



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS**

**MODELOS PARA CARACTERIZAR LA VARIABILIDAD ESPACIAL DE LEYES EN
DEPÓSITOS MINEROS**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

FELIPE ANDRÉS KREMER AEDO

**PROFESOR GUÍA
XAVIER EMERY**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN
NANCY LACOURLY
JULIAN ORTIZ CABRERA**

**SANTIAGO DE CHILE
ENERO 2008**

RESUMEN

En la mayoría de los casos, los proyectos mineros consideran una primera etapa de exploración y evaluación de recursos. Tal evaluación se realiza a partir de una toma de muestra, como lo es por ejemplo, una campaña de sondajes. Se busca describir la distribución de las leyes de elementos de interés en el depósito en forma numérica, y así entre otras cosas poder tomar las mejores decisiones en un contexto de incertidumbre.

La evaluación se realiza habitualmente mediante técnicas geoestadísticas, como kriging o simulaciones condicionales. Estas últimas se basan en modelos de funciones aleatorias, siendo el modelo multigaussiano el más conocido y ampliamente utilizado. No obstante, en ocasiones éste puede no ser el modelo más pertinente para describir el comportamiento de las leyes en el depósito, particularmente cuando éstas presentan distinta continuidad en función de una ley de corte.

En este trabajo se presenta un caso de estudio, en el cual se aplica un modelo alternativo definido como el mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes, el cual logra reproducir este comportamiento. Se analiza el impacto del modelo en lo que se refiere a la cantidad de recursos recuperables y curvas tonelaje-ley, de lo que se concluye que existen diferencias con respecto al modelo convencional. Estas diferencias son poco significativas para leyes de corte menores, mientras que se incrementan para las leyes mayores. Por otro lado, éstas tienden a ser más importantes cuando se consideran bloques de menor tamaño. Si bien la estimación de leyes muestra un menor sesgo, resulta menos precisa a la luz de los resultados obtenidos de validaciones cruzadas. En este sentido, la inferencia de los parámetros del modelo alternativo a partir del ajuste de los variogramas de indicadores puede ser insuficiente, además de presentar una mayor complejidad.

En cuanto al modelo multigaussiano, si bien su pertinencia en este caso particular es cuestionable, éste se reafirma como un modelo robusto, y se recomienda su uso en ausencia de otro modelo que se ajuste mejor a los datos.

ABSTRACT

In most cases, mining projects consider a first stage of exploration and resource evaluation. Such an evaluation is made from sample data, for example, from a set of exploration drill holes. The idea is to describe the distribution of grades in the ore deposit in a numeric way, in order to make the best decisions in an uncertainty context.

The evaluation is usually made by using geostatistical techniques, like kriging or conditional simulations. This last technique is based on models of random fields, where the multi-gaussian model is the most popular and commonly used. However, in some cases, this model may not be the most appropriate to describe the spatial distribution of mineral grades in the ore deposit, especially when these grades show properties like asymmetries in the spatial correlation of the quantile indicators with respect to the median grade.

A case study is presented in this work, consisting of the evaluation of mineral resources by applying an alternative model defined as the minimum of two independent gaussian random fields, which reproduces the mentioned properties. The model impact with respect to the quantifying of the amount of resources (tonnages and metal contents) is studied, from which one observes little differences between this model and the conventional one. These difference are little for low cutoff-grades, but they grow for high values. On the other hand, these difference are more important when the size of the simulated block is smaller. Cross-validations show that the grade estimate is unbiased, but it is less precise. In this sense, the inference of the model parameters from the analysis of indicator variograms could be insufficient, besides it presents more complexity.

Although in this case study, the multi-gaussian model is questionable, it turns out to be a robust model, so that its application is recommended, for lack of a better model.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, por haberme dado la oportunidad de estudiar. A mi tía Paola, por apoyarme especialmente durante los últimos años de mi carrera.

A María Elena y su mamá, por ser una motivación constante y apoyarme en todo momento.

A mis compañeros y amigos, con quienes tuve la posibilidad de compartir y pasar momentos importantes de mi vida.

A los profesores Xavier Emery y Julián Ortiz, por su amabilidad y excelente disposición. Le agradezco especialmente al profesor Xavier Emery por su preocupación y dedicación en este trabajo.

Al profesor Alfonso Ovalle, por sus consejos, comprensión y apoyo en esta etapa.

A Codelco, por patrocinar la Cátedra de Evaluación de Yacimientos del Departamento de Ingeniería de Minas de la Universidad de Chile, y a Conicyt, que a través del proyecto Fondecyt N° 1061103, "Cuantificación de la incertidumbre en atributos geológicos, mineros y metalúrgicos: nuevos modelos geoestadísticos y aspectos de implementación", hizo posible la realización de este trabajo.

INDICE

1	INTRODUCCIÓN.....	5
1.1	Introducción.....	5
1.2	Motivación.....	6
1.3	Objetivos.....	6
1.3.1	Objetivo general.....	6
1.3.2	Objetivos específicos.....	6
1.4	Alcances.....	7
1.5	Resumen por capítulos.....	7
2	ANTECEDENTES.....	9
2.1	Conceptos básicos de geoestadística.....	9
2.1.1	Función aleatoria.....	9
2.2	Métodos de estimación.....	10
2.2.1	Método de kriging.....	10
2.2.2	Simulación.....	11
2.3	Modelos de función aleatoria.....	12
2.3.1	Modelo multigaussiano.....	13
2.3.2	Otros modelos paramétricos.....	16
2.4	Algoritmos de simulación.....	19
2.4.1	Método de bandas rotantes.....	19
2.4.2	Algoritmos de condicionamiento.....	20
3	METODOLOGIA.....	22
4	CASO DE ESTUDIO.....	24
4.1	Estudio exploratorio.....	24
4.1.1	Estadísticas básicas.....	25
4.2	Transformación de los datos.....	26
4.2.1	Test del carácter bigaussiano.....	27
4.3	Análisis variográfico.....	30
4.4	Simulación convencional.....	31
4.5	Análisis de los variogramas de indicadores y elección del modelo complejo.....	36
4.6	Inferencia de los parámetros del modelo.....	37
4.7	Simulación aplicando el modelo complejo.....	45
4.8	Validación de las simulaciones.....	53
5	CONCLUSIONES.....	55
6	BIBLIOGRAFIA.....	57
7	ANEXOS.....	58
7.1	Caso de estudio.....	58
7.1.1	Estudio exploratorio.....	58
7.1.2	Transformación de los datos.....	61
7.1.3	Análisis variográfico.....	62
7.1.4	Simulación convencional (modelo multigaussiano).....	63
7.1.5	Ajuste de los variogramas de indicadores.....	68
7.1.6	Simulación aplicando el modelo complejo.....	71
7.1.7	Validación de las simulaciones.....	77

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

En la industria minera, los proyectos asociados al estudio de nuevos yacimientos, o bien aquellos que pretenden incrementar la cantidad de recursos disponibles mediante la búsqueda de nuevos sectores mineralizados, próximos a la faena en explotación, consideran en la mayoría de los casos una etapa de exploración y de evaluación de recursos. Tal evaluación se realiza a partir de una toma de muestra, como lo es por ejemplo, una campaña de sondajes. Se busca principalmente poder describir el depósito en forma numérica, y así entre otras cosas, poder tomar las mejores decisiones en un contexto de incertidumbre. Por otro lado, y dado los altos montos de inversión asociados a este tipo de proyectos, esta etapa tiene suma relevancia para los estudios posteriores, en otras palabras, en la medida que se cuente con información y modelos de mejor calidad, se pueden esperar resultados y análisis más certeros.

A la hora de efectuar una estimación de recursos, se utilizan técnicas geoestadísticas como kriging o simulaciones condicionales. Estas últimas se basan en la teoría de funciones aleatorias, y permiten además realizar otro tipo de análisis, como por ejemplo, análisis de riesgo o de incertidumbre.

En el caso de las simulaciones condicionales, en particular para el estudio de leyes de mineral en depósitos mineros, se emplea habitualmente el llamado modelo multigaussiano, el cual corresponde a un modelo de función aleatoria caracterizado por una distribución espacial multigaussiana. A partir de éste, se pretende caracterizar la variabilidad espacial de leyes, así como cuantificar la calidad y cantidad de recursos recuperables sobre una ley de corte. Fuera de este modelo, los modelos existentes se limitan principalmente a la descripción de variables discretas o categóricas.

El presente trabajo forma parte del proyecto Fondecyt N° 1061103, “Cuantificación de la incertidumbre en atributos geológicos, mineros y metalúrgicos: nuevos modelos geoestadísticos y aspectos de implementación”. Busca aplicar un modelo complejo de función aleatoria, definido a partir de modelos conocidos, y evaluar su impacto en lo que se refiere a la cantidad de recursos recuperables y curvas tonelaje-ley.

1.2 Motivación

En la actualidad, existen situaciones en las cuales los modelos convencionales no son capaces de describir adecuadamente el comportamiento de las leyes en los yacimientos mineros, particularmente en los casos que éstas presentan patrones como conectividad, agrupamiento espacial de valores extremos, anisotropías locales, o asimetrías en la correlación espacial de los variogramas de indicadores para umbrales simétricos con respecto a la mediana [3].

Es por esto que surge la motivación de aplicar modelos alternativos, que logren reproducir estas cualidades y que, en definitiva, puedan tener un mejor desempeño que los modelos convencionales en la predicción de leyes y la cuantificación de incertidumbre.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

El objetivo principal de este trabajo consiste en aplicar modelos de función aleatoria para simular leyes, los cuales están definidos a partir de operaciones simples sobre funciones aleatorias multigaussianas.

1.3.2 Objetivos específicos

- Buscar un modelo para describir un conjunto de datos reales.
- Definir metodologías para inferir los parámetros del modelo.
- Aplicar un modelo convencional (multigaussiano).
- Estudiar el impacto del modelo elegido en las curvas tonelaje-lei y cantidad de recursos recuperables.
- Analizar cómo varía este impacto según el tamaño de los bloques simulados.
- Comparar los modelos a partir de una validación cruzada o jackknife.

1.4 Alcances

Se efectúa una estimación de recursos a partir de una base de datos real, correspondiente a muestras de sondajes provenientes de una campaña de exploración para un yacimiento de tipo pórfido cuprífero, ubicado en la Cordillera de los Andes, en la zona central de Chile. Tal evaluación se hace mediante la técnica de simulaciones condicionales, para lo cual se emplean dos modelos de función aleatoria diferentes.

Los modelos utilizados se enmarcan dentro de los denominados modelos paramétricos, correspondientes a modelos de función aleatoria definidos completamente por un número pequeño de parámetros.

Se utiliza en primer lugar un modelo convencional, en este caso el modelo multigaussiano, y posteriormente un modelo complejo definido como el mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes. Con respecto a este último, se plantean los criterios para determinar el tipo de modelo a utilizar, así como una metodología para inferir los parámetros que lo caracterizan. Se evalúa también su impacto en lo que se refiere a la cantidad de recursos recuperables y curvas tonelaje-ley.

En ambos casos las simulaciones se realizan a partir de rutinas desarrolladas en el software MATLAB.

1.5 Resumen por capítulos

Esta sección describe brevemente lo que se presenta en cada uno de los capítulos de este trabajo.

El capítulo 2 corresponde a antecedentes. Éste muestra una revisión bibliográfica sobre los temas relacionados con el desarrollo de los objetivos de este trabajo. Se hace mención sobre aspectos generales de geoestadística, como el concepto de función aleatoria, se indican algunos métodos de estimación como kriging y sus cualidades, simulación, modelos de función aleatoria, y algunos modelos y algoritmos de simulación de uso habitual.

El capítulo 3 presenta la metodología aplicada para el desarrollo de este trabajo. Se muestra los pasos a seguir y se hace una descripción general de cada uno de ellos.

El capítulo 4 corresponde al caso de estudio. Éste consiste en la simulación de la ley de cobre total en una región de muestreo, mediante la aplicación de dos modelos de función aleatoria diferentes, y a partir de un conjunto de datos reales. Algunos elementos asociados a este estudio se encuentran también en el capítulo 7, correspondiente a los anexos.

El capítulo 5 presenta las conclusiones y discusiones del trabajo realizado. Se menciona las diferencias entre los resultados que se obtiene a partir de la aplicación de cada uno de los modelos planteados, así como con respecto a la calidad de las simulaciones.

Finalmente, los capítulos 6 y 7 corresponden a la bibliografía consultada por el autor, y los anexos del caso de estudio, respectivamente.

2 ANTECEDENTES

2.1 Conceptos básicos de geoestadística

La geoestadística se basa en el estudio de variables regionalizadas a partir de una toma de muestra. Estas variables corresponden a variables numéricas que se extienden en el espacio geográfico, como por ejemplo, la ley de cobre en un depósito minero. Mediante este estudio se busca caracterizar su variabilidad espacial y cuantificar la incertidumbre en los valores desconocidos de la variable.

Se utiliza normalmente un modelo probabilístico, ya que permite representar en mayor medida el aspecto “errático” de la variable regionalizada. Según éste, cada valor de la variable regionalizada, denotada comúnmente $z(x)$ donde x se refiere a la coordenada espacial, se interpreta como una realización de una variable aleatoria $Z(x)$. Ésta puede tomar cualquier valor dado por su distribución de probabilidad y puede ser continua o discreta. Por otro lado, se considera que las variables aleatorias en distintos sitios (x_1, \dots, x_n) están correlacionadas entre sí, lo que da cuenta de una dependencia espacial.

2.1.1 Función aleatoria

El conjunto de variables aleatorias $Z(x)$, correspondientes a todos los puntos de un dominio $D \subset R^3$, constituyen lo que se denomina una función aleatoria [1, 6]. Luego, la variable regionalizada es interpretada como una realización de esta función. La función aleatoria a su vez se caracteriza mediante una distribución espacial. Dado un grupo de puntos (x_1, \dots, x_n) , la distribución espacial se define como [1]:

$$n \in N^*$$

$$z_1, \dots, z_n \in R, \quad x_1, \dots, x_n \in D \subset R^3$$

$$F(z_1, \dots, z_n; x_1, \dots, x_n) = \text{Prob}(Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_n) < z_n)$$

En general, resulta difícil inferir completamente la distribución espacial, principalmente debido a que sólo se cuenta con una realización de la función aleatoria, a saber, la variable regionalizada en estudio. Al mismo tiempo, se dispone de un número limitado de datos sobre esta variable. Es por esto que normalmente se asume varias hipótesis que simplifican el problema de inferencia [6].

- Hipótesis de estacionaridad: la distribución espacial es invariante por traslación en el espacio. Esto quiere decir que se asume cierta homogeneidad de las propiedades de la variable regionalizada dentro del espacio en estudio.
- Hipótesis de ergodicidad: se puede aproximar las esperanzas matemáticas por un promedio en el espacio.

Debido a lo anterior, en ocasiones se caracteriza la distribución espacial sólo a partir de sus parámetros más importantes o primeros momentos: esperanza, varianza, covarianza y variograma. Los dos primeros corresponden a medidas de posición y dispersión respectivamente, mientras que los dos últimos miden el grado de similitud entre los datos en función de su separación [6].

2.2 Métodos de estimación

Buscan evaluar el valor de la variable regionalizada en un sitio no muestreado a partir de los datos circundantes. Existen diversas metodologías, como por ejemplo: método de los polígonos, inverso de la distancia, kriging y simulación condicional. A pesar de que las dos primeras metodologías son relativamente sencillas, resultan inconvenientes respecto de las ventajas que ofrecen las últimas dos.

2.2.1 Método de kriging

El estimador de kriging es un estimador lineal, es decir, estima el valor de la variable regionalizada a partir de una suma ponderada de los datos. A diferencia de los estimadores tradicionales, considera no sólo su configuración geométrica, sino que también su continuidad espacial (variograma). Otro factor importante es que cuantifica la precisión de la estimación a partir de lo que se conoce como varianza de kriging (varianza del error cometido).

Existen varias categorías o tipos de kriging, entre los cuales destacan el kriging simple (de media conocida), y el kriging ordinario (de media desconocida).

Limitaciones del estimador [1, 2, 5]:

- Suavizamiento: la dispersión de los valores estimados es menor que la de los datos verdaderos. Esto se traduce en una subestimación y sobreestimación de la variable regionalizada en las zonas de valores altos y bajos respectivamente. Por otra parte, el método es incapaz de reproducir la ocurrencia de valores extremos y produce un sesgo en la estimación de funciones que involucran a una ley de corte.
- Los ponderadores y la varianza de kriging no dependen del valor de los datos: esto resulta en la no consideración de la mayor variabilidad de las zonas de valores altos (efecto proporcional) y, por lo tanto, el método resta importancia a esta fuente de incertidumbre.

Debido a lo mencionado anteriormente, en algunas situaciones se recurre a otro tipo de técnicas, como es el caso de la estimación a partir de simulaciones.

2.2.2 Simulación

El principio de la simulación consiste en reproducir la variabilidad real de la variable regionalizada. La idea se basa en la generación de una serie de realizaciones de una misma función aleatoria, esto, siguiendo la lógica de que la variable regionalizada es una realización de esta función. Cada una de estas realizaciones es un escenario posible y permite obtener una imagen plausible de la realidad [1, 2, 5, 8].

Fuera de poder estimar el valor de la variable en sitios no muestreados, lo que habitualmente se hace mediante el promedio de varias simulaciones, esta metodología permite hacer un análisis de riesgo, por ejemplo al estudiar el mejor y peor escenario, además de cuantificar la incertidumbre en los valores desconocidos. Por otro lado, a diferencia del método de kriging, es posible estimar sin sesgo funciones sobre la variable, por ejemplo: recursos (tonelajes, leyes medias) recuperables sobre una ley de corte.

No obstante, los requerimientos necesarios para construir las realizaciones son más exigentes. Es preciso conocer la distribución espacial completa de la función aleatoria, no solamente su media y su variograma.

Puede distinguirse dos tipos de simulaciones:

- Simulación no condicional: reproduce la variabilidad de la variable regionalizada sin tomar en cuenta el valor de los datos cercanos.
- Simulación condicional: reproduce la variabilidad de la variable regionalizada y además respeta su valor en los puntos con datos, lo que entrega una imagen más realista.

Finalmente, los aspectos del problema de la simulación se resumen a continuación:

- Definir un modelo de función aleatoria.
- Tener herramientas para inferir sus parámetros.
- Generar una serie de realizaciones.
- Condicionar las realizaciones a los datos disponibles.

2.3 Modelos de función aleatoria

A grandes rasgos, pueden identificarse dos tipos de enfoque para simular funciones aleatorias. El primero es el de los llamados modelos paramétricos, el segundo corresponde a los modelos no paramétricos.

Los modelos no paramétricos [2, 5] buscan crear imágenes cuyas propiedades se asemejan a aquellas observadas con los datos disponibles (histograma, variograma, variogramas de indicadores...), sin especificar completamente la función aleatoria. Un ejemplo es el algoritmo secuencial de indicadores. Por otro lado, en algunas situaciones, estos pueden presentar inconsistencias matemáticas, ya que las propiedades de las realizaciones dependen de factores externos, como son el número total de sitios simulados, la configuración geométrica de los datos, y el volumen del dominio en estudio.

En cuanto a los modelos paramétricos [1, 8], la función aleatoria queda determinada por un modelo definido por un número pequeño de parámetros, de aquí su nombre. El modelo más conocido y que se utiliza con mayor frecuencia es el modelo multigaussiano. En éste, la distribución espacial que caracteriza a la función aleatoria queda determinada completamente a partir de la media de los datos y de su función de covarianza o su variograma.

En casos no multigaussianos, el desarrollo de modelos paramétricos ha sido escaso, restringido principalmente al modelamiento de variables categóricas. Algunos ejemplos de estos modelos corresponden a los modelos plurigaussiano, Booleano y de hojas muertas [8]. La poca variedad con relación al modelamiento de variables continuas, como es el caso de las leyes en yacimientos mineros, se explica fundamentalmente por la mayor dificultad que existe a la hora de condicionar las simulaciones a un conjunto de datos.

2.3.1 Modelo multigaussiano

Este modelo requiere transformar los datos originales a valores que tengan un histograma gaussiano estándar, es decir, con media igual a cero y varianza uno. Esta transformación se denomina función de transformación, o anamorfosis gaussiana.

El modelo posee propiedades matemáticas que facilitan su simulación, como el teorema del límite central. Entre los algoritmos de simulación que se usan habitualmente se encuentra el método secuencial, LU o de descomposición matricial, espectral continuo y el de bandas rotantes [7]. Con respecto al condicionamiento, éste puede ser realizado a partir de un kriging simple.

El modelo se basa en la hipótesis de que los datos transformados siguen una distribución multigaussiana (multivariable gaussiana). Esto significa que toda combinación ponderada de sus valores sigue una distribución normal [1].

Desde un punto de vista teórico, el carácter multigaussiano es muy exigente y difícil de verificar a partir de los datos, principalmente debido a que se requiere tener una gran cantidad de ellos en configuraciones que se repitan en el espacio. En la práctica se considera suficiente verificar sólo el carácter bigaussiano (o sea, las distribuciones entre pares de datos), siendo la inferencia de las distribuciones de orden superior difícilmente posible.

Una limitación del modelo es que no reproduce patrones como conectividad, anisotropías locales, ni agrupamiento espacial de valores extremos [2, 5], los cuales se observan a menudo en la distribución de leyes de mineral en yacimientos.

En la figura 2.1 y a modo de ejemplo, se muestran realizaciones para el modelo multigaussiano, considerando variogramas de tipo esférico y exponencial.

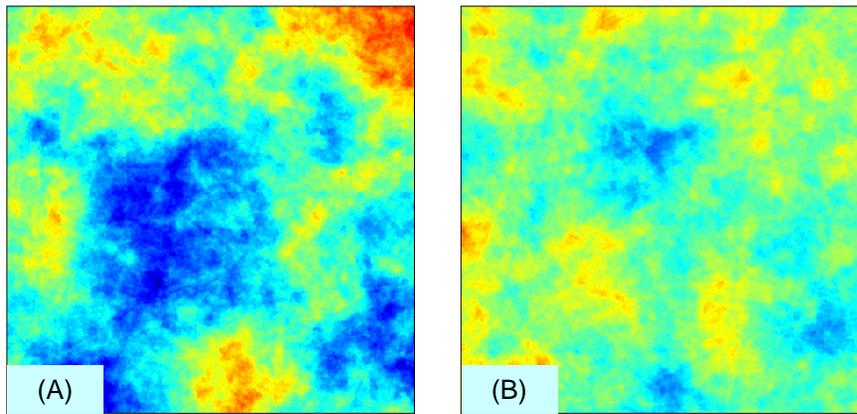


Figura 2.1: Realizaciones de modelo multigaussiano con variograma esférico (A) y variograma exponencial (B)

2.3.1.1 Test de la distribución bigaussiana

A continuación, se denotará como $\{Y(x), x \in R^3\}$ a la función aleatoria que representa a los datos transformados.

Nubes de correlación diferida

Bajo la hipótesis de binormalidad, las curvas de isodensidad de la distribución bivariable del par $\{Y(x), Y(x+h)\}$ son elipses concéntricas. Luego, para un vector h fijo, la nube de correlación diferida $\{(Y(x_a), Y(x_b)) / x_b - x_a = h\}$ debe tener una forma elíptica.

Cuando $|h|$ tiende a infinito, las curvas de isodensidad se vuelven circulares, lo que refleja la poca o nula correlación entre puntos distantes. Cuando $|h|$ tiende a cero, las nubes se ubican en torno a la primera bisectriz, esto debido a que valores cercanos están más correlacionados.

Comparación del variograma con el madograma

El madograma (o variograma de orden 1) se define como:

$$g_1(h) = \frac{1}{2} E\{|Y(x+h) - Y(x)|\}$$

Mientras que el variograma (de orden 2) es:

$$g(h) = \frac{1}{2} E\{[Y(x+h) - Y(x)]^2\}$$

Bajo el supuesto bigaussiano el madograma es proporcional a la raíz cuadrada del variograma, independiente de h .

$$\frac{\sqrt{g(h)}}{g_1(h)} = \sqrt{\rho} \approx 1,77$$

La relación debe cumplirse sobre los variogramas experimentales de los datos transformados.

Variogramas de indicadores

Bajo la hipótesis multigaussiana, existe una relación entre el variograma de los datos gaussianos y los variogramas de indicadores (variables binarias definidas en referencia a un umbral). La prueba consiste en modelar el variograma de los datos gaussianos, deducir el variograma del indicador asociado a un umbral dado y luego compararlo con el variograma experimental de este mismo indicador.

Para el caso de datos bigaussianos, los variogramas de indicadores relativos a distintos umbrales muestran una continuidad espacial simétrica con respecto al umbral mediano, lo que se traduce en la igualdad de los variogramas de indicadores asociados a cuantiles simétricos con respecto a la mediana.

En la figura 2.2 se presenta una imagen como ejemplo, para la cual se calculan los variogramas de indicador correspondientes al primer y tercer cuartil, los cuales reflejan la condición de simetría mencionada anteriormente.

