UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ALGUNAS PROPIEDADES BÁSICAS DE OPERADORES NO UNIFORMEMENTE ELÍPTICOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

GONZALO DÁVILA BONCZOS

PROFESOR GUÍA:
PATRICIO FELMER AICHELE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
SALOMÉ MARTÍNEZ SALAZAR
MANUEL DEL PINO MANRESA
ALEXANDER QUAAS BERGER

SANTIAGO, CHILE
AGOSTO 2008

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ALGUNAS PROPIEDADES BÁSICAS DE OPERADORES NO UNIFORMEMENTE ELÍPTICOS

GONZALO DÁVILA BONCZOS

COMISIÓN EXAMINADORA		CALIFICACIONES:		
		NOTA (n°)	(Letras)	FIRMA
PROFESOR GUÍA				
SR. PATRICIO FELMER	:	....	....	....
PROFESOR CO-GUÍA				
SR. ALEXANDER QUAAS	:	....	....	....
PROFESOR INTEGRANTE				
SR. MANUEL DEL PINO	:	....	....	....
PROFESOR INTEGRANTE				
SR. SALOMÉ MARTÍNEZ	:	....	....	....
NOTA FINAL EXAMEN DE TÍTULO	:	....	....	....

MEMORIA PARA OBTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SANTIAGO, CHILE
AGOSTO 2008

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OBTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: GONZALO DÁVILA B.
FECHA: 12/08/2008
PROF. GUÍA: PATRICIO FELMER A.
PROF. CO-GUÍA: ALEXANDER QUAAS B.

ALGUNAS PROPIEDADES BÁSICAS DE OPERADORES NO UNIFORMEMENTE ELÍPTICOS

El objetivo de esta memoria es el estudio de propiedades para una clase de operadores totalmente no lineales, modelados por el p-laplaciano. La ecuación asociada que se analiza es

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x) \cdot \nabla u \left|\nabla(u(x))\right|^{\alpha} + c(x) u \left|u\right|^{\alpha} = f \quad \text{en } \Omega,$$

donde $\alpha > -1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado, b y c son funciones continuas y acotadas, $f \in L^n(\Omega)$, $F : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathcal{S}(n)) \to \mathbb{R}$ es continua. Además, para toda matriz simétrica X, F satisface una condición de homogeneidad $F(tp, \mu X) = |t|^{\alpha} \mu F(p, X)$, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mu \in \mathbb{R}^+$ y cotas $|p|^{\alpha} \mathcal{M}^-(X) \leq F(p, X) \leq |p|^{\alpha} \mathcal{M}^+(X)$. Aquí $\mathcal{M}^-$ y $\mathcal{M}^+$ son los operadores extremales de Pucci. Este tipo de operadores ya ha sido estudiado por *Birindelli y Demengel* y se conocen resultados de comparación, existencia para el problema de Dirichlet y existencia del primer valor propio. El marco teórico utilizado por *Birindelli y Demengel* es el de soluciones viscosas, el cual es particularmente apropiado cuando se consideran operadores totalmente no lineales no variacionales.

El primer resultado que se prueba es el principio del máximo de Alexandroff-Bakelman-Pucci, siguiendo las técnicas utilizadas por *Cafarelli, Crandall, Kocan y Świech*. A continuación, se prueba la desigualdad de Harnack en el caso $\alpha \in (-1, 0)$. Este resultado entrega regularidad interior de las soluciones. Inspirados por *Esteban, Felmer y Quaas* y a la compacidad obtenida en esta memoria se procede al estudio de existencia de soluciones globales y explosión en la frontera, para una ecuación superlineal asociada.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis profesores guías, Patricio Felmer y Alexander Quaas, por haberme introducido al tema de las ecuaciones no lineales y por haberme motivado a seguir mis estudios fuera del país. Su apoyo y paciencia fueron fundamentales para haber podido concluir esta memoria. Agradezco también a Manuel del Pino, por entregarme sus conocimientos acerca del futuro que se avecina y a Salomé Martínez, quien despertó mi interés por las ecuaciones. No debo dejar de agradecer a todos los académicos con quienes compartí durante mi estadía en el departamento. También quiero agradecer a Luis Mella, Oscar Mori, Regina Mateluna, Nancy Martínez y Silvia Mariano, pues siempre han tenido una excelente disposición y sin ellos el departamento no funcionaría.

A mi familia por todo el apoyo que me ha dado en el transcuro de estos años. En particular quiero agradecer a Juan Diego, quien me ha sabido escuchar y me ha aconsejado durante este largo proceso. Sin su ayuda y apoyo no estaría aquí. A Rodrigo, Susana y Felipe por todos los bonitos momentos que hemos compartido.

Deseo agradecer a mis compaeros de carrera, a Julio, Nico, Fantini y Erwin por los partidos de fútbol y en general a los miembros de la oficina 436 y 435, por todos los momentos lúdicos que hemos tenido.

A mis amigos de la vida, Lolon, Gastón, Carreta, Tupac, Chico, Spuler, Julián, Franco y Uribe, les quiero dar las gracias por todo lo que hemos compartido estos años y sobre todo por haberme apoyado en este último trecho. Espero no perder el contacto a pesar de la distancia.

A FONDECYT (1070314) por financiar este trabajo.

Finalmente quiero agradecer a mi polola, por todo lo que me ha entregado y por ser mi cable a tierra.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de esta memoria es estudiar propiedades básicas de un operador no variacional modelado por el p-laplaciano que viene asociado a la ecuación

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x) \cdot \nabla u \left|\nabla(u(x))\right|^{\alpha} + c(x)u\left|u\right|^{\alpha} = f \quad \text{en } \Omega, \tag{1.1}$$

donde $\alpha > -1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado, $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y acotadas, $f \in L^n(\Omega)$, $F : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathcal{S}(n)) \to \mathbb{R}$ es continua y $\mathcal{S}(n)$ es el conjunto de las matrices simétricas de $n \times n$. Además F satisface

$$\begin{array}{ll} (H1) & F(tp, \mu X) = |t|^{\alpha} \mu F(p, X), \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \mu \in \mathbb{R}^+. \\ (H2) & \text{Existen } \Lambda \geq \lambda > 0 \text{ tal que } \forall p \neq 0, \forall (M, N) \in \mathcal{S}^2(n), N \geq 0 \\ & \lambda |p|^{\alpha}\, tr(N) \leq F(p, M+N) - F(p, N) \leq \Lambda |p|^{\alpha}\, tr(N). \end{array}$$

De ahora en adelante nos referiremos a (1.1) tanto por la ecuación como por el operador asociado $F(\nabla u, D^2 u) + b(x) \cdot \nabla u \left|\nabla(u(x))\right|^{\alpha} + c(x)u\left|u\right|^{\alpha}$. Propiedades como comparación y existencia de soluciones para el problema de Dirichlet ya han sido estudiadas para estos operadores por *Birindelli y Demengel* en [4] y [7]. Más aún se conocen ya propiedades acerca de los valores propios de estos operadores, resultados que se encuentran en [5] y [6]. Al igual que en los artículos previamente citados, en esta memoria las soluciones son consideradas en el sentido viscoso, aunque por la forma (1.1) es necesario adaptar la noción de solución, pues no podemos tomar funciones test cuyo gradiente es nulo en el punto testeado. Puede ser de interés para el lector consultar [16], [20] y [24] para ver trabajos relacionados con operadores singulares. La noción de solución que usaremos se presenta con detalle en el siguiente capítulo.

A continuación daremos a conocer ejemplos de operadores que satisfacen $(H1)$ y $(H2)$, los que pueden encontrados en [4]. Pero antes notemos primero que la condición $(H2)$ implica que $\forall\,(p,M,N)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\times\mathcal{S}^2(n)$,

$$\begin{aligned} |p|^{\alpha}\lambda trN^{+}-|p|^{\alpha}\Lambda trN^{-} &\leq F(p,M+N)-F(p,M)\\ &\leq |p|^{\alpha}\Lambda trN^{+}-|p|^{\alpha}\lambda trN^{-}, \end{aligned}$$

donde $N=N^{+}+N^{-}$ es una descomposición minimal de N en una diferencia de matrices semidefinidas positivas. Esto implica que

$$(H2^{*})\qquad |p|^{\alpha}\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(N)\leq F(p,N)\leq |p|^{\alpha}\mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(N)\quad \forall N\in\mathcal{S}(n).$$

Aquí

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{+}(X)=\mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X)=\Lambda\sum_{e_i>0}e_i+\lambda\sum_{e_i<0}e_i,\\ \mathcal{M}^{-}(X)=\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(X)=\lambda\sum_{e_i>0}e_i+\Lambda\sum_{e_i<0}e_i, \end{aligned}$$

donde $e_i=e_i(X)$ son los valores propios de la matriz simétrica X. Los operadores $\mathcal{M}^{+}y\mathcal{M}^{-}$ son conocidos como los operadores extremales de Pucci. Ahora bien, si denotamos $\mathcal{S}_{\lambda,\Lambda}(n)=\mathcal{S}_{\lambda,\Lambda}$ al conjunto de matrices simétricas de $n\times n$ con valores propios entre λ y Λ, es fácil ver que para $X\in\mathcal{S}(n)$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{-}(X) &= \inf_{N\in\mathcal{S}_{\lambda,\Lambda}} tr(XN),\\ \mathcal{M}^{+}(X) &= \sup_{N\in\mathcal{S}_{\lambda,\Lambda}} tr(XN). \end{aligned}$$

Para más detalles consultar [15]. Veamos ahora los ejemplos.

Ejemplo 1.1. *Consideremos*

$$F(p,N)=|p|^{\alpha}\mathcal{M}(N),$$

donde $\mathcal{M}$ puede ser $\mathcal{M}^{+}$ o $\mathcal{M}^{-}$. Este operador es importante, pues son las cotas de los operadores que se están considerando y por ende su estudio deduce propiedades para la clase completa.

Ejemplo 1.2. *En el caso del q-laplaciano, la hipótesis $(H2)$ se satisface con $\alpha=q-2$. Esto debido a que el q-laplaciano se puede escribir como*

$$F(p,N)=|p|^{q-2}trN+(q-2)|p|^{q-4}\langle Np,p\rangle.$$

Ejemplo 1.3. *Evans y Spruck en [20] consideraron la evolución de los conjuntos de nivel por curvatura media, es decir, estudiaron*

$$u_t=\left(\delta_{i,j}-\frac{u_{x_j}u_{x_i}}{|\nabla u|^{2}}\right)u_{x_i}u_{x_j},$$

en $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. *Notemos que el operador estacionaria asociado*

$$F(p,N) = trN - \frac{\langle Np, p\rangle}{|p|^2},$$

satisface las hipótesis $(H1)$ *y* $(H2)$. *(Ver también [16]).*

El objetivo de esta memoria es probar nuevos resultados, inspirados en resultados clásicos para el p-laplaciano y para el operador de Pucci. Uno se refiere al p-laplaciano, pues este es el operador no lineal con forma de divergencia que más se asemeja al operador F con el cual estamos trabajando. Esta semejanza es sólo eso, pues la estructura de divergencia del p-laplaciano, permite estudiar dichas propiedades via integración por partes y estas técnicas no son aplicables para nuestro caso. El otro operador mencionado, el operador de Pucci, no tiene estructura variacional, pero éste es uniformemente elíptico y ha sido bien estudiado (ver por ejemplo [15], [17]).

Los resultados de esta memoria están separados en tres capítulos. A continuación se dará una breve descripción de cada uno de estos capítulos, resaltando los resultados más importantes que se han obtenido.

El Capítulo 3 se concentra en probar el principio del máximo de Alexandroff-Bakelman-Pucci. Resultados de principio del máximo para soluciones viscosas se pueden encontrar en [11], [12], [13], [15], [14] y [36]. También es interesante mencionar que *Trudinger* observó en [36] que el enfoque clásico utilizado para probar el principio del máximo (ver por ejemplo [21], [1], [2], [3], [33]) en conjunto con las herramientas entregadas por *Jensen* (ver apéndice en [17]) son suficientes para probar el resultado en el caso $\alpha = 0$. En nuestro caso dicha afirmación sigue siendo válida, ajustando la demostración encontrada en [14] junto con un tratamiento especial en el caso en que el operador sea singular ($\alpha \in (-1,0)$). A continuación, procedemos a enunciar el resultado obtenido (Teorema 3.1).

Teorema. *Supongamos que* $\alpha > -1$ *y* F *satisface* $(H1)$ *y* $(H2)$*, entonces existe una constante* $C = C(\gamma, n, \lambda, \alpha)$ *tal que si* $f \in L^n(\Omega)$ *y* $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ *es una solución viscosa de*

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x)\cdot \nabla u\,|\nabla(u(x))|^{\alpha} + c(x)u\,|u|^{\alpha} \geq f(x) \quad en \ \{0 < u\},$$

donde $c \leq 0$*, entonces*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\cdot diam\,(\Omega)\left\|f^-\right\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Análogamente, existe una constante $C = C(\gamma, n, \Lambda, \alpha)$ *tal que si* $f \in L^n(\Omega)$ *y* $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ *es una solución viscosa de*

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x)\cdot \nabla u\,|\nabla(u(x))|^{\alpha} + c(x)u\,|u|^{\alpha} \leq f(x) \quad en \ \{0 > u\},$$

donde $c \leq 0$, entonces

$$\sup_{\Omega} u^- \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + C \cdot diam\,(\Omega) \left\| f^+ \right\|_{L^n(\Gamma^+(u^-))}^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Aquí $\Gamma^+(u^+)$ y $\Gamma^+(u^-)$ son los conjuntos de contacto de u^+ y u^- respectivamente. Ver el Capítulo 3 para la definición exacta.

En el Capítulo 4 se pone interés en encontrar compacidad de las soluciones de (1.1). Una forma clásica de probar compacidad es demostrar primero la desigualdad de Harnack, la cual junto a un argumento de control de oscilación, permite obtener el resultado deseado [21]. Es bien sabido que el principio del máximo junto a un argumento de localización permite la demostración de la desigualdad de Harnack en el caso de operadores lineales uniformemente elípticos de segundo orden, resultado obtenido por *Krylov y Safonov* en [28] y [29], y demostración encontrada también en [21]. Esto también es cierto para el caso del operador extremal de Pucci, cuya demostración se puede encontrar en [15]. Por otro lado *Moser* probó este resultado en [32] basándose no en la linealidad del operador si no en un método iterativo (ver también [31]). Dicho método fue empleado posteriormente por *Serrin* en [35] para obtener la desigualdad de Harnack para una familia de operadores que incluye al p-laplaciano. El estudio de esta propiedad en nuestro caso es no trivial, pues no se poseen las técnicas de integración por partes utilizadas en [32] y [35] así como tampoco se tiene algún tipo de sublinealidad como en [21] o [15]. En esta memoria se demostró el resultado en el caso $\alpha \in (-1, 0)$, mientras que el caso $\alpha > 0$ sigue abierto. A continuación se enuncia el resultado (Teorema 4.1).

Teorema. *Supongamos que $\alpha \in (-1, 0)$ y que F satisface $(H1)$ y $(H2)$. Sea $u \in C(\Omega)$ solución viscosa no negativa de*

$$F\left(\nabla u, D^2u\right) + b(x) \cdot \nabla u \left|\nabla(u(x))\right|^{\alpha} + c(x)u\left|u\right|^{\alpha} = f \quad en\ \Omega, \tag{1.2}$$

con $f \in L^n(\Omega)$. Entonces existe $C = C(\lambda, \Lambda, n, \Omega, \alpha)$ tal que

$$\sup_{\Omega} u \leq C\left\{\inf_{\Omega} u + \|f\|_{n,\Omega}^{\frac{1}{\alpha+1}}\right\}.$$

La desigualdad de Harnack, permite encontrar regularidad C^{β}, $0 < \beta < 1$, de las soluciones de (1.2), lo cual a su vez da compacidad. El resultado se expone en el Capítulo 4 sección 2.

El Capítulo 5 está dedicado al estudio de una ecuación superlineal asociada al operador (1.1). Más precisamente, nos concentramos en estudiar el operador $-F(\nabla u, D^2u) + |u|^{s-1}$, donde $s > 1 + \alpha$ y $\alpha \in (-1, 0)$. Esta restricción sobre el parámetro α viene dada por dos hechos, el primero teniendo que ver con la regularidad interior de las soluciones (Teorema 4.2) y el segundo con el hecho de que no sabemos localizar para el caso $\alpha > 0$. El primer resultado, encontrado en la Sección 2, muestra existencia de soluciones en $\mathbb{R}^n$ para la ecuación superlineal. Este resultado es clásico en el caso del laplaciano, siendo estudiado por *Brezis* en [10], en el cual prueba que para todo $s > 1$ existe un única solución al problema y en el cual no se piden condiciones de crecimiento a f en infinito. Este resultado también se conoce para operadores elípticos cuasilineales, que incluyen al p-laplaciano y ecuaciones parabólicas, siendo estudiado por *Boccardo, Gallouet y Vásquez* en [8] y [9] respectivamente. En un contexto viscoso, *Esteban, Felmer y Quaas* en [19] probaron que existía solo una solución del problema, sólo suponiendo integrabilidad local del dato. Este resultado se probó cuando se trabajaba con el operdor de Pucci, que en nuestro caso resulta estar incluido en $\alpha = 0$. Si bien, en los resultados previos se pudo hablar de unicidad y positividad de soluciones, en nuestro caso no es posible, dado la no linealidad que se tiene. Esto por un lado impide el uso de la función de Osserman (utilizada en [10] y [19]) y por el otro, el argumento standard de unicidad. Enunciamos entonces a continuación el resultado probado (Teorema 5.1).

