



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA DINÁMICA DE PLUMAS TÉRMICAS EN RÉGIMEN
LAMINAR Y TURBULENTO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

FELIPE ANDRÉS VÉLIZ CORNEJO

**PROFESOR GUÍA:
RODRIGO HERNÁNDEZ PELLICER**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN CARLOS ELICER CORTÉS
ÁLVARO VALENCIA MUSALEM**

**SANTIAGO DE CHILE
MAYO 2009**

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVÍL MECÁNICO
POR. FELIPE VELIZ C.
FECHA: 5 DE MAYO DE 2009
PROF. GUÍA: SR. RODRIGO HERNÁNDEZ P.

“SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA DINÁMICA DE PLUMAS TÉRMICAS EN RÉGIMEN LAMINAR Y TURBULENTO”

Las plumas e impulsos térmicos son fenómenos físicos donde una cierta cantidad de calor es liberada continua o impulsivamente a un fluido, su estudio tiene gran relevancia en los modelos de dispersión de contaminación atmosférica y predicción de flujo del humo en incendios.

Experimentalmente, las plumas térmicas son generadas a través de diversos métodos. El más común de todos implica insertar una resistencia eléctrica dentro de un fluido (agua, aire, etc.). La temperatura que genera la resistencia produce una variación en la densidad, con lo que se produce el movimiento. Existen métodos más complejos que permitirían conseguir el efecto de fuente puntual, mediante un calentamiento ohmico de dos electrodos ubicados dentro de un fluido. El principal parámetro que caracteriza la intensidad de la boyancia es el número de Grashof, o en su defecto, el número de Rayleigh.

La siguiente memoria tiene como objetivo estudiar la dinámica de plumas térmicas en régimen laminar, a través de simulación numérica directa (DNS), y turbulento mediante el modelo $k - \epsilon$ de turbulencia. Este estudio se enmarca dentro del proyecto Fondecyt 1085020. Para esto, se simuló el fenómeno como un fluido dentro de una cavidad cuadrada con un electrodo metálico en una de sus caras. El electrodo recibe una inyección de potencia a través de la base, lo que produce una variación en las temperaturas desembocando en una boyancia inducida. Las simulaciones se llevaron a cabo en el software CFD Fluent v6.3.

De la simulación se concluyó que los resultados laminares son consistentes con la teoría. Los perfiles de temperatura presentan una forma de función Gaussiana que coincide con lo propuesto por la bibliografía. Se observó que la curva Nusselt exhibe una perturbación la cual podría vincularse al instante en que se desconecta la vorticidad asociada a la pluma, de la vorticidad asociada al electrodo. Sin embargo, los contornos de vorticidad no fueron concluyentes y mayores pruebas deben ser realizadas.

El régimen estacionario se alcanzo entre los 90 y 10[s]. Respecto de la turbulencia, se observó que el volumen de estudio no fue lo suficientemente grande, tal de no perturbar la generación de la pluma. Se obtuvieron velocidades máximas del orden de 1.5, muy por encima de las generadas en el caso laminar. La energía cinética turbulenta máxima obtenida es del orden de los $0.325[cm^2/s^2]$ mientras que su disipación es de $0.13[cm^2/s^3]$.

Índice general

Índice de Tablas	IV
Índice de Figuras	V
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes Generales	1
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo general	2
1.2.2. Objetivos específicos	2
1.3. Alcances	2
2. Antecedentes	3
2.1. Antecedentes Historicos	3
2.2. Antecedentes Fluidodinámicos	4
2.3. Descripción y Características Físicas	7
3. Metodología Específica	11
3.1. Generación de thermals y plumas térmicas	11
3.2. Mallado	13

3.3.	Propiedades Termofísicas	16
3.3.1.	Agua Líquida	16
3.3.2.	Mercurio	20
3.4.	Condiciones de Borde	22
3.5.	Parámetros Numéricos	23
3.5.1.	Discretización Temporal	23
3.5.2.	Parámetros del Solver	24
3.6.	Modelo de Turbulencia	27
3.7.	Transferencia de Calor	28
3.8.	Nomenclatura Utilizada	30
4.	Selección de Malla y Geometría	32
4.1.	Selección de Malla	32
4.2.	Selección de Geometría	35
4.2.1.	Velocidad a lo Largo del Eje Central	35
4.2.2.	Perfiles de Temperatura	36
4.2.3.	Perfiles de Velocidad	37
5.	Simulación Laminar	39
5.1.	Verificación de la Transición del Régimen Transiente al Estacionario	40
5.2.	Verificación de la Axisimetría	43
5.3.	Descripción de la Temperatura	45
5.4.	Perfiles de Temperatura	47
5.5.	Estudio de la Transferencia de Calor	53

5.6. Cinemática del Núcleo	59
5.7. Isocontornos de Vorticidad	61
5.8. Curvas de Nivel de V_z , V_x y ω	64
6. Simulación Turbulenta	69
6.1. Axisimetría y Establecimiento de la Solución	69
6.2. Verificación de la Condición de Salida.	71
6.3. Disipación y Energía Cinética Turbulenta	71
6.4. Perfiles de Temperatura	74
6.5. Perfiles de Velocidad	75
6.6. Cinemática del Núcleo	77
6.7. Escalas Espaciales Térmica y Cinemática	78
7. Conclusiones	80
Bibliografía	82
A. Derivación de las relaciones propuestas	I
A.1. Derivación de la ecuaciones adimensionales	I
A.1.1. Ecuación de Continuidad	I
A.1.2. Ecuación de Navier-Stokes	II
A.1.3. Ecuación de la Energía	II
A.2. Derivación de la expresión adimensional para calcular el número de Nusselt	III
B. Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent	V

Índice de Tablas

3.1. Constantes obtenidas para $\rho(T)$	16
3.2. Constantes propuestas por Peng [5] para $\mu(T)$ en agua líquida.	17
3.3. Constantes propuestas por Peng [5] para el polinomio $k(T)$ en agua líquida.	18
3.4. Constantes obtenidas para $c_p(T)$	19
3.5. Constantes obtenidas para $\rho(T)$	20
5.1. Números adimensionales desarrollados dependiendo del tipo de fluido y potencia térmica inyectada.	40
5.2. Constantes del ajuste Gaussiano para perfiles de temperatura en régimen laminar.	49
5.3. Tiempo en que sucede la perturbación en el número de Nusselt (t^*) según τ	55
6.1. Constantes del ajuste gaussiano para perfiles de temperatura en régimen turbulento.	74
6.2. Constantes del ajuste gaussiano para perfiles de velocidad en régimen turbulento.	76

Índice de Figuras

2.1. Erupción monte Santa Elena, 1980.	3
2.2. Nube de contaminación generada en industrias	4
2.3. Thermal con sus respectivas dimensiones de interés. [3]	7
2.4. Curva clásica de la velocidad de ascenso de un thermal en el tiempo [3].	8
2.5. Desarrollo de un thermal en el experimento realizado por Shlien [3].	9
3.1. a) Esquema de la generación mediante inyección de potencia térmica y b) esquema de la generación mediante imposición de temperatura.	12
3.2. Escalón de Potencia Térmica Impuesta	12
3.3. Esquema de la funciones de aproximación	14
3.4. Esquema del mallado.	15
3.5. Densidad en función de la temperatura para agua líquida	17
3.6. Viscosidad dinámica en función de la temperatura para agua líquida	18
3.7. Conductividad térmica en función de la temperatura para agua líquida	19
3.8. Calor específico en función de la temperatura para agua líquida	20
3.9. Densidad en función de la temperatura para mercurio líquido	21
3.10. Esquema de las condiciones de borde empleadas en la simulación	22
3.11. Volumen de control en torno al punto P con nodos vecinos (T,B,E,W,N,S)	24

3.12. Representación 2D del método de volúmenes de control en torno al punto P con nodos vecinos (E,W,N,S).	25
3.13. Esquema de la nomenclatura utilizada en el trabajo.	31
3.14. Detalle del método empleado para localizar al núcleo de la pluma térmica.	31
4.1. Perfil de V_z en función de x para $(y,z) = (0,3)[cm]$	33
4.2. Perfil de V_z en función de x para $(y,z) = (0,4)[cm]$	33
4.3. Perfil de V_z en función de x para $(y,z) = (0,5)[cm]$	34
4.4. Perfil de V_z en función de x para $(y,z) = (0,6)[cm]$	34
4.5. Perfil de T en función de x para $(y,z) = (0,2)[cm]$	34
4.6. Perfil de T en función de x para $(y,z) = (0,3)[cm]$	34
4.7. Perfil de T en función de x para $(y,z) = (0,4)[cm]$	35
4.8. Comparación de la magnitud de la velocidad a lo largo del eje central para $t = 20, 30, 40$ y $60[seg]$	36
4.9. Comparación perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,2)[cm]$	37
4.10. Comparación perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,4)[cm]$	37
4.11. Comparación perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,5)[cm]$	37
4.12. Comparación del perfil de U en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,2)[cm]$. . .	38
4.13. Comparación del perfil de U en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,4)[cm]$. . .	38
4.14. Comparación del perfil de U en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,5)[cm]$. . .	38
5.1. Descripción de los puntos de monitoreo $a - [x,y,z = 0,0,2]$, $b - [x,y,z = 0,0,3]$, $c - [x,y,z = 0,0,4]$, $d - [x,y,z = 0,0,5]$, $e - [x,y,z = -2,0,3]$ y $f - [x,y,z = 2,0,3]$. Las coordenadas se encuentran en centímetros.	40
5.2. Variación de V_z en el punto $a - [x,y,z = 0,0,2][cm]$ a lo largo del tiempo.	41
5.3. Variación de V_z en el punto $b - [x,y,z = 0,0,3][cm]$ a lo largo del tiempo.	41

5.4. Variación de V_z en el punto $c - [x, y, z = 0, 0, 4][cm]$ a lo largo del tiempo.	41
5.5. Variación de V_z en el punto $d - [x, y, z = 0, 0, 5][cm]$ a lo largo del tiempo.	41
5.6. Variación de V_z en el punto $e - [x, y, z = -2, 0, 3][cm]$ a lo largo del tiempo.	42
5.7. Variación de V_z en el punto $f - [x, y, z = 2, 0, 3][cm]$ a lo largo del tiempo.	42
5.8. Variación de las soluciones de V_x y V_z cada 1[s].	43
5.9. Variación de la solución de T cada 1[s].	43
5.10. Comparación perfil de V_z para $z = 3[cm]$	43
5.11. Comparación perfil de V_z para $z = 4[cm]$	43
5.12. Comparación perfil de V_z para $z = 5[cm]$	44
5.13. Comparación perfil de V_z para $z = 6[cm]$	44
5.14. Isocontornos de $V_x = 0.01[cm/s]$ (verde) y $V_x = -0.01[cm/s]$ (rojo) obtenidos en $t=30[s]$	44
5.15. Isocontornos de $V_y = 0.01[cm/s]$ (verde) y $V_y = -0.01[cm/s]$ (rojo) obtenidos en $t=30[s]$	44
5.16. Isocontorno de $V_z = 0.1[cm/s]$ obtenido en $t=30[s]$	45
5.17. Variación de la temperatura a lo largo del eje central de la pluma cuando ha alcanzado un régimen estacionario.	45
5.18. Comparación entre la simulación numérica y la ley de Fourier para la conducción térmica sobre el electrodo.	46
5.19. Figura 5.17 pero con la ordenada en escala logarítmica.	47
5.20. Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 2)[cm]$	48
5.21. Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 3)[cm]$	48
5.22. Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 4)[cm]$	48
5.23. Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 5)[cm]$	48
5.24. Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 6)[cm]$	49

5.25. Variable “a” del ajuste logaritmico 5.3 en función de z	50
5.26. Variable “c” del ajuste logaritmico 5.3 en función de z	51
5.27. Comparación del perfil de T adimensionalizado para $z = 4[cm]$ con los resultados de T. Fujii [14].	53
5.28. Variación del $Nu_{superficial}$ en la punta del electrodo en el tiempo.	55
5.29. Variación de la temperatura en el tiempo para $\tau = 2$	56
5.30. Variación de la temperatura en el tiempo para $\tau = 6$	56
5.31. Variación de la temperatura en el tiempo para $\tau = 12$	56
5.32. Variación de la temperatura en el tiempo para $\tau = 24$	56
5.33. Contornos de ω para $\tau = 2[s]$ y $t = 20[s]$	57
5.34. Contornos de ω para $\tau = 2[s]$ y $t = 24[s]$	57
5.35. Contornos de ω para $\tau = 2[s]$ y $t = 26[s]$	57
5.36. Contornos de ω para $\tau = 6[s]$ y $t = 29[s]$	57
5.37. Contornos de ω para $\tau = 6[s]$ y $t = 32[s]$	57
5.38. Contornos de ω para $\tau = 6[s]$ y $t = 35[s]$	57
5.39. Contornos de ω para $\tau = 12[s]$ y $t = 37[s]$	58
5.40. Contornos de ω para $\tau = 12[s]$ y $t = 40[s]$	58
5.41. Contornos de ω para $\tau = 12[s]$ y $t = 42[s]$	58
5.42. Contornos de ω para $\tau = 24[s]$ y $t = 48[s]$	58
5.43. Contornos de ω para $\tau = 24[s]$ y $t = 52[s]$	58
5.44. Contornos de ω para $\tau = 24[s]$ y $t = 56[s]$	58
5.45. Posición del núcleo en el tiempo.	59
5.46. V_z evaluado en la posición del núcleo en el tiempo.	59

5.47. Líneas de corriente para el campo de velocidad $\vec{V} = (u, v, w - U_a)$ de la pluma térmica para un tiempo $t = 20[s]$	60
5.48. Líneas de corriente para el campo de velocidad $\vec{V} = (u, v, w - U_a)$ de la pluma térmica para un tiempo $t = 30[s]$	60
5.49. Líneas de corriente para el campo de velocidad $\vec{V} = (u, v, w - U_a)$ de la pluma térmica para un tiempo $t = 40[s]$	61
5.50. Líneas de corriente para el campo de velocidad $\vec{V} = (u, v, w - U_a)$ de la pluma térmica para un tiempo $t = 50[s]$	61
5.51. Isocontorno de $\omega = 0.2[s^{-1}]$ para $\tau = 2[s]$ obtenido en $t=39.5[s]$	62
5.52. Isocontorno de $\omega = 0.2[s^{-1}]$ para $\tau = 6[s]$ obtenido en $t=39.5[s]$	62
5.53. Isocontorno de $\omega = 0.2[s^{-1}]$ para $\tau = 12[s]$ obtenido en $t=39.5[s]$	63
5.54. Isocontorno de $\omega = 0.2[s^{-1}]$ para $\tau = 24[s]$ obtenido en $t=39.5[s]$	63
5.55. Isocontorno de $\omega = 0.2[s^{-1}]$ para una pluma térmica obtenido en $t=39.5[s]$	63
5.56. Curvas de Nivel de $V_z[cm/s]$ para una pluma térmica en plano $y = 0[cm]$	65
5.57. Curvas de Nivel de $V_x[cm/s]$ para una pluma térmica en plano $y = 0[cm]$	65
5.58. Curvas de Nivel de $\omega[1/s]$ para una pluma térmica en plano $y = 0[cm]$	66
5.59. Curvas de Nivel de $V_z[cm/s]$ para $\tau = 2[s]$ en plano $y = 0[cm]$	66
5.60. Curvas de Nivel de $V_z[cm/s]$ para $\tau = 6[s]$ en plano $y = 0[cm]$	66
5.61. Curvas de Nivel de $V_x[cm/s]$ para $\tau = 2[s]$ en plano $y = 0[cm]$	67
5.62. Curvas de Nivel de $V_x[cm/s]$ para $\tau = 6[s]$ en plano $y = 0[cm]$	67
5.63. Curvas de Nivel de $\omega[1/s]$ para $\tau = 2[s]$ en plano $y = 0[cm]$	67
5.64. Curvas de Nivel de $\omega[1/s]$ para $\tau = 6[s]$ en plano $y = 0[cm]$	67
5.65. Curvas de Nivel de $V_z[cm/s]$ para $\tau = 12[s]$ en plano $y = 0[cm]$	67
5.66. Curvas de Nivel de $V_z[cm/s]$ para $\tau = 24[s]$ en plano $y = 0[cm]$	67

5.67. Curvas de Nivel de $V_x[cm/s]$ para $\tau = 12[s]$ en plano $y = 0[cm]$	68
5.68. Curvas de Nivel de $V_x[cm/s]$ para $\tau = 24[s]$ en plano $y = 0[cm]$	68
5.69. Curvas de Nivel de $\omega[1/s]$ para $\tau = 12[s]$ en plano $y = 0[cm]$	68
5.70. Curvas de Nivel de $\omega[1/s]$ para $\tau = 24[s]$ en plano $y = 0[cm]$	68
6.1. Comparación perfil de V_z para $z = 3[cm]$	69
6.2. Comparación perfil de V_z para $z = 4[cm]$	69
6.3. Comparación perfil de V_z en función de x para $(y,z) = (0.5)[cm]$	70
6.4. Comparación perfil de V_z en función de x para $(y,z) = (0.6)[cm]$	70
6.5. Variación entre las soluciones de V_x y V_z cada $1[s]$	70
6.6. Variación de la solución de T cada $1[s]$	70
6.7. Intensidad turbulenta en función de z/e	71
6.8. k en función de z para un flujo establecido en caso con $P = 3[watts]$	72
6.9. Perfil de k en función de x a la altura del peak observado en la figura 6.8 para caso con $P = 3[watts]$	72
6.10. ε en función de z para un flujo establecido en caso con $P = 3[watts]$	72
6.11. Perfil de ε en función de x a la altura del peak observado en la figura 6.10 para caso con $P = 3[watts]$	72
6.12. k en función de z para un flujo establecido en caso con $P = 10[watts]$	73
6.13. Perfil de k en función de x a la altura del peak observado en la figura 6.12 para caso con $P = 10[watts]$	73
6.14. ε en función de z para un flujo establecido en caso con $P = 10[watts]$	73
6.15. Perfil de ε en función de x a la altura del peak observado en la figura 6.14 para caso con $P = 10[watts]$	73
6.16. Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,2)[cm]$	74

6.17. Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,3)[cm]$	74
6.18. Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,4)[cm]$	75
6.19. Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,5)[cm]$	75
6.20. Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,6)[cm]$	75
6.21. Perfil de V_z en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,2)[cm]$	76
6.22. Perfil de V_z en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,3)[cm]$	76
6.23. Perfil de V_z en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,4)[cm]$	77
6.24. Perfil de V_z en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,5)[cm]$	77
6.25. Perfil de V_z en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,6)[cm]$	77
6.26. Posición del núcleo en el tiempo.	78
6.27. Esquema del ancho térmico y cinemático de la pluma.	79
6.28. b_v vs z	79
6.29. b_v vs b_T	79
B.1. Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 1.	VI
B.2. Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 2.	VI
B.3. Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 3.	VII
B.4. Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 4.	VII
B.5. Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 5.	VIII
B.6. Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 6.	VIII
B.7. Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 7.	IX

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes Generales

En un medio fluido con densidad dependiente de la temperatura, cualquier fuente de calor promoverá la formación de un flujo ascendente debido a la convección natural. Si la inyección de energía se realiza de forma impulsiva el flujo ascendente se denomina thermal y si se realiza continuamente se llama pluma térmica.

Desde mediados del siglo XX muchas contribuciones al tema pueden ser encontradas en la comunidad científica. Estudios experimentales con el fin de predecir el flujo del humo en incendios, encontrar modelos de dispersión de contaminación atmosférica, etc. Desde inicios de los noventa comenzó a adquirir una gran fuerza la dinámica de fluidos computacional, una técnica, que tiene la potencialidad de describir térmica y dinámicamente los campos de una pluma para geometrías o condiciones complejas.

Ejemplos de plumas son el humo emitido por autos y chimeneas o incluso el calor liberado por torres de enfriamiento. Los impulsos térmicos fueron primeramente detectados por los aviones planeadores que los utilizaban para ganar altura con el mínimo esfuerzo.

En la actualidad, toda simulación numérica debe trabajar en conjunto con su par experimental, con el fin de validar el modelo planteado, para que grandes avances puedan ser llevados a cabo.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

- Estudiar, utilizando simulación numérica, la dinámica de impulsos y plumas térmicas en régimen laminar y turbulento.

1.2.2. Objetivos específicos

- A través de simulación, estudiar la formación y desarrollo de plumas e impulsos térmicos laminares.
- Comparar el modelo con resultados experimentales obtenidos por Shlien en [2].
- Modelar una pluma turbulenta utilizando modelos $k - \varepsilon$ de turbulencia.

1.3. Alcances

- Se realizó una simulación numérica tridimensional en régimen laminar y turbulento.
- Se trabajó con agua en su estado líquido y se obvió la posible existencia de una ebullición localizada.
- Se asumieron propiedades termofísicas independientes de la presión al tratarse de un fluido incompresible.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Antecedentes Historicos

El concepto de pluma se encuentra presente tanto en la naturaleza como en las industrias de hoy en día.

Una pluma térmica natural bastante peculiar se puede observar en la erupción del monte Santa Elena en el estado de Washington en 1980. Esta erupción se observa en la figura 2.1



Figura 2.1: Erupción monte Santa Elena, 1980.

Se observa que los gases emanados tanto por el volcán como por las chimeneas industriales siguen las leyes fluidodinámicas de las plumas térmicas. De aquí se desprende su vital importancia en modelos de dispersión atmosférica.



Figura 2.2: Nube de contaminación generada en industrias

Otra dato interesante es que los aviones planeadores buscan los impulsos termicos o thermals, generados por las diferencias de temperatura en las corrientes de aire, para elevar su altitud realizando el mínimo esfuerzo.

2.2. Antecedentes Fluidodinámicos

Las ecuaciones fundamentales del transporte de fluido en flujos de boyancia¹ inducida, son las mismas que las ecuaciones generales de mecánica de fluidos. La principal diferencia es que la vía por la cual se generará el movimiento es el cambio en el peso “ ρg ” por unidad de volumen. El peso neto o fuerza de boyancia “ $B = g(\rho - \rho_r)$ ” aparecerá en el balance fuerza-momentum comúnmente usado para los cálculos. A su vez, la vía por la que se genera el movimiento en flujos forzados es usualmente un gradiente de presión o un nivel de velocidad impuesto. En este caso, los efectos de velocidad y presión nacen de la interacción de la boyancia con otros efectos del flujo tal como las fuerzas viscosas. Las ecuaciones inducidas por el transporte térmico en 3D son las siguientes:

¹Flujos generados por el empuje

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.2)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot k \nabla T + \beta T^* \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi + q''' \quad (2.3)$$

En las ecuaciones 2.1 - 2.3 surgen las siguientes variables locales: velocidad $\vec{V} = (x, y, z, \tau)$; las temperaturas convencional y absoluta T y T^* ; el gradiente de presión estática ∇p ; la fuerza local debida a la gravedad $\rho \vec{g}$; el efecto de la disipación viscosa de la energía $\mu \Phi$; la tasa de generación de energía volumétrica q''' ; las propiedades del fluido ρ, c_p , el coeficiente de expansión térmica β y la conductividad térmica k ; y el tiempo t . Las ecuaciones anteriores satisfacen tanto el transporte laminar, inestable y turbulento en cualquier sistema de coordenadas.

Si se simplifica la ecuación 2.3 a sus términos más importantes y se asume que la densidad se comporta mediante la aproximación de Boussinesq, a través de la adimensionalización de las ecuaciones 2.1 - 2.3 es posible observar que el parámetro adimensional que rige el fenómeno es el número de Rayleigh (Ra) (ver apéndice A.1 para más detalles):

$$\nabla \cdot (\vec{V}^*) = 0 \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \vec{V}^* \cdot \nabla \vec{V}^* \right) = Ra Pr \theta - \nabla p^* + Pr \nabla^2 \vec{V}^* \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + \vec{V}^* \cdot \nabla \theta \right) = \nabla^2 \theta \quad (2.6)$$

En la mecánica de fluidos, el número de Rayleigh se encuentra asociado al mecanismo de transferencia de calor, es decir, conductivo o convectivo. Bajo cierto valor crítico se dice que la transferencia de calor es principalmente por conducción; cuando excede este valor crítico, la transferencia de calor es principalmente por convección. El número de Rayleigh se define de la siguiente forma:

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu \alpha} \quad (2.7)$$

“L” es la longitud característica y es comúnmente considerada como la distancia entre la zona caliente y fría.

Alguno autores, modifican la relación 2.7 para hacerla más compatible con problemas de inyección de potencia térmica. Esta modificación puede observarse a continuación:

$$\frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha} \cdot \frac{\rho c_p}{\rho c_p} = \frac{g\beta \overbrace{\rho L^3 c_p \Delta T}^E}{\rho c_p \nu \alpha} = \frac{\beta g E}{\rho c_p \alpha \nu} \quad (2.8)$$

Donde $E = \int \dot{Q} dt$, es decir, es toda la energía entregada al fluido. ν es la viscosidad cinemática, β es el coeficiente de expansión térmica, α es la difusividad térmica y c_p el calor específico.

Para comprender a cabalidad el efecto de este número sobre el fenómeno es necesario expresarlo en función de otros dos números adimensionales, el número de Prandtl (ecuación 2.9) y el número de Grashof (ecuación 2.10). El número de Prandtl (Pr) es una relación entre la difusividad cinemática y la difusividad térmica mientras que el número de Grashof (Gr) es una relación entre las fuerzas de boyancia y las fuerzas viscosas.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{k} \quad (2.9)$$

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2} \quad (2.10)$$

Es posible ver cambios en el comportamiento de la pluma para ciertos Ra críticos. Las inestabilidades existentes son caracterizadas por un movimiento periódico y propagativo de la pluma térmica tanto vertical como transversal, y puede ser atribuido a los esfuerzos de corte desestabilizantes entre las capas ascendentes y descendentes del fluido. La frecuencia de oscilaciones del modo más inestable es una función creciente del número de Rayleigh bajo un número de Prandtl constante. Estas inestabilidades se ven directamente reflejadas en una oscilación del número de Nusselt promedio, que se define así:

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (2.11)$$

Donde h es el coeficiente de transferencia de calor, k la conductividad térmica y L una longitud característica del fenómeno.

2.3. Descripción y Características Físicas

Diversos autores han encontrado relaciones experimentales para la geometría de las plumas térmicas y thermals. Estas relaciones vinculan las dimensiones espaciales con las variables generadoras del fenómeno.

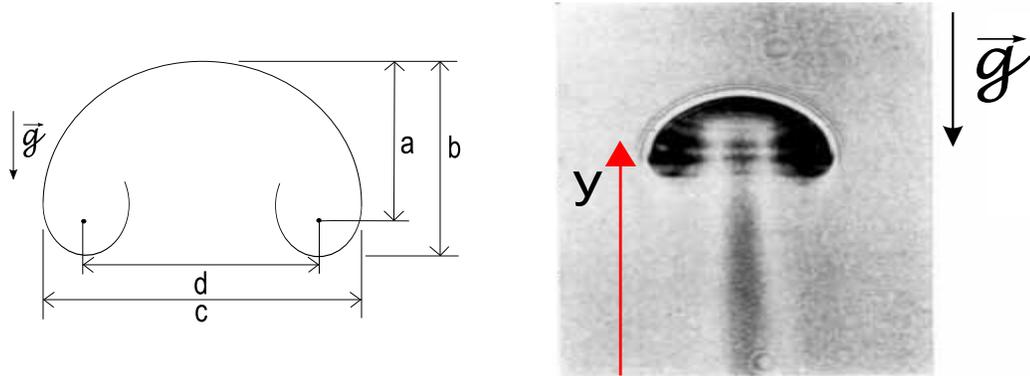


Figura 2.3: Thermal con sus respectivas dimensiones de interés. [3]

Taylor (1946), asumiendo que el flujo de entrada al thermal es proporcional a la velocidad de convección, derivó la siguiente relación para impulsos térmicos turbulentos:

$$d = k_1 y = k_2 E_*^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

Donde y , t y d (ver figura 2.3) son la altura desde la fuente, tiempo desde la inyección y diámetro del thermal y E_* es el calor total contenido en el thermal. k_1 y k_2 son constantes de proporcionalidad.

Posterior a esto muchos autores trataron de encontrar otras relaciones, pero siempre se encontraron con la misma dificultad, como generar una fuente de energía lo suficientemente pequeña tal que el thermal no interactuara con ésta. Hasta 1960 el único autor que había logrado obtener relaciones para thermal laminares era Morton [12].

$$y = \left(\frac{Ra}{12\pi} \right) \left(\frac{\alpha t}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

$$d = 3.02(2\alpha t)^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

Donde Ra es el número de Rayleigh efectivo que se define en la relación 2.8 y α es la difusividad térmica. Lo anterior es válido para fluidos con número de Prandtl igual a 1.

Experimentos de Maxworthy [13] evidenciaron que la altura del anillo puede ser representada por una función con la siguiente forma:

$$y = k_3 \Delta t^{\frac{1}{2}} Ra^a f(Pr) \quad (2.15)$$

Con $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ y el parámetro “a” entre 2, 0.9 o 0.5 dependiendo del número de Rayleigh.

Una curva clásica de la velocidad de ascenso en el tiempo para thermals puede ser vista en la figura 2.4.

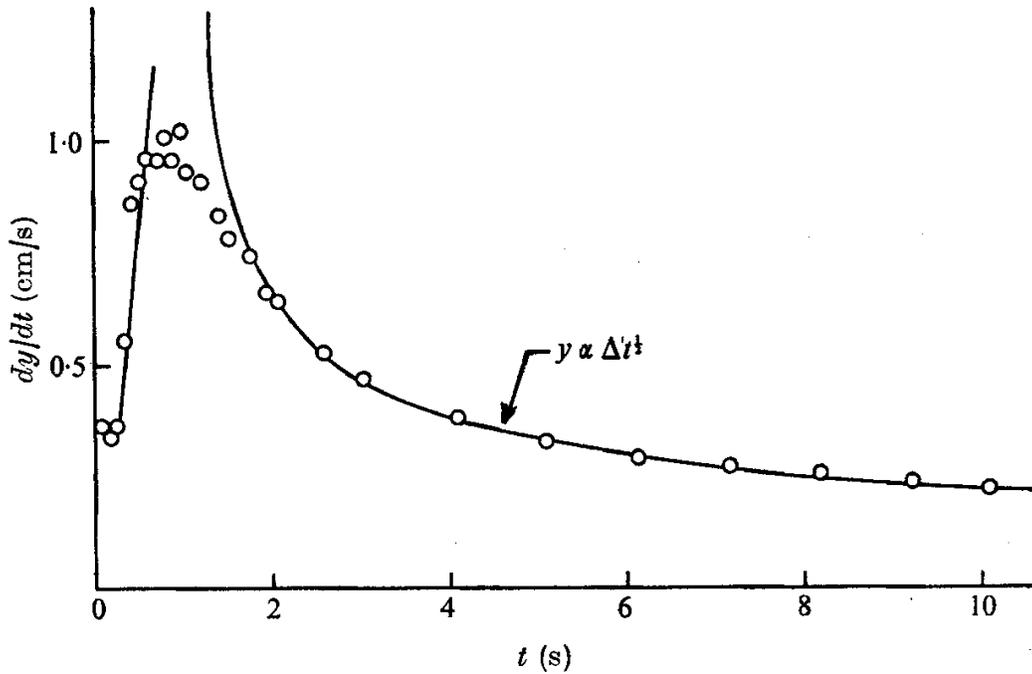


Figura 2.4: Curva clásica de la velocidad de ascenso de un thermal en el tiempo [3].

Se observa que hay una zona inicial con aceleración constante (del orden de los $1.8 [cm/s^2]$). Una vez que cesa la inyección de energía comienza una zona de desaceleración. La desaceleración es aproximadamente constante hasta que exhibe un comportamiento como el siguiente:

$$y^2 \propto \Delta \tau$$

La pluma o el impulso térmico a medida que se desarrolla sufre transformaciones en su forma física que pueden deberse a diversos factores. En la imagen 2.5 aparece un recorrido de un anillo de vorticidad térmico. Las primeras imágenes muestran la etapa de inyección, el calor es transferido a través de conducción. Esto se caracteriza por una distribución esférica de la temperatura. En las imágenes se estima que la convección se inicia a los 0.3 [s].

Después de 0.67 [s] el calor deja de ser inyectado, sin embargo el fluido calentado puede ser visto en contacto con el electrodo por un par de segundos. Esto debe resultar de la condición de no deslizamiento en los bordes y del calentamiento del electrodo por el fluido en su vecindad.

La formación del anillo de vorticidad térmico comienza con la aparición de un lóbulo en el límite vertical (visible a los 0.9 [seg] y aun más evidente al 1 [seg]). El lóbulo debe resultar del fluido en el centro ascendiendo más rápido que el de los bordes. Dado que el fluido caliente desplaza el fluido del entorno en su camino y a su vez este desplaza al anillo verticalmente una circulación continua es establecida. A medida que el impulso térmico asciende el tallo parece adelgazarse y difundir. El núcleo del anillo aparece inicialmente a los 2.8 [seg] volviéndose más claro con el tiempo. Se presume que el núcleo coincide con el punto negro, un mínimo en la segunda derivada de la temperatura. La cabeza del impulso difunde lentamente con el tiempo, probablemente los gradientes de velocidad mantienen los gradientes de presión.

