



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Civil

**ESTUDIO Y MODELAMIENTO DEL IMPACTO DEL PANDEO EN LA  
FATIGA DE BAJOS CICLOS EN BARRAS LONGITUDINALES PARA  
HORMIGÓN ARMADO**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL**

**CÉCILE LACAZE**

Profesor guía:

LEONARDO MASSONE SANCHEZ

Miembros de la comisión:

JUAN FELIPE BELTRÁN MORALES

RICARDO HERRERA MARDONES

Santiago de Chile

Enero 2009

RESUMEN DE LA MEMORIA  
PARA OPTAR AL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL  
POR: CECILE LACAZE  
FECHA: 26/12/08  
PROF. GUIA: Sr LEONARDO MASSONE SANCHEZ

## “ESTUDIO Y MODELAMIENTO DEL IMPACTO DEL PANDEO EN LA FATIGA DE BAJOS CICLOS EN BARRAS LONGITUDINALES PARA HORMIGÓN ARMADO”

En las zonas sísmicas, las columnas de hormigón armado, sometidas a cargas cíclicas, sufren desplazamientos laterales. Bajo cargas importantes, la respuesta de las columnas entra en el rango plástico, lo que induce daños importantes: descascaramiento, pandeo de las barras longitudinales, falla por fatiga de bajos ciclos. Durante sismos moderados o fuertes, la amplitud de deformación unitaria puede fácilmente sobrepasar el 2% favoreciendo el posible pandeo de las barras de refuerzo y producir ruptura a un número de ciclos menor a 100. De esta forma, no se puede despreciar esta causa potencial de falla, lo que motiva el estudio del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos.

El objetivo general del presente trabajo de título es determinar y cuantificar el impacto del pandeo en la falla por fatiga de bajos ciclos en barras de refuerzo. El estudio, de carácter teórico, pretende proveer información sobre el impacto del pandeo en la fatiga mediante un modelo numérico de plasticidad concentrada capaz de reproducir la respuesta cíclica de barras longitudinales de columnas apoyadas por estribos y susceptibles de pandearse.

La metodología desarrollada consiste, en una primera parte, en la validación del modelo numérico en cuanto a su comportamiento cíclico. Este modelo, originalmente, consideraba barras en compresión que se deformaban mayoritariamente por flexión. No obstante, en el caso de este estudio, las barras consideradas están sometidos a ciclos de carga tracción – compresión. A partir de los resultados experimentales disponibles en la literatura, el modelo ha sido modificado y mejorado en cuanto a la representación del comportamiento cíclico de la barra y del pandeo.

Una vez calibrado el modelo, la comparación de los resultados numéricos con resultados experimentales, disponibles en la literatura, permitió determinar la importancia del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos. Este análisis se basó en distintos parámetros, tales como: la amplitud de deformación, el diámetro de la barra, y la calidad del acero. La razón entre la longitud de la barra y el diámetro se fijó en 6 (seis), siendo consistente con el planteamiento experimental. El modelo analítico revela que esta relación de aspecto puede inducir pandeo. El pandeo al aumentar las tensiones al nivel de las rótulas plásticas, genera degradación de la capacidad global de la barra, lo que es representado por el modelo, mientras que la degradación de la capacidad observada en los ensayos experimentales incluye tanto el posible efecto del pandeo como el de la fatiga.

Así, al estudiar el porcentaje relativo de pérdida de la capacidad global de barra por pandeo (analítica) respecto de la pérdida de capacidad de la barra observado en la falla por fatiga de bajo ciclo (experimental), se pudo cuantificar, analíticamente, el efecto del pandeo en la fatiga. Según los resultados obtenidos, al aumentar la amplitud de deformación y mejorar la calidad del acero, el impacto del pandeo en la fatiga tiende aparentemente a ser menor. Comúnmente esta degradación corresponde a un 30-60% a bajas amplitudes de deformación y a un 10-30% a altas amplitudes de deformación.

## ÍNDICE DE CONTENIDO

<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
1.1. INTRODUCCIÓN .....	1
1.2. OBJETIVOS GENERALES Y ESPECÍFICOS.....	2
1.3. ALCANCES .....	2
<b>2. ANTECEDENTES GENERALES .....</b>	<b>4</b>
2.1. FATIGA DE MATERIALES.....	4
2.1.1. Fatiga de bajos ciclos y fatiga de altos ciclos.....	4
2.1.2. Fatiga de altos ciclos.....	6
2.1.3. Fatiga de bajos ciclos .....	6
2.2. ENSAYOS EXPERIMENTALES: PANDEO INELÁSTICO EN BARRAS DE REFUERZO.....	6
2.3. ENSAYOS EXPERIMENTALES: FATIGA DE BAJOS CICLOS .....	8
2.4. MODELOS ANALÍTICOS .....	12
2.4.1. Modelos basados en las deformaciones .....	12
2.4.2. Modelos basados en la energía .....	15
<b>3. MODELO DE RÓTULAS PLÁSTICAS DEL PANDEO DE BARRAS LONGITUDINALES</b>	
<b>16</b>	
3.1. ACERO: MODELACIÓN DEL COMPORTAMIENTO.....	17
3.1.1. Comportamiento monótonico .....	17
3.1.2. Comportamiento cíclico .....	19
3.2. MODELO NUMÉRICO .....	24
3.2.1. Imperfección inicial .....	24
3.2.2. Aplicación de la carga axial .....	25
<b>4. ANÁLISIS Y CALIBRACIÓN DEL MODELAMIENTO DEL PANDEO DE BARRAS</b>	
<b>LONGITUDINALES CON FALLA DE BAJO CICLO.....</b>	<b>27</b>

4.1.	ENSAYOS EXPERIMENTALES: PANDEO INELÁSTICO EN BARRAS DE REFUERZO ....	27
4.1.1.	Acero, ley constitutiva .....	27
4.1.2.	Respuesta del modelo .....	28
4.2.	ENSAYOS EXPERIMENTALES: FATIGA DE BAJOS CICLOS .....	31
4.2.1.	Ensayos realizados por Mander et al.(1994) .....	32
4.2.2.	Ensayos realizados por Brown (1999) .....	33
4.3.	RESULTADOS .....	35
4.4.	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS .....	39
<b>5.</b>	<b>CONCLUSIONES Y LIMITACIONES .....</b>	<b>53</b>
5.1.	CONCLUSIONES.....	53
5.2.	LIMITACIONES .....	54
<b>6.</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>55</b>
<b>ANEXO A.....</b>	<b>.....</b>	<b>57</b>
	PANDEO INELÁSTICO EN BARRAS DE REFUERZO: .....	57
	ENSAYOS DE MONTI Y NUTI (1992) .....	57
<b>ANEXO B.....</b>	<b>.....</b>	<b>61</b>
	PANDEO Y FATIGA DE BAJO CICLO.....	61
	ENSAYOS DE MANDER.....	61
<b>ANEXO C.....</b>	<b>.....</b>	<b>70</b>
	PANDEO Y FATIGA DE BAJO CICLO.....	70
	ENSAYOS DE BROWN.....	70

## INDICE DE TABLAS

TABLA 1: PROPIEDADES MECÁNICAS DEL ACERO.....	28
TABLA 2: PATRONES DE DEFORMACIÓN .....	28
TABLA 3: CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DEL ACERO .....	32
TABLA 4: CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DEL ACERO ( $D_B = 19,1$ MM).....	34
TABLA 5: CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DEL ACERO ( $D_B = 22,2$ MM).....	34
TABLA 6: CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DEL ACERO ( $D_B = 25,4$ MM).....	34
TABLA 7: DEFORMACIONES MÁXIMAS APLICADAS (MANDER) .....	36
TABLA 8: DEFORMACIONES MÁXIMAS APLICADAS (BROWN) .....	36

## INDICE DE FIGURAS

FIGURA 1: VIDA ÚTIL Y FATIGA (BROWN, 1998).....	4
FIGURA 2: PLANOS DE EXTRUSIÓN Y INTRUSIÓN (HUNEAU, 2006).....	5
FIGURA 3: CURVAS MONOTÓNICAS EXPERIMENTALES (MONTI Y NUTI, 1992) .....	7
FIGURA 4: ENSAYO CÍCLICO, CURVAS TENSIÓN-DEFORMACIÓN.....	8
FIGURA 5: CALIBRACIÓN INICIAL DE LAS DEFORMACIONES REGISTRADAS POR LOS LVDTs .....	10
FIGURA 6: DESPLAZAMIENTO LATERAL DE LA MORDAZA SUPERIOR .....	11
FIGURA 7: CURVAS DE VIDA A LA FATIGA .....	11
FIGURA 8: AMPLITUD DE DEFORMACIÓN CONSTANTE, PARÁMETROS.....	13
FIGURA 9: AMPLITUD TOTAL DE DEFORMACIÓN Y AMPLITUD PLÁSTICA DE DEFORMACIÓN .....	14
FIGURA 10: MODELACIÓN DEL PANDEO DE LAS BARRAS DE REFUERZO E IMPERFECCIÓN INICIAL...	16
FIGURA 11: CURVA MONOTÓNICA DEL ACERO.....	18
FIGURA 12: MODELO CÍCLICO DEL ACERO (SUPUESTO INICIAL).....	21
FIGURA 13: MODELO CÍCLICO DEL ACERO.....	22
FIGURA 14: RESPUESTA CÍCLICA (SUPUESTO INICIAL).....	22
FIGURA 15: RESPUESTA CÍCLICA.....	23
FIGURA 16: CICLOS INTERNOS.....	24
FIGURA 17: DETERMINACIÓN DE LA IMPERFECCIÓN INICIAL .....	25
FIGURA 18: PROCESO NUMÉRICO DEFINIENDO LA RESPUESTA BAJO CARGA AXIAL .....	26
FIGURA 19: CURVA MONOTÓNICA DEL ACERO (COMPORTAMIENTO BI-LINEAL) .....	28
FIGURA 20: CURVA DE RESPUESTA TENSIÓN-DEFORMACIÓN ( $L/D_B = 5$ ), CASO A1.....	29
FIGURA 21: CURVA DE RESPUESTA TENSIÓN-DEFORMACIÓN ( $L/D_B = 11$ ), CASO C1 .....	30
FIGURA 22: CURVA DE RESPUESTA TENSIÓN-DEFORMACIÓN ( $L/D_B = 5$ ), CASO A1.....	31
FIGURA 23: CURVA DE RESPUESTA TENSIÓN-DEFORMACIÓN ( $L/D_B = 11$ ), CASO C1 .....	31
FIGURA 24: CURVAS MONOTÓNICAS SEGÚN EL TIPO DE ACERO, ENSAYOS DE MANDER.....	33
FIGURA 25: CURVAS MONOTÓNICAS CALIBRADAS SEGÚN LOS ENSAYOS DE BROWN .....	35
FIGURA 26: RESPUESTA TENSIÓN VERSUS DEFORMACIÓN (MANDER, ENSAYO P7) .....	37
FIGURA 27: RESPUESTA TENSIÓN VERSUS DEFORMACIÓN (BROWN, ENSAYO #24) .....	37

FIGURA 28: RESPUESTA TENSIÓN VERSUS DEFORMACIÓN (MANDER, CASO P7) .....	38
FIGURA 29: RESPUESTA TENSIÓN VERSUS DEFORMACIÓN (MANDER, CASO R5).....	39
FIGURA 30: RESPUESTA TENSIÓN VERSUS DEFORMACIÓN (BROWN, ENSAYO #24) .....	39
FIGURA 31: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS, ANALÍTICO (BROWN, $D_B= 25.4$ MM) .....	40
FIGURA 32: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS, ANALÍTICO A) Y EXPERIMENTAL B) (MANDER, ACERO DE ALTA RESISTENCIA P) .....	41
FIGURA 33: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS, ANALÍTICO A) Y EXPERIMENTAL B) (MANDER, ACERO DE BAJA RESISTENCIA R) .....	42
FIGURA 34: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS, ANALÍTICO A) Y EXPERIMENTAL B) (BROWN, $D_B= 19,1$ MM).....	43
FIGURA 35: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS, ANALÍTICO A) Y EXPERIMENTAL B) (BROWN, $D_B= 22.2$ MM).....	43
FIGURA 36: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS, ANALÍTICO A) Y EXPERIMENTAL B) (BROWN, $D_B= 25.4$ MM).....	44
FIGURA 37: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS, ANALÍTICO A) Y EXPERIMENTAL B) (MANDER, ACERO DE ALTA RESISTENCIA P) .....	45
FIGURA 38: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS, ANALÍTICO A) Y EXPERIMENTAL B) (MANDER, ACERO DE BAJA RESISTENCIA R) .....	46
FIGURA 39: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS, ANALÍTICO A) Y EXPERIMENTAL B) (BROWN, $D_B= 19,1$ MM).....	46
FIGURA 40: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS, ANALÍTICO A) Y EXPERIMENTAL B) (BROWN, $D_B= 22,2$ MM).....	47
FIGURA 41: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS, ANALÍTICO A) Y EXPERIMENTAL B) (BROWN, $D_B= 25,4$ MM).....	48
FIGURA 42: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS (BROWN, ENSAYO #43, $D_B= 25,4$ MM, $E_A=0.015$ ) .....	48
FIGURA 43: $F_V/F_0$ VERSUS NÚMERO DE CICLOS (BROWN, ENSAYO #45, $D_B= 25,4$ MM, $E_A=0.025$ ) .....	49
FIGURA 44: DEGRADACIÓN DE LA CAPACIDAD RELATIVA AL PANDEO (ANALÍTICO) VERSUS AMPLITUD DE DEFORMACIÓN.....	50
FIGURA 45: DEGRADACIÓN DE LA CAPACIDAD RELATIVA A LA FATIGA (EXPERIMENTAL) VERSUS AMPLITUD DE DEFORMACIÓN.....	50

---

FIGURA 46: DEGRADACIÓN DE LA CAPACIDAD RELATIVA AL PANDEO VERSUS AMPLITUD DE DEFORMACIÓN (ENSAYOS DE MANDER, ACERO DE ALTA RESISTENCIA P) .....	51
FIGURA 47: DEGRADACIÓN DE LA CAPACIDAD RELATIVA AL PANDEO VERSUS AMPLITUD DE DEFORMACIÓN (ENSAYOS DE MANDER, ACERO DE BAJA RESISTENCIA R) .....	52
FIGURA 48: DEGRADACIÓN DE LA CAPACIDAD RELATIVA AL PANDEO VERSUS AMPLITUD DE DEFORMACIÓN (ENSAYOS DE BROWN) .....	52

## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1. INTRODUCCIÓN

En las zonas sísmicas, los elementos de hormigón armado están sometidos a esfuerzos combinados. Las barras de refuerzo longitudinal y transversal están diseñadas para resistir a estas sollicitaciones, carga axial, momento y corte respectivamente.

Sometidos a cargas cíclicas, las columnas de hormigón armado sufren desplazamientos laterales. Estas responden elásticamente si los desplazamientos son pequeños. Bajo cargas importantes, los desplazamientos son mayores y la respuesta de la estructura es dentro del rango plástico. Así, la estructura sufre también daños mayores: descascaramiento del hormigón, pandeo de las barras longitudinales, ruptura de los estribos. Otra causa potencial de falla es la fatiga de bajos ciclos.

De manera general, la fatiga de materiales corresponde a un deterioro progresivo de los elementos, sometidos a cargas cíclicas, que termina produciendo su rotura. En muchos casos, las fallas se producen para sollicitaciones que producen deformaciones dentro del límite elástico para un gran número de ciclos. En otros casos, donde las deformaciones sobrepasan el límite elástico, la falla se produce para un número reducido de ciclos, lo que se conoce como fatiga de bajo número de ciclos. La fatiga de bajo número de ciclos está controlada por las grandes deformaciones que ocurren en zonas de comportamiento plástico. Se caracteriza por el número de ciclos (menor a 1000), a una amplitud de deformación, resultando en la ruptura del elemento: a mayor amplitud de deformación, menor es el número de ciclos antes ruptura.

Durante sismos moderados o fuertes, la amplitud de las deformaciones unitarias puede fácilmente sobrepasar el 2%. A tales amplitudes, el número de ciclos antes de la rotura puede ser menor a 100. El registro de las deformaciones durante un sismo puede contar más de 30 ciclos, de amplitud variable. Adicionalmente, al someter los elementos a ciclos de gran deformación de tracción – compresión, se produce descascaramiento del hormigón, favoreciendo el posible pandeo de las barras longitudinales apoyadas en estribos. De esta forma, no se puede despreciar esta causa potencial de falla, lo que motiva el estudio del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos en barras de refuerzo longitudinales para hormigón armado.

## 1.2. OBJETIVOS GENERALES Y ESPECÍFICOS

En este trabajo, se estudiará el impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos en barras de refuerzo bajo cargas axiales. Este análisis se realizará mediante un modelo numérico actualmente implementado en Matlab. Este modelo es capaz de representar el comportamiento de barras longitudinales susceptibles al pandeo bajo cargas axiales e imperfecciones iniciales.

Para esto, se definieron los objetivos específicos siguientes:

- Calibración de un modelo cíclico de acero: el modelo numérico, descrito previamente, requiere un modelo cíclico del material.
- Validación del modelo de plasticidad concentrada: originalmente, el modelo era capaz de representar correctamente el comportamiento monotónico de una barra en compresión. Se trata de validar el comportamiento cíclico (ciclos tracción-compresión)
- Determinación de la importancia del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos en barras de refuerzo: la importancia del impacto del pandeo se verá mediante el modelo numérico, y los ensayos experimentales disponibles en la literatura.

## 1.3. ALCANCES

En las zonas sísmicas, puede ocurrir falla y rotura de las barras longitudinales. Varias causas potenciales pueden ser el origen de esta ruptura de las barras: el pandeo, la fatiga de bajos ciclos, etc. Sin embargo, determinar que causa es responsable de la rotura no es tan sencillo. Se espera, entonces, cuantificar el impacto del pandeo en la fatiga de bajo número de ciclos en las barras de refuerzo para hormigón armado, considerando tanto los ensayos experimentales disponibles en la literatura, como los resultados entregados por el modelo numérico de rótulas plásticas.

El Capítulo 2 contiene una revisión bibliográfica relacionada con la fatiga de bajo ciclo. El Capítulo 3 se enfoca en la calibración del modelo cíclico del acero y la descripción del modelo numérico

---

## Estudio y modelamiento del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos en barras longitudinales para hormigón armado

---

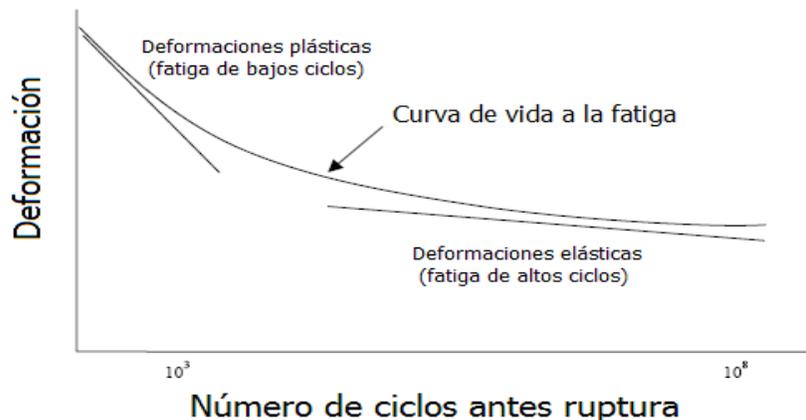
de plasticidad concentrada. En el Capítulo 4, se presentan los resultados y análisis sistemático obtenidos del modelamiento del pandeo de barras longitudinales con falla por fatiga de bajo ciclo. Finalmente, en el Capítulo 5, están presentadas las conclusiones y limitaciones del presente estudio.

## 2. ANTECEDENTES GENERALES

### 2.1. FATIGA DE MATERIALES

#### 2.1.1. Fatiga de bajos ciclos y fatiga de altos ciclos

La fatiga de materiales corresponde a un deterioro progresivo de los elementos, sometidos a cargas cíclicas, que resulta en su rotura. En general, las fallas se producen bajo esfuerzos cíclicos a amplitudes de deformaciones o tensiones menores a la deformación o tensión requerida para que falle el elemento al aplicar cargas estáticas. La fatiga se caracteriza por el número de ciclos a una amplitud de deformaciones (o tensiones) que produce la ruptura del elemento: a mayor amplitud de deformación, menor es el número de ciclos antes falla.



**Figura 1:** Vida útil y fatiga (Brown, 1998)

La figura 1 representa la vida a fatiga de un acero típico; es decir, grafica la deformación en función del número de ciclos antes de la ruptura. Se puede dividir esta curva en dos partes:

- la primera parte describe la fatiga de bajos ciclos: está controlada por deformaciones plásticas, y corresponde a un número de ciclos a la ruptura menor a 1000.
- la segunda parte describe la fatiga de altos ciclos: está controlada, a primera vista, por deformaciones elásticas. Además, el número de ciclos a la ruptura involucrado es mayor a 1000. Existe también un límite de fatiga: a deformaciones menores a este límite, no se produce fatiga y un número ilimitado de ciclos puede ser aplicada a los materiales.

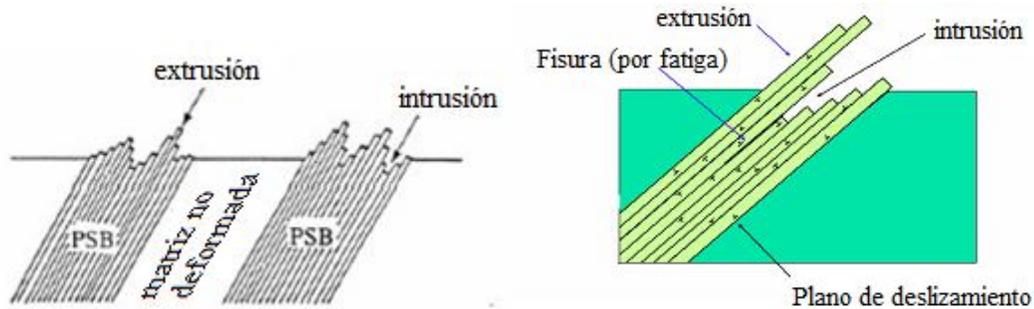
Las fallas por fatiga presentan dos etapas:

- iniciación o nucleación,
- crecimiento o propagación.

El proceso de rotura por fatiga se desarrolla a partir del inicio de la grieta y sigue con su propagación y la rotura final.

▪ Iniciación

Al aplicar cargas cíclicas, por deslizamiento de dislocaciones, se forman escalones (Figura 2), y, más precisamente, planos extrusivos, y planos intrusivos; los que pueden generar discontinuidades superficiales microscópicas. Estas discontinuidades van a concentrar las deformaciones y tensiones, y por lo tanto, serán favorables a la formación de grietas.



**Figura 2:** Planos de extrusión e intrusión (Huneau, 2006)

▪ Propagación

Una vez formada la fractura, se propaga muy lentamente al principio, y, luego, a una velocidad creciente. Al aumentar su ancho, la grieta debilita la sección del elemento y resulta finalmente en la rotura.

### 2.1.2. Fatiga de altos ciclos

Esta fatiga está controlada, como fue descrito previamente, por las tensiones (o deformaciones elásticas). En general, ocurre bajo condiciones normales de cargas y sólo incursiona en el rango elástico. Por lo tanto, para evitarla, es posible aumentar la resistencia a la fatiga, modificando las características de los elemento sometidos a estas cargas (tensiones admisibles permitidas, geometría de los elementos).

Este fenómeno es más común y relevante en maquinarias rotantes, sometida a tensiones alternantes como: fuselajes de aviones sujetos a presurización y despresurización inducidos por los despegues y aterrizajes.

### 2.1.3. Fatiga de bajos ciclos

Al someter barras de refuerzo a ciclos tracción - compresión, como ocurre en columnas de hormigón armado, se producen deformaciones que en algunos casos pueden sobrepasar el nivel elástico. En algunos casos estas deformaciones pueden localizarse, formando zonas plásticas, induciendo daños irreversibles en la estructura.

Varios modelos matemáticos han sido desarrollados con estos fines. Estos tienen como objetivo relacionar las deformaciones impuestas y el número de ciclos antes de la ruptura, basados en resultados experimentales: en la amplitud de deformación plástica o total, o en la energía disipada.

## 2.2. ENSAYOS EXPERIMENTALES: PANDEO INELÁSTICO EN BARRAS DE REFUERZO

Sometidos a cargas cíclicas, las columnas de hormigón armado sufren desplazamientos laterales. Bajo cargas axiales importantes, pueden sufrir daños mayores: por ejemplo, el hormigón puede descascararse y dejar las barras de acero expuestas. Éstas sólo están apoyadas en los estribos y quedan libre de toda restricción lateral entre estribos. Así, existe la posibilidad de pandeo entre dos estribos sucesivos. Mientras mayor es la distancia entre estribos, mayor será el impacto en el comportamiento producto del pandeo. Este afecta la capacidad del material y su habilidad para absorber energía.

Existen pocos datos a cuanto a los efectos del pandeo inelástico en el comportamiento cíclico de las barras de refuerzo para hormigón armado. Una serie de ensayos experimentales en barras longitudinales tanto monotónicas como cíclicas fue realizada por Monti y Nuti (1992). El objetivo de este trabajo consistía en determinar los impactos más relevantes del pandeo en el comportamiento cíclico del material. Se consideraron distintas razones  $s/d_b$ : 5, 8 y 11 donde  $s$  es el espaciamiento entre estribos, es decir, la longitud libre de la probeta y  $d_b$  el diámetro de la barra.

▪ Efectos del pandeo en el comportamiento monotónico

La figura 3 entrega las respuestas monotónicas considerando las distintas razones  $s/d_b$  y diámetros de barras iguales a 16, 20 y 24 mm. Varias conclusiones se obtuvieron a partir de este trabajo:

- la respuesta monotónica en compresión coincide con la curva monotónica en tracción del acero, para razones  $s/d_b$  iguales a 5. La barra de acero no sufre pandeo al considerar una longitud entre estribos suficientemente pequeñas,
- al aumentar el largo de la barra, la capacidad máxima del material es afectada y disminuye considerablemente. A mayores razones  $s/d_b$ , la pérdida de capacidad del material aumenta de tal forma que, si la separación entre estribos alcanza la longitud de 11 veces el diámetro, se observa un ablandamiento en la respuesta a compresión apenas alcanzada la fluencia.

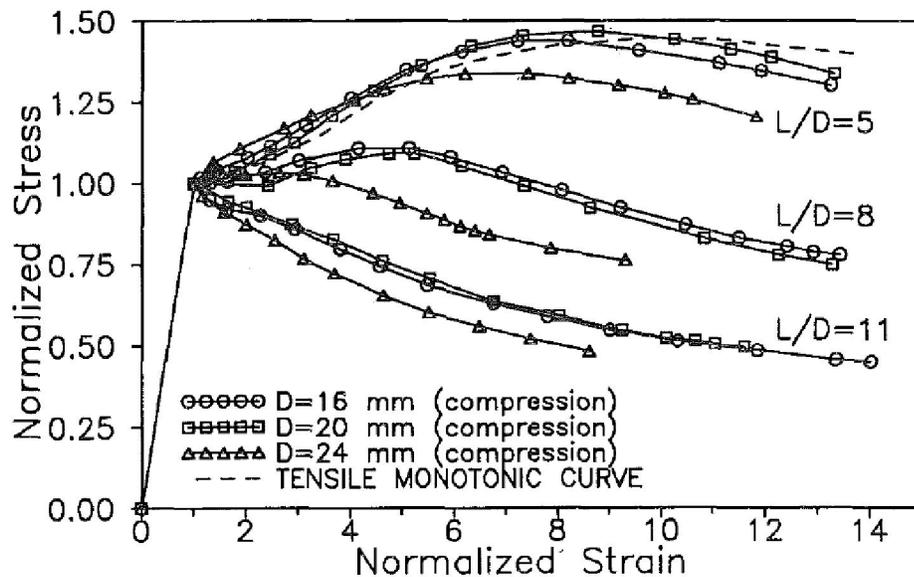
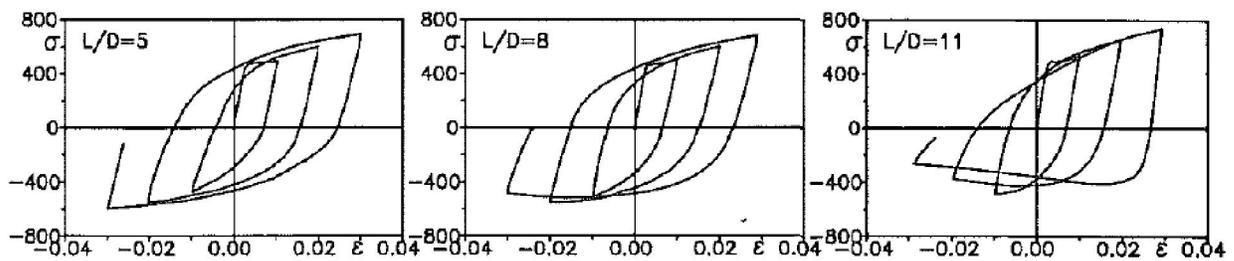


Figura 3: Curvas monotónicas experimentales (Monti y Nuti, 1992)

▪ Efectos del pandeo en el comportamiento cíclico

En cuanto al comportamiento cíclico, Monti y Nuti llegaron a las conclusiones siguientes (Figura 4):

- la respuesta en tracción, al contrario de la respuesta en compresión está poco afectada por el aumento del largo de la barra, es decir por el pandeo.
- a medida que crece la razón  $L/d_b$ , se observa que la pendiente inicial de cada una de las fases de carga disminuye con el crecimiento de la amplitud de deformaciones. Al contrario en las fases de descarga, ésta pendiente inicial no sufre variaciones.



**Figura 4:** Ensayo cíclico, curvas tensión-deformación

### 2.3. ENSAYOS EXPERIMENTALES: FATIGA DE BAJOS CICLOS

Pocos estudios se han enfocado en la realización de ensayos experimentales de fatiga de bajo número de ciclos para barras de refuerzo: Mander et al. (1994) y Brown (1999) realizaron ensayos de fatiga de bajo ciclo y consideraron barras de acero geoméricamente perfectas.

Otros trabajos como el de El-Bahy y Kunnath (1999), el de Chang y Mander (1994) estudiaron la fatiga de bajo ciclo en columnas circulares de hormigón armado bajo ciclos de amplitud de deformación constante, y de amplitud de deformación variable. Estos destacan tres posibles causas de falla:

- Pandeo de las barras longitudinales,
- Ruptura de los estribos y descascaramiento del hormigón,
- Fatiga de bajo ciclos.

▪ Ensayos realizados por Mander et al.(1994)

Realizó una serie de ensayos de fatiga de bajo ciclo, utilizando dos tipos de acero: un acero de alta resistencia y uno de resistencia común. Para cada uno de los ensayos, las barras de acero no sufrieron ningún tipo de alteraciones y se aplicó una amplitud de deformación constante, pero consideró tanto deformaciones máximas en tracción y en compresión de igual y distinta magnitud.

El dispositivo experimental utilizado incluía un sistema electro-hidráulico, el cual era capaz de realizar ensayos a distintas amplitudes de deformación, carga constante o variable. Esta deformación era transmitida mediante la aplicación de una presión transversal constante a lo largo de la longitud de desarrollo de la probeta dentro de la mordaza.

Mander primero realizó una serie de ensayos monotónicos, considerando razones  $L/d_b$  iguales a 6, 8 y 9 ( $L$  = longitud libre de la barra,  $d_b$  = diámetro de la barra). El objetivo de esta fase inicial era determinar que impacto tenía la razón  $L/d_b$  en la pérdida de capacidad del material a amplitud de deformaciones altas. Él observó que para razones mayores a 6, el pandeo afectaba de manera significativa la capacidad del material, y concluyó que un espaciamiento mayor a 6 veces el valor del diámetro era inadecuado.

Las mediciones de las deformaciones fueron determinadas mediante un extensómetro de longitud 47.64 mm, lo que corresponde a la mitad de la altura de la barra (las barras ensayadas eran de diámetro 15.84 mm). Este estudio permitió destacar un comportamiento a la fatiga según la calidad del acero, destacando una mejor resistencia a la fatiga del acero de alta resistencia.

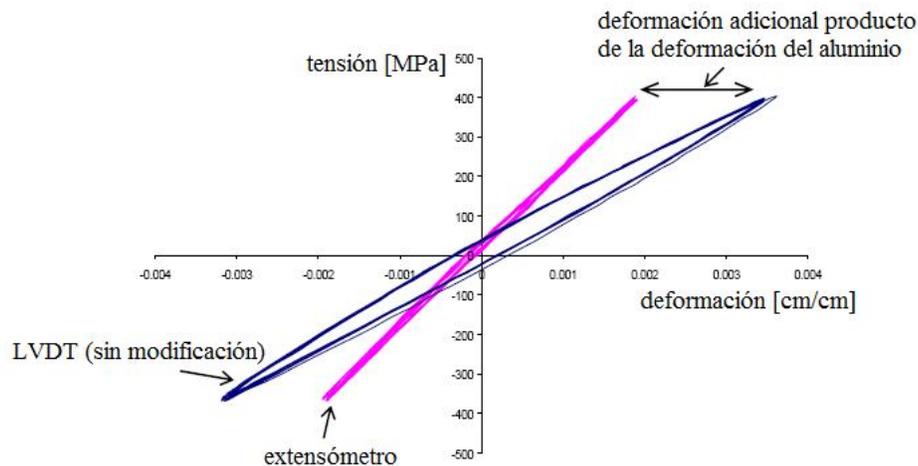
Por otra parte, Mander usó dos criterios distintos para definir la vida a la fatiga: el primero, para amplitud de deformación pequeña ( $< 2\%$ ), coincide con el punto de caída abrupta de la razón  $f_i/f_0$  (donde  $f_i$  es la tensión máxima en el ciclo, a compresión o tracción, y  $f_0$  la tensión al primer punto de regreso), el segundo, para amplitud de deformación mayor a 2%, se basa en una observación visual en cuanto a la aparición de la primera grieta.

▪ Ensayos realizados por Brown (1998)

El objetivo de este trabajo consiste en la determinación del comportamiento del hormigón armado a la fatiga de bajo ciclo ante ciclos de amplitud de deformación variable. Para ello realizó una primera serie de ensayos a amplitud constante. Al conocer en este caso, la relación entre deformación y número de ciclos, le fue posible pronosticar el comportamiento bajo ciclos de amplitud variable. El programa de ensayos consideró barras de acero grado 60 ( $F_{y_{min}} = 420$  MPa) y de diámetros distintos (19.1 mm, 22.2 mm, 25.4 mm).

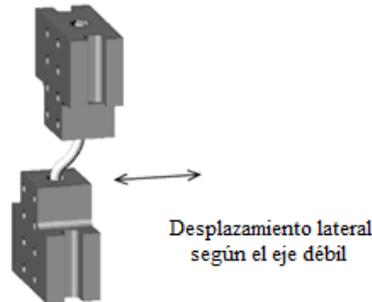
El desarrollo del programa experimental estuvo sujeto a varios problemas durante la calibración del prototipo:

- medición de las deformaciones: ésta se realizó mediante sensores LVDT ubicados en las mordazas y un extensómetro de largo 50,8 mm ubicado en el tramo central de la barra. Sin embargo, se ubicó entre las mordazas y la probeta un elemento en aluminio para transmitir los esfuerzos a la probeta. Por su ubicación, los sensores LVDT incluían en sus mediciones las deformaciones sufridas por el aluminio. Debido a esto, se obtuvo un modulo elástico inicial sensiblemente menor al modulo de Young del acero (110.000 MPa en lugar del 200.000 MPa esperado). Brown supuso que el aluminio sólo se deformaba elásticamente y que, una vez alcanzado el punto de fluencia, las deformaciones medidas ocurrían en la barra y no en el elemento en aluminio. Calibró las deformaciones medidas por los LVDT (Figura 5) y corrigió en consecuencia los valores de las deformaciones.



**Figura 5:** Calibración inicial de las deformaciones registradas por los LVDTs

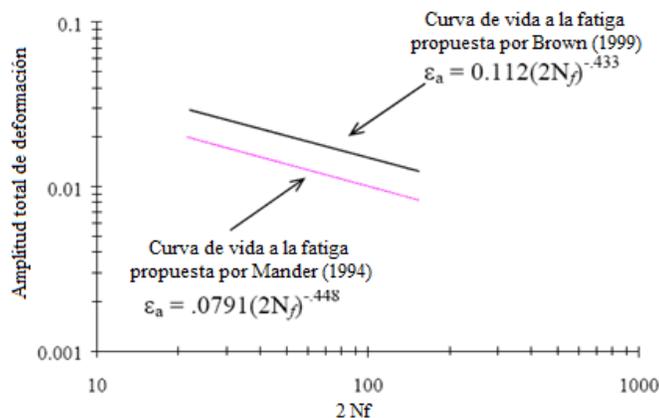
- inestabilidad del marco construido para la transmisión de las cargas a la probeta: al aplicar deformaciones altas (en el rango inelástico), el marco no podía mantener el alineamiento de la barra ensayada, se producía un desplazamiento lateral de la mordaza superior con respecto a la base. Brown agregó arriostramientos laterales y redujo el impacto de la inestabilidad en el pandeo de la probeta y en los resultados (Figura 6).



**Figura 6:** Desplazamiento lateral de la mordaza superior

Además, se puede mencionar que los ensayos se realizaron a una velocidad igual a 0.001 (deformación unitaria) /s. La falla por fatiga fue definida como el número de ciclos antes de la ruptura de las barras.

Finalmente, a pesar de que Brown y Mander realizaron ensayos a la fatiga de bajo ciclo, obtuvieron algunas variaciones en sus resultados (Figura 7). Las curvas de vida a la fatiga presentan un pendiente similar pero el estudio de Brown entregó, a mismas amplitudes de deformaciones, una vida a la fatiga mayor. Varias razones pueden ser causas potenciales de estas diferencias: la tasa de deformación (5 veces más alta durante los ensayos realizados por Mander), distintos diámetros de barras, acero de calidad diferente, métodos de mediciones, etc.



**Figura 7:** Curvas de vida a la fatiga

## 2.4. MODELOS ANALÍTICOS

Existen en la literatura varios modelos analíticos que caracterizan la falla por fatiga. Los modelos tienen como objetivo proveer una relación matemática entre la amplitud de deformación y el número de ciclos antes de la ruptura de la probeta, es decir, predecir la ruptura de un material o elemento sometido a cargas cíclicas.

Los modelos existentes pueden ser divididos en dos categorías: los primeros se basan en las deformaciones, y los segundos en la energía. Dentro de los modelos basados en las deformaciones, algunos son caracterizados por las deformaciones plásticas, y otros por las deformaciones totales. Todos estos modelos se basan en las tendencias observadas experimentalmente graficando uno de los parámetros mencionados (amplitud de deformación total, plástica, etc.) versus el número de ciclos antes de la ruptura o la energía disipada.

En los casos que consideran ensayos a amplitud de deformación constante, la relación entre estos parámetros es de la forma:

$$y = a (x)^c$$

donde a y c son constantes relativas al material (se obtienen a partir de los resultados experimentales), x es el número de ciclos antes ruptura, e y es la amplitud de deformación. En un gráfico a escala logarítmica, esta relación es lineal.