Teorema. *Supongamos que $\alpha \in (-1, 0)$ y que F satisface $(H1)$, $(H2)$. Sea $s > 1 + \alpha$, entonces para cada función $f \in L^n_{loc}(\mathbb{R}^n)$, la ecuación*

$$-F\left(\nabla u, D^2 u\right) + |u|^{s-1} u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

posee al menos una solución.

Finalmente, en la Sección 3 del Capítulo 5, se prueba la existencia de soluciones que explotan en la frontera, sin pedir crecimiento en el dato, inspirados en el resultado obtenido por *Esteban, Felmer y Quaas* en [19]. Cuando el operador en cuestión tiene forma de divergencia, es bien conocido que para problemas superlineales se pueden encotrar soluciones que explotan en la frontera. Existe una amplia literatura el respecto, ver por ejemplo, *Keller* en [26], *Loewner y Nirenberg* en [30], *Kondratev y Nikishkin* en [27] y *Del Pino y Letelier* [18]. En lo que sigue presentamos el resultado obtenido (Teorema 5.3), el cual requiere de una hipótesis adicional, la cual se presenta en la Sección 3 del Capítulo 5 y a la cual denotaremos por $(H3)$. Esta hipótesis se necesita para tener un teorema de comparación.

Teorema. *Supongamos que $\alpha \in (-1, 0)$ y que F satisface $(H1)$, $(H2)$ y $(H3)$. Sea $s > 1 + \alpha$, $f \in L^n(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^2. Entonces la ecuación*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -F\left(\nabla u, D^2 u\right) + |u|^{s-1} u & = & f \quad \text{en } \Omega, \\ \lim\limits_{x \to \partial\Omega} u(x) & = & \infty \end{array} \right.$$

posee al menos una solución.

Observación. Si bien la definición de solución viscosa que se presenta en el Capítulo 2 es para lados derechos f continuos, sin embargo creemos que es fácilmente extendible a $f \in L^n(\Omega)$. Los teoremas del Capítulo 5 que acabamos de enunciar se demuestran en el caso en que f es continuo, pero tomando en cuenta lo anterior pensamos que las demostraciones se pueden extender sin dificultad para el caso $f \in L^n(\Omega)$.

Capítulo 2

Notación y Definiciones

En este Capítulo detallaremos la definición de solución y otras definiciones necesarias para el estudio del operador (1.1).

Definición 2.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $\alpha \in (-1,\infty)$ y $u \in C(\Omega)$. Diremos que u es una supersolución viscosa de*

$$F\left(x,u,\nabla u,D^2u\right)=g(x,u),$$

en Ω si para todo $x_0 \in \Omega$ se tiene

(i) O bien para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u-\varphi$ tiene un mínimo local en x_0 y $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ entonces

$$F\left(x_0,u(x_0),\nabla\varphi(x_0),D^2\varphi(x_0)\right) \leq g(x_0,u(x_0)). \tag{2.1}$$

(ii) O existe una bola abierta $B\left(x_0,\delta\right) \subset \Omega$, $\delta>0$ en la cual se tiene que u es constante, $u=C$ y

$$0 \leq g\left(x,C\right) \quad \forall x \in B\left(x_0,\delta\right). \tag{2.2}$$

Análogamente, diremos que u es una subsolución viscosa de

$$F\left(x,u,\nabla u,D^2u\right)=g(x,u),$$

en Ω si para todo $x_0 \in \Omega$ se tiene

(i) O bien para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u-\varphi$ tiene un máximo local en x_0 y $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ entonces

$$F\left(x_0,u(x_0),\nabla\varphi(x_0),D^2\varphi(x_0)\right) \geq g(x_0,u(x_0)). \tag{2.3}$$

(ii) O existe una bola abierta $B(x_0, \delta) \subset \Omega$, $\delta > 0$ en la cual se tiene que u es constante, $u = C$ y

$$0 \geq g(x, C) \quad \forall x \in B(x_0, \delta). \tag{2.4}$$

Observación. Notemos que la definición antes dada es la definición entregada por *Birindelli y Demengel* en [4], [5], [6], [7]. Tambien se puede consultar [16] para ver definciones de solución para ecuaciones singulares. Lo que es interesante resaltar es que en el caso en el que el operador sea continuo, es decir, $\alpha \geq 0$, entonces la definición que acabamos de dar calza con la defincíon usual de solución viscosa. Recordemos dicha definición, entregada en [15].

Definición 2.2. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}(n) \to \mathbb{R}$ continua y $u \in C(\Omega)$. Diremos que u es una supersolución viscosa en el sentido usual de*

$$F\left(x, u, \nabla u, D^2 u\right) = g(x, u),$$

en Ω si para todo $x_0 \in \Omega$, $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0, entonces

$$F\left(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)\right) \leq g(x_0, u(x_0)). \tag{2.5}$$

Análogamente, diremos que u es una subsolución viscosa en el sentido usual de

$$F\left(x, u, \nabla u, D^2 u\right) = g(x, u),$$

en Ω si para todo $x_0 \in \Omega$ se tiene $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0, entonces

$$F\left(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)\right) \geq g(x_0, u(x_0)). \tag{2.6}$$

El lema que sigue, prueba la afirmación hecha en la observación.

Lema 2.1. *Sea $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}(n) \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface $F(x, r, p, 0) = 0$ para todo $(x, r, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se tiene que u es una supersolución viscosa (resp. sub) de*

$$F\left(x, u, \nabla u, D^2 u\right) = g(x, u) \quad \text{en } \Omega, \tag{2.7}$$

si y solo si u es una super solución viscosa (resp. sub) de (2.7) *en el sentido usual.*

Demostración:
Probemos primero que si u es supersolución en el sentido usual entonces satisface (2.2). En efecto, lo único que hay que notar es que si $u = C$ es constante en $B = B(x_0, \rho)$ entonces para todo $x \in B$, u es una función test y por ende satisface

(2.2), gracias al hecho que $F(x,r,p,0)=0$.

Veamos ahora la otra implicancia. Sea φ y x_0 tales que $u-\varphi$ tiene un mínimo en $B(x_0,\rho)$ el cual se alcanza en x_0. Es claro que si $\nabla\varphi(x_0)\neq 0$ no hay nada que probar. Ahora si $\nabla\varphi(x_0)=0$ definimos, para $y\in B(0,r)$ con r pequeño, $\varphi_y(x)=\varphi(x+y)$ y sea x_y un punto de mínimo de $u-\varphi_y$.

Supongamos que para todo $y\in B(0,r)$ se tiene que $x_y=x_0$, entonces se tiene que φ es constante en torno a x_0. Luego u también es constante en torno a x_0 y se prueba la desigualdad deseada (2.5).

Supongamos ahora que existe una sucesión de puntos $y_n\searrow 0$, con $y_n\neq 0$, tales que x_{y_n} satisfacen $\nabla\varphi_{y_n}(x_{y_n})\neq 0$. Luego, en dichos puntos se puede testear la ecuación para obtener

$$F\left(x_{y_n},u(x_{y_n}),\nabla\varphi_{y_n}(x_{y_n}),D^2\varphi_{y_n}(x_{y_n})\right)\leq g(x_{y_n},u(x_{y_n})).$$

Ocupando la continuidad de F se concluye (2.5) en x_0.

Finalmente, supongamos por contradicción que para todo $y\in B$ se tiene que $x_y+y=x_0$ y u no es constante. Entonces, por definición tendremos que

$$u(x_y)-\varphi_y(x_y)\leq u(x)-\varphi_y(x)\quad\forall y\in B(0,r)\ ,x\in B(x_0,\rho), \tag{2.8}$$

pero como $x_y+y=x_0$, (2.8) se transforma en

$$u(x_0-y)-\varphi(x_0)\leq u(x)-\varphi(x+y)\quad\forall y\in B(0,r)\ ,x\in B(x_0,\rho). \tag{2.9}$$

Ahora en (2.9) tomamos $x=x_0+h$ y $y=-h-td$ donde $t>0$, d es cualquier dirección unitaria y $h\in B(0,r)$ para obtener

$$\frac{u(x_0+h+td)-u(x_0+h)}{t}\leq\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x_0-td)}{t}\quad\forall t>0, \tag{2.10}$$

análogamente, tomando $y=-h$ y $x=x_0+h+td$ obtenemos

$$\frac{u(x_0+h+td)-u(x_0+h)}{t}\geq\frac{\varphi(x_0+td)-\varphi(x_0)}{t}\quad\forall t>0. \tag{2.11}$$

Tomando $\limsup$ en (2.10) y $\liminf$ en (2.8) encontramos que

$$\begin{aligned}0\ &\geq\ \limsup_{t\to 0}\frac{u(x_0+h+td)-u(x_0+h)}{t}\\ &\geq\ \liminf_{t\to 0}\frac{u(x_0+h+td)-u(x_0+h)}{t}\\ &\geq\ 0,\end{aligned}$$

lo cual nos da la diferenciabilidad a lo largo de rectas de u entorno a x_0. Lo anterior permite deducir que u es constante cerca de x_0 y por ende la contradicción.■

El lema anterior es de vital importancia para probar los teoremas que siguen, pues para operadores continuos ($\alpha \geq 0$) se sabe aproximar soluciones viscosas usuales por funciones de clase C^2. Además para el caso en que se tiene un operador singular ($\alpha \in (-1, 0)$) se puede probar que las soluciones de la ecuación (1.1) satisfacen también una ecuación con un operador continuo. Los detalles se precisan más adelante.

Observación. Es bueno recordar que se puede trabajar en un contexto más general, en donde las sub y super soluciones son semi continuas inferiores y semi continuas superiores respectivamente. Es así como se trabaja en [4]-[7] y también en [17].

Capítulo 3

La desigualdad de Alexandroff-Bakelman-Pucci

En este capítulo se estudiará la desigualdad de Alexandroff-Bakelman-Pucci para soluciones de la ecuación (1.1). Para este estudio es de vital importancia tener teoremas de aproximación, es decir, poder aproximar la solución viscosa $u \in C(\Omega)$ de (1.1) por funciones $u_m \in C^2(\Omega)$ las cuales satisfagan la ecuación para u o alguna similar.

3.1. Preliminares

Como antes mencionado, es útil poder aproximar las soluciones de nuestro problema por funciones que posean más regularidad. En el caso de ABP, también necesitaremos control de los conjuntos de contacto.

A continuación se define el conjunto de contacto de una función u y también su supconvolución u_ε.

Definición 3.1. *Para $w : \Omega \to \mathbb{R}$ y $r > 0$ definimos*

$$\Gamma^+(w, \Omega) = \{x \in \Omega : \ \exists p \ t.q. \ w(y) \le w(x) + \langle p, y - x\rangle \ \ \forall y \in \Omega\},$$
$$\Gamma_r^+(w, \Omega) = \{x \in \Omega : \ \exists p \in B_r \ t.q. \ w(y) \le w(x) + \langle p, y - x\rangle \ \ \forall y \in \Omega\}.$$

Definición 3.2. *Para $\varepsilon > 0$, definimos la supconvolución de una función u por*

$$u^\varepsilon(x) = \sup_{y \in \Omega} \left(u(y) - \frac{1}{2\varepsilon} |x - y|^2 \right).$$

El siguiente lema trata de la convergencia de los conjuntos de contacto.

Lema 3.1. *Sea $u_j, j \geq 1$, una sucesión de funciones definidas en Ω_j, donde $\Omega_j \nearrow \Omega$. Supongamos que u_j converge uniformemente a una función continua u en cada Ω_m. Entonces*

i.- $\limsup_{j\to\infty} \Gamma^+ (u_j, \Omega_j) \subset \Gamma^+ (u, \Omega)$.

ii.- $\limsup_{j\to\infty} |\Gamma^+ (u_j, \Omega_j)| \leq |\Gamma^+ (u, \Omega)|$.

iii.- $\limsup_{j\to\infty} \Gamma_r^+ (u_j, \Omega_j) \subset \Gamma_r^+ (u, \Omega)$.

Los próximos lemas son los que permiten aproximar las soluciones. En términos generales, el procedimiento es el siguiente: Se toma la solución u y se contruye su supconvolución u_ε la cual posee primera y segunda derivadas (en el sentido de distribuciones). Luego a u_ε se le convoluciona con una familia regularizante standard y se prueba que la regularizada de u_ε satisface una ecuación similar a (1.1), en términos que se detallán con precisión a continuación.

Lema 3.2. *Sea Ω acotado, $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ y u^ε su supconvolución. Entonces*

i.- *u^ε es Lipschitz en Ω.*

ii.- *$u^\varepsilon \to u$ uniformemente en $\overline{\Omega}$ cuando $\varepsilon \searrow 0$.*

iii.- *Existe una función medible $M : \Omega \to \mathcal{S}(n)$ t.q.*

$$u^\varepsilon(y) = u^\varepsilon(x) + \langle Du^\varepsilon(x), y - x\rangle + \frac{1}{2} \langle M(x)(y - x), y - x\rangle + o_{x,y},$$

c.t.p. $x \in \Omega$, donde $o_{x,y} = o\left(|x - y|^2\right)$.

iv.- $M(x) \geq -\frac{1}{\varepsilon} I$

v.- *Si u_η^ε es una regularización standard de u^ε, entonces $D^2 u_\eta^\varepsilon(x) \geq -\frac{1}{\varepsilon} I$ y $D^2 u_\eta^\varepsilon(x) \to M(x)$ c.t.p. en Ω cuando $\eta \to 0$.*

Lema 3.3. *Si u es una subsolución viscosa de*

$$F\left(x, u, Du, D^2u\right) = f(x) \text{ en } \Omega,$$

y las funciones f y F son continuas, entonces

$$F\left(x^*, u(x^*), Du^\varepsilon(x), M(x)\right) \leq f(x^*) \text{ c.t.p. } x \in \Omega_{2\left(\varepsilon\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^{1/2}},$$

donde $x^* \in \Omega$ es cualquier punto t.q.

$$u^\varepsilon(x) = u(x^*) - \frac{1}{2\varepsilon} |x^* - x|^2,$$

y para $\delta > 0$, $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \ dist\,(x, \partial\Omega) > \delta\}$.

Las demostraciones de los lemas anteriores se pueden encontrar en [14]. También se sugiere ver [23].

3.2. La desigualdad de Alexandroff-Bakelman-Pucci para $\alpha > -1$

En este sección estudiaremos la desigualdad de Alexandroff-Bakelman-Pucci. Dividiremos la demostración en dos casos. El primero trata con $\alpha > 0$, el cual nos da el derecho de ocupar los lemas de aproximación, dado que el operador asociado es continuo. Esta demostración utiliza una técnica de integración, la cual se puede ver para el caso $\alpha = 0$ en el trabajo de *L. Cafarelli, M. Crandall, M. Kocan, A. Świech* [14].

Proposición 3.1. *(ABP para el caso $\alpha > 0$)*
Supongamos que F satisface $(H1)$ y $(H2)$, entonces existe una constante $C = C(\gamma, n, \lambda, \alpha)$ tal que si $f \in L^n(\Omega)$ y $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ es una solución viscosa de

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x) \cdot \nabla u \left|\nabla(u(x))\right|^{\alpha} + c(x) u \left|u\right|^{\alpha} \geq f(x) \quad en \;\; \{0 < u\},$$

donde $c \leq 0$, entonces

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \cdot diam\,(\Omega) \left\| f^- \right\|^{\frac{1}{1+\alpha}}_{L^n(\Gamma^+(u^+))}.$$

Analogamente, existe una constante $C = C(\gamma, n, \Lambda, \alpha)$ tal que si $f \in L^n(\Omega)$ y $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ es una solución viscosa de

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x) \cdot \nabla u \left|\nabla(u(x))\right|^{\alpha} + c(x) u \left|u\right|^{\alpha} \leq f(x) \quad en \;\; \{0 > u\},$$

donde $c \leq 0$, entonces

$$\sup_{\Omega} u^- \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + C \cdot diam\,(\Omega) \left\| f^+ \right\|^{\frac{1}{1+\alpha}}_{L^n(\Gamma^+(u^-))}.$$

Demostración:

Demostraremos sólo una de las desigualdades, pues la otra sale del hecho de que $\mathcal{M}^+(-X) = -\mathcal{M}^-(X)$.

