi amor, Camila Bravo, se le agradece por todo el apoyo entregado en el proceso de realización de esta memoria.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES	7
I.1 INTRODUCCIÓN.....	7
I.2 OBJETIVO GENERAL Y ESPECÍFICOS.....	9
I.3 ORGANIZACIÓN DEL INFORME.....	9
CAPÍTULO II: VACIADO DE UN DUCTO INCLINADO	10
II.1 DEDUCCIÓN SIMPLE DE LAS ECUACIONES DEL MODELO DE VACIADO	10
II.1.1 ESTIMACIÓN APROXIMADA DE LA DISIPACIÓN DE ENERGÍA:	14
II.1.2 FORMULACIÓN GENERAL DEL MODELO DE COLUMNA RÍGIDA	17
II.1.3 VERSIÓN EN VARIABLES ADIMENSIONALES	19
II.2 MODELO CUASISTÁTICO.....	21
II.2.1 CASO GENERAL: CONSIDERANDO FRICCIÓN Y SINGULARIDADES	21
II.2.2 CASO LÍMITE A: AUSENCIA DE FRICCIÓN	25
II.2.3 CASO LÍMITE B: SINGULARIDADES DESPRECIABLES	26
II.3 MODELO INERCIAL RÍGIDO	34
II.3.1 CASO GENERAL: CONSIDERANDO FRICCIÓN Y SINGULARIDADES	34
II.3.2 CASO LÍMITE A: AUSENCIA DE FRICCIÓN	41
II.3.3 CASO LÍMITE B: SINGULARIDADES DESPRECIABLES	47
II.4 FRONTERA ENTRE LOS MODELOS DE COLUMNA RÍGIDA	52

CAPÍTULO III: INFLUENCIA SOBRE EL TIEMPO DE VACIADO DEBIDA A LAS VARIACIONES DE LA FRICCIÓN EN RÉGIMEN IMPERMANENTE	63
III.1 INTRODUCCION:	63
III.2 ANTECEDENTES:.....	63
III.3 HIPÓTESIS PREVIAS:	66
III.4 ECUACIONES DEL MODELO.....	69
III.5 RESULTADOS DEL CÁLCULO:	71
CAPÍTULO IV: ECUACIONES DE LA COLUMNA ELÁSTICA, TIEMPO DE VACIADO.....	73
IV.1 INTRODUCCIÓN:	73
IV.2 ECUACIONES DEL MODELO:.....	73
IV.3 ANÁLISIS INSPECCIONAL:.....	74
IV.4 SOLUCION DE LAS ECUACIONES:	78
IV.5 RESULTADOS:.....	81
CAPÍTULO V: VACIADO DE UN DUCTO HORIZONTAL	84
V.1 PRESENTACION Y ANTECEDENTES	84
V.2 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL VACIADO.....	84
V.3 VACIADO PARCIAL DEL TUBO:.....	89
CAPÍTULO VI: VACIADO DE UN TANQUE CILINDRICO DE SECCIÓN CONSTANTE.....	92
VI.1 INTRODUCCIÓN.....	92
VI.2 ECUACIONES DEL MODELO.....	94
VI.3 VELOCIDAD DE VACIADO.....	96

VI.4	TIEMPO DE VACIADO	99
VI.5	TIEMPO TOTAL DE VACIADO	99
VI.6	VALIDEZ DE LA APROXIMACIÓN CUASIESTÁTICA.....	102
CAPÍTULO VII: VACIADO DE UN TANQUE DE SECCION VARIABLE		104
VII.1	INTRODUCCIÓN.....	104
VII.2	ECUACIONES DEL MODELO:.....	105
VII.3	EJEMPLO A RESOLVER.....	109
VII.4	VELOCIDAD DE VACIADO:.....	110
VII.5	ITINERARIO DE VACIADO:	113
VII.6	TIEMPO TOTAL DE VACIADO:	115
CAPÍTULO VIII: VACIADO DE DOS LÍNEAS QUE CONVERGEN A UN DRENAJE COMÚN		117
VIII.1	INTRODUCCIÓN	117
VIII.2	HIPOTESIS SIMPLIFICATORIAS PREVIAS	118
VIII.3	ECUACIONES DESCRIPTIVAS:.....	119
VIII.4	ANÁLISIS INSPECCIONAL:	121
VIII.5	CASO PARTICULAR DEL PÉNDULO LÍQUIDO:.....	123
VIII.6	PÉNDULO LÍQUIDO - INFLUENCIA DE LA FRICCIÓN:	126
VIII.7	DRENAJE NORMAL:	131
VIII.8	DRENAJE CON OSCILACIONES:	131
CAPÍTULO IX: COMENTARIOS Y CONCLUSIONES.....		137
REFERENCIAS		140

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

I.1 INTRODUCCIÓN

El vaciado de recipientes y ductos es un proceso frecuente en la operación de sistemas hidráulicos. Empero, salvo en el caso de las grandes protecciones de máquinas (chimeneas de equilibrio o tanques neumáticos) es un tema relativamente poco tratado o que se resuelve a veces en forma superficial, por no decir arbitraria. Esto puede ser aceptable en casos de pequeñas instalaciones en las cuales los fenómenos asociados al vaciado pueden ser de importancia marginal. Sin embargo en la práctica chilena, y, especialmente, en los grandes proyectos mineros chilenos y/o extranjeros se emplean ductos muy grandes que deben ser vaciados: centenares de metros de desnivel, decenas y a veces más de una centena de kilómetros de largo y caudales de más de 1 [m³/sec]. En estas instalaciones, a veces ramificadas, de diámetros variables o interconectadas, el fenómeno de vaciado es esencial y puede ser una limitante para ciertos procesos o procedimientos. De aquí el interés práctico de analizarlo en detalle. En el presente estudio solamente se tratarán líquidos, que es el caso tradicional del vaciado gravitatorio de ductos.

La división más importante es la que se refiere a la rapidez del transiente, ya que ella no solamente cambia los fenómenos involucrados, sino que modifica las ecuaciones que gobiernan el fenómeno. La división que sigue es clásica (ver, por ejemplo, Abreu et al. [1]):

- **Transientes muy lentos o cuasiestáticos:** La inercia de las columnas líquidas es muy pequeña y entonces son válidas las ecuaciones del flujo estacionario, instante a instante. Hay que enfatizar en este aspecto que el cálculo se puede desarrollar empleando las relaciones para flujo estacionario, pero considerando que las presiones y velocidades son funciones del tiempo. Como ejemplos típicos se pueden mencionar las singularidades (toberas, válvulas, etc) o casos en que la operación es controladamente paulatina.
- **Transientes lentos o moderadamente rápidos:** en estos la inercia de las conducciones no puede despreciarse y esto implica que las ecuaciones del movimiento deben incluir explícitamente las aceleraciones del fluido. El ejemplo más espectacular son las grandes oscilaciones en masa que se producen en las obras hidráulicas, asociadas a chimeneas de equilibrio y/o a cámaras neumáticas.
- **Transientes muy rápidos (golpe de ariete):** Para estas situaciones, además de las aceleraciones e inercias asociadas es necesario tomar en cuenta las características elásticas del líquido y de la tubería.

La clasificación típica de los modelos que analizan los transitorios hidráulicos se basa en la consideración o no de las características elásticas del sistema (fluido y tubería). Dando origen a la siguiente división:

- **Modelo de Columna rígida:** Este modelo no considera las características elásticas del sistema o bien la celeridad de la onda de presión con que se transmite la información es infinita. Como consecuencia de esto, las velocidades son iguales en toda la columna de agua para un instante de tiempo dado. Dentro de este modelo, está aquel que considera la inercia de la columna (Modelo Rígido Inercial) y aquel que la desprecia (Modelo Cuasiestático).
- **Modelo Columna elástica:** Este sí considera la compresibilidad del fluido y la elasticidad de las paredes de la conducción, además de la inercia. En este modelo, las velocidades no necesariamente son iguales a lo largo de la columna para un determinado instante de tiempo, ya que la información de las perturbaciones se transmite con una velocidad finita que depende de las características de la conducción y de los coeficientes de compresibilidad del fluido y de la tubería.

Sobre golpe de ariete, esto es sobre transientes muy rápidos, existe una amplia bibliografía. Aquí se citarán, por ahora, solamente algunos textos clásicos: Parmakian [30] (1963), Jaeger [25] (1977), Chaudry [11] (1979), Wylie y Streeter [37] (1978), Wylie y Streeter [38] (1993), Abreu et al. [1] (1994), Thorley [33] (2004).

En cambio, sobre transientes muy lentos o moderadamente lentos la información es (y ha sido) relativamente pobre. Como ejemplos se pueden citar:

- Flamant [17] (1909) calcula el tiempo de vaciado de vertederos considerando la aproximación cuasiestática, sin justificación ni discusión alguna.
- Forchheimer [18] (1935) trata el vaciado de embalses y depósitos en varias situaciones, empleando asimismo la aproximación cuasiestática.
- Domínguez [14] (1974) expone el vaciamiento de tanques desarrollado por Salas Edwards en 1918 y asimismo incluye el vaciamiento de vertederos y presas, dentro de la aproximación cuasiestática.
- Diversos problemas asociados al vaciado de tanques han sido estudiados por Escande [15] (1950) siempre empleando el modelo cuasiestático.
- El caso de chimeneas de equilibrio para centrales se encuentra bien cubierto en el texto de Jaeger [25] (1977).
- Un estudio de vaciamiento de ductos tomando en cuenta la inercia ha sido realizado recientemente por Iglesias et al. [24] (2006).

La revisión realizada muestra que el vaciamiento de tubos tomando en cuenta todos los aspectos relevantes no se ha realizado y es una laguna que se desea llenar, al menos parcialmente en el presente trabajo.

I.2 OBJETIVO GENERAL Y ESPECÍFICOS

El presente documento tiene por objeto el estudio de los fenómenos impermanentes que se producen en el vaciado de recipientes y ductos, caracterizándolos a partir de parámetros adimensionales que permitan validar el uso de distintos modelos de transientes hidráulicos. Específicamente, se pretende dar solución a los siguientes problemas:

(a) *Vaciado de un ducto inclinado*: Determinar las circunstancias para las cuales el modelo cuasiestático difiere del modelo de columna rígida considerando parámetros asociados a la fricción y singularidades en el sistema, estudiar la influencia en el tiempo total de vaciado que tiene el uso de un coeficiente de fricción variable y estudiar la validez del modelo elástico frente al modelo de columna rígida.

(b) *Vaciado de un ducto horizontal*: Estudiar la primera fase del vaciado, en la cual se produce una onda o cavidad que avanza hacia aguas arriba determinando las principales variables del escurrimiento.

(c) *Vaciado de un tanque cilíndrico de sección constante*: Determinar las circunstancias necesarias para que la aproximación cuasiestática sea válida, en otras palabras bajo cuales condiciones la fórmula de Torricelli se cumple localmente en función de la razón entre el diámetro del tanque y el orificio de salida por donde se drena el líquido.

(d) *Vaciado de un tanque de sección variable*: Estudiar tanques verticales de revolución que vierten por el fondo, esto está cerca de los relojes hidráulicos o clepsidras enfocando el análisis en el estudio de un problema de carácter histórico, el de la parábola de cuarto grado.

(e) *Vaciado de dos líneas que convergen a un drenaje común*: Analizar los diversos fenómenos que pueden darse en este tipo de drenajes en función de parámetros relacionados con la capacidad de evacuación de la válvula y la fricción en el sistema.

I.3 ORGANIZACIÓN DEL INFORME

El informe estará organizado en 9 capítulos mas uno de referencias, en el presente se introduce al problema en cuestión y se acotan los alcances y objetivos propuestos. Los Capítulos II , III y IV se refieren al problema (a), mientras que los Capítulos V, VI, VII y VIII se refieren a los problemas (b), (c), (d) y (e) respectivamente. El Capítulo IX resume los principales comentarios y conclusiones obtenidos.

CAPÍTULO II: VACIADO DE UN DUCTO INCLINADO

II.1 DEDUCCIÓN SIMPLE DE LAS ECUACIONES DEL MODELO DE VACIADO

Se supone flujo incompresible y campo gravitatorio.

El sistema que se vacía se esquematiza en la Figura II-1.

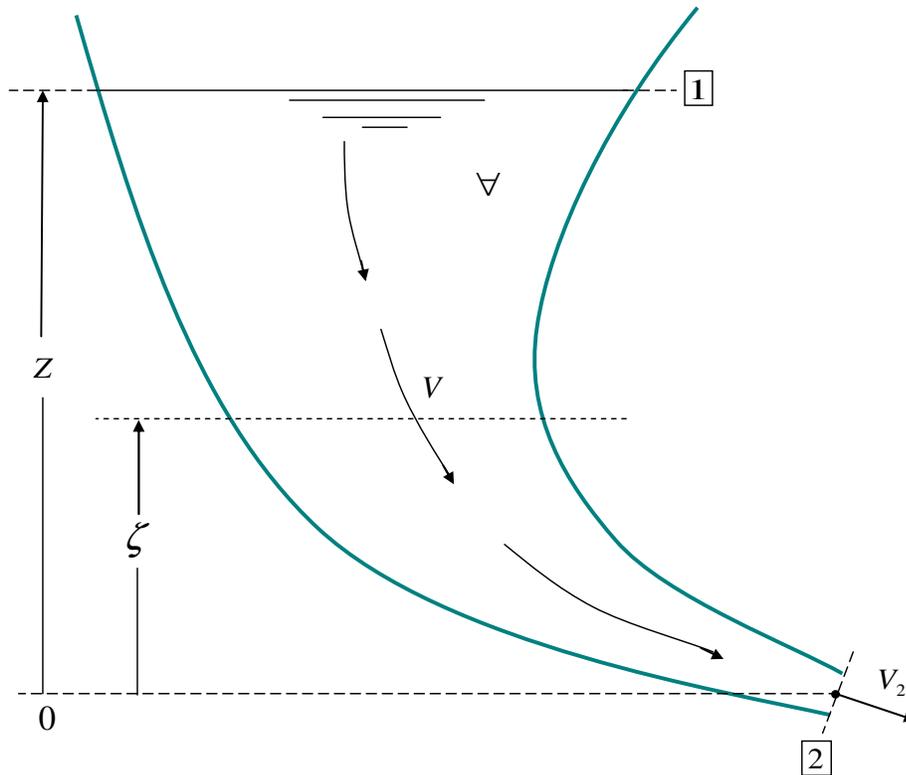


Figura II-1. Esquema general de Vaciado de un ducto

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD:

$$\dot{M}_1 = \dot{M}_2 + \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV \quad (\text{II-1})$$

En donde:

t: tiempo

ρ : densidad

\forall : Volumen

\dot{M} : Caudal másico.

Ya que ρ es constante y no hay aporte en la sección 1 ($\dot{M}_1 = 0$), la ec. (II-1) deviene:

$$\dot{M}_2 + \rho \frac{d\forall}{dt} = 0 \quad \text{(II-2)}$$

ECUACIÓN ENERGÉTICA:

Debido a la nulidad del aporte por la sección 1 ella se escribe:

$$\dot{M}_2 \left(e_i + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gZ \right)_2 + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int \left(e_i + \frac{1}{2} V^2 + g\zeta \right) d\forall + \dot{D} = 0 \quad \text{(II-3)}$$

Con:

$$\dot{D} = \int \Phi d\forall \quad \text{(II-4)}$$

Donde:

g: aceleración de gravedad

e: energía interna por unidad de masa

P: presión

V: módulo del vector velocidad

Z: cota vertical ascendente de la superficie libre superior

ζ :cota vertical ascendente de un punto interior del ducto

\dot{D} : Tasa de disipación de energía

Φ : Función de disipación de Rayleigh (Fuentes [21])

Considerando escurrimiento isoterma además de incompresible se puede aceptar que la energía interna específica $e_i = cte$ es una constante (Fuentes [21], Anexo D). Entonces la ec. (II-3) puede escribirse:

$$\left(\dot{M}_2 + \rho \frac{dV}{dt} \right) e_i + \dot{M}_2 \left(\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gZ \right)_2 + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} V^2 + g\zeta \right) dV + \dot{D} = 0 \quad \text{(II-5)}$$

Tomando en cuenta la ec.(II-2):

$$\dot{M}_2 \left(\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gZ \right)_2 + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} V^2 + g\zeta \right) dV + \dot{D} = 0$$

Además:

$$P_2 = 0$$

$$Z_2 \cong 0$$

Entonces:

$$\dot{M}_2 \frac{1}{2} V_2^2 + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} V^2 + g\zeta \right) dV + \dot{D} = 0$$

Se define la integral I como sigue:

$$I = \int_0^z \left(\frac{1}{2} V(t, \zeta)^2 + g\zeta \right) A(\zeta) d\zeta$$

Derivando mediante la fórmula de Leibnitz (Spiegel [32], 1970):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^z \left(\frac{1}{2} V^2 + g\zeta \right) A(\zeta) d\zeta = \int_0^z V \frac{\partial V}{\partial t} A(\zeta) d\zeta + \frac{dZ}{dt} \left(\frac{1}{2} V(Z)^2 + gZ \right) A(Z)$$

El segundo término del segundo miembro puede escribirse como:

$$\frac{dZ}{dt} \left(\frac{1}{2} V(Z)^2 + gZ \right) A(Z) = -V(Z) A(Z) \left(\frac{1}{2} V(Z)^2 + gZ \right)$$

$V(Z)$ corresponde a la velocidad media de la superficie libre superior, esto es:

$$V(Z) = -\frac{dZ}{dt}$$

HIPÓTESIS ADICIONAL: DUCTO DE SECCIÓN FIJA

Dentro del dominio en análisis, V es función de ζ y de t . Entonces es fácil concebir que para un ducto de sección fija la cantidad, designada por $Q = V(\zeta, t) A(\zeta)$ depende solamente del tiempo y no explícitamente de Z :

Hipótesis de sección

$$\int_0^Z V(\zeta, t) \frac{\partial V}{\partial t} A(\zeta) d\zeta = Q(t) \int_0^Z \frac{dV}{dt} d\zeta = Q(t) \frac{dV}{dt} Z$$

En la superficie libre superior:

$$Q(t) = V(Z) A(Z) \tag{II-6}$$

Introduciendo estos resultados en la ec. (II-5) se obtiene:

$$\dot{M}_2 \frac{1}{2} V_2^2 + \rho Q \frac{dV}{dt} Z - \rho Q \left(\frac{1}{2} V^2 + gZ \right) + \dot{D} = 0$$

O bien, simplificando:

$$\frac{V^2}{2g} + Z = \frac{\dot{M}_2}{\rho Q} \frac{V_2^2}{2g} + \frac{Z}{g} \frac{dV}{dt} + \frac{\dot{D}}{\rho g Q}$$

Por otra parte:

$$\dot{M} = \dot{M}_2 = \rho V_2 A_2 = \rho Q = \rho V(Z) A(Z) \quad \text{(II-7)}$$

Entonces:

$$\frac{V^2}{2g} + Z = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{Z}{g} \frac{dV}{dt} + \frac{\dot{D}}{\rho g Q} \quad \text{(II-8)}$$

Conviene observar que si no existen aceleraciones (escurrimiento estacionario) ni disipación se recupera la expresión clásica de Bernoulli:

$$\frac{V^2}{2g} + Z = \frac{V_2^2}{2g}$$

Si, además, el tanque tiene una sección transversal mucho mayor que la del orificio de salida instalado en la sección 2 se reencuentra la relación de Torricelli:

$$V_2 = \sqrt{2gZ}$$

II.1.1 ESTIMACIÓN APROXIMADA DE LA DISIPACIÓN DE ENERGÍA:

Como sistema se muestra un tramo de ducto como el de la Figura II-2. Dentro del ducto está fijo un obstáculo cuyas dimensiones lineales son mucho menores que el largo del tramo.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD:

$$\dot{M}_1 = \dot{M}_2 = C_1$$

Esto implica:

$$VA = C_2$$

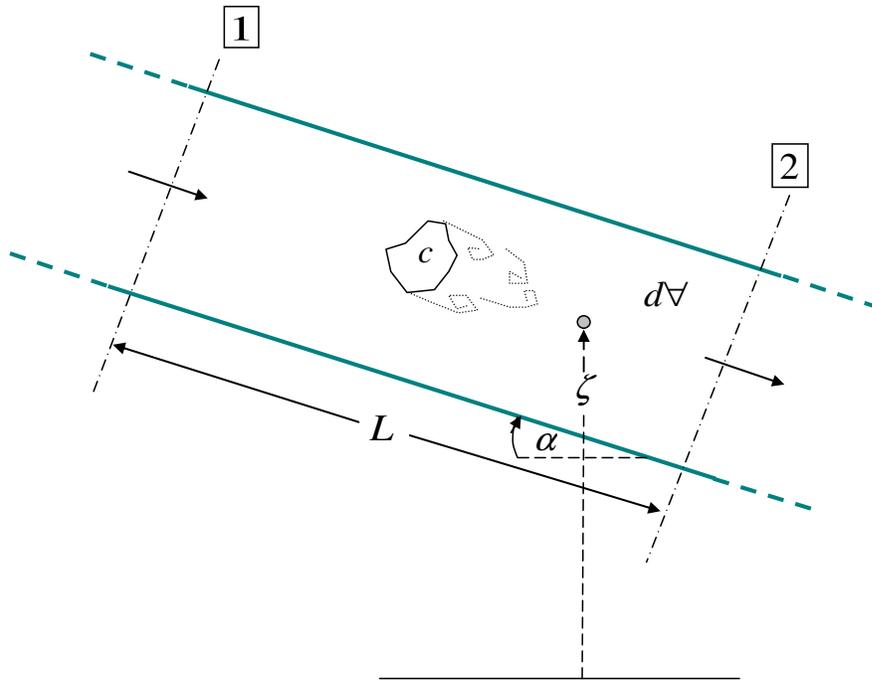


Figura II-2. Tramo de ducto con un obstáculo intermedio.

Siempre dentro del esquema del fluido isoterma, incompresible y pesado, pueden escribirse las ecuaciones siguientes:

ECUACIÓN DE ENERGÍA:

$$\dot{M} \left[\left(\frac{P}{\rho} + gZ \right)_2 - \left(\frac{P}{\rho} + gZ \right)_1 \right] + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} V^2 + g\zeta \right) dV + \dot{D} = 0$$

Tomando en cuenta la ecuación de continuidad y considerando que V es constante dentro del volumen de control dV se obtiene que:

$$\dot{M} \left[\left(\frac{P}{\rho} + gZ \right)_2 - \left(\frac{P}{\rho} + gZ \right)_1 \right] + \rho V \frac{dV}{dt} + \dot{D} = 0 \quad \text{(II-9)}$$

ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int V dV = (P_1 - P_2)A + \rho g A L \sin(\alpha) - \tau_0 \chi L - \frac{1}{2} \rho C_a A_c V^2$$

O bien:

$$\rho \nabla \frac{dV}{dt} = (P_1 - P_2)A + \rho g A (Z_1 - Z_2) - \tau_0 \chi L - \frac{1}{2} \rho C_a A_c V^2 \quad \text{(II-10)}$$

Combinando las ecs. (II-9) y (II-10) se encuentra:

$$\frac{\dot{D}}{\dot{M}} = \frac{1}{\rho A} \left(\tau_0 \chi L + \frac{1}{2} \rho C_a A_c V^2 \right)$$

Introduciendo el factor de fricción de Fanning C_f y simplificando:

$$\frac{\dot{D}}{\dot{M}} = \frac{1}{2} V^2 \left(C_f \frac{L}{R_h} + C_a \frac{A_c}{A} \right)$$

O bien:

$$\frac{\dot{D}}{\dot{M}} = \frac{1}{2} V^2 \left(f \frac{L}{D_h} + K_{s1} \right) \quad \text{(II-11)}$$

Donde:

$f = 4C_f$: factor de fricción de Darcy

$D_h = \frac{4A}{\chi}$: diámetro hidráulico

$K_{s1} = C_a \frac{A_c}{A}$: coeficiente de pérdidas de carga singulares

Combinando las ecs. (II-11) y (II-8) se obtiene:

$$\frac{V^2}{2g} + Z = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{Z}{g} \frac{dV}{dt} + \frac{V^2}{2g} \left(f \frac{L}{Dh} + K_{s1} \right) \quad \text{(II-12)}$$

Empleando las relaciones de continuidad es posible, introduciendo razones de áreas y/o coeficientes de contracción adecuados expresar K_{s2} :

$$\frac{V_2^2}{2g} = K_{s2} \frac{V^2}{2g} \quad \text{(II-13)}$$

Se define ahora un coeficiente global K_s :

$$K_s = K_{s1} + K_{s2} - 1 \quad \text{(II-14)}$$

La ec. (II-12) se simplifica a:

$$\frac{Z}{g} \frac{dV}{dt} = Z - \frac{V^2}{2g} \left(f \frac{L}{Dh} + K_s \right) \quad \text{(II-15)}$$

II.1.2 FORMULACIÓN GENERAL DEL MODELO DE COLUMNA RÍGIDA

Es una versión del teorema de Bernoulli tomando en cuenta aceleraciones y pérdidas de carga:

$$Z + \frac{V^2}{2g} = K_s \frac{V^2}{2g} + \frac{fL}{D} \frac{V^2}{2g} + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \quad \text{(II-16)}$$

(Ver Figura II-3)

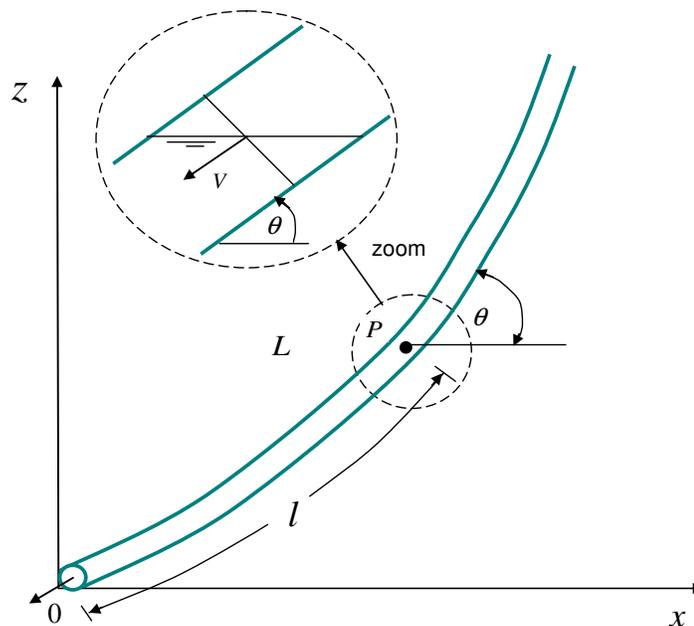


Figura II-3. Esquema general del vaciado de un ducto

Donde:

t: Tiempo elapsado

g: Aceleración de gravedad

Z: Cota de la superficie libre

V: Velocidad en el tubo

L: Longitud del tubo

D: Diámetro del ducto, supuesto constante

f: Factor de fricción de Darcy

Ks': Coeficiente conjunto de pérdidas de carga y variaciones de presión a la salida del ducto. Éste puede englobar efectos muy variados:

- Válvulas

- Toberas

- Anillos disipadores

La velocidad puede expresarse como:

$$V = -\frac{dL}{dt} \quad \text{(II-17)}$$

La longitud instantánea del tubo se relaciona con la cota mediante:

$$Z = \int_0^L \sin(\theta)dL \quad \text{(II-18)}$$

En numerosos casos reales puede adoptarse un valor medio de la pendiente y por lo tanto de $\theta = \theta_0 = \text{Cte.}$ y entonces:

$$Z = \sin(\theta_0)L \quad \text{(II-19)}$$

Se designa, por conveniencia:

$$K_s = K_s' - 1 \quad \text{(II-20)}$$

Introduciendo las relaciones (II-19) y (II-20) en (II-16):

$$\sin(\theta_0)L = \frac{V^2}{2g} \left(K_s + \frac{fL}{D} \right) + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \quad \text{(II-21)}$$

O bien, introduciendo la ec. (II-17):

$$\sin(\theta_0)L = \left(K_s + \frac{fL}{D} \right) \frac{1}{2g} \left(\frac{dL}{dt} \right)^2 - \frac{L}{g} \frac{d^2L}{dt^2} \quad \text{(II-22)}$$

Como esta ecuación corresponde a la aproximación de la columna rígida, V varía con el tiempo, pero es, para un instante dado, constante a lo largo del tubo.

Por otra parte, f puede ser variable debido a que la velocidad también varía. En una primera aproximación se considerará $f = f_0$ como un valor constante convenientemente definido.

CONDICIONES INICIALES:

Para $t = 0$; $L = L_0$; $V = 0$

II.1.3 VERSIÓN EN VARIABLES ADIMENSIONALES

Ya que las ecuaciones del movimiento son dadas, es ventajoso emplear el análisis inspeccional (Fuentes [20]).

Se requiere una longitud L_0 y un tiempo de referencia τ para formar las variables adimensionales (*):

$$L^* = \frac{L}{L_0}$$

$$t^* = \frac{t}{\tau}$$

Introduciendo en la ec.(II-22) y simplificando:

$$L^* = \left(K_s + \frac{f_0 L_0}{D} L^* \right) \frac{L_0}{2g \sin(\theta_0) \tau^2} \left(\frac{dL^*}{dt^*} \right)^2 - \frac{L_0}{g \sin(\theta_0) \tau^2} L^* \frac{d^2 L^*}{dt^{*2}}$$

Por lo tanto, la versión más conveniente para el tiempo de referencia τ es:

$$\tau = \sqrt{\frac{L_0}{2g \sin(\theta_0)}} \quad \text{(II-23)}$$

Se designa:

$$K_f = \frac{f_0 L_0}{D}$$

La ec. (II-22) se simplifica a la versión adimensional siguiente:

$$L^* = \left(K_s + K_f L^* \right) \left(\frac{dL^*}{dt^*} \right)^2 - 2L^* \frac{d^2 L^*}{dt^{*2}} \quad \text{(II-24)}$$

Retomando la ec. (II-17):

$$V = -\frac{dL}{dt} = -\frac{L_0}{\tau} \frac{dL^*}{dt^*} = -\sqrt{2gL_0 \sin(\theta_0)} \frac{dL^*}{dt^*}$$

Entonces, la velocidad adimensional resulta:

$$V^* = -\frac{dL^*}{dt^*} = \frac{V}{\sqrt{2gL_0 \sin(\theta_0)}} \quad \text{(II-25)}$$

La velocidad de referencia es entonces, naturalmente:

$$V_0 = \sqrt{2gL_0 \sin(\theta_0)} = \sqrt{2gZ_0}$$

Esta última expresión es la de Torricelli para un tanque provisto de un orificio sometido a una carga Z_0 .

CONDICIONES INICIALES:

Para $t^* = 0$; $L^* = 1$; $V^* = 0$

II.2 MODELO CUASISTÁTICO

Este caso se tratará antes del caso general debido a su simpleza. Las condiciones para poder despreciar la inercia se darán más adelante.

II.2.1 CASO GENERAL: CONSIDERANDO FRICCIÓN Y SINGULARIDADES

VELOCIDADES:

De la ec.(II-24):

$$L^* = (K_s + K_f L^*) \left(\frac{dL^*}{dt^*} \right)^2 \quad \text{(II-26)}$$

$$V^* = -\frac{dL^*}{dt^*} = \frac{1}{\sqrt{K_f + \frac{K_s}{L^*}}} \quad \text{(II-27)}$$

Debido a la ausencia de inercia, la columna líquida se acelera instantáneamente y no es posible imponer que al inicio del movimiento la velocidad sea nula.

En la Figura II-4 se muestra una gráfica de la evolución de la velocidad adimensional V^* durante el vaciado. En ella se observa que al inicio del fenómeno la velocidad no es nula y disminuye suavemente hasta llegar a cero cuando el tubo se ha vaciado completamente ($L^*=0$).

TIEMPO DE VACIADO:

Para $t^* = 0$

$$V^*(t^* = 0) = \frac{1}{\sqrt{K_f + K_s}}$$

La ec. (II-27) puede integrarse directamente separando las variables:

$$-t^* + C = \int \sqrt{K_f + \frac{K_s}{L^*}} dL^* \quad \text{(II-28)}$$

La integral indicada posee primitiva elemental (Spiegel [32]):

$$-t^* + C = \sqrt{K_f} \left\{ \sqrt{L^*} \sqrt{L^* + \frac{K_s}{K_f}} + \frac{K_s}{K_f} \operatorname{Ln} \left(\sqrt{L^*} + \sqrt{L^* + \frac{K_s}{K_f}} \right) \right\}$$

Imponiendo $t^* = 0$; $L^* = 1$ se encuentra:

$$C = \sqrt{K_f} \left\{ \sqrt{1 + \frac{K_s}{K_f}} + \frac{K_s}{K_f} \operatorname{Ln} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{K_s}{K_f}} \right) \right\}$$

Finalmente:

$$t^* = \sqrt{K_f} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + \frac{K_s}{K_f}} + \frac{K_s}{K_f} \log \left(1 + \sqrt{1 + \frac{K_s}{K_f}} \right) \\ -\sqrt{L^*} \sqrt{L^* + \frac{K_s}{K_f}} - \frac{K_s}{K_f} \operatorname{Ln} \left(\sqrt{L^*} + \sqrt{L^* + \frac{K_s}{K_f}} \right) \end{array} \right\} \quad \text{(II-29)}$$

Esta relación entrega en forma directa el largo de la columna en función del tiempo. En la Figura II-5 se muestra una gráfica de la dependencia del tiempo adimensional de vaciado t^* con el largo adimensional L^* .

TIEMPO TOTAL DE VACIADO:

Se obtiene de la ec. (II-29) imponiendo $L^* = 0$ y simplificando:

$$T^* = \sqrt{K_f + K_s} + \frac{K_s}{\sqrt{K_f}} \operatorname{Ln} \left(\sqrt{\frac{K_f}{K_s}} + \sqrt{1 + \frac{K_f}{K_s}} \right) \quad \text{(II-30)}$$

En la Figura II-6 se puede apreciar la dependencia del tiempo total adimensional de vaciado T^* en función de los coeficientes de pérdidas de carga singulares y friccionales, K_s y K_f respectivamente.

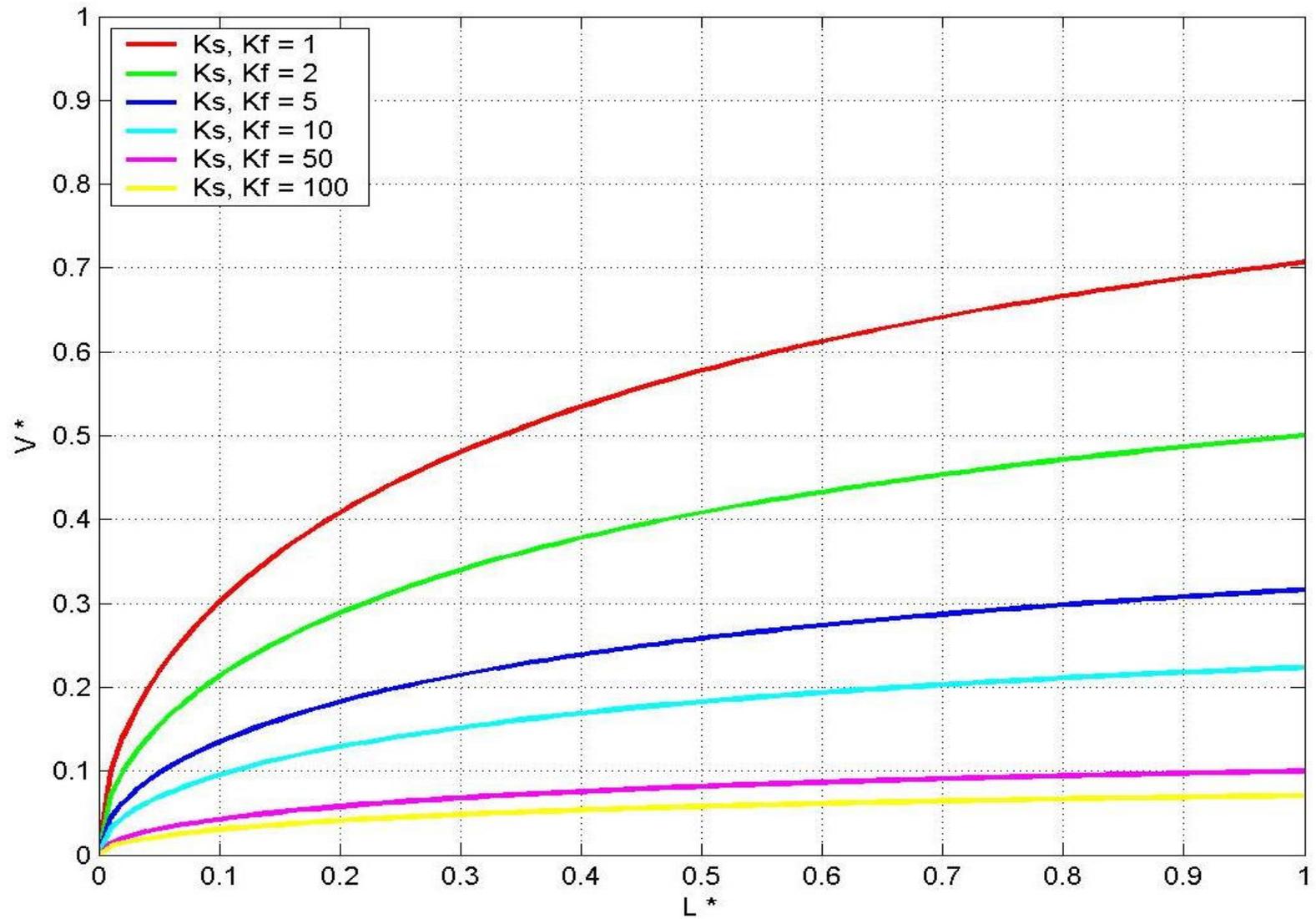


Figura II-4: Velocidades

Modelo Cuasiestático (Considerando fricción y singularidades)

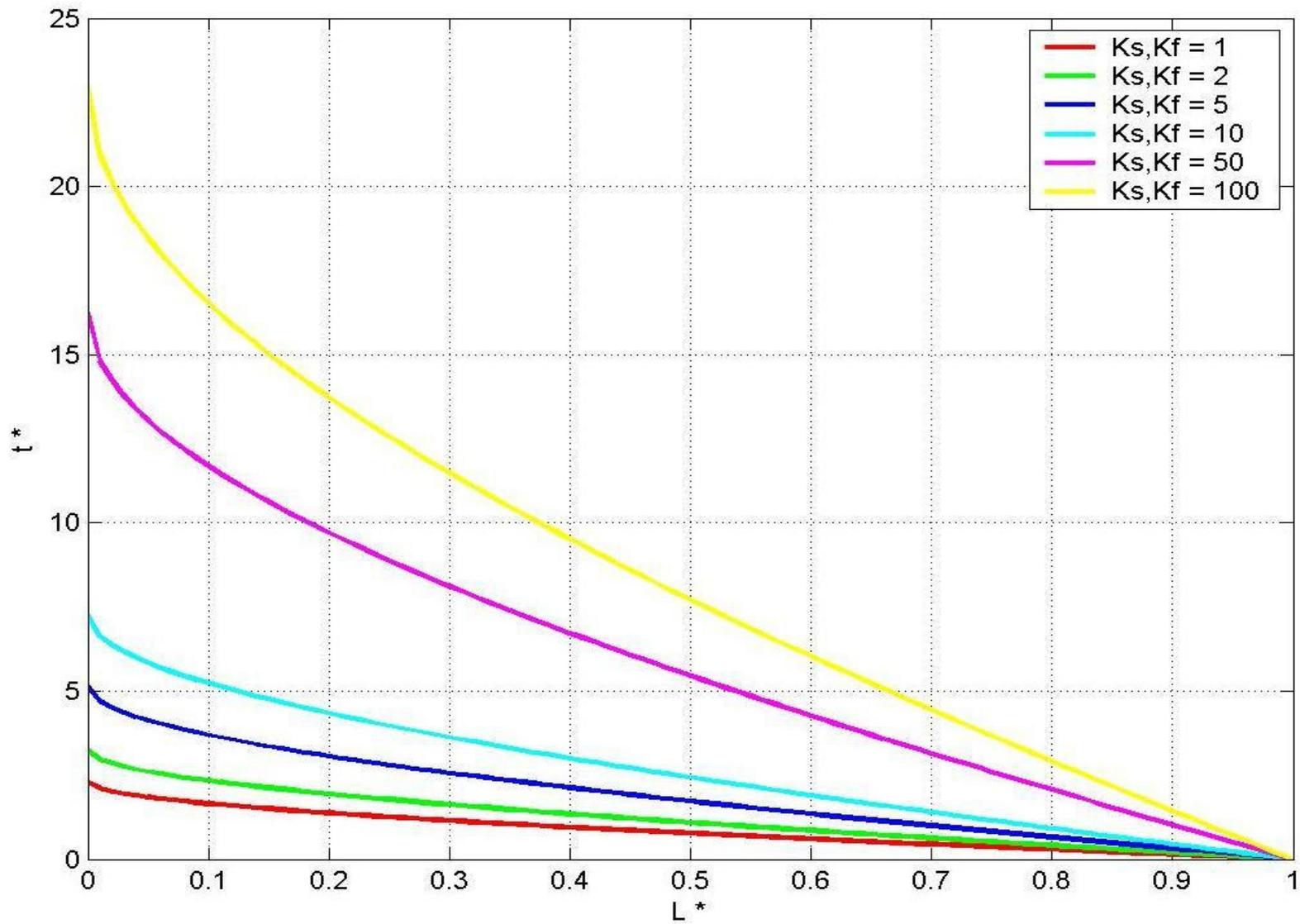


Figura II-5: Tiempo de Vaciado

Modelo Cuasiestático (Considerando fricción y singularidades)

II.2.2 CASO LÍMITE A: AUSENCIA DE FRICCIÓN

VELOCIDADES

Haciendo tender a cero K_f en la ec. (II-27) se encuentra:

$$V^* = \sqrt{\frac{L^*}{K_s}} \quad \text{(II-31)}$$

En la Figura II-7 se muestra una gráfica de la evolución de la velocidad adimensional V^* durante el vaciado cuando las pérdidas friccionales en el sistema son despreciables.