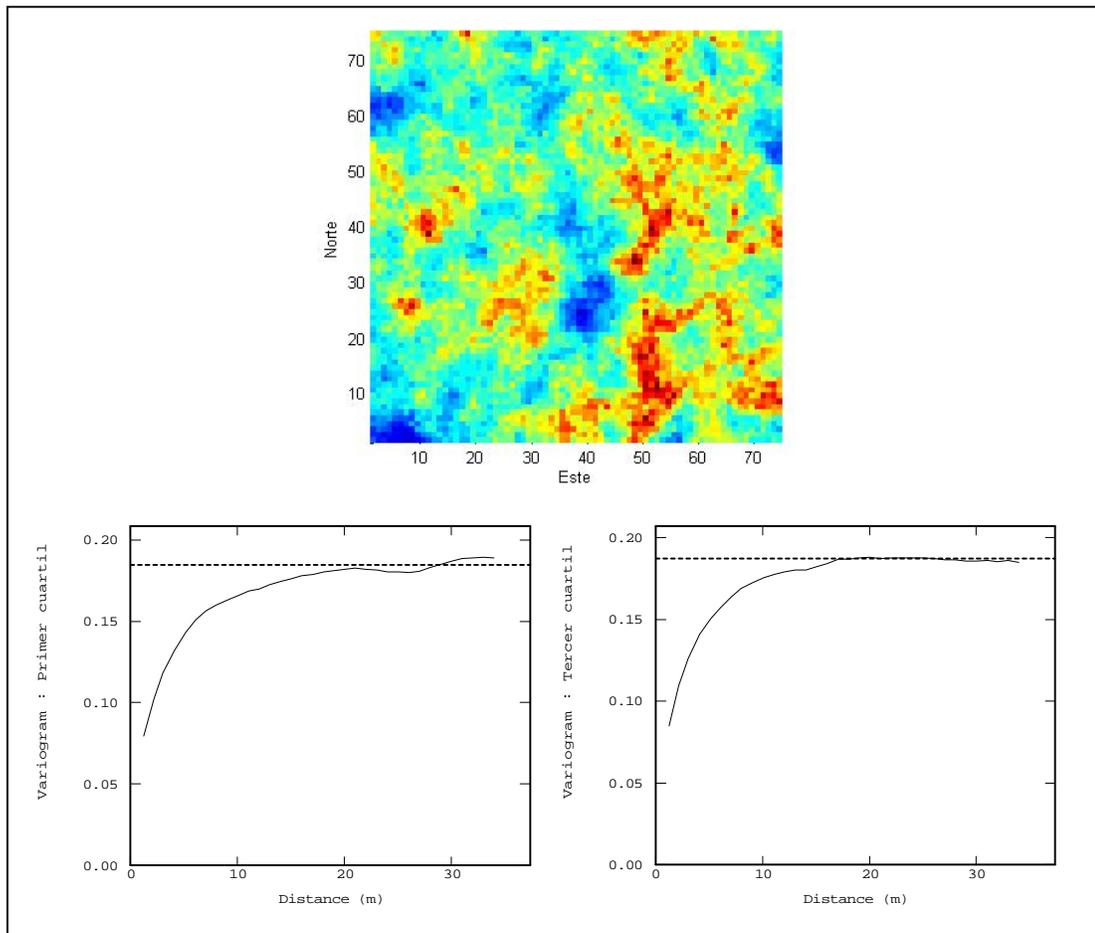


Figura 2.2: Imagen y variogramas de indicador para el primer y tercer cuartil (omnidireccionales)

2.3.2 Otros modelos paramétricos

Se puede definir modelos complejos de funciones aleatorias a partir de operaciones simples sobre funciones aleatorias multigaussianas [3]. Algunos ejemplos corresponden a los modelos de sustitución (en donde se componen dos funciones aleatorias), o a operaciones como el máximo de dos funciones multigaussianas, o el cuadrado de una función multigaussiana, entre otros. A diferencia del modelo multigaussiano, estos modelos pueden resultar más adecuados para describir variables regionalizadas con agrupamiento espacial de valores extremos, patrones de conectividad, o asimetría en la correlación espacial de los variogramas de indicadores con respecto al umbral mediano.

Con relación a esta última característica, puede hacerse una división entre los modelos que muestran una correlación espacial simétrica, y aquellos en los cuales se observa un comportamiento asimétrico.

Dentro de los primeros, puede mencionarse un modelo de sustitución, correspondiente a una función aleatoria multigaussiana en la cual se incorpora una pequeña perturbación sobre la coordenada [3]. El modelo se define como:

$$x \in \mathbb{R}^3, Y(x) = X(x + T(x))$$

Donde T es un vector aleatorio multigaussiano y X una función aleatoria multigaussiana independiente.

El vector T actúa como una perturbación sobre las coordenadas, y en consecuencia altera la distribución espacial de la función aleatoria X . Dependiendo del tipo de variograma utilizado para esta perturbación, puede obtenerse realizaciones con múltiples texturas, siendo posible observar patrones de agrupamiento espacial, conectividad y anisotropías locales.

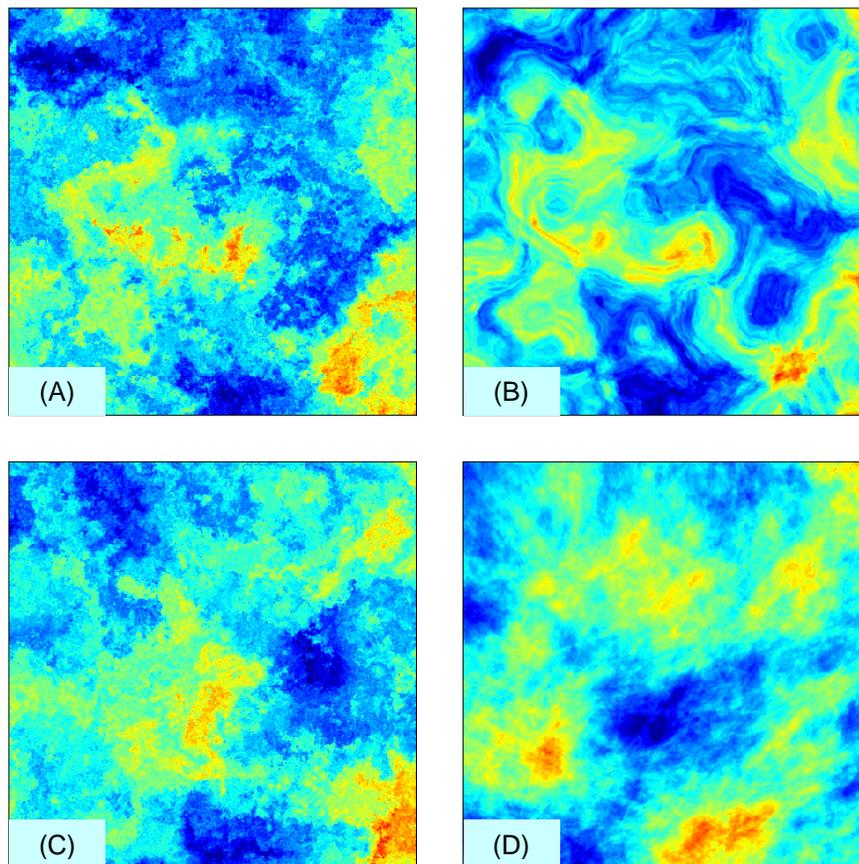


Figura 2.3: Realizaciones de modelo de sustitución correspondiente a una función aleatoria multigaussiana perturbada. Cada realización corresponde a una perturbación con un tipo de variograma específico: esférico (A), cúbico (B), exponencial (C), y seno cardinal (D).

En cuanto al segundo tipo de modelos, puede mencionarse un modelo definido como el máximo de dos funciones multigaussianas [3].

El modelo se plantea como:

$$x \in R^3, Y(x) = \max \{T_1(x); T_2(x)\}$$

Donde T_1 y T_2 son dos funciones aleatorias multigaussianas independientes.

Mediante este modelo se logran reproducir asimetrías de los variogramas de indicadores con respecto al umbral mediano. Usualmente, se observa que el cuantil superior muestra una mejor correlación que el inferior. Sin embargo, en los casos que los datos indiquen lo contrario, puede definirse un modelo “dual” en el cual en lugar del máximo, se tome el mínimo entre las dos funciones.

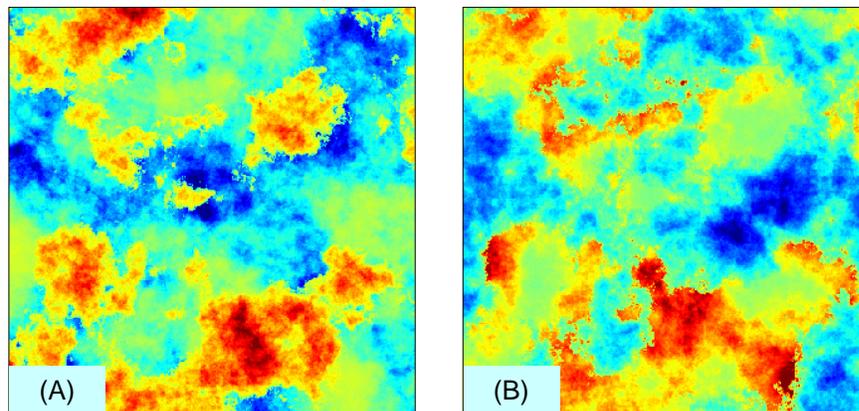


Figura 2.4: Realizaciones de modelos máximo (A) y mínimo (B) de dos funciones aleatorias multigaussianas

Otro modelo de este tipo corresponde al modelo chi cuadrado. Se considera una función aleatoria multigaussianas T y un número real no negativo a . El modelo se define como:

$$x \in R^3, Y(x) = [a + T(x)]^2$$

Si el parámetro a tiende a infinito, se obtiene que la correlación espacial de los variogramas de indicadores relativos al umbral mediano es simétrica. Por el contrario, si a es

igual a cero, se obtiene una correlación asimétrica [3]. Cuando a varía entre cero e infinito el modelo es capaz de reproducir condiciones intermedias.

2.4 Algoritmos de simulación

Existen varios algoritmos al momento de construir realizaciones de funciones aleatorias multigaussianas. Los que se utilizan con mayor frecuencia corresponden a [1, 2, 5, 8]:

- algoritmo secuencial
- método LU o de descomposición matricial
- método espectral continuo
- método de bandas rotantes

Es importante destacar que los dos primeros permiten realizar simulaciones condicionales directamente, es decir, no requieren de una etapa posterior de condicionamiento. A pesar de esto, puede optarse por otros métodos, como el de bandas rotantes, fundamentalmente para reducir los tiempos de cálculo.

2.4.1 Método de bandas rotantes

La característica principal de este método, es que permite generar simulaciones multidimensionales (en R^3) a partir de simulaciones unidimensionales (a lo largo de líneas).

El algoritmo se plantea como [4]:

$$" \hat{x} \in R^3, Y(x) = Y^{(1)}(\langle x | u \rangle)$$

Donde $Y^{(1)}$ corresponde a una función aleatoria unidimensional, u es un vector del espacio R^3 orientado en forma aleatoria, y $\langle x | u \rangle$ es la proyección del sitio x en la recta orientada por u .

Cada realización muestra una anisotropía zonal orientada a lo largo del vector u , por lo que es necesario sumar numerosas realizaciones independientes en distintas direcciones. De esta forma se obtiene:

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i^{(1)}(x | u_i)$$

Donde N es un número que se recomienda tomar cercano a 1000.

2.4.2 Algoritmos de condicionamiento

2.4.2.1 Condicionamiento mediante kriging

Esta metodología puede aplicarse cuando se simula una función aleatoria multigaussiana. La simulación condicional (sc) se obtiene mediante la siguiente relación [6]:

$$Y_{sc}(x) = Y^{KS}(x) + [Y_s(x) - Y_s^{KS}(x)]$$

Donde el primer término corresponde a un kriging simple a partir de los datos condicionantes, el segundo a una simulación no condicional, y el tercero a un kriging simple de ésta a partir de sus valores en los sitios de muestreo.

2.4.2.2 Muestreador de Gibbs

El muestreador de Gibbs consiste en un método iterativo basado en cadenas de Markov, que sirve para efectuar el condicionamiento de simulaciones en casos no multigaussianos [3, 8].

Este apunta a simular un vector aleatorio S , con una distribución de probabilidad multivariable \bullet , definido sobre un espacio \bullet . La idea es construir una secuencia de estados aleatorios $\{S_k, k \hat{=} N\}$, cuya distribución converja a la distribución deseada. La transición entre cada estado se define con una matriz o núcleo de transición P :

$$P(s, s') = Prob\{S_{k+1} = s' | S_k = s\}$$

La convergencia se logra si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:

- La cadena es irreducible, es decir, se puede visitar cada estado que tenga probabilidad positiva de ocurrencia, en un número finito de pasos.
- La cadena es aperiódica, es decir, no está forzada a seguir un ciclo de largo fijo entre ciertos estados.
- π es una distribución invariante para la matriz de transición P :

$$\pi(s) = \sum_{s' \in \Omega} P(s, s') \pi(s')$$

En el caso típico, la transición del estado S_k al S_{k+1} consiste en seleccionar un componente del vector S_k y reemplazar su valor por uno nuevo, dado por su distribución de probabilidad condicional al resto de los valores. Una alternativa para construir la matriz de transición es usar el algoritmo de Metropolis. En este caso la transición consiste en la propuesta de un estado candidato, de acuerdo a una matriz de transición irreducible, seguido por su aceptación o rechazo.

3 METODOLOGIA

El trabajo consiste en una aplicación práctica, en la cual se simula la ley de cobre total en una región de muestreo, mediante la aplicación de dos modelos de función aleatoria diferentes, y a partir de un conjunto de datos reales. Posteriormente se busca establecer si existen diferencias entre los resultados que se obtienen a partir de la aplicación de cada uno, y si esto varía al modificar el tamaño de los bloques simulados.

En primer lugar se realiza un estudio exploratorio de los datos. Este tiene por objeto descartar datos aberrantes y duplicados, es decir, aquellos datos que están fuera del rango habitual de valores, o que se encuentren espacialmente demasiado cercanos entre sí como para considerarse como datos distintos. Se corrigen también las estadísticas de posibles sesgos debidos al muestreo irregular, mediante un desagrupamiento de los datos. Además se despliegan vistas de planta y perfil para las muestras, esto con tal de hacer un primer análisis, determinar si existe alguna tendencia en particular, y en general, para anticipar cualquier dificultad que pueda presentarse en las etapas posteriores.

Luego, se aplica el modelo convencional (modelo multigaussiano), lo que requiere de una transformación de los datos originales para que tengan un histograma gaussiano estándar. Se efectúa entonces un análisis variográfico de los datos transformados con tal de identificar direcciones de anisotropía, y para establecer el modelo variográfico que se utilizará para la construcción de las simulaciones.

Se verifica también el grado en que los datos transformados son compatibles con la hipótesis del modelo multigaussiano, para lo cual se realizan una serie de pruebas. Se analizan las nubes de correlación diferida, la relación entre la raíz del variograma y el madograma, y el comportamiento de los variogramas de indicadores.

Las simulaciones generadas consisten en simulaciones condicionales tradicionales. Se efectúa una estimación de recursos y se calculan las curvas tonelaje-ley para distintos tamaños de bloque.

Se aplica posteriormente un modelo complejo de función aleatoria. Primero se busca un modelo que sea pertinente para los datos. Para esto se analizan los variogramas de indicadores, con tal de discriminar entre los modelos que presentan diferentes comportamientos

frente a la correlación espacial de estos variogramas con respecto al umbral mediano (simétrica o asimétrica). Una vez elegido el modelo, se infieren los parámetros que lo caracterizan.

En este caso, el modelo complejo utilizado corresponde a un modelo definido como el mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes. Los parámetros del modelo son inferidos a partir del ajuste de los variogramas de indicadores modelados con respecto a los variogramas de indicadores experimentales obtenidos para distintos cuartiles. El ajuste es verificado mediante la observación de los variogramas cruzados de indicadores.

Al igual que para el modelo multigaussiano, se generan simulaciones condicionales, se hace una estimación de recursos y se calculan las curvas tonelaje-ley para distintos soportes.

Por último, se realiza una comparación entre los resultados obtenidos a partir de la aplicación de cada uno de los modelos planteados, y se determina la precisión de cada uno mediante la validación de las simulaciones.

4 CASO DE ESTUDIO

El caso de estudio se realiza con muestras provenientes de sondajes de exploración de la División El Teniente, perteneciente a Codelco Chile. Cada una de las muestras contiene información sobre su ubicación espacial y ley de cobre total.

4.1 Estudio exploratorio

La campaña consta de 4.900 muestras. Éstas se encuentran dispersas en un espacio tridimensional, extendiéndose aproximadamente por 680 metros en la dirección norte-sur, 690 metros en la dirección este-oeste, y 710 metros en la vertical. Las muestras corresponden a compósitos de 10 metros a lo largo de cada sondaje.

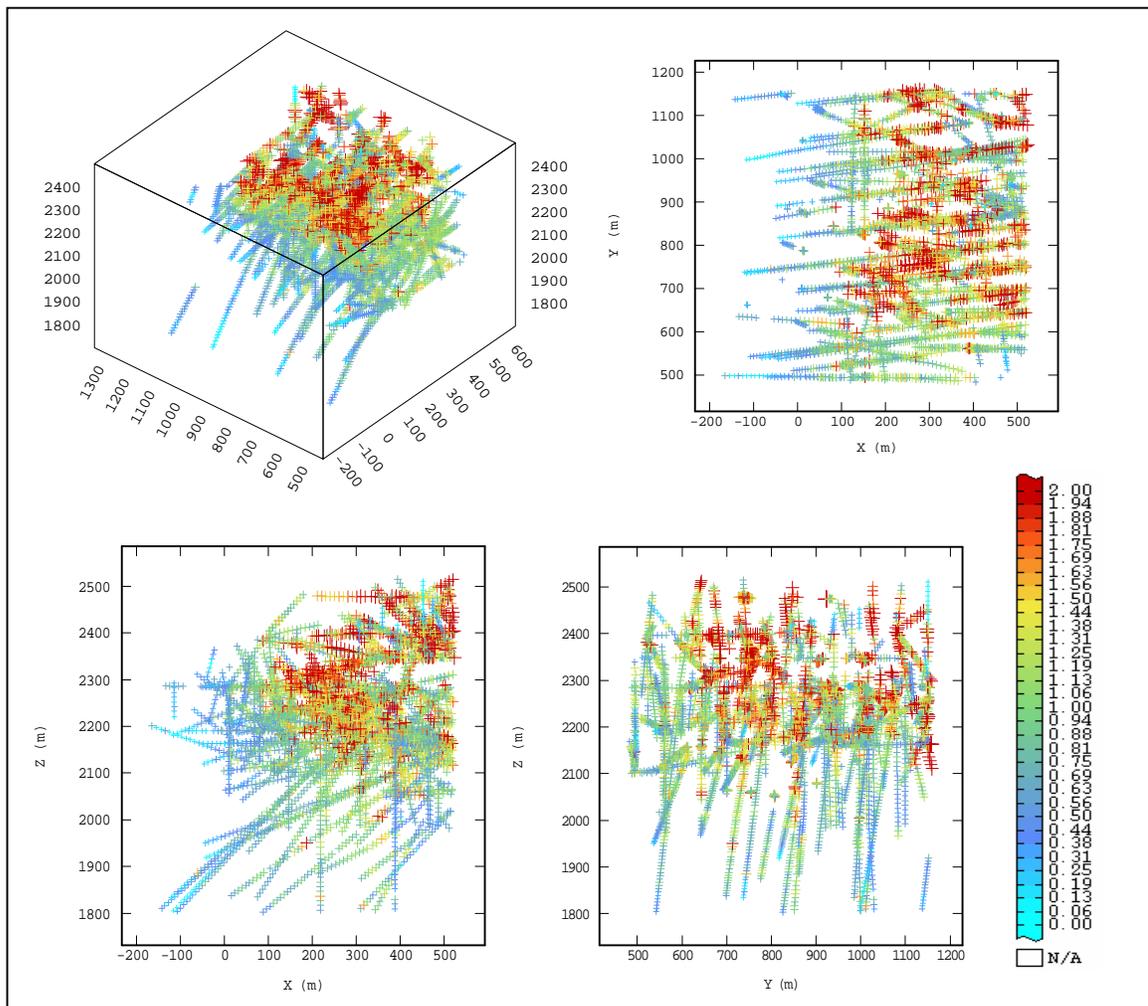


Figura 4.1: Visualización de los datos

En la figura 4.1 se muestra una vista isométrica, de planta (xy), y dos perfiles (norte-sur (zy) y este-oeste (zx)). La escala de color refleja la ley expresada como porcentaje.

De las imágenes anteriores se desprende que la distribución de las muestras es irregular en el espacio, distinguiéndose una mayor concentración sobre la cota 2.100. Por otro lado, se observa que las altas leyes se ubican principalmente en las zonas superiores, y en el sector este del campo muestreado.

4.1.1 Estadísticas básicas

Se realiza un estudio preliminar con el fin de detectar la presencia de datos aberrantes o duplicados que pudiesen inducir a errores. De este análisis se determina que no existen datos aberrantes, ya que las muestras se encuentran en el rango de valores habitual (entre 0 y 5%). Tampoco se encuentran datos duplicados, esto considerando como datos duplicados a aquellos que se ubican a distancias menores a 40 centímetros entre sí.

Luego, se desagrupan los datos con tal de corregir las estadísticas de posibles sesgos debidos al muestreo preferencial o irregular, asignando un peso a cada dato en función de su grado de aislamiento o de agrupamiento. Para esto se utiliza el método de las celdas [2], el cual divide la zona muestreada en celdas del mismo volumen, y asigna pesos proporcionales a cada dato dependiendo de la cantidad de muestras contenidas en ella. Para efectos de este estudio se considera apropiado utilizar una celda de $50 \times 50 \times 10 \text{ m}^3$, esto debido a que una celda de mayor volumen podría asignar un peso excesivo a las zonas que presentan menor cantidad de muestras.

	N° datos	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Varianza [%]
Datos	4.900	0,04	4,30	1,12	0,31
Datos desagrupados	4.900	0,04	4,30	1,05	0,30

Tabla 4.1: Estadísticas básicas de las muestras

La distribución de leyes (histogramas desagrupados) se muestra a continuación.

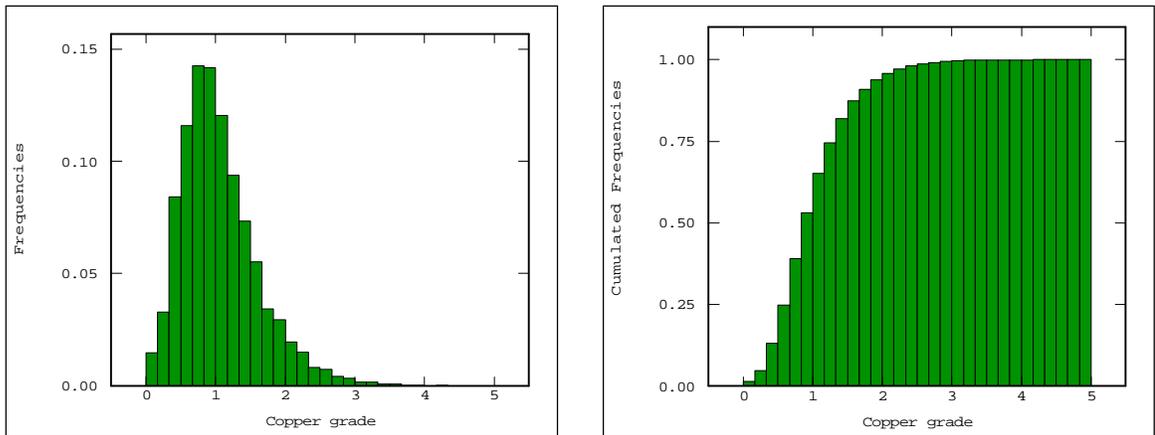


Gráfico 4.1: Histogramas bruto y acumulado para los datos desagrupados

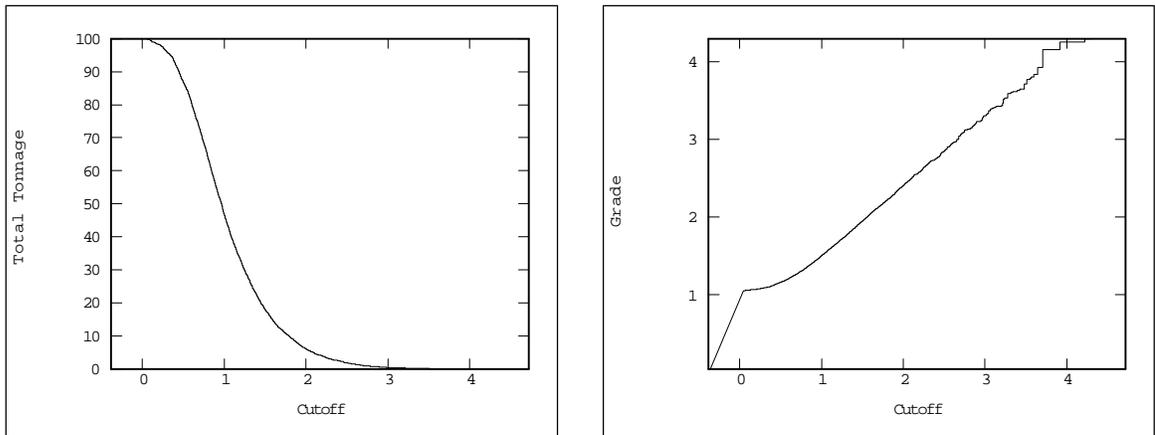


Gráfico 4.2: Curvas tonelaje-ley de corte y ley media-ley de corte

Se advierte de los gráficos anteriores que aproximadamente el 90% de las muestras se encuentra sobre una ley de corte de 0,5%, con una ley media de 1,16%.

4.2 Transformación de los datos

Los datos siguen una distribución de tipo lognormal. Para aplicar el modelo multigaussiano estos deben transformarse para que tengan un histograma gaussiano estándar, es decir, con media igual a 0 y varianza 1. La función de transformación, al igual que las estadísticas de los datos transformados, se presenta en anexos.

4.2.1 Test del carácter bigaussiano

Antes de aplicar el modelo multigaussiano se debe comprobar que los datos transformados cumplen con la hipótesis del modelo, es decir, que estos siguen una distribución multigaussiana. Por construcción de la función de anamorfosis la distribución univariable es gaussiana. Sin embargo esto no es suficiente, es necesario verificar además al menos el carácter bigaussiano de los pares de datos transformados. Para esto se analizan las nubes de correlación diferida, el cociente entre la raíz del variograma y el madograma, y los variogramas de indicadores.

4.2.1.1 Nubes de correlación diferida

En la figura 4.2 se muestran las nubes correspondientes a distancias de 10, 30, 50 y 70 metros. Se aprecia que, a medida que crece la distancia, las nubes se expanden con respecto a la primera bisectriz. Pese a esto, y a diferencia de la condición teórica, las formas de las nubes se asemejan más a gotas de agua que a formas elípticas. En este sentido el test no garantiza que los datos efectivamente sigan una distribución multigaussiana.

