

**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA**

**IDENTIFICACIÓN DEL COEFICIENTE PRINCIPAL EN UNA ECUACIÓN DEL  
CALOR NO LINEAL USANDO DESIGUALDADES DE CARLEMAN**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO**

**NICOLÁS ANTONIO CARREÑO GODOY**

**PROFESOR GUÍA:  
AXEL ESTEBAN OSSES ALVARADO**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
ALBERTO CARLOS MERCADO SAUCEDO  
PASCAL JEAN FREY**

**SANTIAGO DE CHILE  
NOVIEMBRE 2009**

RESUMEN DE LA MEMORIA  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: NICOLÁS ANTONIO CARREÑO GODOY  
FECHA: 16/11/2009  
PROF. GUÍA: AXEL OSSES ALVARADO

## IDENTIFICACIÓN DEL COEFICIENTE PRINCIPAL EN UNA ECUACIÓN DEL CALOR NO LINEAL USANDO DESIGUALDADES DE CARLEMAN

El objetivo principal de esta memoria es estudiar algunos problemas inversos en ecuaciones en derivadas parciales mediante el uso de desigualdades de Carleman. Estas últimas son una herramienta muy útil para obtener estabilidad para el problema inverso en torno a una solución regular. Dos son los principales problemas inversos trabajados aquí.

Primero, consideramos la ecuación del calor lineal

$$\begin{cases} v_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla v) = g(x) & \text{en } Q \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $g$  es una fuente,  $Q = (0, T) \times \Omega$ ,  $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$ ,  $\Omega$  es un dominio regular y  $T > 0$ . El problema inverso asociado a (1) es recuperar la conductividad  $\sigma$  a partir de observaciones de borde tipo Dirichlet de la solución en  $\gamma \subset \partial\Omega$  durante toda la ventana temporal y en un tiempo positivo arbitrario fijo. También se estudia el caso de observaciones internas en  $\omega \subset \Omega$ . Suponiendo  $\sigma$  regular, se obtiene un resultado de estabilidad Lipschitz en torno a una solución regular con norma  $H^1(\Omega)$  de los parámetros y una norma apropiada de las mediciones.

Segundo, consideramos la ecuación biestable no lineal:

$$\begin{cases} v_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla v) = f(v) & \text{en } Q \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \end{cases} \quad (2)$$

donde  $f(v) = a(x)v(1-v)(v-\alpha(x))$  es el término no lineal. La ecuación (2) sirve, por ejemplo, como un modelo muy simple para la propagación de voltaje normalizado en el tejido cardíaco. El problema inverso consiste en recuperar la conductividad  $\sigma$  a partir de observaciones tipo Dirichlet en una parte del borde y en un tiempo fijo positivo. Se obtiene, al igual que para la ecuación (1), un resultado de estabilidad Lipschitz en torno a una solución regular por medio de la combinación de dos desigualdades de Carleman: la usual para la ecuación del calor y una específica para el problema no lineal.

En adición a lo anterior, se estudia el comportamiento de la solución de la ecuación biestable en una dimensión mediante simulaciones numéricas usando el método de diferencias finitas.

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mis padres por darme siempre su confianza y apoyo incondicional. Todo lo que soy se lo debo a ellos. Por supuesto, agradezco también a mi hermanita que, entre buenos y malos momentos, hemos aprendido a querernos tal como somos.

Agradezco a mis profesores, en especial a mi profesor guía Axel Osses quien me dio la oportunidad de iniciarme en la docencia y tuvo la paciencia y tiempo para ayudarme a sacar este trabajo adelante. También agradezco a Alberto por aceptar ser parte de este equipo con el cual pude conocer la investigación en matemáticas.

A los funcionarios del DIM, en especial a Eterin por su siempre buena disposición y voluntad para ayudarme en una diversa variedad de cosas.

A la gente del ASML, por acogerme de gran manera y permitirme ocupar un espacio en el laboratorio para trabajar estos últimos meses de la memoria. Fue muy importante para mí.

A mis amigos con quienes hicimos el plan común: Chiki, Hugo, Huevo y Tadashi. Gracias por tantos momentos que vivimos, el estudio en la pajarera, el Pura Gula, las canciones, el Morandé. A los amigos que hice en la carrera: JD, colega Melvin, Loco Lyon, Pitu. A la Cantina: Monu, Gus, Nacho, Raúl, Cris, Oscar y Chascón. A Perrochoko por ser mi primera banda, y a GDP por ser la mejor banda del mundo y que permitió mi regreso al rock. Gracias especiales a Robert, por ser un gran bajista y amigo, a mi compadre Jenny con quien compartimos grandes momentos en la música y las matemáticas, y a la V, por ser la fan número uno de GDP y, sobre todo, por ser mi compañera y un gran apoyo para mí durante este trabajo.

Finalmente, quiero agradecer a Dios por hacer todo lo anterior posible.

*...voy coriendo de aquí para allá...*

—David, El Gnomo

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Antecedentes bibliográficos . . . . .	3
1.3. Estructura del trabajo . . . . .	5
<b>2. Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Problemas inversos . . . . .	7
2.2. Desigualdad de Carleman para la ecuación del calor . . . . .	10
2.3. Ecuación biestable . . . . .	12
2.3.1. Caso $\sigma$ constante . . . . .	12
2.3.2. Caso $\sigma$ variable . . . . .	21
<b>3. Determinación del coeficiente principal en una ecuación parabólica</b>	<b>26</b>
3.1. Caso observaciones internas . . . . .	26
3.1.1. Desigualdad de Carleman: observaciones en $\omega$ . . . . .	27
3.1.2. Principales resultados . . . . .	28
3.2. Caso observaciones de borde . . . . .	40
3.2.1. Desigualdad de Carleman: observaciones en $\gamma$ . . . . .	40
3.2.2. Principales resultados . . . . .	40
<b>4. Determinación del coeficiente principal en la ecuación biestable</b>	<b>42</b>
4.1. La ecuación biestable . . . . .	42
4.2. Desigualdad de Carleman para ecuación biestable . . . . .	44
4.2.1. Caso de observaciones en $(0, T) \times \omega$ . . . . .	44
4.2.2. Caso de observaciones en $(0, T) \times \gamma$ . . . . .	52
4.3. Un resultado de estabilidad . . . . .	57

---

<b>5. Conclusiones</b>	<b>64</b>
5.1. Problema lineal . . . . .	64
5.2. Problema ecuación no lineal biestable . . . . .	65
5.3. Comentarios finales . . . . .	66
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La clase de problemas inversos que son el interés de esta memoria son los que se presentan en ecuaciones en derivadas parciales (EDP), esto es, dado un fenómeno gobernado por una EDP, se quiere recuperar algún parámetro a partir de observaciones o mediciones de la solución en alguna parte del interior o del borde del dominio.

En palabras simples, un *problema inverso* consiste en determinar las *causas* de un fenómeno a partir de sus *consecuencias*. Por ejemplo, si tres arroyos se juntan para formar un río, y sabemos que tres industrias botan cantidades conocidas de contaminante en ellos, entonces podemos calcular la cantidad de contaminante en el río. Esto sería el problema clásico o *directo*. Sin embargo, podríamos querer determinar la cantidad de contaminante que cada industria está depositando en cada arroyo, y sólo tener acceso a la cantidad de contaminante en varios puntos del río. Este constituye un problema inverso. Otro ejemplo, que tiene que ver con imágenes médicas, es determinar las propiedades de un órgano interno sin cirugía invasiva. Es el caso de la tomografía por impedancia eléctrica, la cual intenta recuperar la conductividad de una sección del cuerpo midiendo la corriente para una serie de voltajes aplicados en la superficie. Así, podemos encontrar ejemplos de problemas inversos en diversas áreas, como finanzas (determinación de la volatilidad en la ecuación de Black-Scholes), física (determinación del coeficiente de Lamé en la ecuación de elasticidad), química (determinación de fuentes de emisión en química atmosférica), etc.

### 1.1. Motivación

La actividad cardíaca se origina mediante un impulso eléctrico generado por el nodo sinoauricular (SA) ubicado en la aurícula derecha. El nodo SA es el marcapasos natural del corazón. Este impulso se propaga a través de una ruta específica y a medida que pasa provoca la contracción del músculo. Luego del nodo SA, el impulso pasa a la aurícula izquierda y al nodo auriculoventricular (AV), de donde se envía a una vía de conducción llamada haz de His, la cual se divide en dos ramas que transmiten el impulso a los

ventrículos. Esta propagación eléctrica de arriba hacia abajo provoca el bombeo de sangre, lo que no sería posible si todo el músculo del corazón se contrae al mismo tiempo. En la figura 1.1 se pueden ver las partes del corazón mencionadas.

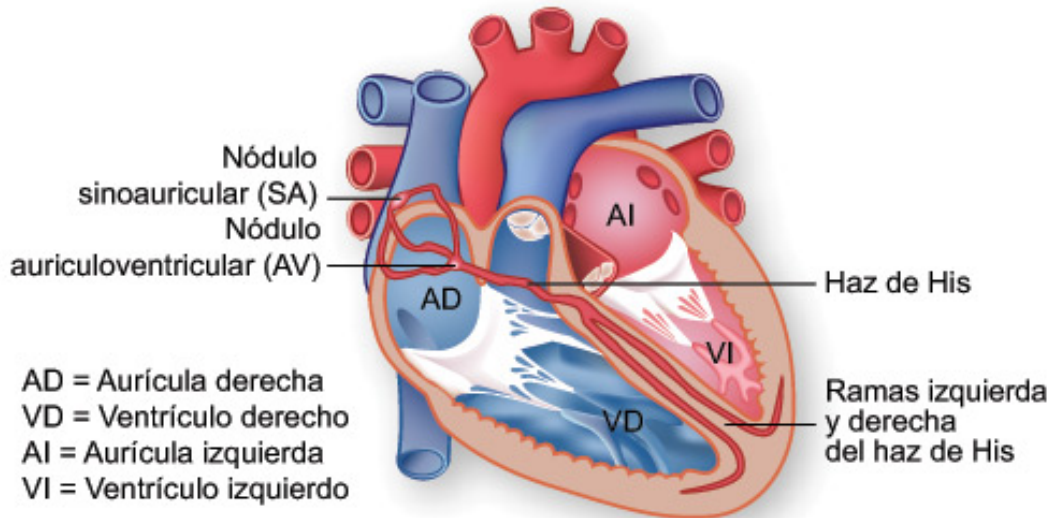


Figura 1.1: Partes del corazón.

Si la función eléctrica o muscular del corazón es perturbada por algún motivo, afectará la propagación del impulso eléctrico a través del músculo. Un ejemplo es el infarto al miocardio, el que resulta en la muerte de una parte del tejido cardíaco, lo que impide que el impulso se propague por la zona dañada.

Otro ejemplo es el caso de un bloqueo de rama. En condiciones normales, el impulso viaja por las ramas del haz de His a la misma velocidad lo que hace que los ventrículos se contraigan al mismo tiempo. Si existe un bloqueo en alguna de ellas, el impulso debe llegar al ventrículo por otra vía de conducción, lo que causa un retraso en la contracción y descoordinación entre los ventrículos, lo que puede afectar la habilidad del corazón de bombear sangre. Aunque se puede padecer de esta condición sin presentar síntomas, es importante su detección pues puede ser síntoma de otra enfermedad cardíaca más grave. En la figura 1.2 se muestra cómo se verían estas condiciones en el corazón.

La motivación de este trabajo es la detección de anomalías en la conducción del tejido muscular a partir de un modelo simple de la propagación de voltaje normalizado en el corazón. Este modelo es la ecuación biestable [Xin00]:

$$v_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla v) = f(v), \quad (1.1)$$

donde  $f(v) = a(x)v(1-v)(v-\alpha(x))$ ,  $a$  y  $\alpha$  son funciones adecuadas, y  $\sigma$  representa la conductividad. Este modelo solamente simula la despolarización del tejido muscular.



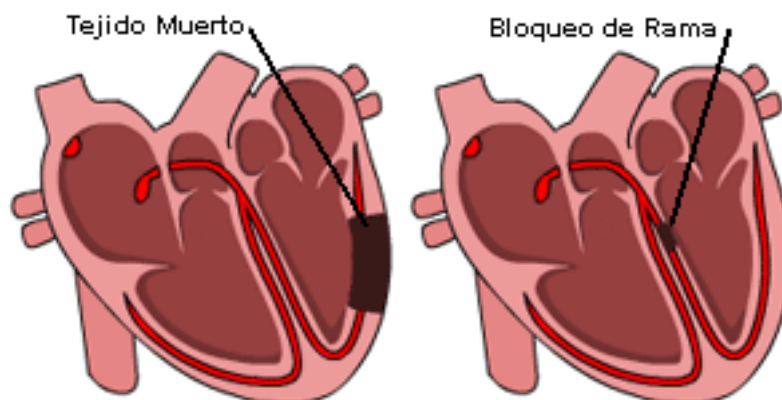


Figura 1.2: Infarto al miocardio y bloqueo de rama.

Un modelo más realista es el sistema de Fitzhugh-Nagumo [Ji00]:

$$\begin{aligned} v_t &= \Delta v + f(v) - u \\ u_t &= bv - \gamma u, \end{aligned} \quad (1.2)$$

la que introduce una nueva variable  $u$  que permite recuperar el efecto de repolarización de la onda viajera [KS98].

Otro modelo, que rescata la forma típica de las ondas en el corazón, es el modelo de Aliev-Panfilov [MVDS<sup>+</sup>05]:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 v_t &= \epsilon \operatorname{div}(\sigma \nabla v) + f(v) - vu \\ u_t &= -av(v - \alpha - 1) - u, \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde  $\epsilon > 0$  es un parámetro pequeño que controla el acoplamiento entre las variables  $v$  y  $u$ .

En este trabajo, sólo consideramos el problema inverso siguiente para la ecuación (1.1): recuperar la conductividad  $\sigma$  a partir de mediciones del voltaje en una parte del borde del corazón. En particular, estudiamos la estabilidad con respecto a las observaciones usando desigualdades de Carleman. Sin embargo, destacamos que esta memoria es un buen punto de partida para estudios similares de los modelos (1.2) y (1.3).

## 1.2. Antecedentes bibliográficos

Muchos son los trabajos que abarcan problemas inversos en EDP usando desigualdades de Carleman. Este método, introducido por Bukhgeim y Klibanov en [BK81], permite obtener estabilidad del problema inverso de recuperar algún parámetro de la ecuación con respecto a observaciones en un subconjunto del dominio o su frontera.

Una referencia clásica del método de Bukhgeim-Klibanov es el trabajo de Imanuvilov y Yamamoto [IY98], donde se obtiene estabilidad Lipschitz para un problema inverso de

recuperación de fuente en una ecuación parabólica con coeficiente principal continuo. En [BY06], se obtiene estabilidad Lipschitz para la recuperación de fuente de un problema de transmisión en una ecuación parabólica. En este caso, se considera un coeficiente principal discontinuo.

Los problemas de recuperación de fuentes son importantes pues permiten la determinación de otros parámetros de la ecuación mediante linealización en torno a una solución regular de referencia. Este hecho ya es advertido en [IY98]. En [BMO07] se obtiene unicidad y estabilidad Lipschitz para el problema inverso de recuperar un potencial estacionario para la ecuación de ondas con coeficiente principal discontinuo. Además, se obtiene una desigualdad de Carleman para el problema de transmisión de esta ecuación. Resultados análogos se obtienen en [BSB08] para una ecuación parabólica con memoria, esto es, un término integral.

Con respecto al problema inverso de recuperar el coeficiente principal podemos nombrar [IY03b], donde se obtiene una estabilidad tipo Hölder para el coeficiente principal en una ecuación hiperbólica. En ecuaciones parabólicas, encontramos [BGR07] y [YY09]. En el primero se obtiene estabilidad para la recuperación del coeficiente principal para el caso discontinuo y constante por pedazos en un problema de transmisión. En el segundo se considera la determinación de la parte principal a partir de múltiples observaciones. Los coeficientes en este caso se consideran continuos. Para problemas inversos usando desigualdades de Carleman en ecuaciones parabólicas no lineales, podemos nombrar [Kli04], [EEK05] y las referencias que ahí se encuentran.

En este trabajo se estudia primero el problema inverso de recuperación del coeficiente principal en una ecuación parabólica lineal a partir de observaciones internas y de borde, casos que se tratan por separado, como preliminar al objetivo principal que es estudiar el problema inverso de la recuperación de la conductividad de la ecuación (1.1) a partir de mediciones en una parte del borde.

La ecuación biestable (1.1) ya ha sido abordada en [BGO09] obteniendo unicidad y estabilidad en la recuperación de los parámetros  $a$  y  $\alpha$  presentes en el término no lineal. La prueba se basa en una nueva desigualdad de Carleman. Sin embargo, en tal trabajo se considera conductividad constante.

Acerca del modelo de Fitzhugh-Nagumo, podemos destacar la tesis de doctorado [Ji00], donde se trabaja en un problema inverso aplicado a la identificación de neuronas. Se estudia la recuperación de los parámetros  $b$  y  $\gamma$  a partir de la respuesta de voltaje por inyección de corriente en el borde. También se trata la determinación de la función  $f$ , y se logran algoritmos para recuperar estos parámetros numéricamente. En [CW04], se considera el problema inverso de recuperar  $f$  en una dimensión. Se busca bajo qué condiciones el conocimiento del voltaje en un extremo determina  $f$ .

A nuestro conocimiento, la estrategia de usar desigualdades de Carleman para problemas inversos en ecuaciones no lineales es un tema reciente en desarrollo, lo que nos ha motivado a investigar y aportar en esta materia con resultados originales que se encuentran en este trabajo.

## 1.3. Estructura del trabajo

Este trabajo se estructura de la siguiente manera:

En el capítulo 2, se entregan aspectos teóricos de problemas inversos, la definición de problema mal puesto y algunos ejemplos ilustrativos. También se presenta la desigualdad de Carleman para la ecuación del calor y un análisis cualitativo y numérico de la ecuación biestable en una dimensión.

En el capítulo 3, se estudia la determinación del coeficiente principal en la ecuación del calor lineal a partir observaciones internas y de borde usando desigualdades de Carleman. En particular, se obtiene estabilidad local en torno a una solución de referencia en norma  $H^1$  de los parámetros para el problema inverso con ayuda de un lema. Este último entrega una estimación del parámetro con respecto a términos que dependen del tipo de observación que se consideren y tiene una gran importancia en este trabajo.

En el capítulo 4, se aborda el problema inverso de la determinación de la conductividad en la ecuación biestable. Al igual que en el caso lineal, se obtiene estabilidad local para el problema inverso en norma  $H^1$  de los parámetros, pero, en este caso, combinando dos desigualdades de Carleman: la usual para la ecuación del calor, y una específica para una ecuación no lineal.

Por último, en el capítulo 5, se presentan las conclusiones de este trabajo y posibles trabajos futuros.

En la figura 1.3 se muestra un diagrama de la estructura de esta memoria. El objetivo es dar al lector una idea general de cómo se relacionan los capítulos, y un orden de lectura que permita una mejor comprensión de los contenidos.