Supongamos primero que $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$, y sea

$$r_0 = \frac{\sup\limits_{\Omega} u - \sup\limits_{\partial\Omega} u^+}{diam\,(\Omega)}.$$

Para $r < r_0$ sea $p \in B_r$ y $\hat{x} \in \bar{\Omega}$ un punto de máximo de $u(x) - \langle p, x\rangle$, es decir,

$$\begin{aligned} u(x) - \langle p, x\rangle &\leq u(\hat{x}) - \langle p, \hat{x}\rangle \;\; \forall x \in \bar{\Omega} \text{ o equivalentemente} \\ u(x) - u(\hat{x}) &\leq \langle p, x - \hat{x}\rangle \;\; \forall x \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega} u - u(\hat{x}) &\leq |p| \, diam(\Omega) \\
&\leq r \cdot diam(\Omega) \\
&< r_0 \cdot diam(\Omega) \\
&= \sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+.
\end{aligned}$$

Luego si $r < r_0$ es cercano a r_0 se obtiene

$$(r_0 - r) \cdot diam\,(\Omega) + \sup_{\partial\Omega} u^+ < u(\hat{x}).$$

En particular $\hat{x} \in \Omega$ y $0 < u(\hat{x})$. Luego se tiene que

$$\nabla u(\hat{x}) = p$$

y

$$D^2 u(\hat{x}) \leq 0$$

y más aún se concluye que, para $0 < r < r_0$, Γ_r^+ es un subconjunto compacto de Ω. Además, se tiene que

$$B_r = B_r(0) = Du\left(\Gamma_r^+\,(u)\right),$$

y

$$D^2 u(x) \leq 0 \ \ \forall x \in \Gamma_r^+\,(u) \subset \{0 < u\}\,.$$

Luego, para $\kappa \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r} \left(|p|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}}\,|p|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} dp \\
&\qquad\leq \int_{\Gamma_r^+(u)} \left(|\nabla u|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}}\,|\nabla u|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} \left|det\left(D^2 u\right)\right| dx \\
&\qquad\leq \int_{\Gamma_r^+(u)} \left(|\nabla u|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}}\,|\nabla u|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} \left(-\frac{tr\,(D^2 u)}{n}\right)^{n} dx\,.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ahora notemos que

$$\left(|\nabla u(x)|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}}\,|\nabla u(x)|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} = |\nabla u(x)|^{\alpha n}\left(|\nabla u(x)|^{\frac{(1+\alpha)n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}}\right)^{1-n},$$

lo que implica que

$$\int_{\Gamma_r^+(u)} \left(|\nabla u|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} |\nabla u|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} \left(-\frac{tr\left(D^2u\right)}{n}\right)^n dx =$$

$$\int_{\Gamma_r^+(u)\setminus\{\nabla u(x)=0\}} \left(|\nabla u|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} |\nabla u|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} \left(-\frac{tr\left(D^2u\right)}{n}\right)^n dx.$$

Gracias a lo anterior, solo nos preocuparemos de los puntos donde el gradiente de u es no nulo.

Ahora observemos que

$$D^2u \leq 0 \text{ en } \Gamma^+(u),$$

y acotando $b(x) \leq \gamma$ se tiene que u satisface

$$|\nabla u|^\alpha \left(-\lambda \cdot tr(D^2u) - \gamma |\nabla u|\right) \leq -f \quad \text{en } \Gamma^+(u).$$

Ahora, si $\nabla u(x) \neq 0$ para $x \in \Gamma^+(u)$ entonces

$$\begin{aligned}\left(-\lambda \cdot tr(D^2u(x)) - \gamma |\nabla u(x)|\right) &\leq -f(x)\, |\nabla u(x)|^{-\alpha} \quad \text{en } \Gamma^+(u)\\ &\leq f^-(x)\, |\nabla u(x)|^{-\alpha} \quad \text{en } \Gamma^+(u).\end{aligned}$$

Luego ocupando (3.1), denotado $\mathcal{D} = \left(-\frac{tr\left(D^2u\right)}{n}\right)^n$ y la desigualdad anterior

$$\begin{aligned}\int_{B_r} \left(|p|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} |p|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} dp &\leq \int_{\Gamma_r^+(u)} \left(|\nabla u|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} |\nabla u|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} \mathcal{D} dx\\ &\leq \frac{1}{n^n\lambda^n} \int_{\Gamma_r^+(u)} \left(|\nabla u|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} |\nabla u|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} \left(\gamma |\nabla u| + f^- |\nabla u|^{-\alpha}\right)^n dx.\end{aligned}$$

Ahora notamos que

$$\left(|\nabla u|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} |\nabla u|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} \left(\gamma |\nabla u| + f^- |\nabla u|^{-\alpha}\right)^n \leq$$

$$\left(|\nabla u|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} |\nabla u|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} \left(\gamma^n + \frac{(f^-(x))^n}{\kappa^n}\right) \left(|\nabla u|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} |\nabla u|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{n-1}.$$

Así, simplificando, obtenemos

$$\int_{B_r} \left(|p|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} |p|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} dp \leq \int_{\Gamma_r^+(u)} \left(\gamma^n + \frac{(f^-(x))^n}{\kappa^n}\right) dx. \tag{3.2}$$

Notando ahora que $(a+b)^k \leq 2^{k-1}(a^k + b^k)$ implica

$$2^{2-n} \frac{1}{|p|^n + \kappa^n |p|^{-\alpha n}} \leq \left(|p|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} |p|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right),$$

gracias a (3.2) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{2^{2-n}}{n(\alpha+1)}\omega_n \ln\left(\frac{r^{n(\alpha+1)}}{\kappa^n}+1\right) &= 2^{2-n}\int_{B_r}\frac{1}{|p|^n+\kappa^n|p|^{-\alpha n}}dp \\
&\leq \int_{B_r}\left(|p|^{\frac{n}{n-1}}+\kappa^{\frac{n}{n-1}}|p|^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)dp \\
&\leq \int_{\Gamma_r^+(u)}\left(\gamma^n+\frac{(f^-(x))^n}{\kappa^n}\right)dx,
\end{aligned}$$

donde ω_n es la medida en $\mathbb{R}^n$ de $\partial B(0,1)$. Tomando ahora $\kappa = \|f^-\|_{L^n\left(\Gamma_r^+(u)\right)}/\lambda \neq 0$ y haciendo la sustitución exponencial concluimos que

$$r \leq C\left\|f^-\right\|^{\frac{1}{\alpha+1}}, \tag{3.3}$$

donde $C = C(\gamma, n, \lambda, \alpha)$. Tomando $r \nearrow r_0$ y recordando que

$$r_0 = \frac{\sup\limits_{\Omega} u - \sup\limits_{\partial\Omega} u^+}{diam\,(\Omega)};$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega} u &\leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\cdot diam\,(\Omega)\left\|f^-\right\|^{\frac{1}{\alpha+1}}_{L^n\left(\Gamma^+_{r_0}(u)\right)} \\
&\leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\cdot diam\,(\Omega)\left\|f^-\right\|^{\frac{1}{\alpha+1}}_{L^n(\Gamma^+(u))} \\
&= \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\cdot diam\,(\Omega)\left\|f^-\right\|^{\frac{1}{\alpha+1}}_{L^n(\Gamma^+(u^+))}.
\end{aligned}$$

Veamos ahora la aproximación. Gracias al hecho de que $\alpha \geq 0$ y $(H1)$ se tiene que F es continua, luego acuerdo al Lema 3.3 se tiene c.t.p. que

$$F\left(\nabla u^\varepsilon, D^2u^\varepsilon\right) + b(x)\cdot\nabla u^\varepsilon\left|\nabla(u^\varepsilon(x))\right|^\alpha + c(x)u^\varepsilon\left|u^\varepsilon\right|^\alpha \geq f_\varepsilon, \quad \text{en } \Omega_{2\left(\varepsilon\|u\|_\infty\right)^{1/2}}$$

donde

$$f_\varepsilon(x) = \sup\left\{f(y) \;\mid\; |x-y| \leq 2\left(\varepsilon\|u\|_\infty\right)^{1/2}\right\},$$

y $D^2u^\varepsilon(x) = M(x)$ es la segunda derivada c.t.p. dada por el lema Lema 3.2. Recordando que $u^\varepsilon \to u$ uniformemente, se tiene que si $r < r_0(u)$ y ε es suficientemente pequeño, entonces $r < r_0(u^\varepsilon)$ y $\Gamma_r^+(u^\varepsilon)$ permanecerá contenido en un subconjunto compacto de Ω.
Si (3.1) sigue siendo cierto con u^ε en vez de u, entonces se obtendrá (3.2) con u^ε en vez de u y f_ε en vez de f. Tomando $\varepsilon \searrow 0$, utilizando la continuidad de f y

el Lema 3.1 se concluye. Luego solo resta probar que (3.1) es cierto con u^ε en vez de u. Para esto, sea u^ε_η un regularización standard de u^ε y notemos que (3.1) es cierto para u^ε_η. En virtud del Lema 3.1 (*iii*) y el Lema 3.2 (*v*) y

$$-\frac{1}{\varepsilon} \leq D^2 u^\varepsilon_\eta \leq 0 \ \text{ en } \Gamma^+_r\left(u^\varepsilon_\eta\right),$$

se garantiza la convergencia, y por ende se tiene (3.1) para u^ε. ■

Ahora estudiaremos el caso $\alpha \in (-1,0)$. A priori no se puede utilizar el lema de aproximación, pues este operador resulta ser singular. Para saltar este escollo, basta notar que las soluciones de la ecuación son soluciones también de una ecuación cuyo operador es continuo. Este hecho se retrata en el siguiente lema.

Lema 3.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y u solución viscosa en Ω de*

$$|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^+\left(D^2 u\right) + \gamma_1 |\nabla u|^{\alpha+1} + \gamma_2 |u|^{\alpha+1} \geq f,\ \alpha \in (-1,0)\,,\ f \leq 0, \tag{3.4}$$

entonces, $v = u - \sigma x_1$, $\sigma > 0$ es solución viscosa en Ω de

$$(|\nabla v| + \sigma)^\alpha \mathcal{M}^+\left(D^2 v\right) + \gamma_1 (|\nabla v| + \sigma)^{\alpha+1} + \gamma_2 (|v| + \sigma \cdot diam\,(\Omega))^{\alpha+1} \geq f.$$

Analogamente, si u solución viscosa en Ω de

$$|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^-\left(D^2 u\right) - \gamma_1 |\nabla u|^{\alpha+1} - \gamma_2 |u|^{\alpha+1} \leq f,\ \alpha \in (-1,0)\,,\ f \geq 0,$$

entonces, $v = u - \sigma x_1$, $\sigma > 0$ es solución viscosa en Ω de

$$(|\nabla v| + \sigma)^\alpha \mathcal{M}^-\left(D^2 v\right) - \gamma_1 (|\nabla v| + \sigma)^{\alpha+1} - \gamma_2 (|v| + \sigma \cdot diam\,(\Omega))^{\alpha+1} \leq f. \tag{3.5}$$

Demostración:
Sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$ tales que $v \geq \varphi$ y $v(x_0) = \varphi(x_0)$. Lo anterior equivale a $u \geq \tilde\varphi$ y $u(x_0) = \tilde\varphi(x_0)$ con $\tilde\varphi = \varphi + \sigma x_1$. Como u es solución de (3.4), entonces

$$|\nabla\tilde\varphi(x_0)|^\alpha \mathcal{M}^+\left(D^2\tilde\varphi(x_0)\right) + \gamma_1 |\nabla\tilde\varphi(x_0)|^{\alpha+1} + \gamma_2 |\tilde\varphi(x_0)|^{\alpha+1} \geq f(x_0)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} |\nabla\varphi(x_0) + \sigma e_1|^\alpha \mathcal{M}^+\left(D^2\varphi(x_0)\right) + \gamma_1 |\nabla\varphi(x_0) + \sigma e_1|^{\alpha+1} + \\ \gamma_2 |\varphi(x_0) + \sigma x_1|^{\alpha+1} \geq f(x_0). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $\alpha \in (-1,0)$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\nabla\varphi + \sigma e_1| &\leq |\nabla\varphi| + \sigma, \\ (|\nabla\varphi + \sigma e_1|)^{\alpha+1} &\leq (|\nabla\varphi| + \sigma)^{\alpha+1} \end{aligned}$$

y

$$|u+\sigma x_1|^{\alpha+1} \leq \left(|u| + \sigma \cdot diam\,(\Omega)\right)^{\alpha+1}.$$

Entonces, si $\mathcal{M}^+\left(D^2\varphi(x_0)\right) \leq 0$, se concluye

$$\begin{aligned} \left(|\nabla\varphi(x_0)| + \sigma\right)^{\alpha} \mathcal{M}^+\left(D^2\varphi(x_0)\right) + \gamma_1 \left(|\nabla\varphi(x_0)| + \sigma\right)^{\alpha+1} + \\ \gamma_2 \left(|\varphi(x_0)| + \sigma \cdot diam\,(\Omega)\right)^{\alpha+1} \geq |\nabla\varphi(x_0) + \sigma e_1|^{\alpha} \mathcal{M}^+\left(D^2\varphi(x_0)\right) + \\ \gamma_1 |\nabla\varphi(x_0) + \sigma e_1|^{\alpha+1} + \gamma_2 |\varphi(x_0) + \sigma x_1|^{\alpha+1} \geq f(x_0). \end{aligned}$$

Finalmente, si $\mathcal{M}^+\left(D^2\varphi(x_0)\right) > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left(|\nabla\varphi(x_0)| + \sigma\right)^{\alpha} \mathcal{M}^+\left(D^2\varphi(x_0)\right) + \gamma_1 \left(|\nabla\varphi(x_0)| + \sigma\right)^{\alpha+1} + \\ \gamma_2 \left(|\varphi(x_0)| + \sigma \cdot diam\,(\Omega)\right)^{\alpha+1} \geq 0 \geq f(x_0), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. El caso con $\mathcal{M}^-$ resulta al tomar $-u$.■

En lo que sigue, estudiaremos la desigualdad de ABP para u_σ solución de (3.4) la cual podemos aproximar bien, en el sentido que tenemos una buena ecuación asociada a las aproximantes. Después de esto se pasa al límite con σ y se obtiene el resultado deseado.

Proposición 3.2. *(ABP para el caso $\alpha \in (-1,0)$)*
Supongamos que F satisface $(H1)$ y $(H2)$, entonces existe una constante $C = C(\gamma, n, \lambda, \alpha)$ tal que si $f \in L^n(\Omega)$ y $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ es una solución viscosa de

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x)\cdot\nabla u\,|\nabla(u(x))|^{\alpha} + c(x)u\,|u|^{\alpha} \geq f(x) \quad en \ \{0 < u\},$$

donde $c \leq 0$, entonces

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \cdot diam\,(\Omega) \left\|f^-\right\|^{\frac{1}{1+\alpha}}_{L^n(\Gamma^+(u^+))}.$$

Analogamente, existe una constante $C = C(\gamma, n, \Lambda, \alpha)$ tal que si $f \in L^n(\Omega)$ y $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ es una solución viscosa de

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x)\cdot\nabla u\,|\nabla(u(x))|^{\alpha} + c(x)u\,|u|^{\alpha} \leq f(x) \quad en \ \{0 > u\},$$

donde $c \leq 0$, entonces

$$\sup_{\Omega} u^- \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + C \cdot diam\,(\Omega) \left\|f^+\right\|^{\frac{1}{1+\alpha}}_{L^n(\Gamma^+(u^-))}.$$

Demostración:

Al igual que en el caso $\alpha > 0$ sólo desmotraremos una de las desigualdades, pues la otra sale del hecho de que $\mathcal{M}^+(-X) = -\mathcal{M}^-(X)$.

Supongamos primero que, $c(x) = 0$, $v \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ y sea $r_0 = r_0^v$ para v como en el Lema 3.4. Es fácil probar (ver demostración de la Proposición 3.1) que para $r < r_0$, $\Gamma_r^+(v)$ es un subconjunto compacto de Ω y

$$\begin{gathered} B_r = B_r(0) = Dv\left(\Gamma_r^+(v)\right) \text{ y} \\ D^2v(x) \leq 0 \text{ en } \Gamma_r^+(v) \subset \{0 < v\}. \end{gathered}$$

Luego

$$\int_{B_r} \left((|p|+\sigma)^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} (|p|+\sigma)^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} dp \leq$$
$$\int_{\Gamma_r^+(v)} \left((|\nabla u|+\sigma)^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} (|\nabla u|+\sigma)^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} \left(-\frac{tr\left(D^2u\right)}{n}\right)^n dx.$$

Notando que

$$\left(-\frac{tr\left(D^2u\right)}{n}\right)^n \leq \left(\gamma\left(|\nabla u|+\sigma\right) + f^-\left(|\nabla u|+\sigma\right)^{-\alpha}\right)^n,$$

y procediendo como en la Proposición 3.1, se encuentra que

$$\int_{B_r} \left((|p|+\sigma)^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} (|p|+\sigma)^{\frac{-\alpha n}{n-1}}\right)^{1-n} dp \leq \int_{\Gamma_r^+(v)} \left(\gamma^n + \frac{(f^-(x))^n}{\kappa^n}\right) dx. \tag{3.6}$$

Tenemos que $\Gamma^+(v) \subseteq \Gamma^+(u)$ para todo $\sigma \geq 0$, donde

$$\Gamma^+(v) = \{x \in \Omega\ \exists p,\ \text{t.q.} v(y) \leq v(x) + \langle p, y-x\rangle \ \ \forall y \in \Omega\}.$$

En efecto, sea $x \in \Gamma^+(v)$ entonces existe p tal que

$$v(y) \leq v(x) + \langle p, y-x\rangle \quad \forall y \in \Omega$$

lo que equivale a

$$u(y) - \sigma y_1 \leq u(x) - \sigma x_1 + \langle p, y-x\rangle \quad \forall y \in \Omega$$

y así

$$u(y) \leq u(x) \leq u(x) + \langle \bar{p}, y-x\rangle \quad \forall y \in \Omega,$$

donde $\bar{p} = p + \sigma e_1$, por ende $x \in \Gamma^+(u)$. Luego de (3.6) se tiene

$$\int_{B_r} \left((|p| + \sigma)^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} (|p| + \sigma)^{\frac{-\alpha n}{n-1}} \right)^{1-n} dp \leq \int_{\Gamma_r^+(v)} \left(\gamma^n + \frac{(f^-(x))^n}{\kappa^n} \right) dx.$$

Es ahora cuando pasamos a la aproximación tal y como en caso $\alpha \geq 0$. Una vez terminado el proceso de aproximación se procede a eliminar σ de la integral tomando límite cuando $\sigma \searrow 0$. Notando que $v = v_\sigma \to u$ uniformemente y por ende $r_0^v \to r_0^u$, es fácil probar que

$$\lim_{\sigma \to 0} I_\sigma = \int_{B_r} \left(|p|^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} |p|^{\frac{-\alpha n}{n-1}} \right)^{1-n} dp,$$

donde

$$\int_{B_r} \left((|p| + \sigma)^{\frac{n}{n-1}} + \kappa^{\frac{n}{n-1}} (|p| + \sigma)^{\frac{-\alpha n}{n-1}} \right)^{1-n} dp$$

y luego se concluye argumentando como en la Proposición 3.1.■

A modo de resumen, podemos enunciar el teorema que ha sido probado mediante Proposiciones 3.1 y 3.2.