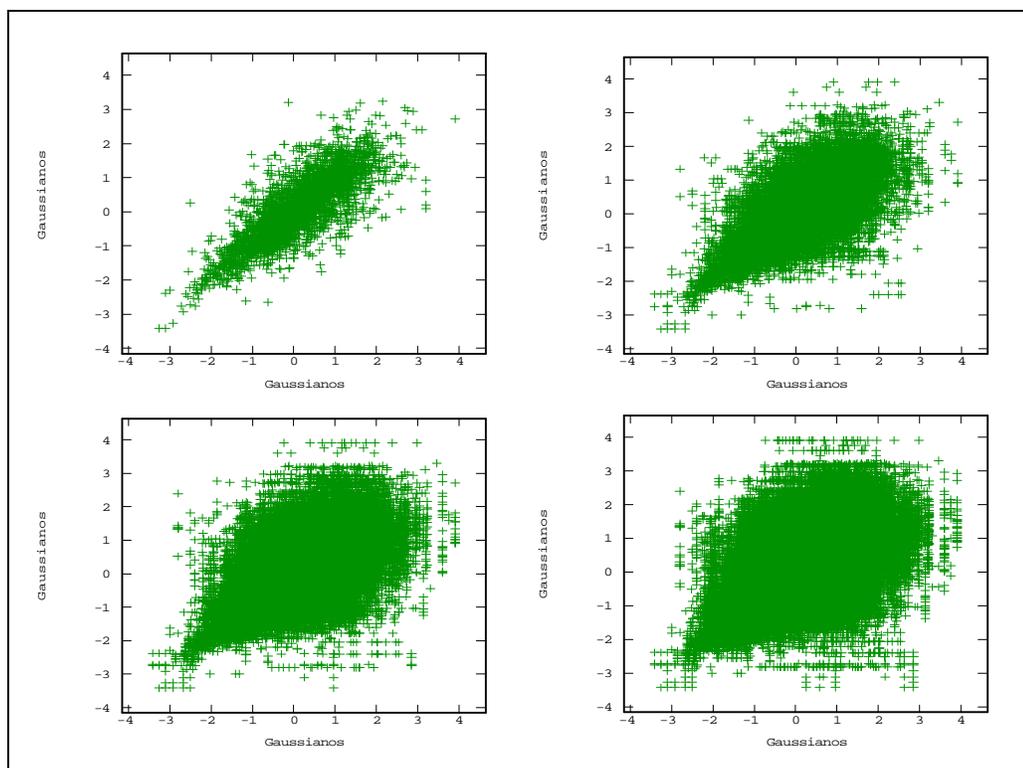


Figura 4.2: Nubes de correlación diferida

4.2.1.2 Raíz del variograma sobre el madograma

Se analizan los casos omnidireccional y para direcciones regulares (norte-sur, este-oeste y vertical). En ambos, el cociente se muestra decreciente en función de la distancia, alcanzando valores cercanos a 2 para distancias pequeñas, y estabilizándose en torno a 1,77 sólo para valores mayores a los 200 metros aproximadamente. A partir de lo anterior, se considera que los datos no logran reproducir los resultados que se esperarían para datos bigaussianos, y por lo tanto la prueba no certifica esta condición.

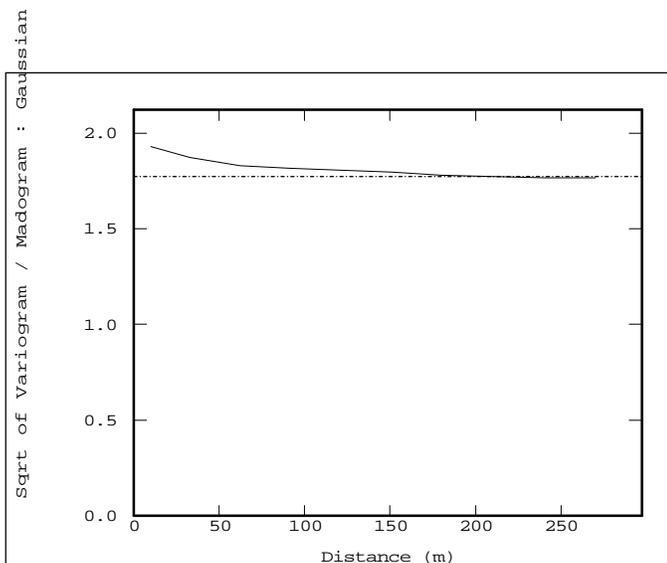


Gráfico 4.3: Raíz de variograma dividido por madograma (caso omnidireccional)

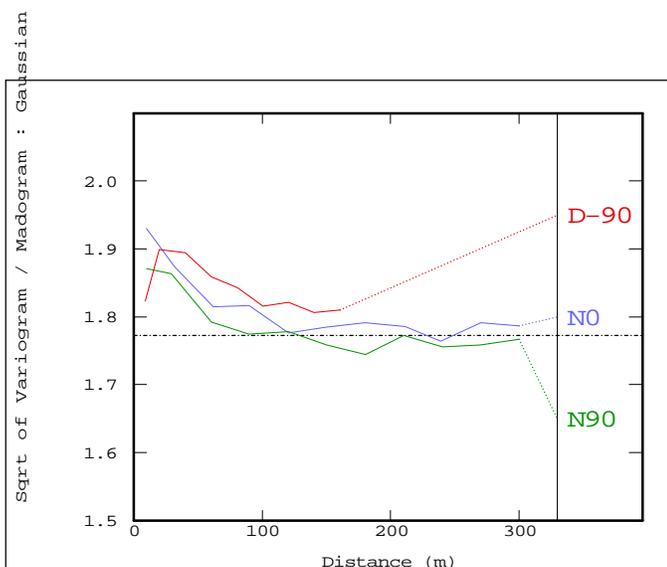


Gráfico 4.4: Raíz de variograma dividido por madograma (direcciones norte-sur (N0), este-oeste (N90) y vertical (D90))

4.2.1.3 Variogramas de indicadores

Se estudia los variogramas de indicadores para los umbrales $-0,67$, $0,00$, y $0,67$, correspondientes al primer, segundo y tercer cuartil de los datos transformados respectivamente. En cuanto a las direcciones, al igual que para el test anterior, se analizan las direcciones norte-sur, este-oeste y vertical.

Según la hipótesis se esperaría que los variogramas para el primer y tercer cuartil, los cuales corresponden a variogramas de indicadores para umbrales simétricos con respecto a la mediana, fueran similares. No obstante, se advierte que estos son diferentes, lo que refleja el hecho de que la continuidad espacial de los valores altos es distinta a la de los valores bajos.

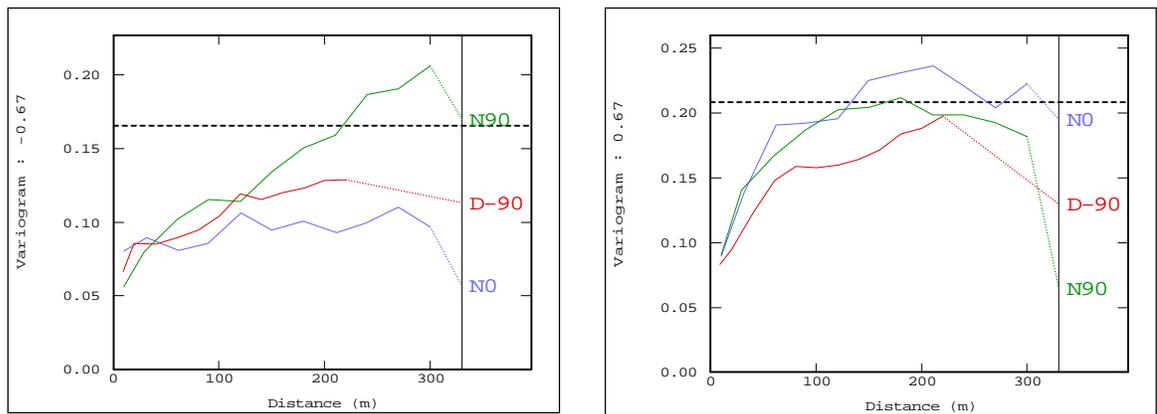


Gráfico 4.5: Variogramas de indicadores para el primer y tercer cuartil

De los gráficos se desprende que existen diferencias entre los alcances para las tres direcciones, siendo estos mayores para el caso del primer cuartil.

Finalmente, y en función de las pruebas realizadas se determina que la hipótesis de que los datos transformados siguen una distribución multigaussiana es cuestionable, y por lo tanto el modelo multigaussiano no sería el más pertinente en este caso particular. A pesar de esto, y debido a que en muchos casos esto podría ser tolerado hasta cierto punto, se procede de la manera habitual, lo que permite posteriormente hacer una comparación entre este modelo y otro que se ajuste mejor a los datos.

4.3 Análisis variográfico

A partir de los mapas variográficos y de los variogramas experimentales calculados, se determina que existen tres direcciones de anisotropía: norte-sur, este-oeste y vertical. Estas anisotropías son de tipo zonal, es decir, los variogramas alcanzan distintas mesetas para cada una de las direcciones mencionadas.

En el gráfico 4.6 se muestra los variogramas experimentales y modelados para cada una de las direcciones (los parámetros se detallan en anexos). El variograma modelado consta de tres estructuras, además del efecto pepa. En azul se caracteriza a la dirección norte-sur, en verde a la dirección este-oeste, y en rojo a la vertical.

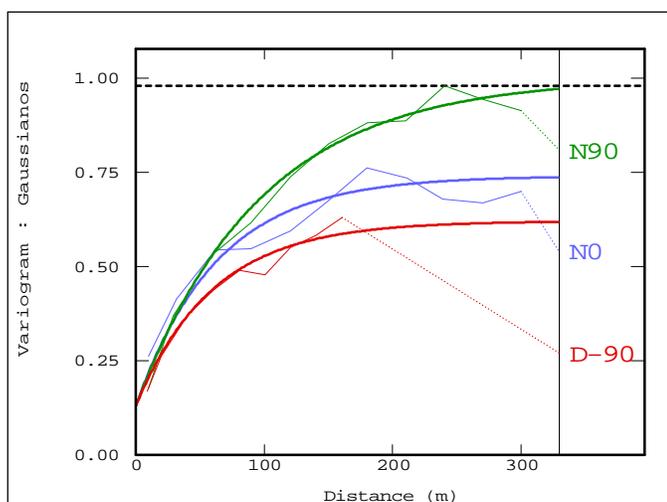


Gráfico 4.6: Variogramas experimentales y modelados (datos gaussianos)

El modelo variográfico está dado por:

$$\gamma(h) = 0,13pep + 0,49exp(290m, 190m, 180m) + 0,12exp(290m, 190m, \bullet) + 0,26exp(290m, \bullet, \bullet)$$

Las distancias entre paréntesis indican los alcances en las direcciones este-oeste, norte-sur y vertical respectivamente.

4.4 Simulación convencional

Las simulaciones se realizan sobre un espacio que abarca la totalidad del campo muestreado en la horizontal, y sobre la cota 2.100 en la vertical. Se realizan simulaciones para distintos tamaños de bloque: bloques de $5 \times 5 \times 10 \text{ m}^3$, bloques de $10 \times 10 \times 10 \text{ m}^3$, bloques de $15 \times 15 \times 20 \text{ m}^3$, bloques de $20 \times 20 \times 20 \text{ m}^3$ y bloques de $30 \times 30 \times 20 \text{ m}^3$. Los valores corresponden a las dimensiones de los bloques en las direcciones norte-sur, este-oeste y vertical respectivamente. La simulación en sí se efectúa mediante el algoritmo de bandas rotantes, y se construyen 100 realizaciones en cada caso.

Para el caso de los bloques de $5 \times 5 \times 10 \text{ m}^3$, se simulan en total 696.960 bloques, correspondientes a 40 bancos. En la figura 4.3 se muestra una vista de planta para una de las realizaciones, y para el promedio de las 100. La escala de color está referida a la ley expresada como porcentaje.

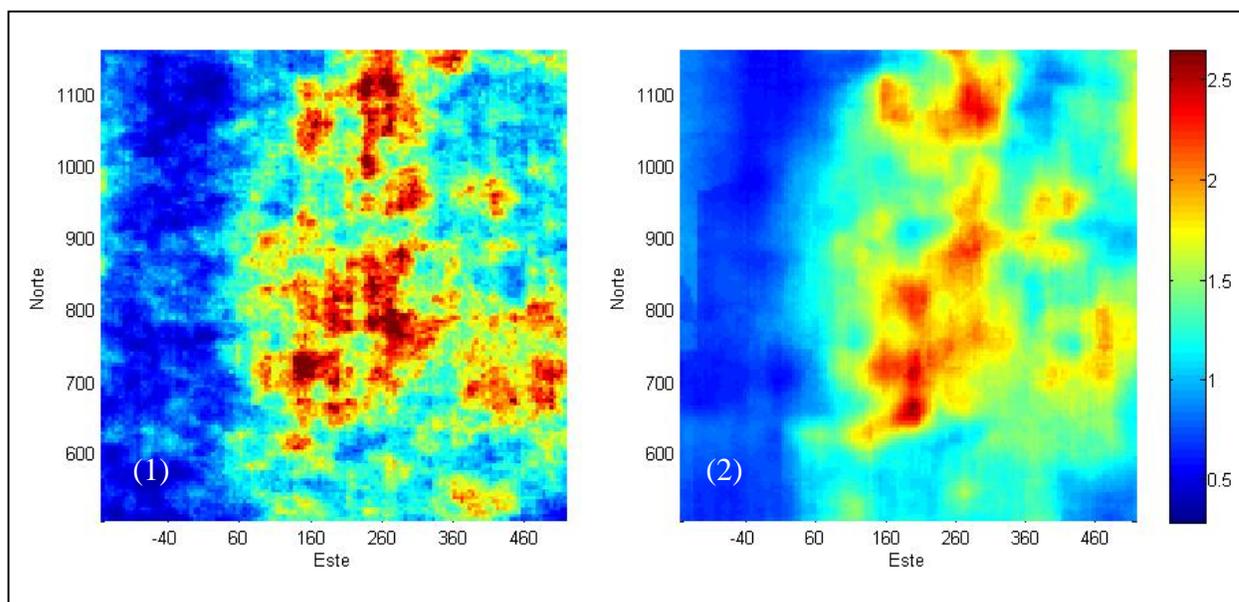


Figura 4.3: (1) Realización y (2) Promedio de las realizaciones (para bloques de $5 \times 5 \times 10 \text{ m}^3$)

Las imágenes corresponden al banco número 20 (cota 2.300). Se aprecia que éstas son consistentes con lo observado en los datos originales, siendo el sector este el de mayor ley. En cuanto a las estadísticas, se advierte que la ley media obtenida es menor con respecto a la de los datos, lo que es atribuido básicamente a la mayor consideración de la zona oeste de baja ley.

N° de bloques	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Varianza [%]
696.960	0,01	4,82	1,03	0,29

Tabla 4.2: Estadísticas básicas (bloques de 5x5x10 m³)

El histograma bruto y las curvas tonelaje-ley para los bloques simulados de 5x5x10 m³ se muestran a continuación. El detalle para el resto de los soportes se presenta en anexos.

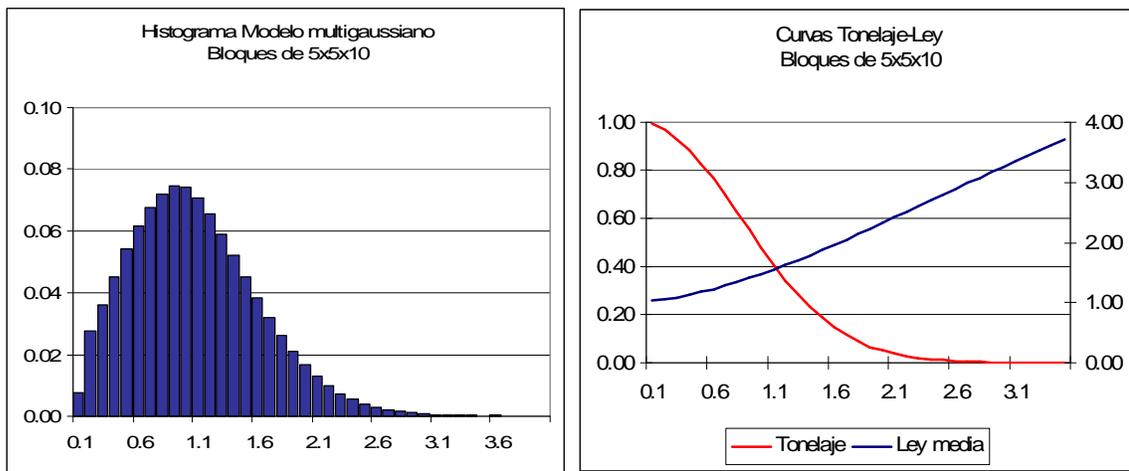


Gráfico 4.7: Histograma bruto y curvas tonelaje-ley (bloques de 5x5x10 m³)

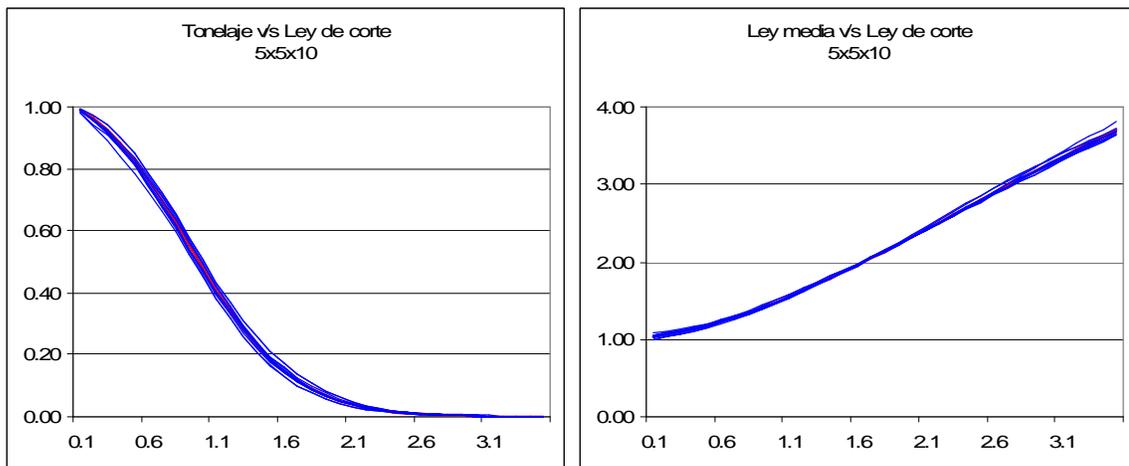


Gráfico 4.8: Curvas tonelaje-ley para una serie de realizaciones (color azul) y para el promedio de éstas (color rojo) (bloques de 5x5x10 m³)

De los gráficos anteriores se advierte que el 83% del tonelaje total se encuentra sobre una ley de corte de 0,5%, con una ley media de 1,17%.

En la tabla 4.3 se presenta para cada tamaño de bloque, un resumen con las estadísticas correspondientes.

	Datos	5x5x10 m ³	10x10x10 m ³	15x15x20 m ³	20x20x20 m ³	30x30x20 m ³
Mínimo [%]	0,04	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03
Máximo [%]	4,30	4,82	4,70	4,34	4,26	3,99
Media [%]	1,05	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03
Varianza [%]	0,30	0,29	0,28	0,26	0,26	0,25

Tabla 4.3: Estadísticas para los diferentes tamaños de bloque

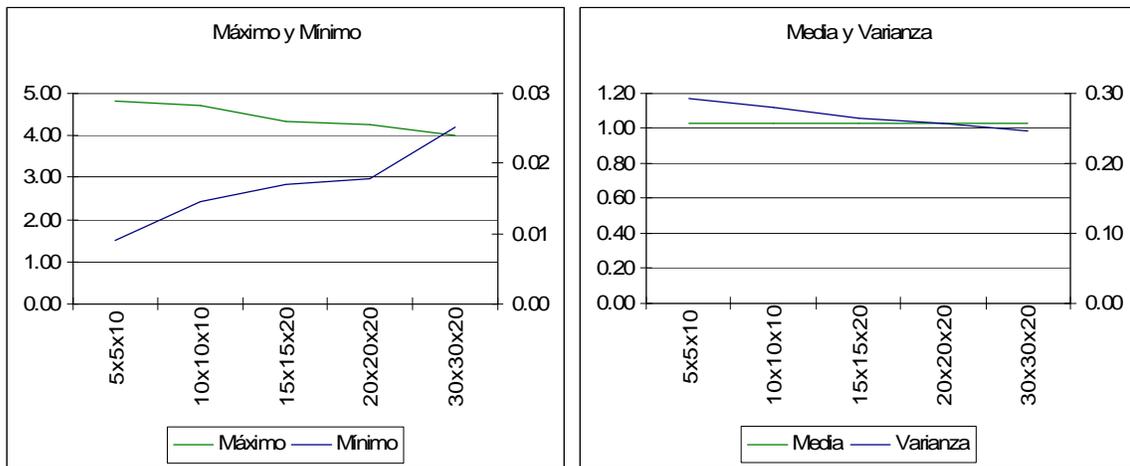


Gráfico 4.9: Estadísticas para los diferentes tamaños de bloques

Los resultados coinciden con lo que se esperaría para un cambio de soporte, ya que decrece el rango de valores (crece el mínimo y disminuye el máximo), lo que se traduce en una disminución de la varianza. Por otro lado, la media permanece constante para cada uno de los tamaños considerados.

A continuación se presenta un resumen con los resultados obtenidos para las curvas tonelaje-ley, para cada uno de los soportes considerados.

Ley de corte [%]		Datos	5x5x10 m ³	10x10x10 m ³	15x15x20 m ³	20x20x20 m ³	30x30x20 m ³
0,5	Tonelaje	0,90	0,83	0,83	0,84	0,84	0,85
	Ley media	1,16	1,17	1,17	1,16	1,16	1,15
1,0	Tonelaje	0,52	0,48	0,48	0,49	0,49	0,49
	Ley media	1,50	1,48	1,47	1,45	1,45	1,43
1,5	Tonelaje	0,22	0,19	0,18	0,18	0,18	0,17
	Ley media	1,95	1,88	1,86	1,84	1,83	1,81
2,0	Tonelaje	0,07	0,05	0,05	0,04	0,04	0,03
	Ley media	2,40	2,32	2,30	2,28	2,27	2,25
2,5	Tonelaje	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
	Ley media	2,84	2,80	2,77	2,75	2,73	2,71

Tabla 4.4: Frecuencias de tonelaje y leyes medias para distintos soportes

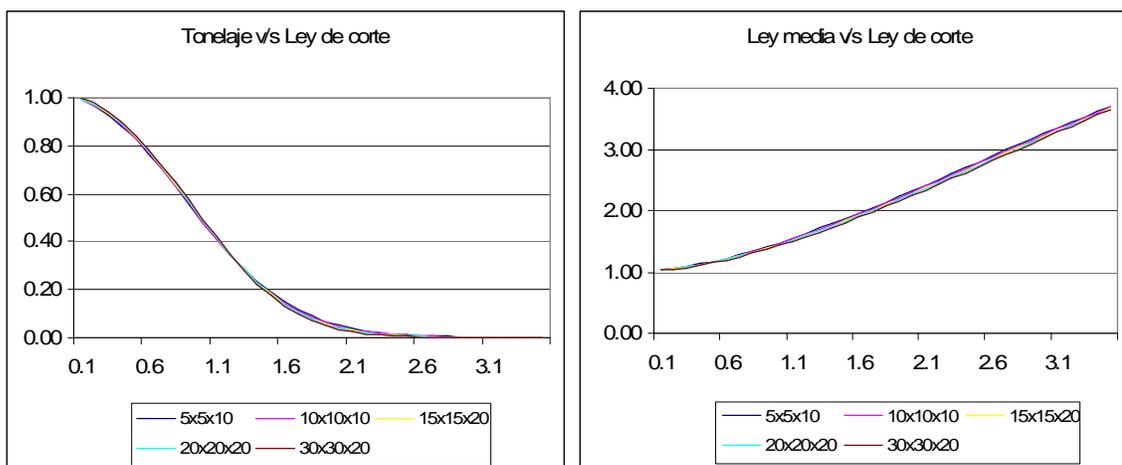


Gráfico 4.10: Curvas tonelaje-ley para los diferentes tamaños de bloque

Se concluye que no existen mayores diferencias entre los distintos tamaños de bloque considerados, tanto para las frecuencias de tonelaje como para las leyes medias en función de una ley de corte. En este sentido se determina que en el caso de explotar los recursos disponibles, económicamente resulta más conveniente utilizar bloques de mayor tamaño, esto ya que al no haber diferencias significativas se opta por la opción que presenta menores costos de operación.

Considerando una densidad de la roca promedio e igual a 2.7 m³/ton, se estima la cantidad de finos (tonelaje de metal de cobre).

Ley de corte [%]	Tonelaje [kton]	Ley media [%]	Finos [kton]
0,0	470.448	1,03	4.837
0,5	389.849	1,17	4.580
1,0	225.193	1,48	3.330
1,5	87.238	1,88	1.636

Tabla 4.5: Recursos recuperables sobre ley de corte (bloques de 5x5x10 m³)

Se desprende de la tabla 4.5 que mediante la aplicación del modelo multigaussiano, la cantidad máxima de finos, es decir, sin restricción de ley, se estima en 4.837 kton.

4.5 Análisis de los variogramas de indicadores y elección del modelo complejo

Se examina los variogramas de indicadores para los cuartiles extremos, esto con el fin de determinar el tipo de modelo alternativo a utilizar.