TIEMPO DE VACIADO

Haciendo tender a cero K_f en la ec. (II-28) se tiene que:

$$-t^* + C = \int \sqrt{\frac{K_s}{L^*}} dL^*$$

La integral indicada posee primitiva elemental (Spiegel [32])

$$-t^* + C = 2\sqrt{K_s} \sqrt{L^*}$$

Imponiendo $t^* = 0$; $L^* = 1$ se encuentra:

$$C = 2\sqrt{K_s}$$

Finalmente:

$$t^* = 2\sqrt{K_s} (1 - \sqrt{L^*}) \quad \text{(II-32)}$$

Esta relación entrega en forma directa el largo de la columna en función del tiempo. En la Figura II-8 se gráfica la dependencia del tiempo adimensional de vaciado t^* con el largo adimensional de la columna L^* .

TIEMPO TOTAL DE VACIADO

Haciendo tender a cero K_f en la ec.(II-30) se encuentra:

$$T^* = 2\sqrt{K_s} \quad \text{(II-33)}$$

En la Figura II-9 se puede apreciar la dependencia del tiempo total adimensional de vaciado T^* en función del coeficiente de pérdida singular K_s .

II.2.3 CASO LÍMITE B: SINGULARIDADES DESPRECIABLES

VELOCIDADES:

Haciendo tender a cero K_s en la ec. (II-27) se encuentra:

$$V^* = \sqrt{\frac{1}{K_f}} \quad \text{(II-34)}$$

Esta relación muestra que las velocidades alcanzadas por la columna son constantes a lo largo del fenómeno cuando las singularidades son despreciables, esto se muestra en la Figura II-10.

TIEMPO DE VACIADO:

Haciendo tender a cero K_s en la ec. (II-29) se encuentra:

$$t^* = \sqrt{K_f}(1 - L^*) \quad \text{(II-35)}$$

Esta relación entrega en forma directa el largo de la columna en función del tiempo. En la Figura II-11 se gráfica la dependencia del tiempo adimensional de vaciado t^* con el largo adimensional de la columna L^* .

TIEMPO TOTAL DE VACIADO:

Haciendo tender a cero K_s en la ec. (II-30) se encuentra:

$$T^* = \sqrt{K_f} \quad \text{(II-36)}$$

En la Figura II-12 se puede apreciar la dependencia del tiempo total adimensional de vaciado T^* en función del coeficiente de pérdida friccional K_f .

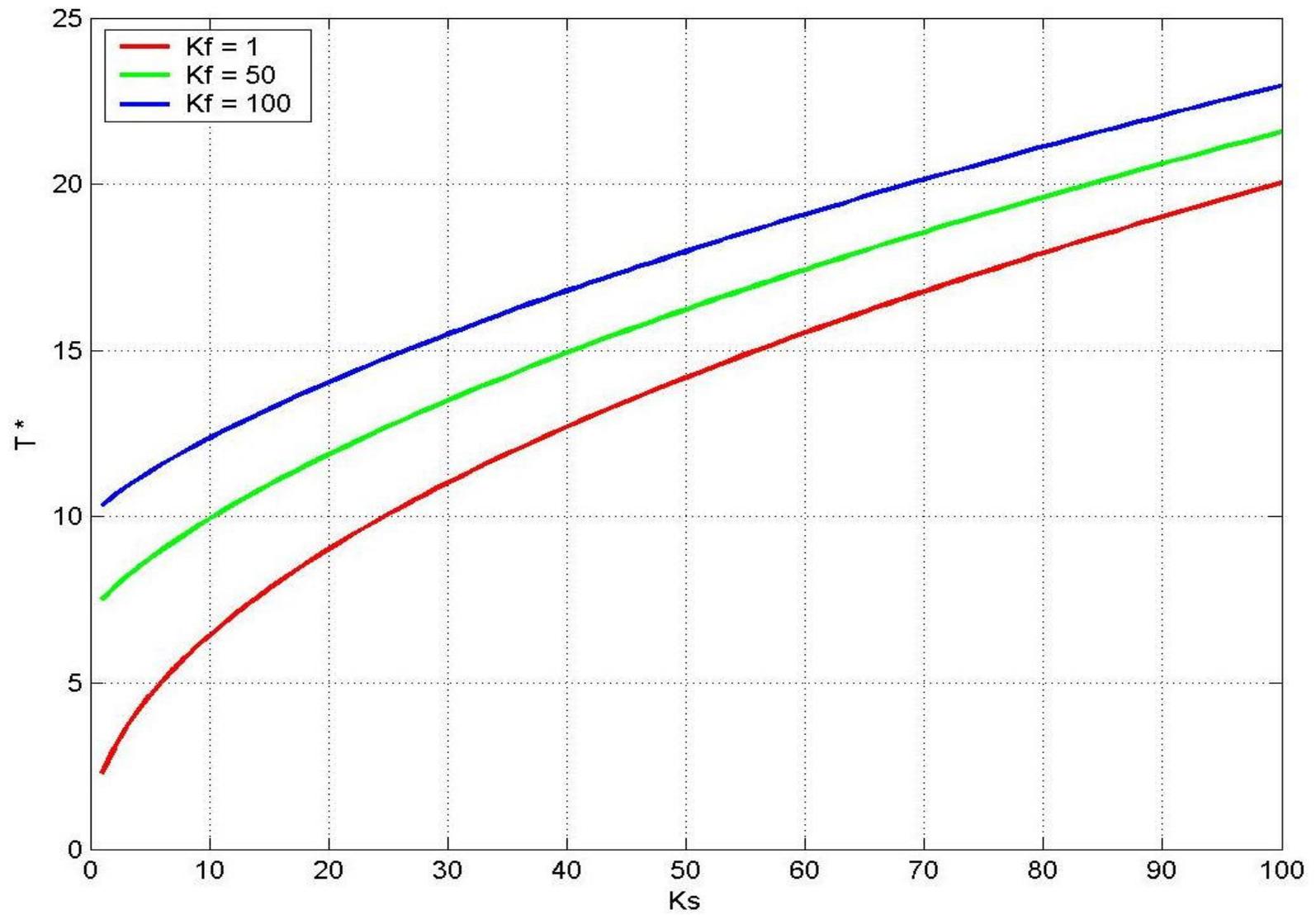


Figura II-6: Tiempo total de Vaciado

Modelo Cuasiestático (Considerando fricción y singularidades)

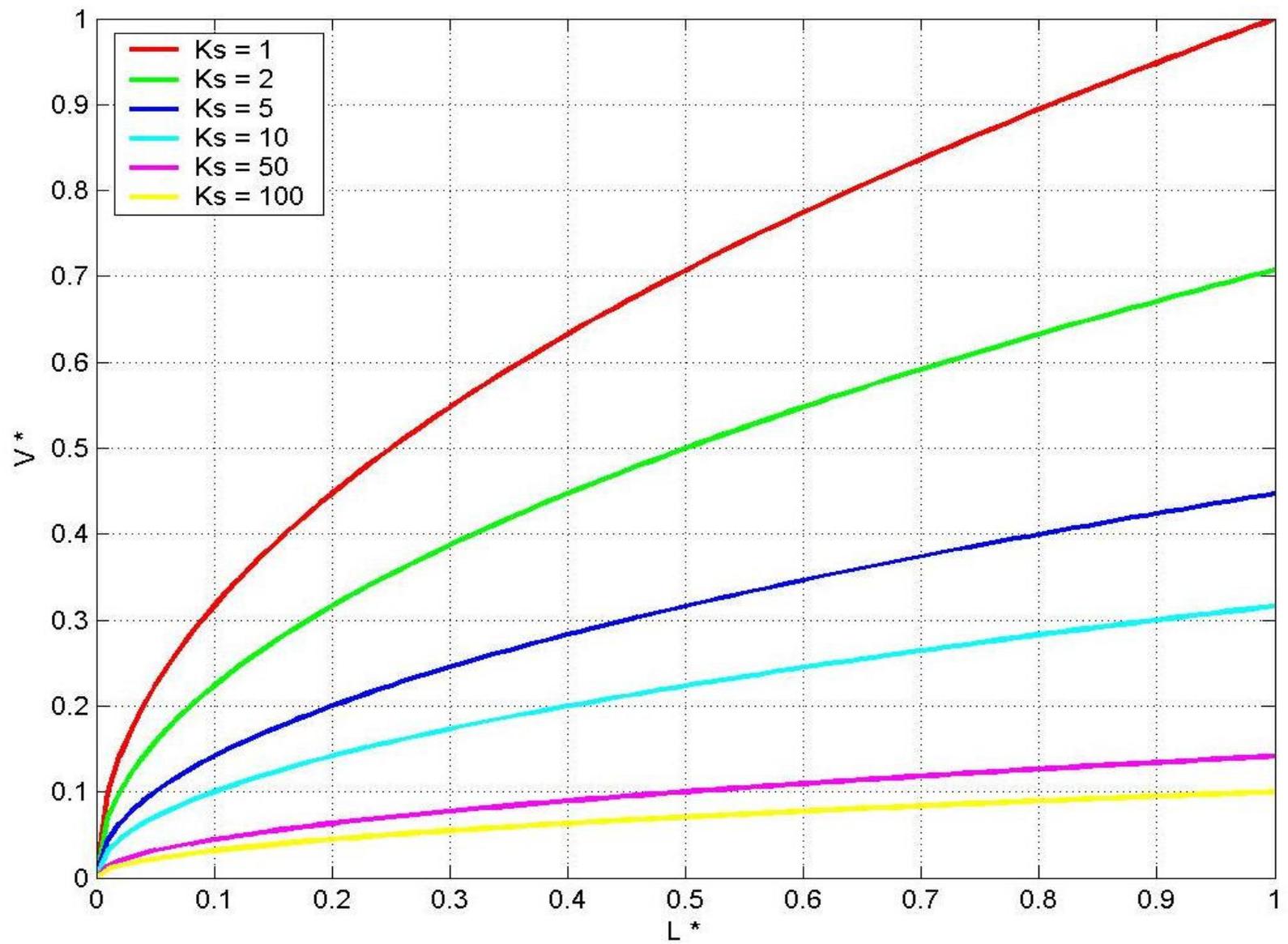


Figura II-7: Velocidad

Modelo Cuasiestático (Ausencia de fricción)

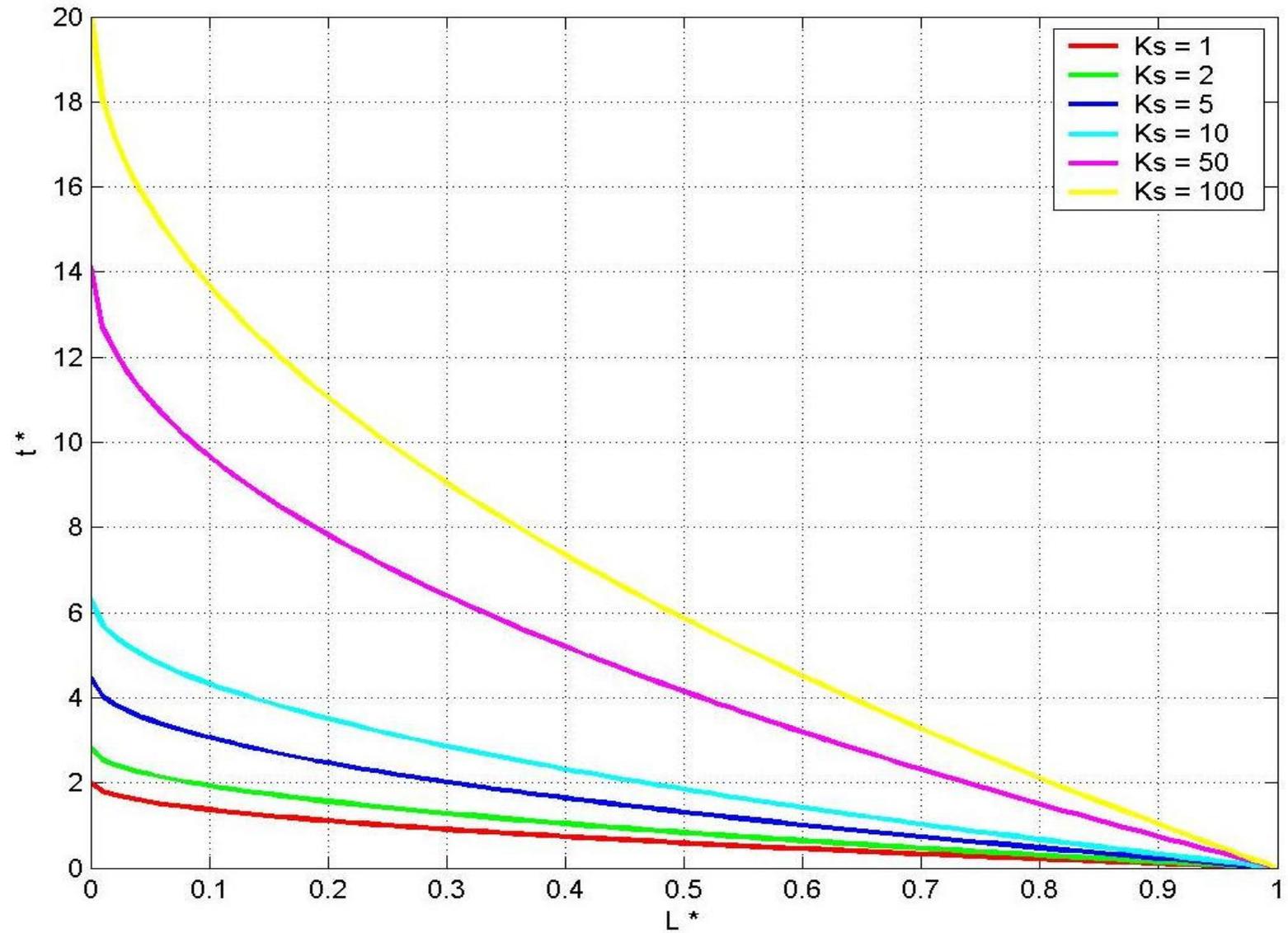


Figura II-8: Tiempo de Vaciado
Modelo Cuasiestático (Ausencia de fricción)

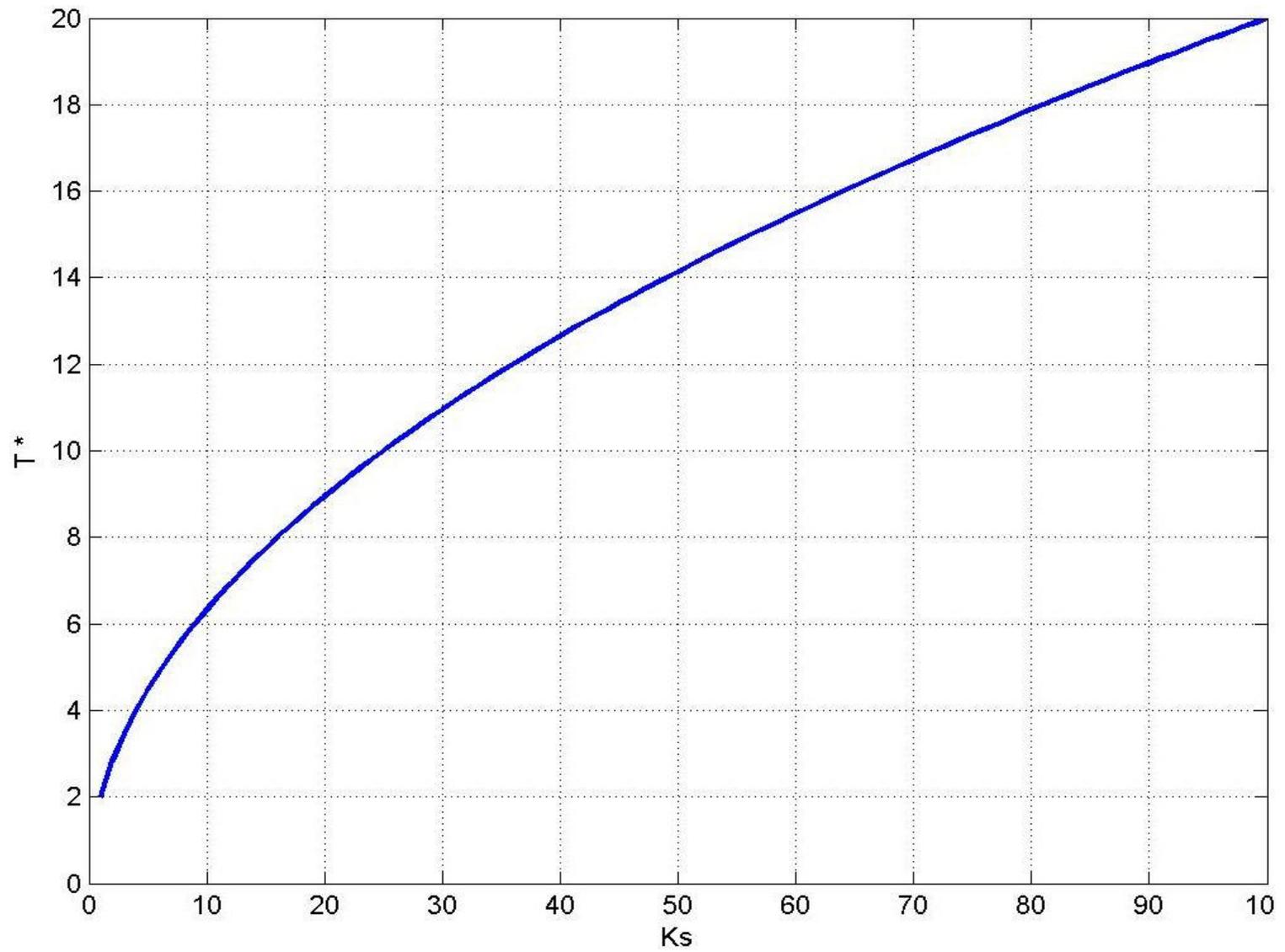


Figura II-9: Tiempo total de Vaciado
Modelo Cuasiestático (Ausencia de fricción)

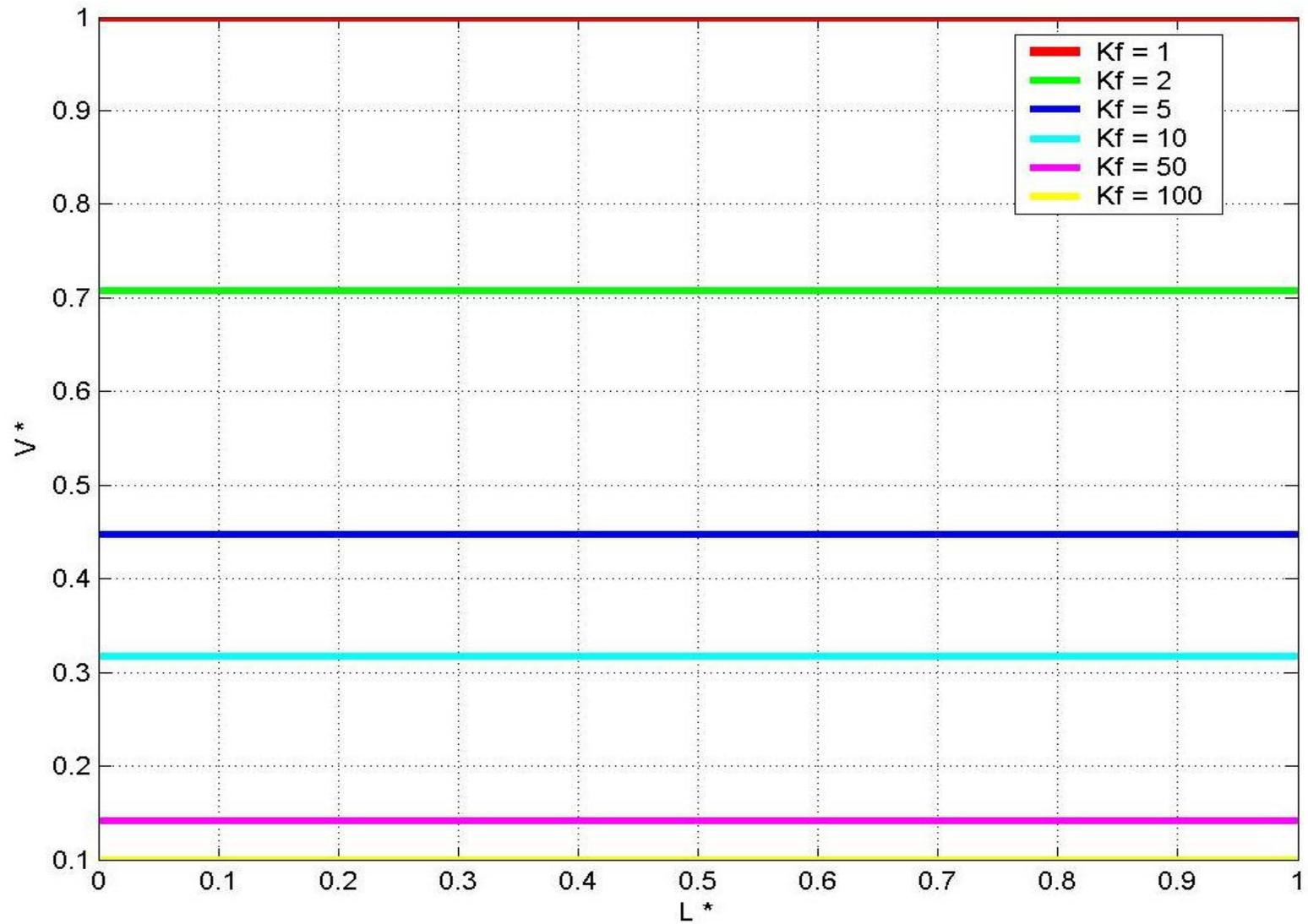


Figura II-10: Velocidad

Modelo Cuasiestático (Ausencia de Singularidades)

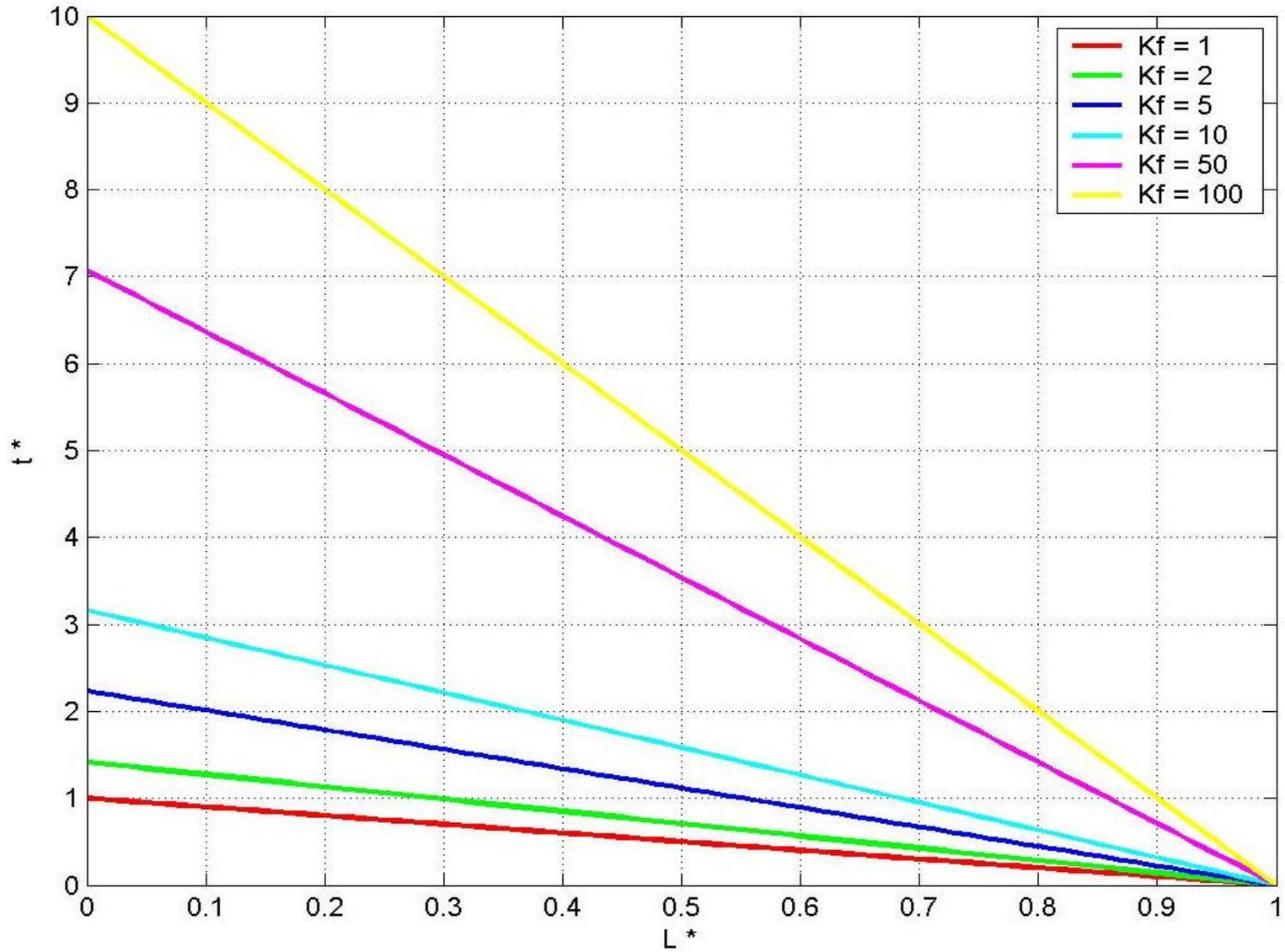


Figura II-11: Tiempo de Vaciado
Modelo Cuasiestático (Ausencia de Singularidades)

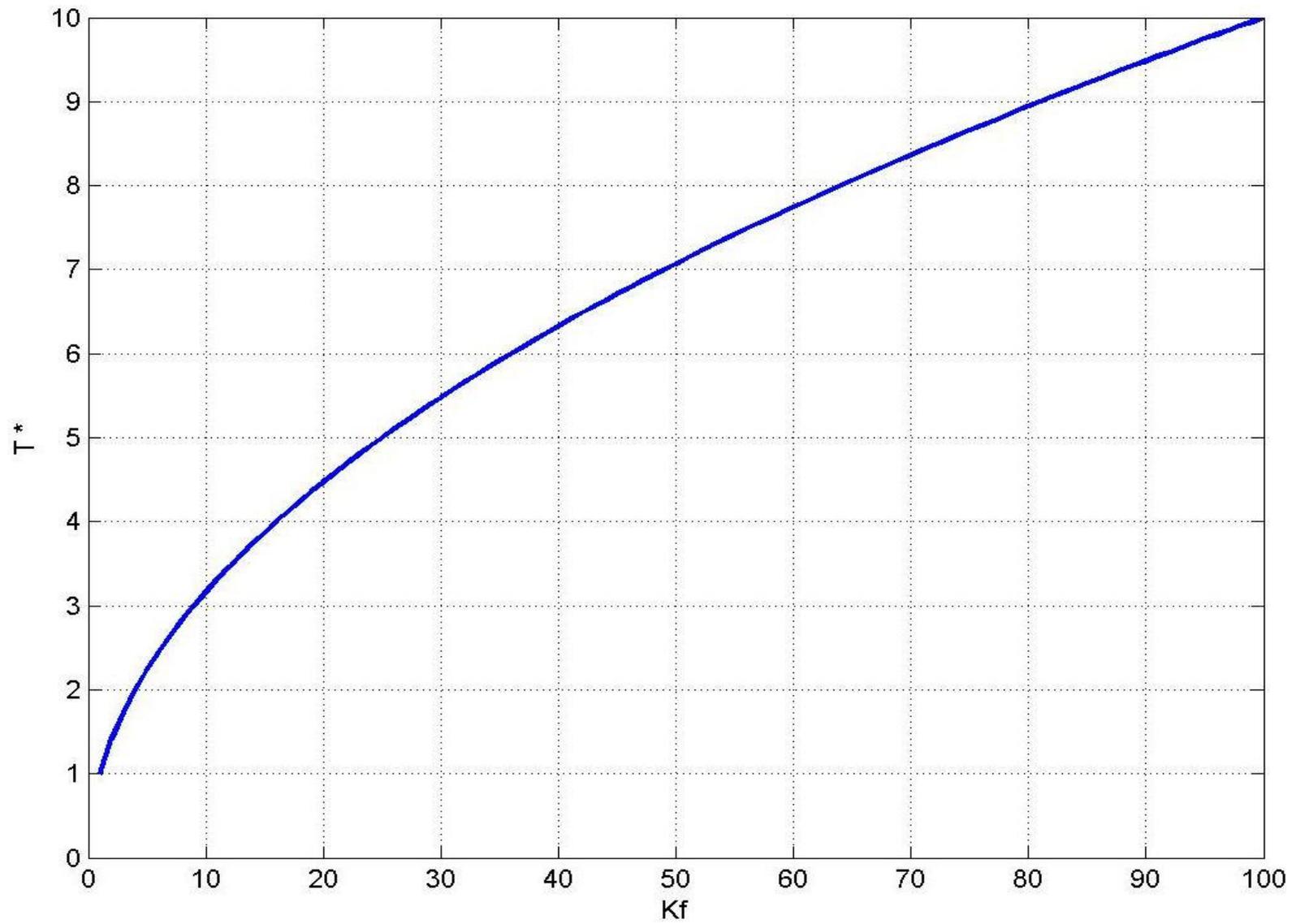


Figura II-12: Tiempo total de Vaciado
Modelo Cuasiestático (Ausencia de Singularidades)

II.3 MODELO INERCIAL RÍGIDO

II.3.1 CASO GENERAL: CONSIDERANDO FRICCIÓN Y SINGULARIDADES

Ahora se tratará el caso general en que K_f y K_s son diferentes de cero.

VELOCIDADES:

En esta situación vale la ec. (II-24) del Capítulo II:

$$L^* = (K_s + K_f L^*) \left(\frac{dL^*}{dt^*} \right)^2 - 2L^* \frac{d^2 L^*}{dt^{*2}} \quad (\text{II-37})$$

La velocidad adimensional está definida por la ec.(II-25) del Capítulo II:

$$V^* = -\frac{dL^*}{dt^*} = \frac{V}{\sqrt{2gL_0 \sin(\theta_0)}} \quad (\text{II-38})$$

Las condiciones iniciales son:

$$t^* = 0; L^* = 1; \frac{dL^*}{dt^*} = -V^* = 0$$

Se observa que la ec. (II-37) es no lineal en $V^* = -dL^*/dt^*$. Pero es posible llevarla a una variante lineal empleando una transformación sencilla:

$$2 \frac{d^2 L^*}{dt^{*2}} = 2 \frac{d}{dt^*} \left(\frac{dL^*}{dt^*} \right) = -2 \frac{dV^*}{dt^*} = -2 \frac{dV^*}{dL^*} \frac{dL^*}{dt^*} = 2V^* \frac{dV^*}{dL^*} = \frac{dV^{*2}}{dL^*}$$

Introduciendo en la ec. (II-37) y reordenando:

$$\frac{dV^{*2}}{dL^*} - \left(K_f + \frac{K_s}{L^*} \right) V^{*2} = -1 \quad (\text{II-39})$$

Esta relación transformada es lineal en V^{*2} respecto la longitud adimensional del tubo L^* .

Por otra parte:

$$V^{*2} = \frac{V^2}{2gZ_0}$$

Entonces V^{*2} tiene una interpretación física sencilla: representa la energía cinética por unidad de peso instantánea de una partícula situada en la superficie libre respecto la energía potencial por unidad de peso que poseía la misma partícula al inicio del movimiento.

Las condiciones iniciales son ahora:

$$L^* = 1; V^{*2} = 0$$

La ec. (II-39), siendo lineal, se puede integrar en forma exacta (Spiegel [32]):

$$V^{*2} \exp\left(\int -\left(K_f + \frac{K_s}{L^*}\right)dL^*\right) = -\int \exp\left(-\int\left(K_f + \frac{K_s}{L^*}\right)dL^*\right)dL^* + C$$

C es una constante de integración.

Resolviendo las integrales indicadas y despejando V^{*2} se encuentra:

$$V^{*2} = -\exp(K_f L^*)L^{*K_s} \int \exp(-K_f L^*)L^{*-K_s} dL^* + C \exp(K_f L^*)L^{*K_s}$$

O bien:

$$V^{*2} = -\exp(K_f L^*)L^{*K_s} \left[\int \exp(-K_f L^*)L^{*-K_s} dL^* - C \right]$$

Imponiendo la condición inicial se encuentra:

$$C = \int \exp(-K_f L^*)L^{*-K_s} dL^*$$

Finalmente:

$$V^{*2} = \exp(K_f L^*) L^{*K_s} \int_{L^*}^1 \exp(-K_f L^*) L^{*-K_s} dL^* \quad \text{(II-40)}$$

Esta relación explicita la dependencia que existe entre la velocidad adimensional V^* y la longitud adimensional L^* para valores arbitrarios dados de los parámetros adimensionales K_f y K_s :

$$V^* = F(L^*, K_f, K_s).$$

La variación de V^* con L^* y algunos valores de K_s y K_f puede verse en la Figura II-13. Las curvas arrojan velocidad cero para el inicio y el fin del vaciado, por lo tanto, ellas ostentan un máximo, L^*_0 y V^*_0 . En dicho punto se cumple que:

$$\frac{dV^{*2}}{dL^*} = 0$$

Reemplazando lo anterior en la ec. (II-39), se tiene la siguiente relación entre la velocidad adimensional y el largo adimensional en dicho punto:

$$V^{*2}_0 = \frac{1}{K_f + \frac{K_s}{L^*_0}}$$

Los valores de L^*_0 y V^*_0 sólo se puede encontrar por tanteo.

Además, en la Figura II-13 se observa una línea envolvente calculada para valores nulos de los coeficientes de pérdida.

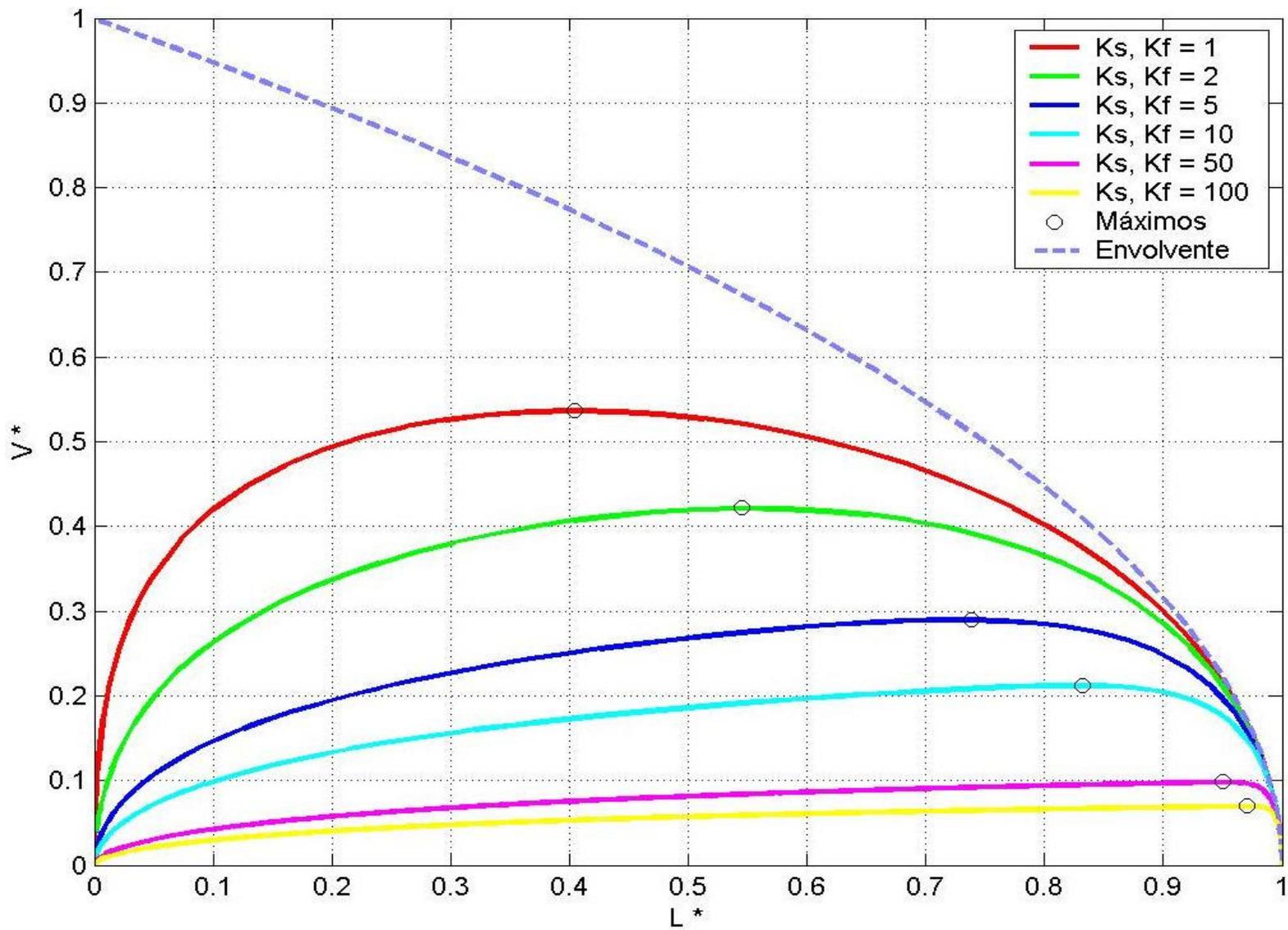


Figura II-13: Velocidad

Modelo Inercial Rígido (Considerando fricción y singularidades)

TIEMPO DE VACIADO:

El tiempo adimensional de vaciado t^* puede determinarse ahora de la ec. (II-38):

$$V^* = -\frac{dL^*}{dt^*}$$

Entonces:

$$t^* = -\int_1^{L^*} \frac{dL^*}{V^*} = \int_{L^*}^1 \frac{dL^*}{V^*} \quad \text{(II-41)}$$

O bien, combinando con la ec. (II-40):

$$t^* = \int_{L^*}^1 \frac{dL^*}{\sqrt{\exp(K_f L^*) L^{*K_s} \int_{L^*}^1 \exp(-K_f L^*) L^{*-K_s} dL^*}} \quad \text{(II-42)}$$

La variación de t^* con L^* para algunos valores de K_s y K_f puede verse en la Figura II-14.

TIEMPO TOTAL DE VACIADO:

El tiempo adimensional total de vaciado T^* vale:

$$T^* = \int_0^1 \frac{dL^*}{V^*} \quad \text{(II-43)}$$

O bien, de la ec. (II-42):

$$T^* = \int_0^1 \frac{dL^*}{\sqrt{\exp(K_f L^*) L^{*K_s} \int_{L^*}^1 \exp(-K_f L^*) L^{*-K_s} dL^*}} \quad \text{(II-44)}$$

Como aparentemente la integral que aparece en la relación (II-40) no tiene primitiva elemental es necesario recurrir al cálculo numérico para estudiar V^* , t^* y T^* . En la Figura II-14 y Figura II-15 se muestra la variación de t^* con L^* y la de T^* para algunos valores de K_s y K_f respectivamente.

Es de interés también estudiar algunos casos particulares límites.