Teorema 3.1. *(Desigualdad de Alexandroff-Bakelman-Pucci)*
Supongamos que $\alpha > -1$ y F satisface $(H1)$ y $(H2)$, entonces existe una constante $C = C(\gamma, n, \lambda, \alpha)$ tal que si $f \in L^n(\Omega)$ y $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ es una solución viscosa de

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x) \cdot \nabla u \, |\nabla(u(x))|^\alpha + c(x) u \, |u|^\alpha \geq f(x) \quad en \ \{0 < u\},$$

donde $c \leq 0$, entonces

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \cdot diam\,(\Omega) \left\| f^- \right\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Analogamente, existe una constante $C = C(\gamma, n, \Lambda, \alpha)$ tal que si $f \in L^n(\Omega)$ y $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ es una solución viscosa de

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x) \cdot \nabla u \, |\nabla(u(x))|^\alpha + c(x) u \, |u|^\alpha \leq f(x) \quad en \ \{0 > u\},$$

donde $c \leq 0$, entonces

$$\sup_\Omega u^- \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + C \cdot diam\,(\Omega) \left\| f^+ \right\|_{L^n(\Gamma^+(u^-))}^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

A continuación un corolario que alude a la posibilidad de tomar c positivo.

Corolario 3.1. *Supongamos que $\alpha > -1$ y F satisface $(H1)$ y $(H2)$, entonces existe una constante $C = C(\gamma, n, \lambda, \alpha)$ tal que si $f \in L^n(\Omega)$ y $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ es una solución viscosa de*

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x) \cdot \nabla u \, |\nabla(u(x))|^{\alpha} + c(x) u \, |u|^{\alpha} \geq f(x) \quad en \ \{0 < u\},$$

donde $c \leq \varepsilon$ con ε pequeño, entonces

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \cdot diam(\Omega) \left\| f^- \right\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Demostración:

Consideremos nuevo lado derecho $g = f - \gamma_2 |u|^{\alpha+1} \leq f - c(x)u|u|^{\alpha}$, donde $\gamma_2 = \|c\|_{\infty}$. Ocupando el Teorema 3.1, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega} u &\leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \cdot diam(\Omega) \left\| g^- \right\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{\alpha+1}} \\
&\leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \cdot diam(\Omega) \left(\left\| f^- \right\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))} + \left\| \varepsilon u^{\alpha+1} \right\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\
&\leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \cdot diam(\Omega) \left(\left\| f^- \right\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))} + C_1 \varepsilon \|u\|_{\infty}^{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\
&\leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C_2 \cdot diam(\Omega) \left(\left\| f^- \right\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{\alpha+1}} + \varepsilon^{\frac{1}{1+\alpha}} \|u\|_{\infty} \right),
\end{aligned}$$

luego si ε es pequeño, podemos concluir

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \cdot diam(\Omega) \left\| f^- \right\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{\alpha+1}}. \blacksquare$$

La pregunta natural es si basta con que $c \leq \lambda_1$, donde λ_1 representa al primer valor propio del operador definido en [6] y [7]. Esta pregunta se discute con más detalle en el Capítulo de Conclusiones.

Capítulo 4

Desigualdad de Harnack para el caso $\alpha \in (-1, 0)$

En este capítulo estudiaremos la desigualdad de Harnack en un caso especial $\alpha \in (-1, 0)$. En la demostración presentada en este capítulo es vital el hecho de que si bien el operador es singular, sus constantes de elipticidad no se vuelven nulas. El caso del operador degenerado $\alpha > 0$ sigue abierto.

4.1. Desigualdad de Harnack

Antes de comenzar demos una definición que nos ahorrará notación más adelante.

Definición 4.1. *Para vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos la matriz simétrica $\overline{x \otimes y} \in S(nxn)$ por*

$$\overline{x \otimes y}_{i,j} = x_i y_j + x_j y_i \quad i, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

La siguiente es una proposición análoga a la que se puede encontrar para operadores lineales elípticos en [21]. Más aún las técnicas utilizadas son similares.

Proposición 4.1. *Sea $u \in C(\Omega)$ y supongamos que u es solución viscosa de*

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x) \cdot \nabla u \left|\nabla(u(x))\right|^{\alpha} + c(x) u \left|u\right|^{\alpha} \geq f, \quad f \in L^n(\Omega).$$

Entonces, para toda bola $B = B_{2R}(y) \subset \Omega$ y $p > 1$ se tiene

$$\sup_{B_r(y)} u \leq c \left\{ \left(\int_B \left(u^+\right)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \|f\|_{L^n(B)}^{\frac{1}{\alpha+1}} \right\}. \tag{4.1}$$

Demostración:

Encontraremos la cota deseada ultizando el hecho de que u satisface

$$|\nabla u|^{\alpha} \mathcal{M}^{+}\left(D^{2} u\right)+\gamma_{1}|\nabla(u)|^{\alpha+1}+\gamma_{2}|u|^{\alpha+1} \geq f$$

en Ω, donde $\gamma_1 = \|b\|_{\infty}$ y $\gamma_2 = \|c\|_{\infty}$. Supondremos que $B = B_1(0)$ y $\lambda = 1$. El caso general sale de considerar la transforamción $x \rightarrow (x-y)/2R$. Supondremos también que $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$.

Definimos, para $\sigma > 0$ y $\beta \geq 1$ las funciones

$$\begin{aligned} u_{\sigma}(x) &= u(x)-\sigma x_{1}, \\ \eta(x) &= \begin{cases}\left(1-|x|^{2}\right)^{\beta} & x \in B \\ 0 & \text{si no}\end{cases}, \end{aligned}$$

y

$$v_{\sigma} = \eta u_{\sigma}.$$

Ahora estudiaremos la ecuación que satisface v. Si bien, a priori se podría intentar encontrar una ecuación con el operador original $|\nabla v_\sigma|^{\alpha} \mathcal{M}^{+}(D^2 v_\sigma)$ resulta mucho más comodo simplemente estudiar $\mathcal{M}^{+}(D^2 v_\sigma)$. Llamando

$$I=\mathcal{M}^{-}\left(\overline{\nabla u_{\sigma} \otimes \nabla \eta}+u_{\sigma} D^{2} \eta\right),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{+}\left(D^{2} v_{\sigma}\right) &\geq \eta \mathcal{M}^{+}\left(D^{2} u_{\sigma}\right)+I \\ \geq -\eta \frac{|f|+\gamma_{1}\left(\left|\nabla u_{\sigma}\right|+\sigma\right)^{\alpha+1}+\gamma_{2}\left(\left|u_{\sigma}\right|+\sigma \cdot diam\,(\Omega)\right)^{\alpha+1}}{\left(\left|\nabla u_{\sigma}\right|+\sigma\right)^{\alpha}} &+I, \end{aligned} \tag{4.2}$$

pues en virtud del Lema 3.4, u_σ es solución de

$$(|\nabla v|+\sigma)^{\alpha} \mathcal{M}^{+}\left(D^{2} v\right)+\gamma_{1}(|\nabla v|+\sigma)^{\alpha+1}+\gamma_{2}(|v|+\sigma \cdot diam\,(\Omega))^{\alpha+1} \geq f.$$

Notemos ahora que en $\Gamma^{+} = \Gamma^{+}(v_\sigma)$, el conjunto de contacto de v_σ superior en B, se tiene que $u_\sigma > 0$ en Γ^{+} y además por la concavidad de v_σ en Γ^{+} se tiene que (ver [21])

$$\left|\nabla u_{\sigma}\right| \leq 2(1+\beta) \eta^{-\frac{1}{\beta}} u_{\sigma}$$

de donde

$$\left(\left|\nabla u_{\sigma}\right|+\sigma\right)^{-\alpha} \leq\left(2(1+\beta) \eta^{-\frac{1}{\beta}} u_{\sigma}+\sigma\right)^{-\alpha}$$

y entonces

$$-\left(|\nabla u_\sigma|+\sigma\right)^{-\alpha}\geq-\left(2\left(1+\beta\right)\eta^{-\frac{1}{\beta}}u_\sigma+\sigma\right)^{-\alpha}.$$

Luego, utilizando esto en (4.2) se tiene que en Γ^+

$$\mathcal{M}^+\left(D^2v_\sigma\right)\geq-C\frac{\eta\,|f|+\eta\left(|u_\sigma|+\sigma\cdot diam\left(\Omega\right)\right)^{\alpha+1}}{\left(2\left(1+\beta\right)\eta^{-\frac{1}{\beta}}u_\sigma+\sigma\right)^{\alpha}}-2\gamma_1(1+\beta)\eta^{1-\frac{1}{\beta}}u_\sigma+I,$$

donde $C=C(\Lambda,n,\beta,\alpha,\gamma_1,\gamma_2)$. Ahora notemos que $I\geq I_1+I_2$ donde

$$\begin{aligned}I_1&=\mathcal{M}^-\left(\overline{\nabla u_\sigma\otimes\nabla\eta}\right),\\ I_2&=\mathcal{M}^-\left(u_\sigma D^2\eta\right).\end{aligned}$$

Acotemos los términos I_1 e I_2 en Γ^+.

$$\begin{aligned}I_2&=u_\sigma\mathcal{M}^-\left(D^2\eta\right)\\ &=u_\sigma\left(-2\beta\left(1-|x|^2\right)^{\beta-1}(n-1)+4\beta\left(\beta-1\right)\Lambda\,|x|^2\left(1-|x|^2\right)^{\beta-2}\right)\\ &\geq-Cu_\sigma\left(1-|x|^2\right)^{\beta-1}\\ &\geq-Cv_\sigma\eta^{\frac{-2}{\beta}},\end{aligned}$$

con C sólo dependiendo de n, β, Λ. Análogamente se tiene que

$$I_1=\mathcal{M}^-\left(\overline{\nabla u_\sigma\otimes\nabla\eta}\right)\geq-Cv_\sigma\eta^{\frac{-2}{\beta}},$$

con C sólo dependiendo de n, β, Λ. Así, hemos encontrado la siguiente desigualdad en Γ^+

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^+\left(D^2v_\sigma\right)\geq-C_1&\frac{\eta\,|f|+\eta\left(|u_\sigma|+\sigma\cdot diam\left(\Omega\right)\right)^{\alpha+1}}{\left(2\left(1+\beta\right)\eta^{-\frac{1}{\beta}}u_\sigma+\sigma\right)^{\alpha}}\\ &-2\gamma_1(1+\beta)\eta^{1-\frac{1}{\beta}}u_\sigma-C_2v_\sigma\eta^{\frac{-2}{\beta}},\end{aligned}$$

entonces *ABP* (ver por ejemplo [15]) aplicado a v_σ nos entrega

$$\sup_B v_\sigma\leq C\left\|\frac{\eta f+\eta\left(|u_\sigma|+\sigma\cdot diam\left(\Omega\right)\right)^{\alpha+1}}{\left(2\left(1+\beta\right)\eta^{-\frac{1}{\beta}}u_\sigma+\sigma\right)^{\alpha}}+\eta^{1-\frac{1}{\beta}}u_\sigma+v_\sigma\eta^{\frac{-2}{\beta}}\right\|_{n,B},$$

con C solo dependiendo de α, β, n, Λ, γ_1 y γ_2. Ahora levantamos la restricción $u\in C^2\left(\Omega\right)\cap C\left(\bar{\Omega}\right)$, aplicando el mismo argumento que en la *Proposición 1* y luego tomamos $\sigma \searrow 0$ para obtener

$$\begin{aligned}
\sup_B v &\le C\left\{\left\|\frac{\eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} f}{v^\alpha}\right\|_{n,B} + \left\|\eta^{1-\frac{1}{\beta}} u^+ + \eta^{1+\frac{\alpha}{\beta}} u^+\right\|_{n,B} + \left\|v^+ \eta^{\frac{-2}{\beta}}\right\|_{n,B}\right\} \\
&\le C\left\{\left\|\frac{\eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} f}{v^\alpha}\right\|_{n,B} + \left\|\eta^{\frac{-1}{\beta}} v^+\right\|_{n,B} + \left\|\eta^{\frac{\alpha}{\beta}} v^+\right\|_{n,B} + \left\|v^+ \eta^{\frac{-2}{\beta}}\right\|_{n,B}\right\} \\
&\le C\left\{\left\|\frac{\eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} f}{v^\alpha}\right\|_{n,B} + \left\|v^+ \eta^{\frac{-2}{\beta}}\right\|_{n,B}\right\} \\
&\le C\left\{\left\|\frac{\eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} f}{v^\alpha}\right\|_{n,B} + \left(\sup_B v^+\right)^{1-2/\beta} \left\|(u^+)^{\frac{2}{\beta}}\right\|_{n,B}\right\}.
\end{aligned}$$

Lo anterior se debe a que

$$\eta^{\frac{-1}{\beta}} \le \eta^{\frac{-2}{\beta}}$$

ya que

$$\eta^{\frac{1}{\beta}} \le 1.$$

Escogemos ahora $\beta = 2n/p$ con $p \le n$ y usamos el hecho que para $\varepsilon > 0$

$$\left(\sup_B v^+\right)^{1-2/\beta} \le \varepsilon \sup v^+ + \varepsilon^{1-\beta/2},$$

con lo cual se tiene que

$$\sup_B v \le C\left\{\left\|u^+\right\|_p + \left\|\frac{\eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} f}{v^\alpha}\right\|_{n,B}\right\}.$$

Notemos que podemos tomar β tal que

$$1 + \frac{\alpha}{\beta} + \alpha \ge 0$$

o equivalentemente

$$p \le 2n\,(1+\alpha^*)$$

donde $\alpha^* = -1/\alpha > 1$. De esta forma

$$\begin{aligned}
\sup_B v &\le C\left\{\left\|u^+\right\|_p + \left\|\frac{f}{v^\alpha}\right\|_{n,B}\right\} \\
&\le C\left\{\left\|u^+\right\|_p + \left(\sup_B v\right)^{-\alpha} \|f\|_{n,B}\right\} \\
&\le C\left\{\left\|u^+\right\|_p + \left(\sup_B v\right)\varepsilon^{\bar{q}} + \|f\|_{n,B}^q \varepsilon^q\right\}, \quad \varepsilon > 0,
\end{aligned}$$

donde $\bar{q} = -1/\alpha$ y q son tales que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{\bar{q}} = 1$$

o equivalentemente

$$q = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Escogiendo ε adecuado (que permanece independiente de u) se concluye el resultado. ■

Denotaremos por $K_l(x_0)$ al cubo abierto en $\mathbb{R}^n$ centrado en x_0 con lado de largo l, es decir,

$$K_l(x_0) = \prod_{i=1}^{n} \left(x_0^i - \frac{l}{2}, x_0^i + \frac{l}{2} \right).$$

Los siguientes lemas son esenciales para la descomposición en cubos y para poder estimar $\|u\|_{L^p}$. Se pueden encontrar en [21].

Lema 4.1. *Sea K_0 un cubo en $\mathbb{R}^n$, $w \in L^1(K_0)$ y para $k \in \mathbb{R}$ fijemos*

$$\Gamma_k = \{x \in K_0 \quad t.q. \ w(x) \leq k\}$$

Supongamos que existen constantes positivas $\delta < 1$ y C tales que

$$\sup_{K_0 \cap K_{3r}(z)} (w - k) \leq C$$

cada vez que k y $K = K_r(z) \subset K_0$ satisfacen

$$|\Gamma_k \cap K| \geq \delta |K|.$$

Entonces, se sigue que para todo k

$$\sup_{K_0} (w - k) \leq C \left(1 + \frac{\log (|\Gamma_k| / |K_0|)}{\log (\delta)} \right). \tag{4.3}$$

Lema 4.2. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$. Entonces, para todo $p > 0$ y f tal que $|f|^p \in L^1(\Omega)$ se tiene*

$$\mu(t) \leq t^{-p} \int_\Omega |f|^p, \tag{4.4}$$

$$\int_\Omega |f|^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(t) dt, \tag{4.5}$$

donde

$$\mu(t) = \mu_f(t) = |\{x \in \Omega \quad t.q. \ |f(x)| > t\}|.$$

La siguiente proposición nos da una estimación precisa de $\|u\|_{L^p}$ en función del ínfimo de u.

