UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

DIFUSIÓN CRUZADA EN UN SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA DE DOS ESPECIES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ÓSCAR ANDRÉS VÁSQUEZ AHUMADA

PROFESORA GUÍA:
SALOMÉ MARTÍNEZ SALAZAR

PROFESORES COMISIÓN:
JUAN DIEGO DÁVILA BONCZOS
PATRICIO FELMER AICHELE

SANTIAGO CHILE
ENERO 2008

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: ÓSCAR VÁSQUEZ AHUMADA
FECHA: 04/01/2008
PROF. GUÍA: SRA. SALOMÉ MARTÍNEZ.

"DIFUSIÓN CRUZADA EN UN SISTEMA DE
LOTKA-VOLTERRA DE DOS ESPECIES"

El presente trabajo de título tiene por objetivo mostrar el efecto de la difusión cruzada no-homogénea en la creación de equilibrios de coexistencia, en un modelo de competencia tipo Lotka-Volterra de dos especies.

La difusión cruzada corresponde a una forma de introducir en el modelo la idea de que el flujo de individuos de una especie no solo es afectado por el gradiente de su concentración, si no que es afectado por una función de la concentración de ambas especies, donde la componente espacial aparece de manera explícita.

Se desarrolla el sistema no-estacionario, demostrando existencia y unicidad de la solución bajo condiciones adecuadas en los parámetros y en las condiciones iniciales de este. Para la existencia, la técnica utilizada corresponde a acotamientos a priori de las soluciones del sistema, es decir, suponiendo que la solución existe se puede demostrar que ésta y sus derivadas hasta el segundo orden deben estar acotadas y que dicha cota es indepediente del tiempo. Estas cotas se obtienen gracias a aplicaciones adecuadas del principio del máximo y del Lema de Hopf para ecuaciones parabólicas. Esto combinado con un argumento de punto fijo permite concluir existencia. La unicidad se demuestra por contradicción, aplicando un factor integrante adecuado e integración por partes.

En el caso estacionario se demuestran condiciones para la existencia de equilibrios de coexistencia y se caracteriza su estabilidad. La existencia de equilibrios de coexistencia se caracteriza en términos de funciones escalares relativamente simples, dependientes del parámetro de difusividad. Para ello se utiliza la teoría de bifurcaciones por medio de la técnica de reducción de Lyapunov-Schmidt. La estabilidad de los equilibrios encontrados se determina por medio del estudio del primer valor propio del problema estacionario linealizado. Esto es suficiente gracias a resultados en la literatura existente.

Así, los resultados de esta memoria son dos teoremas, uno de existencia y unicidad para el sistema no-estacionario y el otro de condiciones para la existencia de equilibrios de coexistencia para el sistema estacionario.

Se concluye que, para este tipo de sistemas, basta con difusión cruzada no-homogénea pequeña para producir equilibrios de coexistencia.

Dedicado a mis padres, Óscar Vásquez Martínez y Teresa Ahumada Guerra.

O God! I could be bounded in a nutshell, and count myself a king of infinite space...

Hamlet.

Agradecimientos

Me gustaría partir agradeciendo a mis padres y a Elcira que con su sencillez y humildad me educaron, les doy gracias por todo su apoyo y amor.

Agradecerle a Gaby por el cariño, apoyo a toda prueba y por ayudarme a crecer como persona.

En general agradezco a mis profesores, desde el colegio me he sentido apoyado por grandes personas que han sido capaces de compartir lo que saben conmigo, recuerdo a la Elena, a Verónica, a Dalibor, a Gladys y a Susana. Una vez en la universidad recuerdo con especial cariño al profesor Raúl Gormaz y Jorge San Martín quienes nos ayudaban a estudiar en primer año, al profesor Romualdo Tabensky que nos ayudaba a ver las cosas desde otra perspectiva, a los profesores Alejandro Jofré, Roberto Cominetti, Rafael Correa, Carlos Conca, Manuel Del Pino, Patricio Felmer, Axel Osses, Juan Diego Dávila por haberme motivado con sus clases a seguir Ingeniería matemática. En general al departamento de Ingeniería Matemática donde he podido comprender en parte lo amplio que son las personas y las matemáticas y lo acotado de mi imaginación.

Un especial agradecimiento para mi profesora guía Salomé Martínez por compartir los secretos de la dinámica de poblaciones, por su paciencia y dedicación.

Agradezco a mis compañeros de carrera Felipe Macías, Juan Campos, Diego Morán, Roberto Cortés, Luis Saavedra, Marcelo Tapia, Waldo Arriagada, Alonso Silva, René Quilodrán, André Delaire, Claudio Muñoz por tantas jornadas de estudio juntos. A mis compañeros de primer año, Jaime Hernández, Matías Tobar, Karl Strasser, José Muñoz, Emilio Aqueveque, Eloy Santos, Giovanni Medina con los cuales compartimos gratos e ingratos momentos.

Agradezco a Conicyt y al Núcleo Milenio pues esta memoria fue financiada por el proyecto Fondecyt 1050754 y apoyada por Nucleus Millenium P-04-069-F Information and Randomness.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas competitivos de Lotka-Volterra con difusión son modelos simples que han sido utilizados para modelar la dinámica de poblaciones en competencia. Estos sistemas son espacialmente explícitos, cada especie se mueve de regiones de mayor a menor concentración debido al movimiento aleatorio de sus individuos. Una pregunta importante, tanto del punto de vista ecológico como matemático, es saber si estos sistemas admiten estados estacionarios donde ambas especies coexisten. Consideremos el siguiente sistema de Lotka-Volterra

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu_1 \Delta u + (a(x) - u - v)u \quad \text{en } \Omega \times (0,T), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu_2 \Delta v + (a(x) - u - v)v \quad \text{en } \Omega \times (0,T), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times (0,T). \tag{1.3}$$

Las funciones $u(x,t)$ y $v(x,t)$ representan las densidades de dos especies en la posición x y en tiempo t. El dominio Ω es una región acotada de $\mathbb{R}^N$ con borde suave $\partial\Omega$ y n es la normal exterior de $\partial\Omega$. La condición de borde (1.3) significa que no hay flujo de individuos a través de la frontera. Los parámetros μ_1 y μ_2 corresponden a coeficientes de difusión de u y v respectivamente. La función $a(x)$ denota el crecimiento intrínseco de las especies. En este modelo las especies de u, v sólo difieren en su difusión.

En estas condiciones, si $\mu_1 > \mu_2$ la especie u converge a 0 cuando $t \to \infty$ mientras que la especie v converge a un equilibrio estable. Así, en este caso la diferencia en los coeficientes de difusión no puede producir la coexistencia, si dos especies sólo difieren en su difusión prevalece la que difunde más lento, como se puede ver en [8].

Una pregunta interesante es si es posible la coexistencia de dos especies que tienen la misma tasa de crecimiento, pero difieren en su su patrón de movimiento. Nuestra discusión anterior muestra que la diferencia en las tasas de difusión no puede producir coexistencia, por lo que consideraremos que el movimiento de las especies es afectado por interacciones entre individuos. En 1979, N. Shigesada, K. Kawasaki y E. Teramoto [14] propusieron un modelo en donde el movimiento de las especies es afectado por las presiones poblacionales creada por las interacciones entre individuos. Matemáticamente, esto se traduce en la incorporación de auto-difusión y difusión cruzada en el sistema (1.1). Consideramos entonces el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))u] + (a-u-v)u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))v] + (a-u-v)v \quad \text{ en } \bar{\Omega}\times[0,T), \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = 0 \quad \text{ en } \partial\Omega\times[0,T), \\ u(x,0) = W_1(x) \geq 0, \quad v(x,0) = W_2(x) \geq 0 \quad \text{ en } \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Los coeficientes $\rho_{ij} = \rho_{ij}(x), 1 \leq i,j \leq 2$, representan auto-difusión y difusión cruzada y $\tau \geq 0$ corresponde a un parámetro de perturbación. Observemos que en este sistema el flujo de las especies u y v esta dado por

$$J_u = -\nabla[(1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))u] \quad \text{ y } \quad J_v = -\nabla[(1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))v],$$

al suponer $\frac{\partial\rho_{ij}}{\partial n}(x) = 0$ en $\partial\Omega$ para $(1 \leq i,j \leq 2)$, obtenemos que la condición $J_u\cdot n = J_v\cdot n = 0$ en $\partial\Omega$ es equivalente a la condición de borde $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$.

Una primera pregunta es si el sistema (1.4) admite soluciones globales. La existencia local fue probada por H. Amann, en el artículo [1]. Nuestro primer resultado establece que bajo condiciones apropiadas para las condiciones iniciales, la solución del sistema (1.4) está definida para todo tiempo si τ es pequeño.

Teorema 1.1. *Sea $\alpha \in (0,1), m, M \in \mathbb{R}$ con $0 < m \leq M$. Existe $\varepsilon > 0$ pequeño tal que el sistema (1.4) tiene una única solución global clásica para*

$$\mu \in [m,M], \quad \tau \in (0,\varepsilon], \quad |a|_\alpha \leq M$$

y para cualquier condición inicial no-negativa W_i satisfaciendo

$$|W_i|_{2,\alpha} \leq M \text{ para } (1 \leq i \leq 2).$$

El número ε depende de $\Omega, \alpha, m, M, \tau$.

La existencia global de soluciones para este tipo de sistemas no es clara, pues son sistemas fuertemente acoplados. Algunos resultados de existencia global han sido obtenidos para el caso en que a, ρ_{ij} son constantes como por ejemplo para el caso $N = 2$, con uno de los coeficientes ρ_{12} o ρ_{21} nulo Y. Lou, W. Ni y Y. Wu en [19] lo demostraron. Y. S. Choi, R. Lui y Y. Yamada en [5] extendieron el resultado anterior para $N < 6$. Estos últimos autores probaron en [4] existencia global en dimensión N cuando $\rho_{21} = \rho_{22} = 0$. Y. Li y C. Zhao en [16] establecieron existencia global para el sistema bajo condiciones adecuadas en los coeficientes de auto-difusión y difusión cruzada . Para el caso $\rho_{11} = \rho_{22} = 0$ y para ρ_{12}, ρ_{21} pequeños, P. Deuring en [7] demostró existencia global de solución clásica del sistema.

Nuestro propósito es estudiar la coexistencia de las especies u y v, para eso estudiaremos la existencia de de estados estacionarios positivos de (1.4), los cuales corresponden a soluciones positivas del siguiente sistema

$$\begin{cases} \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))u]+(a-u-v)u=0 \quad \text{ en } \Omega, \\ \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))v]+(a-u-v)v=0 \quad \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=0 \quad \text{ en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Para describir los resultados introducimos $\theta(\mu)$ la solución positiva de la ecuación logística

$$\mu\Delta\theta+\theta(a(x)-\theta)=0 \quad \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial\theta}{\partial n}\mid_{\partial\Omega}=0, \quad \theta>0 \quad \text{ en } \Omega. \tag{1.6}$$

que bajo la hipótesis $\int_\Omega a>0$ está definida para todo $\mu\in(0,\infty)$.

Supongamos que u y v son soluciones positivas de (1.5). Cuando $\tau\to 0$ probaremos que las soluciones de (1.5) están en una vecindad de $(s\theta,(1-s)\theta)$ donde $s\in[0,1]$. Demostraremos también que la existencia y estabilidad de los estados de coexistencia puede ser caracterizada en términos de dos funciones escalares

$$G(\mu)=\int_\Omega(\rho_{11}-\rho_{21})(a-\theta) \quad \text{y} \quad H(\mu)=\int_\Omega(\rho_{22}-\rho_{12})(a-\theta).$$

Estas funciones aparecen de manera natural. De hecho, al multiplicar la primera ecuación de (1.5) por $(1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))v$ e integrando por partes obtenemos

$$\int_\Omega(1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))u\mu\Delta[1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))v]+(a-u-v)(1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))uv=0.$$

Por la segunda ecuación del sistema (1.5) tenemos que $\mu\Delta[1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))v]=-(a-u-v)v$, reemplazando en la ecuación anterior nos queda

$$\int_\Omega-(1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))(a-u-v)uv+(a-u-v)(1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))uv=0,$$

$$\int_\Omega(\rho_{21}-\rho_{11})(a-u-v)u^2v+(\rho_{22}-\rho_{12})(a-u-v)uv^2=0.$$

Al tomar $\tau\to 0$, salvo subsucesión, $(u,v)\to(s\theta,(1-s)\theta)$

$$\int_\Omega s^2(1-s)(\rho_{21}-\rho_{11})(a-\theta)\theta^3+s(1-s)^2(\rho_{22}-\rho_{12})(a-\theta)\theta^3=0,$$

es decir,

$$s(1-s)[-sG(\mu)+(1-s)H(\mu)]=0,$$

como queremos soluciones positivas se tiene que $s\in(0,1)$, luego obtenemos que

$$s=\frac{G(\mu)}{G(\mu)+H(\mu)}.$$

Así, las funciones G y H caracterizan la existencia de soluciones positivas de (1.5) para τ pequeño. Tenemos entonces el siguiente resultado

Teorema 1.2. *Supongamos que $G(\mu), H(\mu)$ no tienen raíces comunes. Sean μ_1, μ_2 dos raíces consecutivas de la función $G(\mu)H(\mu)$ y supongamos que ambas raíces son simples, sean $\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2}$ dos números cercanos a μ_1, μ_2 :*

i) Si $G(\mu)H(\mu) < 0$ en $(\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2})$, entonces para $\mu \in [\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2}]$ el sistema (1.5) no tiene estados de coexistencia tal que τ sea pequeño y positivo.

ii) Si $G(\mu)H(\mu) > 0$ en $(\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2})$ entonces para cada $\tau > 0$ suficientemente pequeño existen números $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)$ y una función suave

$$\mu \mapsto (u(\mu), v(\mu)) \text{ sobre } [\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2}] \text{ tq: } \quad \forall \mu \in (\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2})$$

el par $(u(\mu), v(\mu))$ es un único estado de coexistencia de (1.5) y $(u(\mu_1), v(\mu_1))$, $(u(\mu_2), v(\mu_2))$ son estados semitriviales del sistema. Además, los estados de coexistencia $(u(\mu), v(\mu))$ son estables si ambos $G(\mu)$ y $H(\mu)$ son positivos y es inestable si ambos son negativos.

En la afirmación (ii) de este teorema pueden ocurrir dos posibilidades :

a) $(u(\mu_1), v(\mu_1))$ y $(u(\mu_2), v(\mu_2))$ son estados semitriviales del mismo tipo, cada una de ellos iguales a $(u(\mu), 0)$ o cada una de ellos iguales a $(0, v(\mu))$.

b) $(u(\mu_1), v(\mu_1))$ y $(u(\mu_2), v(\mu_2))$ son de distinto tipo, uno de ellos igual a $(u(\mu), 0)$ y el otro igual a $(0, v(\mu))$.

Debemos notar que debido a resultados de G. Simonett en [22] para estudiar estabilidad de un equilibrio de (1.4) basta con determinar la estabilidad lineal de éste, la cual se traduce en estudiar un problema de valores propios.

Organizamos esta memoria de la siguiente manera. El capítulo 2 se dedica a la demostración del teorema (1.1). Para esto, utilizaremos el principio del máximo para ecuaciones parabólicas, el teorema de punto fijo en espacios de Banach y resultados de regularidad Hölder, siguiendo el artículo de P. Deuring [7].

En el capítulo 3 demostraremos el teorema (1.2) utilizando una reducción de Lyapunov-Schmidt, siguiendo [17], y mostraremos ejemplos.

Los capítulos de esta memoria se pueden leer de manera independiente.

Capítulo 2

Existencia global de soluciones clásicas para el problema no-estacionario

2.1. Introducción

El propósito de este capítulo es demostrar existencia y unicidad de una solución para el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))u] + (a_1 - b_1 u - c_1 v)u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))v] + (a_2 - b_2 u - c_2 v)v \quad \text{en } \bar{\Omega}\times[0,T), \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega\times[0,T), \\ u(x,0) = W_1(x), \quad v(x,0) = W_2(x) \geq 0 \quad \text{en } \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde Ω es un abierto conexo acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave $\partial\Omega$ cuya normal unitaria denotamos por n, el tiempo final de existencia de las soluciones del sistema es $T \in (0,\infty]$, $\mu > 0$ corresponde al coeficiente de difusión, $\tau \geq 0$ corresponde a un parámetro de perturbación pequeño, $b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 0$ representan los coeficientes de crecimiento de la población.

Para las funciones $a_i = a_i(x)$ $i = 1,2$ se exige la siguiente hipótesis de regularidad

(A1) Las funciones $a_i(x)$ son no-constantes, Hölder continua de parámetro $\alpha \in (0,1)$ hasta el borde.

Los coeficientes de difusión cruzada y autodifusión $\rho_{ij} = \rho_{ij}(x), 1 \leq i,j \leq 2$, satisfacen las siguientes condiciones de regularidad y compatibilidad respectivamente

(ρ1) $\rho_{ij} \in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\rho_{ij}(x) \geq 0$ en $\bar{\Omega}$, $\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n}(x) = 0$ en $\partial\Omega$ para $(1 \leq i,j \leq 2)$.

Análogamente las condiciones iniciales $W_i = W_i(x), i = 1,2$ satisfacen

(W1) $W_i \in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $W_i = W_i(x) \geq 0$ en $\bar{\Omega}$, $\frac{\partial W_i}{\partial n}(x) = 0$ en $\partial\Omega$ para $(1 \leq i \leq 2)$.

Definición 2.1. *Diremos que un par de funciones* (u, v) *es solución clásica del sistema (2.1) si* $(u, v) \in (C^2(\bar{\Omega} \times [0, T)))^2$ *con condición de borde Neumann,* $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \Delta u, \Delta v \in C(\bar{\Omega} \times (0, T))$ *y las ecuaciones de (2.1) se cumplen puntualmente.*

Definición 2.2. *Una solución del sistema (2.1) con* $T = \infty$ *se denomina solución global.*

En este sistema u, v son dos funciones no-negativas que representan las densidades de población de dos especies que compiten en un medio aislado, μ corresponde a la tasa de difusión, $a_1(x), a_2(x)$ representan el crecimiento intrínseco de cada población, las funciones ρ_{ii} para $1 \leq i \leq 2$ modelan auto-difusión y las funciones ρ_{ij} para $(1 \leq i, j \leq 2, i \neq j)$ modelan difusión cruzada.

El resultado principal de este capítulo es el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *Sea* $\alpha \in (0, 1), m, M \in \mathbb{R}$ *con* $0 < m \leq M$. *Existe* $\varepsilon > 0$ *pequeño tal que el sistema (2.1) tiene una única solución global para*

$$b_1, b_2, c_1, c_2, \in [m, M], \quad \mu \in [m, M], \quad \tau \in (0, \varepsilon], \quad |a|_\alpha \leq M$$

y para cualquier condición inicial no-negativa W_i *satisfaciendo*

$$|W_i|_{2,\alpha} \leq M \text{ para } (1 \leq i \leq 2).$$

El número ε *depende de* $\Omega, \alpha, m, M, \tau$.

Para probar este resultado, obtendremos primero cotas a priori de tipo Schauder para la solución de una ecuación parabólica semilineal. Luego usando el teorema del punto fijo de Schauder demostraremos existencia de solución para el sistema (2.1) para $T \in (0, \infty)$ y mediante un argumento de prolongación única demostraremos la existencia y la unicidad de solución global para (2.1).

2.2. Notación

Para $x \in \mathbb{R}^N$ y $\sigma > 0$ denotaremos por $B_\sigma(x) := \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| < \sigma\}$ a la bola de centro x y de radio σ, $|\cdot|$ denota la norma euclideana de $\mathbb{R}^N$.
Para $D \subset \mathbb{R}^N, \bar{D}$ denota la clausura de D y ∂D la frontera de D, en la topología usual de $\mathbb{R}^N$. Si $f : D \to \mathbb{R}$ entonces

$$|f|_0 = \sup\{|f(x)| : x \in A\}.$$

Para $\alpha \in (0, 1)$ definimos

$$\begin{aligned} |f|_{0,\alpha} &:= |f|_0 + \sup\left\{\frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|^\alpha} : x, x' \in D, x \neq x'\right\} \text{ y el espacio de funciones} \\ C_{0,\alpha}(D) &:= \{f : D \to \mathbb{R} : |f|_{0,\alpha} < \infty\}. \end{aligned}$$

Para $k \in \{1, ..., N\}$ denotamos $D_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ a las derivadas parciales de f. Definimos la derivada $D_{k_1} ... D_{k_i} f$ mediante iteración.