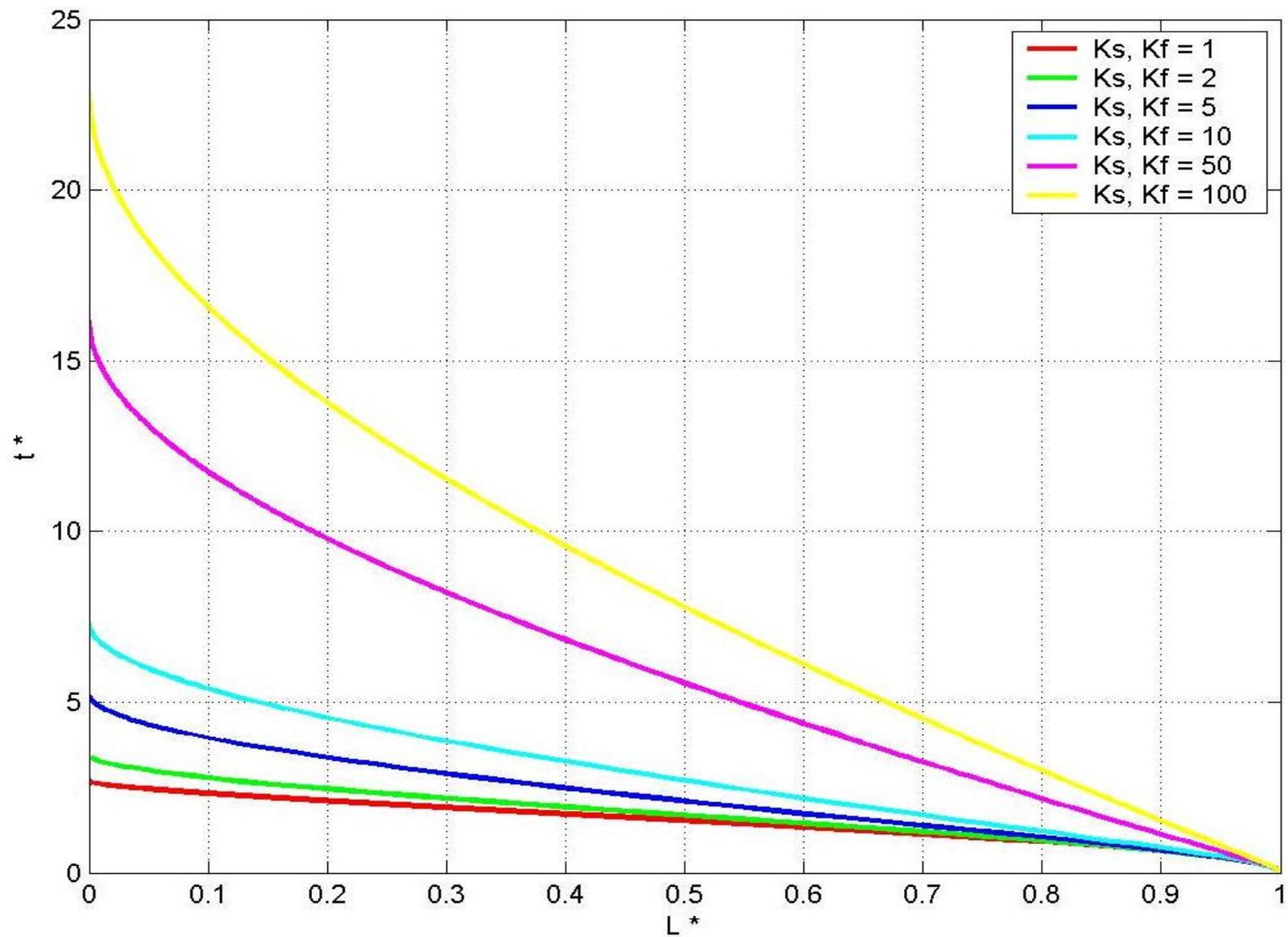


Figura II-14: Tiempo de vaciado

Modelo Inercial Rígido (Considerando fricción y singularidades)

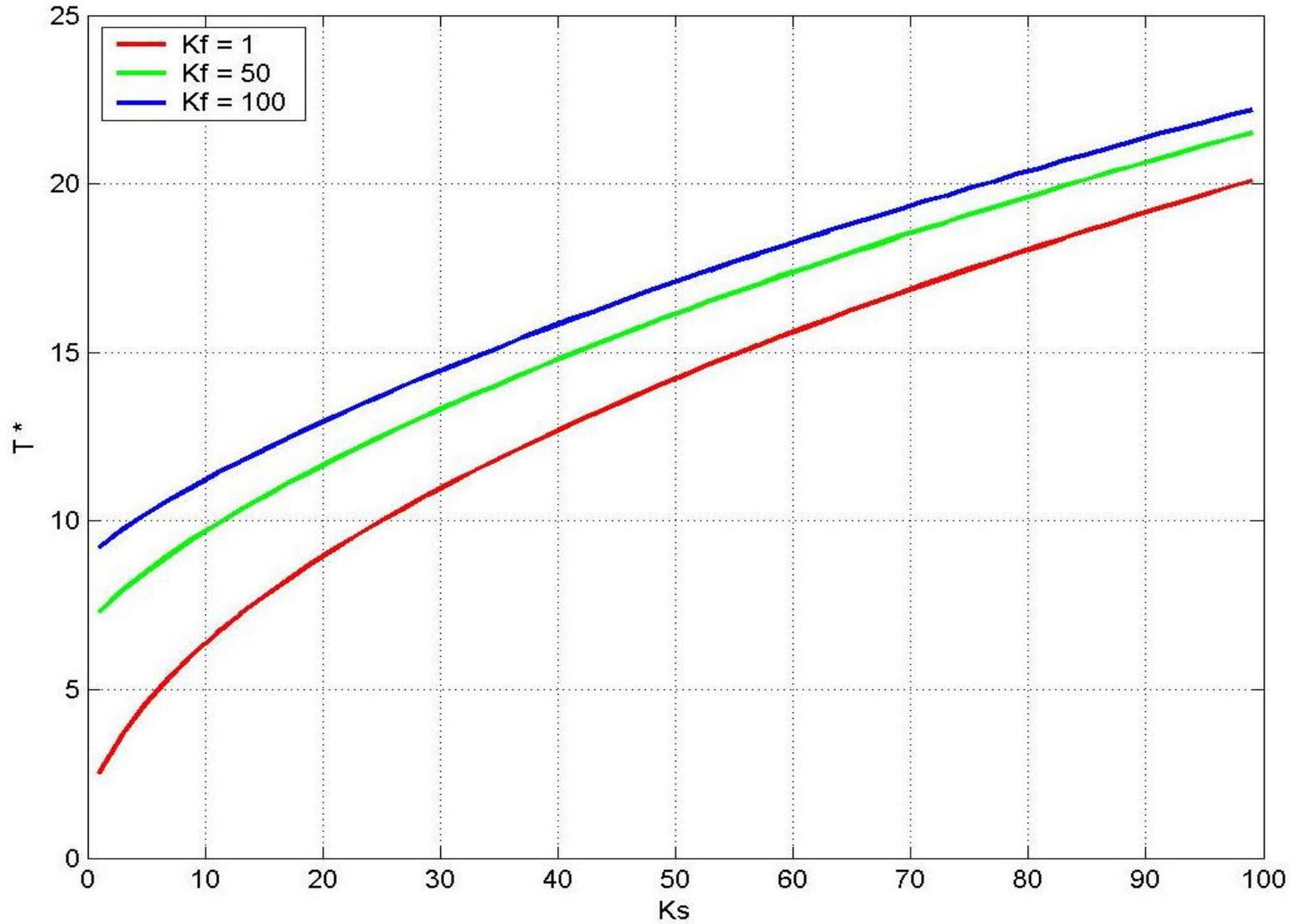


Figura II-15: Tiempo total de vaciado

Modelo Inercial Rígido (Considerando fricción y singularidades)

II.3.2 CASO LÍMITE A: AUSENCIA DE FRICCIÓN

Se trata del caso en que $K_f = 0$.

VELOCIDADES:

Entonces, de la ec. (II-40) queda como:

$$V^{*2} = L^{*K_s} \int_{L^*}^1 L^{*-K_s} dL^*$$

Resolviendo la integral:

$$V^* = \frac{1}{\sqrt{1-K_s}} \sqrt{L^* - L^{*K_s}} \quad \text{(II-45)}$$

La variación de V^* con L^* y algunos valores de K_s puede verse en la Figura II-16

Las curvas arrojan velocidad cero para el inicio y el fin del vaciado. Por lo tanto, ellas ostentan un máximo. Su ubicación L^*_o y V^*_o pueden encontrarse fácilmente derivando la ec. (II-45) y reemplazando allí el resultado encontrado Para L^*_o .

El resultado es:

$$K_s > 1$$

$$L^*_o = \frac{1}{K_s^{1/(K_s-1)}}$$

$$V^*_o = \frac{1}{\sqrt{K_s-1}} \sqrt{\frac{1}{K_s^{1/(K_s-1)}} - \frac{1}{K_s^{K_s/(K_s-1)}}$$

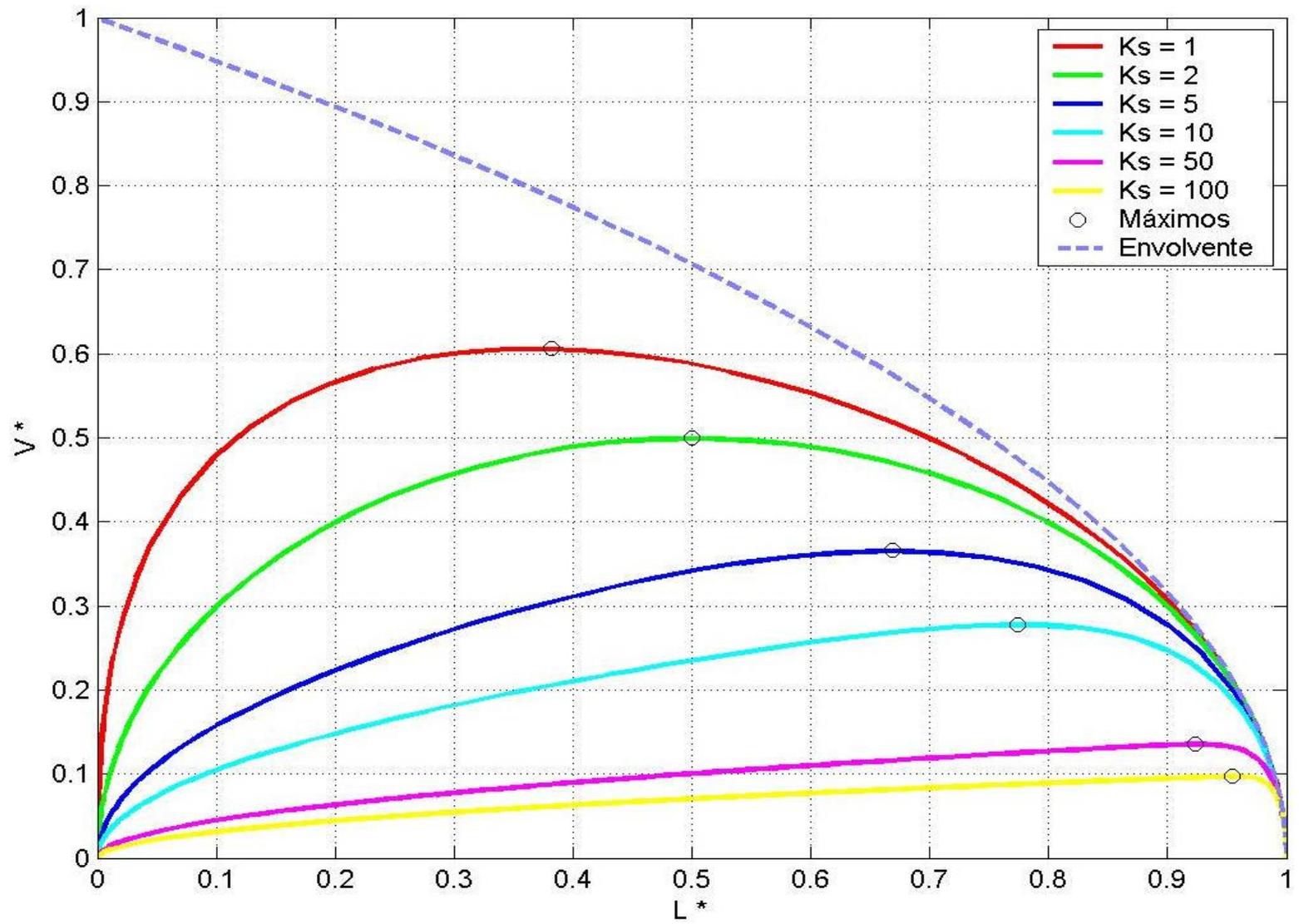


Figura II-16: Velocidad

Modelo Inercial Rígido (Ausencia de fricción)

Es interesante señalar que existe un punto máximo límite: en efecto, si K_s tiende a la unidad, se demuestra mediante pasos al límite que:

$$K_s = 1$$

$$X^*_0 = \frac{1}{e}$$

$$V^*_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

TIEMPO DE VACIADO:

Combinando las ecs. (II-41) y (II-45) se obtiene, para el tiempo adimensional parcial de vaciado t^* :

$$t^* = -\sqrt{K_s - 1} \int_1^{L^*} \frac{dL^*}{\sqrt{L^* - L^{*K_s}}} \quad \text{(II-46)}$$

TIEMPO TOTAL DE VACIADO:

Para el tiempo adimensional total de vaciado T^* :

$$T^* = -\sqrt{K_s - 1} \int_1^0 \frac{dL^*}{\sqrt{L^* - L^{*K_s}}} \quad \text{(II-47)}$$

El tiempo t^* puede calcularse por vía numérica solamente. La variación de t^* con L^* y algunos valores de K_s puede verse en la Figura II-17.

Empero el tiempo T^* total puede expresarse en forma cerrada realizando el siguiente cambio de variables:

$$L^{*K_s-1} = \sin^2 U$$

En efecto, se obtiene:

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{K_s - 1}} 2 \int_0^{\pi/2} (\sin U)^{2m-1} dU = \frac{B(m, n)}{\sqrt{K_s - 1}}$$

En donde B(m,n) es la función Beta de Euler (Spiegel [32]).

En este caso:

$$m = \frac{1}{2} \frac{1}{K_s - 1}$$

$$n = \frac{1}{2}$$

La función Beta puede expresarse (y calcularse) mediante la función Gamma de Euler (Spiegel [32]):

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Entonces:

$$T^* = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{K_s - 1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} \frac{1}{K_s - 1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \frac{K_s}{K_s - 1}\right)} \quad \text{(II-48)}$$

La variación de T* con K_s puede verse en la Figura II-18.

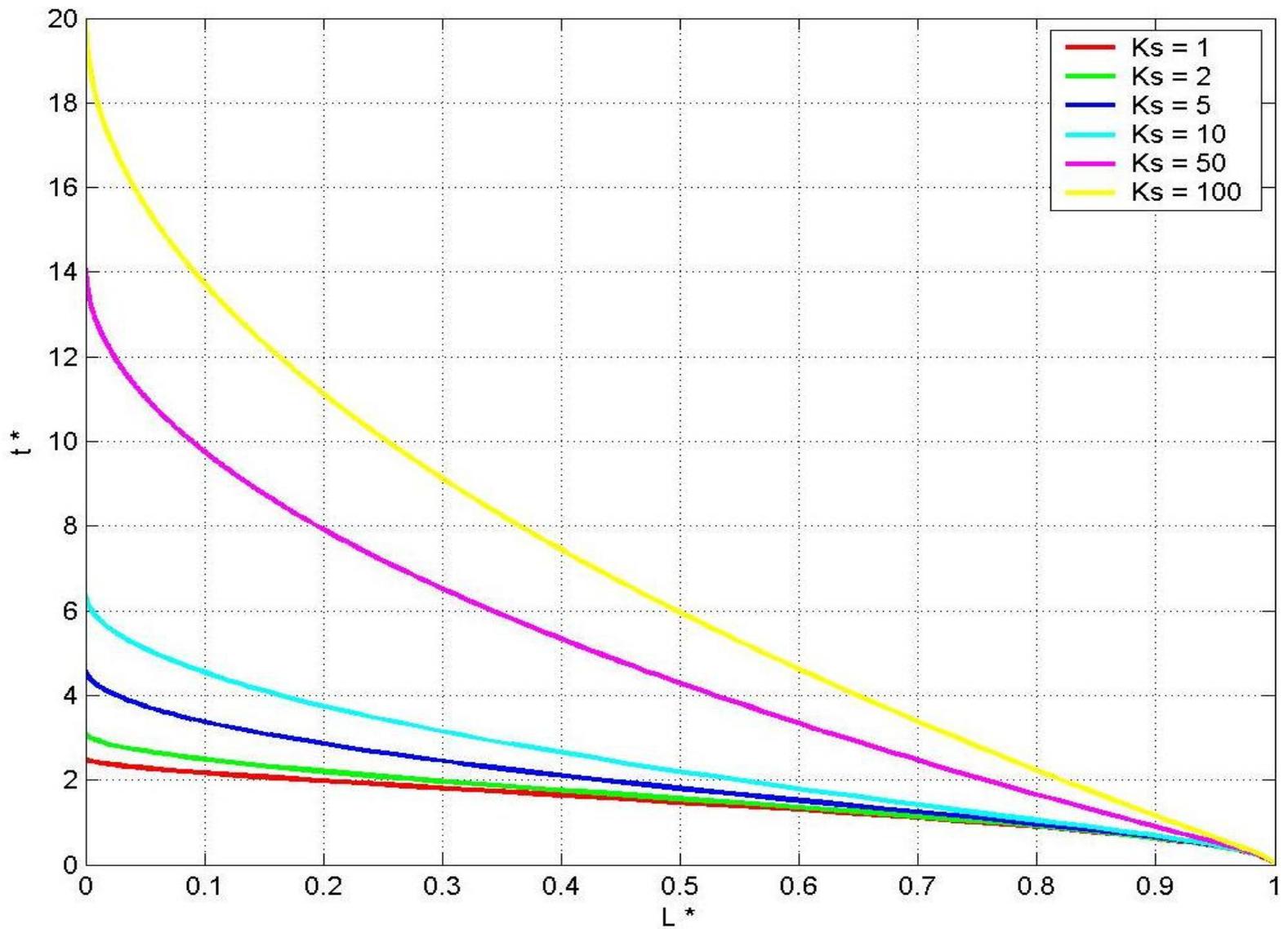


Figura II-17: Tiempo de Vaciado
Modelo Inercial Rígido (Ausencia de fricción)

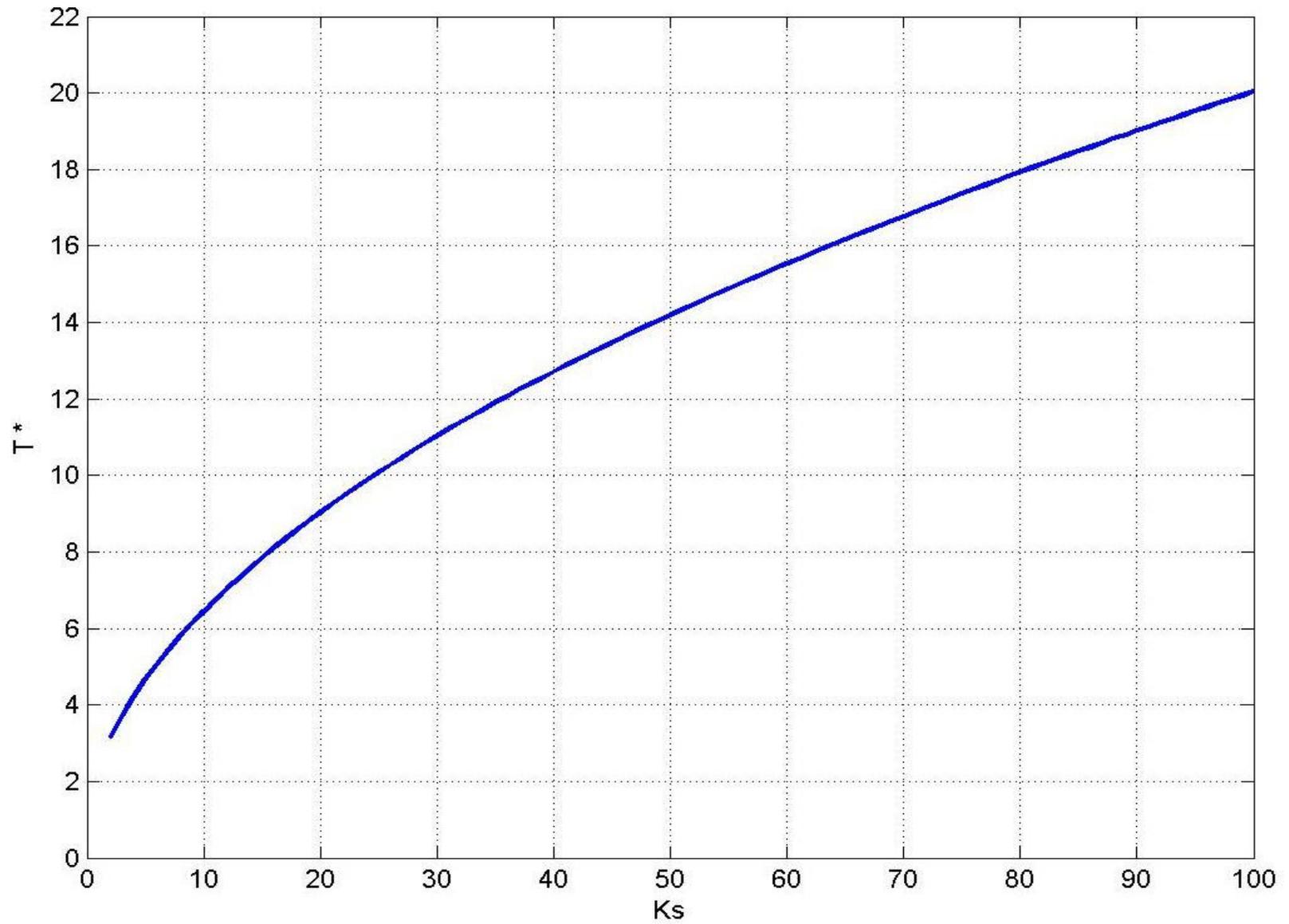


Figura II-18: Tiempo total de Vaciado
Modelo Inercial Rígido (Ausencia de fricción)

II.3.3 CASO LÍMITE B: SINGULARIDADES DESPRECIABLES

En este caso $K_S = 0$.

VELOCIDADES:

De la ec. (II-40):

$$V^{*2} = \exp(K_f L^*) \int_{L^*}^1 \exp(-K_f L^*) dL^*$$

Entonces:

$$V^{*2} = \frac{1}{K_f} (1 - \exp(K_f (L^* - 1))) \quad \text{(II-49)}$$

La variación de V^* con L^* y algunos valores de K_f puede verse en la Figura II-19.

Se ha impuesto como condición de frontera que la velocidad para $L^* = 1$ (inicio del vaciado vale cero). Pero la velocidad al final del vaciado ($L^* = 0$) no es nula:

$$V^{*2} (L^* = 0) = \frac{1}{K_f} (1 - \exp(-K_f))$$

Si $K_f \ll 1$ (fricción despreciable):

$$V^{*2} (L^* = 0) = \frac{1}{K_f} (1 - \exp(-K_f)) \cong \frac{1}{K_f} (1 - (1 - K_f)) = 1$$

Esto significa que se recupera la fórmula de Torricelli:

$$V^* (L^* = 0) = \sqrt{2gZ_0}$$

El resultado es natural, ya que en ausencia de singularidades y de fricción, la columna líquida desciende en caída libre.

Si $K_f \gg 1$ (fricción muy elevada):

$$V^{*2} (L^* = 0) = \frac{1}{K_f} \left(1 - \frac{1}{\exp(K_f)} \right) \rightarrow 0 \text{ al límite}$$

Este resultado es también natural, obviamente.

TIEMPO DE VACIADO:

Combinando las ecs. (II-41) y (II-49) se obtiene para t^* :

$$t^* = \int_1^{L^*} \frac{\sqrt{K_f}}{\sqrt{1 - \exp(K_f(L^* - 1))}} dL^*$$

En este caso es posible calcular el tiempo parcial t^* . Para ello se hacen los siguientes cambios de variables:

$$U = -K_f(L^* - 1)$$

$$\exp(U) = \cosh^2 Z$$

Introduciendo estas nuevas variables se encuentra una expresión que tiene primitiva elemental.

Imponiendo $L^* = 1$; $t^* = 0$ se encuentra:

$$t^* = \frac{2}{\sqrt{K_f}} \operatorname{Ln} \left\{ \exp \left[K_f \frac{(1 - L^*)}{2} \right] - \sqrt{\left[\exp \left(K_f \frac{(1 - L^*)}{2} \right) \right]^2 - 1} \right\} \quad \text{(II-50)}$$

La variación de t^* con L^* y algunos valores de K_f puede verse en la Figura II-20.

TIEMPO TOTAL DE VACIADO:

Entonces el tiempo adimensional T^* total de vaciado se expresa como:

$$T^* = -\frac{2}{\sqrt{K_f}} \operatorname{Ln} \left\{ \exp \left[\frac{K_f}{2} \right] - \sqrt{\left[\exp \left(\frac{K_f}{2} \right) \right]^2 - 1} \right\} \quad \text{(II-51)}$$

La variación de T^* con K_f puede verse en la Figura II-21.

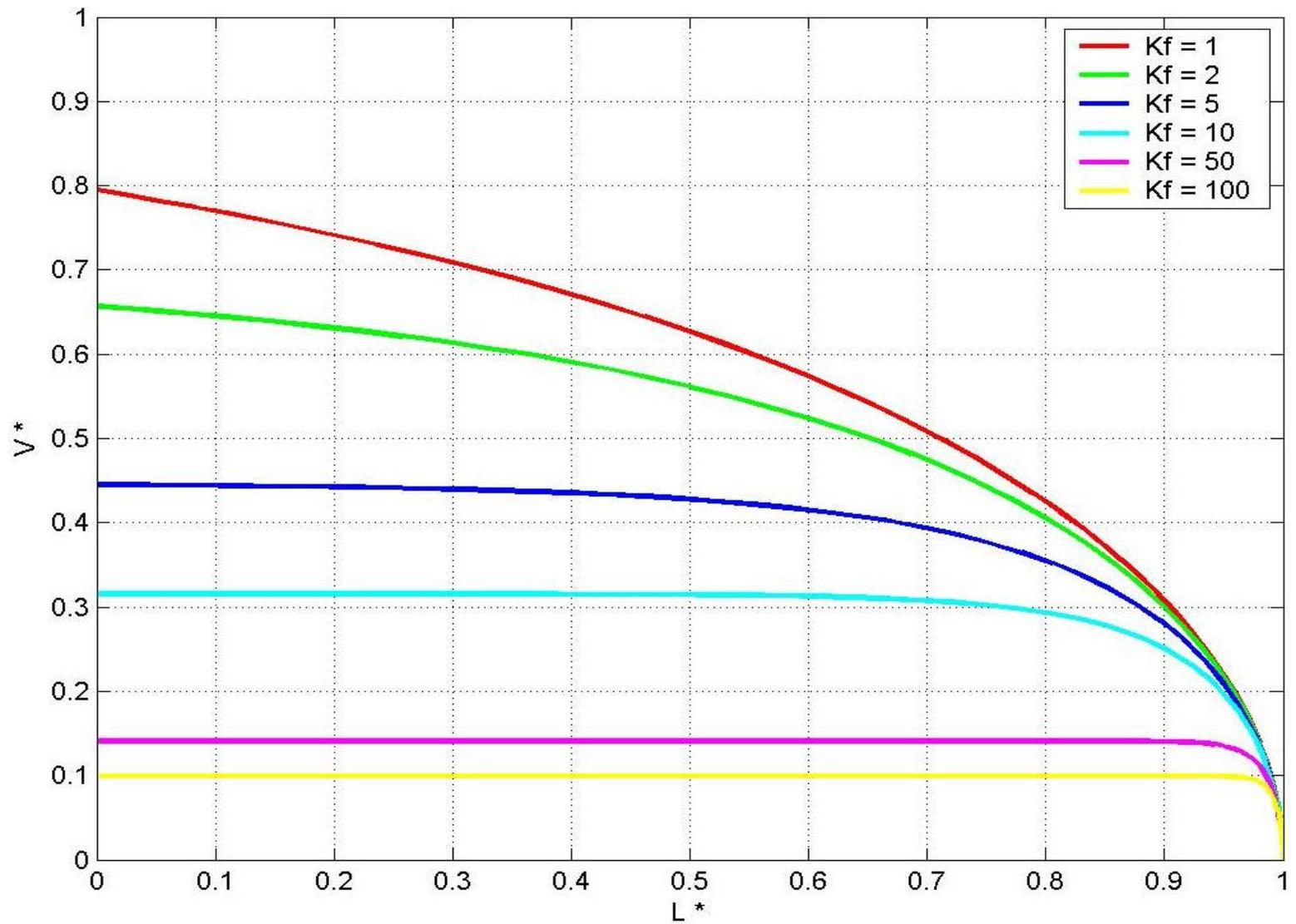


Figura II-19: Velocidad

Modelo Inercial Rígido (Ausencia de singularidades)

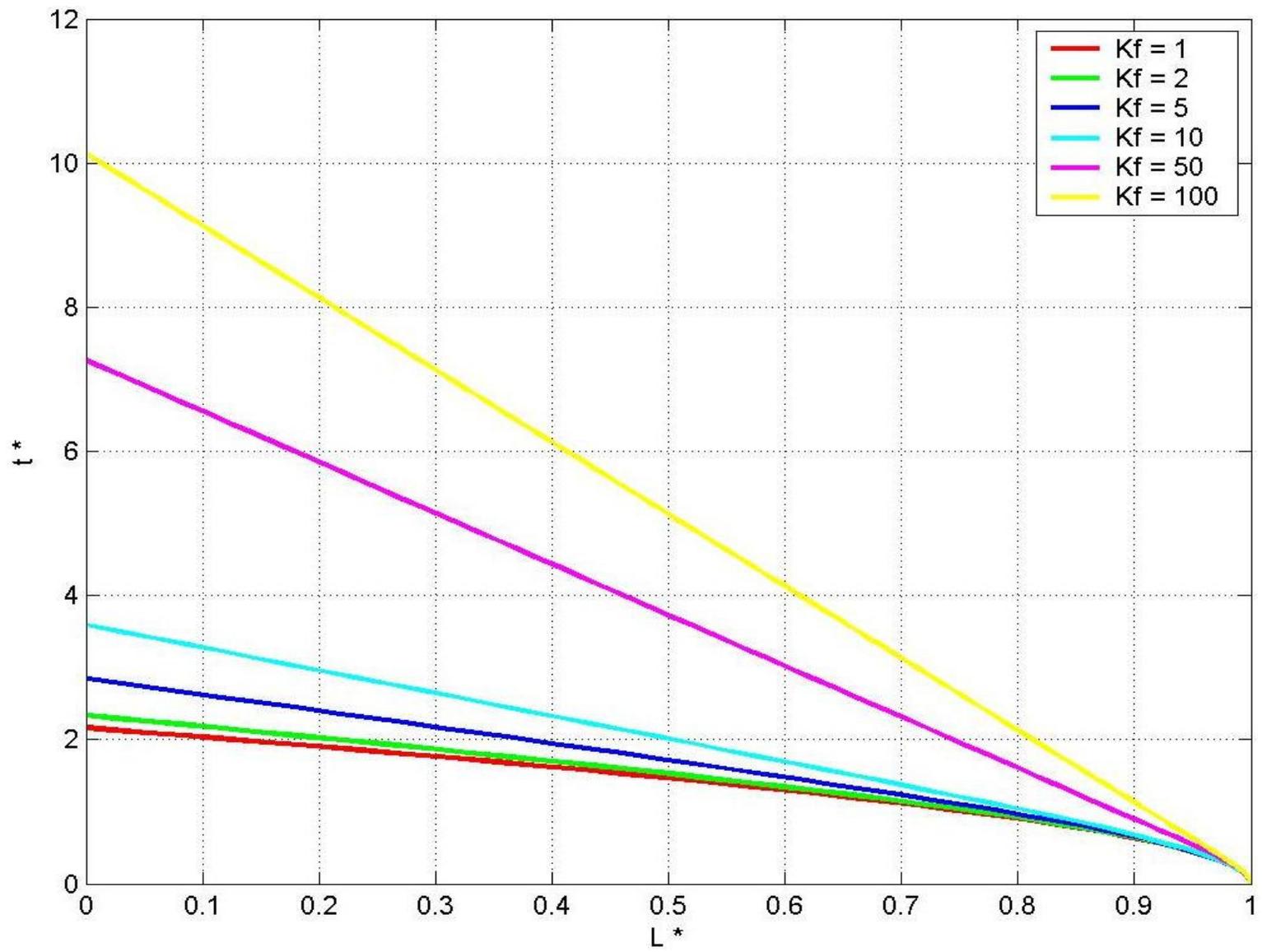


Figura II-20: Tiempo de Vaciado
Modelo Inercial Rígido (Ausencia de singularidades)

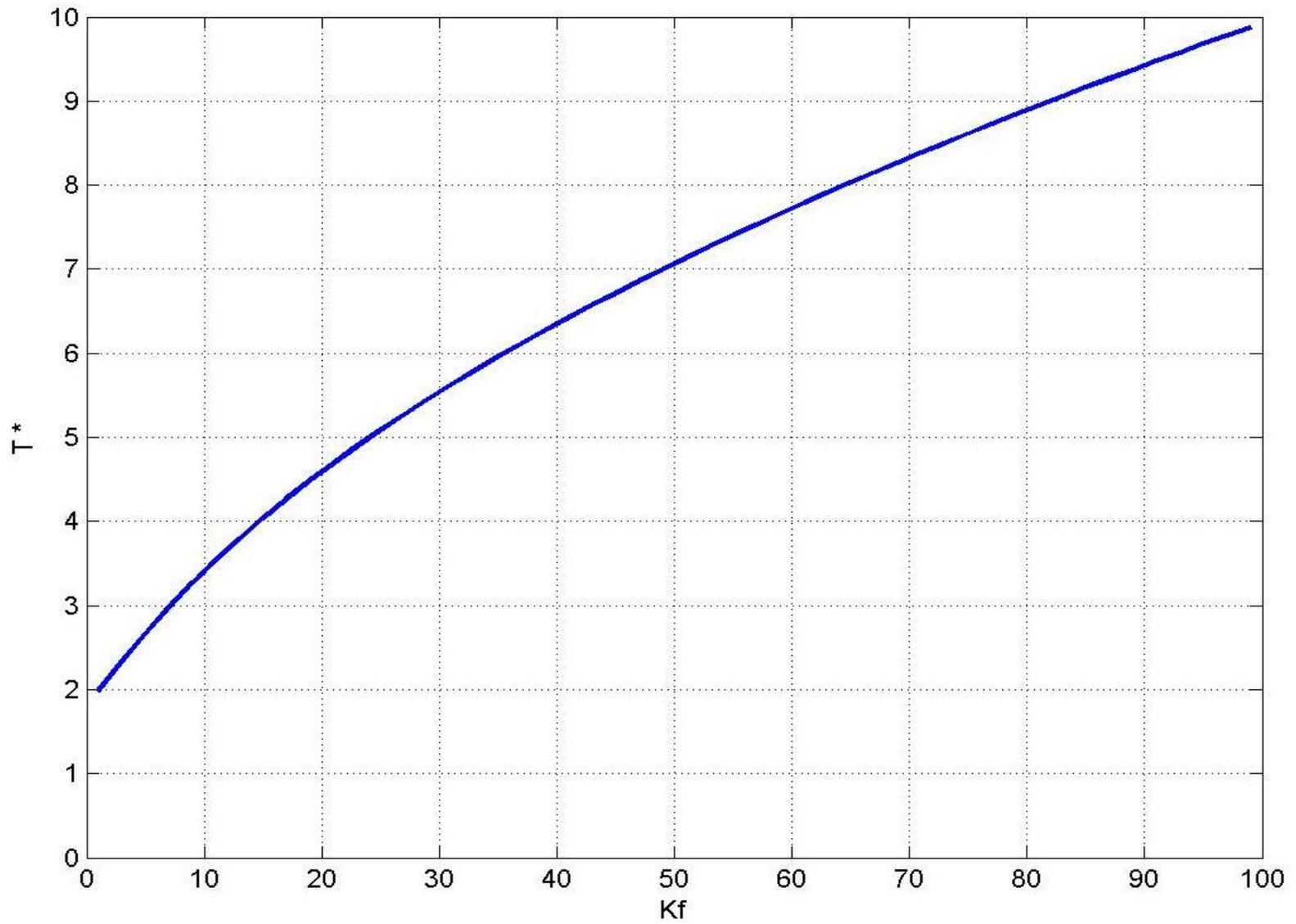


Figura II-21: Tiempo total de Vaciado
Modelo Inercial Rígido (Ausencia de singularidades)

II.4 FRONTERA ENTRE LOS MODELOS DE COLUMNA RÍGIDA

Es de sumo interés teórico y práctico conocer cual el límite de aplicación del Modelo Cuasiestático, es decir, cuando es válido despreciar la inercia de la columna en el fenómeno del vaciado. En lo que sigue, se superpondrán los resultados obtenidos para ambos modelos con el fin de conocer los valores de los parámetros adimensionales K_s y K_f a partir de los cuales ambos modelos convergen.

VELOCIDADES:

En la Figura II-22, Figura II-23 y Figura II-24 se han graficado los resultados obtenidos para las velocidades de vaciado en los tres casos estudiados con anterioridad. En todas se observa el comportamiento general de que para valores elevados de K_s y K_f (>50) la diferencia entre ambos modelos es prácticamente imperceptible para $L^* < 0.95$. Además, se observa que las velocidades difieren significativamente para valores bajos de K_s y K_f (<5) durante todo el recorrido de L^* . Esto se debe a que las velocidades alcanzadas en el inicio del fenómeno por la columna sin inercia (Modelo Cuasiestático) son demasiado elevadas, incluso, llegando a ser igual al valor de Torricelli ($V^*=1$) en los casos sin fricción y sin singularidades (ver Figura II-23 y Figura II-24).

Es interesante notar que en el caso general y sin fricción existe un cambio de signo en la diferencia de velocidades entregadas por ambos modelos, en los tiempos iniciales, el modelo cuasiestático sobreestima las velocidades para luego subestimarlas. En el caso sin singularidades, el modelo inercial entrega menores velocidades y tiende asintóticamente al modelo de columna rígida. El cambio de signo aquí descrito en las velocidades puede amortiguar de alguna forma las diferencias en el tiempo total de vaciado, mas adelante se verá que esto ocurre efectivamente.

TIEMPOS DE VACIADO:

En la Figura II-25, Figura II-26 y Figura II-27 se han graficado los resultados obtenidos para el itinerario de vaciado. Una vez más, se observa que los modelos se superponen perfectamente para valores elevados de K_s y K_f (>50), no así para valores bajos (<5). Además, se aprecia que el Modelo Cuasiestático subestima, durante todo el recorrido, el tiempo parcial de vaciado t^* para cualquier valor de L^* . Es interesante notar que éstas diferencias tienden a disminuir a medida que se está llegando al final del vaciado ($L^* = 0$).

TIEMPOS TOTALES DE VACIADO:

En la Figura II-28, Figura II-29 y Figura II-30 se han graficado los resultados obtenidos para los tiempos totales de vaciado. Es interesante notar que en el caso general y sin fricción, la convergencia entre ambos modelos es excelente para cualquier valor de K_s y K_f , incluso para los más pequeños en donde antes se habían encontrado grandes diferencias para las velocidades. Esto implica que los excesos de velocidades en los tramos iniciales que se calculan con el modelo

cuasiestático con respecto al inercial son compensadas por las deficiencias de velocidades que se presentan hacia el final del vaciado produciendo un amortiguamiento perfecto en la diferencia de los tiempos totales de vaciado calculadas con ambos modelos. Para el caso sin singularidades, ambos modelos convergen a partir de $K_f=20$.