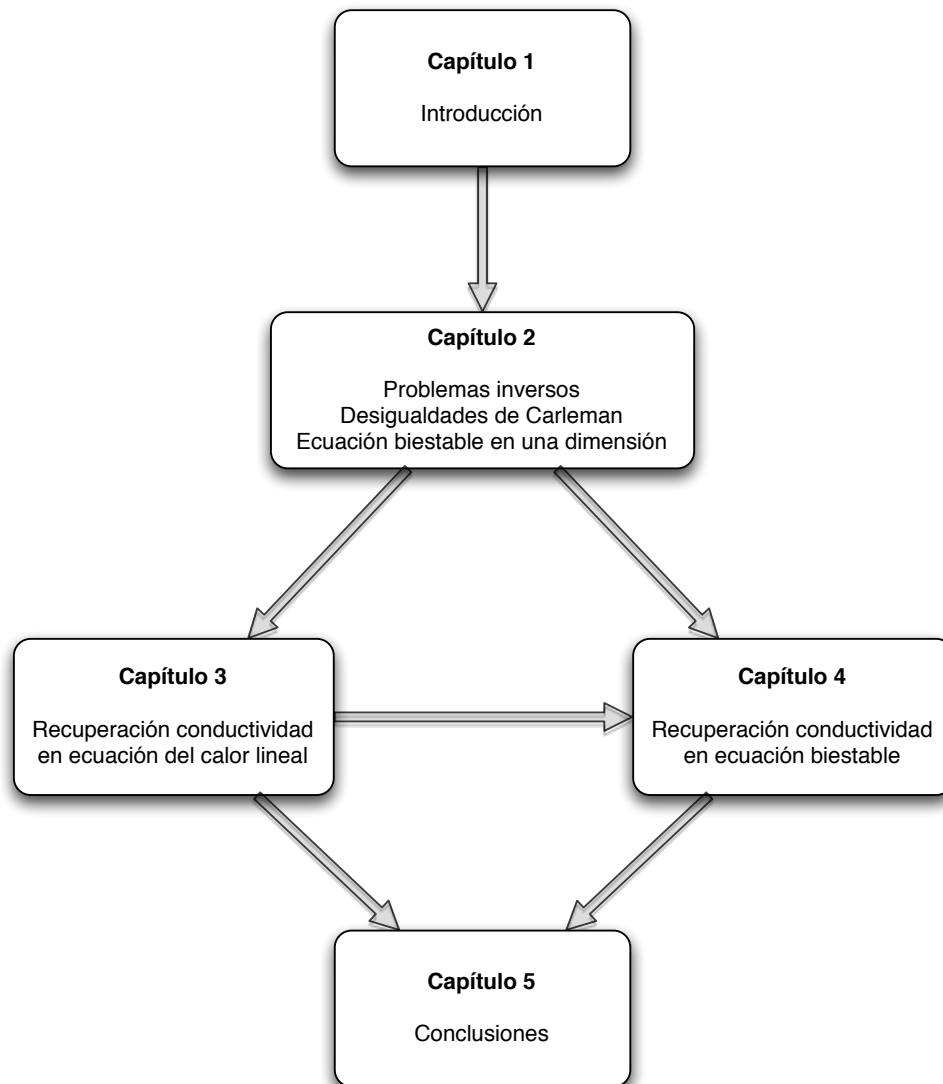


Figura 1.3: Diagrama de esta memoria.

# Capítulo 2

## Preliminares

A continuación se entregan algunas nociones matemáticas de los problemas inversos y desigualdades de Carleman, las cuales serán utilizadas en los capítulos 3 y 4. Además, se presenta un análisis cualitativo y numérico de la ecuación biestable en una dimensión.

### 2.1. Problemas inversos

En el capítulo 1 se dió una primera idea de lo que son los problemas inversos: determinar algún parámetro a partir de observaciones. En esta sección trataremos de definirlos en forma concisa desde un enfoque matemático [Kir96].

Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios normados, con normas  $\|\cdot\|_X$  y  $\|\cdot\|_Y$  respectivamente.  $X$  será llamado el *espacio de parámetros* e  $Y$  el *espacio de observaciones*. Sea  $K : X \rightarrow Y$  un operador, no necesariamente lineal. De esta forma, podemos definir

**Definición 2.1.1** (Problema directo). Dado  $x \in X$ , el *problema directo* consiste en calcular  $y = K(x)$ .

**Definición 2.1.2** (Problema inverso). Dado  $y \in Y$ , el *problema inverso* consiste en encontrar  $x \in X$  tal que  $K(x) = y$ .

Notamos que la resolución del problema inverso tiene mucha relación con el operador que define el problema directo, el cual, por lo general, ya se ha estudiado y se conocen resultados de existencia, unicidad y estabilidad con respecto a los datos. Esto corresponde a decir que  $K$  está bien definida y es continua. Es razonable preguntarse si el problema inverso tendrá las mismas cualidades, es decir, si al tomar dos mediciones u observaciones se recupera el mismo parámetro (unicidad), o si para toda observación se podrá recuperar algún parámetro que resuelva el problema (existencia), o si las mediciones presentan pequeños errores, esto se traducirá en pequeños errores en el parámetro (estabilidad). Esto motiva las siguientes definiciones.

**Definición 2.1.3** (Problema bien puesto). El problema  $K(x) = y$  se dice *bien puesto* si se cumplen las siguientes propiedades:

- (i) Existencia:  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  tal que  $K(x) = y$ .
- (ii) Unicidad:  $K(x_1) = K(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .
- (iii) Estabilidad: Dada  $\{x_n\} \subset X$ , si  $K(x_n) \rightarrow K(x)$  en  $Y$ , entonces  $x_n \rightarrow x$  en  $X$ .

**Definición 2.1.4** (Problema mal puesto). El problema  $K(x) = y$  se dice *mal puesto* si no es bien puesto, es decir, si alguna de las propiedades (i), (ii) o (iii) no se cumple.

Lamentablemente, los problemas inversos son muy susceptibles a ser mal puestos, debido al siguiente

**Teorema 2.1.5.** Sea  $K : X \rightarrow Y$  un operador lineal y compacto. Si  $X/\text{Ker}(K)$  es de dimensión infinita, entonces existe  $\{x_n\} \subset X$  tal que  $K(x_n) \rightarrow 0$ , pero que  $\|x_n\|_X = 1$ , o bien  $\|x_n\|_X \rightarrow +\infty$ .

*Observación 2.1.6.* El teorema anterior dice que el problema inverso asociado a  $K$  es siempre mal puesto, pues no cumple la propiedad de estabilidad. Más aún, siempre que  $X$  sea de dimensión infinita, el problema inverso es mal puesto. En efecto:

- Si  $\text{Ker}(K) \neq \{0\}$ , no hay unicidad pues  $K$  no sería inyectiva.
- Si  $\text{Ker}(K) = \{0\}$ ,  $\dim(K/\text{Ker}(K)) = \dim(K) = +\infty$ .

Veamos algunos ejemplos de problemas inversos que son mal puestos.

**Ejemplo 2.1.7.** Consideremos la ecuación de Laplace, con  $\Omega$  regular y  $f \in L^2(\Omega)$ :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Se sabe que  $\forall f \in L^2(\Omega), \exists! u \in H_0^1(\Omega)$  solución de (2.1), por lo que el operador

$$\begin{aligned} K : L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ f &\longmapsto u \end{aligned}$$

queda bien definido, es lineal compacto, y se tiene que  $\text{Ker}(K) = \{0\}$ . Por el teorema 2.1.5, existe una sucesión  $\{f_n\} \subset L^2(\Omega)$  tales que  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ , pero  $\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 1$ , o  $\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow +\infty$ . De esta forma, el problema inverso de encontrar  $f$  a partir de  $u$  está mal puesto.

**Ejemplo 2.1.8.** Consideremos la ecuación siguiente:

$$y(t) = \int_0^t x(s) ds \quad (2.2)$$

y el problema inverso: dado  $y \in C^0([0, 1])$ , encontrar  $x \in C^0([0, 1])$  tal que satisfaga (2.2). Corresponde a un problema de diferenciación, pues basta derivar con respecto a  $t$  para resolverlo. Sea

$$K : C^0([0, 1]) \longrightarrow C^0([0, 1])$$

$$x \longmapsto K(x)(t) = \int_0^t x(s) ds.$$

Considerando la norma  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ , sea la sucesión  $y_n(t) = \delta_n \operatorname{sen}(t/\delta_n^2)$ , con  $\delta_n > 0$  tal que  $\delta_n \rightarrow 0$ . Esto genera una sucesión  $\{x_n\}$  tal que  $K(x_n) = y_n$ , dada por

$$x_n(t) = y_n'(t) = \frac{1}{\delta_n} \cos(t/\delta_n^2).$$

Es fácil ver que  $\|y_n\|_\infty \rightarrow 0$  y que  $\|x_n\|_\infty \rightarrow +\infty$ , por lo que el problema de diferenciación es mal puesto.

**Ejemplo 2.1.9.** Sea la ecuación del calor en una dimensión,

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(x) & \forall (t, x) \in (0, 1) \times (0, \pi) \\ u(0, x) = 0 & \forall x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \forall t \in (0, 1) \end{cases} \quad (2.3)$$

y consideremos el problema inverso de recuperar  $f$ , conociendo  $u$  en un subconjunto del dominio en todo instante de tiempo, es decir, se conoce  $u$  en  $(0, 1) \times \omega$ ,  $\omega \subset (0, \pi)$ .

Sea la sucesión

$$u_n(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1 - e^{-n^2 t}) \operatorname{sen}(nx)}{n^2}.$$

Se verifica fácilmente que cumplen las condiciones iniciales y de borde de (2.3), y que

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(nx).$$

Notemos que

$$\|u_n\|_{L^2((0,1) \times \omega)}^2 = \int_0^1 \int_\omega \frac{2}{\pi} \frac{(1 - e^{-n^2 t})^2}{n^4} \operatorname{sen}^2(nx) dx dt \leq \frac{2}{\pi} \frac{|\omega|}{n^4} \longrightarrow 0$$

y que

$$\|f_n\|_{L^2(0, \pi)}^2 = \int_0^1 \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}^2(nx) dx dt = 1,$$

lo que hace que el problema sea mal puesto, pues no se tiene la estabilidad.

Sin embargo, se puede intentar reparar este problema de estabilidad. Hasta este punto, hemos considerado que conocemos  $u$  en  $(0, 1) \times \omega$ . Supongamos que conocemos también  $u_{xx}$  en un instante arbitrario  $\theta \in (0, 1)$  y lo agregamos como observación a la que ya teníamos. Se tiene que

$$\left\| \frac{\partial^2 u_n(\theta)}{\partial x^2} \right\|_{L^2(0, \pi)}^2 = \int_0^\pi \frac{2}{\pi} (1 - e^{-n^2 \theta})^2 \sin^2(nx) dx = (1 - e^{-n^2 \theta})^2 \rightarrow 1.$$

Así, con este nuevo dato, hay posibilidades de tener estabilidad para el problema inverso de recuperar  $f$ . Con este ejemplo se ilustra que hay ocasiones en que se puede reparar la condición de mal puesto contando con más información.

## 2.2. Desigualdad de Carleman para la ecuación del calor

Las desigualdades de Carleman permiten estimar la energía global (ponderada) de un sistema por las fuentes y observaciones locales. Para cada ecuación, ya sea del calor, ondas, Schrödinger, este tipo de desigualdad cambia, pero la idea general sigue siendo la misma. Esta sección presenta una desigualdad de Carleman para la ecuación del calor que es similar a la que ocuparemos en los capítulos siguientes.

Este tipo de desigualdades son herramientas muy usadas en la teoría de control de EDPs y problemas inversos. En estos últimos, son especialmente útiles para estudiar la estabilidad.

Veamos la desigualdad de Carleman para la ecuación del calor. Sea  $\Omega$  un abierto acotado de frontera regular y  $T > 0$ . Definamos los siguientes pesos de Carleman definidos en  $Q = (0, T) \times \Omega$ :

$$\varphi(t, x) = \frac{e^{2\lambda\|\psi\|_\infty} - e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}, \quad \eta(t, x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}, \quad \rho(t, x) = e^{-s\varphi},$$

donde  $\lambda$  es un parámetro positivo. Notemos que los tres pesos son positivos en  $Q$  y que se definen a partir de una función  $\psi$ . La definición de  $\psi$  depende del tipo de observaciones que consideremos (internas, de borde Dirichlet o Neumann, etc). El siguiente lema, que es probado en [FI96], entrega la existencia de  $\psi$  para el caso de observaciones internas en  $(0, T) \times \omega$ , con  $\omega \subset \Omega$ .

**Lema 2.2.1** ( $\psi$  observaciones internas). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  regular acotado, entonces  $\forall \omega' \subset \subset \omega \subset \subset \Omega$ ,  $\omega', \omega$  abiertos no vacíos, existe  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$  tal que*

$$\psi > 0 \text{ en } \Omega, \quad \psi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad |\nabla\psi| > 0 \text{ en } \overline{\Omega} \setminus \omega'.$$

Con estos elementos, podemos enunciar el siguiente



**Teorema 2.2.2** (Desigualdad de Carleman). *Existen  $s_0, \lambda_0 > 0$  tal que  $\forall s \geq s_0, \forall \lambda \geq \lambda_0$  y  $\forall z$  suficientemente regular tal que  $z|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0$  o  $\frac{\partial z}{\partial n}|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0$ , se tiene*

$$\begin{aligned} \iint_Q \left( \frac{1}{s\eta} (|z_t|^2 + |\Delta z|^2) + s\lambda^2\eta|\nabla z|^2 + s^3\lambda^4\eta^3|z|^2 \right) \rho^2 dx dt \\ \leq C \left( \iint_Q |Pz|^2 \rho^2 dx dt + \int_0^T \int_\omega s^3\lambda^4\eta^3|z|^2 \rho^2 dx dt \right) \end{aligned}$$

donde  $Pz = z_t - \Delta z + az$ ,  $a \in L^\infty(\Omega)$ .

De este teorema se deduce lo que se llama la propiedad de *continuidad única*.

**Corolario 2.2.3** (Continuidad única). *Supongamos que  $Pz = 0$  y  $z|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0$  (o  $\frac{\partial z}{\partial n}|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0$ ). Si además  $z|_{(0,T) \times \omega} = 0$ , entonces  $z = 0$  en  $Q$ .*

*Observación 2.2.4.* Notemos que los pesos de Carleman están acotados inferiormente en tiempo por  $\frac{4}{T^2} > 0$ , pues  $\forall t \in (0, T)$  se cumple que

$$\begin{aligned} \varphi(T/2, x) &\leq \varphi(t, x) \quad \forall x \in \Omega, \\ \eta(T/2, x) &\leq \eta(t, x) \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Además, cuando  $t \rightarrow 0$  y  $t \rightarrow T$ :

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow +\infty \\ \eta &\longrightarrow +\infty \\ \rho &\longrightarrow 0 \\ \frac{1}{s\eta} \rho^2, s\lambda^2\eta\rho^2, s^3\lambda^4\eta^3\rho^2 &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Para el caso de observaciones Dirichlet en el borde en  $(0, T) \times \gamma$ , con  $\gamma \subset \partial\Omega$ , se puede encontrar una desigualdad de Carleman similar, pero se debe considerar la siguiente función  $\psi$ :

**Lema 2.2.5** ( $\psi$  observaciones de borde Dirichlet). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  regular acotado, entonces  $\forall \gamma' \subset \subset \gamma \subset \subset \partial\Omega$ ,  $\gamma', \gamma$  abiertos relativos a  $\partial\Omega$  no vacíos, existe  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$  tal que*

$$\psi > 0 \text{ sobre } \gamma', \psi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \setminus \gamma', |\nabla\psi| > 0 \text{ en } \bar{\Omega}.$$

**Teorema 2.2.6.** *Existen  $s_0, \lambda_0 > 0$  tal que  $\forall s \geq s_0, \forall \lambda \geq \lambda_0, \forall z$  suficientemente regular tal que  $\frac{\partial z}{\partial n}|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0$ , se tiene*

$$\begin{aligned} \iint_Q \left( \frac{1}{s\eta} (|z_t|^2 + |\Delta z|^2) + s\lambda^2\eta|\nabla z|^2 + s^3\lambda^4\eta^3|z|^2 \right) \rho^2 dx dt \\ \leq C \left( \iint_Q |Pz|^2 \rho^2 dx dt + \int_0^T \int_\gamma s^3\lambda^4\eta^3|z|^2 \rho^2 d\sigma dt \right) \end{aligned}$$

donde  $Pz = z_t - \Delta z + az$ ,  $a \in L^\infty(\Omega)$ .

La demostración de esta desigualdad es muy similar a la demostración de los teoremas 4.2.1 y 4.2.2 en el capítulo 4.

## 2.3. Ecuación biestable

La ecuación biestable es un modelo muy simple de la propagación de voltaje en el corazón. Se dice que es una ecuación de *Reacción-Difusión*. Viene dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u) = a(x)f(u), \quad (2.4)$$

donde  $f(u) = u(1-u)(u-\alpha(x))$ ,  $\alpha(x) \in (0, 1)$ . Su nombre se debe a que  $u = 0$  y  $u = 1$  son dos puntos estables de la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u).$$

En (2.4),  $\sigma$  representa la conductividad del medio, en este caso, del tejido del corazón. Si el tejido está sano, el medio tiene una conductividad homogénea. Sin embargo, en el caso de un infarto, hay una zona del tejido que muere, disminuyendo su conductividad. Es interesante el problema inverso de indentificar la zona del tejido dañado a partir de mediciones del voltaje del corazón.

El objetivo de esta sección es dar nociones generales del comportamiento de la solución de la ecuación (2.4) en una dimensión, tanto en el caso de  $\sigma$  constante como variable. En el primer caso, se estudia de forma analítica la solución, encontrando una expresión explícita, mientras que en el segundo caso se hacen simulaciones numéricas.

### 2.3.1. Caso $\sigma$ constante

Consideremos la ecuación biestable en una dimensión en un dominio no acotado:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = af(u), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

con  $\sigma$  una constante positiva. Los parámetros  $a$  y  $\alpha$  también serán constantes tales que  $\alpha \in (0, 1)$  y  $a > 0$ . La solución no trivial más simple de esta ecuación es un *frente viajero* de la forma  $u(t, x) = U(x - ct) \equiv U(\xi)$ , con  $c$  la velocidad de la onda. Por frente viajero, nos referimos a una solución invariante bajo traslaciones, es decir, que mantiene el mismo perfil para distintos instantes de tiempo con la característica que antes de la onda se encuentra en un estado estable alto (resp. bajo) y después de la onda en un estado estable bajo (resp. alto). En este caso particular, esto significa que una solución de esta forma entrega una transición entre  $u = 0$  y  $u = 1$ , los estados estables de  $f$ . Buscando soluciones de esta manera, tenemos que  $U$  satisface la EDO

$$U_{\xi\xi} + \frac{c}{\sigma}U_{\xi} + \frac{a}{\sigma}f(U) = 0. \quad (2.6)$$

Para que  $U$  entregue la transición entre los estados estables,  $u = 0$  y  $u = 1$ , se debe tener que

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} U(\xi) = 1.$$

Para estudiar (2.6), es conveniente escribirla como un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones de EDOs:

$$\begin{aligned} U_\xi &= V \\ V_\xi &= -\frac{c}{\sigma}V - \frac{a}{\sigma}f(U), \end{aligned} \quad (2.7)$$

cuyos puntos críticos son los pares  $(U, V)$  tales que  $V = 0$  y  $f(U) = 0$ , es decir,  $(0, 0)$ ,  $(\alpha, 0)$  y  $(1, 0)$ . Entonces, se busca una trayectoria, parametrizada por  $\xi$ , en el diagrama de fase de (2.7) tal que

$$\begin{aligned} (U, V) &\longrightarrow (0, 0), \text{ cuando } \xi \rightarrow -\infty \\ (U, V) &\longrightarrow (1, 0), \text{ cuando } \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Una tal trayectoria, conectando dos estados estables, es llamada *trayectoria heteroclínica* [KS98]. Analicemos si tal trayectoria se puede encontrar.

### Linealización y diagrama de fase

El Jacobiano del sistema (2.7) viene dado por

$$J(U, V) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a}{\sigma}f'(U) & -\frac{c}{\sigma} \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2\sigma} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2}{\sigma^2} - \frac{4a}{\sigma}f'(U)}.$$

Notemos que  $f$  cumple que  $f'(0) < 0$  y  $f'(1) < 0$ , por lo que  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 < 0$ . Esto quiere decir que los puntos críticos  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  son puntos silla (*saddle*). Como este tipo de puntos críticos tienen sólo una dirección estable y otra inestable, la pregunta es ahora si se puede elegir  $c$  de forma que exista una trayectoria que conecte estos puntos. En [KS98] se prueba que existe un único  $c$  que logra esto. En la figura 2.1 se muestra el diagrama de fase del sistema (2.7) y se aprecia tal trayectoria uniendo estos puntos. El parámetro  $c$ , se calcula a continuación.