### 2.4.1. Modelos basados en las deformaciones

- Amplitud total de deformación

El modelo propuesto por Koh y Stephens (1991) relaciona la amplitud total de deformación al número de ciclos antes de la ruptura. La figura 8 ilustra la definición de los distintos parámetros involucrados. La ecuación propuesta es la siguiente:

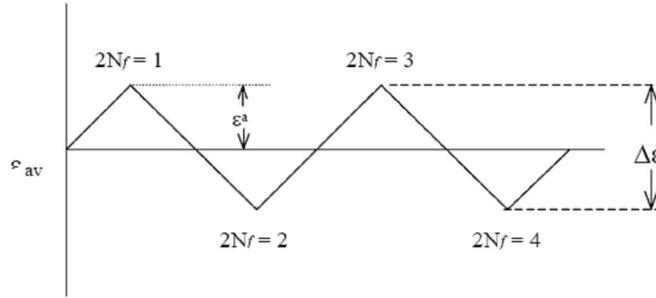
$$\varepsilon_a = \frac{\Delta\varepsilon}{2} = M \times (2N_f)^m$$

donde  $\varepsilon_a$ : amplitud total de deformación

$2(2N_f)$ : número de ciclos

$\Delta\varepsilon$ :  $\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}$

M, m: constantes del material



**Figura 8:** Amplitud de deformación constante, parámetros

Koh y Stephens propusieron también una versión modificada del modelo. Esta incluye el efecto de la degradación de la capacidad global al considerar la tensión máxima desarrollada a la mitad de la vida útil de la barra como

$$f_{\max} \varepsilon_a = C \times (2N_f)^\gamma$$

donde  $f_{\max}$ : tensión máxima a la mitad de la vida útil del ensayo  
 $2(2N_f)$ : número de ciclos  
 $\varepsilon_a$ : amplitud total de deformación  
 $C, \gamma$ : constantes del material

- Amplitud de deformación plástica

El primer modelo propuesto (Coffin-Manson, 1954) está basado en la amplitud plástica de deformación. La figura 9 ilustra la diferencia entre amplitud total de deformación,  $\Delta\varepsilon$ , y la amplitud plástica de deformación,  $\Delta\varepsilon_p$ . La expresión de la amplitud plástica de deformación es

$$\varepsilon_{ap} = \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon_f' \times (2N_f)^c$$

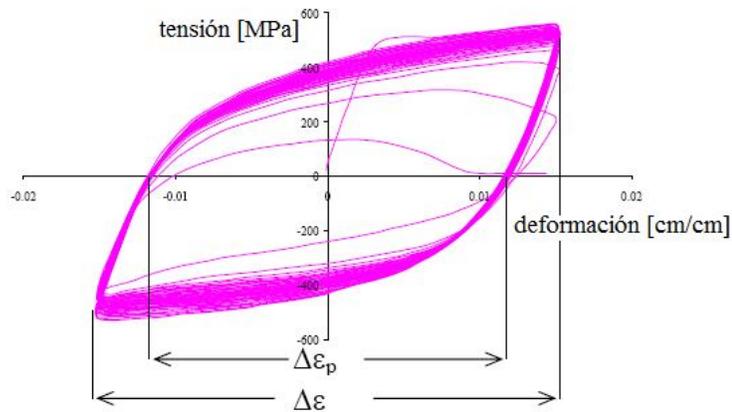
donde  $\varepsilon_{ap}$ : amplitud plástica de deformación  
 $2(2N_f)$ : número de ciclos  
 $\Delta\varepsilon_p$ : rango de deformaciones plásticas  
 $\varepsilon_f', c$ : constantes del material

Estudio y modelamiento del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos en barras longitudinales para hormigón armado

Lorenzo y Laird (1984) propusieron una modificación a la ecuación de Coffin-Manson. Como en el caso de las amplitudes totales de deformación, incluyeron el efecto del deterioro de la tensión media en la barra: este modelo considera la tensión máxima desarrollada a la mitad de la vida útil de la barra.

$$f_{\max} \varepsilon_{ap} = L \times (2N_f)^\gamma$$

- donde  $f_{\max}$ : tensión máxima a la mitad de la vida útil del ensayo  
 $2(2N_f)$ : número de ciclos  
 $\varepsilon_{ap}$ : amplitud plástica de deformación  
 $C, L, \gamma, l$ : constantes del material



**Figura 9:** Amplitud total de deformación y amplitud plástica de deformación

Otros modelos de vida a la fatiga desarrollados que se pueden mencionar son:

<p>Ecuaciones modificadas de Coffin y Manson (1994)</p>	$\varepsilon_{ap} = \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} \times (2N_f)^b + \varepsilon_f' \times (2N_f)^c$	<p><math>\varepsilon_{ap}</math>: amplitud plástica de deformación  <math>2(2N_f)</math>: número de ciclos  <math>\varepsilon_f', c, \sigma_f', b</math>: constantes del material</p>
<p>Ecuación de Smith et al. (1970)</p>	$\sqrt{f_{\max} \varepsilon_a E_S} = f(2N_f)$	<p><math>f_{\max}</math>: tensión máxima a la mitad de la vida útil de cada ensayo  <math>2(2N_f)</math>: número de ciclos  <math>\varepsilon_a</math>: amplitud total de deformación  <math>\varepsilon_f', c, \sigma_f', b</math>: constantes del material</p>

La vida a la fatiga de un material sometido a una amplitud de deformación puede ser estimada mediante la superposición de las componentes elásticas y plásticas.

#### 2.4.2. Modelos basados en la energía

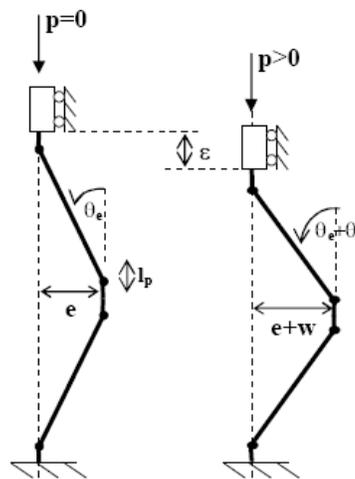
Uno de los primeros trabajos que consideran la energía como parámetro para caracterizar la fatiga de bajo ciclo es el de Sugiura et al. (1991). Mander et al. (1994) por su parte propusieron varios modelos. Estos establecen una relación entre la energía total disipada y la amplitud de deformación (plástica o total). Este parámetro se puede obtener integrando numéricamente la curva de respuesta tensión-deformación.

Mander et al. (1994)	$W_{fT} = W_a (\varepsilon_a)^p$ $W_{fT} = W_{ap} (\varepsilon_{ap})^q$ $W_{fT} = W_{fa} (f_{\max} \varepsilon_a)^r$ $W_{fT} = W_{fap} (f_{\max} \varepsilon_{ap})^s$	$f_{\max}$ : tensión máxima $W_{fT}$ : energía total de deformación a la ruptura $W_a, W_{ap}, W_{fa}, W_{fap}, p, q, r, s$ : constantes del material
Sugiura et al. (1991)	$N_f = C_1 (f_{\max})^{C_2} (\Delta W_p)^{C_3}$	$f_{\max}$ : tensión máxima a la mitad de la vida útil del ensayo $2(2N_f)$ : número de ciclos $C_1, C_2, C_3$ : constantes del material

### 3. MODELO DE RÓTULAS PLÁSTICAS DEL PANDEO DE BARRAS LONGITUDINALES

En las zonas sísmicas, las columnas de hormigón armado son sometidas a esfuerzos combinados: carga axial, momento, corte. Las barras longitudinales y los estribos son diseñados para resistir estos esfuerzos. No obstante, una causa de falla puede ser el pandeo de las barras de refuerzo ya que bajo esfuerzos sísmicos, ocurrido el descascaramiento del hormigón para grandes deformaciones, las barras longitudinales quedan expuestas y al ser apoyadas por los estribos de refuerzo pueden presentar inestabilidad lateral.

Para efectos del análisis del pandeo se considerará un modelo de plasticidad concentrada que consta de 4 rótulas plásticas (Massone y Moroder, 2008). Estas rótulas están ubicadas una en cada extremo y dos a media altura de la longitud libre de la barra. Adicionalmente, la barra está considerada rígida entre las rotulas plásticas. Este modelo es capaz de representar el comportamiento de una barra susceptible de pandearse bajo cargas axiales e imperfecciones iniciales, asumiendo que el posible pandeo ocurra entre estribos consecutivos. La imperfección inicial se induce como un desplazamiento lateral producto de una carga transversal aplicada en el centro de la barra (Figura 10). Los estribos se consideran perfectamente rígidos, lo que resulta en una condición de empotramiento en la extremidad inferior, y la capacidad de sólo deslizar en la extremidad superior.



**Figura 10:** Modelación del pandeo de las barras de refuerzo e imperfección inicial

### 3.1. ACERO: MODELACIÓN DEL COMPORTAMIENTO

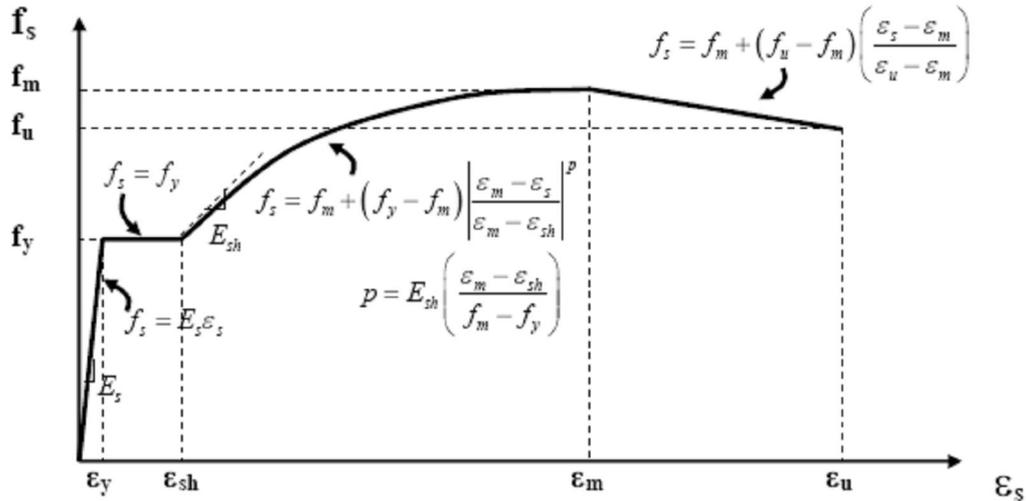
#### 3.1.1. Comportamiento monótonico

El acero, y más específicamente las barras de acero, se caracterizan, en general, por la curva monotónica tensión vs deformación en tracción. Varios modelos que representan el comportamiento monotónico del acero han sido desarrollados por distintos autores: por ejemplo, el modelo de Menegotto y Pinto (1973), el modelo de Mander (1984), etc. Éste último es el modelo base del acero a tracción implementado en el modelo numérico de rótulas plásticas.

- En tracción

Hasta el punto de fluencia ( $\epsilon_y, f_y$ ), la respuesta del acero es lineal-elástica en cada uno de estos modelos, es decir, se caracteriza por una recta de pendiente igual al módulo de elasticidad del acero  $E_s$ . Luego, se mantiene constante hasta el inicio del endurecimiento ( $\epsilon_{sh}, f_y$ ). En este punto, el acero comienza a presentar endurecimiento, donde la pendiente de la tangente en el punto de endurecimiento ( $\epsilon_{sh}, f_y$ ) es igual a  $E_{sh}$ . El endurecimiento se manifiesta por un aumento de la tensión con el aumento de la deformación hasta una tensión máxima ( $\epsilon_m, f_m$ ), la cual está seguida por una degradación de la capacidad del acero.

En general, esta degradación está asociada a grandes amplitudes de deformaciones que resultan en una disminución de la sección en las zonas más débiles. Al no conocer el comportamiento del acero en la zona de degradación, se asumió que este era lineal hasta el punto de ruptura (fractura). Finalmente, el punto último ( $\epsilon_u, f_u$ ) corresponde a la ruptura de las barras y a una caída de la tensión hasta cero. En la figura 11, está graficada la curva monotónica del acero a tracción implementada en este modelo.



**Figura 11:** Curva monotónica del acero

A grandes amplitudes de deformación, cuando se comienza a observar la degradación de la capacidad del acero, las mayores deformaciones se producen en zonas localizadas, mientras que en otras zonas estas deformaciones tienden a disminuir. El largo de esta zona de deformaciones localizadas, está asumido igual al diámetro de las barras. Sin embargo, la medición de las deformaciones unitarias durante los ensayos experimentales suele ser un valor medio y no la deformación unitaria que se desarrolla dentro de la zona de concentración de deformaciones. Esto resulta en una deformación menor a la real, ya que una vez que la tensión máxima es alcanzada, el comportamiento de la sección es distinto según la ubicación de la sección considerada (fuera o dentro la zona de concentración de deformaciones). En la zona de concentraciones de tensiones, las deformaciones van a seguir aumentando mientras que fuera, éstas disminuyen.

En este estudio, donde altas deformaciones son esperadas, es importante conocer el comportamiento del acero después el punto de tensión máxima ( $\epsilon_m, f_m$ ). Por lo tanto, se corrige la deformación última según la ecuación siguiente (Massone y Moroder, 2008):

$$\epsilon_{u,p} = \epsilon_m + \frac{(\epsilon_{u,g} - \epsilon_m) \times l_g}{l_p} \quad (1)$$

Donde  $l_p$ : largo de la rótula plástica  
 $l_g$ : largo del sensor.

▪ En compresión

Para la medición de deformaciones varios sistemas de coordenadas existen. Para pequeñas deformaciones, todos entregan resultados muy similares; y divergen cuando las deformaciones aumentan. En este caso, las coordenadas reales resultan en una aproximación adecuada del comportamiento del acero en compresión (Dodd y Restrepo, 1995) a diferencia de las tradicionalmente usadas coordenadas de ingeniería. Las coordenadas de ingeniería consisten en determinar tensiones y deformaciones en base a la longitud y área iniciales mientras que las coordenadas reales consideran el área y la longitud finales de la barra de acero.

Las tensiones y deformaciones en compresión pueden ser determinadas, punto a punto, a partir de las tensiones y deformaciones en tracción como

$$f_{s,c} = -f_{s,t} \times (1 + \varepsilon_{s,t})^2 \quad (2)$$

$$\varepsilon_{s,c} = -\frac{\varepsilon_{s,t}}{1 + \varepsilon_{s,t}} \quad (3)$$

donde  $f_{s,c}$  y  $\varepsilon_{s,c}$  son las tensión y deformación en compresión (negativa) para las correspondientes tensión  $f_{s,t}$  y deformación  $\varepsilon_{s,t}$  en tracción (positiva). Todas las variables son en coordenadas de ingeniería.

### 3.1.2. Comportamiento cíclico

Una vez conocido el comportamiento en tracción como en compresión del acero, es posible definir el comportamiento cíclico del acero. Este modelo mantiene como envolvente las curvas de comportamiento del acero tanto a tracción como a compresión definidas previamente. La envolvente se obtiene trasladando las curvas de tracción y compresión del acero, respectivamente en las fases de carga y descarga. Estas curvas envolventes son conectadas por una curva A definida tanto para descargas o recargas de tracción a compresión y viceversa. La curva A considera el efecto de Bauschinger, es decir, una reducción o suavizamiento de la capacidad del acero, ligando los puntos de inicio y fin de la fase de carga y descarga, tanto para un ciclo externo como para un ciclo interno. Esta curva está definida por los parámetros siguientes (Chang y Mander, 1994):

$$f_s = f_0 + E_0(\varepsilon_s - \varepsilon_0) \left\{ Q + \frac{1-Q}{\left( 1 + \left[ E_0 \left( \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_0}{f_f - f_0} \right) \right]^R \right)^{1/R}} \right\} \quad (4)$$

Donde el parámetro  $R$  representa el efecto de Baushinger,  $E_0$  es el módulo de carga o descarga inicial del acero. Estos dos parámetros fueron calibrados a partir de los ensayos a la fatiga de bajo ciclo de Mander et al. (1994).  $f_0$  y  $\varepsilon_0$  son, respectivamente la tensión y la deformación al origen de la curva A,  $f_f$  y  $\varepsilon_f$  son, respectivamente la tensión y la deformación al fin de la curva A (figura 11, 12).

▪ Fase de descarga:

$$E_0 = E_s (1 - \Delta\varepsilon) \quad (5)$$

$$R = 14 \left( \frac{f_y}{E_s} \right)^{1/3} (1 - 14\Delta\varepsilon) \quad (6)$$

▪ Fase de carga:

$$E_0 = E_s (1 - \Delta\varepsilon) \quad (7)$$

$$R = 20 \left( \frac{f_y}{E_s} \right)^{1/3} (1 - 18\Delta\varepsilon) \quad (8)$$

Donde 
$$\Delta\varepsilon = \frac{|\varepsilon_f - \varepsilon_0|}{2} \quad (9)$$

El parámetro  $Q$  está definido por:

$$Q = \frac{E_{sec}/E_0 - a}{1 - a} \quad (10), \quad a = \left( 1 + \left( \frac{E_0}{E_{sec}} \right)^R \right)^{-1/R} \quad (11)$$

y  $E_{sec}$  representa el modulo secante:

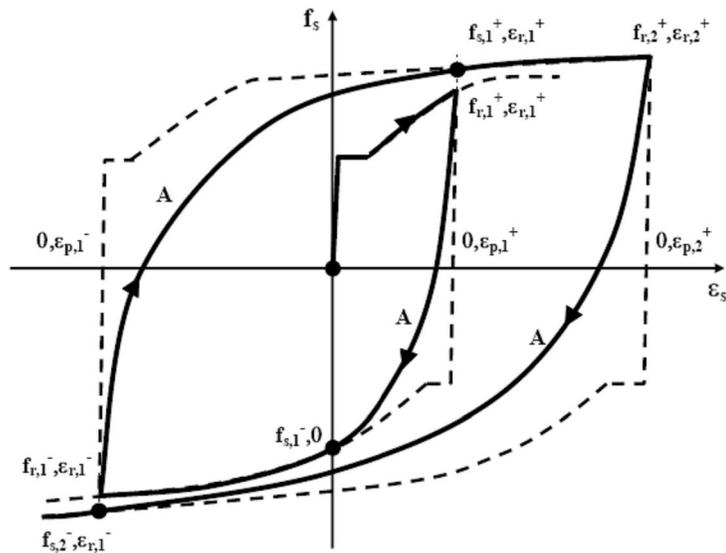
$$E_{sec} = \frac{f_f - f_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0} \quad (12)$$


---

Las barras de acero pueden estar sometidas a distintos tipos de ciclos: ciclos internos, externos, etc. El modelo cíclico permite representar estos casos: en ambos casos, se aplican las ecuaciones descritas para la curva A. Sólo la definición de los puntos de inicio y fin de la fase son distintos.

- El primer ciclo:

El primer ciclo presenta mayores dificultades al ser implementado. La determinación de la tensión en cada punto mediante la curva A implica conocer dos puntos: los puntos de inicio y fin de la fase considerada. Por falta de datos en cuanto al comportamiento del acero durante la primera fase de descarga o carga, el punto de fin de aquella fase es desconocido. La primera hipótesis considerada fue la siguiente: una vez que la curva de compresión ha sido trasladada, de tal forma que la traslación aplicada sea igual a la deformación del punto de inicio de la fase, la curva A une el punto de inicio de la fase con el punto de deformación nula (figura 12).



**Figura 12:** Modelo cíclico del acero (supuesto inicial)

Sin embargo, al comparar los resultados dados por esta modelación y los resultados experimentales, se constató un error importante en algunos casos. Con el fin de representar lo más adecuadamente posible el comportamiento cíclico del acero, se estudió otra posibilidad. En vez de juntar el punto de deformación nula de la curva de compresión trasladada, se consideró el punto final como el

punto de la curva en compresión trasladada de deformación absoluta igual a la deformación del punto de inicio de la fase (figura 13).

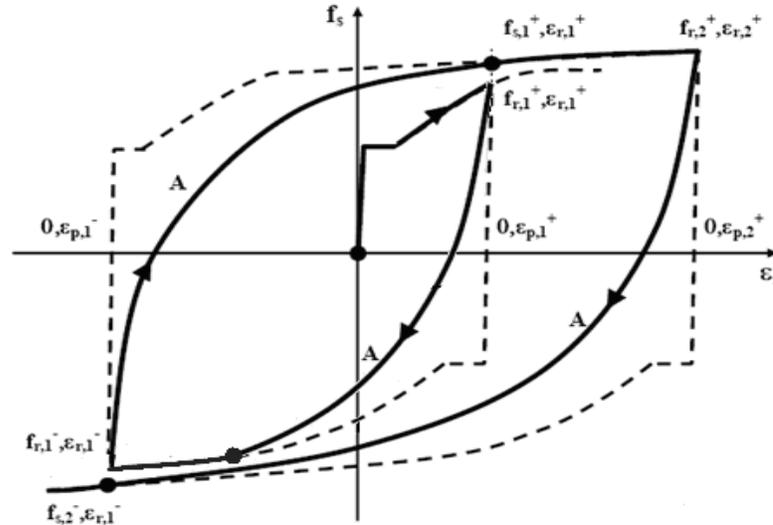


Figura 13: Modelo cíclico del acero

Las respuestas dadas por cada uno de los casos descritos están representadas en las figuras 14 y 15. El error observado en cuanto a la respuesta del modelo con respecto al resultado experimental en el primer caso (figura 14) no es despreciable mientras que, para el segundo caso considerado, el modelo entregó resultados similares al ensayo experimental (figura 15).

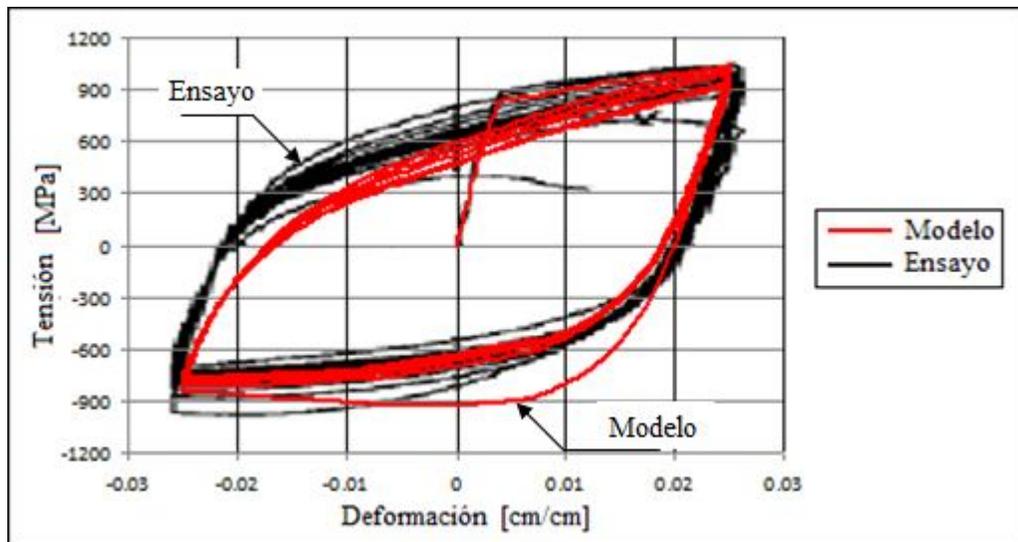
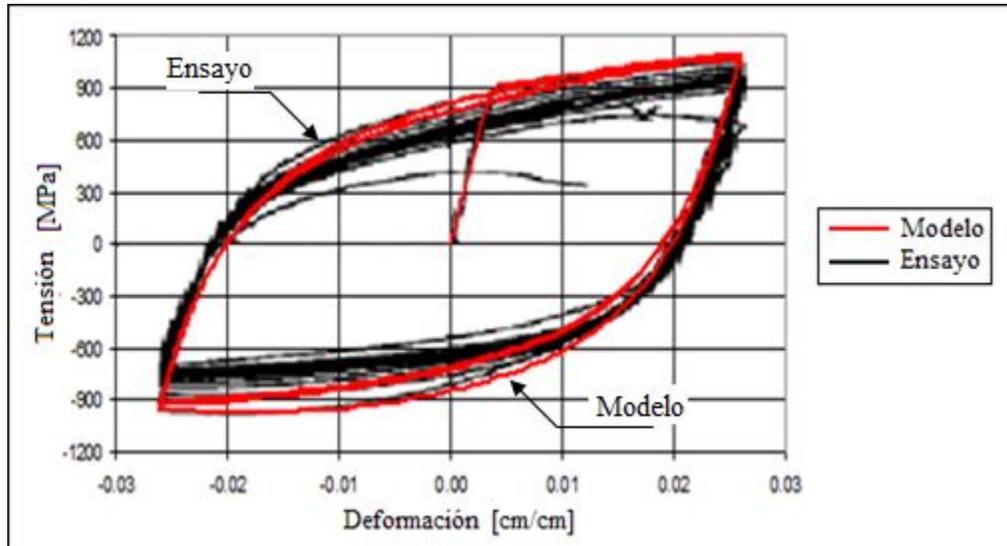


Figura 14: Respuesta cíclica (supuesto inicial)



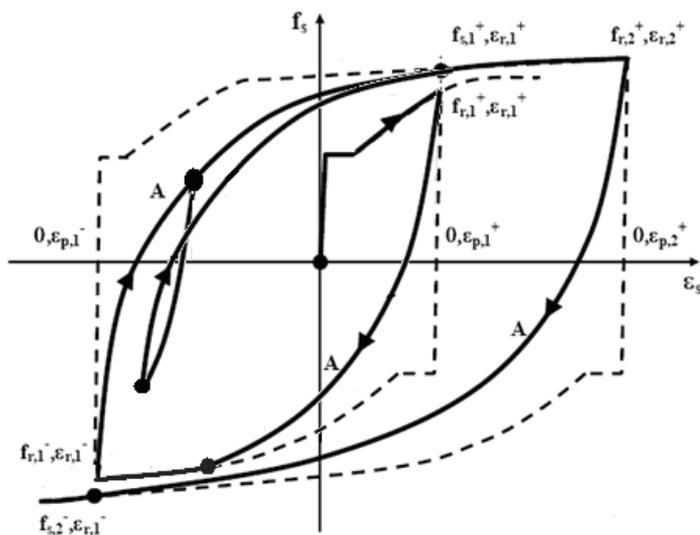
**Figura 15:** Respuesta cíclica

- Ciclos ulteriores:

Para los ciclos siguientes no existen las mismas dificultades que en el primer ciclo al existir una historia previa. Así, los puntos de inicio y fin son conocidos y corresponden respectivamente al fin e inicio de la fase anterior.

- Ciclos internos:

En algunos casos es necesario caracterizar los ciclos internos. Estos difieren de los ciclos externos en la definición del punto final, el cual corresponde al inicio del ciclo externo, y no del ciclo interno. Esta hipótesis simplifica el modelo numérico, evita tener en memoria variables adicionales, y entrega resultados aceptables (figura 16).



**Figura 16:** Ciclos internos

Los modelos constitutivos descritos en esta sección fueron implementados en el modelo de rótulas plásticas

### 3.2. MODELO NUMÉRICO

#### 3.2.1. Imperfección inicial

La imperfección inicial geométrica, es decir, el desplazamiento lateral  $e$ , puede ser implementada imponiendo una curvatura  $\Phi_e$  asociada a una fuerza externa aplicada en la zona central de la barra (Figura 10). Al imponer esta curvatura, aparece un momento no nulo en los extremos y la zona central. Una vez que ya no se aplica la fuerza lateral, la cual permite crear la imperfección, el equilibrio de fuerzas no se verifica, a menos que se reduzca aquella curvatura, disminuyendo el momento a cero.

En este trabajo, los casos estudiados no presentan imperfecciones: para resolver numéricamente el problema, se impone una pequeña imperfección ( $e = 0.01$ ) para que sea posible la presencia del pandeo, pero no se consideran las tensiones residuales inducidas por este proceso (Figura 17).

**IMPERFECCIÓN INICIAL : e**

$$\Phi_e = - \arctan (e / (L/2 - l_p)) / l_p$$

$$e_d = \tan (-\Phi_e l_p) (L/2 - l_p) / l_p$$

**Figura 17:** Determinación de la imperfección inicial

### 3.2.2. Aplicación de la carga axial

Al aplicar una carga axial  $P$ , el equilibrio anterior se ve modificado, variando tanto la deformación axial como la curvatura. En este caso, las variables consideradas en este problema son la curvatura y la deformación axial. Para determinar la curva tensión media – deformación media, se incrementa, a cada paso, la deformación axial media. Luego, para cada deformación, se aplica el proceso descrito en la figura 18 mediante el método de la bisección.

El modelo es capaz de considerar distintos niveles de cargas, incrementando la deformación axial promedio. Para cada deformación promedio considerada, el equilibrio de fuerzas se resuelve de manera iterativa. El modelo considera una única variable: la curvatura adicional  $\Phi_p$ , asociada a la carga axial.

A cada deformación, se impone una curvatura  $\Phi_p$ , lo que permite determinar mediante un análisis seccional las deformaciones en cada fibra  $\varepsilon_i$ , y las tensiones asociadas  $f_i$  (aplicación de las leyes constitutivas del material). Así, conociendo la carga axial y momento resultantes, se realiza el equilibrio de momento y revisa si el error encontrado está dentro la tolerancia. En caso contrario se modifica el valor de la curvatura adicional  $\Phi_p$  mediante el método de la bisección. Otros métodos de iteración pueden ser implementados.

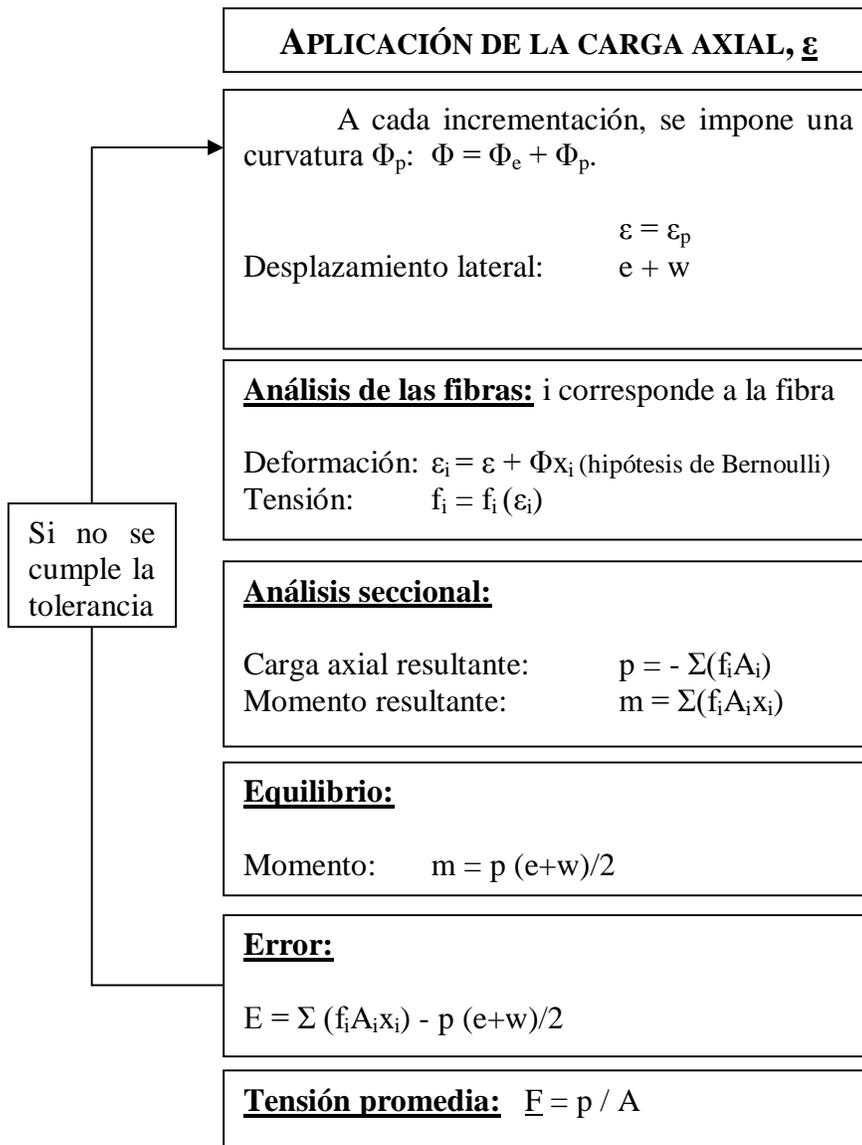
Detalle de las ecuaciones:

$$e + w = \frac{\sin(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)} \left( \frac{L}{2} - l_p \right) \quad (13)$$

$$\theta_e = \Phi_e l_p \quad (14)$$

$$\theta_p = \Phi_p l_p \quad (15)$$

$$\varepsilon = \left( \frac{-}{\varepsilon} - \left( 1 - 2 \frac{l_p}{L} \right) \left[ 1 - \frac{\cos(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)} \right] \right) \frac{L}{4l_p} \quad (16)$$



**Figura 18:** Proceso numérico definiendo la respuesta bajo carga axial

## 4. ANÁLISIS Y CALIBRACIÓN DEL MODELAMIENTO DEL PANDEO DE BARRAS LONGITUDINALES CON FALLA DE BAJO CICLO

### 4.1. ENSAYOS EXPERIMENTALES: PANDEO INELÁSTICO EN BARRAS DE REFUERZO

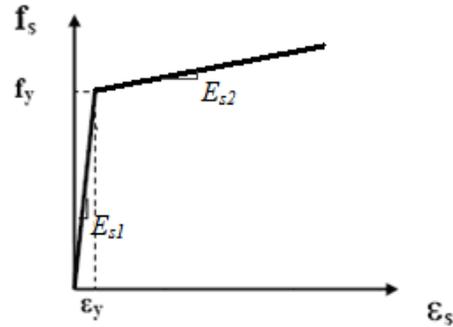
Originalmente, el modelo consideraba elementos en compresión y era capaz de representar correctamente el comportamiento monotónico en compresión. Sin embargo, si el elemento está sometido a ciclos de cargas tracción-compresión, los supuestos hechos inicialmente pueden no ser los correctos y resultar en una representación errónea del comportamiento cíclico del elemento. Por lo tanto, esta sección se enfoca en la validación del modelo numérico en el caso cíclico.

El trabajo de Monti y Nuti (1992), descrito en el Capítulo 2, muestra que al sobrepasar una razón  $L/d_b$  de 5 ( $L$ =longitud libre de la barra,  $d_b$ =diámetro de la barra), se observa pandeo inelástico de las barras longitudinales. Los ensayos cíclicos realizados consideraron dos razones  $L/d_b$ : 5 y 11. Adicionalmente, distintos patrones de deformación se aplicaron: amplitud de deformación simétricas con respecto a  $\varepsilon = 0$ , no simétricas, amplitud de deformación creciente, etc.

#### 4.1.1. Acero, ley constitutiva

En cuanto a las características del acero, se entregaron pocos datos como para fijar todos los parámetros de la curva definida en el Capítulo 3. Puesto que se entrega información a través de un modelo bilineal como ley constitutiva del acero (Figura 19), se modificó la curva de tracción para estos efectos.

Hasta el punto de fluencia ( $\varepsilon_y$ ,  $f_y$ ), la respuesta del acero es lineal-elástica, es decir, se caracteriza por una recta de pendiente igual al módulo de elasticidad del acero  $E_s$ . En este punto, el acero comienza a presentar endurecimiento, y así la respuesta del acero se caracteriza por una recta de pendiente menor al módulo de elasticidad ( $E_{sh}$ ), la cual está definida por la razón de endurecimiento  $b$  ( $b=E_{sh}/E_s$ ).



**Figura 19:** Curva monotónica del acero (comportamiento bi-lineal)

#### 4.1.2. Respuesta del modelo

En las tablas siguientes (tablas 1 y 2), se presentan respectivamente las características del acero para cada una de las barras ensayadas y el patrón de deformación aplicado.

Ensayos	L/d <sub>b</sub>	Módulo de elasticidad [Mpa]	Razón de endurecimiento b	Tensión de fluencia [Mpa]
A1	5	200000	0.03	470
C1	11	175000	0.03	470
A2	5	180000	0.04	470
C2	11	170000	0.03	470
A3	5	180000	0.03	430
C3	11	180000	0.03	430
A4	5	160000	0.04	450
C4	11	160000	0.04	450
C5	11	170000	0.03	430

**Tabla 1:** Propiedades mecánicas del acero

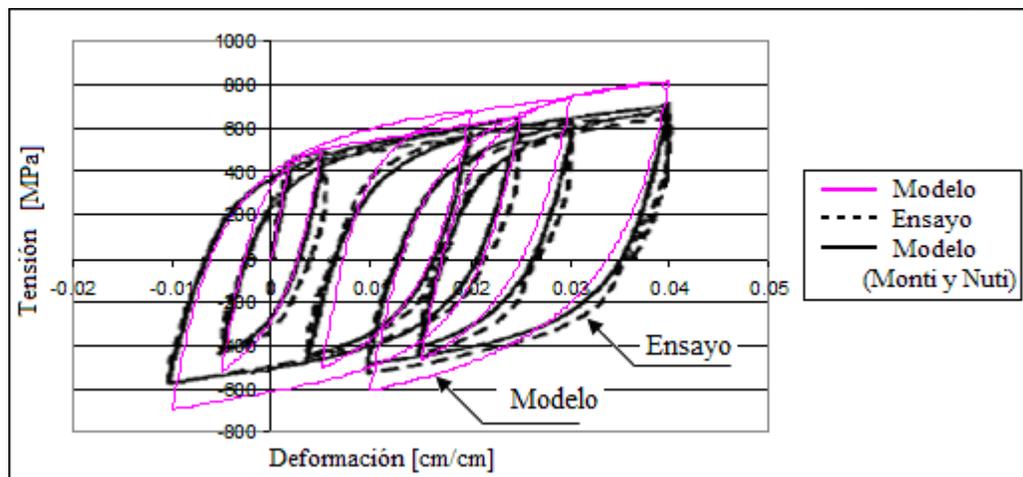
Ensayos	Patrón de deformación ε
A1,C1	+ 0.005 - 0.005 + 0.025 - 0.01 + 0.02 + 0.004 + 0.04 + 0.01 + 0.03 + 0.015 + 0.04
A2,C2	+ 0.01 + 0 + 0.015 - 0.005 + 0.02 - 0.005 + 0.04 + 0.015 + 0.03 + 0.005 + 0.04
A3,C3	3(+ 0.01 - 0.01) 2(+ 0.02 - 0.01) 4(+ 0.02 - 0.02)
A4,C4	2(+ 0.03 - 0.01) 2(+ 0.02 - 0.01) 4(+ 0.03 - 0.01)
C5	+ 0.01 - 0.01 + 0.02 - 0.01 + 0.03 - 0.01 + 0.04 - 0.03

**Tabla 2:** Patrones de deformación

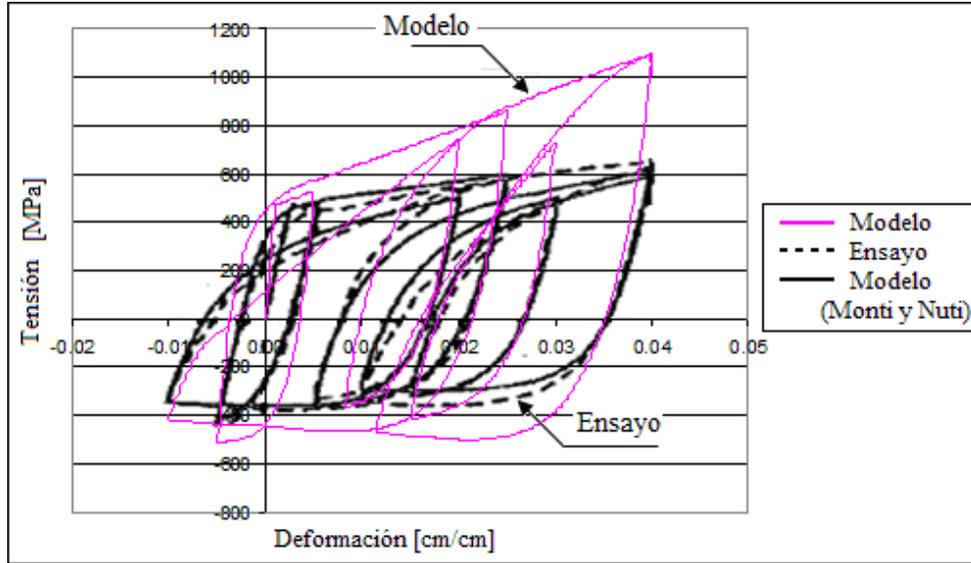
Las figuras 20 y 21 entregan los resultados obtenidos (tensión versus deformación axial media) respectivamente para una razón  $L/d_b$  igual a 5 y 11. Estas revelan algunos inconvenientes del modelo asociado fundamentalmente a la barra de mayor relación de aspecto ( $L/d_b = 11$ ):

- el modulo elástico inicial, en tracción, es cercano a 550.000 MPa (caso  $L/d_b = 11$ ), es decir, alrededor de 3 veces el modulo de elasticidad del acero,
- el modulo elástico post fluencia, en tracción, también aumenta considerablemente con la razón  $L/d_b$ . La razón de endurecimiento  $b$  se mantiene.