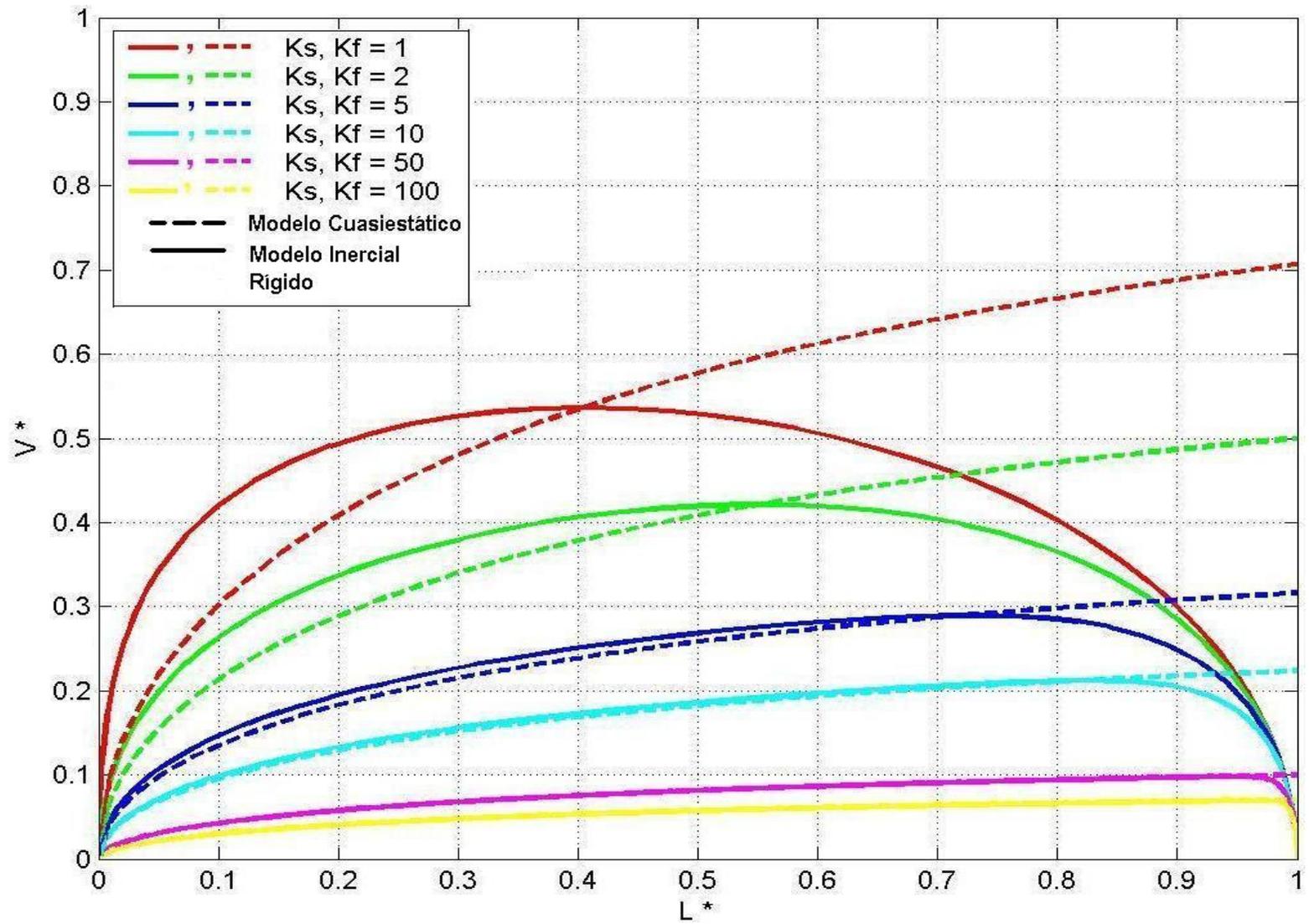


Figura II-22: Velocidad

(Considerando pérdidas friccionales y singulares)

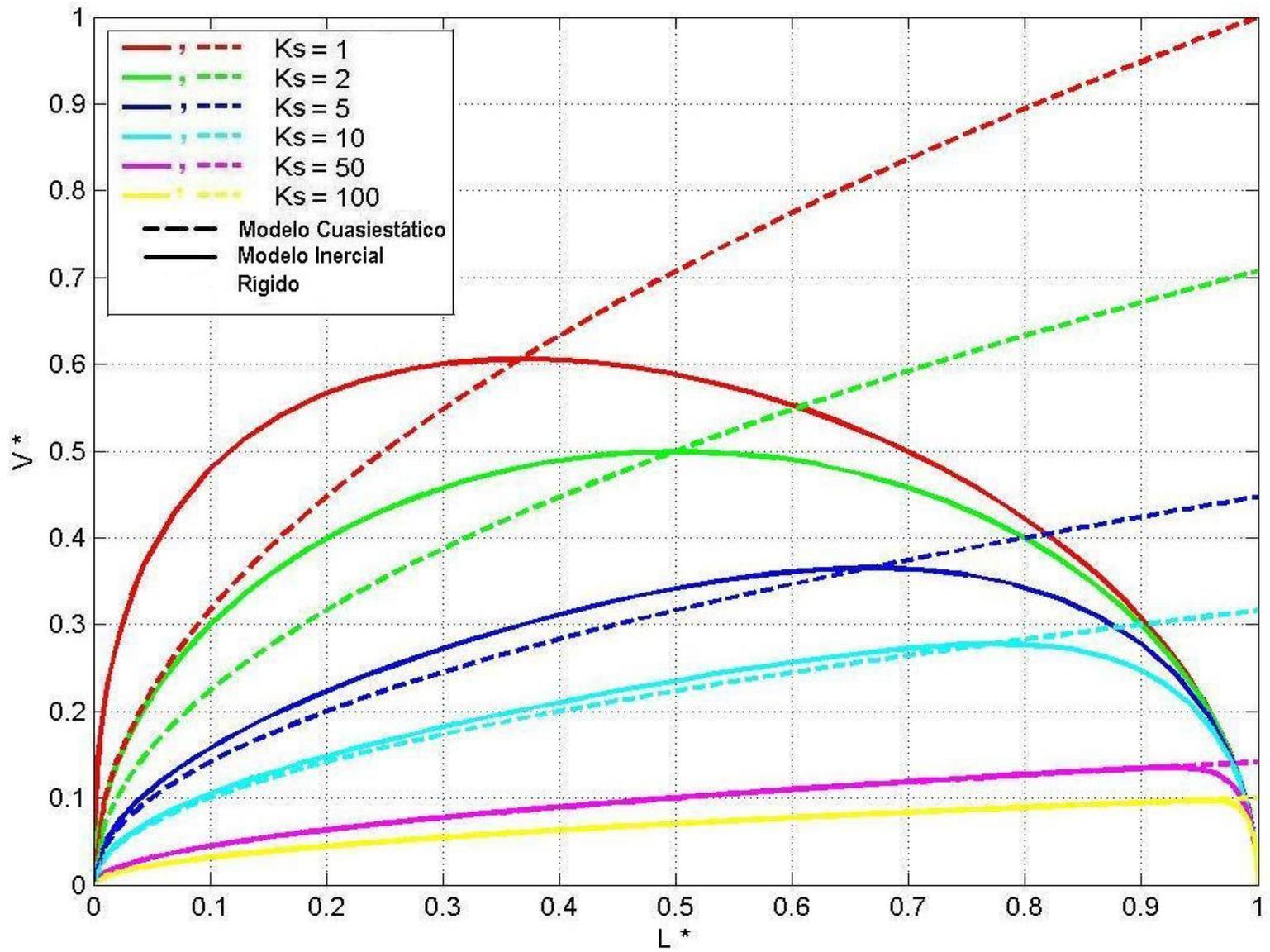


Figura II-23: Velocidad

(Ausencia de fricción)

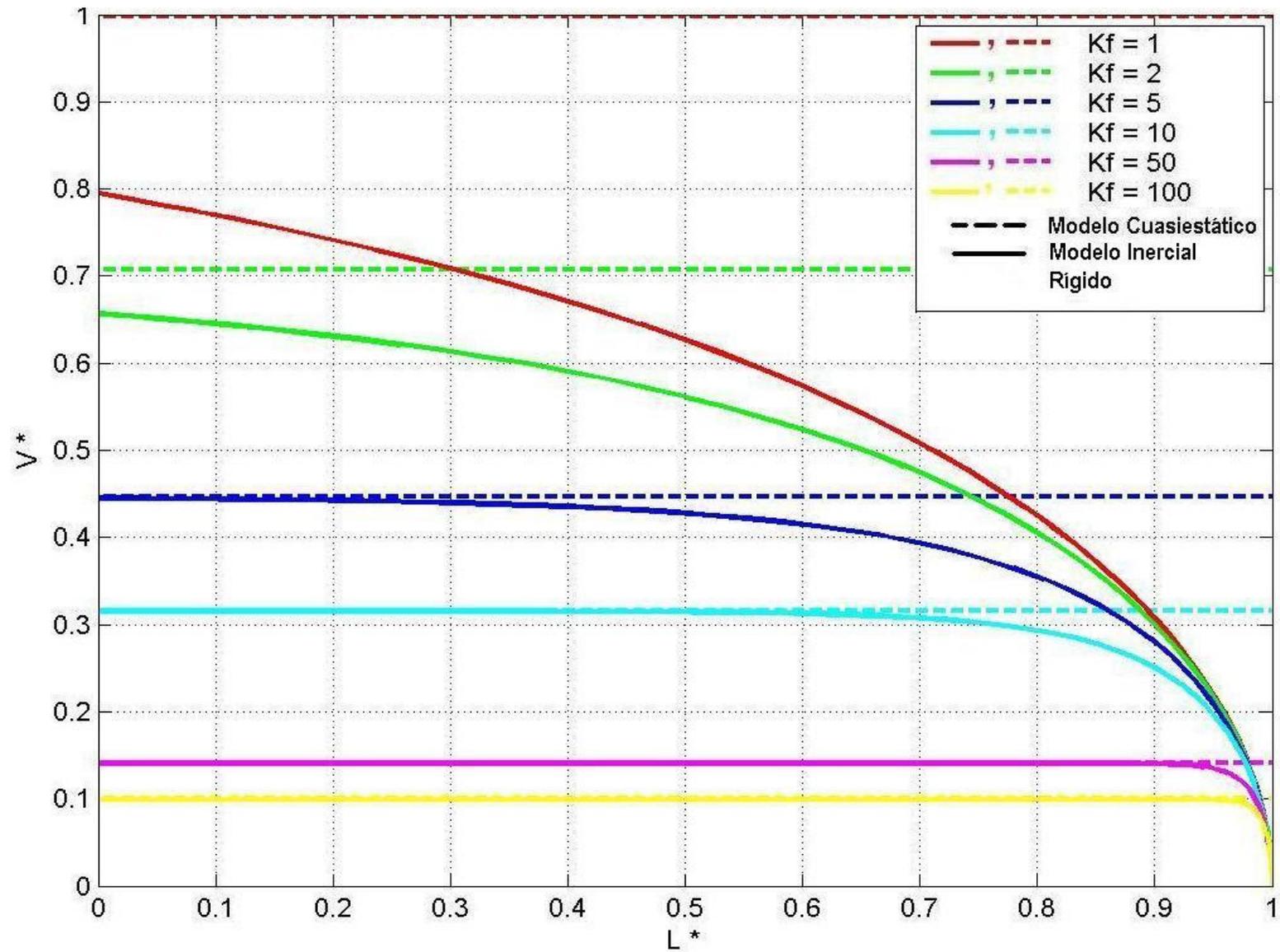


Figura II-24: Velocidad
(Ausencia de singularidades)

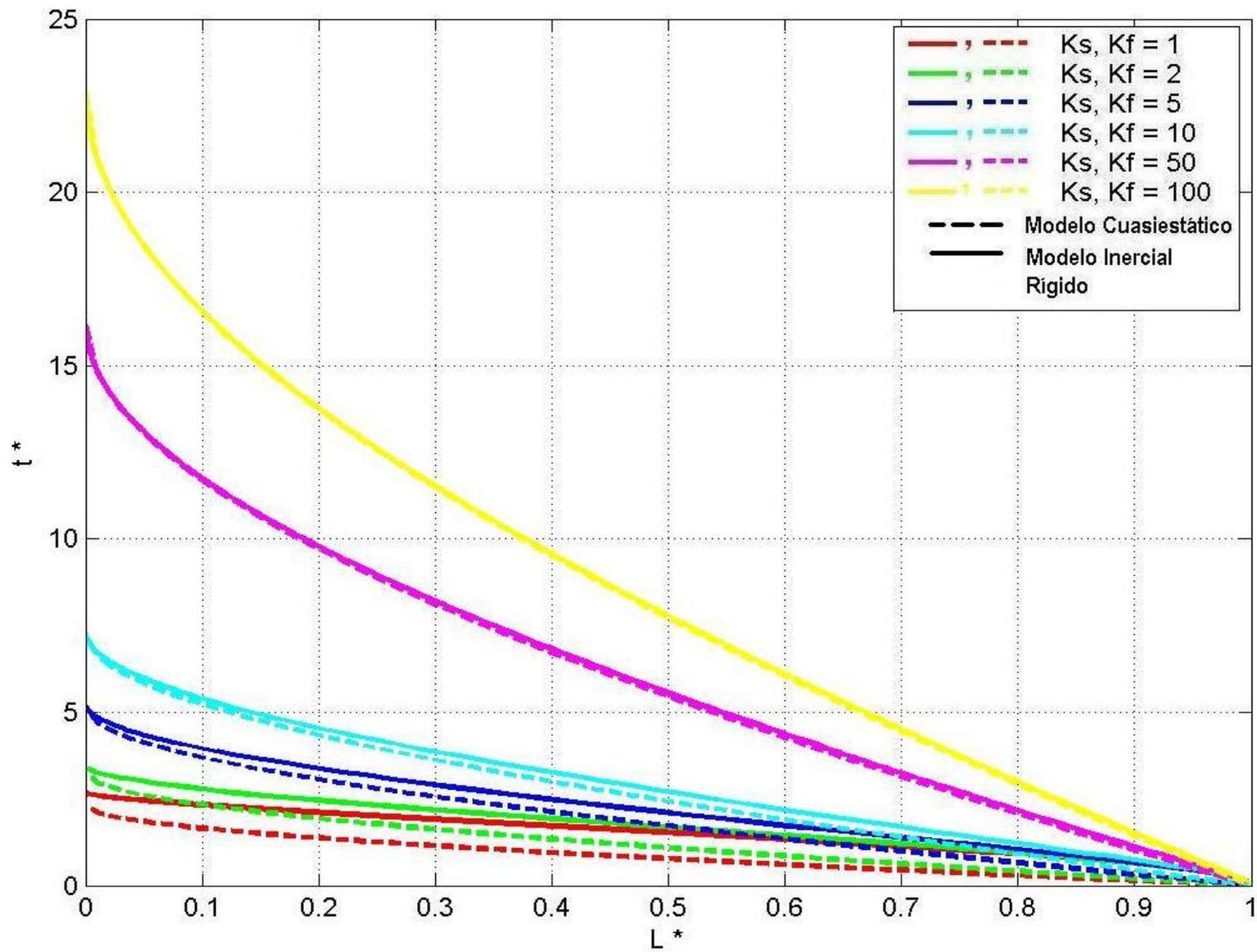


Figura II-25: Tiempo de Vaciado
 (Considerando pérdidas friccionales y singulares)

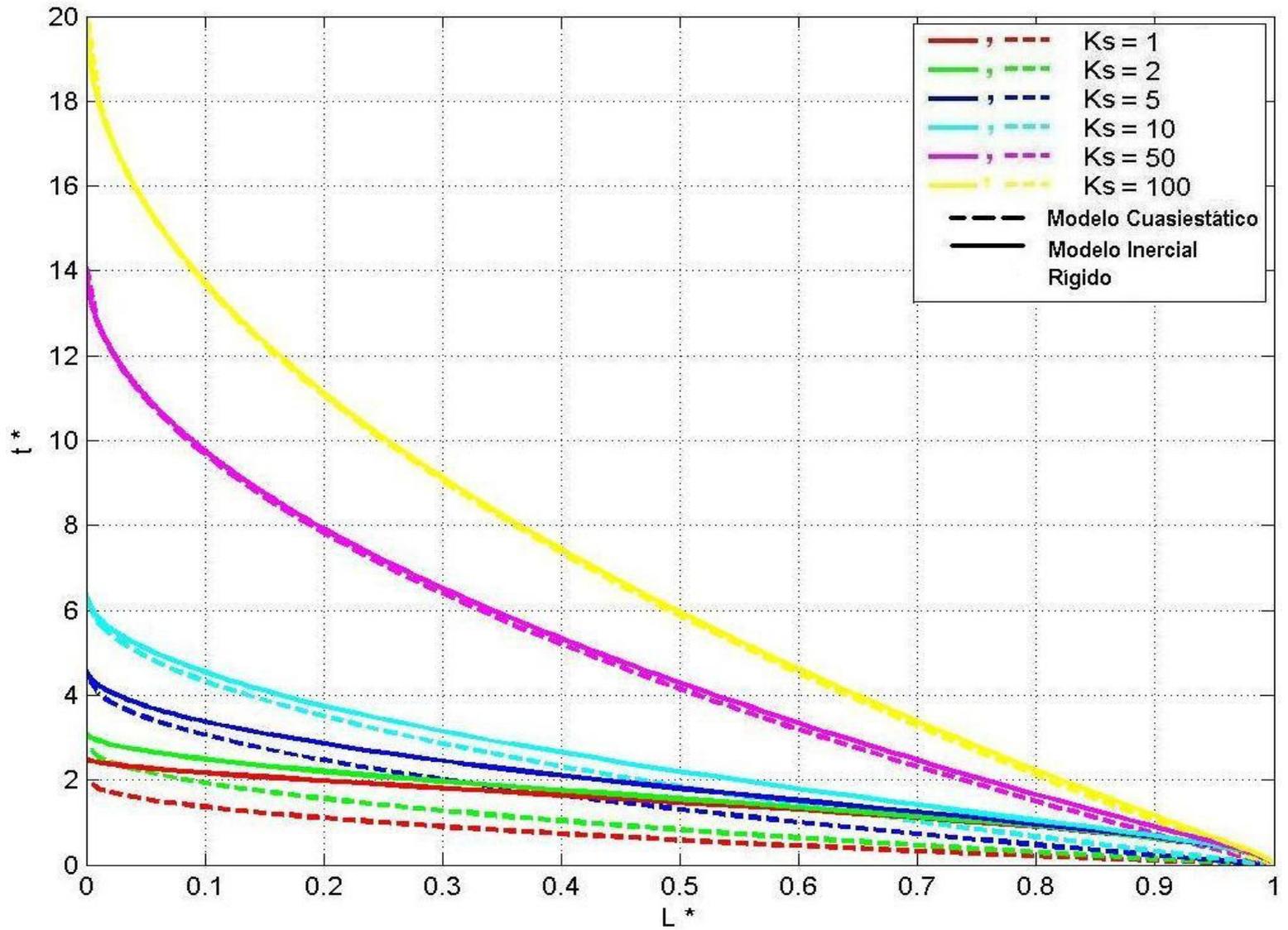


Figura II-26: Tiempo de Vaciado
(Ausencia de fricción)

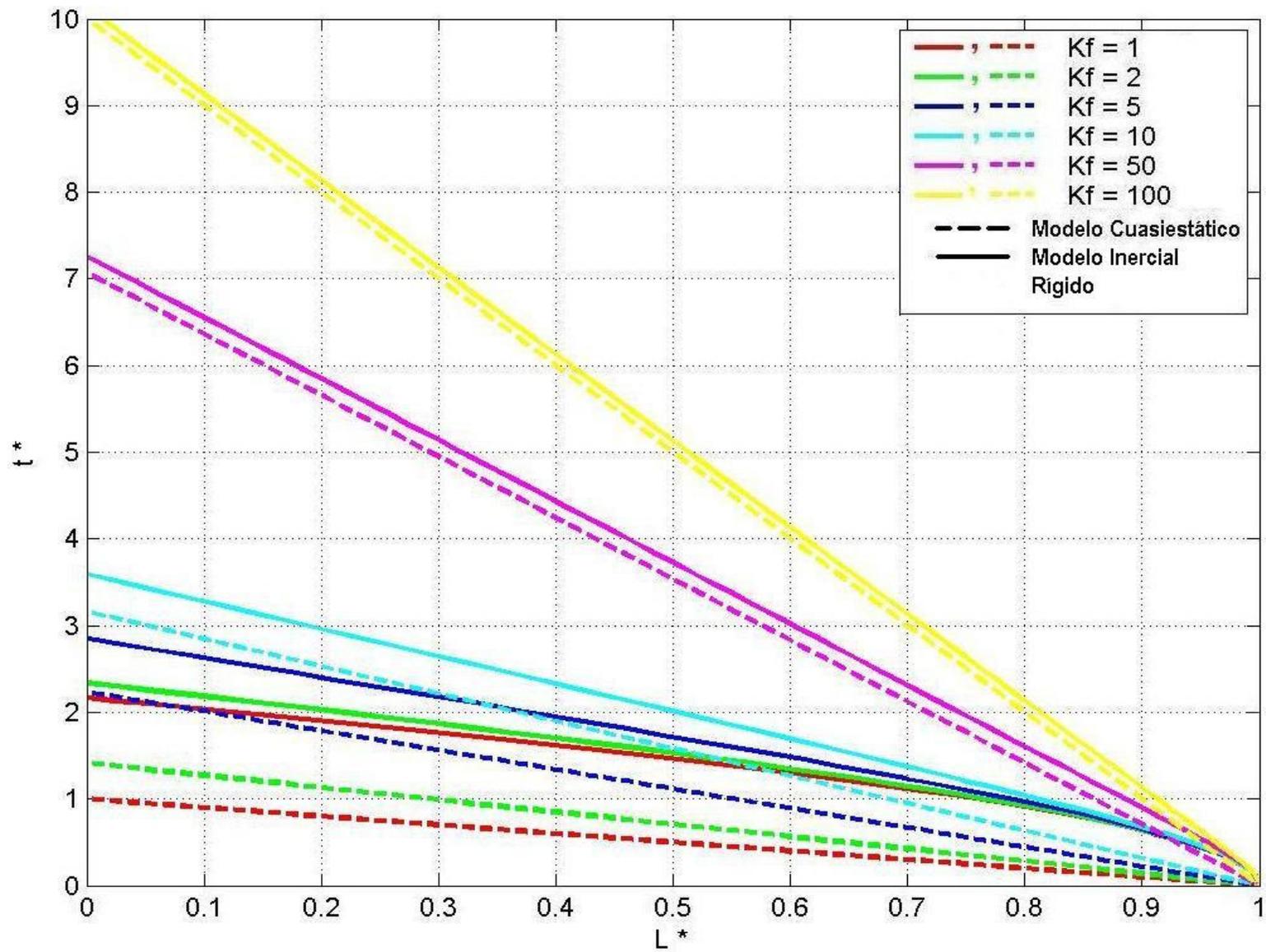


Figura II-27: Tiempo de Vaciado

(Ausencia de singularidades)

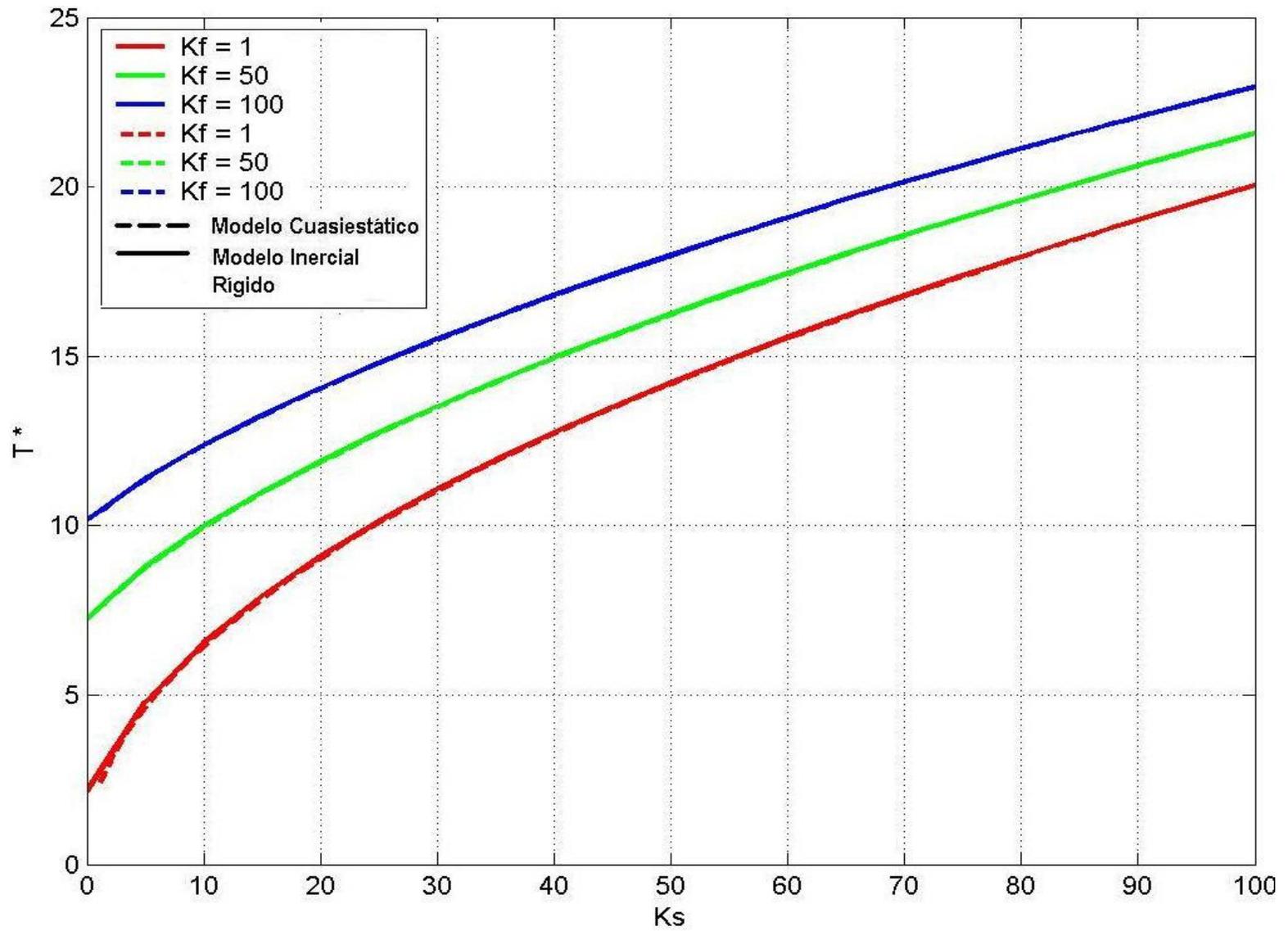


Figura II-28: Tiempo total de Vaciado
(Considerando pérdidas friccionales y singulares)

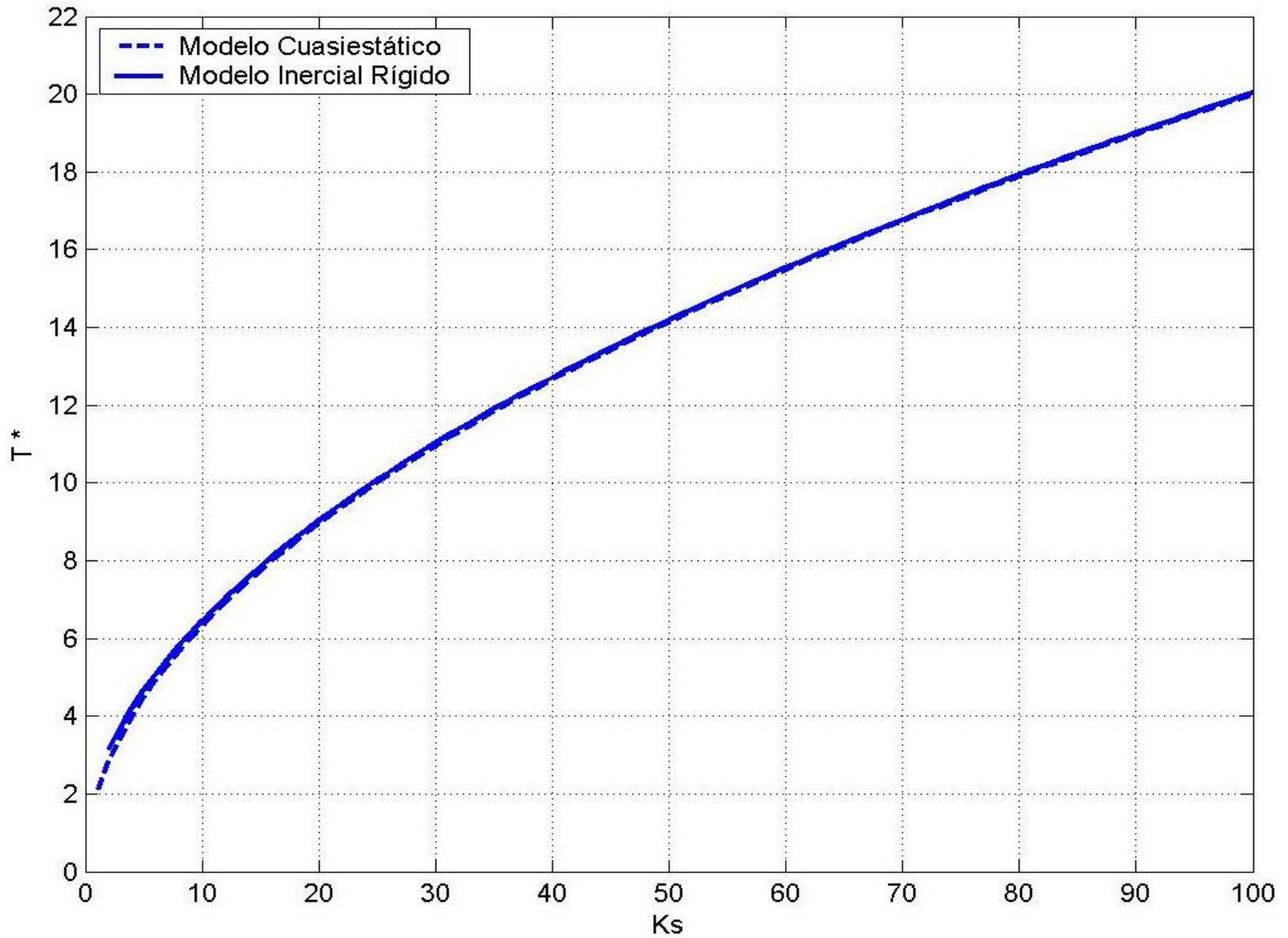


Figura II-29: Tiempo total de Vaciado

(Ausencia de fricción)

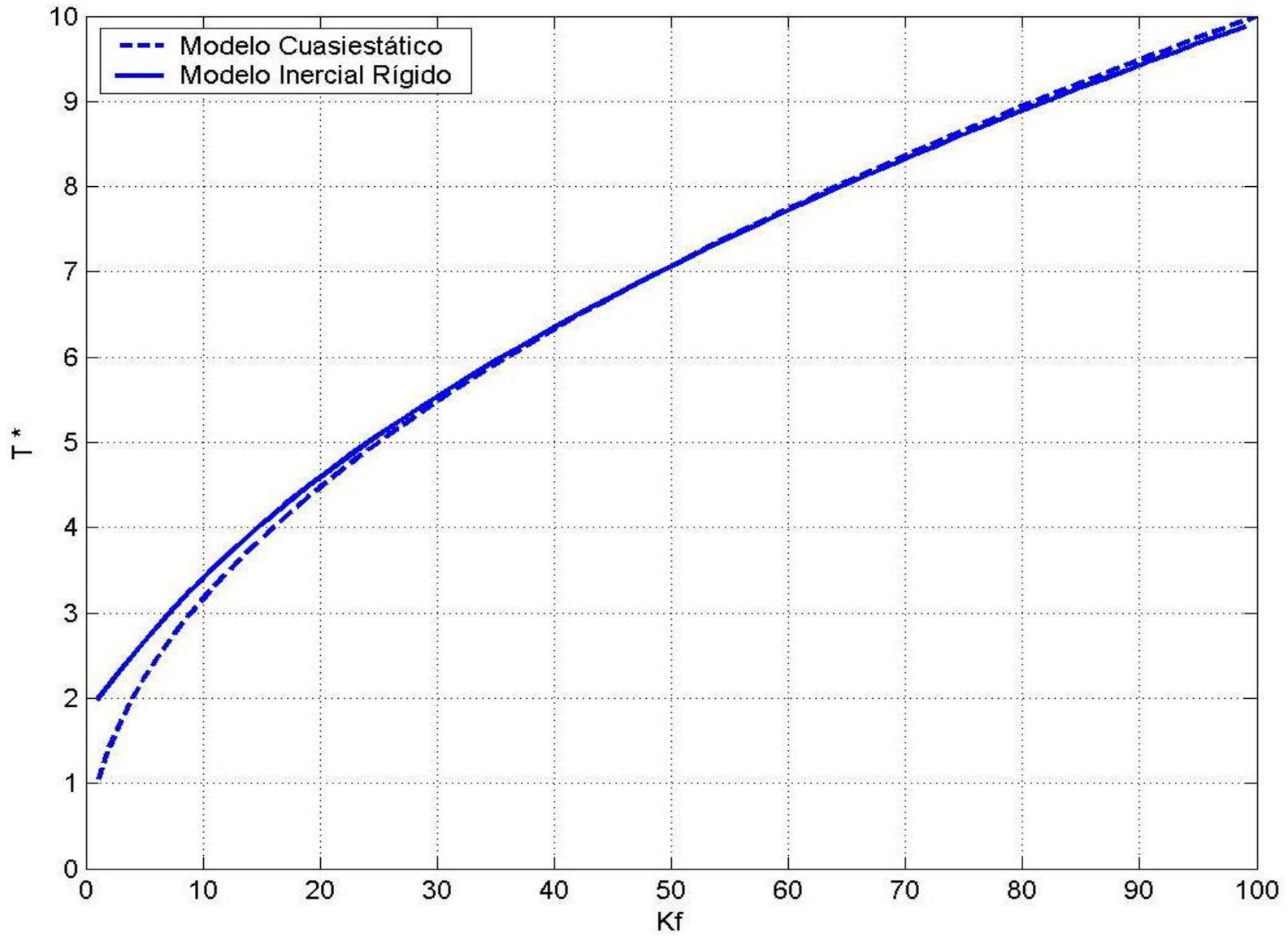


Figura II-30: Tiempo total de Vaciado

(Singularidades despreciables)

CAPÍTULO III: INFLUENCIA SOBRE EL TIEMPO DE VACIADO DEBIDA A LAS VARIACIONES DE LA FRICCIÓN EN RÉGIMEN IMPERMANENTE

III.1 INTRODUCCION:

Es natural esperar que la fricción en régimen impermanente sea diferente respecto de la de régimen permanente y que varíe con el tiempo debido a la variación de las velocidades, las tensiones tangenciales, etc.

Por otra parte, es difícil introducir la impermanencia en forma cuantitativa, ya sea por vía teórica o mediante experiencias de campo y/o de laboratorio.

Empero, esta dificultad, casi invencible hace un siglo, es hoy mucho menor, debido a la existencia de las computadoras y de los instrumentos electrónicos.

Este tema es complejo y variado. Aquí se darán solamente algunas nociones sencillas.

III.2 ANTECEDENTES:

Columna elástica - escurrimiento turbulento

En la mayor parte de los casos se toma el factor de fricción de Darcy f como una constante igual a la del régimen permanente del cual parte o bien en el cual termina el fenómeno transiente.

Aunque no lo expresan explícitamente este es el método que han empleado y que emplean una gran parte de los especialistas en cálculos de golpe de ariete. Buenos ejemplos son los cálculos desarrollados por Parmakian ([30] (1963)), Jaeger ([25] (1977)) y Wylie y Streeter ([37] (1978)) ([38] 1993).

Naturalmente, la pregunta crucial es si este planteamiento es experimentalmente válido o no. Existe evidencia experimental que permite dar una respuesta afirmativa: ver como ejemplos Escande ([16] (1950)) Wylie y Streeter ([37] (1978)), Contin y Cardim ([13] (1994)), Calle, Moreno y Fuentes ([8] (2006)), Velásquez y Toro ([35] (1996)).

Por otra parte, existen numerosos trabajos en que se considera que la fricción en régimen impermanente de ondas en tuberías debe ser calculada mediante modelos ad-hoc. Dos planteamientos muy exitosos son el de Brunone et al. ([4] (1991)) y el de Vardy y Brown ([34] (1995)).

Coimbra y Palmier ([12] (2006)) han realizado una revisión de métodos para estimar la fricción en procesos que implican golpe de ariete.

Algunos resultados experimentales y teóricos se muestran en la Figura III-1 y Figura III-2.

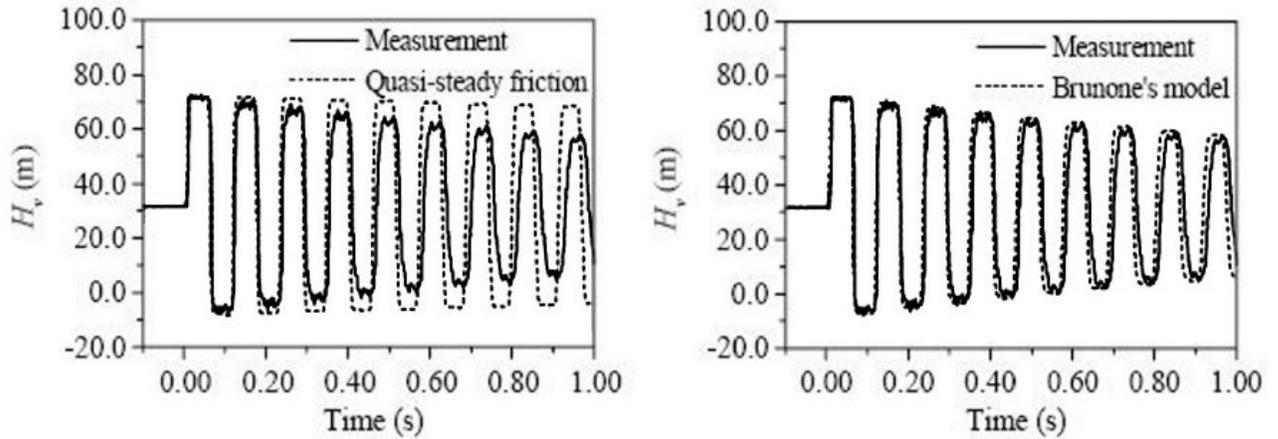


Figura III-1. The results of the experimental apparatus at the downstream boundary condition (Bergant et al., 2001)

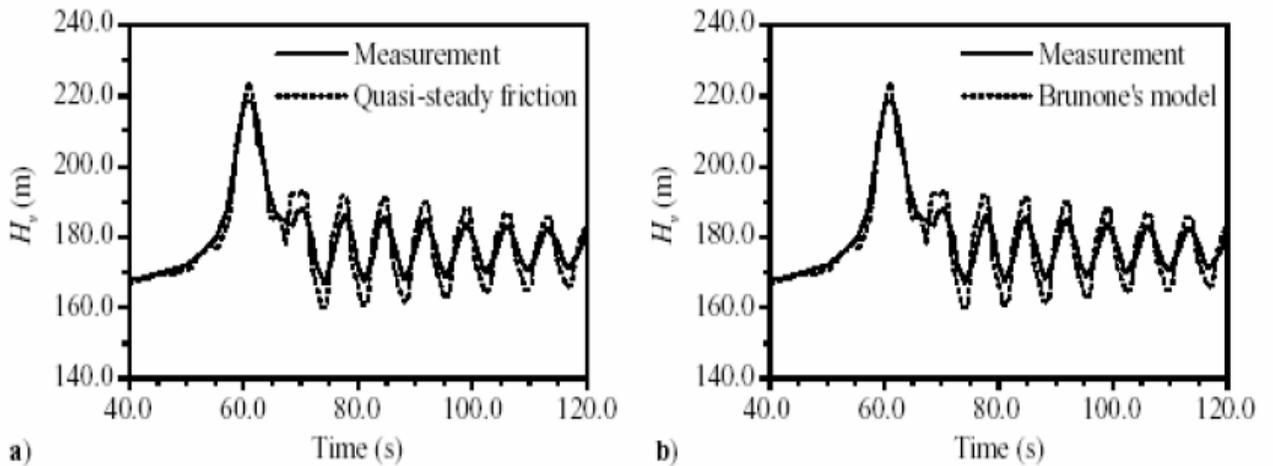


Figura III-2. The results of the hydraulic transient in *Kne ke ravne* Power Plant at the downstream boundary condition (Bergant et al., 2001)

Se observa que la aproximación cuasiestática no se aleja mucho de los resultados experimentales, dando, eso sí, un mejor ajuste el modelo de Brunone et al.

Columna rígida - régimen laminar

Aunque este caso ha sido estudiado en numerosas ocasiones debido en parte a que es más simple que el del flujo turbulento, aquí se dará solamente una referencia básica:

Letelier y Leutheusser ([26] (1976)) estudiaron detalladamente el establecimiento a partir del reposo del régimen laminar en tuberías circulares. Un resumen de los resultados obtenidos se muestra en la Figura 3. Allí se muestra la función:

$$f = f(R, R_o)$$

R_o : Número de Reynolds para el régimen permanente final.

R : Número de Reynolds instantáneo

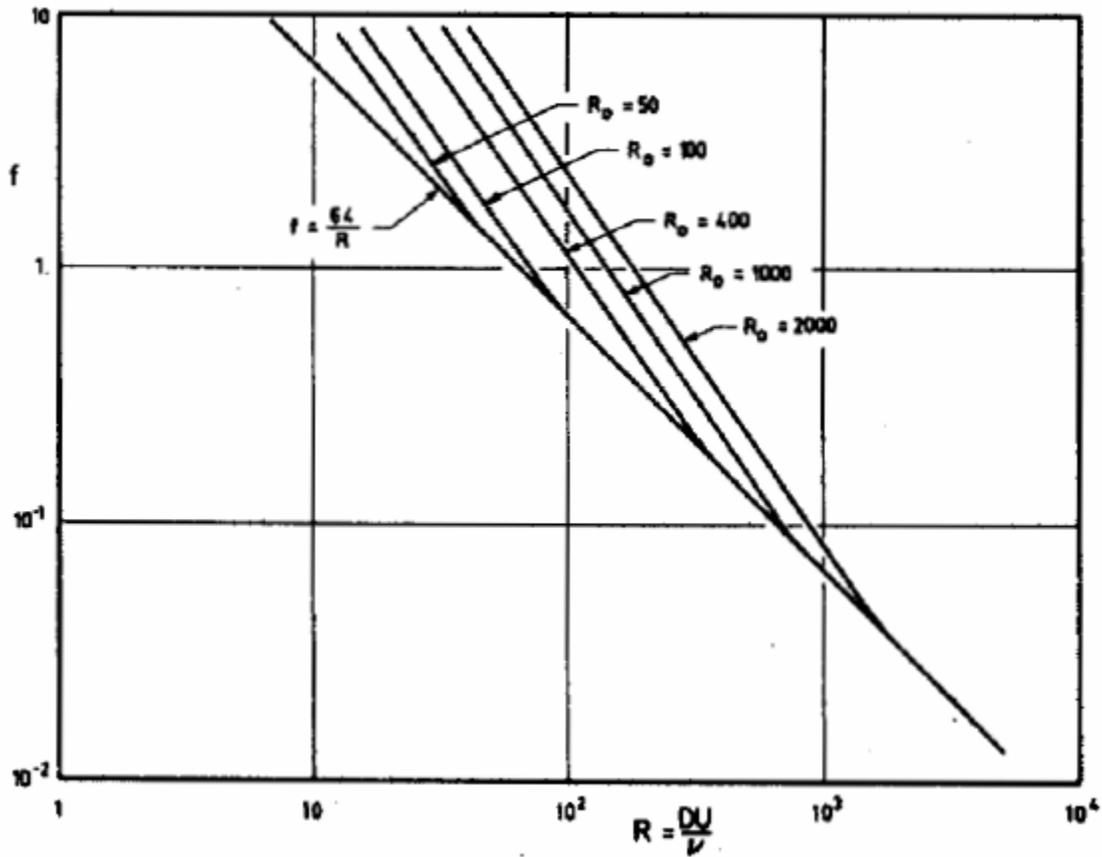


Figura III-3.