Proposición 4.2. *Sea $u \in C(\Omega)$ solución viscosa de*

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x) \cdot \nabla u \left|\nabla(u(x))\right|^{\alpha} + c(x)u\left|u\right|^{\alpha} \leq f \quad en\ \Omega, \tag{4.6}$$

donde $f \in L^n(\Omega)$. Supongamos además que u es no negativa en una bola $B = B_{2R}(y) \subset \Omega$. Entonces

$$\left(\int_{B_R} u^p\right)^{1/p} \leq C\left\{\inf_{B_R} u + \|f\|_{L^n(B)}^{\frac{1}{\alpha+1}}\right\}, \tag{4.7}$$

donde p, C son constantes positivas solo dependiendo de n, α, Λ, λ, R, b y c.

Demostración:

Procederemos como en [21] y como en la proposición anterior, es decir, encontraremos la cota deseada utilizando el hecho de que u satisface

$$\left|\nabla u\right|^{\alpha} \mathcal{M}^{-}\left(D^2 u\right) - \gamma_1 \left|\nabla(u)\right|^{\alpha+1} - \gamma_2 \left|u\right|^{\alpha+1} \leq f$$

en Ω, donde $\gamma_1 = \|b\|_{\infty}$ y $\gamma_2 = \|c\|_{\infty}$. Supondremos inicialmente que $B = B_1(0)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ y $\lambda = 1$. Definimos

$$\begin{aligned} u_\sigma(x) &= u(x) - \sigma x_1, \\ \bar{u}_\sigma &= u_\sigma + \varepsilon + \|f\|_{n,B}^{\frac{1}{\alpha+1}}, \\ w_\sigma &= -\log\left(\bar{u}_\sigma\right) \quad \text{y} \\ v_\sigma &= \eta w_\sigma, \end{aligned}$$

con η como en la Proposición 4.1 y $\varepsilon > \sigma \cdot diam\,(\Omega)$. Se tiene que

$$\nabla w_\sigma = -\frac{1}{\bar{u}_\sigma} \nabla \bar{u}_\sigma$$

y

$$D^2 w_\sigma = -\frac{1}{\bar{u}_\sigma} D^2 u_\sigma + \nabla w_\sigma \otimes \nabla w_\sigma.$$

Aquí nuevamente estudiaremos una ecuación para v_σ que solo involucra a $\mathcal{M}^{+}$. Así, definiendo

$$I = \mathcal{M}^{-}\left(\overline{\nabla w_\sigma \otimes \nabla \eta} + w_\sigma D^2 \eta + \eta \nabla w_\sigma \otimes \nabla w_\sigma\right),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^+\left(D^2 v_\sigma\right) &\geq \mathcal{M}^+\left(-\frac{\eta}{\bar{u}_\sigma} D^2 u_\sigma\right) + I,\\ &= -\frac{\eta}{\bar{u}_\sigma}\mathcal{M}^-\left(D^2 u_\sigma\right) + I.\end{aligned}$$

Como u es solución de (4.6), por el Lema 3.4 (segundo caso), se tiene que u_σ es solución de

$$\begin{gathered}\left(|\nabla u_\sigma| + \sigma\right)^\alpha \mathcal{M}^-\left(D^2 u_\sigma\right) - \gamma_1\left(|\nabla u_\sigma| + \sigma\right)^{\alpha+1} - \\ \gamma_2\left(|u_\sigma| + \sigma \cdot diam\,(\Omega)\right)^{\alpha+1} \leq |f|,\end{gathered}$$

en Ω. Luego

$$\mathcal{M}^+\left(D^2 v_\sigma\right) \geq -\eta\frac{|f| + \gamma_1\left(|\nabla u_\sigma| + \sigma\right)^{\alpha+1} + \gamma_2\left(|u_\sigma| + \sigma \cdot diam\,(\Omega)\right)^{\alpha+1}}{\bar{u}_\sigma\left(|\nabla u_\sigma| + \sigma\right)^\alpha} + I,$$

y así

$$\mathcal{M}^+\left(D^2 v_\sigma\right) \geq -\eta\frac{|f| + \gamma_2\left(|u_\sigma| + \sigma \cdot diam\,(\Omega)\right)^{\alpha+1}}{\bar{u}_\sigma\left(|\nabla u_\sigma| + \sigma\right)^\alpha} - \eta\gamma_1\frac{|\nabla u_\sigma| + \sigma}{\bar{u}_\sigma} + I$$

Ahora, al igual que en la Proposición 4.1, en $\Gamma^+(v_\sigma)$ se tiene que

$$|\nabla w_\sigma| \leq C\eta^{-1/\beta} w_\sigma$$

es equivalente a

$$|\nabla \bar{u}_\sigma| \leq C\eta^{-1/\beta} w_\sigma \bar{u}_\sigma$$

de donde

$$|\nabla u_\sigma| \leq C\eta^{-1/\beta} w_\sigma \bar{u}_\sigma + \sigma$$

en consecuencia

$$\left(|\nabla u_\sigma| + \sigma\right)^{-\alpha} \leq C\left(\eta^{-1/\beta} w_\sigma \bar{u}_\sigma + 2\sigma\right)^{-\alpha}.$$

Luego, en $\Gamma^+(v_\sigma)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^+\left(D^2 v_\sigma\right) &\geq -\eta\frac{|f| + \gamma_2\left(|u_\sigma| + \sigma \cdot diam\,(\Omega)\right)^{\alpha+1}}{\bar{u}_\sigma\left(\eta^{-1/\beta} w_\sigma \bar{u}_\sigma + 2\sigma\right)^\alpha} - \eta\,|\nabla w_\sigma| - \frac{\sigma}{\bar{u}_\sigma} + I\\ &\geq -\eta\frac{|f| + \gamma_2\left(|u_\sigma| + \sigma \cdot diam\,(\Omega)\right)^{\alpha+1}}{\bar{u}_\sigma\left(\eta^{-1/\beta} w_\sigma \bar{u}_\sigma + 2\sigma\right)^\alpha} - \bar{\varepsilon}\eta\,|\nabla w_\sigma|^2 - \frac{\eta}{\bar{\varepsilon}} - \frac{\sigma}{\bar{u}_\sigma} + I.\end{aligned}$$

Notemos que $I \geq I_1 + I_2$ donde,

$$\begin{aligned} I_1 &= w_\sigma \mathcal{M}^- \left(D^2\eta\right), \\ I_2 &= \mathcal{M}^- \left(\overline{\nabla w_\sigma \otimes \nabla \eta} + \eta \nabla w_\sigma \otimes \nabla w_\sigma\right) \end{aligned}$$

y $\bar{\varepsilon}$ es cualquier real positivo. Acotaremos I_1 e I_2

Ahora escogemos, β de la siguiente forma

$$\beta \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n-1+\Lambda}{\rho^2} - n - 1 + \Lambda\right) + 1,$$

donde $0 < \rho < 1$, lo que nos garantiza que $\mathcal{M}^- (D^2\eta) \geq 0$ fuera de la bola de radio ρ, por lo que

$$w_\sigma \mathcal{M}^- \left(D^2\eta\right) \geq -c_1 v_\sigma \chi_{B_\rho(0)}, \tag{4.8}$$

donde χ_A denota la función caracteristica del conjunto A.

Sea ahora $N \in \mathcal{S}_{1,\Lambda}(n) = \mathcal{S}_{1,\Lambda}$ una matriz simetrica con valores propios en $(1, \Lambda)$ y recordemos que $\langle x, Ny\rangle$ define un producto interno. Anotemos en lo que sigue $|x|_N = \sqrt{\langle x, Nx\rangle}$ y notemos que para $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$tr\left(N \cdot w \otimes w\right) = \langle w, Aw\rangle.$$

Así, ocupando la desigualdad de *Cauchy-Schwartz* y *Young* obtenemos

$$\begin{aligned} \left|tr\left(N\left(\overline{\nabla w_\sigma \otimes \nabla \eta}\right)\right)\right| &\leq |\nabla w_\sigma|_N \, |\nabla \eta|_N \\ &\leq s\eta\, |\nabla w_\sigma|_N^2 + \frac{1}{s\eta}|\nabla \eta|_N^2 \\ &= s\eta\, |tr\left(N\left(\nabla w_\sigma \otimes \nabla w_\sigma\right)\right)| + \frac{1}{s\eta}|tr\left(N\left(\nabla \eta \otimes \nabla \eta\right)\right)|, \end{aligned}$$

donde s es cualquier real positivo. Además por definición, para cualquier $N \in \mathcal{S}_{1,\Lambda}$ se tiene

$$\begin{aligned} I_2 &\geq \inf_{N \in S_{1,\Lambda}} tr\left(N\left(\overline{\nabla w_\sigma \otimes \nabla \eta}\right)\right) + tr\left(N\left(\eta \nabla w_\sigma \otimes \nabla w_\sigma\right)\right) \\ &\geq \inf_{N \in S_{1,\Lambda}} -\left|tr\left(N\left(\overline{\nabla w_\sigma \otimes \nabla \eta}\right)\right)\right| + tr\left(N\left(\eta \nabla w_\sigma \otimes \nabla w_\sigma\right)\right) \\ &\geq \inf_{N \in S_{1,\Lambda}} -\frac{1}{s\eta} tr\left(N\left(\nabla \eta \otimes \nabla \eta\right)\right) + (1-s) tr\left(N\left(\eta \nabla w_\sigma \otimes \nabla w_\sigma\right)\right) \\ &\geq \mathcal{M}^-\left(-\frac{1}{s\eta}\left(\nabla \eta \otimes \nabla \eta\right)\right) + \mathcal{M}^-\left((1-s)\eta \nabla w_\sigma \otimes \nabla w_\sigma\right). \end{aligned}$$

Veamos ahora la positividad del siguiente término

$$J = \mathcal{M}^-\left((1-s)\eta \nabla w_\sigma \otimes \nabla w_\sigma\right) - \bar{\varepsilon}\eta\, |\nabla w_\sigma|^2.$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} J &= \inf_{N\in S_{1,\Lambda}} \eta tr\left(\left((1-s)N-\bar{\varepsilon}Id\right)\left(\nabla w_\sigma\otimes\nabla w_\sigma\right)\right)\\ &= \eta \inf_{N\in S_{1,\Lambda}} tr\left(A\left(\nabla w_\sigma\otimes\nabla w_\sigma\right)\right), \end{aligned}$$

donde Id es la matriz identidad en $\mathbb{R}^n$ y A está definida por $A_{i,j}=(1-s)N_{i,j}-\varepsilon\delta_{i,j}$. Notemos que que escogiendo $s=s(\Lambda)$ y $\varepsilon=\varepsilon(\Lambda)$ adecuados la matriz A es una matriz simétrica definida positiva. En consecuencia

$$J=\mathcal{M}^-\left((1-s)\eta\nabla w_\sigma\otimes\nabla w_\sigma\right)-\varepsilon\eta\left|\nabla w_\sigma\right|^2\geq 0. \tag{4.9}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta}\left(\nabla\eta\otimes\nabla\eta\right)_{i,j} &= 4\beta^2 x_i x_j\frac{\left(1-|x|^2\right)^{2\beta-2}}{\left(1-|x|^2\right)^{\beta}}\\ &= 4\beta^2 x_i x_j\left(1-|x|^2\right)^{\beta-2} \end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{M}^-\left(-\frac{1}{\eta}\left(\nabla\eta\otimes\nabla\eta\right)\right)\geq -C_2, \tag{4.10}$$

donde C_2 es una constante dependiente sólo de β, n y Ω. Finalmente de (4.8), (4.9) y (4.10) llegamos a la siguiente estimación

$$\mathcal{M}^+\left(D^2v_\sigma\right)\geq -C\eta\frac{|f|+\gamma_2\left(|u_\sigma|+\sigma\cdot diam\left(\Omega\right)\right)^{\alpha+1}}{\bar{u}_\sigma\left(\eta^{-1/\beta}w_\sigma\bar{u}_\sigma+2\sigma\right)^{\alpha}}-C\frac{\sigma}{\bar{u}_\sigma}-C_1v_\sigma\chi_{B_\rho(0)}-C_2, \tag{4.11}$$

por lo que aplicando ABP a (4.11) obtenemos

$$\sup_B v_\sigma\leq C\left\{\left\|\eta\frac{|f|+\left(|u_\sigma|+\sigma\cdot diam\left(\Omega\right)\right)^{\alpha+1}}{\bar{u}_\sigma\left(\eta^{-1/\beta}w_\sigma\bar{u}_\sigma+2\sigma\right)^{\alpha}}+\frac{\sigma}{\bar{u}_\sigma}\right\|_{n,B}+\left\|v_\sigma^+\right\|_{n,B_\rho(0)}+1\right\}. \tag{4.12}$$

Notemos que en este punto podemos levantar la hipótesis de regularidad sobre u via aproximación, tal como se hizo en la Proposición 3.1. A continuación , tomando $\sigma\searrow 0$ en (4.12) y gracias a la convergencia uniforme de u_σ a u, obtenemos

$$\begin{aligned} \sup_B v &\leq C\left\{\left\|\frac{\eta^{1+\alpha/\beta+\alpha}f}{\bar{u}^{1+\alpha}v^{\alpha}}\right\|_{n,B}+\left\|\frac{\eta\,|u|^{\alpha+1}}{\tilde{u}^{\alpha+1}\eta^{\frac{-\alpha}{\beta}}w^{\alpha}}\right\|_{n,B}+\left\|v^+\right\|_{n,B_\rho(0)}+1\right\}\\ &\leq C\left\{\left\|\frac{\eta^{1+\alpha/\beta+\alpha}f}{\bar{u}^{1+\alpha}v^{\alpha}}\right\|_{n,B}+\left\|\frac{\eta^{1+\frac{\alpha}{\beta}+\alpha}}{v^{\alpha}}\right\|_{n,B}+\left\|v^+\right\|_{n,B_\rho(0)}+1\right\} \end{aligned}$$

Tomamos ahora $\beta \geq \frac{1}{1+\alpha^*}$ con $\alpha^* = -1/\alpha$, así

$$\begin{aligned}
\sup_B v &\leq C\left\{\left(\sup_B v\right)^{-\alpha}\left(\left\|\frac{f}{\bar{u}^{\alpha+1}}\right\|_{n,B} + \left\|\eta^{1+\alpha/\beta+\alpha}\right\|_{n,B}\right) + \left\|v^+\right\|_{n,B_\rho(0)} + 1\right\}, \\
&\leq C\left\{\left(\sup_B v\right)^{-\alpha} + \left\|v^+\right\|_{n,B_\rho(0)} + 1\right\},
\end{aligned}$$

así, ocupando la desigualdad de *Young*, obtenemos

$$\sup_B v \leq C\left\{\left\|v^+\right\|_{n,B_\rho(0)} + 1\right\}. \tag{4.13}$$

Para facilitar la eventual aplicación de procedimiento de descomposición de cubos, pasamos de bolas a cubos. Recordemos que para $y \in \mathbb{R}^n$ y $R > 0$, $K_R(y)$ denota el cubo abierto de centro y y largo $2R$. Si $\rho < 1/\sqrt{n}$, tenemos que $K_\rho = K_\rho(0) \subset\subset B$ y luego por (4.13) se obtiene

$$\begin{aligned}
\sup_B v &\leq C\left\{\left\|v^+\right\|_{n,K_\rho(0)} + 1\right\} \\
&\leq C\left\{\sup_B v^+ \left|K_\rho^+\right|^{1/n} + 1\right\},
\end{aligned}$$

donde $K_\rho^+ = \{x \in K_\rho \ t.q.\ v > 0\}$. Definiedo $\theta = (2(2\rho)C)^{-1}$, tenemos que si

$$\frac{\left|K_\rho^+\right|}{\left|K_\rho\right|} \leq \theta,$$

con C la constante de (4.13), entonces

$$\sup_B v \ \leq \ 2C.$$

Verfiquemos entonces la hipótesis del Lema 4.1. Escojamos ahora $\rho = 1/3n$ y fijemos θ como arriba. Usando la transformación $x \to \rho\frac{x-z}{r}$, considerando $K = K_r(z)$ tal que $B_{3nr}(z) \subset B$, obtenemos que si $|K^+| \leq \theta\,|K|$, entonces

$$\sup_{K_{3r}} w \leq \tilde{C}, \tag{4.14}$$

donde $\tilde{C} = 2C$. Luego aplicamos el Lema 4.1 con $\delta = 1 - \theta$, $K_0 = K_\rho(0)$ y $\rho = 1/3n$. Además notemos que (4.14) sigue siendo cierto si se reemplaza w por $w - k$, con $k \geq 0$. Sea ahora

$$\mu_t = \left|\{x \in K_0 \ \text{ t.q. } \bar{u}(x) > t\}\right|,$$

y notemos que tomando $t = e^{-k}$

$$\mu_t = \Gamma_k,$$

Con Γ_k definida en el Lema 4.1. Como consecuencia, por el Lema 4.1, despejando la ecuación (4.3) se desprende que

$$\mu_t \leq C \left(\inf_{K_0} \frac{\bar{u}}{t} \right)^{\kappa},$$

con $\kappa = -1/\log(\delta)$. Ahora aplicamos el Lema 4.2, ecuación (4.5), para obtener con $p = \kappa/2$

$$\int_{B_\rho} (\bar{u})^p \leq C \left(\inf_{B_\rho} \bar{u} \right)^p,$$

con $\rho < 1$ arbitrario. La desigualdad (4.7) se obtiene de manera directa de esta última estimación tomando $\varepsilon \searrow 0$ y ocupando un argumento de recubrimiento.■

Finalmente podemos enunciar nuestro teorema de desigualdad de Harnack, el cual, gracias a las proposiciones anteriores es fácil de probar.