Los espacios de funciones $C^m(D), C^m(\bar{D})$ para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ se definen de manera usual.
Si $f \in C^2(\bar{D}), \alpha \in (0,1)$ definimos

$$\begin{aligned}
|f|_2 &:= |f|_0 + \sum_{k=1}^{N} |D_k f|_0 + \sum_{k,m=1}^{N} |D_k D_m f|_0 , \\
|f|_{2,\alpha} &:= |f|_{0,\alpha} + \sum_{k=1}^{N} |D_k f|_{0,\alpha} + \sum_{k,m=1}^{N} |D_k D_m f|_{0,\alpha} , \text{ y el conjunto} \\
C_{2,\alpha}(D) &:= \{f \in C^2(D) : |f|_{2,\alpha} < \infty\}.
\end{aligned}$$

Sea $E \subset \mathbb{R}^{N+1}$, las primeras N componentes de $z \in E$ denotarán las componentes espaciales, mientras que la última denotará la componente temporal, así $z = (x,t)$ donde la variable $x \in \mathbb{R}^N$ denota la variable espacial y $t \in \mathbb{R}$ la variable temporal, en este contexto, dada $\alpha \in (0,1)$ y $u : E \to \mathbb{R}$ definimos

$$\begin{aligned}
|u|_\alpha &:= |u|_0 + \sup\left\{ \frac{|u(x,s) - u(x',s')|}{(|x-x'|^2 + |s-s'|)^{\alpha/2}} : (x,s),(x',s') \in E, (x,s) \neq (x',s') \right\}, \\
C_\alpha(E) &:= \{u : E \to \mathbb{R} : |u|_\alpha < \infty\}.
\end{aligned}$$

Para esta norma tenemos las siguientes desigualdades. Dadas $u, \tilde{u} \in C_\alpha(E)$ entonces

$$|u\tilde{u}|_\alpha \leq |u|_0 |\tilde{u}|_\alpha + |u|_\alpha |\tilde{u}|_0 ,$$

y para $\rho \in C_{0,\alpha}(D)$ tenemos

$$|\rho u|_\alpha \leq |\rho|_{0,\alpha} |u|_0 + |\rho|_0 |u|_\alpha .$$

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{N+1}$, si $v : U \to \mathbb{R}$ o $v : \bar{U} \to \mathbb{R}$ es una función tal que $D_1 v, ..., D_N v$ existe, definiremos el gradiente y el laplaciano de v considerando solo las derivadas espaciales, es decir

$$\nabla v := (D_1 v, ..., D_N v) \quad \text{ y } \quad \Delta v := \sum_{i=1}^{N} D_i D_i v,$$

Denotaremos por $C^{2,1}(U)$ al conjunto de funciones $v : U \to \mathbb{R}$ tales que $D_k v, D_m D_k v$ para $(1 \leq k, m \leq N)$ y $\frac{\partial v}{\partial t}$ existe y es continua.
Sea $\alpha \in (0,1)$, si $v \in C^{2,1}(U)$, definimos

$$\begin{aligned}
|v|_{2+\alpha} &:= |v|_\alpha + \sum_{i=1}^{N} |D_i v|_\alpha + \sum_{i,j=1}^{N} |D_i D_j v|_\alpha + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|_\alpha , \\
C_{2+\alpha}(U) &:= \{u \in C^0(U) : u\,|_U \in C^{2,1}(U), |u|_{2+\alpha} < \infty\}.
\end{aligned}$$

Tenemos que $C_{2+\alpha}(U)$ con la norma $|\cdot|_{2+\alpha}$ es un espacio de Banach. Para $\alpha, \beta \in (0,1)$ con $\alpha < \beta$ y U acotado, la inclusión de $C_{2+\beta}(U)$ en $C_{2+\alpha}(U)$ es compacta (ver [10]).

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, conexo y acotado de frontera $\partial\Omega$ suave de clase C^3, denotaremos por n la normal exterior a $\partial\Omega$.

Definimos el cilindro $Z_T := \Omega \times (0,T)$, definimos también su frontera $S_T := \partial\Omega \times [0,T]$.

Para $f \in C^1(\bar{\Omega})$ y n normal unitaria exterior unitaria de Ω, denotamos por $\frac{\partial f}{\partial n}$ su derivada normal.

2.3. Resultados preliminares

Para obtener las cotas a priori necesarias para demostrar el teorema 2.1, utilizamos resultados del artículo [7], los cuales enunciamos a continuación.

Este primer teorema nos entrega estimaciones en $C_\alpha(\cdot)$ y en $C_{2+\alpha}(\cdot)$ para el siguiente problema parabólico lineal

$$\begin{cases} a\Delta u + \sum_{i,j=1}^N b_i D_i u + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = f \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,s) = 0 \quad (x,s) \in S_T, \\ u(x,0) = \psi(x) \quad x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Teorema 2.2. *(**Teorema 3.1** [7]) Existe una función $K_\Omega : (0,1) \times (0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ con la siguiente propiedad:*

1) *Para $\alpha \in (0,1)$, $K_1 \geq K_2 > 0$, $T \in (0,\infty)$, $a, b_i, c, f \in C_\alpha(\bar{Z}_T)$, $\psi \in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $u \in C^{2,1}(\bar{Z}_T)$, con $|a|_\alpha \leq K_1$, $|b_i|_0 \leq K_1$ $(1 \leq i \leq N)$, $|c|_0 \leq K_1$, $a(x,s) \geq K_2$ para $(x,s) \in \bar{Z}_T$.*
   Si u es solución de (2.2) entonces
   $$|u|_\alpha \leq K_\Omega(\alpha, K_1, K_2)(|f|_0 + |\psi|_2 + |u|_0).$$
   Además existe una función $L_\Omega : (0,1) \times (0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ con la siguiente propiedad:

2) *Sea $\alpha, K_1, K_2, T, a, b_i, c, f, \psi, u$ dados como en (1), pero reemplazando la condición $|b_i|_0, |c|_0 \leq K_1$ por otra más fuerte $|b_i|_\alpha, |c|_\alpha \leq K_1$.*
   Entonces
   $$|u|_{2+\alpha} \leq L_\Omega(\alpha, K_1, K_2)(|f|_0 + |\psi|_{2,\alpha} + |u|_0).$$

Los siguientes resultados establecen el Principio del Máximo fuerte y el Lema de Hopf para el operador L y u satisfaciendo la siguiente desigualdad

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x,t) D_i D_j u + \sum_{i=1}^N b_i(x,t) D_i u + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0, \tag{2.3}$$

donde los coeficientes $a_{ij}(x,s)$ para $(1 \leq i,j \leq N)$ satisfacen la siguiente condición de elipticidad, existe $m > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \geq m|\xi|^2 \quad (x,s) \in \bar{Z}_T, \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

Esta condición la llamaremos (2.4) para la constante m.

Vamos a enunciar el principio del máximo y el lema de Hopf para este operador en el caso en que $c(x,t) \equiv 0$:

Teorema 2.3. ***(Principio del máximo fuerte)*** *Supongamos que los coeficientes de L estan acotados en Z_T y supongamos que el máximo M de u se alcanza en algún punto de Z_T entonces u es constante en Z_T e igual a M.*

Teorema 2.4. ***(Lema de Hopf)****Supongamos que los coeficientes de L estan acotados en Z_T, que el máximo M de u se alcanza en algún punto $(\bar{x},\bar{t})$ de S_T y que este punto satisface la condición de esfera interior, entonces $\frac{\partial u}{\partial n}(\bar{x},\bar{t}) > 0$.*

Ahora tenemos las siguientes extensiones para el caso en que c no es idénticamente nula

Teorema 2.5. ***(Teorema 3.2** [7])* *Sea T, m reales positivos, $a_{ij}, b_i, c \in C^0(\bar{Z}_T)$ con $a_{ij} = a_{ji}$ para $(1 \leq i,j \leq N)$ satisfaciendo (2.4) para la constante m. Sea $u \in C^{2,1}(\bar{Z}_T)$ con $\max u > 0$ y u satisfaciendo (2.3), supongamos además que*

1) Existen elementos $x_0 \in \partial\Omega, t_0 \in (0,T]$ tal que $u(x_0,t_0) = \max u$, $u(x,s) < \max u$ para $(x,s) \in (\bar{\Omega} \times [0,t_0)) \cup (\Omega \times \{t_0\})$.

2) Existen elementos $\sigma > 0, s_0 \in [0,t_0)$ con $c(x,s) \leq 0$ para $(x,s) \in \overline{\Omega \cap B_\sigma(x_0)} \times [s_0,t_0]$. Entonces se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0,t_0) > 0.$$

Corolario 2.6. ***(Corolario 3.1** [7])* *Sea $T, m \in (0,\infty), a_{ij}, b_i, c \in C^0(\bar{Z}_T)$ con $a_{ij} = a_{ji}$ $(1 \leq i,j \leq N)$ satisfaciendo (2.4) para la constante m. Supongamos que $c \leq 0$ en $\bar{Z}_T$ y sea $u \in C^{2,1}(\bar{Z}_T)$ satisfaciendo (2.3) con $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0 \quad$ para $(x,t) \in S_T$. Entonces*

$$\max u \leq \max(\{0\} \cup \{u(x,0) : x \in \bar{\Omega}\}).$$

Corolario 2.7. ***(Corolario 3.2** [7])* *Sea $T, m, a_{ij}, b_i, (1 \leq i,j \leq 2)$ dados como en el corolario 2.6, pero sin la condición $c \leq 0$, u satisfaciendo (2.3) con $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0 \quad$ para $(x,t) \in S_T$, entonces*

$$\max u \leq \max(\{0\} \cup \{u(x,0)e^{|c|_0 T} : x \in \bar{\Omega}\}).$$

El siguiente teorema entrega cotas a priori para la solución de un problema un poco más general que el que estamos estudiando pero que utilizaremos más adelante:

Teorema 2.8. ***(Teorema A** [7])* *Sea $\alpha \in (0,1), 0 < K_2 \leq K_1, T \in (0,\infty)$ fijos. Entonces existe una constante $Q(\alpha, K_1, K_2, \Omega, T) > 0$ con las siguientes propiedades:*
Si $a_{ij}, b_i, c, f \in C_\alpha(\bar{Z}_T), \psi \in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfacen

$$a_{ij} = a_{ji}, |a_{ij}|_\alpha, |b_i|_0, |c|_0 \quad \leq \quad K_1 \quad (1 \leq i,j \leq N),$$

junto con la condición (2.4) para la constante K_2 y u es solución de

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_i D_j u + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i u &+ cu - \frac{\partial u}{\partial t} = f \quad \text{en } Z_T, \\ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,s) D_i u(x,s) n_j(x) &= 0 \quad (x,s) \in S_T, \\ u(x,0) &= \psi(x) \quad x \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Entonces

$$|u|_\alpha \le Q(|\psi|_2 + |f|_0).$$

Nota 2.9. *Algunas de las hipótesis en este teorema son más fuertes de lo necesario, por ejemplo, podríamos debilitar la regularidad en la condición inicial.*

Una extensión del siguiente teorema nos permitirá demostrar existencia de una ecuación no-lineal.

Teorema 2.10. ***(Teorema B** [7]) Sea $\alpha \in (0,1), d, m, B, T > 0, a, b_i, c \in C_\alpha(\bar{Z}_T)$ con $a(x,s) \ge m$ para $(x,s) \in \bar{Z}_T$. Sea $\psi \in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ con $\frac{\partial \psi}{\partial n}(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$.
Entonces existe una función $u \in C_{2+\alpha}(\bar{Z}_T)$ con*

$$\begin{aligned} a\Delta u + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i u + cu - \frac{\partial u}{\partial t} &= d \min\{B, u^2\} \quad \text{en } Z_T, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,s) = 0 \quad (x,s) \in S_T, \quad u(x,0) &= \psi(x) \quad (x \in \bar{\Omega}). \end{aligned}$$

El siguiente resultado es una generalización del teorema 2.10 y es el que utilizaremos

Teorema 2.11. *Sea $\alpha, d, m, B, T, a, b_i, c, \psi$ como en el teorema 2.10 y consideremos $g \in C_\alpha(\bar{\Omega})$, no negativa.
Entonces existe $u \in C_{2+\alpha}(\bar{Z}_T)$ con*

$$a\Delta u + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i u + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = g \min\{B, u^2\}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,s) = 0 \quad (x,s) \in S_T, u(x,0) = \psi(x) \quad (x \in \bar{\Omega}). \tag{2.6}$$

Nota 2.12. *La demostración de este teorema resume los elementos que utilizaremos en este capítulo, se trata de demostrar existencia para un problema semilineal para demostrar después, vía un argumento de punto fijo, la existencia de solución para el problema no-lineal.*

Antes de hacer la demostración de este teorema, vamos a enunciar un resultado clásico que es la base de los argumentos de existencia de este capítulo, para ello utilizamos la siguiente notación, definimos el operador L por

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t) D_i D_j u + \sum_{i=1}^{N} a_i(x,t) D_i u + a(x,t) u.$$

Donde L es uniformemente parabólico y se considera el problema

$$\begin{cases} Lu \quad = f \quad \text{en } Z_T, \\ u\,|_{t=0} = \psi(x) \quad \text{en } \Omega, \\ Bu\,|_{S_T} \equiv \sum_{i=1}^N b_i(x,t) D_i u + b(x,t) u\,|_{S_T} = \varphi(x,t) \quad \text{en } S_T. \end{cases}$$

Supongamos que las funciones $b_i(x,t)$ satisfacen la condición

$$\left| \sum_{i=1}^N b_i(x,t) n_i(x) \right| \geq \delta > 0.$$

y que la función ψ es compatible con la condición de borde φ, es decir

$$B\psi\,|_{S_T} = \varphi \quad \text{en } S_T.$$

A continuación enunciamos una versión particular del teorema IV.5.3 de [15]

Teorema 2.13. ***(Teorema IV.5.3 para** $l \in (0,1)$ **[15])*** *Sea $\partial\Omega$ de clase $C_{2,l}$, los coeficientes del operador L a la clase $C_l(\bar{Z}_T)$ y por último, $b_i, b \in C_{1+l}(S_T)$. Entonces para cualquier $f \in C_l(\bar{Z}_T), \varphi \in C_{2,\delta}(\bar{\Omega}), \psi \in C_{1+\delta}(S_T)$, satisfaciendo las condiciones de compatibilidad de orden $\lceil (l+1)/2 \rceil$, el problema anterior tiene una única solución de clase $C_{2+l}(\bar{Z}_T)$, con*

$$|u|_{2+l} \leq c(|f|_l + |\varphi|_{2,l} + |\psi|_{1+l}).$$

Demostración del Teorema 2.11. Para cualquier $v \in C_\alpha(\bar{Z}_T)$, por el teorema (2.13) existe una única función $w = Sv \in C_{2+\alpha}(\bar{Z}_T)$ tal que

$$\begin{aligned} a\Delta w + \sum_{i=1}^N b_i D_i w + cw - \frac{\partial w}{\partial t} \quad &= \quad g \min\{B, v^2\}, \\ \frac{\partial w}{\partial n}(x,s) = 0 \quad (x,s) \in S_T, \quad w(x,0) \quad &= \quad \psi(x) \quad (x \in \bar{\Omega}), \end{aligned}$$

definimos el operador $S : C_{2+\alpha}(\bar{Z}_T) \to C_{2+\alpha}(\bar{Z}_T)$ y tenemos que existe una constante $M_1 > 0$ con

$$\begin{aligned} |Sv|_{2+\alpha} \quad &\leq \quad M_1(|\psi|_{2,\alpha} + \left| g \min\{B, v^2\} \right|_\alpha), \\ &\leq \quad M_1(|\psi|_{2,\alpha} + \left| g v^2 \right|_\alpha), \\ &\leq \quad M_1(|\psi|_{2,\alpha} + 2\,|g|_{0,\alpha}\,|v|_\alpha^2). \end{aligned}$$

Por el teorema 2.8 existe una constante $M_2 > 0$ tal que para $v \in C_\alpha(\bar{Z}_T)$

$$|Sv|_\alpha \leq M_2(|\psi|_2 + \left| g \min\{B, v^2\} \right|_0).$$

Definiendo $M_3 := M_2(|\psi|_2 + B\,|g|_0)$ se tiene que

$$|Sv|_\alpha \leq M_3 \text{ para } v \in C_\alpha(\bar{Z}_T).$$

Sea

$$W := \{v \in C_{2+\alpha}(\bar{Z}_T) : |v|_\alpha \leq M_3, |v|_{2+\alpha} \leq M_1(|\psi|_{2+\alpha} + 2\,|g|_{0,\alpha}\, M_3^2)\} \hookrightarrow C_\alpha(\bar{Z}_T),$$

el cual, al ser visto por medio de la inyección compacta en $C_\alpha(\bar{Z}_T)$ como un subconjunto de $C_\alpha(\bar{Z}_T)$, es un convexo compacto de $C_\alpha(\bar{Z}_T)$.
La restricción del operador $S\,|_W: W \to W$ es continua, para probarlo consideremos $v, h \in W$ tales que $|v-h|_\alpha < e_1$, entonces $S(v) - S(h)$ satisface

$$\begin{aligned} a\Delta(S(v)-S(h)) + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i(S(v)-S(h)) &+ c(S(v)-S(h)) - \frac{\partial(S(v)-S(h))}{\partial t} \\ &= g(\text{mín}\{B, v^2\} - \text{mín}\{B, h^2\}) \quad \text{en } Z_T, \\ \frac{\partial(S(v)-S(h))}{\partial n}(x,s) &= 0 \quad (x,s) \in S_T, \\ (S(v)-S(h))(x,0) &= 0 \quad (x \in \bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema 2.8 a la función $S(v) - S(h)$ y tenemos que

$$\begin{aligned} |S(v)-S(h)|_\alpha &\leq Q\left|g(\text{mín}\{B, v^2\} - \text{mín}\{B, h^2\})\right|_0, \\ &\leq 2Q\,|g|_0\,|v+h|_0\,|v-h|_0\,. \end{aligned}$$

Lo que prueba la continuidad de $S\,|_W$.

Aplicando ahora el teorema de punto fijo de Schauder tenemos que existe $u \in W$ tal que $Su = u$, esta función resuelve (2.5). ■

2.4. Existencia de solución del sistema no-estacionario para tiempo finito

Para demostrar existencia de solución del sistema (2.1) empezaremos demostrando existencia y unicidad para la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mu\Delta[(1+\tau(\rho_1 u + \rho_2 v))u] + (a - bu - cv)u \quad \text{en } Z_T, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0 \quad \text{en } S_T, \\ u(x,0) = \psi(x) \geq 0 \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

consideramos a v como una función fija, ρ_1, ρ_2, a, ψ satisfacen las condiciones (A1), (ρ1) y (W1) respectivamente, μ, τ, b_1, c_1, son constantes positivas.
La existencia la demostraremos vía un argumento de punto fijo. La unicidad la demostraremos por contradicción suponiendo que existen dos funciones que satisfacen la ecuación y calculando que ecuación satisface la resta de estas soluciones.