Se deduce de esta Figura que f es significativamente superior al del régimen cusiéstático. Este puede expresarse mediante la ecuación deducida de la ley de Poiseuille (Domínguez [14] (1974)):

$$f = \frac{64}{R} \quad \text{(III-1)}$$

Empero, se observa que esta discrepancia decrece cuando R y R_o crecen.

III.3 HIPÓTESIS PREVIAS:

Basándose en las informaciones expuestas en este capítulo y en cálculos realizados en capítulos anteriores se establecen las siguientes bases de cálculo:

- Se estudiará el caso límite en que no existen singularidades (tuberías lisas) ya que es el que realza el efecto del factor de fricción. Se concibe que si las pérdidas de fricción son pequeñas frente a las singulares, el efecto de aquellas sobre el escurrimiento disminuye significativamente.
- El factor de fricción instantáneo f se calculará mediante la siguiente función continua a trozos del número de Reynolds instantáneo Re :

$$Re = \frac{V(t)D}{\nu} \quad \text{(III-2)}$$

Escurrecimiento laminar:

$$Re \leq 2000$$

$$f = \frac{64}{Re} \quad \text{(III-3)}$$

Escurrecimiento turbulento plenamente desarrollado:

Se supondrá válida la fórmula de Prandtl para tubos circulares lisos (Domínguez ([14] (1974)):

$$Re > 3000$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \text{Log}(Re \sqrt{f}) - 0,8 \quad \text{(III-4)}$$

Transición laminar turbulenta:

Esta zona está "mal definida por definición" (Experiencia de Couette (Flamant [17], 1909; Domínguez [14], 1974; Cerón [9], 1960)).

Empero, aquí se empleará la siguiente fórmula simple (en rigor, arbitraria) de interpolación:

$$2000 < \text{Re} \leq 3000$$

$$f = K_T \text{Re}^N \quad \text{(III-5)}$$

$$\text{Re} = \text{Re}_1 = 2000$$

$$f_1 = \frac{64}{\text{Re}_1}$$

$$\text{Re} = \text{Re}_2 = 3000$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_2}} = 2 \text{Log}(\text{Re} \sqrt{f_2}) - 0,8$$

Resulta:

$$K_T = 1,004559 \cdot 10^{-4}$$

$$N = 0,7583011$$

La función $f(\text{Re})$ se muestra en la Figura III-4.

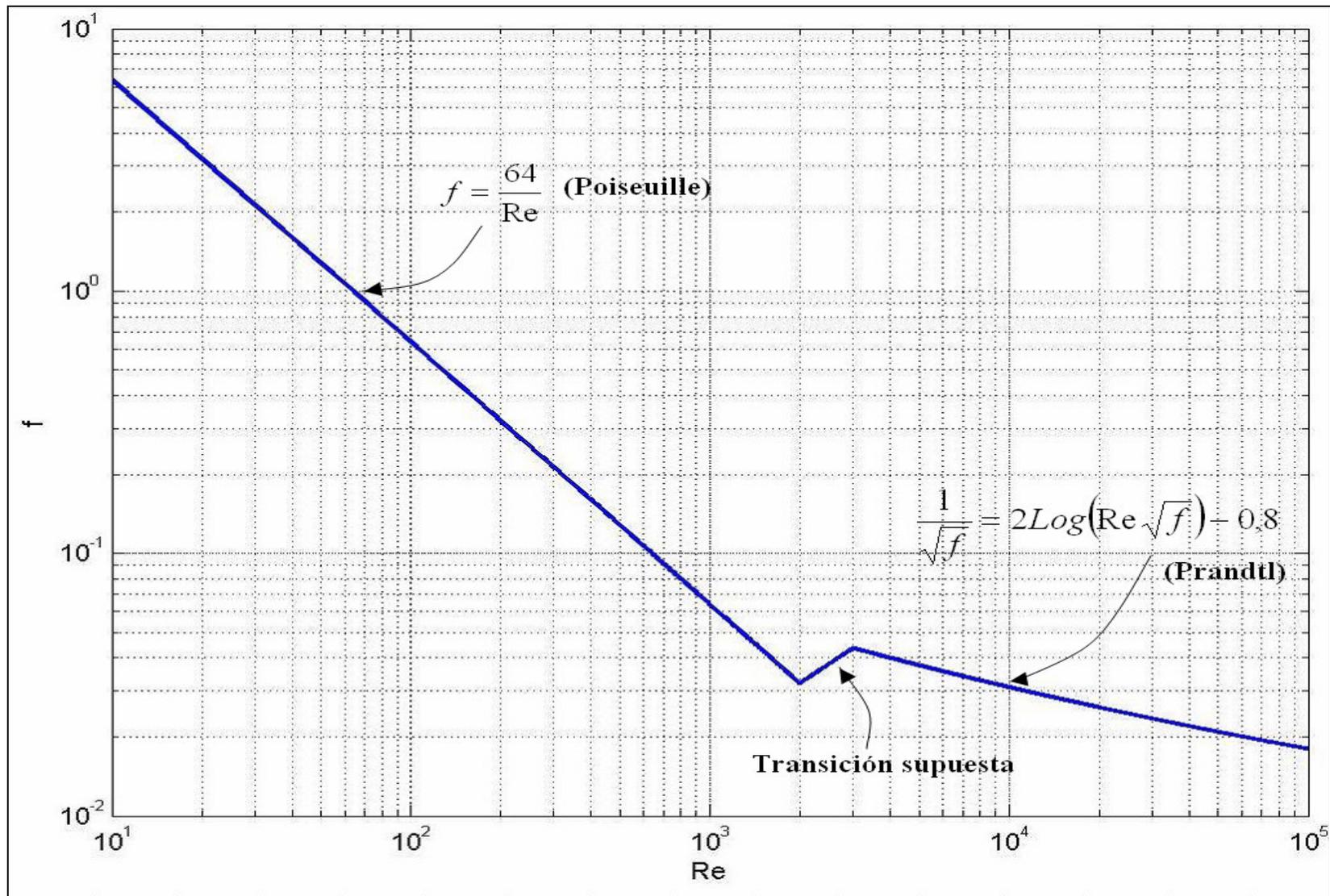


Figura III-4. Variación del coeficiente de fricción respecto del número de Reynolds

III.4 ECUACIONES DEL MODELO

La relación de base es la ec. (II-21) del Capítulo II:

$$\sin(\theta_0)L = \frac{V^2}{2g} \left(K_s + \frac{fL}{D} \right) + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt}$$

Haciendo allí $K_s = 0$ se obtiene:

$$\sin \theta_0 L = \frac{fL}{D} \frac{V^2}{2g} + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \quad \text{(III-6)}$$

Del mismo Capítulo se obtiene:

$$V = -\frac{dL}{dt} \quad \text{(III-7)}$$

Como las características del escurrimiento son funciones del número de Reynolds instantáneo $Re(t)$ es conveniente rehacer el análisis inspeccional realizado anteriormente tomando ahora como variable dependiente adimensional Re . El resultado es:

$$\frac{dL^*}{dt^*} = -\beta Re \quad \text{(III-8)}$$

$$\frac{d Re}{dt^*} = 1 - \alpha f(Re) Re^2 \quad \text{(III-9)}$$

CONDICIONES INICIALES:

$$t^* = 0; \quad Re = 0; \quad L^* = 1$$

$$L^* = \frac{L}{L_0}$$

$$t^* = \frac{t}{\tau}$$

Lo: Longitud total del ducto que se vacía.

$$\tau = \frac{\nu}{g \sin \theta D}$$

Como es natural para el fenómeno que se analiza el tiempo de referencia τ depende de la viscosidad y de la gravedad.

$$\alpha = \frac{L_0}{D} \frac{1}{\text{Re}_0^2}$$

$$\beta = \frac{2}{\text{Re}_0^2}$$

$$\text{Re}_0 = \frac{V_0 D}{\nu}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales formado por las relaciones (III-8) y (III-9) no puede integrarse en forma cerrada en el caso general, pero se resuelve fácilmente en forma numérica. Aquí se ha empleado el método de Runge y Kutta de cuarto orden (Burden y Faires [5] (1998)).

El tiempo adimensional de vaciado T^* se obtiene, naturalmente, como:

$$T^* = t^* \quad \text{para} \quad L^* = 0$$

Entonces el tiempo absoluto de vaciado es:

$$T = T^* \tau$$

Para comparar los tiempos de vaciado con el que se obtiene en el caso de fricción constante (T_0), se puede emplear la relación (II-51):

$$T_0 = T^*_0 \tau_0 = \frac{2}{\sqrt{K_f}} \text{Ln} \left\{ \exp(K_f/2) + \sqrt{\exp^2(K_f/2) - 1} \right\} \tau_0$$

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{L_0}{2g \sin \theta}}$$

Entonces:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T^*}{T^*_0} \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{T^* \sqrt{K_f}}{\text{Ln} \left\{ \exp(K_f/2) + \sqrt{\exp^2(K_f/2) - 1} \right\} \text{Re}_0} \frac{1}{\text{Re}_0} \quad \text{(III-10)}$$

$$\text{Re}_0 = \frac{V_0 D}{\nu}$$

$$K_f = \frac{f_0 L_0}{D}$$

$$V_0 = \sqrt{2g \sin \theta L_0}$$

III.5 RESULTADOS DEL CÁLCULO:

Los valores de T/T_0 pueden observarse en la Figura III-5 como función de Re_0 y L_0/D .

Se puede verificar que la diferencia entre ambos tiempos de vaciado es muy pequeña ($< 3\%$) y entonces puede prescindirse de la variación de la fricción en los cálculos.

Cabe destacar que el número de Reynolds para calcular f_0 se ha calculado con el correspondiente no a la velocidad V_0 sino a la velocidad V_0' con que la última gota de líquido abandona el ducto; esto es, empleando la (II-49) para $L^*=0$:

$$V_0' = V_0 \sqrt{\frac{1}{K_f} [1 - \exp(-K_f)]}$$

$$\text{Re}_0' = \text{Re}_0 \sqrt{\frac{1}{K_f} [1 - \exp(-K_f)]} \quad \text{(III-11)}$$

Por otra parte, si existen pérdidas de carga singulares significativas, la discrepancia debe ser aún menor.

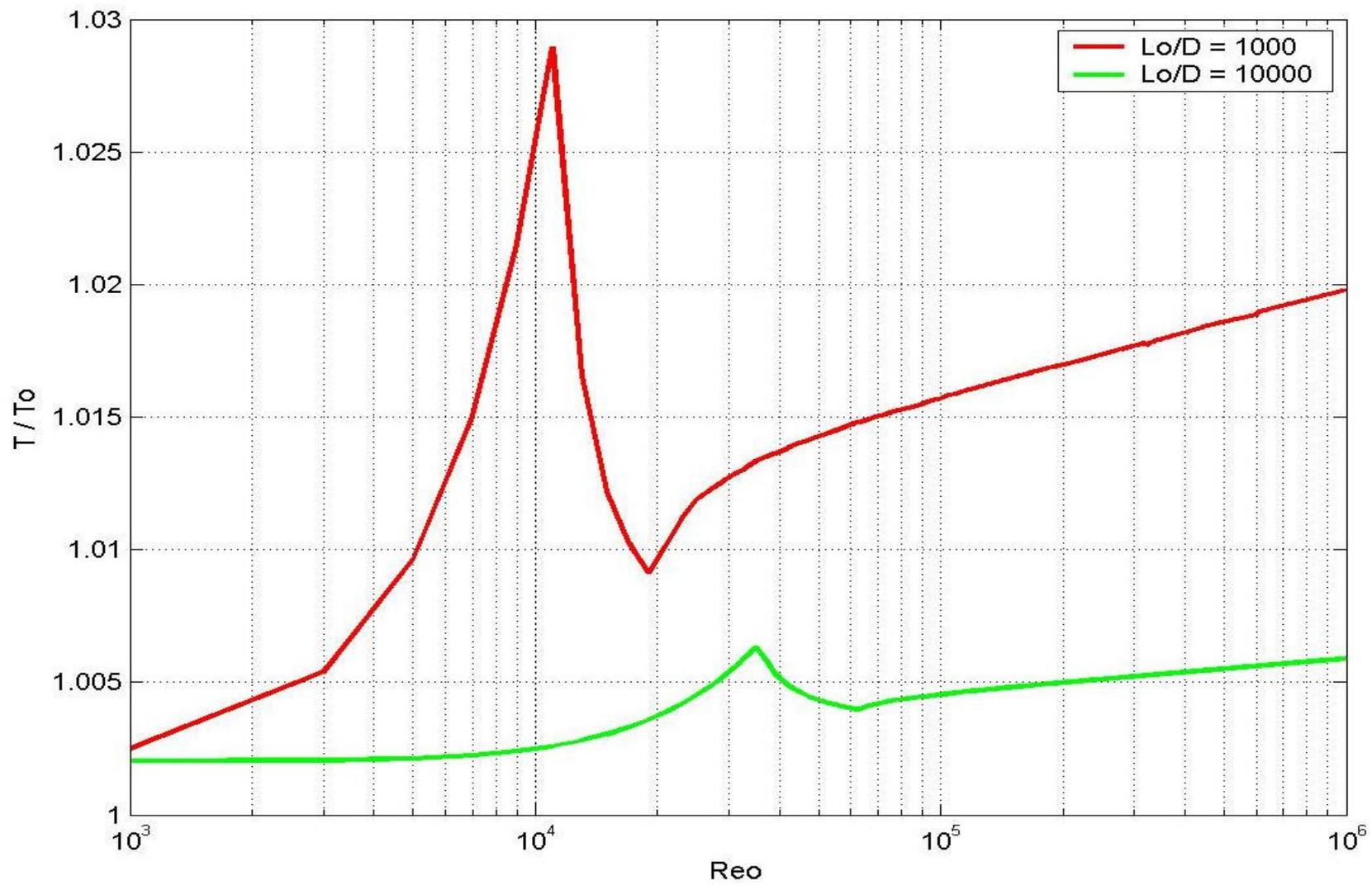


Figura III-5. Efecto sobre el tiempo total de vaciado de un coeficiente de fricción variable en el cálculo

CAPÍTULO IV: ECUACIONES DE LA COLUMNA ELÁSTICA, TIEMPO DE VACIADO

IV.1 INTRODUCCIÓN:

En realidad, en las ecuaciones llamadas de la columna elástica se supone que tanto la tubería como el fluido son moderadamente compresibles.

También se las llama ecuaciones del golpe de ariete y se las atribuye normalmente a Allievi, aunque existe evidencia que Joukowsky publicó una versión en 1898: la deducción de Allievi es de 1902 (Rouse y Ince [31] (1963), Jaeger [25] (1977)).

Por otra parte, la relación que da la presión máxima producida aguas arriba de una válvula que se cierra bruscamente fué dada sin dudas por Joukowsky en 1903 (Rouse y Ince [31] (1963)).

Respecto al vaciado de tuberías empleando estas ecuaciones aparece un problema especial: los algoritmos sencillos para resolverlas se emplean para tuberías en que la columna líquida mantiene una longitud prácticamente constante. Pero para el vaciado de tuberías la situación es la de una columna líquida cuya longitud varía esencialmente a lo largo del tiempo. Por lo tanto es necesario, a lo menos, modificar los algoritmos clásicos.

Otro aspecto de interés es la comparación entre los tiempos de vaciado calculados mediante las ecuaciones del golpe de ariete y los calculados empleando el modelo de columna rígida, considerando inercia.

Los límites de aplicación de ambos modelos dependen de numerosos factores y han sido relativamente poco estudiados. Se pueden mencionar aquí los trabajos de Abreu et al. ([1] (1994)) y de Iglesias et al. ([24] (2004)), pero ellos no aplican directamente para el presente estudio, ya que los sistemas analizados son distintos.

IV.2 ECUACIONES DEL MODELO:

Se considera que la cota piezométrica H y la velocidad media V son funciones de la abscisa X medida a lo largo del ducto y del tiempo elapsado t .

Las relaciones correspondientes son (Wylie y Streeter ([37] (1978), [38] (1993), Abreu et al. [1] (1994)):

$$g \frac{\partial H}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f}{2D} V|V| = 0 \quad \text{(IV-1)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{C^2}{g} \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (\text{IV-2})$$

C: velocidad de las ondas

ESTIMACIÓN DE C:

En el caso de un fluido puro, poco compresible que escurre en una tubería elástica de espesor e relativamente pequeño ($e/D \ll 1$) se tiene (Wylie y Streeter ([37] (1978))):

$$C = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + f(\mu)(K/E)(D/e)}} \quad (\text{IV-3})$$

Donde:

K : Módulo global de elasticidad del fluido

E : Módulo de Young de la pared de la tubería

ρ : Densidad del fluido

μ : Módulo de Poisson de la pared del ducto

$f(\mu)$ queda definida por el procedimiento de sujeción del ducto (Wylie y Streeter ([37] (1978))).

Si la tubería contiene una cierta fracción de burbujas de aire los cambios que C experimenta pueden ser consultados también en Wylie y Streeter ([37] (1978)).

Cuando la tubería tiene recubrimientos de diferentes materiales o es un túnel pueden consultarse Jaeger [25] (1977) y Thorley [33] (2004).

Por último, si se trata de pulpas se pueden emplear las formulaciones dadas por Wood y Kao ([36] (1971)) y Bechteler y Vogel ([2] (1982)).

IV.3 ANÁLISIS INSPECCIONAL:

Se tienen dos variables independientes (X y t) y dos dependientes (V y H). Para definir variables adimensionales se requieren entonces cuatro magnitudes de referencia:

$$X = X^* \xi$$

$$t = t^* \tau$$

$$V = V^* v$$

$$H = H^* \eta$$

ξ, τ, v, η : Magnitudes de referencia para X, t, V, H respectivamente

Reemplazando en las ecs. (IV-1) y (IV-2), simplificando y reordenando:

$$\frac{\partial H^*}{\partial X^*} + \pi_1 V^* \frac{\partial V^*}{\partial X^*} + \pi_2 \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \pi_3 \frac{f}{2} V^* |V^*| = 0$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial t^*} + \pi_4 \frac{\partial V^*}{\partial X^*} = 0$$

$$\pi_1 = \frac{v^2}{g\eta}$$

$$\pi_2 = \frac{\xi v}{g\eta\tau} = \frac{\xi}{v\tau} \pi_1$$

$$\pi_3 = \frac{v^2 \xi}{g\eta\lambda} = \frac{\xi}{D} \pi_1$$

$$\pi_4 = \frac{\tau v C^2}{\eta \xi g} = \frac{\tau C^2}{\xi v} \pi_1$$

La longitud de referencia a lo largo del ducto es naturalmente L_0 . El tiempo de referencia puede ser elegido convenientemente como el semiperíodo de las ondas que recorren el ducto L_0/C . Entonces:

$$\pi_2 = \frac{C}{v} \pi_1$$

$$\pi_3 = \frac{L_0}{D} \pi_1$$

$$\pi_4 = \frac{C}{v} \pi_1 = \pi_2$$

Se puede imponer $\pi_2 = \pi_4 = 1$ de donde:

$$\pi_1 = \frac{v}{C} = C_a \text{ (Número de Cauchy).}$$

Entonces la cota piezométrica de referencia η resulta:

$$\eta = \frac{v^2}{g\pi_1} = \frac{Cv}{g} = H_J$$

H_J es la conocida sobrepresión de Joukowsky. Efectivamente se constata tanto mediante el cálculo como experimentalmente que las presiones transientes entregan valores que se refieren convenientemente con la presión o pulso de Joukowsky.

Finalmente las ecuaciones en variables adimensionales quedan:

$$\frac{\partial H^*}{\partial X^*} + C_a V^* \frac{\partial V^*}{\partial X^*} + \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} C_a K_f V^* |V^*| = 0 \quad \text{(IV-4)}$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial t^*} + \frac{\partial V^*}{\partial X^*} = 0 \quad \text{(IV-5)}$$

$$K_f = \frac{fL_0}{D}$$

La velocidad de referencia v es arbitraria, pero físicamente corresponde a un valor en régimen permanente o cuasipermanente V_0 . Entonces:

$$C_a = \frac{V_0}{C}$$

Típicamente V_0 es del orden de 1 [m/sec] y C cercana a 1000 [m/sec]. Entonces generalmente $Ca \ll 1$.

La ec. (IV-4) puede escribirse:

$$\frac{\partial H^*}{\partial X^*} + \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + C_a V^* \left(\frac{\partial V^*}{\partial X^*} + \frac{K_f}{2} |V^*| \right) = 0 \quad \text{(IV-6)}$$

Es razonable aceptar que V^* y $\partial V^*/\partial X$ son del orden de la unidad. Pero en los casos más frecuentes K_f es mucho mayor que la unidad y entonces $\partial V^*/\partial X \ll (K_f/2) |V^*|$, de donde se puede dar una versión simplificada de la ec. (IV-6):

$$\frac{\partial H^*}{\partial X^*} + \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + C_a \frac{K_f}{2} V^* |V^*| = 0 \quad \text{(IV-7)}$$

Esta simplificación, aparentemente, fué introducida primeramente por Allievi.

Por último si se mantiene $C_a \ll 1$ y la fricción es despreciable:

$$\frac{\partial H^*}{\partial X^*} + \frac{\partial V^*}{\partial t^*} = 0 \quad \text{(IV-8)}$$

Eliminando sucesivamente V^* y H^* entre las ecs. (IV-5) y (IV-8) se obtienen:

$$\frac{\partial^2 H^*}{\partial X^{*2}} = \frac{\partial^2 H^*}{\partial t^{*2}} \quad \text{(IV-9)}$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial X^{*2}} = \frac{\partial^2 V^*}{\partial t^{*2}} \quad \text{(IV-10)}$$

Retomando las variables originales:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad \text{(IV-11)}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad \text{(IV-12)}$$

Se reconoce de inmediato la ecuación de las cuerdas vibrantes de D'Alembert. Las soluciones son de la forma $F(X \pm C t)$, esto es, representan ondas que se propagan con una celeridad C hacia aguas arriba y hacia aguas abajo.

En el caso de las ondas en régimen impermanente se les llama ondas de Joukowski.

IV.4 SOLUCION DE LAS ECUACIONES:

Se empleará aquí el método de las características en la versión dada por Wylie y Streeter en 1978 ([37]).

El ducto se supone de largo L_0 . El extremo de aguas arriba está a una distancia vertical Z_0 respecto al extremo de aguas abajo (ver croquis de la Figura IV-1).

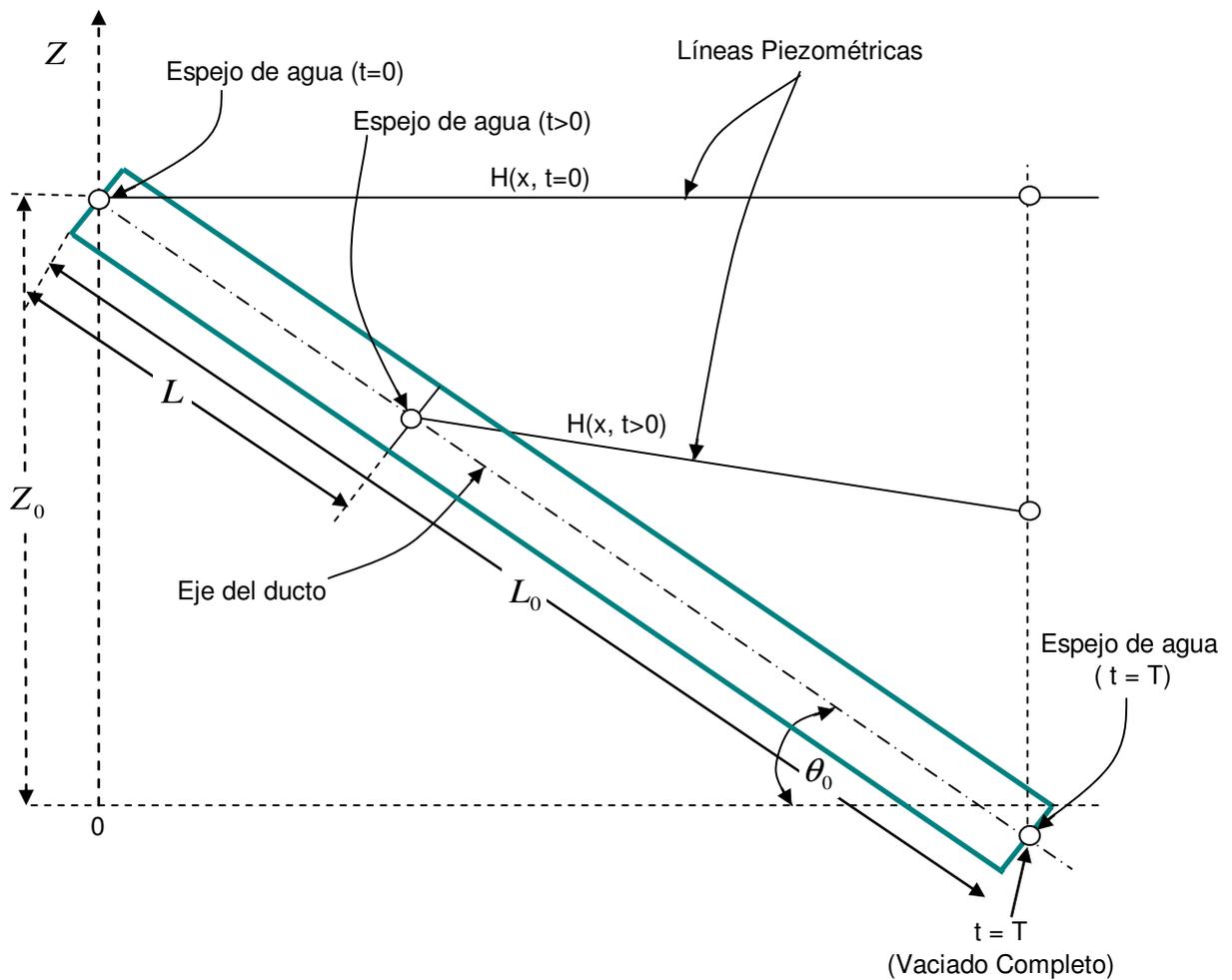


Figura IV-1. Esquema del vaciado de un ducto

Se supone que la tubería está dividida en N tramos lo que define $NS = N + 1$ puntos.

La longitud de los tramos es:

$$\Delta x = \frac{L_0}{N}$$

Se supone que en un instante dado $H(X, t)$ y $Q(X, t)$ ($Q = V A$) son dados.

Los valores en el instante siguiente $t = t + \Delta t$ están dados para $I(2, N)$ por:

$$HP(I) = CP - BQP(I) \quad \text{(IV-13)}$$

$$HP(I) = CM + BQP(I) \quad \text{(IV-14)}$$

$$CP = H(I-1) + Q(I-1)[BQ(I-1) - R|Q(I-1)|] \quad \text{(IV-15)}$$

$$CM = H(I-1) - Q(I+1)[BQ(I+1) - R|Q(I+1)|] \quad \text{(IV-16)}$$

En donde:

$$B = \frac{C}{gA}$$

$$R = \frac{f\Delta X}{2gDA^2}$$

ELECCIÓN DEL PASO TEMPORAL:

Para asegurar la estabilidad del cálculo se busca cumplir con la condición de Courant, tomando:

$$\Delta t = \frac{\Delta X}{C}$$

Se requieren para cerrar el problema una condición inicial CI y condiciones de frontera CF1 y CF2

CONDICIONES ADICIONALES DE CIERRE:

1) Condición inicial CI:

Para $t = 0$ el ducto se encuentra lleno y abierto aguas arriba. Aguas abajo existe una válvula cerrada.

Para $t > 0$ la válvula se abre bruscamente.

Por lo tanto:

$$H(X, 0) = Z_0 I(1, NS)$$

2) Puntos interiores:

Se calculan H y Q mediante las ecs. (IV-13) a (IV-16); $N(2, NS)$

3) Condición de frontera aguas abajo CF2 ($t > 0$):

La presión $HP(NS)$ inmediatamente aguas arriba de la válvula y el caudal $QP(NS)$ están controlados por la válvula:

$$HP(NS) = CP - BQP(NS)$$

$$CP = H(N) + Q(N)[BQ(N) - R|Q(N)|]$$

$$HP(NS) = K_s \frac{QP(NS)^2}{2gA^2}$$

K_s : Coeficiente de pérdidas a la salida cuando la válvula está abierta.

De las ecuaciones dadas pueden calcularse $QP(NS)$ y $HP(NS)$.

4) Condición de frontera aguas arriba CF1 ($t > 0$):

La presión relativa en el espejo de agua es siempre nula. Entonces:

$$HP(1) = Z_0 = CM + BQP(1)$$

$$CM = H(2) - Q(2)[BQ(2) - R|Q(2)|]$$

Entonces puede calcularse $QP(1)$.

5) Actualización:

$$H(I) = HP(I); \quad Q(I) = HP(I)I(1, NS)$$

6) Continuación:

Ahora puede repetir el cálculo desde el paso 2, haciendo $t = t + \Delta t$.

PROBLEMA DE LA FRONTERA MÓVIL:

El espejo líquido de aguas arriba se mueve hacia aguas abajo con una velocidad instantánea Q_1/A y entonces el tramo líquido no puede mantener un largo constante, sino decreciente a lo largo del tiempo.

Para afrontar este problema se ha ideado aquí el siguiente algoritmo:

1. En el instante inicial $t = 0$ las coordenadas de la superficie libre de aguas arriba son ($L = 0, Z = Z_0$).
2. A partir de $t > 0$ se corrigen estas coordenadas mediante las fórmulas siguientes:

$$L = L + \frac{QP(1)}{A} \Delta t$$

$$Z_0 = Z_0 - \frac{QP(1)}{A} \Delta t \sin(\theta_0)$$

L representa la parte del tubo que se ha vaciado, medida desde aguas arriba.

3. Cuando se alcanza $L \geq \Delta X$ se hace $N_0 = N_0 + 1$
4. Los cálculos se realizan tomando N_0 como nueva sección inicial, tanto para el cálculo de los puntos interiores como para la CF1.
5. El cálculo se repite hasta que $L \cong L_0$ (ducto vacío). En ese instante el tiempo t será cercano al tiempo de vaciado T .

IV.5 RESULTADOS:

Se han realizados un pequeño número de simulaciones numéricas, de modo de ejemplificar los métodos expuestos.

Como la velocidad de las ondas está presente, se producen al inicio del cálculo notorios movimientos ondulatorios hacia aguas arriba y hacia aguas abajo. Pasado un cierto tiempo estas oscilaciones se hacen imperceptibles y el escurrimiento se comporta como en el modelo de columna rígida.

Se han tomado en cuenta eventuales efectos de cavitación así como separación y ulterior colapso de columna empleando un algoritmo debido a Wylie y Streeter [37] (1978). Enfoques más complejos pueden verse en Cabrera y Fanelli ([7] (1991)).

Las simulaciones realizadas tienen como valores comunes:

$$\sin(\theta_0) = 1/10$$

$$f_0 = f = 0.015$$

Los resultados se resumen en la Tabla IV-1.

S#1	Kf	Ks	Zo [m]	Ca	T*1	L*1	T*2	T*3	εT
1	10	10	1	1.0E-3	178	0.28	815.0	819.6	1.2
2	10	10	10	3.2E-3	54	0.26	257.5	259.2	0.7
3	10	10	100	1.0E-2	30	0.49	81.4	82.0	0.6
4	100	100	10	1.0E-3	22	0.04	816.6	819.6	0.4
5	100	100	100	3.0E-3	16	0.09	258.0	259.2	0.4
6	100	0	100	4.4E-3	13	0.10	115.8	112.9	2.5
7	0	100	100	4.4E-3	19	0.15	224.1	225.8	0.7

Tabla IV-1. Cálculo de la discrepancia entre ambos modelos.

T*1: Tiempo adimensional para el cual se hacen imperceptibles las ondas;

L*1: Longitud adimensional medida desde aguas arriba para la cual se hacen imperceptibles las ondas;

T*2: Tiempo adimensional de vaciado según el método de las características;

T*3: Tiempo adimensional de vaciado según el modelo de columna rígida con inercia;

εT: Discrepancia porcentual entre ambos métodos.

εT está definida como:

$$\epsilon T = 100 \left| \frac{T^*_2}{T^*_3} - 1 \right|$$

El examen de la Tabla IV-1 muestra que, pese a que el lapso en que las ondas son relevantes es relativamente extendido (ver, como caso extremo, la S#4) y el range de variación de los parámetros, la discrepancia entre T^*_2 y T^*_3 es pequeña.

Si esta conclusión es generalizable, se concluiría que el fenómeno de vaciado es esencialmente descrito por el modelo de columna rígida que contempla inercia, fricción y singularidades.

CAPÍTULO V: VACIADO DE UN DUCTO HORIZONTAL

V.1 PRESENTACION Y ANTECEDENTES

Este problema se refiere a un tubo de longitud L mucho mayor que el diámetro D_0 del ducto supuesto circular.

Ya que la velocidad aguas arriba lejos de la salida del tubo es nula, ya sea porque la longitud del ducto es muy grande o bien porque existe un tapón o una pared rígida, para que salga el líquido es necesario que entre aire, produciéndose una onda que avanza hacia aguas arriba (Figura V-1).

Este problema ha sido estudiado desde hace ya algunas décadas.

Un antecedente importante y que, por lo demás, será la base del presente estudio, es el trabajo teórico realizado por Brooke Benjamín [3] (1968). Al respecto Zukoski [39] (1966) hizo un trabajo experimental muy completo. Existe una analogía importante en este problema con el del movimiento de una burbuja relativamente larga y voluminosa en un tubo horizontal dotado de un flujo líquido (Fuentes [19], 1969). Más recientemente el problema ha sido retomado por Bychkov [6] (1997).

V.2 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL VACIADO

Se supone que el escurrimiento es incompresible e invíscido. El flujo es impermante para un observador fijo en el terreno (Figura V-1).

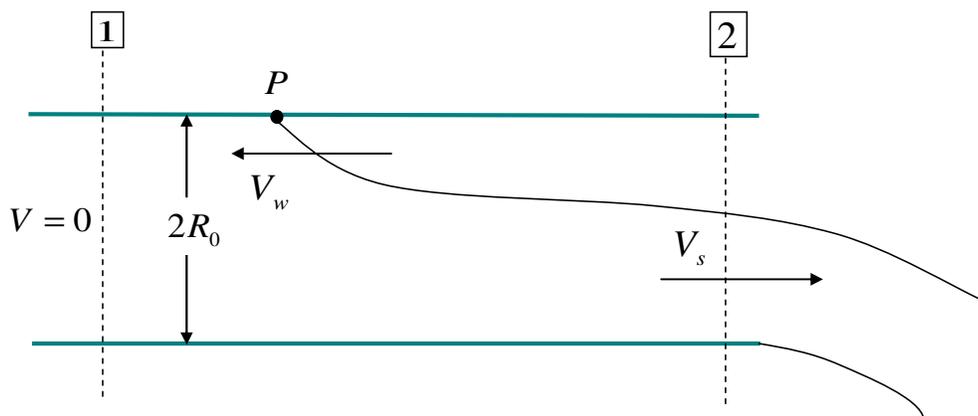


Figura V-1. Esquema del vaciado de un ducto horizontal.

Este observador ve el flujo con velocidad nula lejos aguas arriba (Sección 1).

Asimismo observa que el frente de la cavidad gaseosa viaja hacia aguas arriba con una velocidad (velocidad de la onda).

Finalmente ve, al final del tubo que el líquido sale por la sección 2 con una velocidad V_s .

El escurrimiento se convierte en uno pseudo permanente si el observador viaja con velocidad V_w (Figura V-2).

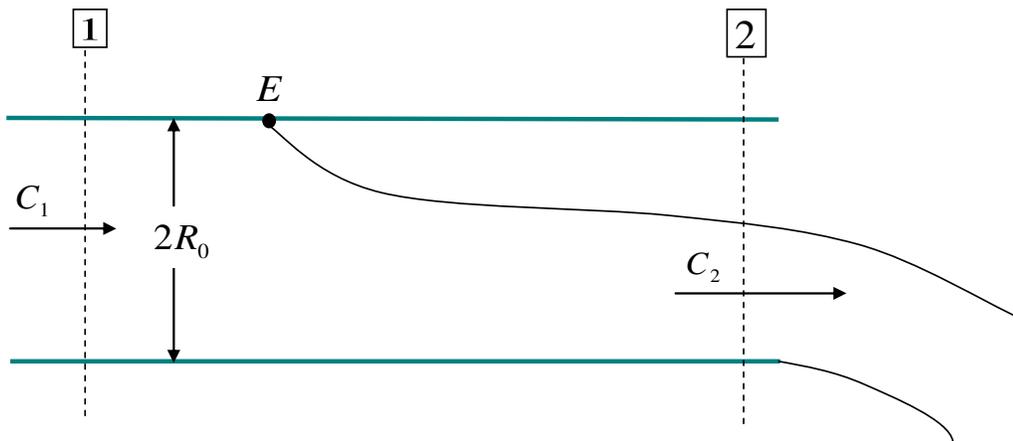


Figura V-2. Esquema del vaciado de un ducto horizontal, otro enfoque

Por lo tanto para obtener este escurrimiento pseudo permanente basta sumar hacia la derecha una velocidad C_1 tal que:

$$C_1 = V_w$$

En estas condiciones, en la sección 1:

$$C = C_1$$

El punto P se convierte en uno de estancamiento E:

$$C(E) = 0$$

En la Sección 2:

$$C = C_2 = C_1 + V_s$$

CONTINUIDAD:

$$C_1 A_1 = C_2 A_2 \quad \text{(V-1)}$$

A_1, A_2 : Área del líquido en las secciones 1 y 2, respectivamente (Figura V-3).

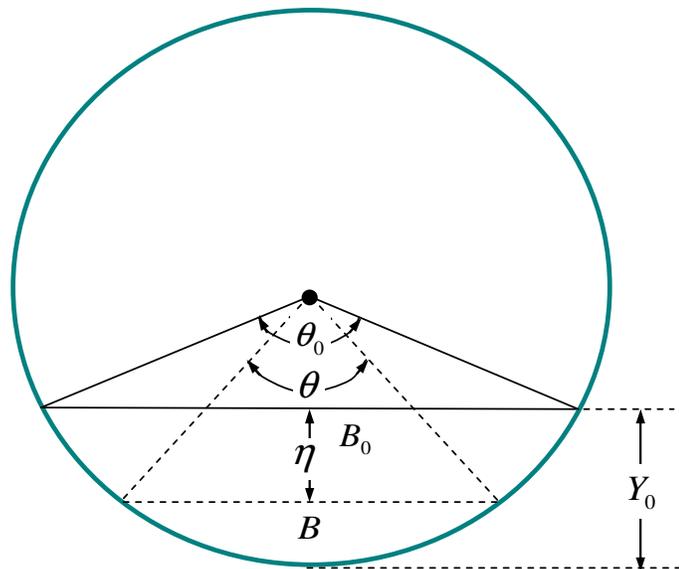


Figura V-3. Sección de salida del ducto

De la geometría del sistema (Figura V-3) se deduce:

$$C_1 \pi R_0^2 = C_2 \frac{R_0^2}{2} (\theta_0 - \sin \theta_0)$$

R_0 : Radio del tubo.

Se define:

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}(\theta_0 - \sin \theta_0) = \frac{A_2}{A_1} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{(V-2)}$$

ENERGÍA

Empleando la ecuación de Bernoulli entre el punto de estancamiento E y la sección de aguas abajo (sección 2):

$$2R_0 = \frac{C_2^2}{2g} + R_0 \left[1 - \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right]$$

De donde se puede expresar C_2 :

$$C_2^2 = 2gR_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right) \quad \text{(V-3)}$$

De la ecuación de Bernoulli entre aguas arriba (Sección 1) y el punto de estancamiento E:

$$P_1 + \frac{\rho}{2} C_1^2 = 0 \quad \text{(V-4)}$$

P_1 : Presión (hidrostática y uniforme) en la sección 1.