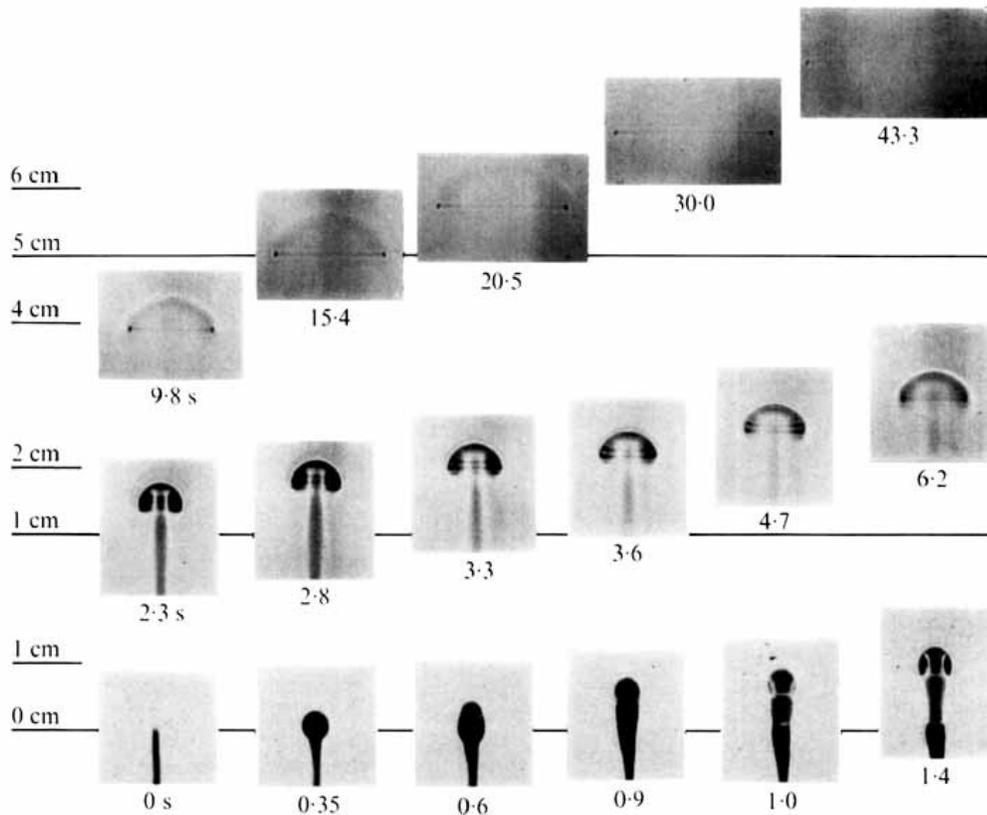


Figura 2.5: Desarrollo de un thermal en el experimento realizado por Shlien [3].

El thermal de la figura 2.5 se genero mediante una técnica novedosa utilizada por Shlien [2]. Sugiere inyectar calor a un fluido utilizando un solo electrodo como sonda conductiva a elevadas potencias. Las ventajas de esta técnica son las siguientes:

- El fluido se calienta directamente, sin la necesidad de elementos intermedios.
- Es posible obtener medidas precisas del empuje inducido.
- La empuje puede ser generado a través de un único pulso, pulsos periódicos o un pulso continuo de calor
- La geometría de la fuente de calor puede ser fácilmente alterada.

El experimento de Shlien [2] fue realizado en un recipiente de vidrio de 12 x 11.7[cm] de sección transversal y aproximadamente 20[cm] de altura del fluido con 2[cm] a la tapa. Se utilizó una solución con 27% de carbonato de sodio. Fue necesario utilizar una tapa ajustada para prevenir una convección evaporativa que de otro modo podría haber sido vista en la imagen.

El calor fue inyectado a la solución al hacer circular una corriente de 10[kHz] desde un pequeño electrodo (0.8 [mm] de diámetro y con solo su cabeza no aislada) a uno más largo (aproximadamente 4 x 6[cm]). Solo la solución cercana al electrodo pequeño fue calentada, esto debido a que la densidad de corriente es más grande en esa zona. La cabeza del alambre fue ubicada aproximadamente a 6[cm] del fondo del recipiente.

Un detalle más acabado del montaje experimental puede encontrarse en la publicación de Shlien y Thompson[3].

Capítulo 3

Metodología Específica

En este capítulo se detallará tanto la metodología específica empleada como las hipótesis asumidas en el desarrollo del presente trabajo de título.

3.1. Generación de thermals y plumas térmicas

Los thermals y plumas térmicas se generaron mediante la inyección de energía a través de un electrodo metálico que se encuentra sumergido en un fluido dentro de una cavidad cuadrada. La energía inyectada produce un aumento en la temperatura del electrodo, lo que radica en una conducción y convección natural en el fluido. De esta forma se genera un flujo ascendente debido a una diferencia en las densidades. Dada la diferencia de temperaturas entre el entorno y el flujo ascendente, se desarrolla una recirculación que desencadena la formación del thermal, o en su defecto si la inyección de energía no es impulsiva, una pluma térmica.

El modelo que representa al generador de thermals y plumas térmicas se observa en la figura 3.1. Se pueden observar las dos alternativas consideradas para entregar potencia térmica al fluido. En la figura 3.1-a) se inyecta la potencia térmica (\dot{Q}_o) por la base del electrodo, luego mediante conducción la potencia se transmite a través del electrodo hasta entrar en contacto con el fluido por la cara superior. En la figura 3.1-b) se impone una temperatura T_a en la cara superior del electrodo.

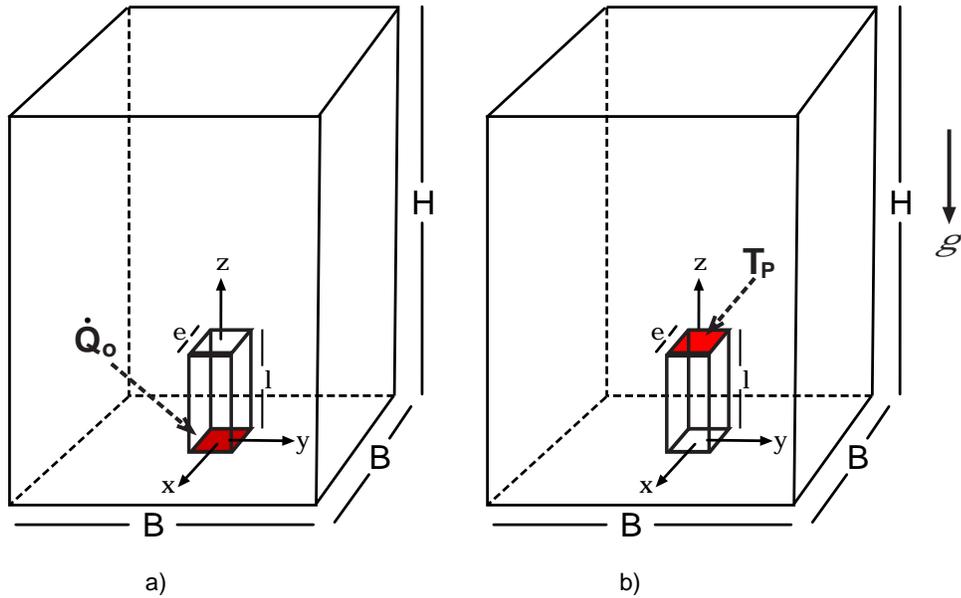


Figura 3.1: a) Esquema de la generación mediante inyección de potencia térmica y b) esquema de la generación mediante imposición de temperatura.

La inyección de energía se realiza mediante un escalón de potencia térmica (ver figura 3.2). El área bajo el escalón es la energía total suministrada al sistema (ver relación 3.1). Esta energía total (E) es la misma que se debe utilizar en la relación 2.8. El ancho del escalón se define mediante el parámetro τ . Para τ pequeño se está en presencia de un “thermal” mientras que para τ grande el fenómeno se considera una “pluma térmica”.

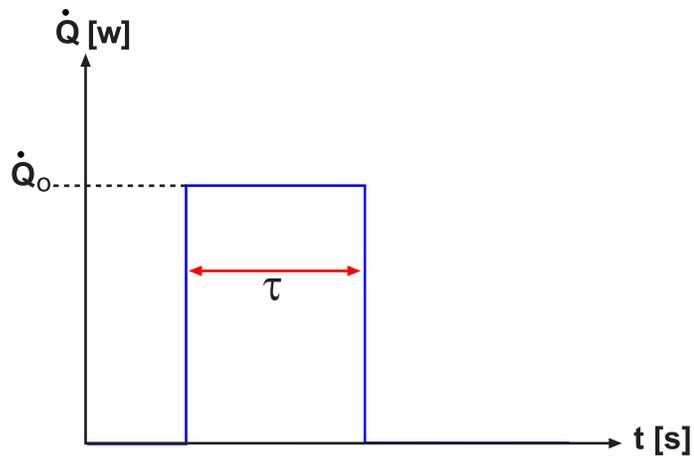


Figura 3.2: Escalón de Potencia Térmica Impuesta

En donde:

$$E = \int \dot{Q} dt = \dot{Q}_o \tau \quad (3.1)$$

3.2. Mallado

Para la geometría se consideró un rectángulo de base cuadrada (B x B) y altura H como se observa en la figura 3.1.

En el mallado, se utilizaron 3 funciones de aproximación para generar mayor densidad de nodos en las zonas de gradientes elevados.

Una *size function* emplea una grilla cuadrada invisible (o cubica dependiendo del tipo de mallado) construida subdividiendo una caja que encierra al modelo. Específicamente, el software subdivide la caja en un grupo de subsecciones y asigna información acerca del tamaño de elemento a la esquina de cada subsección. Para calcular el tamaño de un elemento dentro de una *size function*, se interpola entre los valores asignados a cada esquina de las subsecciones.

Para crear la grilla cuadrada, Gambit divide la caja en un específico número de secciones (n), y luego divide cada sección en el mismo número de subsecciones, y así continua sucesivamente. El número total de subsecciones (N) se calcula con la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} N &= n^q \\ n &= (k - 1)^3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donde n es el número de subsecciones creadas en cada división, y q es el número de divisiones. Los parámetros k y q son decisiones internas del software, sin embargo, pueden ser modificadas.

La función de aproximación tiene como finalidad restringir el tamaño del elemento a un mínimo (min size) para ir aumentándolo mediante la ponderación de un factor de crecimiento (Growth rate) hasta un valor máximo (max size). Una vez alcanzado este valor máximo, el elemento mantiene su dimensión constante.

Las funciones de aproximación son las siguientes y pueden observarse esquemáticamente en la figura 3.3:

- **F1:** Entre la arista del electrodo y la arista del cuadrado azul de la figura 3.3. Permite obtener una zona mucho más densa en el área del electrodo.

- **F2:** Entre la arista del cuadrado azul y el rojo. Permite suavizar las zonas densas con los límites del volumen de control.
- **F3:** La función de aproximación parte en el nodo que divide el volumen inferior con el volumen superior y se aplica a lo largo de la arista vertical del volumen. Tiene como finalidad generar una zona más densa cercana a la punta del electrodo y disminuya su densidad en función de la altura.

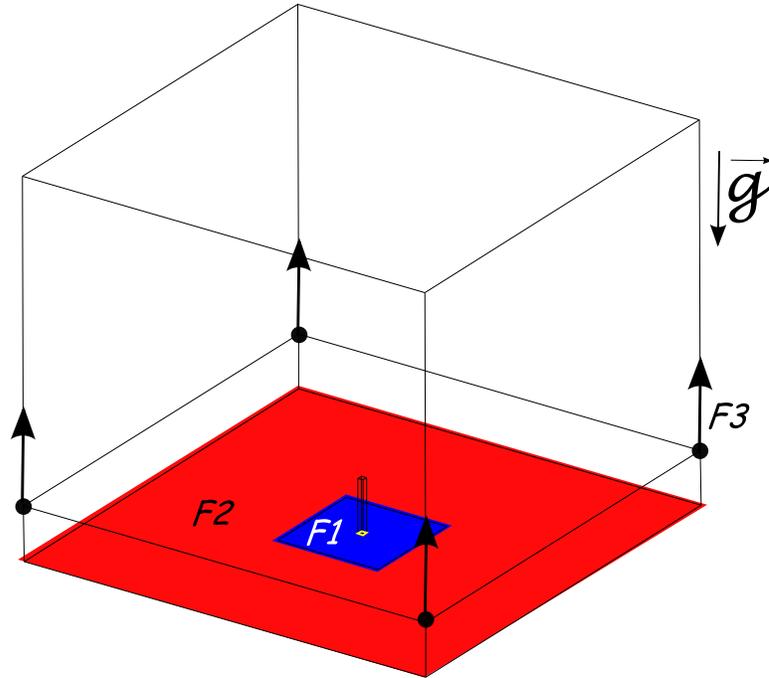


Figura 3.3: Esquema de la funciones de aproximación

En la figura 3.4 puede observarse un esquema del volumen mallado.

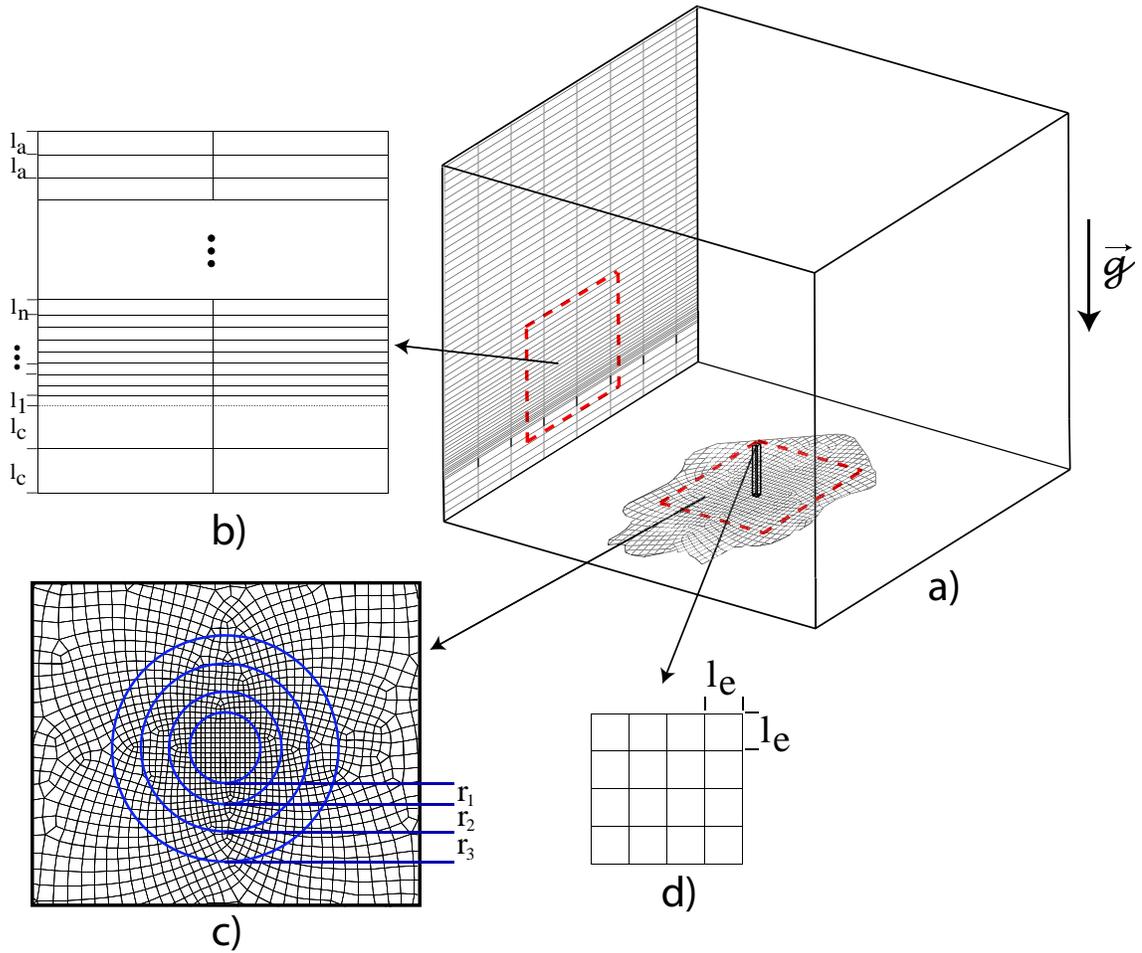


Figura 3.4: Esquema del mallado.

Se observa en la figura 3.4 b) que la función de aproximación **F3** actúa como una progresión geométrica respecto del ancho de la grilla. Esta se observa a continuación:

$$l_{i+1} = r \cdot l_i \quad (3.3)$$

La progresión geométrica aumenta hasta que la grilla alcanza un valor máximo de l_a . Por otro lado, la grilla aguas abajo del electrodo tiene un ancho constante de l_c . El mallado sobre el electrodo puede observarse en la figura 3.4 d). Se realizó un mallado cuadrado con un ancho de grilla de l_e . En la figura 3.4 c) se observa como las funciones de aproximación **F1** y **F2** producen una densidad mayor de nodos en la zona cercana al electrodo. El tamaño del elemento de dentro del anillo i tienen un valor aproximado de r_i . De esta forma es posible identificar una suerte de progresión geométrica en el mallado, cuyos parámetros son los inputs de la función de aproximación.

Una vez que las aristas y superficies necesarias fueran malladas, se utilizó el esquema “Cooper” para generar un barrido del mallado superficial a lo largo del eje Z.

3.3. Propiedades Termofísicas

A continuación se pueden observar las relaciones utilizadas para modelar la variación de la densidad, calor específico, viscosidad dinámica y conductividad térmica con la temperatura. Cabe destacar que se hizo caso omiso de la dependencia con la presión. Esto debido a que se considera al agua líquida como un fluido incompresible y a que se está trabajando a presión atmosférica durante todo el proceso.

3.3.1. Agua Líquida

Densidad:

Para la densidad del agua líquida se realizó un ajuste de mínimos cuadrados basándose en los datos experimentales tabulados en [6].

$$\rho(T) = a \cdot \exp(b \cdot T) + c \cdot \exp(d \cdot T) \quad (3.4)$$

Constante	Valor	Unidad
a	1475	$\frac{kg}{m^3}$
b	-0.001073	$^{\circ}K^{-1}$
c	-2773	$\frac{kg}{m^3}$
d	-0.01216	$^{\circ}K^{-1}$

Tabla 3.1: Constantes obtenidas para $\rho(T)$.

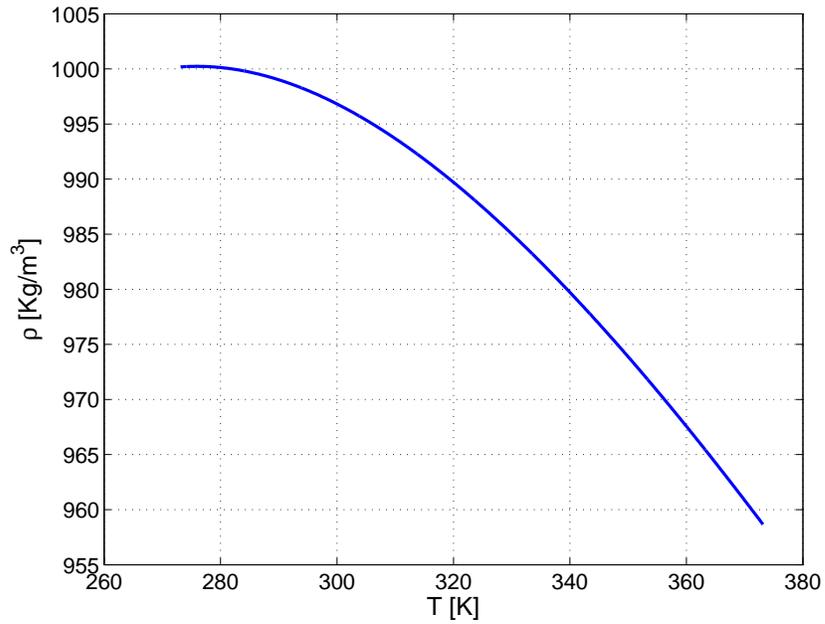


Figura 3.5: Densidad en función de la temperatura para agua líquida

Viscosidad Dinámica:

Para la viscosidad del agua líquida se utilizó la relación propuesta por Peng en [5].

$$\mu(T) = \mu(T_{ref}) \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^n \exp \left[B \cdot (T^{-1} - T_{ref}^{-1}) \right] \quad (3.5)$$

Constante	Valor	Unidad
n	8.9	-
B	4700	°K
$\mu(T_{ref})$	$1.005 \cdot 10^{-03}$	$\frac{kg}{ms}$
T_{ref}	293	°K

Tabla 3.2: Constantes propuestas por Peng [5] para $\mu(T)$ en agua líquida.

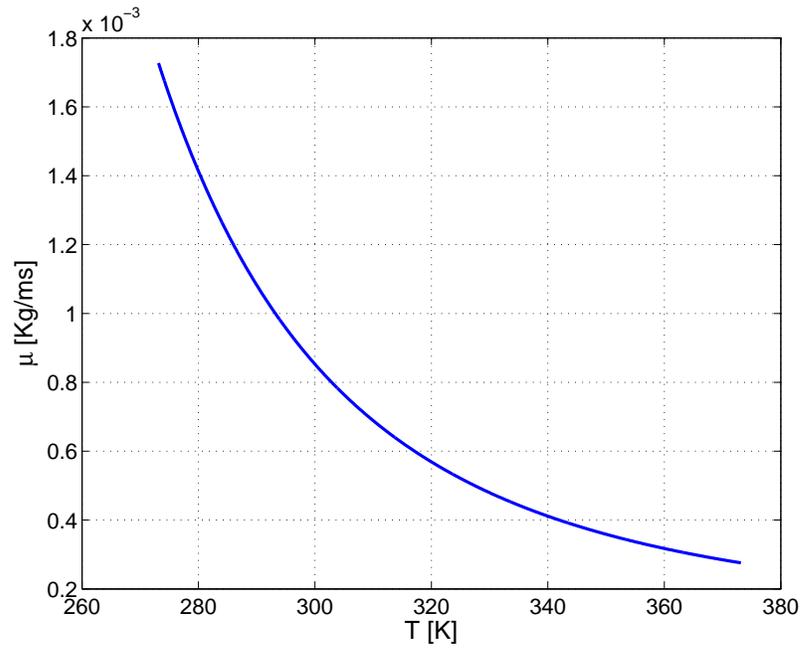


Figura 3.6: Viscosidad dinámica en función de la temperatura para agua líquida

Conductividad Térmica:

Para la conductividad térmica del agua líquida se utilizó la relación propuesta por Peng en [5].

$$k(T) = a_0 + a_1 \cdot T + a_2 \cdot T^2 + a_3 \cdot T^3 \quad (3.6)$$

Constante	Valor	Unidad
a_0	-1.135	$\frac{W}{m \cdot K}$
a_1	0.01154	$\frac{W}{m \cdot K^2}$
a_2	$-2.375 \cdot 10^{-05}$	$\frac{W}{m \cdot K^3}$
a_3	$1.57 \cdot 10^{-08}$	$\frac{W}{m \cdot K^4}$

Tabla 3.3: Constantes propuestas por Peng [5] para el polinomio $k(T)$ en agua líquida.

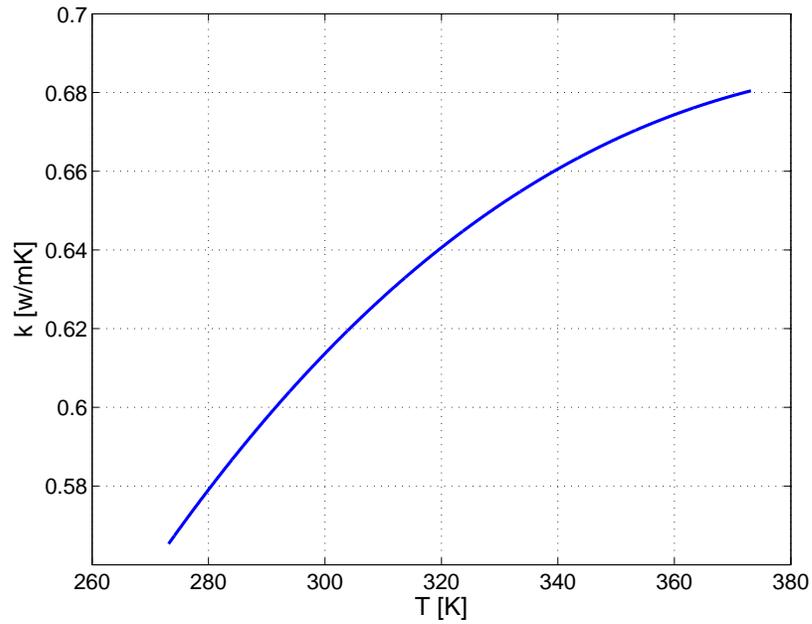


Figura 3.7: Conductividad térmica en función de la temperatura para agua líquida

Calor Específico:

Para el calor específico del agua líquida se realizó un ajuste de mínimos cuadrados basándose en los datos experimentales tabulados en [6].

$$c_p(T) = a_0 + a_1 \cdot T + a_2 \cdot T^2 + a_3 \cdot T^3 + a_4 \cdot T^4 + a_5 \cdot T^5 \quad (3.7)$$

Constante	Valor	Unidad
a_0	171462	$\frac{j}{kg^\circ K}$
a_1	-2481.921	$\frac{j}{kg^\circ K^2}$
a_2	14.72793	$\frac{j}{kg^\circ K^3}$
a_3	-0.04368408	$\frac{j}{kg^\circ K^4}$
a_4	$6.47393 \cdot 10^{-05}$	$\frac{j}{kg^\circ K^5}$
a_5	$-3.832806 \cdot 10^{-08}$	$\frac{j}{kg^\circ K^6}$

Tabla 3.4: Constantes obtenidas para $c_p(T)$.

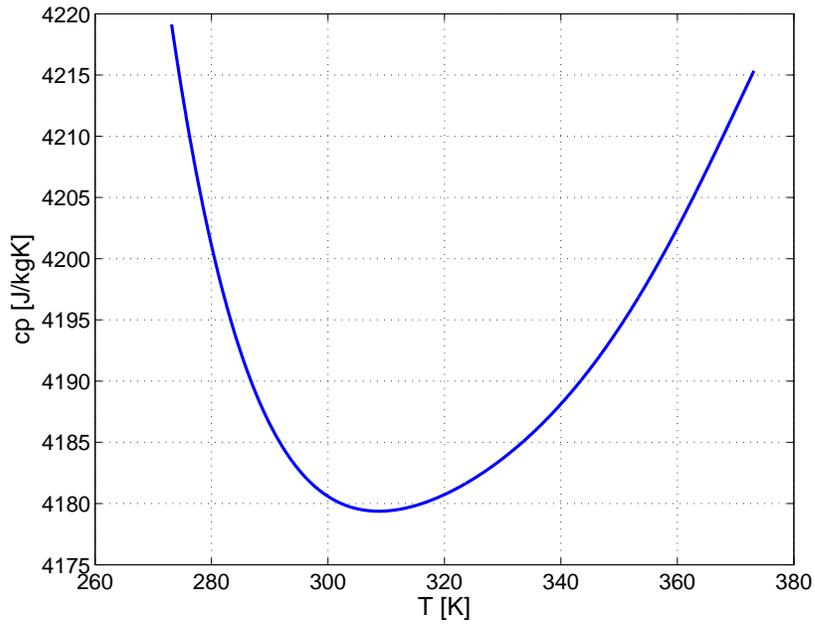


Figura 3.8: Calor específico en función de la temperatura para agua líquida

3.3.2. Mercurio

Densidad:

Para la densidad del mercurio se realizó un ajuste de mínimos cuadrados basándose en los datos experimentales tabulados en [6].

$$\rho(T) = a \cdot T + b \quad (3.8)$$

Constante	Valor	Unidad
a	-2.452	$\frac{kg}{m^3 \cdot K}$
b	$1.43 \cdot 10^4$	$\frac{kg}{m^3}$

Tabla 3.5: Constantes obtenidas para $\rho(T)$.

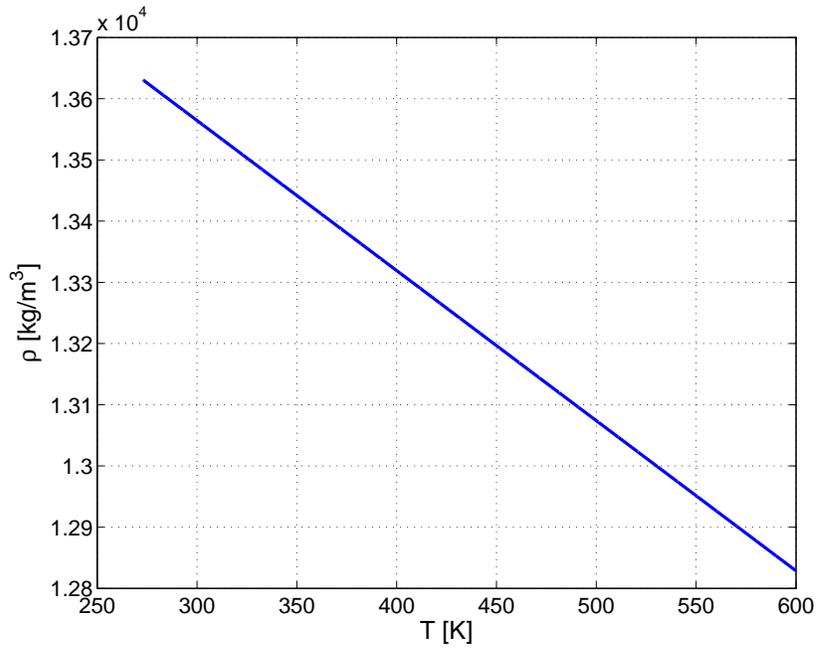


Figura 3.9: Densidad en función de la temperatura para mercurio líquido

Viscosidad Dinámica:

$$\mu = 1.523 \cdot 10^{-3} \left[\frac{kg}{ms} \right] \quad (3.9)$$

Conductividad Térmica:

$$k = 8.54 \left[\frac{w}{m^{\circ}K} \right] \quad (3.10)$$

Calor Específico:

$$c_p = 139.3 \left[\frac{j}{kg^{\circ}K} \right] \quad (3.11)$$

3.4. Condiciones de Borde

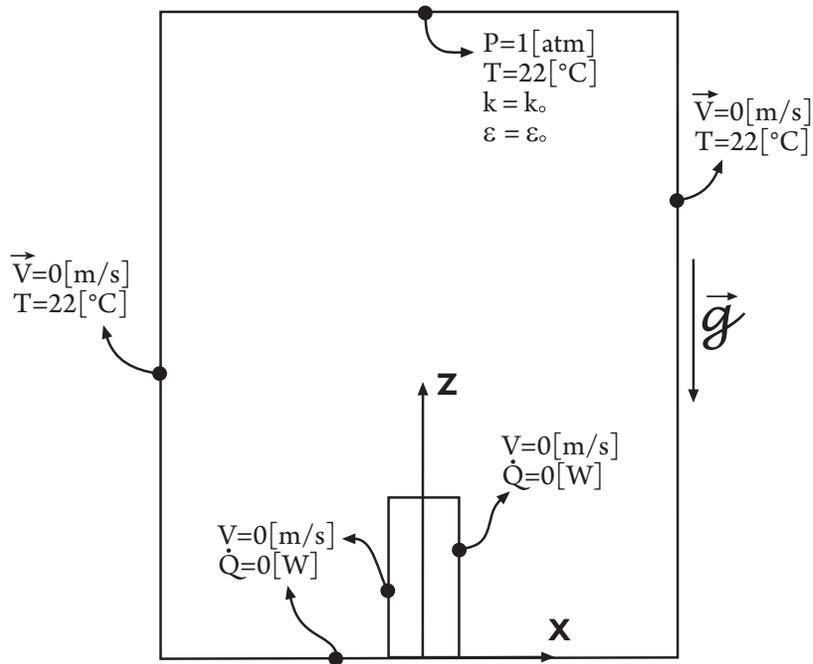


Figura 3.10: Esquema de las condiciones de borde empleadas en la simulación

En la figura 3.10 se observa un esquema básico del volumen de estudio. Las paredes laterales se encuentran a una temperatura constante de 22 [°C] y poseen características de muros, es decir, no hay flujo de líquido a través de ellas ($\vec{V} = 0$). Tanto la base del volumen como las paredes laterales se consideraron aisladas ($\dot{Q} = 0$).

Se considerara al electrodo como un elemento conductor de cobre con una temperatura impuesta en la punta, o que recibe una inyección de potencia térmica por su base y la conduce hasta la punta que se encuentra en contacto con el fluido. La punta del electrodo es la única superficie que transmite energía al fluido.

En la cara superior del volumen de control se impuso una condición de salida de presión constante e igual a la presión atmosférica. El fluido que reingresa al volumen de estudio lo hace con una temperatura de 22 [°C]. Si la simulación fuera turbulenta, el fluido también reingresaría con cierta disipación y energía cinética turbulenta (k_0 y ϵ_0). Sin embargo, se desconoce el valor de las propiedades turbulentas al retorno por lo que se asumió una intensidad turbulenta (I) del 1 % y se empleó al diámetro hidráulico como una longitud de escala. Internamente y a través de las relaciones 3.12 y 3.13 el software Fluent calcula los parámetros (k_0 y ϵ_0) [17].

$$k = \frac{3}{2}(\bar{u}I)^2 \quad (3.12)$$

Donde \bar{u} es la velocidad promedio.

$$\varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{\ell} \quad (3.13)$$

Donde C_μ es una constante empírica especificada en el modelo turbulento. La longitud de escala (ℓ) en este caso será el diámetro hidráulico (d_h).

3.5. Parámetros Numéricos

Las simulaciones se realizaron con el software comercial Fluent que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el método volúmenes de control [17].

3.5.1. Discretización Temporal

La discretización temporal (Δt) se eligió tomando en cuenta el tiempo característico para la transferencia de calor (ecuación 3.14), el tiempo característico para la transferencia de momento (ecuación 3.15) y el criterio de Courant (ecuación 3.16).

$$t_h = \frac{L^2}{\alpha} \quad (3.14)$$

$$t_m = \frac{L^2}{\nu} \quad (3.15)$$

$$\Delta t V_{max} < \Delta x_{min} \quad (3.16)$$

Donde:

Δx_{min} es el tamaño mínimo de los elementos en el mallado de la geometría. V_{max} es la velocidad máxima en el campo.

3.5.2. Parámetros del Solver

Con el fin de que las coordenadas nodales sean bien representadas, se escogió un solver de doble precisión soportado por Fluent. Junto con lo anterior se configuro el solver de forma que resuelva un sistema “unsteady”. La configuración unsteady seleccionada es una implícita de segundo orden.

El metodo de resolución mediante volúmenes de control consiste en dividir la zona de cálculo en elementos volumétricos como se muestra en la figura 3.11 y luego integrar las ecuaciones de momentum dentro de cada uno de estos volúmenes en funcion de la variable independiente en cada ecuación. Esto se realiza para obtener una discretización de las ecuaciones que son las que se pueden resolver numéricamente.