A pesar de estos errores, la respuesta en compresión destaca un comportamiento similar a los resultados experimentales: la pendiente inicial de la fase de recarga disminuye al aumentar la amplitud de deformación. Se observa un suavizamiento de la respuesta tensión-deformación a mayor longitud libre. La respuesta general de tracción tiende a sobre-estimar las tensiones.



**Figura 20:** Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 5$ ), caso A1



**Figura 21:** Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 11$ ), caso C1

El modelo descrito en el capítulo 3 consta de cuatro rótulas plásticas, de largo fijo  $l_p = d_b$ , donde se concentran todas las deformaciones. No obstante, esto refleja correctamente el comportamiento en compresión de las barras de acero, no es así en tracción. La idea original del modelo consideraba elementos en compresión que se deformaban mayoritariamente por flexión lo que hace suponer que las rotaciones de las secciones controlaban el comportamiento. Al concentrar todas las deformaciones dentro de las rótulas, el comportamiento monotónico en compresión es bien capturado por el modelo. Sin embargo, si el elemento presenta tracciones, la concentración de deformaciones se hace menos realista. Basta considerar, por ejemplo, el posible caso de una barra cargada exclusivamente en tracción. En este caso no existirían rotaciones y las deformaciones axiales se seguirían acumulando en las rótulas, aunque estas deformaciones pueden perfectamente ser distribuidas a lo largo de toda la barra mientras no se alcance la máxima tensión de tracción. De esta forma, para relaciones de aspecto ( $L/d_b$ ) mayores a 4 la respuesta de tensión versus deformación media resultaría en curvas con mayores rigideces, como se muestra principalmente en la figura 21 durante el inicio de la carga de tracción.

Con el fin de mejorar la respuesta en tracción, alternativamente, se consideró que sólo las curvaturas estaban concentradas en las rótulas, así la definición de la deformación  $\varepsilon$  se consideró en el largo total de la barra. Este cambio tiene impacto en el cálculo de las tensiones en compresión puesto que ahora la deformación  $\varepsilon$  estará distribuida en toda la barra: la deformación  $\varepsilon$  está definida como:

$$\varepsilon = \left( \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} - \left( 1 - 2 \frac{l_p}{L} \right) \left[ 1 - \frac{\cos(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)} \right] \right) \quad (17)$$

Las figuras 22 y 23, que incluyen esta modificación, muestran un mejoramiento de la respuesta del modelo en tracción, corrigiendo la rigidez observada en tracción, aunque todavía existen diferencias en compresión. Los resultados presentados en el anexo A corroboran aquellas observaciones. Para efectos de los análisis en las secciones siguientes se considerará esta formulación alternativa del modelo.

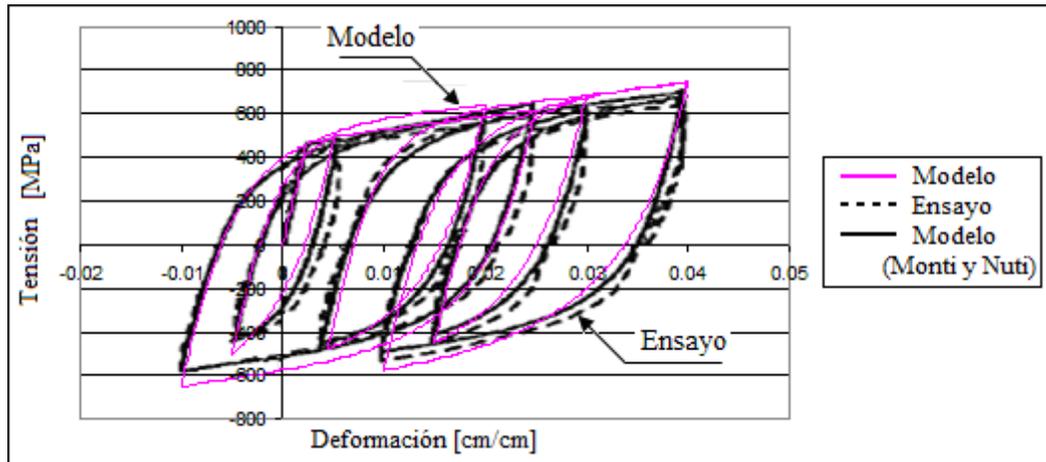


Figura 22: Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 5$ ), caso A1

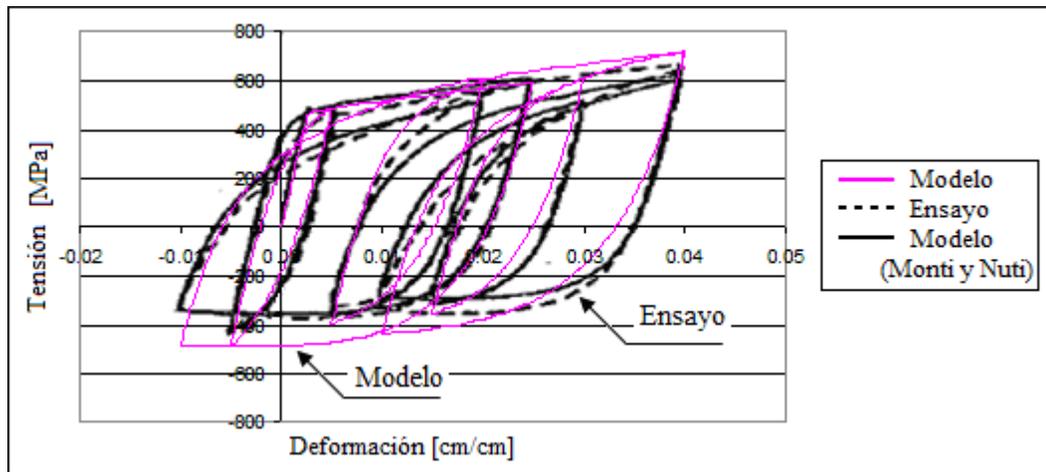


Figura 23: Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 11$ ), caso C1

#### 4.2. ENSAYOS EXPERIMENTALES: FATIGA DE BAJOS CICLOS

Puesto que el fin de este trabajo consiste en determinar cuál es el impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos, se estudió y comparó la respuesta numérica entregada por el modelo con resultados experimentales de Mander et al.(1994) y Brown (1999).

#### 4.2.1. Ensayos realizados por Mander et al.(1994)

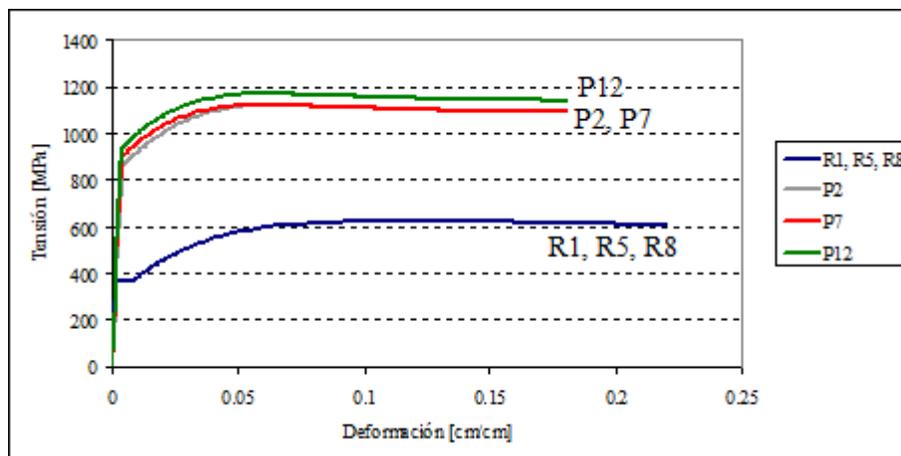
Mander aplicó, para todos los ensayos realizados, una amplitud de deformación constante pero consideró tanto deformaciones máximas en tracción y en compresión iguales como distintas. El dispositivo experimental utilizado incluía un sistema electro-hidráulico, el cual era capaz de realizar ensayos a amplitudes de deformación, o carga, tanto constante o variable.

Mander ensayó barras de diámetro 15.9 mm, pero de distintos tipos de acero: uno de alta resistencia, y uno de baja resistencia. A pesar de que se entregaron las curvas representativas de acero en tracción, existen variabilidades de las propiedades entre distintas barras. Puesto que los ensayos cíclicos considerados contemplaron una primera etapa de carga monotónica, para cada uno de los ensayos se calibraron los parámetros de la curva de tracción monotónica con el inicio de los ensayos cíclicos para representar mejor la respuesta observada.

En la tabla siguiente, se presentan los distintos parámetros utilizados según el tipo de acero. La deformación última corresponde a la deformación corregida según lo indicado por Mander, quien utilizó un extensómetro de largo igual a 47.54 mm.

Ensayos	s/d <sub>b</sub>	d <sub>b</sub> [mm]	F <sub>y</sub> [Mpa]	E <sub>s</sub> [Mpa]	E <sub>sh</sub> [Mpa]	ε <sub>sh</sub>	F <sub>sm</sub> [Mpa]	ε <sub>sm</sub>	F <sub>su</sub> [Mpa]	ε <sub>su</sub>
R1, R5, R8	6	15,9	365	320000	8861,75	0,008	623	0,144	609	0,22
P2	6	15,9	860	225000	11030	0,0039	1118,3	0,063	1088,6	0,18
P7	6	15,9	900	250000	11030	0,0039	1118,3	0,063	1088,6	0,18
P12	6	15,9	940	270000	11030	0,0039	1168	0,063	1137	0,18

**Tabla 3:** Características mecánicas del acero



**Figura 24:** Curvas monotónicas según el tipo de acero, ensayos de Mander

#### 4.2.2. Ensayos realizados por Brown (1999)

En cuanto al programa de ensayos de Brown, este consideró sólo un tipo de acero (tensión de fluencia nominal de 420 MPa), ensayándose barras de refuerzo de tres diámetros distintos: 19.1 mm, 22.2 mm, y 25.4 mm. Para los ensayos aplicó amplitudes de deformación constante, considerando deformaciones máximas en tracción y compresión iguales.

La solución adoptada por Brown, con respecto al dispositivo experimental, considera al igual que Mander, un sistema electro-hidráulico, el cual impone las deformaciones al desplazar la parte inferior del conjunto donde se ubica la probeta. Por otra parte, para transmitir los esfuerzos a la barra de acero, se ubicó un material blando (en este caso aluminio) entre las mordazas y la barra, que requirió calibración y corrección de las deformaciones medidas por los LVDT, como se detalló en el Capítulo 2.

Al igual que en el caso de Mander et al(1994) los parámetros de la curva de tracción fueron calibrados usando un ajuste a la respuesta de la etapa inicial de los ensayos cíclicos. Luego, se modificó la tensión máxima  $F_{sm}$  y la tensión última  $F_{su}$  considerando que la proporción entre la tensión de fluencia y respectivamente la tensión máxima o última se conservaba.

Las tablas siguientes presentan un resumen de los distintos parámetros según el diámetro. Brown realizó sus ensayos utilizando un extensómetro de largo igual a 50.8 mm para medir las deformaciones. Con ello, se corrigió el valor de la deformación última entregada por el autor.

Estudio y modelamiento del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos en barras longitudinales para hormigón armado

---

Ensayos	s/d <sub>b</sub>	d <sub>b</sub> [mm]	F <sub>y</sub> [Mpa]	E <sub>s</sub> [Mpa]	E <sub>sh</sub> [Mpa]	ε <sub>sh</sub>	F <sub>sm</sub> [Mpa]	ε <sub>sm</sub>	F <sub>su</sub> [Mpa]	ε <sub>su</sub>
# 21	6	19,1	550	180000	8000	0,018	705,4	0,106	664,1	0,175
# 22	6	19,1	556	170000	6000	0,018	713,1	0,106	671,4	0,175
# 24	6	19,1	556	170000	6000	0,018	713,1	0,106	671,4	0,175
# 25	6	19,1	556	200000	6000	0,018	713,1	0,106	671,4	0,175
# 26	6	19,1	556	170000	6000	0,018	713,1	0,106	671,4	0,175

**Tabla 4:** Características mecánicas del acero (d<sub>b</sub> = 19,1 mm)

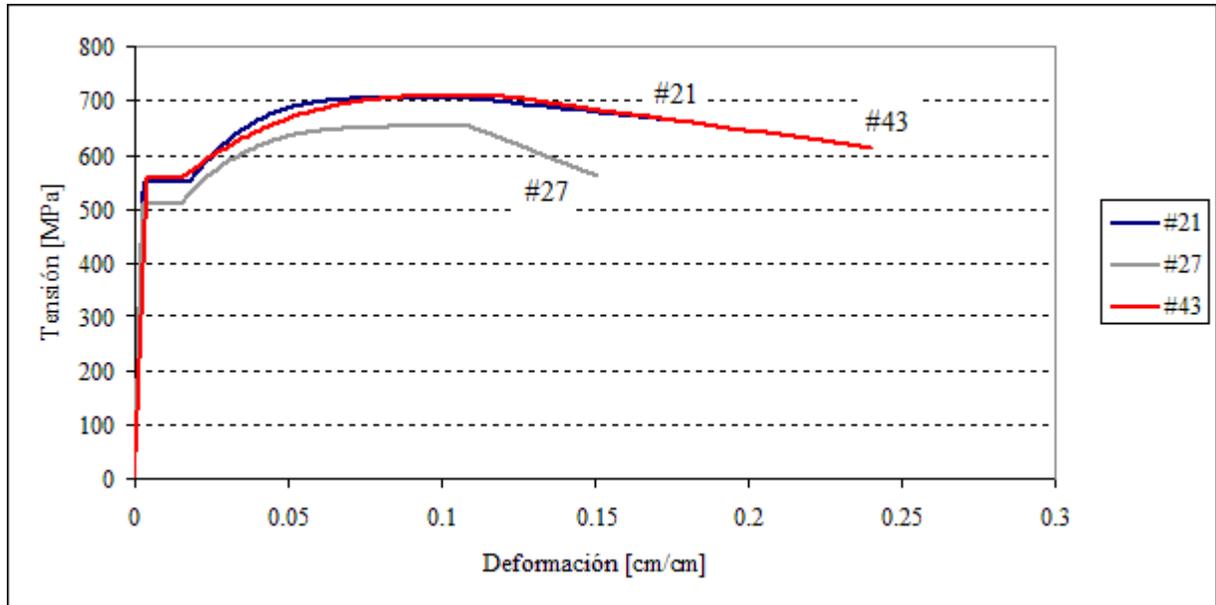
Ensayos	s/d <sub>b</sub>	d <sub>b</sub> [mm]	F <sub>y</sub> [Mpa]	E <sub>s</sub> [Mpa]	E <sub>sh</sub> [Mpa]	ε <sub>sh</sub>	F <sub>sm</sub> [Mpa]	ε <sub>sm</sub>	F <sub>su</sub> [Mpa]	ε <sub>su</sub>
# 27	6	22,2	511	195000	6500	0,015	652	0,109	562,5	0,15
# 28	6	22,2	525	165000	6500	0,013	669,9	0,109	577,9	0,15
# 29	6	22,2	511	165000	6500	0,013	652	0,109	562,5	0,15
# 30	6	22,2	525	165000	6500	0,013	669,9	0,109	577,9	0,15
# 31	6	22,2	511	165000	6500	0,011	652	0,109	562,5	0,15
# 32	6	22,2	511	160000	6500	0,011	652	0,109	562,5	0,15
# 33	6	22,2	531	165000	6500	0,013	677,5	0,109	584,5	0,15
# 36	6	22,2	511	130000	6500	0,013	652	0,109	562,5	0,15

**Tabla 5:** Características mecánicas del acero (d<sub>b</sub> = 22,2 mm)

Ensayos	s/d <sub>b</sub>	d <sub>b</sub> [mm]	F <sub>y</sub> [Mpa]	E <sub>s</sub> [Mpa]	E <sub>sh</sub> [Mpa]	ε <sub>sh</sub>	F <sub>sm</sub> [Mpa]	ε <sub>sm</sub>	F <sub>su</sub> [Mpa]	ε <sub>su</sub>
# 43	6	25,4	556	135000	4500	0,015	710	0,116	611,9	0,24
# 44	6	25,4	556	160000	3000	0,014	710	0,116	611,9	0,24
# 45	6	25,4	554	135000	3000	0,015	707,4	0,116	609,7	0,24
# 46	6	25,4	554	160000	3000	0,015	707,4	0,116	609,7	0,24
# 47	6	25,4	554	155000	3000	0,015	707,4	0,116	609,7	0,24

**Tabla 6:** Características mecánicas del acero (d<sub>b</sub> = 25,4 mm)

---



**Figura 25:** Curvas monotónicas calibradas según los ensayos de Brown

#### 4.3. RESULTADOS

Como ya se mencionó, Mander y Brown realizaron ensayos a la fatiga de bajo ciclo considerando distintas amplitudes de deformaciones (Tabla 7, 8). En los casos estudiados consideraron una longitud libre de la barra igual a 6 veces el diámetro.

Luego, conociendo las características mecánicas del acero y las deformaciones máximas aplicadas tanto en tracción como en compresión, se generó mediante el modelo numérico de plasticidad concentrada las curvas de respuesta tensión versus deformación media. Como se observará posteriormente, los ciclos de respuesta tienden a estabilizarse, de esta forma sólo se consideraron los primeros 15 ciclos donde las diferencias entre los últimos ciclos son despreciables. Adicionalmente, puesto que tanto Mander como Brown consideraron barras geoméricamente perfectas, se impuso una pequeña imperfección ( $e = 0.01$ ) para que sea posible reproducir el pandeo. Al no considerar esta imperfección inicial, el modelo numérico sólo reproduciría la respuesta cíclica del material.

Estudio y modelamiento del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos en barras longitudinales para hormigón armado

Ensayo	$d_b$ [mm]	$\epsilon_{max}$	Ensayo	$d_b$ [mm]	$\epsilon_{max}$
P2	15,9	0,01	R1	15,9	0,03
P7	15,9	0,026	R5	15,9	0,02
P12	15,9	0,035	R8	15,9	0,008

**Tabla 7:** Deformaciones máximas aplicadas (Mander)

Ensayo	$d_b$ [mm]	$\epsilon_{max}$	Ensayo	$d_b$ [mm]	$\epsilon_{max}$
# 21	19,1	0,015	# 31	22,2	0,0275
# 22	19,1	0,0175	# 32	22,2	0,015
# 24	19,1	0,025	# 33	22,2	0,0125
# 25	19,1	0,03	# 36	22,2	0,03
# 26	19,1	0,0225	# 43	25,4	0,015
# 27	22,2	0,02	# 44	25,4	0,02
# 28	22,2	0,0175	# 45	25,4	0,025
# 29	22,2	0,0225	# 46	25,4	0,0175
# 30	22,2	0,025	# 47	25,4	0,0225

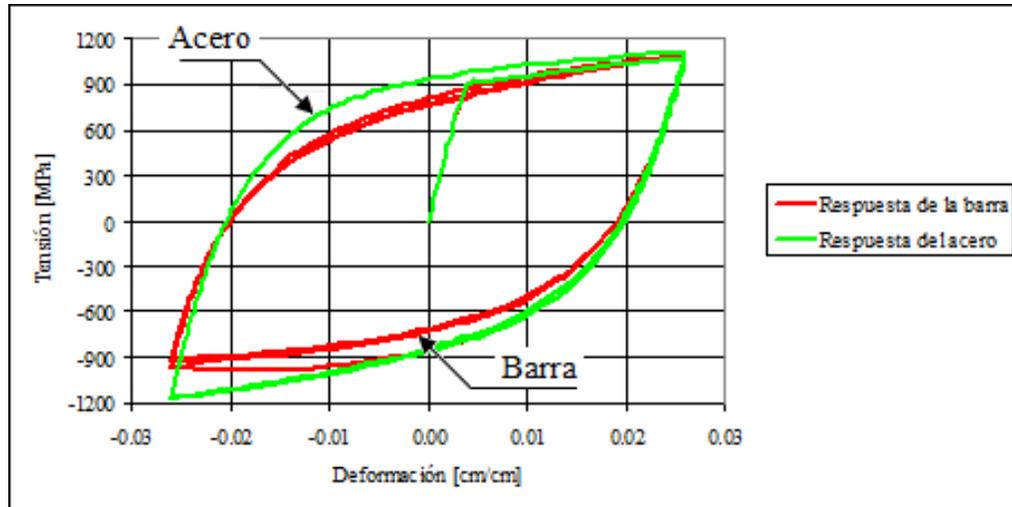
**Tabla 8:** Deformaciones máximas aplicadas (Brown)

Primero, se generó numéricamente la respuesta cíclica del acero bajo la aplicación de ciclos tracción-compresión. El objetivo de esto consiste en mostrar la influencia del pandeo, comparando la respuesta numérica del material de acero y la respuesta numérica de la barra como modelo de plasticidad concentrada, usándose como base ejemplos de ensayos de Brown y Mander.

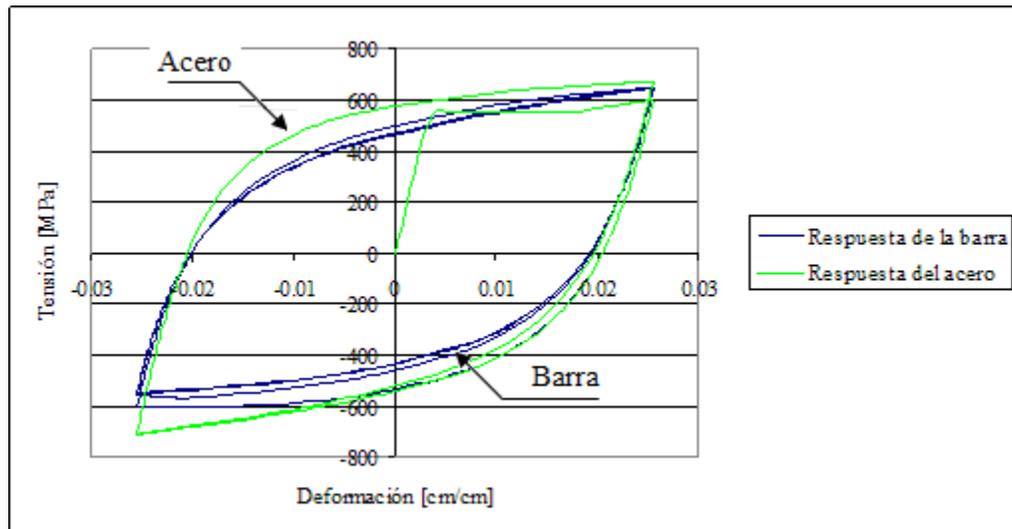
En las figuras 26 y 27, se puede apreciar que el elemento está, inicialmente, sometido a tracción. Durante esta fase, las respuestas del material y de la barra son idénticas. Una vez alcanzada la deformación máxima en tracción, se inicia la fase de descarga durante la cual las dos curvas divergen. Al fin de esta fase, la barra se deformó transversalmente, producto del efecto del pandeo y muestra, en comparación con la respuesta del material, una pérdida de la capacidad. Eso también tiene impacto en el comportamiento en tracción: al final del primer ciclo, existe una degradación de la capacidad en tracción, además del endurecimiento. Los ciclos posteriores no tienen influencia significativa en la respuesta del material: no se observa degradación del material a medida que se aplican los ciclos (Figura 26 y 27).

## Estudio y modelamiento del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos en barras longitudinales para hormigón armado

Además, el impacto del pandeo aumenta con la amplitud de deformación (Anexo B y C), donde se observa que al aumentar la amplitud de deformación, la degradación de la capacidad es mayor.



**Figura 26:** Respuesta tensión versus deformación (Mander, ensayo P7)



**Figura 27:** Respuesta tensión versus deformación (Brown, ensayo #24)

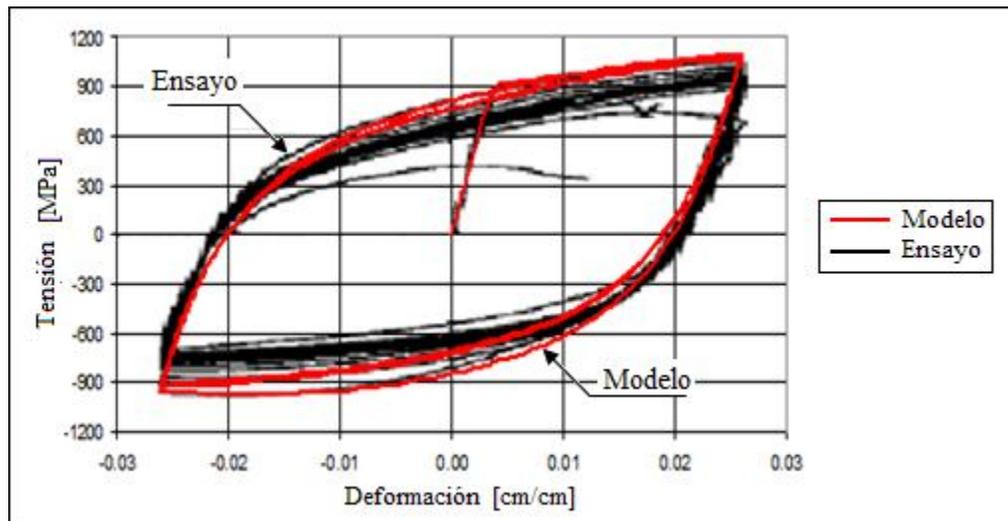
Los resultados observados en las figuras 26 y 27 indican que el inicio de pandeo tiene una ingerencia en la respuesta de las barras, incluso para relaciones de esbeltez de  $(L/d_b)$  igual a 6. El pandeo tiende a degradar la respuesta analítica, especialmente en compresión, disminuyéndose la capacidad de tensión máxima observada en ciclos consecutivos. Esta degradación, sin embargo, tiende a estabilizarse

## Estudio y modelamiento del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos en barras longitudinales para hormigón armado

con el número de ciclos. Para validar esta respuesta numérica, se han comparado la respuesta de la barra según el modelo de plasticidad concentrada y los ensayos de Brown y Mander.

Como se ve en las figuras 28, 29 y 30 (adicionalmente en anexos B y C), en la medida que se van aplicando los distintos ciclos, que en estos casos considera un nivel de deformaciones máximas constantes, al incursionar en compresión la barra tiende a deformarse transversalmente producto del efecto de pandeo sobre ésta. El pandeo, al aumentar las tensiones locales al nivel de las rótulas plásticas, degrada la capacidad global o tensión media de compresión de la barra, pudiendo así generar un deterioro progresivo de la capacidad. Esto también repercute en el comportamiento a tracción.

Los primeros ciclos tracción-compresión de las respuestas tensión-deformación de las barras, numérica y experimental son similares. Al seguir aplicando estos ciclos, las dos curvas empiezan a divergir: la curva de respuesta experimental presenta un deterioro progresivo de la tensión media de la barra en compresión y en tracción hasta la ruptura mientras que la curva de respuesta numérica se estabiliza. Aparentemente, esta degradación adicional tiende a ser producto de la fatiga de bajo ciclo, mientras que la degradación inicial es debida al efecto del pandeo.



**Figura 28:** Respuesta tensión versus deformación (Mander, caso P7)

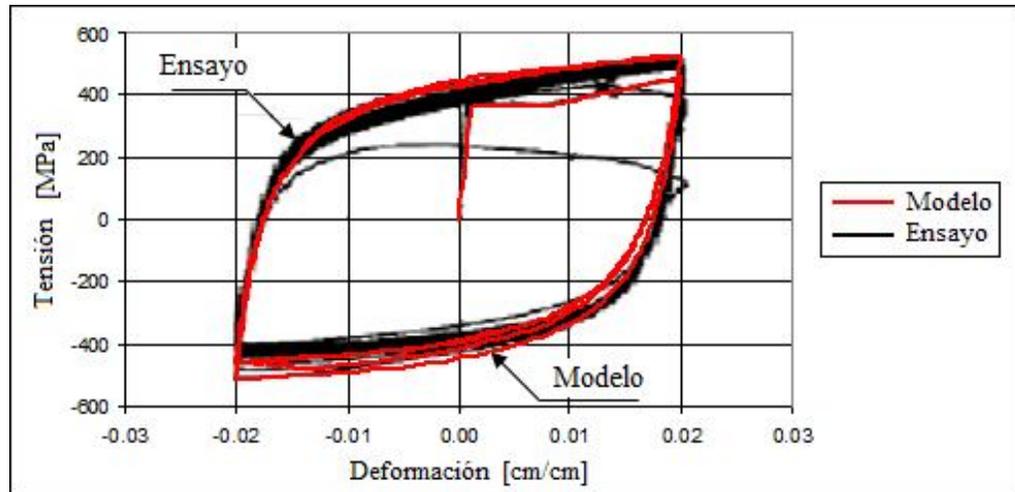


Figura 29: Respuesta tensión versus deformación (Mander, caso R5)

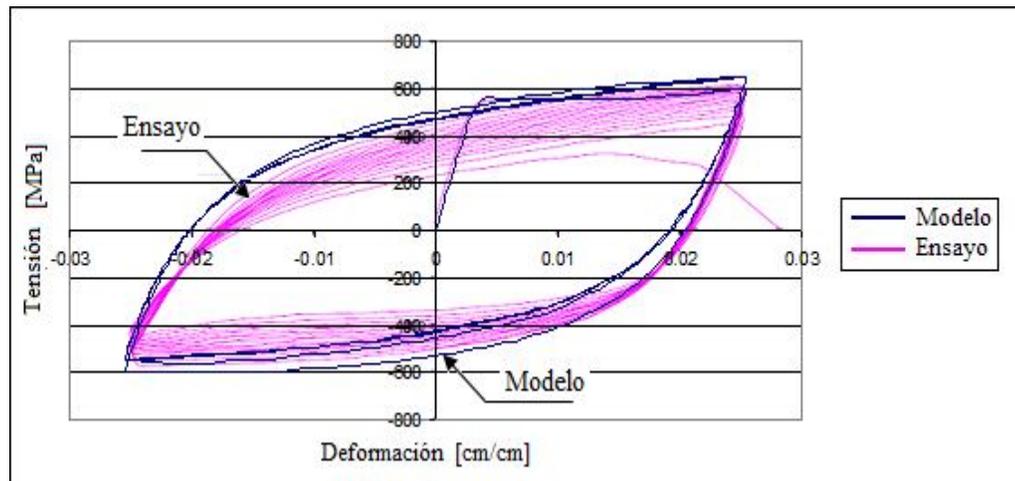


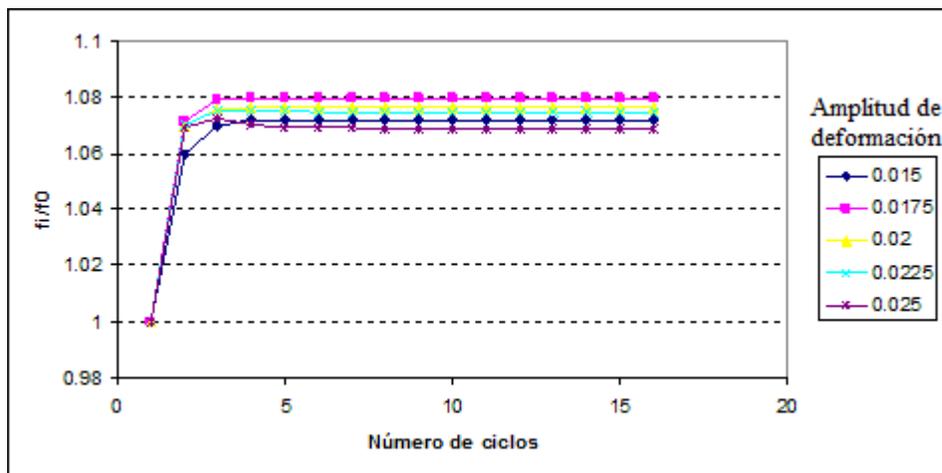
Figura 30: Respuesta tensión versus deformación (Brown, ensayo #24)

#### 4.4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para cuantificar la degradación de la tensión para la deformación máxima de tracción y compresión, se normalizó la tensión alcanzada en el ciclo  $i$ ,  $f_i$ , con respecto a la tensión inicial para la máxima deformación,  $f_0$ . Se graficaron, las tensiones normalizadas de compresión y tracción, así obtenidas, de manera separada versus el número de ciclos aplicados: el total de 15 ciclos en el caso de la respuesta numérica, y el número de ciclos antes de la ruptura en el caso de los ensayos experimentales.

Considerando que el modelo de plasticidad concentrada permite una representación correcta del comportamiento de una barra susceptible de pandearse bajo cargas axiales cíclicas e imperfecciones iniciales, como fue detallado en la sección anterior, la degradación de la capacidad global sólo es producto del efecto del pandeo: en efecto no incluye ningún modelo de daño por fatiga. Los ensayos a la fatiga de bajo ciclo incluyen aparentemente los efectos del pandeo y de la fatiga.

Sin embargo, también cabe mencionar algunos aspectos observados en los gráficos relativos a la tensión normalizada de tracción. Por definición, la tensión normalizada es igual a 1 para el primer ciclo. Al aplicar el segundo ciclo, la razón  $f_i/f_0$  es mayor que 1, consecuencia del endurecimiento del material. El nivel máximo de endurecimiento depende de la amplitud de deformación impuesta y también de la calidad del acero. Ésta tiende a aumentar con la amplitud de deformación mientras no se sobrepase el punto de máxima capacidad a tracción del material (Figura 31). Adicionalmente, en los casos estudiados, ésta tiende a disminuir al usar un acero de alta resistencia. Experimentalmente, las mismas observaciones pueden ser hechas. Sin embargo, el aumento observado tiende a ser menor (comúnmente hasta 5%) y no aparece endurecimiento del material a baja amplitud de deformación cuando el acero es de alta resistencia.



**Figura 31:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos, analítico (Brown,  $d_b= 25.4$  mm)

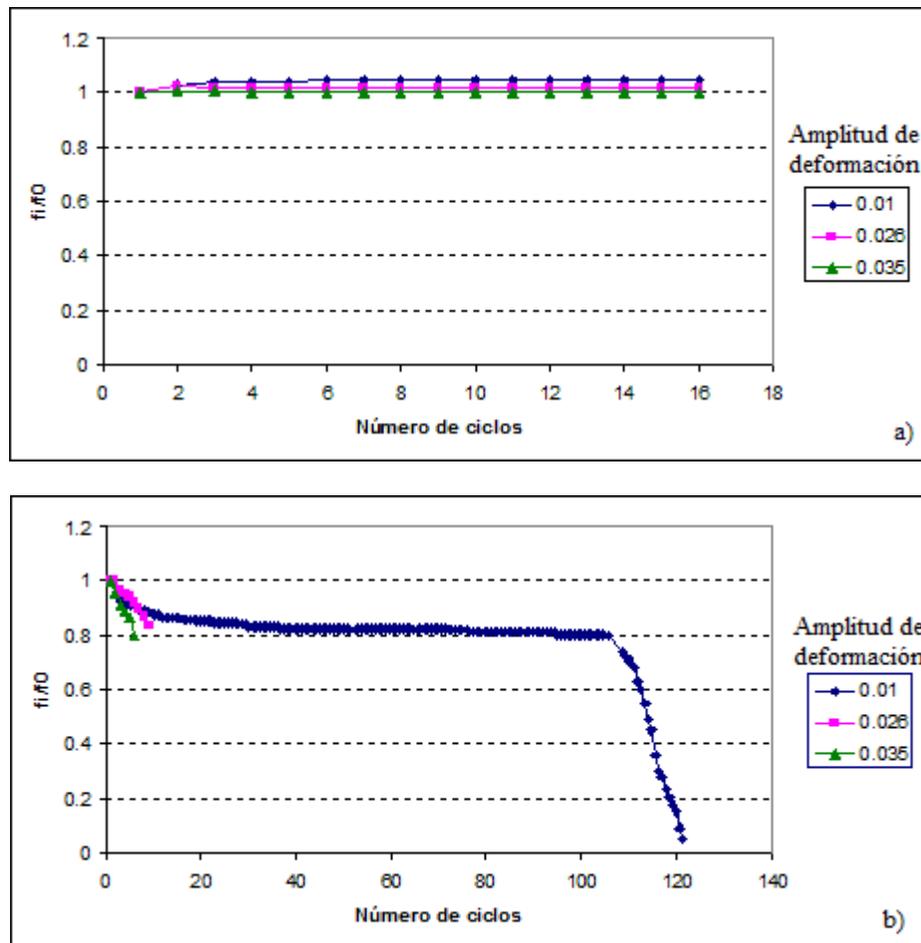
Debido a las diferencias relativas a la calidad del acero y a la amplitud de deformación, el aumento de la razón  $f_i/f_0$  (deducido de los resultados analíticos) sufre algunas variaciones (Figuras 31 a 36):

- en el caso del acero de baja resistencia (ensayos de Mander, referenciados como Ri), el aumento varía entre un 5% y un 15% del valor inicial,

## Estudio y modelamiento del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos en barras longitudinales para hormigón armado

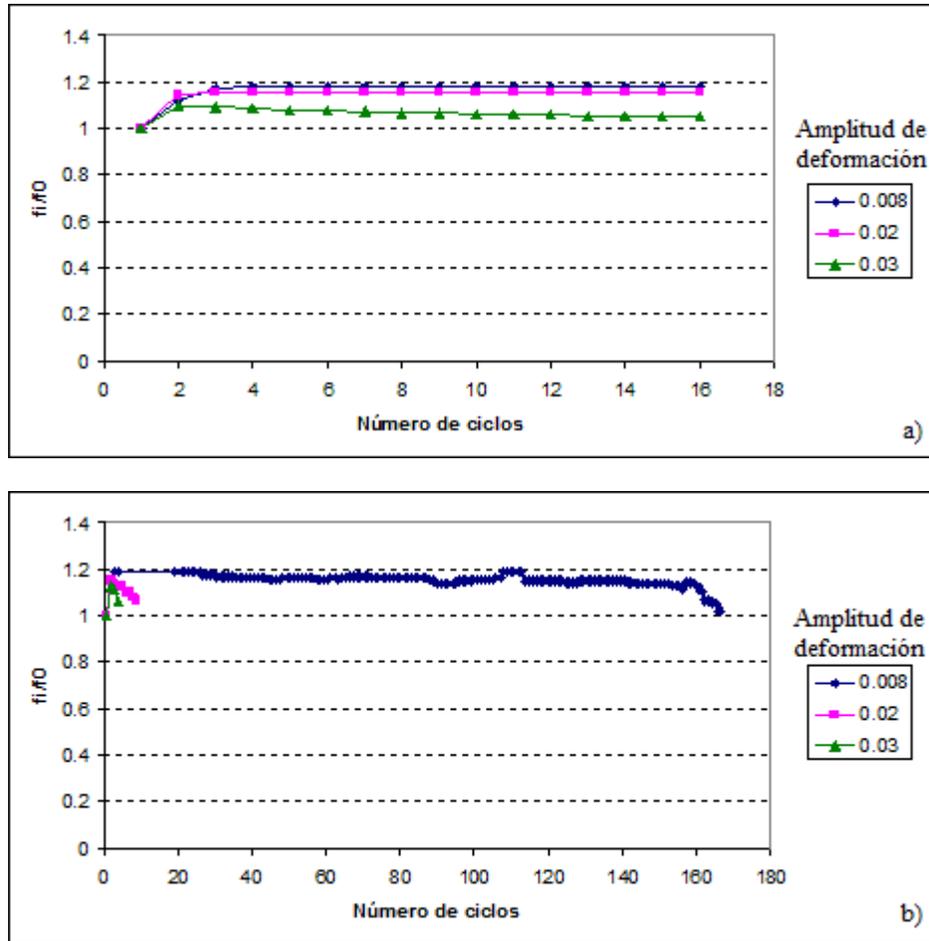
- en el caso del acero de alta resistencia (ensayos de Mander, referenciados como Pi), alcanza un 3%,
- en el caso de los ensayos de Brown ( $f_y = 420$  MPa), se observa un aumento de entre el 4% y el 9%. En este caso, distintos diámetros de barras fueron considerados. Sin embargo, este parámetro no parece tener influencia.