ρ : Densidad del líquido

ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO:

$$\dot{M} = F_1 - F_2 \quad \text{(V-5)}$$

\dot{M} : Flujo de cantidad de movimiento

F: Fuerza

En forma más explícita:

$$\rho C_2^2 A_2 - \rho C_1^2 A_1 = F_1 - F_2 = \int_1 P dA - \int_2 P dA \quad (\text{V-6})$$

Empleando las ecs. (V-1), (V-2), (V-3), (V-4), (V-5), (V-6) se obtiene:

$$\dot{M} = 2\pi\rho g R_0^3 \left(1 + \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) \lambda(1 - \lambda) \quad (\text{V-7})$$

Expresión de las fuerzas:

$$F = \int P dA = \rho g \int \eta dA = \rho g \int \eta B(\eta) d\eta \quad (\text{V-8})$$

$$\eta = R_0 \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - R_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$d\eta = -\frac{1}{2} R_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$B = 2R_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Reemplazando estas variables y realizando las integraciones:

$$F = -\rho g R_0^3 \left[\frac{2}{3} \sin^3(\theta/2) - \frac{1}{2} \cos(\theta/2)(\theta - \sin(\theta)) \right] \quad (\text{V-9})$$

Para F_1 hay que integrar sobre la sección entera $\theta(2\pi,0)$ y hay que agregar la fuerza proveniente de la presión uniforme P_1 :

$$F_1 = P_1 \pi R_0^2 + \rho g \pi R_0^3$$

Empleando las ecs. (V-2), (V-3), (V-4) y simplificando:

$$F_1 = \pi \rho g R_0^3 (1 - \lambda^2 (1 + \cos(\theta_0/2)))$$

Para F_2 hay que integrar sobre la sección $(\theta_0, 0)$. Después de simplificar:

$$F_2 = \rho g R_0^3 \left[\frac{2}{3} \sin^3(\theta_0/2) - \pi \lambda \cos(\theta_0/2) \right]$$

Reemplazando las fuerzas en la ec.(V-5) y empleando la ec. (V-7) se encuentra, después de simplificar:

$$\lambda [2 + \cos(\theta_0/2)(1 - \lambda)] + \frac{2}{3\pi} \sin^3(\theta_0/2) - 1 = 0 \quad \text{(V-10)}$$

La solución se encuentra por aproximaciones sucesivas. Resulta:

$$\theta_0 \cong 194,4347^\circ$$

Dado que todos los parámetros del escurrimiento se pueden expresar como funciones de θ_0 , el problema está resuelto.

V.3 VACIADO PARCIAL DEL TUBO:

El frente de onda o frente de la cavidad avanza hacia aguas arriba a una velocidad C_1 . Combinando las ecs. (V-2) y (V-3) :

$$C_1 = \lambda \sqrt{2gR_0(1 + \cos(\theta_0/2))}$$

Reemplazando el valor de λ :

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} (\theta_0 - \sin(\theta_0)) \sqrt{2gR_0(1 + \cos(\theta_0/2))}$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi}(\theta_0 - \sin(\theta_0))\cos(\theta_0/4)\sqrt{gR_0}$$

En términos adimensionales:

$$C_1^* = \frac{C_1}{\sqrt{gR_0}} = \frac{1}{\pi}(\theta_0 - \sin(\theta_0))\cos(\theta_0/4) \cong 0,7666857 \quad \text{(V-11)}$$

Empleando la ec. (V-2):

$$C_2^* = \frac{C_1^*}{\lambda} \cong 1,322397 \quad \text{(V-12)}$$

Si el largo del tubo (supuesto cerrado por un tapón en el extremo de aguas arriba) es L , el tiempo T_1 en que la cavidad llega al extremo de aguas arriba es:

$$T_1 = \frac{L}{C_1} = \frac{L}{C_1^* \sqrt{gR_0}} \cong 1,304315 \frac{L}{\sqrt{gR_0}} \quad \text{(V-13)}$$

En variables adimensionales:

$$T_1^* = \frac{\sqrt{gR_0}}{L} T_1 \cong 1,304315 \quad \text{(V-14)}$$

Es obvio que el tiempo T_1 corresponde a un vaciado parcial del tubo. En el hecho, solamente se ha vaciado una fracción del líquido original igual a:

$$\frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}$$

De la ec. (V-2):

$$\frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{2\pi}(\theta_0 - \sin(\theta_0)) \cong 0,4202303$$

NÚMERO DE FROUDE:

La velocidad de una onda de gravedad progresiva se expresa como (Domínguez [14]):

$$C = \sqrt{g \frac{A}{B}} = \sqrt{gR_0 \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\sin(\theta_0/2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{gR_0 \frac{\theta_0 - \sin(\theta_0)}{\sin(\theta_0/2)}} \quad (\mathbf{V-15})$$

En variable adimensional:

$$C^* = \frac{C}{\sqrt{gR_0}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\sin(\theta_0/2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\theta_0 - \sin(\theta_0)}{\sin(\theta_0/2)}} \quad (\mathbf{V-16})$$

Entonces:

$$C^* = 0,9581094$$

Definiendo el número de Froude como:

$$Fr_2 = \frac{V_s}{C}$$

De donde:

$$Fr_2 = \frac{C_2 - C_1}{C} = \frac{C_2^* - C_1^*}{C^*} = 0,580008 \quad (\text{Subcrítico}) \quad (\mathbf{V-17})$$

Es de hacer notar que Brooke Benjamin [3] define Fr_2 a partir de C_2 y entonces obtiene:

$$Fr_2 = 1,328 \quad (\text{Supercrítico})$$

Obviamente, esto es un problema de puntos de vista.

CAPÍTULO VI: VACIADO DE UN TANQUE CILINDRICO DE SECCIÓN CONSTANTE

VI.1 INTRODUCCIÓN

El problema del escurrimiento de un tanque por un orificio basal ha sido estudiado desde hace mucho tiempo. En el hecho las más antiguas clepsidras o relojes de agua eran aparatos para medir el tiempo requerido para vaciar un tanque lleno con agua y poseían marcas para observar las variaciones de nivel. Estos aparatos fueron diseñados por los chinos 3000 años A.C. y por los egipcios 1500 años A.C. [40].

Aún considerando régimen permanente la determinación de las dimensiones de la vena contracta fué un problema mayor durante siglos (Levi [27]). Como no se tenía clara la noción de red de escurrimiento (Figura VI-1), se postulaba que el líquido caía en bloque. A este patrón se le llamaba catarata (Figura VI-2).

Respecto al coeficiente de gasto y/o de contracción este está mal definido en un chorro que cae por gravedad, ya que él va acelerándose (Figura VI-3). Newton [29] determinó experimentalmente el coeficiente de contracción y dio el valor $C_c = (21/25)^2 = 0.7056$. El mismo Newton observa que este valor es cercano a $1/\sqrt{2}$. Solamente en el siglo XIX Kirchoff demostró que para un chorro plano invíscido en ausencia de fuerzas gravitatorias $C_c = \pi/(\pi+2)$ (Domínguez [14]).

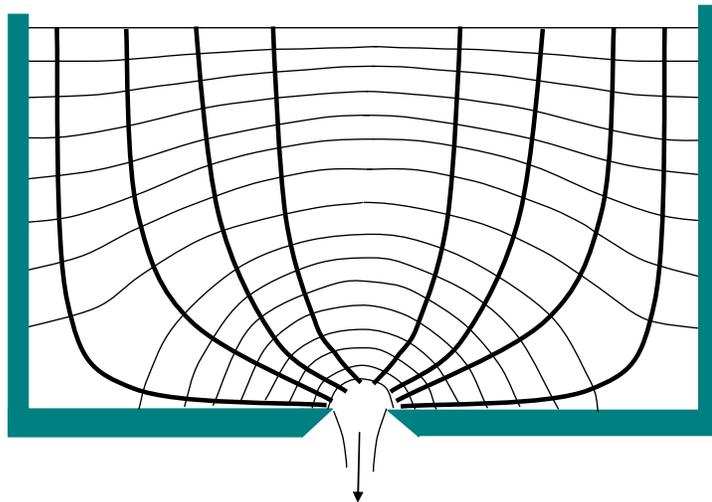


Figura VI-1. Red de escurrimiento del vaciado de un tanque

(Adaptado de Chanson et al. [10])

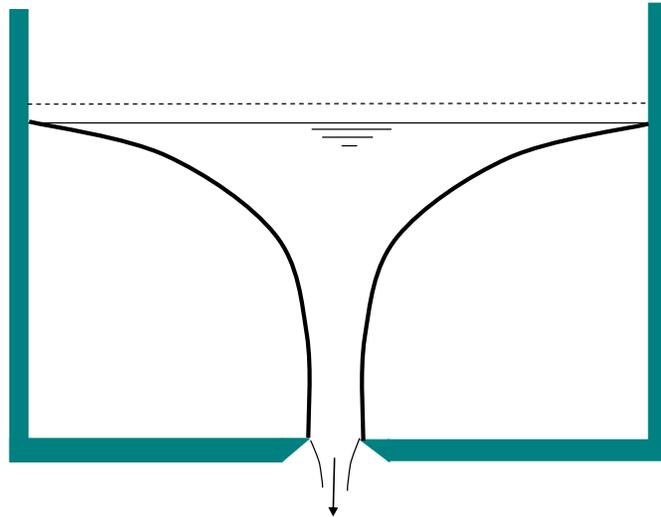


Figura VI-2. Visión antigua sobre el patrón de vaciado “Catarata”
 (Adaptado de Newton [29])

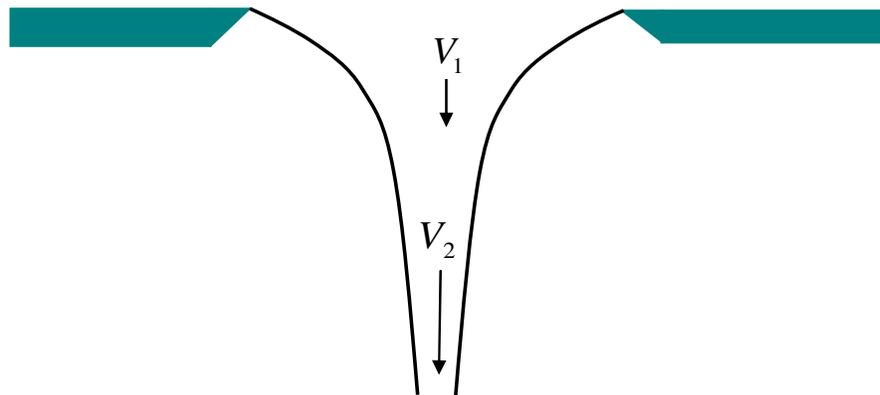


Figura VI-3. Aceleración de un chorro que cae por gravedad

En el caso del régimen impermanente, las investigaciones sistemáticas son pocas. Un trabajo notable y reciente es el realizado por Chanson et al. [10] en el cual se determinan diferentes parámetros del escurrimiento de un líquido que escapa por una ranura en el fondo de un tanque rectangular. El análisis de Chanson et al. muestra que el escurrimiento es muy complejo: existe en los primeros momentos un flujo con arrastre de aire con estallidos, posteriormente se forma un escurrimiento semipermanente y, finalmente, un flujo de vertedero hacia la ranura.

Se ha decidido estudiar un caso muy simplificado (Figura VI-4):

- El escurrimiento es incompresible, invíscido y gravitatorio

- El tanque es un cilindro circular de eje vertical
- La salida del líquido se realiza por una tobera perfilada en la que no se producen ni separaciones ni pérdidas de carga.
- La salida del tanque, inicialmente cerrada, se abre bruscamente. Entonces las condiciones iniciales son:

$$t = 0, V = 0, Z = Z_0$$

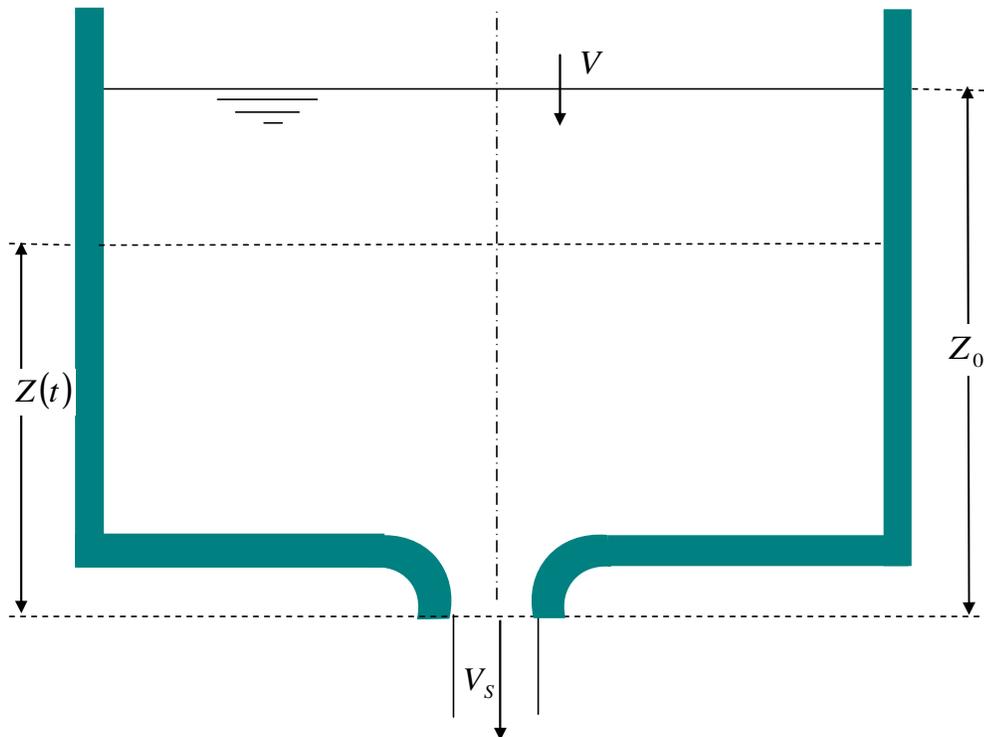


Figura VI-4. Esquema del vaciado de un tanque, identificación de parámetros.

VI.2 ECUACIONES DEL MODELO

Elas se obtienen de algunas relaciones empleadas en el Capítulo II:

CONTINUIDAD:

$$Q(t) = A_0 V = A_s V_s \quad \text{(VI-1)}$$

$$V = -\frac{dZ}{dt}$$

ENERGÍA:

$$Z + \frac{V^2}{2g} = \frac{V_s^2}{2g} + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \quad \text{(VI-2)}$$

Donde:

A_0 : Área transversal del tanque

A_s : Área transversal de la tobera de salida

V_s : Velocidad de salida por la tobera inferior

Eliminando la velocidad de salida:

$$Z = \left[\left(\frac{A_0}{A_s} \right)^2 - 1 \right] \frac{V^2}{2g} + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \quad \text{(VI-3)}$$

Para obtener una versión adimensional de la ecuación anterior, se puede adaptar el análisis inspeccional realizado en el Capítulo II:

$$Z^* = \frac{Z}{Z_0}$$

$$V^* = \frac{V}{\sqrt{2gZ_0}}$$

$$t^* = \frac{t}{\tau} = t \sqrt{\frac{2g}{Z_0}}$$

$$Z^* = (N^2 - 1)V^{*2} + 2Z^* \frac{dV^*}{dt} \quad \text{(VI-4)}$$

$$N = \frac{A_0}{A_s}$$

VI.3 VELOCIDAD DE VACIADO

Análogamente como en el Capítulo II, se puede obtener una ecuación que es lineal en V^{*2} . Reemplazando las variables adimensionales en la ec. (VI-3) se obtiene:

$$\frac{dV^{*2}}{dZ^*} - \frac{N^2 - 1}{Z^*} V^{*2} = -1 \quad \text{(VI-5)}$$

Esta ecuación se integra fácilmente (Spiegel [32]). Impuesta la condición inicial resulta:

$$V^* = \frac{1}{\sqrt{N^2 - 2}} \sqrt{Z^* - Z^{*(N^2-1)}} \quad \text{(VI-6)}$$

Se observa que si $N^2 > 2$ la curva $V^* - Z^*$ es una parábola que se anula para $Z^* = 1$ y para $Z^* = 0$. Empero para $N^2 = 2$ aparece una indeterminación.

Esta indeterminación puede levantarse mediante la aplicación de la regla de L'Hopital y se obtiene:

$$V^*(N^2 = 2) = \sqrt{Z^* \ln(1/Z^*)} \quad \text{(VI-7)}$$

Otro caso límite de interés es $N^2 = 1$. En esa situación la columna líquida cae libremente. Haciendo $N^2 = 1 + \Delta$ ($\Delta \ll 1$) en la ec.(VI-6) y pasando al límite se encuentra:

$$V^*(N^2 = 1) = \sqrt{1 - Z^*} \quad \text{(VI-8)}$$

Para $Z^* = 1$ $V^* = 0$ y para $Z^* = 0$ entonces $V^* = 1$, esto es:

$$V = \sqrt{2gZ_0}$$

o sea, se recupera la fórmula de Torricelli.

Estas curvas V^* - Z^* ostentan un máximo, salvo para la de caída libre ($N^2 = 1$).

Estos máximos se obtienen fácilmente de las ecs. 6 y 7:

$N^2 > 2$:

$$(Z^*)_{MAX} = (N^2 - 1)^{1/(2-N^2)}$$

$$(V^*)_{MAX} = \sqrt{(N^2 - 1)^{(N^2-1)/(2-N^2)}}$$

Para $N^2 = 2$:

$$(Z^*)_{MAX} = \exp(-1)$$

$$(V^*)_{MAX} = \exp(-1/2)$$

Las curvas correspondientes V^* - Z^* se muestran sobre la Figura VI-5.

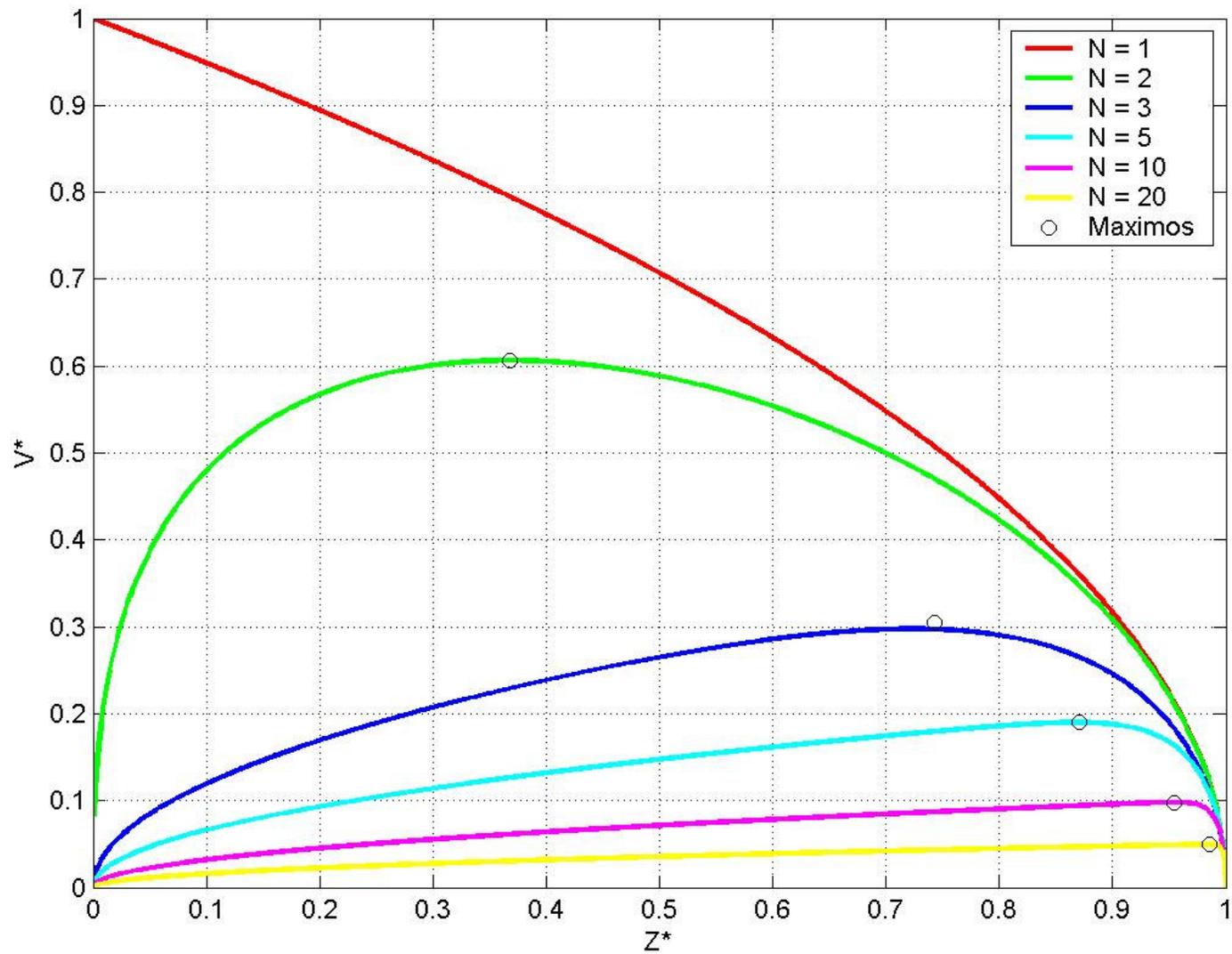


Figura VI-5: Velocidades de vaciado en un tanque cilíndrico, relación con la razón de áreas “N”

VI.4 TIEMPO DE VACIADO

Este puede expresarse a partir de la ec. (VI-6):

$$t^* = -\sqrt{N^2 - 2} \int_0^{Z^*} \frac{dZ^*}{\sqrt{Z^* - Z^{*N^2-1}}} + C$$

Imponiendo la condición inicial se encuentra:

$$t^* = -\sqrt{N^2 - 2} \int_0^{Z^*} \frac{dZ^*}{\sqrt{Z^* - Z^{*N^2-1}}} \quad \text{(VI-9)}$$

El itinerario de vaciado puede encontrarse solamente por vía numérica, este se muestra en la Figura VI-6.

VI.5 TIEMPO TOTAL DE VACIADO

Pero es posible expresar el tiempo total de vaciado empleando el mismo método que se usó en el Capítulo II. Entonces:

$$T^* = \sqrt{N^2 - 2} \int_0^1 \frac{dZ^*}{\sqrt{Z^* - Z^{*N^2-1}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{N^2 - 2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} \frac{1}{N^2 - 2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \frac{N^2 - 1}{N^2 - 2}\right)} \quad \text{(VI-10)}$$

En la Figura VI-7 se puede apreciar la dependencia de T* con N.

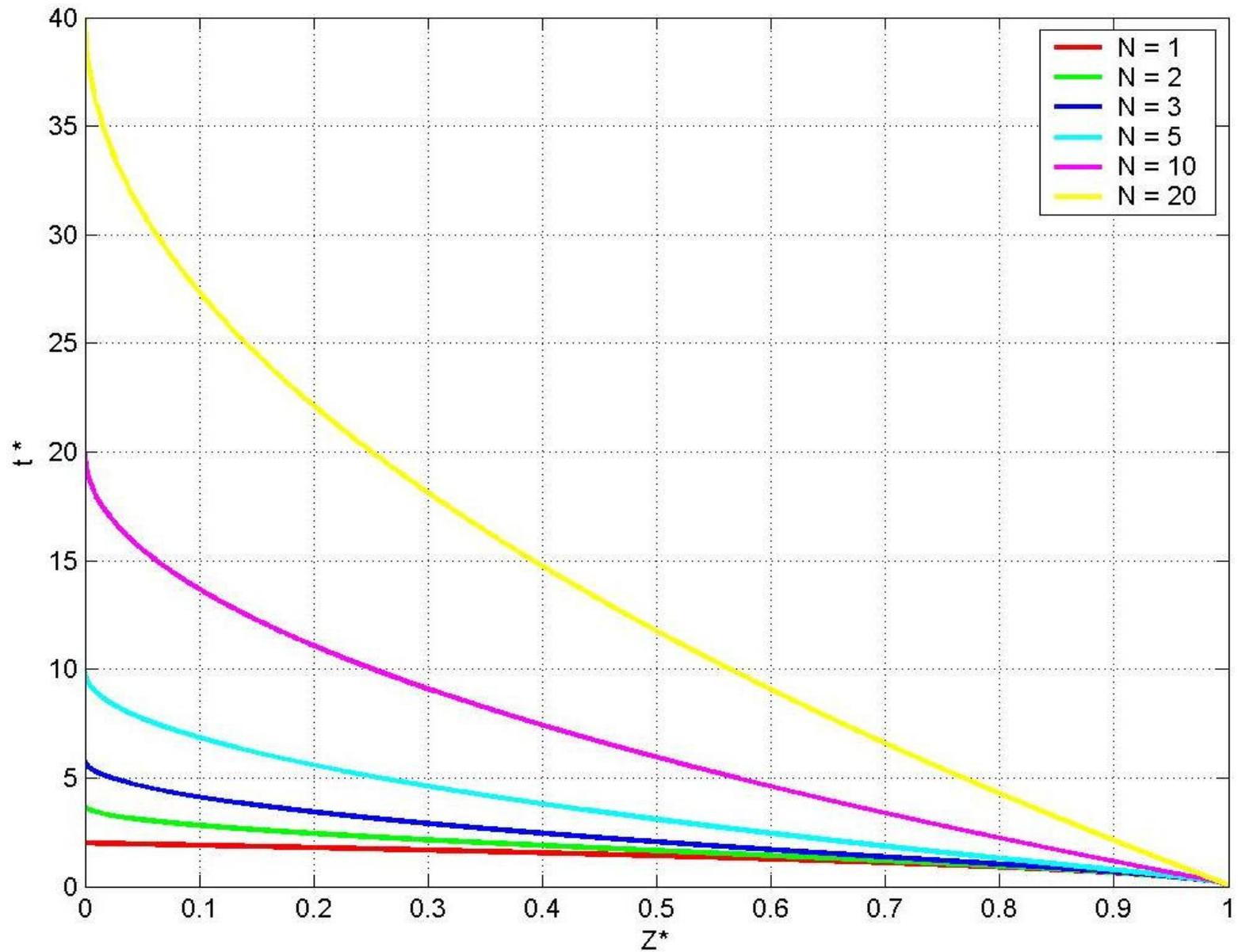


Figura VI-6: Tiempos de vaciado en un tanque cilíndrico, relación con la razón de áreas “N”

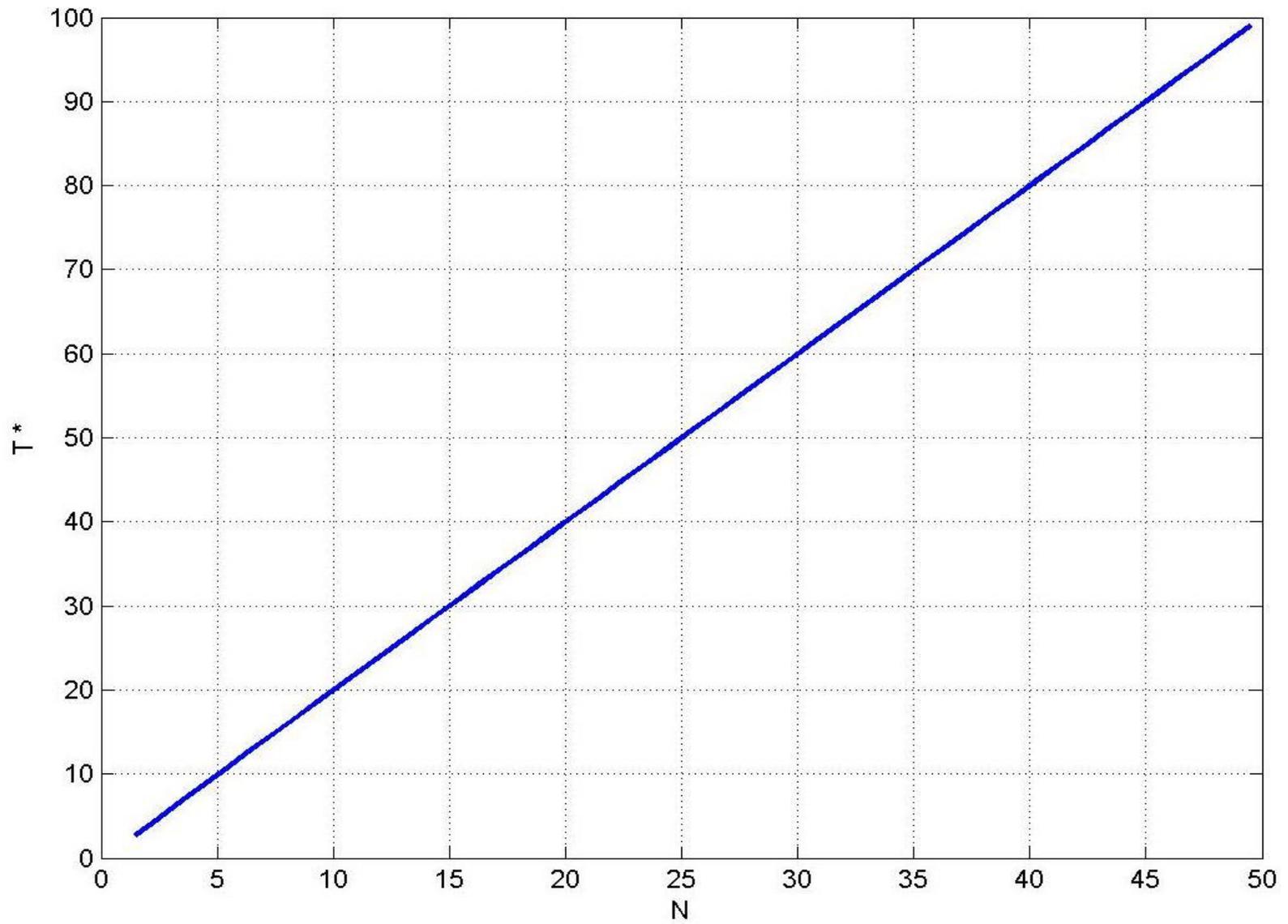


Figura VI-7: Tiempo total de Vaciado en un tanque cilíndrico, relación con la razón de áreas “N”

VI.6 VALIDEZ DE LA APROXIMACIÓN CUASIESTÁTICA

El problema es determinar las circunstancias necesarias para que la aproximación cuasiestática sea válida. En otras palabras bajo cuales condiciones la fórmula de Torricelli se cumple localmente.

Si la aproximación de Torricelli fuese valedera en toda situación entonces, de la ec.(VI-5) se obtendría:

$$(V^*)_{CS} = \sqrt{\frac{Z^*}{N^2 - 1}} \quad \text{(VI-11)}$$

cs: Cuasiestática

Este aspecto se estudia fácilmente introduciendo la variable siguiente:

$$\Phi = \frac{V^*}{(V^*)_{CS}}$$

Si Φ fuese igual a la unidad, el significado es que la fórmula de Torricelli se cumpliría localmente.

Ahora, es fácil deducir de las ecs. (VI-6) y (VI-11):

$$\Phi = \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{\sqrt{N^2 - 2}} \sqrt{1 - Z^{*(N^2 - 2)}} \quad \text{(VI-12)}$$

Esta función se muestra en la Figura VI-8 para valores de N entre 2 y 20.

Se observa que para N=20 la aproximación cuasiestática es válida para $Z^* < 0,99$.

En la práctica N puede ser mucho mayor que 20.

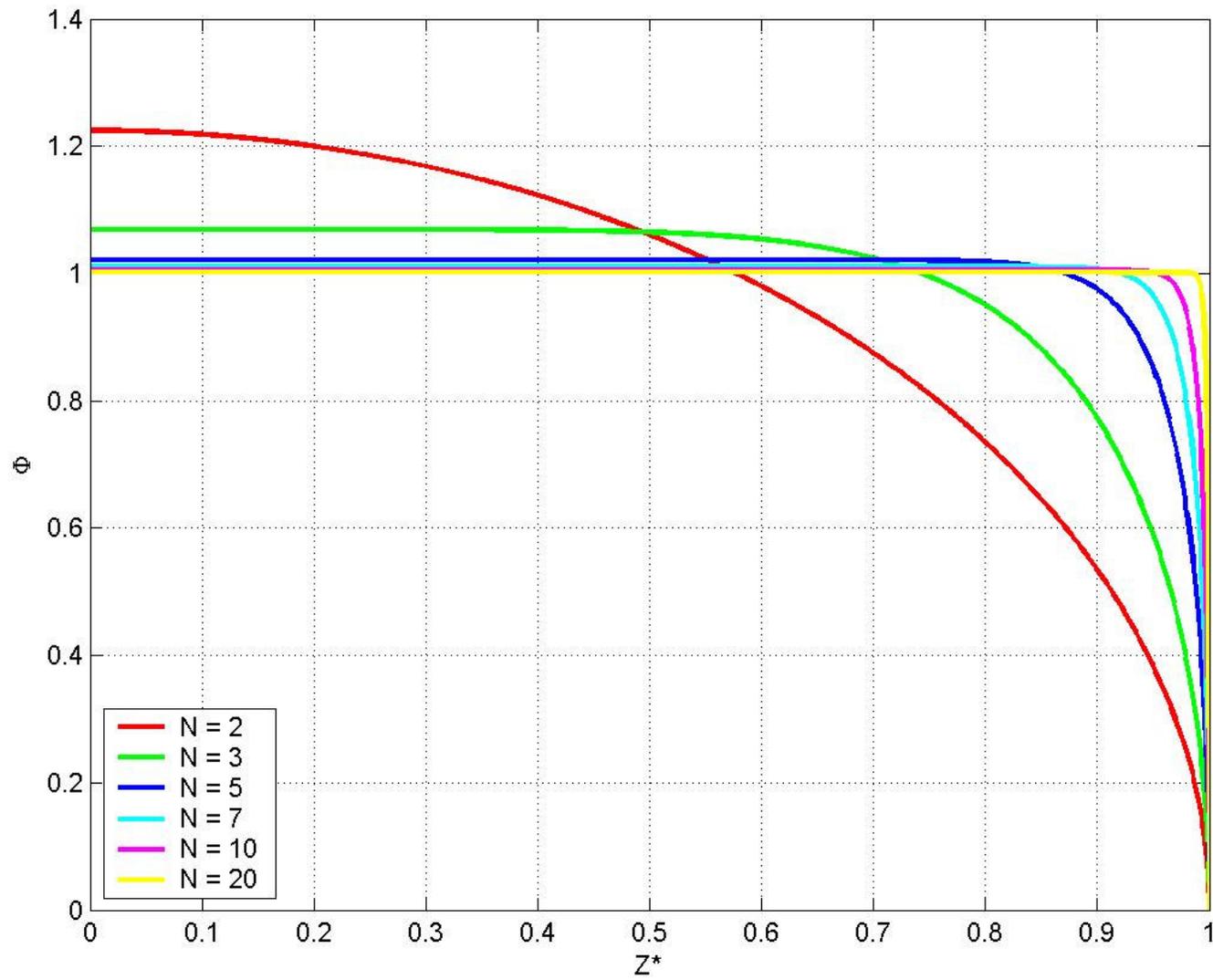


Figura VI-8: Validación de la formulación cuasiestática

CAPÍTULO VII: VACIADO DE UN TANQUE DE SECCION VARIABLE

VII.1 INTRODUCCIÓN

Esta situación se presenta en la práctica industrial frecuentemente (por ejemplo, camiones cisterna, tanques ferroviarios, etc.).

Empero, aquí el estudio se limitará a tanques verticales de revolución que vierten por el fondo.

Esto está cerca de los relojes hidráulicos o clepsidras y los casos que se estudiarán, para fijar ideas, se refieren a ellos.

Los relojes de agua o clepsidras más primitivos no eran cilíndricos, pero si de revolución (ver Figura VII-1 y Figura VII-2).



Figura VII-1. This alabaster water clock of King Amenhotep the Third has 12 carved columns of 11 false holes, corresponding to the hours of the night.

(Fuente: upload.wikimedia.org/en/f/f5/Korean-Waterclock.jpg.)



Figura VII-2. Scaled model of Jang Yeong-sil's Self-striking water clock

(Fuente: eternalegypt.org/EternalEgyptWebsiteWeb/HomeServlet)

ALGUNAS INFORMACIONES HISTÓRICAS:

Herón de Alejandría (c. 150 AC) afirma en un texto referente a los relojes de agua "como el agua es al agua así el tiempo es al tiempo".

El Dr. Hutton en una reedición de "Ozamam's Recreations" ([41], c. 1700) da una demostración geométrica indicando que para que las distancias entre las marcas del nivel de agua en una clepsidra sean iguales para intervalos de tiempo iguales se requiere que el perfil de la clepsidra sea una parábola de cuarto grado ($Z \cong R^4$).

Varignon [42] en 1699 estudió un método general para la graduación de una clepsidra cualquiera fuera su tamaño y forma.

Daniel Bernoulli [31] en 1724 ganó un premio otorgado por la Academia de Ciencias de París por el diseño de una clepsidra.

VII.2 ECUACIONES DEL MODELO:

Ellas se obtienen de algunas relaciones empleadas en el Capítulo II:

SIMPLIFICACIONES PREVIAS:

Ellas son, en su mayor parte, las mismas que en el caso del tanque cilíndrico ya estudiado.

- El escurrimiento es incompresible, inviscido y gravitatorio.
- La salida del líquido se realiza por una tobera perfilada en la que no se producen ni separaciones ni pérdidas de carga.
- La salida del tanque, inicialmente cerrada, se abre bruscamente. Entonces las condiciones iniciales son:

$$t = 0, \quad V = 0, \quad Z = Z_0$$

GEOMETRIA DE LA CLEPSIDRA:

Se puede describir como (ver Figura VII-3):

$$R = f(\zeta)$$

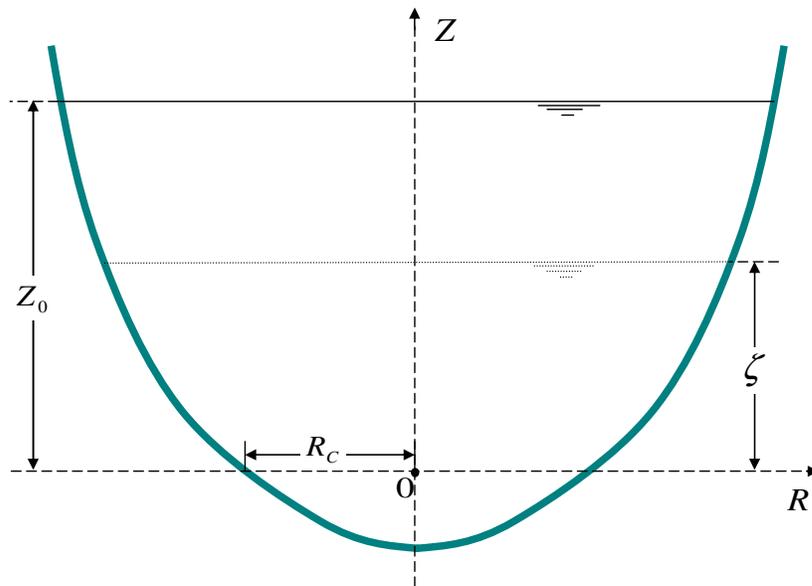


Figura VII-3. Esquema de un clepsidra, identificación de parámetros

Como siempre se trabaja con la superficie libre ($z = Z$) entonces, sin pérdida de generalidad;

$$R = f(Z)$$

En términos adimensionales:

$$R^* = \frac{R}{R_s} = R^*(Z^*)$$

Para $Z^* = 0$ (sección de salida de la clepsidra):

$$R^* = 1$$

Para $Z^* = 1$ (sección superior inicial llena):

$$R^* = \frac{R_0}{R_s}$$

Como es un cuerpo de revolución:

$$A^* = \frac{A}{A_s} = R^{*2}$$

$$A^{*2} = \left(\frac{A}{A_s}\right)^2 = R^{*4}$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD:

$$Q(t) = A(Z)V = A_s V_s \quad \text{(VII-1)}$$

$$V = -\frac{dZ}{dt}$$

ECUACIÓN DE ENERGÍA:

$$Z + \frac{V^2}{2g} = \frac{V_s^2}{2g} + \frac{Z}{g} \frac{dV}{dt} \quad \text{(VII-2)}$$

Donde:

$A(Z)$: Área transversal del tanque.

A_s : Área transversal de la tobera de salida.

V_s : Velocidad de salida por la tobera inferior.

Eliminando la velocidad de salida:

$$Z = \left[\left(\frac{A}{A_s} \right)^2 - 1 \right] \frac{V^2}{2g} + \frac{Z}{g} \frac{dV}{dt} \quad \text{(VII-3)}$$

Para obtener una versión adimensional de la ecuación anterior, se puede adaptar el análisis inspeccional realizado en el Capítulo II:

$$Z^* = \frac{Z}{Z_0}$$

$$R^* = \frac{R}{R_s}$$

$$V^* = \frac{V}{\sqrt{2gZ_0}}$$

$$t^* = \frac{t}{\tau} = t \sqrt{\frac{2g}{Z_0}}$$

Se define:

$$\Omega^*(Z^*) = \left(\frac{A}{A_s} \right)^2 - 1 = R^*(Z^*)^4 - 1 \quad \text{(VII-4)}$$

Entonces:

$$Z^* = \Omega^* V^{*2} + 2Z^* \frac{dV^*}{dt^*} \quad \text{(VII-5)}$$

Análogamente como en el Capítulo II, se puede obtener una ecuación que es lineal en V^* :

$$\frac{dV^{*2}}{dZ} - \frac{\Omega(Z^*)}{Z^*} V^{*2} = -1 \quad \text{(VII-6)}$$

Las condiciones iniciales son:

$$t^* = 0, \quad Z^* = 1, \quad V^* = 0$$

Se dará un ejemplo que tiene valor histórico.

VII.3 EJEMPLO A RESOLVER

Se supone:

$$\Omega(Z^*) = \left(\frac{A}{A_s} \right)^2 - 1 = a + bZ^*$$

$$Z^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega(0) = a = 0$$

$$Z^* = 1 \quad \Rightarrow \quad \Omega(1) = b = \left(\frac{A_0}{A_s} \right)^2 - 1 = N^2 - 1$$

Entonces:

$$\Omega(Z^*) = (N^2 - 1)Z^* \tag{VII-7}$$

PERFIL DE LA CLEPSIDRA:

Se deduce, de las ecs. (VII-4) y (VII-7):

$$Z^* = \frac{1}{N^2 - 1} (R^{*4} - 1)$$

Este perfil corresponde a una parábola de cuarto grado, como lo requiere Hutton ([41], c. 1700))

En la realidad las clepsidras se vacían por un orificio cuya sección A_s es mucho menor que la sección para el reloj lleno A_0 :

$$N = \frac{A_0}{A_s} \gg 1$$

En la Figura VII-4 se muestra el perfil de la clepsidra para $N=50$ y $N=100$.