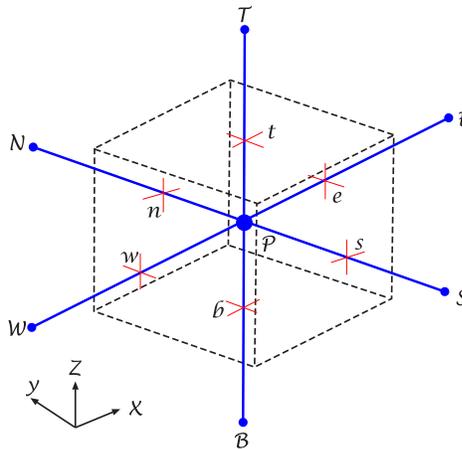


Figura 3.11: Volumen de control en torno al punto P con nodos vecinos (T,B,E,W,N,S)

En el esquema de volúmenes de control el campo de presión es evaluado en el punto P mientras que las velocidades se evalúan en los bordes del mismo que se define como una malla desplazada. En la figura 3.12[11] se muestra el mismo volumen de control pero visto en el plano y se puede observar que las velocidades se evalúan en los puntos (e,w,n,s) que son los bordes del volumen de control. Este desplazamiento de malla de las velocidades hacia los bordes del volumen de control se realiza para generar una interpolación solo de velocidades y no de presiones ya que existen ecuaciones simples para la interpolación de velocidad.

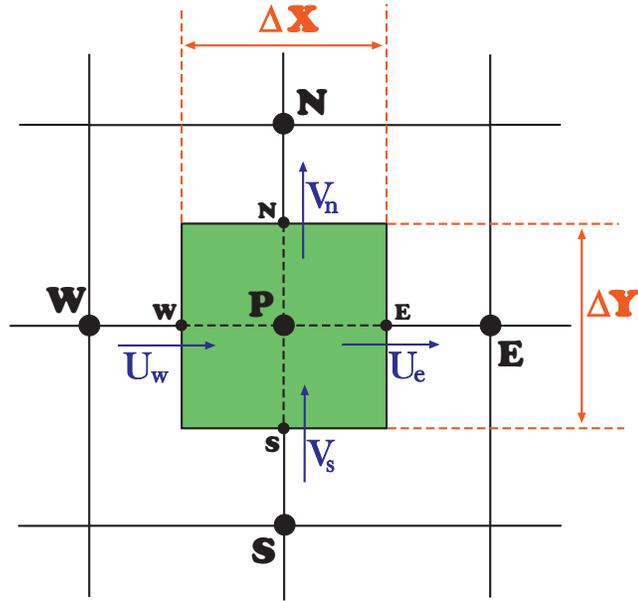


Figura 3.12: Representación 2D del método de volúmenes de control en torno al punto P con nodos vecinos (E,W,N,S).

Luego de la discretización las ecuaciones de Navier-Stokes quedan de la forma 2.2.

$$a_j \cdot U_j = \sum_i a_i \cdot U_i + b + (P_p - P_j) \cdot \Delta X_j \quad (3.17)$$

$$j \in \{N.S.E.W\}$$

Donde los coeficientes a y b dependen de la presión. Para resolver entonces las ecuaciones se utiliza un sistema iterativo como el SIMPLE en [7].

El algoritmo utilizado para el cálculo del campo de flujo es el SIMPLE, cuyas siglas significan Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations. A continuación se detalla claramente el algoritmo que fue expuesto en [7] y [17]:

1. Se supone un campo de presiones p^* . El flujo resultante sobre una cara de un elemento será el siguiente:

$$J_f^* = \hat{J}_f^* + d_f (p_{c0}^* - p_{c1}^*) \quad (3.18)$$

Este flujo no satisface la ecuación de continuidad.

2. Se adiciona una corrección J_f' de manera que:

$$J_f = J_f^* + J_f' \quad (3.19)$$

De forma que J_f satisface la ecuación de continuidad.

3. El algoritmo SIMPLE propone que:

$$J'_f = d_f (p'_{c0} - p'_{c1}) \quad (3.20)$$

Donde p' es la corrección para la presión en un elemento.

4. El algoritmo simple substituye la ecuación de corrección de flujo (J'_f) en la ecuación discreta de la continuidad para obtener una relación para la corrección de la presión (p').

$$a_p p' = \sum_{nb} a_{nb} p'_{nb} + b \quad (3.21)$$

Donde el termino b es la tasa de flujo neta hacia el elemento:

$$b = \sum_f^{N_{\text{faces}}} J_f^* A_f \quad (3.22)$$

5. Una vez que la solución es obtenida, la presión en el elemento y el flujo sobre la cara de éste, son corregidos usando:

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (3.23)$$

$$J_f = J_f^* + d_f (p'_{c0} - p'_{c1}) \quad (3.24)$$

α_p es un factor de relajación para la presión. De esta forma, el flujo (J_f) satisface la ecuación de la continuidad durante cada iteración.

Para calcular las variables en las fronteras de cada elemento se utilizo el esquema “Upwind de segundo orden”. De esta forma, una precisión de gran nivel es obtenida en las caras de la celda a través de una expansión en series de Taylor. Luego al escoger este enfoque, la variable en la frontera ϕ_f es calculada usando la siguiente relación:

$$\phi_f = \phi + \nabla\phi \cdot \Delta s \quad (3.25)$$

Aquí ϕ y $\nabla\phi$ son el valor en el centro de la celda y su gradiente en la celda aguas arriba, Δs es el vector desplazamiento desde el centroide de la celda aguas arriba hasta la cara del centroide. Este criterio requiere de la determinación del gradiente $\nabla\phi$ en cada celda. Este gradiente es calculado usando el teorema de la divergencia, que escrito en su forma discreta es el siguiente:

$$\nabla\phi = \frac{1}{V} \sum_f^{N_{\text{caras}}} \tilde{\phi}_f A \quad (3.26)$$

Aquí los valores en las caras de $\tilde{\phi}_f$ son calculados promediando ϕ desde dos celdas adyacentes a la cara. Finalmente, el gradiente $\nabla\phi$ es limitado de manera que no sean introducidos nuevos máximos o mínimos.

3.6. Modelo de Turbulencia

La ecuación gobernante de los flujos turbulento es la de Navier Stokes(ecuación 3.27) al igual que en flujos laminares.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.27)$$

Los flujos turbulentos son caracterizados por fluctuaciones de los campos de velocidades. Estas fluctuaciones agitan a las cantidades transportadas como el momento o la energía, y por lo tanto producen que estas también fluctúen. Como las fluctuaciones pueden ser de escala muy pequeña y de frecuencia muy alta, son muy costosas de simular directamente. Por lo tanto, las ecuaciones gobernantes pueden ser promediadas en el tiempo, ensambladas en el tiempo o manipuladas de otra forma con tal de remover las escalas pequeñas, resultando en una serie de ecuaciones modificadas que computacionalmente son menos costosas. Sin embargo, las ecuaciones modificadas contienen variables adicionales que son desconocidas, y por lo tanto son necesarios ciertos modelos de turbulencias capaces de expresar estas variables en términos conocidos. Aquí se utilizó uno de los modelos completos más simples, el modelo k - ϵ estándar de turbulencia.

Este es un modelo de dos ecuaciones en el cual la solución de dos ecuaciones de transporte por separado permiten determinar independientemente la velocidad turbulenta y las longitudes de escala. Este modelo se basa es una ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta (k) y su tasa de disipación (ϵ). La ecuación de transporte para k se deriva de le ecuación exacta, mientras que la ecuación de transporte para ϵ se obtuvo a través de razonamiento físico y conlleva poca semejanza con su contraparte matemática.

En la derivación del modelo k - ϵ , la suposición es tal que el flujo es completamente turbulento, y los efectos de la viscosidad molecular son insignificantes. Por lo tanto, el modelo k - ϵ es solo valido para problemas con turbulencia completamente desarrollada.

la energía cinética turbulenta (k) y su tasa de disipación (ϵ), son obtenidas de las siguientes ecuaciones de transporte:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + S_\epsilon \quad (3.29)$$

$$(3.30)$$

Donde:

- G_k : Representa la generación de energía cinética turbulenta debido a los gradiente de la velocidad promedio.
- G_b : Representa la generación de energía cinética turbulenta debido a la boyancia.
- Y_M : Representa la contribución de la dilatación fluctuante en turbulencia compresible a la disipación turbulenta global.
- $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$ y $C_{3\varepsilon}$: Son constantes
- σ_k y σ_ε : Son los números turbulentos de Prandtl para k y ε , respectivamente.
- S_k y S_ε : Son los términos fuentes.

3.7. Transferencia de Calor

Para estimar la tasa de transporte de calor adimensional en cada uno de los casos que se va a resolver, se utilizó el número de Nusselt (Nu).

$$Nu = \frac{\text{Calor} - \text{Total}}{\text{Calor} - \text{Conductivo}} = \frac{hL}{k_f} \quad (3.31)$$

Donde h es el coeficiente de transferencia de calor, k_f la conductividad térmica del fluido y L una longitud característica del fenómeno.

En muchos experimentos la longitud característica se encuentra asociada a las dimensiones de la cavidad o a la distancia entre las placas a diferentes temperaturas. En este caso, las dimensiones de la cavidad son irrelevantes (se buscó que estas no perturbaran a la pluma) por lo que la arista del electrodo se convierte en un parámetro de importancia debido a que se vincula directamente con la inyección de potencia al sistema¹. Por lo anterior la longitud característica seleccionada fue la arista del electrodo.

Nusselt Local

En la relación 3.32 se puede observar la ecuación adimensional que se utilizó para calcular el número de Nusselt local (ver apéndice A.2 para más detalles):

¹Se asume que q [$\frac{W}{m^2}$] permanece constante por lo que un incremento en el área produce un aumento de la energía emitida.

$$Nu_z = V^* \theta - \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \quad (3.32)$$

Como se calculó el Nusselt en la punta del electrodo, la velocidad era nula por lo tanto:

$$Nu_z = -\frac{\partial \theta}{\partial z^*} \quad (3.33)$$

Donde:

- $\theta(T) = \frac{T - T_\infty}{T_c - T_\infty}$
- $z^* = \frac{z}{L_a}$
- T_∞ : Temperatura ambiente
- L_a : Arista del electrodo

Nusselt Superficie

Luego se realiza una integración en el área para encontrar el número de Nusselt superficial (Nu_s) (relación 3.34):

$$Nu_s = \frac{1}{A} \iint Nu_z dA \quad (3.34)$$

En el cálculo de las derivadas numéricas se utilizó diferencias finitas hacia delante en la zona superficial del electrodo:

$$\theta'(x) = \frac{\theta(x+h) - \theta(x)}{h} \quad (3.35)$$

Para la integración numérica se utilizaron las reglas de Simpson de 3/8 y 1/3 combinadas. Dado que la cabeza del electrodo tiene una arista con 11 nodos, para cada línea se utilizó 2 veces Simpson 3/8 [3.37] y 1 vez Simpson 1/3 [3.36]. El número de nodos al ser primo no se puede utilizar un método de integración compuesto. Por este motivo se decidió utilizar dos métodos distintos de forma compuesta.

Simpson 1/3

$$\int_{x_1}^{x_1+2\delta_x} f(x) \approx \frac{1}{3} \delta_x (f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)) \quad (3.36)$$

Simpson 3/8

$$\int_{x_1}^{x_1+3\delta_x} f(x) \approx \frac{3}{8} \delta_x (f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)) \quad (3.37)$$

3.8. Nomenclatura Utilizada

La nomenclatura utilizada para el estudio de ciertas variables fue el siguiente:

- La letra U_a (ver figura 3.13) se vincula a la velocidad absoluta del fenómeno, es decir, la velocidad con la que se desplaza el núcleo de la pluma.
- V_N es la velocidad según Z evaluada en la posición del núcleo
- Z_N es la posición vertical del núcleo. El criterio escogido para su localización es encontrar la altura donde se generan los mayores cambios en la velocidad vertical, es decir, donde la suma cuadrada de V_z es máxima. En la figura 3.14 se observa lo anterior en detalle.
- U es la magnitud de la velocidad, es decir, $U = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$
- ω es la magnitud de la vorticidad

En las figuras 3.13 y 3.14 se explica la nomenclatura utilizada para definir las distintas velocidades y el criterio escogido para localizar el núcleo de la pluma.

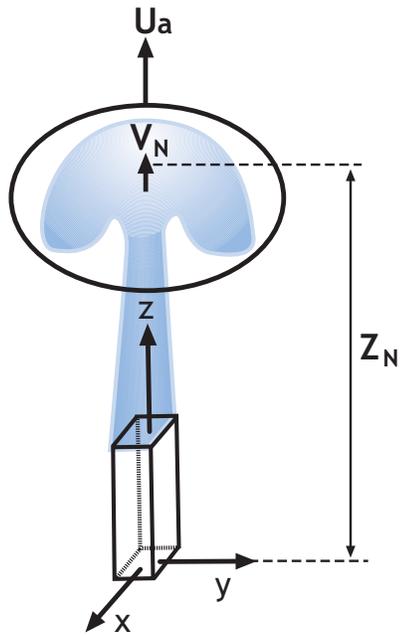


Figura 3.13: Esquema de la nomenclatura utilizada en el trabajo.

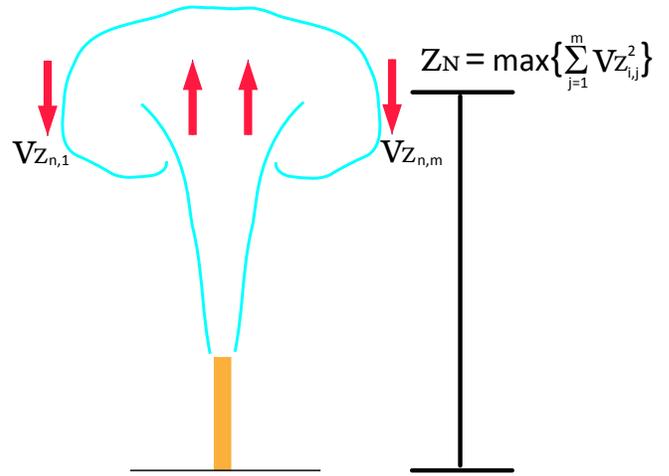


Figura 3.14: Detalle del método empleado para localizar al núcleo de la pluma térmica.

Capítulo 4

Selección de Malla y Geometría

4.1. Selección de Malla

Malla 1: Elementos Cuadrilateros

SF1:	SF2:	SF3:
<ul style="list-style-type: none">■ Start Size: 0.2 [mm]■ Growth rate: 1.1■ max size: 0.7 [mm]	<ul style="list-style-type: none">■ Start Size: 0.7 [mm]■ Growth rate: 1.1■ max size: 4 [mm]	<ul style="list-style-type: none">■ Start Size: 0.2 [mm]■ Growth rate: 1.08■ max size: 1 [mm]

En base a la configuración anterior se obtuvieron 240792 elementos

Malla 2: Elementos Triangulares

SF1:	SF2:	SF3:
<ul style="list-style-type: none">■ Start Size: 0.2 [mm]■ Growth rate: 1.1■ max size: 0.7 [mm]	<ul style="list-style-type: none">■ Start Size: 0.7 [mm]■ Growth rate: 1.1■ max size: 4 [mm]	<ul style="list-style-type: none">■ Start Size: 0.2 [mm]■ Growth rate: 1.08■ max size: 1 [mm]

En base a la configuración anterior se obtuvieron 572118 elementos

Malla 3: Elementos Cuadrilateros

SF1:	SF2:	SF3:
<ul style="list-style-type: none"> ■ Start Size: 0.1 [mm] ■ Growth rate: 1.05 ■ max size: 0.5 [mm] 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Start Size: 0.5 [mm] ■ Growth rate: 1.06 ■ max size: 2 [mm] 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Start Size: 0.1 [mm] ■ Growth rate: 1.05 ■ max size: 0.5 [mm]

En base a la configuración anterior se obtuvieron 1193654 elementos

Desde la imagen 4.1 hasta la 4.4 puede observarse la comparación entre los contornos de V_z a distintas alturas para las tres configuraciones de mallas distintas. Se observa que en las zonas de altos gradientes las diferencias entre las 3 configuraciones son idénticas pero al aproximarse a los límites del volumen de control estas diferencias aumentan.

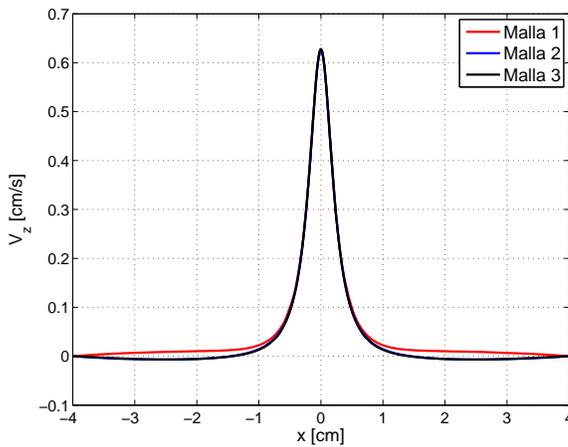


Figura 4.1: Perfil de V_z en función de x para $(y,z) = (0,3)[cm]$.

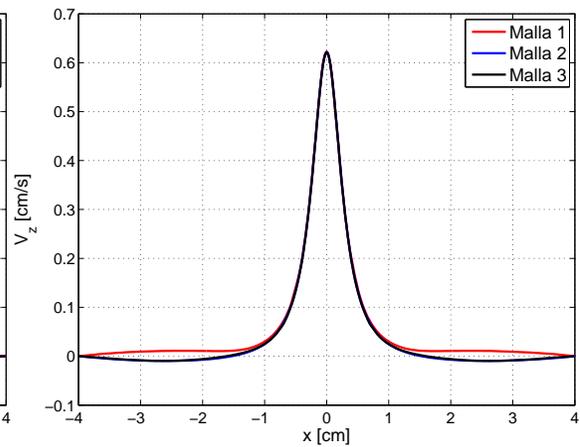


Figura 4.2: Perfil de V_z en función de x para $(y,z) = (0,4)[cm]$.

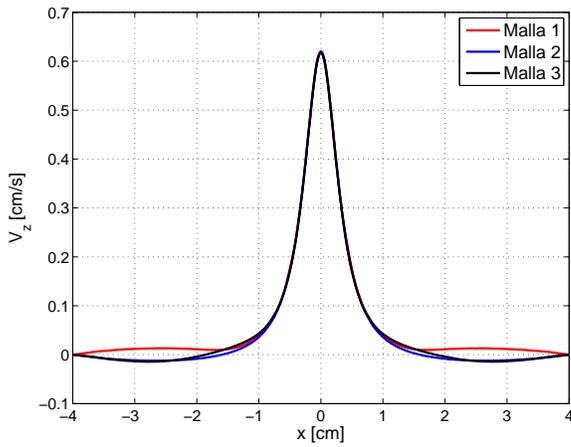


Figura 4.3: Perfil de V_z en función de x para $(y,z) = (0,5)[cm]$.

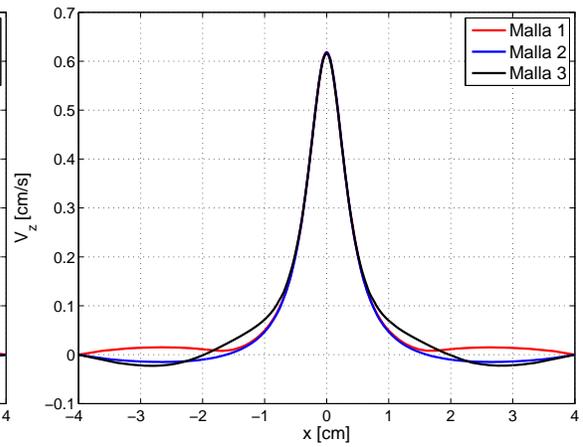


Figura 4.4: Perfil de V_z en función de x para $(y,z) = (0,6)[cm]$.

Desde la imagen 4.5 hasta la 4.7 puede observarse la comparación entre los contornos de T a distintas alturas para las tres configuraciones de mallas distintas. Se observa que para las tres configuraciones las curvas son prácticamente iguales.

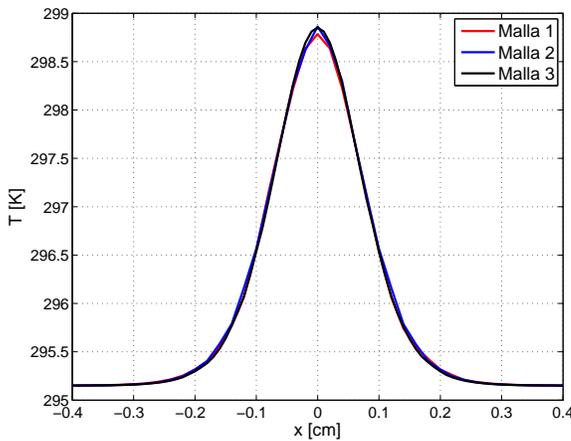


Figura 4.5: Perfil de T en función de x para $(y,z) = (0,2)[cm]$.

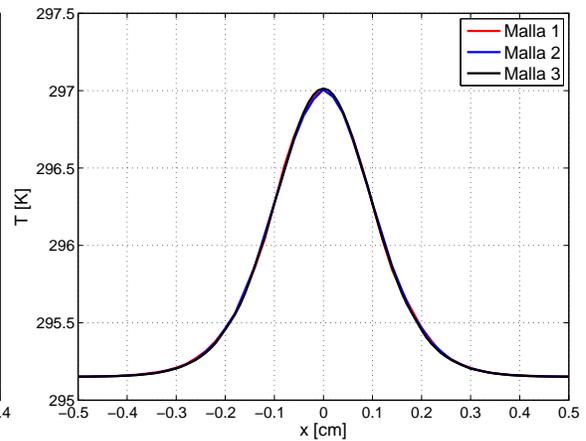


Figura 4.6: Perfil de T en función de x para $(y,z) = (0,3)[cm]$.

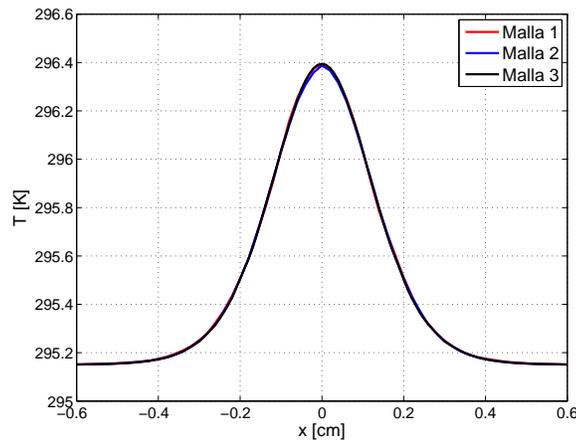


Figura 4.7: Perfil de T en función de x para $(y, z) = (0, 4)[cm]$.

Finalmente se escogió la malla número 3, debido a que las otras mallas producían problemas de convergencia en la ecuación de la continuidad.

4.2. Selección de Geometría

En el estudio se consideraron dos geometrías distintas denominadas G1 y G2. Estas se especifican a continuación:

<p>G1:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ $B = 5[cm]$ ■ $H = 10[cm]$ ■ $l = 1[cm]$ ■ $e = 1[mm]$ 	<p>G2:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ $B = 8[cm]$ ■ $H = 7[cm]$ ■ $l = 1[cm]$ ■ $e = 1[mm]$
--	---

En esta sección en lugar de generar el fenómeno con un electrodo de cobre que recibe una inyección de potencia por su base se utilizó un electrodo con una condición de temperatura impuesta en la cara superior. Lo anterior permite reducir el tiempo de cálculo dado que se reduce el número de elementos de la malla.

4.2.1. Velocidad a lo Largo del Eje Central

En la figura 4.8 se puede observar la comparación de la magnitud de la velocidad a lo largo del eje central a los 20, 30, 40 y 60[s]. Se observa que hasta los 30[s] las curvas son notablemente similares. Pero a medida

que el tiempo pasa y el fenómeno se acerca a su estado estacionario las diferencias se hacen mayores. Para entender cabalmente el gráfico hay que destacar que este permite localizar el núcleo de la pluma a través del segundo “peak” en la curva. Estudiando el gráfico se observa que la geometría 2 (G2) acelera a la pluma a medida que esta comienza a tomar altura. Por otro lado la geometría 1 (G1) al ser más alta no exhibe este comportamiento. Lo anterior se podría deber a que tanto G1 como G2 tienen una condición de presión de salida en la tapa superior del volumen de control (VC) pero al ser G2 más bajo se ve afectado primero. También podría explicarse la anomalía desde el otro punto de vista y decir que G1 se frena debido a los considerables esfuerzos de corte generados por lo estrecho del VC (recordar que las caras laterales del VC son condiciones de borde de muro sin deslizamiento).

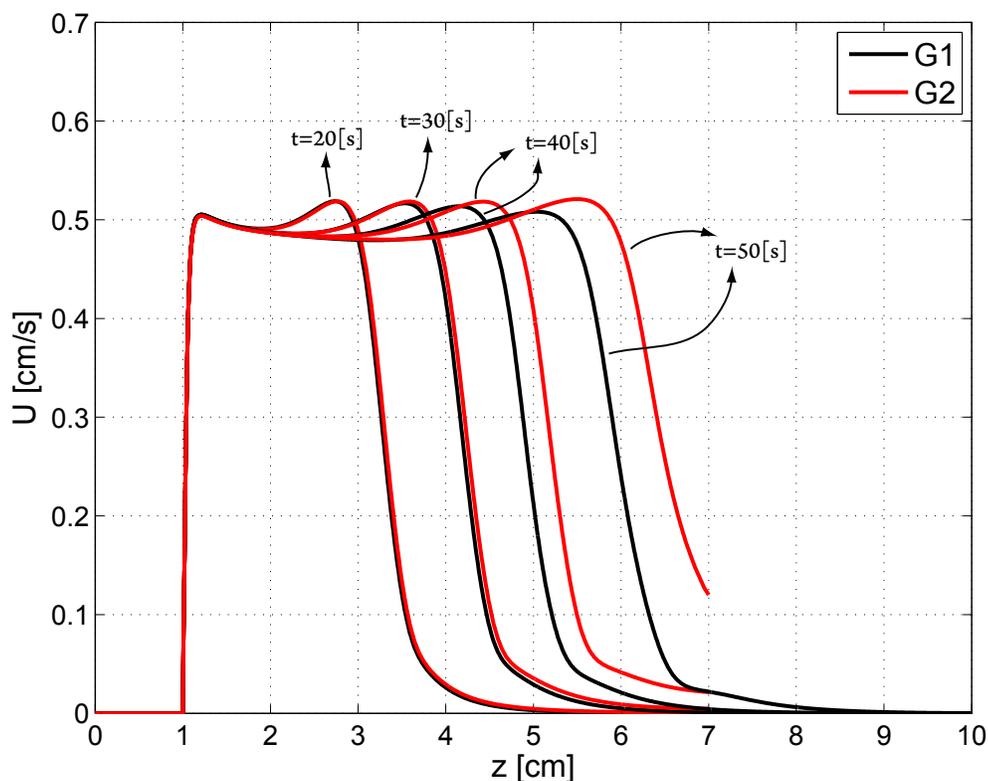


Figura 4.8: Comparación de la magnitud de la velocidad a lo largo del eje central para $t = 20, 30, 40$ y 60 [seg]

Para comprender bien la razón de las diferencias se estudiara la variación de los perfiles de temperatura y velocidad a diferentes alturas cuando la pluma ha alcanzado su estado estacionario.

4.2.2. Perfiles de Temperatura

De acuerdo con la teoría se sabe que estos perfiles deben tener una forma similar a una función Gaussiana [16]. Observando las figuras 4.9 y 4.10 se corrobora lo anterior. Se observa que ambas geometrías generan

perfiles idénticos hasta una altura de 4 [cm]. Por otra parte si se observa la figura 4.11 se pueden identificar 2 peaks que difieren de la G2 en un valor máximo de 0.06[K] equivalente a un 11% del exceso máximo de temperatura.

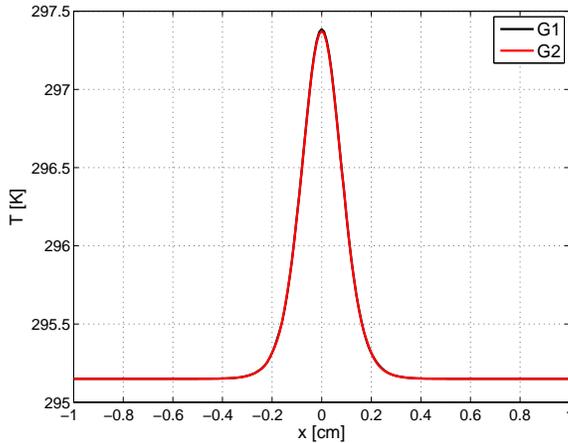


Figura 4.9: Comparación perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,2)[cm]$.

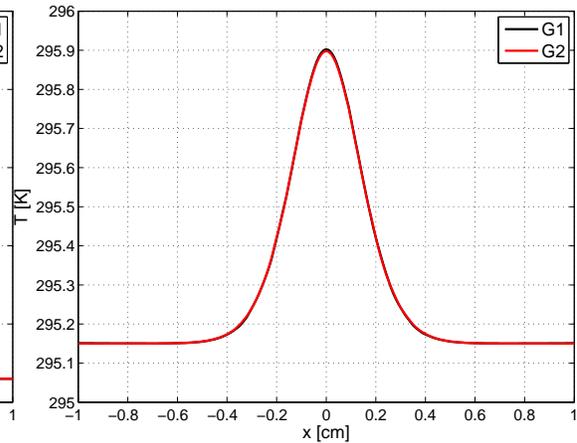


Figura 4.10: Comparación perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,4)[cm]$.

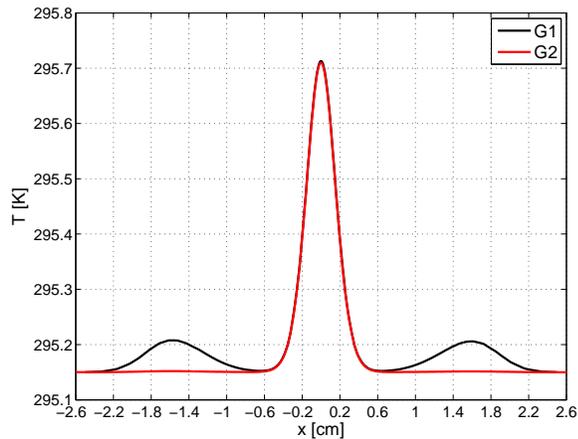


Figura 4.11: Comparación perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,5)[cm]$.

4.2.3. Perfiles de Velocidad

Si bien se pudieron haber graficado los perfiles de las componentes V_x , V_y y V_z de la velocidad pero se decidió graficar el perfil de la magnitud de la velocidad (U) para observar globalmente el efecto de las condiciones de borde sobre la velocidad.

Observando los perfiles de U se puede ver que las diferencias entre ambas geometrías son pequeñas

al inicio de la pluma pero se acentúan al distanciarse verticalmente del origen. Las condiciones de borde deberían ser tales que representaran un espacio abierto e infinito donde la pluma no se ve afectada por nada externo. En base al principio anterior se puede observar que la estrechez del volumen de control de G1 perturba notoriamente a la pluma y esto se hace más notorio con la altura. Por otra parte la arista de 8 [cm] empleada en G2 produce menores perturbaciones que G1 pero tampoco representa la situación ideal. Un perfil ideal de U debería alcanzar una velocidad nula antes de llegar el muro y no que la velocidad nula se impusiera por la condición de no deslizamiento del muro. Lo ideal sería agrandar el volumen hasta obtener las condiciones antes descritas pero esto juega en contra de la capacidad computacional que ya se encuentra en los límites con G2.

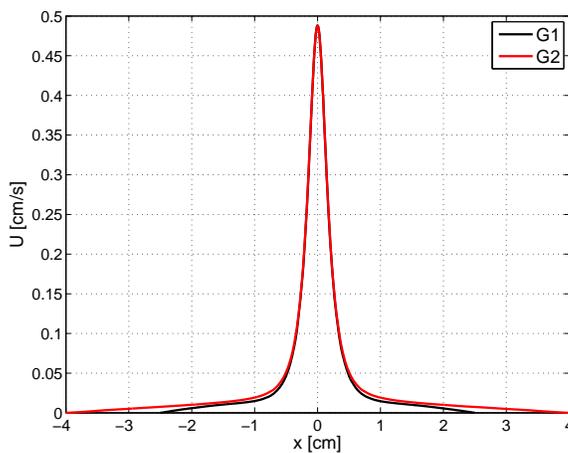


Figura 4.12: Comparación del perfil de U en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,2)[cm]$.

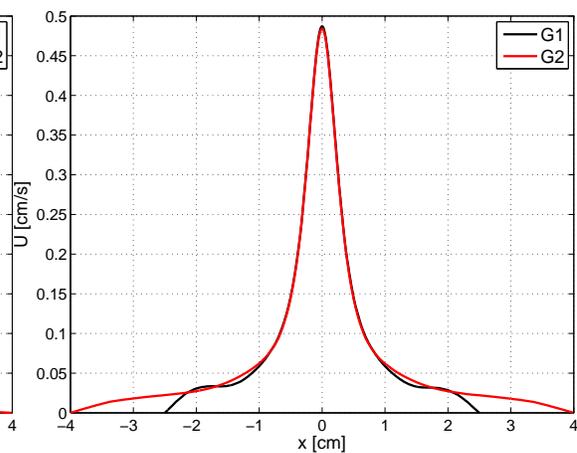


Figura 4.13: Comparación del perfil de U en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,4)[cm]$.