Una vez estabilizada la razón máxima  $f_i/f_0$  durante los primeros ciclos, esta razón comienza a disminuir, dependiendo del nivel de deformación, hasta una razón límite que para los casos estudiados generalmente no resulta en un descenso mayor al 1% del valor máximo observado. La misma curva, experimental, muestra que la tensión media de tracción de la barra no se estabiliza sino que sigue degradándose a medida que se aplican los ciclos hasta la falla del elemento. Además, la curva experimental presenta una tasa de decaimiento de la tensión media mayor a amplitudes de deformaciones mayores.

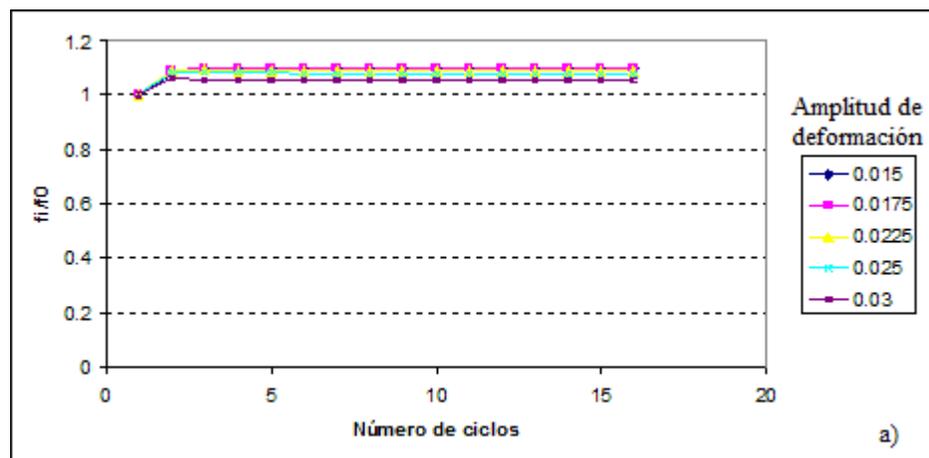


**Figura 32:**

$f_i/f_0$  versus número de ciclos, analítico a) y experimental b) (Mander, acero de alta resistencia P)



**Figura 33:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos, analítico a) y experimental b) (Mander, acero de baja resistencia R)



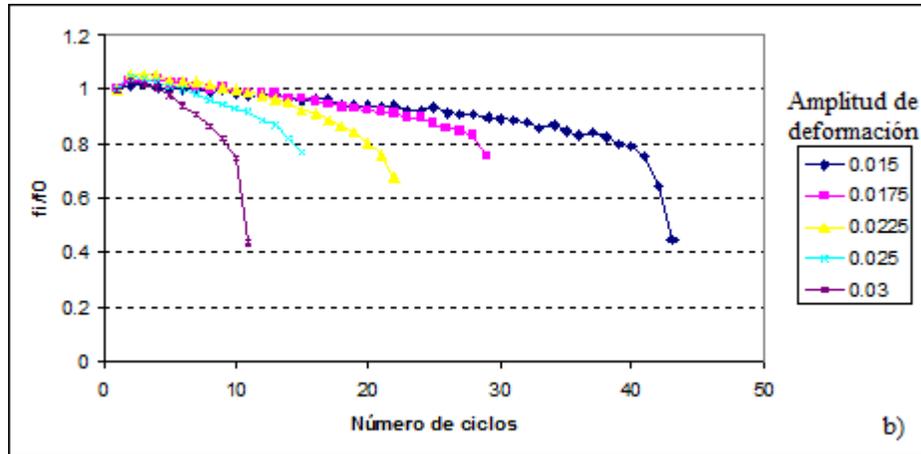


Figura 34:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos, analítico a) y experimental b) (Brown,  $d_b= 19,1$  mm)

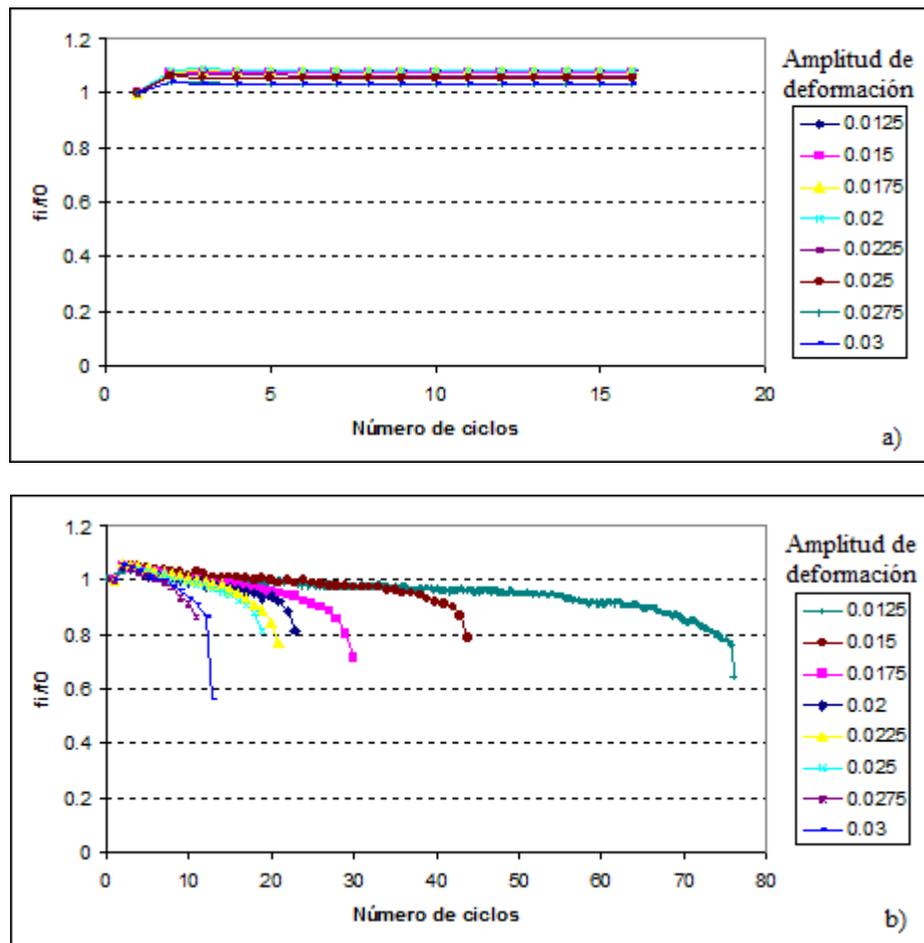
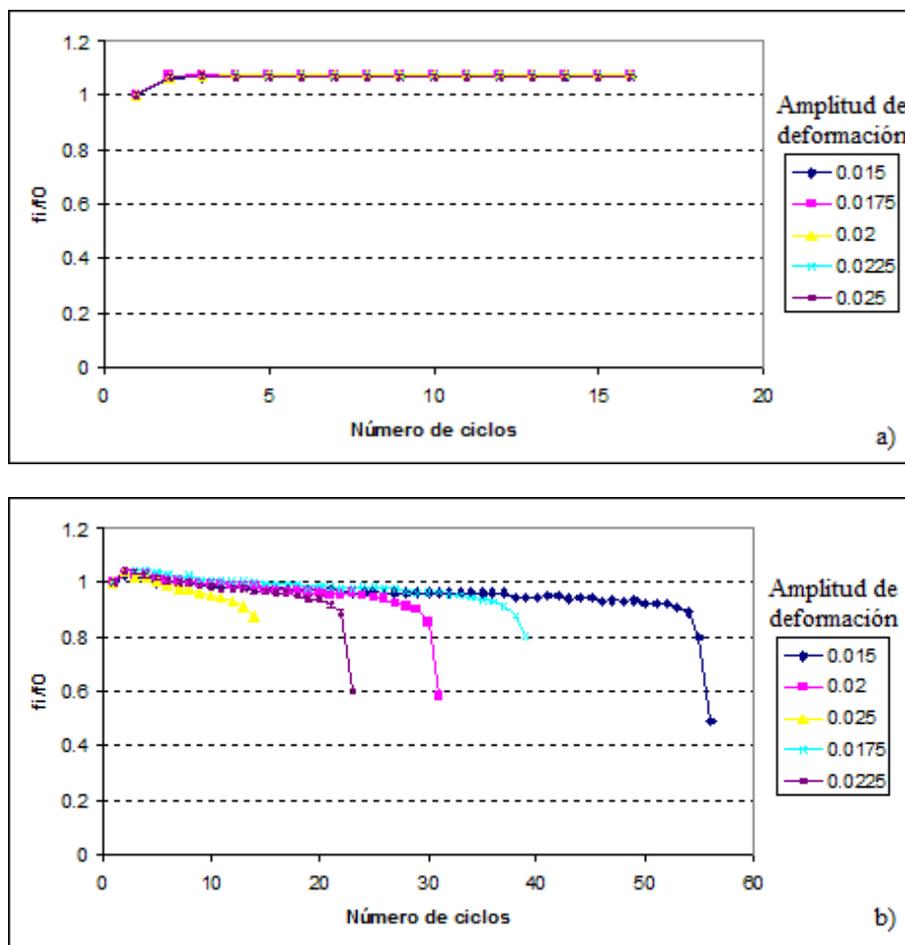


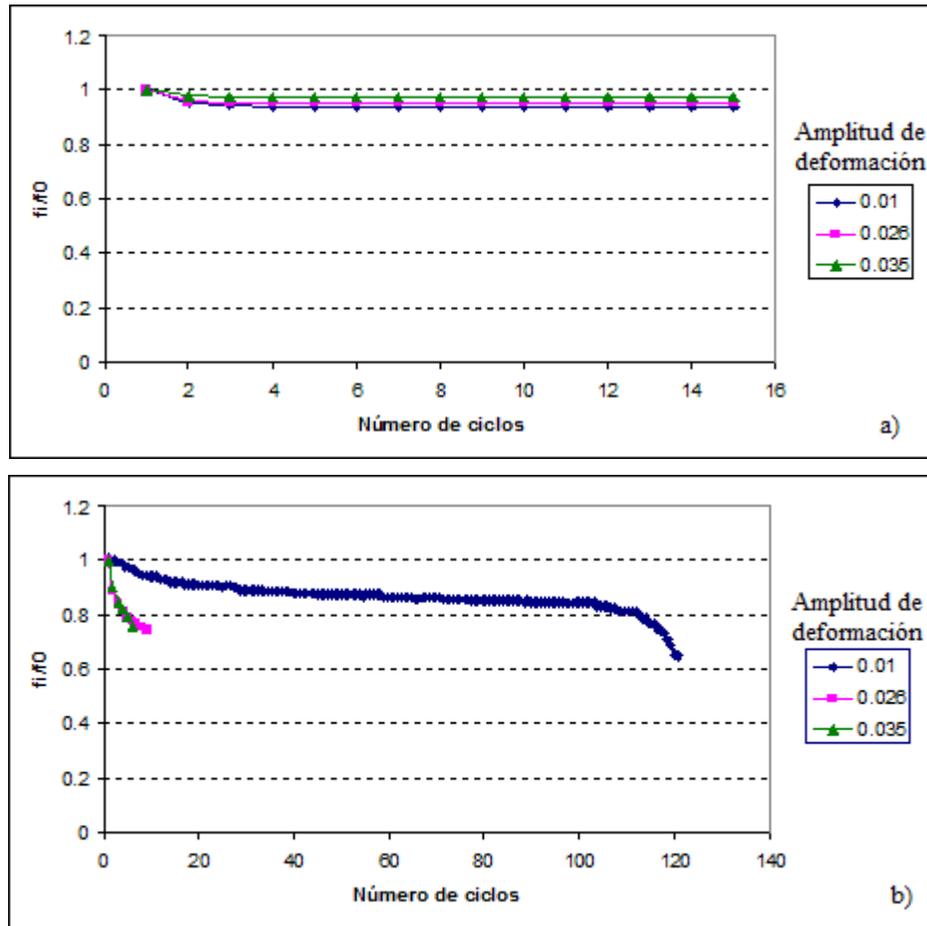
Figura 35:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos, analítico a) y experimental b) (Brown,  $d_b= 22.2$  mm)



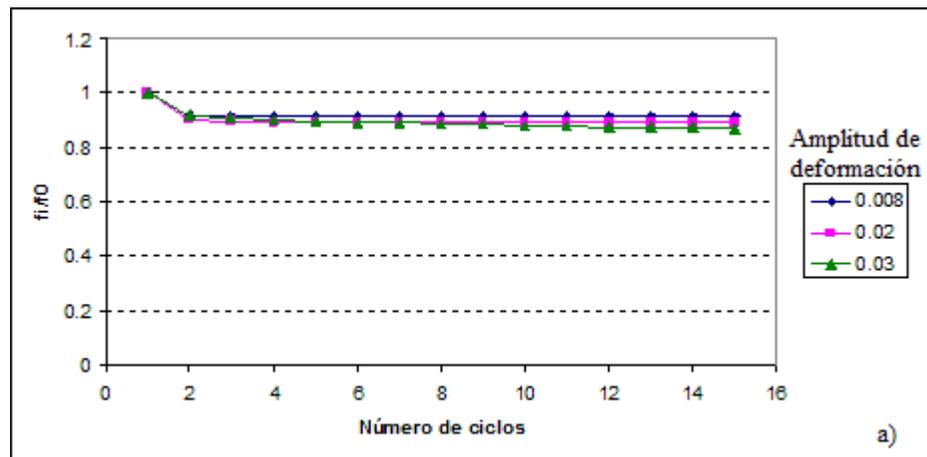
**Figura 36:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos, analítico a) y experimental b) (Brown,  $d_b= 25.4$  mm)

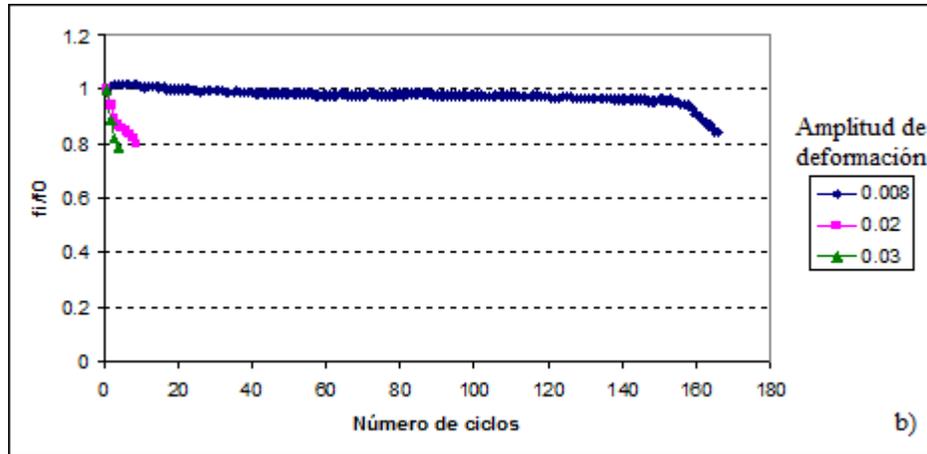
Análogamente, estas curvas pueden ser obtenidas considerando las tensiones para la amplitud máxima de deformación en compresión (Figuras 37 a 41). En este caso, no hay endurecimiento de tal forma que la razón  $f_i/f_0$  empieza a disminuir inmediatamente. Analíticamente, resulta en un descenso entre el 5% y el 12%, dependiendo de la amplitud de deformación, y de la calidad del acero. El descenso de la capacidad global de la barra tiende a ser menor cuando el acero tiene una mayor resistencia. Al parecer, los casos estudiados no revelan ninguna tendencia en cuanto a la variación de la tasa de decaimiento de la tensión media de la barra con respecto al nivel de deformación, aunque se podría esperar que ésta aumentara con la amplitud de deformación.

En cuanto a los resultados experimentales, la reducción de la capacidad global de la barra antes de la ruptura tiende a ser mayor (cercana al 20% de la capacidad inicial, aproximadamente el doble del descenso obtenido numéricamente), lo que indicaría que el pandeo tendría un impacto en la reducción de la tensión de compresión sólo para estos ciclos iniciales en la falla por fatiga de bajo ciclo.



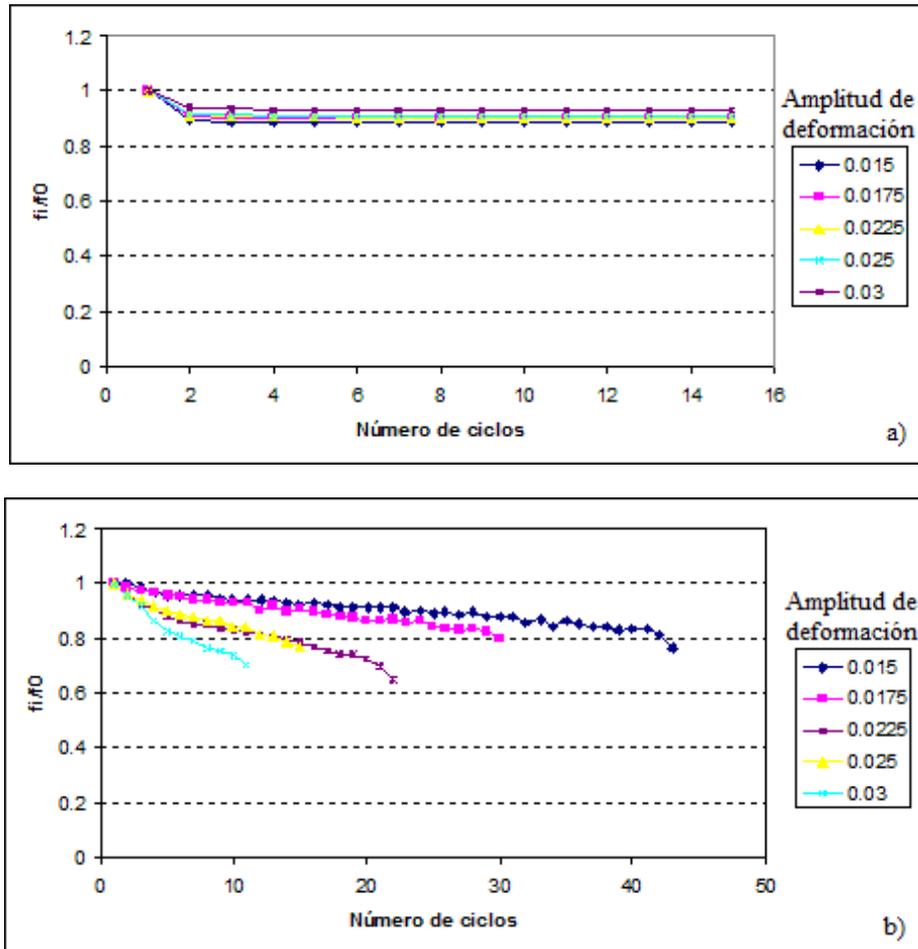
**Figura 37:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos, analítico a) y experimental b) (Mander, acero de alta resistencia P)





**Figura 38:**

$f_i/f_0$  versus número de ciclos, analítico a) y experimental b) (Mander, acero de baja resistencia R)



**Figura 39:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos, analítico a) y experimental b) (Brown,  $d_b= 19,1$  mm)

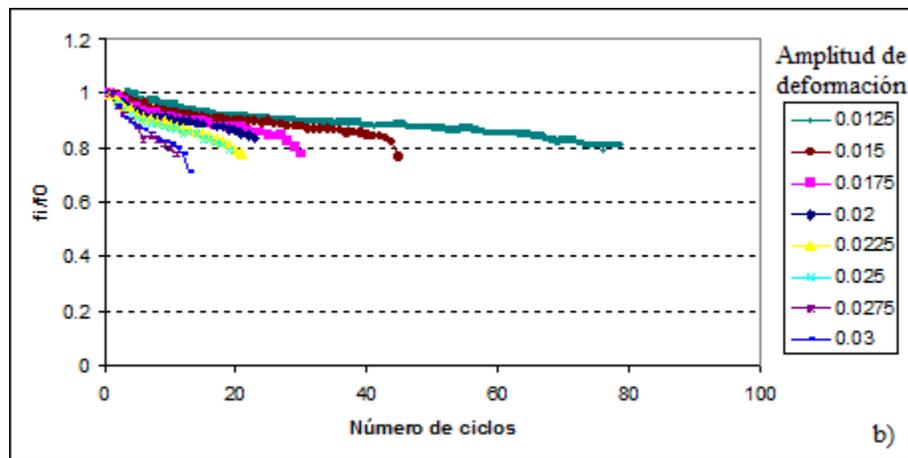
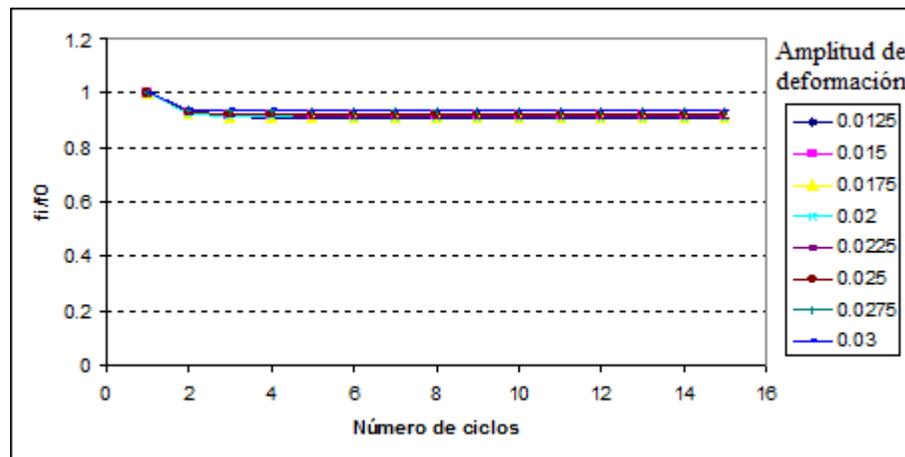
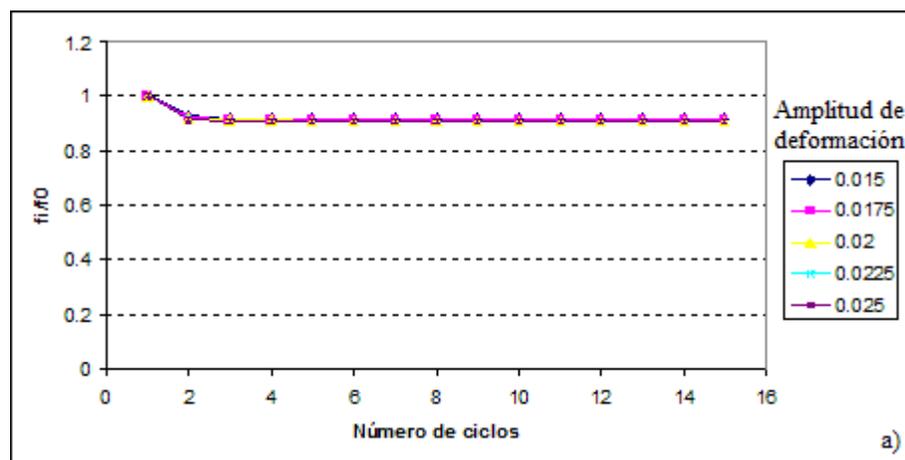
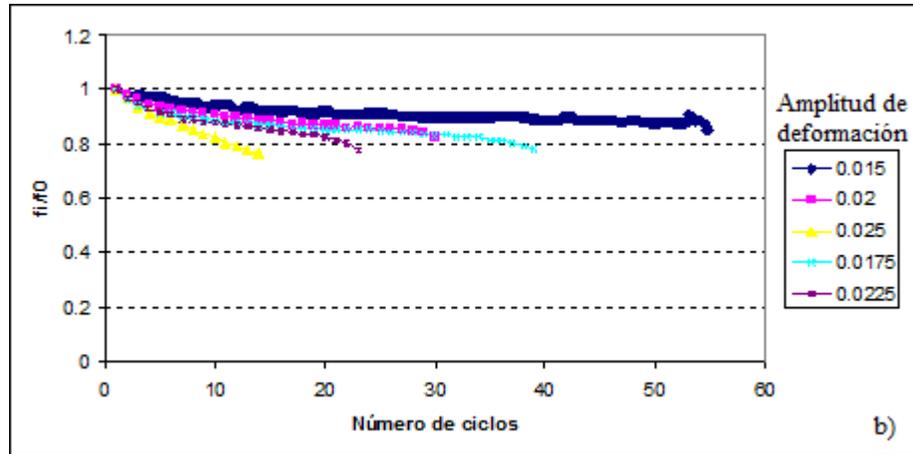


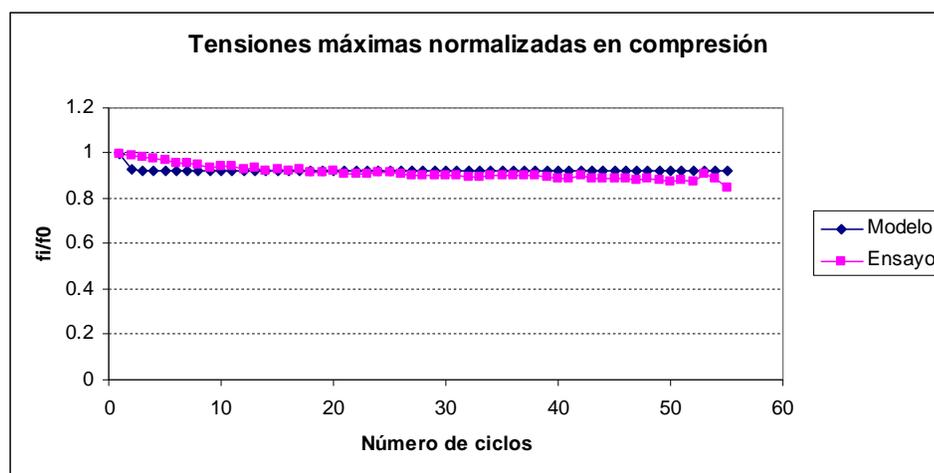
Figura 40:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos, analítico a) y experimental b) (Brown,  $d_b=22,2$  mm)



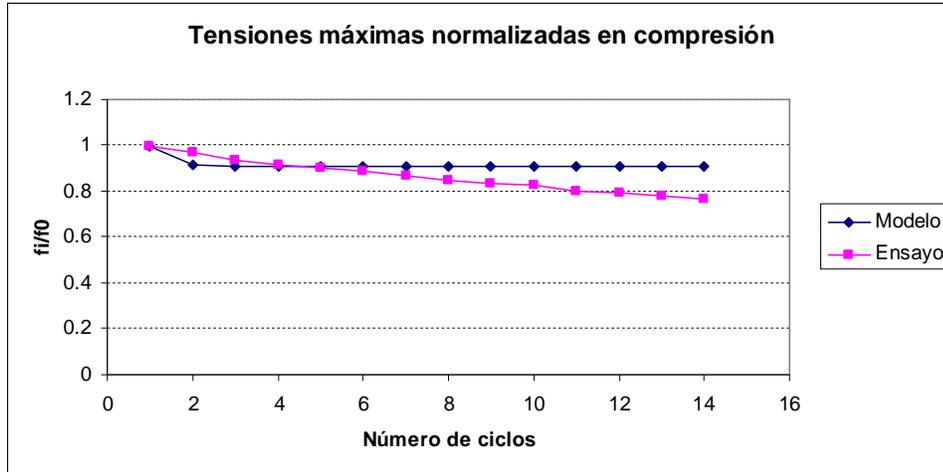


**Figura 41:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos, analítico a) y experimental b) (Brown,  $d_b= 25,4$  mm)

En efecto, considerando un caso particular, se puede superponer las curvas  $f_i/f_0$  versus el número de ciclos obtenidas mediante el modelo de plasticidad concentrada y los resultados de los ensayos a la fatiga de bajo ciclos (Figuras 42 y 43). Numéricamente, la capacidad global de la barra sufre un deterioro en los primeros ciclos, antes de estabilizarse. Al contrario, los ensayos muestran que ésta tiende a degradarse permanentemente hasta alcanzar la rotura de la barra. Cabe mencionar que experimentalmente se alcanza el nivel de reducción observado analíticamente producto del pandeo, una vez aplicado una cantidad de ciclos variable (entre 1 y 20 ciclos según los casos estudiados), lo que varía según la amplitud de deformación impuesta. A mayor nivel de deformación menor es el número de ciclos necesario para alcanzar este valor límite.



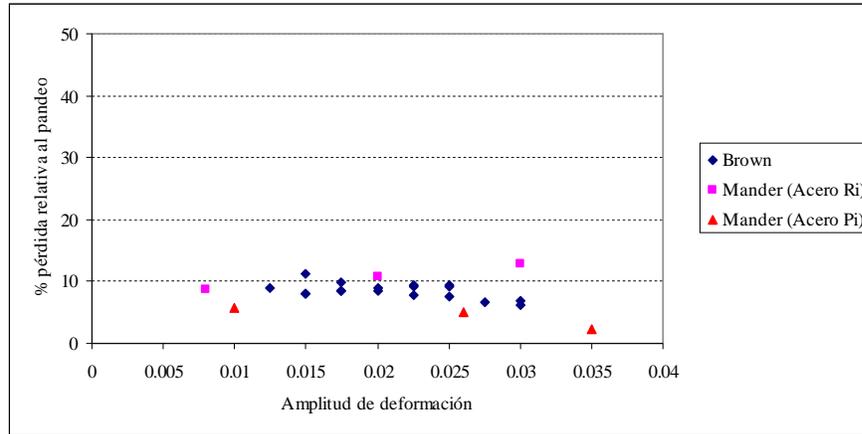
**Figura 42:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #43,  $d_b= 25,4$  mm,  $\epsilon_a=0.015$ )



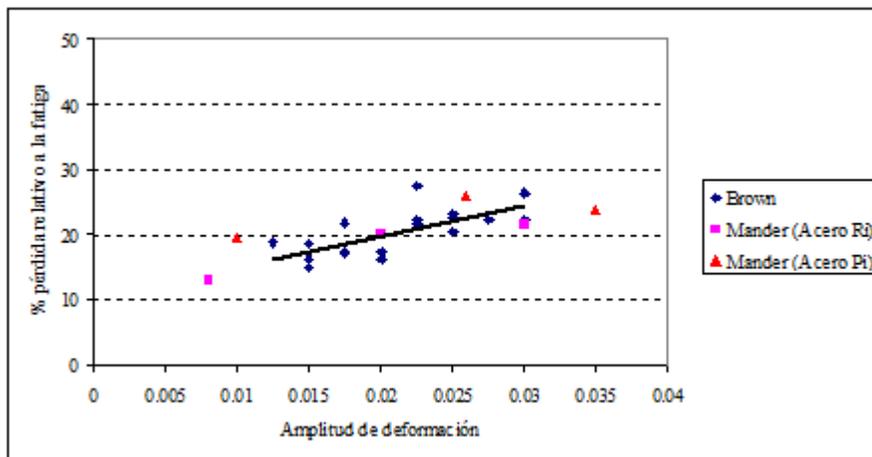
**Figura 43:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #45,  $d_b= 25,4$  mm,  $\epsilon_a=0.025$ )

Las figuras 42 y 43 ilustran claramente el deterioro de la tensión a la deformación máxima en compresión tanto en el caso numérico como experimental a medida que se aplican los ciclos. Graficando la degradación de la capacidad obtenida analíticamente versus la amplitud de deformación, se puede cuantificar la disminución de la razón  $f_i/f_0$  relativa al pandeo (Figura 44). A pesar de que existan variaciones, la curva así obtenida tiende a ser lineal y constante: la disminución de la tensión a la deformación máxima se mantiene en el mismo rango para las distintas amplitudes de deformación consideradas (comúnmente entre un 5% y un 10%).

Análogamente, se puede graficar la degradación de la capacidad obtenida experimentalmente (a partir de los ensayos a la fatiga) versus la amplitud de deformación y, por lo tanto, cuantificar la disminución de la razón  $f_i/f_0$  relativa a la fatiga y pandeo (Figura 45). Esto resulta en un aumento lineal de la pérdida de la capacidad relativa a la fatiga a medida que aumenta la amplitud de deformación (alrededor de un 15% a baja amplitud de deformación, 0.0125, y cercana al 25% a alta amplitud de deformación, 0.03)



**Figura 44:** Degradación de la capacidad relativa al pandeo (analítico) versus amplitud de deformación



**Figura 45:** Degradación de la capacidad relativa a la fatiga (experimental) versus amplitud de deformación

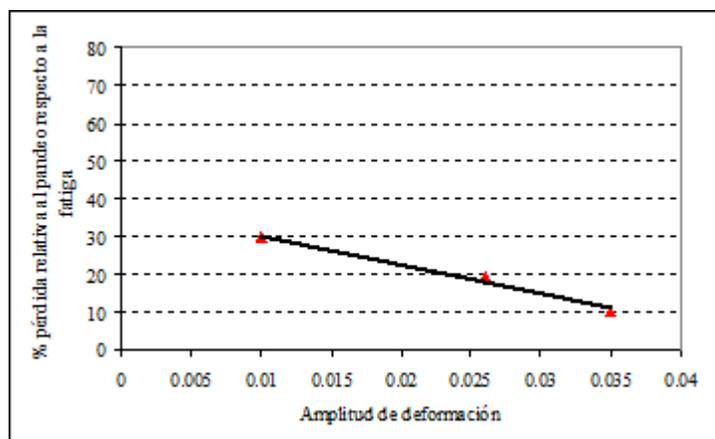
Luego, para cuantificar el efecto relativo del pandeo en la falla por fatiga, se normalizó el descenso de la razón  $f_i/f_0$  relativo al pandeo (procesado a partir de los resultados analíticos) con respecto al descenso relativo a ambos efectos, pandeo y fatiga de bajo ciclo (resultando de los ensayos). Esto permitiría obtener la disminución relativa de la tensión a la deformación máxima correspondiendo al pandeo en la falla por fatiga de bajo ciclo.

En las figuras 46 a 48 se grafica la pérdida relativa de capacidad a compresión entre el modelo y los resultados experimentales (%) versus la amplitud de deformación para los distintos tipos de acero, y diámetros de barra. Según se observa en las figuras, se puede destacar que:

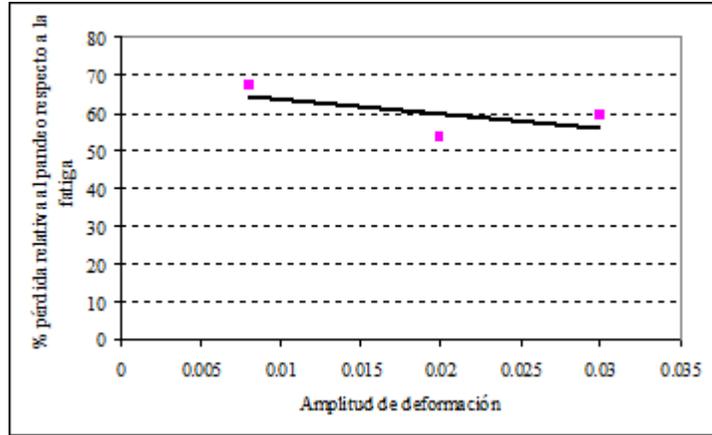
- el pandeo tiene una proporción menor al usar un acero de mayor resistencia (comúnmente entre un 10% y un 30% para un acero de alta resistencia, y entre un 55% y un 65% para un acero de baja resistencia),
- a mayor amplitud de deformación, menor tiende a ser la importancia del impacto del pandeo en la ocurrencia de la falla (en el caso del acero utilizado en los ensayos de Brown, un 30% a altas amplitudes de deformaciones y un 60% a bajas amplitudes de deformación).

Adicionalmente, existen diferencias en cuanto a la disminución de la pérdida relativa de capacidad a compresión entre el modelo y los resultados experimentales en función de la amplitud de deformación. El trabajo de Mander et al. (1994) consideró dos calidades de acero, donde las líneas de tendencia de ambos acero tienen pendiente similar. La línea de tendencia obtenida a partir de los datos experimentales de Brown presenta una pendiente negativa mayor.

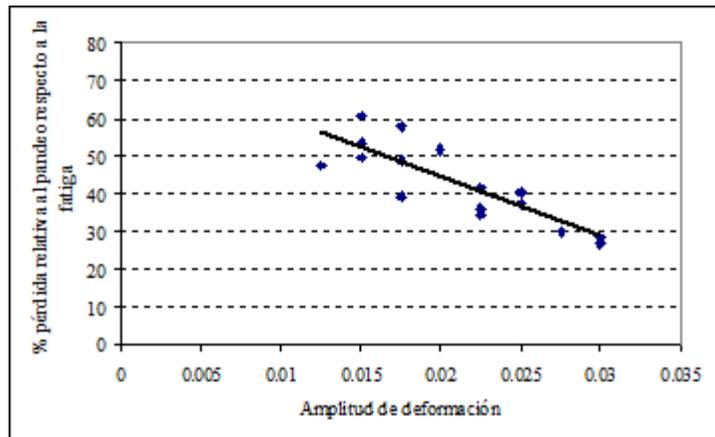
Es importante mencionar que las conclusiones obtenidas asumen que el modelo es capaz de representar fielmente la respuesta de la barra sometida a cargas cíclicas hasta la falla por fatiga de bajo ciclo. Sin embargo, y como se indicó anteriormente, la degradación analíticamente observada es más pronunciada que lo observado experimentalmente para los primeros ciclos, para luego estabilizarse. Esto también lleva a la conclusión de que a pesar de existir algún nivel de degradación que se le puede atribuir al pandeo, este no es simultáneo con lo observado experimentalmente.



**Figura 46:** Degradación de la capacidad relativa al pandeo versus amplitud de deformación (ensayos de Mander, acero de alta resistencia P)



**Figura 47:** Degradación de la capacidad relativa al pandeo versus amplitud de deformación (ensayos de Mander, acero de baja resistencia R)



**Figura 48:** Degradación de la capacidad relativa al pandeo versus amplitud de deformación (ensayos de Brown)

## 5. CONCLUSIONES Y LIMITACIONES

En este estudio, el objetivo era determinar y cuantificar el impacto del pandeo de las barras longitudinales para hormigón armado en la falla por fatiga de bajo número de ciclos. Para eso, se dividió el trabajo en dos partes: la primera consistía en validar el modelo numérico en cuanto a su comportamiento cíclico, y la segunda se enfocaba en la determinación de la importancia del impacto del pandeo en la falla por fatiga. Ésta se realizó considerando los resultados numéricos y los resultados de ensayos experimentales disponibles en la literatura.