2.4. Existencia de solución del sistema no-estacionario para tiempo finito

Observemos que

$$\begin{aligned}\mu\Delta[(1+\tau(\rho_1 u+\rho_2 v))u] &= \mu\Delta u+\mu\tau\{(\rho_1 u+\rho_2 v)\Delta u+2\nabla(\rho_1 u+\rho_2 v)\nabla u\\ &+ u\Delta(\rho_1 u+\rho_2 v)\},\\ &= \mu(1+\tau(2\rho_1 u+\rho_2 v))\Delta u+2\mu\tau(u\nabla\rho_1+\nabla(\rho_1 u+\rho_2 v))\\ &+ \mu\tau\Delta(\rho_2 v)+\mu\tau u^2\Delta\rho_1,\end{aligned}$$

por lo que se obtiene

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=\mu(1+\tau(2\rho_1 u+\rho_2 v))\Delta u+2\mu\tau(u\nabla\rho_1+\nabla(\rho_1 u+\rho_2 v))\nabla u\\ \quad+(\mu\tau\Delta(\rho_2 v)+a-(b-\mu\tau\Delta\rho_1)u-cv)u \quad \text{en } Z_T,\\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,t)=0 \quad \text{en } S_T,\\ u(x,0)=\psi(x)\geq 0 \quad \text{en } \Omega.\end{cases} \tag{2.8}$$

Buscamos solución para la ecuación (2.8), como se trata de una ecuación no-lineal en el laplaciano utilizaremos un argumento de punto fijo para resolverlo.
Sea $w=S_1(u,v)$ solución de

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial t}=\mu(1+\tau(\rho_1 u+\rho_2 v))\Delta w+2\mu\tau(u\nabla\rho_1+\nabla(\rho_1 u+\rho_2 v))\nabla w\\ \quad+(\mu\tau\Delta(\rho_2 v)+a-(b-\mu\tau\Delta\rho_1)w-cv)w \text{ en } Z_T,\\ w(x,0)=\psi(x)\geq 0 \quad \text{en } \Omega,\\ \frac{\partial w}{\partial n}(x,t)=0 \quad \text{en } S_T.\end{cases} \tag{2.9}$$

Suponiendo que existe solución para (2.9) bajo condiciones adecuadas para u,v,μ,τ,ρ_{ij} la función w pertenece a la clase de funciones V, definida por

$$V:=\{h\in C^{2,1}(\bar{Z}_T): 0\leq h\leq R, |h|_\alpha\leq PR, |h|_{2+\alpha}\leq m\},$$

donde las constantes positivas P,R,m las definiremos en el teorema a continuación. Notemos que independiente de la relación que exista entre las constantes positivas P,R,m tenemos que esta clase de funciones es no-vacía.

Teorema 2.14. *Sea $\alpha\in(0,1), m,M\in\mathbb{R}, 0<m\leq M$ y sea*

$$\begin{aligned}P &:= P(\alpha,m,M)=2K_\Omega(\alpha,M+2mM+4M^2,m),\\ R &:= R(\alpha,m,M)=\frac{m}{L_\Omega(\alpha,M+2mM,M)[M(M+4MP+1/2)+2]}.\end{aligned}$$

Donde las funciones K_Ω, L_Ω fueron definidas en el teorema 2.2.
Sea $b,c\in[\frac{mM}{R},\frac{M^2}{R}]$, a,ρ_1,ρ_2,ψ satisfaciendo (A1), (ρ1) y (W1) respectivamente, junto con las siguientes cotas

$$|a|_\alpha\leq mM/4, \quad |\psi|_{2,\alpha}\leq R, \quad \tau(R+1)(|\rho_1|_{2,\alpha}+|\rho_2|_{2,\alpha})\leq 1/24.$$

Sea $T\in[1,\infty), u,v\in V$. Supongamos que $w\in C^{2,1}(\bar{Z}_T)$ es solución de (2.9), entonces:

$$0\leq w\leq R.$$

Demostración. Sea $T < \infty, u, v \in V$ y w solución de (2.9). Procederemos por contradicción, es decir, supongamos que $\max_{\bar{Z}_T} w > R$.
Observemos que las funciones

$\mu(1 + \tau(2\rho_1 u + \rho_2 v)), 2\mu\tau(uD_i\rho_1 + D_i(\rho_1 u + \rho_2 v))$ y
$\mu\tau(\rho_2\Delta v + 2\nabla\rho_2\nabla v) + a - (b - \mu\tau\Delta\rho_1)w - (c - \mu\tau\Delta\rho_2)v \quad \in C^0(\bar{Z}_T) \quad$ para $1 \leq i \leq N$,

además como $\mu(1 + \tau(2\rho_1 u + \rho_2 v)) \geq \mu > 0$ y $w(x, 0) = \psi(x) \geq 0$ para $x \in \Omega$, se sigue del colorario 2.6 que $w \geq 0$.
Entonces $\psi \leq R < \max w$, así:

$$t_1 := \sup\{r \in [0, T] : w(x, s) < \max w \text{ para } (x, s) \in \bar{Z}_r\},$$

corresponde al primer instante en que w alcanza el máximo, está bien definido, con $t_1 > 0$, luego existe $x_0 \in \bar{\Omega}$ con $w(x_0, t_1) = \max w$.
Es fácil ver que por los acotamientos de la hipótesis se tiene

$$(\mu\tau(\rho_2\Delta v + 2\nabla\rho_2\nabla v) + a - (b - \mu\tau\Delta\rho_1)w - (c - \mu\tau\Delta\rho_2)v)(x_0, t_1) < 0, \tag{2.10}$$

en efecto, como

$$w(x_0, t_1) > R, \quad |v|_{2+\alpha} \leq m, \quad b - \mu\tau\Delta\rho_1 \geq b/2, \quad c - \mu\tau\Delta\rho_2 \geq c/2.$$

y además

$$\begin{aligned}
|\rho_2\Delta v + 2\nabla\rho_2\nabla v|_0 &\leq |\rho_2\Delta v|_0 + 2\,|\nabla\rho_2\nabla v|_0\,,\\
&\leq |\rho_2|_0\,|v|_{2+\alpha} + 2\,|\rho_2|_{2,\alpha}\,|v|_{2+\alpha}\,,\\
&\leq 3\,|\rho_2|_{2,\alpha}\,|v|_{2+\alpha}
\end{aligned}$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
(\mu\tau(\rho_2\Delta v + 2\nabla\rho_2\nabla v) + a - (b - \mu\tau\Delta\rho_1)w - (c - \mu\tau\Delta\rho_2)v)(x_0, t_1) &< mM/2 + mM/2\\
&\quad -bR/2 - cR/2,\\
&< mM - mM\\
&< 0.
\end{aligned}$$

Supongamos que $w(x, t_1) < \max w$ para $x \in \Omega$, entonces $x_0 \in \partial\Omega$ y existe $\sigma > 0, \tilde{t} \in [0, t_1)$ tal que

$$(\mu\tau(2\nabla\rho_2\nabla v + \rho_2\Delta v) + a - (b - \mu\tau\Delta\rho_1)w - (c - \mu\tau\Delta\rho_2)v)(x, s) < 0 \quad (x, s) \in \Omega \cap \bar{B}_\sigma(x_0) \times [\tilde{t}, t_1].$$

Por lo que podemos aplicar el teorema 2.5 y obtenemos que

$$\frac{\partial w}{\partial n}(x_0, t_1) > 0,$$

lo que contradice las propiedades de w.

Ahora consideremos el caso $w(x', t_1) = \text{máx}\, w$ para algún $x' \in \Omega$. Por (2.10), se puede fijar $\varepsilon > 0, \tilde{t} \in [0, t_1)$ con $\bar{B}_\varepsilon(x') \subset \Omega$ y

$$(\mu\tau\Delta(\rho_2 v) + a - (b - \mu\tau\Delta\rho_1)w - cv)(x,s) \mid \bar{B}_\varepsilon(x') \times [\tilde{t}, t_1] < 0.$$

Con lo que tenemos que el operador lineal parabólico

$$Lw = g\Delta w + \nabla h \nabla w - \frac{\partial w}{\partial t} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial n} \geq 0,$$

con g función positiva continua hasta el borde de Ω, satisface el Principio del máximo para ecuaciones parabólicas lineales, es decir,

$$w(x,s) = \text{máx}\, w \quad \text{para } (x,s) \in \bar{B}_\varepsilon(x') \times [\tilde{t}, t_1].$$

Lo que contradice la definición de t_1. ■

Esto prueba que si w es solución de (2.9) bajo las condiciones mencionadas, se tiene que $0 \leq w \leq R$.

Una vez probada la cota anterior, se obtiene que la existencia de una solución $w \in C_{2+\alpha}(\bar{Z}_T)$ de (2.9) se puede demostrar considerando, por ejemplo, el siguiente problema de condiciones iniciales y de borde

$$\begin{cases} \mu(1 + \tau(2\rho_1 u + \rho_2 v))\Delta w + 2\mu\tau(u\nabla\rho_1 + \nabla(\rho_1 u + \rho_2 v))\nabla w \\ +(\mu\tau\Delta(\rho_2 v) + a - cv)w - \frac{\partial w}{\partial t} = g\,\text{mín}\{w^2, (R+1)^2\} \quad \text{en } Z_T, \\ w(x,0) = \psi(x) \geq 0 \quad \text{en } \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial n}(x,s) = 0 \quad \text{en } S_T, \end{cases} \tag{2.11}$$

donde $g = g(x) = b + \mu\tau\Delta\rho_1(x) > 0$ en Ω.

El problema (2.11) tiene solución $w \in C_{2+\alpha}(\bar{Z}_T)$ se puede ver en el teorema 2.11 de la parte preliminar. Lo que agregado a la cota a priori anterior prueba que el sistema (2.9) tiene solución, es decir, una solución de (2.11) gracias a la cota a priori, es también una solución de (2.9).

En efecto, consideremos una solución w de (2.11) y $\mu, \tau, a, c, b, \rho_i, u, v, \psi$ como en el teorema anterior, el mismo argumento de la demostración se puede aplicar para obtener

$$0 \leq w \leq R,$$

lo que prueba que una solución de (2.11) es una solución de (2.9).

La unicidad de esta solución, en la clase de las funciones $C^{2,1}(\bar{Z}_T)$, está dada por el corolario 2.7, en efecto, sean soluciones w_1 y w_2 soluciones de (2.9), la resta $\varphi = w_1 - w_2$ satisface

$$\begin{cases} \mu(1 + \tau(2\rho_1 u + \rho_2 v))\Delta\varphi + 2\mu\tau(u\nabla\rho_1 + \nabla(\rho_1 u + \rho_2 v))\nabla\varphi \\ +(\mu\tau\rho_2\Delta v + a - cv)\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = (b - \mu\tau\Delta\rho_1)(w_1^2 - w_2^2) \quad \text{en } Z_T, \\ \varphi(x,0) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}(x,s) = 0 \quad \text{en } S_T, \end{cases} \tag{2.12}$$

podemos reescribir la ecuación anterior para dejar al lado derecho una función con signo:

$$\begin{aligned}\mu(1+\tau(2\rho_1 u+\rho_2 v))\Delta\varphi+2\mu\tau(u\nabla\rho_1 &+ \nabla(\rho_1 u+\rho_2 v))\nabla\varphi\\ +(\mu\tau\rho_2\Delta v+a-cv-2(b-\mu\tau\Delta\rho_1)w_2)\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= (b-\mu\tau\Delta\rho_1)\varphi^2 \quad \text{en } Z_T,\end{aligned}$$

por lo que usando el corolario 2.7 se tiene que $\max w\le 0$. Análogamente se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu(1+\tau(2\rho_1 u+\rho_2 v))\Delta\varphi+2\mu\tau(u\nabla\rho_1 &+ \nabla(\rho_1 u+\rho_2 v))\nabla\varphi\\ +(\mu\tau\rho_2\Delta v+a-cv-2(b-\mu\tau\Delta\rho_1)w_1)\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= -(b-\mu\tau\Delta\rho_1)\varphi^2 \quad \text{en } Z_T,\end{aligned}$$

Luego $\min w\ge 0$, lo que prueba que $w\equiv 0$.

Los teoremas que vienen a continuación establecen cotas tipo Schauder para la solción de (2.9).

Teorema 2.15. *Sea $\alpha,m,M,\tau,\rho_1,\rho_2,\psi,a,b,c$ como en el teorema 2.14. Entonces la única solución $w\in C^{2,1}(\bar{Z}_T)$ de (2.9) satisface:*

$$|w|_\alpha\le PR,\quad |w|_{2+\alpha}\le m.$$

Donde $P\equiv P(\alpha,m,M),R\equiv R(\alpha,m,M)$ se definieron en el teorema 2.14.

Demostración. Notando que $0\le w\le R$ se tiene

$$\begin{aligned}|\mu(1+\tau(2\rho_1 u+\rho_2 v))|_\alpha &\le \mu+2\mu\tau(|\rho_1 u|_\alpha+|\rho_2 v|_\alpha),\\ &\le M+2\tau M(|\rho_1|_\alpha|u|_0+|\rho_1|_0|u|_\alpha+|\rho_2|_\alpha|v|_0+|\rho_2|_0|u|_\alpha),\\ &\le M+6\tau mM(|\rho_1|_\alpha+|\rho_2|_\alpha);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|2\mu\tau(uD_i\rho_1+D_i(\rho_1 u+\rho_2 v))|_0 &\le 2\tau M\,|2uD_i\rho_1+\rho_1 D_i u+\rho_2 D_i v+vD_i\rho_2|_0\,,\\ &\le 2\tau M(2(|u|_0|D_i\rho_1|_0+|v|_0|D_i\rho_2|_0)+\rho_1|D_i u|_0+\rho_2|D_i v|_0),\\ &\le 4\tau mM(|\rho_1|_2+|\rho_2|_2)\le mM;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|\mu\tau(\rho_2\Delta v+2\nabla\rho_2\nabla v)+a-(b-\mu\tau\Delta\rho_1)w-(c-\mu\tau\Delta\rho_2)v|_0\\ &\qquad\le \tau M\,|\rho_2\Delta v+2\nabla\rho_2\nabla v|_0+|a|_0+2b\,|w|_0+2c\,|v|_0\,,\\ &\qquad\le \tau M\,|\rho_2\Delta v|_0+|a|_0+2\tau M\,|\nabla\rho_2\nabla v|_0+2bR+2cR,\\ &\qquad\le 4\tau mM\,|\rho_2|_2+|a|_0+2bR+2cR,\end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}|\mu(1+\tau(2\rho_1 u+\rho_2))|_\alpha\,,|2\mu\tau(uD_i\rho_1+D_i(\rho_1 u+\rho_2 v))|_0 &\quad (1\le i\le N),\\ |\mu\tau(\rho_2\Delta v+2\nabla\rho_2\nabla v)+a-(b-\mu\tau\Delta\rho_1)w-(c-\mu\tau\Delta\rho_2)v|_0 &\le M+2mM+4M^2,\\ m &\le \mu(1+\tau(2\rho_1 u+\rho_2 v)).\end{aligned}$$

2.4. Existencia de solución del sistema no-estacionario para tiempo finito

Recordemos que w resuelve (2.9) luego por el teorema 2.2, tenemos que:

$$|w|_\alpha \leq K_\Omega(\alpha, M + 2mM + 4M^2, m)(|\psi|_2 + |w|_0).$$

Así definimos $P := P(\alpha, m, M) = 2K_\Omega(\alpha, M + 2mM + 4M^2, m)(|\psi|_2 + |w|_0)$ y usamos que:

$$|\psi|_2 \leq |\psi|_{2,\alpha} \leq R, \quad |w|_0 \leq R,$$

para obtener

$$|w|_\alpha \leq PR.$$

Además tenemos que:

$$\begin{aligned}
|2\mu\tau(uD_i\rho_1 + D_i(\rho_1 u + \rho_2 v))|_\alpha &\leq 2\tau M(2\,|uD_i\rho_1|_\alpha + |\rho_1 D_i u|_\alpha + |\rho_2 D_i v|_\alpha + |vD_i\rho_2|_\alpha),\\
&\leq 4\tau M(|u|_\alpha\,|D_i\rho_1|_0 + |u|_0\,|D_i\rho_1|_{0,\alpha} + |\rho_1|_{0,\alpha}\,|D_i u|_0\\
&+ |\rho_1|_0\,|D_i u|_\alpha + |\rho_2|_0\,|D_i v|_\alpha + |\rho_2|_{0,\alpha}\,|D_i v|_0\\
&+ |v|_\alpha\,|D_i\rho_2|_0 + |v|_0\,|D_i\rho_2|_{0,\alpha}),\\
&\leq 6\tau mM(|\rho_1|_{2,\alpha} + |\rho_2|_{2,\alpha});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mu\tau(\rho_2\Delta v + 2\nabla\rho_2\nabla v) + a|_\alpha &\leq \tau M(|\rho_2\Delta v|_\alpha + 2\,|\nabla\rho_2\nabla v|_\alpha) + |a|_\alpha\,,\\
&\leq 6\tau mM\,|\rho_2|_{2,\alpha} + |a|_\alpha\,,\\
&\leq 2mM.
\end{aligned}$$

Por lo que se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mu(1 + \tau(2\rho_1 u + \rho_2 v))|_\alpha\,, |2\mu\tau(uD_i\rho_1 + D_i(\rho_1 u + \rho_2 v))|_\alpha\,, |\mu\tau(\rho_2\Delta v + 2\nabla\rho_2\nabla v) + a|_\alpha\,,\\
\leq M + 2mM.
\end{aligned}$$

Esto junto a $\mu(1 + \tau(2\rho_1 u + \rho_2 v)) \geq m$, nos permite concluir utilizando el teorema **??** que

$$|w|_{2+\alpha} \leq L_\Omega(\alpha, M + 2mM, m)(\left|(b - \mu\tau\Delta\rho_1)w^2 + (c - \mu\tau\Delta\rho_2)vw\right|_\alpha + |\psi|_{2,\alpha} + |w|_0).$$

Notando que

$$\begin{aligned}
\left|(b - \mu\tau\Delta\rho_1)w^2\right|_\alpha &\leq |b - \mu\tau\Delta\rho_1|_{0,\alpha}\left|w^2\right|_0 + |b - \mu\tau\Delta\rho_1|_0 + \left|w^2\right|_\alpha\,,\\
&\leq (b - \mu\tau\,|\Delta\rho_1|_{0,\alpha})R^2 + 4b\,|w|_\alpha\,|w|_0\,,\\
&\leq (M^2 + M/2)R + 4M^2 PR,\\
&\leq RM[M + 4MP + 1/2],
\end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned}
\left|(c - \mu\tau\Delta\rho_2)w^2\right|_\alpha &\leq |c - \mu\tau\Delta\rho_2|_{0,\alpha}\left|w^2\right|_0 + |c - \mu\tau\Delta\rho_2|_0 + \left|w^2\right|_\alpha\\
&\leq (c - \mu\tau\,|\Delta\rho_2|_{0,\alpha})R^2 + 4c\,|w|_\alpha\,|w|_0\,,\\
&\leq (M^2 + M/2)R + 4M^2 PR,\\
&\leq RM[M + 4MP + 1/2],
\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}
|w|_{2+\alpha} &\leq \mathcal{F}(2RM[M+4MP+1/2]+|\psi|_{2,\alpha}+|w|_0),\\
&\leq \mathcal{F}(RM[M+4MP+1/2]+2R),\\
&\leq \mathcal{F}R[M(M+4MP+1/2)+2],\\
&\leq m,
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{F}=L_\Omega(\alpha, M+2mM, m)$ y la última desigualdad la obtuvimos de tomar

$$R=\frac{m}{\mathcal{F}[M(M+4MP+1/2)+2]}.$$

Lo que nos permite concluir el resultado. ∎

Antes de demostrar la existencia de la solución del sistema cabe mencionar que la existencia local en el tiempo para este tipo de sistemas fue abordada de manera muy general en cuanto al número de ecuaciones por H. Amann en [1], pero utiliza condiciones de regularidad tipo Sobolev. Ahora demostraremos existencia global de soluciones para el sistema

Teorema 2.16. *Sea* $\alpha\in(0,1), m, M\in\mathbb{R}$ *con*

$$0<m\leq M, b_1, c_2, b_2, c_1\in[\frac{mM}{R},\frac{M^2}{R}], |a_1|_\alpha, |a_2|_\alpha\leq mM/4,$$

ψ_i *satisfaciendo (W1) y los siguientes acotamientos*

$|\psi_i|_{2,\alpha}\leq R\quad(i=1,2), 0<\tau$ *tal que* $\tau(R+1)(|\rho_{11}|_{2,\alpha}+|\rho_{22}|_{2,\alpha}+|\rho_{12}|_{2,\alpha}+|\rho_{21}|_{2,\alpha})\leq 1/24.$

Sea $T\in(0,\infty)$ *fijo, entonces existe una solución* (u,v) *a (2.1) tal que*

$$u, v\in C^{2,1}(\bar{Z}_T),\quad 0\leq u,v\leq R,\quad |u|_\alpha, |v|_\alpha\leq PR,\quad |u|_{2+\alpha}, |v|_{2+\alpha}\leq m.$$