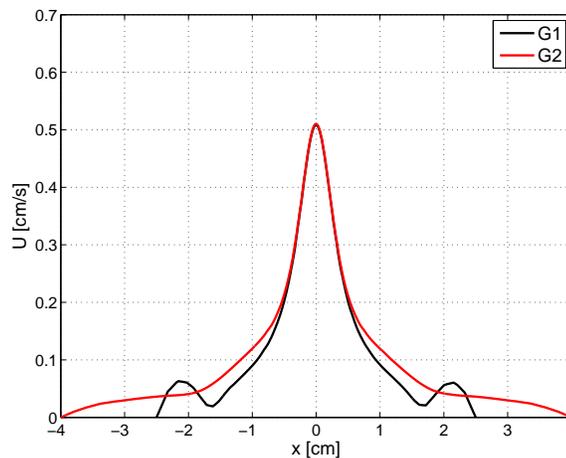


Figura 4.14: Comparación del perfil de U en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,5)[cm]$.

A lo largo de todo el estudio se utilizó G2 debido a que sufre menores perturbaciones.

Capítulo 5

Simulación Laminar

El estudio del caso laminar se llevo a cabo utilizando la geometría número 2 y a través de una inyección de potencia de $0.25[\text{watts}]$.

En la literatura, comúnmente se acepta al número de Rayleigh como aquel que caracteriza cuando un flujo por convección natural es laminar o turbulento. Si n embargo al observar la tabla 5.1 , se visualiza que el número de Rayleigh no representa la transición a la turbulencia entre el agua y el mercurio. Se observa que la simulación numérica con agua tiene un número de Rayleigh mayor que aquella con mercurio siendo que en esta última se estudia la turbulencia. La explicación radica en la naturaleza de los fluidos. Si se desea comparar fluidos netamente convectivos o conductivos, es correcto establecer una escala del número de Rayleigh para la cual, dado cierto valor, se establecería la turbulencia.

Hay que recordar que el *Número de Rayleigh* en realidad mide como se producirá mayoritariamente la transferencia de calor, conductiva o convectivamente. Por lo tanto al comparar el agua con un fluido metálico, se producen números de Rayleigh no asociables directamente con la turbulencia. Por lo tanto, es razonable que el mercurio tenga un Rayleigh menor que el del agua bajo una misma inyección de potencia, ya que el agua disipará la energía principalmente por convección y el mercurio principalmente por conducción. Luego a medida que aumenta la potencia inyectada se produce un aumento en la convección lo que radica en un aumento del Rayleigh. En este caso, para caracterizar la turbulencia lo correcto sería utilizar el *Número de Grashof*. Este número mide la relación entre las fuerzas viscosas y las fuerzas de flotación o boyancia. De acuerdo con [15] la transición a la turbulencia sucede cuando $G_r > 10^9$, por lo tanto los casos con inyección de 3 y $10[\text{watts}]$ son considerados turbulentos y el caso con inyección de $0.25[\text{watts}]$ en agua líquida es considerado como laminar.

Fluido	P [watts]	ΔT [°K]	Pr	Gr	Ra
H_2O	0.25	72	6.6	$8.26 \cdot 10^7$	$5.45 \cdot 10^8$
Hg	0.25	10.6	0.0248	$3.21 \cdot 10^8$	$7.96 \cdot 10^6$
Hg	3	116.5	0.0248	$3.54 \cdot 10^9$	$8.79 \cdot 10^7$
Hg	10	344	0.0248	$1.1 \cdot 10^{10}$	$2.74 \cdot 10^8$

Tabla 5.1: Números adimensionales desarrollados dependiendo del tipo de fluido y potencia térmica inyectada.

5.1. Verificación de la Transición del Régimen Transiente al Estacionario

Todos los resultados estacionarios obtenidos en esta sección se llevaron a cabo utilizando la solución a los 100[s] de iteración. Por ese motivo es crucial comprobar que esa solución representa satisfactoriamente un caso estacionario.

Para estudiar la transición del régimen transiente al estacionario se monitorio la velocidad vertical V_z a lo largo del tiempo en ciertos puntos específicos. Estos puntos se puede observar en la figura 5.1:

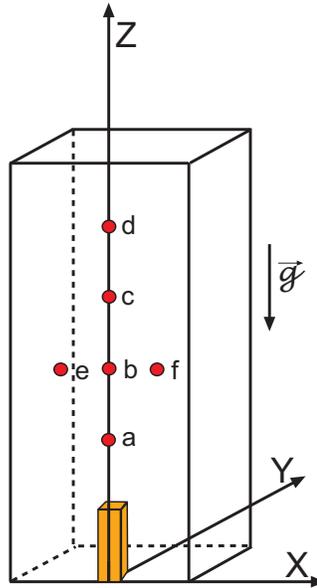


Figura 5.1: Descripción de los puntos de monitoreo $a - [x, y, z = 0, 0, 2]$, $b - [x, y, z = 0, 0, 3]$, $c - [x, y, z = 0, 0, 4]$, $d - [x, y, z = 0, 0, 5]$, $e - [x, y, z = -2, 0, 3]$ y $f - [x, y, z = 2, 0, 3]$. Las coordenadas se encuentran en centímetros.

Las figuras 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5, que representan a puntos perteneciente al eje Z en el VC, evidencian un rápido establecimiento del régimen estacionario. El caso más crítico observado toma aproximadamente 80[s] en alcanzar un régimen estacionario con lo cual la solución a los 100[s] sería ser estacionaria.

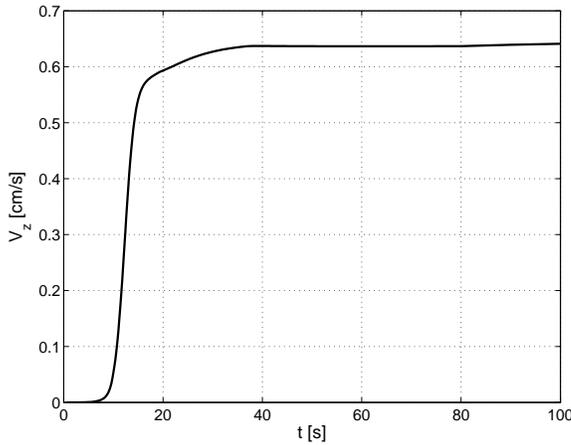


Figura 5.2: Variación de V_z en el punto $a - [x, y, z = 0, 0, 2][cm]$ a lo largo del tiempo.

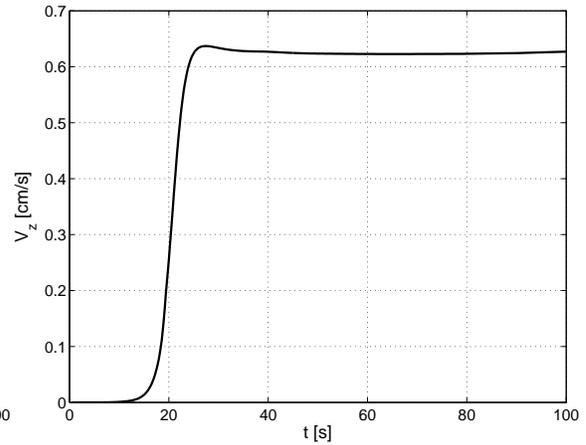


Figura 5.3: Variación de V_z en el punto $b - [x, y, z = 0, 0, 3][cm]$ a lo largo del tiempo.

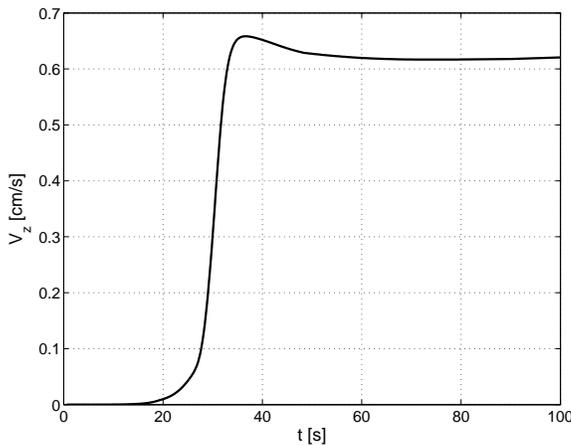


Figura 5.4: Variación de V_z en el punto $c - [x, y, z = 0, 0, 4][cm]$ a lo largo del tiempo.

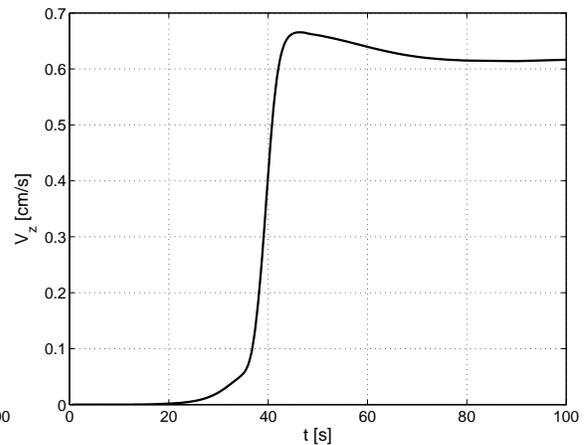


Figura 5.5: Variación de V_z en el punto $d - [x, y, z = 0, 0, 5][cm]$ a lo largo del tiempo.

Sin embargo al observar las figuras 5.6 y 5.7 se produce un poco de escepticismo respecto a la afirmación anterior. Se observa que a medida que se desarrolla la pluma se forma un mínimo en V_z . Esto se debe a que en el lugar donde se sitúan los puntos “ $e - [x, y, z = -2, 0, 3][cm]$ ” y “ $f - [x, y, z = 2, 0, 3][cm]$ ” se genera el “entrainment”, es decir, hay una cantidad de flujo que ingresa a la pluma. Luego del mínimo se observa que las curvas se dirigen hacia un valor constante que con 100[s] de iteración no se alcanza plenamente. Pero si se observa la magnitud de estas velocidades (2 órdenes de magnitud menores a las anteriores) es posible

considerar las variaciones luego de los 100[s] como despreciables.

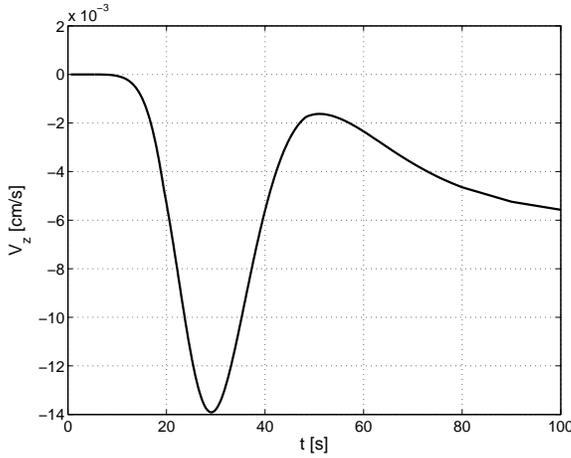


Figura 5.6: Variación de V_z en el punto $e - [x, y, z = -2, 0, 3][cm]$ a lo largo del tiempo.

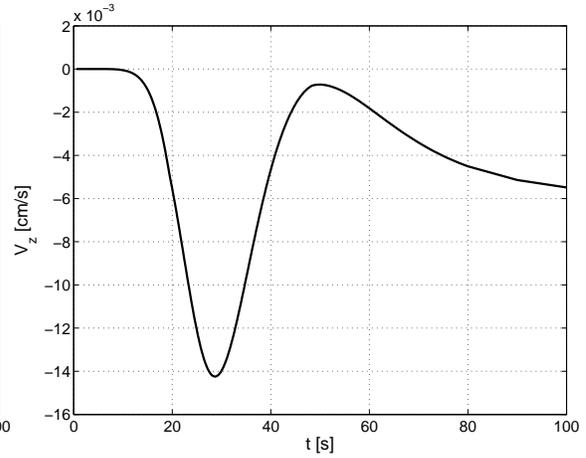


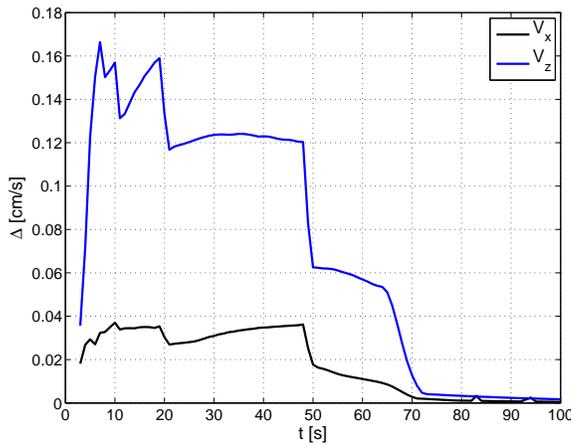
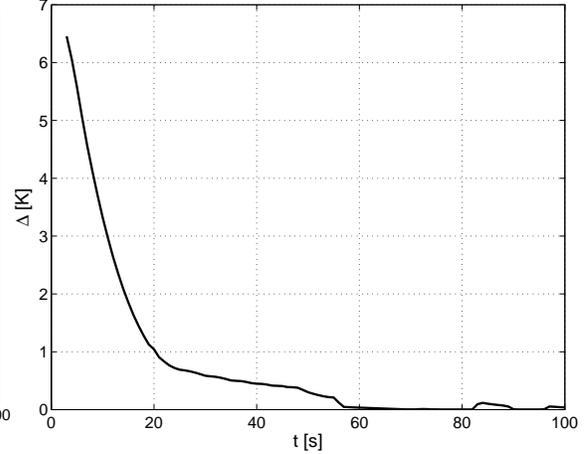
Figura 5.7: Variación de V_z en el punto $f - [x, y, z = 2, 0, 3][cm]$ a lo largo del tiempo.

En las figuras 5.8 y 5.8 se observan las diferencias máximas entre una solución en un tiempo t y otra en un tiempo $t + \delta t$, es decir:

$$\Delta(t + \delta t) = \max \left\| s_{i,j}^t - s_{i,j}^{t+1} \right\| \quad (5.1)$$

Donde s es la variable que se desea estudiar y δt es un paso de tiempo de 1[s]. De esta forma es posible observar cuando las soluciones están convergiendo a un caso estacionario.

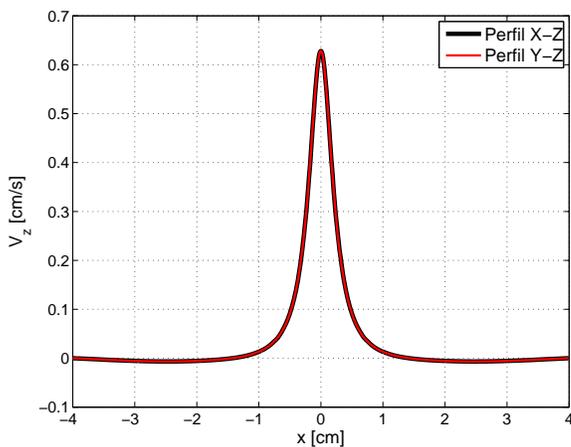
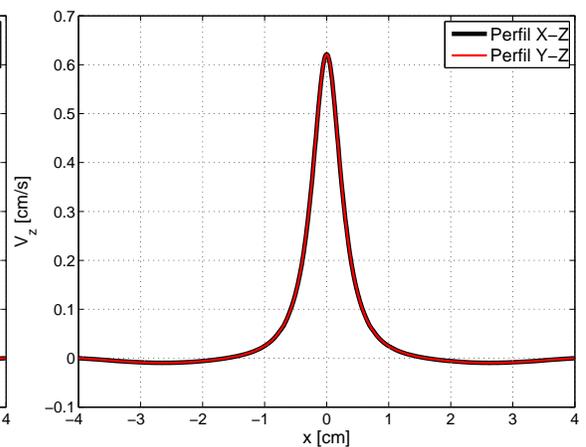
Se observa que la temperatura reduce lentamente sus variaciones, pero a los 100[s], con variaciones máximas del orden de los $4 \cdot 10^{-2} [^\circ K]$, podría considerarse como estacionaria. El campo de velocidades a los 100[s] exhibe variaciones del orden $1.7 \cdot 10^{-3} [\frac{cm}{s}]$ para V_z y $5 \cdot 10^{-4} [\frac{cm}{s}]$ para V_x . Estas variaciones son aproximadamente 2 órdenes de magnitud menores que los valores promedio. Luego, al asumir que a los 100[s] se ha alcanzado una solución estacionaria se incurriría en errores despreciables.

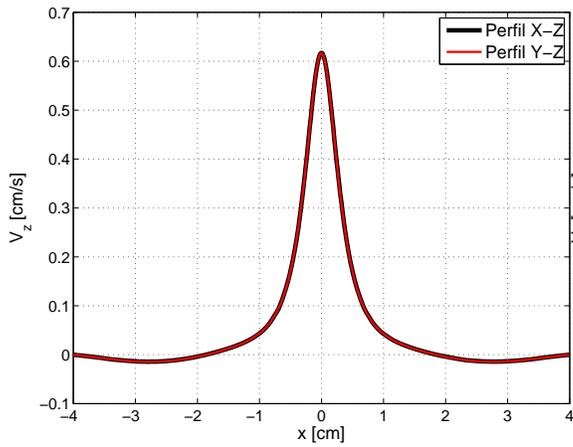
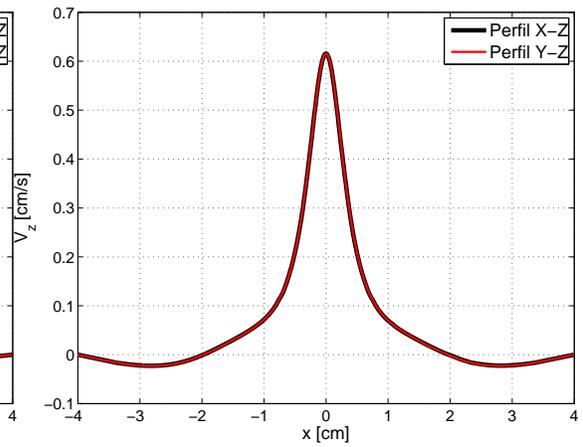
Figura 5.8: Variación de las soluciones de V_x y V_z cada 1 [s].Figura 5.9: Variación de la solución de T cada 1 [s].

5.2. Verificación de la Axisimetría

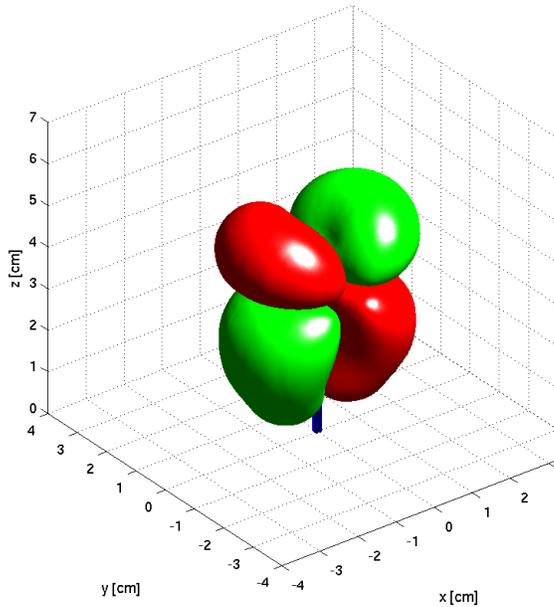
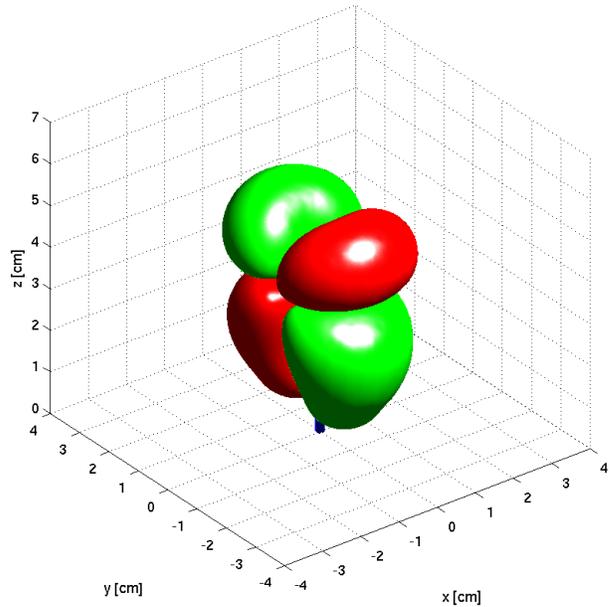
Para validar la axisimetría se compararon los perfiles de V_z en 2 secciones perpendiculares a distintas alturas. Las secciones utilizadas fueron X-Z y Y-Z (ver ejes coordenados de la figura 5.1 como referencia). Al observar la figuras 5.10, 5.11, 5.12 y 5.13 se corrobora satisfactoriamente la axisimetría encontrando diferencias máximas del 0.1 % entre los perfiles.

Al verificar la axisimetría el estudio se simplifica considerablemente. Bastaría con estudiar los perfiles en el plano de corte X-Z en lugar de tener que realizar sucesivos planos de corte.

Figura 5.10: Comparación perfil de V_z para $z = 3$ [cm].Figura 5.11: Comparación perfil de V_z para $z = 4$ [cm].

Figura 5.12: Comparación perfil de V_z para $z = 5[cm]$.Figura 5.13: Comparación perfil de V_z para $z = 6[cm]$.

En las figuras 5.14, 5.15 y 5.16 se observan los isocontornos de V_x , V_y y V_z . Se destaca la considerable simetría entre los isocontornos de V_x y V_y . Adicionalmente, la homogeneidad en el contorno de V_z refuerza la conclusión acerca de la axisimetría en los perfiles.

Figura 5.14: Isocontornos de $V_x = 0.01[cm/s]$ (verde) y $V_x = -0.01[cm/s]$ (rojo) obtenidos en $t=30[s]$.Figura 5.15: Isocontornos de $V_y = 0.01[cm/s]$ (verde) y $V_y = -0.01[cm/s]$ (rojo) obtenidos en $t=30[s]$.

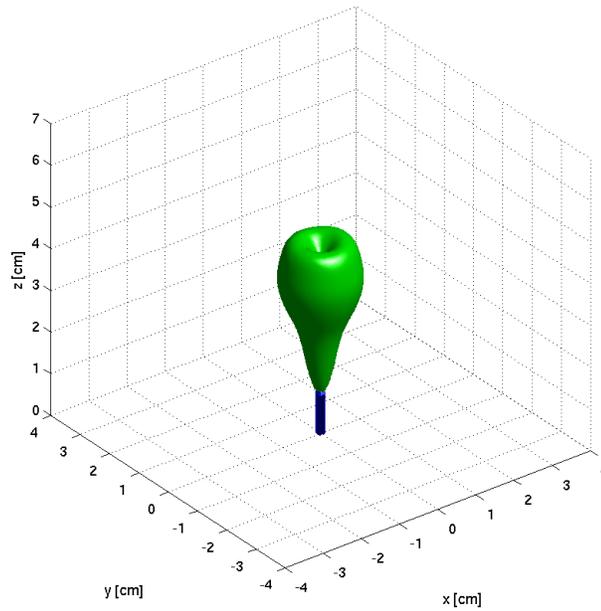


Figura 5.16: Isocontorno de $V_z = 0.1 \text{ cm/s}$ obtenido en $t=30 \text{ s}$.

5.3. Descripción de la Temperatura

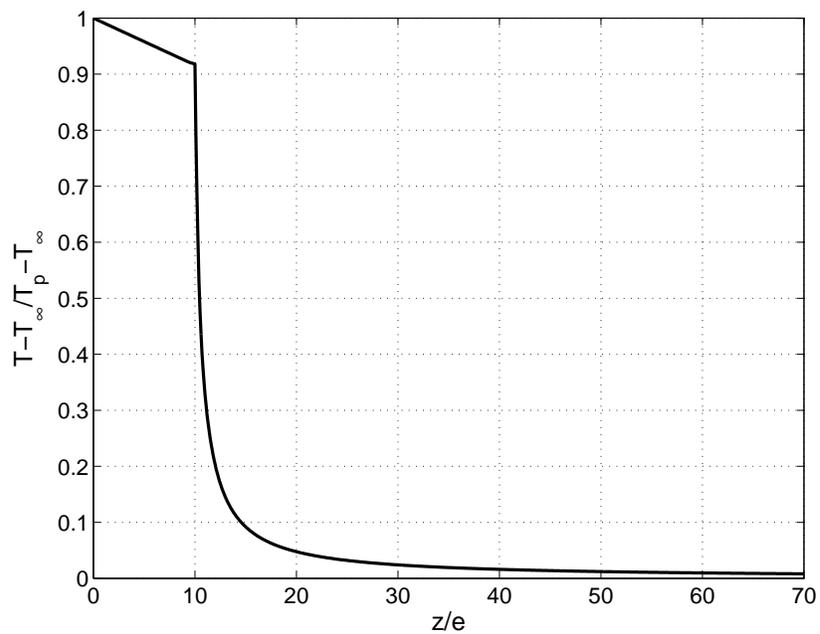


Figura 5.17: Variación de la temperatura a lo largo del eje central de la pluma cuando ha alcanzado un régimen estacionario.

En la figura 5.17 se observa la temperatura a lo largo del eje Z. Se logran observar dos zonas: una primera donde existe un comportamiento lineal de la temperatura y la segunda donde se observa un decaimiento tipo "exponencial" de la temperatura. La zona lineal se caracteriza por la conducción térmica sobre el electrodo de cobre. En la figura 5.18 se compara la conducción térmica obtenida mediante simulación computacional contra la que propone la ley de Fourier (ecuación 5.2).

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial z} \stackrel{\text{Integrando}}{\Rightarrow} T(z) = T_c - \frac{qz}{k} \quad (5.2)$$

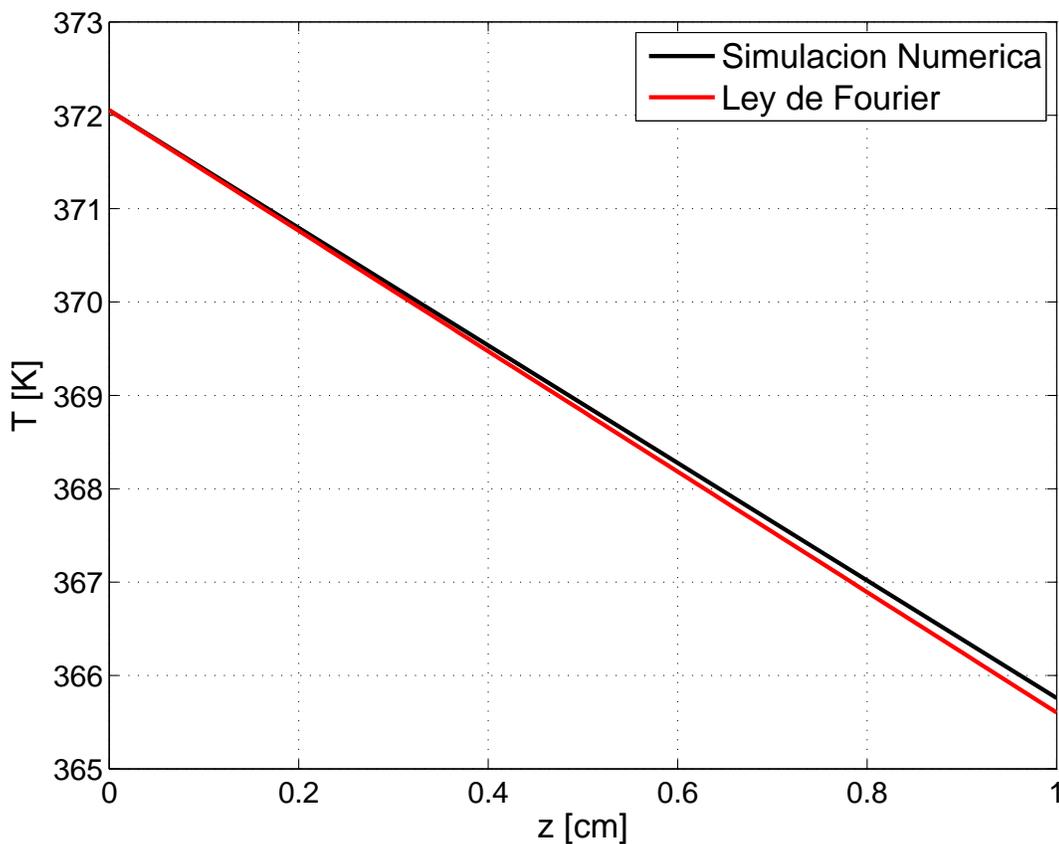


Figura 5.18: Comparación entre la simulación numérica y la ley de Fourier para la conducción térmica sobre el electrodo.

Se observa que ambas rectas son similares y las diferencias máximas apreciables son del orden de 0.1 %.

En la zona donde se encuentra el fluido, como se dijo anteriormente, la curva de temperatura exhibe una forma similar a la exponencial, que coincide con lo propuesto por la teoría [6]. Para verificar la hipótesis anterior, se graficó la curva en escala semilog, es decir, la abscisa en escala normal pero la ordenada en escala logarítmica. El gráfico descrito anteriormente se muestra en la figura 5.19.

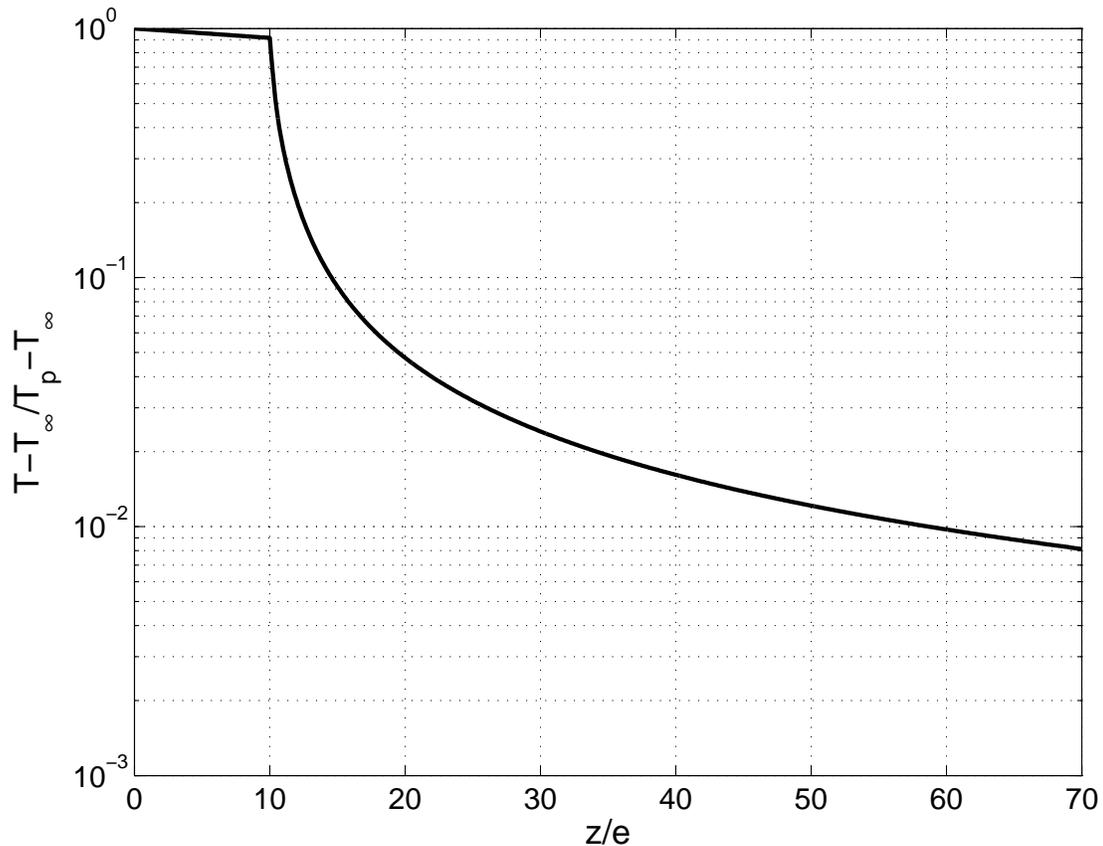


Figura 5.19: Figura 5.17 pero con la ordenada en escala logarítmica.

Se observa una linealidad en la zona comprendida entre $z/e \in [20, 70]$, lo que evidenciaría un decaimiento exponencial de la temperatura en la zona en cuestión. Por otra parte, la zona cercana al electrodo no exhibe el comportamiento exponencial antes descrito.

5.4. Perfiles de Temperatura

En las figuras 5.20, 5.21, 5.22, 5.23 y 5.24 pueden observarse los perfiles de temperatura en estado estacionario a una altura de $z = 2, 3, 4, 5$ y 6 [cm] respectivamente. Es evidente la forma de función Gaussiana (relación 5.3) que estos presentan, coincidiendo plenamente con lo propuesto por la teoría. Para caracterizar cabalmente los perfiles se realizó un ajuste de mínimos cuadrados entre los datos y la función Gaussiana, así obteniendo las constantes descritas en el cuadro 5.2. A través del ajuste es posible ver la similitud entre los datos y la función Gaussiana, las únicas diferencias aparentes se sitúan en la zona máxima y en las zonas límites de la pluma térmica pero son sin lugar a dudas despreciables.

En los mismos perfiles se graficó la curva Gaussiana 5.3 que mejor se ajustara.

$$ae^{-\left(\frac{x}{c}\right)^2} + T_o \quad (5.3)$$

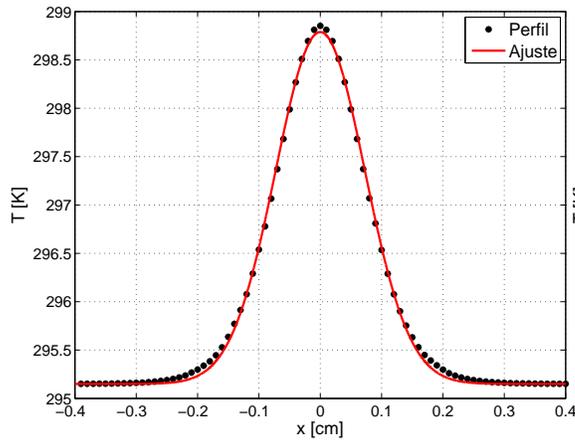


Figura 5.20: Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 2)[cm]$.