Es de hacer notar la semejanza relativa con la antigua clepsidra coreana (Figura VII-2).

VII.4 VELOCIDAD DE VACIADO:

Introduciendo la ec. (VII-7) en la ec. (VII-6), aquella puede integrarse en forma exacta. Imponiendo la condición inicial y reordenando se obtiene:

$$V^* = \sqrt{\frac{1}{N^2 - 1} \{1 - \exp[-(N^2 - 1)(1 - Z^*)]\}} \quad \text{(VII-8)}$$

Existe una singularidad para $N^2 = 1$, pero ella se puede levantar y el resultado es:

$$V^* = \sqrt{1 - Z^*} \quad \text{(VII-9)}$$

Se reconoce la ley de caída de los graves de Galileo.

La velocidad final del agua en la clepsidra no es nula. En efecto:

$$Z^* = 0$$

$$V^* = \sqrt{\frac{1 - \exp[-(N^2 - 1)]}{N^2 - 1}} \quad \text{(VII-10)}$$

Para $N^2 \gg 1$:

$$V^* \cong \frac{1}{N}$$

La velocidad V^* como función de Z^* , para $N=50$ y $N=100$, se muestra en la Figura VII-5.

Es de hacer notar que, salvo en las primeras distancias cercanas al inicio la velocidad se mantiene notablemente constante.

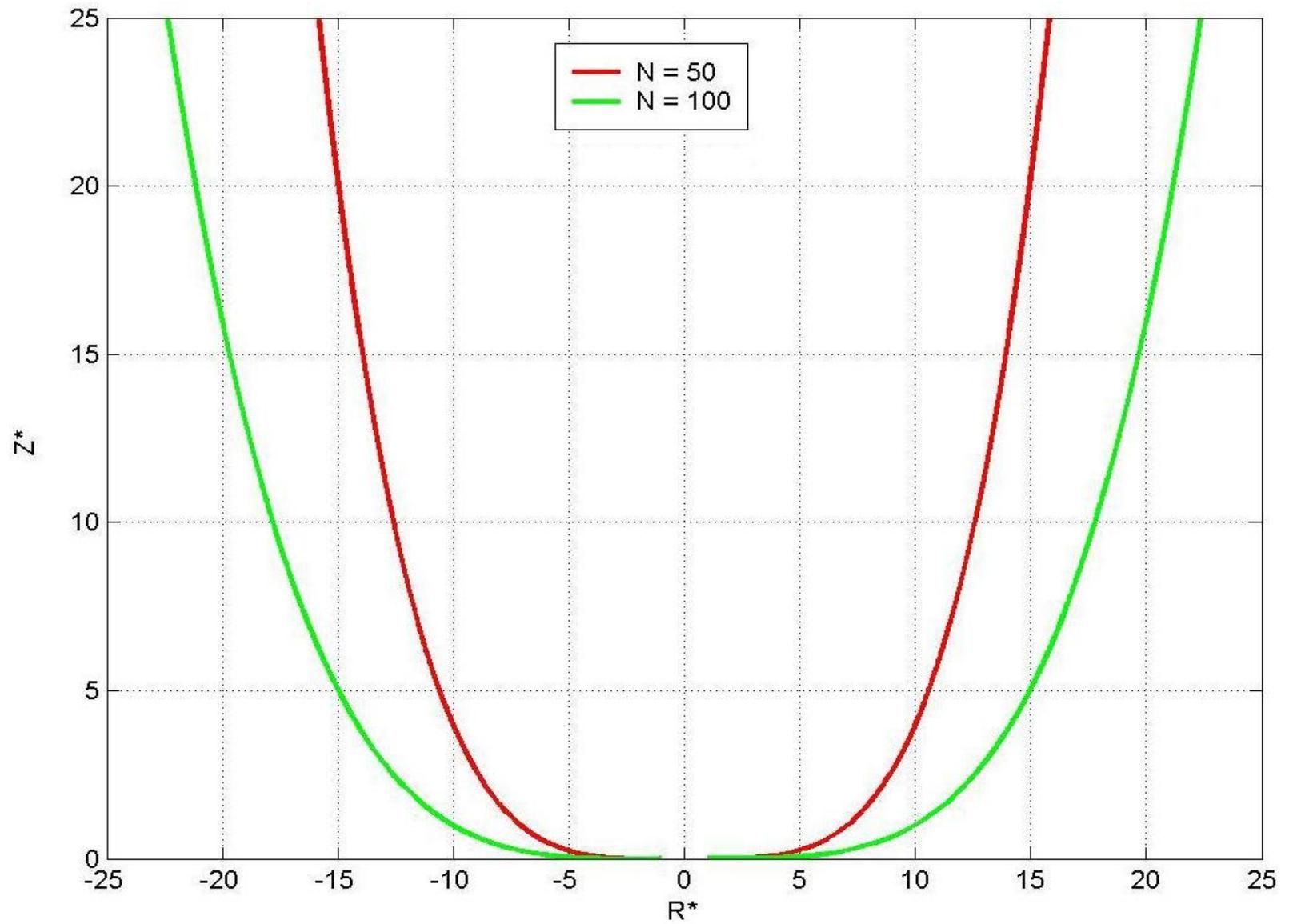


Figura VII-4. Perfil de la Clepsidra

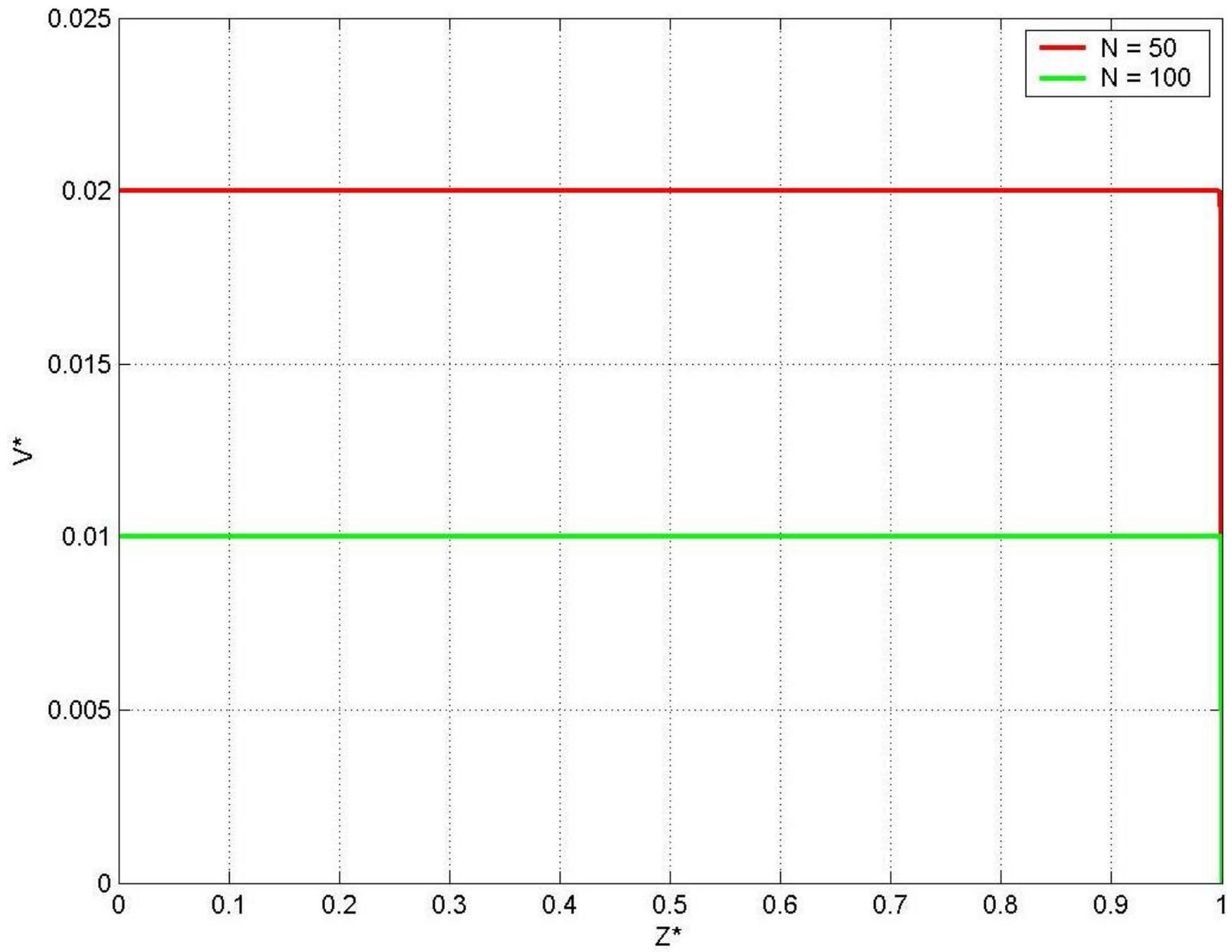


Figura VII-5. Velocidad de vaciado de la Clepida.

VII.5 ITINERARIO DE VACIADO:

Empleando la ec. (VII-8):

$$t^* = - \int^{Z^*} \frac{dZ^*}{\sqrt{\frac{1}{N^2 - 1} \{1 - \exp[-(N^2 - 1)(1 - Z^*)]\}}} + C \quad \text{(VII-11)}$$

Esta integral posee primitiva elemental, aunque es laborioso encontrarla. Introducida la condición inicial se encuentra:

$$t^* = - \frac{1}{\sqrt{N^2 - 1}} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - \exp[-(N^2 - 1)(1 - Z^*)]}}{1 + \sqrt{1 - \exp[-(N^2 - 1)(1 - Z^*)]}} \right\} \quad \text{(VII-12)}$$

Despejando Z^* , se encuentra el itinerario de la superficie libre superior Z :

$$Z^* = 1 - \frac{2}{N^2 - 1} \operatorname{Ln} \left[\cosh \left(\sqrt{N^2 - 1} \frac{t^*}{2} \right) \right] \quad \text{(VII-13)}$$

Para $N^2 \gg 1$:

$$Z^* = 1 + \frac{2 \operatorname{Ln}(2)}{N^2 - 1} - \frac{t^*}{\sqrt{N^2 - 1}} \quad \text{(VII-14)}$$

El itinerario se muestra en la Figura VII-6 y puede verse que es una línea recta, confirmando las afirmaciones de Hutton y de Heron de Alejandría realizadas hace 300 y 2000 años atrás.

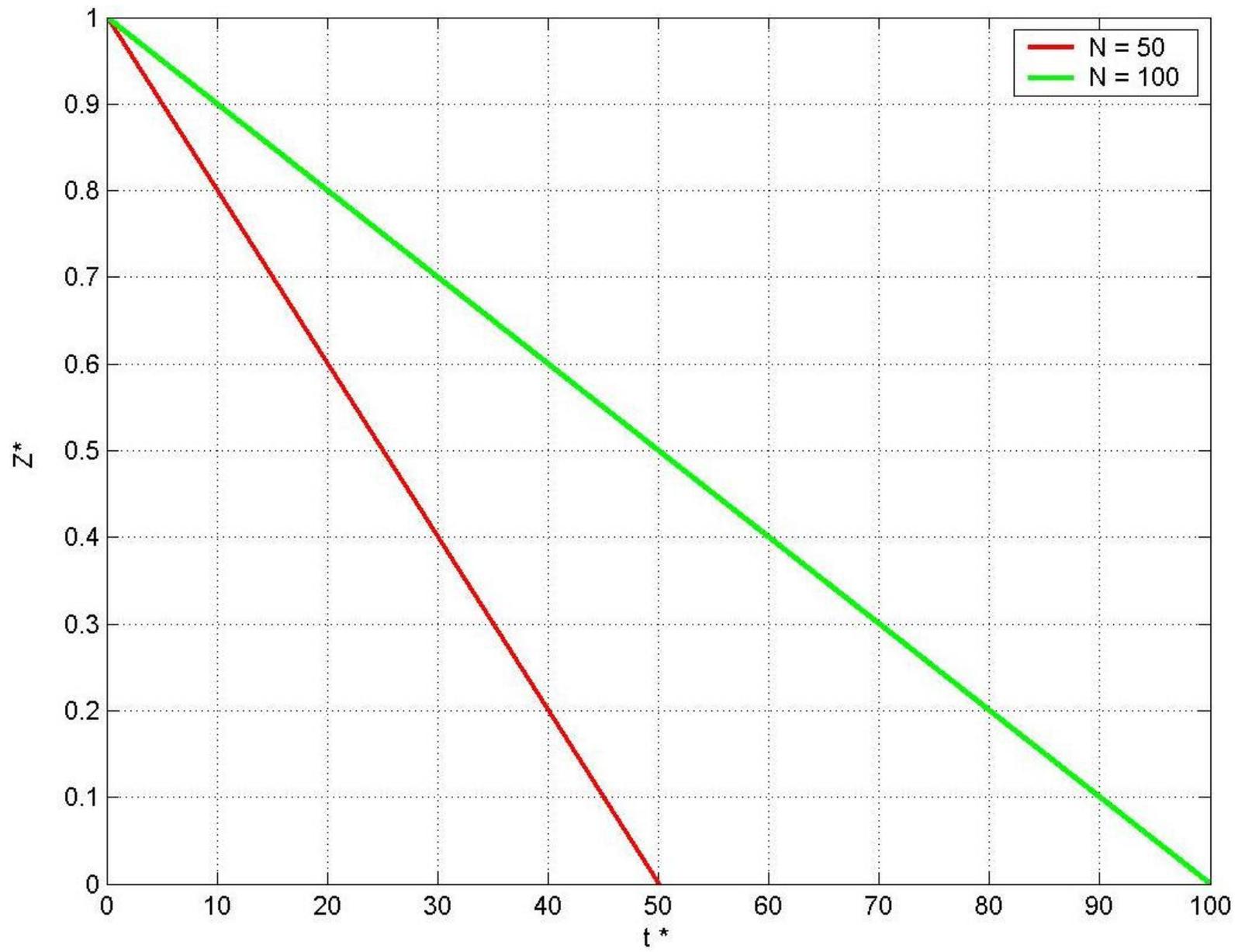


Figura VII-6. Itinerario de vaciado de la Clepsidra

VII.6 TIEMPO TOTAL DE VACIADO:

Se obtiene de la ec. (VII-12) imponiendo $Z^*=0$:

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{N^2 - 1}} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - \exp[-(N^2 - 1)]}}{1 - \sqrt{1 - \exp[-(N^2 - 1)]}} \right\} \quad \text{(VII-15)}$$

La dependencia del tiempo total de vaciado T^* con respecto a N puede apreciarse en la Figura VII-7.

Para $N^2 \gg 1$:

$$T^* \cong \frac{2 \operatorname{Ln}(2)}{\sqrt{N^2 - 1}} + \sqrt{N^2 - 1} \quad \text{(VII-16)}$$

Si $N^2 \gg 1$ la ec. (VII-15) entrega valores cercanos a:

$$T^* = N$$

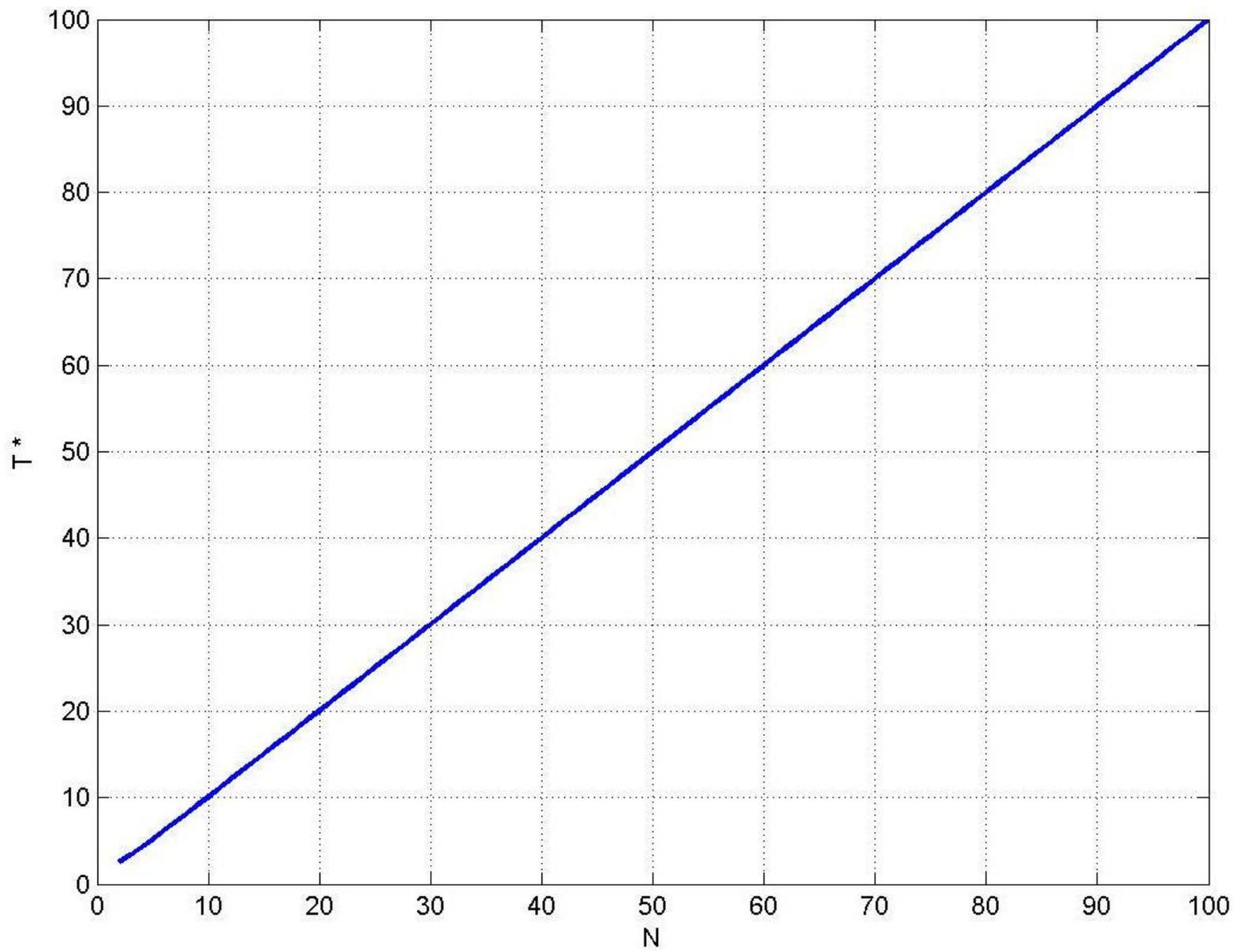


Figura VII-7. Tiempo total de vaciado de la Clepsidra

CAPÍTULO VIII: VACIADO DE DOS LÍNEAS QUE CONVERGEN A UN DRENAJE COMÚN

VIII.1 INTRODUCCIÓN

Esta situación se presenta frecuentemente en conducciones de agua y de pulpa mineral cuando existen puntos altos y bajos en el trazado (ver croquis de la Figura VIII-1).

Si ocurre un paro de las bombas u otras circunstancias asociadas al requerimiento de cerrar la válvula del tanque, es preciso drenar la línea en el punto bajo.

Este drenaje debe ser realizado en un tiempo razonablemente corto y evitando que el flujo se invierta en una de las ramas. Este flujo reverso, si se produce evacuando pulpa, puede producir sedimentación e incluso taponamiento si las velocidades son muy bajas.

Es, entonces de interés analizar el problema dinámico del vaciado de sistemas de este tipo.

No se han encontrado referencias al respecto (salvo estudios industriales internos, por ejemplo de JRI Ingeniería).

Sin embargo, el problema puede considerarse como cercano al de los tres estanques en régimen permanente, ampliamente tratado en el pasado (ver Domínguez [14] (1974)).

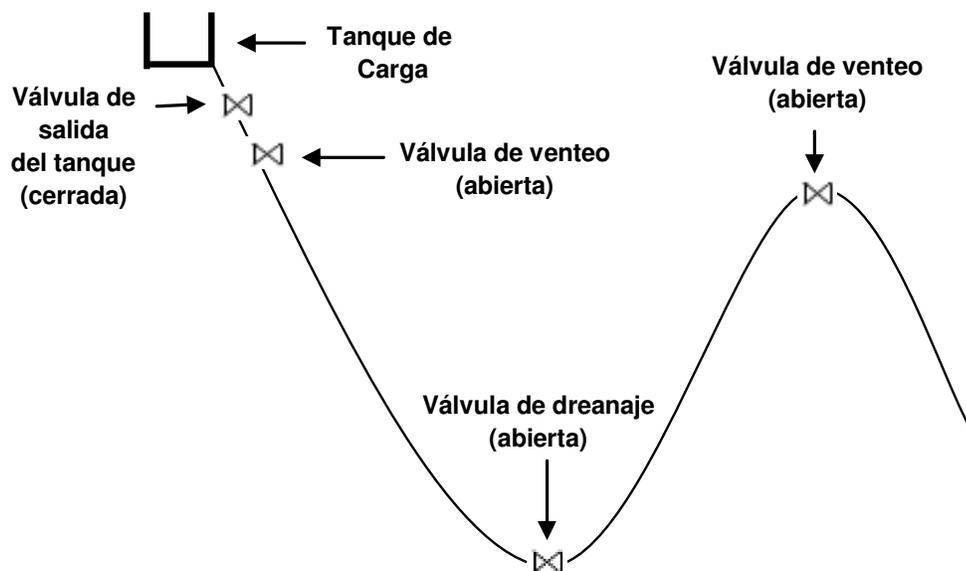


Figura VIII-1. Case general del vaciado de dos líneas

VIII.2 HIPOTESIS SIMPLIFICATORIAS PREVIAS

- El sistema se comporta como uno de columna rígida;
- La única resistencia en los ductos es friccional y corresponde a un factor de Darcy constante f_0 ;
- Los ductos son rectilíneos y forman el mismo ángulo θ_0 con la horizontal (Figura VIII-2);
- En el nudo N la cota piezométrica H_N es común;
- Se prescindirá de las diferencias de cota entre N y la válvula de drenaje;
- Se supondrá que se descarga directamente a la atmósfera.

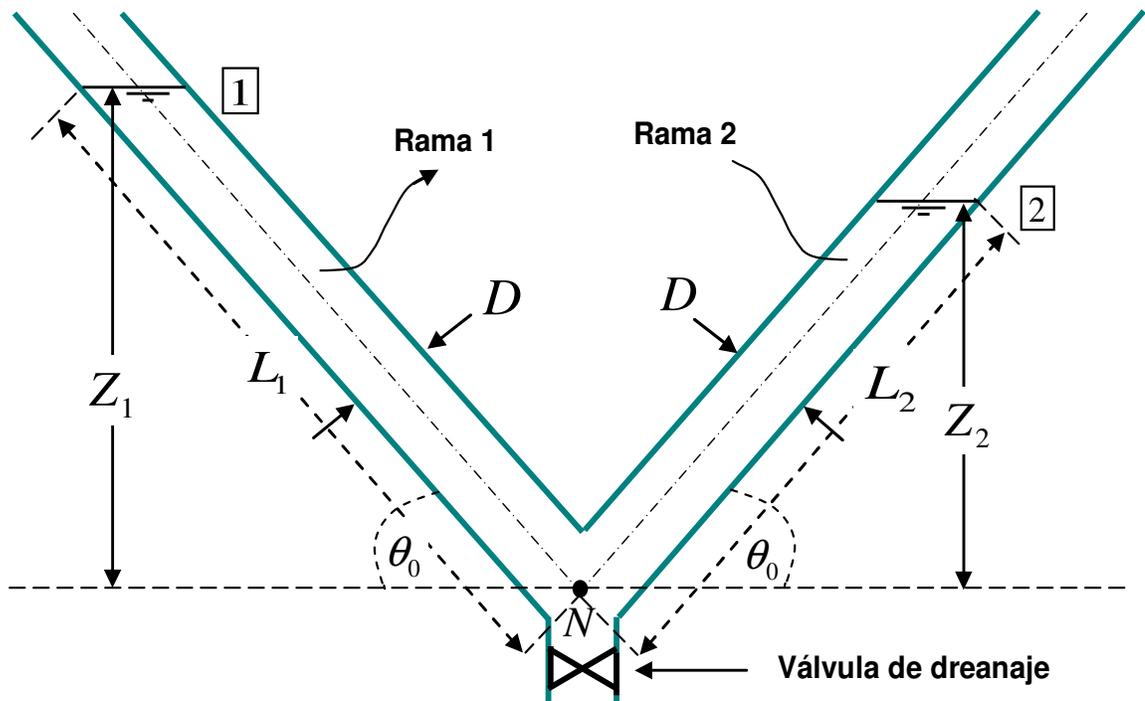


Figura VIII-2. Esquema del drenaje de dos líneas, identificación de parámetros.

VIII.3 ECUACIONES DESCRIPTIVAS:

Ellas se han desarrollado en el Capítulo II.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD:

Se tiene instantáneamente:

$$AV_1 + AV_2 = a_v V_v$$

Donde:

A : Área transversal de los ductos 1 y 2

V_1, V_2 : Velocidades en las ramas 1 y 2, respectivamente.

a_v : Área transversal efectiva de la válvula

V_v : Velocidad media en la sección a_v

Se deduce:

$$V_v = \alpha(V_1 + V_2) \quad \text{(VIII-1)}$$

$$\alpha = \frac{A}{a_v}$$

Si se supone que las velocidades V_1 y V_2 se dirigen ambas hacia el nudo N:

$$V_1 = -\frac{dL_1}{dt} \quad \text{(VIII-2)}$$

$$V_2 = -\frac{dL_2}{dt} \quad \text{(VIII-3)}$$

ECUACIONES DINÁMICAS PARA LAS LÍNEAS:

$$L_1 \sin \theta = H_N + \frac{f_0 L_1 V_1^2}{D} + \frac{L_1}{g} \frac{dV_1}{dt} \quad \text{(VIII-4)}$$

$$L_2 \sin \theta = H_N + \frac{f_0 L_2 V_2^2}{D} + \frac{L_2}{g} \frac{dV_2}{dt} \quad \text{(VIII-5)}$$

ECUACIÓN DINÁMICA DE LA VÁLVULA DE DRENAJE:

$$H_N = K \frac{V_V^2}{2g} \quad \text{(VIII-6)}$$

Eliminando H_N y V_V se obtienen:

$$L_1 \sin \theta = K \alpha^2 \frac{(V_1 + V_2)^2}{2g} + \frac{f_0 L_1 V_1^2}{D} + \frac{L_1}{g} \frac{dV_1}{dt} \quad \text{(VIII-7)}$$

$$L_2 \sin \theta = K \alpha^2 \frac{(V_1 + V_2)^2}{2g} + \frac{f_0 L_2 V_2^2}{D} + \frac{L_2}{g} \frac{dV_2}{dt} \quad \text{(VIII-8)}$$

Introduciendo las ecuaciones (VIII-2) y (VIII-3):

$$L_1 \sin \theta = K \alpha^2 \frac{\left(-\frac{dL_1}{dt} - \frac{dL_2}{dt} \right)^2}{2g} + \frac{f_0 L_1}{D} \left(\frac{dL_1}{dt} \right)^2 - \frac{L_1}{g} \frac{d^2 L_1}{dt^2} \quad \text{(VIII-9)}$$

$$L_2 \sin \theta = K \alpha^2 \frac{\left(-\frac{dL_1}{dt} - \frac{dL_2}{dt} \right)^2}{2g} + \frac{f_0 L_2}{D} \left(\frac{dL_2}{dt} \right)^2 - \frac{L_2}{g} \frac{d^2 L_2}{dt^2} \quad \text{(VIII-10)}$$

CONDICIONES INICIALES:

$$t = 0; \quad L_1 = L_{10}; \quad L_2 = L_{20}; \quad V_1 = V_2 = 0$$

VIII.4 ANÁLISIS INSPECCIONAL:

Tomando como magnitudes de referencia L_0 para las distancias y τ para los tiempos las ecs. (VIII-9) y (VIII-10) devienen, respectivamente:

$$L_1^* = K_v \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + K_f L_1^* \frac{L_0}{2g \sin \theta} \left(\frac{dL_1^*}{dt^*} \right)^2 \frac{1}{\tau^2} - \frac{L_0}{\tau^2 g \sin \theta} L_1^* \frac{d^2 L_1^*}{dt^{*2}}$$

$$L_2^* = K_v \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + K_f L_2^* \frac{L_0}{2g \sin \theta} \left(\frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 \frac{1}{\tau^2} - \frac{L_0}{\tau^2 g \sin \theta} L_2^* \frac{d^2 L_2^*}{dt^{*2}}$$

$$K_v = K\alpha^2$$

$$L_1^* = \frac{L_1}{L_0}$$

$$L_2^* = \frac{L_2}{L_0}$$

$$t^* = \frac{t}{\tau}$$

$$K_f = \frac{f_0 L_0}{D}$$

Recuérdese que hasta ahora L_0 y τ son arbitrarios.

La mayor simpleza de la ecuación del movimiento se produce si se elige:

$$\tau = \sqrt{\frac{L_0}{2g \sin \theta_0}}$$

Entonces:

$$L_1^* = K_v \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + K_f L_1^* \left(\frac{dL_1^*}{dt^*} \right)^2 - 2L_1^* \frac{d^2 L_1^*}{dt^{*2}}$$

$$L_2^* = K_V \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + K_f L_2^* \left(\frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 - 2L_2^* \frac{d^2 L_2^*}{dt^{*2}}$$

Por otra parte:

$$V_1 = -\frac{dL_1}{dt} = -\frac{L_0}{\tau} \frac{dL_1^*}{dt^*} = -\frac{L_0}{\sqrt{\frac{L_0}{2g \sin \theta_0}}} \frac{dL_1^*}{dt^*} = -\sqrt{2g \sin \theta_0 L_0} \frac{dL_1^*}{dt^*}$$

$$V_1^* = \frac{V_1}{V_0} = -\frac{dL_1^*}{dt^*}$$

$$V_0 = \sqrt{2g \sin \theta_0 L_0}$$

Análogamente:

$$V_2^* = \frac{V_2}{V_0} = -\frac{dL_2^*}{dt^*}$$

L_0 sigue siendo arbitrario. Puede ser definido en forma conveniente como:

$$L_0 = L_{10} + L_{20} = L_1(t=0) + L_2(t=0)$$

Entonces:

$$L_1^*(t^*=0) + L_2^*(t^*=0) = 1$$

RECAPITULACIÓN:

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\frac{d^2 L_1^*}{dt^{*2}} = \frac{K_V}{2L_1^*} \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + \frac{K_f}{2} \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} \right) \left| \frac{dL_1^*}{dt^*} \right| - \frac{1}{2} \quad \text{(VIII-11)}$$

$$\frac{d^2 L_2^*}{dt^{*2}} = \frac{K_v}{2L_2^*} \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + \frac{K_f}{2} \left(-\frac{dL_2^*}{dt^*} \right) \left| \frac{dL_2^*}{dt^*} \right| - \frac{1}{2} \quad \text{(VIII-12)}$$

El signo modular ha sido introducido en el término de fricción para tomar en cuenta el caso en que las columnas líquidas asciendan.

$$V_1^* = -\frac{dL_1^*}{dt^*} \quad \text{(VIII-13)}$$

$$V_2^* = -\frac{dL_2^*}{dt^*} \quad \text{(VIII-14)}$$

$$t^* = 0; \quad L_1^* = L_{10}^*; \quad L_2^* = L_{20}^*; \quad V_1^* = V_2^* = 0 \quad \text{(VIII-15)}$$

El sistema propuesto no parece soluble en forma exacta en el caso general y se debe entonces recurrir al cálculo numérico.

VIII.5 CASO PARTICULAR DEL PÉNDULO LÍQUIDO:

Corresponde al caso en que la válvula de drenaje está cerrada.

Como el líquido no puede salir, se produce una serie de oscilaciones, llamadas “oscilaciones en masa”.

La constancia del volumen de líquido y de la sección transversal implica:

$$L_1(t) + L_2(t) = L_0 = Cte$$

Se deduce:

$$V_1 = -V_2$$

De donde, si el escurrimiento en el instante considerado va en la dirección 1→2:

$$V_2 = -\frac{dL_2}{dt} < 0$$

$$V_1 = -\frac{dL_1}{dt} = \frac{dL_2}{dt} > 0$$

Ahora, se puede considerar que se trata de un movimiento en bloque de 1 a 2, con una velocidad común V_2 . Entonces, la ecuación dinámica se escribe, sucesivamente:

$$L_1 \sin \theta_0 = L_2 \sin \theta_0 + \frac{f_0 L_0}{D} \frac{V_2^2}{2g} - \frac{L_0}{g} \frac{dV_2}{dt}$$

$$L_1 = L_0 - L_2$$

$$\frac{L_0}{g} \frac{d^2 L_2}{dt^2} + 2L_2 \sin \theta_0 + \frac{f_0 L_0}{D} \frac{V_2^2}{2g} = L_0 \sin \theta_0 \quad \text{(VIII-16)}$$

Prescindiendo de la fricción:

$$\frac{d^2 L_2}{dt^2} + 2L_2 \frac{g \sin \theta_0}{L_0} = g \sin \theta_0 \quad \text{(VIII-17)}$$

Esta ecuación es la de un oscilador armónico con una fuerza excitatriz $g \sin \theta_0$.

Escrita en variables adimensionales:

$$\frac{d^2 L_2^*}{dt^{*2}} + L_2^* = \frac{1}{2} \quad \text{(VIII-18)}$$

Las condiciones iniciales son:

$$t^* = 0; \quad L_2^* = L_{20}^*; \quad V_2^* = -\frac{dL_2^*}{dt^*} = 0$$

La solución es:

$$L_2^* = \frac{1}{2} [1 + (L_{20}^* - L_{10}^*) \cos(t^*)] \quad \text{(VIII-19)}$$

De donde:

$$L_1^* = 1 - L_2^* = \frac{1}{2} [1 - (L_{20}^* - L_{10}^*) \cos(t^*)] \quad \text{(VIII-20)}$$

$$V_2^* = \frac{1}{2} (L_{20}^* - L_{10}^*) \sin(t^*) \quad \text{(VIII-21)}$$

$$V_1^* = -V_2^* = \frac{1}{2} (L_{10}^* - L_{20}^*) \sin(t^*) \quad \text{(VIII-22)}$$

El período T se determina de:

$$T^* = \frac{T}{\tau} = 2\pi$$

Entonces:

$$T = 2\pi\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{2g \sin \theta_0}} \quad \text{(VIII-23)}$$

Esto es, la columna líquida oscila como un péndulo matemático cuya longitud L es:

$$L = \frac{L_0}{2 \sin \theta_0} \quad \text{(VIII-24)}$$

Si se trata de un tubo en U ($\theta_0 = \pi/2$) entonces:

$$L = \frac{L_0}{2} \quad \text{(VIII-25)}$$

Este resultado es de Newton ([28] (1686)).

El caso del péndulo líquido sin fricción puede simularse resolviendo las ecs. (VIII-11) a (VIII-14), prescindiendo de la fricción ($K_f = 0$) y adoptando un valor elevado de $K_v = K \alpha^2$, ya que α es la razón de áreas entre el ducto y la válvula de salida, que tiende al infinito cuando esta se cierra.

Para el cálculo se empleó $K_v = 2\,000\,000$

Condiciones iniciales:

$$L_1^*o = 0.7$$

$$L_2^*o = 0.3$$

$$V_1^*o = 0$$

$$V_2^*o = 0$$

Las ecuaciones (VIII-11) a (VIII-14) se resolvieron empleando el algoritmo de Runge y Kutta de cuarto orden (Burden y Faires [5] (1998)).

Los resultados se muestran en la Figura VIII-3 (longitudes) y Figura VIII-4 (velocidades). En la primera se han dibujado los períodos de oscilación en líneas verticales de color verde.

Se han superpuesto los resultados de la solución exacta del oscilador armónico (ecs. (VIII-19) a (VIII-22)) y se puede apreciar que el ajuste es excelente.

VIII.6 PÉNDULO LÍQUIDO - INFLUENCIA DE LA FRICCIÓN:

Como ejemplo se calculado el caso siguiente:

$$L_1^*o = 0.7$$

$$L_2^*o = 0.3$$

$$V_1^*o = 0$$

$$V_2^*o = 0$$

$$K_v = 2\,000\,000$$

$$K_f = 100$$

Se pueden observar los resultados en la Figura VIII-5 (longitudes) y Figura VIII-6 (velocidades).

Tanto las longitudes como las velocidades se amortiguan drásticamente.

Obviamente este comportamiento depende del valor de K_f .