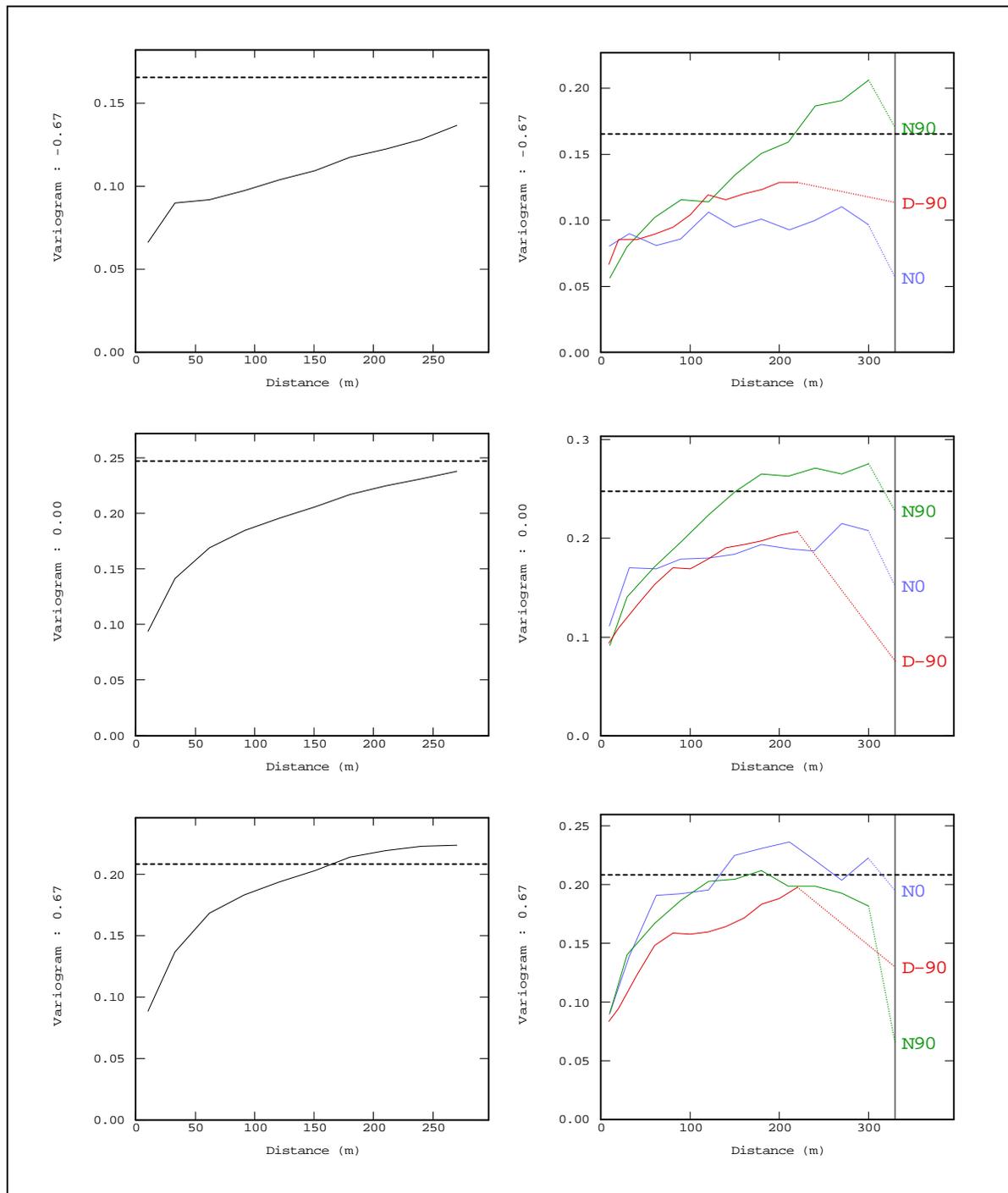


Gráfico 4.11: Variogramas de indicadores del primer, segundo y tercer cuartil. Variogramas omnidireccionales (izquierda) y para las direcciones norte-sur, este-oeste y vertical (derecha)

Los variogramas indican que el indicador del cuartil inferior tiene una mejor correlación espacial que el indicador del cuartil superior. Debido a esto se descartan aquellos modelos que presentan simetría de los variogramas de indicadores con respecto al umbral mediano (modelo de sustitución, etc.).

Se opta entonces por utilizar un modelo definido como el máximo o mínimo de una serie de funciones aleatorias multigaussianas independientes. La opción de máximo o mínimo depende de la facilidad con que se logren reproducir las estructuras en cada variograma de indicador.

4.6 Inferencia de los parámetros del modelo

Los parámetros son inferidos en función del ajuste de los variogramas de indicadores que se obtienen para cada uno de los cuartiles.

Por simplicidad y debido al gran número de parámetros, se considera apropiado utilizar un modelo definido como el máximo o mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes. Entre los parámetros se encuentran la media, meseta, efecto pepa, y estructuras de cada función. Es importante destacar que la inferencia de los parámetros consiste básicamente en un proceso de prueba y error, es decir, es un proceso dinámico por lo que muchas veces se vuelve a modificar un mismo parámetro en función de un mejor ajuste global.

Al existir una asimetría entre los variogramas de indicadores, en una primera instancia los intentos se orientan a reproducir el comportamiento observado para cada indicador mediante una de las dos funciones aleatorias multigaussianas, en otras palabras, se espera que una función aleatoria multigaussiana controle el primer indicador, mientras que la otra controle el segundo.

En una primera etapa las medias no tienen mayor relevancia (se opta inicialmente por tomar una media igual a cero). Se establecen entonces valores para el efecto pepa, mesetas y estructuras de cada función, esto de acuerdo a lo observado en los variogramas experimentales para cada indicador. Se determina más conveniente trabajar con las direcciones de anisotropía en forma independiente, de manera equivalente a como se haría en un caso isótropo. En este

caso se considera oportuno que una función aleatoria multigaussiana tenga un alcance largo (primer indicador) y la otra un alcance corto (tercer indicador).

El gráfico 4.12 muestra un primer ajuste para la dirección vertical, tomando en cuenta sólo una función aleatoria multigaussiana. Los círculos representan los variogramas de indicador experimentales, mientras que la línea continua muestra el variograma modelado.

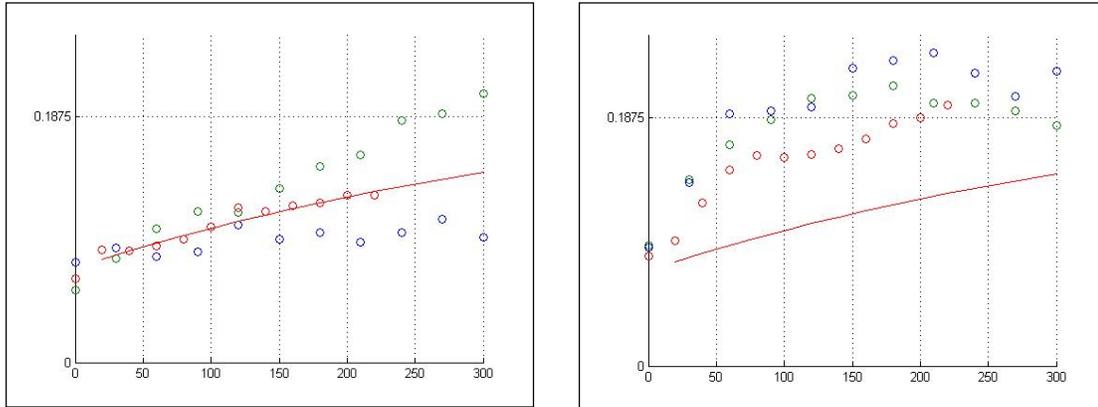


Gráfico 4.12: Ajuste para la dirección vertical (derecha: primer cuartil, izquierda: tercer cuartil)

Parámetros	Valor
Media	0
Efecto pepa	3
Tipo de variograma	Esférico
Meseta	15
Alcance (isótropo)	750 m

Tabla 4.6: Parámetros de cálculo para el gráfico 4.12

Posteriormente, al considerar las dos funciones aleatorias, se hacen importantes las medias respectivas. En este sentido se determina que el grado de influencia de éstas sobre los variogramas reproducidos, o bien, el grado de control de las funciones aleatorias multigaussianas sobre cada indicador, no depende mayormente del valor de las medias si no mas bien de la diferencia relativa entre ambas. En este caso se deja fija una de ellas en cero y luego se modifica la segunda.

A continuación se presenta un ejemplo en el que se modifican las medias de ambas gaussianas (sin variar la diferencia relativa entre ambas). El resto de los parámetros no sufre modificaciones.

Parámetros	Primera gaussiana	Segunda gaussiana
Media (caso 1)	0	1
Media (caso 2)	10	11
Efecto pepa	1,5	0,1
Tipo de variograma	Esférico	Esférico
Meseta	15	1,4
Alcance [m] (isótropo)	800	80

Tabla 4.7: Parámetros del modelo (gráficos 4.13 y 4.14)

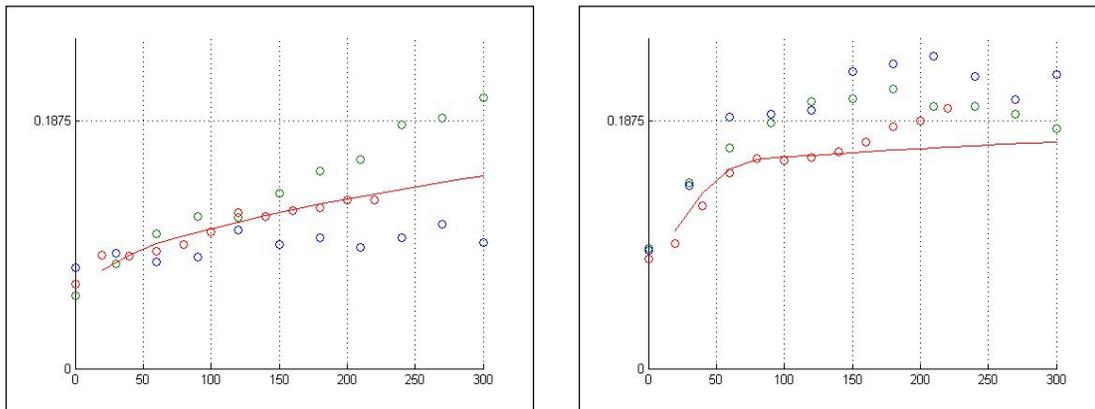


Gráfico 4.13: Ajuste para caso 1 (derecha: primer cuartil, izquierda: tercer cuartil)

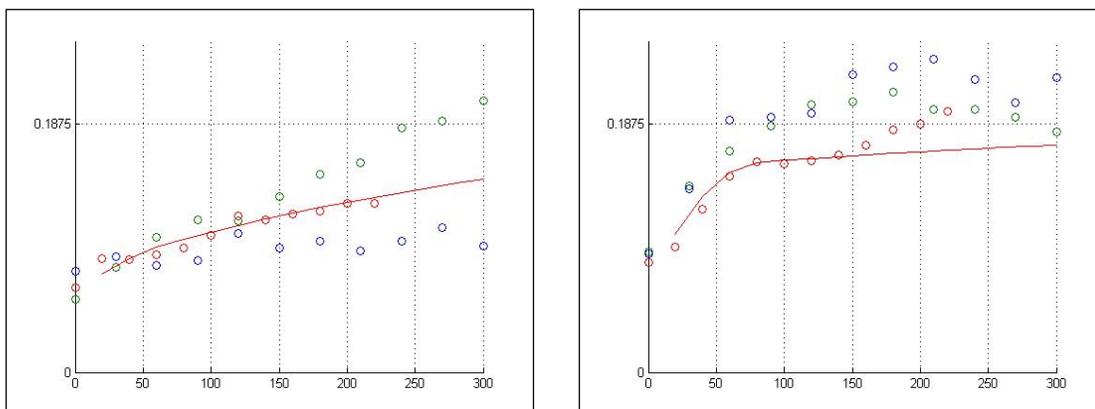


Gráfico 4.14: Ajuste para caso 2 (derecha: primer cuartil, izquierda: tercer cuartil)

A continuación se presenta un ejemplo en el cual se toma una diferencia relativa entre las medias mayor a la utilizada en los casos anteriores, y luego se invierten sus valores, es decir, la media de la primera gaussiana toma el valor de la segunda y viceversa.

Parámetros	Primera gaussiana	Segunda gaussiana
Media (caso 1)	0	5
Media (caso 2)	5	0
Efecto pepa	1,5	0,1
Tipo de variograma	Esférico	Esférico
Meseta	15	1,4
Alcance [m] (isótropo)	800	80

Tabla 4.8: Parámetros del modelo (gráficos 4.15 y 4.16)

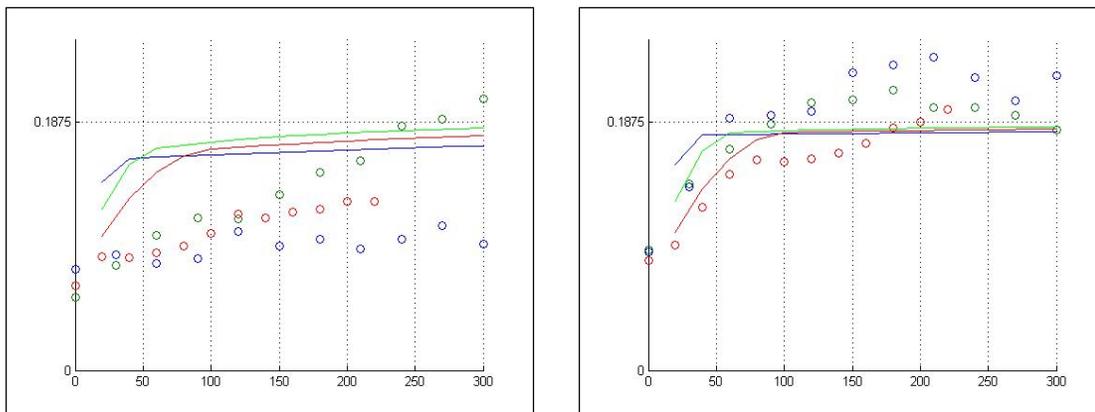


Gráfico 4.15: Ajuste para caso 1 (derecha: primer cuartil, izquierda: tercer cuartil)

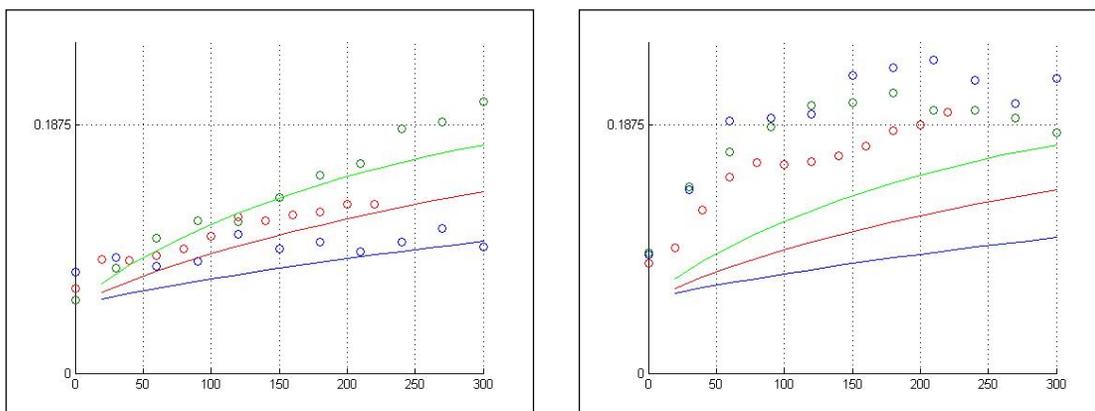


Gráfico 4.16: Ajuste para caso 2 (derecha: primer cuartil, izquierda: tercer cuartil)

Se aprecia en los gráficos que al sobrepasar un límite de diferenciación entre las medias, una de ellas controla el comportamiento de ambos indicadores. La gaussiana dominante corresponde en este caso a la que posee una media mayor. Por otro lado, al considerar una diferencia cercana a 1 se obtiene una condición intermedia, es decir, una función aleatoria multigaussiana controla el primer indicador, mientras que la otra controla el segundo.

La metodología presentada hasta ahora es indiferente a si se trata del modelo máximo o mínimo de las dos funciones aleatorias. Sin embargo, luego de realizar una serie de intentos con el modelo máximo, y dada la dificultad para ajustar las curvas, se prueba con el modelo dual, es decir, el mínimo de las dos funciones, el cual permite un ajuste más satisfactorio.

Por último y una vez que se tienen los parámetros de cada gaussiana, es decir, para cada una de las direcciones, y cada una de las estructuras, se corrigen aquellos parámetros que se hayan modificado en el camino, priorizando el ajuste global por sobre los ajustes parciales.

Finalmente se define el modelo como el mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes, cuyos parámetros se muestran en la tabla 4.9.

Parámetros		Primera gaussiana	Segunda gaussiana
Media		0	1
Efecto pepa		1,5	0,1
Tipo de variograma		Esférico	Esférico
Meseta		15	1,4
Alcances [m]	Norte-sur	1.800	35
	Este-oeste	440	60
	Vertical	800	100

Tabla 4.9: Parámetros finales del modelo mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas

A continuación se muestra el ajuste final del modelo sobre los variogramas de indicadores. En verde se caracteriza la dirección este-oeste, en azul la dirección norte-sur, y en rojo a la vertical. Los círculos corresponden a los variogramas de indicadores experimentales, mientras que las líneas continuas muestran los variogramas de indicadores modelados.

A modo de comparación, los ajustes correspondientes al modelo multigaussiano se presentan en anexos.

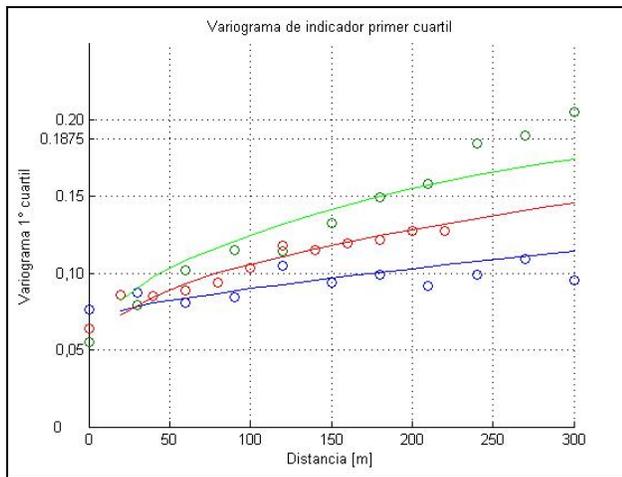


Gráfico 4.17: Variograma de indicador del primer cuartil

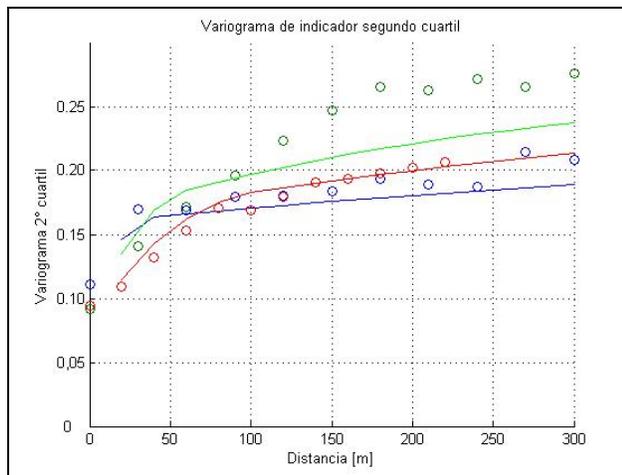


Gráfico 4.18: Variograma de indicador del segundo cuartil (mediana)

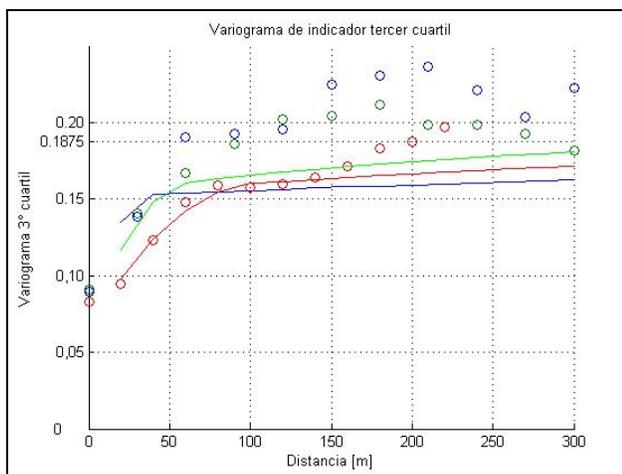


Gráfico 4.19: Variograma de indicador del tercer cuartil

En los gráficos anteriores se aprecia que el modelo reproduce la asimetría observada en los variogramas experimentales, con una mayor correlación espacial para el indicador del primer cuartil.

Los parámetros son validados examinando el comportamiento de los variogramas cruzados de indicadores. Se observa en estos un mejor ajuste para el variograma cruzado del primer y segundo cuartil, y del segundo y tercer cuartil, principalmente para la dirección vertical. Por el contrario el ajuste resulta menos preciso para el variograma cruzado de indicadores del primer y tercer cuartil, especialmente para la dirección norte-sur.

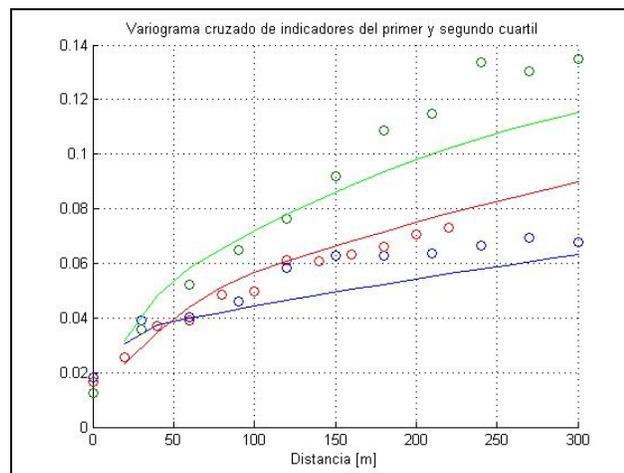


Gráfico 4.20: Variograma cruzado de indicadores del primer y segundo cuartil

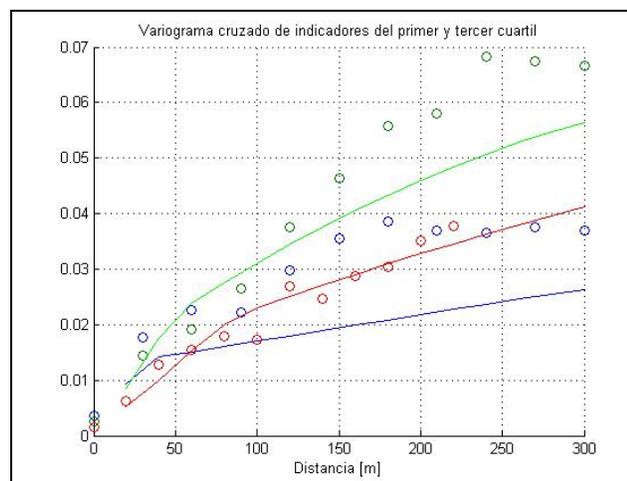


Gráfico 4.21: Variograma cruzado de indicadores del primer y tercer cuartil

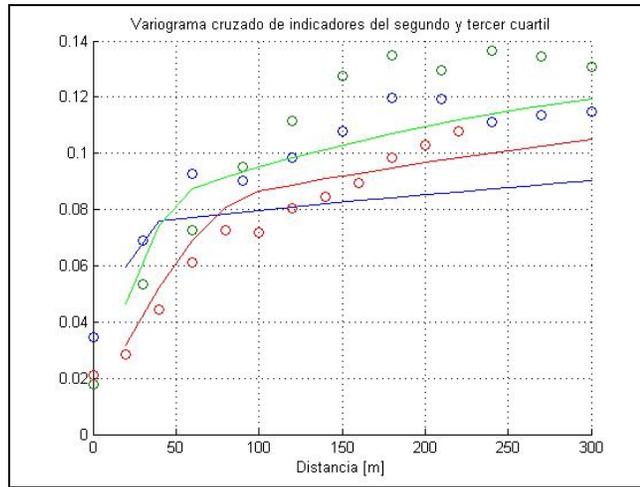


Gráfico 4.22: Variograma cruzado de indicadores del segundo y tercer cuartil

4.7 Simulación aplicando el modelo complejo

El modelo complejo se define como el mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes. La función de distribución acumulada univariable del modelo, corresponde al producto de las distribuciones de cada una de las funciones aleatorias multigaussianas consideradas.

$$" \hat{x} \in D \subset R^3, Y(x) = \min \{Y_1(x), Y_2(x)\}$$

Donde Y_1 e Y_2 corresponden a las funciones aleatorias multigaussianas independientes obtenidas a partir del ajuste de los variogramas de indicadores.

Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} " y \in R, \text{Prob}(Y(x) \geq y) &= \text{Prob}(Y_1(x) \geq y) \text{Prob}(Y_2(x) \geq y) \\ &= [1-G_1(y)] [1-G_2(y)] \end{aligned}$$

Donde G_1 y G_2 corresponden a las funciones de distribución de Y_1 e Y_2 respectivamente

Por razones prácticas, en este caso la transformación se realiza a partir de los datos transformados a gaussianos. No obstante, este paso podría ser obviado, pudiéndose realizar la transformación directamente de los datos originales.

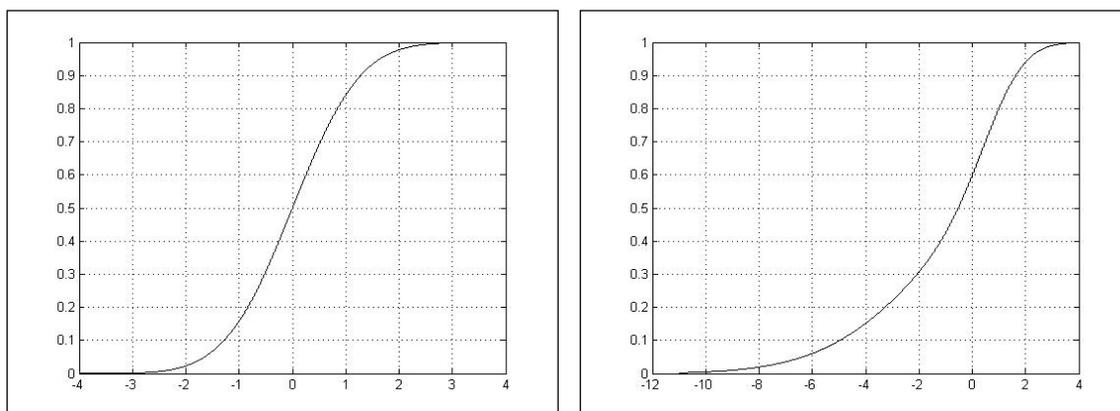


Gráfico 4.23: Transformación de los datos. Derecha: distribución acumulada de los datos gaussianos, izquierda: distribución acumulada del modelo complejo

Se construyen simulaciones condicionales a partir de la aplicación del modelo mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes. Al igual que para el caso anterior, se construyen 100 realizaciones, y se trabaja en un espacio que abarca la totalidad del campo muestreado en la horizontal, y sobre la cota 2.100 en la vertical. De igual modo, se realizan las simulaciones para distintos tamaños de bloque.