Teorema 4.1. *Harnack para $\alpha \in (-1, 0)$*
Supongamos que F satisface $(H1)$ y $(H2)$ y sea $u \in C(\Omega)$ solución viscosa no negativa de

$$F\left(\nabla u, D^2 u\right) + b(x) \cdot \nabla u \left|\nabla(u(x))\right|^{\alpha} + c(x) u \left|u\right|^{\alpha} = f \quad \text{en } \Omega, \tag{4.15}$$

con $f \in L^n(\Omega)$. Entonces existe $C = C(\lambda, \Lambda, n, \Omega, \alpha)$ tal que

$$\sup_{\Omega} u \leq C \left\{ \inf_{\Omega} u + \|f\|_{n,\Omega}^{\frac{1}{\alpha+1}} \right\}. \tag{4.16}$$

4.2. Regularidad C^{β}

Como era de esperarse, la desigualdad (4.16) indica regularidad de las soluciones de (4.15). Hay que recalcar que la regularidad Hölder ya había sido estudiada en [4] y en [6] para el problema de Dirichlet. La regularidad que aquí se encuentra es regularidad interior y no utiliza la regularidad del dominio, la cual es un hipótesis importante para [6] y [4]. Allí se ocupa la función distancia y un argumento de comparación para obtener propiedades de regularidad para u, de hecho se obtiene regularidad Lipschitz para el problema de Dirichlet.

Para demostrar la regularidad se procede de manera clásica. Se detalla a continuación un lema preparatorio que se encuentra en [21].

Lema 4.3. *Sea ω un función no decreciente en el intervalo $(0, R_0]$ que satisface*

$$\omega(\tau R) \leq \gamma\omega(R) + \sigma(R),$$

donde σ es una función no decreciente y $0 < \gamma, \tau < 1$. Entonces, para todo $\mu \in (0,1)$ y $R \leq R_0$, se tiene

$$\omega(R) \leq C\left(\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta}\omega(R_0) + \sigma(R^{\mu}R_0^{1-\mu})\right), \tag{4.17}$$

donde $C = C(\gamma, \tau)$ y $\beta = \beta(\gamma, \tau, \mu)$ son constantes positivas.

A continuación se enuncia la regularidad.

Proposición 4.3. *Sea u solución de (4.15) en B_1. Entonces*

(1) Existe una constante ℓ independiente de u tal que

$$\operatorname*{osc}_{B_{1/2}} u \leq \ell \cdot \operatorname*{osc}_{B_1} u + 2\,\|f\|_{n,B_1}^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

(2) $u \in C^{\beta}\left(\bar{B}_{1/2}\right)$ y

$$\|u\|_{C^{\beta}\left(\bar{B}_{1/2}\right)} \leq C\left(\|u\|_{\infty,B_1} + \|f - c(x)u\,|u|^{\alpha}\|_{n,B_1}^{\frac{1}{1+\alpha}}\right),$$

donde $0 < \beta < 1$ y $C > 0$ son constantes independientes de u.

Demostración:

Seremos breves pues la demostración no aporta al contenido de esta memoria. Sean

$$\begin{aligned} m_r &= \inf_{Q_r} u, \\ M_r &= \sup_{Q_r} u \quad \text{y} \\ o_r &= \operatorname*{osc}_{Q_r} u. \end{aligned}$$

Aplicamos la desigualdad de Harnack a las funciones no negativas $u - m_1$ y $M_1 - u$ en Q_1 y obtenemos

$$\begin{aligned} M_{1/2} - m_1 &\leq C\left(m_{1/2} - m_1 + \|f\|_{L^n(Q_1)}^{\frac{1}{1+\alpha}}\right), \\ M_1 - m_{1/2} &\leq C\left(M_1 - M_{1/2} + \|f\|_{L^n(Q_1)}^{\frac{1}{1+\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones anteriores se deduce

$$o_{1/2} + o_1 \leq C \left(o_1 - o_{1/2} + 2 \|f\|_{L^n(Q_1)}^{\frac{1}{1+\alpha}} \right),$$

lo cual implica

$$o_{1/2} \leq \frac{C-1}{C+1} o_1 + \frac{2C}{C+1} \|f\|_{L^n(Q_1)}^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

lo que prueba *(1)*.
La demostración de *(2)* pasa por utilizar el Lema 4.3 enunciando anteriormente. ■

Observación. Notemos que de la proposición anterior, parte (2), se desprende

$$\|u\|_{C^\beta} \leq C \left(\|u\|_\infty + \|f\|_{L^n} \right).$$

Capítulo 5

Ecuación superlineal asociada

En este capítulo nos interesa estudiar la existencia de soluciones de

$$-F\left(\nabla u, D^2 u\right) + |u|^{s-1} u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

donde $s > 1 + \alpha$, $\alpha \in (-1, 0)$, F satisface $(H1)$, $(H2)$ y $(H3)$, y f es una función a la cual no se le piden condiciones de crecimiento en infinito. El caso $\alpha = 0$ fue estudiado por *Esteban, Felmer, Quaas* en [19].

Observación. Lo que a continuación se presenta, se puede extender fácilmente para un operador más general, el cual puede incluir términos que involucran al gradiente y a u. No haremos explicita esta extensión , pues no aporta a la esencia de la demostración y los cálculos son similares a los hechos en el Capítulo 4.

5.1. Preliminares

Es de vital importancia para el estudio de (5.1) contar con un teorema de existencia de soluciones en dominios acotados. Para esto es necesario desarrollar un método de Perron que se adapte a la ecuación estudiada. En [7] de *Birindelli y Demengel* tratan la existencia de soluciones para operadores con la estructura de (1.1). Como la localización necesaria para estudiar la ecuación en $\mathbb{R}^n$ sólo la sabemos hacer cuando $\alpha \in (-1, 0)$, presentaremos los teoremas solamente en este caso, sin detallar el caso $\alpha > 0$. A continuación damos a conocer definiciones y resultados previos.

Definición 5.1. *Para una función $v : \Omega \to [-\infty, \infty]$ se define la envoltura semicontinua superior v^* como*

$$v^*(x) = \lim_{r \searrow 0} \sup \{u(y) : \; y \in \Omega \; y \; |y - x| \leq r\}.$$

Análogamente se define la envoltura semicontinua inferior v_* como

$$v_*(x) = \lim_{r \searrow 0} \inf \{u(y) : \; y \in \Omega \; y \; |y - x| \leq r\}.$$

En lo que sigue, probaremos los lemas necesarios para poder pasar al límite, es decir, los resultados que aseguran que si $\{u_m\}$ son subsoluciones y $u_m \to u$, entonces u es subsolución. Estos lemas fueron probados por *Birindelli y Demengel* y se pueden encontrar en [6].

Lema 5.1. *Sea v una supersolución de*

$$F\left(\nabla v, D^2 v\right) + b(x) \cdot \nabla v \, |\nabla v|^{\alpha} - \beta(v(x)) \leq f(x) \quad \textit{en } \Omega,$$

para funciones f, β semicontinuas superior e inferior respectivamente. Sea $q > \sup\left(2, \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)$ y supongamos que $\bar{x} \in \Omega$ y C son tales que

$$v(x) + C\,|x - \bar{x}|^q \geq v(\bar{x}), \tag{5.2}$$

donde $\bar{x}$ es un punto de mínimo local estricto del lado izquierdo de (5.2). *Entonces*

$$-\beta(v(\bar{x})) \leq f(\bar{x}). \tag{5.3}$$

Demostración:

Si v es localmente constante la conclusión es directa de la definición de supersolución.
Supongamoas ahora que v no es localmente constante. Uno puede suponer que $\bar{x} = 0$. Consideremos $\delta_1 > 0$ tal que

$$\inf_{x \in B(0,\delta_1)} v(x) + C\,|x|^q = v(0),$$

δ tal que $0 < \delta < \delta_1$ y $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ tal que

$$\inf_{x \in B(0,\delta_1) \setminus B(0,\delta)} v(x) + C\,|x|^q \geq v(0) + \varepsilon.$$

Finalmente escojamos $N > \frac{1}{\delta}$ tal que para $|x| < \frac{1}{N}$

$$|v(0) - v(x)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

y tal que

$$Cq\frac{1}{N}\left(diam\,(\Omega)\right)^{q-1} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.4}$$

Afirmamos que para todo m, existen x_m, y_m en $B\left(0, \frac{1}{m}\right)$ tales que

$$v(y_m) + C\,|y_m - x_m|^q < v(x_m).$$

En efecto, si no fuera así, existiría una vecindad de 0 tal que para x e y en dicha vecindad

$$v(y) + C\,|x - y|^q \leq v(x),$$

lo cual no puede ser cierto, dado que v no es localmente constante. Esto además nos dice que el ínfimo de $v(y) + C\,|x_m - y|^q$ no puede ser alcanzado en x_m.

Notemos que por el Teorema del Valor Medio se tiene que

$$|x_m - y|^q - |y| = q\,|w|^{q-2}\,w\,|x_m|$$

con w perteneciente al trazo $[x_m, y]$. Esto junto a (5.4) nos entrega

$$|x_m - y|^q - |y| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.5}$$

Con (5.5) notamos que

$$\begin{aligned} \inf_{y\in B(0,\delta)} v(y) + C\,|x_m - y|^q &\leq \inf_{y\in B(0,\delta)} (v(y) + C\,|y|^q) + Cq\,|x_m|\,|y - \theta x_m|^{q-1} \\ &\leq v(0) + \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

y

$$\inf_{y,|y|>\delta} v(y) + C\,|x_m - y|^q \geq v(0) + \frac{3\varepsilon}{4},$$

y así el ínfimo es alcanzado en el interior de la bola $B\,(0,\delta)$. Sea ahora z_m tal que el ínfimo de $v(y) + C\,|x_m - y|^q$ es alcanzado en z_m, entonces, dado que z_m es distinto de x_m, $-C\,|x_m - y|^q + v(z_m) + C\,|x_m - z_m|^q$ es una función test para v en z_m, luego

$$F\left(-Cq\,|x_m - z_m|^{q-2}\,(x_m - z_m)\,, D^2\,(-C\,|x_m - z_m|^q)\right) - \beta\,(v(z_m)) \leq f(z_m).$$

Como $z_m \in B\,(0,\delta)$ se tiene que para alguna constante C'

$$C'\delta^{q(\alpha+1)-\alpha-2} - \beta(v(z_m)) \leq f(z_m).$$

Tomamos δ a cero, lo que implica que $m > N > \frac{1}{\delta}$ se van a infinito y $z_m \in B\,(0,\delta)$ se va a 0. Usando la continuidad de v y la semi continuidad superior de f y la semi continuidad inferior de β se obtiene el resultado.■

Observación. Más adelante ocuparemos el resultado para subsoluciones, en el sentido de que si u es subsolución y $C > 0$ es tal que

$$u(x) - C\,|x - \bar{x}|^q \leq u(\bar{x}),$$

entonces

$$-\beta(u(\bar{x})) \geq f(\bar{x}).$$

Además, el resultado sigue siendo cierto si β es no decreciente y v es semicontinua inferior.

Observación. Este lema también se puede demostrar en el caso en que v sea semicontinua inferior.

A continuación vamos a demostrar un resultado de convergencia que necesitamos para las próximas secciones de este capítulo. Este es muy conocido cuando el operador F es continuo y se tiene la noción usual de solución, pero en nuestro caso requiere atención especial. Este resultado se puede encontrar en [6].

Proposición 5.1. *Supongamos que u_m es una sucesión uniforme de subsoluciones de*

$$F\left(\nabla v, D^2 v\right) - \beta(v) \geq f \quad \text{en } \Omega, \tag{5.6}$$

que converge uniformemente a un límite u. Entonces u es subsolución de (5.6).

Demostración:

Supongamos primero que $\bar{x}$ es un punto de máximo para $u-\varphi$ y $\nabla\varphi(\bar{x}) \neq 0$. En este caso, la demostración entregada por *Ishii* en [22] sigue siendo válida, notando que es posible elegir $y_m \to \bar{x}$, tal que $u-\varphi$ tiene un máximo en y_m y se tiene que $\nabla\varphi(y_m) \neq 0$.
Tratemos ahora el caso en que $\bar{x}$ es tal que $u(\bar{x}) = u(x)$ para todo $x \in B(\bar{x}, \delta)$ con $\delta > 0$.
Para $q > \text{máx}\left\{2, \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right\}$ definimos φ por

$$\varphi(x) = u(\bar{x}) + \frac{1}{q}\left|x - \bar{x}\right|^q.$$

Se tiene entonces que el supremo

$$\sup_{x \in B(\bar{x},\delta)} (u - \varphi) = 0,$$

es estricto y se alcanza en $\bar{x}$. Sea ε tal que $4\varepsilon^{\frac{1}{q}} < \delta$ y N suficientemente grande tal que

$$-\varepsilon \leq (u_m - u) \leq \varepsilon \quad \text{en } B(\bar{x}, \delta),$$

para todo $m \geq N$. Luego, se tiene para todo $m \geq N$ y todo $x \in B(\bar{x}, \delta)$

$$u_m(x) - u(\bar{x}) - \frac{1}{q}\left|x-\bar{x}\right|^q \leq u(x) - u(\bar{x}) - \frac{1}{q}\left|x-\bar{x}\right|^q + \varepsilon \leq -\frac{1}{q}\left|x-\bar{x}\right|^q + \varepsilon. \tag{5.7}$$

En particular si $|x - \bar{x}| \geq \left(2^q(q\varepsilon) + \varepsilon\right)^{\frac{1}{q}}$, en (5.7) se tiene para todo m

$$u_m(x) - u(\bar{x}) - \frac{1}{q}\left|x-\bar{x}\right|^q \leq -2^q\varepsilon,$$

mientras que para $m > N$ se tiene

$$u_m(\bar{x}) - u(\bar{x}) \geq -\varepsilon.$$

Lo anterior implica que el supremo de $u_m - \varphi$ es alcanzado en $B\left(\bar{x}, (2^q(q\varepsilon) + \varepsilon)^{\frac{1}{q}}\right)$. Sea ahora y_m un punto tal que el supremo es alcanzado. Si $y_m \neq \bar{x}$ para una infinidad de m's se tendría que φ sería una función test para u_m en y_m. Como u_m es subsolución se tiene que

$$|\nabla\varphi(y_m)|^\alpha \mathcal{M}^+\left(D^2\varphi(y_m)\right) - \beta(u_m(y_m)) \geq f(y_m). \tag{5.8}$$

Notemos además que $u_m(y_m) \to u(\bar{x})$. En efecto, $u_m(y_m) \geq u_m(\bar{x}) \to u(\bar{x})$ y $u_m(y_m) \leq u(y_m) \to u(\bar{x})$. Ahora, usando el hecho de que

$$\begin{aligned} |\nabla\varphi(y_m)|^\alpha \mathcal{M}^+\left(D^2\varphi(y_m)\right) &= o\left(|y_m - \bar{x}|^{q(\alpha+1)-\alpha-2}\right) \\ &= o\left(\varepsilon^{q(\alpha+1)-\alpha-2}\right) \end{aligned}$$

y que $u_m(y_m) \to u(\bar{x})$ se concluye el resultado deseado.

Finalmente, supongamos que existe una infinidad de m's tal que $y_m = \bar{x}$. Entonces, usando el Lema 5.1 aún se obtiene

$$-\beta(u_m(\bar{x})) \geq f(\bar{x}),$$

lo cual, una vez pasando al límite, da el resultado.$\blacksquare$.

Observación. El resultado anterior sigue siendo válido si solo se tiene semicontiuidad superior de $\{u_m\}$ más el hecho de que la sucesión sea creciente. Más aún si no se supone la semicontinuidad superior de u_m y se eemplaza u_m por u_m^* y u por $\bar{u}$ definida por

$$\bar{u}\left(\bar{x}\right) = \limsup_{r\to} \left\{u_m(y), n \geq \frac{1}{r}, |y - x| \leq r\right\},$$

el resultado sigue siendo cierto, sin embargo esto no lo necesitamos en nuestro argumento.

El siguiente resultado da la existencia de soluciones para un problema con valor en la frontera. Este se puede encontrar en [7] y lo utilizaremos en lo que sigue.

Proposición 5.2. *Supongamos que $g \in W^{2,\infty}(\partial\Omega)$, $f \in L^\infty$, $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $h(x, .)$ es no creciente y continua. Entonces existe una solución*

$$\left\{ \begin{aligned} F\left(x, \nabla u, D^2u\right) + h(x, u) &= f \text{ en } \Omega, \\ u &= g \text{ en } \partial\Omega \end{aligned} \right. \tag{5.9}$$

Observación. La proposición anterior es más general y da la existencia de soluciones para $F\left(x, \nabla u, D^2u\right) + b(x) \cdot \nabla u \left|\nabla u\right|^\alpha$, pero como antes dicho, este último término no agrega nada nuevo a la demostración.