($P\equiv P(\alpha,m,M), R\equiv R(\alpha,m,M)$ *las definimos en el teorema 2.14).*

Demostración. Sea $V:=\{g\in C^{2,1}(\bar{Z}_T): 0\leq g\leq R, |g|_\alpha\leq PR, |g|_{2+\alpha}\leq m\}$,
es un subconjunto compacto, convexo del espacio de Banach $C_{2+\alpha/2}(\bar{Z}_T)$. La compacidad de V en $C_{2+\alpha/2}(\bar{Z}_T)$ viene de la compacidad de la inclusión de $C_{2+\alpha}(\bar{Z}_T)$ en $C_{2+\alpha/2}(\bar{Z}_T)$.
Para $(u,v)\in V\times V$, definimos $w_1=S_1(u,v)\in C^{2,1}(\bar{Z}_T)$ como la solución a la ecuación:

$$\begin{cases}
\frac{\partial w_1}{\partial t}=\mu(1+\tau(2\rho_{11}u+\rho_{12}v))\Delta w_1+2\mu\tau(u\nabla\rho_{11}+\nabla(\rho_{11}u+\rho_{12}v))\nabla w_1\\
\qquad+(\mu\tau\Delta(\rho_{12}v)+a_1-(b_1-\mu\tau\Delta\rho_{11})w_1-c_1v)w_1 \text{ en } Z_T,\\
w_1(x,0)=\psi_1(x) \text{ en } \bar{\Omega},\quad \frac{\partial w_1}{\partial n}=0 \text{ en } S_T.
\end{cases}$$

Análogamente definimos $w_2=S_2(u,v)$:

$$\begin{cases}
\frac{\partial w_2}{\partial t}=\mu(1+\tau(2\rho_{21}u+\rho_{22}v))\Delta w_2+2\mu\tau(u\nabla\rho_{21}+\nabla(\rho_{21}u+\rho_{22}v))\nabla w_2\\
\qquad+(\mu\tau\Delta(\rho_{22}v)+a_2-(b_2-\mu\tau\Delta\rho_{21})w_2-c_2v)w_2 \text{ en } Z_T,\\
w_2(x,0)=\psi_2(x) \text{ en } \bar{\Omega},\quad \frac{\partial w_2}{\partial n}=0 \text{ en } S_T.
\end{cases}$$

2.4. Existencia de solución del sistema no-estacionario para tiempo finito

De las discusiones anteriores se obtiene que $S_i(u,v)$ para $i=1,2$, está bien definido y admite estimaciones del tipo:

$$0 \leq S_i(u,v) \leq R, \quad |S_i(u,v)|_\alpha \leq PR, \quad |S_i(u,v)|_{2+\alpha} \leq m \quad (u,v) \in V \times V, i \in \{1,2\}.$$

Así para $(u,v) \in V \times V$ se tiene $(S_1(u,v), S_2(u,v)) \in V \times V$ para , $i \in \{1,2\}$.
Para $(u,v) \in V \times V$ definimos $S(u,v) := (S_1(u,v), S_2(u,v))$ entonces $S : V \times V \to V \times V$.
Queremos demostrar la continuidad de S como operador de $V \times V$ en $V \times V$. Para ello, definimos para $u,v,g,h \in V$ denotando $\varphi_1 = S_1(u,v) - S_1(h,g)$ y $\varphi_2 = S_2(u,v) - S_2(h,g)$, sabemos que satisfacen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= \mu(1+\tau(2\rho_{11}u + \rho_{12}v))\Delta\varphi_1 + \mu\tau[2\rho_{11}(u-h) + \rho_{12}(v-g)]\Delta S_{1(h,g)} \\
&+ 2\mu\tau(u\nabla\rho_{11} + \nabla(\rho_{11}u + \rho_{12}v))\nabla\varphi_1 + (\mu\tau\Delta(\rho_{12}(v-g)) - c_1(v-g))S_{1(h,g)} \\
&+ 2\mu\tau((u-h)\nabla\rho_{11} + \nabla[\rho_{11}(u-h) + \rho_{12}(v-g)]\nabla S_{1(h,g)}) \\
&+ (\mu\tau\Delta(\rho_{12}v) + a_1 - (b_1 + \tau\mu\Delta\rho_{11})(S_{1(u,v)} + S_{1(h,g)}) - c_1 v)\varphi_1
\end{aligned}$$

definimos

$$\begin{aligned}
A(u,v) &\equiv \mu(1+\tau(2\rho_{11}u + \rho_{12}v)), \\
B_k(u,v) &\equiv 2\mu\tau(uD_k\rho_{11} + D_k(\rho_{11}u + \rho_{12}v)), \\
C(u,v,g,h) &\equiv \mu\tau\Delta(\rho_{12}v) + a_1 - (b_1 - \mu\tau\Delta\rho_{11})(S_1(u,v) + S_1(g,h)) - c_1 v, \\
F(u,v,g,h) &\equiv -2\mu\tau[\rho_{11}\Delta S_1(h,g) + 2\nabla\rho_{11}\nabla S_1(h,g)](u-h) \\
&- [\mu\tau\Delta(\rho_{12}S_1(h,g)) - c_1 S_1(h,g)](v-g) \\
&- 2\mu\tau(\nabla(\rho_{12}S_1(h,g))\nabla(v-g) + \rho_{11}\nabla S_1(h,g)\nabla(u-h)) \\
&- \mu\tau\rho_{12}S_1(h,g)\Delta(v-g).
\end{aligned}$$

La función φ_1 satisface

$$\begin{cases}
A(u,v)\Delta\varphi_1 + \sum_{k=1}^{N} B_k(u,v)D_k\varphi_1 \\
+C(h,g)\varphi_1 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = F(u,v,h,g) \text{ en } Z_T, \\
\varphi_1(x,0) = 0 \quad (x \in \bar{\Omega}), \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}(x,s) = 0 \quad ((x,s) \in S_T).
\end{cases} \tag{2.13}$$

Sea $\rho > 0$ tal que $|u|_{\alpha/2} \leq \rho\, |u|_\alpha$ para $u \in C_\alpha(\bar{Z}_T)$, notemos que $|u|_{2+\alpha}, |v|_{2+\alpha} \leq m$, $|S_1(u,v)|_{2+\alpha} \leq m$, $\mu(1+\tau(2\rho_{11}u + \rho_{12}v)) \geq 0$ para $u,v \in V$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
|A(u,v)|_{\alpha/2}, |B_k(u,v)|_{\alpha/2}, |C(u,v,h,g)|_{\alpha/2} &\leq \rho(M + 2mM) \quad (1 \leq k \leq N, u,v,h,g \in V), \\
A(u,v)(x,s) &\geq m \quad (x,s) \in \bar{Z}_T, u,v \in V.
\end{aligned}$$

De lo anterior y teorema 2.13 existe una constante $K_1 > 0$ tal que:

$$|S_1(u,v) - S_1(h,g)|_{2+\alpha/2} \leq K_1\, |F(u,v,h,g)|_{\alpha/2} \text{ para } u,v,g,h \in V.$$

Podemos estimar $|F(u,v,h,g)|_{\alpha/2}$ por:

$$|F(u,v,h,g)|_{\alpha/2} \leq K_2(|u-h|_{2+\alpha/2} + |v-g|_{2+\alpha/2})$$

Con lo que se obtenemos:

$$|S_1(u,v) - S_1(h,g)|_{2+\alpha/2} \leq K_3(|u-h|_{2+\alpha/2} + |v-g|_{2+\alpha/2}) \text{ para } u,v,h,g \in V$$

El término $S_2(u,v)$ lo podemos estimar de igual manera. Recordando como la norma y el operador S fueron definidos se tiene que

$$\|S(u,v) - S(h,g)\|_{V\times V} \leq K_4 \|(u,v)-(h,g)\|_{V\times V} \quad (u,v,h,g \in V).$$

Aplicamos el teorema de punto fijo de Schauder, luego existen funciones $(\tilde{u},\tilde{v})$ tales que $S(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{u},\tilde{v})$, es decir, $S_1(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{u}$ y $S_2(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{v}$. ■

Notemos que el sistema (2.1) tiene la siguiente propiedad de escalamiento, si (u,v) es solución de (2.1) y $\zeta > 0$ constante, se tiene que $\tilde{u} := \zeta u, \tilde{v} := \zeta v$ es también solución de (2.1) con constantes ponderadas por $\zeta > 0$, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.17. *Sea* $\alpha \in (0,1), \zeta, m, M \in \mathbb{R}$ *con* $0 < \zeta, 0 < m \leq M, \tilde{b}_1, \tilde{c}_2, \tilde{b}_2, \tilde{c}_1 \in [\frac{mM}{R\zeta}, \frac{M^2}{R\zeta}]$, $|a_1|_\alpha, |a_2|_\alpha \leq mM/4$, $\quad \tilde{\psi}_i$ *satisfaciendo (W1) junto con*

$$\left|\tilde{\psi}_i\right|_{2,\alpha} \leq \zeta R \quad (i = 1,2).$$

Sea $T \in (0,\infty)$*, entonces existe una solución* $(\tilde{u},\tilde{v})$ *tal que para* $w \in \{\tilde{u},\tilde{v}\}$

$$w \in C^{2,1}(\bar{Z}_T), \quad 0 \leq w \leq \zeta R, \quad |w|_{2+\alpha} \leq \zeta m.$$

Demostración. Sea u solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{11}u + \rho_{12}v))u] + (a_1 - b_1 u - c_1 v)u, \\ u(x,0) = \psi(x) \quad \text{ en } \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0 \quad \text{ en } S_T. \end{cases}$$

Entonces definiendo $\tilde{\tau} := \frac{\tau}{\zeta}, \tilde{b}_1 := \frac{b_1}{\zeta}, \tilde{c}_1 := \frac{c_1}{\zeta}$ se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\Delta[(1+\zeta\tilde{\tau}(\rho_{11}u + \rho_{12}v)u] + (a_1 - \zeta\tilde{b_1}u - \zeta\tilde{c}_1 v)u.$$

Multiplicando por ζ se tiene que:

$$\zeta\frac{\partial u}{\partial t} = \zeta\mu\Delta[(1+\zeta\tilde{\tau}(\rho_{11}u + \rho_{12}v)u] + \zeta(a_1 - \alpha\tilde{b_1}u - \zeta\tilde{c}_1 v)u.$$

y definimos $\tilde{u} := \zeta u$ y $\tilde{v} := \zeta v$ tenemos que satisfacen

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = \mu\Delta[(1+\tilde{\tau}(\rho_{11}\tilde{u} + \rho_{12}\tilde{v})\tilde{u}] + (a - \tilde{b}_1\tilde{u} - \tilde{c}_1\tilde{v})\tilde{u} \text{ en } Z_T, \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{\psi}(x) \quad \text{ en } \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0 \text{ en } S_T. \end{cases}$$

■

En particular tomamos $\zeta = \frac{M}{R}$ tenemos que

Teorema 2.18. *Dados $\alpha \in (0,1), m, M \in \mathbb{R}$ con $0 < m \leq M, \tilde{b}_1, \tilde{c}_2, \tilde{b}_2, \tilde{c}_1 \in [m, M]$, $|a_1|_\alpha, |a_2|_\alpha \leq mM/4$, $\tilde{\psi}_i$ satisfaciendo (W1) junto con*

$$\left|\tilde{\psi}_i\right|_{2,\alpha} \leq M \quad (i = 1,2).$$

Sea $T \in (0, \infty)$, entonces existe una solución $(\tilde{u}, \tilde{v})$ tal que para $w \in \{\tilde{u}, \tilde{v}\}$

$$w \in C^{2,1}(\bar{Z}_T), \quad 0 \leq w \leq M, \quad |w|_\alpha, \quad |w|_{2+\alpha} \leq mM/R.$$

Nota 2.19. *El hecho de que las cotas de la solución no dependan del tiempo es fundamental para la existencia de la solución global del sistema, pues para chequear existencia de la solución global sólo basta extender la solución a $T = \infty$, se demostrará que esta extensión es única. Basado en este principio de extensión única se deduce que existe una única solución global.*

Notemos que otra propiedad importante del sistema (2.1) es la positividad para todo tiempo positivo, se tiene el siguiente teorema

Teorema 2.20. *Sea $\mu, \tau, b_i, c_i, |\rho_{ij}|_{2,\alpha} \in [0, \infty), W_i \in C^2(\bar{\Omega})$, con $W_i \geq 0, \quad (i = 1,2)$, $T \in (0, \infty], (u, v)$ una solución de (2.1) con $u, v \in C^{2,1}(\bar{Z}_T)$.*

$$\textit{Entonces} \qquad u, v > 0.$$

Demostración. Sea $T \in (0, \infty]$ y suponemos que existe un elemento

$$(x, s) \in \bar{Z}_T \quad \text{con} \quad u(x,s) < 0 \quad \text{o} \quad v(x,s) < 0.$$

Para $w \in \{u, v\}$, definimos

$$s_w := \sup\{r \in [0, T] : w(x,t) \geq 0 \text{ para } (x,t) \in \bar{Z}_r\}.$$

Dado que $u(x,0), v(x,0) \geq 0$ para $x \in \bar{\Omega}, s_w$ está bien definido. Sin pérdida de generalidad suponemos que $s_u \leq s_v$, entonces $s_u < T$. También tenemos que

$$u(x, s_u), v(x, s_u) \geq 0 \text{ para } x \in \bar{\Omega}.$$

Así podemos escoger $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{\Omega} \times [s_u, s_u + \varepsilon] \subset \bar{Z}_T$ y $\mu(1 + \tau(\rho_{11}u(x,s) + \rho_{12}v(x,s)) \geq \mu/2$ para $(x,s) \in \bar{\Omega} \times [s_u, s_u + \varepsilon]$ y que exista un elemento:

$$(x,s) \in \bar{\Omega} \times [s_u, s_u + \varepsilon] \text{ con } u(x,s) < 0.$$

Definimos para $1 \leq i, j \leq N, (x,t) \in \bar{Z}_\epsilon$:

$$\begin{aligned}
a_{ii}(x,t) &:= \mu(1 + \tau(\rho_{11}u(x, t + s_u) + \rho_{12}v)), \quad a_{ij}(x,t) := 0, \\
b_i(x,t) &:= 2\mu\tau(u(x, t + s_u)D_i\rho_{11} + D_i(\rho_{11}u(x, t + s_u) + \rho_{12}v(x, t + s_u))), \\
c(x,t) &:= \mu\tau(\Delta(\rho_{12}v) + a - (b_1 - \mu\tau\Delta\rho_{11})u - c_1 v)(x, t + s_u).
\end{aligned}$$

Luego $w := w(x,t) = u(x,t+s_u)$ para $(x,t) \in \bar{Z}_T$ satisface

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{N} a_{ii}(x,t)D_{ii}w + \sum_{i=0}^{N} b_i D_i w + cw - \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \\ w(x,0) = u(x,s_u) \geq 0 \text{ para } x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Concluimos del corolario 2.7 que $w \geq 0$.

Esto quiere decir que $u(x,s) \geq 0$ para $(x,s) \in \bar{\Omega} \times [s_u, s_u + \varepsilon]$, lo que contradice la elección de $\varepsilon > 0$.

Con lo anterior hemos la no-negatividad de la solución global (u,v) de (2.1). Pero es posible llegar más lejos y demostrar la postividad de la solución global, en efecto, por contradicción y sin pérdida de generalidad supongamos que existe $(x_1,t_1) \in \bar{\Omega} \times (0,T]$ tal que $u(x_1,t_1) = 0$ entonces (x_1,t_1) es un mínimo de u. Consideramos dos casos, $(x_1,t_1) \in \Omega \times (0,T)$, (x_1,t_1) interior y $(x_1,t_1) \in \partial\Omega \times (0,T]$, el mínimo se alcanza en el borde.

i) (x_1,t_1) en el interior.

Definimos $\psi = [1 + \tau(\rho_{11}u + \rho_{12}v)]u$, con lo cual $\psi(x,t) > 0 \quad$ en $\bar{\Omega} \times (0,t]$, $\psi(x_1,t_1) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial n}(x,t) = 0 \quad$ en $\partial\Omega \times [0,T)$. Derivamos parcialmente ψ en t

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= [1 + \tau(\rho_{11}\frac{\partial u}{\partial t} + \rho_{12}\frac{\partial v}{\partial t})]u + [1 + \tau(\rho_{11}u + \rho_{12}v)]\frac{\partial u}{\partial t}, \\ &= (1 + \tau\rho_{12}\frac{\partial v}{\partial t})u + [1 + \tau(2\rho_{11}u + \rho_{12}v)]\frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\frac{\partial \psi}{\partial t} - (1 + \tau\rho_{12}\frac{\partial v}{\partial t})u}{1 + \tau(2\rho_{11}u + \rho_{12}v)}, \\ &= \Delta\psi + (a - b_1 u - c_1 v)u. \end{aligned}$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} - (1 + \tau\rho_{12}\frac{\partial v}{\partial t})u &= [\mu\Delta\psi + (a - b_1 u - c_1 v)u][1 + \tau(2\rho_{11}u + \rho_{12}v)], \\ &= \mu a(x)\Delta\psi + (a - b_1 u - c_1 v)(\psi + \tau\rho_{11}u^2), \end{aligned}$$

Donde $a(x) = 1 + \tau(2\rho_{11}u + \rho_{12}v)$, con lo que ψ satisface

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mu a(x)\Delta\psi + c(x)\psi + [1 + \tau\rho_{12}\frac{\partial v}{\partial t} + \tau(a - b_1 u - c_1 v)\rho_{11}u]u.$$

Definimos $L\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mu a(x)\Delta\psi - c(x)\psi$ y tenemos que

$$L\psi \geq 0.$$

Luego por el principio del máximo fuerte para operadores parabólicos lineales, que se puede ver en [20], si ψ alcanza su mínimo en el interior $\Omega \times (0,T)$ y este tiene el valor cero, es decir, $\psi(x_1,t_1) = 0$ se tiene que la función ψ es constante en $\Omega \times (0,T)$ e igual al valor mínimo, es decir, $\psi \equiv 0$, lo que implica que las funciones u y v son constantes e idénticamente nulas en $\Omega \times (0,T)$, pero esto no es así pues las condiciones iniciales no son idénticamente nulas, lo que es una contradicción.

ii) (x_1, t_1) en la frontera.

Tenemos que $L\psi \geq 0$ en $\Omega \times (0, T]$ y $u(x_1, t_1) < u(x, t)$ en $\Omega \times (0, T)$ luego el lema de Hopf asegura que

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x_1, t_1) > 0.$$

Lo que contradice la definición de ψ.