### Cálculo de $c$

Supongamos que tenemos  $c$  tal que podemos encontrar la trayectoria que va desde  $(0, 0)$  a  $(1, 0)$ . Si multiplicamos por  $U_\xi$  la ecuación (2.6) e integramos entre  $-\infty$  y  $+\infty$  tenemos

$$-c \int_{-\infty}^{\infty} U_\xi^2 d\xi - \frac{\sigma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U_\xi U_{\xi\xi} d\xi = a \int_{-\infty}^{\infty} U_\xi f(U) d\xi.$$

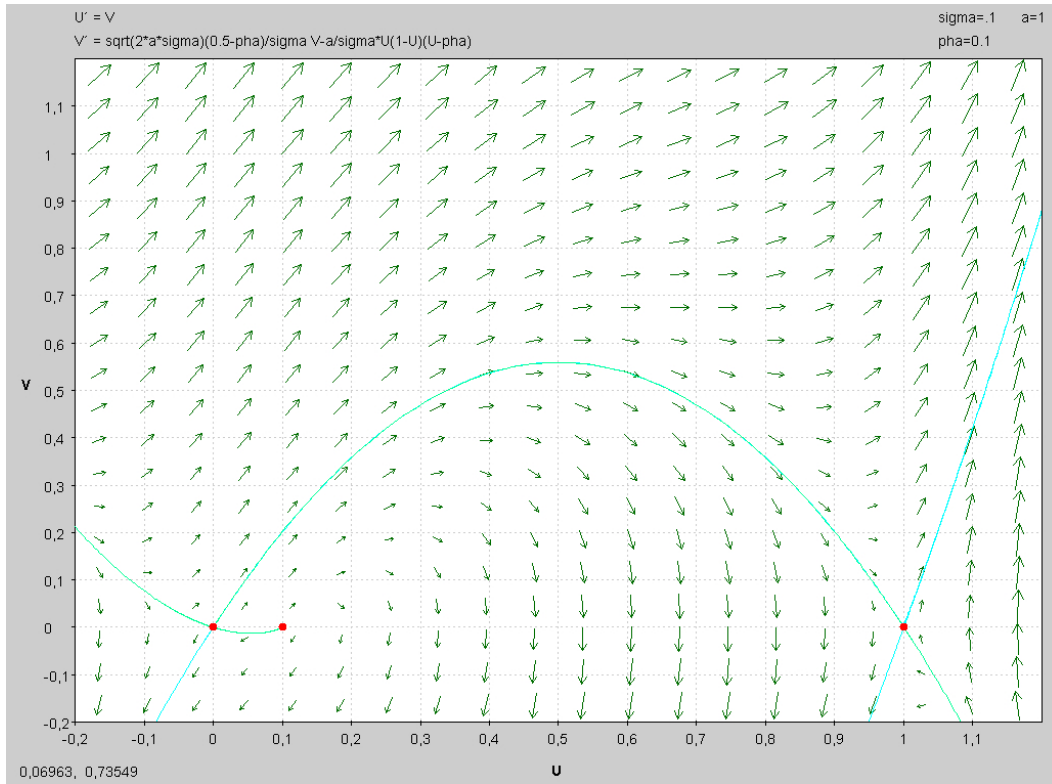


Figura 2.1: Flujo en el diagrama de fase del sistema (2.7) con los los parámetros:  $a = 1$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\sigma = 0,1$  y  $c$  dado por la fórmula (2.9). Se indica la trayectoria que conecta los puntos críticos  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ .

Usando el cambio de variables  $s = U$ ,  $ds = U_\xi d\xi$

$$\begin{aligned}
 -c \int_{-\infty}^{\infty} V^2 d\xi - \frac{\sigma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\xi} |V|^2 d\xi &= a \int_0^1 f(s) ds \\
 -c \int_{-\infty}^{\infty} V^2 d\xi - \frac{\sigma}{2} |V|^2 \Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} &= a \int_0^1 f(s) ds,
 \end{aligned}$$

y como  $V$  vale 0 en  $-\infty$  y  $+\infty$ ,

$$c = -a \frac{\int_0^1 f(s) ds}{\int_{-\infty}^{\infty} V^2 d\xi}.$$

De esta fórmula, podemos deducir el signo de  $c$ , pues el área total de la función  $f$  entre 0 y 1 es positiva si  $\alpha \in (0, 1/2)$  y negativa si  $\alpha \in (1/2, 1)$ , por lo que

$$\begin{aligned}
 c &> 0 \text{ si } \alpha > \frac{1}{2} \\
 c &< 0 \text{ si } \alpha < \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Más aún, podemos calcular explícitamente  $c$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(s) ds &= \int_0^1 s(1-s)(s-\alpha) ds \\ &= - \int_0^1 (s^3 - s^2(1+\alpha) + \alpha s) ds \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1+\alpha}{3} - \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{1-2\alpha}{12}. \end{aligned}$$

En [Xin00], se da una solución exacta de (2.6):

$$U(\xi) = \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}\xi}}, \quad (2.8)$$

con lo que tenemos

$$V(\xi) = U'(\xi) = \sqrt{\frac{a}{2\sigma}} \frac{e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}\xi}}{(1 + e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}\xi})^2}.$$

En la figura 2.2 se pueden ver los perfiles de  $U$  y su derivada,  $V$ .

Ahora podemos completar el cálculo de  $c$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} V^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2\sigma} \frac{e^{-2\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}\xi}}{(1 + e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}\xi})^4} d\xi.$$

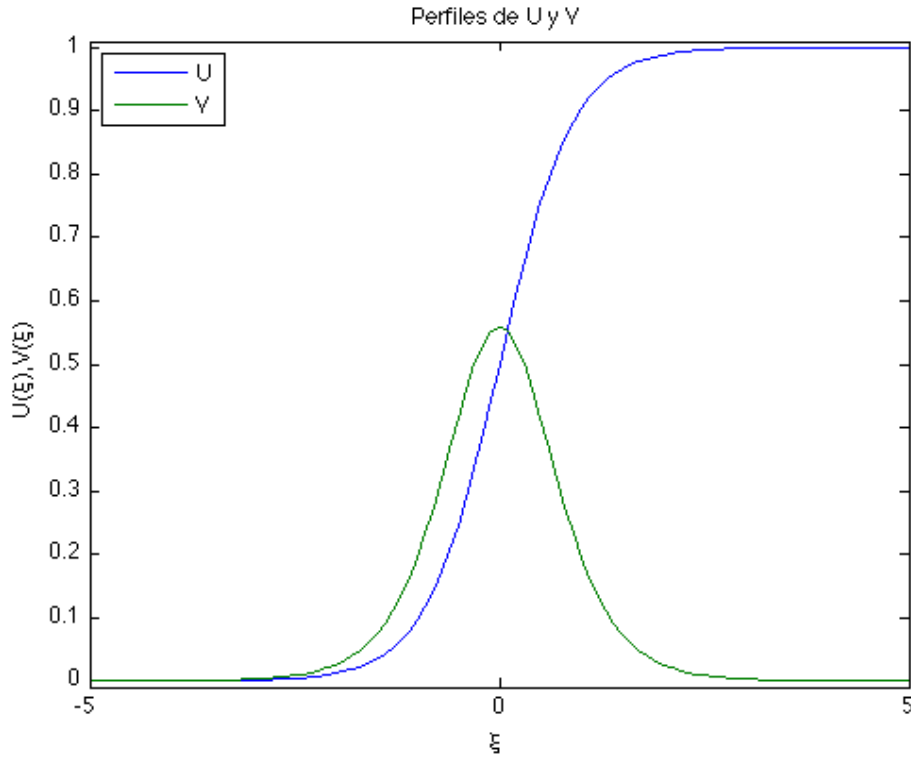
Con el cambio de variables

$$s = e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}\xi}, \quad ds = -\sqrt{\frac{a}{2\sigma}} e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}\xi} d\xi,$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} V^2 d\xi &= \frac{a}{2\sigma} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2\sigma}{a}} \frac{s}{(1+s)^4} ds \\ &= \sqrt{\frac{a}{2\sigma}} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^4} \right) ds \\ &= \sqrt{\frac{a}{2\sigma}} \left( \frac{1}{2(s+1)^2} - \frac{1}{3(s+1)^3} \right) \Big|_{s=\infty}^{s=0} \\ &= \sqrt{\frac{a}{2\sigma}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{a}{2\sigma}}. \end{aligned}$$

Así,  $c$  viene dada por la expresión

$$c = -a \frac{1-2\alpha}{12} 6 \sqrt{\frac{2\sigma}{a}} = -\sqrt{2a\sigma} \left( \frac{1}{2} - \alpha \right). \quad (2.9)$$

Figura 2.2: Perfiles de las funciones  $U$  y  $V$ .

### Algunos problemas inversos

Para el caso particular en que los parámetros de la ecuación (2.5) son constantes, podemos encontrar expresiones exactas a partir de mediciones de la solución.

### Recuperación de $a, \alpha$

Supongamos que podemos conocer la solución en el lugar  $x = x_0$  en dos tiempos distintos, digamos  $t_1$  y  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ). Sean

$$u_1 = u(t_1, x_0), \quad u_2 = u(t_2, x_0).$$

Usando la expresión (2.8), tenemos que

$$u_1 = \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}(x_0 - ct_1)}} \longrightarrow u_1 + u_1 e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}(x_0 - ct_1)} = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}(x_0 - ct_2)}} \longrightarrow u_2 + u_2 e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}(x_0 - ct_2)} = 1$$

Dividiendo ambas identidades:

$$\begin{aligned}\frac{u_1 e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}(x_0-ct_1)}}{u_2 e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}(x_0-ct_2)}} &= \frac{1-u_1}{1-u_2} \\ e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}c(t_2-t_1)} &= \frac{u_2}{u_1} \frac{1-u_1}{1-u_2} \\ -\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}c &= \frac{1}{t_2-t_1} \ln \left( \frac{1-u_1}{1-u_2} \frac{u_2}{u_1} \right),\end{aligned}$$

y recordando la expresión para  $c$  (2.9), obtenemos

$$a = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)(t_2 - t_1)} \ln \left( \frac{1 - u_1}{1 - u_2} \frac{u_2}{u_1} \right). \quad (2.10)$$

Notemos que esta expresión para  $a$  depende también del parámetro  $\alpha$ , por lo que se debe asumir conocido. De igual manera, podemos encontrar

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{a(t_2 - t_1)} \ln \left( \frac{1 - u_1}{1 - u_2} \frac{u_2}{u_1} \right). \quad (2.11)$$

Así, para encontrar  $a$  o  $\alpha$  no necesitamos información sobre  $\sigma$ , pero sí conocer alguno de los dos.

### Recuperación de $\sigma$

Veamos ahora el caso de recuperar el parámetro  $\sigma$  a partir de los mismos datos anteriores. De las identidades

$$\begin{aligned}u_1 + u_1 e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}(x_0-ct_1)} &= 1 \\ u_2 + u_2 e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}(x_0-ct_2)} &= 1\end{aligned}$$

podemos multiplicarlas para obtener

$$\begin{aligned}u_1 u_2 e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}(2x_0-c(t_1+t_2))} &= (1-u_1)(1-u_2) \\ e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}2x_0} &= e^{-\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}-c(t_1+t_2)} \frac{(1-u_1)(1-u_2)}{u_1 u_2} \\ \sqrt{\frac{2a}{\sigma}}x_0 &= c\sqrt{\frac{a}{2\sigma}}(t_1+t_2) + \ln \left( \frac{u_1 u_2}{(1-u_1)(1-u_2)} \right),\end{aligned}$$

y usando la expresión para  $c$  (2.9), obtenemos

$$\sigma = \frac{2ax_0^2}{\left[ a\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)(t_1 + t_2) - \ln \left( \frac{u_1 u_2}{(1-u_1)(1-u_2)} \right) \right]^2}. \quad (2.12)$$

Notemos que esta fórmula nos dice que para conocer  $\sigma$  debemos conocer completamente los parámetros  $a$  y  $\alpha$ .

### Análisis de sensibilidad

Analicemos qué tan sensibles son las fórmulas (2.10), (2.11) y (2.12) ante pequeños errores en las mediciones. Se ha utilizado la fórmula analítica para la solución de la ecuación biestable considerando lo siguiente:

- Un dominio acotado:  $[0, 25]$ .
- La solución está centrada inicialmente en 12,5.
- Punto de observación fijo en la posición 17.

En la figura 2.3 se puede ver el punto de observación y la solución en el tiempo inicial.

En una primera prueba, hemos considerado como tiempos de observación  $t_1 = 20$  y  $t_2 = 30$ , que son instantes en los cuales la onda está sobre la zona de observación. Veremos luego que los tiempos de observación influyen en la sensibilidad de las fórmulas. En la figura 2.3 se muestra la solución en los tiempos de observación.

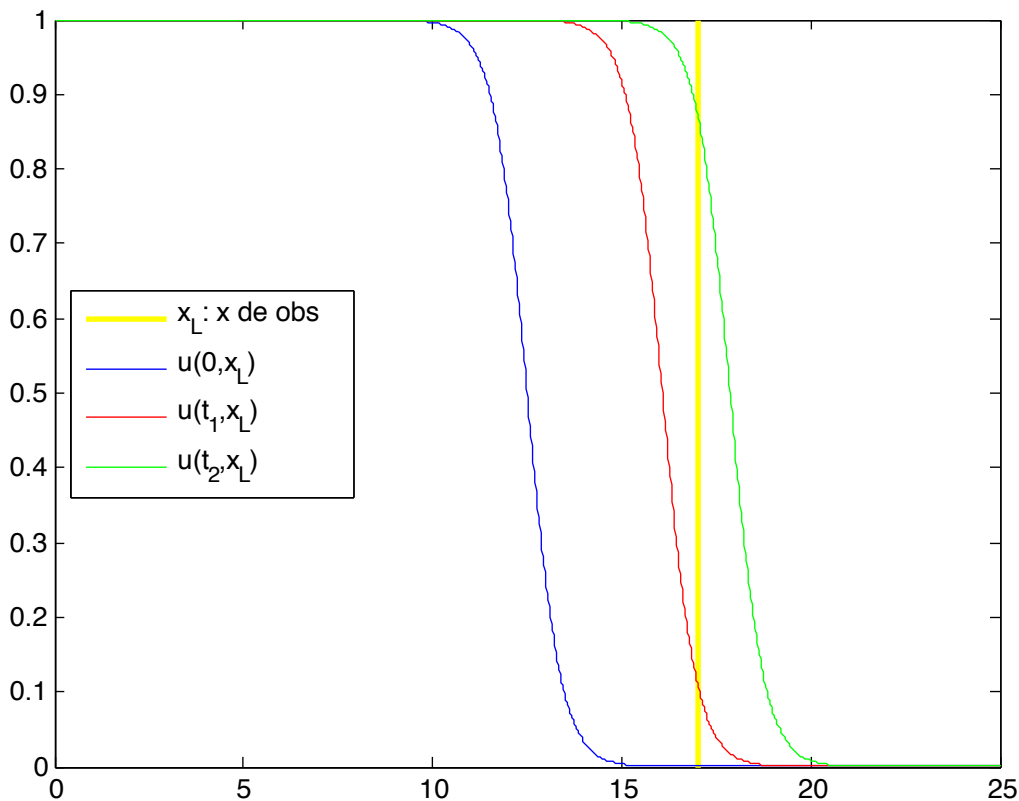


Figura 2.3: Posición de la onda viajera en los tiempos de observación.

Para la prueba de sensibilidad, se han considerado las observaciones con ruido aleatorio, el cual se fue incrementando hasta un 2%. Luego, se comparó con el valor real del



parámetro a recuperar, cuyos valores están fijos en  $a = 1$ ,  $\alpha = 0,1$  y  $\sigma = 0,1$ , calculando el error relativo.

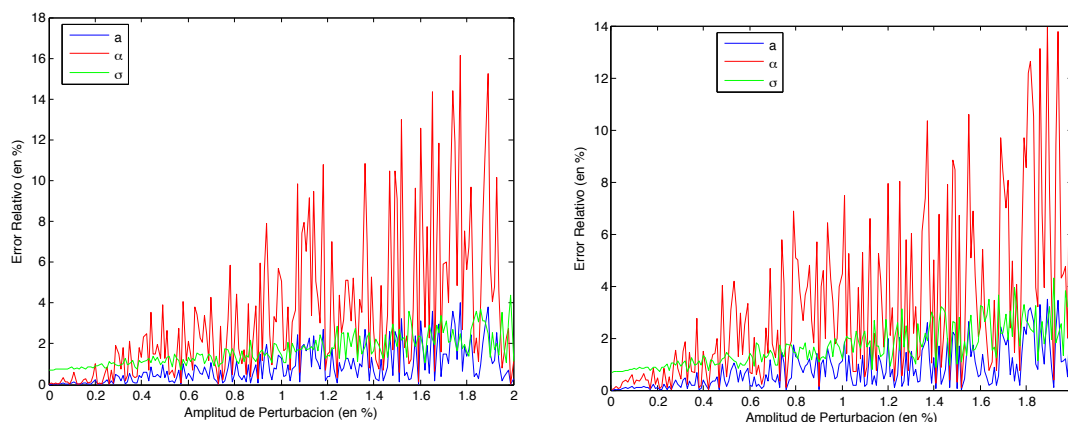


Figura 2.4: Error relativo en las pruebas 1 y 2 de la recuperación de los parámetros.

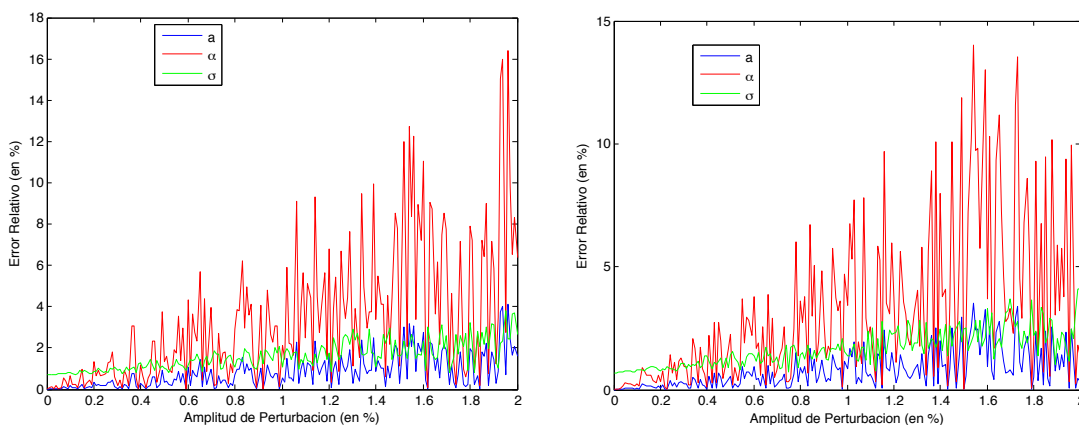


Figura 2.5: Error relativo en las pruebas 3 y 4 de la recuperación de los parámetros.

En las figuras 2.4 y 2.5 se muestran los errores relativos de cada parámetro en 4 pruebas bajo las mismas condiciones. Se puede ver que el parámetro más sensible es  $\alpha$ , y que  $a$  y  $\sigma$  presentan el mismo nivel de error. Sin embargo, se nota un error en la recuperación de sigma aún sin ruido. Esto se debe a la discretización del intervalo  $[0, L]$ .