5.2. Existencia de soluciones en $\mathbb{R}^n$

En lo que sigue, la idea es considerar un sucesión de problemas aproximados en dominios acotados B_m, para luego tomar límite en m. Así, dado $f \in L^n_{loc}(\mathbb{R}^n)$, consideramos una sucesión $\{f_n\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tales que para cualquier dominio acotado Ω se satisfaga

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^n \, dx = 0. \tag{5.10}$$

El siguiente lema da la regularidad y existencia de los problemas aproximados.

Lema 5.2. *Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una solución $u_m \in C^\gamma(B_m)$ de la ecuación*

$$\begin{cases} -F\left(\nabla u_m, D^2 u_m\right) + |u_m|^{s-1} u_m &= f_m(x) \quad en\ B_m, \\ u &= 0 \quad en\ \partial B_m \end{cases}, \tag{5.11}$$

donde $B_m = B(0, m)$ es la bola centrada en 0 de radio m y $\gamma \in (0, 1)$.

Demostración:

La demostración consiste simplemente en ocupar la Proposición 5.2 en conjunto a la regularidad interior obtenida en la Proposición 4.3. ■

El siguiente lema es clave, pues nos permite encontrar cotas uniformes para subsoluciones u_m de (5.11), lo que posteriormente permite la extracción de una subsucesión convergente.

Lema 5.3. *Sea $s > 1 + \alpha$ y g continua en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Supongamos que $g \in L^n(\Omega)$ en Ω y u es una solución de*

$$-F\left(\nabla u, D^2 u\right) + |u|^{s-1} u \leq g \ en\ \Omega.$$

Entonces, para todo $R > 0$ y $R' > R$ tal que $B_{R'} \subset \Omega$ se tiene

$$\sup_{B_R} u \leq C\left(1 + \|g\|^{\frac{1}{1+\alpha}}_{L^n\left(B_{R'}\right)}\right), \tag{5.12}$$

donde $C = C\left(s, R, R', n, \lambda, \Lambda\right)$ no depende de g.

Demostración:

La idea es usar argumento similares a los usados para probar la desigualdad de Harnack, específicamente los utilizados en la Proposición 4.1. Encontraremos la cota deseada utilizando el hecho de que u satisface

$$-|\nabla u|^\alpha \mathcal{M}^+\left(D^2 u\right) + |u|^{s-1} u \leq g \ \text{ en } \Omega.$$

En lo que sigue suponemos que u es no trivial, $B = B_1(0)$ y $\lambda = 1$. El caso general sale de considerar la transformación $x \to (x-y)/2R'$. Supondremos también que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Definimos para $\beta \geq 1$

$$\eta(x) = \begin{cases} \left(1-|x|^2\right)^\beta & x \in B \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

y

$$v = \eta u.$$

Se tiene que

$$\mathcal{M}^+\left(D^2 v\right) \geq \eta \mathcal{M}^+\left(D^2 u\right) + \mathcal{M}^-\left(\overline{\nabla u \otimes \nabla \eta} + u D^2 \eta\right).$$

Ocupamos las cotas obtenidas en la demostración de la Proposición 4.1 para obtener que

$$\mathcal{M}^+\left(D^2 v\right) \geq C_1 \eta \left\{ \frac{-|g| + |u|^{s-1} u}{\left(\eta^{-1/\beta} u\right)^\alpha} \right\} - C_2 v \eta^{\frac{-2}{\beta}} \quad \text{en } \Gamma^+(v), \tag{5.13}$$

donde las constantes C_1 y C_2 son universales. Ahora, dado que $u > 0$ en $\Gamma^+(v)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \eta \frac{-|g| + |u|^{s-1} u}{\left(\eta^{-1/\beta} u\right)^\alpha} &= -\eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} |g| v^{-\alpha} + \eta^{1+\alpha/\beta} u^{s-\alpha} \\ &= -\eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} |g| v^{-\alpha} + \eta^{\alpha/\beta+1+\alpha-s} v^{s-\alpha}. \end{aligned}$$

Así (5.13) se transforma

$$-\mathcal{M}^+\left(D^2 v\right) + C_1 \eta^{\alpha/\beta+1+\alpha-s} v^{s-\alpha} - C_2 \eta^{-2/\beta} v \leq C_1 \eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} |g| v^{-\alpha}. \tag{5.14}$$

Tomamos β de la siguiente forma

$$\beta = \text{máx} \left\{ \frac{-\alpha}{1+\alpha}, \frac{\alpha+2}{s-1-\alpha} \right\}, \tag{5.15}$$

de modo que

$$\eta^{\alpha/\beta+1+\alpha-s} \geq \eta^{-2/\beta}.$$

Entonces (5.14) se puede reducir a

$$-\mathcal{M}^+\left(D^2 v\right) + \eta^{-2/\beta} v \left(v^{s-\alpha-1} - C\right) \leq C_1 \eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} |g| v^{-\alpha}. \tag{5.16}$$

Al igual que en el caso desarrollado por *Esteban, Felmer y Quaas* en [19], definimos $w = \text{máx}\left\{v - C^{1/(s-\alpha-1)}, 0\right\}$ y notamos que $\Gamma^+(w) \subset \Gamma^+(v)$ y además que $\Gamma^+(w) \subset \{x \in \Omega \text{ t.q. } w(x) \geq 0\}$. Así w satisface

$$-\mathcal{M}^+\left(D^2 w\right) \leq C\eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} |g| v^{-\alpha} \quad \text{en } \Gamma^+(w).$$

Aplicando *ABP* se tiene que

$$\sup_{B_1} w \leq C \left\| \eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} g v^{-\alpha} \right\|_{L^n(B_1)},$$

pero entonces

$$\sup_{B_1} v \leq \sup_{B_1} w + C^{1/(s-\alpha-1)} \leq C\left(1 + \left\| \eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} g v^{-\alpha} \right\|_{L^n(B_1)}\right).$$

Finalmente basta notar que

$$\begin{aligned} \left(1 + \left\| \eta^{1+\alpha/\beta+\alpha} g v^{-\alpha} \right\|_{L^n(B_1)}\right) &\leq \left(1 + \left\| g v^{-\alpha} \right\|_{L^n(B_1)}\right) \\ &\leq \left(1 + \left(\sup_{B_1} v\right)^{-\alpha} \|g\|_{L^n(B_1)}\right) \\ &\leq \left(1 + \left(\sup_{B_1} v\right) \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} + \|g\|_{L^n(B_1)}^{\frac{1}{1+\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Así se concluye

$$\sup_{B_1} v \leq C\left(1 + \|g\|_{L^n(B_1)}\right).$$

donde C solo depende de las cantidades requeridas. ■

El siguiente lema es una versión de la desigualdad de Kato ajustado a nuestro operador.

Lema 5.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado, $u, v, f : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Denotemos $R(x) = |u(x)|^{s-1} u(x) - |v(x)|^{s-1} v(x)$. Si $u - v$ es solución de*

$$-\left|\nabla (u-v)\right|^{\alpha} \mathcal{M}\left(D^2 (u-v)\right) + R(x) \leq f \quad \text{en } \Omega, \tag{5.17}$$

entonces $(u-v)^+$ es solución viscosa de

$$-\left|\nabla (u-v)^+\right|^{\alpha} \mathcal{M}\left(D^2 (u-v)^+\right) + R^+(x) \leq f^+ \quad \text{en } \Omega. \tag{5.18}$$

Aquí $\mathcal{M}$ puede ser $\mathcal{M}^+$ o $\mathcal{M}^-$.

Demostración:

Supongamos primero que $(u-v)^+$ no es localmente constante. Si $x \in \Omega$ es tal que $u(x)-v(x)>0$ o entonces $u-v$ satisface (5.18) en dicho punto. Si ahora x es tal que $u(x)-v(x)=0$, sea φ una función test φ tal que $(u-v)^+ - \varphi$ tenga un máximo local en x y $\nabla\varphi(x) \neq 0$. Pero entonces en este caso $(u-v)-\varphi$ tiene un máximo local en x y $\nabla\varphi(x) \neq 0$, por lo que podemos ocupar (5.17) para obtener

$$-\left|\nabla\varphi(x)\right|^{\alpha} \mathcal{M}\left(D^2\varphi(x)\right) \leq f^+,$$

y así (5.18) es satisfecho, pues $R(x)=0$.

Si ahora $(u-v)^+$ es localmente constante en una bola $B(\hat{x},\rho)$, es decir,

$$(u(x)-v(x))^+ = C \quad \forall x \in B(\hat{x},\rho).$$

Lo que tenemos que probar que es

$$R^+(x) \leq f^+(x) \quad \forall x \in B(\hat{x},\rho). \tag{5.19}$$

Si $C>0$ entonces $u(x)-v(x) = (u(x)-v(x))^+$, $R(x) = R^+(x)$ y (5.19) se satisface, pues $u-v$ es solución de (5.17). Si $C=0$ entonces $R^+(x)=0$ y la desigualdad es trivial.■

Ahora entregamos una generalización de la desigualdad de Kato (ver [25]) para soluciones de nuestra ecuación.

Lema 5.5. *Sea $f:\Omega\to\mathbb{R}$ continua y u solución de*

$$-F\left(\nabla u, D^2u\right) + |u|^{s-1}u = f \quad \text{en } \Omega, \tag{5.20}$$

entonces $|u|$ satisface

$$-\left|\nabla u\right|^{\alpha} \mathcal{M}^+\left(D^2u\right) + |u|^{s-1}u \leq f \quad \text{en } \Omega. \tag{5.21}$$

Demostración:

Primero notemos que u satisface

$$-\left|\nabla u\right|^{\alpha} \mathcal{M}^+\left(D^2u\right) + |u|^{s-1}u \leq f \quad \text{en } \Omega,$$

luego, tomando $v=0$ en el Lema 5.4 se obtiene que u^+ es solución con f^+ como lado derecho. Luego observamos que

$$-\left|\nabla(-u)\right|^{\alpha} \mathcal{M}^+\left(D^2(-u)\right) + |u|^{s-1}(-u) \leq -f^- \quad \text{en } \Omega,$$

lo cual, usando el argumento anterior, nos dice que u^- es subsolución con $-f^-$ como lado derecho. Concluimos que $|u| = \max\{u^+, -u^-\}$ satisface (5.21). ■

Con estos resultados somos capaces de probar el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Supongamos que* $\alpha \in (-1,0)$ *y que* F *satisface* $(H1)$, $(H2)$. *Sea* $s > 1+\alpha$, *entonces para cada función* $f \in L^n_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *la ecuación*

$$-F\left(\nabla u, D^2 u\right) + |u|^{s-1}\, u = f \quad en\ \mathbb{R}^n,$$

posee al menos una solución.

Demostración:

Sea $\{f_m\}$ una sucesión creciente que satisfaga (5.10) para cualquier dominio acotado Ω. Ahora ocupamos Lema 5.2 para construir una sucesión de soluciones $\{u_m\} \subset C^\gamma(\Omega)$ de (5.11). De acuerdo al Lema 5.5 y Lema 5.3 para cada $0 < R < R^{'} < m$ se tiene

$$\sup_{B^{'}_R} |u_m| \le C\left(1 + \|f\|_{L^n(B_R)}\right),$$

donde C no depende ni de f ni de m. Con esta desigualdad y teniendo en cuenta la Proposición 4.3 se tiene que

$$\|u_m\|_{C^\gamma} \le C,$$

donde C no depende de m. Por un argumento diagonal, obtenemos una subsucesión de soluciones de la ecuación

$$-\left|\nabla u_m\right|^\alpha F\left(D^2 u_m\right) + |u_m|^{s-1}\, u = f_m,$$

que seguimos llamando $\{u_m\}$, tal que u_m converge uniformemente para todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Aquí la ecuación se satisface en B_m y f_m como antes. Ocupando el Lema 5.1 y la Proposición 5.1, que son los que dan el derecho a pasar al límite, se obtiene que $u = \lim_{m\to\infty} u_m$ es solución de (5.1), lo que completa la demostración del teorema. ■

5.3. Explosión en la frontera

En esta sección construiremos soluciones de (5.1), esta vez en dominios acotados Ω, y que satisfagan

$$\lim_{x\to\partial\Omega} u(x) = \infty.$$

Al igual que en [19], para la construcción de estas soluciones se construirán soluciones u_m de problemas aproximados, las cuales están ordenadas, es decir $u_m \le u_{m+1}$. Para esto, hay que una pedir hipótesis adicional a F para que satisfaga un principio de comparación. Supondremos entonces que F satisface lo siguiente

(H3) Existe una función continua ω que satisface $\omega(0)=0$, tal que si $(X,Y)\in S^2(n)$ y $\xi\in\mathbb{R}$ satisfacen

$$-\xi\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix} X & 0\\ 0 & Y\end{pmatrix}\leq 4\xi\begin{pmatrix} I & -I\\ -I & I\end{pmatrix},$$

con I la matriz identidad en $\mathbb{R}^n$, entonces para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^n$, $x\neq y$ se tiene que

$$F\left(x,\xi\left(x-y\right),X\right)-F\left(y,\xi\left(x-y\right),-Y\right)\leq\omega\left(\xi\left|x-y\right|^2\right).$$

Observación. Si bien, en nuestro caso F no depende de x, dejamos la hipótesis con esta restricción pues fácil extender los resultados si se tiene una uniformidad sobre la variable espacial.

El siguiente es un lema técnico que se encuentra en [5], similar al obtenido por *Ishii*, pero adaptado a la clase de operadores con la cual estamos trabajando. Es un lema clave para la demostración del principio de comparación.

Lema 5.6. *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un abierto acotado, que es de clase C^1 por partes. Sea u una función semicontinua superior en $\overline{\Omega}$ y v una función semicontinua inferior en $\overline{\Omega}$. Sea $j\in\mathbb{N}$ y sean $(x_j,y_j)\in\Omega^2$, $x_j\neq y_j$ y $q\geq\sup\left\{2,\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right\}$. Supongamos que*

$$\psi_j(x,y)=u(x)-v(y)-\frac{j}{q}\left|x-y\right|^q,$$

tiene un máximo local en (x_j,y_j). Entonces, existen $X_j,Y_j\in\mathcal{S}(n)$ tales que

$$\begin{aligned}u(x)&\leq u(x_j)+\left\langle j\left|x_j-y_j\right|^{q-2}(x_j-y_j),x-x_j\right\rangle+Q_{X_j}(x-x_j)+o_x,\\ v(y)&\geq v(y_j)+\left\langle j\left|x_j-y_j\right|^{q-2}\left(x_j-y_j\right),y-y_j\right\rangle+Q_{-Y_j}(y-y_j)+o_y,\end{aligned}$$

donde para $N\in\mathcal{S}(n)$

$$Q_N(x)=\frac{1}{2}\left\langle X_j\left(x-x_j\right),x-x_j\right\rangle$$

y

$$\begin{aligned}o_x&=o(|x-x_j|^2),\\ o_y&=o\left(|y-y_j|^2\right).\end{aligned}$$

Además X_j e Y_j satisfacen

$$-4jk_j\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix} X_j & 0\\ 0 & Y_j\end{pmatrix}\leq 3jk_j\begin{pmatrix} I & -I\\ -I & I\end{pmatrix},$$

donde

$$k_j=2^{q-3}q(q-1)\left|x_j-y_j\right|^{q-2}.$$

A continuación se enunciará y demostrará el teorema de comparación. Si bien, el enunciado es ligeramente distinto al original en [5], la demostración es la misma.

Teorema 5.2. *Supongamos que F satisface (H1),(H2) y (H3). Sean f y g semi-continua superior e inferior respectivamente. Supongamos que β es una función continua en $\mathbb{R}$ tal que $\beta(0) = 0$. Sean ahora ϕ y σ super y subsoluciones viscosas de*

$$\begin{array}{rcl} F\left(\nabla \phi, D^2\phi\right) - \beta(\phi) & \leq & f \quad en\ \Omega, \\ F\left(\nabla \sigma, D^2\sigma\right) - \beta(\sigma) & \geq & g \quad en\ \Omega. \end{array}$$

Supongamos que se tiene que β es estrictamente creciente y $f \leq g$, o bien β es creciente y $f < g$. Entonces, $\sigma \leq \phi$ en $\partial\Omega$, implica $\sigma \leq \phi$ en Ω.

Observación. El resultado sigue siendo válido si en la ecuación se considera el término $b(x) \cdot \nabla\phi \left|\nabla\phi\right|^{\alpha}$ siempre y cuando b sea Hölder continua de exponente $1 + \alpha$.

Demostración:

Supongamos por contradicción que $\max(\sigma - \phi) > 0$ en Ω. Como $\sigma \leq \phi$ en la frontera, se tiene que el supremo se alcanza en el interior del dominio. Consideremos ahora para $j \in \mathbb{N}$ y $q > \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$ la siguiente función

$$\psi_j(x, y) = \sigma(x) - \phi(y) - \frac{j}{q}\left|x - y\right|^q .$$

Supongamos que (x_j, y_j) es un máximo para ψ_j. Entonces
(i) Del hecho de que σ y ϕ son acotadas se deduce que $|x_j - y_j| \to 0$ cuando $j \to \infty$. Así hay una sub sucesión tal que $(x_j, y_j) \to (\bar{x}, \bar{x})$.
(ii) Se tiene que

$$\liminf_{j\in\mathbb{N}} \psi_j(x_j, y_j) \geq \sup_{x\in\Omega}(\sigma - \phi) .$$

(iii) $\limsup_{j\in\mathbb{N}} \psi_j(x_j, y_j) \leq \limsup_{j\in\mathbb{N}} \sigma(x_j) - \phi(y_j) = \sigma(\bar{x}) - \phi(\bar{x})$.
(iv) Luego se concluye que $j\left|x_j - y_j\right|^q \to 0$ cuando $j \to \infty$ y $\bar{x}$ es un punto de máximo para $\sigma - \phi$.