■

2.5. Unicidad en tiempo infinito.

Teorema 2.21. *Sea $\alpha, \mu, \tau, b_i, c_i, \rho_{ij}, T$ como en el Corolario 2.17, existe una única solución (u, v) de (2.1) tal que $u, v \in C^{2,1}(\bar{Z}_T)$.*

Demostración. De la discusión anterior se sabe que existe una solución de (2.1) tal que

$$0 \leq w \leq M, \quad |w|_{2+\alpha} \leq mM/R.$$

Sean ahora U, V funciones de $C^{2,1}(\bar{Z}_T)$ tal que (U, V) es otra solución del problema. Dado que (u, v) y (U, V) satisfacen el sistema tenemos que

$$\mu(1 + \tau(2\rho_{11}u + \rho_{12}v))\Delta(U - u) + 2\mu\tau(u\nabla\rho_{11} + \nabla(\rho_{11}u + \rho_{12}v))\nabla(U - u) + C(U - u) \\ - \frac{\partial(U - u)}{\partial t} = F,$$

donde

$$\begin{aligned} C &:= \mu\tau\Delta(\rho_{12}V) + a - (b_1 - \mu\tau\Delta\rho_{11})(U - u) - c_1 V \\ F &:= -(\mu\tau(2\rho_{11}(U - u) + \rho_{12}(V - v))\Delta u + 2\mu\tau[(U - u)\nabla\rho_{11} \\ &+ \nabla(\rho_{11}(U - u) + \rho_{12}(V - v))]\nabla u + (\mu\tau\Delta(\rho_{12}(V - v)) - c_1(V - v))u \end{aligned}$$

Multiplicamos por $e^{-\gamma s}$ con $\gamma \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mu(1 + \tau(2\rho_{11}u + \rho_{12}v))\Delta z^\gamma + 2\mu\tau(u\nabla\rho_{11} + \nabla(\rho_{11}u + \rho_{12}v))\nabla z^\gamma + C^\gamma z^\gamma - \frac{\partial z^\gamma}{\partial t} = F^\gamma,$$

donde

$$\begin{aligned} z^\gamma &:= (U - u)e^{-\gamma s}, \quad \tilde{z}^\gamma := (V - v)e^{-\gamma s}, \\ C^\gamma &:= \mu\tau\Delta(\rho_{12}V) + a - (b_1 - \mu\tau\Delta\rho_{11})(U - u) - c_1 V) - \gamma, \\ F^\gamma &:= -(\mu\tau(2\rho_{11}z^\gamma + \rho_{12}\tilde{z}^\gamma)\Delta u + 2\mu\tau[z^\gamma\nabla\rho_{11} + \nabla(\rho_{11}z^\gamma + \rho_{12}\tilde{z}^\gamma)]\nabla u \\ &+ (\mu\tau\Delta(\rho_{12}\tilde{z}^\gamma) - c_1\tilde{z}^\gamma)u). \end{aligned}$$

Multiplicamos por $-z^\gamma$ e integramos sobre $\bar{Z}_T$ obtenemos

$$\int_{Z_T} \mu(1+\tau(2\rho_{11}U+\rho_{12}V))(-z^\gamma)\Delta z^\gamma + 2\mu\tau(U\nabla\rho_{11}+\nabla(\rho_{11}U+\rho_{12}V))(-z^\gamma)\nabla z^\gamma$$
$$-C^\gamma(z^\gamma)^2-(-z^\gamma)\frac{\partial z^\gamma}{\partial t} = \int_{Z_T} F^\gamma(-z^\gamma),$$

Notar que

$$\begin{aligned}\int_{Z_T} \mu(1+\tau(2\rho_{11}U+\rho_{12}V))(-z^\gamma)\Delta z^\gamma &= \int_{Z_T} \mu(1+\tau(2\rho_{11}U+\rho_{12}V))\,|\nabla z^\gamma|^2 \\ &\quad -\frac{\mu\tau}{2}(z^\gamma)^2\Delta(2\rho_{11}U+\rho_{12}V),\end{aligned}$$

también tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{Z_T} 2\mu\tau(U\nabla\rho_{11}+\nabla(\rho_{11}U+\rho_{12}V))(-z^\gamma)\nabla z^\gamma &= -\int_{Z_T} \mu\tau(U\nabla\rho_{11}+\nabla(\rho_{11}U+\rho_{12}V))\nabla(z^\gamma)^2 \\ \int_{Z_T} \mu\tau(z^\gamma)^2\nabla\cdot(U\nabla\rho_{11}+\nabla(\rho_{11}U+\rho_{12}V)) &= \int_{Z_T} \mu\tau(z^\gamma)^2(\nabla U\nabla\rho_{11}+U\Delta\rho_{11} \\ &\quad +\Delta(\rho_{11}U+\rho_{12}V)),\end{aligned}$$

y que

$$\int_{Z_T}(-z^\gamma)\frac{\partial z^\gamma}{\partial t} = \int_\Omega \frac{1}{2}z^\gamma \le 0, \qquad \text{pues } z^\gamma(x,0)=0.$$

Las tres últimas ecuaciones implican que

$$\int_{Z_T} \mu\,|\nabla z^\gamma|^2 + [\frac{\mu\tau}{2}\Delta(\rho_{12}V)-C^\gamma](z^\gamma)^2 \le \int_{Z_T} F^\gamma(-z^\gamma).$$

Podemos estimar el lado derecho. Para ello, se reescribe F^γ

$$\begin{aligned}F^\gamma = -[&(2\mu\tau\rho_{11}\Delta u+4\mu\tau\nabla\rho_{11}\nabla u)z^\gamma+2\mu\tau\rho_{11}\nabla u\nabla z^\gamma \\ &+(2\mu\tau\rho_{12}\nabla u+2\mu\tau u\nabla\rho_{12})\nabla\tilde{z}^\gamma+\mu\tau\rho_{12}\Delta\tilde{z}^\gamma]\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned}F^\gamma(-z^\gamma) &= (2\mu\tau\rho_{11}\Delta u+4\mu\tau\nabla\rho_{11}\nabla u)(z^\gamma)^2+2\mu\tau\rho_{11}z^\gamma\nabla u\nabla z^\gamma+(\mu\tau\Delta(\rho_{12}u)-c_1u)\tilde{z}^\gamma z^\gamma \\ &+ 2\mu\tau\nabla(\rho_{12}u)z^\gamma\nabla\tilde{z}^\gamma+\mu\tau\rho_{12}uz^\gamma\Delta\tilde{z}^\gamma,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_{Z_T} F^\gamma(-z^\gamma) &= \int_{\bar{Z}_T} 2\mu\tau\rho_{11}(z^\gamma)^2\Delta u + 4\mu\tau(z^\gamma)^2\nabla\rho_{11}\nabla u + 2\mu\tau\rho_{11}z^\gamma\nabla u\nabla z^\gamma \\
&\quad + (\mu\tau\Delta(\rho_{12}u) - c_1u)\tilde{z}^\gamma z^\gamma + 2\mu\tau\nabla(\rho_{12}u)z^\gamma\nabla\tilde{z}^\gamma + \mu\tau\rho_{12}uz^\gamma\Delta\tilde{z}^\gamma \\
&= \int_{Z_T} -2\mu\tau\nabla(\rho_{11}(z^\gamma)^2)\nabla u + 2\mu\tau\rho_{11}z^\gamma\nabla u\nabla z^\gamma - \mu\tau\nabla(\tilde{z}^\gamma z^\gamma)\nabla(\rho_{12}u) \\
&\quad - c_1u\tilde{z}^\gamma z^\gamma + 2\mu\tau\nabla(\rho_{12}u)z^\gamma\nabla\tilde{z}^\gamma - \mu\tau\nabla(\rho_{12}uz^\gamma)\nabla\tilde{z}^\gamma \\
&= \int_{Z_T} 2\mu\tau(z^\gamma)^2\nabla\rho_{11}\nabla u - 2\mu\tau\rho_{11}z^\gamma\nabla z^\gamma\nabla u - \mu\tau\nabla(\rho_{12}u)\nabla(\tilde{z}^\gamma z^\gamma) - c_1uz^\gamma\tilde{z}^\gamma \\
&\quad + 2\mu\tau z^\gamma\nabla(\rho_{12}u)\nabla\tilde{z}^\gamma - \mu\tau(z^\gamma\nabla(\rho_{12}u) + \rho_{12}u\nabla z^\gamma)\nabla\tilde{z}^\gamma \\
&= \int_{Z_T} 2\mu\tau(z^\gamma)^2\nabla\rho_{11}\nabla u - 2\mu\tau\rho_{11}z^\gamma\nabla z^\gamma\nabla u - \mu\tau\tilde{z}^\gamma\nabla z^\gamma\nabla(\rho_{12}u) - c_1uz\tilde{z}^\gamma \\
&\quad - \mu\tau\rho_{12}u\nabla z\gamma\nabla\tilde{z}^\gamma
\end{aligned}$$

Ahora acotamos los términos de esta integral:

$$\begin{aligned}
(z^\gamma)^2\nabla\rho_{11}\nabla u &\leq \frac{(z^\gamma)^2}{2}(|\nabla\rho_{11}|^2 + |\nabla u|^2), \quad \rho_{11}z^\gamma\nabla z^\gamma\nabla u \leq \frac{|\rho_{11}|_0}{2}((z^\gamma)^2|\nabla z^\gamma|^2 + |\nabla z^\gamma|^2) \\
\tilde{z}^\gamma\nabla(\rho_{12}u)\nabla z^\gamma &\leq \frac{(\tilde{z}^\gamma)^2}{2}(|\nabla(\rho_{12}u)|^2 + |\nabla\tilde{z}^\gamma|^2), \quad uz^\gamma\tilde{z}^\gamma \leq \frac{|u|_0}{2}((z^\gamma)^2 + (\tilde{z}^\gamma)^2), \\
\rho_{12}u\nabla z^\gamma\nabla\tilde{z}^\gamma &\leq \frac{|\rho_{12}|_0|u|_0}{2}(|\nabla z^\gamma|^2 + |\nabla\tilde{z}^\gamma|^2).
\end{aligned}$$

Con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{Z_T} F^\gamma(-z^\gamma)\right| &\leq \int_{Z_T}[\mu\tau(|\nabla\rho_{11}|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla u|^2|\rho_{11}|_0 + \frac{1}{2}|\rho_{11}|_0|u|_0) + \frac{c_1}{2}|u|_0](z^\gamma)^2 \\
&\quad +(\mu\tau|\rho_{11}|_0 + \frac{\mu\tau}{2}|\rho_{12}|_0|u|_0)|\nabla z^\gamma|^2 + \frac{c_1}{2}|u|_0(\tilde{z}^\gamma)^2 + \frac{\mu\tau}{2}|\rho_{12}|_0|u|_0|\nabla\tilde{z}^\gamma|^2
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
\left|\int_{Z_T} \tilde{F}^\gamma(-\tilde{z}^\gamma)\right| &\leq \int_{Z_T}[\mu\tau(|\nabla\rho_{22}|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla v|^2|\rho_{22}|_0 + \frac{1}{2}|\rho_{22}|_0|v|_0) + \frac{c_2}{2}|v|_0](\tilde{z}^\gamma)^2 \\
&\quad +(\mu\tau|\rho_{22}|_0 + \frac{\mu\tau}{2}|\rho_{21}|_0|v|_0)|\nabla\tilde{z}^\gamma|^2 + \frac{c_2}{2}|v|_0(z^\gamma)^2 + \frac{\mu\tau}{2}|\rho_{21}|_0|v|_0|\nabla z^\gamma|^2
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\int_{Z_T}\{[\mu - \mu\tau(|\rho_{11}|_0 + \frac{1}{2}|\rho_{12}|_0|u|_0]|\nabla z^\gamma|^2 + [\mu - \mu\tau(|\rho_{22}|_0 + \frac{1}{2}|\rho_{11}|_0|v|_0)]|\nabla\tilde{z}^\gamma| \\
+E^\gamma(z^\gamma)^2 + E^\gamma(\tilde{z}^\gamma)^2\} \leq 0, \quad (\gamma \in \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

donde

$$E^\gamma := \frac{\mu\tau}{2}\Delta(\rho_{12}V) - C^\gamma - \mu\tau(|\nabla\rho_{11}|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla u|^2 |\rho_{11}|_0 + |\rho_{11}|_0 |u|_0) - \frac{c_1}{2}|u|_0$$
$$\tilde{E}^\gamma := \frac{\mu\tau}{2}\Delta(\rho_{21}U) - \tilde{C}^\gamma - \mu\tau(|\nabla\rho_{22}|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla v|^2 |\rho_{22}|_0 + |\rho_{11}|_0 |v|_0) - \frac{c_2}{2}|v|_0$$

Imponiendo que

$$1 - \tau(|\rho_{11}|_0 + \frac{1}{2}|\rho_{12}|_0 |u|_0), 1 - \tau(|\rho_{22}|_0 + \frac{1}{2}|\rho_{21}|_0 |v|_0) \geq 0. \tag{2.14}$$

Obtenemos de lo anterior que

$$\int_{Z_T} E^\gamma(z^\gamma)^2 + \tilde{E}^\gamma(\tilde{z}^\gamma)^2 \leq 0 \quad (\gamma \in \mathbb{R}),$$

Dado que $U, u, V, v \in C^{2,1}(\bar{Z}_T)$ y $T < \infty$, podemos escoger $\gamma > 0$ tal que $E^\gamma, \tilde{E}^\gamma \geq 1$.
Así de (2.14) tenemos

$$z^\gamma = \tilde{z}^\gamma = 0,$$

lo significa que $u = U, v = V$.

Con todo lo anterior concluimos que existe un único par $(u, v) \in (C^{2,1}(\bar{Z}_\infty))^2$ solución de (2.1), en efecto, basta considerar para $T \in (0, \infty)$ las funciones u_T, v_T tales que (u_T, v_T) resuelve (2.1), las desigualdades $0 \leq w \leq M$, $|w|_{2+\alpha} \leq mM/R$, son válidas para $w \in \{u_T, v_T\}$. Al tomar dos reales $T_1, T_2 \in (0, \infty)$ con $T_1 < T_2$ se tiene, por el teorema de unicidad, que

$$u_{T_1} = u_{T_2} \mid_{\bar{Z}_{T_1}}, \qquad v_{T_1} = v_{T_2} \mid_{\bar{Z}_{T_1}} .$$

Dado que podemos definir funciones $u, v : \bar{Z}_\infty \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma, consideramos la restricción $u \mid_{\bar{Z}_T} := u_T, v \mid_{\bar{Z}_T} := v_T$ para $T \in [1, \infty)$, con lo cual $u, v \in C^{2,1}(\bar{Z}_\infty)$ y (u, v) es una solución de (2.1), junto con conservar los acotamientos anteriormente mencionados.
Si (U, V) son también soluciones positivas de (2.1) en $(C^{2,1}(\bar{Z}_\infty))^2$, entonces podemos concluir que

$$u \mid_{\bar{Z}_T} = U \mid_{\bar{Z}_T}, v \mid_{\bar{Z}_T} = V \mid_{Z_T} \qquad \text{para } T \in (0, \infty).$$

Luego $u = U, v = V$ lo que prueba la unicidad de la solución. ■

Capítulo 3

El problema estacionario

3.1. Introducción

Consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))u]+(a-u-v)u=0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))v]+(a-u-v)v=0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=0 \quad \text{en } \partial\Omega, \\ u,v\geq 0 \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

Donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave $\partial\Omega$ y normal unitaria exterior n, el coeficiente de difusión $\mu > 0$ y $\tau > 0$ corresponde a un parámetro de perturbación.

Para las funciones $a(x)$ y ρ_{ij} con $1 \leq i,j \leq 2$ se exige las siguentes condiciones de regularidad y compatibilidad

(A1) La función $a = a(x)$ es no-constante, Hölder continua en $\bar{\Omega}$ y $\int_\Omega a > 0$.

(ρ1) $\rho_{ij} \in C_{2,\alpha}(\Omega), \quad \rho_{ij} \geq 0 \quad \text{en } \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$

Bajo estas condiciones el sistema (3.1) corresponde al caso estacionario de una versión particular del sistema (2.1), donde fijamos $b_i = c_i = 1$ para $1 \leq i,j \leq 2$ y $a_1(x) = a_2(x) = a(x)$.

Nuevamente las funciones u, v representan las densidades de población de dos especies en competencia, μ corresponde al coeficiente de difusión, $\rho_{ii} = \rho_{ii}(x)$ representan las funciones de autodifusión y $\rho_{ij} = \rho_{ij}(x)$ para $i \neq j$ corresponden a las funciones de difusión cruzada y $a(x)$ representa la tasa de crecimiento intrínseca de las especies. Las soluciones del sistema (3.1) corresponden a las soluciones estacionarias o equilibrios positivos del sistema (2.1).

Dado que $u > 0, v > 0$ en Ω diremos que (u,v) es un equilibrio donde ambas especies coexisten. Un equilibrio de (3.1) donde una de las componentes es nula se denomina equilibrio semitrivial.

El objetivo de este capítulo es estudiar cómo cambia la estructura de las soluciones del sistema (3.1) a medida que varía el parámetro positivo μ, en particular, probaremos que la existencia de equilibrios de coexistencia puede ser caracterizada a través del signo de funciones simples que dependan de μ, ρ_{ij}, a, cuando τ es suficientemente pequeño.

3.2. Notación

Denotaremos por $\theta = \theta(\mu)$ a la solución positiva de la ecuación logística, es decir, θ satisface

$$\mu\Delta\theta + \theta(a(x) - \theta) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad \frac{\partial\theta}{\partial n}\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad \theta > 0 \quad \text{en } \Omega. \tag{3.2}$$

Sabemos que bajo las hipótesis (A1) la ecuación (3.2) tiene una única solución positiva $\theta \in C^2(\bar{\Omega})$ para cada $\mu > 0$. Además gracias al teorema de la función implícita se tiene que $\theta : (0, \infty) \to W^{2,p}(\Omega), p > 1$ es analítica. De las referencias [3, 13] sabemos que θ tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\theta(\mu) \to a_+ \quad \text{cuando} \quad \mu \to 0, \quad \theta(\mu) \to \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega a(x)dx \quad \text{cuando} \quad \mu \to \infty,$$

ambas convergencias son uniformes, donde $a_+(x) = \text{máx}\{0, a(x)\}$.

Por lo que podemos definir

$$\theta(0) = a_+ \quad \text{y} \quad \theta(\infty) = \int_\Omega a/\,|\Omega|\,.$$

3.3. Desarrollos de segundo Orden

En virtud del principio del máximo y del lema de Hopf para ecuaciones elípticas es posible demostrar que el sistema admite cotas a priori de tipo $C_{2,\alpha}$, luego salvo subsucesión, se tiene convergencia uniforme de las soluciones cuando τ tiende a cero a la solución de la ecuación logística θ, por lo que para τ pequeño las soluciones del sistema admiten los siguientes desarrollos

$$\begin{aligned} u(\mu,\tau) &= s\theta(\mu) + \tau u_1(\mu) + \tau^2 u_2(\mu) + o_1(\tau^2)f(\mu), \\ v(\mu,\tau) &= (1-s)\theta(\mu) + \tau v_1(\mu) + \tau^2 v_2(\mu) + o_2(\tau^2)g(\mu). \end{aligned}$$

Donde $s \in [0,1], \theta, u_1, v_1, u_2, v_2, f, g$ son funciones suaves de μ y a su vez o_1, o_2 son funciones suaves de τ tales que

$$\frac{o_1(\tau^2)}{\tau^2} \to 0 \text{ cuando } \tau \to 0.$$

En particular podemos escribir las soluciones semitriviales, que corresponde a los casos $s = 1$ o $s = 0$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u(\mu,\tau) &= \theta(\mu) + \tau u_1(\mu) + \tau^2 u_2(\mu) + o_1(\tau^2)f(\mu), \\ v(\mu,\tau) &= \theta(\mu) + \tau v_1(\mu) + \tau^2 v_2(\mu) + o_2(\tau^2)g(\mu). \end{aligned}$$

Evaluamos el sistema (3.1) en el estado semitrivial $(0, v)$ y obtenemos:

$$\mu\Delta[(1+\tau\rho_{22}v)v] + (a-v)v = 0. \tag{3.3}$$

Si $\tau \to 0$ tenemos que:

$$\mu\Delta v_0 + (a-v_0)v_0 = 0, \tag{3.4}$$

es decir, $v_0 = \theta$ donde θ es solución de la ecuación logística con condición de borde Neumann.