Es interesante investigar la sensibilidad de las fórmulas de recuperación en función del tiempo de observación, es decir, si se mide antes que la onda llegue o una vez que ya pasó. Para ello, consideramos un tiempo de observación fijo  $t_2 = 25$ , y variamos  $t_1$  entre 0 y 50, tiempos en que la onda se encuentra antes y después de la zona de observación, respectivamente. El motivo de esta elección de  $t_2$ , es que en ese tiempo la solución toma un valor cercano a 0,5. El ruido se consideró con una amplitud fija del 1%.

En las figuras 2.6 y 2.7, se muestran cuatro pruebas distintas para este caso. Se puede ver que el mayor error se comente cuando el tiempo es muy pequeño o muy grande, es

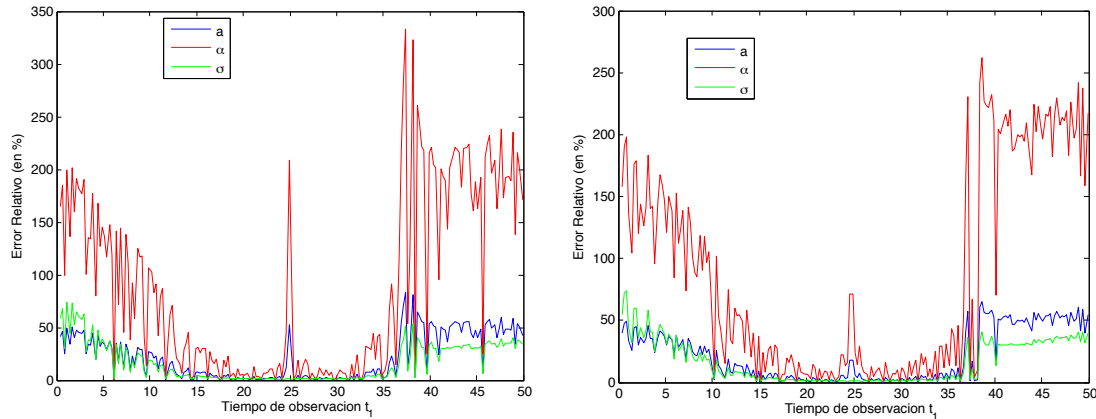


Figura 2.6: Pruebas 1 y 2 para el error relativo en función del primer tiempo de observación con  $t_2 = 25$  fijo. La amplitud del ruido es 1 %.

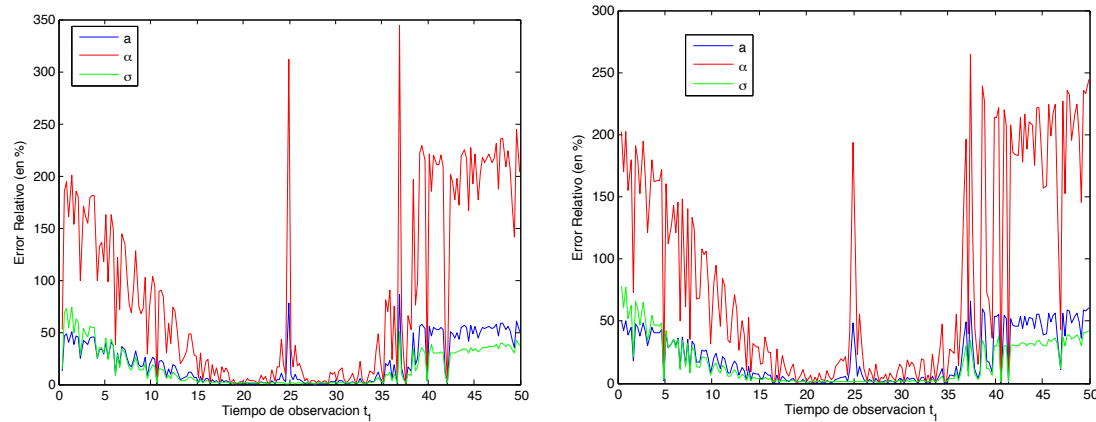


Figura 2.7: Pruebas 3 y 4 para el error relativo en función del primer tiempo de observación con  $t_2 = 25$  fijo. La amplitud del ruido es 1 %.

decir, cuando aún no pasa la onda y cuando ya pasó. En estos casos, los valores de la observación son muy cercanos a 1 y 0, respectivamente. Si revisamos las fórmulas (2.10), (2.11) y (2.12), se puede ver que la expresión tiene singularidades en tales valores, lo que explica esta situación.

Por otro lado, se observa un gran error relativo en el tiempo 25. Esto se debe a que los tiempos de observación son muy cercanos y por lo tanto su diferencia casi nula. En las fórmulas (2.10) y (2.11) se puede ver que hay una singularidad cuando los tiempos de observación son iguales. Sin embargo, no parece ser el caso para el error relativo de  $\sigma$ , el cual parece no ser afectado por tiempos de observación similares, consistente con la fórmula (2.12).

Como observación final, se puede ver que el error relativo es menor entre los tiempos 15 y 35 aproximadamente, que es el intervalo de tiempo cuando la onda pasa por el punto

de observación, lo que nos permite concluir que es importante, para estas fórmulas de recuperación, los instantes que se eligen para medir el voltaje.

### 2.3.2. Caso $\sigma$ variable

En este caso, la ecuación (2.4) queda como

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = af(u). \quad (2.13)$$

No podemos ahora encontrar una solución analítica, por lo que se resuelve numéricamente con el método de *diferencias finitas*.

#### Esquema de diferencias finitas

Consideremos los parámetros  $a$  y  $\alpha$  constantes y el intervalo  $I = [0, L]$ ,  $L > 0$ . Sea  $M \in \mathbb{N}$ ,  $h = \frac{L}{M+1}$  el paso de la discretización del espacio y  $x_j = jh$ ,  $j \in \{0, \dots, M+1\}$  los puntos de esta discretización. Denotemos por  $\Delta t$  el paso de la discretización del tiempo,  $t_n = n \Delta t$  los puntos respectivos y  $u_j^n$  una aproximación de  $u(t_n, x_j)$ . Por último,  $\sigma_j = \sigma(x_j)$ . Se propone el siguiente esquema explícito para resolver (2.13) en  $(0, \infty) \times (0, L)$ :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\sigma_j \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - \sigma_{j-1} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}}{h} = af(u_j^n), \quad i \in \{1, \dots, M\}, n \in \mathbb{N}$$

lo que lleva finalmente al esquema recursivo

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{h^2} (\sigma_j u_{j+1}^n - (\sigma_j + \sigma_{j-1}) u_j^n + \sigma_{j-1} u_{j-1}^n) + \Delta t af(u_j^n),$$

$$i \in \{1, \dots, M\}, n \in \mathbb{N}.$$

Para iniciar el frente viajero (ver sección 2.3.1), tomamos como condición inicial

$$u_j^0 = \begin{cases} 1, & j = 0, \dots, \lfloor \frac{M}{2} \rfloor \\ 0, & j = \lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1, \dots, M+1. \end{cases}$$

#### Simulaciones numéricas

El objetivo es simular las propagaciones en el corazón en el caso de un infarto. Como se ha mencionado, cuando hay un infarto, la conductividad en la zona dañada del tejido disminuye a causa de las células muertas, por lo que consideramos que  $\sigma(x)$  toma dos valores solamente, tomando el menor en la parte que simule la parte dañada. Para la simulación que se muestra a continuación, se considera una zona de baja conductividad entre las posiciones 16 y 18.

En las figuras 2.8 y 2.9 se compara la evolución del frente viajero con conductividad  $\sigma$  constante y variable. En la figura 2.8, se muestra el comienzo de la simulación. Hasta ese punto, las dos ondas coinciden, pues se encuentran en una zona con la misma conductividad. En la figura 2.9, se pueden ver las diferencias entre los dos frentes. En la primera, la onda correspondiente a la conductividad variable, al entrar a una zona de baja conductividad, se retrasa con respecto a la otra, que viaja a velocidad constante. Igualmente se observa que toma una forma más empinada que la que traía. En la segunda, se muestra lo que pasa una vez que se ha pasado la zona de baja conductividad. La onda vuelve a tomar la forma y velocidad originales, lo que se comprueba comparando con la forma de la otra onda.

### Tiempo de despolarización

Un aspecto interesante de mencionar, es el tiempo de despolarización. La despolarización corresponde a una onda progresiva de estimulación que recorre el corazón, que es vital en su funcionamiento, pues produce la contracción del miocardio. El tiempo de despolarización es, en el caso de voltaje normalizado, el tiempo que demora la onda en un punto dado tomar el valor 0,5.

Desde la óptica de los problemas inversos, es importante pues puede ser una fuente de observación cuando se quiere recuperar el coeficiente de conductividad. En [MVDS<sup>+</sup>05] se estudia el problema de recuperar, entre otros parámetros, la conductividad a partir del tiempo de despolarización usando el modelo de Aliev-Panfilov en 2D.

En la figura 2.10, se puede ver que hay una zona donde aumenta el tiempo de despolarización. Esta zona corresponde a la zona de baja conductividad, que es la misma que en las figuras 2.8 y 2.9.

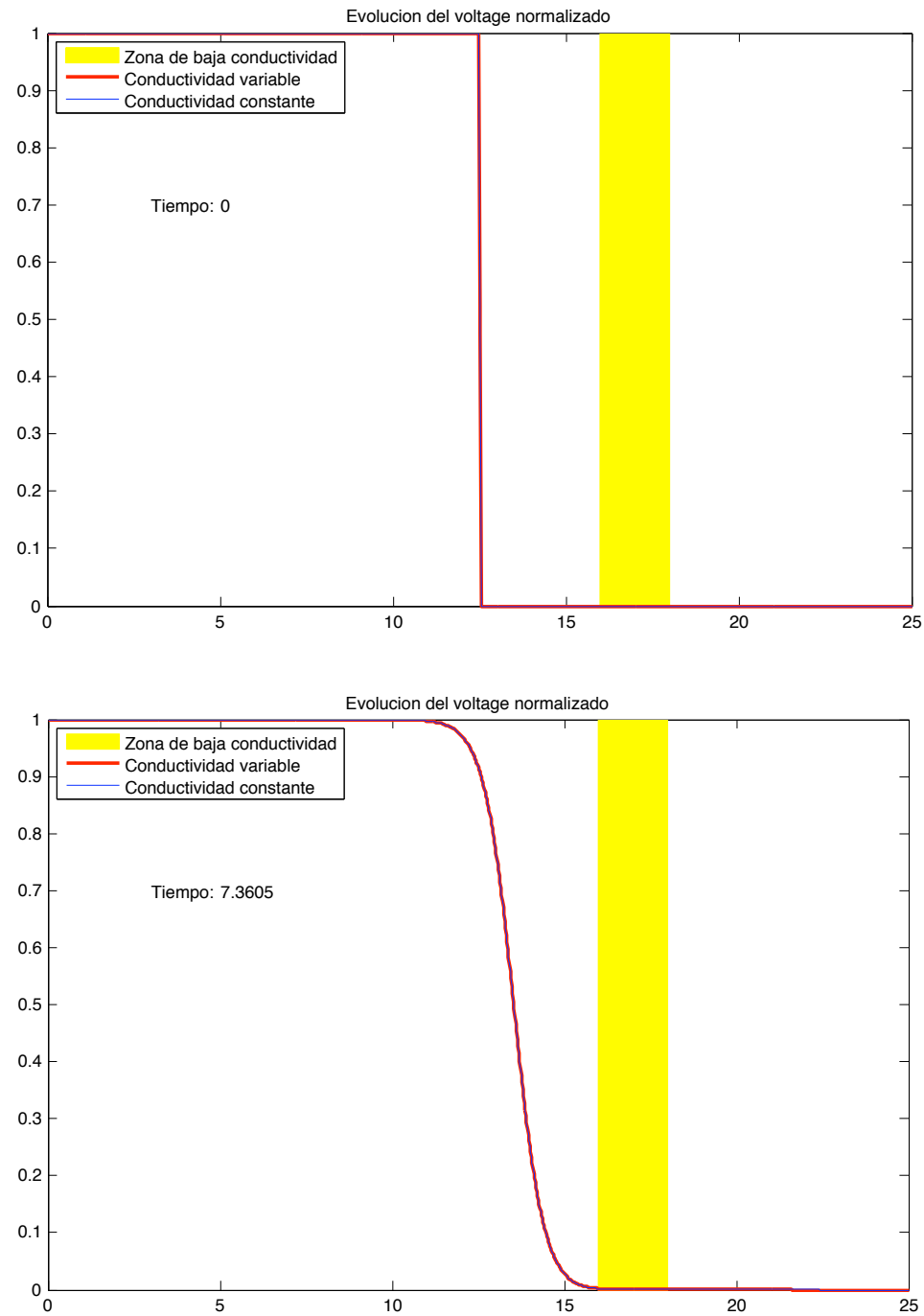


Figura 2.8: Primera parte de la simulación.

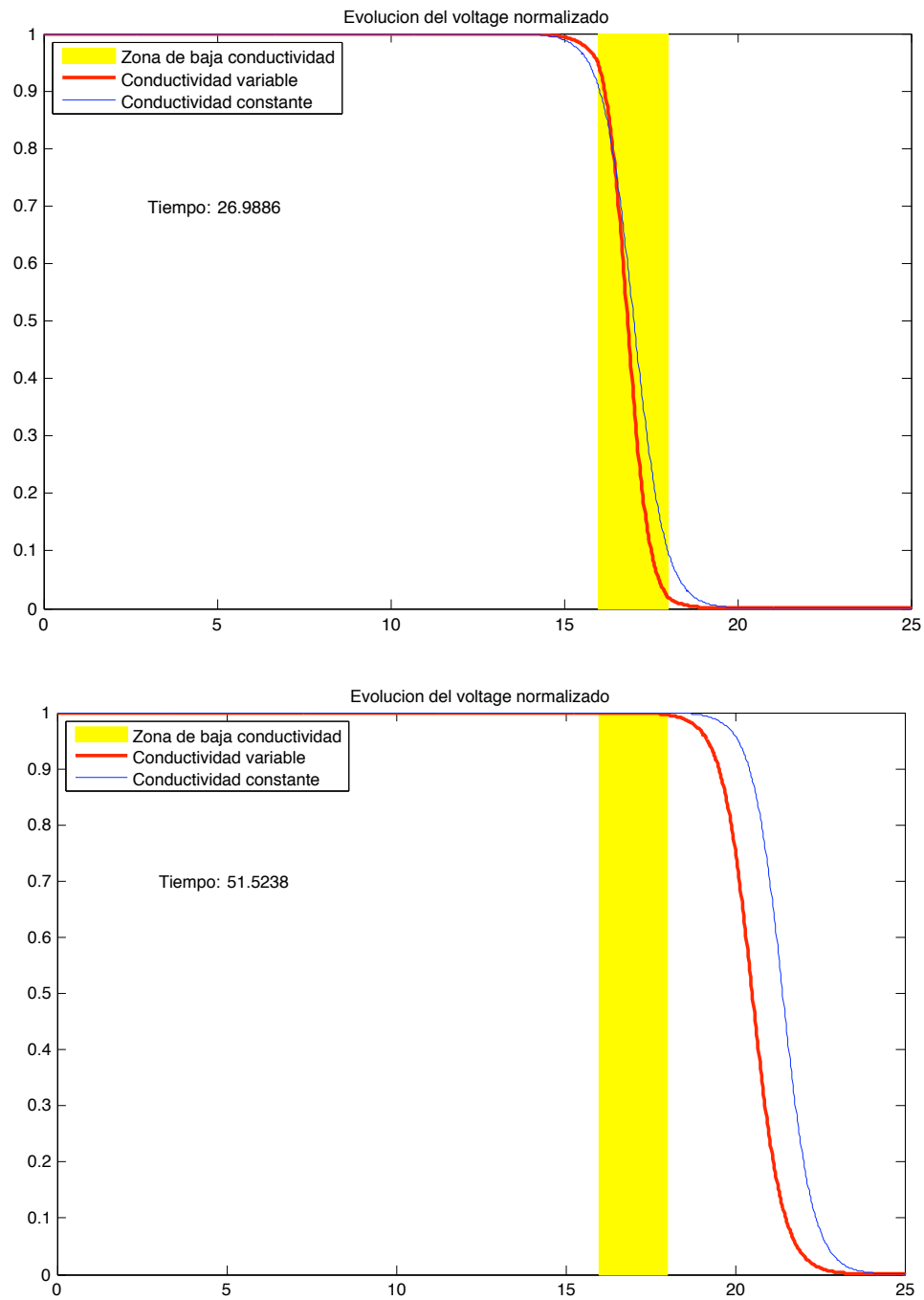


Figura 2.9: Segunda parte de la simulación

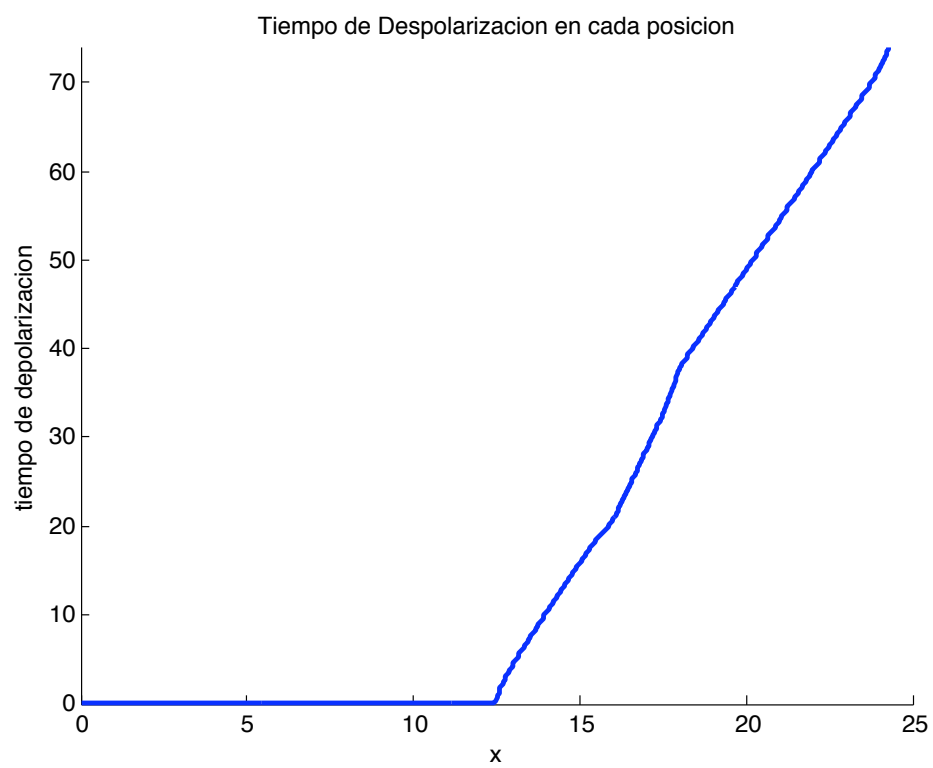


Figura 2.10: Tiempo de despolarización para el caso de la conductividad variable.

## Capítulo 3

# Determinación del coeficiente principal en una ecuación parabólica

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} v_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla v) = f(x) & \text{en } Q = (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega \\ v(0) = v_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $T > 0$  y  $\Omega$  es un dominio acotado de frontera regular.

En este capítulo se trata el problema inverso de recuperar el parámetro  $\sigma = \sigma(x)$  a partir de observaciones internas y de borde (secciones 3.1 y 3.2, respectivamente). El resultado principal es la estabilidad Lipschitz asociada a estos problemas.

Los resultados que aquí se encuentran se obtuvieron gracias a una desigualdad de Carleman para la ecuación del calor siguiendo la estrategia de Bukhgeim-Klibanov. Esta desigualdad será la base para la que se probará en el capítulo 4. A pesar de que el resultado de recuperación del coeficiente principal  $\sigma$  se supone implícitamente conocido en la literatura, este trabajo explicita los cálculos por primera vez.