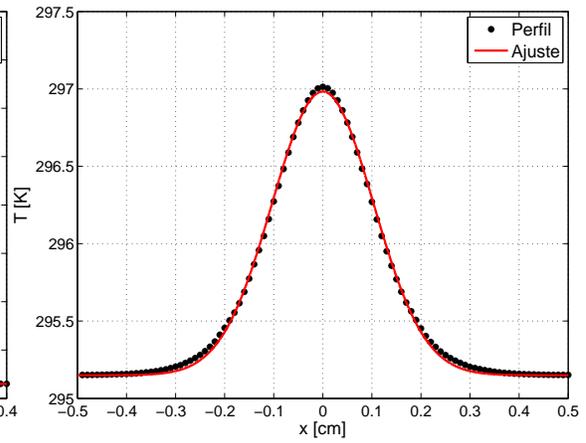


Figura 5.21: Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 3)[cm]$.

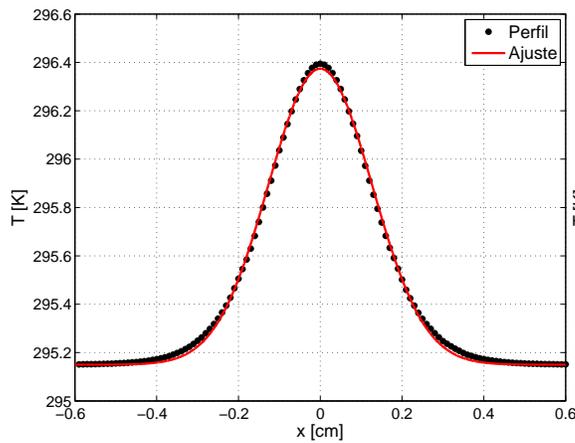


Figura 5.22: Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 4)[cm]$.

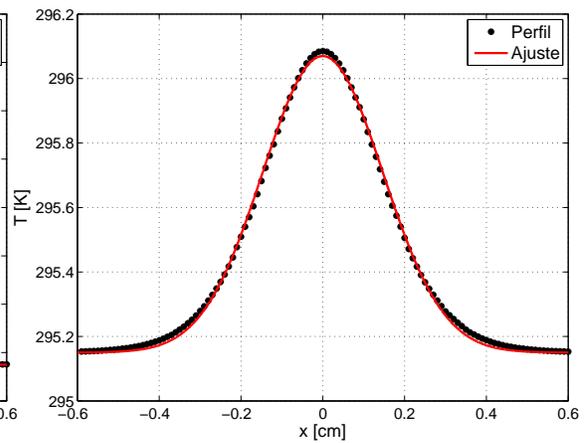


Figura 5.23: Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 5)[cm]$.

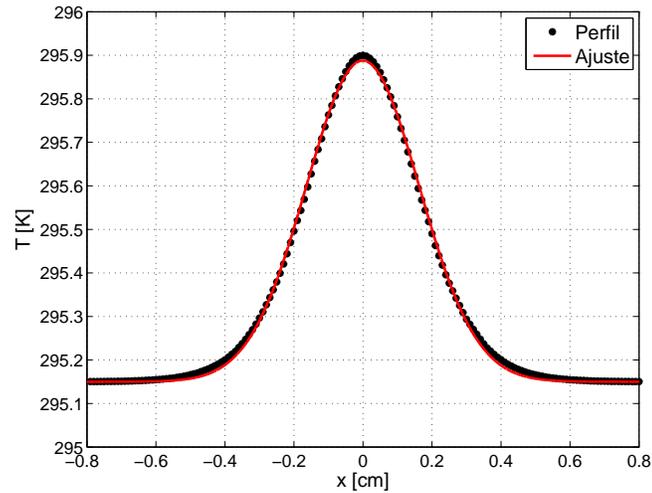


Figura 5.24: Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 6)$ [cm].

z [cm]	a [K]	c [cm]	T_o [K]
2	3.638	0.1028	295.15
3	1.833	0.1459	295.15
4	1.224	0.1795	295.15
5	0.9196	0.2081	295.15
6	0.7377	0.2323	295.15

Tabla 5.2: Constantes del ajuste Gaussiano para perfiles de temperatura en régimen laminar.

Se observa que las constantes de la función gaussiana dependen directamente de la altura. En las figuras 5.25 y 5.26 se logra visualizar esta dependencia y se observa cuales son las expresiones matemáticas que mejor la representan. En la figura 5.25 se graficó la variable “a” del ajuste gaussiano 5.3 en función de la altura. Esta variable denota el peak del perfil de exceso de temperatura ($T(x) - T_o$).

Se observa claramente que el parámetro “a” decrece con la altura siguiendo una ley de potencia. El hecho de que la variable disminuya con la altura es muy razonable debido a la difusión y convección de la temperatura desde la punta del electrodo.

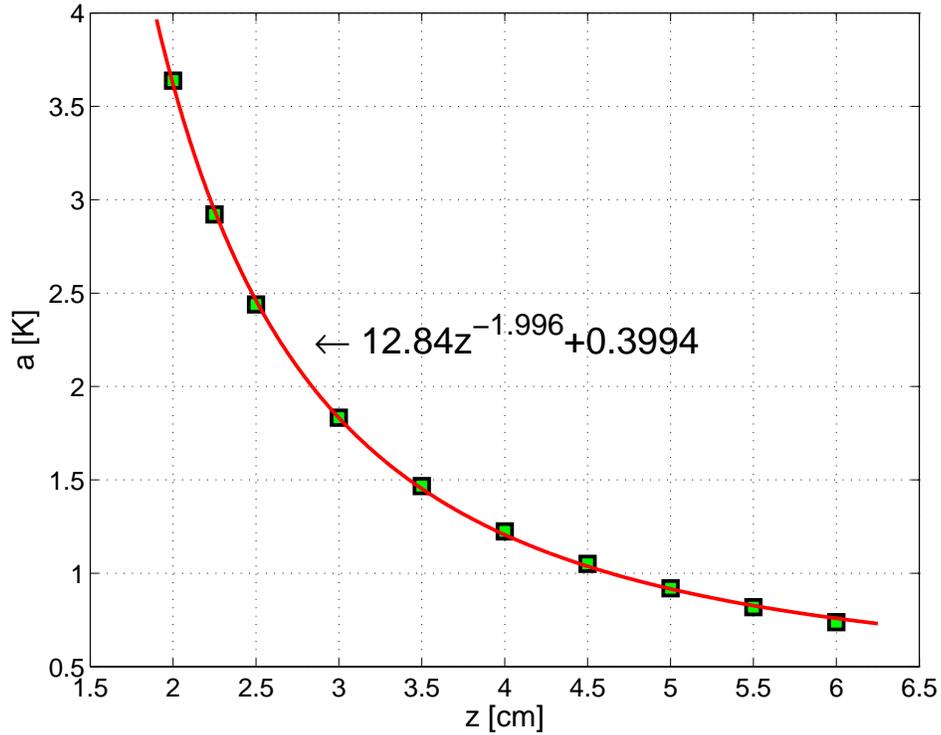


Figura 5.25: Variable “a” del ajuste logarítmico 5.3 en función de z

En la figura 5.26 se graficó la variable “c” del ajuste gaussiano 5.3 en función de la altura. Esta variable cumple el mismo rol que la desviación estándar (σ) en una distribución normal, es decir, es la mitad del ancho de la gaussiana que se produce a la mitad del peak máximo.

Se observa que el parámetro “c” crece con la altura siguiendo una ley de potencia. Esto se debe a que con la altura, la temperatura comienza a homogeneizarse por lo tanto la gaussiana reduce la magnitud y aumenta su ancho.

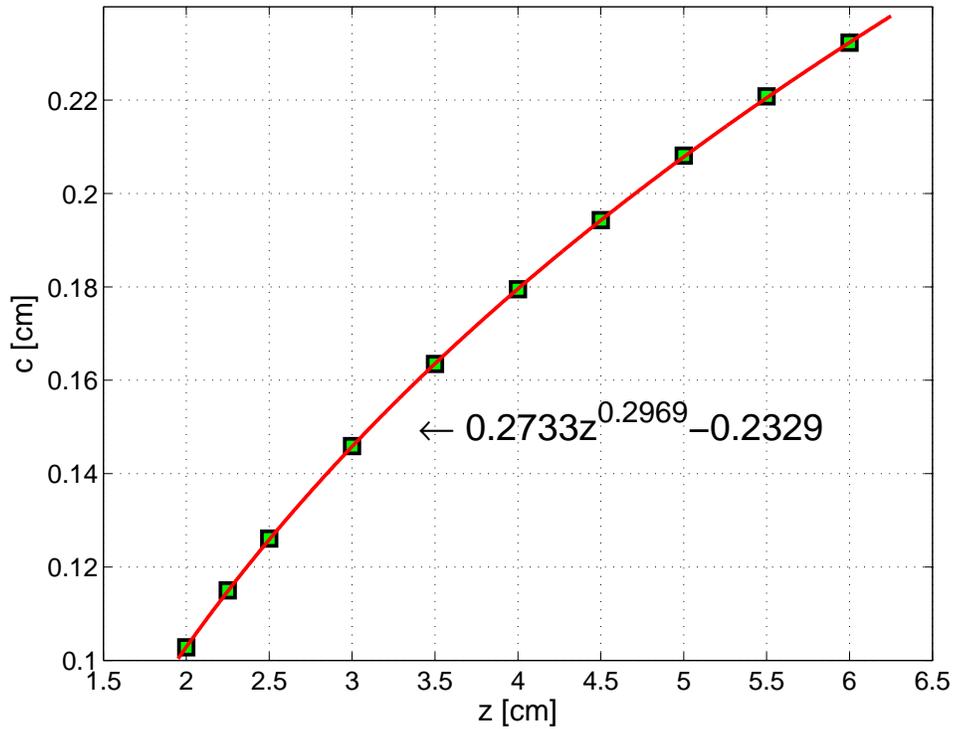


Figura 5.26: Variable “c” del ajuste logarítmico 5.3 en función de z

Finalmente se obtiene la expresión 5.4 que describe los perfiles de temperatura en función de la coordenada radial y la coordenada vertical dado que se comprobó a priori la axisimetría de los perfiles.

$$T(r, z) = a(z) \cdot e^{-\left(\frac{r}{c(z)}\right)^2} + T_o \quad (5.4)$$

$$a(z) = 12.84 \cdot z^{-1.996} + 0.3994$$

$$c(z) = 0.2733 \cdot z^{0.2969} - 0.2339$$

$$T_o = 295.15$$

Para tratar de validar los resultados obtenidos, se decidió comparar estos con los obtenidos por T. Fujii [14]. Los resultados obtenidos se compararon con sus estudios acerca de la convección natural sobre una fuente puntual de energía. Para la homologación de los resultado se utilizaron las adimensionalizaciones 5.5 propuestas por Fujii.

$$\frac{h}{Pr} = \frac{2\pi c_p \rho \alpha z' \theta}{P} \quad (5.5)$$

$$\xi = \frac{DP^{\frac{1}{4}} r}{z'^{\frac{1}{2}}}$$

$$D = \left(\frac{g\beta}{2\pi c_p \rho v^3} \right)^{\frac{1}{4}}$$

En donde:

- P : Potencia Térmica
- z' : Altura total del perfiles. $z' = z + z_o$
- z = distancia desde el origen real hasta la altura del perfil.
- z_o = distancia desde el origen virtual hasta el origen real.

El perfil comparado se encuentra a $z = 4[cm]$ pero como la arista del electrodo es de $1[mm]$ se asumió que $z_o \approx 0$ por lo que $z' = 4[cm]$. La comparación puede observarse en la figura 5.27 en donde la curva de color rojo es la obtenida computacionalmente con un $Pr = 6.6$ y las de color negro son las obtenidas por Fujii para diversos números de Prandtl.

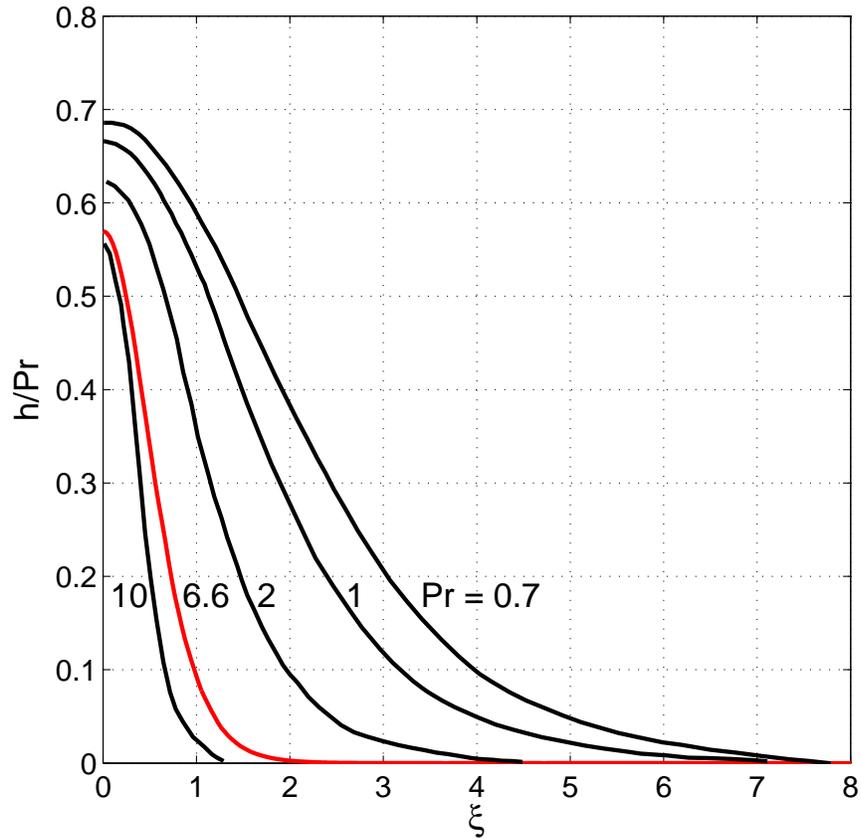


Figura 5.27: Comparación del perfil de T adimensionalizado para $z = 4[cm]$ con los resultados de T. Fujii [14].

Los datos obtenidos coinciden perfectamente con el comportamiento de los datos experimentales. A mayor Prandtl las curvas aumentan el módulo de la pendiente, se desplazan hacia la izquierda y disminuye la magnitud del peak.

5.5. Estudio de la Transferencia de Calor

Primero que todo se debe comparar el tiempo característico para la transferencia de calor (τ^*) en el electrodo con el tiempo de duración del escalón de potencia (τ). Así se podrá estudiar la transferencia de calor a través del electrodo.

$$\tau^* = \frac{L^2}{\alpha} \quad (5.6)$$

Para un electrodo de cobre de $L = 0.01[m]$, $\rho = 8978[kg/m^3]$, $c_p = 381[j/kg^\circ K]$ y $387.6[w/m^\circ K]$ se tendrá que:

$$\tau^* = 0.88[s] < \tau_{min} = 2[s] \quad (5.7)$$

Esto quiere decir que el electrodo transmite el calor a lo largo del electrodo más rápido que la duración del escalón. Es decir, el tiempo que sucede entre que comienza la inyección de potencia térmica por la base del electrodo y la cara superior del electrodo transfiere calor al fluido es aproximadamente 0.88[s].

Para estudiar la transferencia del calor al fluido se procedió a monitorear la variación del número de Nusselt superficial (relación 5.8) sobre la cara superior del electrodo.

$$Nu_s = \frac{1}{A} \int \int Nu_z dA \quad (5.8)$$

En la figura 5.28 se observa la variación en el tiempo del Nusselt superficial en la punta del electrodo.

En la figura 5.28 se observa la variación del número de Nusselt en la punta del electrodo para distintos thermals y finalmente para la pluma térmica. Como era de esperarse el Nusselt de los thermals coincide con el de la pluma térmica hasta el momento en que cesa la inyección de energía. Ese comportamiento se debe a que una pluma térmica se genera al prolongar el tiempo de inyección de energía. Del grafico puede desprenderse la siguiente información importante:

- Todas las curvas presentan un mínimo en el Nusselt. Esto significa que la disipación de la energía por conducción aumenta hasta alcanzar un máximo (justo en el mínimo de la curva del Nusselt). Luego de este mínimo si la inyección de energía prosigue el Nusselt aumenta, lo que significa un aumento en la energía disipada por convección. Un dato destacable es que la curva del thermal de $\tau = 2$ también presenta el mínimo siendo que la inyección de energía cesa a los 2[s] y el mínimo sucede a los 4[s].
- Si la inyección de energía permanece por un tiempo considerable el número de Nusselt alcanza un valor constante de 2.6 aproximadamente. El Nusselt se establece una vez que el campo de velocidades y temperatura cercano al electrodo alcanza un régimen estacionario. Lo anterior no significa que el volumen de estudio se encuentra en régimen estacionario sino solo la zona cercana al electrodo.
- Una vez que se corta la inyección de energía el número de Nusselt disminuye hasta que sucede una pequeña perturbación. Se observa que luego de la perturbación, la pendiente de la curva de Nusselt disminuye en modulo alcanzando valores cercanos a cero.

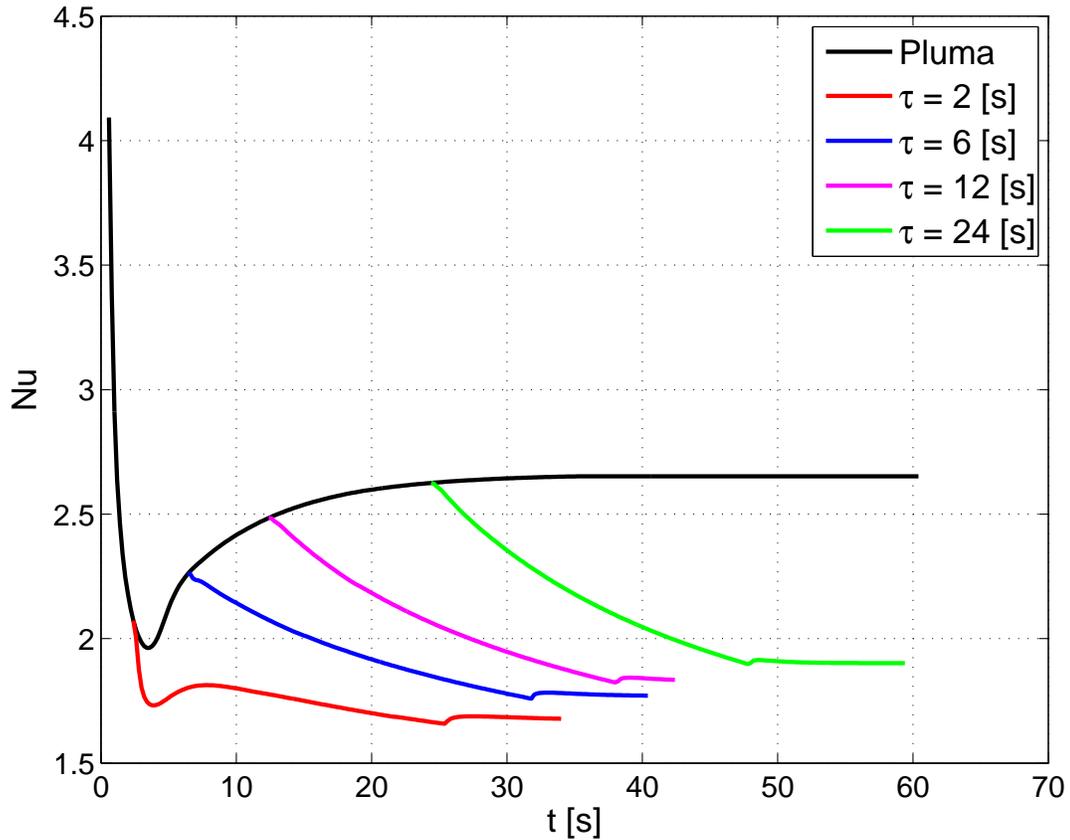


Figura 5.28: Variación del $Nu_{superficial}$ en la punta del electrodo en el tiempo.

En la tabla 5.3 pueden observarse los tiempos para los que sucede la perturbación en el número de Nusselt.

τ [s]	2	6	12	24
t^* [s]	26	32	38	48

Tabla 5.3: Tiempo en que sucede la perturbación en el número de Nusselt (t^*) según τ .

Para comprender la causa de la perturbación en el número de Nusselt se decidió monitorear la temperaturas a lo largo del tiempo en puntos específicos, estos se describen a continuación:

- La base del electrodo ($[x, y, z = 0, 0, 0][cm]$)
- La punta del electrodo ($[x, y, z = 0, 0, 1][cm]$)
- La celda superior a la punta del electrodo ($[x, y, z = 0, 0, 1.01][cm]$)

El monitoreo de las temperaturas puede ser observado en las figuras 5.29, 5.30, 5.31 y 5.32. Podemos observar que en todas las figuras la temperatura aumenta hasta llegar a un peak. Es posible ver una dependencia entre los gráficos y el valor de τ . Mientras mayor sea el τ mayores son las temperaturas alcanzadas e incluso se evidencia la aparición de una pequeña curva en el peak de temperatura. Es posible ver que para el mismo instante en que sucede la perturbación en el Nusselt, las curvas de temperatura presentan una discontinuidad (cambio de pendiente abrupto). Luego de la discontinuidad las temperaturas disminuyen mucho más lento con una pendiente cercana a cero.

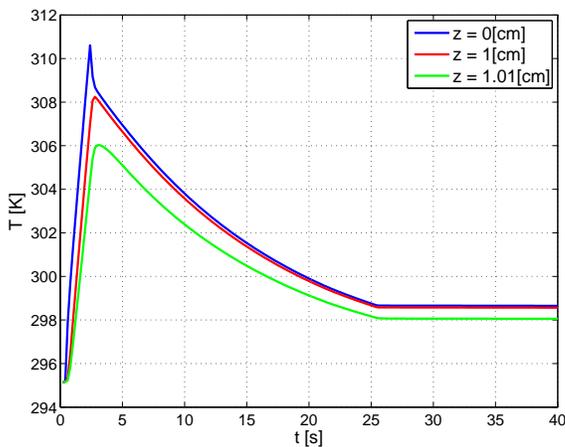


Figura 5.29: Variación de la temperatura en el tiempo para $\tau = 2$.

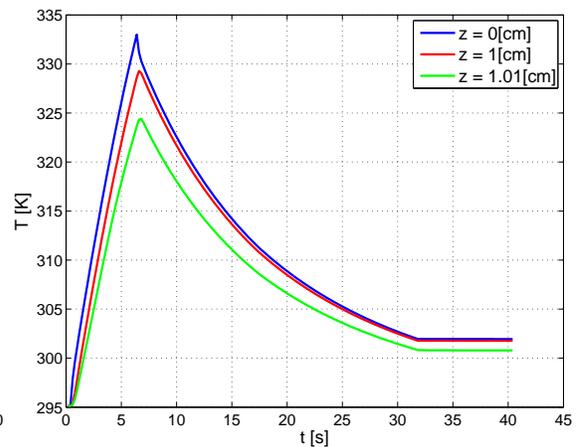


Figura 5.30: Variación de la temperatura en el tiempo para $\tau = 6$.

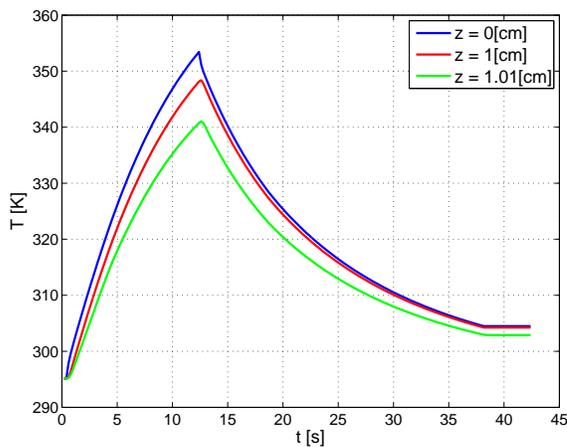


Figura 5.31: Variación de la temperatura en el tiempo para $\tau = 12$.

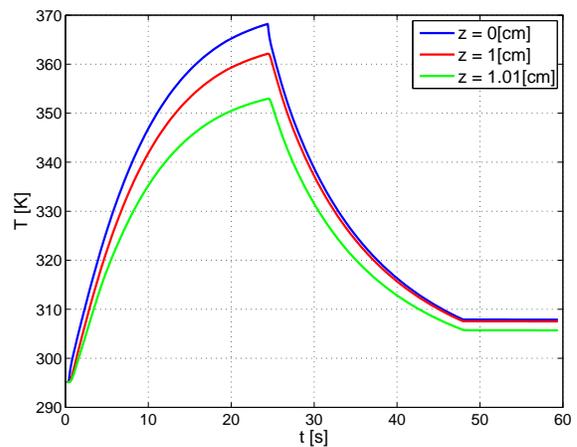


Figura 5.32: Variación de la temperatura en el tiempo para $\tau = 24$.

Recapitulando, se podría interpretar como que de un momento a otro el sistema "electrodo" hubiera dejado de disipar energía, con lo que se aludiría a la aparición del pinch-off del thermal. Sin embargo, Para

verificar la suposición anterior se procedió a graficar los contornos de magnitud de la vorticidad para el 5% y el 10% de la vorticidad máxima.

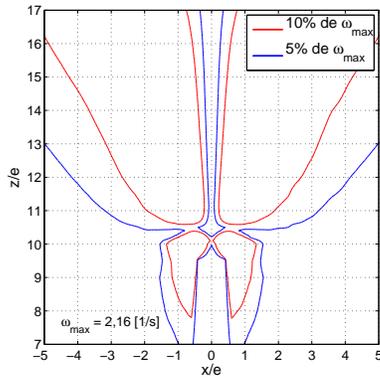


Figura 5.33: Contornos de ω para $\tau = 2[s]$ y $t = 20[s]$.

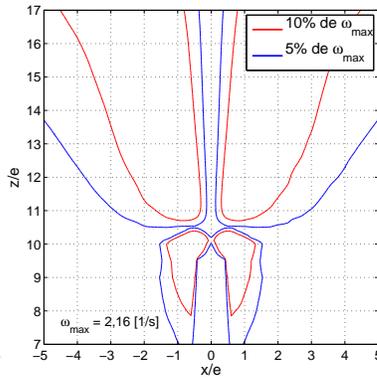


Figura 5.34: Contornos de ω para $\tau = 2[s]$ y $t = 24[s]$.

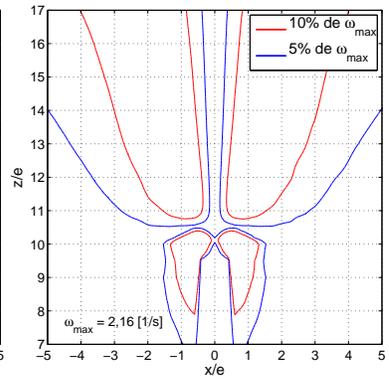


Figura 5.35: Contornos de ω para $\tau = 2[s]$ y $t = 26[s]$.

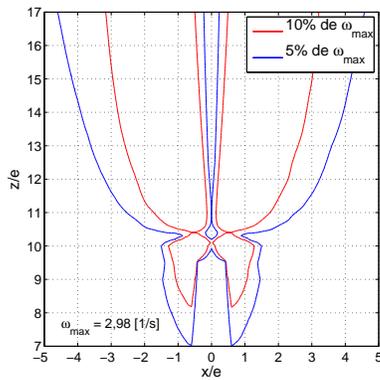


Figura 5.36: Contornos de ω para $\tau = 6[s]$ y $t = 29[s]$.

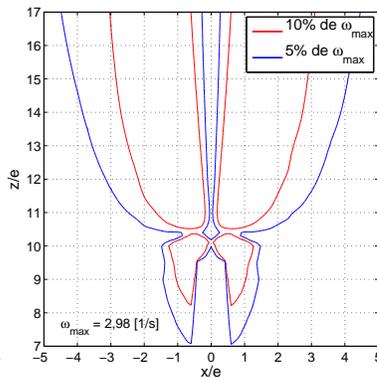


Figura 5.37: Contornos de ω para $\tau = 6[s]$ y $t = 32[s]$.

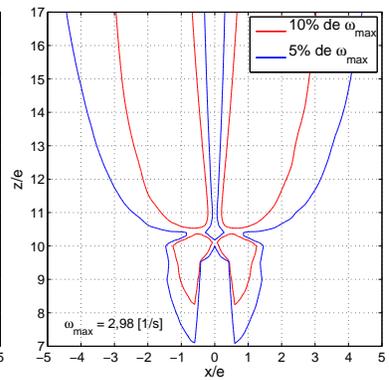


Figura 5.38: Contornos de ω para $\tau = 6[s]$ y $t = 35[s]$.

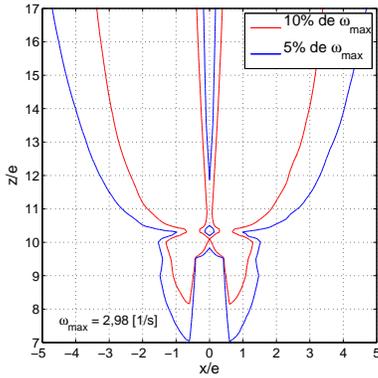


Figura 5.39: Contornos de ω para $\tau = 12[s]$ y $t = 37[s]$.

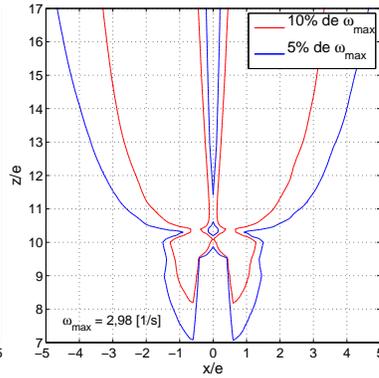


Figura 5.40: Contornos de ω para $\tau = 12[s]$ y $t = 40[s]$.

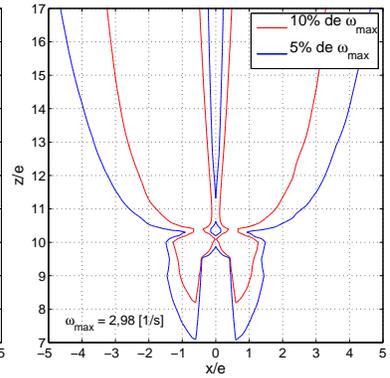


Figura 5.41: Contornos de ω para $\tau = 12[s]$ y $t = 42[s]$.

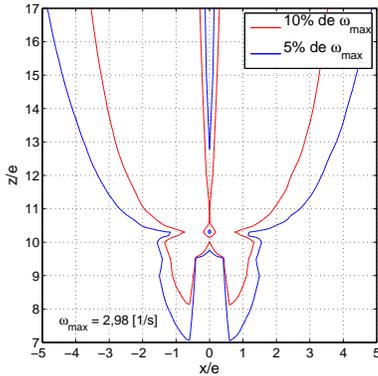


Figura 5.42: Contornos de ω para $\tau = 24[s]$ y $t = 48[s]$.

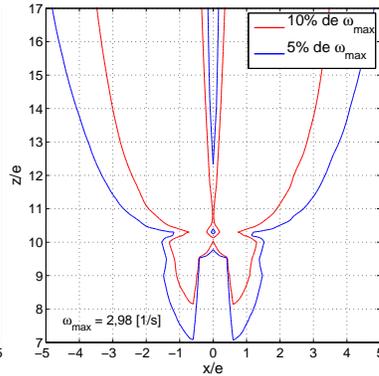


Figura 5.43: Contornos de ω para $\tau = 24[s]$ y $t = 52[s]$.

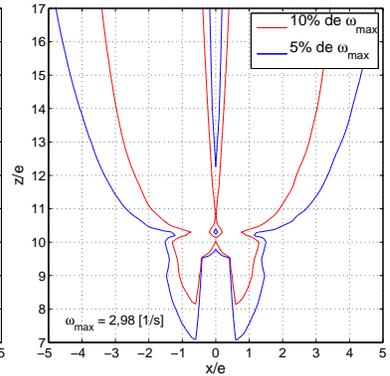


Figura 5.44: Contornos de ω para $\tau = 24[s]$ y $t = 56[s]$.

Al observar las figuras de la 5.33 a la 5.35 es posible ver que el pinch-off para un themal de $\tau = 2[s]$ sucede efectivamente entorno al $t^* = 26[s]$ observado en la figura 5.28. Sin embargo, para τ mayores, el tiempo en que sucede el pinch-off empieza a desfasarse del t^* a tal punto que para $\tau = 24[s]$ no es posible visualizar el pinch-off en un intervalo de tiempo en torno a $t^* = 48[s]$

Sin lugar a dudas los tiempo t^* obtenidos para cada τ representarán el desprendimiento de cierto contorno de la vorticidad. Pero según lo evidenciado por la figuras 5.33 a la 5.44, a medida que aumente el τ aumentará la magnitud del mínimo contorno que se desprenderá al tiempo t^* , es decir, a medida que aumente el τ menor será la representación de t^* respecto del tiempo de pinch-off del themal.

5.6. Cinemática del Núcleo

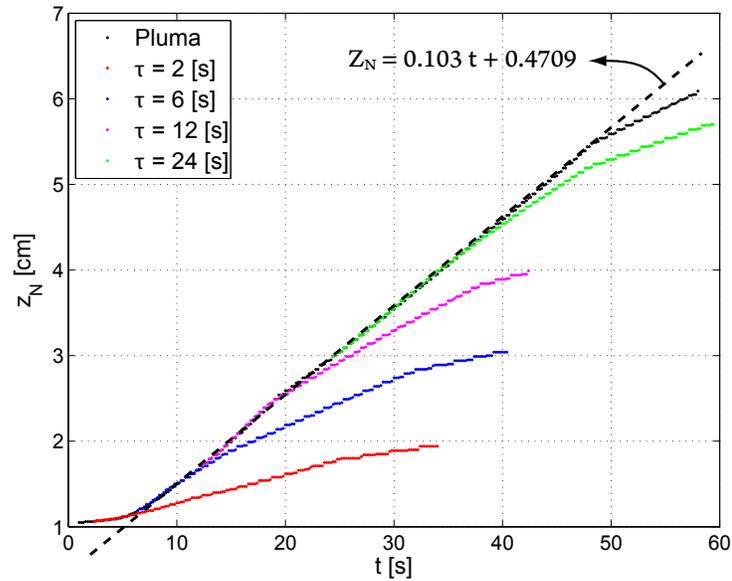


Figura 5.45: Posición del núcleo en el tiempo.