### 5.1. CONCLUSIONES

Los resultados de los ensayos experimentales realizados por Monti y Nuti (1992) destacaron que, para razones  $L/d_b$  mayores a 5, se producía pandeo inelástico de las barras longitudinales. A partir de comparaciones con estos resultados, se estudió la respuesta cíclica de una barra de refuerzo entregada por el modelo numérico para razones  $L/d_b$  igual a 5 y 11. Los resultados analíticos mostraron inconsistencias en la respuesta a tracción dado que el modelo, incluso ante tracción pura, consideraba concentración de deformaciones sólo en las rótulas. Las correcciones realizadas en el modelo consideraron una distribución de las deformaciones a lo largo de toda la barra y la concentración de la curvatura en las rótulas plásticas. Éstas resultaron en una representación más correcta del comportamiento cíclico de la barra y del pandeo.

Aunque pocos trabajos se ha enfocado en ensayos a la fatiga de bajo ciclo, el estudio del impacto del pandeo en la falla por fatiga se basó en los resultados obtenidos por Mander et al.(1994) y Brown (1999). Para estos ensayos, se aplicaron amplitudes de deformación constantes y consideraron una razón  $L/d_b$  igual a 6, que puede inducir pandeo. Éste, al aumentar las tensiones al nivel de las rótulas plásticas, genera degradación de la capacidad global de la barra, lo que es representado por el modelo, mientras que la degradación de la capacidad observada en los ensayos experimentales incluye tanto el posible efecto del pandeo como el de la fatiga. Así, a partir de los resultados analíticos, se cuantificó el deterioro de la tensión a la deformación máxima en compresión en la barra. Según la respuesta analítica, el pandeo afectaba de manera uniforme la respuesta de la barra, es decir, independientemente de la amplitud de deformación aplicada en los casos estudiados, se producía un descenso de la tensión a deformación máxima en compresión del orden del 5-10% por efecto del pandeo. Análogamente, se cuantificó también el deterioro a partir de los resultados experimentales. La respuesta experimental mostró una mayor disminución de la capacidad a compresión de la barra al aumentar la amplitud de deformación

---

(comúnmente una disminución del orden del 15% a baja amplitud de deformación, 0.0125, y del orden del 25 % a alta amplitud de deformación, 0.03).

Con el fin de determinar la importancia del impacto del pandeo en la falla por fatiga de bajo ciclo, se cuantificó el efecto del pandeo en la fatiga mediante la definición de un nuevo parámetro. Éste ilustra el porcentaje relativo de pérdida de la capacidad por pandeo (analítica) respecto de la pérdida experimental observada en la falla por fatiga de bajo ciclo. Según los resultados existe una aparente disminución del impacto del pandeo en la fatiga a mayor amplitud de deformación y mayor calidad de acero.

## 5.2. LIMITACIONES

En este trabajo, se realizó un primer acercamiento en cuanto al impacto del pandeo en la falla por fatiga de bajo ciclo. El modelo simplificado de plasticidad concentrada, corregido, entregó resultados adecuados en cuanto a la representación del comportamiento cíclico de una barra de refuerzo susceptible de pandearse bajo cargas cíclicas, de tracción y compresión. Sin embargo, la formulación alternativa del modelo elegida para evaluar la deformación promedio de la barra, era aproximada tanto en compresión como en tracción: en compresión, no considera concentraciones de deformaciones en las rótulas plásticas, por lo cual, tal vez el modelo no captura adecuadamente el comportamiento en compresión de la barra e induce las diferencias observadas entre las respuestas analíticas y experimentales.

Adicionalmente, existen diferencias en cuanto a la tasa de decaimiento de la pérdida de capacidad a compresión en lo observado analíticamente y experimentalmente en función del número de ciclos. La degradación de la tensión media a compresión observada analíticamente es más repentina que lo observado experimentalmente para los primeros ciclos. Aunque es posible concluir que existe algún nivel de degradación que se puede atribuir al pandeo, no hay simultaneidad entre las respuestas analítica y experimental, lo que puede estar asociado a la definición del modelo cíclico del acero. También cabe mencionar que el modelo no es capaz de representar falla por fatiga, lo que podría ser mejorado al incorporar un modelo de daño por fatiga.

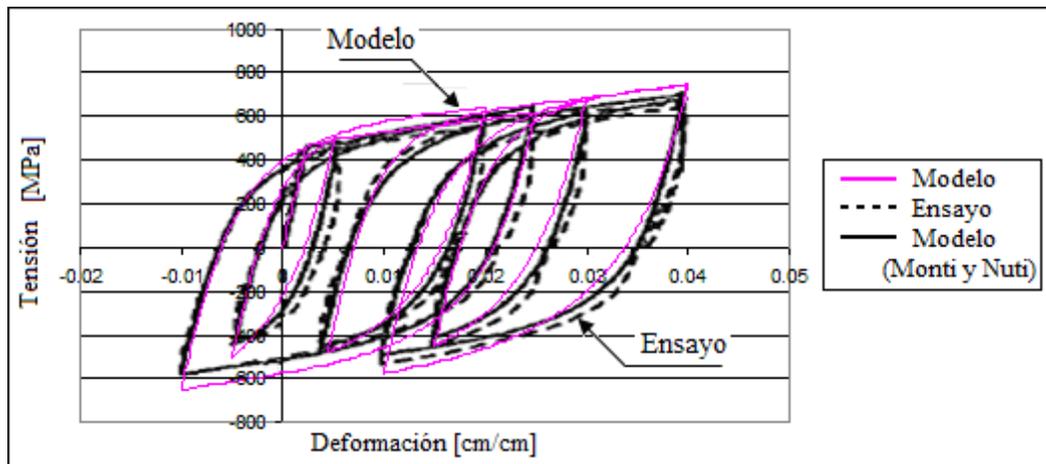
## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Brown, J., "Fatigue Characteristics of Reinforcing Bars Under Simulated Seismic Loading," *MS thesis*, 1998.
- Mander, J.B., Panthaki, F.D., and Kasalanti, A., (1994), "Low Cycle Fatigue Behavior of Reinforcing Steel," *Journal of Materials in Civil Engineering*, ASCE, Vol. 6, No. 4.
- Mander, J.B., and Cheng, C.-T., (1995), "Renewable Hinge Detailing for Bridge Columns," *National Seismic Conference on Bridges and Highways*, San Diego, CA, December 10-13.
- Brown, J.; Kunnath, S.K. (2004). "Low-Cycle Fatigue Failure of Reinforcing Steel Bars", *ACI Materials Journal*, V. 101, No.6
- Huneau, B, "Introduction à la fatigue", Apuntes de clases, 2006
- Dodd, L. L., and Restrepo-Posada, J. I., "Model for Predicting Cyclic Behavior of Reinforcing Steel," *Journal of Structural Engineering*, ASCE V. 121, No. 3, 1995, pp. 433-445.
- Monti, G., and Nuti, C., "Nonlinear Cyclic Behavior of Reinforcing Bars Including Buckling," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, V. 118, No. 12, 1992, pp. 3268-3284.
- El-Bahy, A; Kunnath, S. K.; Stone, W. C.; and Taylor, A. W., "Cumulative Seismic Damage of Circular Bridge Columns: Benchmark and Low-Cycle Fatigue Tests", *ACI Structural Journal*, V.96, N°4, July-August 1999, pp 633-646.
- El-Bahy, A; Kunnath, S. K.; Stone, W. C.; and Taylor, A. W., "Cumulative Seismic Damage of Circular Bridge Columns: Variable Amplitude Tests", *ACI Structural Journal*, V.96, N°5, September-October 1999, pp 711-720.
- Massone, L.; Moroder, D., "Buckling modeling of reinforcing bars with imperfections", *Engineering Structures* (aceptado para publicación, 2008)

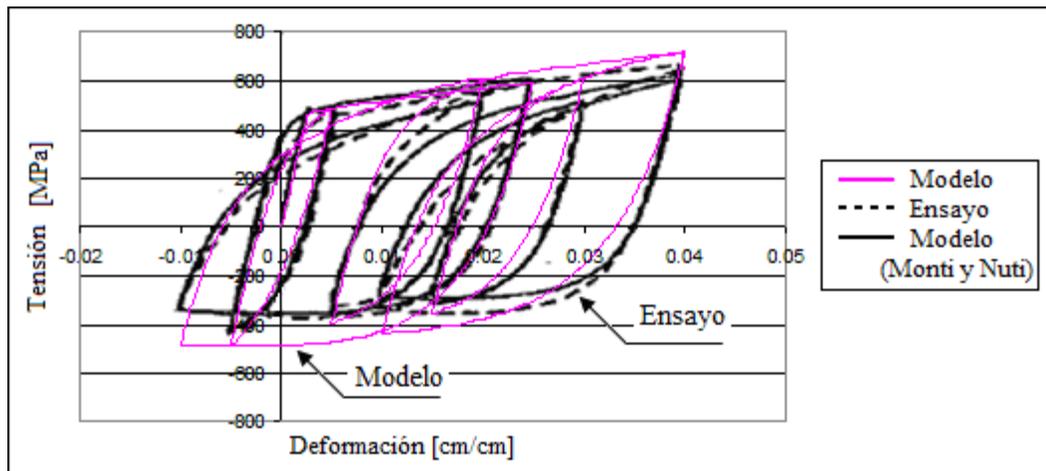
- Bayrak, O., and Sheikh, S.A . “Plastic Hinge Analysis”. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 127, No. 9, September, 2001
- Mander, J.B, “Seismic Design of Bridge Piers”, Thesis, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand, 1983
- Carnicero, A., Perera, R., Alarcón, E., “Modelo simplificado de daño por fatiga para hormigón armado”, *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, Vol. 17, No 9, 2000, p 83-98
- Chang, G.A., Mander, J.B., “Seismic energy based fatigue damage analysis of bridge columns : part I : evaluation of seismic capacity”, *National Center for Earthquake Engineering Research NCEER 1994/0006*
- Brown, J.; Kunnath, S.K., “Low cycle fatigue behavior of longitudinal reinforcement in reinforced concrete bridge columns”, *Technical report MCEER, 00-0007, 2000*

## ANEXO A

### Pandeo inelástico en barras de refuerzo: Ensayos de Monti y Nuti (1992)



**Figura A- 1:** Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 5$ ), caso A1



**Figura A- 2:** Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 11$ ), caso C1

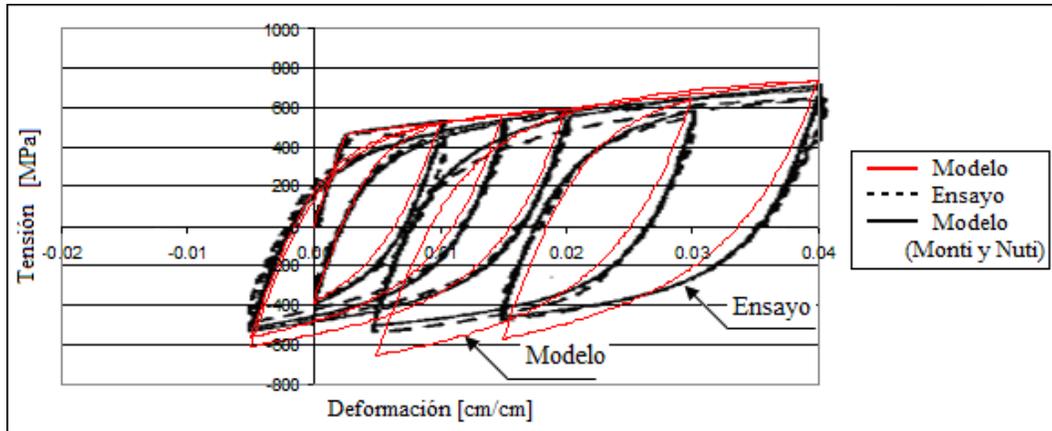


Figura A- 3: Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 5$ ), caso A2

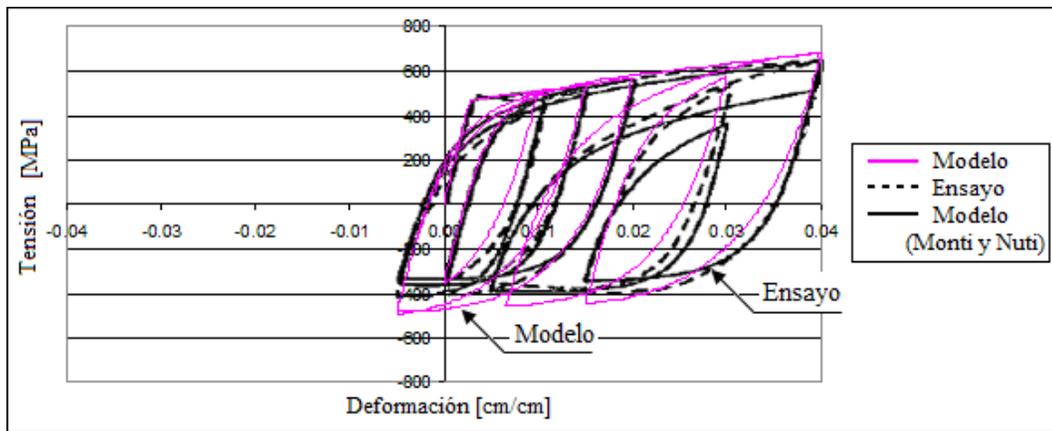


Figura A- 4: Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 11$ ), caso C2

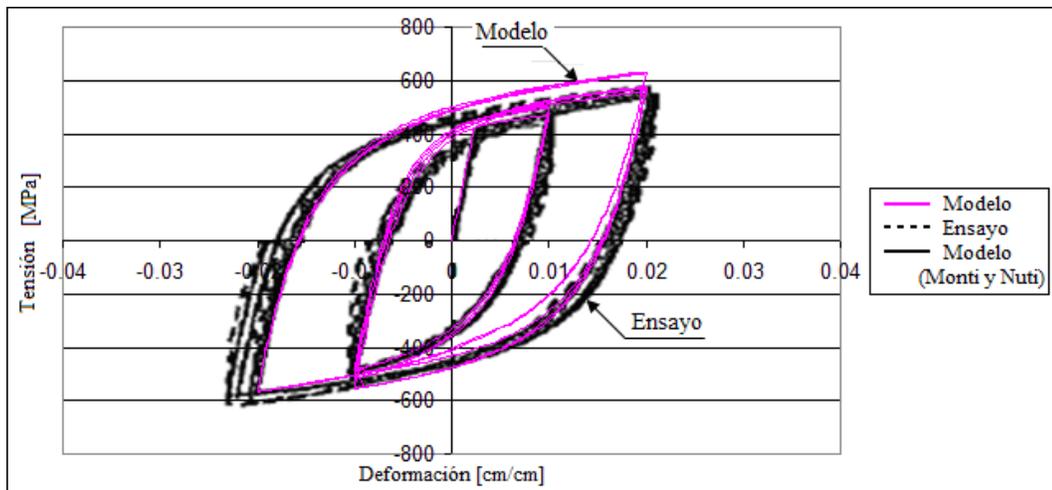


Figura A- 5: Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 5$ ), caso A3

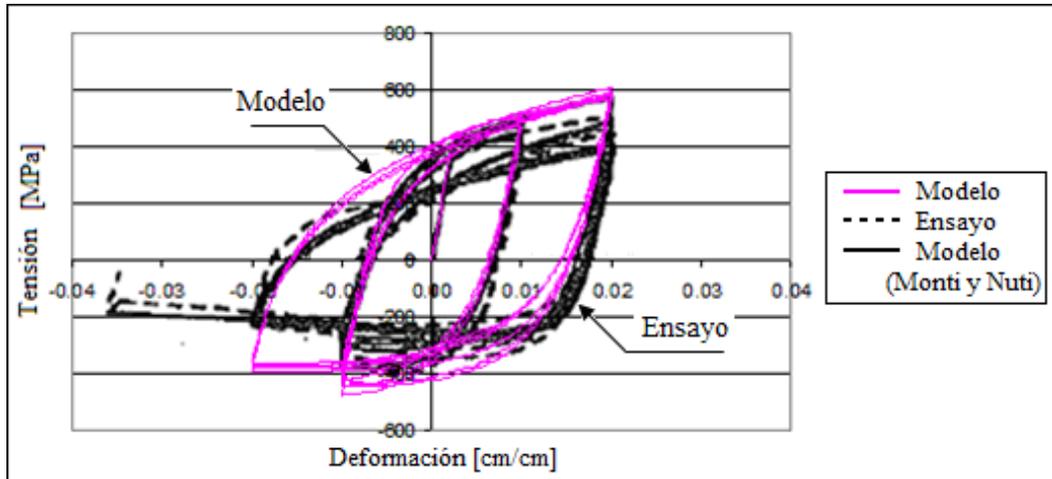


Figura A- 6: Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 11$ ), caso C3

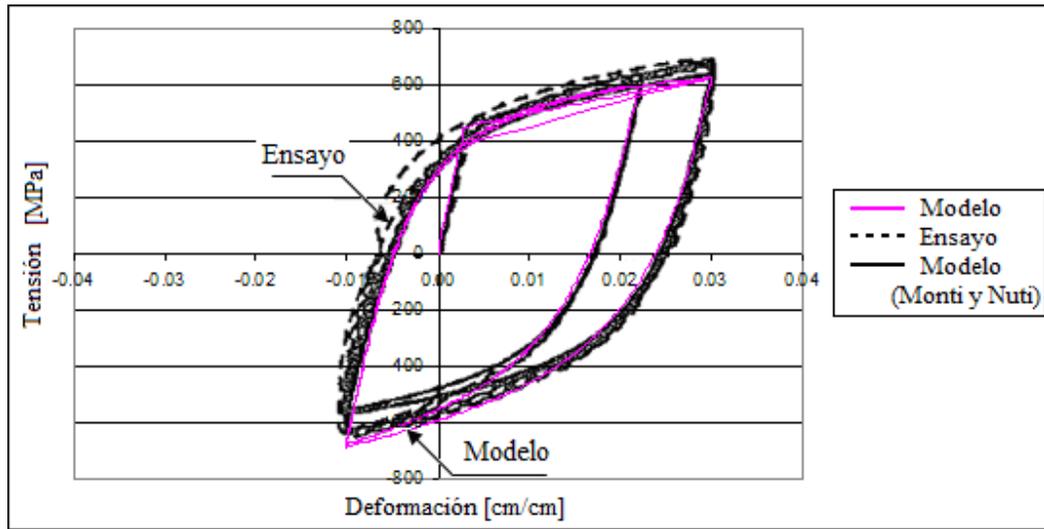


Figura A- 7: Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 5$ ), caso A4

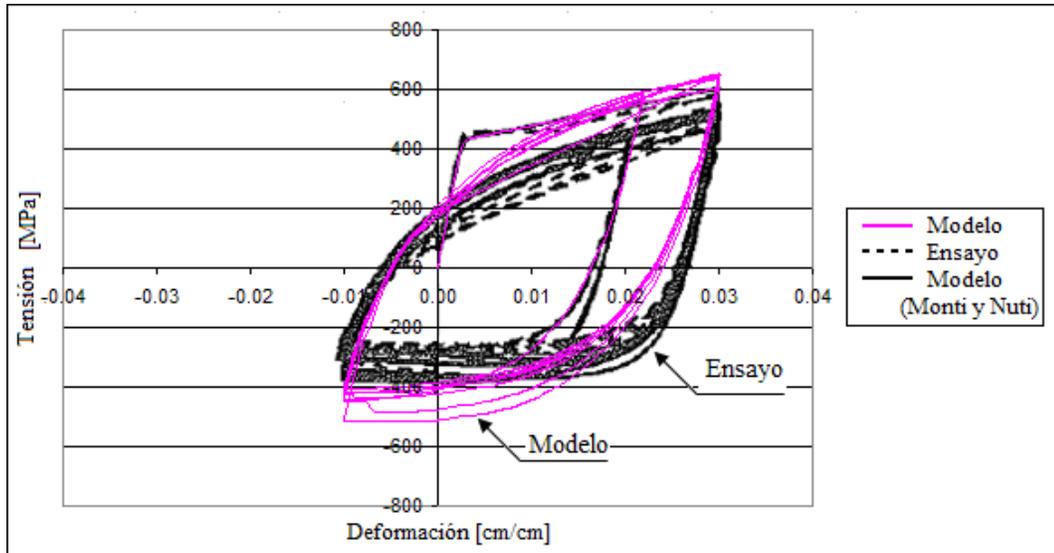


Figura A- 8: Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 11$ ), caso C4

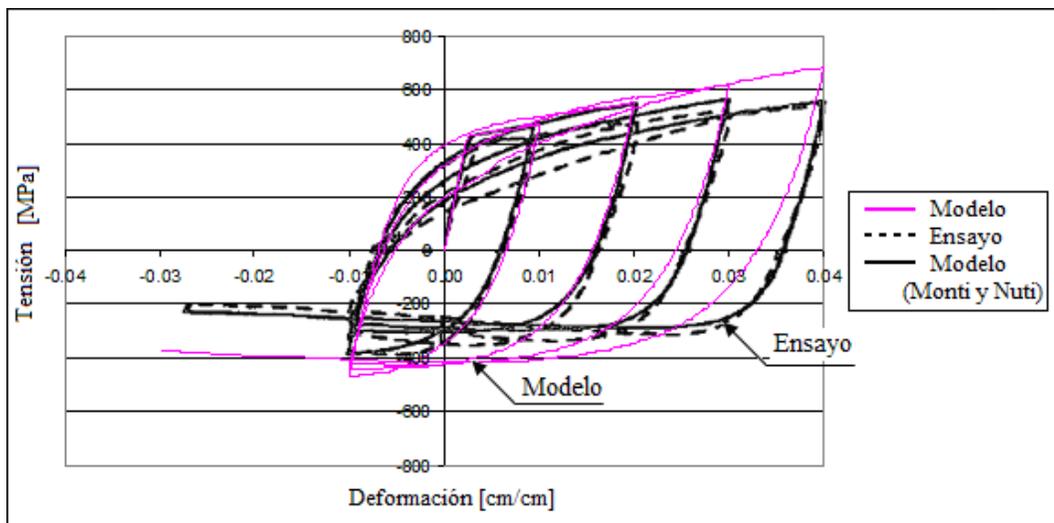
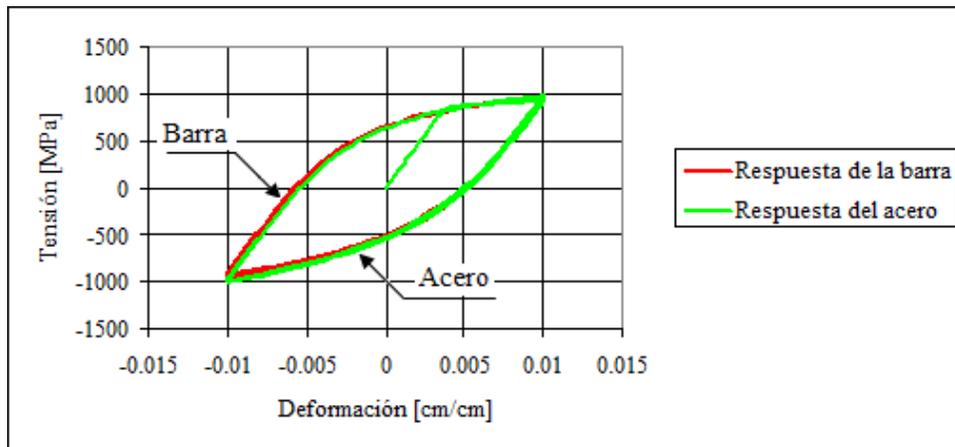


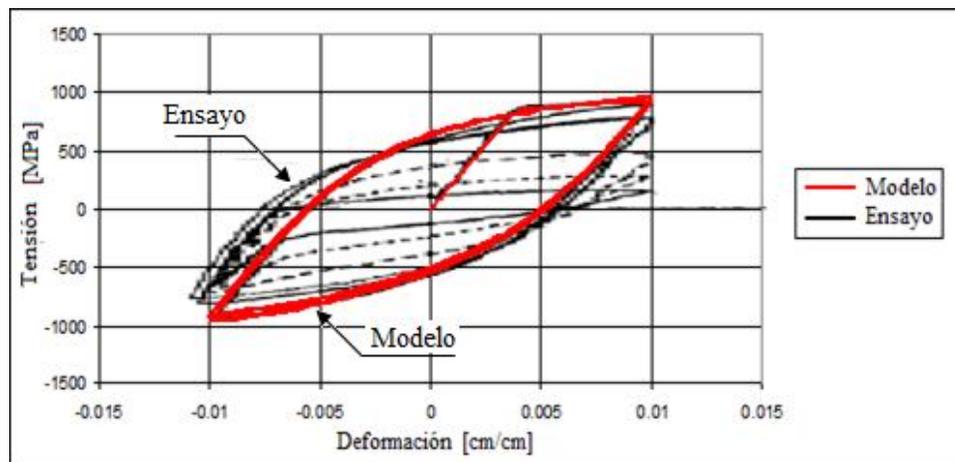
Figura A- 9: Curva de respuesta tensión-deformación ( $L/d_b = 11$ ), caso C5

## ANEXO B

### Pandeo y fatiga de bajo ciclo Ensayos de Mander



**Figura B- 1:** Tensión versus deformación (Mander, ensayo P2)



**Figura B- 2:** Tensión versus deformación (Mander, ensayo P2)

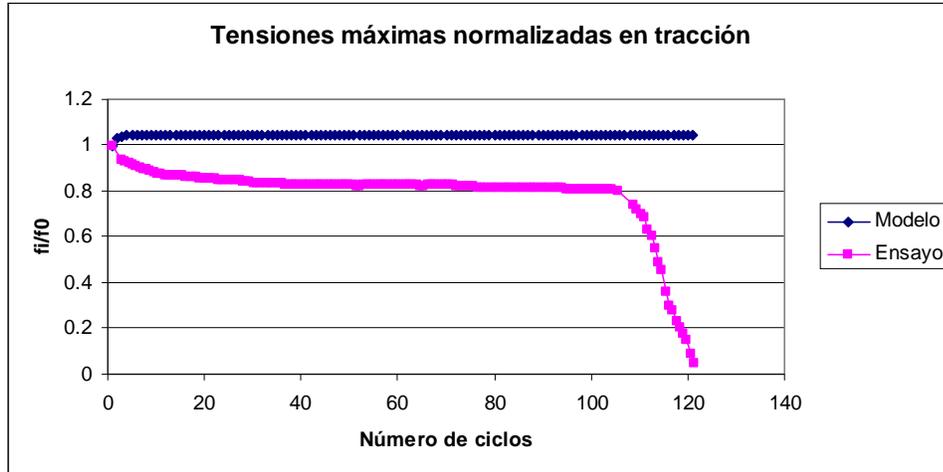


Figura B- 3:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo P2)

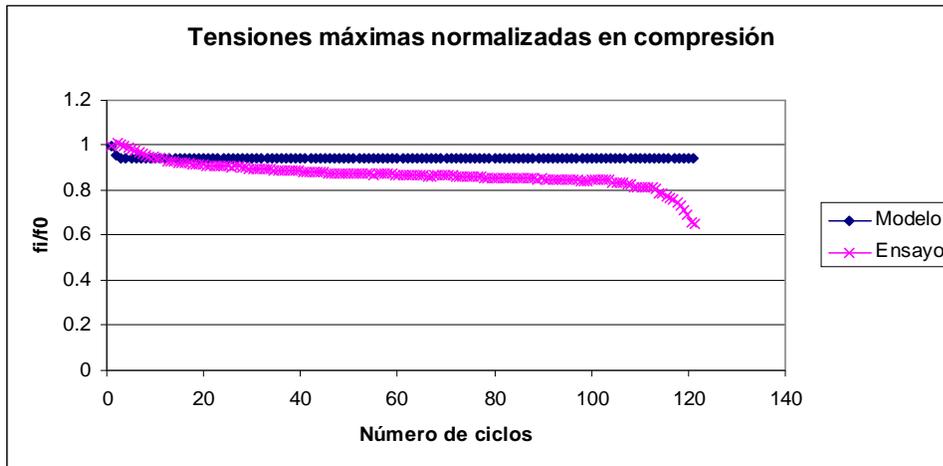


Figura B- 4:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo P2)

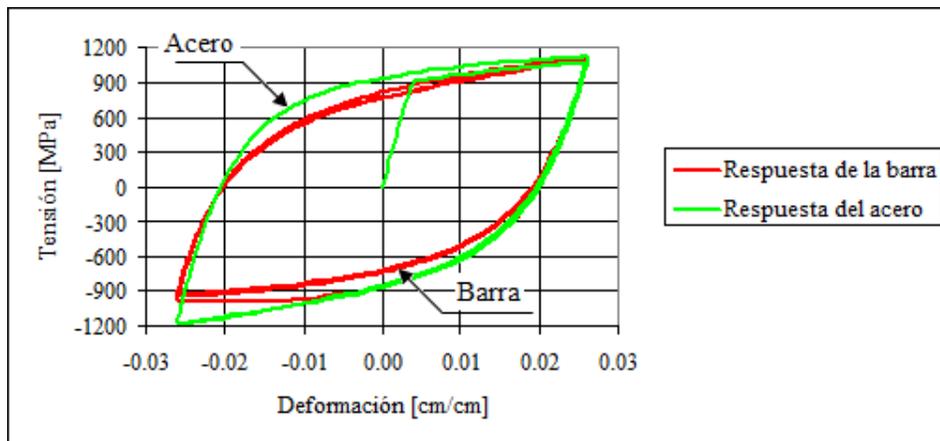
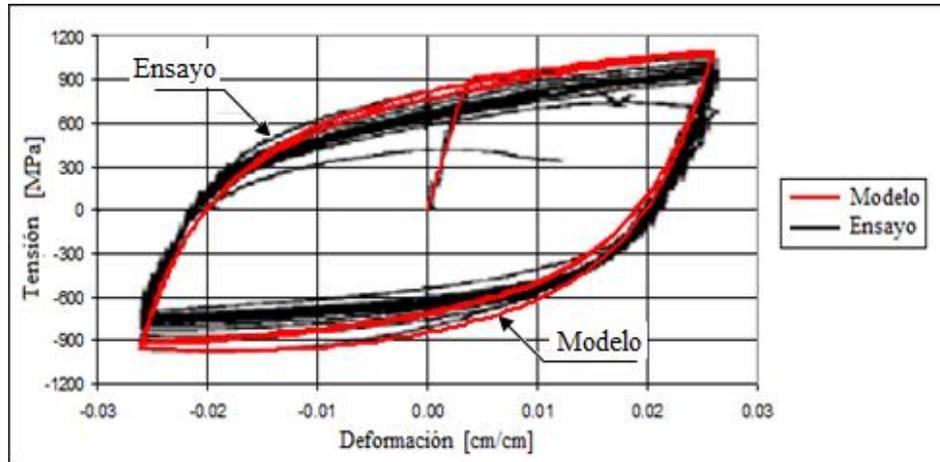
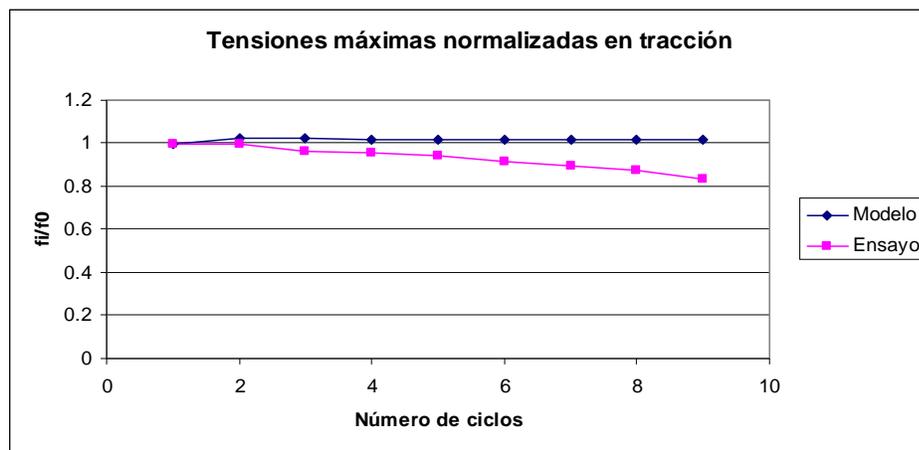


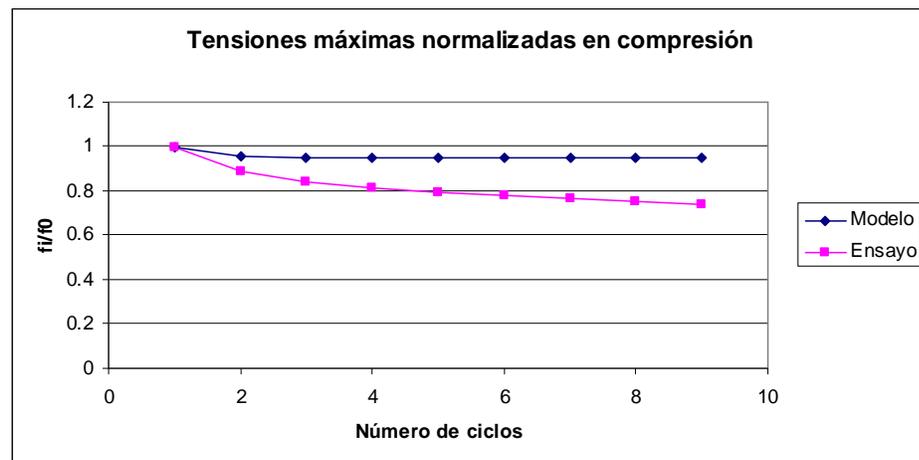
Figura B- 5: Tensión versus deformación (Mander, ensayo P7)



**Figura B- 6:** Tensión versus deformación (Mander, ensayo P7)



**Figura B- 7:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo P7)



**Figura B- 8:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo P7)

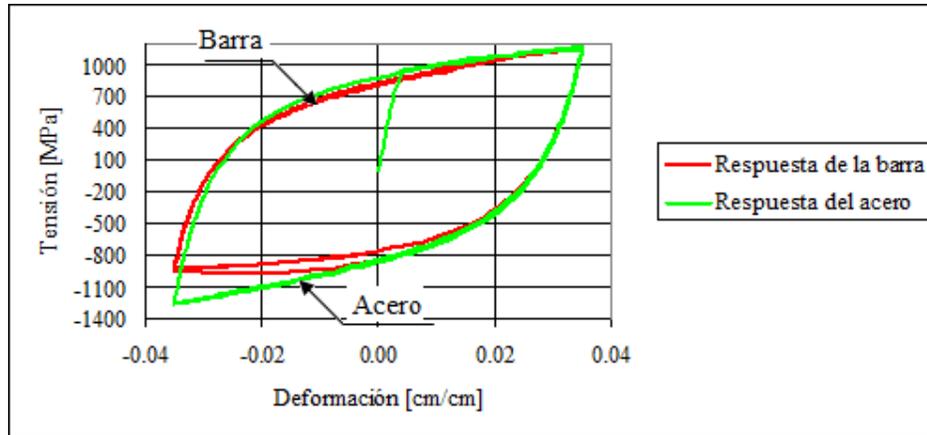


Figura B- 9: Tensión versus deformación (Mander, ensayo P12)

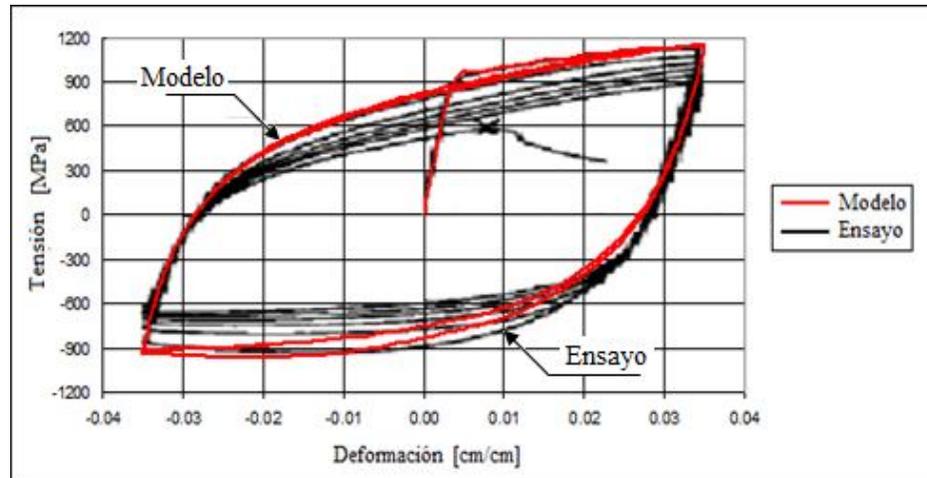


Figura B- 10: Tensión versus deformación (Mander, ensayo P12)

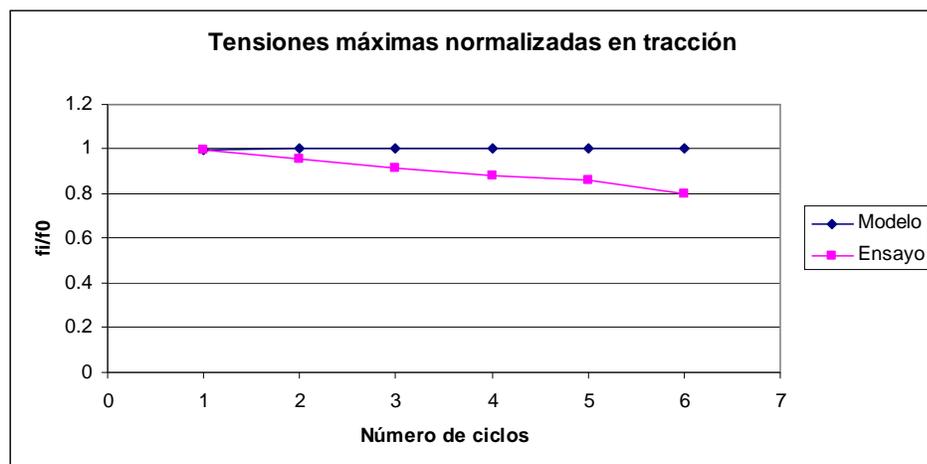


Figura B- 11:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo P12)

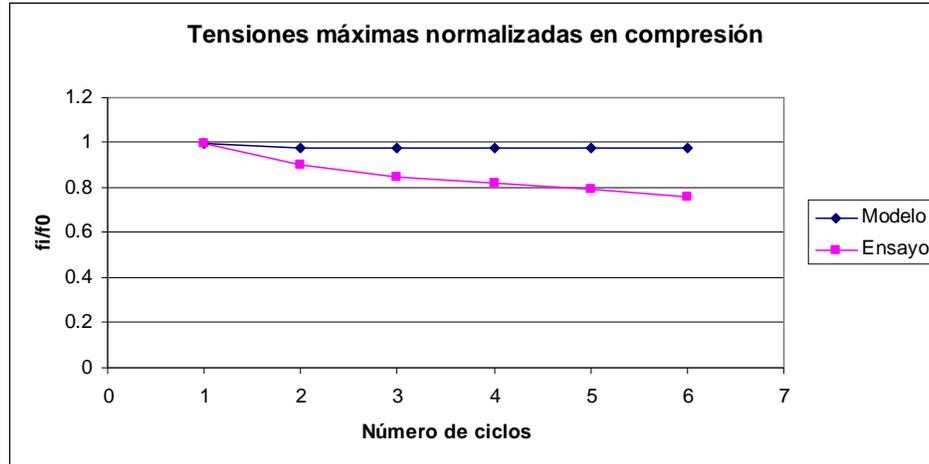


Figura B- 12:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo P12)