El primer caso corresponde a bloques de $5 \times 5 \times 10 \text{ m}^3$, para lo cual se simula en total 696.960 bloques, correspondientes a 40 bancos. En la figura 4.4 se muestra algunas de las realizaciones obtenidas mediante la aplicación del modelo mínimo de dos gaussianas, y a modo de comparación, se presentan también algunas de las realizaciones construidas a partir del modelo convencional (multigaussiano).

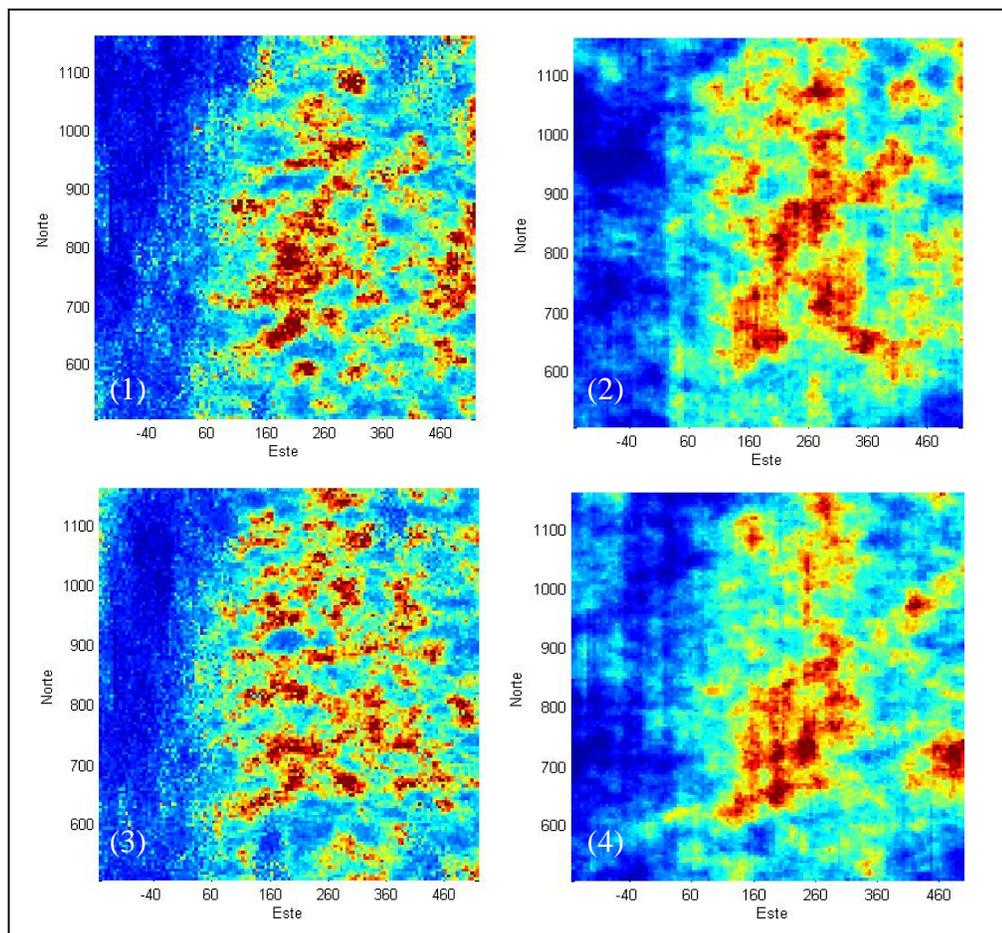


Figura 4.4: (1) y (3) Realizaciones para modelo mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes, (2) y (4) realizaciones para modelo multigaussiano (bloques de $5 \times 5 \times 10 \text{ m}^3$, banco número 20)

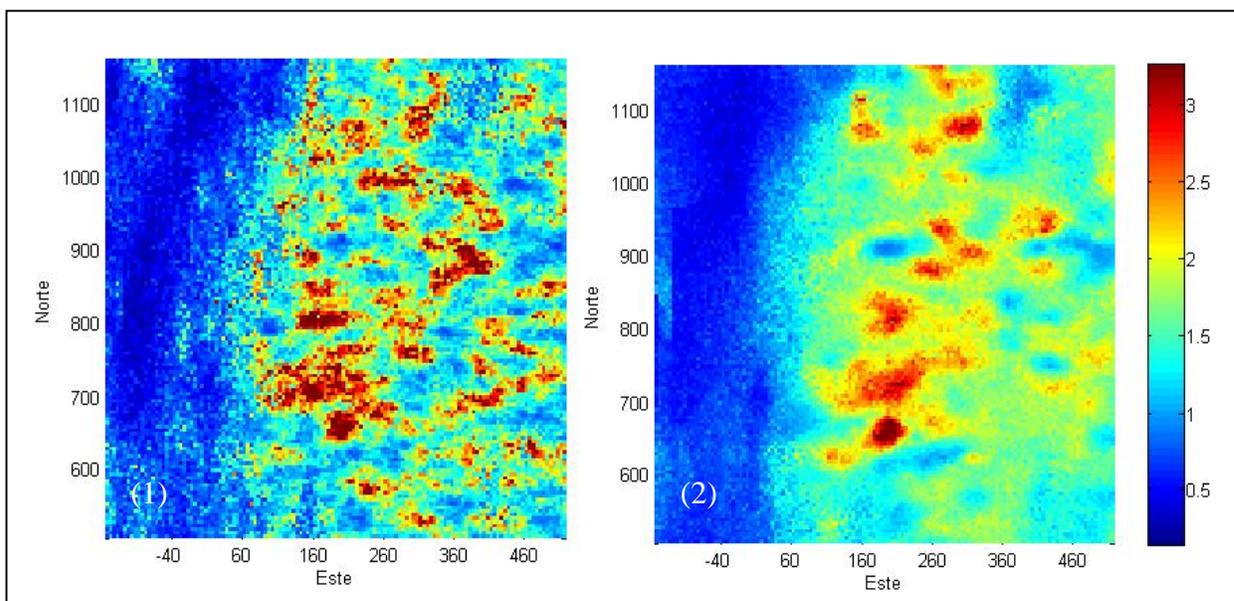


Figura 4.5: (1) Realización y (2) promedio (bloques de $5 \times 5 \times 10 \text{ m}^3$, cota 2.300)

Las imágenes de la figura 4.5 corresponden a una realización, y al promedio de las realizaciones obtenidas mediante la aplicación del modelo mínimo de dos gaussianas (banco número 20). La escala de color refleja la ley de cobre expresada como porcentaje.

Se aprecia que tanto las realizaciones como el promedio de éstas, son consistentes con lo observado en los datos, identificándose claramente los sectores de baja y alta ley. Es posible notar también que las imágenes parecen reproducir las tendencias observadas en los variogramas de indicadores, los que muestran que para los valores bajos existe una mayor continuidad espacial en la dirección norte-sur, mientras que para los valores altos, esto ocurre en la dirección este-oeste. Este efecto se ve con mayor claridad en las realizaciones, y aunque en menor grado, también se observa para el promedio.

N° de bloques	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Varianza [%]
696.960	0,01	4,99	1,00	0,36

Tabla 4.10: Estadísticas básicas (bloques de $5 \times 5 \times 10 \text{ m}^3$)

De la tabla 4.10 se desprende que el valor para la ley media resulta inferior a la de los datos y también con respecto al caso multigaussiano. El modelo además abarca un mayor rango de valores, lo que se infiere de los valores obtenidos para el mínimo y máximo, y que se traduce en una mayor varianza para el conjunto de bloques considerados.

El histograma bruto y las curvas tonelaje-ley para los bloques de $5 \times 5 \times 10 \text{ m}^3$, se presentan a continuación. El detalle para el resto de los soportes se presenta en anexos.

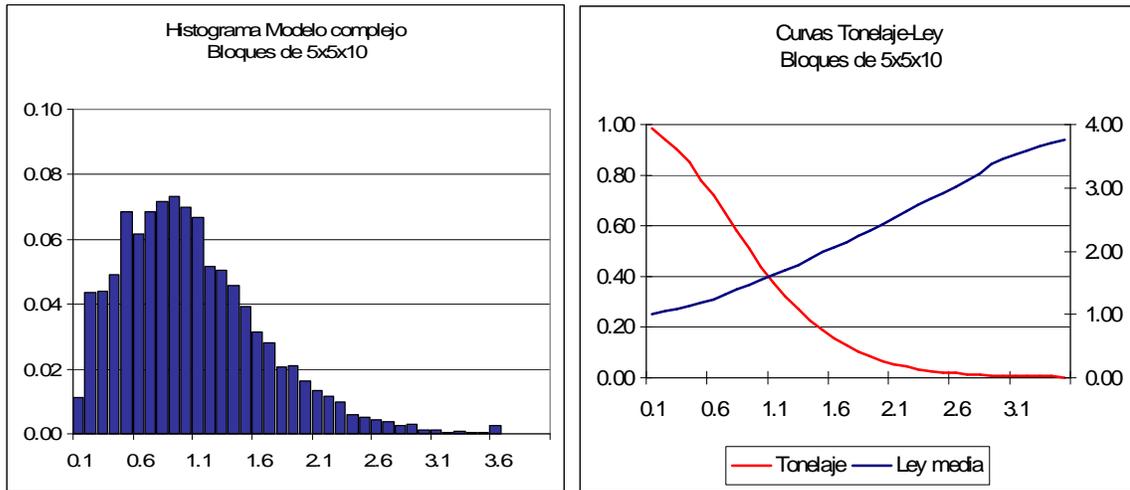


Gráfico 4.24: Histograma bruto y curvas tonelaje-ley (bloques de $5 \times 5 \times 10 \text{ m}^3$)

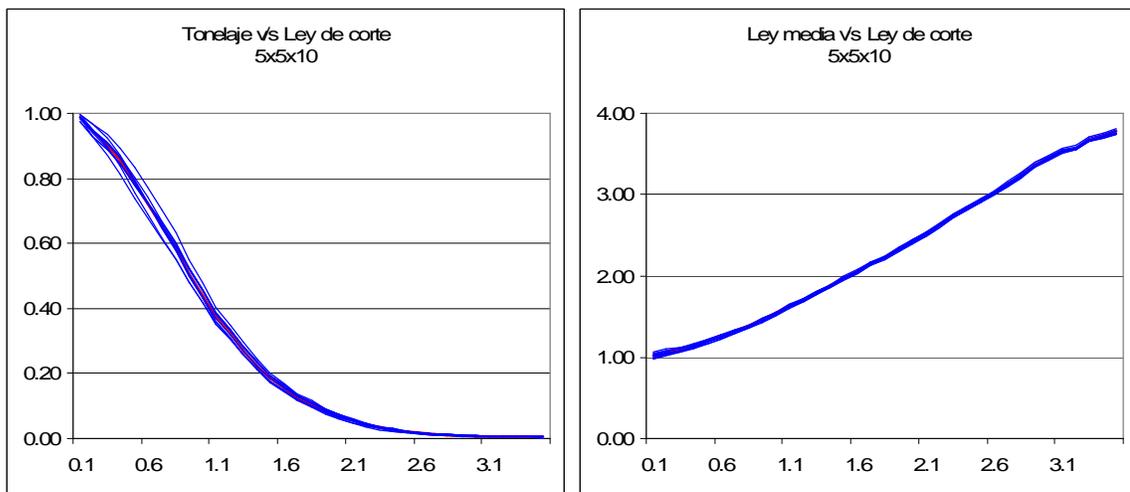


Gráfico 4.25: Curvas tonelaje-ley para una serie de realizaciones (color azul) y para el promedio de éstas (color rojo) (bloques de $5 \times 5 \times 10 \text{ m}^3$)

De las figuras anteriores se advierte que el 78% del tonelaje total se encuentra sobre una ley de corte de 0,5%, con una ley media de 1,20%.

En la tabla 4.11 se presenta para cada tamaño de bloque, un resumen con las estadísticas correspondientes.

	Datos	5x5x10 m ³	10x10x10 m ³	15x15x20 m ³	20x20x20 m ³	30x30x20 m ³
Mínimo [%]	0,04	0,01	0,03	0,03	0,04	0,05
Máximo [%]	4,30	4,99	4,91	4,46	4,34	3,90
Media [%]	1,05	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Varianza [%]	0,30	0,36	0,31	0,28	0,27	0,25

Tabla 4.11: Estadísticas para los diferentes tamaños de bloques

Los gráficos que se presentan a continuación muestran las diferencias entre las estadísticas que se obtienen de la aplicación de cada modelo, así como la variación de éstas al modificar el tamaño de los bloques.

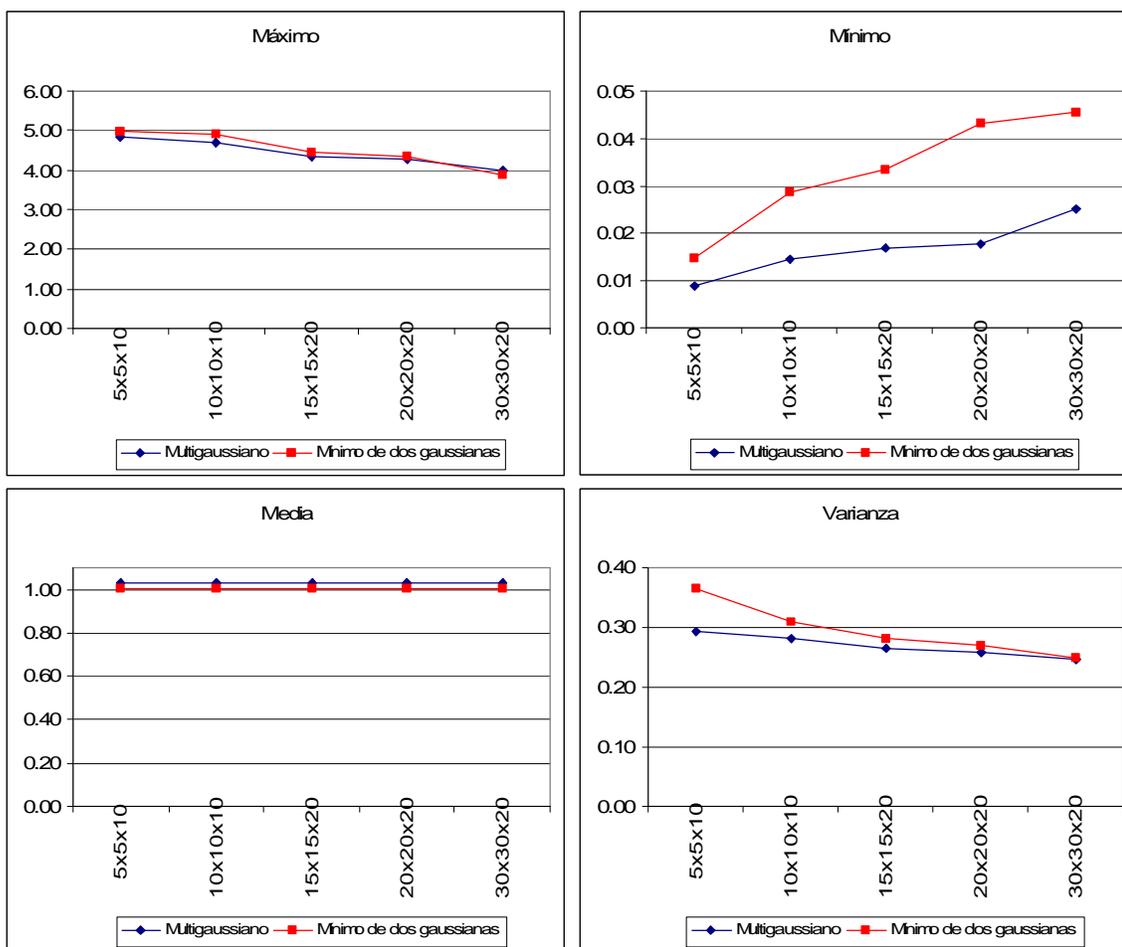


Gráfico 4.26: Estadísticas básicas para los diferentes tamaños de bloques

Ley de corte [%]		Datos	5x5x10 m ³	10x10x10 m ³	15x15x20 m ³	20x20x20 m ³	30x30x20 m ³
0,5	Tonelaje	0,90	0,78	0,80	0,81	0,81	0,81
	Ley media	1,16	1,20	1,18	1,17	1,17	1,16
1,0	Tonelaje	0,52	0,44	0,46	0,47	0,48	0,50
	Ley media	1,50	1,54	1,48	1,45	1,44	1,41
1,5	Tonelaje	0,22	0,19	0,18	0,17	0,17	0,16
	Ley media	1,95	1,98	1,90	1,86	1,83	1,79
2,0	Tonelaje	0,07	0,07	0,05	0,04	0,04	0,03
	Ley media	2,40	2,43	2,36	2,31	2,28	2,24
2,5	Tonelaje	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00
	Ley media	2,84	2,93	2,84	2,78	2,76	2,70

Tabla 4.12: Frecuencias de tonelaje y leyes medias para distintos soportes

A diferencia de los resultados obtenidos a partir del modelo multigaussiano, el modelo mínimo de dos gaussianas muestra diferencias al modificar el tamaño de los bloques simulados, tanto para el tonelaje como para las leyes medias en función de una ley de corte. Esto se traduce en que para leyes de corte bajas (menores a 1.5% aprox.), al aumentar el tamaño de los bloques se incrementa la cantidad de finos, mientras que para leyes de corte superiores, el efecto es inverso.

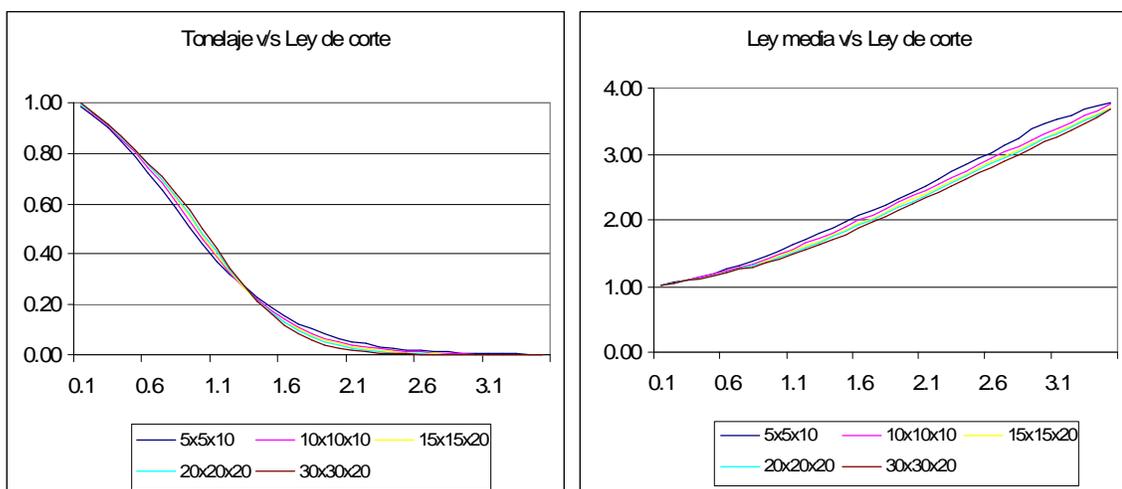


Gráfico 4.27: Curvas tonelaje-ley para los diferentes tamaños de bloques

A continuación se muestran las curvas tonelaje-ley correspondientes a los bloques de 5x5x10 m³, obtenidas mediante la aplicación de ambos modelos. El detalle para el resto de los soportes se presenta en anexos.

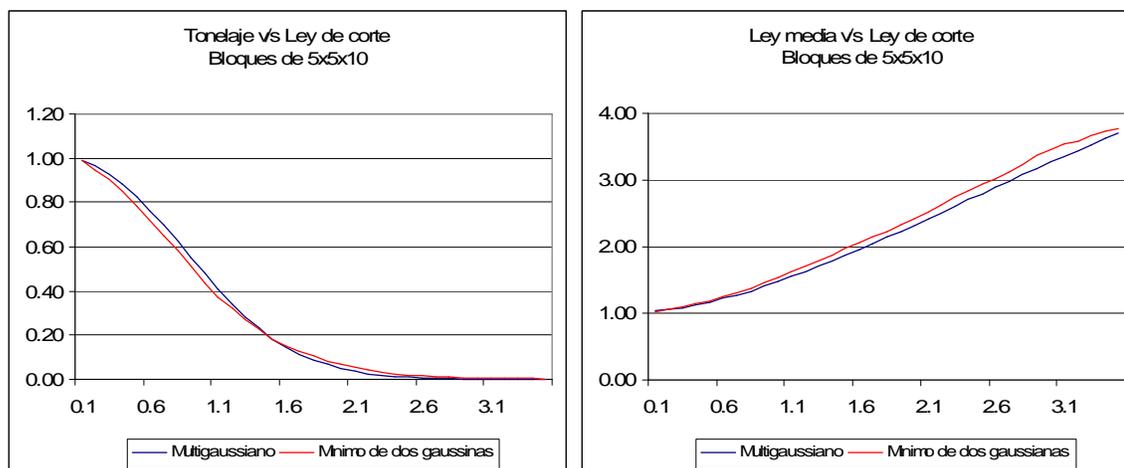


Gráfico 4.28: Curvas tonelaje-ley para modelos multigaussiano y mínimo de dos gaussianas

Considerando una densidad de la roca promedio e igual a 2.7 m³/ton, se estima la cantidad de finos.

Ley de corte [%]	Tonelaje [kton]	Ley media [%]	Finos [kton]
0,0	470.448	1,00	4.726
0,5	368.519	1,20	4.410
1,0	206.470	1,54	3.183
1,5	87.192	1,98	1.722

Tabla 4.13: Recursos recuperables sobre una ley de corte (bloques de 5x5x10 m³)

Se desprende de la tabla 4.10 que mediante la aplicación del modelo mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes, la cantidad máxima de finos (sin restricción de ley), se estima en 4.726 kton, es decir, un 2,3% menos que según el modelo convencional (multigaussiano).

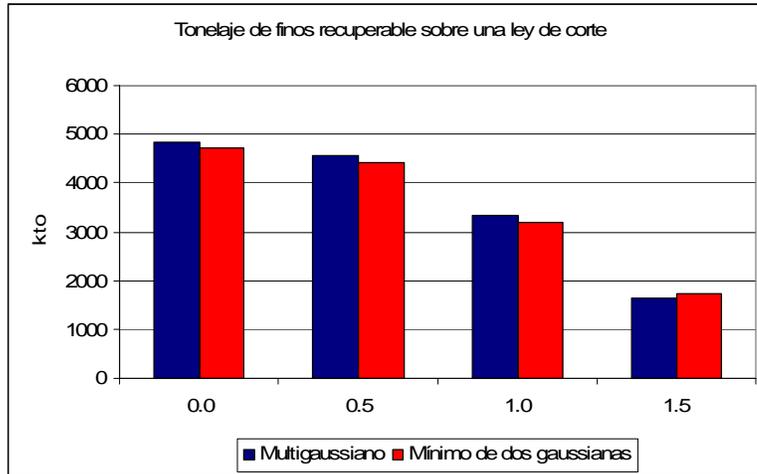


Gráfico 4.29: Tonelaje de finos recuperable sobre ley de corte para ambos modelos
(Bloques de $5 \times 5 \times 10 \text{ m}^3$)

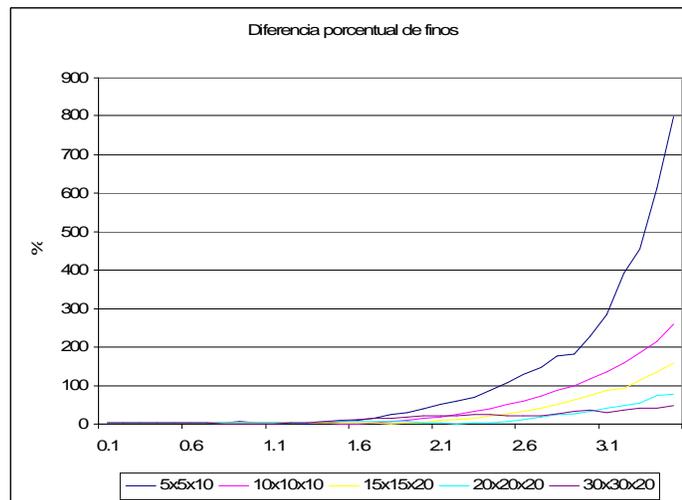


Gráfico 4.30: Diferencias porcentuales entre los finos estimados a partir de cada modelo en función de una ley de corte

Se aprecia en el gráfico 4.30 que las diferencias porcentuales entre la cantidad de finos que se obtiene mediante la aplicación de cada modelo, son poco significativas al considerar leyes de corte por debajo de 1.6%. Sin embargo, éstas resultan mayores al considerar leyes de corte superiores. Por otra parte, las diferencias tienden a ser más importantes para el caso de utilizar bloques de menor tamaño. Estas diferencias tienen relación con que el modelo alternativo tiende a subestimar la cantidad de finos (con respecto al modelo convencional) para leyes de corte menores, y por el contrario, tiende a sobreestimar dicha cantidad para leyes de corte mayor.

4.8 Validación de las simulaciones

Se estudia la calidad de las simulaciones construidas con tal de determinar la precisión de los modelos aplicados.