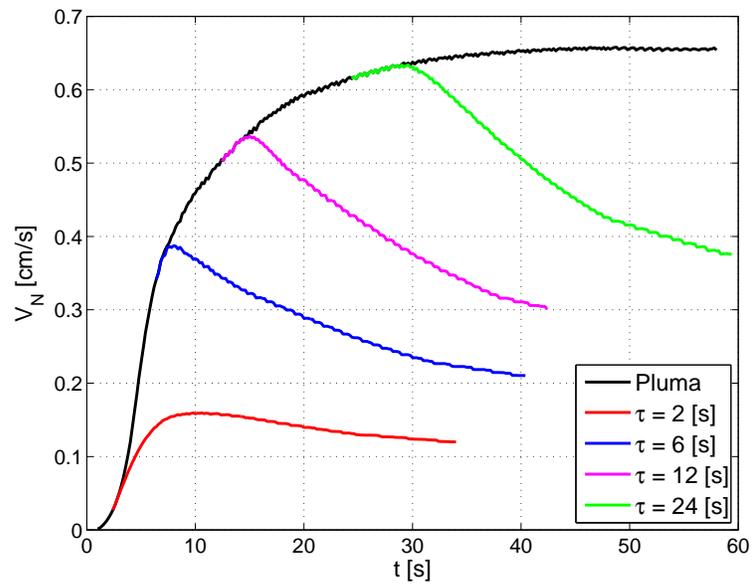


Figura 5.46: V_z evaluado en la posición del núcleo en el tiempo.

En la figura 5.45 se observa la posición en el tiempo del núcleo tanto de la pluma como de los thermal. La ubicación del núcleo se lleva a cabo de acuerdo a lo explicado en la figura 3.14. Podemos notar que las

curvas presentan un crecimiento exponencial seguido de una zona lineal pero solo los thermals de $\tau = 2, 6$ y $12[s]$ muestran un comportamiento asintótico en el extremo superior. Por otra parte la pluma y el thermal de $\tau = 24[s]$, que son mas energéticos, no exhiben un límite superior asintótico. El comportamiento antes descrito coincide perfectamente con lo expuesto en la teoría [2].

Luego, la pendiente de la recta en la zona lineal del desplazamiento de la pluma térmica será la velocidad de advección ($U_a = 0.103[cm/s]$).

El cambio de pendiente abrupto en la curva de la pluma y del thermal de $\tau = 24[s]$ puede deberse a la condición de borde de presión impuesta a la salida. La pluma y el thermal generan una depresión en el frente con lo logra desplazarse. Al alcanzar el límite superior, la condición de borde impone una presión atmosférica donde antes existía una presión inferior. De esta forma se genera una desaceleración implicando un cambio en la velocidad.

En la figura 5.46 puede observarse la velocidad vertical relativa al núcleo de la pluma térmica y los thermals. Se observa al igual que en la curva 5.28 que los thermals tienen la misma velocidad de la pluma hasta el momento donde cesa la inyección de energía. Desde ese momento la velocidad en los thermals comienza a decrecer mientras que la pluma alcanza un valor asintótico. El decrecimiento de las velocidades en los thermals implica que estos se encuentran desacelerando, lo que es consistente con el comportamiento asintótico en la figura 5.45.

Desde la figura 5.47 a la 5.50 pueden observarse las líneas de flujo del campo de velocidad $\vec{V} = (u, v, w - U_a)$ donde U_a es la velocidad de advección. Este campo de velocidad corresponde a situarse en un marco de referencia solidario al thermal.

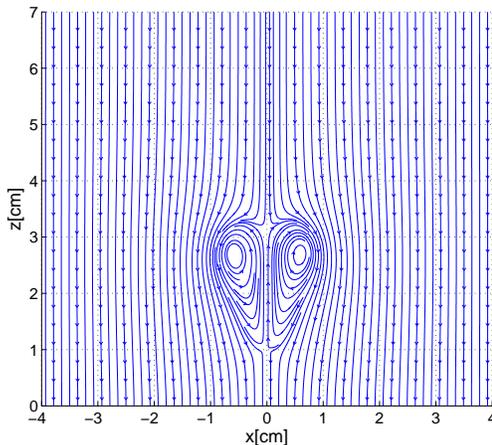


Figura 5.47: Líneas de corriente para el campo de velocidad $\vec{V} = (u, v, w - U_a)$ de la pluma térmica para un tiempo $t = 20[s]$.

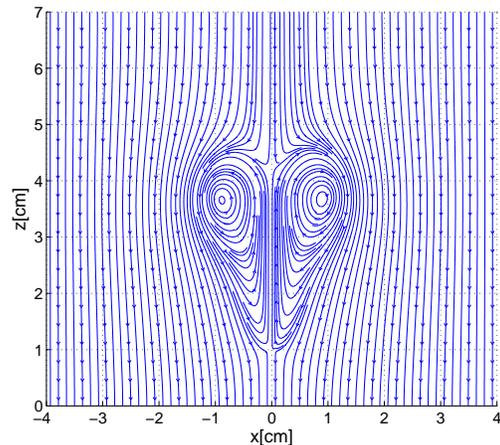


Figura 5.48: Líneas de corriente para el campo de velocidad $\vec{V} = (u, v, w - U_a)$ de la pluma térmica para un tiempo $t = 30[s]$.

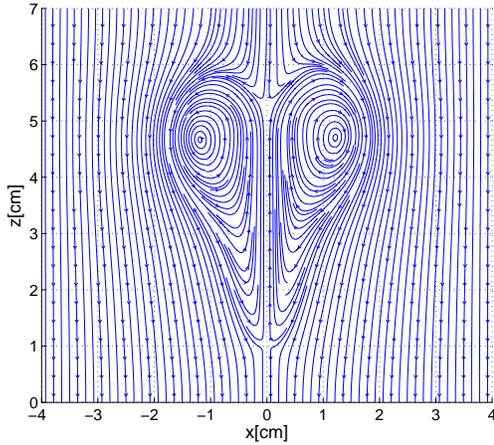


Figura 5.49: Líneas de corriente para el campo de velocidad $\vec{V} = (u, v, w - U_a)$ de la pluma térmica para un tiempo $t = 40[s]$.

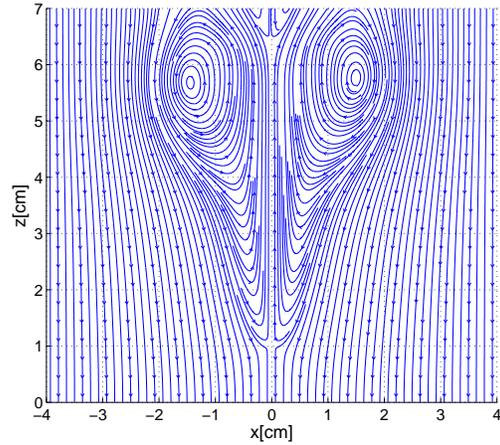


Figura 5.50: Líneas de corriente para el campo de velocidad $\vec{V} = (u, v, w - U_a)$ de la pluma térmica para un tiempo $t = 50[s]$.

5.7. Isocontornos de Vorticidad

La vorticidad ($\vec{\omega}$) expresa la tendencia a la rotación en un punto, matemáticamente esto equivale a:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (5.9)$$

Donde \vec{V} es la velocidad. La noción de vorticidad está profundamente asociada al campo de velocidades generado por el movimiento rotacional de un fluido, sin embargo, cualquier tipo de flujo no uniforme posee un cierto grado de vorticidad, por lo tanto, el concepto de vorticidad está más asociado a los gradientes de velocidad generados en un flujo. En las figuras 5.51, 5.52, 5.53, 5.54 y 5.55 pueden observarse los isocontornos de magnitud de la vorticidad (5.10) para thermals de $\tau = 2, 6, 12, 24$ y finalmente una pluma térmica. El isocontorno se obtuvo utilizando un valor de magnitud de la vorticidad de $0.2[s^{-1}]$ y las imágenes se obtuvieron a los 39.5 [s].

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (5.10)$$

Observando la figura 5.51 es posible darse cuenta que la energía entregada en 2 segundos no fue la suficiente para generar la forma de “hongo” clásica de este tipo de contornos. Incluso se observa que el thermal se encuentra extinto casi en su totalidad a los 39.5[s].

Por otra parte, en la figura 5.52 sí se logra observar la forma de hongo e incluso se observa la pequeña

formación de un anillo independiente. Se debe tener cuidado con el anillo descrito anteriormente porque para isocontornos de otros valores puede que el pinch-off no haya ocurrido aún.

El thermal de la figura 5.53 al haber recibido energía por 12 segundos presenta una forma mucha más definida que las imágenes anteriores pero al compararlo con la figura 5.54 que recibió energía por 24 segundos se observan claro signos de degradación del primer thermal.

Finalmente en la figura 5.55 se observa el isocontorno de una pluma térmica. Es fácil ver que las diferencias entre la pluma y la figura 5.54 son mínimas. La única diferencia aparente es que la altura del núcleo de la pluma es mayor que la del thermal de $\tau = 24[s]$ debido que la pluma ha recibido mayor cantidad de energía en el tiempo que el thermal.

Finalmente los isocontornos presentan una evidente axisimetría lo que reforzaría lo observado en los perfiles 5.10 al 5.13.

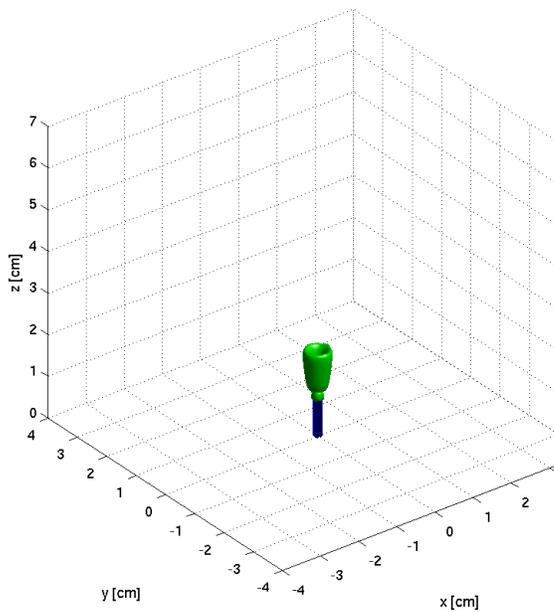


Figura 5.51: Isocontorno de $\omega = 0.2[s^{-1}]$ para $\tau = 2[s]$ obtenido en $t=39.5[s]$.

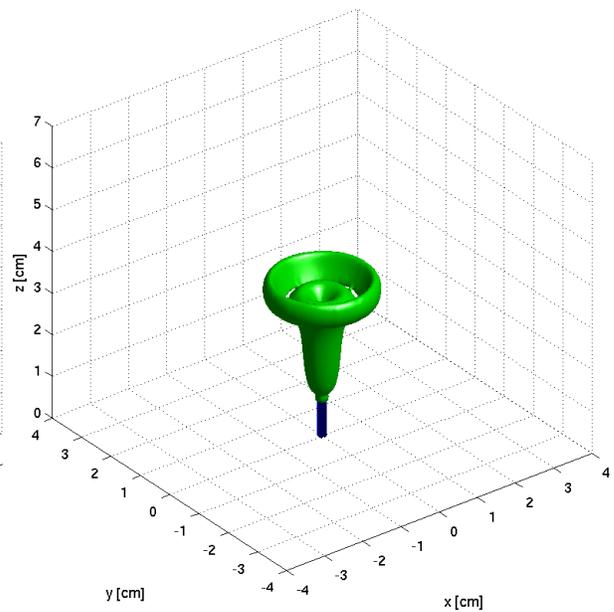


Figura 5.52: Isocontorno de $\omega = 0.2[s^{-1}]$ para $\tau = 6[s]$ obtenido en $t=39.5[s]$.

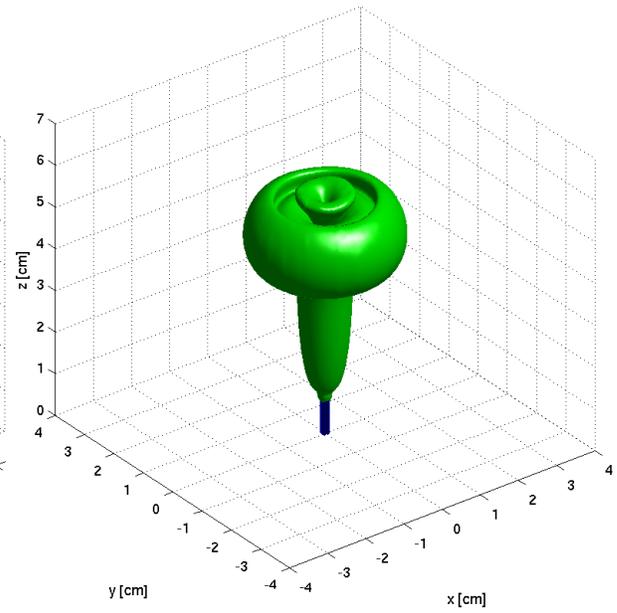
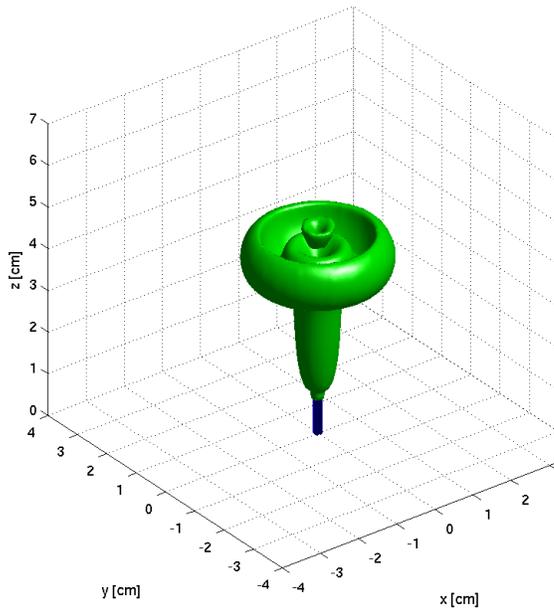


Figura 5.53: Isocontorno de $\omega = 0.2 [s^{-1}]$ para $\tau = 12 [s]$ obtenido en $t=39.5 [s]$.
Figura 5.54: Isocontorno de $\omega = 0.2 [s^{-1}]$ para $\tau = 24 [s]$ obtenido en $t=39.5 [s]$.

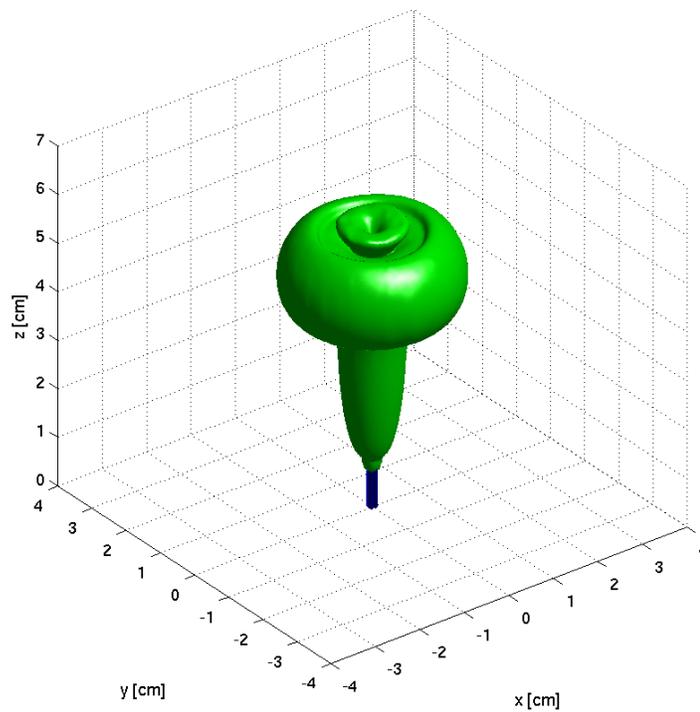


Figura 5.55: Isocontorno de $\omega = 0.2 [s^{-1}]$ para una pluma térmica obtenido en $t=39.5 [s]$.

5.8. Curvas de Nivel de V_z , V_x y ω

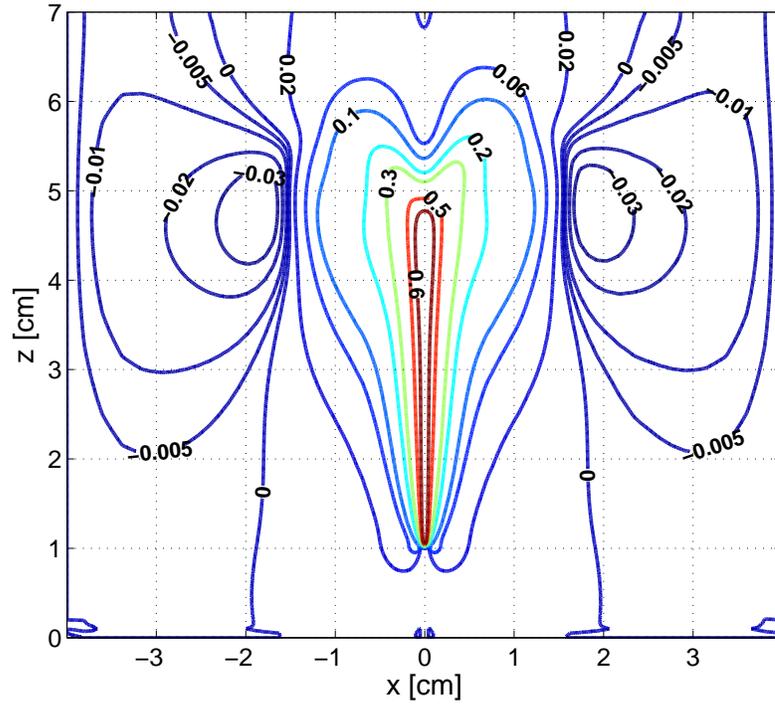
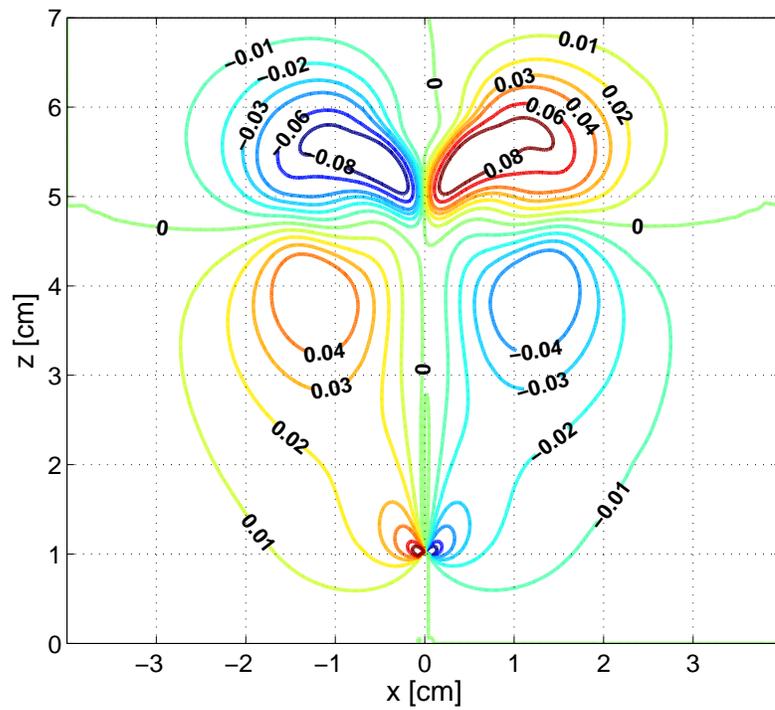
En las figuras 5.59, 5.60, 5.65, 5.66 y 5.56 se puede observar las curvas de nivel de V_z para la sección de corte X-Z obtenidas en $t = 39.5[s]$ para los thermals de $\tau = 2, 6, 12, 24[s]$ y para una pluma térmica respectivamente.

En las figuras 5.61, 5.62, 5.67, 5.68 y 5.57 se puede observar las curvas de nivel de V_x para la sección de corte X-Z obtenidas en $t = 39.5[s]$ para los thermals de $\tau = 2, 6, 12, 24[s]$ y para una pluma térmica respectivamente.

En las figuras 5.63, 5.64, 5.69, 5.70 y 5.58 se puede observar las curvas de nivel para la magnitud de la vorticidad (ω) obtenidas en $t = 39.5[s]$ para los thermals de $\tau = 2, 6, 12, 24[s]$ y para una pluma térmica respectivamente.

Respecto de las curvas de nivel visibles en las figuras desde la figura 5.56 hasta la figura vort-LC-tau24-t40 se puede observar que:

- Se observa una clara dependencia entre el tamaño del thermal (o pluma en su defecto) y el tiempo de inyección de energía. Mientras mayor sea la energía entregada mayor será la boyancia inducida lo que radica en un aumento del campo de velocidades, tanto en magnitud como en espacio abarcado.
- Se observa que tanto las curvas de nivel de V_z como la de V_x presentan cotas en donde la velocidad respectiva es cero. En las curvas de nivel de V_z exhiben 2 cotas verticales mientras que los contornos de V_x , una horizontal y otra vertical. La cota vertical en V_x implica que en ese sector la velocidad es exclusivamente ascendente lo que es razonable dado que coincide con el eje central de la pluma. Si observamos la cota horizontal de V_x y la vertical de V_z visualizamos un punto en donde ambas cotas interceptan. Este es un punto de interés puesto que ambas velocidades son nulas, es decir, se encuentran en el centro de rotación. Este, puede ser observado más fácilmente en las curvas de nivel de la magnitud de la vorticidad.
- Las magnitudes obtenidas para la vorticidad son bastante pequeñas en comparación con las generadas en otros fenómenos de interés (vortices en perfiles alares, anillos de vorticidad, etc.).

Figura 5.56: Curvas de Nivel de V_z [cm/s] para una pluma térmica en plano $y = 0$ [cm].Figura 5.57: Curvas de Nivel de V_x [cm/s] para una pluma térmica en plano $y = 0$ [cm].

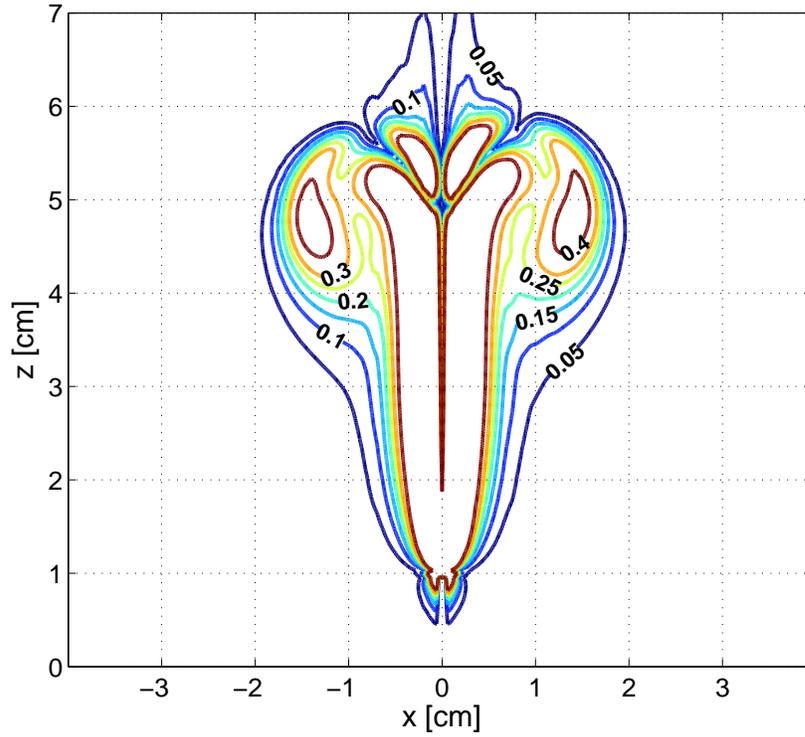


Figura 5.58: Curvas de Nivel de $\omega[1/s]$ para una pluma térmica en plano $y = 0[cm]$.

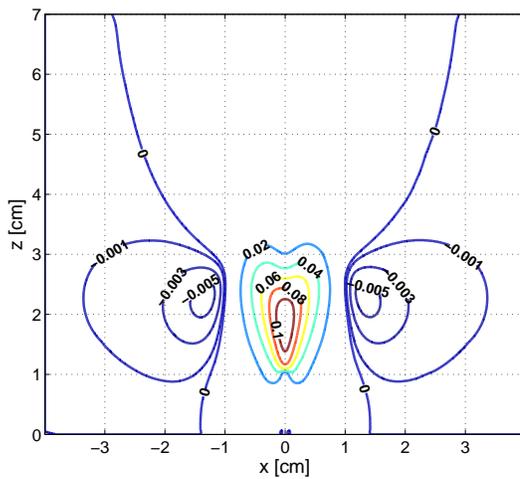


Figura 5.59: Curvas de Nivel de $V_z[cm/s]$ para $\tau = 2[s]$ en plano $y = 0[cm]$.

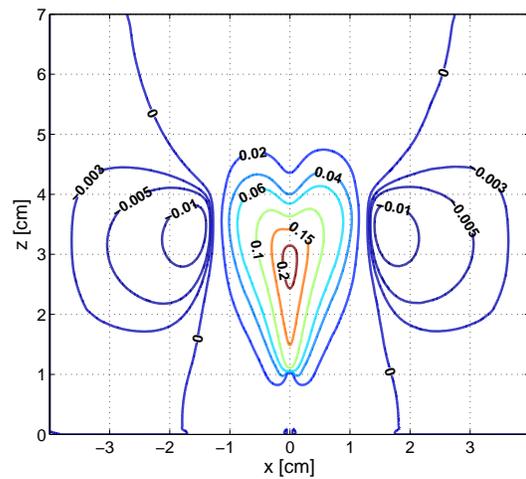


Figura 5.60: Curvas de Nivel de $V_z[cm/s]$ para $\tau = 6[s]$ en plano $y = 0[cm]$.

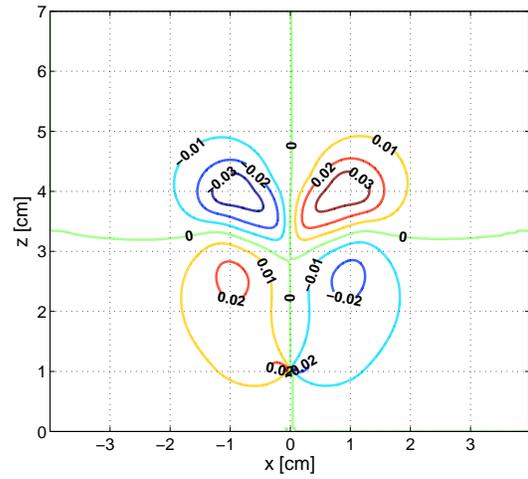
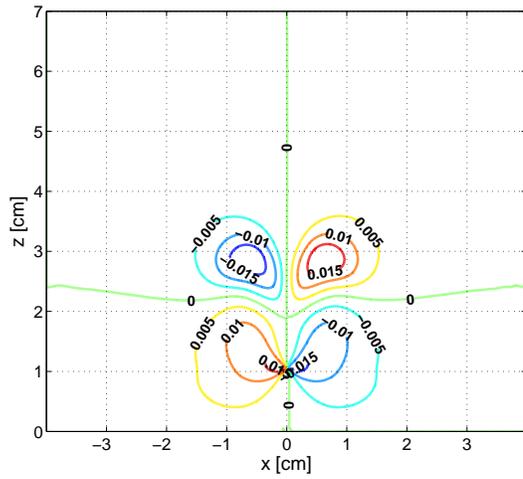


Figura 5.61: Curvas de Nivel de V_x [cm/s] para $\tau = 2$ [s] en plano $y = 0$ [cm].

Figura 5.62: Curvas de Nivel de V_x [cm/s] para $\tau = 6$ [s] en plano $y = 0$ [cm].

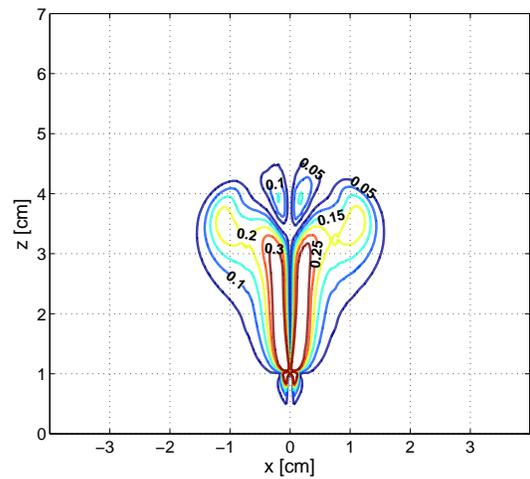
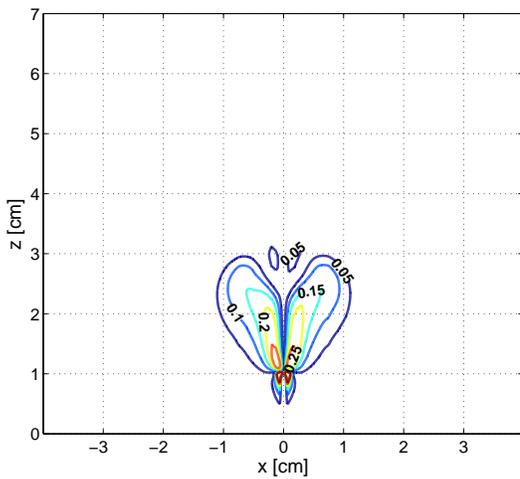


Figura 5.63: Curvas de Nivel de ω [1/s] para $\tau = 2$ [s] en plano $y = 0$ [cm].

Figura 5.64: Curvas de Nivel de ω [1/s] para $\tau = 6$ [s] en plano $y = 0$ [cm].

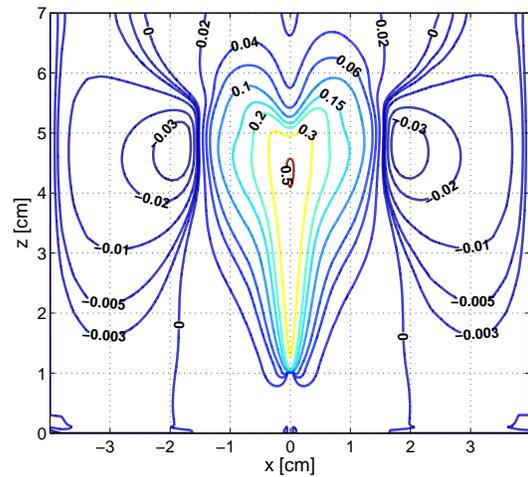
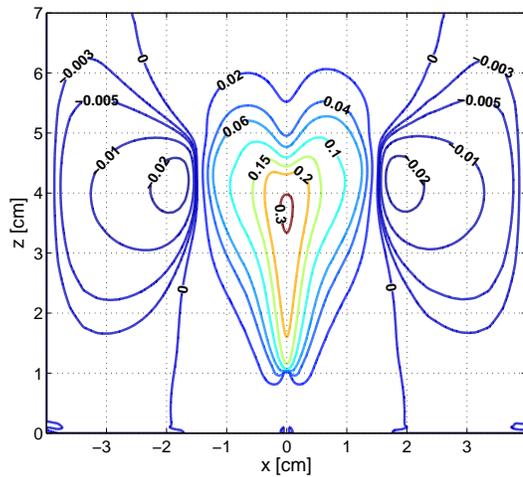


Figura 5.65: Curvas de Nivel de V_z [cm/s] para $\tau = 12$ [s] en plano $y = 0$ [cm].

Figura 5.66: Curvas de Nivel de V_z [cm/s] para $\tau = 24$ [s] en plano $y = 0$ [cm].

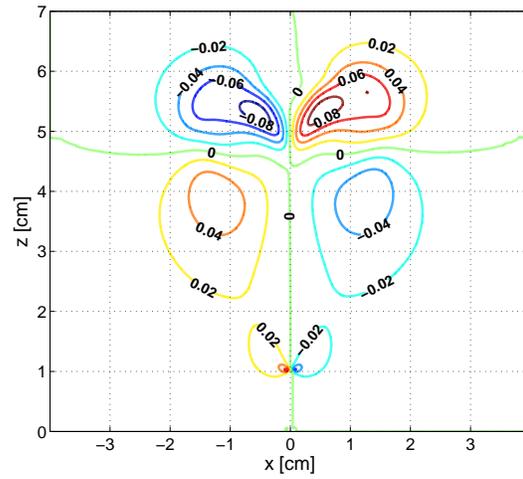
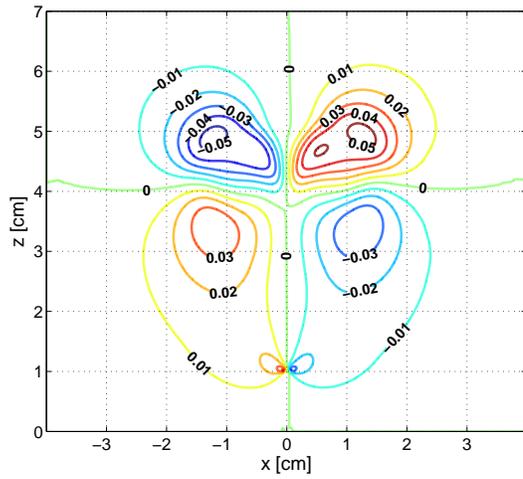


Figura 5.67: Curvas de Nivel de $V_x [cm/s]$ para $\tau = 12[s]$ en plano $y = 0[cm]$.
 Figura 5.68: Curvas de Nivel de $V_x [cm/s]$ para $\tau = 24[s]$ en plano $y = 0[cm]$.