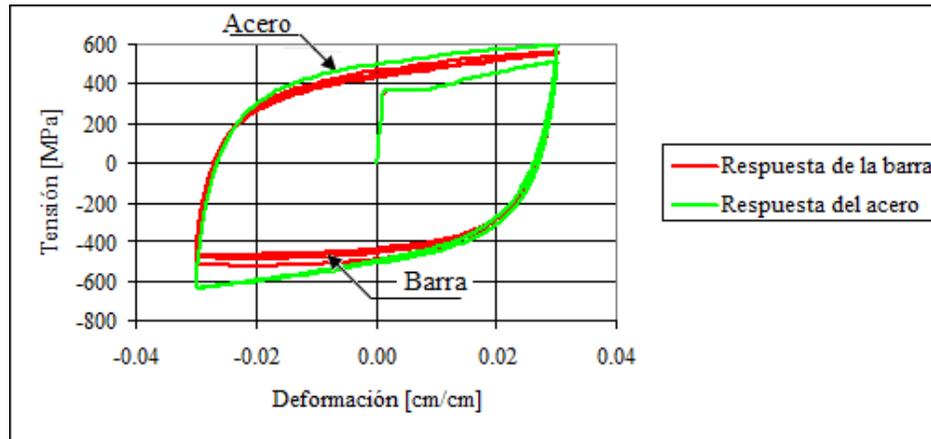


Figura B- 13: Tensión versus deformación (Mander, ensayo R1)

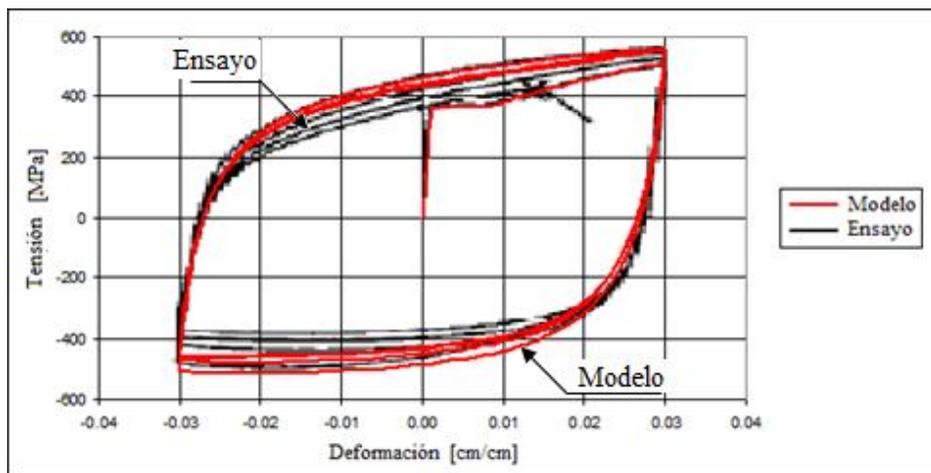


Figura B- 14: Tensión versus deformación (Mander, ensayo R1)

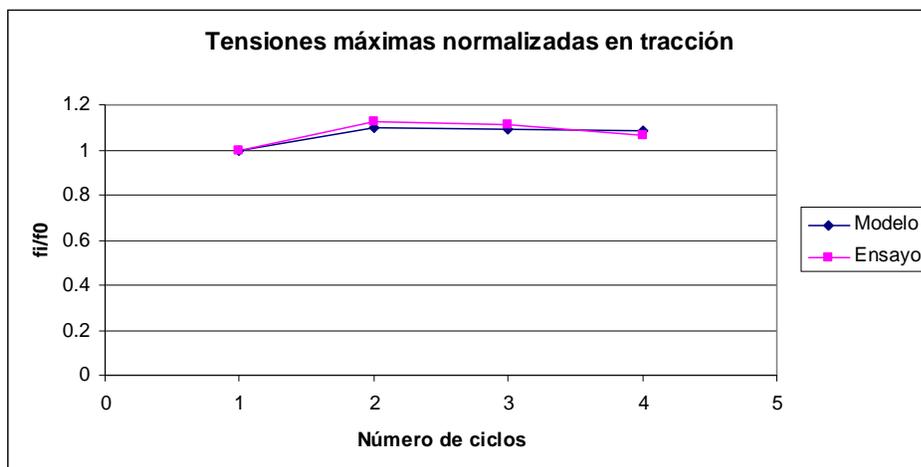


Figura B- 15:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo R1)

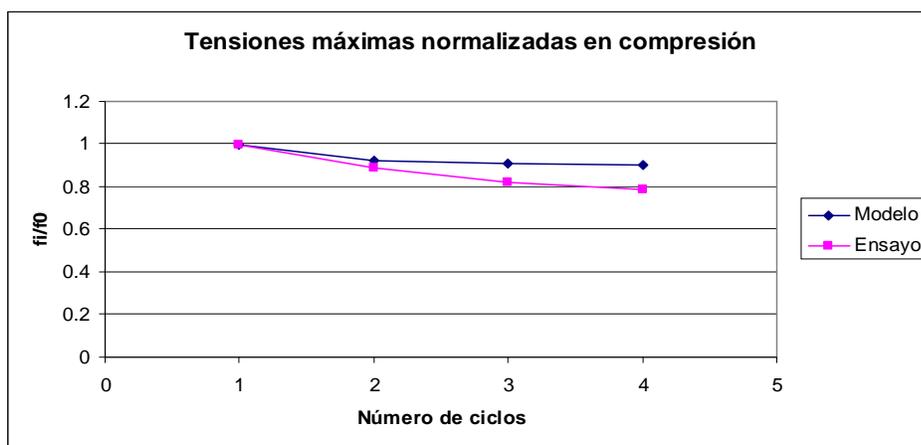


Figura B- 16:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo R1)

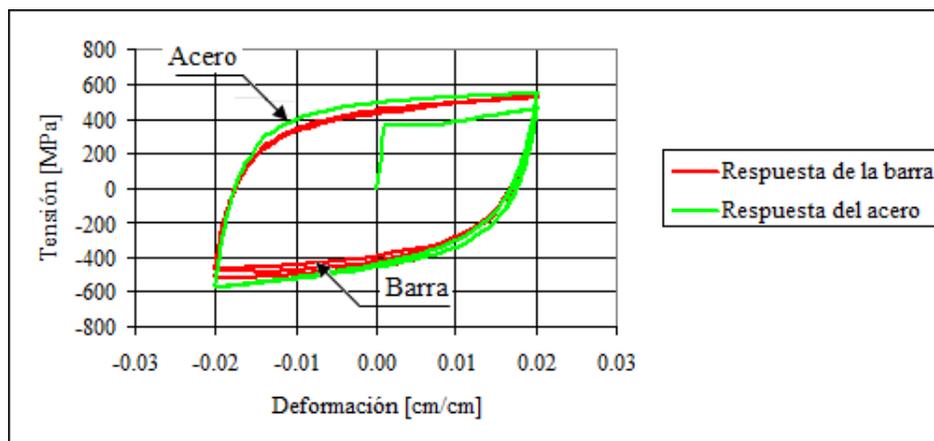


Figura B- 17: Tensión versus deformación (Mander, ensayo R5)

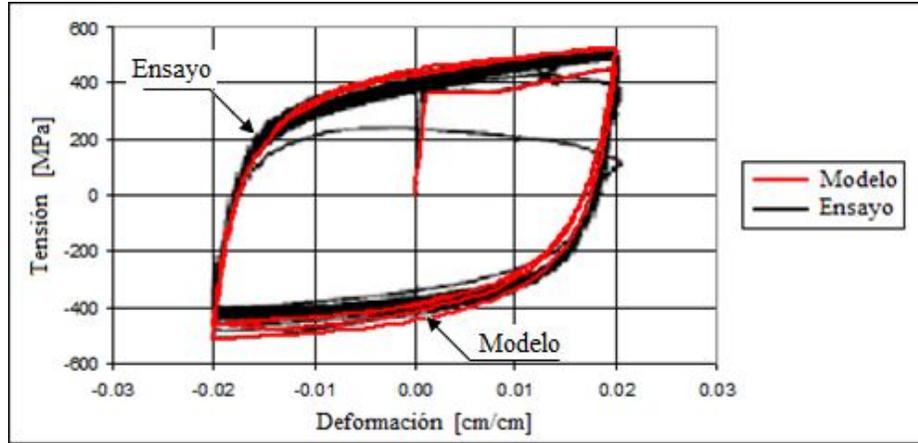


Figura B- 18: Tensión versus deformación (Mander, ensayo R5)

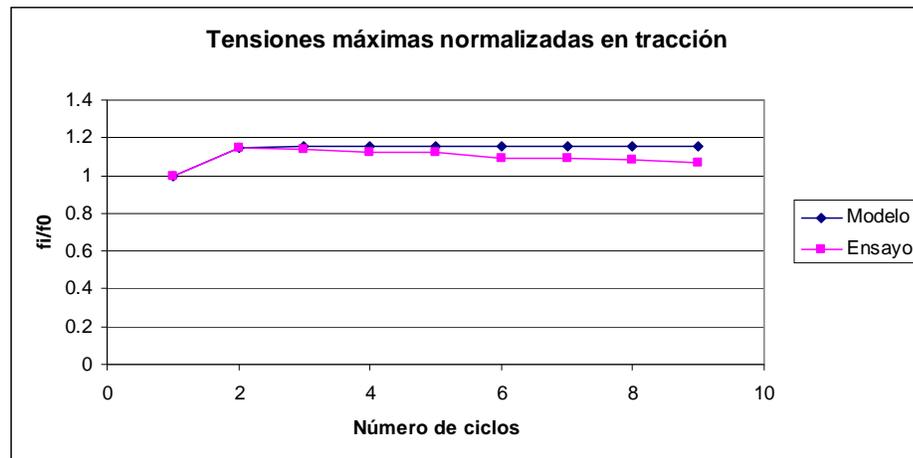


Figura B- 19:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo R5)

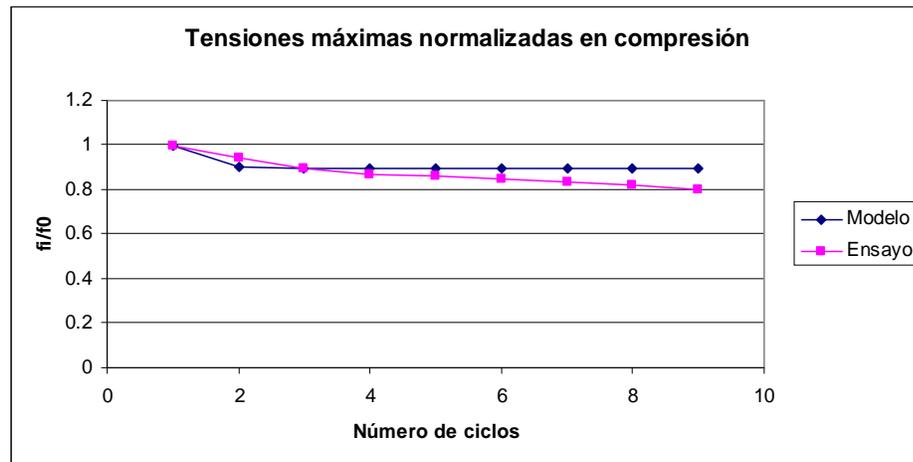


Figura B- 20:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo R5)

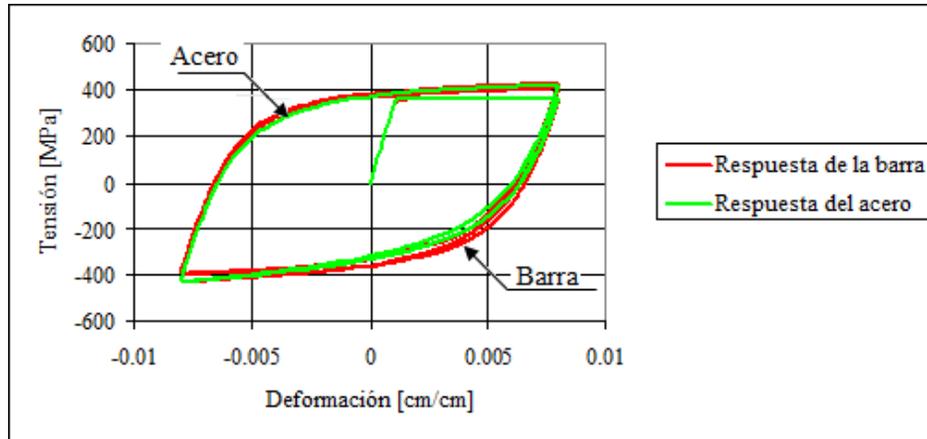


Figura B- 21: Tensión versus deformación (Mander, ensayo R8)

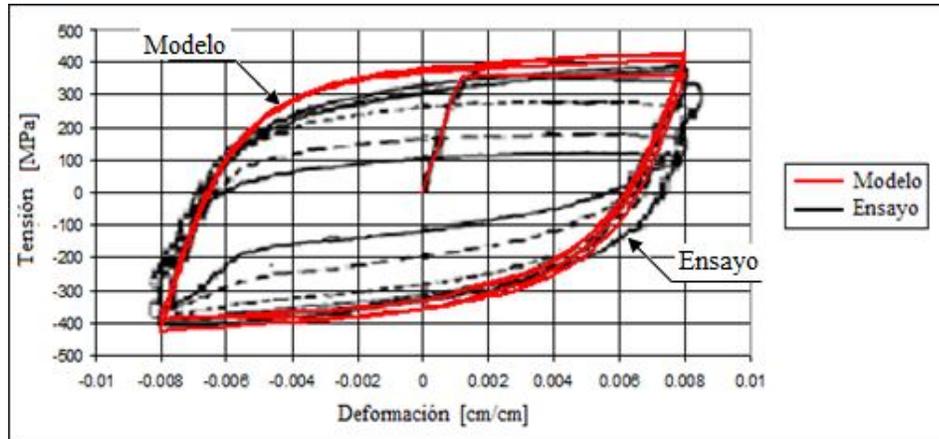


Figura B- 22: Tensión versus deformación (Mander, ensayo R8)

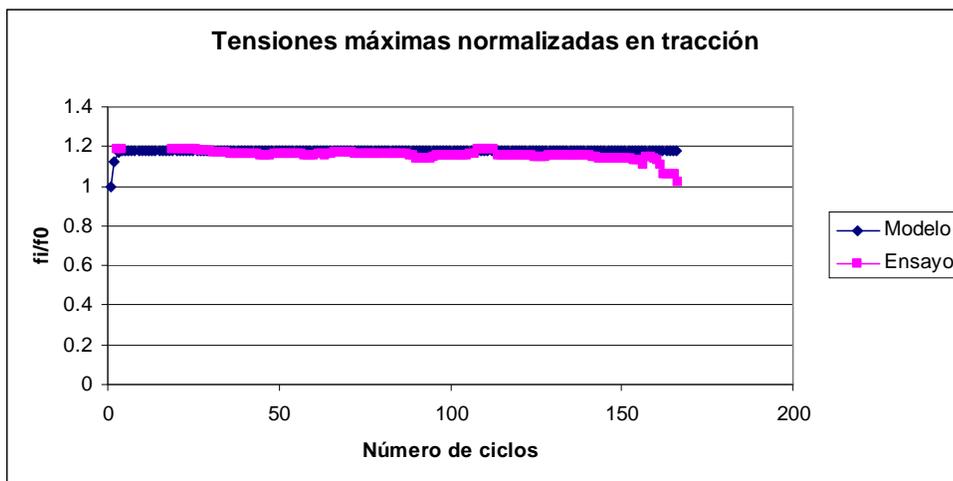
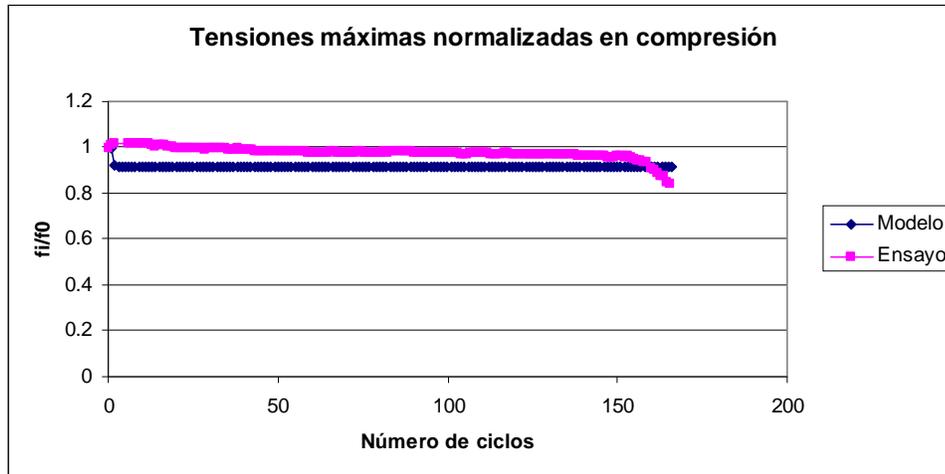


Figura B- 23:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo R8)



**Figura B- 24:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Mander, ensayo R8)

## ANEXO C

### Pandeo y fatiga de bajo ciclo Ensayos de Brown

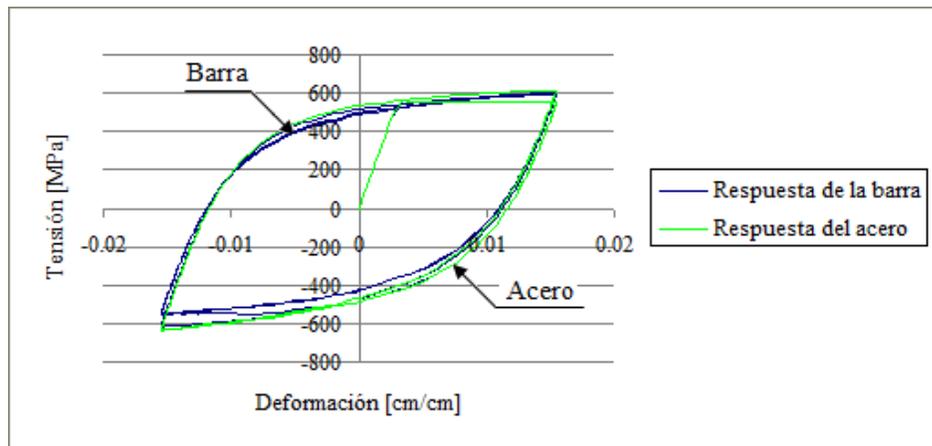


Figura C- 1: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #21)

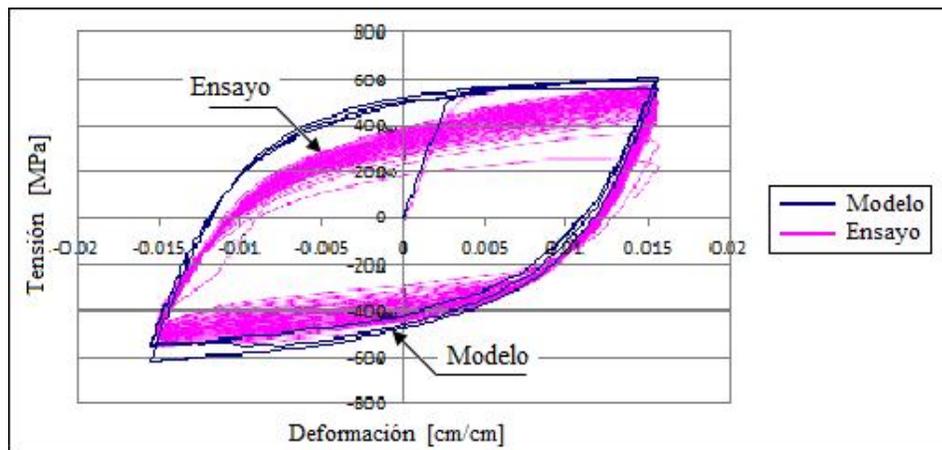


Figura C- 2: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #21)

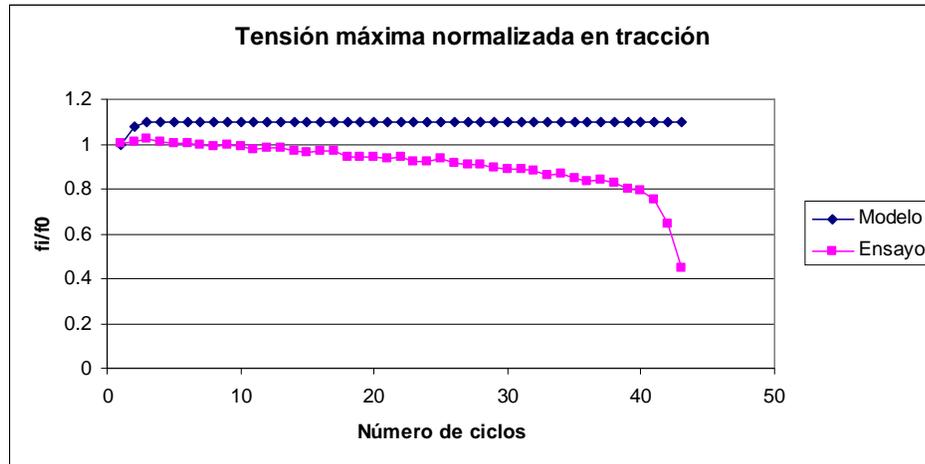


Figura C- 3:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #21)

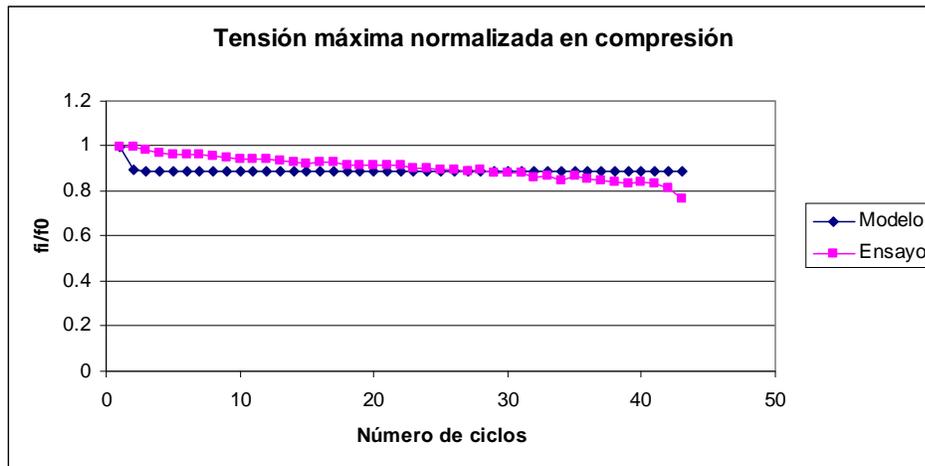


Figura C- 4:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #21)

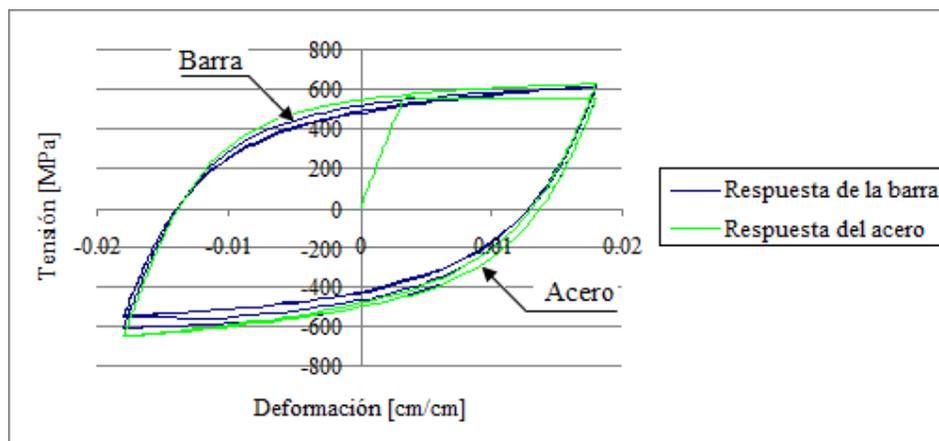


Figura C- 5: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #22)

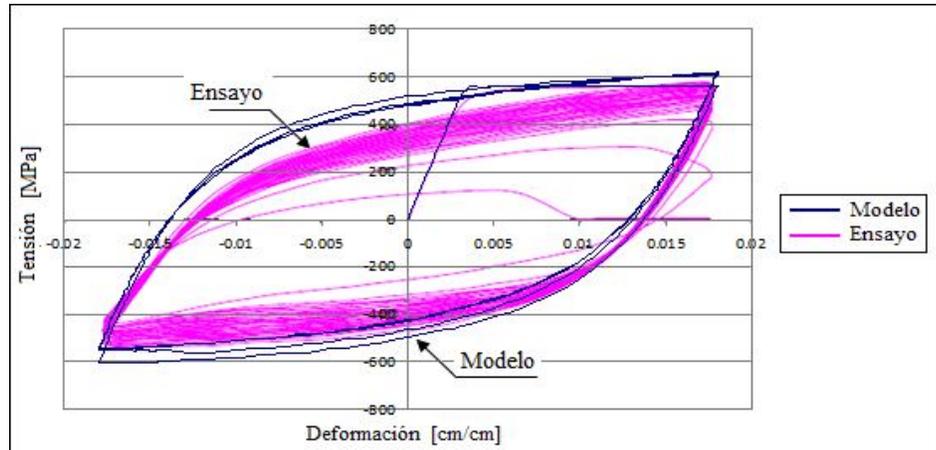


Figura C- 6: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #22)

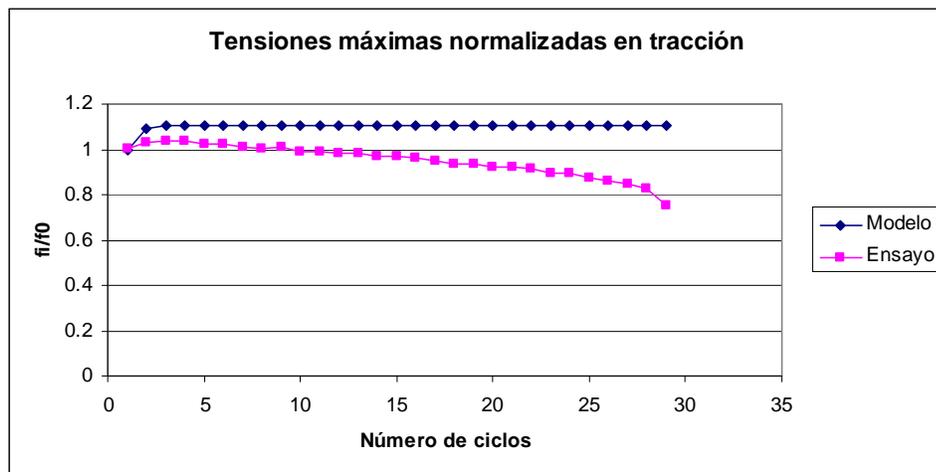


Figura C- 7:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #22)

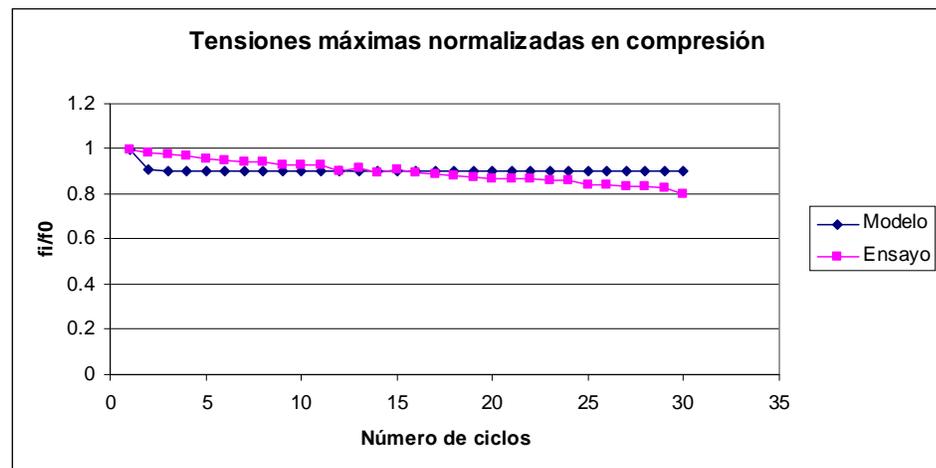


Figura C- 8:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #22)

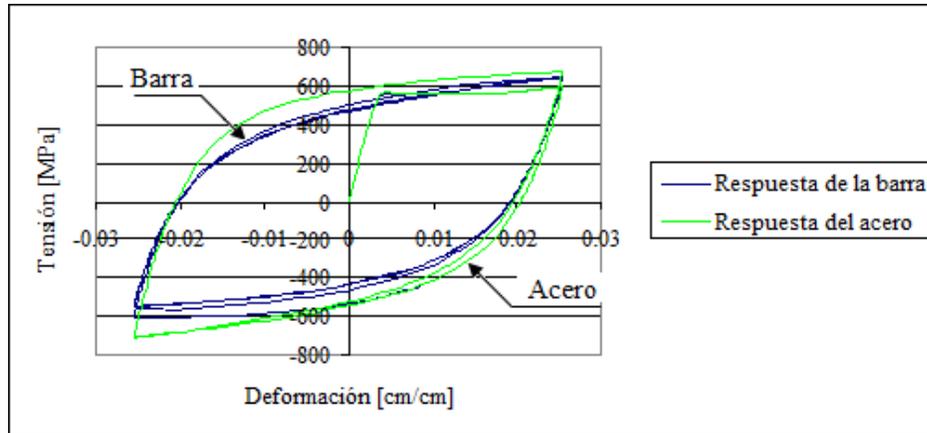


Figura C- 9: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #24)

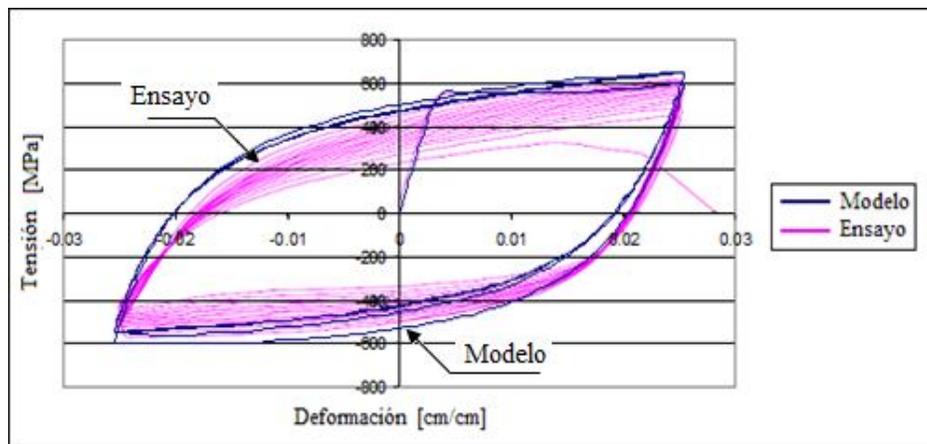


Figura C- 10: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #24)

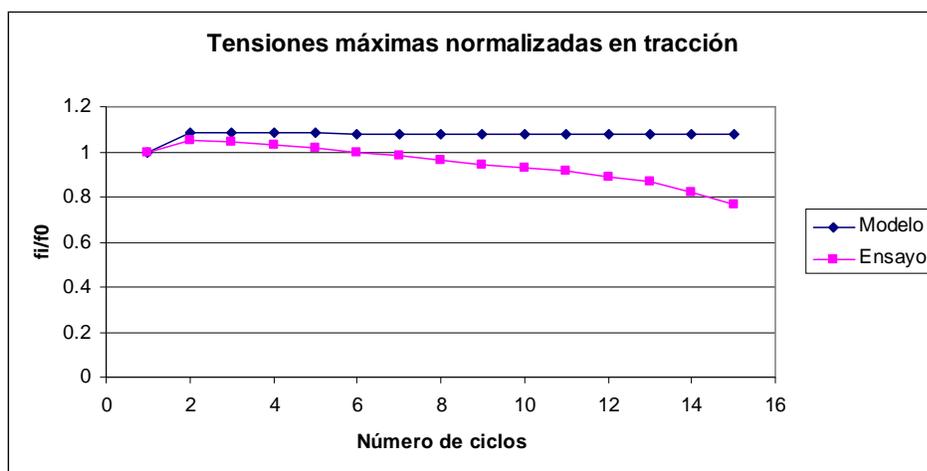


Figura C- 11:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #24)

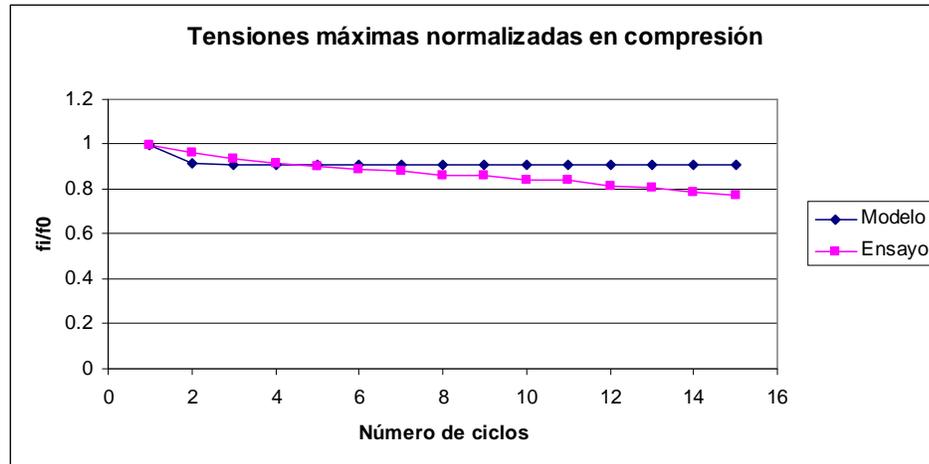


Figura C- 12:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #24)

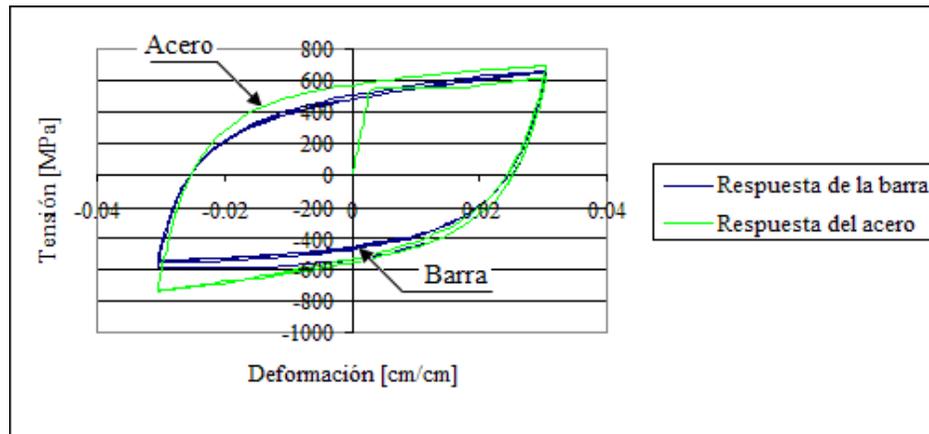


Figura C- 13: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #25)

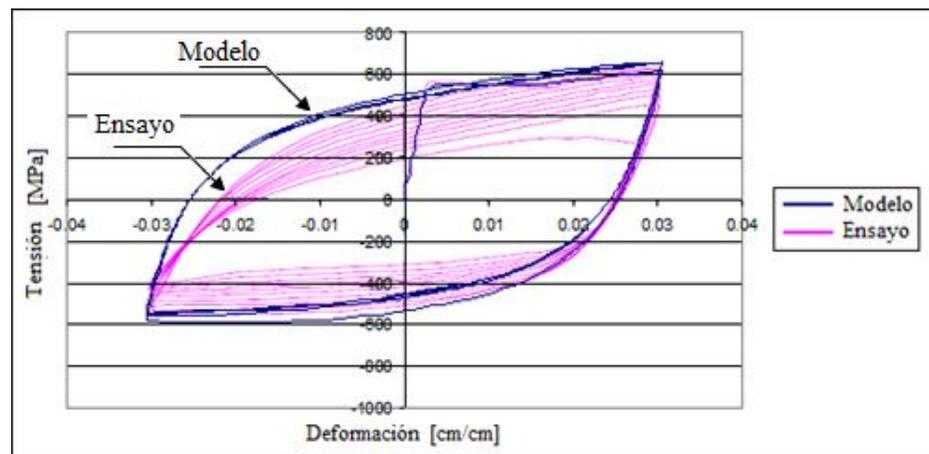


Figura C- 14: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #25)

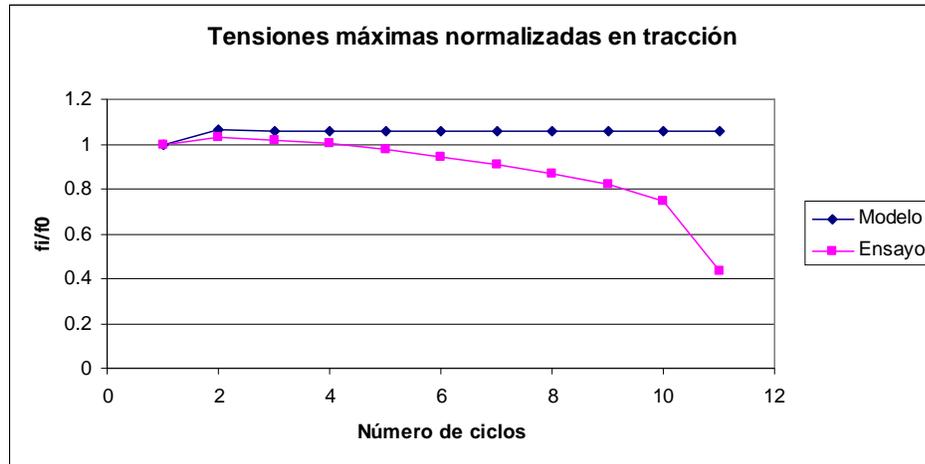


Figura C- 15:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #25)

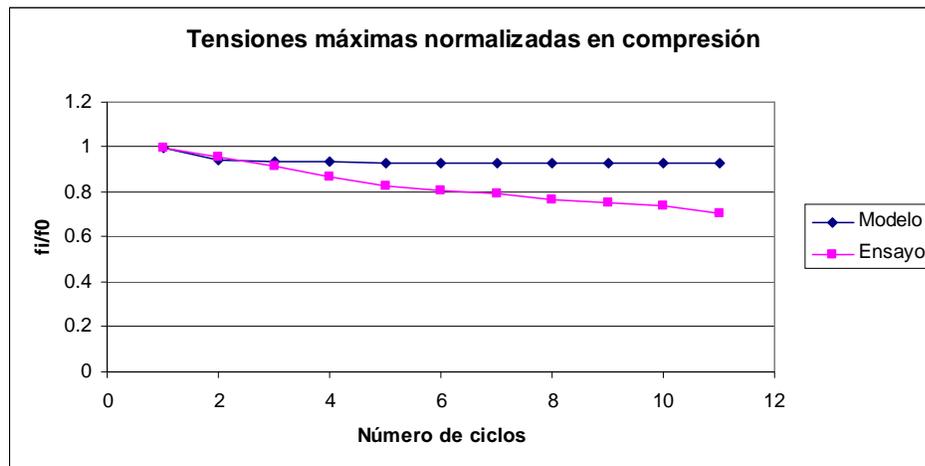


Figura C- 16:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #25)