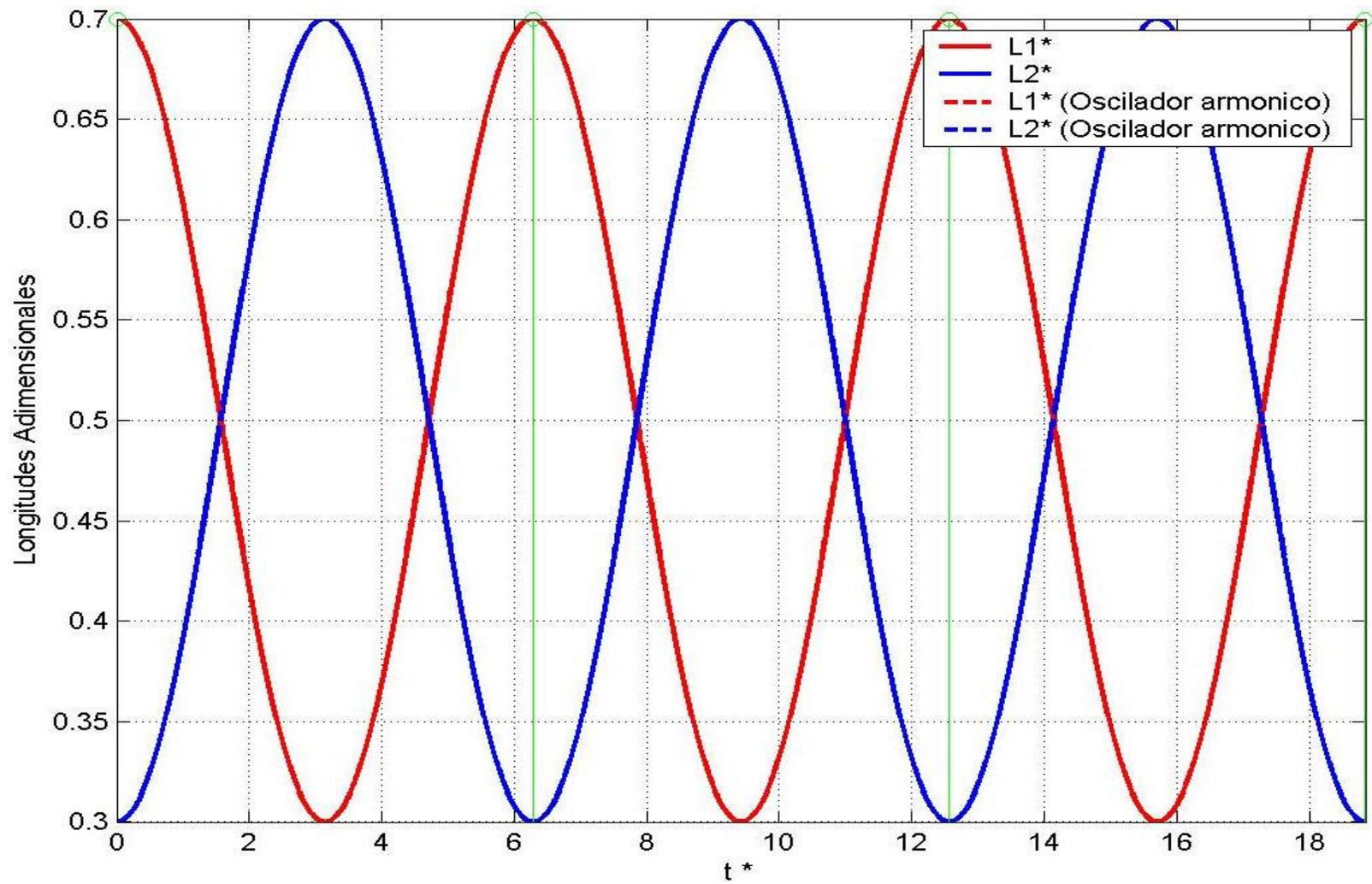


Figura VIII-3. Itinerario del vaciado de ambas ramas

Caso del Péndulo Líquido sin fricción

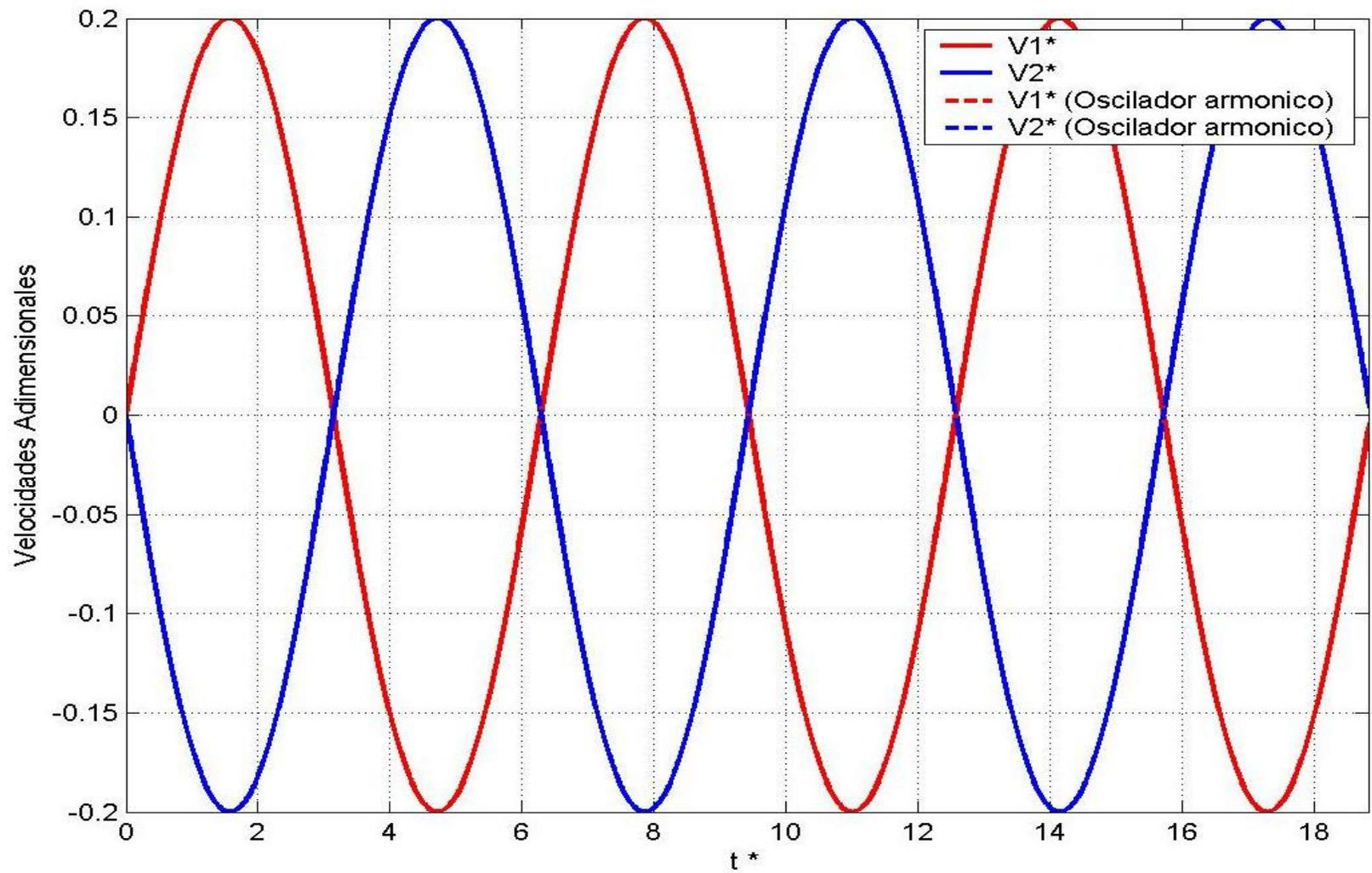


Figura VIII-4. Velocidades de vaciado de ambas ramas

Caso del Péndulo Líquido

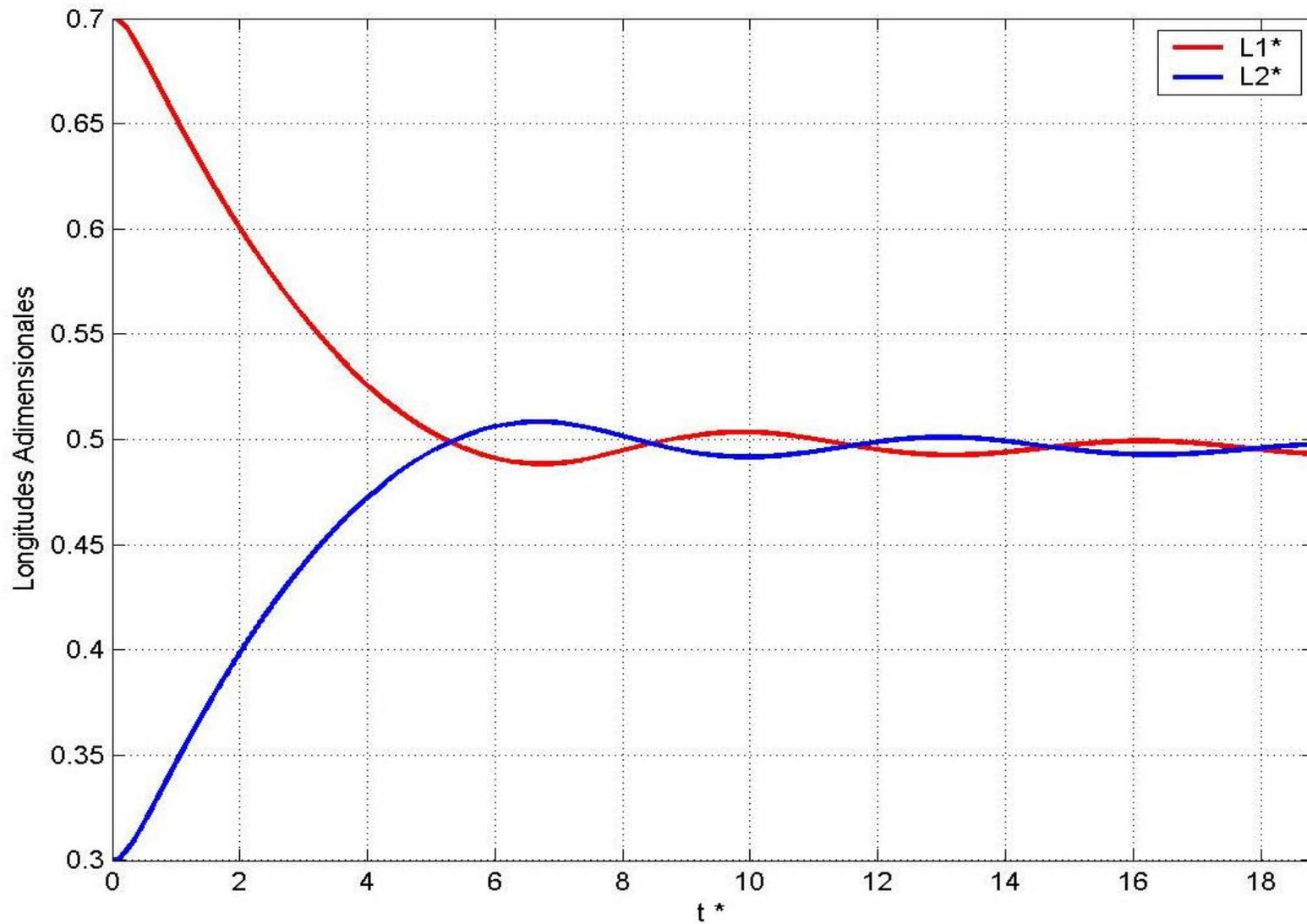


Figura VIII-5. Itinerario del vaciado de ambas ramas

Caso del Péndulo Líquido con fricción

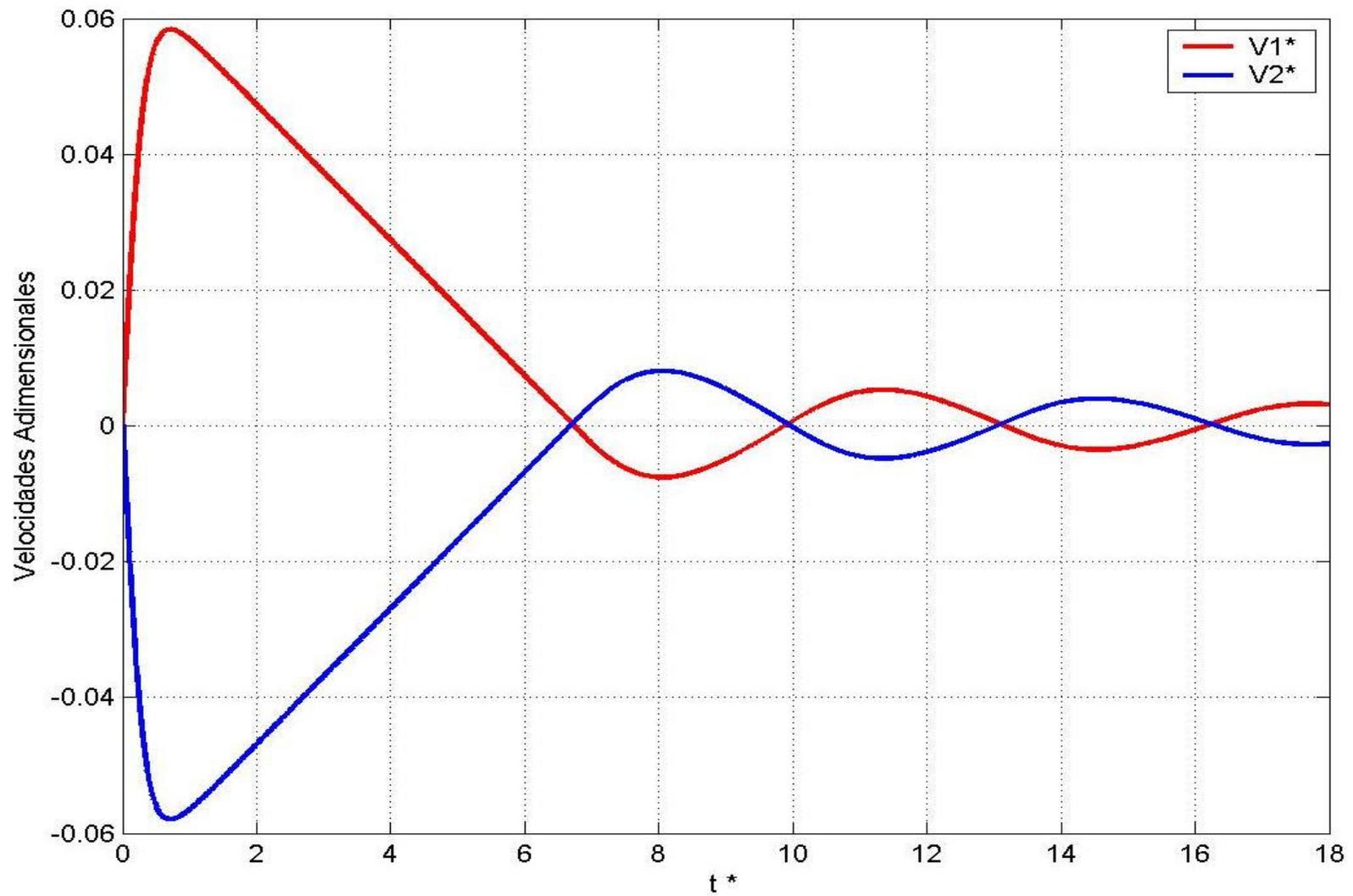


Figura VIII-6. Velocidades de vaciado de ambas ramas

Caso del Péndulo Líquido con fricción

VIII.7 DRENAJE NORMAL:

Se denomina así la situación en que las dos ramas se vacían siempre a través del drenaje, sin que el escurrimiento en una rama provoque flujo reverso en la otra.

Como ejemplo de este comportamiento se ha simulado numéricamente el caso siguiente:

$$L_{1*0} = 0.7$$

$$L_{2*0} = 0.3$$

$$V_{1*0} = 0$$

$$V_{2*0} = 0$$

$$K_v = 20$$

$$K_f = 150$$

Las longitudes y velocidades a lo largo del tiempo se pueden apreciar en la Figura VIII-7 y Figura VIII-8.

Se observa que las velocidades y longitudes decrecen monótonicamente.

El vaciado completo se produce en este caso para $t^* \cong 15.2$.

VIII.8 DRENAJE CON OSCILACIONES:

Corresponde a casos en que el vaciado se produce con intrusión del líquido de una rama en la otra, causando así escurrimiento reverso y oscilaciones.

Un ejemplo de este caso es el siguiente:

$$L_{1*0} = 0.7$$

$$L_{2*0} = 0.3$$

$$V_{1*0} = 0$$

$$V_{2*0} = 0$$

$$K_v = 2\ 000$$

$K_f = 15$

Las longitudes y velocidades a lo largo del tiempo se observan en la Figura VIII-9 y Figura VIII-10.

Se aprecia claramente el carácter oscilatorio del vaciado.

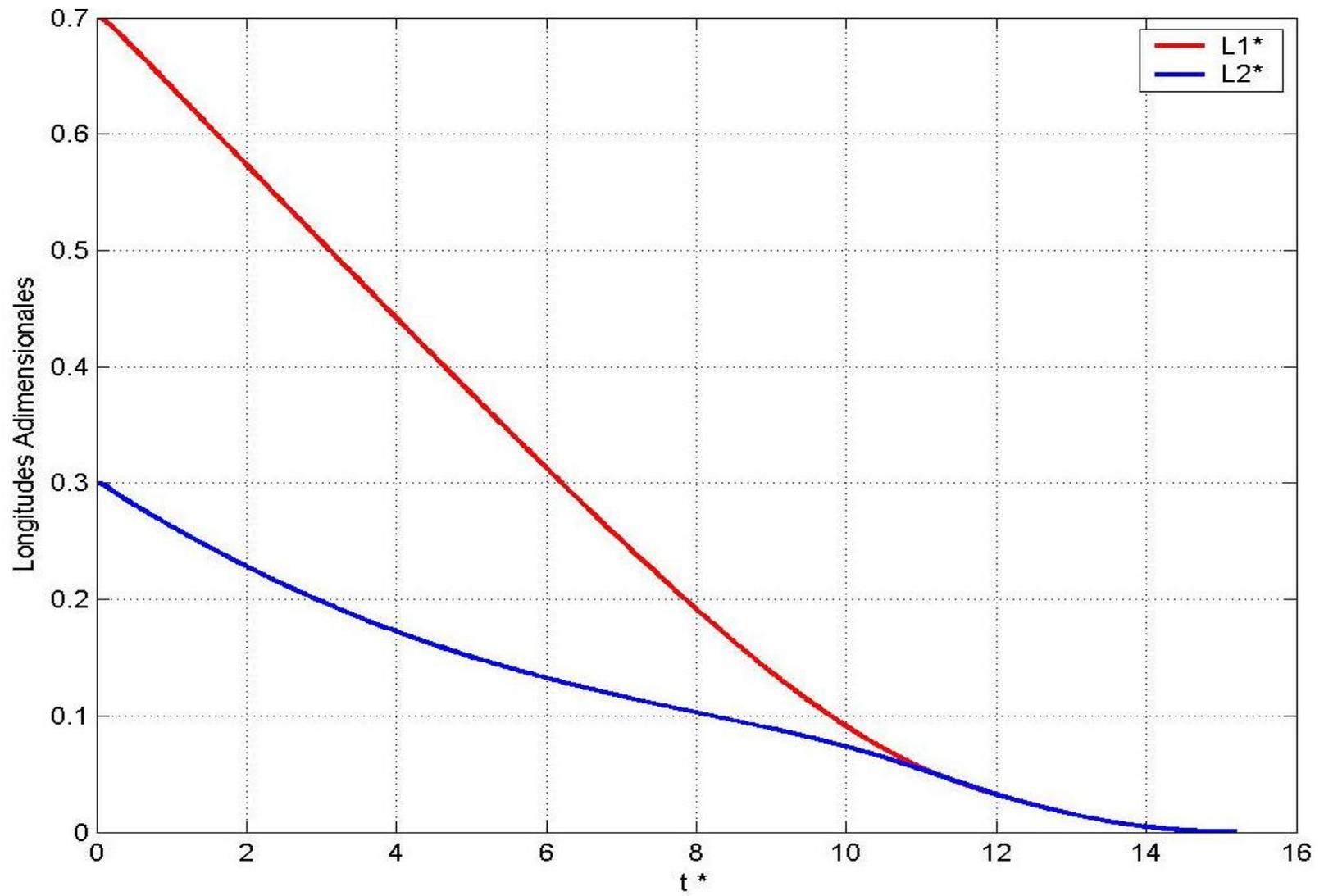


Figura VIII-7. Itinerario del vaciado de ambas ramas

Caso del Drenaje Normal

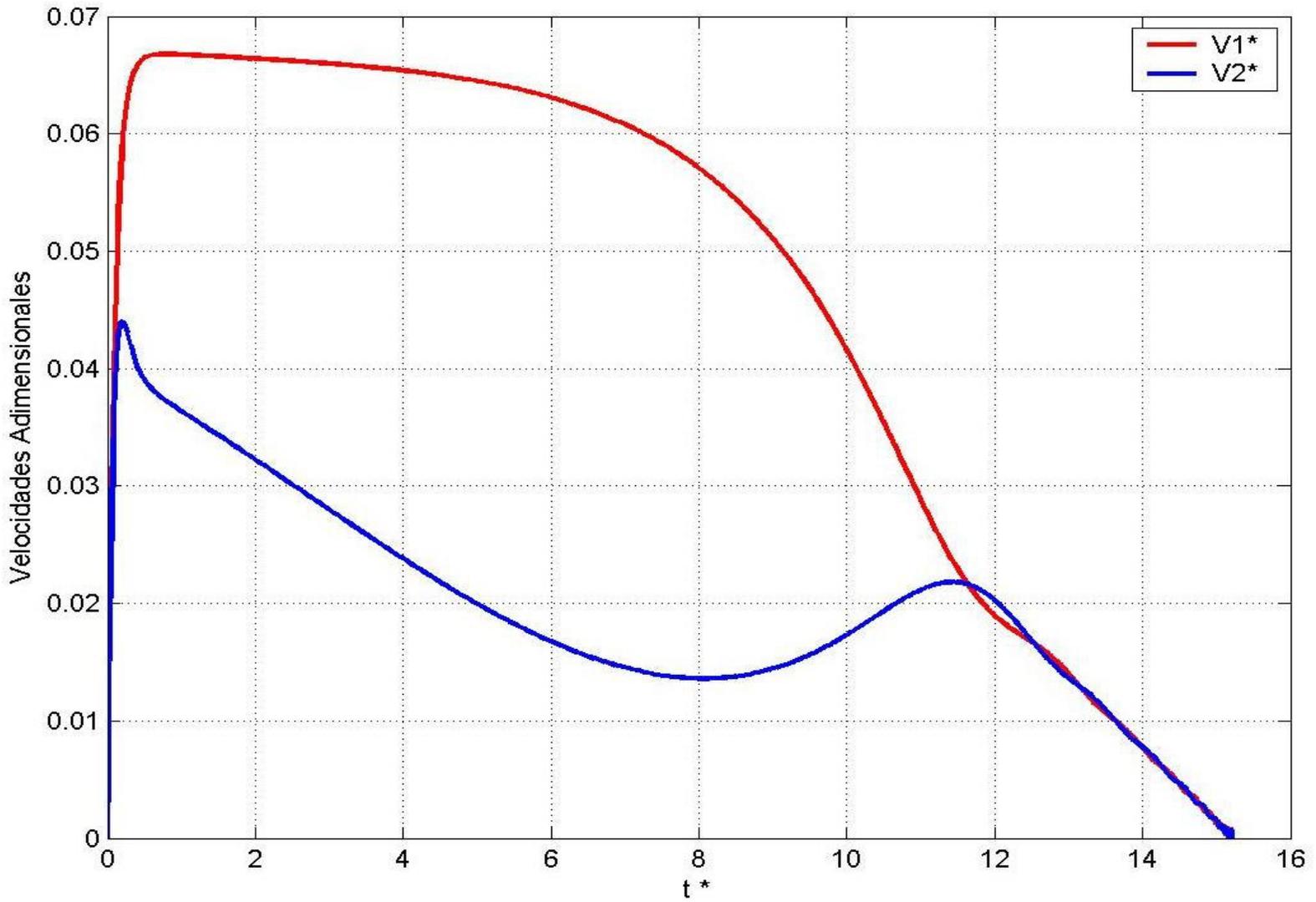


Figura VIII-8. Velocidades de vaciado de ambas ramas

Caso del Drenaje Normal

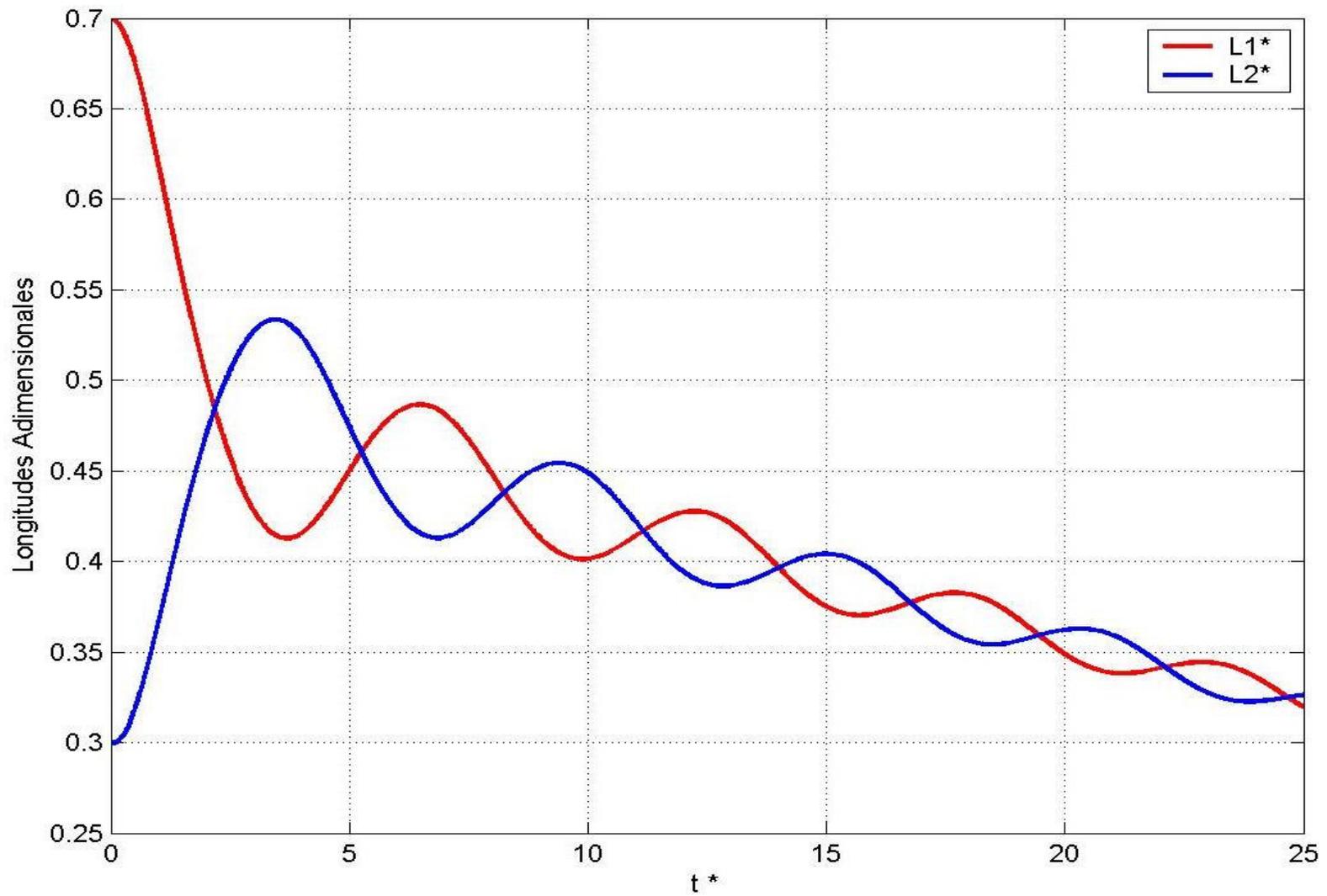


Figura VIII-9. Itinerario del vaciado de ambas ramas

Caso del Drenaje con Oscilaciones

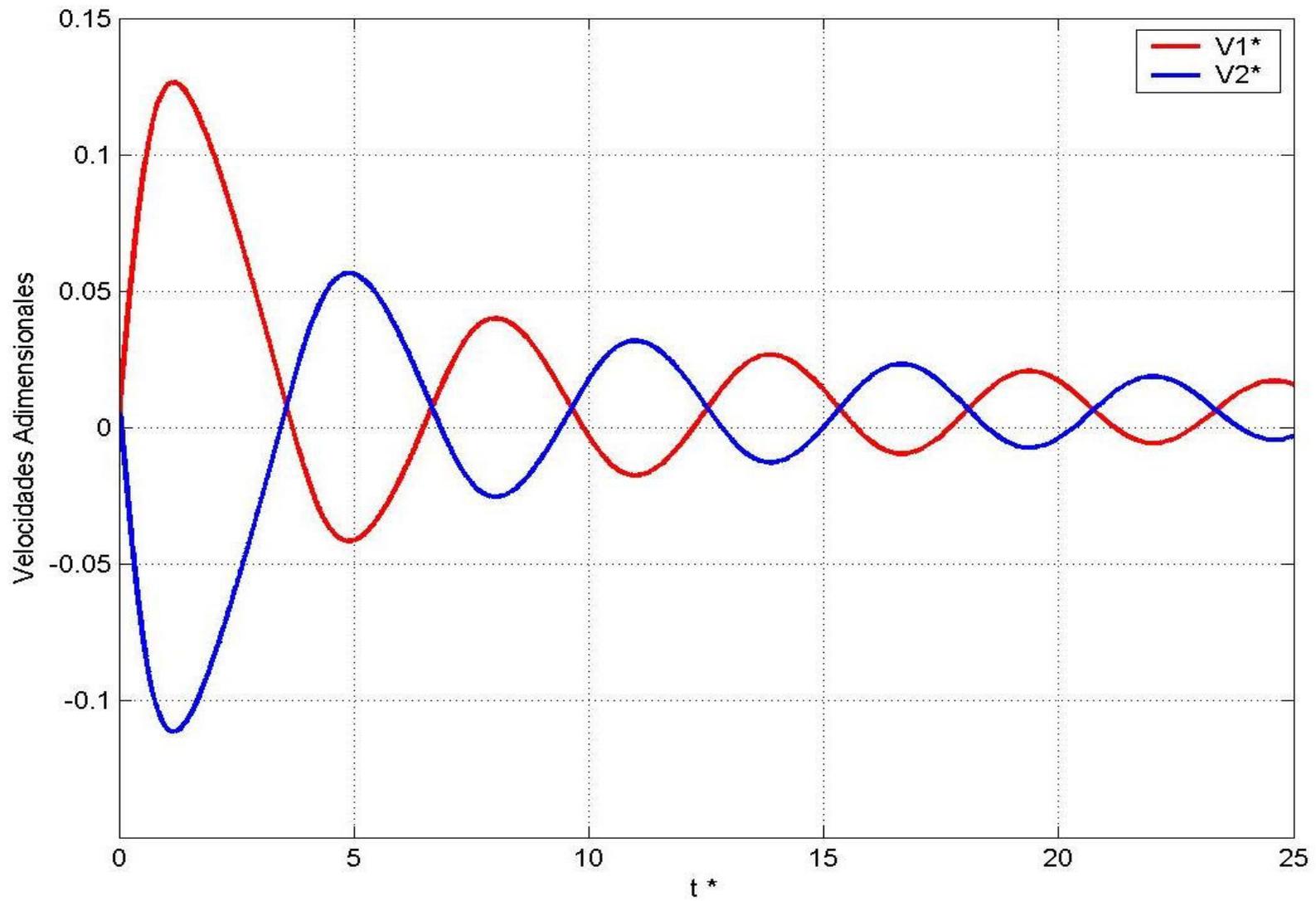


Figura VIII-10. Velocidades de vaciado de ambas ramas

Caso del Drenaje con Oscilaciones

CAPÍTULO IX: COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

El vaciado de recipientes y ductos es un proceso frecuente en la operación de sistemas hidráulicos. Empero, salvo en el caso de las grandes protecciones de máquinas (chimeneas de equilibrio o tanques neumáticos) es un tema relativamente poco tratado o que se resuelve a veces en forma superficial, por no decir arbitraria.

La revisión bibliográfica realizada muestra que el vaciamiento de tubos tomando en cuenta todos los aspectos relevantes no se ha realizado.

En el presente trabajo se ha analizado el fenómeno del vaciado de diferentes sistemas. En cada uno de ellos se determinaron los parámetros adimensionales relevantes, a partir de los cuales es posible comprender el fenómeno en cuestión y determinar la correcta aplicabilidad de diferentes modelos de transientes hidráulicos. A continuación se presenta el resumen de los principales resultados en cada caso:

Vaciado de un ducto inclinado

En una primera instancia se han tomado en consideración las pérdidas singulares y friccionales, estas últimas caracterizadas por un coeficiente de fricción constante. Se han estudiado tres casos: uno general que considera fricción y singularidades (K_s y $K_f \neq 0$), uno con fricción despreciable ($K_f = 0$) y uno con singularidades despreciables ($K_s = 0$). En todos se cumple el comportamiento general de que para valores elevados en los coeficientes de pérdida ($K_s, K_f > 50$), el modelo cuasiestático y el inercial convergen perfectamente, sin embargo, cuando los valores son bajos ($K_s, K_f < 5$), las diferencias son claramente notorias en las velocidades experimentadas. Con el tiempo total de vaciado pasa algo distinto, ya que éste es notoriamente indiferente al modelo utilizado para el caso general y sin fricción. Para el caso sin singularidades, los tiempos convergen a partir de $K_f = 20$.

Se ha dado validez al uso de un coeficiente de fricción fijo al comparar con el cálculo del tiempo total de vaciado con el modelo inercial considerando un coeficiente de fricción variable para el caso límite en que no existen singularidades (tuberías lisas), ya que es el que realza el efecto del factor de fricción. Se concibe que si las pérdidas de fricción son pequeñas frente a las singulares, el efecto de aquellas sobre el escurrimiento disminuye significativamente.

También se ha dado validez el modelo inercial rígido frente al modelo elástico, se ha determinado que si bien el lapso en que las ondas son relevantes es relativamente extendido y el rango de variación de los parámetros, la discrepancia entre los tiempos totales es pequeña.

En vista de los resultados aquí obtenidos, se puede concluir que el fenómeno de vaciado es esencialmente descrito por el modelo de columna rígida que contempla inercia, fricción y singularidades.

Vaciado de un ducto horizontal:

El fenómeno del vaciado de un ducto horizontal es distinto al estudiado anteriormente, ya que este se produce en dos fases. En la primera, para que salga el líquido es necesario que entre aire, produciéndose una onda o cavidad que avanza hacia aguas arriba donde la velocidad es nula, ya sea porque la longitud del ducto es muy grande o bien porque existe un tapón o una pared rígida. Una vez que esta onda llega al extremo, se forma una onda reflejada que es la encargada de vaciar el resto del ducto, esto es la segunda fase.

En el estudio, se ha supuesto que el escurrimiento es incompresible e invíscido y solo se ha estudiado el vaciado de la primera fase.

Durante esta vaciado parcial del ducto, el ángulo de salida que se forma está completamente determinado y no depende de ningún parámetro, su valor es $194,43^\circ$. Los otros parámetros del escurrimiento son constantes en función de dicho ángulo y del diámetro del ducto, estos son: caudal, velocidad y altura de salida.

Luego del análisis de la primera fase, es posible conocer el tiempo de duración de ésta y la fracción de líquido que se ha vaciado correspondiente a un 42%.

Vaciado de un tanque cilíndrico de sección constante

Se ha estudiado un caso muy simplificado, en donde la salida del líquido se realiza por una tobera perfilada en la que no se producen ni separaciones ni pérdidas de carga. Además, se ha supuesto que el escurrimiento es incompresible e invíscido.

Se ha determinado la circunstancia necesaria para que la aproximación cuasiestática sea válida, en otras palabras bajo cuales condiciones la fórmula de Torricelli se cumple localmente. Se observa que para $N=20$ la aproximación cuasiestática es válida para $Z^* < 0,99$. En la práctica N puede ser mucho mayor que 20.

Vaciado de un tanque de sección variable

Se ha realizado el estudio de tanques verticales de revolución que vierten por el fondo. Esto está cerca de los relojes hidráulicos o clepsidras y los casos estudiados, para fijar ideas, se refieren a ellos.

El Dr. Hutton en una reedición de "Ozama's Recreations" ([41], c. 1700) da una demostración geométrica indicando que para que las distancias entre las marcas del nivel de agua en una clepsidra sean iguales para intervalos de tiempo iguales se requiere que el perfil de la clepsidra sea una parábola de cuarto grado ($Z \cong R^4$).

Como ejemplo, se decidió resolver las ecuaciones para el perfil de una clepsidra como la propuesta por Hutton. Se ha obtenido que, salvo en las primeras distancias cercanas al inicio la

velocidad se mantiene notablemente constante. Además, se ha observado que el itinerario de vaciado es una línea recta, confirmando las afirmaciones de Hutton y de Heron de Alejandría realizadas hace 300 y 2000 años atrás.

Vaciado de dos líneas que convergen a un drenaje común

Esta situación se presenta frecuentemente en conducciones de agua y de pulpa mineral cuando existen puntos altos y bajos en el trazado.

Para resolver el problema, se ha supuesto que el sistema se comporta como uno de columna rígida y la única resistencia en los ductos es friccional y corresponde a un factor de Darcy constante f_0 .

Los parámetros importantes que caracterizan el fenómeno se relacionan con la capacidad de evacuación de la válvula y la fricción en el sistema. Dependiendo de dichos valores, se pueden presentar: Drenajes normales, en donde las velocidades y longitudes decrecen monótonicamente, o Drenajes con oscilaciones, en que el vaciado se produce con intrusión del líquido de una rama en la otra, causando así escurrimiento reverso y oscilaciones.

REFERENCIAS

- [1] ABREU, J.M., GUARGA, R. y IZQUIERDO, J.: "Transitorios y Oscilaciones en Sistemas Hidráulicos a Presión", Universidades de Coimbra, Politécnica de Valencia y de Uruguay, Montevideo, Uruguay, 1994.
- [2] BECHTELER, W. y VOGEL, G.: "Pressure Wave Velocity in Slurry Pipelines", Hydrotransport 8, Johannesburg, South Africa, 1982.
- [3] BROOKE BENJAMIN, T.: "Gravity currents and related phenomena", Journal of Fluid Mechanics, Vol.31, Parte 2, pp.209- 248, 1968.
- [4] BRUNONE, B., GOLIA, U.M. y GRECCO, M.: "Some Remarks on the Momentum Equation for Fast Transients", Proceedings of International Conference of Hydraulic Transients with Water Column Separation, Valencia, España, 1991.
- [5] BURDEN, R.L. y FAIRES, J.D.: "Análisis Numérico", 6a. Edición, International Thomson Editors, México, 1998.
- [6] BYCHKOV, V.V.: "Bubble motion in a horizontal tube and the velocity estimate for curved flames", Physical Review E, Volume 55, Number 6, The American Physical Society, pp.6898-6901, Junio 1997.
- [7] CABRERA, E. y FANELLI, M.A., Eds.: "Hydraulic Transients with Water Column Separation", Valencia, España, 1991.
- [8] CALLE, F., MORENO, CH. y FUENTES, R.: "JRI Ingeniería: Estudio de Transientes Minera Los Pelambres", Junio 2006.
- [9] CERON, V.: "Comentarios personales no publicados", Laboratorio de Hidráulica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago, Chile, c.1960.
- [10] CHANSON, H., AOKI, SH. y MARUYAMA, M.: "Unsteady two- dimensional orifice flow: a large -size experimental investigation", Journal of Hydraulic Research, Vol.40, No.1, pp.63-71, 2002.
- [11] CHAUDRY, M.H.: "Applied Hydraulic Transients", Ed. Van Nostrand Reinhold Company", New York, USA, 1979.
- [12] COIMBRA, G. y PALMIER, L.R.: "Análise Comparativa entre Métodos de Cálculo do Escoamento Transitório com fator de atrito não Permanente", XXII Congreso de la División Latinoamericana de la International Association of Hydraulic Engineering and Research (IAHR), Ciudad Guayana, Venezuela, Octubre 2006.

- [13] CONTIN, D. y CARDIM, M.: "Solucão das Equações que Regem o Escoamento Não Permanente em Dutos sob Pressão a través do Esquema de McCormack", XVI Congreso de la División Latinoamericana de la International Association of Hydraulic Engineering and Research (IAHR), Vol.6, pp.61-72, Santiago, Chile, Noviembre 1994.
- [14] DOMINGUEZ, F. J.: "Hidráulica", 4a. Edición, Ed. Universitaria, Santiago, Chile, 1974.
- [15] ESCANDE, L.: "Compléments D'hydraulique", Première Partie, Ed. Edouard Privat, Toulouse, France, c. 1950.
- [16] ESCANDE, L.: "Méthodes nouvelles pour le calcul des chambres d'équilibre", Dunod, Paris, 1950.
- [17] FLAMANT, A.: "Hydraulique", 3a. Edición, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Editor, Paris y Liege, 1909.
- [18] FORCHHEIMER, Ph.: "Hidráulica", Editorial Labor, 1935. Traducción de la tercera edición en alemán.
- [19] FUENTES, R.: "Contribution a l'étude d'une bulle d'air en mouvement dans l'eau sous une paroi", Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias, Universidad de Grenoble, Junio 1969.
- [20] FUENTES, R.: "Modelos Hidráulicos: Teoría y Diseño", Ed. Dolmen, Santiago de Chile, 2002.
- [21] FUENTES, R.: "Fenómenos de Transporte en Minería y Metalurgia", Codelco, Santiago, Chile, 2007.
- [22] FUERTES, V.S., IGLESIAS, P.L., IZQUIERDO, S. y LOPEZ, G.: "Algunos Problemas Generados por Ventosas mal Seleccionadas a Causa de una Caracterización Hidráulica Errónea", XXII Congreso de la División Latinoamericana de la International Association of Hydraulic Engineering and Research (IAHR), Ciudad Guayana, Venezuela, Octubre 2006.
- [23] FUERTES, V.S., PEREZ, R., MARTINEZ, Fco.J. y LOPEZ, A.: "Modelo Matemático para el Análisis del Llenado de Tuberías con Aire Atrapado, Utilizando Ventosas para su Expulsión", XXII Congreso de la División Latinoamericana de la International Association of Hydraulic Engineering and Research (IAHR), Ciudad Guayana, Venezuela, Octubre 2006.
- [24] IGLESIAS, P.L., FUERTES, V.S., IZQUIERDO, S. y LOPEZ, P.A.: "Modelación Simplificada de Procesos de Vacío en Conducciones de Abastecimiento de Agua", XXII Congreso de la División Latinoamericana de la International Association of Hydraulic Engineering and Research (IAHR), Ciudad Guayana, Venezuela, Octubre 2006.
- [25] JAEGER, C.: "Fluid Transients in Hydro-Electric Engineering Practice", Ed. Blackie, 1977.

- [26] LETELIER, M.F., LEUTHEUSSER, H.J.: "Skin Friction in Unsteady laminar Pipe Flow", Journal of the Hydraulics Division, American Society of Civil Engineers, Enero 1976.
- [27] LEVI, E.: "El agua según la ciencia", CONACYT, México, 1989.
- [28] NEWTON, I.: "Mathematical Principles of natural Philosophy", 1686. Edición de la Enciclopedia Británica, 1952.
- [29] NEWTON, I.: "Principios Matemáticos de Filosofía Natural", Edición comentada por Stephen Hawking, Ed. Crítica, Barcelona, 2003.
- [30] PARMAKIAN, J.: "Water Hammer Analysis", Ed. Dover, 1963.
- [31] ROUSE, H. y INCE, S.: "History of Hydraulics", Dover, New York, USA, 1963.
- [32] SPIEGEL, M.R.: "Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas ", McGraw-Hill de México, 1970.
- [33] THORLEY, A.R.D.: "Fluid Transients in Pipeline Systems", 2a. Edición, ASME PRESS, New York, USA, 2004.
- [34] VARDY, A.E. y BROWN, J.M.B.: "Transient, turbulent, smooth pipe flow", Journal of Hydraulic Research, Vol. 33, No.4, pp.435- 456, 1995.
- [35] VELASQUEZ, C.F. y TORO, F.M.: "Desarrollo y Validación en el Laboratorio de un Modelo Numérico Híbrido para Simulación de Golpe de Ariete", XXII Congreso de la División Latinoamericana de la International Association of Hydraulic Engineering and Research (IAHR), Ciudad Guayana, Venezuela, Octubre 2006.
- [36] WOOD, D.J. y KAO, T.Y.: "Transient Flow of Solid-Liquid Mixtures in Pipes", Advances in Solid-Liquid Flow in Pipes and its Application, ZANDI, I., Editor, Pergamon Press, 1971.
- [37] WYLIE, E.B. y STREETER, V.L.: "Fluid Transients", Ed. McGraw-Hill, 1978.
- [38] WYLIE, E.B. y STREETER, V.L.: "Fluid Transients in Systems", Ed. Prentice Hall, 1993.
- [39] ZUKOSKI, E.E.: "Influence of viscosity, surface tension, and inclination angle on motion of long bubbles in closed tubes", Journal of Fluid Mechanics, Vol.25, Parte 4, pp.821-837, 1966.
- [40] EVERYTHING2.com:"Clepsydra", Septiembre 2005.
- [41] Water Clocks, Water Clock, Rees's Clepsydra 1819.
- [42] Clocks and Ctesibius.mht.