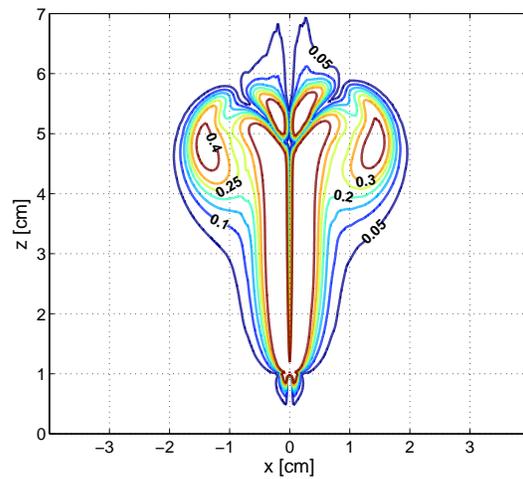
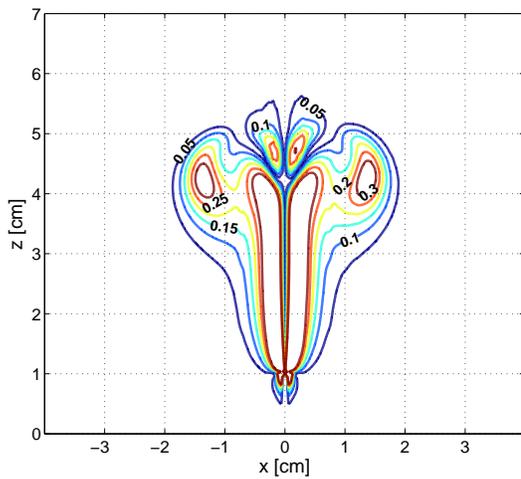


Figura 5.69: Curvas de Nivel de $\omega [1/s]$ para $\tau = 12[s]$ en plano $y = 0[cm]$.
 Figura 5.70: Curvas de Nivel de $\omega [1/s]$ para $\tau = 24[s]$ en plano $y = 0[cm]$.

Capítulo 6

Simulación Turbulenta

Para la simulación turbulenta se utilizó la geometría número 2. Como se observa en la tabla 5.1 los casos turbulentos simulados fueron aquellos con una inyección de potencia de 3 y 10[w].

6.1. Axisimetría y Establecimiento de la Solución

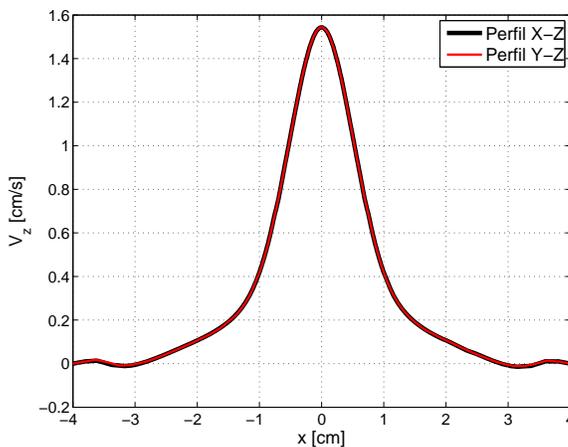


Figura 6.1: Comparación perfil de V_z para $z = 3$ [cm].

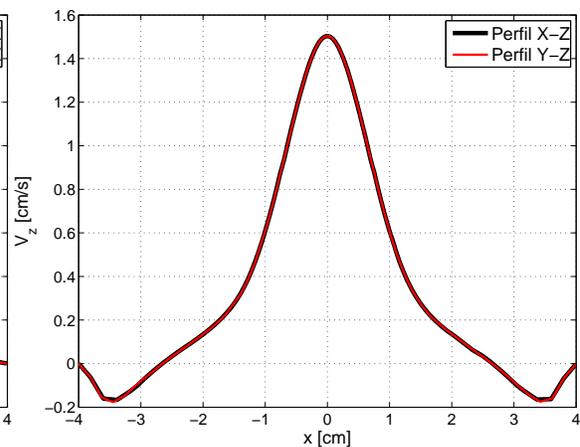


Figura 6.2: Comparación perfil de V_z para $z = 4$ [cm].

Desde la figura 6.1 hasta la 6.4 se puede observar la comparación de los perfiles de V_z según el plano de corte X-Z y Y-Z. La comparación entre los perfiles permitiría verificar si se cumple la axisimetría lo que simplificaría considerablemente el estudio. Al igual que en el caso laminar se logra observar una evidente axisimetría. Al igual que en el caso laminar, se procedió a utilizar el plano de corte X-Z como un plano genérico para mostrar los resultados.

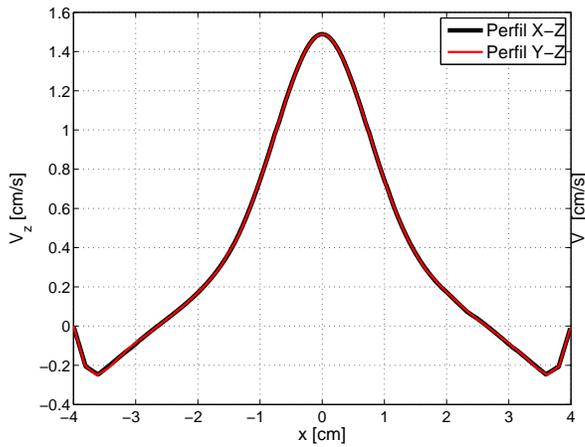


Figura 6.3: Comparación perfil de V_z en función de x para $(y, z) = (0.5) [cm]$.

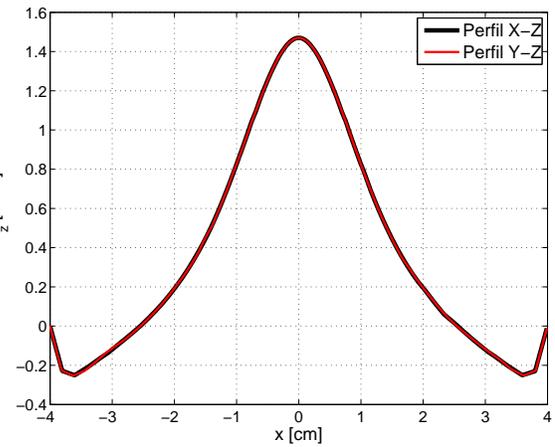


Figura 6.4: Comparación perfil de V_z en función de x para $(y, z) = (0.6) [cm]$.

En las figuras 6.5 y 6.6 puede observarse la diferencia más grande existente, para el campo de velocidades y temperaturas, entre una solución y otra 1[s] después. Se observa que la temperatura reduce las diferencias más rápidamente que en el caso laminar, a los 100[s] alcanza un valor del orden de los $8 \cdot 10^{-3} [K]$ con lo que podría considerarse como una solución estacionaria. Para el campo de velocidades se observa que las curvas son más suaves que las observadas en el caso laminar (figura 5.8). El campo de velocidades a los 100[s] exhibe variaciones del orden $7.9 \cdot 10^{-3} [\frac{cm}{s}]$ para V_z y $2 \cdot 10^{-3} [\frac{cm}{s}]$ para V_x . Se aprecia que la variaciones son considerablemente menores que los valores promedios, por lo tanto, es prudente considerar la solución a los 100[s] como estacionaria.

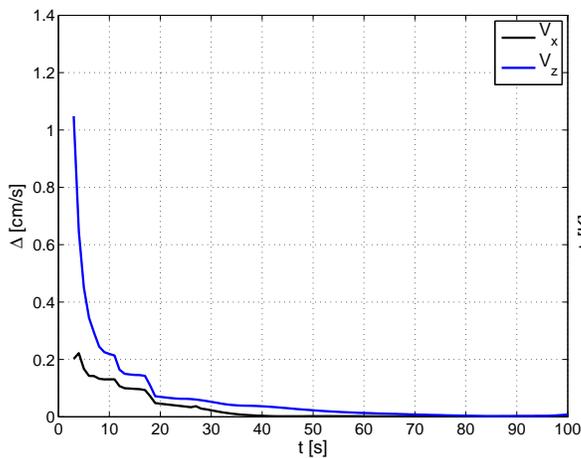


Figura 6.5: Variación entre las soluciones de V_x y V_z cada 1[s].

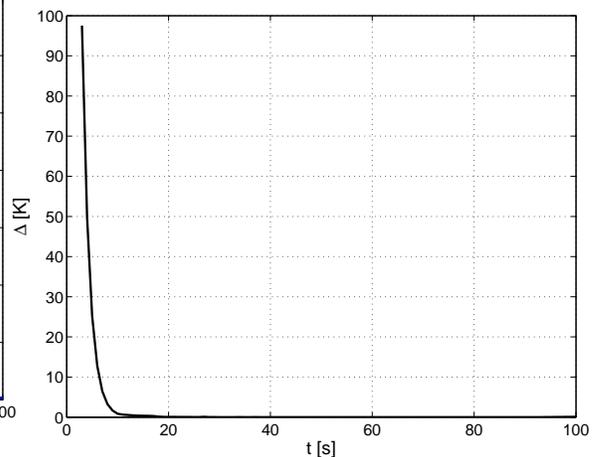


Figura 6.6: Variación de la solución de T cada 1[s].

6.2. Verificación de la Condición de Salida.

En la figura 6.7 se observa la variación de la intensidad turbulenta ($I\%$) a lo largo del eje principal de la pluma térmica. Cabe recordar que como condición de borde se impuso que el fluido que reingresaba al volumen de control, lo hacía con una intensidad turbulenta del 1%. Se observa que la I alcanza un valor de 0.33%, es decir, 1/3 del valor impuesto en la condición de borde. Esta diferencia indicaría que el modelo turbulento empleado no resuelve cabalmente una pluma térmica.

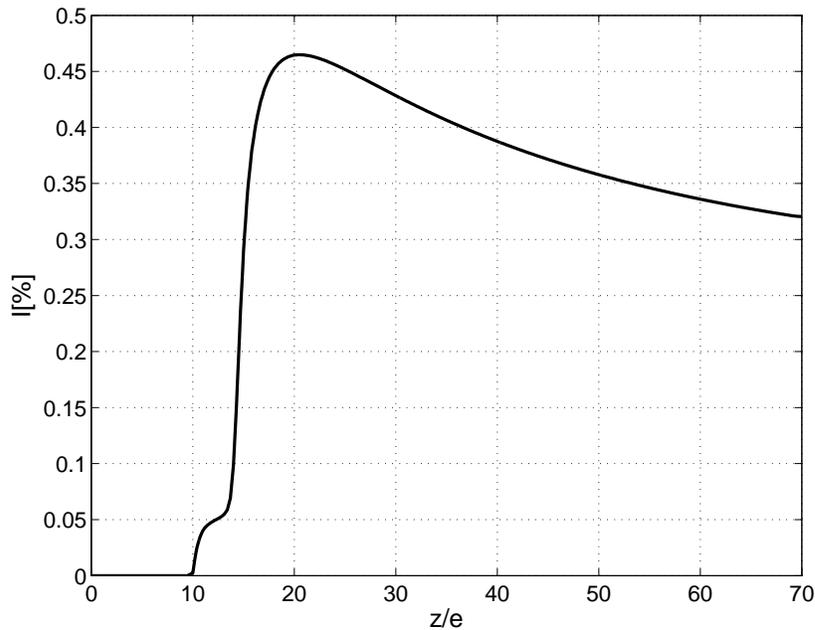


Figura 6.7: Intensidad turbulenta en función de z/e .

6.3. Disipación y Energía Cinética Turbulenta

Desde la imagen 6.8 hasta la 6.15 se pueden observar las variables asociadas con la turbulencia para una simulación con inyección de 3 y 10[w] de potencia. En las imágenes 6.8, 6.8, 6.12 y 6.14 se describe la evolución en el eje principal de la disipación y la energía cinética turbulenta. Mientras que en las imágenes 6.9, 6.11, 6.13 y 6.15 se muestran los perfiles, a la altura del peak en el eje principal, de las variables nombradas anteriormente.

Se puede observar una relación entre la magnitud de k y ε con la potencia térmica entregada. Al aumentar la potencia de 3[w] a 10[w] el peak de energía cinética varía de 0.108 a $0.325[\frac{cm^2}{s^2}]$ mientras que la disipación turbulenta aumenta en un orden de magnitud de 0.015 a $0.13[\frac{cm^2}{s^3}]$. También se observa que a mayor potencia entregada menor será la altura donde ocurra el peak de energía y disipación turbulenta. La altura del peak se

relaciona con la zona donde se desarrolla la turbulencia, luego es evidente que si la energía subministrada es mayor menor será la altura necesaria para el desarrollo de la turbulencia. Para $3[w]$ de potencia el peak se sitúa a los $2.5[cm]$ de altura mientras que a los $10[w]$ se ubica a los $2[cm]$. Se puede ver que bajo una misma potencia, la altura del peak de k y de ε coinciden. Es claro que tanto el perfil de k como el de ε presentan una forma similar a una función Gaussiana y que al aumentar la potencia se reduce el ancho de la campana. Se observa una peculiar depresión en el máximo del perfil $x-\varepsilon$ con $P = 10[w]$ que no se encuentra presente al trabajar con $P = 3[w]$.

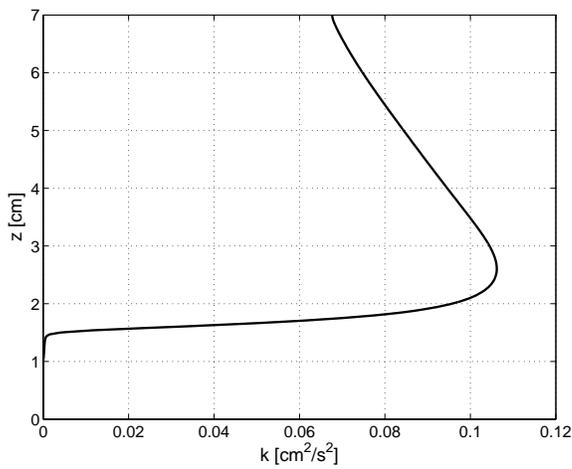


Figura 6.8: k en función de z para un flujo establecido en caso con $P = 3[watts]$.

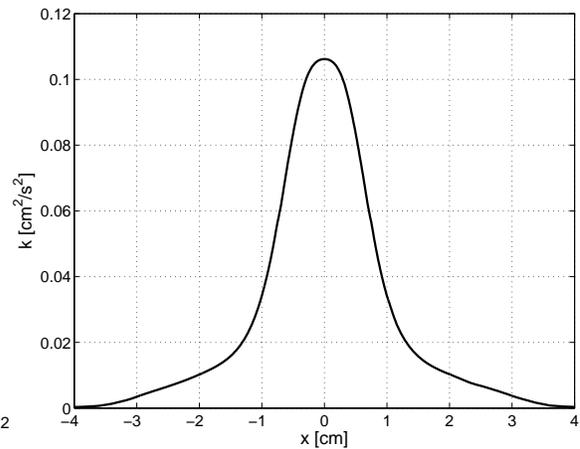


Figura 6.9: Perfil de k en función de x a la altura del peak observado en la figura 6.8 para caso con $P = 3[watts]$.

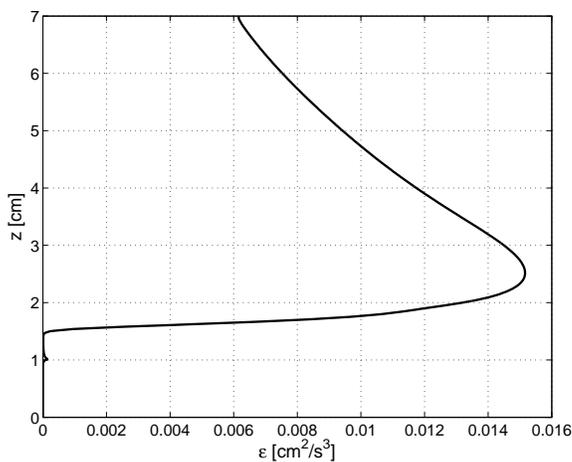


Figura 6.10: ε en función de z para un flujo establecido en caso con $P = 3[watts]$.

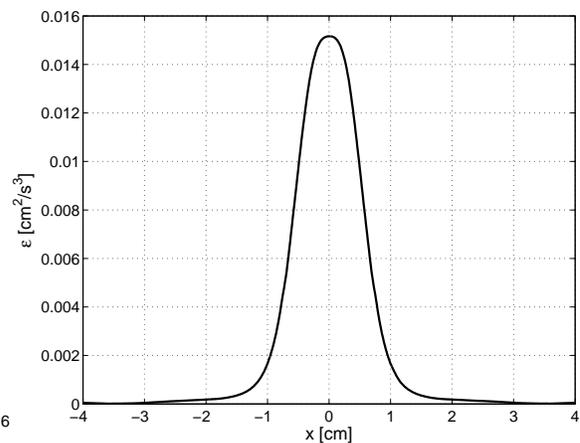


Figura 6.11: Perfil de ε en función de x a la altura del peak observado en la figura 6.10 para caso con $P = 3[watts]$.

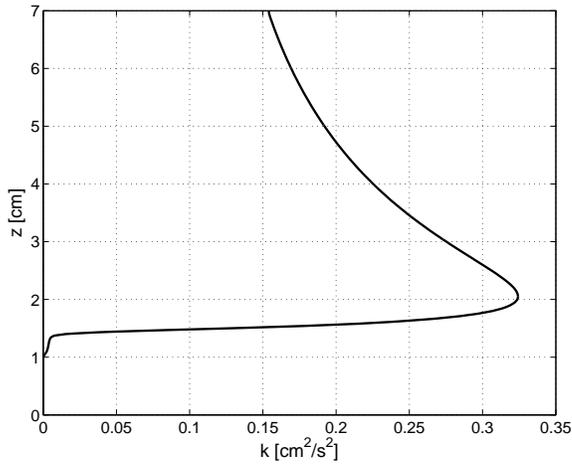


Figura 6.12: k en función de z para un flujo establecido en caso con $P = 10[\text{watt.s}]$.

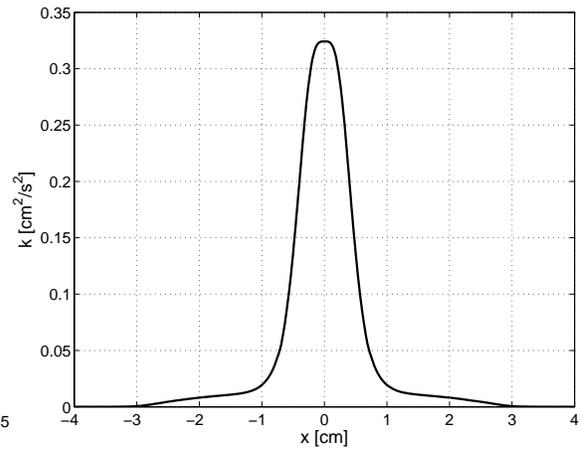


Figura 6.13: Perfil de k en función de x a la altura del peak observado en la figura 6.12 para caso con $P = 10[\text{watts}]$.

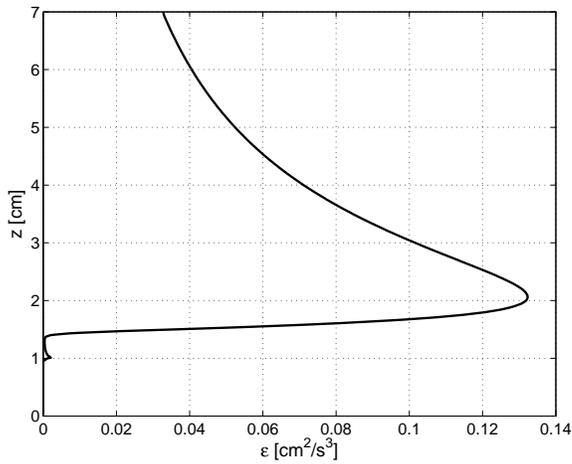


Figura 6.14: ϵ en función de z para un flujo establecido en caso con $P = 10[\text{watt.s}]$.

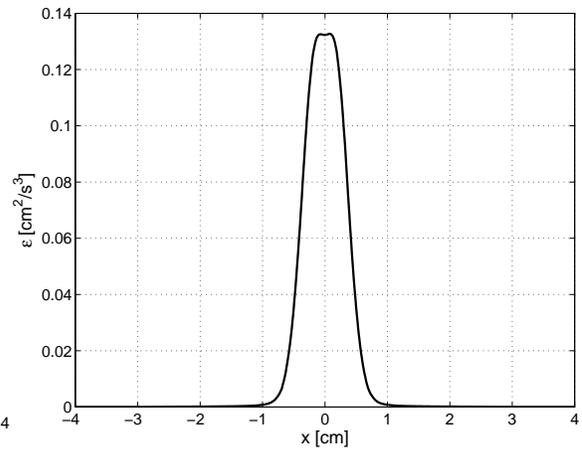


Figura 6.15: Perfil de ϵ en función de x a la altura del peak observado en la figura 6.14 para caso con $P = 10[\text{watts}]$.

6.4. Perfiles de Temperatura

Los perfiles de exceso de temperatura a distintas alturas pueden ser observados desde la figura 6.16 hasta la figura 6.20. Los datos fueron obtenidos para una simulación con $10[w]$ de potencia inyectada. Los perfiles de temperatura que se observan son muy similares a los obtenidos en el estudio laminar. La forma de campana de Gauss sigue siendo predominante en el tipo de perfil pero es fácil ver una mayor influencia de las condiciones de borde. La condición de temperatura impuesta en el muro actúa activamente distorsionando los perfiles. Es debido a lo anterior que el ajuste no produce una correlación exacta como la observada en la simulación laminar. No se aprecia una relación entre la correlación y la altura del perfil.

En el cuadro 6.1 se observan las constantes del ajuste gaussiano.

$z[cm]$	$a[K]$	$c[cm]$	$T_o[K]$
2	7.0395	0.5086	295.15
2.5	4.2823	0.6836	295.15
3	3.0920	0.8257	295.15
3.5	10	2.4236	295.15
4	10	1.9901	295.15
4.5	10	1.6831	295.15
5	1.4530	1.28	295.15
5.5	1.2692	1.393	295.15
6	1.1403	1.489	295.15
6.5	1.0393	1.542	295.15

Tabla 6.1: Constantes del ajuste gaussiano para perfiles de temperatura en régimen turbulento.

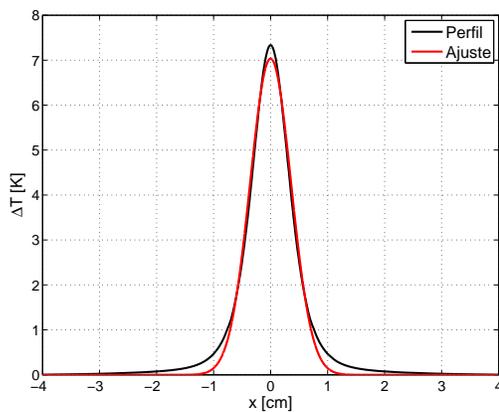


Figura 6.16: Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 2)[cm]$.

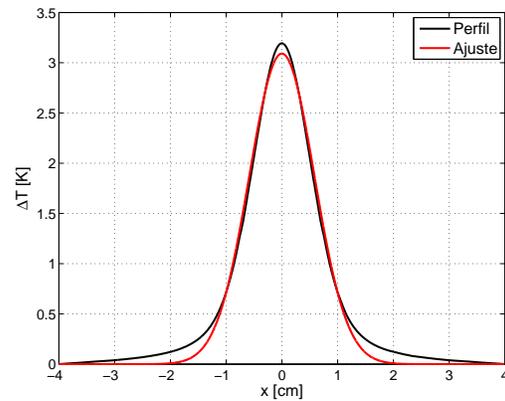


Figura 6.17: Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 3)[cm]$.

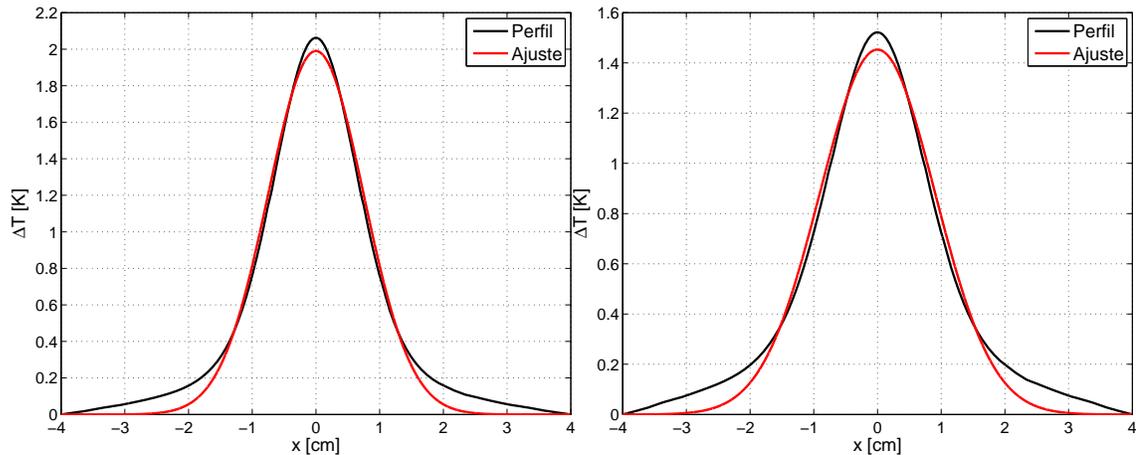


Figura 6.18: Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 4)[cm]$.

Figura 6.19: Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 5)[cm]$.

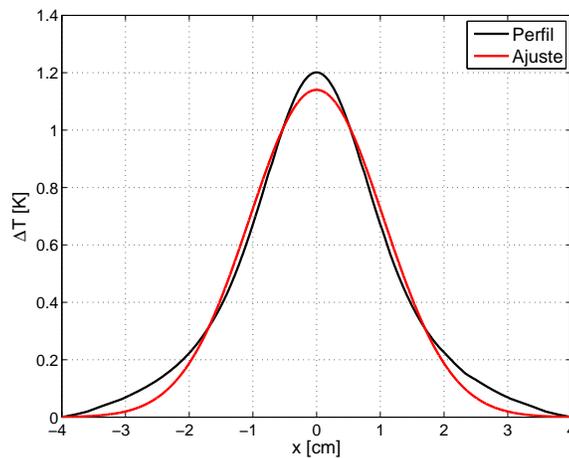


Figura 6.20: Perfil de T en función de x en estado estacionario para $(y, z) = (0, 6)[cm]$.

6.5. Perfiles de Velocidad

Los perfiles de velocidad vertical adimensionalizada (V_z/V_m) a distintas alturas pueden ser observados desde la figura 6.21 hasta la figura 6.25. Donde V_m es la velocidad en el eje de la pluma a la altura respectiva. Los datos fueron obtenidos para una simulación con $10[w]$ de potencia inyectada. Se observa que los perfiles de V_z/V_m sobre cierta altura exhiben una zona negativa. Esta zona, se relaciona con el fluido que se ve obligado a recircular para luego ingresar a la pluma o thermal en cuestión. El ajuste gaussiano que se observa, se centró principalmente en demostrar que la campana positiva se asemejaba a una forma en particular. El perfil que más se asemejó a una campana de Gauss fue el obtenido a $z = 6[cm]$ de altura.

En el cuadro 6.2 se observan las constantes del ajuste gaussiano.

$z[cm]$	a	$c[cm]$	$V_m[\frac{cm}{s}]$
2	0.9336	0.5829	1.75
2.5	0.9702	0.7269	1.6
3	0.951	0.9191	1.54
3.5	0.9581	1.028	1.52
4	0.9626	1.123	1.5
4.5	0.9669	1.204	1.5
5	0.972	1.27	1.48
5.5	0.9785	1.319	1.48
6	0.9863	1.351	1.47
6.5	0.9953	1.367	1.46

Tabla 6.2: Constantes del ajuste gaussiano para perfiles de velocidad en régimen turbulento.

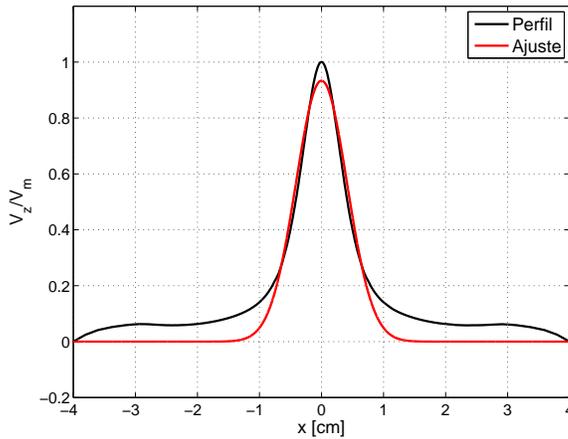


Figura 6.21: Perfil de V_z en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,2)[cm]$.

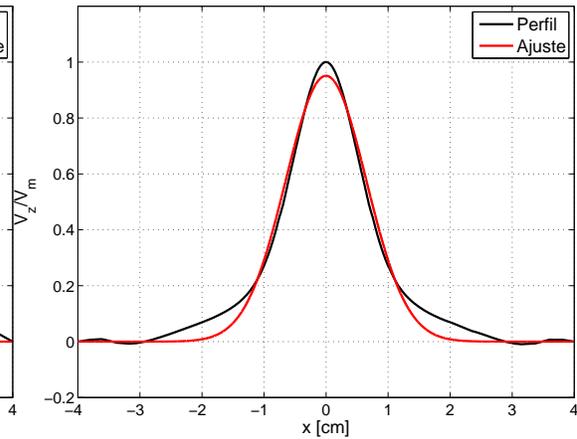


Figura 6.22: Perfil de V_z en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,3)[cm]$.

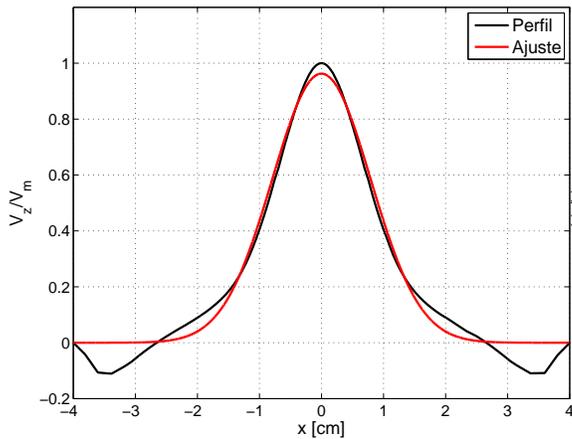


Figura 6.23: Perfil de V_z en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,4)$ [cm].

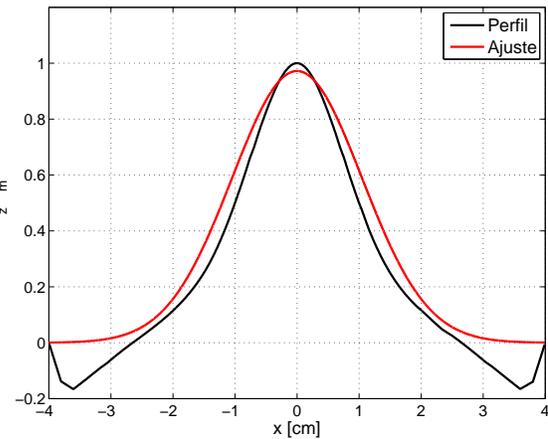


Figura 6.24: Perfil de V_z en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,5)$ [cm].

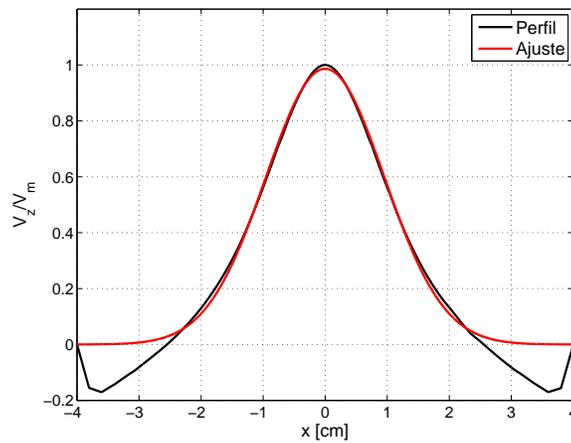


Figura 6.25: Perfil de V_z en función de x en estado estacionario para $(y,z) = (0,6)$ [cm].

6.6. Cinemática del Núcleo

En la figura 6.26 se observa la posición del núcleo de la pluma en el tiempo para simulaciones con $P = 0.25$, 3 y 10 [w]. Para lo anterior se utilizó la estrategia explicada en la imagen 3.14. Es evidente que una inyección de 0.25 [w] no es suficiente para generar un movimiento considerable. Se observa que bajo una inyección de 3 [w], la velocidad de la pluma se ve severamente disminuida al alcanzar altura e incluso se observa una leve asíntota en el desplazamiento. Esto indicaría que probablemente la pluma se degradaría antes de alcanzar el límite superior del volumen de estudio. Se aprecia que la pluma con inyección de 10 [w] alcanza satisfactoriamente la altura límite. Sin embargo se puede ver una depresión extraña entre los 30 y 50 [s].