### 3.1. Caso observaciones internas

Sea  $\omega$  un sub-dominio arbitrario de  $\Omega$  y denotemos  $Q_\omega = (0, T) \times \omega$ . El problema inverso asociado a (3.1) en este caso es recuperar el coeficiente  $\sigma$  a partir de observaciones (internas) en  $\omega$ .

El objetivo principal de esta sección es determinar la estabilidad asociada al problema inverso, es decir, ver si se pueden controlar las perturbaciones del parámetro por perturbaciones en las observaciones. Más precisamente, queremos controlar estas perturbaciones con respecto a un sistema de referencia. Para esto, consideremos



$$\begin{cases} \bar{v}_t - \operatorname{div}(\bar{\sigma}(x)\nabla\bar{v}) = f(x) & \text{en } Q \\ \frac{\partial\bar{v}}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

y sean  $u = v - \bar{v}$  y  $p = \sigma - \bar{\sigma}$ . Restando las ecuaciones (3.1) y (3.2), y agregando los términos necesarios, encontramos que  $u$  satisface el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u) = \operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}) & \text{en } Q \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ u(0) = v_0 - \bar{v}_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

Este es un problema inverso de *recuperación de fuente* con observaciones internas  $u|_{Q_\omega} = v|_{Q_\omega} - \bar{v}|_{Q_\omega}$ . El objetivo ahora es encontrar la estabilidad para el término  $p$ . En [IY98] se estudia un problema similar de estabilidad Lipschitz para recuperación de fuente, por lo que seguimos la metodología de este trabajo. La estrategia es utilizar *desigualdades de Carleman* como fue introducido por Bukhgeim y Klibanov en [BK81].

Sea  $z = u_t$  y  $\theta \in (0, T)$ . Derivando con respecto a  $t$  en (3.3), tenemos que  $z$  satisface:

$$\begin{cases} z_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla z) = \operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}_t) & \text{en } Q \\ z(\theta) = \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(\theta)) + \operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta)) & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ z(0) = \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(0)) + \operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}_0) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

La ventaja de hacer este cambio de variables es que el término  $p$  se encuentra ahora en la condición  $t = \theta$ , lo que será pieza clave en las estimaciones.

El motivo por el cual tomamos  $\theta > 0$  tiene que ver con la desigualdad de Carleman, pues para ser aplicada la ecuación parabólica debe cumplirse para  $t$  en una vecindad de  $\theta$ . Para el caso  $\theta = 0$ , se requieren extensiones de las soluciones de la ecuación parabólica a  $t < 0$ , lo que es imposible en general dado que no son reversibles. Para las ecuaciones hiperbólicas sí es posible ya que admiten tales extensiones. Un ejemplo de esto se encuentra en [IY03b].

### 3.1.1. Desigualdad de Carleman: observaciones en $\omega$

La siguiente proposición es la desigualdad de Carleman para la ecuación del calor (teorema 2.2.2) aplicada a la ecuación (3.4).

**Proposición 3.1.1.** *Sean las funciones de peso:*

$$\varphi(t, x) = \frac{e^{2\lambda\|\psi\|_\infty} - e^{\lambda\psi(x)}}{\phi(t)(T - \phi(t))} \quad (3.5)$$

$$\eta(t, x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\phi(t)(T - \phi(t))} \quad (3.6)$$

donde  $\psi(x) \in C^2(\overline{\Omega})$  es tal que

$$\psi(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\nabla\psi(x)| > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \omega_0, \quad (3.7)$$

con  $\omega_0 \subset\subset \omega$ , y  $\phi(t) \in C^2([0, T])$  es tal que

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(T) = T, \quad \phi(\theta) = \frac{T}{2}, \quad \phi'(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Existe  $\lambda_0 > 0$  tal que  $\forall \lambda > \lambda_0$ , existe  $s_0 = s_0(\lambda) > 0$  y  $C = C(\lambda, s_0, \Omega, \omega) > 0$  tal que  $\forall s > s_0$  y  $z$  solución de (3.4) se tiene

$$\begin{aligned} I_z &= \iint_Q \left( \frac{1}{s\eta} (|z_t|^2 + |\Delta z|^2) + s\lambda^2\eta|\nabla z|^2 + s^3\lambda^4\eta^3|z|^2 \right) e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\leq C \left( \iint_Q |\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}_t)|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + \iint_{Q_\omega} s^3\lambda^4\eta^3|z|^2 e^{-2s\varphi} d\sigma dt \right). \quad (DC_\omega) \end{aligned}$$

*Observación 3.1.2.* La existencia de la función  $\psi$  que cumpla (3.7) se prueba en [FI96], y es la que permite obtener los términos en la zona de observación interna  $\omega$ . Como se verá en la sección 3.2, para obtener el caso de observaciones de borde, se debe elegir  $\psi$  con otras características.

*Observación 3.1.3.* El motivo por el cual usamos los pesos (3.5) y (3.6) en vez de los clásicos para ecuaciones parabólicas, es que de este modo se tiene que (ver observación 2.2.4)

$$\begin{aligned} \varphi(\theta, x) &\leq \varphi(t, x) \quad \forall x \in \Omega, \\ \eta(\theta, x) &\leq \eta(t, x) \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

### 3.1.2. Principales resultados

Antes de presentar el resultado de estabilidad, que es el resultado más importante de este capítulo, veremos un resultado que, interesante en sí, será de gran utilidad en este y en el capítulo 4.

**Lema 3.1.4.** *Consideremos la ecuación*

$$\operatorname{div}(p(x)\nabla u_0) = g(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.8)$$

Sean las funciones de peso (3.5) y (3.6) definidas a partir de  $\psi(x) \in C^2(\overline{\Omega})$  tal que cumple (3.7). Sea  $\theta \in (0, T)$  y supongamos que

$$u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$$

y

$$|\nabla u_0 \cdot \nabla \psi| > \mu_0 > 0 \text{ c.t.p. en } \Omega \setminus \omega.$$

Entonces,  $\exists \lambda_0 > 0$  tal que  $\forall \lambda \geq \lambda_0, \exists s_0 = s_0(\lambda) > 0$  y  $C = C(\lambda, s_0, \Omega, \omega, u_0) > 0$  tal que  $\forall s \geq s_0$

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |g(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ Cs \int_{\partial\Omega} |p(x)|^2 \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx + Cs^2 \int_{\omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

*Demostración.* Seguimos el mismo argumento que en la demostración del Lema 2.4 en [BIY08]: multiplicamos la ecuación (3.8) por  $p(x)e^{-2s\varphi(\theta)}$  e integramos sobre  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(p(x)\nabla u_0) p(x) e^{-2s\varphi(\theta)} dx = \int_{\Omega} g(x) p(x) e^{-2s\varphi(\theta)} dx.$$

Integramos por partes para obtener:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} p(x) \nabla u_0 \cdot \nabla (p(x) e^{-2s\varphi(\theta)}) dx + \int_{\partial\Omega} p(x)^2 \frac{\partial u_0}{\partial n} e^{-2s\varphi(\theta)} dx = \\ \int_{\Omega} g(x) p(x) e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Desarrollamos el primer término en (3.10):

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} p(x) \nabla u_0 \cdot \nabla (p(x) e^{-2s\varphi(\theta)}) dx = \\ 2s \int_{\Omega} p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla \varphi(\theta)) e^{-2s\varphi(\theta)} dx - \int_{\Omega} p(x) \nabla p(x) \cdot \nabla u_0 e^{-2s\varphi(\theta)} dx, \end{aligned}$$

y notando que  $p(x) \nabla p(x) = \frac{1}{2} \nabla p(x)^2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} p(x) \nabla u_0 \cdot \nabla (p(x) e^{-2s\varphi(\theta)}) dx = \\ 2s \int_{\Omega} p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla \varphi(\theta)) e^{-2s\varphi(\theta)} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla p(x)^2 \cdot \nabla u_0 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes nuevamente

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} p(x) \nabla u_0 \cdot \nabla (p(x) e^{-2s\varphi(\theta)}) dx &= 2s \int_{\Omega} p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla \varphi(\theta)) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} p(x)^2 \operatorname{div}(\nabla u_0 e^{-2s\varphi(\theta)}) dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} p(x)^2 \frac{\partial u_0}{\partial n} e^{-2s\varphi(\theta)} dx, \end{aligned}$$

y desarrollando

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} p(x) \nabla u_0 \cdot \nabla (p(x) e^{-2s\varphi(\theta)}) dx &= s \int_{\Omega} p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla \varphi(\theta)) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} p(x)^2 \Delta u_0 e^{-2s\varphi(\theta)} dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} p(x)^2 \frac{\partial u_0}{\partial n} e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Reemplazando (3.11) en (3.10), obtenemos:

$$\begin{aligned} s \int_{\Omega} p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla \varphi(\theta)) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &= \int_{\Omega} g(x) p(x) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Omega} p(x)^2 \Delta u_0 e^{-2s\varphi(\theta)} dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} p(x)^2 \frac{\partial u_0}{\partial n} e^{-2s\varphi(\theta)} dx, \end{aligned}$$

y tomando módulo

$$\begin{aligned} \left| s \int_{\Omega \setminus \omega} p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla \varphi(\theta)) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \right| &= \left| \int_{\Omega} g(x) p(x) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \right. \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Omega} p(x)^2 \Delta u_0 e^{-2s\varphi(\theta)} dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} p(x)^2 \frac{\partial u_0}{\partial n} e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\left. - s \int_{\omega} p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla \varphi(\theta)) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \right|, \end{aligned}$$

donde hemos dejado al lado izquierdo la parte de la integral donde  $|\nabla u_0 \cdot \nabla \psi| > \mu_0$ , y al lado derecho el resto. De esto último, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \left| s \int_{\Omega \setminus \omega} p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla \varphi(\theta)) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \right| &\leq C \int_{\Omega} |g(x)| |p(x)| e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ C \int_{\Omega} |p(x)|^2 |\Delta u_0| e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\partial\Omega} |p(x)|^2 \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ s \int_{\omega} |p(x)|^2 |\nabla u_0 \cdot \nabla \varphi(\theta)| e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Notando que  $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$ , tenemos

$$\int_{\Omega} |p(x)|^2 |\Delta u_0| e^{-2s\varphi(\theta)} dx \leq C \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \quad (3.13)$$

Sea ahora  $\epsilon > 0$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g(x)||p(x)|e^{-2s\varphi(\theta)} dx &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\sqrt{s\epsilon}} |g(x)|e^{-s\varphi(\theta)} \right) (\sqrt{s\epsilon}|p(x)|e^{-s\varphi(\theta)}) dx \\ &\leq \frac{C_{\epsilon}}{s} \int_{\Omega} |g(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + s\epsilon \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde la desigualdad viene dada por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Por otro lado,  $\nabla\varphi(\theta) = -\nabla\eta(\theta) = -\lambda\eta(\theta)\nabla\psi$  y  $|\nabla u_0 \cdot \nabla\psi| > \mu_0$  en  $\Omega \setminus \omega$ . Para  $\lambda$  suficientemente grande, podemos acotar el lado izquierdo en (3.12) de la siguiente forma

$$\left| s \int_{\Omega \setminus \omega} p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla\varphi(\theta)) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \right| \geq Cs \int_{\Omega \setminus \omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \quad (3.15)$$

En efecto, notemos primero que

$$\left| s \int_{\Omega \setminus \omega} p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla\varphi(\theta)) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \right| = \left| s\lambda \int_{\Omega \setminus \omega} \eta(\theta) p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla\psi) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \right|,$$

y llamemos

$$A = \left| s\lambda \int_{\Omega \setminus \omega} \eta(\theta) p(x)^2 (\nabla u_0 \cdot \nabla\psi) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \right|.$$

Observemos que si  $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$  y  $|\nabla u_0 \cdot \nabla\psi| > \mu_0 > 0$  en  $\Omega \setminus \omega$ , entonces  $\nabla u_0 \cdot \nabla\psi$  no cambia de signo en  $\Omega \setminus \omega$ . De esta forma, si  $\nabla u_0 \cdot \nabla\psi > 0$ , es fácil ver que

$$A = s\lambda \int_{\Omega \setminus \omega} \eta(\theta) |p(x)|^2 |\nabla u_0 \cdot \nabla\psi| e^{-2s\varphi(\theta)} dx \geq \frac{4\mu_0}{T^2} s \int_{\Omega \setminus \omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx,$$

donde hemos tomado  $\lambda > 1$  y que  $\eta(\theta, x) \geq \frac{4}{T^2} \forall x \in \Omega$ .

De forma similar, si  $\nabla u_0 \cdot \nabla\psi < 0$ ,

$$\begin{aligned} A &= \left| s\lambda \int_{\Omega \setminus \omega} \eta(\theta) p(x)^2 \underbrace{(-\nabla u_0 \cdot \nabla\psi)}_{>0} e^{-2s\varphi(\theta)} dx \right| \\ &= s\lambda \int_{\Omega \setminus \omega} \eta(\theta) |p(x)|^2 |\nabla u_0 \cdot \nabla\psi| e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\geq \frac{4\mu_0}{T^2} s \int_{\Omega \setminus \omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

con lo que demostramos (3.15).

Por (3.13), (3.14) y (3.15) en (3.12) obtenemos

$$\begin{aligned} s \int_{\Omega \setminus \omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq \frac{C_\epsilon}{s} \int_{\Omega} |g(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + s\epsilon \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ C \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\partial\Omega} |p(x)|^2 \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx + Cs \int_{\omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

Sumando el término  $\int_{\omega} s|p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)}$  a ambos lados en la última desigualdad, se tiene

$$\begin{aligned} s \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq \frac{C_\epsilon}{s} \int_{\Omega} |g(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + s\epsilon \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ C \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ C \int_{\partial\Omega} |p(x)|^2 \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx + Cs \int_{\omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

Fijando  $\epsilon$  suficientemente pequeño y tomando  $s$  grande, obtenemos (3.9).  $\square$

**Corolario 3.1.5.** *Considerando las mismas hipótesis del Lema 3.1.4, más  $u_0 \in W^{3,\infty}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , se tiene que  $\exists \lambda_0 > 0$  tal que  $\forall \lambda \geq \lambda_0, \exists s_0 = s_0(\lambda) > 0$  y  $C = C(\lambda, s_0, \Omega, \omega, u_0) > 0$  tal que  $\forall s \geq s_0$*

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega} |\nabla p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ Cs \int_{\partial\Omega} |\nabla p(x)|^2 \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx + Cs^2 \int_{\omega} |\nabla p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \quad (3.16) \end{aligned}$$

*Demostración.* Derivamos la ecuación  $\operatorname{div}(p(x)\nabla u_0) = g(x)$  con respecto a  $x_j$ . Denotamos  $q_j(x) = \partial_j p(x)$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(q_j(x)\nabla u_0) &= \partial_j g(x) - \operatorname{div}(p(x)\nabla(\partial_j u_0)) \\ &= \partial_j g(x) - p(x)\Delta(\partial_j u_0) - \nabla p(x) \cdot \nabla(\partial_j u_0). \end{aligned}$$

Si aplicamos el Lema 3.1.4 a  $q_j$ , obtenemos

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega} |q_j(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |\partial_j g(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ C \int_{\Omega} |p(x)|^2 |\Delta(\partial_j u_0)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} |\nabla p(x) \cdot \nabla(\partial_j u_0)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ Cs \int_{\partial\Omega} |q_j(x)|^2 \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx + Cs^2 \int_{\omega} |q_j(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

Usando que  $u_0 \in W^{3,\infty}(\Omega)$ , y luego sumando sobre  $j$  se obtiene

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega} |\nabla p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ C \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} |\nabla p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ Cs \int_{\partial\Omega} |\nabla p(x)|^2 \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx + Cs^2 \int_{\omega} |\nabla p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx, \end{aligned}$$

y para  $s$  suficientemente grande obtenemos (3.16).  $\square$

**Corolario 3.1.6.** *Con las mismas hipótesis del Corolario 3.1.5, se tiene que  $\exists \lambda_0 > 0$  tal que  $\forall \lambda \geq \lambda_0, \exists s_0 = s_0(\lambda) > 0$  y  $C = C(\lambda, s_0, \Omega, \omega, u_0) > 0$  tal que  $\forall s \geq s_0$*

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} (|g(x)|^2 + |\nabla g(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ Cs \int_{\partial\Omega} (|p(x)|^2 dx + |\nabla p(x)|^2) \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ Cs^2 \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \quad (3.17) \end{aligned}$$

*Demostración.* Simplemente hay que notar que al sumar (3.9) (Lema 3.1.4) y (3.16) (Corolario 3.1.5), al tomar  $s$  suficientemente grande, el segundo término del lado derecho de (3.16) se absorbe con el lado izquierdo de (3.9) y se obtiene (3.17).  $\square$

El siguiente es el resultado principal de esta sección:

**Teorema 3.1.7.** *Sean  $\sigma = \sigma(x) \in W^{2,\infty}(\Omega)$  un parámetro desconocido y  $v = v(t, x) \in H^1(0, T; H^2(\Omega))$  solución de (3.1). Consideremos  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(x)$  y  $\bar{v} = \bar{v}(t, x)$  un parámetro y trayectoria de referencia regular de (3.1), y supongamos que cumple*

$$|\nabla \bar{v}(\theta) \cdot \nabla \psi| \geq \mu_0 > 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega \setminus \omega,$$

para  $\theta \in (0, T)$  y  $\omega \subset \Omega$ . Entonces, se tiene que existe una constante  $C = C(\Omega, \omega)$  tal que

$$\|\sigma - \bar{\sigma}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left( \|v - \bar{v}\|_{H^1(0,T;L^2(\omega))}^2 + \|v(\theta) - \bar{v}(\theta)\|_{H^3(\Omega)}^2 + \|\sigma - \bar{\sigma}\|_{H^1(\omega)}^2 \right).$$

Más aún, si consideramos que  $\sigma = \bar{\sigma}$  en  $\omega$ , entonces

$$\|\sigma - \bar{\sigma}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left( \|v - \bar{v}\|_{H^1(0,T;L^2(\omega))}^2 + \|v(\theta) - \bar{v}(\theta)\|_{H^3(\Omega)}^2 \right).$$

*Demostración del teorema 3.1.7.* Por un asunto de orden, esta demostración está dividida en pasos o etapas de cálculo. Luego las juntaremos para llegar al resultado final.

**Paso 1**

Utilizando el corolario 3.1.6 con el término  $\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta))$  presente en (3.4), tenemos que

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} |\nabla \operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + Cs \int_{\partial\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) \left| \frac{\partial\bar{v}(\theta)}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + Cs^2 \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

Usando la condición de borde de (3.2), se obtiene

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} |\nabla \operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + Cs^2 \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

Más aún, por (3.4):

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq \\ &\quad C \int_{\Omega} |z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} |\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} |\nabla \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + Cs^2 \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + Cs^2 \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

Ahora nos concentramos en estimar los dos primeros términos del lado derecho de esta última desigualdad.