Para esto se utiliza la información de las muestras. La idea consiste en eliminar un determinado número de muestras para luego estimar su valor a partir del conjunto de muestras restantes. Se analiza el caso en que se deja afuera un 20% de los datos, el cual es estimado posteriormente a partir del 80% restante. Las muestras son eliminadas en forma aleatoria. Se presenta también en anexos el caso inverso, es decir, se deja afuera el 80% y luego se estima a partir del 20% remanente.

Se considera que las simulaciones son aceptables cuando la ley estimada (ley media simulada) es similar a la de los datos reales, y la correlación entre éstos y los datos estimados es cercana a uno.

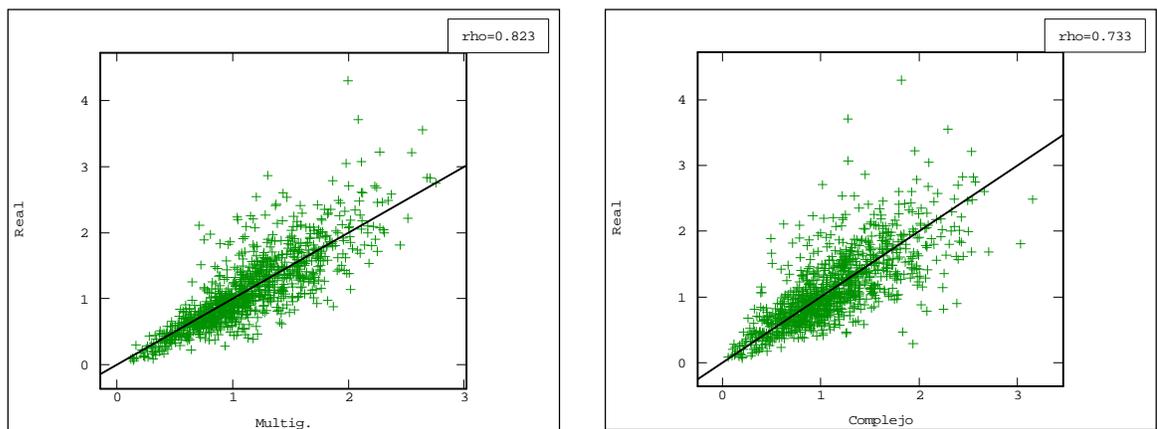


Figura 4.6: Correlación entre leyes reales y estimadas (promedio de las realizaciones), izquierda: modelo multigaussiano, derecha: modelo complejo

	Valor Real	Modelo multigaussiano	Modelo complejo
Media [%]	1,13	1,13	1,13
Varianza [%]	0,33	0,21	0,26

Tabla 4.14: Valores reales y estimados de las leyes de cobre a partir de ambos modelos

	Error Modelo multigaussiano	Correlación M. multigaussiano	Error Modelo complejo	Correlación M. complejo
Media [%]	0,00	0,82	0,00	0,73
Varianza [%]	0,11		0,16	

Tabla 4.15: Estadísticas del error cometido y correlación entre los valores reales y estimados

El hecho de que la media del error cometido en la estimación sea igual a cero para los dos modelos, se traduce en que la estimación es insesgada en ambos casos. Sin embargo, el modelo multigaussiano resulta ser más preciso, ya que presenta una menor varianza para el error de estimación, y se observa una mejor correlación entre los valores reales y estimados.

Se hace además un análisis de la incertidumbre local. Para esto se calcula la distribución de probabilidad de ley en cada punto simulado, a partir de los valores de las 100 realizaciones. Luego se determinan intervalos de confianza propios a cada punto. Se compara entonces la probabilidad teórica con la proporción de datos que efectivamente se encuentran en el intervalo correspondiente.

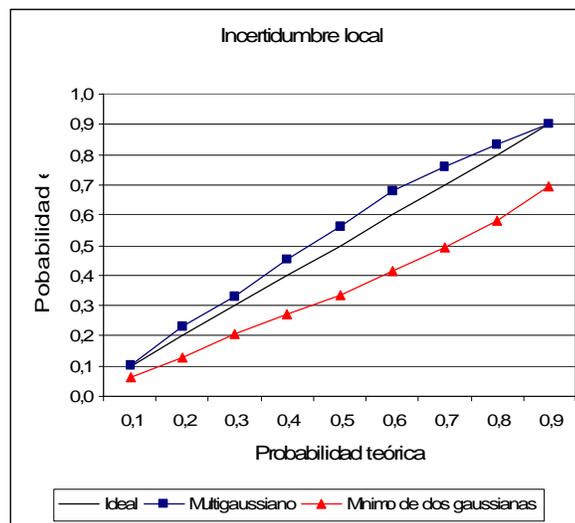


Gráfico 4.31: Incertidumbre local

La adecuación del modelo de incertidumbre local con la realidad es mejor en la medida que las curvas obtenidas se acercan a la diagonal. En este sentido el modelo multigaussiano presenta nuevamente un mejor desempeño que el modelo alternativo.

5 CONCLUSIONES

La descripción de leyes en depósitos mineros a partir de los modelos convencionales puede resultar inadecuada en algunos casos, particularmente en los que éstas presentan patrones como asimetrías en la correlación espacial de los variogramas de indicadores con respecto al umbral mediano de las muestras.

Un modelo alternativo, definido como el mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes, logra reproducir este comportamiento, siendo capaz de reflejar diferentes grados y direcciones de continuidad espacial, esto en función de si los valores correspondientes son de alta o baja ley. Por ejemplo, esto puede implicar que la dirección de mayor continuidad para los valores bajos, no necesariamente coincide con la de los valores altos.

Al efectuar una estimación de recursos mediante la aplicación del modelo mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes, esto a partir del promedio de una serie de simulaciones condicionales, se determina que éste presenta menor sesgo con respecto al modelo convencional, el modelo multigaussiano. Sin embargo, la estimación resulta ser menos precisa. Por otro parte, el modelo tampoco muestra un mejor desempeño con relación a la reproducción de la incertidumbre local, siendo ésta subestimada por el modelo.

Debido a lo anterior, es posible que la inferencia de los parámetros que caracterizan al modelo alternativo mediante el ajuste de los variogramas de indicadores, pueda ser insuficiente para establecer un buen ajuste acorde a los datos, y que permita en definitiva que éste tenga un mejor desempeño.

Por otro lado, la inferencia de dichos parámetros consiste básicamente en un proceso de prueba y error, es decir, es un proceso dinámico, lo que deriva en una mayor complejidad. Esto hace necesario que el usuario tenga cierta experiencia y adquiera cierta práctica con tal de obtener buenos resultados. Parte de esta complejidad, se vincula directamente con el gran número de parámetros libres que se tienen para el modelo, los que aumentan en la medida que se incrementa el número de funciones aleatorias gaussianas. Entre éstos se encuentran las medias, mesetas, efecto pepa, y estructuras de cada una de ellas.

Al estudiar el impacto del modelo alternativo en lo que se refiere a la cantidad de recursos recuperables y curvas tonelaje-ley, se determina que existen diferencias con respecto al modelo

multigaussiano. A partir de la aplicación del modelo alternativo se obtiene una estimación de menor ley, lo que se traduce en una menor cantidad de metal.

Las diferencias entre los modelos resultan poco significativas para leyes de corte que se encuentren por debajo de 1.6% aproximadamente, mientras que se incrementan para leyes de corte superiores a este valor. Por otra parte, éstas tienen mayor importancia cuando se trabaja con bloques de menor tamaño. El modelo alternativo tiende a subestimar la cantidad de finos para leyes de corte bajas mientras que, contrariamente, para leyes de corte altas el modelo tiende a sobreestimar los valores.

En cuanto al modelo multigaussiano, si bien su pertinencia en el caso de estudio es cuestionable, se reafirma como un modelo robusto, ya que entrega resultados que podrían considerarse satisfactorios. La estimación es insesgada cuando se tiene información suficiente, existe buena correlación entre los valores reales y estimados, y reproduce hasta cierto punto la incertidumbre local.

Finalmente, en vista de los resultados de validación cruzada y en ausencia de un modelo que se ajuste mejor a los datos, se recomienda la utilización del modelo convencional para el caso de estudio considerado en este trabajo. Se recomienda también la revisión del ajuste del modelo alternativo y su aplicación a otros casos de estudio para determinar su potencial utilidad en la evaluación de recursos minerales.

6 BIBLIOGRAFIA

- [1] Chilès JP, Delfiner P (1999) Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. Wiley, New York, 695 p.
- [2] Deutsch CV, Journel AG (1998) GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide, 2° edn. Oxford University Press, New York, 369 p.
- [3] Emery X (2007) Using the Gibbs sampler for conditional simulation of Gaussian-based random fields. Computers & Geosciences, 33(4):522-537.
- [4] Emery X, Lantuéjoul C (2006) TBSIM: A computer program for conditional simulation of three-dimensional Gaussian random fields via the turning bands method. Computers & Geosciences, 32(10):1615-1628.
- [5] Goovaerts P (1997) Geostatistics for Natural Resources Evaluation. Oxford University Press, New York, 480 p.
- [6] Journel AG, Huijbregts CJ (1978) Mining Geostatistics. Academic Press, London, 600p.
- [7] Lantuéjoul C (1994) Nonconditional simulation of stationary isotropic multigaussian random functions. In: Armstrong M, Dowd PA (eds) Geostatistical simulations: Kluwer, Dordrecht, p. 147-177.
- [8] Lantuéjoul C (2002) Geostatistical Simulation: Models and Algorithms. Springer, Berlin, 256 p.

7 ANEXOS

7.1 Caso de estudio

7.1.1 Estudio exploratorio

7.1.1.1 Estadísticas básicas

La tabla 7.1 muestra la extensión espacial de la zona muestreada.

	Coordenada x [m]	Coordenada y [m]	Coordenada z [m]
Máximo	524	1.160	2.515
Mínimo	-164	483	1.803
Extensión	688	677	712

Tabla 7.1: Extensión espacial de la zona muestreada

La tabla 7.2 muestra las medias y varianzas desagrupadas obtenidas para distintos tamaños de celda.

Celda [m ³]	Nº datos	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Varianza [%]
10 x 10 x 10	4.900	0.04	4.30	1,12	0,31
50 x 50 x 10	4.900	0.04	4.30	1,05	0,30
100 x 100 x 10	4.900	0.04	4.30	1,01	0,30
100 x 100 x 50	4.900	0.04	4.30	1,03	0,34
100 x 100 x 100	4.900	0.04	4.30	1,02	0,35

Tabla 7.2: Media y varianza desagrupada de las leyes de cobre para diferentes tamaños de celda

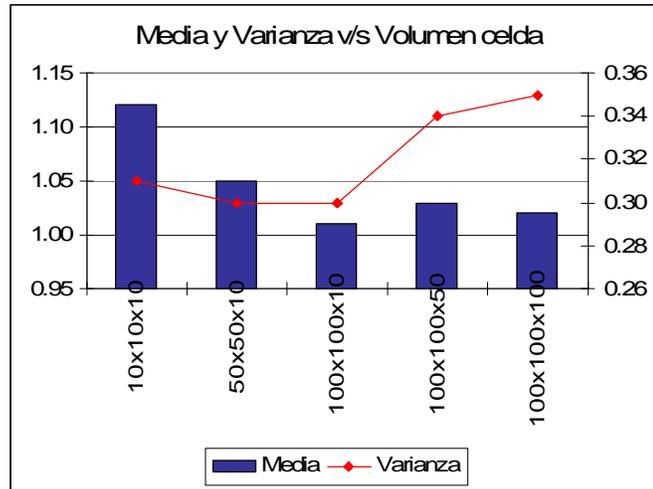


Gráfico 7.1: Media y varianza desagrupada para diferentes tamaños de celda

7.1.1.2 Gráficos de probabilidad normal y lognormal

Se busca comparar la distribución de los datos con una distribución de referencia (normal o lognormal). En caso de identidad con una de ellas el gráfico correspondiente dibuja una recta.

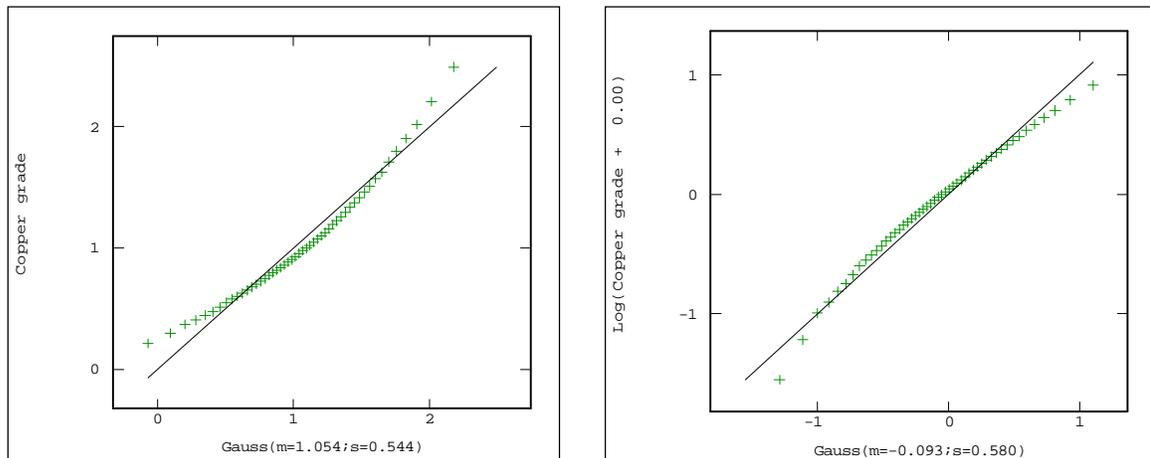


Gráfico 7.2: Gráficos de probabilidad normal y lognormal

Puede observarse que la distribución de los datos se asemeja más a una distribución de tipo lognormal.

7.1.1.3 Nubes de dispersión

Se pretende estudiar la homogeneidad espacial de los datos, al examinar la relación entre las leyes de cobre y las coordenadas espaciales.

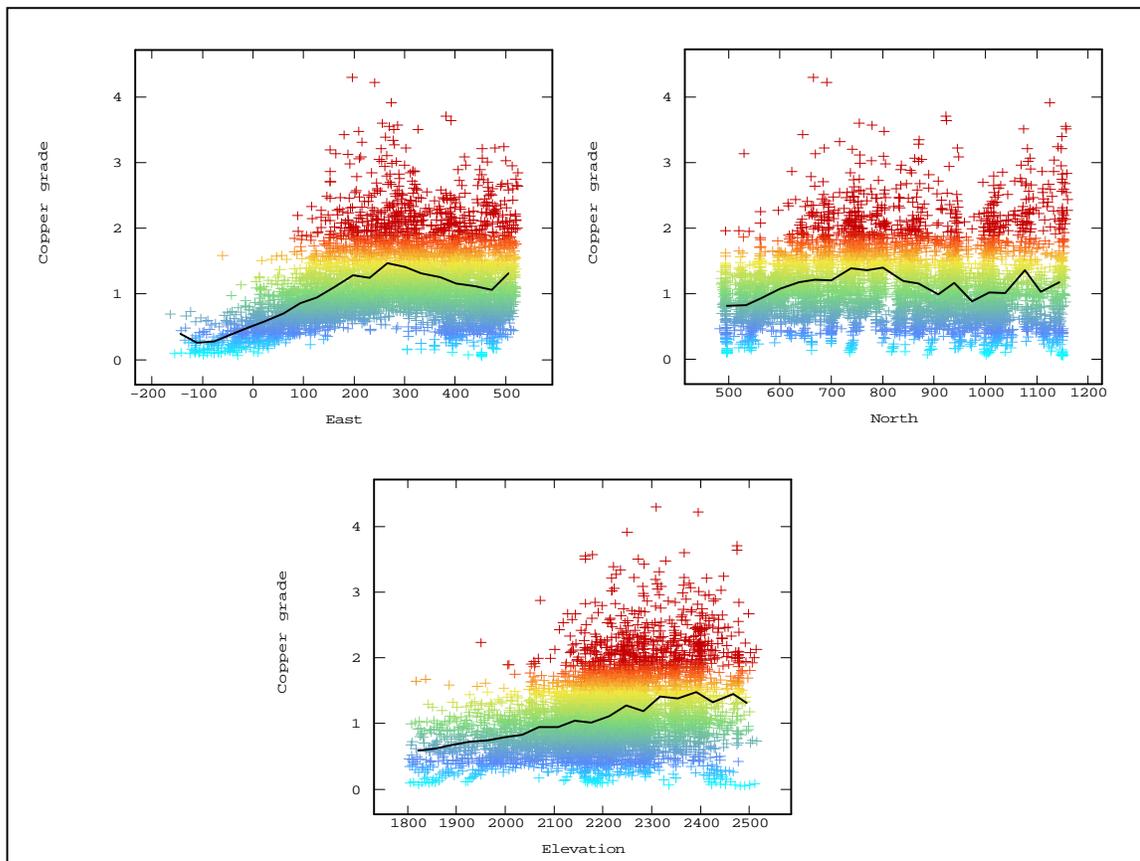


Figura 7.1: Nubes de dispersión (ley contra coordenada)

En la dirección vertical es visible un incremento de la ley al subir desde las cotas inferiores hacia las superiores. Por otra parte, en la dirección este-oeste la ley tiende a decrecer para las coordenadas inferiores a 200 m. Esto por un lado se asocia a las características propias del yacimiento y por otro a la menor cantidad de información de la que se dispone en ese sector.

7.1.2 Transformación de los datos

En el gráfico 7.3 se presenta la función de transformación o anamorfosis gaussiana, que relaciona los valores gaussianos con los valores de leyes (datos).

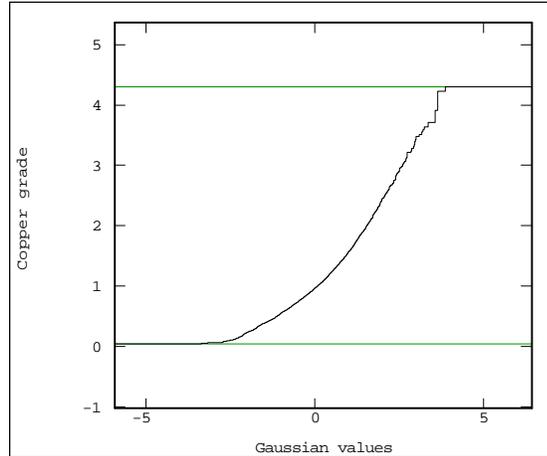


Gráfico 7.3: Función de transformación o anamorfosis gaussiana

La tabla 7.3 muestra las estadísticas de los datos transformados. Los gráficos corresponden a los histogramas bruto y acumulado.

N° datos	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Varianza [%]
4.900	-3,42	3,91	0,00	1,00

Tabla 7.3: Estadísticas de los datos transformados desagrupados

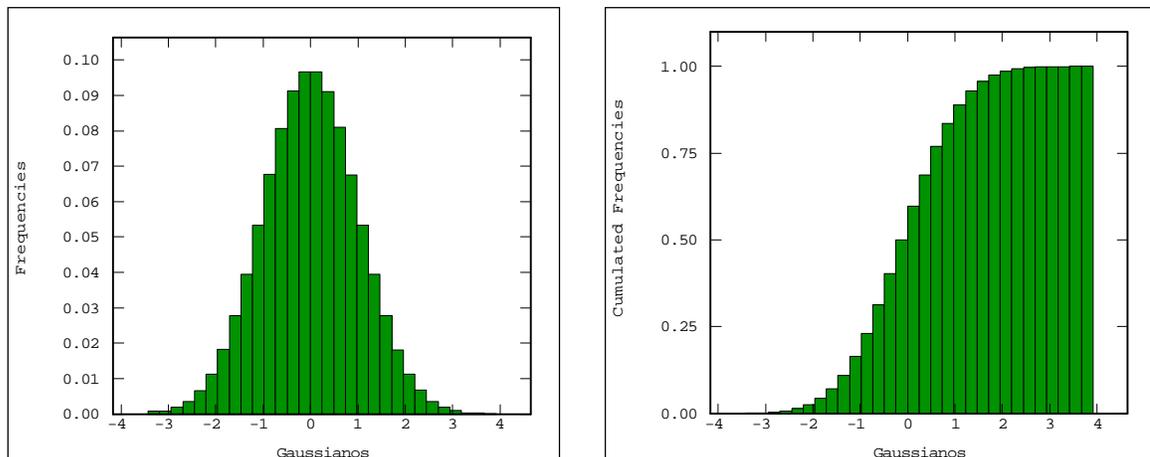


Gráfico 7.4: Histogramas bruto y acumulado (datos gaussianos)

7.1.3 Análisis variográfico

Se efectúa el análisis para los datos gaussianos.

7.1.3.1 Mapas variográficos

Se construyen mapas variográficos con el fin de determinar la existencia de anisotropías.

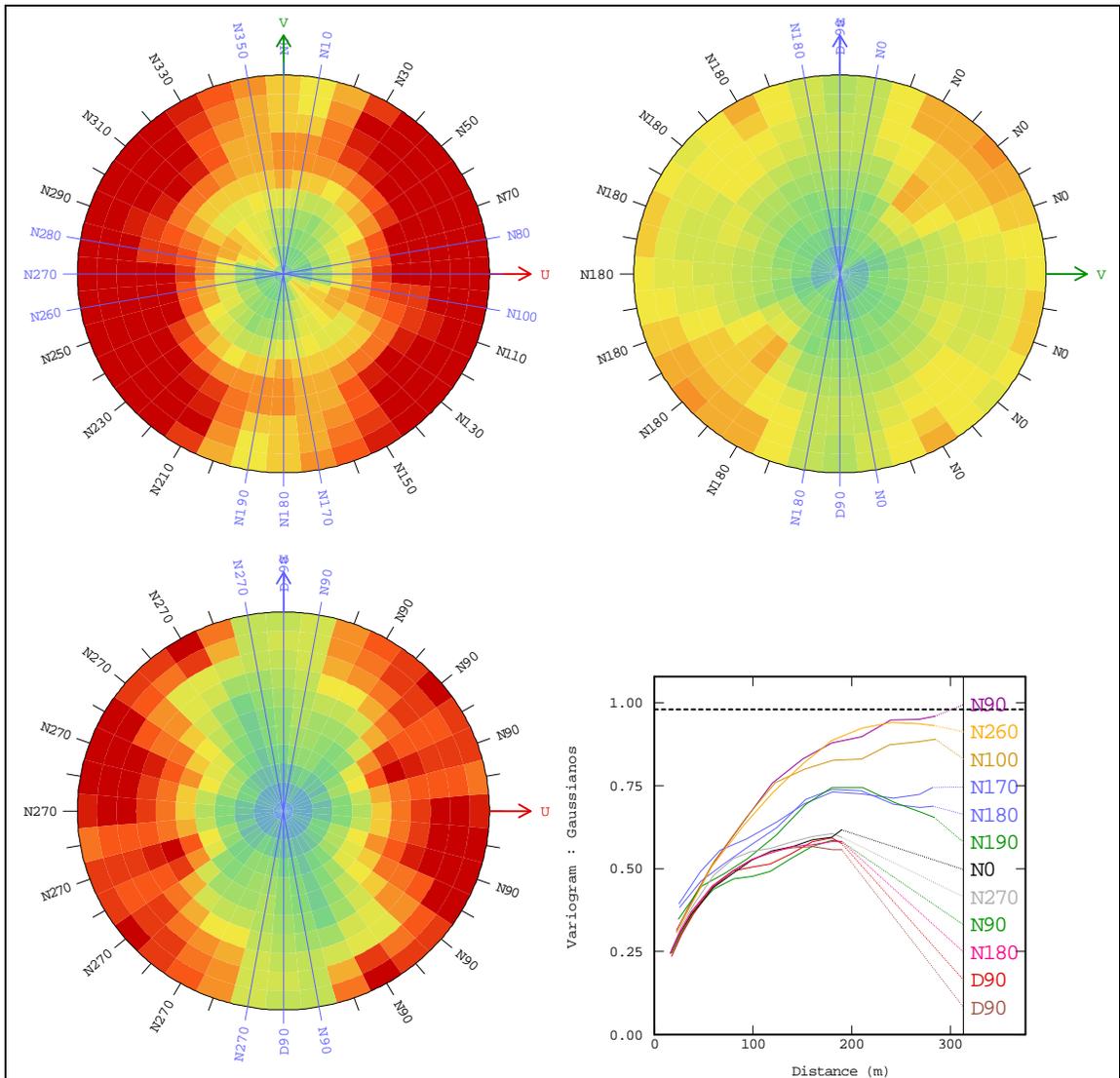


Figura 7.2: Mapas variográficos y variogramas para distintas direcciones (datos gaussianos)

En la tabla 7.4 se detalla los parámetros empleados para el cálculo de los mapas variográficos.

	Horizontal	Vertical
Nº de direcciones	18	18
Nº de pasos	11	11
Largo del paso	30 m	20 m
Tolerancia del paso	1 paso	1 paso
Tolerancia de la dirección	1 dirección	1 dirección
Ancho de banda	4 m	4 m

Tabla 7.4: Parámetros para calcular los mapas variográficos

En función de lo observado en los mapas variográficos se calcula los variogramas experimentales para las direcciones norte-sur, este-oeste y vertical. A continuación se muestra los parámetros utilizados.

	N90 (este-oeste)	N0 (norte-sur)	D90 (vertical)
Ancho de banda	4 m	4 m	4 m
Largo del paso	30 m	30 m	20 m
Nº de pasos	11	11	9
Tolerancia del paso	15 m	15 m	10 m
Tolerancia angular	20°	20°	20°

Tabla 7.5: Parámetros para calcular los variogramas experimentales

7.1.4 Simulación convencional (modelo multigaussiano)

En las tablas 7.6 y 7.7 se presentan las características de la grilla utilizada para las simulaciones. En todos los casos el espacio abarcado es el mismo.

	Este-oeste	Norte-sur	Vertical
Punto de origen [m]	-140	500	2.100
Punto de término [m]	520	1.160	2.500

Tabla 7.6: Características espaciales de la grilla

Tamaño bloques	N° de bloques Norte-sur	N° de bloques Este-oeste	N° de bloques Vertical	Total
5x5x10 m ³	132	132	40	696.960
10x10x10 m ³	66	66	40	174.240
15x15x20 m ³	44	44	20	38.720
20x20x20 m ³	33	33	20	21.780
30x30x20 m ³	22	22	20	9.680

Tabla 7.7: Características de la grilla para los distintos tamaños de bloque

En la figura 7.3 se muestran los promedios de las realizaciones de ley de cobre para cada uno de los tamaños de bloque considerados (modelo multigaussiano).