Para chequear la establidad de los estados estacionarios semitriviales estudiamos el linealizado de (3.1), esto es suficiente en vista de los resultados de G. Simonett [22]:

$$\begin{aligned} \mu\Delta[(1+\tau(2\rho_{11}u+\rho_{12}v))\varphi] + (a-2u-v)\varphi + \tau\mu\Delta\rho_{12}u\psi - u\psi &= -\lambda\varphi, \\ \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{21}u+2\rho_{22}v))\psi] + (a-u-2v)\psi + \tau\mu\Delta\rho_{21}v\varphi - v\varphi &= -\lambda\psi. \end{aligned}$$

Evaluamos en $(0, v)$ obteniendo:

$$\mu\Delta[(1+\tau\rho_{12}v)\varphi] + (a-v)\varphi = -\lambda\varphi, \tag{3.5}$$

$$\mu\Delta[(1+2\tau\rho_{22}v)\psi] + (a-2v)\psi + \tau\mu\Delta\rho_{21}v\varphi - v\varphi = -\lambda\psi. \tag{3.6}$$

Para caracterizar a v_1 hacemos un desarrollo de primer orden en (3.5) :

$$\begin{aligned} \mu\Delta[(1+\tau\rho_{22}(v_0+\tau v_1))(v_0+\tau v_1)] + (a-v_0-\tau v_1)(v_0+\tau v_1) &= 0, \\ \mu\Delta[v_0+\tau v_1+\tau\rho_{22}(v_0+\tau v_1)^2] + (a-v_0)v_0 + \tau(a-v_0)v_1 - \tau v_1(v_0+\tau v_1) &= 0, \\ \mu\Delta[v_1+\rho_{22}(v_0+\tau v_1)^2] + (a-v_0)v_1 - v_1(v_0+\tau v_1) &= 0. \end{aligned}$$

Haciendo $\tau \to 0$ se obtiene:

$$\mu\Delta[v_1+\rho_{22}\theta^2] + (a-\theta)v_1 - v_1\theta = 0. \tag{3.7}$$

Esto junto con un desarrollo de primer orden en (3.5) nos permite tener una expansión para el primer valor propio

$$\begin{aligned} \mu\Delta[(1+\tau\rho_{12}(v_0+\tau v_1))(\varphi_0+\tau\varphi_1)] + (a-v_0-\tau v_1)(\varphi_0+\tau\varphi_1) &= -\tau\lambda_1(\varphi_0+\tau\varphi_1), \\ \mu\Delta[\varphi_1+\rho_{12}(v_0+\tau v_1)(\varphi_0+\tau\varphi_1)] + (a-v_0)\varphi_1 - v_1(\varphi_0+\tau\varphi_1) &= -\lambda_1(\varphi_0+\tau\varphi_1). \end{aligned}$$

Hacemos $\tau \to 0$ obteniendo

$$\mu\Delta[\varphi_1+\rho_{12}\theta^2] + (a-\theta)\varphi_1 - v_1\theta = -\lambda_1\theta. \tag{3.8}$$

Restamos (3.8) y (3.7):

$$\begin{aligned} \mu\Delta[\varphi_1 - v_1 + (\rho_{12}-\rho_{22})\theta^2] + (a-\theta)(\varphi_1 - v_1) &= -\lambda_1\theta, \\ \mu\int_\Omega \Delta[\varphi_1 - v_1 + (\rho_{12}-\rho_{22})\theta^2]\theta + \int_\Omega (a-\theta)\theta(\varphi_1 - v_1) &= -\lambda_1\int_\Omega \theta^2, \\ \int_\Omega -(\rho_{12}-\rho_{22})(a-\theta)\theta^3 &= -\lambda_1\int_\Omega \theta^2. \end{aligned}$$

Por lo que el signo de λ_1 para $(0, v)$ está dado por el signo de la siguiente función:

$$H(\mu) = \int_\Omega (\rho_{12} - \rho_{22})(a - \theta)\theta^3.$$

Análogamente el signo de λ_1 para $(u, 0)$ está dado por:

$$G(\mu) = \int_\Omega (\rho_{21} - \rho_{11})(a - \theta)\theta^3.$$

Con lo que si elegimos adecuadamente ρ_{ij} obtendremos que ambos valores propios son negativos, luego ambos equilibrios semitriviales serán inestables, con esto es de esperar que aparezca un equilibrio de coexistencia estable, lo que mostraría cómo la difusión cruzada genera nuevos equilibrios de coexistencia.

El objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente teorema

Teorema 3.1. *Supongamos que $G(\mu), H(\mu)$ no tienen raíces comunes. Sean μ_1, μ_2 dos raíces consecutivas de la función $G(\mu)H(\mu)$ y supongamos que ambas raíces son simples, sean $\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2}$ dos númerso cercanos a μ_1, μ_2 :*

i) Si $G(\mu)H(\mu) < 0$ en $(\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2})$, entonces para $\mu \in [\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2}]$ el sistema (3.1) no tiene estados de coexistencia tal que τ sea pequeño y positivo.

ii) Si $G(\mu)H(\mu) > 0$ en $(\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2})$ entonces para cada $\tau > 0$ suficientemente pequeño existen números $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)$ y una función suave a valores reales

$$\mu \mapsto (u(\mu), v(\mu)) \text{ sobre } [\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2}] \text{ tq: } \quad \forall \mu \in (\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2})$$

el par $(u(\mu), v(\mu))$ es un único estado de coexistencia de (3.1) y $(u(\mu_1), v(\mu_1))$, $(u(\mu_2), v(\mu_2))$ son estados semitriviales del sistema. Además, los estados de coexistencia $(u(\mu), v(\mu))$ son estables si ambos $G(\mu)$ y $H(\mu)$ son positivos y es inestable si ambos son negativos.

En la afirmación (ii) de este teorema pueden ocurrir dos posibilidades :

a) $(u(\mu_1), v(\mu_1))$ y $(u(\mu_2), v(\mu_2))$ son estados semitriviales del mismo tipo, cada una de ellos iguales a $(u(\mu), 0)$ o cada una de ellos iguales a $(0, v(\mu))$.

b) $(u(\mu_1), v(\mu_1))$ y $(u(\mu_2), v(\mu_2))$ son de distinto tipo, uno de ellos igual a $(u(\mu), 0)$ y el otro igual a $(0, v(\mu))$.

3.4. Existencia y unicidad de los estados estacionarios semitriviales

El objetivo de esta sección es demostrar existencia y unicidad de la ecuación de equilibrio estacionario semitrivial

$$\begin{cases} \mu\Delta[(1 + \tau\rho_1 u)u] + (a - u)u = 0 \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Para ello seguiremos el esquema de la referencia [21], utilizaremos el método de super y sub-soluciones combinado con un teorema de punto fijo.

3.4.1. Resumen de los resultados de [21]

Un resultado contenido en [21] entrega condiciones para la existencia de solución de (3.9) en el caso en que ρ_1 es constante, en nuestro caso tenemos que extender estos resultados para el caso no-constante.

Para $a(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ partimos estudiando el problema de valores propios

$$\begin{cases} \Delta u + a(x)u = \lambda u \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Si consideramos el operador

$$Lu := \Delta u + a(x)u,$$

bajo la condición de frontera $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$, a partir de L podemos definir la siguiente forma bilineal

$$B[u,v] :=< Lu, v >= \int_{\Omega} (\Delta u + a(x)u)v dx,$$

que es simétrica lo que se puede ver integrando por partes gracias a que u, v satisfacen la condición de borde Neumann. Usando argumentos estándar podemos obtener que los valores propios λ_n y las funciones propias de (3.10) satisfacen

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \text{ y } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

Además λ_1 es simple y la función propia de (3.10) que corresponde λ_1 es positiva, todas las otras cambian de signo. Para obtener propiedades variacionales definimos el siguiente funcional en $W^{1,2}(\Omega)$ como

$$Q(\psi) = \frac{B[\psi,\psi]}{\|\psi\|_{L^2}^2} = \frac{\int_{\Omega}(-\|\nabla\psi\|^2 + a(x)\psi^2)}{\|\psi\|_{L^2}^2}.$$

Tenemos que $\lambda_1 = \sup_{\psi \in W^{1,2}(\Omega)} Q(\psi)$ por el mismo método que en [6].

Notación:

$\lambda_1(\Delta + a(x))$ denota el valor propio principal de (3.10) y ψ_1 es la primera función propia.

Lema 3.2. *(Lema 2.2 de [21]) Supongamos que $a_1(x)/d_1(x) > a_2(x)/d_2(x)$ donde $d_1, d_2 \in C^2(\bar{\Omega})$ y $a_i(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ para $i = 1, 2$.*

i) Si $\lambda_1(\Delta d_1(x) + a_1(x)) \leq 0$, entonces $\lambda_1(\Delta + a_2(x)) < 0$.

ii) Si $\lambda_1(\Delta d_2(x) + a_2(x)) \geq 0$, entonces $\lambda_1(\Delta + a_1(x)) > 0$.

Lema 3.3. *(Lema 2.3 de [21])* $\lambda_1(\Delta + a(x))$ *es creciente en* $a(x)$.

Lema 3.4. *(Lema 2.4 de [21]) Sea* $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ *y* $u \geq 0, u \neq 0$ *en* Ω *con* $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ *en* $\partial\Omega$

i) Si $0 \neq (\Delta + a(x))u \geq 0$ *en* Ω *entonces* $\lambda_1(\Delta + a(x)) > 0$.

ii) Si $0 \neq (\Delta + a(x))u \leq 0$ *en* Ω *entonces* $\lambda_1(\Delta + a(x)) < 0$.

iii) Si $(\Delta + a(x))u = 0$ *en* Ω *entonces* $\lambda_1(\Delta + a(x)) = 0$.

Para los lemas que siguen utilizaremos la siguiente notación.

Notación: Sea $T : E \to E$ un operador lineal de un espacio de Banach, denotaremos el radio espectral de T por $r(T)$.

El siguiente lema se puede encontrar en [2] y en [21].

Lema 3.5. *(Lema 2.5 de [21]) Supongamos que* T *es un operador lineal compacto y positivo sobre un espacio de Banach ordenado. Sea* $u > 0$ *un elemento positivo, entonces:*

i) Si $Tu > u$, *entonces* $r(T) > 1$.

ii) Si $Tu < u$, *entonces* $r(T) < 1$.

iii) Si $Tu = u$, *entonces* $r(T) = 1$.

Lema 3.6. *(Lema 2.6 de [21]) Sea* $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ *y* M *una constante positiva tal que* $a(x) + M > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$. *Si* $\lambda_1(\Delta + a(x)) > 0$ *entonces* $r[(-\Delta + M)^{-1}(a(x) + M)] > 1$.

Teorema 3.7. *(Teorema 2.10 de [21]) Sea* $a(x) \in C^2(\bar{\Omega})$.

i) Si $\lambda_1(\Delta + a(x)) \leq 0$, *entonces el sistema (3.9) no tiene soluciones positivas.*

ii) Si $\lambda_1(\Delta + a(x)) > 0$, *entonces el sistema (3.9) tiene una única solución positiva.*

3.4.2. Extensión del Teorema 3.7

Ahora consideramos la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} -\Delta[(1 + \rho_1(x)u)u] = u(a(x) - u) \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

Donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con una frontera suave $\partial\Omega, \rho_1(x)$ es una función no negativa, $a(x) \in C^2(\bar{\Omega})$.

Si consideramos el operador

$$B(u) := (1 + \rho_1(x)u)u$$

se puede ver que $\frac{\partial B}{\partial u} > 0 \quad \forall (x,u) \in \bar{\Omega} \times [0,\infty)$, luego $B(u)$ tiene una inversa continua en u, que denotaremos $B^{-1}(u)$, entonces se tiene:

$$B^{-1}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\rho_1(x)}(-1 + \sqrt{1 + 4\rho_1(x)u}) \text{ en el interior soporte de } \rho_1 \\ u \text{ en el complemento del interior del soporte de } \rho_1(x) \end{cases} \tag{3.12}$$

También podemos notar que:

$$\frac{\partial B^{-1}}{\partial u}(u) > 0 \quad \forall u \geq 0 \text{ y } B^{-1}(u) \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ si } u(x) \in C^2(\bar{\Omega}).$$

Definición 3.1. *Decimos que una función $\hat{u}(x)$ es una supersolución de (3.11) si $(1 + \rho_1(x)\hat{u})\hat{u} \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ y $\hat{u}$ satisface las siguientes condiciones:*

$$-\Delta[(1 + \rho_1(x)\hat{u})\hat{u}] \geq \hat{u}(a(x) - \hat{u}) \text{ en } \Omega, \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} \geq 0 \text{ en } \partial\Omega$$

Análogamente definimos subsolución cambiando el sentido de las desigualdades.

Definición 3.2. *Sea X un subconjunto no vacío de un conjunto ordenado Y. Un punto fijo x del mapa $f : X \to Y$ lo denominaremos maximal si para cada punto fijo y de f en X satisface $x \geq y$.*

Ahora damos el teorema de existencia y unicidad de soluciones positivas del equilibrio semitrivial.

Teorema 3.8. *Sea $a(x) \in C^2(\bar{\Omega})$.*

i) Si $\lambda_1(\Delta + a(x)) \leq 0$ entonces el sistema (3.11) no tiene soluciones positivas.

ii) Si $\lambda_1(\Delta + a(x)) > 0$, entonces el sistema (3.11) tiene una única solución positiva.

Demostración. i) Si $u(x)$ es una solución positiva de (3.11), entonces

$$\lambda_1(\Delta(1 + \rho_1(x)u) + a(x) - u) = 0 \text{ por lema 3.4.}$$

Dado que $\|a(x)\|_\infty < \infty$, existe una constante positiva M tal que $\frac{a(x)-u+M}{1+\rho_1(x)u}$ es decreciente con respecto a $u \geq 0$. Entonces tenemos $\frac{a(x)-u+M}{1+\rho_1(x)u} < a(x) + M$, luego

$$0 = \lambda_1(\Delta(1 + \rho_1(x)) + a(x) - u + M) < \lambda_1(\Delta + a(x) + M)$$

De aquí deducimos que $\lambda_1(\Delta + a(x)) > 0$.

ii) Sea B^{-1} la inversa del mapa $B(u) = (1 + \rho_1(x)u)u$ definido anteriormente. Denotamos $\hat{u} := B^{-1}(C)$ donde C es una constante positiva lo suficientemente grande tal que:

$$a(x) - B^{-1}(C) \leq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

La existencia de la constante $C > 0$ se sigue del hecho que $\|a(x)\|_\infty < \infty$ y $\frac{\partial B^{-1}}{\partial u}(u) > 0 \quad \forall u \geq 0$. Dado que:

$$-\Delta[(1+\rho_1 B^{-1}(C))B^{-1}(C)] = -\Delta C = 0,$$

tenemos que:

$$-\Delta[(1+\rho_1 B^{-1}(C))B^{-1}(C)] \geq B^{-1}(C)(a(x) - B^{-1}(C)) \text{ en } \Omega.$$

Dado que $\frac{\partial \rho_1}{\partial n} = 0 \quad$ en $\partial\Omega$, se tiene que $\frac{\partial B^{-1}(u)}{\partial n} > 0 \ \forall u \geq 0$ en $\partial\Omega$ por lo que $\hat{u} := B^{-1}(C)$ es una super solución de (3.5), en efecto

$$\begin{aligned}\frac{\partial B^{-1}(u)}{\partial n} &= \frac{1}{2\rho_1(x)}\Big(\frac{4(\frac{\partial \rho_1}{\partial n}u + \rho_1\frac{\partial u}{\partial n})}{2\sqrt{1+4\rho_1(x)u}}\Big) - (-1+\sqrt{1+4\rho_1(x)u})\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial n} \\ &= \frac{1}{2\rho_1(x)}(2c\frac{\partial \rho_1}{\partial n}\sqrt{1+4\rho_1(x)u}).\end{aligned}$$

Suponiendo $\frac{\partial \rho_1}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$ se tiene que:

$$\frac{\partial B^{-1}(C)}{\partial n} = 0.$$

Lo que implica que

$$\frac{\partial B^{-1}(C)}{\partial n} \geq 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Definimos el siguiente operador $F : [[0,\hat{u}]] \to C(\Omega)$ como $F = B^{-1} \circ W$ donde $[[0,\hat{u}]]$ denota el intervalo ordenado en $C(\Omega)$, donde W esta dado por:

$$Wu := (-\Delta + M)^{-1}[(a(x) - u + M(1+\rho_1(x)u))u],$$

donde M es una constante positiva lo suficientemente grande como para que $[(a(x) - u + M(1+\rho_1(x)u))u]$ sea positiva. Con lo cual el operador F es compacto, monótono creciente y positivo.
Notemos que u es solución de (3.5) si y sólo si u es punto fijo de F, en efecto

$$\begin{aligned} u &= Fu \\ \Longleftrightarrow Bu &= Wu \\ \Longleftrightarrow (-\Delta + M)[(1+\rho_1(x)u)u] &= (a(x) - u + M(1+\rho_1(x)u))u \\ \Longleftrightarrow -\Delta[(1+\rho_1(x)u)u] &= (a(x) - u)u. \end{aligned}$$

Dado que $\hat{u}(x)$ es una super solución de la ecuación 3.5, se tiene que

$$-\Delta[(1+\rho_1(x)u)u] \geq \hat{u}(a(x) - \hat{u}) \text{ en } \partial\Omega$$

Sumando $M(1+\rho_1(x)\hat{u})\hat{u}$ y aplicando $G^{-1}\circ(-\Delta+M)^{-1}$ a ambos lados, se tiene que $F(\hat{u})\leq\hat{u}$.
Notemos también que $\bar{u}=0$ es una solución de (3.5) y luego

$$r(F'(\bar{u}))=r(F'(0))=r[(-\Delta+M)^{-1}(a(x)+M)]>1.$$

Por lema (3.6) dado que $\lambda_1(\Delta+a(x))>0$. Ahora en virtud del teorema 7.6 en [2] concluimos que existe una solución positiva maximal $u>>0$ en $[[0,\hat{u}]]$.

La unicidad, supongamos que exiten dos soluciones positivas u,v de (3.11) luego restando las ecuaciones se tiene que $\phi=u-v$ satisface

$$\begin{cases}-\Delta[(1+\rho_1(x)(u+v))\phi]=\phi(a(x)-(u+v)) \text{ en } \Omega,\\ \frac{\partial\phi}{\partial n}=0 \text{ en } \partial\Omega.\end{cases}\tag{3.13}$$

Luego definiendo $d_2(x)=1+\rho_1(x)(u+v)$ y $a_2(x)=a(x)-(u+v)$ se tiene que

$$\lambda_2(\Delta d_2(x)+a_2(x))=0$$

pero por otra parte como $d_2(x)>1+\rho_1(x)u$ y $a_2(x)<a(x)$ se tiene que $a_2(x)/d_2(x)<a(x)/d(x)$ luego por el lema (3.2) se tiene que

$$0=\lambda_2(\Delta d_2(x)+a_2(x))<\lambda(\Delta(1+\rho_1(x)u)+a(x))=0.$$

Lo que es una contradicción, por lo que la solución de la ecuación es única.