**Paso 2:**

Veremos que

$$\int_{\Omega} |z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \leq \frac{C}{s} \cdot I_z.$$

En efecto, usando que  $|z(0)|^2 e^{-2s\varphi(0)} = 0$ , y que  $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \leq C\eta^2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} s|z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &= \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\Omega} s z^2 e^{-2s\varphi} dx \right) dt \\ &= \int_0^\theta \int_{\Omega} \left( 2s z z_t e^{-2s\varphi} - 2s^2 z^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-2s\varphi} \right) dx dt \\ &\leq C \iint_Q s |z| |z_t| e^{-2s\varphi} dx dt + C \iint_Q s^2 |z|^2 \eta^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\ &= C \iint_Q \left( \frac{1}{\sqrt{s\eta}} |z_t| e^{-s\varphi} \right) (s\sqrt{s\eta} |z| e^{-s\varphi}) dx dt \\ &\quad + C \iint_Q s^2 |z|^2 \eta^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\leq C \iint_Q \frac{1}{s\eta} |z_t|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + C \iint_Q s^3 \eta |z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\quad + C \iint_Q s^2 \eta^2 |z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt, \end{aligned}$$

de donde, para  $s$  suficientemente grande,

$$\int_{\Omega} s|z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} \leq C \cdot I_z.$$

□

**Paso 3:**

Similar al Paso 2, veremos que

$$\int_{\Omega} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \leq Cs \cdot I_z.$$

En efecto, de manera análoga al paso 2 se tiene, pues  $\frac{1}{\eta(0)} |\nabla z(0)|^2 e^{-2s\varphi(0)} = 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{s\eta(\theta)} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} &= \int_0^\theta \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{s\eta} |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} dx \right) dt \\ &= \int_0^\theta \int_{\Omega} \left( 2 \frac{1}{s\eta} \nabla z \cdot \nabla z_t e^{-2s\varphi} - \frac{1}{s\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} - 2 \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} \right) dx dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes en espacio,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{s\eta(\theta)} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq -2 \int_0^\theta \int_{\Omega} z_t \operatorname{div} \left( \frac{1}{s\eta} \nabla z e^{-2s\varphi} \right) dx dt \\ &\quad + 2 \int_0^\theta \int_{\partial\Omega} \frac{1}{s\eta} z_t \frac{\partial z}{\partial n} e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\quad + C \iint_Q \left( \frac{1}{s\eta} \left| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right| |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} + \frac{1}{\eta} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} \right) dx dt. \end{aligned}$$

Por la condición de borde en (3.4), notando que  $\left| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right| \leq C\eta^2$  y desarrollando, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{s\eta(\theta)} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq -2 \int_0^\theta \int_{\Omega} \frac{1}{s\eta} z_t \Delta z e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\quad - \int_0^\theta \int_{\Omega} \frac{1}{s\eta^2} z_t (\nabla z \cdot \nabla \eta) e^{-2s\varphi} dx dt - \int_0^\theta \int_{\Omega} \frac{2}{\eta} z_t (\nabla z \cdot \nabla \varphi) e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\quad + C \iint_Q \left( \frac{1}{s} \eta |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} + \eta |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} \right) dx dt. \end{aligned}$$

Notando que  $\nabla \eta = \lambda \eta \nabla \psi$  y  $\nabla \varphi = -\lambda \eta \nabla \psi$ , se tiene, considerando  $s > 1$ , que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{s\eta(\theta)} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \iint_Q \frac{1}{s\eta} |z_t| |\Delta z| e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\quad + C \iint_Q \frac{\lambda}{s\eta} |z_t| |\nabla z| |\nabla \psi| e^{-2s\varphi} dx dt + C \iint_Q \lambda |z_t| |\nabla z| |\nabla \psi| e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\quad + C \iint_Q s\eta |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt. \end{aligned}$$

Ahora, como  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $|\nabla \psi|$  es acotado en  $\Omega$ . Además,  $\frac{1}{\eta}$  es una función acotada en  $Q$ , por lo que podemos encontrar  $C$  tal que  $\frac{1}{s\eta} \leq C$ . Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{s\eta(\theta)} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \iint_Q \frac{1}{s\eta} |z_t| |\Delta z| e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\quad + C \iint_Q \lambda |z_t| |\nabla z| e^{-2s\varphi} dx dt + C \iint_Q s\eta |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{1}{s\eta(\theta)} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \iint_Q \left( \frac{1}{\sqrt{s\eta}} |z_t| e^{-s\varphi} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{s\eta}} |\Delta z| e^{-s\varphi} \right) dx dt \\
&\quad + C \iint_Q \left( \frac{1}{\sqrt{s\eta}} |z_t| e^{-s\varphi} \right) (\lambda \sqrt{s\eta} |\nabla z| e^{-s\varphi}) dx dt \\
&\quad + C \iint_Q s\eta |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\
&\leq C \iint_Q \frac{1}{s\eta} |z_t|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + C \iint_Q \frac{1}{s\eta} |\Delta z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\
&\quad + C \iint_Q \frac{1}{s\eta} |z_t|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + C \iint_Q s\lambda^2 \eta |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\
&\quad + C \iint_Q s\eta |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

Considerando  $s$  suficientemente grande y  $\lambda > 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{1}{s\eta(\theta)} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \iint_Q \frac{1}{s\eta} |z_t|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\
&\quad + C \iint_Q \frac{1}{s\eta} |\Delta z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\
&\quad + C \iint_Q s\lambda^2 \eta |\nabla z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\
&\leq C \cdot I_z.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\eta(\theta) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{T^2/4} \leq \frac{4}{T^2} e^{\lambda\|\psi\|_{\infty}},$$

con lo que se tiene

$$\int_{\Omega} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \leq \frac{4}{T^2} e^{\lambda\|\psi\|_{\infty}} \int_{\Omega} \frac{1}{\eta(\theta)} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx dt \leq Cs \cdot I_z.$$

□

### Juntando los pasos

Por el paso 1, tenemos que

$$\begin{aligned}
s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\
&\quad + C \int_{\Omega} |\nabla z(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^{\beta} u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\
&\quad + Cs^2 \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx.
\end{aligned}$$

Por los pasos 2 y 3 obtenemos

$$\begin{aligned}
s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq \frac{C}{s} \cdot I_z + Cs \cdot I_z \\
&+ C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\
&+ Cs^2 \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Carleman ( $DC_\omega$ ):

$$\begin{aligned}
s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq Cs \iint_Q |\operatorname{div}(p(x)\nabla \bar{v}_t)|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\
&+ Cs \iint_{Q_\omega} s^3 \eta^3 |z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\
&+ C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\
&+ s^2 C \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx.
\end{aligned}$$

Considerando la trayectoria de referencia suficientemente regular,

$$\begin{aligned}
s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq Cs \iint_Q (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi} dx dt \\
&+ C \iint_{Q_\omega} s^4 \eta^3 |z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\
&+ C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\
&+ s^2 C \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por la observación 3.1.3, se tiene que,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned}
\iint_Q (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi} dx dt &\leq \iint_Q (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx dt \\
&= T \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx.
\end{aligned}$$

Usando esto último en (4.25) obtenemos

$$\begin{aligned}
s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C s \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\
&+ C \iint_{Q_{\omega}} s^4 \eta^3 |z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\
&+ C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^{\beta} u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\
&+ s^2 C \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx,
\end{aligned}$$

de donde, para  $s$  suficientemente grande

$$\begin{aligned}
s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \iint_{Q_{\omega}} s^4 \eta^3 |z|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\
&+ C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^{\beta} u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\
&+ C s^2 \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx.
\end{aligned}$$

Más aún, como  $\theta > 0$ , podemos acotar inferiormente  $e^{-2s\varphi(\theta)}$  por una constante positiva, por ejemplo, por  $C_1 = \exp\left(-2s \frac{e^{2\lambda\|\psi\|_{\infty}}}{T^2/4}\right) > 0$ . Por otro lado, si bien  $\eta^3$  no es una función acotada en  $Q$ , sí lo es el producto  $\eta^3 e^{-2s\varphi}$ . Obtenemos así

$$\begin{aligned}
C_1 s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) dx &\leq C s^4 \iint_{Q_{\omega}} |z|^2 + C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^{\beta} u(\theta)|^2 dx \\
&+ C s^2 \int_{\omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) dx,
\end{aligned}$$

de donde, fijando  $s$  y  $\lambda$  suficientemente grande, podemos concluir y completamos la demostración del teorema 3.1.7.  $\square$

Es posible encontrar una estimación como la del teorema 3.1.7 en norma  $L^2(\Omega)$  de  $p$ , pero para esto se necesitaría una desigualdad de Carleman para ecuaciones parabólicas con lado derecho en  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Esto permitiría estimar parámetros con menos regularidad. En este caso particular, podríamos bajar la regularidad de  $\sigma$  a  $W^{1,\infty}(\Omega)$  en lugar de  $W^{2,\infty}(\Omega)$ . En [IY03a] se encuentra una desigualdad de Carleman para una ecuación parabólica con lado derecho en un espacio de Sobolev de orden negativo, en particular, en  $L^2(0, T; W_2^{-l}(\Omega))$ ,  $l \in [0, 1]$ . Sin embargo, esta desigualdad no estima el término  $z_t$  (ni  $\Delta z$ ), el cual, para nuestro procedimiento, es esencial poder estimarlo mediante la energía del sistema (ver *paso 2* en la demostración del teorema 3.1.7).

## 3.2. Caso observaciones de borde

Consideramos el mismo sistema que en la sección anterior. El problema inverso es ahora recuperar el coeficiente  $\sigma$  de (3.1) a partir de mediciones Dirichlet en una parte del borde de  $\Omega$ , es decir, mediciones del tipo  $v|_{(0,T) \times \gamma}$ , donde  $\gamma \subset \subset \partial\Omega$ .

Al igual que antes, nos interesa encontrar la estabilidad Lipschitz asociada a este problema inverso. El procedimiento es esencialmente el mismo. La modificación que permite estimar el parámetro por mediciones en  $\gamma$  es la elección de la función  $\psi$  para la desigualdad de Carleman.

### 3.2.1. Desigualdad de Carleman: observaciones en $\gamma$

Al igual que en el caso de observaciones internas, la siguiente proposición es la desigualdad de Carleman para la ecuación del calor (teorema 2.2.6) aplicada a la ecuación (3.4) para el caso de observaciones de borde.

**Proposición 3.2.1.** *Sean las funciones de peso (3.5) y (3.6) a partir de  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$  tal que*

$$\psi|_{\partial\Omega \setminus \gamma} = 0, \quad \psi|_{\gamma'} > 0, \quad |\nabla\psi(x)| > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

donde  $\gamma' \subset \subset \gamma$ . Denotemos por  $\Sigma_\gamma = (0, T) \times \gamma$ .

Existe  $\lambda_0 > 0$  tal que  $\forall \lambda > \lambda_0$ , existe  $s_0 = s_0(\lambda) > 0$  y  $C = C(\lambda, s_0, \Omega, \gamma) > 0$  tal que  $\forall s > s_0$  y  $z$  solución de (3.4) se tiene

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left( \frac{1}{s\eta} (|z_t|^2 + |\Delta z|^2) + s\lambda^2\eta |\nabla z|^2 + s^3\lambda^4\eta^3 |z|^2 \right) e^{-2s\varphi} dx dt \\ & \leq C \left( \iint_Q |\operatorname{div}(p(x)\nabla \bar{v}_t)|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + \iint_{\Sigma_\gamma} s^3\lambda^4\eta^3 |z|^2 e^{-2s\varphi} d\sigma dt \right). \quad (DC_\gamma) \end{aligned}$$

### 3.2.2. Principales resultados

Otro aspecto que cambia con esta función  $\psi$ , es el lema 3.1.4. Como  $|\nabla\psi(x)| > 0, \forall x \in \overline{\Omega}$ , es posible elegir ahora  $u_0$  tal que se cumpla  $|\nabla u_0 \cdot \nabla\psi| > \mu_0 > 0$  en todo  $\Omega$ , con lo que no es necesario separar integrales del lado izquierdo de la desigualdad para evitar que se anulen en alguna parte del dominio (ver demostración del lema 3.1.4). Así, tenemos los siguientes resultados, consecuencia de esta observación.

**Lema 3.2.2.** *Consideremos las mismas hipótesis que el lema 3.1.4, y supongamos además que podemos elegir  $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  tal que*

$$|\nabla u_0 \cdot \nabla\psi| > \mu_0 > 0 \text{ en } \overline{\Omega}.$$

Entonces,  $\exists \lambda_0 > 0$  tal que  $\forall \lambda \geq \lambda_0, \exists s_0 = s_0(\lambda) > 0$  y  $C = C(\lambda, s_0, \Omega, \omega, u_0) > 0$  tal que  $\forall s \geq s_0$

$$s^2 \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \leq C \int_{\Omega} |g(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + Cs \int_{\partial\Omega} |p(x)|^2 \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx.$$

**Corolario 3.2.3.** Considerando las mismas hipótesis del Lema 3.2.2, más  $u_0 \in W^{3,\infty}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , se tiene que  $\exists \lambda_0 > 0$  tal que  $\forall \lambda \geq \lambda_0, \exists s_0 = s_0(\lambda) > 0$  y  $C = C(\lambda, s_0, \Omega, \omega, u_0) > 0$  tal que  $\forall s \geq s_0$

$$s^2 \int_{\Omega} |\nabla p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} |p(x)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ + Cs \int_{\partial\Omega} |\nabla p(x)|^2 \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx.$$

**Corolario 3.2.4.** Con las mismas hipótesis del Corolario 3.2.3, se tiene que  $\exists \lambda_0 > 0$  tal que  $\forall \lambda \geq \lambda_0, \exists s_0 = s_0(\lambda) > 0$  y  $C = C(\lambda, s_0, \Omega, \omega, u_0) > 0$  tal que  $\forall s \geq s_0$

$$s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \leq C \int_{\Omega} (|g(x)|^2 dx + |\nabla g(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} \\ + Cs \int_{\partial\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| e^{-2s\varphi(\theta)} dx.$$

Con estas variaciones de los resultados de la sección 3.1, y usando la desigualdad de Carleman ( $DC_{\gamma}$ ) en lugar de ( $DC_{\omega}$ ), podemos obtener el siguiente

**Teorema 3.2.5.** Sean  $\sigma = \sigma(x) \in W^{2,\infty}(\Omega)$  un parámetro desconocido y  $v = v(t, x) \in H^1(0, T; H^2(\Omega))$  solución de (3.1). Consideremos  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(x)$  y  $\bar{v} = \bar{v}(t, x)$  un parámetro y trayectoria de referencia regular de (3.1), supongamos que

$$|\nabla \bar{v}(\theta) \cdot \nabla \psi| > \mu_0 > 0 \text{ en } \bar{\Omega},$$

para  $\theta \in (0, T)$  y sea  $\gamma \subset \partial\Omega$ . Entonces, se tiene que existe una constante  $C = C(\Omega, \gamma)$  tal que

$$\|\sigma - \bar{\sigma}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left( \|v - \bar{v}\|_{H^1(0,T;L^2(\gamma))}^2 + \|v(\theta) - \bar{v}(\theta)\|_{H^3(\Omega)}^2 \right).$$

Una idea más completa de la demostración del teorema 3.2.5 se puede ver en la demostración del teorema 4.3.1 en el capítulo 4.

# Capítulo 4

## Determinación del coeficiente principal en la ecuación biestable

Este es el capítulo principal de esta memoria. Se obtiene la estabilidad para la recuperación de la conductividad en la ecuación biestable, el cual es el resultado más importante y original de este trabajo. Esto se logra por medio del método de Bukhgeim-Klibanov y una nueva desigualdad de Carleman, la cual se utiliza en conjunto con la desigualdad usual para la ecuación del calor.

### 4.1. La ecuación biestable

Sea  $\Omega$  un dominio con frontera regular,  $T > 0$  y denotemos  $Q = (0, T) \times \Omega, \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$ . Consideremos el sistema

$$\begin{cases} v_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla v) = f(v) & \text{en } Q \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ v(0) = v_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $f(v) = a(x)v(1-v)(v-\alpha(x))$  es el término no lineal. La ecuación gobernante de (4.1) se llama *ecuación biestable*. Esta ecuación se puede considerar como el modelo más simple para la propagación de voltaje normalizado en un corazón aislado.

El objetivo de este capítulo es obtener la estabilidad Lipschitz del siguiente problema inverso: recuperar  $\sigma = \sigma(x)$  a partir de mediciones de borde tipo Dirichlet en  $(0, T) \times \gamma$ , donde  $\gamma \subset \partial\Omega$ . La estrategia será la misma empleada en el capítulo 3: usar desigualdades de Carleman. La novedad en este caso es la aparición de una desigualdad específica para esta ecuación no lineal.

En [BGO09] se obtiene la estabilidad Lipschitz asociada al problema inverso de recuperar los parámetros  $a$  y  $\alpha$  a partir de mediciones internas en  $(0, T) \times \omega$ , considerando



$\sigma = 1$ . En nuestro caso,  $a$  y  $\alpha$  serán parámetros conocidos y regulares, tales que

$$\begin{aligned} a &\in W^{1,\infty}(\Omega), \quad 0 < a_0 < a(x), \text{ c.t.p. } x \in \Omega \text{ y } \|a\|_{W^{1,\infty}} \leq a_1, \\ \alpha &\in W^{1,\infty}(\Omega), \quad 0 < \alpha_0 < \alpha(x), \text{ c.t.p. } x \in \Omega \text{ y } \|\alpha\|_{W^{1,\infty}} \leq \alpha_1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Al igual que en el capítulo anterior, consideramos un sistema de referencia, en torno al cual estimaremos el parámetro. Sea

$$\begin{cases} \bar{v}_t - \operatorname{div}(\bar{\sigma}(x)\nabla\bar{v}) = f(\bar{v}) & \text{en } Q \\ \frac{\partial\bar{v}}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.3)$$

y definamos  $u = v - \bar{v}$  y  $p = \sigma - \bar{\sigma}$ . Restando (4.1) y (4.3) se encuentra que  $u$  satisface:

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u) = \operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}) + f(v) - f(\bar{v}) & \text{en } Q \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ u(0) = v_0 - \bar{v}_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

Como  $f$  es una función cúbica en  $v$ , podemos usar un desarrollo de Taylor en torno a  $\bar{v}$ , y de esta forma expresarla exactamente como

$$f(v) = f(\bar{v}) + \frac{\partial f(\bar{v})}{\partial v}u + \frac{\partial^2 f(\bar{v})}{\partial v^2} \frac{u^2}{2} + \frac{\partial^3 f(\bar{v})}{\partial v^3} \frac{u^3}{6}.$$

Así, el lado derecho de (4.4) depende sólo de  $u$  y  $\bar{v}$ . Llamemos

$$\begin{aligned} g(\bar{v}, u, u^2) &= \frac{\partial f(\bar{v})}{\partial v}u + \frac{\partial^2 f(\bar{v})}{\partial v^2} \frac{u^2}{2} \\ &= a(2(\alpha + 1)\bar{v} - \alpha - 3\bar{v}^2)u + a(\alpha + 1 - 3\bar{v})u^2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

y podemos escribir (4.4) como

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u) + au^3 = \operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}) + g \equiv G & \text{en } Q \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ u(0) = v_0 - \bar{v}_0 \equiv u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.6)$$

Para (4.6) se ha encontrado en [BGO09] una desigualdad de Carleman específica en el caso de observaciones internas y de borde, pero sólo para  $\sigma = 1$ . Sin embargo, se puede extender este resultado para el caso  $\sigma$  no constante, pero regular. La demostración de esta extensión se desarrolla en la siguiente sección.

## 4.2. Desigualdad de Carleman para ecuación biestable

En esta sección se presenta la demostración de una desigualdad de Carleman para la ecuación (4.6) tanto para el caso de observaciones internas y de borde. Estos resultados son una adaptación de los encontrados en [BGO09] para el caso  $\sigma = 1$ .

En lo que sigue, consideraremos  $\Omega$  un dominio regular,  $T > 0$ ,  $Q = (0, T) \times \Omega$ ,  $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$ ,  $G \in L^2(Q)$ ,  $u_0 \in L^2(\Omega)$  y

$$a \in W^{1,\infty}(\Omega), 0 < a_0 \leq a(x), \text{ c.t.p. } x \in \Omega \text{ y } \|a\|_{W^{1,\infty}} \leq a_1$$

$$\sigma \in W^{1,\infty}(\Omega), 0 < \sigma_0 \leq \sigma(x), \text{ c.t.p. } x \in \Omega \text{ y } \|\sigma\|_{W^{1,\infty}} \leq \sigma_1$$

para constantes  $a_0, a_1, \sigma_0, \sigma_1$ .

### 4.2.1. Caso de observaciones en $(0, T) \times \omega$

Sea  $\omega \subset \Omega$  un abierto no vacío. Consideremos una función  $\psi$  en  $\Omega$  tal que

$$\psi \in C^2(\bar{\Omega}), \psi > 0 \text{ in } \Omega, \psi = 0 \text{ on } \partial\Omega, |\nabla\psi| > 0 \text{ in } \overline{\Omega \setminus \omega'},$$

donde  $\omega' \subset\subset \omega$ . Recordemos que la existencia de tal función se prueba en [FI96]. A partir de  $\psi$  se definen las funciones de peso (3.5) y (3.6).