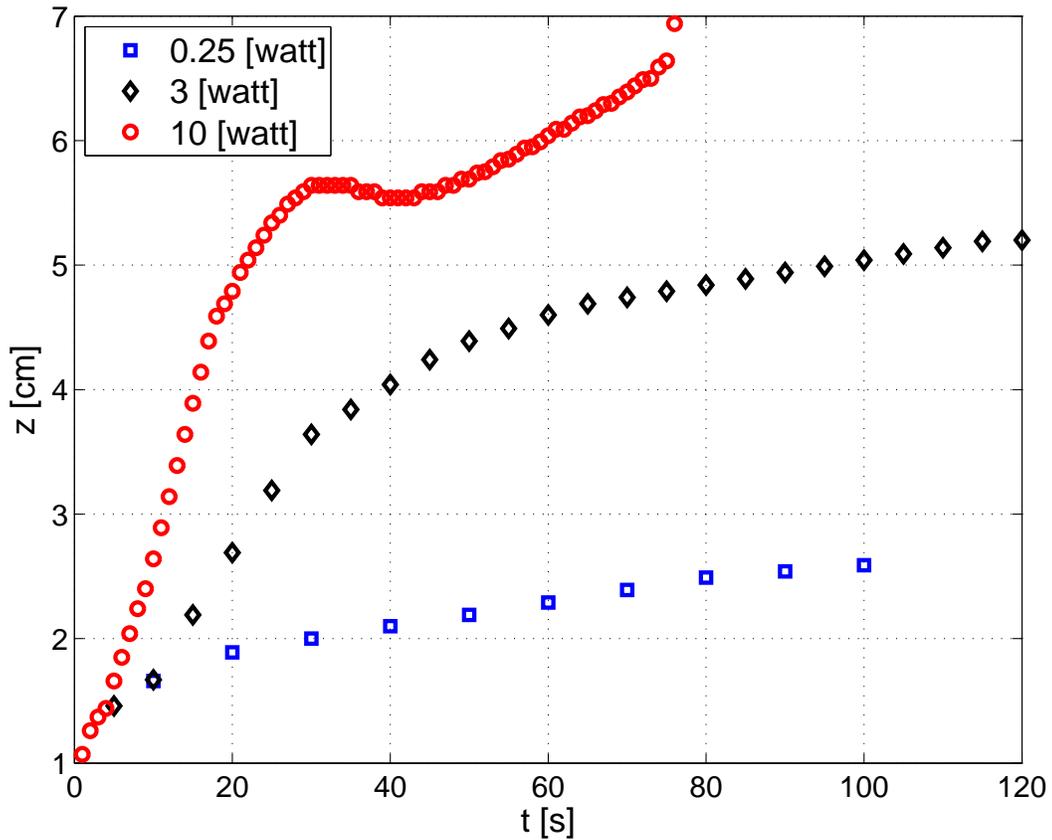


Figura 6.26: Posición del núcleo en el tiempo.

6.7. Escalas Espaciales Térmica y Cinemática

La bibliografía propone que existe una relación lineal entre el ancho de la campana de velocidad y la altura, así como también entre el ancho de la campana de temperatura y el ancho de la campana de velocidad [9]. Estas dimensiones se encuentran detalladas en la figura 6.27. Esta relación puede evidenciarse en las figuras 6.28 y 6.29.

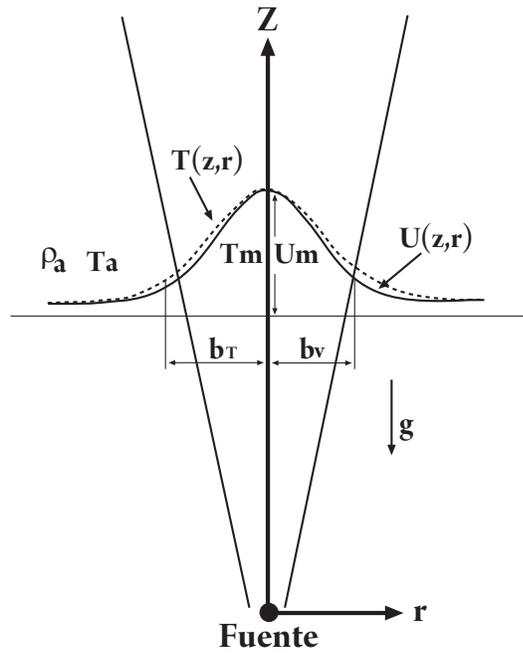


Figura 6.27: Esquema del ancho térmico y cinemático de la pluma.

En la figura 6.28, los datos se correlan mediante la recta:

$$b_V = 0.1725 \cdot z + 0.3559 \quad (6.1)$$

Y en la figura 6.29, son correlados por:

$$b_T = 1.257 \cdot b_V - 0.2799 \quad (6.2)$$

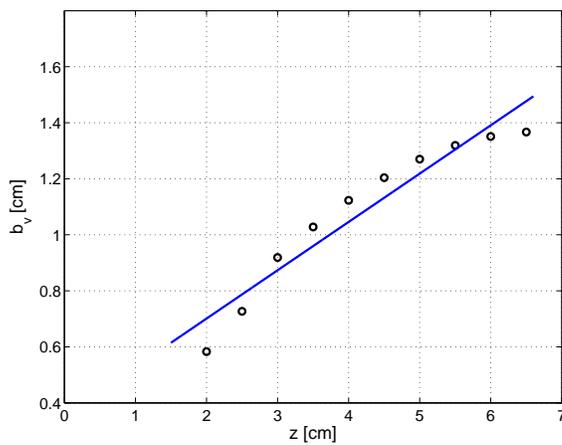


Figura 6.28: b_V vs z .

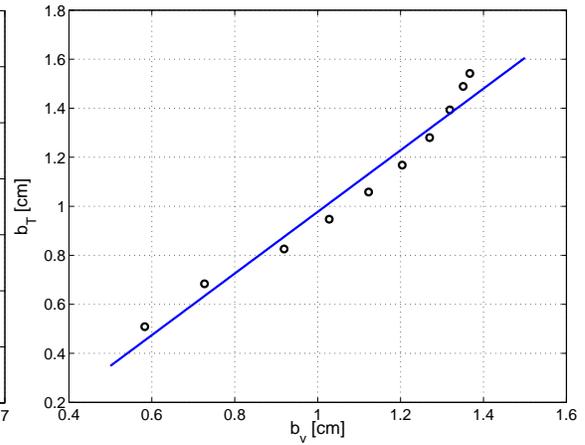


Figura 6.29: b_T vs b_V .

Capítulo 7

Conclusiones

- La pluma térmica laminar alcanzó un régimen estacionario en los 90 y 100[s] de iniciada la inyección.
- Se verificó que bajo un régimen laminar, existen signos de axisimetría entre los perfiles. Esto implica que el problema se podría resolver bidimensionalmente, imponiendo condiciones axisimétricas, con lo que lograría reducir tiempos de calculo o incluso resolver para escalas mayores. El inconveniente se centraría en la forma del electrodo, ya que estaría obligado a tener una sección circular, siendo que en este trabajo se utilizó uno con sección cuadrada.
- El estudio térmico de la pluma fue satisfactorio. Los perfiles obtenidos tienen forma de campana Gauss como lo sugería la teoría. Al compararlos con los resultados teóricos obtenidos por T. Fujii [14], a través de técnicas de similitud, se encontró que eran coincidentes con los suyos. Finalmente se obtuvo una expresión analítica que describe la evolución de los perfiles de temperatura en función de la coordenada vertical y radial.
- Se encontró que las curvas del número de Nusselt para los thermals presentan un salto abrupto en un tiempo dado. Se presume, debido a lo observado en el monitoreo de las temperaturas, que estas perturbaciones se encuentran asociadas al momento en que se desconecta la vorticidad asociada a la pluma, de la vorticidad asociada al electrodo. Sin embargo, al observar los isoncontornos de vorticidad la suposición anterior no pudo ser confirmada. Esto debido a que solo para ciertos τ el tiempo de la perturbación coincidía con el tiempo de desligamiento del thermal.
- Respecto a la cinemática, se observa que el criterio utilizado para localizar al núcleo de la pluma arrojó resultados razonables. Con mayor tiempo de iteración se hubiera podido observar el límite asintótico de los núcleo de los thermals. Se observa que la pluma se desplaza con una velocidad absoluta constante. Las velocidades relativas al núcleo coinciden en muchos de los rasgos descritos por Shlien [3].

- Se verificó que, a través de las curvas de nivel, es posible ubicar el centro de rotación de forma más precisa que observando las curvas de nivel del módulo de la vorticidad. También permiten obtener una buena perspectiva del tamaño y de las magnitudes del fenómeno.
- En la se observó que un régimen estacionario se alcanza aproximadamente entre los 70 y 80[s]. También se destaca axisimetría de los perfiles. Este tipo de características no son propias de fenómenos turbulentos por lo que deberían re estudiarse con cuidado.
- Las magnitudes de energía cinética turbulenta y disipación turbulenta son muy pequeñas en comparación con otros fenómenos turbulentos. Esto podría provocar que las escalas del fenómeno fueran muy pequeñas, los que serían muy difíciles de observar. Por otro lado puede que la condición de recirculación turbulenta este subestimada, por lo que se debería considerar una intensidad turbulenta en la recirculación superior al 1%. Aumentar la potencia de inyección es una alternativa que se encuentra descartada debido a que, actualmente, en la punta del electrodo se alcanzan temperaturas cercanas a la de ebullición del mercurio.
- Al observar la variación de la intensidad turbulenta a lo largo del eje principal, es fácil ver que no se satisface la condición impuesta a la recirculación. Esto podría indicar que el modelo turbulento empleado no resuelve satisfactoriamente a la pluma térmica.
- Las escalas de temperatura y velocidad son mucho mayores que en el caso turbulento. Esto implica que las condiciones de borde juegan activamente perturbando al solución. Esto se puede observar en la irregularidad de los perfiles de T y V_z cercano a los muros.
- Se observa que se cumple la relación lineal entre la altura y el ancho de la campana térmica y cinemática.

Bibliografía

- [1] T. Hara, S. Kato. *Numerical Simulation of Thermal Plumes in Free Space Using the Standard $k - \epsilon$ Model*. Fire Safety Journal, Vol 39, pp. 105-129, 2004.
- [2] D. J. Shlien. *Some Laminar Thermal and Plume Experiments*. The Physics of Fluids, Vol 19, No. 8, pp. 1089-1098, 1976.
- [3] D. J. Shlien, D. W. Thompson. *Some Experiments on the Motion of an Isolated Laminar Thermal*. Journal of Fluid Mechanics, Vol 72, part. 1, pp. 35-47, 1975.
- [4] D.D. Gray, A. Giorgini. *The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases*. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 19, pp. 545-551, 1976.
- [5] J. T. Lyu, X. F. Peng, B. X. Wang. *Variable-Property Effect on Liquid Flow and Heat Transfer in Microchannels*. Chemical Engineering Journal, Vol 141, pp. 346-353, 2008.
- [6] Adrian Bejan. *Heat Transfer*. John Wiley & Sons, 1993.
- [7] Suhas V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Science*. Taylor & Francis, Estados Unidos, 1980.
- [8] Z.Y. Zhong, K.T. Yang, J.R. Lloyd. *Variable Property Effects in Laminar Natural Convection in a Square Enclosure*. Journal of Heat Transfer, Vol. 107, pp. 133-138, 1985.
- [9] Joseph H. W. Lee, Vincent H. Chu. *Turbulent Jets and Plumes - A Lagrangian Approach*. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [10] E. J. List. *Turbulent Jets and Plumes*. Anu. Rev. Fluid Mech., Vol. 14, pp. 189-212, 1982.
- [11] Valencia A. *Método de los volúmenes finitos.*, Apunte de curso ME67A-1 Mecánica de Fluidos Computacional, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Chile. 35 pp., 2007.
- [12] Morton, B. R. *Weak Thermal Vortex Rings.*, J. Fluid Mech., vol 9, pp. 107-118, 1960.
- [13] Maxworthy, T. *The Structure and Stability of Vortex Rings.*, J. Fluid Mech., vol 51, pp. 15-32, 1972.

- [14] T. Fujii. *Theory of Steady Laminar Natural Convection Above a Horizontal Line Source and Point Heat Source*. Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 6, pp. 597-606, 1963.
- [15] W.M. Kays. *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, 1966.
- [16] Benjamin Gebhart, Yogesh Jaluria, Roop L. Mahajan, Bahgat Sammakia. *Buoyancy-Induced Flows and Transport*, Textbook Edition, Taylor & Francis, 1988.
- [17] Fluent Inc. *FLUENT 6.3 Documentation*. Septiembre 2006

Apéndice A

Derivación de las relaciones propuestas

A.1. Derivación de la ecuaciones adimensionales

Se modelara el empuje inducido mediante una aproximación de Boussinesq, por lo tanto se tendrá que:

- El término de empuje en la ecuación de Navier-Stokes se representara según:

$$\rho g \approx \rho_o \beta (T - T_o) g \quad (\text{A.1})$$

- En todo otro momento la densidad se considerara constante y con valor ρ_o .

Se utilizarán las siguientes adimensionalizaciones:

- $\vec{V}^* = \vec{V} \cdot \frac{L}{\alpha}$
- $z^* = \frac{z}{L}$
- $t^* = t \cdot \frac{\alpha}{L^2}$
- $P^* = P \cdot \frac{L^2}{\rho_o \alpha^2}$
- $\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_c - T_\infty}$

A.1.1. Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad \left/ \cdot \frac{L}{\alpha} \cdot L \right. \quad (\text{A.2})$$

$$\rho_o \nabla \cdot \left(\vec{V} \cdot \frac{L}{\alpha} \right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot (\vec{V}^*) = 0 \quad (\text{A.4})$$

A.1.2. Ecuación de Navier-Stokes

$$\rho_o \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \left/ \cdot \left(\frac{L}{\alpha} \right)^2 \cdot L \right. \quad (\text{A.5})$$

$$\left(\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} \cdot \frac{L^2}{\alpha} + \vec{V}^* \cdot \nabla \vec{V}^* \right) = \beta (T - T_o) g \cdot \left(\frac{L^3}{\alpha^2} \right) - \frac{\nabla p}{\rho_o} \cdot \left(\frac{L^3}{\alpha^2} \right) + \frac{\mu \nabla^2 \vec{V}^*}{\rho_o} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\left(\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \vec{V}^* \cdot \nabla \vec{V}^* \right) = \beta (T - T_o) g \cdot \left(\frac{L^3}{\alpha^2} \right) \cdot \frac{v}{v} \cdot \frac{(T_c - T_\infty)}{(T_c - T_\infty)} - \nabla p^* + \mu \nabla^2 \vec{V}^* \cdot \left(\frac{v}{\alpha} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$\left(\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \vec{V}^* \cdot \nabla \vec{V}^* \right) = RaPr\theta - \nabla p^* + Pr \nabla^2 \vec{V}^* \quad (\text{A.8})$$

A.1.3. Ecuación de la Energía

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot k \nabla T + \beta T^* \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi + q''' \left/ \cdot \frac{1}{(T_c - T_\infty)} \cdot L^2 \right. \quad (\text{A.9})$$

Despreciando el término asociado a la presión, a la disipación viscosa y a la generación volumétrica, se obtiene:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \cdot L^2 + L \cdot \vec{V} \cdot \nabla \theta \right) = \frac{k}{\rho C_p} \nabla \cdot \nabla \theta \left/ \cdot \frac{1}{\alpha} \right. \quad (\text{A.10})$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + \vec{V}^* \cdot \nabla \theta \right) = \nabla \cdot \nabla \theta \quad (\text{A.11})$$

A.2. Derivación de la expresión adimensional para calcular el número de Nusselt

El flujo total de energía proveniente de un elemento de volumen es:

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p(T - T_\infty) \quad (\text{A.12})$$

Donde T es la temperatura del elemento de volumen y T_∞ es la temperatura de referencia. El flujo másico que fluye a través del elemento de volumen es:

$$\dot{m} = \rho A \frac{dz}{dt} \quad (\text{A.13})$$

Reemplazando A.13 en A.12 se obtiene:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \rho c_p V (T - T_\infty) \quad (\text{A.14})$$

Donde $\frac{\dot{Q}}{A}$ es el flujo de energía total por unidad de área q . De acuerdo con la ley de Newton, la energía transferida por convección será:

$$q_{conv} = h(T_c - T_\infty) \quad (\text{A.15})$$

Y por la ley de Fourier, la energía transferida por conducción:

$$q_{cond} = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{A.16})$$

Luego a través de un balance de flujos de energía en un elemento de volumen se tiene:

$$h(T_c - T_\infty) = \rho c_p V (T - T_\infty) - k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{A.17})$$

Se sabe que el número de Nusselt es de la forma:

$$Nu_z = \frac{hL}{k} \quad (\text{A.18})$$

Despejando h en la relación A.17 y reemplazándolo en A.18 se obtiene:

$$Nu_z = \frac{L}{k} \left(\rho c_p V (T - T_\infty) - k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{1}{(T_c - T_\infty)} \quad (\text{A.19})$$

Utilizando las siguientes adimensionalizaciones:

- $\vec{V}^* = \vec{V} \cdot \frac{L}{\alpha}$
- $z^* = \frac{z}{L}$
- $\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_c - T_\infty}$

Se obtiene la relación adimensional para el número de Nusselt:

$$Nu_z = V^* \theta - \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \quad (\text{A.20})$$

Apéndice B

Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent

En el menú “Define” en la opción “Materials” se debe seleccionar el fluido y el material respectivo. En la figura B.1 puede observarse como se selecciona al agua líquida como fluido mientras que en la figura B.2 se observa la selección del cobre como material del electrodo.

Luego en “Define” —> “Boundary Conditions” se deben explicitar las condiciones de borde. Esto puede observarse desde la figura B.3 hasta la figura B.7.

Las condiciones de borde “tip” y “tip-shadow”(figura B.4) corresponden a la cara superior del electrodo primero vista desde el electrodo y segundo desde el fluido colindante. Como se desea transferir energía a través de esta cara, en la zona de “Thermal Conditions” debe estar marcada la opción coupled. Las otras condiciones de borde (Desde la figura B.5 hasta la B.7) no deben setearse como acopladas, dado que se desea que el sólido interactúe con el fluido solamente por su cara superior.

En la condición de borde donde se desea inyectar la potencia térmica, es necesario definir una función UDF que indica de qué forma se realizará la inyección. En la figura B.5 es posible observar donde se debe ingresar la UDF.

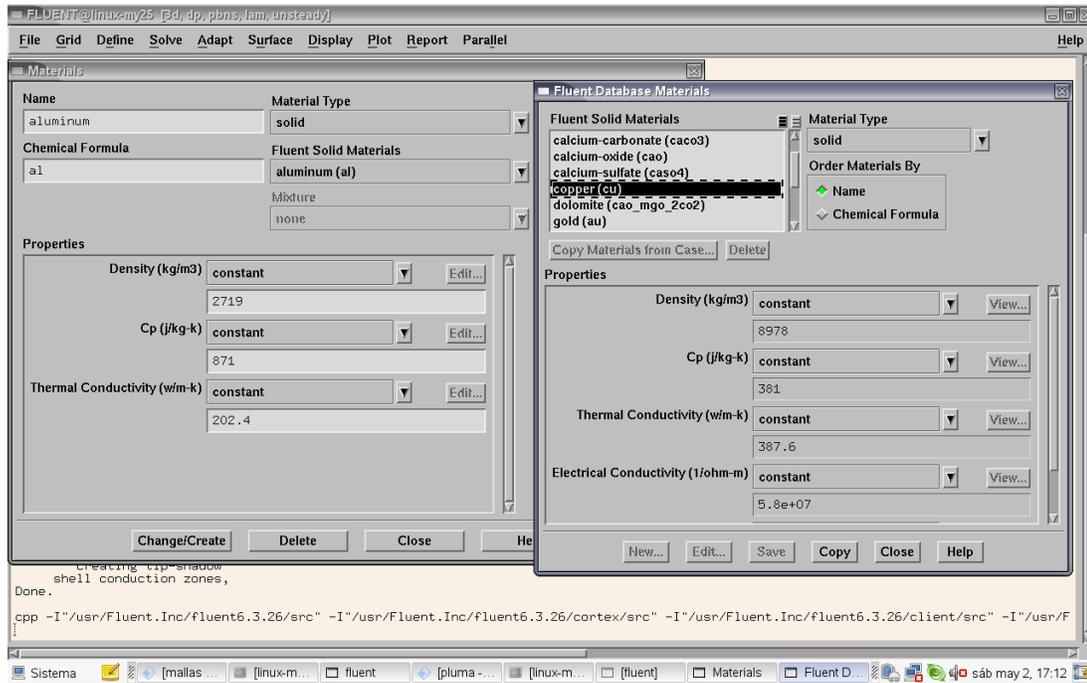


Figura B.1: Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 1.

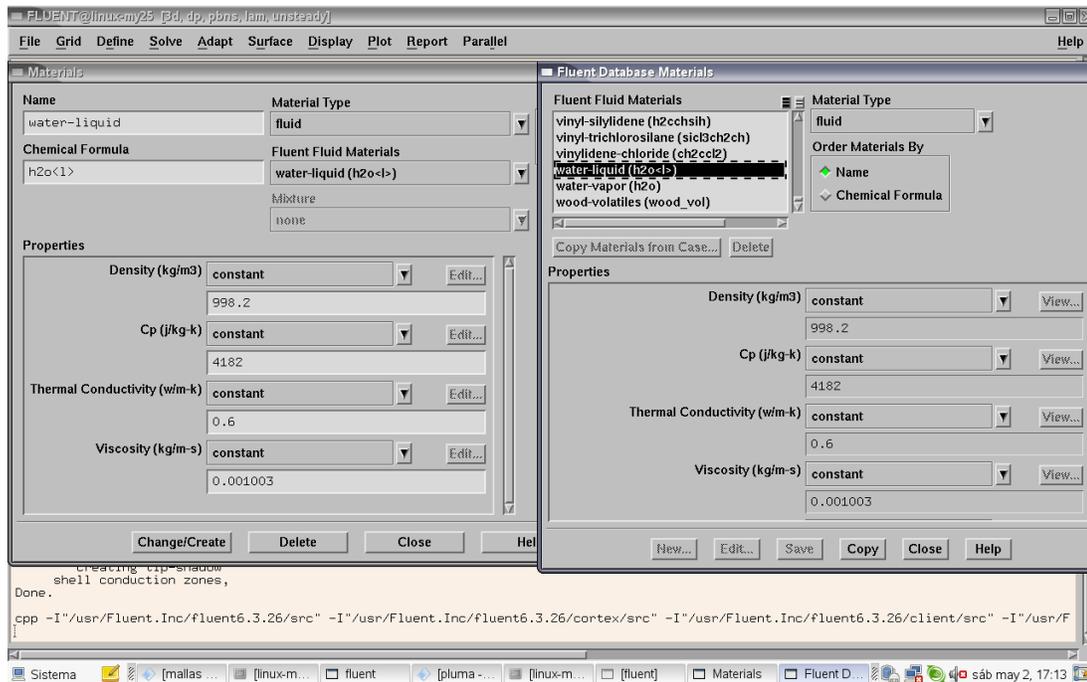


Figura B.2: Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 2.

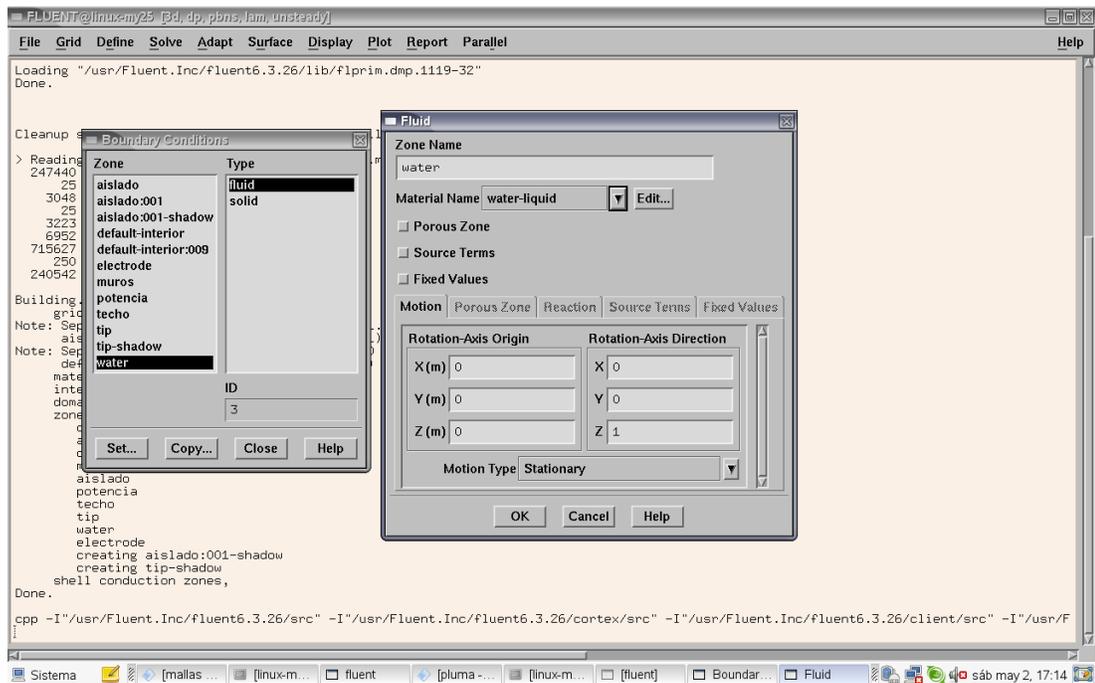


Figura B.3: Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 3.

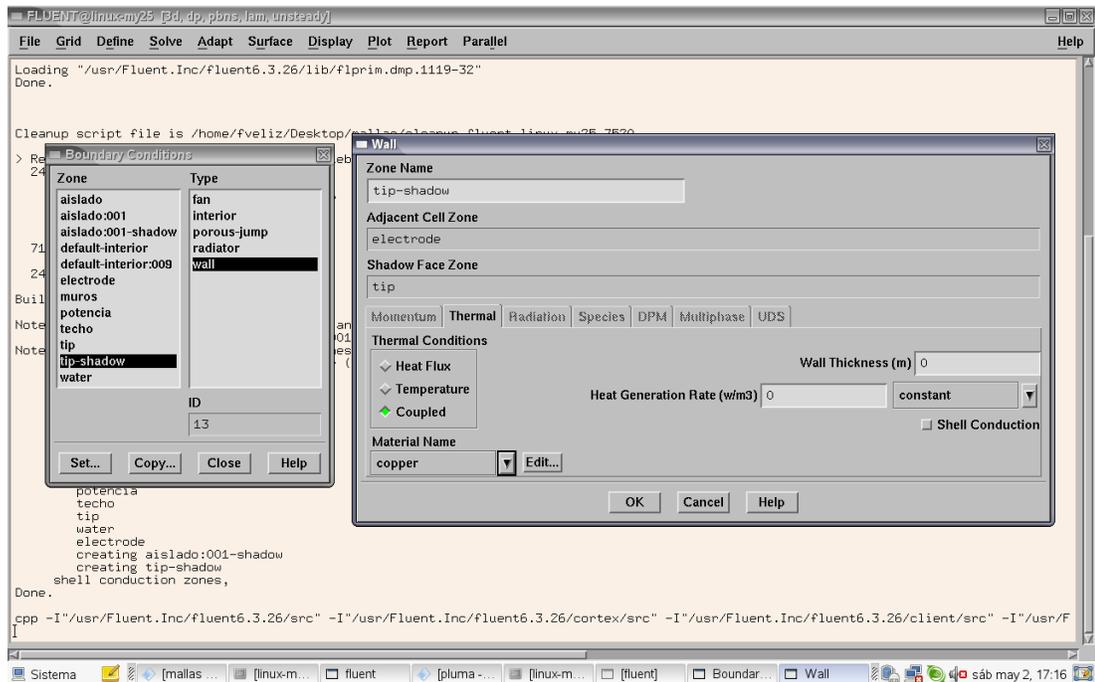


Figura B.4: Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 4.

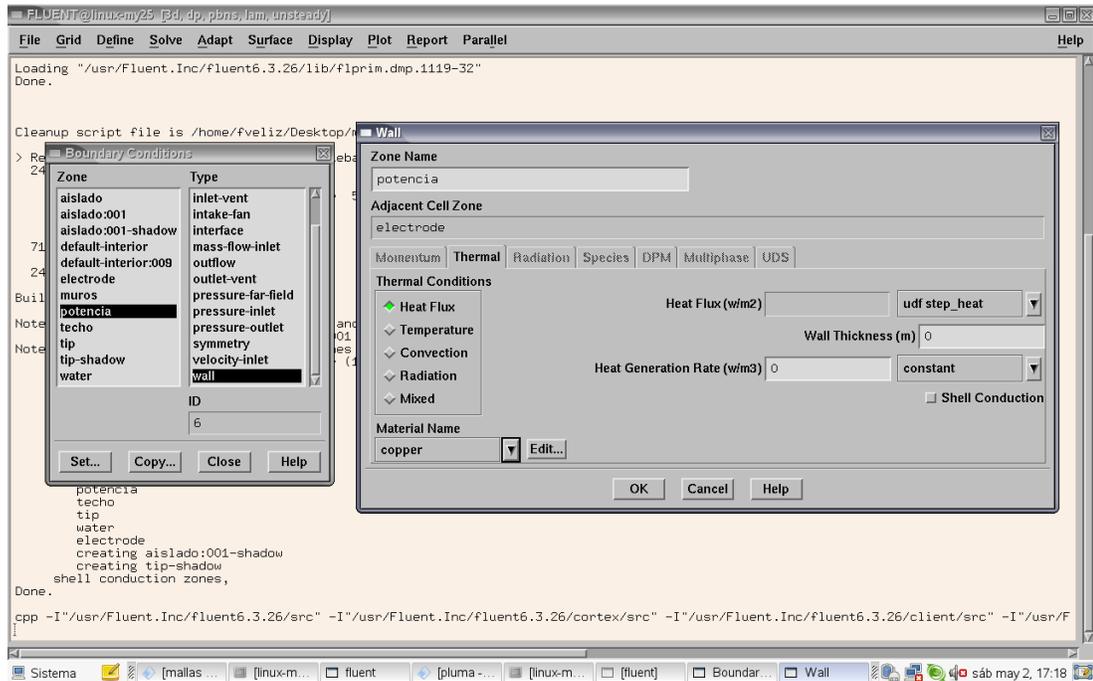


Figura B.5: Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 5.

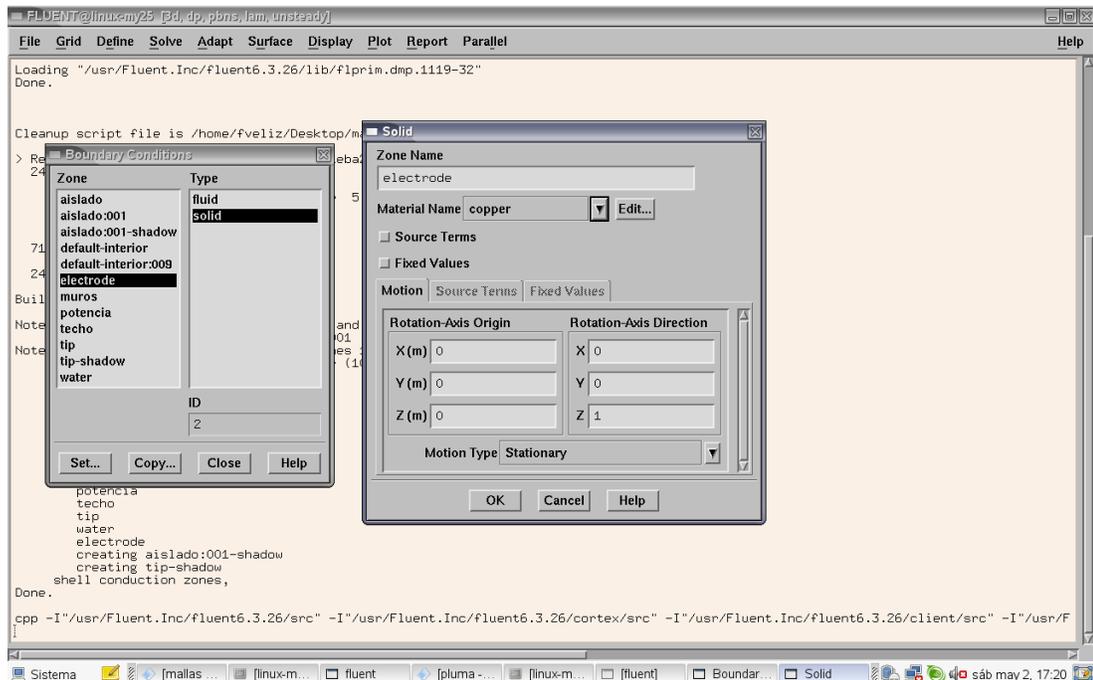


Figura B.6: Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 6.

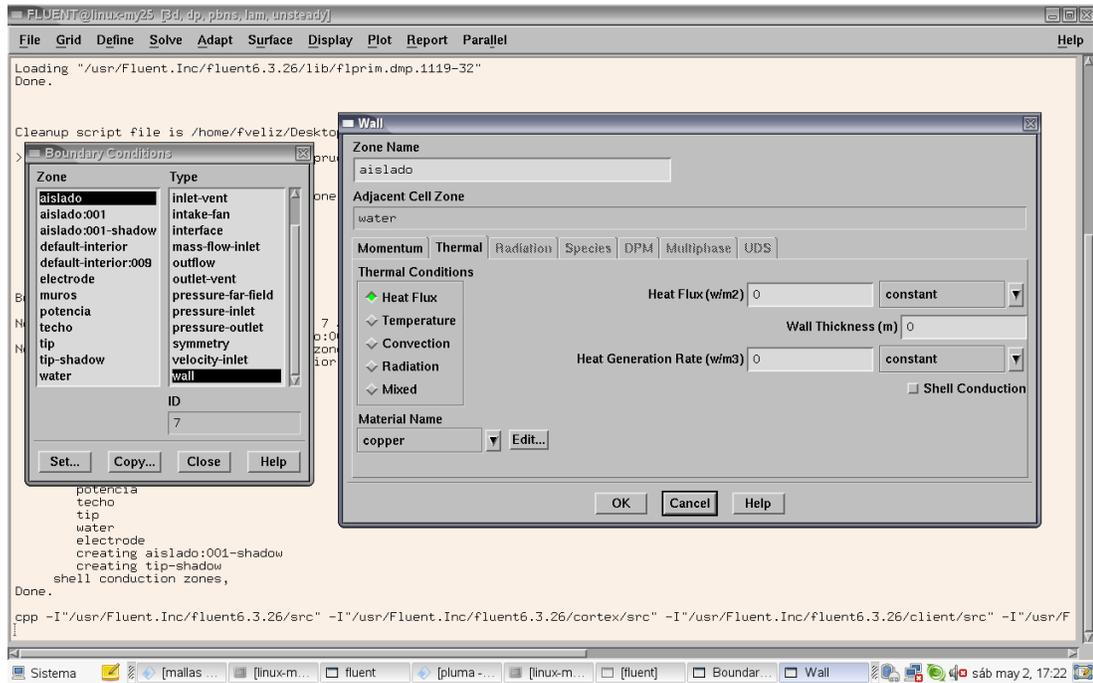


Figura B.7: Metodología para inyectar potencia térmica en Fluent, paso 7.