■

3.5. Reducción de Lyapunov-Schmidt

En esta sección utilizaremos la reducción de Lyapunov-Schmidt para probar existencia y no-existencia de estados estacionarios de coexistencia para $\tau>0$ pequeño, para ello consideramos el sistema:

$$\begin{cases}\mu\Delta[(1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))u]+(a-u-v)u=0 \quad \text{en } \Omega,\\ \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))v]+(a-u-v)v=0 \quad \text{en } \Omega,\\ \frac{\partial\rho_{ij}}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=0 \quad \text{en } \partial\Omega,\\ \mu,\tau>0,\end{cases}\tag{3.14}$$

y consideramos la superficie:

$$\Sigma=\{(\mu,s\theta(\mu),(1-s)\theta(\mu)):\mu\in[0,1]\}.$$

Definimos los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} Y &= L^p(\Omega)\times L^p(\Omega),\\ X &= \{(y,z)\in W^{2,p}(\Omega)\times W^{2,p}(\Omega):\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial n}=0 \text{ en } \partial\Omega\},\\ X_2 &= \{(y,z)\in X:\int_\Omega(y(x)-z(x))\theta(x,\mu)dx=0\},\end{aligned}$$

donde $p > N/2$, por lo que $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ y $\mu > 0$ dado.
Se fijan μ_1 y μ_2 raíces consecutivas de GH donde:

$$G(\mu) = \int_\Omega (\rho_{11} - \rho_{21})\theta^3(a-\theta) \quad \text{y} \quad H(\mu) = \int_\Omega (\rho_{22} - \rho_{12})\theta^3(a-\theta).$$

Corresponden a los desarrollos de primer orden de los valores propios de los equilibrios semi-triviales del sistema. Para $\mu > 0$ definimos:

$$\Sigma_\mu := \{(s\theta(\mu), (1-s)\theta(\mu)) : s \in [0,1]\},$$

que corresponde al conjunto de las soluciones no triviales del sistema cuando $\tau = 0$. Partimos demostrando el siguiente lema

Lema 3.9. *$(u,v) \to (s\theta, (1-s)\theta)$ en $(C_{2,\alpha}(\Omega))^2$ cuando $\tau \to 0$.*

Demostración. Definamos $\Phi_1 = (1 + \tau(\rho_{11}u + \rho_{12}v))u$, $\Phi_2 = (1 + \tau(\rho_{21}u + \rho_{22}v))v$, estas funciones satisfacen

$$\begin{aligned} \mu\Delta\Phi_1 + (a-u-v)\Phi_1 = 0 \quad \text{en } \Omega, \text{ con } \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad \partial\Omega, \\ \mu\Delta\Phi_2 + (a-u-v)\Phi_2 = 0 \quad \text{en } \Omega, \text{ con } \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

Supongamos que Φ_1, Φ_2 alcanzan en el máximo al interior de Ω en x^*, luego en este punto se tiene que

$$\begin{aligned} a(x^*) - u(x^*) - v(x^*) &\geq 0, \\ \Longrightarrow \qquad a(x^*) &\geq u(x^*) + v(x^*), \\ \Longrightarrow \qquad M &\geq u(x^*) + v(x^*), \end{aligned}$$

donde M corresponde al máximo de $a(x)$ en $\bar{\Omega}$, con lo obtenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_1(x^*) &\leq M, \\ \Longrightarrow \quad \Phi_1(x) &\leq M \quad \forall x \in \Omega, \\ \Longrightarrow \quad (1 + \tau(\rho_{11}u(x) + \rho_{12}v(x)))u(x) &\leq M \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

en particular $u(x) \leq M$, análogamente tenemos que $v(x) \leq M$, luego Φ_1, Φ_2 satisfacen

$$\mu\Delta\Phi_1 - \Phi_1 = f(\Phi_1) \text{ en } \Omega, \text{ con } \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad \partial\Omega, \tag{3.15}$$

Con $f(\Phi_1)$ acotada, lego por regularidad Sobolev se tiene que $\|\Phi_1\|_{C^{1,\alpha}(\Omega)}$ está acotada, entonces, salvo subsucesión, se tiene que existe Φ_1^* tal que $\Phi_1 \to \Phi_1^*$ uniforme, lo que implica que $u \to \Phi_1^*$, análogamente para v se tiene que $v \to \Phi_2^*$ y $u + v$ resuelve

$$\mu\Delta\theta + (a(x) - \theta)\theta = 0,$$

con lo que concluimos que $(u,v) \to (s\theta, (1-s)\theta)$. ∎

Ahora estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de este capítulo

Teorema 3.10. *Supongamos que las funciones G y H no tienen raíces comunes y sean μ_1 y μ_2 dos raíces consecutivas de la función GH.*

i) Si $GH < 0$ en (μ_1, μ_2), entonces el sistema (3.1) no tiene estados de coexistencia para τ pequeño y positivo.

ii) Si $GH > 0$ en (μ_1, μ_2), entonces existe una vecindad U de Σ y $\delta > 0$ tal que para $\tau \in (0, \delta)$, el conjunto de soluciones de (3.1) en U consiste en las soluciones semitriviales $(\mu, \tilde{u}(\mu, \tau), 0), (\mu, 0, \tilde{v}(\mu, \tau))$, y el conjunto $\Gamma \cap U$, donde:

$$\Gamma = \{(\mu, u(\mu, \tau), v(\mu, \tau)) : \mu_1 - \delta \leq \mu \leq \mu_2 + \delta\}.$$

Aquí:

$$\begin{aligned} u(\mu, \tau) &= [s^*(\mu, \tau) - s_1(\mu, \tau)][\theta(\mu) + \bar{y}(\mu, \tau)], \\ v(\mu, \tau) &= [s_2(\mu, \tau) - s^*(\mu, \tau)][\theta(\mu) + \bar{z}(\mu, \tau)], \end{aligned}$$

para ciertas funciones suaves s^* y $(\bar{y}, \bar{z})$ tomando valores en $\mathbb{R}$ y X_2, respectivamente y satisfacen:

$$s^*(\mu, 0) = s_0(\mu) := H(\mu)/[G(\mu) + H(\mu)], \bar{y}(\mu, 0) = \bar{z}(\mu, 0) = 0. \tag{3.16}$$

Además, si μ_1 y μ_2 son raíces simples de GH, entonces existen un par de funciones suaves $\underline{\mu}(\tau)$ y $\bar{\mu}(\tau)$ en $[0, \delta)$ tal que $\underline{\mu}(0) = \mu_1, \bar{\mu}(0) = \mu_2$, y para cualquier $\tau \in [0, \delta)$ se tiene que $s^*(\mu, \tau)[1 - s^*(\mu, \tau)] = 0$ con $\mu \in (\mu_1 - \delta, \mu_2 + \delta)$ si y solo si $\mu \in \{\underline{\mu}(\tau), \bar{\mu}(\tau)\}$.

Demostración. Consideramos soluciones del sistema cercanas a Σ, las que podemos escribir únicamente (detalles en [12]) como:

$$(u, v) = (s\theta(\mu), (1 - s)\theta(\mu)) + (y, z), \tag{3.17}$$

donde $s \in (0, 1)$, y $(u, v) \in X_2$. Por lo que buscamos soluciones de esta forma, fijamos $\tilde{\mu} > 0$ y consideramos la función:

$$F(y, z, \mu, \tau, s) = \begin{pmatrix} \mu\Delta y - s(y + z)\theta + (a - \theta)y + f_1(y, z, \mu, \tau, s) \\ \mu\Delta z - (1 - s)(y + z)\theta + (a - \theta)z + f_2(y, z, \mu, \tau, s) \end{pmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned} f_1(y, z, \mu, \tau, s) &= \tau\mu\Delta[\rho_{11}(s\theta + y)^2 + \rho_{12}((1 - s)\theta + z)(s\theta + y)] - (y + z)y, \\ f_2(y, z, \mu, \tau, s) &= \tau\mu\Delta[\rho_{21}(s\theta + y)((1 - s)\theta + z) + \rho_{22}((1 - s)\theta + z)^2] - (y + z)z, \end{aligned}$$

con lo cual:

$$F(0, 0, \mu, 0, s) = 0; F(0, 0, \mu, \tau, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau\mu\Delta(\rho_{22}\theta^2) \end{pmatrix}; F(0, 0, \mu, \tau, 1) = \begin{pmatrix} \tau\mu\Delta(\rho_{11}\theta^2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

y denotamos:

$$L = L(\mu, s) = D_{(y,z)}F(0,0,\mu,0,s) \in LC(X,Y).$$

con lo que tenemos:

$$L(s,\mu)(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \mu\Delta\varphi + (a-\theta)\varphi - s(\varphi+\psi)\theta \\ \mu\Delta\psi - (a-\theta)\psi - (1-s)(\varphi+\psi) \end{pmatrix}.$$

Este operador resulta ser lineal compacto gracias a la compacidad de la inyección de $W^{(2,p)}(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$. definimos también:

$$P(y,z) = \frac{\int_\Omega \theta[(1-s)y - sz]}{\int_\Omega \theta^2} \begin{pmatrix} \theta \\ -\theta \end{pmatrix},$$

que es proyector continuo sobre el kernel de L. Buscamos soluciones del tipo:

$$\begin{aligned} (u(\cdot,\mu,\tau),0) &= (s_1\theta(\mu),(1-s_1)\theta(\mu)) + (\eta_1(\tau,\mu),\zeta_1(\tau,\mu)), \\ (0,v(\cdot,\mu,\tau)) &= (s_2\theta(\mu),(1-s_2)\theta(\mu)) + (\eta_2(\tau,\mu),\zeta_2(\tau,\mu)). \end{aligned}$$

Donde $s_1 = \sigma_1(\tau,\mu), s_2 = \sigma_2(\tau,\mu)$ con:

$$\begin{aligned} \sigma_1(0,\mu) = 1 \quad \text{y} \quad (\eta_1(0,\mu),\zeta_1(0,\tau)) = (0,0), \\ \sigma_2(0,\mu) = 0 \quad \text{y} \quad (\eta_2(0,\mu),\zeta_2(0,\tau)) = (0,0). \end{aligned}$$

Para encontrar soluciones de (3.14) queremos encontrar soluciones no triviales de:

$$F(y,z,\mu,\tau,s) = 0 \quad \text{para} \quad y,z \in X_2.$$

Además tenemos, por definición de equilibrio semitrivial, que:

$$\begin{aligned} F(\eta_1(\tau,\mu),\zeta_1(\tau,\mu),\mu,\tau,\sigma_1(\tau,\mu)) &\equiv 0 \quad \text{para} \quad \tau \in (0,\delta), \mu \in (\tilde{\mu}-\delta,\tilde{\mu}+\delta), \\ F(\eta_2(\tau,\mu),\zeta_2(\tau,\mu),\mu,\tau,\sigma_2(\tau,\mu)) &\equiv 0, \end{aligned}$$

y consideramos:

$$P(s,\mu)F(y,z,\mu,\tau,s) = 0, \tag{3.18}$$

$$(I - P(s,\mu))F(y,z,\mu,\tau,s) = 0. \tag{3.19}$$

La segunda ecuación tiene solución dada por el teorema de la función Implícita, tenemos que existe $\delta_1 > 0$, una vecindad V de $(0,0) \in X_2$ y una función suave:

$$(\mu,\tau,s) \mapsto (y(\mu,\tau,s),z(\mu,\tau,s)) : (-\delta_1,\delta_1) \times (-\delta_1, 1+\delta_1) \times (\tilde{\mu}-\delta_1,\tilde{\mu}+\delta_1) \to X_2.$$

Dado que y y z satisfacen (3.19) obtenemos que:

$$\begin{aligned} (y(\mu,\tau,0),z(\mu,\tau,0)) &= (0,0), \\ (y(\mu,\tau,\sigma_1(\tau,\mu)),z(\mu,\tau,\sigma_1(\tau,\mu))) &= (\eta_1(\tau,\mu),\zeta_1(\tau,\mu)), \\ (y(\mu,\tau,\sigma_2(\tau,\mu)),z(\mu,\tau,\sigma_2(\tau,\mu))) &= (\eta_2(\tau,\mu),\zeta_2(\tau,\mu)). \end{aligned}$$

Así (y,z,μ,τ,s) satisfacen $F(y,z,\mu,\tau,s)=0$ si y sólo si $y=y_1(\mu,\tau,s), z=z_1(\mu,\tau,s)$ y (μ,τ,s) resuelve $P(\mu,s)F(y_1(\mu,\tau,s),z_1(\mu,\tau,s),\mu,\tau,s)=0$
Denotamos

$$P(s,\mu)F(y(\mu,\tau,s),z(\mu,\tau,s),\mu,\tau,s)=\xi(\mu,\tau,s)(\theta,-\theta).$$

La ecuación de bifurcación es equivalente a

$$\xi(\mu,\tau,s)=0, \tag{3.20}$$

y tenemos que:

$$\xi(\mu,0,s)\equiv\xi(\mu,\tau,\sigma_1(\tau,\mu))\equiv\xi(\mu,\tau,\sigma_2(\mu,\tau,s)\equiv 0,$$

por lo que podemos factorizar:

$$\xi(\mu,\tau,s)\equiv\tau(\sigma_1(\tau,\mu)-s)(s-\sigma_2(\tau,\mu))\xi_1(\mu,\tau,s),$$

para alguna función suave $\xi_1(\tau,s,\mu)$. Las soluciones de (3.20) distintas de las triviales vienen dadas por:

$$\xi_1(\mu,\tau,s)=0. \tag{3.21}$$

Calculamos la derivada en τ:

$$\begin{aligned}\partial_\tau\xi(\mu,\tau,s) &= (\sigma_1(\tau,\mu)-s)(s-\sigma_2(\tau,\mu))\partial_\tau\xi_1(\mu,\tau,s)+\tau(\cdots),\\ \partial_\tau\xi(\mu,0,s) &= s(1-s)\partial_\tau\xi_1(\mu,0,s).\end{aligned}$$

Así obtenemos que:

$$P(s,\mu)F_\tau(0,0,\mu,0,s)=\partial_\tau\xi(\mu,0,s)(\theta,-\theta).$$

Donde:

$$F_\tau(y,z,\mu,\tau,s)=\begin{pmatrix}\mu\Delta(\rho_{11}(s\theta+y)^2+\rho_{12}((1-s)\theta+z)(s\theta+y)\\ \mu\Delta(\rho_{21}(s\theta+y)((1-s)\theta+z)+\rho_{22}((1-s)\theta+z)^2)\end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow F_\tau(0,0,\mu,0,s)=\begin{pmatrix}\mu\Delta(s^2\theta^2+(1-s)s\rho_{12}\theta^2)\\ \mu\Delta(s(1-s)\rho_{21}\theta^2+(1-s)^2\theta^2\end{pmatrix},$$

por lo que:

$$\begin{aligned}P(s,\mu)F_\tau(0,0,\mu,0,\tau) &= \frac{\int_\Omega s(1-s)\mu\Delta[(s\rho_{11}+(1-s)\rho_{12}-s\rho_{21}-(1-s)\rho_{22})\theta^2]\theta}{\int_\Omega\theta^2}(\theta,-\theta)\\ &= -s(1-s)\frac{\int_\Omega[s(\rho_{11}-\rho_{21})+(1-s)(\rho_{12}-\rho_{22})]\theta^3(a-\theta)}{\int_\Omega\theta^2}(\theta,-\theta)\\ &= s(1-s)[\frac{-sG(\mu)+(1-s)H(\mu)}{\int_\Omega\theta^2}](\theta,-\theta),\end{aligned}$$

lo que implica que:

$$\xi_1(\mu,0,s)=\frac{-sG(\mu)+(1-s)H(\mu)}{\int_\Omega\theta^2}. \tag{3.22}$$

Por lo que si $G(\tilde{\mu})H(\tilde{\mu}) < 0$, tomamos δ_2 tan pequeño como sea necesario, tenemos por (3.22) que la ecuación de bifurcación no tiene solución, lo que implica que no existen estados de coexistencia.
Por otra parte si $GH > 0$ en (μ_1, μ_2) tenemos:

$$\partial_s \xi_1(\mu, 0, s) = \frac{-(G(\mu) + H(\mu))}{\int_\Omega \theta^2} \neq 0,$$

aplicamos el teorema de la función implícita y obtenemos que para cualquier $\tilde{\mu} \in [\mu_1, \mu_2]$ existe $\delta_3 > 0$ tal que todas las soluciones de $\xi_1(\mu, \tau, s) = 0$ en la vecindad $(\tilde{\mu} - \delta_3, \tilde{\mu} + \delta_3) \times (-\delta_3, \delta_3) \times (-\delta_3, 1 + \delta_3)$ estan dadas por $s = s^*(\mu, \tau)$ para $\tau \in (-\delta, \delta)$ y $\mu \in (\tilde{\mu} - \delta_3, \tilde{\mu} + \delta_3)$, donde $s^*(\mu, \tau)$ es un función suave que satisface $s^*(\mu, 0) = s_0(\mu)$. Entonces el conjunto de soluciones de $\xi(\mu, \tau, s) = 0$ consiste en la superficies $\tau = 0, s = 0, s = 1$ y $s = s^*(\mu, \tau)$.
Resumiendo, tenemos que las soluciones (μ, u, v) de (3.14) cercanas a Σ, a parte de las semi-triviales estan dadas por (3.17) con $y = y_1(\mu, \tau, s), z = z_1(\mu, \tau, s)$ y $s = s^*(\mu, \tau)$. ■

3.6. Estabilidad de los estados de coexistencia

En esta sección estudiamos la estabilidad de las ramas de soluciones de (3.14) encontradas en la sección anterior. A través de esta sección suponemos que $\mu_1 < \mu_2$ son dos raíces consecutivas de GH, las cuales son simples y $GH > 0$ en (μ_1, μ_2). Para $\tau \in (0, \delta), \mu \in (\mu_1 - \delta, \mu + \delta)$, con $\delta > 0$ suficientemente pequeño, usamos la representación para soluciones de (3.14) contenidas en Γ. También como en el teorema anterior, $\underline{\mu}(\tau)$ y $\bar{\mu}(\tau)$ son las raíces de $s^*(\mu,\tau)[1 - s^*(\mu,\tau)] = 0$ con $\underline{\mu}(0) = \mu_1, \bar{\mu}(0) = \mu_2$.
Sea $(\mu, u, v) = (\mu, u(\mu,\tau), v(\mu,\tau))$ un estado de coexistencia contenido en Γ. La estabilidad de (u, v) está determinada por el signo de λ_1, el valor principal del problema:

$$\begin{cases} \mu\Delta[(1+\tau(2\rho_{11}u+\rho_{12}v))\phi] + (a-2u-v)\phi + \tau\mu\Delta\rho_{12}u\psi - u\psi = -\lambda_1\psi & \text{en } \Omega, \\ \mu\Delta[(1+\tau(\rho_{21}u+2\rho_{22}v))\psi] + (a-u-2v)\psi + \tau\mu\Delta\rho_{21}v\phi - v\phi = -\lambda_1\psi & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.23}$$

Necesitaremos los siguientes lemas para obtener una fórmula para λ_1, la que será útil para determinar su signo.

Lema 3.11. *Para $\tau > 0$ pequeño el valor propio principal $\lambda_1 = \lambda_1(\mu.\tau)$ de (3.23) satisface:*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_\Omega (\phi v - \psi u) + \tau\lambda_1 \int_\Omega [(2\rho_{21}u+\rho_{22}v)\phi v - (\rho_{11}u+\rho_{12}v)\psi u] &= \\ \int_\Omega (a-u-v)[(2\rho_{11}u+\rho_{12}v)\phi v - (\rho_{21}u+2\rho_{22}v)\psi u + (\rho_{12}\psi - \rho_{21}\phi)uv] &+ \\ (a-u-2v)(\rho_{11}u+\rho_{12}v)\psi u - (a-2u-v)(\rho_{21}u+\rho_{22}v)\phi v &+ \\ ((\rho_{21}u+\rho_{22}v)\psi - (\rho_{11}u+\rho_{12}v)\phi)uv. \end{aligned}$$

Demostración. Multiplicamos la primera ecuación de (3.23) por $(1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))v$ y la segunda por $(1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))u$ e integrando por partes se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega -(a-u-v)(1+\tau(2\rho_{11}u+\rho_{12}v))\phi v &+ (a-2u-v)(1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))\phi v \\ -\tau(a-u-v)\rho_{12}\psi uv - (1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))\psi uv &= -\lambda_1 \int_\Omega (1+\tau(\rho_{21}u+\rho_{22}v))\phi v. \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega -(a-u-v)(1+\tau(\rho_{21}u+2\rho_{22}v))\psi u &+ (a-u-2v)(1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))\psi u \\ -\tau(a-u-v)\rho_{21}\phi uv - (1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))\phi uv &= -\lambda \int_\Omega (1+\tau(\rho_{11}u+\rho_{12}v))\psi u. \end{aligned}$$

Restamos ambas expresiones y obtenemos el lema. ■

Para determinar el signo de λ_1 para τ pequeño, consideramos 3 casos, μ cercano a μ_1, μ cercano a μ_2 y μ entre μ_1 y μ_2, en el último caso, el signo de λ_1 se puede determinar por el siguiente resultado.

Lema 3.12. *Para $\eta > 0$,*

$$\int_\Omega \theta^2(\mu_1) \lim_{\tau\to 0^+} \frac{\lambda(\mu,\tau)}{\tau} = \frac{G(\mu)H(\mu)}{G(\mu)+H(\mu)}.$$

Uniformemente en $\mu \in [\mu_1+\eta, \mu_2-\eta]$.