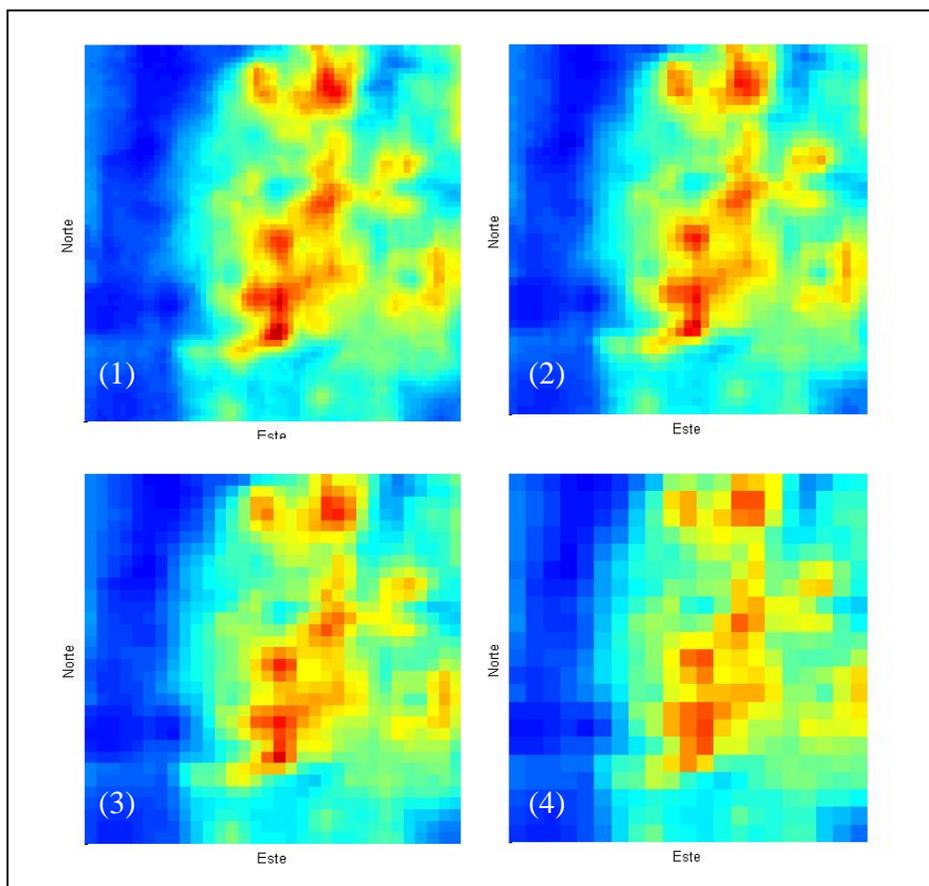


Figura 7.3: Promedio de las realizaciones: (1) Bloques de 10x10x10 m³, (2) Bloques de 15x15x20 m³, (3) Bloques de 20x20x20 m³, y (4) Bloques de 30x30x20 m³ (cota 2.300)

A continuación se muestran las curvas tonelaje-ley, y estimación de los recursos recuperables correspondientes a cada tamaño de bloque.

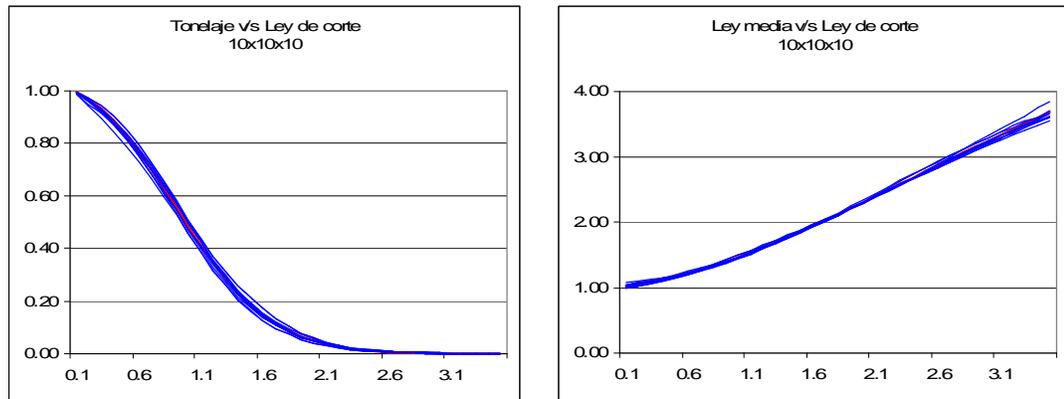


Gráfico 7.5: Curvas Tonelaje-ley para bloques de 10x10x10 m³

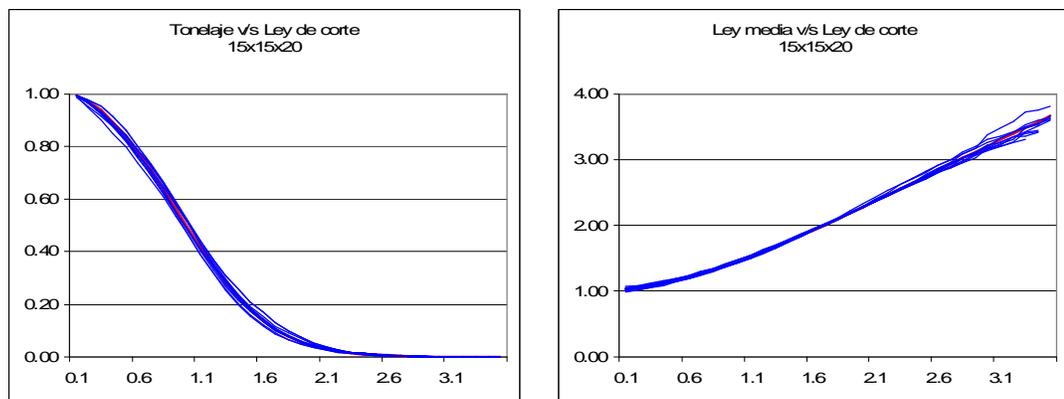


Gráfico 7.6: Curvas Tonelaje-ley para bloques de 15x15x20 m³

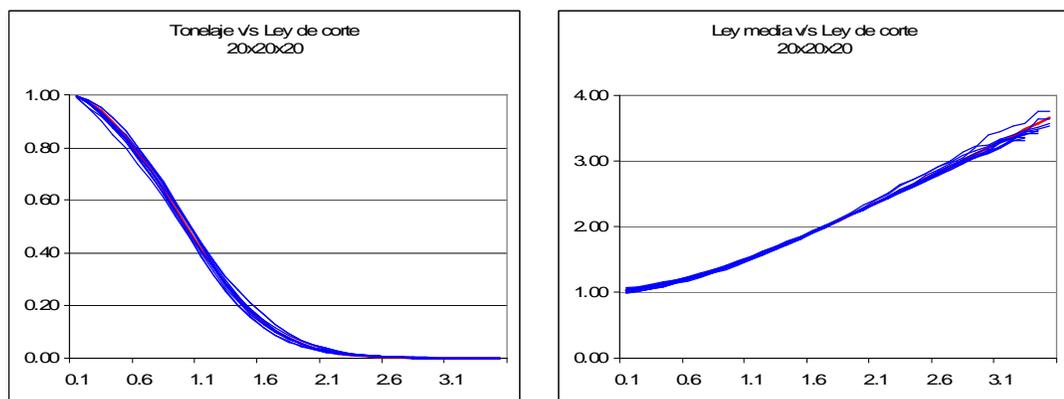


Gráfico 7.7: Curvas Tonelaje-ley para bloques de 20x20x20 m³

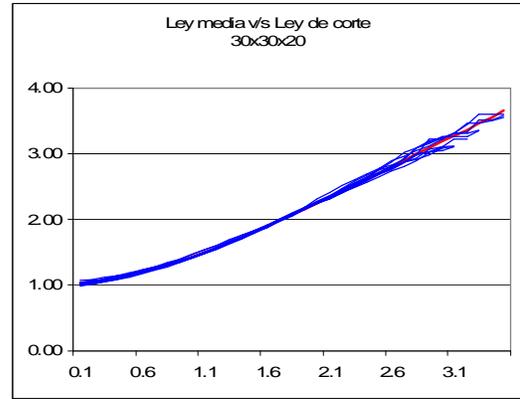
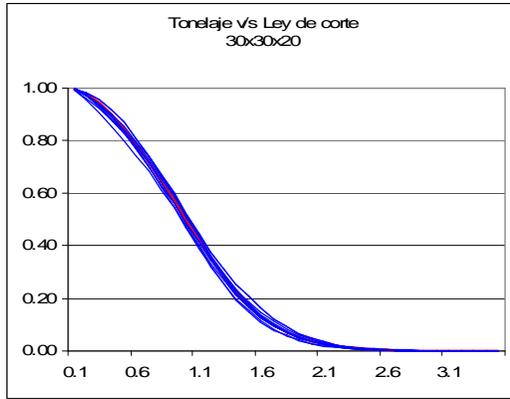


Gráfico 7.8: Curvas Tonelaje-ley para bloques de 30x30x20 m³

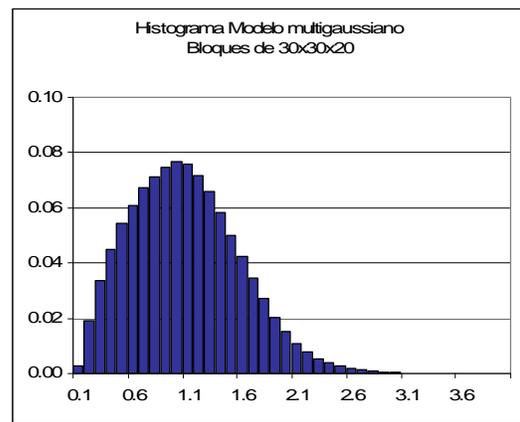
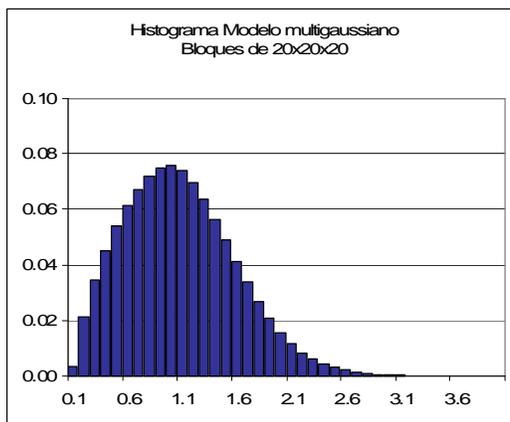
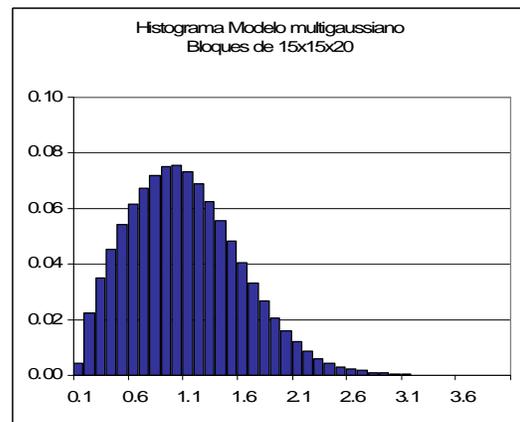
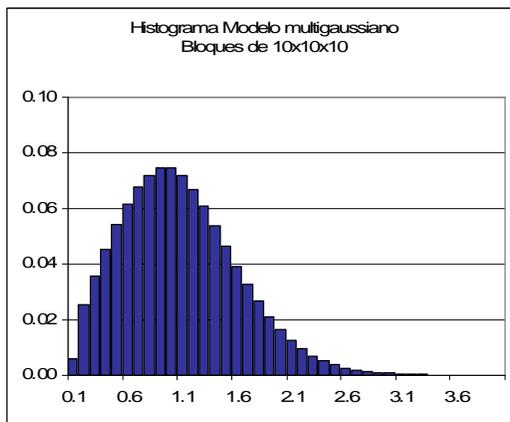


Gráfico 7.9: Histogramas brutos para los diferentes tamaños de bloque

Lc [%]	5x5x10 m ³		10x10x10 m ³		15x15x20 m ³		20x20x20 m ³		30x30x20 m ³	
	Ton [%]	Lm [%]	Ton [%]	Lm [%]	Ton [%]	Lm [%]	Ton [%]	Lm [%]	Ton [%]	Lm [%]
0.1	0.99	1.04	0.99	1.03	1.00	1.03	1.00	1.03	1.00	1.03
0.2	0.96	1.06	0.97	1.06	0.97	1.05	0.98	1.05	0.98	1.05
0.3	0.93	1.09	0.93	1.09	0.94	1.08	0.94	1.08	0.94	1.08
0.4	0.88	1.13	0.89	1.13	0.89	1.12	0.90	1.12	0.90	1.11
0.5	0.83	1.17	0.83	1.17	0.84	1.16	0.84	1.16	0.85	1.15
0.6	0.77	1.23	0.77	1.22	0.78	1.21	0.78	1.21	0.78	1.20
0.7	0.70	1.28	0.70	1.27	0.71	1.26	0.71	1.26	0.72	1.25
0.8	0.63	1.34	0.63	1.33	0.64	1.32	0.64	1.32	0.65	1.31
0.9	0.55	1.41	0.56	1.40	0.56	1.38	0.57	1.38	0.57	1.37
1.0	0.48	1.48	0.48	1.47	0.49	1.45	0.49	1.45	0.49	1.43
1.1	0.41	1.55	0.41	1.54	0.41	1.52	0.42	1.52	0.42	1.50
1.2	0.34	1.63	0.34	1.62	0.35	1.60	0.35	1.59	0.35	1.57
1.3	0.28	1.71	0.28	1.69	0.28	1.67	0.28	1.67	0.28	1.65
1.4	0.23	1.79	0.23	1.78	0.23	1.75	0.23	1.75	0.22	1.73
1.5	0.19	1.88	0.18	1.86	0.18	1.84	0.18	1.83	0.17	1.81
1.6	0.15	1.96	0.14	1.94	0.14	1.92	0.14	1.91	0.13	1.89
1.7	0.11	2.05	0.11	2.03	0.11	2.01	0.10	2.00	0.10	1.98
1.8	0.09	2.14	0.08	2.12	0.08	2.10	0.08	2.09	0.07	2.07
1.9	0.07	2.23	0.06	2.21	0.06	2.19	0.05	2.18	0.05	2.16
2.0	0.05	2.32	0.05	2.30	0.04	2.28	0.04	2.27	0.03	2.25
2.1	0.04	2.41	0.03	2.40	0.03	2.37	0.03	2.36	0.02	2.34
2.2	0.03	2.51	0.02	2.49	0.02	2.47	0.02	2.45	0.02	2.43
2.3	0.02	2.60	0.02	2.58	0.01	2.56	0.01	2.55	0.01	2.52
2.4	0.01	2.70	0.01	2.68	0.01	2.65	0.01	2.64	0.01	2.62
2.5	0.01	2.80	0.01	2.77	0.01	2.75	0.01	2.73	0.00	2.71
2.6	0.01	2.89	0.01	2.87	0.00	2.84	0.00	2.83	0.00	2.81
2.7	0.01	2.99	0.00	2.96	0.00	2.93	0.00	2.92	0.00	2.90
2.8	0.00	3.08	0.00	3.06	0.00	3.03	0.00	3.02	0.00	3.00
2.9	0.00	3.17	0.00	3.15	0.00	3.12	0.00	3.11	0.00	3.09
3.0	0.00	3.26	0.00	3.24	0.00	3.21	0.00	3.20	0.00	3.18
3.1	0.00	3.35	0.00	3.33	0.00	3.30	0.00	3.29	0.00	3.28
3.2	0.00	3.44	0.00	3.42	0.00	3.39	0.00	3.38	0.00	3.37
3.3	0.00	3.53	0.00	3.51	0.00	3.49	0.00	3.48	0.00	3.47
3.4	0.00	3.62	0.00	3.60	0.00	3.58	0.00	3.57	0.00	3.56
3.5	0.00	3.70	0.00	3.69	0.00	3.67	0.00	3.65	0.00	3.66

Tabla 7.8: Curvas tonelaje-ley modelo multigaussiano

Ley de corte [%]	Tonelaje [kton]	Ley media [%]	Finos [kton]
0,0	470.448	1,03	4.837
0,5	392.004	1,17	4.584
1,0	227.105	1,47	3.331
1,5	85.977	1,86	1.598

Tabla 7.9: Recursos recuperables sobre una ley de corte (bloques de 10x10x10 m³)

Ley de corte [%]	Tonelaje [kton]	Ley media [%]	Finos [kton]
0,0	470.448	1,03	4.837
0,5	394.678	1,16	4.588
1,0	229.498	1,45	3.331
1,5	84.179	1,84	1.546

Tabla 7.10: Recursos recuperables sobre una ley de corte (bloques de 15x15x20 m³)

Ley de corte [%]	Tonelaje [kton]	Ley media [%]	Finos [kton]
0,0	470.448	1,03	4.837
0,5	395.728	1,16	4.589
1,0	230.533	1,45	3.332
1,5	83.417	1,83	1.524

Tabla 7.11: Recursos recuperables sobre una ley de corte (bloques de 20x20x20 m³)

Ley de corte [%]	Tonelaje [kton]	Ley media [%]	Finos [kton]
0,0	470.448	1,03	4.837
0,5	397.718	1,15	4.592
1,0	232.824	1,43	3.336
1,5	81.824	1,81	1.480

Tabla 7.12: Recursos recuperables sobre una ley de corte (bloques de 30x30x20 m³)

7.1.5 Ajuste de los variogramas de indicadores

Se presenta el ajuste de los variogramas de indicadores experimentales para el primer, segundo y tercer cuartil de los datos, con los variogramas modelados respectivos, correspondientes al modelo mínimo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes y el modelo multigaussiano. Los variogramas experimentales se caracterizan mediante círculos, mientras que los variogramas modelados se muestran como líneas continuas. Los colores azul, verde y rojo están referidos a las direcciones norte-sur, este-oeste y vertical respectivamente.

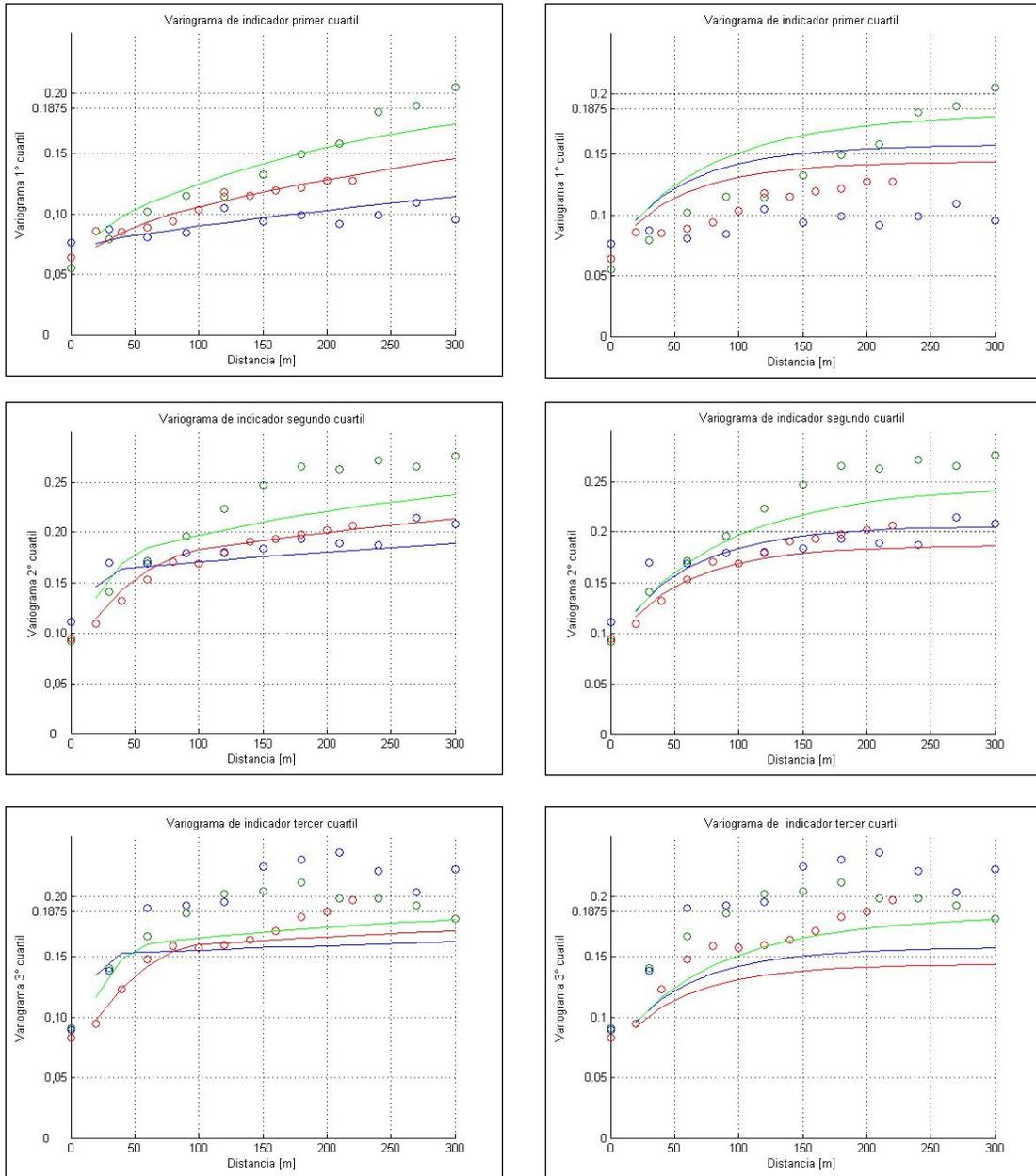


Gráfico 7.10: Variogramas de indicadores experimentales y modelados (izquierda: modelo complejo (mínimo de dos gaussianas), derecha: modelo multigaussiano)

A continuación se presenta el ajuste obtenido para los variogramas cruzados de indicadores.

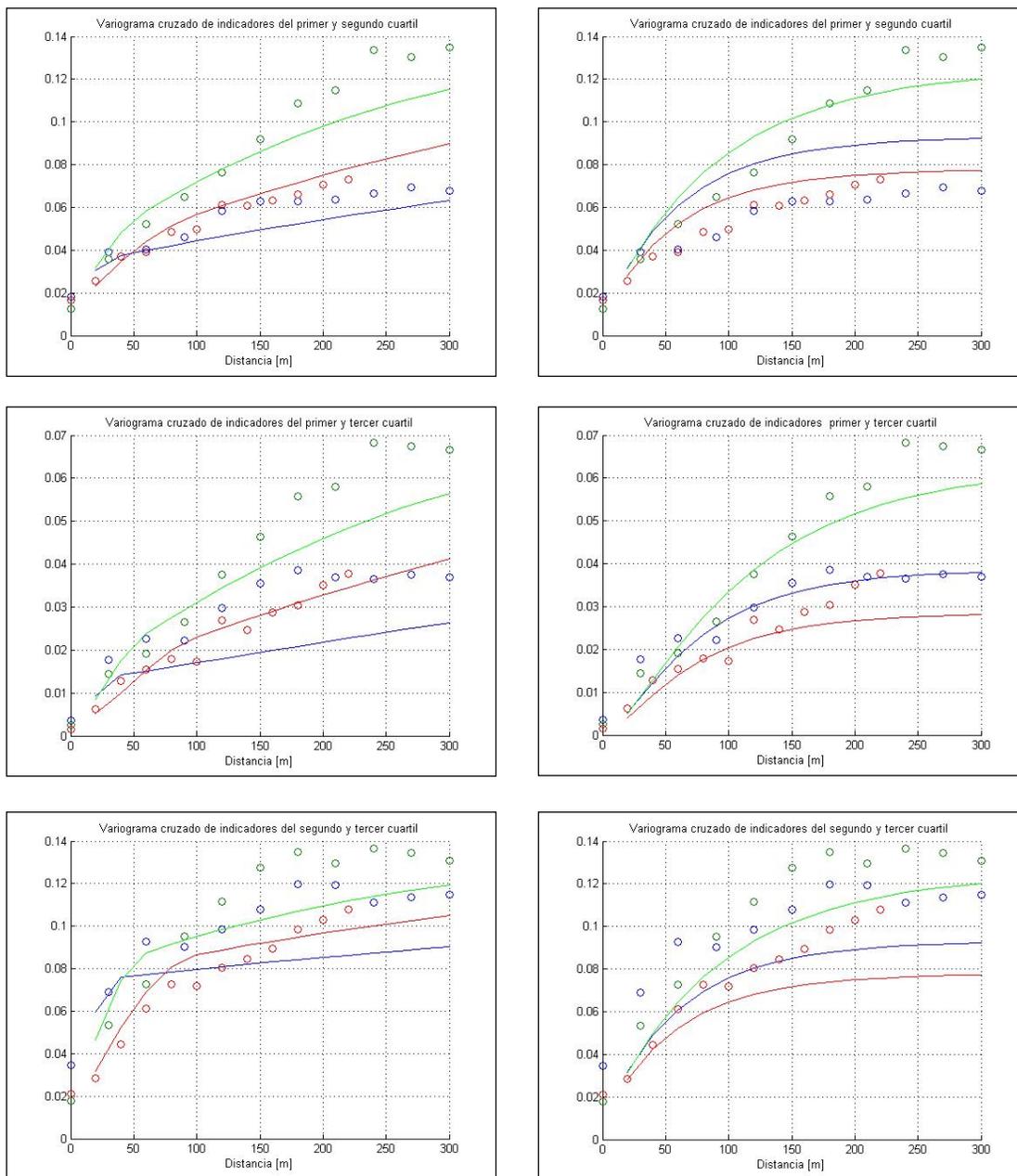


Gráfico 7.11: Variogramas de indicadores experimentales y modelados (izquierda: modelo complejo, derecha: modelo multigaussiano)

7.1.6 Simulación aplicando el modelo complejo

Se presentan imágenes para el promedio de las realizaciones de leyes para los tamaños de bloques de $10 \times 10 \times 10 \text{ m}^3$, $15 \times 15 \times 10 \text{ m}^3$, $20 \times 20 \times 30 \text{ m}^3$, y $30 \times 30 \times 20 \text{ m}^3$.