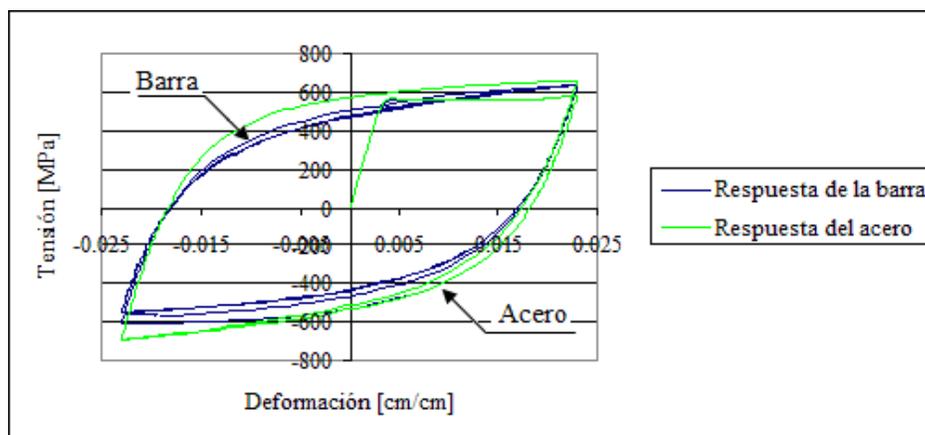
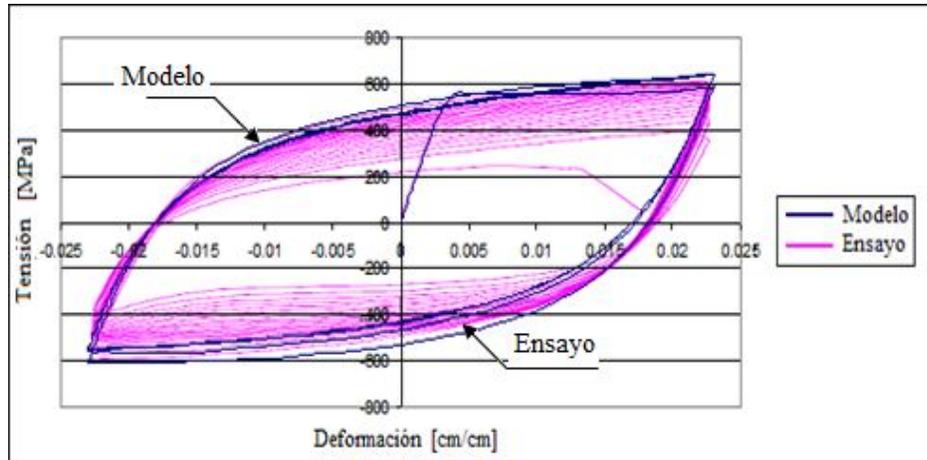
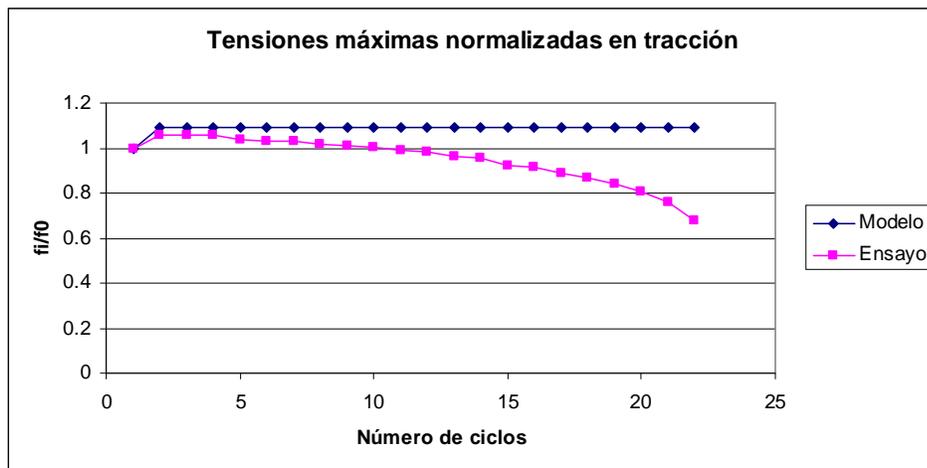


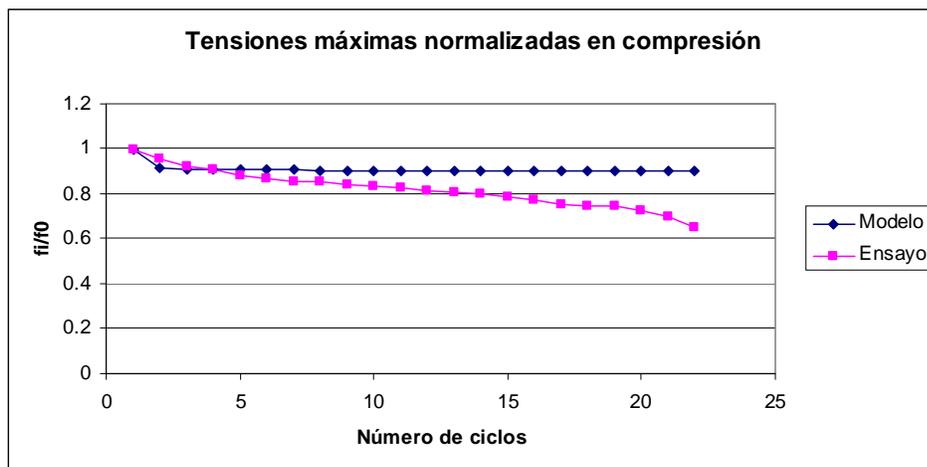
Figura C- 17: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #26)



**Figura C-18:** Tensión versus deformación (Brown, ensayo #26)



**Figura C-19:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #26)



**Figura C-20:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #26)

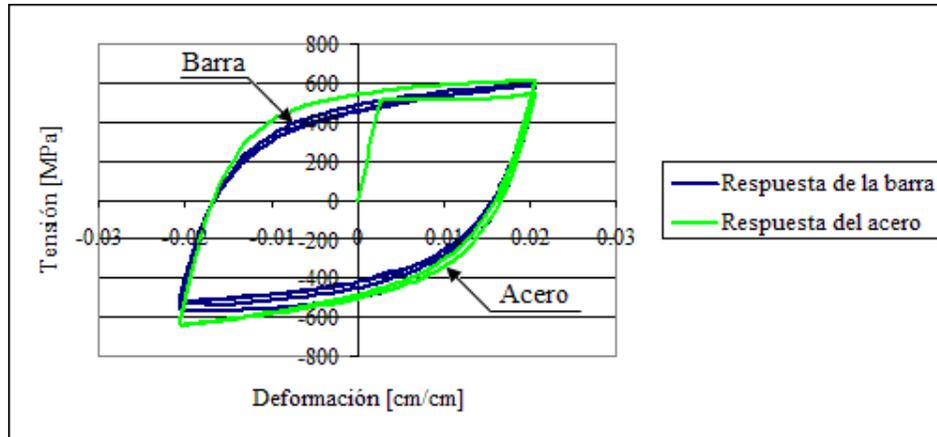


Figura C- 21: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #27)

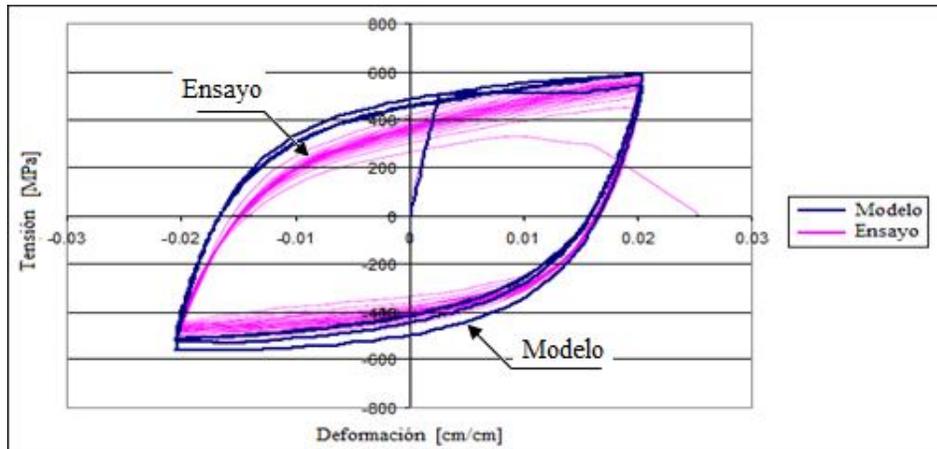


Figura C- 22: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #27)

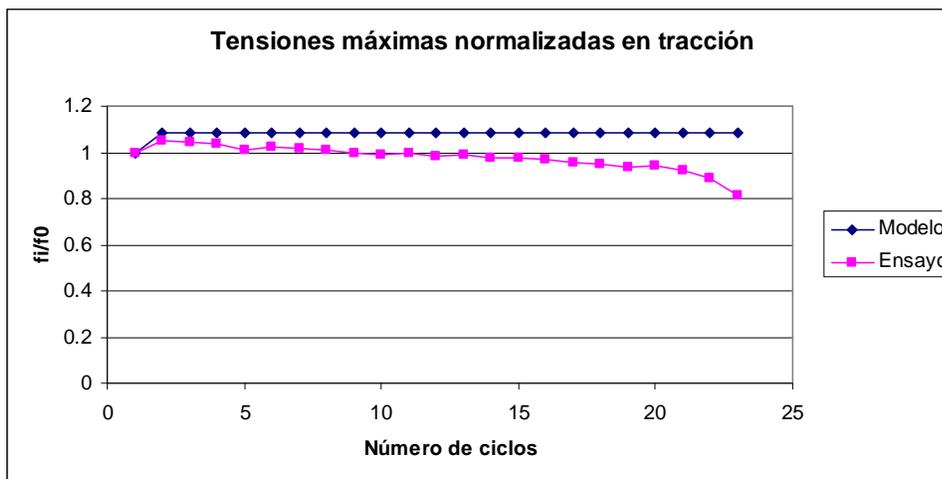


Figura C- 23:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #27)

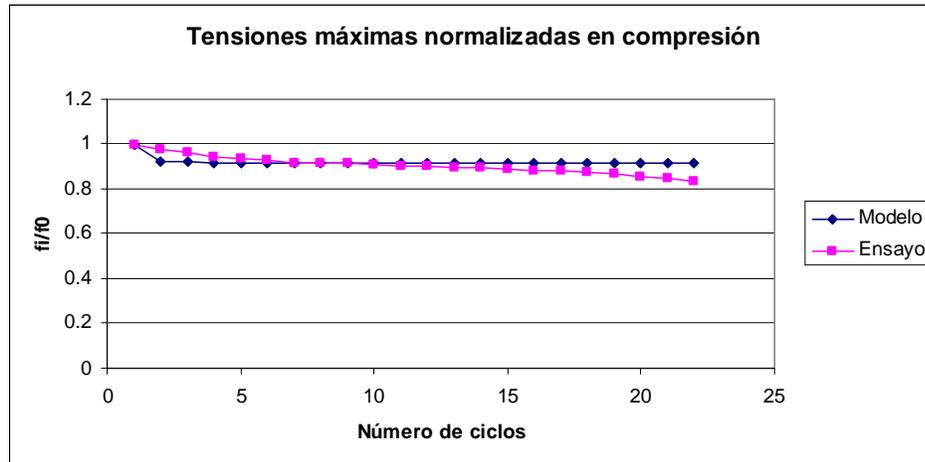


Figura C- 24:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #27)

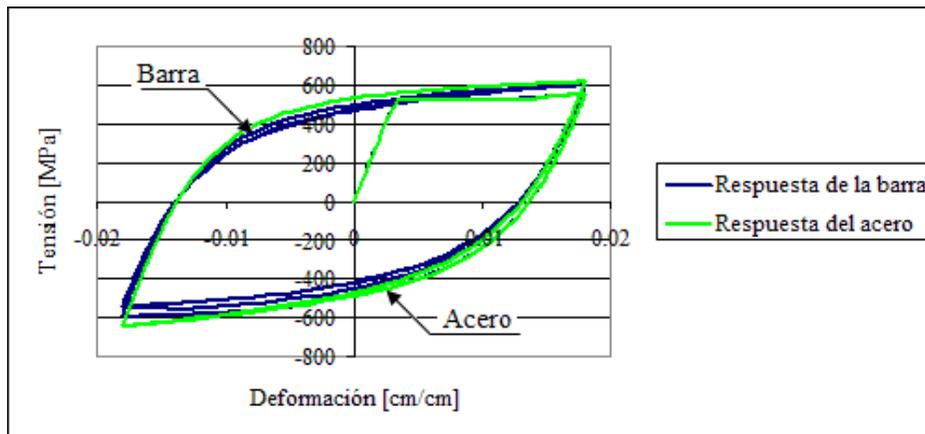


Figura C- 25: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #28)

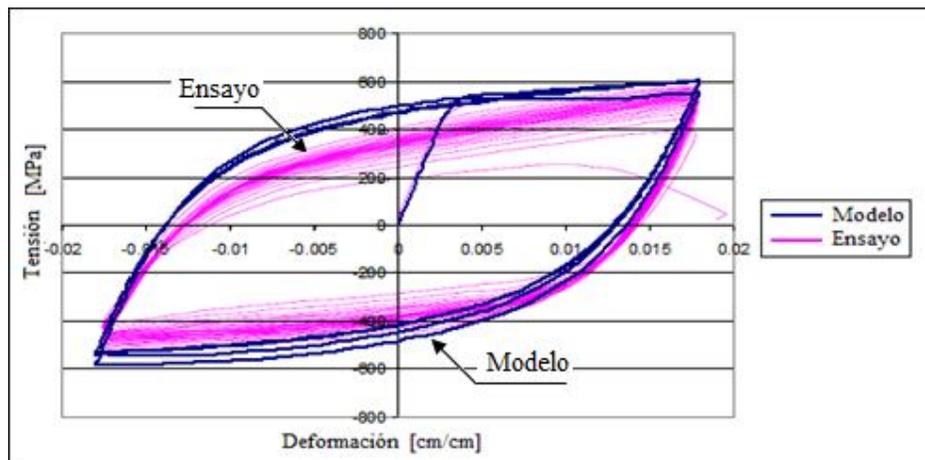


Figura C- 26: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #28)

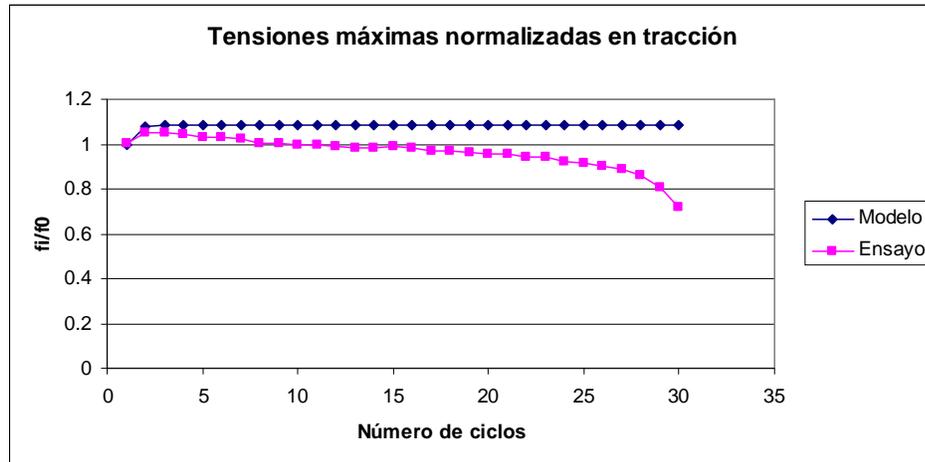


Figura C- 27:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #28)

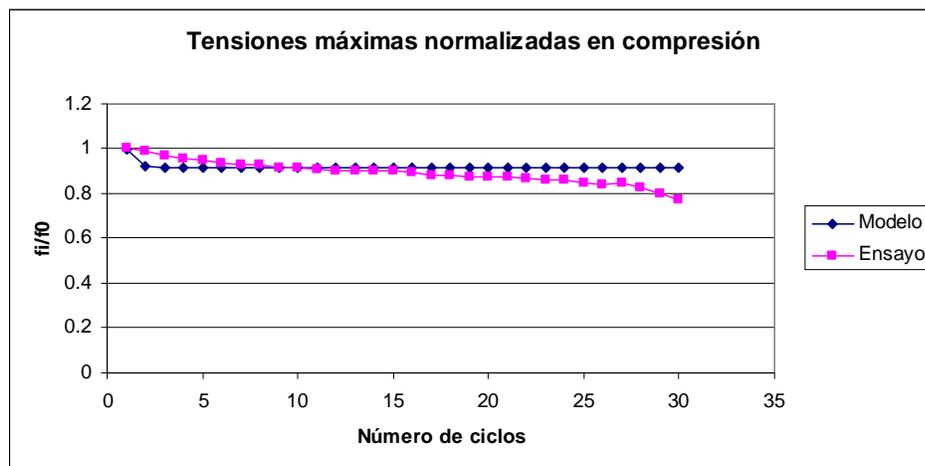


Figura C- 28:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #28)

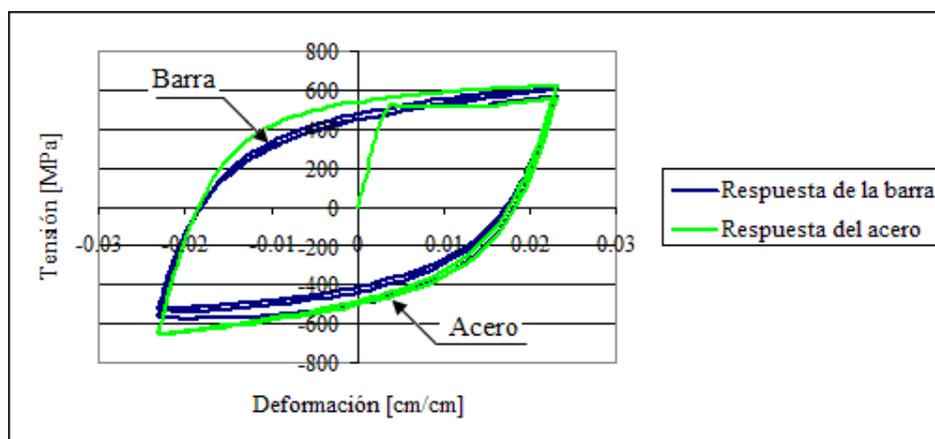


Figura C- 29: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #29)

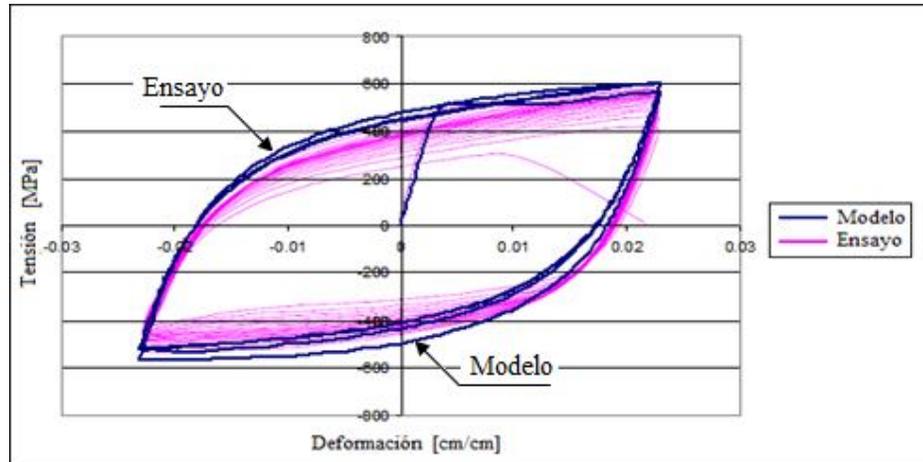


Figura C- 30: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #29)

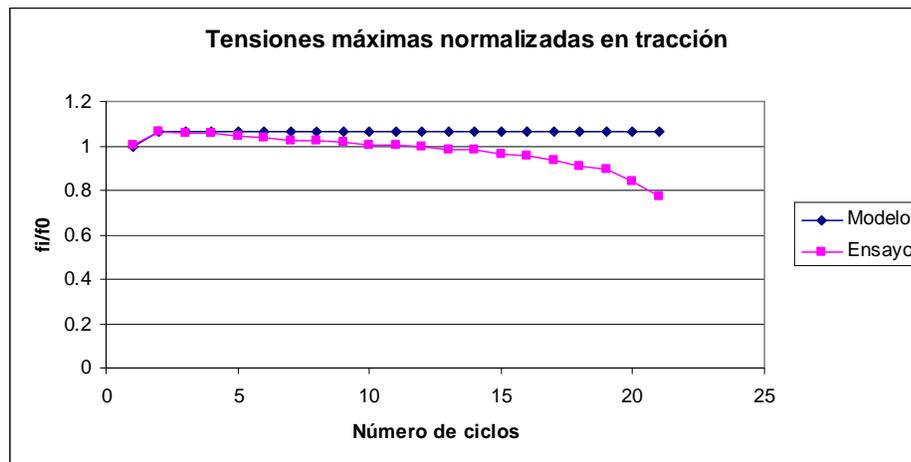


Figura C- 31:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #29)

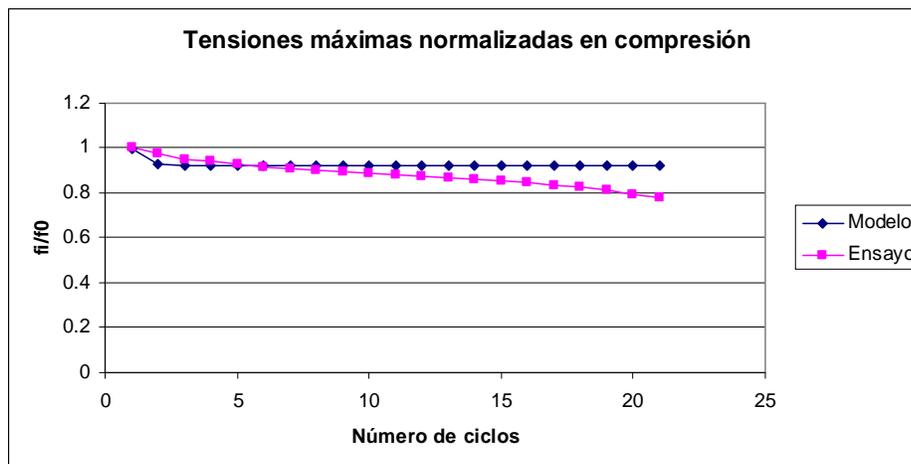


Figura C- 32:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #29)

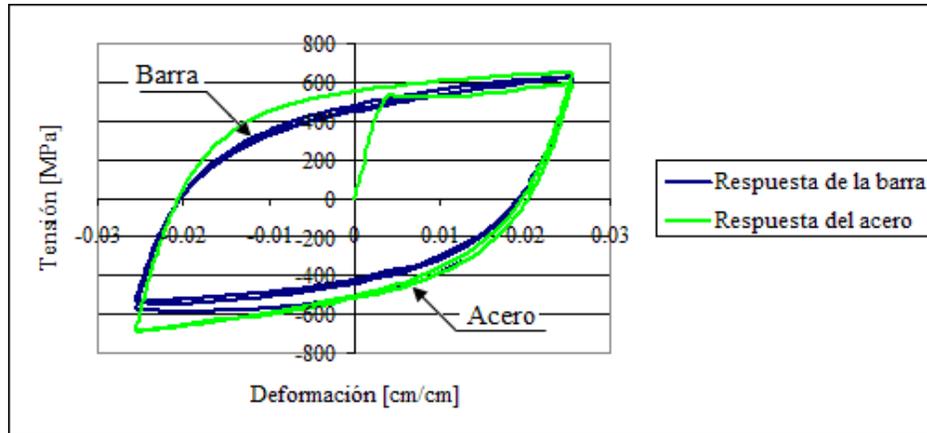


Figura C- 33: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #30)

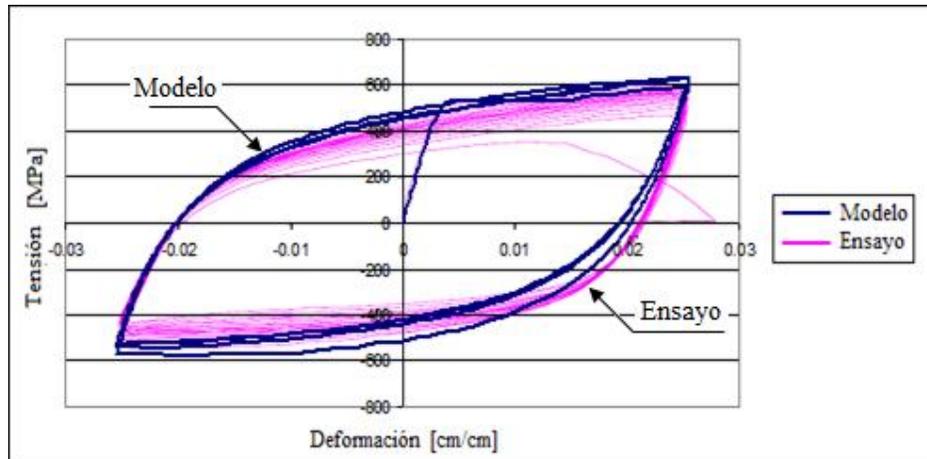


Figura C- 34: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #30)

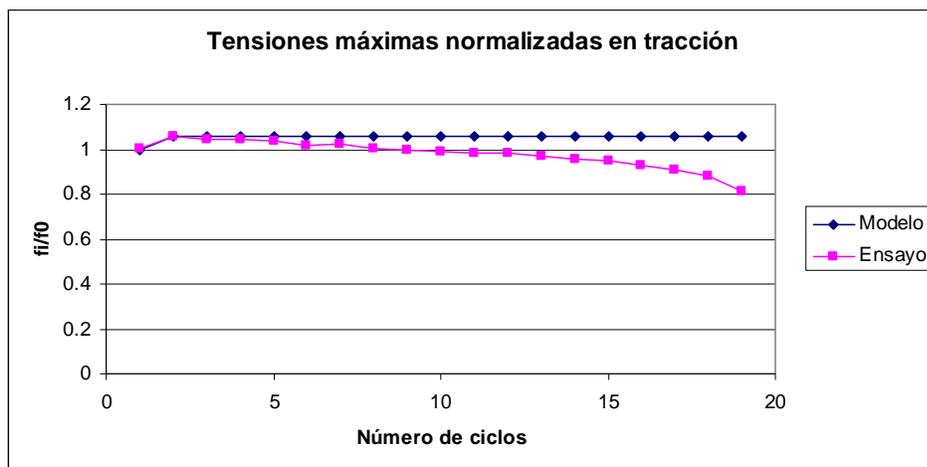


Figura C- 35:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #30)

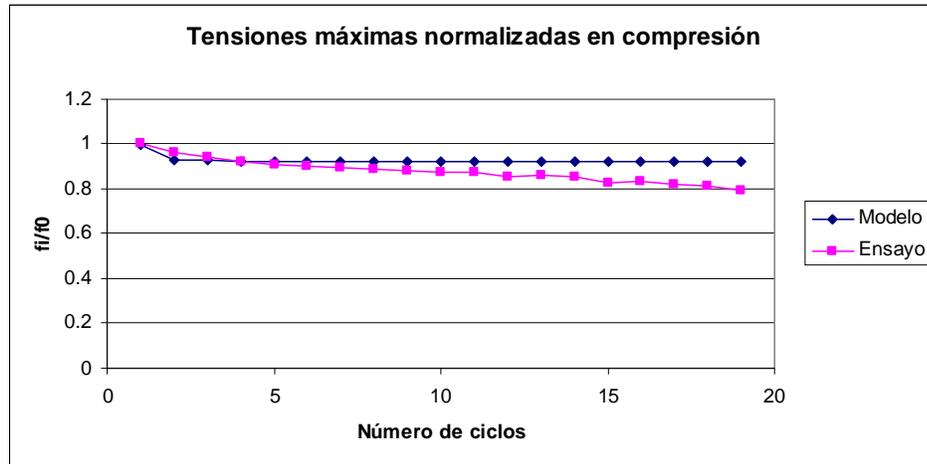


Figura C- 36:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #30)

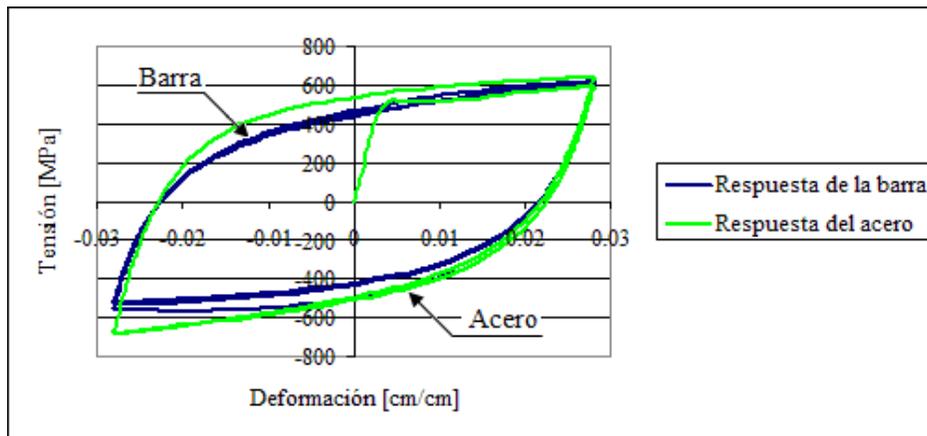


Figura C- 37: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #31)

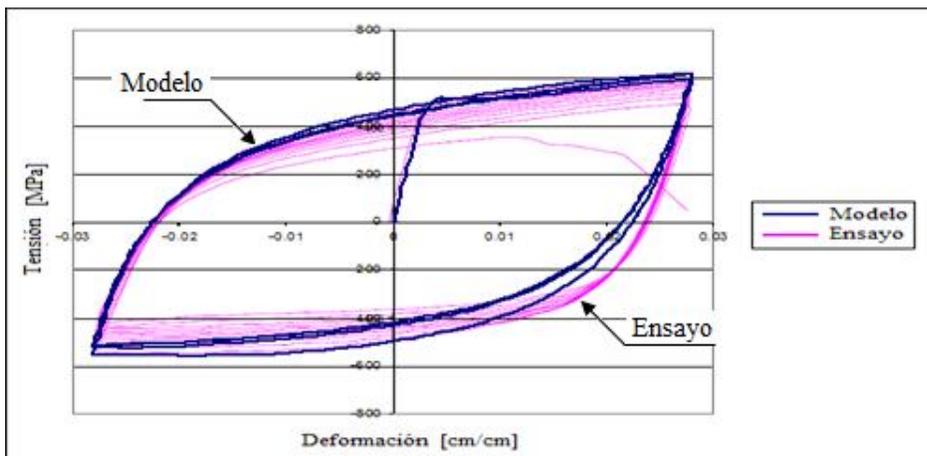


Figura C- 38: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #31)

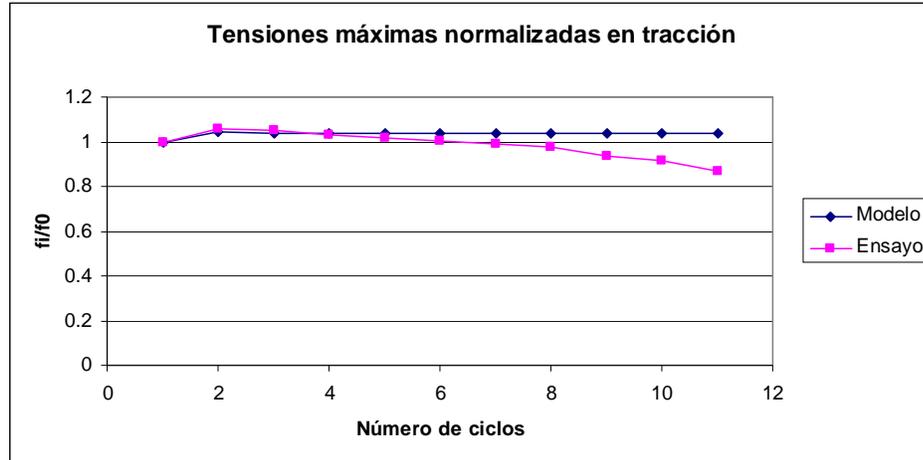


Figura C- 39:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #31)

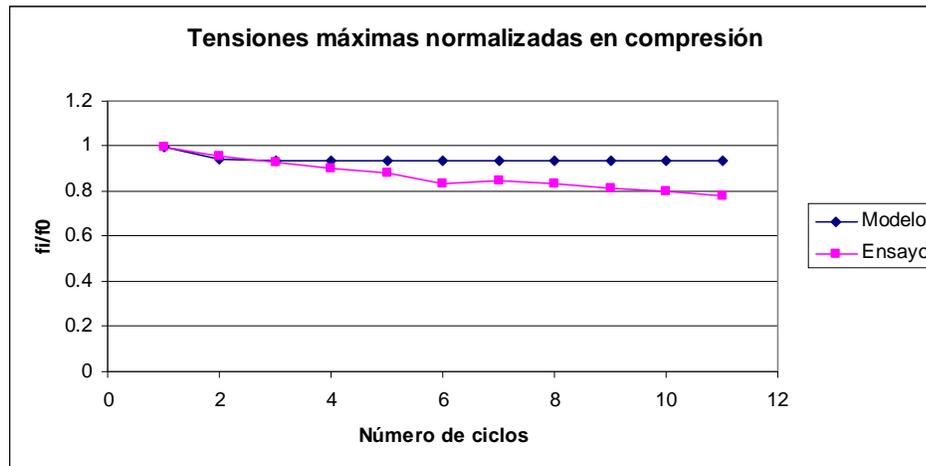


Figura C- 40:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #31)

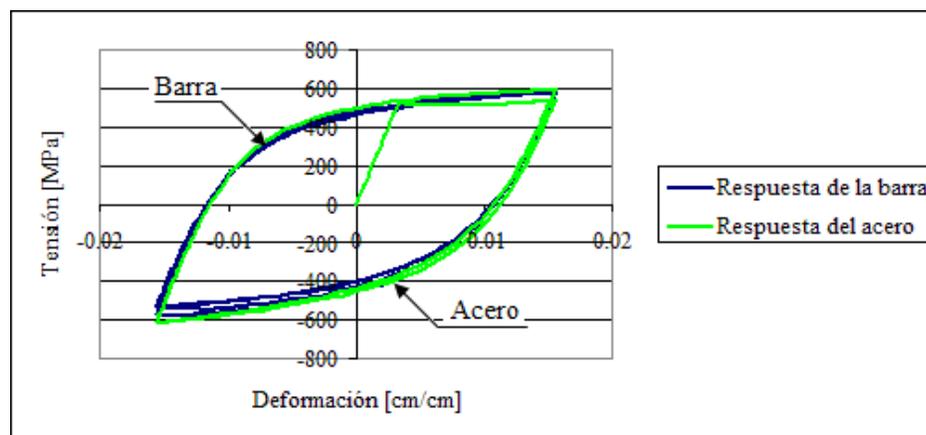


Figura C- 41: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #32)

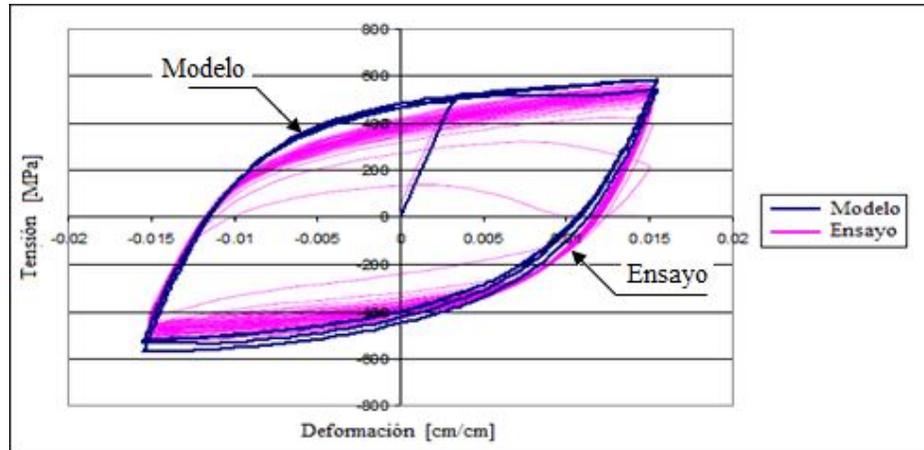


Figura C- 42: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #32)

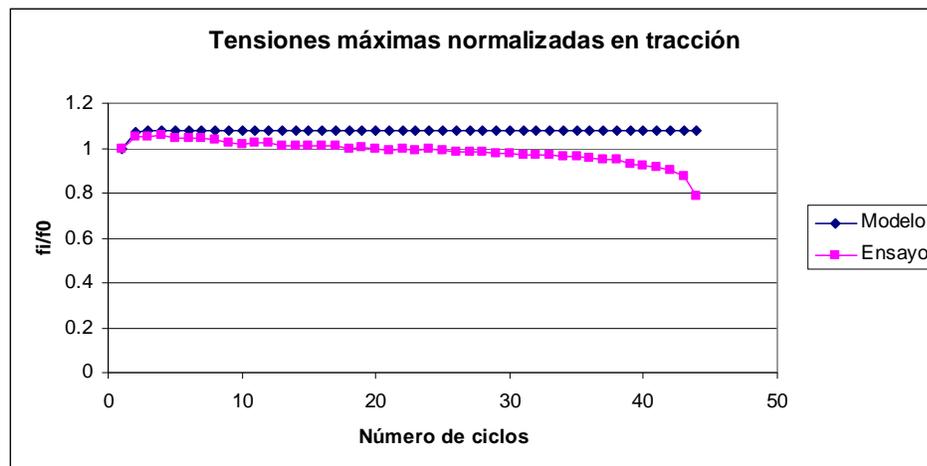


Figura C- 43:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #32)

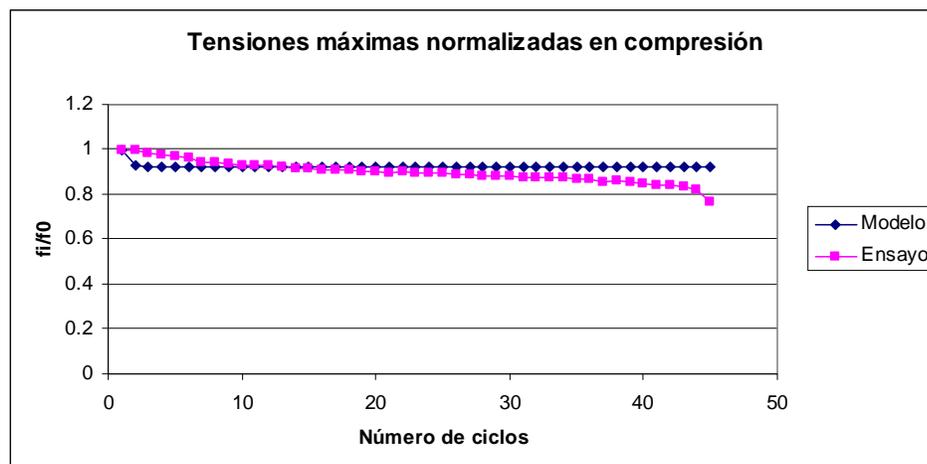


Figura C- 44:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #32)