Demostración. Usamos la representación del lema anterior:

$$\lambda_1 \int_\Omega (\phi v - \psi u) + \tau\lambda_1 \int_\Omega [(2\rho_{21}u+\rho_{22}v)\phi v - (\rho_{11}u+\rho_{12}v)\psi u]$$

$$= \int_\Omega (a-u-v)[(2\rho_{11}u+\rho_{12}v)\phi v - (\rho_{21}u+2\rho_{22}v)\psi u + (\rho_{12}\psi - \rho_{21}\phi)uv]$$
$$+(a-u-2v)(\rho_{11}u+\rho_{12}v)\psi u - (a-2u-v)(\rho_{21}u+\rho_{22}v)\phi v$$
$$+[(\rho_{21}u+\rho_{22}v)\psi - (\rho_{11}u+\rho_{12}v)\phi]uv$$

$$= \int_\Omega (a-u-v)\phi v - (a-u-v)\psi u + \tau(a-u-v)(2\rho_{11}u+\rho_{12}v)\phi v - \tau(a-u-v)(\rho_{21}u+2\rho_{22}v)\psi u$$
$$+(a-u-2v)\psi u + \tau(a-u-2v)(\rho_{11}u+\rho_{12}v)\psi u - (a-2u-v)\phi v - \tau(a-2u-v)(\rho_{21}u+\rho_{22}v)\phi v$$
$$+\tau(a-u-v)(\rho_{12}\psi-\rho_{21}\phi)uv + (\psi-\phi)uv + \tau[(\rho_{21}u+\rho_{22}v)\psi - (\rho_{11}u+\rho_{12}v)\phi]uv$$
$$= \tau\int_\Omega (a-u-v)[(2\rho_{11}u+\rho_{12}v)\phi v - (\rho_{21}u+2\rho_{22}v)\psi u + (\rho_{12}\psi-\rho_{21}\phi)uv]$$
$$+(a-u-2v)(\rho_{11}u+\rho_2 v)\psi u - (a-2u-v)\phi v + [(\rho_{21}u+\rho_{22}v)\psi - (\rho_{11}u+\rho_{12}v)\phi]uv.$$

Tomamos límite cuando $\tau \to 0^+$ se tiene que $(u,v) \to (s_0\theta, (1-s_0)\theta), (\phi,\psi) \to (\theta, -\theta)$ con lo cual:

$$\frac{\lambda_1}{\tau}\int_\Omega (\phi v - \psi u) + \lambda_1 \int_\Omega [(2\rho_{21}u+\rho_{22}v)\phi v - (\rho_{11}u+\rho_{12}v)\psi u]$$

$$= \int_\Omega (a-\theta)[(2\rho_{11}s_0\theta+\rho_{12}(1-s_0)\theta)(1-s_0)\theta^2 + (\rho_{21}s_0\theta+2\rho_{22}(1-s_0)\theta)s_0\theta^2 - (\rho_{12}\theta+\rho_{21}\theta)s_0(1-s_0)\theta]$$
$$-(a-(s_0+2(1-s_0))\theta)(\rho_{11}s_0\theta+\rho_{12}(1-s_0)\theta)s_0\theta^2$$
$$-(a-(2s_0+(1-s_0))\theta)(\rho_{21}s-0\theta+\rho_{22}(1-s_0)\theta)(1-s_0)\theta^2$$
$$-[(\rho_{21}s_0\theta+\rho_{22}(1-s_0)\theta)\theta + (\rho_{11}s_0\theta+\rho_{12}(1-s_0)\theta)\theta]s_0(1-s_0)\theta^2$$

$$= \int_\Omega (a-\theta)\theta^3[(2s_0\rho_{11}+(1-s_0)\rho_{12})(1-s_0) + (s_0\rho_{21}+2(1-s_0)\rho_{22})s_0 - (\rho_{12}+\rho_{21})s_0(1-s_0)]$$
$$-(a-2\theta)(s_0\rho_{11}+(1-s_0)\rho_{12})s_0\theta^3 - (s_0\rho_{11}+(1-s_0)\rho_{12})s_0^2\theta^4$$
$$-(a-\theta)(s_0\rho_{21}+(1-s_0)\rho_{22})(1-s_0)\theta^3 + (s_0\rho_{21}+(1-s_0)\rho_{22})(1-s_0)s_0\theta^3$$
$$-[s_0\rho_{21}+(1-s_0)\rho_{22}+s_0\rho_{11}+(1-s_0)\rho_{12}]s_0(1-s_0)\theta^4$$

$$= \int_\Omega (a-\theta)\theta^3[2s_0(1-s_0)\rho_{11} + (1-2s_0)(1-s_0)\rho_{12} - (1-2s_0)s_0\rho_{21} - (1-3s_0)(1-s_0)\rho - 22]$$

$$-(a-\theta)(s_0\rho_{11}+(1-s_0)\rho_{12})s_0\theta^3+(s_0\rho_{11}+(1-s_0)\rho_{12})s_0(1-s_0)\theta^4$$
$$-(a-\theta)(s_0\rho_{21}+(1-s_0)\rho_{22})(1-s_0)\theta^3+(s_0\rho_{11}+(1-s_0)\rho_{12})s_0(1-s_0)\theta^4$$
$$=\int_\Omega (a-\theta)\theta^3[(2-3s_0)s_0(\rho_{11}-\rho_{21})+(1-3s_0)(1-s_0)(\rho_{12}-\rho_{22})]$$
$$=(2-3s_0)s_0G(\mu)-(1-3s_0)(1-s_0)H(\mu)$$
$$=\frac{HG}{G+H}.$$

Donde la última igualdad viene de que $s_0=\frac{H}{G+H}$, lo que prueba el lema. ■

Ahora consideramos el caso $H(\mu_1)=0$, con lo cual se tiene que $s^*(\underline{\mu},\tau)=0$, donde $\underline{\mu}=\underline{\mu}(\tau)$ y también

$$(u(\underline{\mu},\tau),v(\underline{\mu},\tau))=(0,\theta(\underline{\mu})+\tau u_1(\underline{\mu})+o(\tau)).$$

El signo de $\lambda_1(\mu,\tau)$ cuando μ está cercano a μ_1 esta determinado por el siguiente lema:

Lema 3.13. *Supongamos que $H(\lambda_1)=0$. Entonces se tiene que:*

$$\lim_{(\mu,\tau)\to(\mu_1,0)}\frac{\lambda_1(\mu,\tau)}{\tau(\mu,\underline{\mu})}=\frac{H'(\mu_1)}{\int_\Omega\theta(\mu_1)}.$$

Demostración. Denotamos por $I(\mu,\tau)$ al lado derecho de la igualdad del lema 3.11, entonces $I(\underline{\mu},\tau)=0$, en efecto: Dado que $u(\underline{\mu},\tau)=0$ tenemos que $v(\underline{\mu},\tau)$ satisface:

$$\underline{\mu}\Delta[(1+\tau\rho_{22}v)v]+(a-v)v=0 \quad \text{ en } \Omega, \frac{\partial v}{\partial n}=0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Por otra parte $\phi(\underline{\mu},\tau)$ satisface:

$$\underline{\mu}\Delta[(1+\tau\rho_{12}v)\phi]+(a-v)\phi=0 \quad \text{ en } \Omega, \frac{\partial \phi}{\partial n}=0 \text{ en } \partial\Omega,$$

luego multiplicamos la ecuación que satisface v por $(1+\tau\rho_{22}v)\phi$ e integramos por partes:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \underline{\mu}\Delta[(1+\tau\rho_{22}v)v](1+\tau\rho_{12}v)\phi+(a-v)v(1+\tau\rho_{12}v)\phi &=0,\\ \int_\Omega -(1+\tau\rho_{22}v)v(a-v)\phi+(a-v)v\phi(1+\tau\rho_{12}v) &=0,\\ \int_\Omega \tau(\rho_{12}-\rho_{22})v^2(a-v)\phi &=0,\\ \int_\Omega(\rho_{12}-\rho_{22})v^2(\underline{\mu})(a-v(\underline{\mu})) &=0.\end{aligned}$$

Con esto tenemos que:

$$I(\underline{\mu},\tau)=0.$$

En efecto, dado que $u(\underline{\mu},\tau)=0$, tenemos que:

$$I(\underline{\mu},\tau)=\int_\Omega(\rho_{12}-\rho_{22})v^2(\underline{\mu})(a-v(\underline{\mu})),$$

y de lo anterior se concluye. Por el teorema del valor medio tenemos que existe $\mu^*=\mu^*(\tau)\in(\mu,\underline{\mu})$ tal que:

$$I(\mu,\tau)=(\mu-\underline{\mu})I_\mu(\mu^*,\tau).$$

La derivada de I con respecto a μ es:

$$\begin{aligned}
I_\mu(\mu,\tau)=\int_\Omega -(u_\mu+v_\mu)[(2\rho_{11}u+\rho_{12}v)\phi v-(\rho_{21}u+2\rho_{22}v)\psi u+(\rho_{12}\psi-\rho_{21}\phi)uv]\\
+(a-u-v)[(2\rho_{11}u_\mu+\rho_{12}v_\mu)\phi v+(2\rho_{11}u+\rho_{12}v)(\phi_\mu v+\phi v_\mu)-(\rho_{21}u_\mu+2\rho_{22}v_\mu)\psi u\\
-(\rho_{21}u+2\rho_{22}v)(\psi_\mu u+\psi u_\mu)+(\rho_{12}\psi_\mu-\rho_{21}\phi_\mu)uv+(\rho_{12}\psi-\rho_{21}\phi)(u_\mu v+uv_\mu)]\\
-(u_\mu+2v_\mu)(\rho_{11}u+\rho_{12}v)\psi u+(a-u-2v)[(\rho_{11}u_\mu+\rho_{12}v_\mu)\psi u+(\rho_{11}u+\rho_{12}v)(\psi_\mu u\psi u_\mu)]\\
+(2u_\mu+v_\mu)(\rho_{21}u+\rho_{22}v)\phi v-(a-2u-v)[(\rho_{21}u_\mu+\rho_{22}v_\mu)\phi v+(\rho_{21}u+\rho_{22}v)(\phi_\mu v+\phi v_\mu)]\\
+[(\rho_{21}u_\mu+\rho_{22}v_\mu)\psi+(\rho_{21}u+\rho_{22}v)\psi_\mu-(\rho_{11}u_\mu+\rho_{12}v_\mu)\phi-(\rho_{11}u+\rho_{12}v)\phi_\mu]uv\\
+[(\rho_{21}u+\rho_{22}v)\psi-(\rho_{11}u+\rho_{12}v)\phi](u_\mu v+uv_\mu),
\end{aligned}$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned}
I_\mu(\mu_1,0)=\int_\Omega -\rho_{12}\theta'\theta^3+(a-\theta)[(2\rho_{11}s_0'\theta+\rho_{12}(\theta'-s_0'\theta))\theta^2+\rho_{12}\theta^2(\theta_\mu-s_0'\theta)\\
+2\rho_{22}\theta^3s_0'-(\rho_{12}+\rho_{21})s_0'\theta^3]-(a-2\theta)\rho_{21}s_0'\theta^3+(s_0'\theta+\theta')\rho_{22}\theta^3\\
-(a-\theta)[(\rho_{21}s_0'\theta+\rho_{22}(\theta'-s_0'\theta))\theta^2+\rho_{22}\theta(\theta'\theta+\theta(\theta'-s_0)]-(\rho_{22}\theta^2+\rho_{12}\theta^2)s_0'\theta^2\\
=\int_\Omega(\rho_{22}-\rho_{12})\theta'\theta^3+(a-\theta)[2s_0'\theta(\rho_{11}-\rho_{21})+(3\theta'-4s_0'\theta)(\rho_{12}-\rho_{22})]\theta^2\\
=-H'(\mu_1)+2s_0'G(\mu_1).
\end{aligned}$$

Dado que $H(\mu_1)=0$, tenemos que $s_0(\mu_1)=H'(\mu_1)/G(\mu_1)$, con lo cual:

$$I_\mu(\mu_1,0)=H'(\mu_1).$$

Esto junto al lema anterior nos permite concluir la demostración. ■

Ahora estamos en condiciones para demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.14. *Suponga que μ_1,μ_2 son dos ceros consecutivos de GH, los cuales son ambos simples y $GH>0$ en (μ_1,μ_2). Entonces existe $\tau_0>0$ tal que para cada $\tau\in(0,\tau_0)$ y cada $\mu\in(\underline{\mu}(\tau),\bar{\mu}(\tau))$, tenemos:*

i) $\lambda_1(\mu,\tau)>0$ *siempre que* $G>0$ *y* $H>0$ *en* (μ_1,μ).

ii) $\lambda_1(\mu,\tau)<0$ *siempre que* $G<0$ *y* $H<0$ *en* (μ_1,μ).

Demostración. Solo demostramos $(i), (ii)$ es análogo. Por contradicción, supongamos que existen sucesiones $\tau_i \to 0$ y $\mu_i \in (\underline{\mu}(\tau_i), \bar{\mu}(\tau_i))$ con $\lambda_1(\mu_i, \tau_i) \leq 0$ para todo $i = 1, 2...$ pasando a una subsucesión si es necesario, se puede asumir que $\mu_i \to \mu^*$. Dado que $\underline{\mu}(\tau_i) \to \mu_1$ y $\bar{\mu}(\tau_i) \to \mu_2$, tenemos que $\mu^* \in [\mu_1, \mu_2]$. Hay dos casos a considerar:
Caso I: $\mu^* \in (\mu_1, \mu_2)$, por el lema (3.12) tenemos:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\lambda_1(\mu_i, \tau_i)}{\tau_i} = \frac{G(\mu^*)H(\mu^*)}{G(\mu^*) + H(\mu^*)} > 0.$$

Luego $\lambda_1(\mu_i \tau_i)$ es positivo para i grande, lo que contradice la suposición.
Caso II: $\mu^* = \mu_1$ o $\mu^* = \mu_2$, para el caso $\mu^* = \mu_1$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que $H(\mu_1) = 0$. Dado que $H > 0$ en (μ_1, μ_2) y μ_1 es raíz simple de H tenemos que $H'(\mu_1) > 0$ luego por el lema 8:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\lambda_1(\mu_i, \tau_i)}{\tau_i(\mu_i - \underline{\mu}(\tau_i))} = -\frac{H'(\mu_1)}{\int_\Omega \theta^2} > 0.$$

Dado que $\mu_i > \underline{\mu}(\tau_i)$, por lo anterior $\lambda_1(\mu_i, \tau_i) > 0$ para i grande, lo que nuevamente contradice la suposición. Con esto probamos el teorema, los otros casos son análogos. ■

A continuación vemos un ejemplo de difusión cruzada como estrategia de movimiento.

Recordemos que según la Ley de Fick podemos considerar a ρ_{ij} con $i,j=1,2$ como la percepción que una especie tiene de la otra y de sí misma y esta percepción afecta a la manera en que se va a desplazar y distribuir cada especie

$$-\nabla(\mu u+\rho_{11}u+\rho_{12}v)=F(u,v),$$

luego esperamos que en el soporte de ρ_{11},ρ_{12} la especie u difunda más que en las regiones donde estas funciones sean nulas.

En este contexto hablamos de estrategias de movimiento y se espera que estas estrategias produzcan equilibrios estacionarios de coexistencia, para ello usamos el teorema 3.1 y se define ρ_{ij} con $i,j=1,2$ en función de $a(x)$, dado que esta función representa el crecimiento intrínseco de la población u, es natural pensar que donde mÃąs negativa sea esta función será más complicado para las especies prosperar, por ello buscamos ρ_{11},ρ_{12} en función de la parte negativa de $a(x)$, asi recordando que

$$H(\mu) \;=\; \int_\Omega(\rho_{22}-\rho_{12})\theta^3(a-\theta), \tag{3.24}$$

tomamos $\rho_{22}=r_{22}a_-$ y $\rho_{12}=r_{12}a_-$ donde r_{12},r_{22} son constantes positivas y $a_-(x)$ es la parte negativa de $a(x)$ definida por $a_-(x)=\max\{0,-a(x)\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} H(\mu) &= \int_\Omega(r_{22}a_- - r_{12}a_-)\theta^3(a-\theta),\\ &= (r_{22}-r_{12})\int_\Omega a_-\theta^3(a-\theta),\\ &= -(r_{22}-r_{12})\int_\Omega a_-\theta^3(a_-+\theta), \end{aligned}$$

donde la función $a_-\theta^3(a_-+\theta)\geq 0$ en Ω con lo que

$$\int_\Omega a_-\theta^3(a_-+\theta)\geq 0,$$

lo que permite darle signo a la función $H(\mu)$ dependiendo de los factores r_{22} y r_{12}, análogamente es posible darle signo a la función $G(\mu)$ dependiendo de los factores r_{11} y r_{21}, por lo que podemos encontrar estrategias que permitan tanto coexistencia como extinción de alguna de ellas. Cabe mencionar que en este caso $a_+(x)$ no tiene la regularidad necesaria, por lo que habría que considerar la regularizada de esta función y como la convergencia de la regularizada es uniforme este resultado sigue siendo válido.

Qué otro tipo de funciones permiten darle signo a $H(\mu)$? En general tomando

$$\rho_{ij}(x)=\sum_{k=1}^n r_k(i,j)a_-^k(x),$$

donde las constantes positivas $r_k(i,j)$ se escogen apropiadamente.

Dado que a las funciones ρ_{ij} le exigimos que tengan condición de borde Neumann también es necesario incluir esta condición en la función $a_(x)$.

También podemos destacar el casos en los que por este método no es posible determinar si hay coexistencia estable, por ejemplo al considerar $\rho_{11} = \rho_{21}$ y/o $\rho_{12} = \rho_{22}$, una u ambas de nuestras funciones se anulan por lo que no es posible aplicar el teorema de estabilidad, tal vez habría que considerar desarrollos de orden mayor pues recordemos que en esta memoria hemos considerado desarrollos de segundo orden.

Bibliografía

[1] H. Amann, "Dynamic theory of quasilinear parabolic equations. II. Reaction-Diffusion systems", Differential and Integral Equations, Volumen 3, Number 1, January 1990, pp. 13-75.

[2] H. Amann, "Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces", SIAM Rev. 18, 620-709.

[3] R. S. Cantrell y C. Cosner "Spatial ecology via reaction-diffusion equations", Series in Mathematical and Computational Biology, Jhon Wiley and Sons, Chichester, UK, 2003.

[4] Y. S. Choi, R. Lui, Y. Yamada, "Existence of Global Solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with weak cross-difussion", Discrete and continuos dynamical systems, vol9, num.5, September 2003.

[5] Y. S. Choi, R. Lui, Y. Yamada, "Existence of Global Solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with strongly coupled cross-difussion", Discrete and continuos dynamical systems, vol.10, num.3, April 2004.

[6] D. De Figueiredo, "Positive solutions of semilinear elliptic problems", Differential equations (Sao Paulo, 1981), 34-87, Lectures Notes in Math. 957 , Springer, Berlin-New York.

[7] P. Deuring, "An initial-Boundary-Value Problem for a certain Density-Dependent Difussion System", Mathematische Zeitschrift, 194, 375-396 (1987).

[8] J. Dockery, V. Hutson, K. Mischaikow y M. Pernarowsky, "The evolution of slow dispersal rates: a reaction-diffusion model", J. Math. Biol. 37(1998) 61-63.

[9] L. Evans, "Partial differential equations", Graduates Studies in Mathematics 19, AMS, Providence, RI.

[10] A. Friedman, "Partial differential equations of parabolic type". Englewood Cliffs, N.J.:Prentice Hall 1964.

[11] D. Gilbarg, N.S Trudinger, "Elliptic partial differential equations of second order". Berlin Heidelberg New York, Springer (1977).

[12] V. Hutson, Y. Lou, K. Mischaikow and P. Polácik, "Competing species near a degenerated limit", SIAM J. Math. Anal. Vol.35, No. 2, pp. 453-491.

[13] V. Hutson, K. Mischaikow y G. Vickers "Limit behavior for a competing species problem with diffusion", Dinamycal Systems and Applications, World Sci. Ser. Appl. Anal. 4, World Scientific, River Edge, NJ, 1995, 501-533.

[14] K. Kawasaki, N. Shigesada, E. Teramoto, "Spatial segregation of interacting species". J. Theor. Biol. 79, 83-99 (1979).

[15] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N Uralceva, "Linear and Quasi-linear Equations of parabolic Type". Translation of monograph, volumen 23, AMS.

[16] Y. Li, C. Zhao, "Global existence of solutions to a cross.difusion system in higher dimensional domains", Discrete and continuos dynamical systems, vol.13, num.2, February 2005.

[17] Y. Lou, S. Martínez y P. Poláčik."Loops and Branches of coexistence states in a Lotka-Volterra competition model".

[18] Y. Lou y W. Ni, "Difussion, Self-Difussion and Cross-Diffusion", Journal of differential equations 131, 79-131(1996), article no. 0157.

[19] Y. Lou, W. Ni, Y. Wu, "On the Global existence of a Cross-diffusion System". Discrete and Continuos Dynamical systems, volume 4, number 2, april 1998.

[20] M. H. Protter and H. F. Weinberger, "Maximum Principle in differential equations", Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1967.

[21] K. Ryu y I. Ahn, "Positive steady-states for two interacting species models with linear self-cross diffussions", Discrete and continuos dynamical systems, vol.9, num.4, July 2003.

[22] G. Simonett, "Center Manifolds for quasilinear reaction-diffusions systems", Diferential and integral Equations, Volume 8, Number 4, April 1995, pp. 753-796.