Se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.1.** *Existe  $\bar{\lambda}$  y  $C$  dependiendo sólo de  $\Omega$  y  $\omega$  tales que, para cualquier  $\lambda \geq \bar{\lambda}$ ,  $s \geq \bar{s} = C(\Omega, \omega, T, a_0, a_1)e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}$ , para cualquier  $G \in L^2(Q)$  y  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , la solución  $u$  de (4.6) satisface*

$$\begin{aligned} & \iint_Q e^{-2s\varphi} \left( \frac{1}{s\eta} (|u_t|^2 + |\Delta u|^2) + a^2|u|^6 + s\lambda^2\eta|\nabla u|^2 + s^3\lambda^4\eta^3|u|^2 + s^2\lambda^2\eta^2|u|^4 \right) dx dt \\ & \leq C \left( \iint_{(0,T)\times\omega} e^{-2s\varphi} (s^3\lambda^4\eta^3|u|^2 + s^2\lambda^2\eta^2|u|^4) dx dt + \iint_Q e^{-2s\varphi} |G|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (DC_{BS\omega})$$

*Demostración.* La demostración sigue la misma idea que para la desigualdad de Carleman para la ecuación del calor. Los términos extras vienen del término no lineal.

Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} u_t - \sigma\Delta u + au^3 = G & \text{en } Q \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ u(0) = u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4.7)$$

Demostraremos el resultado para la ecuación (4.7), y veremos que se extiende fácilmente para (4.6).

### Una desigualdad con términos de borde

Sea

$$w = e^{-s\varphi}u.$$

Si  $u$  satisface (4.7),  $w$  es solución de

$$P_1(w) + P_2(w) = H(w) \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} P_1(w) &= -\sigma\Delta w - s^2\lambda^2\eta^2\sigma|\nabla\psi|^2w + s\varphi_t w + \frac{3a}{4}e^{2s\varphi}w^3, \\ P_2(w) &= w_t + 2s\lambda\eta\sigma\nabla\psi \cdot \nabla w + 2s\lambda^2\eta\sigma|\nabla\psi|^2w + \frac{a}{4}e^{2s\varphi}w^3, \\ H(w) &= e^{-s\varphi}G - s\lambda\eta\sigma\Delta\psi w + s\lambda^2\eta\sigma|\nabla\psi|^2w. \end{aligned}$$

Para obtener esta ecuación, hemos usado que

$$\nabla\varphi = -\lambda\nabla\psi\eta, \quad \nabla\eta = \lambda\nabla\psi\eta, \quad \Delta\varphi = -\lambda\Delta\psi\eta - \lambda^2|\nabla\psi|^2\eta.$$

La descomposición es similar a la descomposición estándar para la ecuación del calor en [FI96], excepto por los términos cúbicos  $w^3$ . El producto interno de este término en  $P_1(w)$  y  $P_2(w)$  hará aparecer el término  $|u|^6$  en  $(DC_{BS\omega})$ .

Procedemos entonces como en [FI96]: tomamos la norma  $L^2(Q)$  de (4.8)

$$\|P_1(w)\|_{L^2(Q)}^2 + \|P_2(w)\|_{L^2(Q)}^2 + 2(P_1(w), P_2(w))_{L^2(Q)} = \|H(w)\|_{L^2(Q)}^2, \quad (4.9)$$

y calculamos el término  $(P_1(w), P_2(w))_{L^2(Q)}$ :

$$(P_1(w), P_2(w))_{L^2(Q)} = \sum_{i,j=1}^4 I_{ij},$$

donde  $I_{ij}$  es el producto escalar entre el  $i$ -ésimo término de  $P_1(w)$  y el  $j$ -ésimo término de  $P_2(w)$ . Ahora, calculamos cada una de estas integrales, con el objetivo de obtener términos positivos grandes que logren absorber los demás términos para  $s$  y  $\lambda$  suficientemente grandes. Definamos los siguientes términos principales:

$$\begin{aligned} A_1 &= s^3\lambda^4 \iint_Q \eta^3|w|^2 dx dt, \quad A_2 = s\lambda^2 \iint_Q \eta|\nabla w|^2 dx dt, \\ A_3 &= s^2\lambda^2 \iint_Q \eta^2 e^{2s\varphi}|w|^4 dx dt, \quad A_4 = \iint_Q e^{4s\varphi}a^2|w|^6 dx dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Primero, integrando por partes en espacio

$$I_{11} = - \iint_Q \sigma\Delta w w_t dx dt = - \iint_{\Sigma} \sigma\nabla w \cdot n w_t d\sigma dt + \iint_Q (\nabla\sigma \cdot \nabla w) w_t dx dt,$$

pues  $w(0, x) = w(T, x) = 0, \forall x \in \Omega$ . El segundo término se absorbe con  $A_2$  tomando  $\lambda \geq C(\Omega, \omega)$ . En este punto, no usamos las condiciones de borde para hacer cálculos generales válidos para condiciones de borde Dirichlet o Neumann. Luego,

$$\begin{aligned}
I_{12} &= -2s\lambda \iint_Q \eta\sigma^2 \Delta w \nabla \psi \cdot \nabla w \, dx \, dt \\
&= -2s\lambda \iint_{\Sigma} \eta\sigma^2 |\nabla w \cdot n|^2 \nabla \psi \cdot n \, d\sigma \, dt + s\lambda \iint_{\Sigma} \eta\sigma^2 |\nabla w|^2 \nabla \psi \cdot n \, d\sigma \, dt \\
&\quad - s\lambda^2 \iint_Q \eta\sigma^2 |\nabla w|^2 |\nabla \psi|^2 \, dx \, dt \\
&\quad + 2s\lambda^2 \iint_Q \eta\sigma^2 |\nabla w \cdot \nabla \psi|^2 \, dx \, dt - s\lambda \iint_Q \eta\sigma^2 |\nabla w|^2 \Delta \psi \, dx \, dt \\
&\quad + 2s\lambda \iint_Q \eta\sigma^2 \nabla w \cdot D^2 \psi \nabla w \, dx \, dt \\
&\quad + 4s\lambda \iint_Q \eta\sigma (\nabla \sigma \cdot \nabla w) (\nabla \psi \cdot \nabla w) \, dx \, dt,
\end{aligned}$$

donde  $D^2 \psi$  es la matriz Hessiana. Para el primer término de borde, hemos usado que, como  $\psi = 0$  sobre  $\partial\Omega$ ,  $\nabla \psi = (\nabla \psi \cdot n)n$  sobre  $\partial\Omega$ . El tercer término se quedará en el lado izquierdo, el cuarto término es positivo y los últimos tres términos se absorben con  $A_2$  tomando  $\lambda \geq C(\Omega, \omega)$ .

$$\begin{aligned}
I_{13} &= -2s\lambda^2 \iint_Q \eta\sigma^2 \Delta w |\nabla \psi|^2 w \, dx \, dt \\
&= -2s\lambda^2 \iint_{\Sigma} \eta\sigma^2 \nabla w \cdot n |\nabla \psi|^2 w \, d\sigma \, dt + 2s\lambda^2 \iint_Q \eta\sigma^2 |\nabla w|^2 |\nabla \psi|^2 \, dx \, dt \\
&\quad + 2s\lambda^3 \iint_Q \eta\sigma^2 \nabla w \cdot \nabla \psi |\nabla \psi|^2 w \, dx \, dt + 2s\lambda^2 \iint_Q \eta\sigma^2 \nabla w \cdot \nabla (|\nabla \psi|^2) w \, dx \, dt \\
&\quad + 4s\lambda^2 \iint_Q \eta\sigma \nabla \sigma \cdot \nabla w |\nabla \psi|^2 w \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

Los últimos tres términos se absorben con  $A_1$  y  $A_2$  tomando  $s \geq C(\Omega, \omega)$ .

$$\begin{aligned}
I_{14} &= -\frac{1}{4} \iint_Q e^{2s\varphi} \sigma a \Delta w w^3 \, dx \, dt \\
&= -\frac{1}{4} \iint_{\Sigma} e^{2s\varphi} \sigma a \nabla w \cdot n w^3 \, d\sigma \, dt - \frac{1}{8} s\lambda \iint_{\Sigma} e^{2s\varphi} \sigma a \eta |w|^4 \nabla \psi \cdot n \, d\sigma \, dt \\
&\quad + \frac{1}{4} \iint_Q e^{2s\varphi} \sigma w^3 \nabla a \cdot \nabla w \, dx \, dt \\
&\quad + \frac{3}{4} \iint_Q e^{2s\varphi} \sigma a |\nabla w|^2 w^2 \, dx \, dt \\
&\quad + \frac{1}{8} s\lambda \iint_Q e^{2s\varphi} \eta |w|^4 (\lambda \sigma a |\nabla \psi|^2 + \sigma a \Delta \psi + \sigma \nabla a \cdot \nabla \psi + a \nabla \sigma \cdot \nabla \psi) \, dx \, dt \\
&\quad - \frac{1}{4} s^2 \lambda^2 \iint_Q e^{2s\varphi} \eta^2 \sigma |\nabla \psi|^2 a |w|^4 \, dx \, dt + \frac{1}{4} \iint_Q a \nabla \sigma \cdot \nabla w e^{2s\varphi} w^3 \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

El tercer y último término se absorbe con  $A_2$  y  $A_4$  para  $s \geq C(a_0, a_1, \sigma_0, \sigma_1)$ , el cuarto término es positivo y el quinto término se absorbe con  $A_3$  tomando  $s \geq C(\Omega, \omega, a_1, \sigma_1)$ .

$$I_{21} = -s^2\lambda^2 \iint_Q \eta^2 \sigma |\nabla \psi|^2 w w_t dx dt = s^2\lambda^2 \iint_Q \eta \eta_t \sigma |\nabla \psi|^2 |w|^2 dx dt.$$

Como  $|\eta_t| \leq C(T)\eta^2$ , este término se absorbe con  $A_1$  tomando  $s \geq C(\Omega, \omega, T, \sigma_1)$ .

$$\begin{aligned} I_{22} &= -2s^3\lambda^3 \iint_Q \eta^3 \sigma^2 |\nabla \psi|^2 w \nabla \psi \cdot \nabla w dx dt \\ &= -s^3\lambda^3 \iint_{\Sigma} \eta^3 \sigma^2 |\nabla \psi|^2 \nabla \psi \cdot n |w|^2 d\sigma dt \\ &+ s^3\lambda^3 \iint_Q \eta^3 \sigma^2 \nabla \cdot (|\nabla \psi|^2 \nabla \psi) |w|^2 dx dt + 3s^3\lambda^4 \iint_Q \eta^3 \sigma^2 |\nabla \psi|^4 |w|^2 dx dt \\ &+ 2s^3\lambda^3 \iint_Q \eta^3 \sigma |\nabla \psi|^2 \nabla \sigma \cdot \nabla \psi |w|^2. \end{aligned}$$

El segundo y último término se absorbe tomando  $\lambda \geq C(\Omega, \omega)$ .

$$I_{23} = -2s^3\lambda^4 \iint_Q \eta^3 \sigma^2 |\nabla \psi|^4 |w|^2 dx dt.$$

$$I_{24} = -\frac{1}{4}s^2\lambda^2 \iint_Q e^{2s\varphi} \eta^2 \sigma |\nabla \psi|^2 a |w|^4 dx dt.$$

$$I_{31} = s \iint_Q \varphi_t w w_t dx dt = -\frac{s}{2} \iint_Q \varphi_{tt} |w|^2 dx dt.$$

Como  $|\varphi_{tt}| \leq C(T)e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}\eta^3$ , esta integral se absorbe con  $A_1$  para  $s \geq C(\Omega, \omega, T)e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}$ .

$$\begin{aligned} I_{32} &= 2s^2\lambda \iint_Q \eta \sigma \varphi_t w \nabla \psi \cdot \nabla w dx dt = s^2\lambda \iint_{\Sigma} \eta \sigma \varphi_t \nabla \psi \cdot n |w|^2 d\sigma dt \\ &- s^2\lambda \iint_Q \eta \sigma \Delta \psi \varphi_t |w|^2 dx dt + s^2\lambda^2 \iint_Q \eta \eta_t \sigma |\nabla \psi|^2 |w|^2 dx dt \\ &- s^2\lambda^2 \iint_Q \eta \sigma \varphi_t |\nabla \psi|^2 |w|^2 dx dt - s^2\lambda \iint_Q \eta \varphi_t \nabla \sigma \cdot \nabla \psi |w|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Como  $|\varphi_t| \leq C(T)e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}\eta^2$ , todos los términos excepto el primero se absorben con  $A_1$  para  $s \geq C(\Omega, \omega, T, \sigma_1)e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}$ .

$$I_{33} = 2s^2\lambda^2 \iint_Q \eta \sigma \varphi_t |\nabla \psi|^2 |w|^2 dx dt.$$

Esta integral también se absorbe con  $A_1$  para  $s \geq C(\Omega, \omega, T, \sigma_1)e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}$ . Tenemos

$$I_{34} = \frac{1}{4}s \iint_Q e^{2s\varphi} \varphi_t a |w|^4 dx dt$$

y

$$I_{41} = \frac{3}{4} \iint_Q e^{2s\varphi} a w^3 w_t \, dx \, dt = -\frac{3}{8} s \iint_Q e^{2s\varphi} \varphi_t a w^4 \, dx \, dt.$$

Estas dos integrales se absorben con  $A_3$  para  $s \geq C(\Omega, \omega, T, a_1) e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}$ .

$$\begin{aligned} I_{42} &= \frac{3}{2} s \lambda \iint_Q e^{2s\varphi} \eta \sigma a w^3 \nabla \psi \cdot \nabla w \, dx \, dt = \frac{3}{8} s \lambda \iint_\Sigma e^{2s\varphi} a \eta \sigma \nabla \psi \cdot n |w|^4 \, d\sigma \, dt \\ &\quad - \frac{3}{8} s \lambda \iint_Q e^{2s\varphi} \eta (\lambda \sigma a |\nabla \psi|^2 + \sigma a \Delta \psi + \sigma \nabla a \cdot \nabla \psi + a \nabla \sigma \cdot \nabla \psi) |w|^4 \, dx \, dt \\ &\quad + \frac{3}{4} s^2 \lambda^2 \iint_Q e^{2s\varphi} \eta^2 \sigma |\nabla \psi|^2 a |w|^4 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

El segundo término se absorbe con  $A_3$  para  $s \geq C(\Omega, \omega, a_1, \sigma_1)$ .

$$I_{43} = \frac{3}{2} s \lambda^2 \iint_Q e^{2s\varphi} \eta \sigma |\nabla \psi|^2 a w^4 \, dx \, dt.$$

Este término se absorbe con  $A_3$  tomando  $s \geq C(\Omega, \omega, a_1 \sigma_1)$ . Finalmente,

$$I_{44} = \frac{3}{16} \iint_Q e^{4s\varphi} a^2 |w|^6 \, dx \, dt.$$

Denotamos por  $I_B$  los términos de borde obtenidos en el cálculo de estas integrales

$$\begin{aligned} I_B &= - \iint_\Sigma \sigma \nabla w \cdot n w_t \, d\sigma \, dt - 2s\lambda \iint_\Sigma \eta \sigma^2 |\nabla w \cdot n|^2 \nabla \psi \cdot n \, d\sigma \, dt \\ &\quad + s\lambda \iint_\Sigma \eta \sigma^2 |\nabla w|^2 \nabla \psi \cdot n \, d\sigma \, dt \\ &\quad - 2s\lambda^2 \iint_\Sigma \eta \sigma^2 \nabla w \cdot n |\nabla \psi|^2 w \, d\sigma \, dt - \frac{1}{4} \iint_\Sigma e^{2s\varphi} \sigma a \nabla w \cdot n w^3 \, d\sigma \, dt \\ &\quad - \frac{1}{8} s \lambda \iint_\Sigma e^{2s\varphi} \sigma a \eta |w|^4 \nabla \psi \cdot n \, d\sigma \, dt \\ &\quad - s^3 \lambda^3 \iint_\Sigma \eta^3 \sigma^2 |\nabla \psi|^2 \nabla \psi \cdot n |w|^2 \, d\sigma \, dt + s^2 \lambda \iint_\Sigma \eta \sigma \varphi_t \nabla \psi \cdot n |w|^2 \, d\sigma \, dt \\ &\quad + \frac{3}{8} s \lambda \iint_\Sigma e^{2s\varphi} \sigma a \eta \nabla \psi \cdot n |w|^4 \, d\sigma \, dt \end{aligned}$$

Juntando todas estas integrales y reemplazando  $H(w)$  por su definición, (4.9) se convierte en, para  $\lambda \geq C(\Omega, \omega)$  y  $s \geq C(\Omega, \omega, T, a_0, a_1, \sigma_0, \sigma_1) e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}$

$$\begin{aligned} &\|P_1(w)\|_{L^2(Q)}^2 + \|P_2(w)\|_{L^2(Q)}^2 + s^3 \lambda^4 \iint_Q \eta^3 |w|^2 \, dx \, dt + s \lambda^2 \iint_Q \eta |\nabla w|^2 \, dx \, dt \\ &\quad + s^2 \lambda^2 \iint_Q \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4 \, dx \, dt + \iint_Q e^{4s\varphi} a^2 |w|^6 \, dx \, dt + 2I_B \leq C \left( \iint_Q e^{-2s\varphi} |G|^2 \, dx \, dt \right. \\ &\quad \left. + \iint_{(0,T) \times \omega'} (s^3 \lambda^4 \eta^3 |w|^2 + s \lambda^2 \eta |\nabla w|^2 + s^2 \lambda^2 \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4) \, dx \, dt \right). \end{aligned}$$

La última parte de esta etapa es similar a la prueba para la ecuación del calor. Para empezar, las primeras dos normas permiten obtener estimaciones para  $w_t$  y  $\Delta w$ . En efecto, para  $s \geq C(\Omega, \omega, T)e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}$ ,

$$\iint_Q \frac{1}{s\eta} \sigma^2 |\Delta w|^2 dx dt \leq C \left( \|P_1(w)\|_{L^2(Q)}^2 + A_1 + \iint_Q e^{4s\varphi} a^2 |w|^6 dx dt \right)$$

y

$$\iint_Q \frac{1}{s\eta} |w_t|^2 dx dt \leq C \left( \|P_2(w)\|_{L^2(Q)}^2 + A_1 + A_2 + \iint_Q e^{4s\varphi} a^2 |w|^6 dx dt \right).$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} & \iint_Q \frac{1}{s\eta} (|\Delta w|^2 + |w_t|^2) dx dt + s^3 \lambda^4 \iint_Q \eta^3 |w|^2 dx dt + s\lambda^2 \iint_Q \eta |\nabla w|^2 dx dt \\ & + s^2 \lambda^2 \iint_Q \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4 dx dt + \iint_Q e^{4s\varphi} a^2 |w|^6 dx dt + 2I_B \leq C \left( \iint_Q e^{-2s\varphi} |G|^2 dx dt \right. \\ & \left. + \iint_{(0,T) \times \omega'} (s^3 \lambda^4 \eta^3 |w|^2 + s\lambda^2 \eta |\nabla w|^2 + s^2 \lambda^2 \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4) dx dt \right). \end{aligned}$$

Ahora, podemos eliminar el término en  $\nabla w$  en la integral sobre  $(0, T) \times \omega'$  en el lado derecho de esta desigualdad. Para esto, tomemos una función  $\rho_0$  que satisface

$$\rho_0 \in C_c^2(\omega), \quad \rho_0 = 1 \text{ en } \omega' \text{ y } 0 \leq \rho_0 \leq 1.$$

Notamos que, luego de algunas integraciones por parte,

$$\begin{aligned} & s\lambda^2 \iint_{(0,T) \times \omega'} \eta |\nabla w|^2 dx dt \leq s\lambda^2 \iint_{(0,T) \times \omega} \eta \rho_0 \nabla w \cdot \nabla w dx dt \\ & = -s\lambda^2 \iint_{(0,T) \times \omega} \eta \rho_0 \Delta w w dx dt \\ & - s\lambda^2 \iint_{(0,T) \times \omega} \eta w \nabla \rho_0 \cdot \nabla w dx dt - s\lambda^3 \iint_{(0,T) \times \omega} \eta \rho_0 w \nabla \psi \cdot \nabla w dx dt \\ & \leq \epsilon \iint_Q \frac{1}{s\eta} |\Delta w|^2 dx dt + C_\epsilon \iint_{(0,T) \times \omega} s^3 \lambda^4 \eta^3 |w|^2 dx dt, \end{aligned}$$

para cualquier  $\epsilon > 0$ . Así, obtenemos la siguiente desigualdad, para  $\lambda \geq C(\Omega, \omega)$  y  $s \geq C(\Omega, \omega, T, a_0, a_1, \sigma_0, \sigma_1)e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}$

$$\begin{aligned} & \iint_Q \frac{1}{s\eta} (|\Delta w|^2 + |w_t|^2) dx dt + s^3 \lambda^4 \iint_Q \eta^3 |w|^2 dx dt + s\lambda^2 \iint_Q \eta |\nabla w|^2 dx dt \\ & + s^2 \lambda^2 \iint_Q \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4 dx dt + \iint_Q e^{4s\varphi} a^2 |w|^6 dx dt + 2I_B \leq C \left( \iint_Q e^{-2s\varphi} |G|^2 dx dt \right. \\ & \left. + \iint_{(0,T) \times \omega} (s^3 \lambda^4 \eta^3 |w|^2 + s^2 \lambda^2 \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4) dx dt \right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

El siguiente paso es deshacerse de los términos de borde.