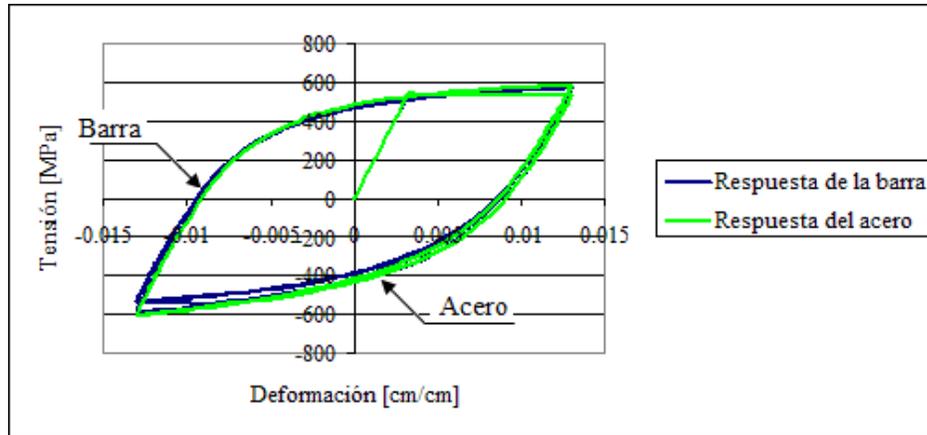


Figura C- 45: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #33)

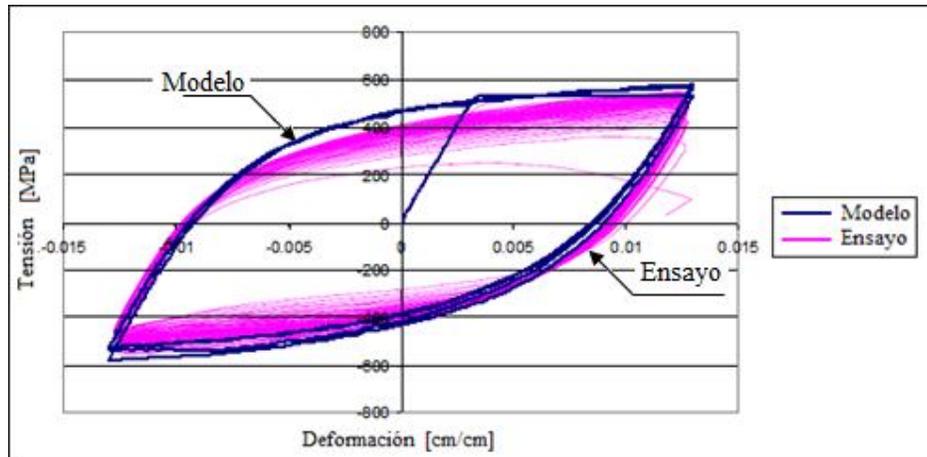


Figura C- 46: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #33)

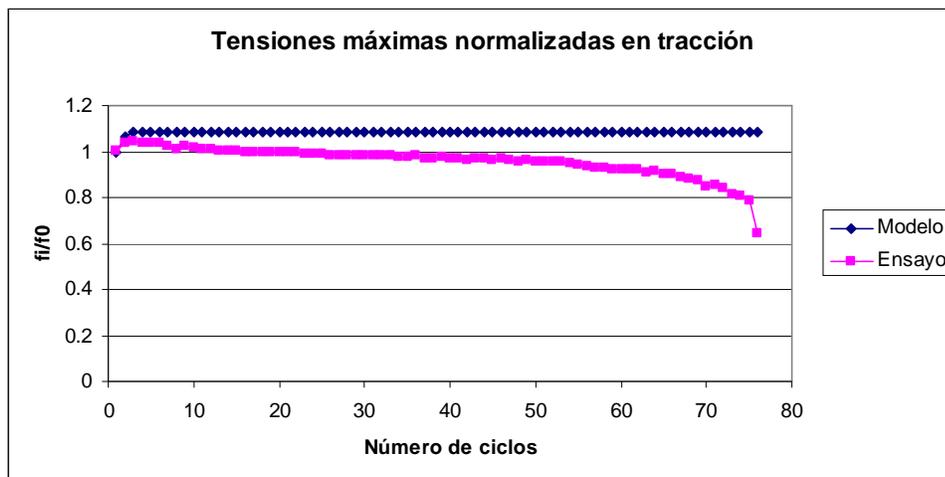


Figura C- 47:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #33)

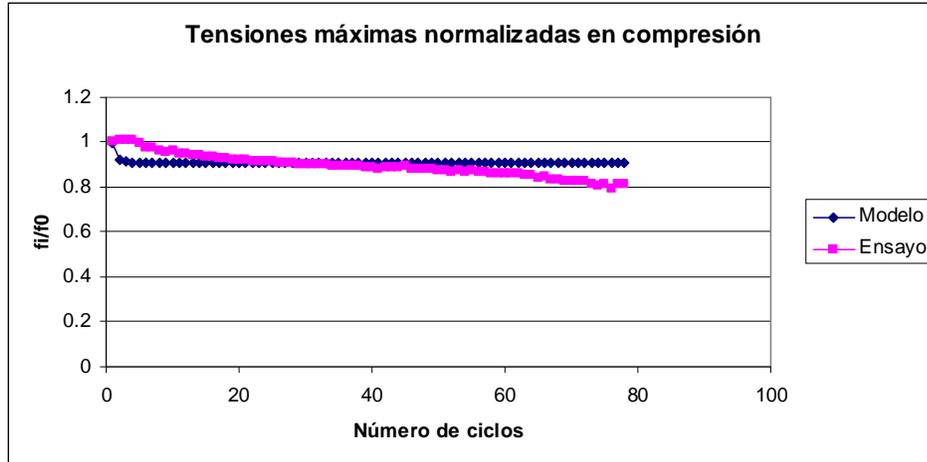


Figura C- 48:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #33)

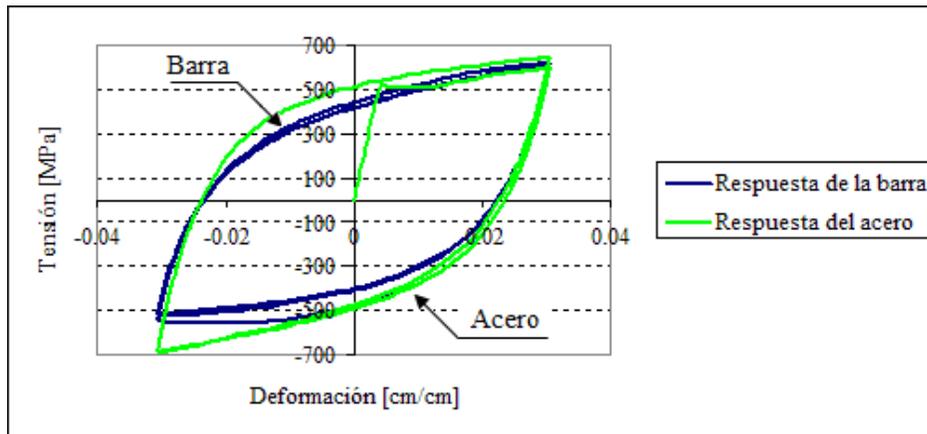


Figura C- 49: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #36)

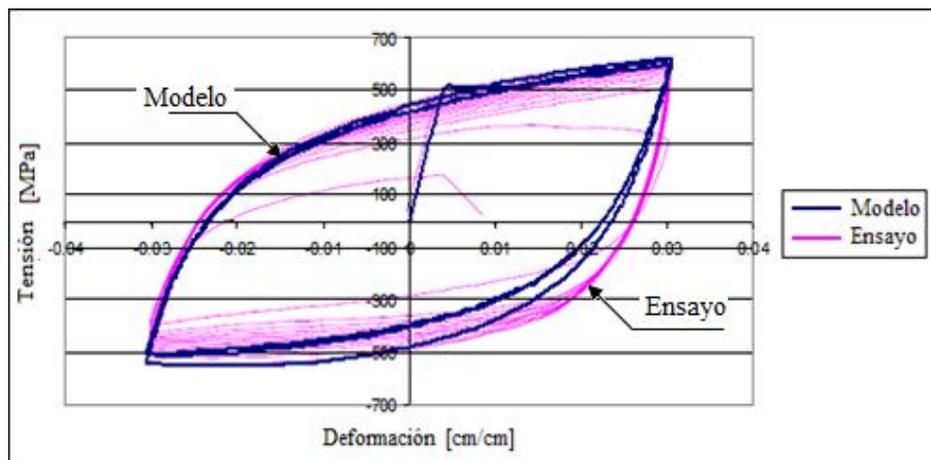


Figura C- 50: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #36)

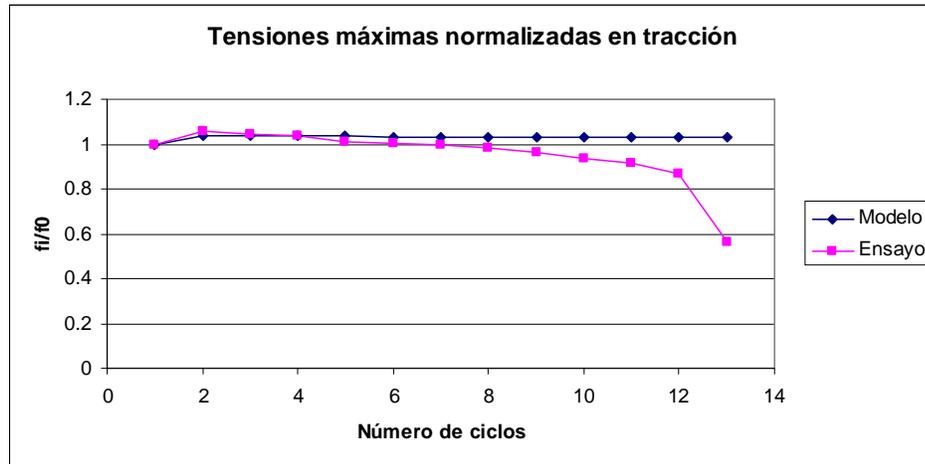


Figura C- 51:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #36)

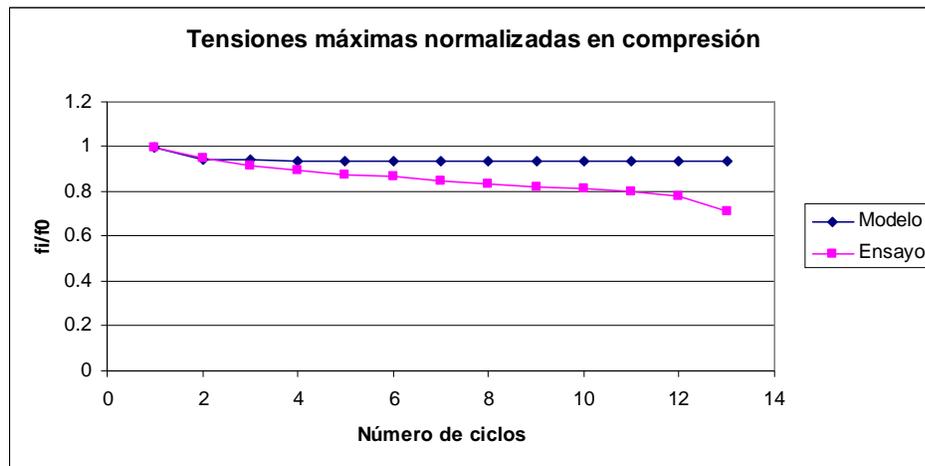


Figura C- 52:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #36)

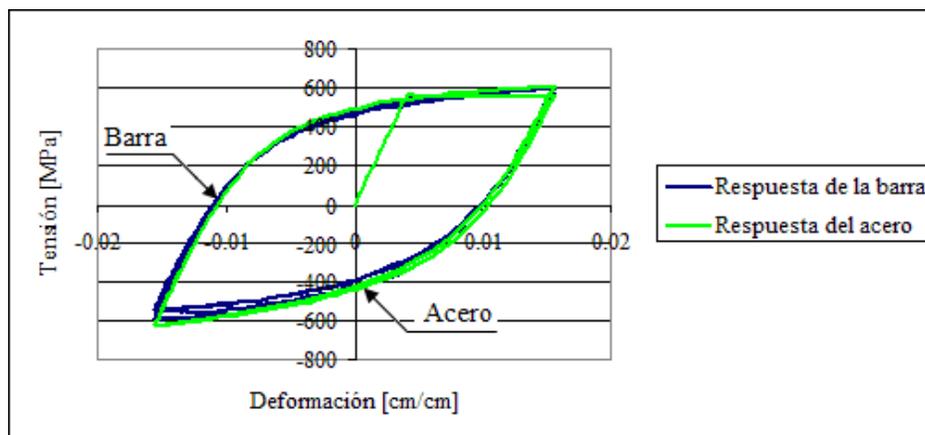


Figura C- 53: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #43)

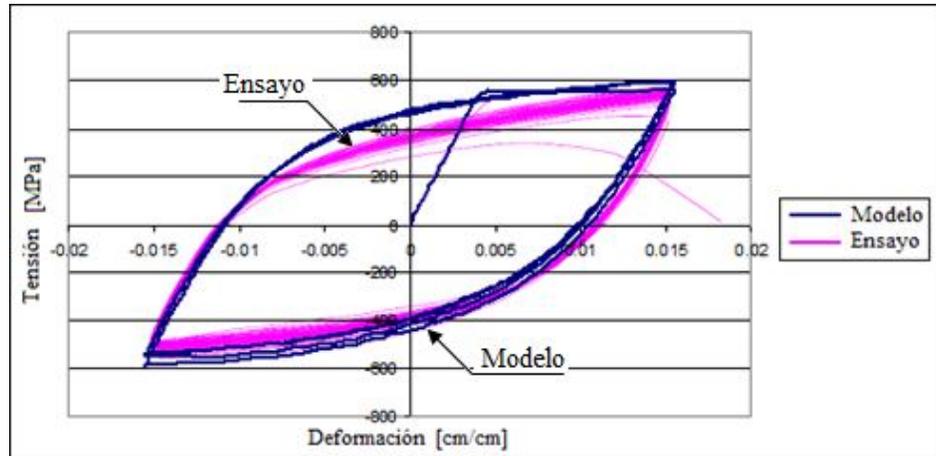


Figura C- 54: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #43)

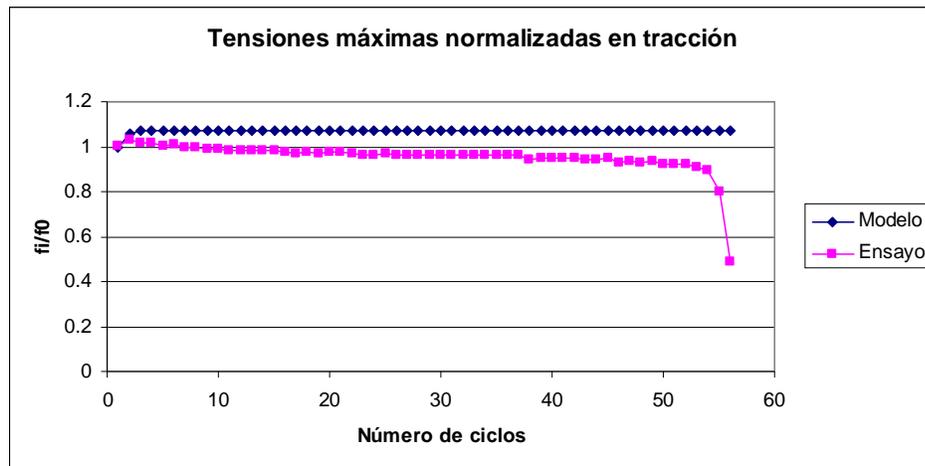


Figura C- 55:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #43)

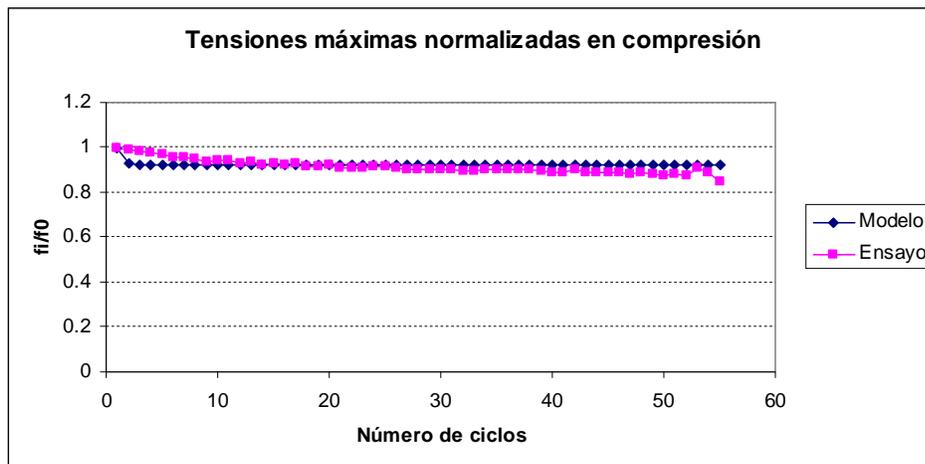


Figura C- 56:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #43)

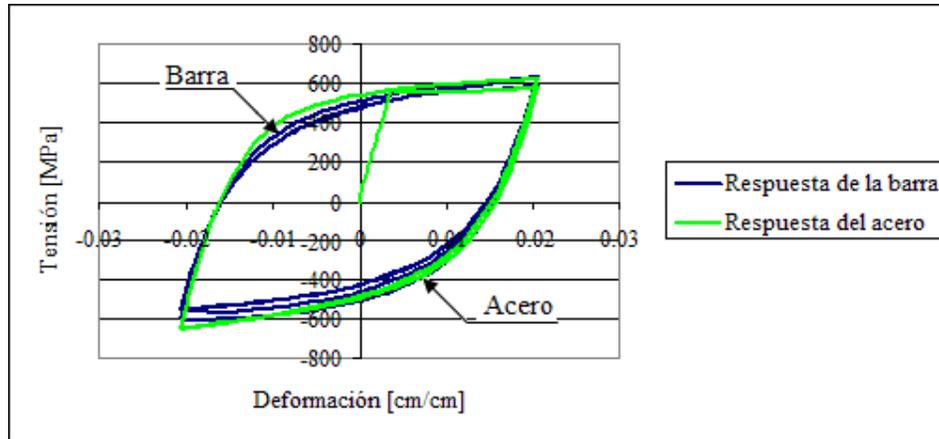


Figura C- 57: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #44)

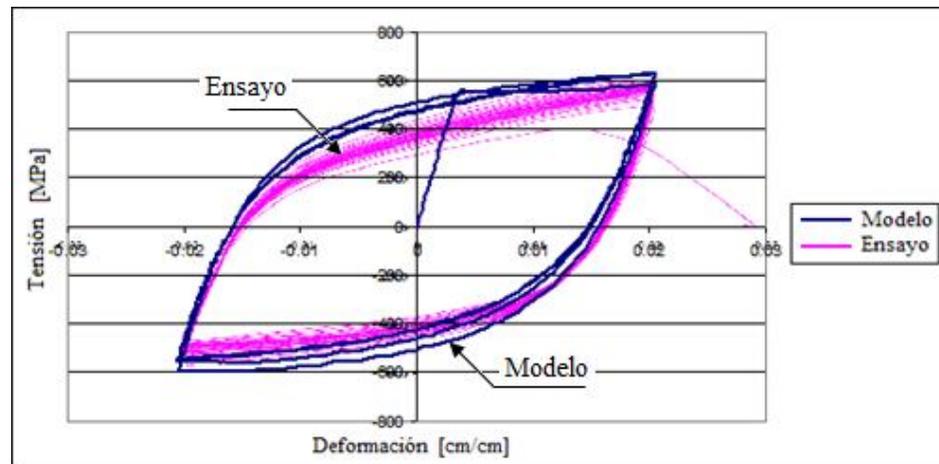


Figura C- 58: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #44)

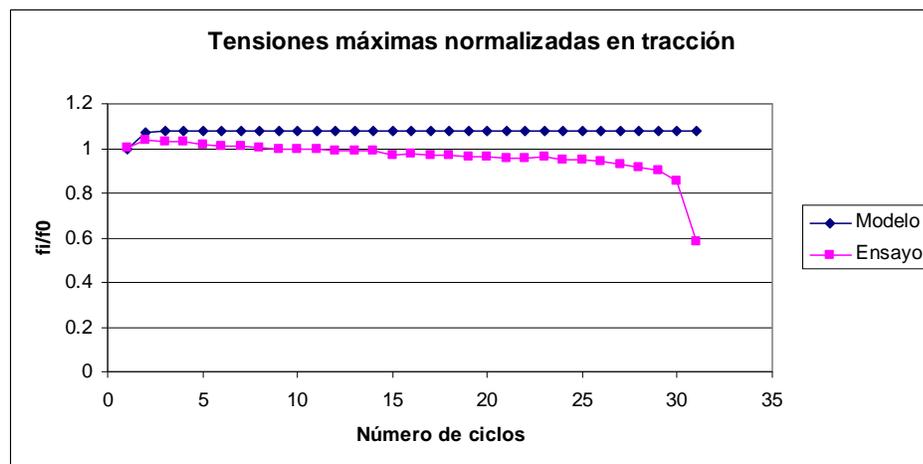


Figura C- 59:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #44)

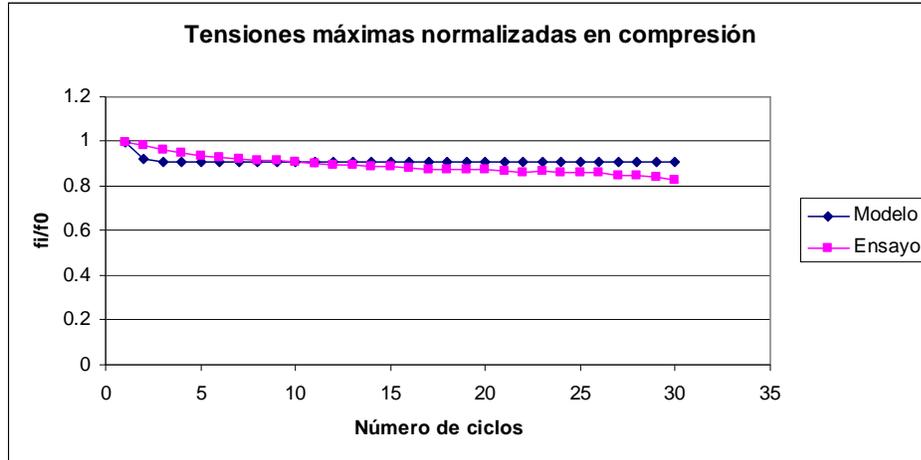


Figura C- 60:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #44)

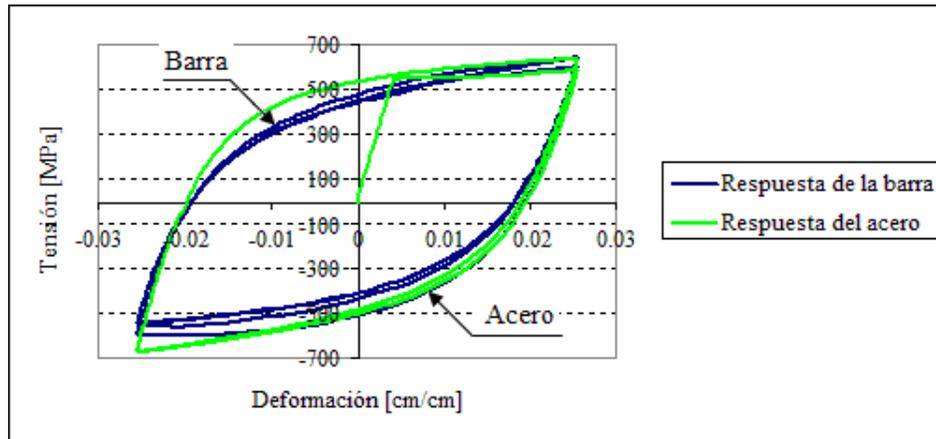


Figura C- 61: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #45)

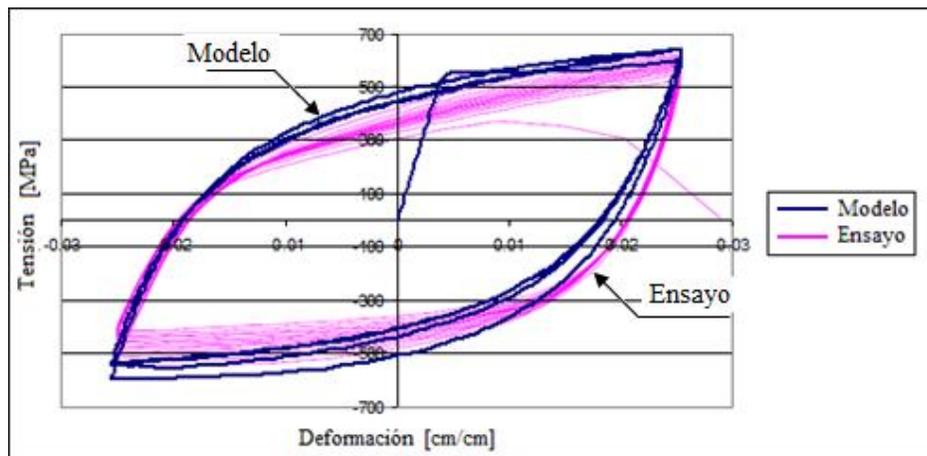


Figura C- 62: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #45)

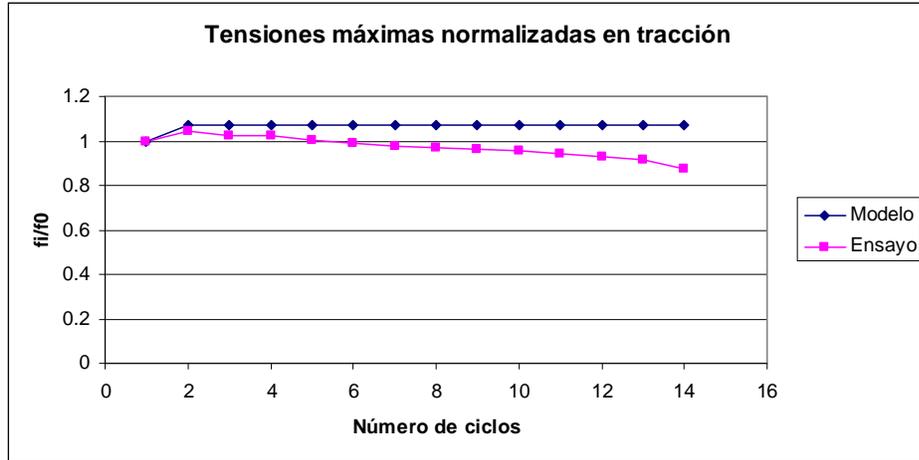


Figura C- 63:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #45)

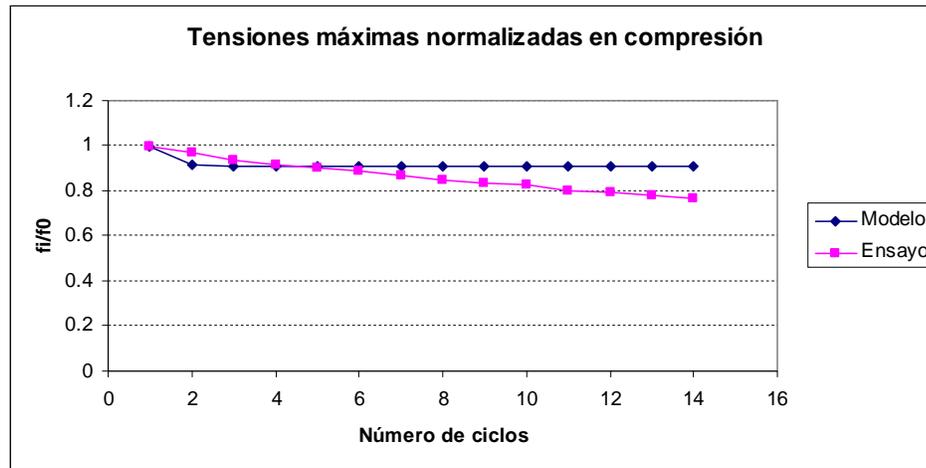


Figura C- 64:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #45)

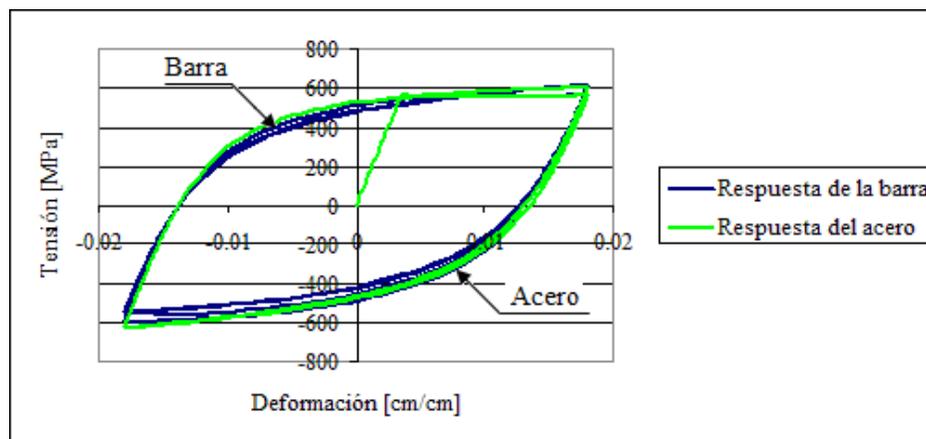


Figura C- 65: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #46)

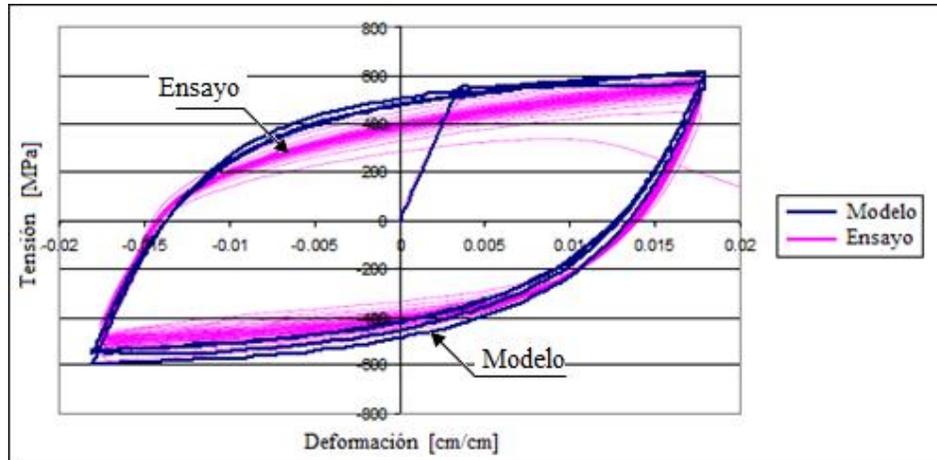


Figura C- 66: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #46)

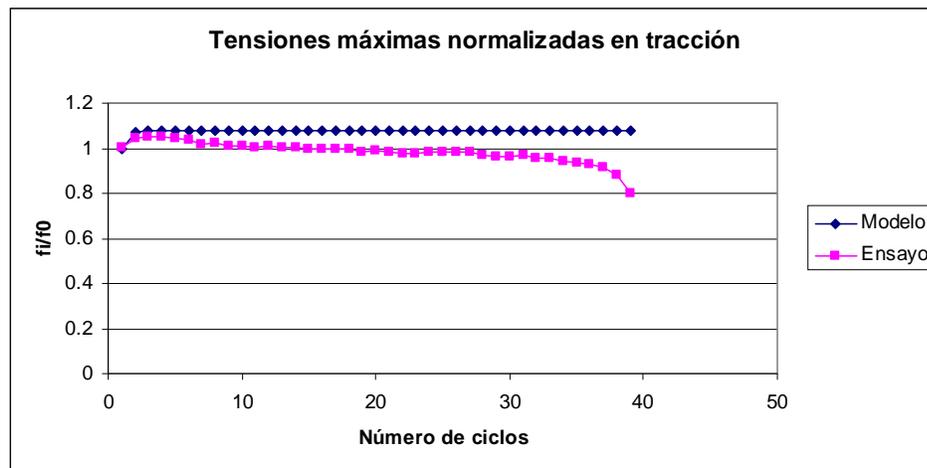


Figura C- 67:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #46)

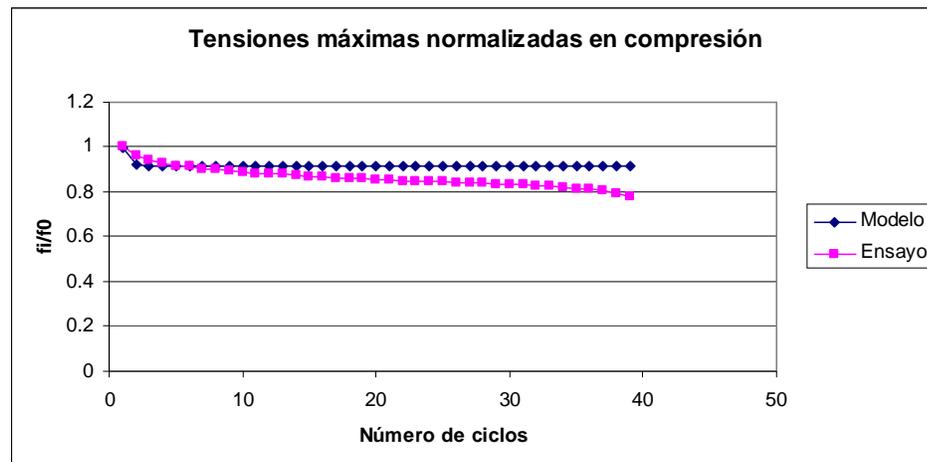


Figura C- 68:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #46)

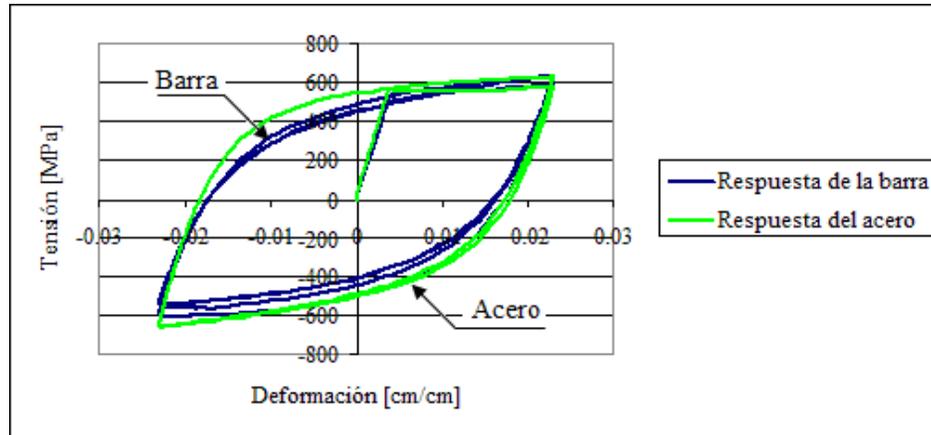


Figura C- 69: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #47)

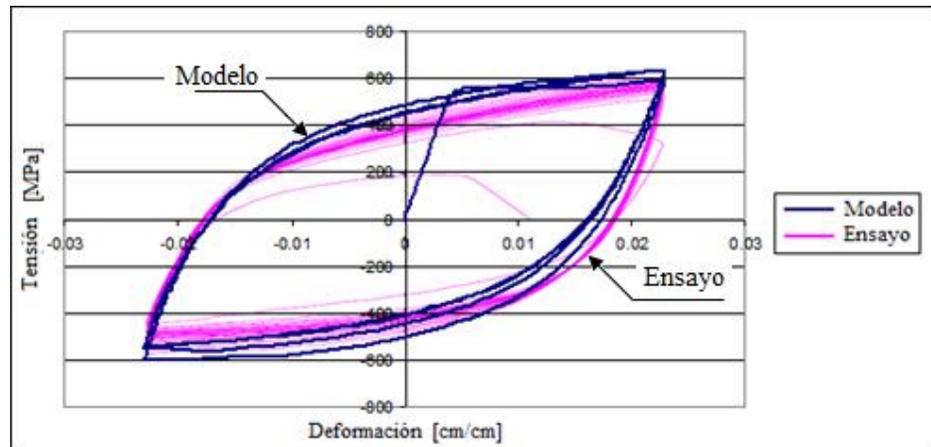


Figura C- 70: Tensión versus deformación (Brown, ensayo #47)

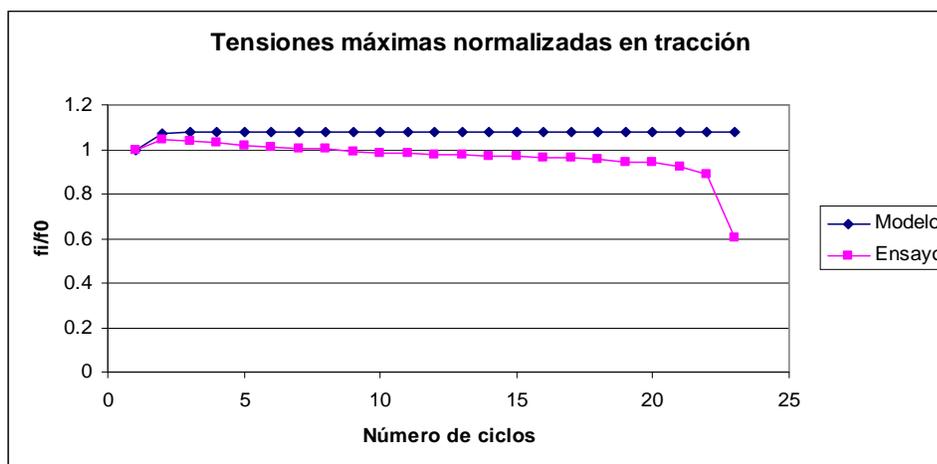
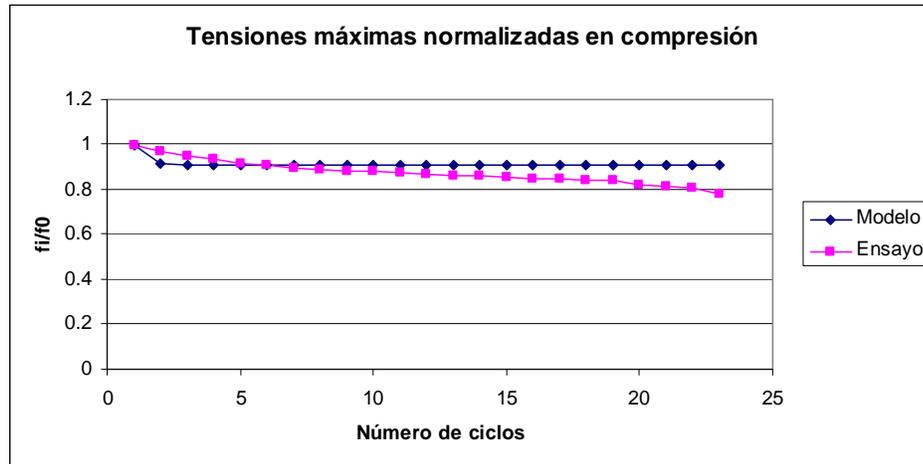


Figura C- 71:  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #47)



**Figura C- 72:**  $f_i/f_0$  versus número de ciclos (Brown, ensayo #47)