Afirmación: Para j suficientemente grande se tiene que existen x_j e y_j tales que (x_j, y_j) es un punto de máximo para ψ_j y $x_j \neq y_j$.

En efecto, supongamos que $x_j = y_j$ para una infinidad de $j \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi_j(x_j, x_j) &= \sigma(x_j) - \phi(x_j) \\
&\geq \sigma(x_j) - \phi(y) - \frac{j}{q}\left|x_j - y\right|^q, \\
\psi_j(x_j, x_j) &= \sigma(x_j) - \phi(x_j) \\
&\geq \sigma(x) - \phi(x_j) - \frac{j}{q}\left|x - x_j\right|^q.
\end{aligned}$$

Así x_j es un mínimo local para

$$\Phi(y) := \phi(y) + \frac{j}{q}\left|x_j - y\right|,$$

y similarmente un máximo local para

$$\Sigma(x) := \sigma(x) - \frac{j}{q}\left|x_j - x\right|^q.$$

Excluyamos primero el caso en que x_j sea un máximo y un mínimo local estricto. En efecto por el Lema 5.1, se tiene que

$$\begin{aligned}
-\beta\left(\phi(x_j)\right) &\leq f(x_j) \\
-\beta\left(\sigma(x_j)\right) &\geq g(x_j).
\end{aligned}$$

Esto es una contradicción, pues o bien β es estrictamente creciente y pasando al límite se obtiene

$$-g(\bar{x}) \geq \beta\left(\sigma(\bar{x})\right) > \beta\left(\phi(\bar{x})\right) \geq -f(\bar{x}) \geq -g(\bar{x})$$

o bien

$$-g(\bar{x}) \geq \beta\left(\sigma(\bar{x})\right) \geq \beta\left(\phi(\bar{x})\right) \geq -f(\bar{x}) > -g(\bar{x}).$$

Luego x_j no puede ser a la vez un máximo estricto para Φ y un mínimo estricto para Σ. Veamos ahora el otro caso, supongamos primero que x_j no es un mínimo estricto para Φ, entonces existen $\delta > 0$ y $R > \delta$ tal que $B\left(x_j, R\right) \subset \Omega$ y

$$\phi(x_j) = \inf_{\delta \leq |x - x_j| \leq R} \left\{\phi(x) + \frac{j}{q}\left|x - x_j\right|^q\right\}.$$

Ahora, si y_j es un punto donde se alcanza en ínfimo anterior, entonces se tiene que

$$\phi(x_j) = \phi(y_j) + \frac{j}{q}\left|x_j - y_j\right|^q$$

y luego (x_j, y_j) sigue siendo un punto de máximo para ψ_j, dado que para todo $(x,y) \in \Omega^2$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sigma(x_j) - \phi(y_j) - \frac{j}{q}\left|x_j - y_j\right|^q &= \sigma(x_j) - \phi(x_j) \\
&\geq \sigma(x) - \phi(y) - \frac{j}{q}\left|x - y\right|^q .
\end{aligned}$$

Si x_j no es máximo estricto de Σ se procede de manera análoga. Esto concluye la demostración de la Afirmación.

Procedemos a terminar el teorema. Ocupando el hecho de que σ y ϕ son sub y supersoluciones respectivamente y usando las funciones test que provee el Lema 5.6 en los puntos x_j y y_j, se tiene que

$$\begin{aligned}
g(x_j) &\leq F\left(j\left|x_j - y_j\right|^{q-2}(x_j - y_j), X_j\right) - \beta\left(\sigma(x_j)\right) \\
&\leq F\left(j\left|x_j - y_j\right|^{q-2}(x_j - y_j), -Y_j\right) + \omega\left(j\left|x_j - y_j\right|^q\right) - \beta\left(\sigma(x_j)\right) \\
&\leq f(y_j) + \omega\left(j\left|x_j - y_j\right|^q\right) + \beta\left(\phi(y_j)\right) - \beta\left(\sigma(x_j)\right).
\end{aligned}$$

Dada la continuidad de β y la semicontinuidad inferior y superior de g y f respectivamente, podemos pasar al límite para obtener

$$g(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \beta\left(\phi(\bar{x})\right) - \beta\left(\sigma(\bar{x})\right),$$

lo cual es una contradicción en cualquiera de las hipótesis del teorema.■

Ahora estamos en condiciones de enunciar y probar el teorema de explosión en la frontera.

Teorema 5.3. *Supongamos que $\alpha \in (-1, 0)$ y que F satisface $(H1)$, $(H2)$ y $(H3)$. Sea $s > 1 + \alpha$, $f \in L^n(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^2. Entonces la ecuación*

$$\left\{\begin{array}{rcl}
-F\left(\nabla u, D^2 u\right) + \left|u\right|^{s-1} u &=& f \quad en\ \Omega, \\
\lim\limits_{x \to \partial\Omega} u(x) &=& \infty
\end{array}\right. \tag{5.22}$$

posee al menos una solución.

Demostración:

Consideremos primero una sucesión creciente de funciones$\{f_m\}$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} \int_\Omega \left|f_m - f\right|^n = 0.$$

Luego, gracias a la Proposición 5.2, encontramos u_m solución del problema

$$\begin{cases} -F\left(\nabla u_m, D^2 u_m\right) + |u_m|^{s-1} u_m & = & f \text{ en } \Omega, \\ u(x) & = & m \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por el Teorema 5.2 se tiene que $u_{m+1} \geq u_m$ en Ω para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego, por argumentos de cota interior similares a los usados en el Teorema 5.1 (ver Lema 5.3), obtenemos una sub sucesión uniformemente convergente, que seguimos llamando u_m, la cual converge a u solución de

$$-F\left(\nabla u, D^2 u\right) + |u|^{s-1} u = f \quad \text{en } \Omega.$$

Solo falta verificar la condición de borde. Esto último es fácil de hacer, pues $u_{m+1} \geq u_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \Omega$. Luego, se tiene que $u \geq u_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y todo $x \in \Omega$. Finalmente, tomando límite inferior, se concluye que

$$\liminf_{x \to \partial\Omega} u(x) \geq m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Así u es solución de (5.22).■

Capítulo 6

Conclusiones

En este capítulo se revisarán problemas abiertos que deja esta memoria, así como lineas futuras de investigación.

En [5] y [6] se define apropiadamente el primer valor propio del operador en cuestión de la siguiente manera

$$\bar{\lambda} = \sup\left\{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ \exists\ \phi > 0 \text{ en } \bar{\Omega},\ F\left(\nabla\phi, D^2\phi\right) + \lambda\phi^{1+\alpha} \leq 0\right\}, \tag{6.1}$$

donde la ecuación se entiende en el sentido viscoso. Un primer problema abierto es extender el principio del máximo de Alexandroff-Bakelman-Pucci hasta el primer valor propio, es decir, pidiendo que $c(x) < \bar{\lambda}$ en lugar de pedir $c(x) \leq 0$, donde $\bar{\lambda}$ está dado por (6.1). Esto motivado por el hecho de que el cálculo hecho en el Capítulo 3, Corolario 3.1 permite que c sea positivo, mientras este sea pequeño y el trabajo de *Quaas y Syrakov* [34]. Así podemos plantear la siguiente conjetura

Conjetura 6.1. *El teorema 3.1 sigue siendo cierto si se reemplaza la condición $c(x) \leq 0$ por $c(x) < \bar{\lambda}$ donde $\bar{\lambda}$ está definido en* (6.1).

Otro problema abierto es la desigualdad de Harnack para $\alpha > 0$, problema que no se pudo resolver en esta memoria. La principal dificultad que trae este problema es la degenerancia del operador en cuestión, lo que no permite localizar con las técnicas utilizadas para probar la Proposición 4.1. Si bien se sigue trabajando en este problema y se sabe que el resultado es cierto para el p-laplaciano, no hay una base sólida para poder asegurar que el resultado sea válido en este caso.

Conjetura 6.2. *Supongamos que $\alpha > 0$ y que F satisface $(H1)$ y $(H2)$. Sea $u \in C(\Omega)$ solución viscosa no negativa de*

$$F\left(\nabla u, D^2u\right) + b(x)\cdot\nabla u\left|\nabla(u(x))\right|^{\alpha} + c(x)u\left|u\right|^{\alpha} = f \quad \text{en } \Omega,$$

con $f \in L^n(\Omega)$. Entonces existe $C = C(\lambda, \Lambda, n, \Omega, \alpha)$ tal que

$$\sup_{\Omega} u \leq C\left\{\inf_{\Omega} u + \|f\|_{n,\Omega}^{\frac{1}{\alpha+1}}\right\}.$$

Al igual que en el Capítulo 4, el Capítulo 5 deja problemas abiertos para el caso $\alpha > 0$. Si bien la existencia de soluciones globales se conocen para el p-laplaciano para todo $p > 2$ o equivalentemente para todo $\alpha > -0$, ver por ejemplo [8], nuestra demostración se basa en la compacidad de las soluciones, que sólo hemos obtenido para $\alpha \in (-1, 0)$ y en un argumento de localización, el cual para el caso $\alpha > 0$ no se sabe hacer.

Conjetura 6.3. *Supongamos que $\alpha \in> 0$ y que F satisface $(H1)$, $(H2)$. Sea $s > 1 + \alpha$, entonces para cada función $f \in L^n_{loc}(\mathbb{R}^n)$, la ecuación*

$$-F\left(\nabla u, D^2 u\right) + |u|^{s-1} u = f \quad en\ \mathbb{R}^n,$$

posee al menos una solución.

En esta memoria se han aprendido técnicas que son aplicables a variados problemas no variacionales y extensiones de problemas clásicos. Daremos una breve lista de problemas que pueden ser de interés para el futuro.

Un problema interesante es el estudio de regularidad superior para el operador dado en (1.1). Es bien sabido que el p-laplaciano satisface regularidad $C^{1,\beta}$, donde $\beta = \beta(p)$, luego la pregunta natural es si en nuestro caso también se tiene un resultado similar. Creemos que el caso $\alpha \in (-1, 0)$, es más sencillo, pues ya se conoce regularidad Hölder, mientras que en el caso $\alpha > 0$, aún no se conocen resultados de regularidad.

Otro problema interesante de estudiar es una variación la famosa conjetura E. de Giorgi. Esta sostiene que si u es una solución de la ecuación de Allen-Cahn

$$\Delta u + u\left(1 - u^2\right) = 0 \ \text{ en } \mathbb{R}^n,$$

con $\partial_{x_n} u > 0$ y $|u| \leq 1$, entonces los conjuntos de nivel $\{u = \sigma\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ son hiperplanos si $n \leq 8$. Hay una amplia literatura acerca de este problema, pero lo que nos interesa estudiar, es una variación con $\mathcal{M}$ en lugar de Δ y una hipótesis adicional, la condición de Gibbons. Espécificamente el problema que nos parece interesante estudiar es

$$\mathcal{M}\left(D^2 u\right) + u\left(1 - u^2\right) = 0 \ \text{ en } \mathbb{R}^n,$$

donde $\mathcal{M}$ puede ser $\mathcal{M}^+$ o $\mathcal{M}^-$, $|u| \leq 1$ y

$$u\left(x', x_n\right) \to \pm 1, \ \text{ cuando } x_n \to \pm\infty.$$

Si la condición de convergencia es uniforme, hay herramientas que permiten creer que el resultado anterior es cierto. El caso general es una pregunta más compleja y la vez más interesante.

Bibliografía

[1] A.D. Aleksandrov, *Uniqueness conditions and estimates for the solution of the Dirichlet problem.* Amer. Mat. Soc. Transl. 68 (1968), 89-119.

[2] A.D. Aleksandrov, *Majorization of solutions of second-order linear equations.* Amer. Mat. Soc. Transl. 68 (1968), 120-143

[3] I. Bakelman, *Theory of quasilinear elliptic equations.* Siberian Math. J. 2 (1961), 179-186.

[4] I. Birindelli, F. Demengel, *Comparison principle and Liouville type results for singular fully nonlinear operators.* Ann. Fac. Sci Toulouse Math, (6)**13** (2004), N.2, 261-287.

[5] I. Birindelli, F. Demengel, *Eigenvalue and Maximun Principle for fully non-linear singular operators.* Advances in Partial Diff. equations **11** n.1 (2006), 91-119.

[6] I. Birindelli, F. Demengel, *Eigenvalue, maximun principle and regularity for fully non linear homogeneous operators.* To appear in Comm. Pure and Applied Analysis.

[7] I. Birindelli, F. Demengel, *The Dirichlet problem for singular fully nonlinear operators.* Preprint de Cergy-Pontoise.

[8] l. Boccardo, T. Gallouet, J.L. Vázquez, *Nonlinear Elliptic Equations in $\mathbb{R}^n$ withouth Growth Restrictions on the Data.* Journal of Differential Equations, Volume **105**(2) (1993), 334-363.

[9] l. Boccardo, T. Gallouet, J.L. Vázquez, *Solutions of nonlieanr parabolic equations without growth restrictions on the data.* Electronic Journal of Differential Equations, (60) (2001).

[10] H. Brezis, *Semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ without condition at infinity.* Appl. Math. Optim. **12** (1984), 271-282.

[11] L. Cafarelli, *A priori estimates for fully nonlinear second order elliptic equations, Nonlinear variational problems.* Vol. II, Pitman Research Notes in Math., vol. 193, Longamna, New York, 1989, 99-106.

[12] L. Cafarelli, *Elliptic second order equations.* Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano 57 (1988), 253-284.

[13] L. Cafarelli, *Interior a priori estimates for solutions of fully non-linear equations.* Ann. Math. 130 (1989), 189-213.

[14] L. Cafarelli, M. Crandall, M. Kocan, A. Świech, *On Visosity Solutions of Fully Nonlinear Equations with measurable Ingredients.* Comm. Pure and Applied Mathematics **49**(4) (1996), 365-398.

[15] L. Cafarelli, X. Cabré, *Fully Nonlinear Elliptic Equations.* American Mathematical Society, Colloquium Publication, **43** (1995).

[16] Y.G. Chen, Y. Giga, S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations.* Journal of Differential Geometry, 33, (1991), 749-786.

[17] M. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations.* Bulletin of the AMS, **27**(1) (1992), 1-67.

[18] M. Del Pino, R. Letelier, *The influence of domain geometry in boundary blow-up elliptic problems.* Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, **48**(6) (2002), 897-904.

[19] M. Esteban, P. Felmer, A. Quaas, *Super-linear elliptic equation for the Pucci operator without growth restrictions for the data.* Preprint

[20] C. Evans, J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature.* Journal of Differential Geometry, 33, (1991), 635-681.

[21] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order.* 2nd edition, Springer-Verlag 1983.

[22] H. Ishii, *Viscosity solutions of non-linear partial differential equations.* Sugaku Expositions vol 9, (1996).

[23] R. Jensen, P.L. Lions, P.E. Souganidis, *A uniqueness result for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations.* Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1988), 975-978.

[24] P. Juutinen, P. Lindquist, J. Manfredi, *On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi linear equation.* SIAM J. Math. Anal., 33, (29001), no.3, 699-717.

[25] T. Kato, *Schrödinger operators with singular potentials.* Israel J. Math., **13** (1972), 135-148.

[26] J.B. Keller, *On solutions of* $\Delta u = f(u)$. Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 503-510.

[27] V. Kondratev, V. Nikishkin, *Asymptotics, near the boundary of a solution of singular boundary problem value problems for semilinear elliptic equations.* Differential Equations **26** (1990), 345-348.

[28] N.V. Krylov, M.V. Safonov, *An estimate of the probability that a diffusion process hits a set of positive measure.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR 245 (1979), 253-255 [Russian]. Engl. Transl. in Soviet Math. Dokl. **20** (1979), 253-255.

[29] N.V. Krylov, M.V. Safonov, *Certain properties of solutions of parabolic equations with measurable coefficients.* Izvestia Akad. Nauk. SSSR **40** (1981), 161-175 [Russian]. Engl. Transl. in Math. USSr Izv. **161** (1981), 151-164.

[30] C. Loewner, L. Nirenberg, *Partial differential equations invariant under conformal projective transformations.* Contributions to Analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), Academic Press, New York, 1974, 245-272.

[31] J. Moser, *A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.* Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 457-468.

[32] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations.* Comm Pure Appl. Math., 14 (1961), 577-591.

[33] C. Pucci, *Limitazioni per soluzioni di equazioni ellittiche.* Ann. Mat. Pura Appl. 74 (1966), 15-30.

[34] A. Quaas, B. Syrakov, *Principal eigenvalues and the Dirichlet problem for fully nonlinear operators.* Adv. in Mathematics, Vol. 218, Issue 1, 2008.

[35] J. Serrin, *Local behavior of solution of quasi-linear elliptic equations.* Acta Math. **111** (1964), 247-302.

[36] N.S. Trudinger, *Comparison principles and pointwise estimates for viscosity solutions.* Rev. Mat. Iberoamericana 4 (1988), 453-468.