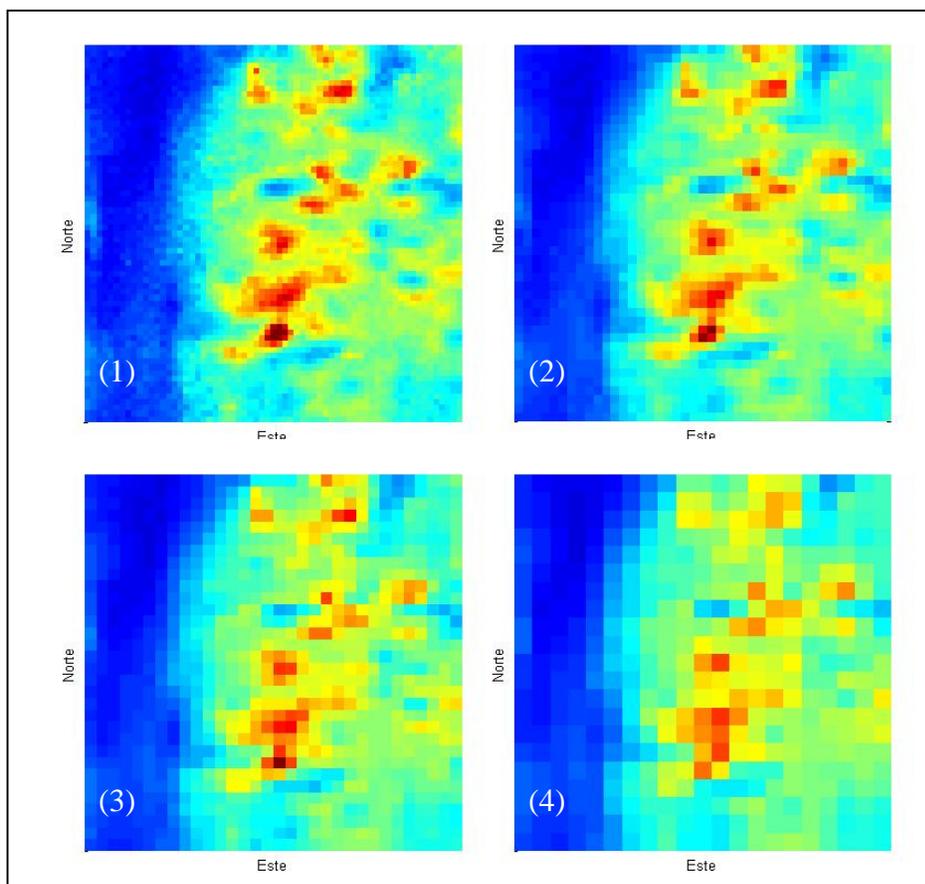


Figura 7.4: Promedio de las realizaciones: (1) Bloques de $10 \times 10 \times 10 \text{ m}^3$, (2) Bloques de $15 \times 15 \times 20 \text{ m}^3$, (3) Bloques de $20 \times 20 \times 20 \text{ m}^3$, y (4) Bloques de $30 \times 30 \times 20 \text{ m}^3$ (cota 2.300)

A continuación se muestran las curvas tonelaje-ley, y estimación de los recursos recuperables correspondientes a cada tamaño de bloque.

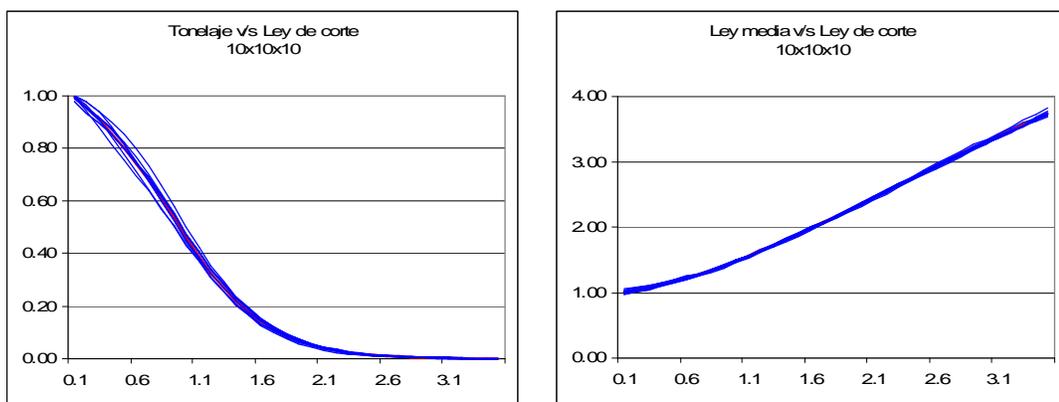


Gráfico 7.12: Curvas Tonelaje-ley para bloques de $10 \times 10 \times 10 \text{ m}^3$

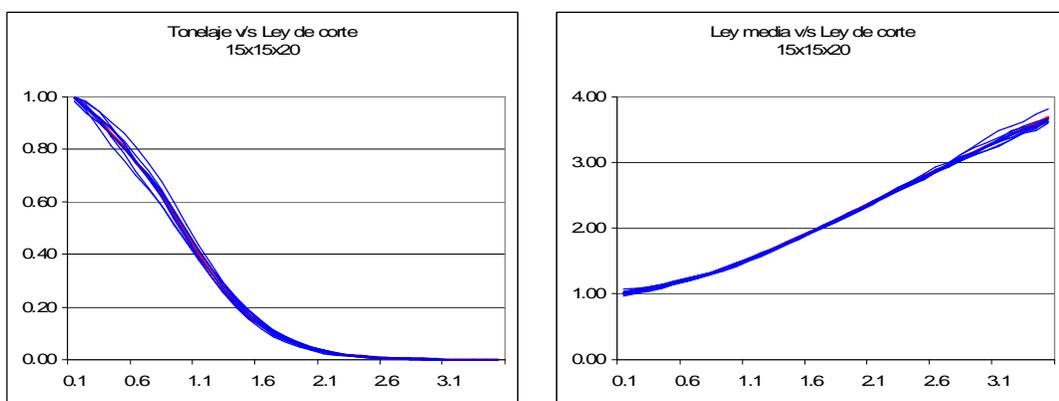


Gráfico 7.13: Curvas Tonelaje-ley para bloques de $15 \times 15 \times 20 \text{ m}^3$

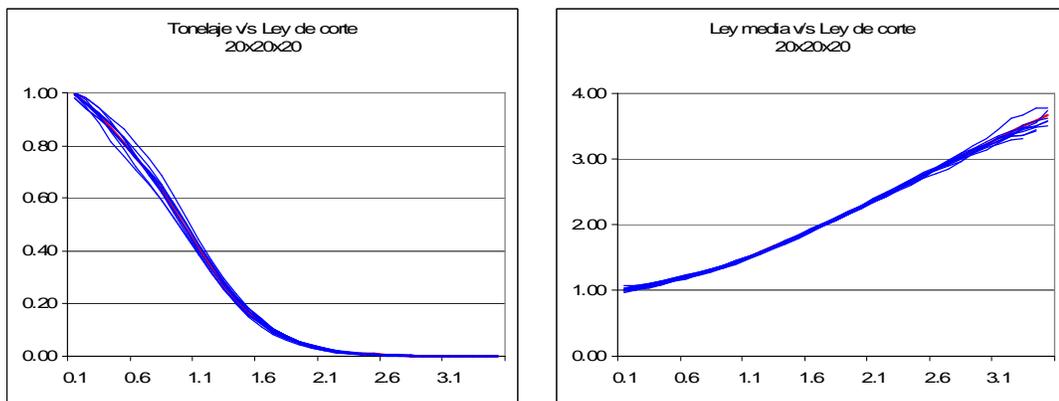


Gráfico 7.14: Curvas Tonelaje-ley para bloques de $20 \times 20 \times 20 \text{ m}^3$

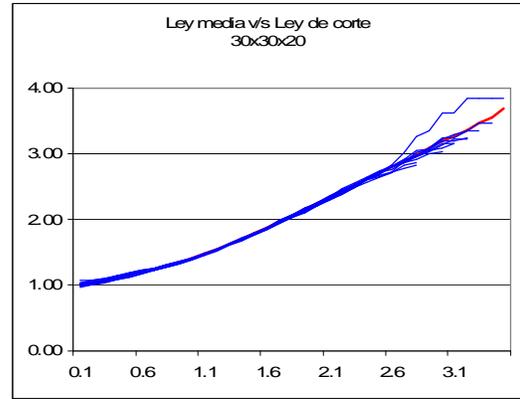
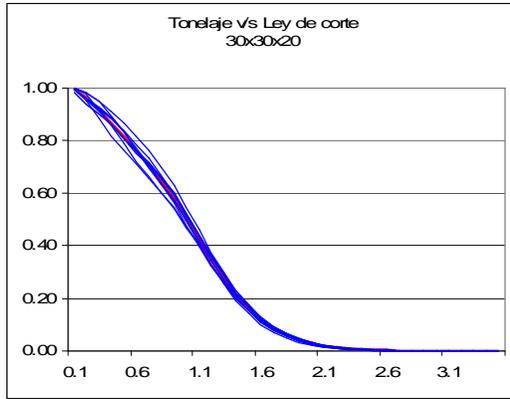


Gráfico 7.15: Curvas Tonelaje-ley para bloques de 30x30x20 m³

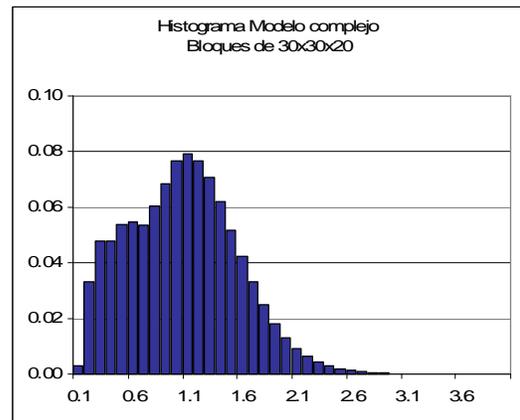
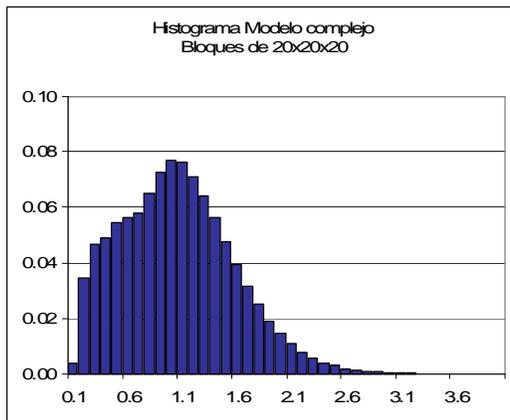
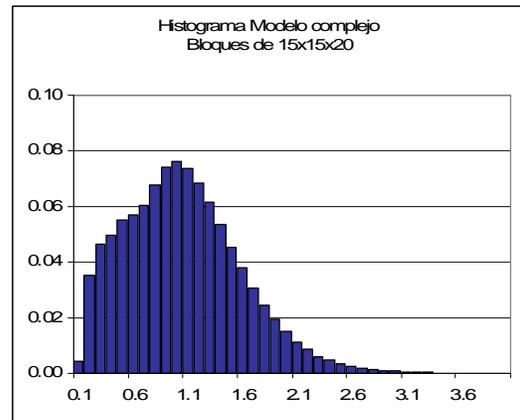
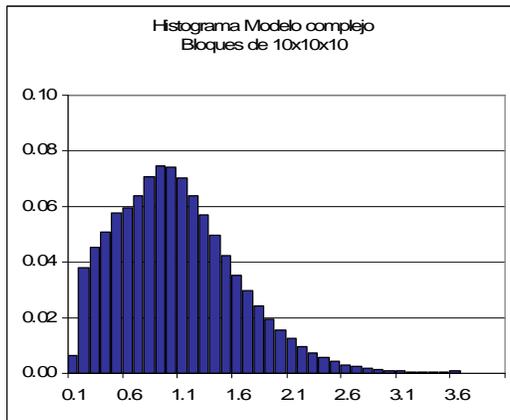


Gráfico 7.16: Histogramas brutos para los diferentes tamaños de bloque

Lc [%]	5x5x10 m ³		10x10x10 m ³		15x15x20 m ³		20x20x20 m ³		30x30x20 m ³	
	Ton [%]	Lm [%]	Ton [%]	Lm [%]	Ton [%]	Lm [%]	Ton [%]	Lm [%]	Ton [%]	Lm [%]
0.1	0.99	1.01	0.99	1.01	1.00	1.01	1.00	1.01	1.00	1.01
0.2	0.95	1.05	0.96	1.04	0.96	1.04	0.96	1.04	0.96	1.04
0.3	0.90	1.09	0.91	1.08	0.91	1.08	0.91	1.08	0.92	1.08
0.4	0.85	1.14	0.86	1.13	0.86	1.12	0.87	1.12	0.87	1.12
0.5	0.78	1.20	0.80	1.18	0.81	1.17	0.81	1.17	0.81	1.16
0.6	0.72	1.25	0.74	1.23	0.75	1.21	0.75	1.21	0.76	1.21
0.7	0.65	1.31	0.68	1.28	0.69	1.26	0.70	1.26	0.71	1.25
0.8	0.58	1.38	0.61	1.34	0.62	1.32	0.63	1.31	0.65	1.29
0.9	0.51	1.46	0.53	1.41	0.55	1.38	0.56	1.37	0.58	1.35
1.0	0.44	1.54	0.46	1.48	0.47	1.45	0.48	1.44	0.50	1.41
1.1	0.37	1.63	0.39	1.56	0.40	1.53	0.41	1.51	0.42	1.47
1.2	0.32	1.71	0.32	1.64	0.33	1.60	0.34	1.58	0.34	1.55
1.3	0.27	1.79	0.27	1.73	0.27	1.69	0.27	1.66	0.27	1.62
1.4	0.22	1.88	0.22	1.81	0.22	1.77	0.21	1.75	0.21	1.71
1.5	0.19	1.98	0.18	1.90	0.17	1.86	0.17	1.83	0.16	1.79
1.6	0.15	2.06	0.14	1.99	0.13	1.94	0.13	1.92	0.12	1.88
1.7	0.13	2.15	0.11	2.08	0.10	2.03	0.10	2.01	0.08	1.96
1.8	0.11	2.23	0.09	2.17	0.08	2.12	0.07	2.10	0.06	2.06
1.9	0.08	2.33	0.07	2.26	0.06	2.22	0.05	2.19	0.04	2.15
2.0	0.07	2.43	0.05	2.36	0.04	2.31	0.04	2.28	0.03	2.24
2.1	0.05	2.52	0.04	2.46	0.03	2.41	0.03	2.38	0.02	2.33
2.2	0.04	2.63	0.03	2.55	0.02	2.50	0.02	2.47	0.01	2.43
2.3	0.03	2.74	0.02	2.65	0.02	2.60	0.01	2.57	0.01	2.52
2.4	0.03	2.83	0.02	2.75	0.01	2.69	0.01	2.66	0.01	2.62
2.5	0.02	2.93	0.01	2.84	0.01	2.78	0.01	2.76	0.00	2.70
2.6	0.02	3.02	0.01	2.94	0.01	2.88	0.00	2.85	0.00	2.79
2.7	0.01	3.13	0.01	3.03	0.00	2.97	0.00	2.95	0.00	2.88
2.8	0.01	3.23	0.01	3.12	0.00	3.06	0.00	3.04	0.00	2.98
2.9	0.01	3.37	0.00	3.21	0.00	3.15	0.00	3.13	0.00	3.08
3.0	0.01	3.45	0.00	3.30	0.00	3.25	0.00	3.23	0.00	3.18
3.1	0.01	3.54	0.00	3.39	0.00	3.33	0.00	3.32	0.00	3.26
3.2	0.00	3.58	0.00	3.48	0.00	3.43	0.00	3.41	0.00	3.35
3.3	0.00	3.68	0.00	3.57	0.00	3.52	0.00	3.50	0.00	3.46
3.4	0.00	3.72	0.00	3.66	0.00	3.61	0.00	3.59	0.00	3.56
3.5	0.00	3.77	0.00	3.74	0.00	3.69	0.00	3.67	0.00	3.68

Tabla 7.13: Curvas tonelaje-ley modelo complejo

Ley de corte [%]	Tonelaje [kton]	Ley media [%]	Finos [kton]
0,0	470.448	1,00	4.726
0,5	377.315	1,18	4.435
1,0	215.964	1,48	3.205
1,5	83.037	1,90	1.578

Tabla 7.14: Recursos recuperables sobre una ley de corte (bloques de 10x10x10 m³)

Ley de corte [%]	Tonelaje [kton]	Ley media [%]	Finos [kton]
0,0	470.448	1,00	4.726
0,5	380.600	1,17	4.443
1,0	222.619	1,45	3.232
1,5	80.093	1,86	1.486

Tabla 7.15: Recursos recuperables sobre una ley de corte (bloques de 15x15x20 m³)

Ley de corte [%]	Tonelaje [kton]	Ley media [%]	Finos [kton]
0,0	470.448	1,00	4.726
0,5	381.483	1,17	4.445
1,0	226.902	1,44	3.258
1,5	78.573	1,83	1.439

Tabla 7.16: Recursos recuperables sobre una ley de corte (bloques de 20x20x20 m³)

Ley de corte [%]	Tonelaje [kton]	Ley media [%]	Finos [kton]
0,0	470.448	1,00	4.726
0,5	382.899	1,16	4.448
1,0	235.433	1,41	3.314
1,5	75.104	1,79	1.344

Tabla 7.17: Recursos recuperables sobre una ley de corte (bloques de 30x30x20 m³)

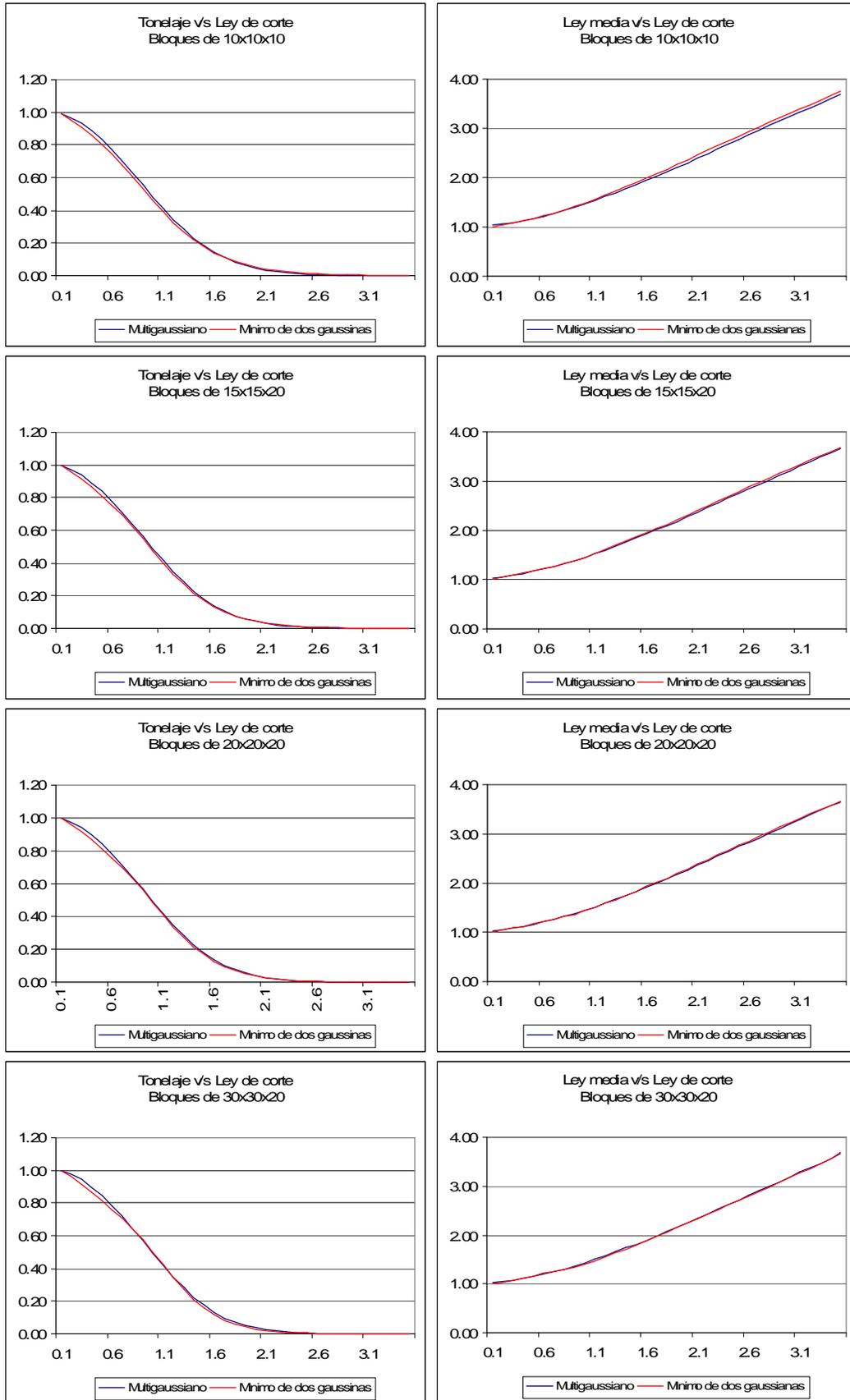


Gráfico 7.17: Curvas tonelaje-ley para ambos modelos y para distintos tamaños de bloque

7.1.7 Validación de las simulaciones

En la figura 7.5 se presenta las muestras a estimar, y las muestras que se utilizan para realizar la estimación.

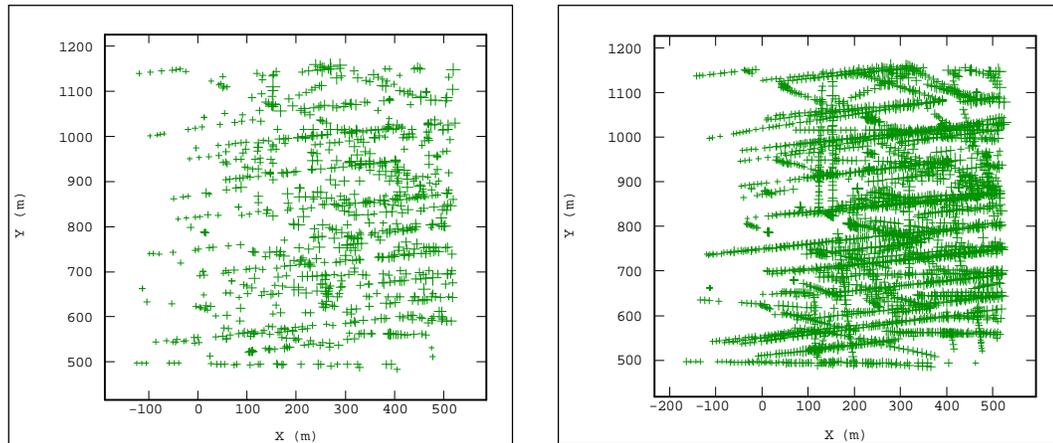


Figura 7.5: Muestras a estimar (20%) y datos condicionantes (80%)

El caso inverso consiste en intercambiar ambos conjuntos de muestras, dejando fuera un 80% de las muestras y realizando la estimación en base al 20% restante. Los resultados asociados a este segundo caso se presentan a continuación.

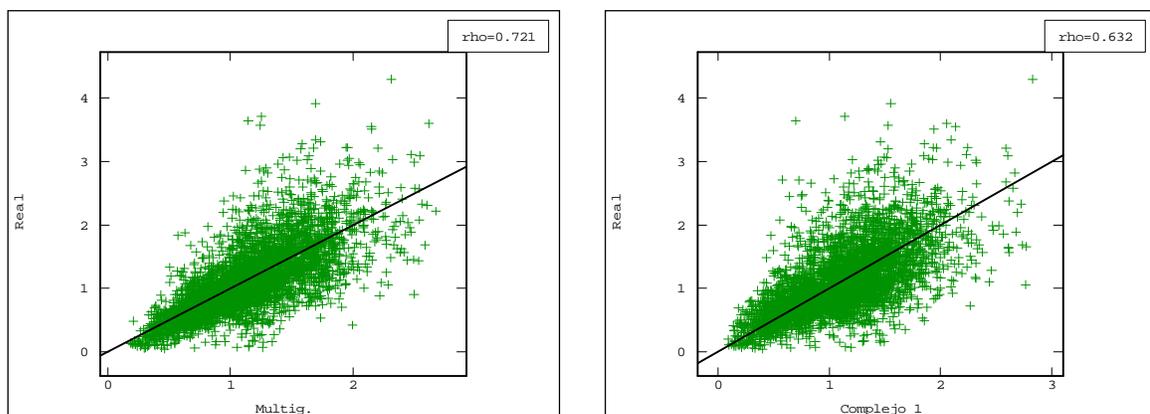


Figura 7.6: Correlación entre leyes reales y estimadas (promedio de las realizaciones), izquierda: modelo multigaussiano, derecha: modelo alternativo)

	Valor Real	Modelo multigaussiano	Modelo complejo
Media [%]	1,12	1,14	1,12
Varianza [%]	0,31	0,18	0,20

Tabla 7.18: Valores reales y estimados de las leyes de cobre a partir de ambos modelos

	Error Modelo multigaussiano	Correlación M. multigaussiano	Error Modelo complejo	Correlación M. complejo
Media [%]	0,02	0,72	0,00	0,63
Varianza [%]	0,15		0,20	

Tabla 7.19: Estadísticas del error cometido y correlación entre los valores reales y estimados