### Los términos de borde

Para deshacerse de los términos de borde en el caso de condiciones de borde Neumann homogéneas, procedemos como en [FI96]. Definimos nuevas funciones de peso y hacemos los mismos cálculos que antes. Sean, para todo  $(t, x) \in Q$

$$\tilde{\varphi}(t, x) = \frac{e^{2\lambda\|\psi\|_\infty} - e^{-\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}, \quad \tilde{\eta}(t, x) = \frac{e^{-\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}.$$

Con estos pesos, se tiene  $\nabla\tilde{\varphi} = \lambda\nabla\psi\tilde{\eta}$  y  $\nabla\tilde{\eta} = -\lambda\nabla\psi\tilde{\eta}$ . Definimos también

$$\tilde{w} = e^{-s\tilde{\varphi}}u.$$

Así,  $\tilde{w}$  es solución de

$$\tilde{P}_1(\tilde{w}) + \tilde{P}_2(\tilde{w}) = \tilde{H}(\tilde{w})$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(\tilde{w}) &= -\sigma\Delta\tilde{w} - s^2\lambda^2\tilde{\eta}^2\sigma|\nabla\psi|^2\tilde{w} + s\tilde{\varphi}_t\tilde{w} + \frac{3a}{4}e^{2s\tilde{\varphi}}\tilde{w}^3, \\ \tilde{P}_2(\tilde{w}) &= \tilde{w}_t - 2s\lambda\tilde{\eta}\sigma\nabla\psi \cdot \nabla\tilde{w} + 2s\lambda^2\tilde{\eta}\sigma|\nabla\psi|^2\tilde{w} + \frac{a}{4}e^{2s\tilde{\varphi}}\tilde{w}^3, \\ \tilde{H}(\tilde{w}) &= e^{-s\tilde{\varphi}}G + s\lambda\tilde{\eta}\sigma\Delta\psi\tilde{w} + s\lambda^2\tilde{\eta}\sigma|\nabla\psi|^2\tilde{w}. \end{aligned}$$

Procediendo exactamente como en la primera parte, obtenemos para  $\lambda \geq C(\Omega, \omega)$  y  $s \geq C(\Omega, \omega, T, a_0, a_1, \sigma_0, \sigma_1)e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}$

$$\begin{aligned} &\iint_Q \frac{1}{s\tilde{\eta}}(|\Delta\tilde{w}|^2 + |\tilde{w}_t|^2) dx dt + s^3\lambda^4 \iint_Q \tilde{\eta}^3|\tilde{w}|^2 dx dt + s\lambda^2 \iint_Q \tilde{\eta}|\nabla\tilde{w}|^2 dx dt \\ &+ s^2\lambda^2 \iint_Q \tilde{\eta}^2 e^{2s\tilde{\varphi}}|\tilde{w}|^4 dx dt + \iint_Q e^{4s\tilde{\varphi}}a^2|\tilde{w}|^6 dx dt + 2\tilde{I}_B \leq C \left( \iint_Q e^{-2s\tilde{\varphi}}|G|^2 dx dt \right. \\ &\left. + \iint_{(0,T)\times\omega} (s^3\lambda^4\tilde{\eta}^3|\tilde{w}|^2 + s^2\lambda^2\tilde{\eta}^2 e^{2s\tilde{\varphi}}|\tilde{w}|^4) dx dt \right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{I}_B &= - \iint_\Sigma \sigma\nabla\tilde{w} \cdot n\tilde{w}_t d\sigma dt + 2s\lambda \iint_\Sigma \tilde{\eta}\sigma^2|\nabla\tilde{w} \cdot n|^2\nabla\psi \cdot n d\sigma dt \\ &- s\lambda \iint_\Sigma \tilde{\eta}\sigma^2|\nabla\tilde{w}|^2\nabla\psi \cdot n d\sigma dt \\ &- 2s\lambda^2 \iint_\Sigma \tilde{\eta}\sigma^2\nabla\tilde{w} \cdot n|\nabla\psi|^2\tilde{w} d\sigma dt - \frac{1}{4} \iint_\Sigma e^{2s\tilde{\varphi}}\sigma a\nabla\tilde{w} \cdot n\tilde{w}^3 d\sigma dt \\ &+ \frac{1}{8}s\lambda \iint_\Sigma e^{2s\tilde{\varphi}}\sigma a\tilde{\eta}|\tilde{w}|^4\nabla\psi \cdot n d\sigma dt \\ &+ s^3\lambda^3 \iint_\Sigma \tilde{\eta}^3\sigma^2|\nabla\psi|^2\nabla\psi \cdot n|\tilde{w}|^2 d\sigma dt - s^2\lambda \iint_\Sigma \tilde{\eta}\sigma\tilde{\varphi}_t\nabla\psi \cdot n|\tilde{w}|^2 d\sigma dt \\ &- \frac{3}{8}s\lambda \iint_\Sigma e^{2s\tilde{\varphi}}\sigma a\tilde{\eta}\nabla\psi \cdot n|\tilde{w}|^4 d\sigma dt. \end{aligned}$$



Sobre  $\partial\Omega$ , como  $\psi = 0$ , se tiene que  $\tilde{w} = w$ . Más aún, como  $\nabla u \cdot n = 0$ ,

$$\nabla w \cdot n = s\lambda\eta e^{-s\varphi} \nabla\psi \cdot nu \text{ y } \nabla\tilde{w} \cdot n = -s\lambda\tilde{\eta} e^{-s\tilde{\varphi}} \nabla\psi \cdot nu.$$

Luego,  $\nabla w \cdot n = -\nabla\tilde{w} \cdot n$  sobre  $\Sigma$ . Notamos también que  $\nabla w \cdot \tau = e^{-s\varphi} \nabla u \cdot \tau$  y  $\nabla\tilde{w} \cdot \tau = e^{-s\tilde{\varphi}} \nabla u \cdot \tau$ , por lo que  $|\nabla w| = |\nabla\tilde{w}|$ . Gracias a estas fórmulas sobre  $\Sigma$ , obtenemos que  $I_B + \tilde{I}_B = 0$ . Ahora, sumando (4.11) y (4.12) deducimos que, para  $\lambda \geq C(\Omega, \omega)$  y  $s \geq C(\Omega, \omega, T, a_0, a_1, \sigma_0, \sigma_1) e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}$

$$\begin{aligned} & \iint_Q \frac{1}{s\eta} (|\Delta w|^2 + |w_t|^2) dx dt + s^3\lambda^4 \iint_Q \eta^3 |w|^2 dx dt + s\lambda^2 \iint_Q \eta |\nabla w|^2 dx dt \\ & + s^2\lambda^2 \iint_Q \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4 dx dt + \iint_Q e^{4s\varphi} a^2 |w|^6 dx dt \leq C \left( \iint_Q (e^{-2s\varphi} + e^{-2s\tilde{\varphi}}) |G|^2 dx dt \right. \\ & \left. + \iint_{(0,T) \times \omega} (s^3\lambda^4 (\eta^3 |w|^2 + \tilde{\eta}^3 |\tilde{w}|^2) + s^2\lambda^2 (\eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4 + \tilde{\eta}^2 e^{2s\tilde{\varphi}} |\tilde{w}|^4)) dx dt \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para el lado derecho, notamos que, como  $\tilde{\eta} \leq \eta$ ,  $\tilde{\varphi} \geq \varphi$  y  $\tilde{w} \leq w$ , se tiene

$$(e^{-2s\varphi} + e^{-2s\tilde{\varphi}}) |G|^2 \leq 2e^{-2s\varphi} |G|^2$$

y

$$\eta^3 |w|^2 + \tilde{\eta}^3 |\tilde{w}|^2 \leq 2\eta^3 |w|^2, \quad \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4 + \tilde{\eta}^2 e^{2s\tilde{\varphi}} |\tilde{w}|^4 \leq 2\eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4.$$

La desigualdad (4.13) se convierte así en

$$\begin{aligned} & \iint_Q \frac{1}{s\eta} (|\Delta w|^2 + |w_t|^2) dx dt + s^3\lambda^4 \iint_Q \eta^3 |w|^2 dx dt + s\lambda^2 \iint_Q \eta |\nabla w|^2 dx dt \\ & + s^2\lambda^2 \iint_Q \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4 dx dt + \iint_Q e^{4s\varphi} a^2 |w|^6 dx dt \leq C \left( \iint_Q e^{-2s\varphi} |G|^2 dx dt \right. \\ & \left. + \iint_{(0,T) \times \omega} (s^3\lambda^4 \eta^3 |w|^2 + s^2\lambda^2 \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4) dx dt \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

### Fin de la demostración

Sólo falta volver a la variable original  $u$  y recuperar la desigualdad para  $u$  solución de (4.6). Notemos que

$$s\lambda^2 \eta e^{-2s\varphi} |\nabla u|^2 \leq C (s\lambda^2 \eta |\nabla w|^2 + s^3\lambda^4 \eta^3 |w|^2),$$

$$\frac{e^{-2s\varphi}}{s\eta} |u_t|^2 \leq C \left( \frac{1}{s\eta} |w_t|^2 + \frac{s\varphi_t^2}{\eta} |w|^2 \right) \leq C \left( \frac{1}{s\eta} |w_t|^2 + s\eta^3 |w|^2 \right),$$

y

$$\frac{e^{-2s\varphi}}{s\eta} |\Delta u|^2 \leq C \left( \frac{1}{s\eta} |\Delta w|^2 + s\lambda^2 \eta |\nabla w|^2 + s^3\lambda^4 \eta^3 |w|^2 \right).$$

Con esto, se tiene la desigualdad ( $DC_{BSw}$ ) para  $u$  solución de (4.7). Ahora notemos que

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = \nabla \sigma \cdot \nabla u + \sigma \Delta u.$$

Así, la descomposición de (4.8) queda como

$$\begin{aligned} P_1(w) &= -\sigma \Delta w - s^2 \lambda^2 \eta^2 \sigma |\nabla \psi|^2 w + s \varphi_t w + \frac{3a}{4} e^{2s\varphi} w^3, \\ P_2(w) &= w_t + 2s \lambda \eta \sigma \nabla \psi \cdot \nabla w + 2s \lambda^2 \eta \sigma |\nabla \psi|^2 w + \frac{a}{4} e^{2s\varphi} w^3, \\ H(w) &= e^{-s\varphi} G - s \lambda \eta \sigma \Delta \psi w + s \lambda^2 \eta \sigma |\nabla \psi|^2 w + \nabla \sigma \cdot \nabla w - s \lambda \eta \nabla \sigma \cdot \nabla \psi w, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\nabla u = e^{s\varphi} \nabla w - s \lambda \eta e^{s\varphi} \nabla \psi w$  para obtener los dos términos extras. Estos términos se absorben con  $A_1$  y  $A_2$  para  $s \geq C(\Omega, \omega, \sigma_0, \sigma_1)$ . Esto verifica la desigualdad ( $DC_{BSw}$ ) para (4.6) y concluye la demostración del teorema 4.2.1.  $\square$

#### 4.2.2. Caso de observaciones en $(0, T) \times \gamma$

Consideramos el caso de observaciones de borde Dirichlet y una función  $\psi$  en  $\Omega$  tal que

$$\psi \in C^2(\bar{\Omega}), \psi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \setminus \gamma', \psi > 0 \text{ sobre } \gamma', |\nabla \psi| > 0 \text{ in } \bar{\Omega},$$

donde  $\gamma' \subset \subset \gamma \subset \partial\Omega$ . Sea  $\Sigma_\gamma = (0, T) \times \gamma$  y las funciones de peso (3.5) y (3.6). Se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.2.** *Existe  $\bar{\lambda}$  y  $C$  dependiendo sólo de  $\Omega$  y  $\gamma$  tales que, para cualquier  $\lambda \geq \bar{\lambda}$ ,  $s \geq \bar{s} = C(\Omega, \gamma, T, a_0, a_1, \sigma_0, \sigma_1) e^{2\lambda \|\psi\|_\infty}$ , para cualquier  $G \in L^2(Q)$  y  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , la solución  $u$  de (4.6) satisface*

$$\begin{aligned} & \iint_Q e^{-2s\varphi} \left( \frac{1}{s\eta} (|u_t|^2 + |\Delta u|^2) + a^2 |u|^6 + s \lambda^2 \eta |\nabla u|^2 + s^3 \lambda^4 \eta^3 |u|^2 + s^2 \lambda^2 \eta^2 |u|^4 \right) dx dt \\ & \leq C \left( \iint_{\Sigma_\gamma} e^{-2s\varphi} (s^3 \lambda^4 \eta^3 |u|^2 + s^2 \lambda^2 \eta^2 |u|^4) dx dt + \iint_Q e^{-2s\varphi} |G|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (DC_{BS\gamma})$$

*Demostración.* La demostración es la misma que para el caso de observaciones internas. Sólo cambia la forma en que se manejan los términos de borde.

Si repetimos los pasos anteriores, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} & \iint_Q \frac{1}{s\eta} (|\Delta w|^2 + |w_t|^2) dx dt + s^3 \lambda^4 \iint_Q \eta^3 |w|^2 dx dt + s \lambda^2 \iint_Q \eta |\nabla w|^2 dx dt \\ & + s^2 \lambda^2 \iint_Q \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4 dx dt + \iint_Q e^{4s\varphi} a^2 |w|^6 dx dt + 2I_B \leq C \iint_Q e^{-2s\varphi} |G|^2 dx dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
& \iint_Q \frac{1}{s\tilde{\eta}} (|\Delta \tilde{w}|^2 + |\tilde{w}_t|^2) dx dt + s^3 \lambda^4 \iint_Q \tilde{\eta}^3 |\tilde{w}|^2 dx dt + s \lambda^2 \iint_Q \tilde{\eta} |\nabla \tilde{w}|^2 dx dt \\
& + s^2 \lambda^2 \iint_Q \tilde{\eta}^2 e^{2s\tilde{\varphi}} |\tilde{w}|^4 dx dt + \iint_Q e^{4s\tilde{\varphi}} a^2 |\tilde{w}|^6 dx dt + 2\tilde{I}_B \leq C \iint_Q e^{-2s\tilde{\varphi}} |G|^2 dx dt
\end{aligned} \tag{4.16}$$

con los términos de borde

$$\begin{aligned}
I_B &= - \iint_{\Sigma} \sigma \nabla w \cdot n w_t d\sigma dt - 2s\lambda \iint_{\Sigma} \eta \sigma^2 |\nabla w \cdot n|^2 \nabla \psi \cdot n d\sigma dt \\
&+ s\lambda \iint_{\Sigma} \eta \sigma^2 |\nabla w|^2 \nabla \psi \cdot n d\sigma dt \\
&- 2s\lambda^2 \iint_{\Sigma} \eta \sigma^2 \nabla w \cdot n |\nabla \psi|^2 w d\sigma dt - \frac{1}{4} \iint_{\Sigma} e^{2s\varphi} \sigma a \nabla w \cdot n w^3 d\sigma dt \\
&- \frac{1}{8} s\lambda \iint_{\Sigma} e^{2s\varphi} \sigma a \eta |w|^4 \nabla \psi \cdot n d\sigma dt \\
&- s^3 \lambda^3 \iint_{\Sigma} \eta^3 \sigma^2 |\nabla \psi|^2 \nabla \psi \cdot n |w|^2 d\sigma dt + s^2 \lambda \iint_{\Sigma} \eta \sigma \varphi_t \nabla \psi \cdot n |w|^2 d\sigma dt \\
&+ \frac{3}{8} s\lambda \iint_{\Sigma} e^{2s\varphi} \sigma a \eta \nabla \psi \cdot n |w|^4 d\sigma dt \\
\tilde{I}_B &= - \iint_{\Sigma} \sigma \nabla \tilde{w} \cdot n \tilde{w}_t d\sigma dt + 2s\lambda \iint_{\Sigma} \tilde{\eta} \sigma^2 |\nabla \tilde{w} \cdot n|^2 \nabla \psi \cdot n d\sigma dt \\
&- s\lambda \iint_{\Sigma} \tilde{\eta} \sigma^2 |\nabla \tilde{w}|^2 \nabla \psi \cdot n d\sigma dt \\
&- 2s\lambda^2 \iint_{\Sigma} \tilde{\eta} \sigma^2 \nabla \tilde{w} \cdot n |\nabla \psi|^2 \tilde{w} d\sigma dt - \frac{1}{4} \iint_{\Sigma} e^{2s\tilde{\varphi}} \sigma a \nabla \tilde{w} \cdot n \tilde{w}^3 d\sigma dt \\
&+ \frac{1}{8} s\lambda \iint_{\Sigma} e^{2s\tilde{\varphi}} \sigma a \tilde{\eta} |\tilde{w}|^4 \nabla \psi \cdot n d\sigma dt \\
&+ s^3 \lambda^3 \iint_{\Sigma} \tilde{\eta}^3 \sigma^2 |\nabla \psi|^2 \nabla \psi \cdot n |\tilde{w}|^2 d\sigma dt - s^2 \lambda \iint_{\Sigma} \tilde{\eta} \sigma \tilde{\varphi}_t \nabla \psi \cdot n |\tilde{w}|^2 d\sigma dt \\
&- \frac{3}{8} s\lambda \iint_{\Sigma} e^{2s\tilde{\varphi}} \sigma a \tilde{\eta} \nabla \psi \cdot n |\tilde{w}|^4 d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Notemos que como no se tiene que  $\psi = 0$  sobre todo  $\partial\Omega$ , no podemos asegurar que  $I_B + \tilde{I}_B = 0$  como en el caso anterior. Como  $\psi = 0$  sobre  $\partial\Omega \setminus \gamma'$ , separamos estas integrales en los bordes  $\partial\Omega \setminus \gamma'$  y  $\gamma'$ . Las llamamos  $I_B^{\partial\Omega \setminus \gamma'}$ ,  $\tilde{I}_B^{\partial\Omega \setminus \gamma'}$  y  $I_B^{\gamma'}$ ,  $\tilde{I}_B^{\gamma'}$  respectivamente. De esta

forma, se tiene que  $I_B^{\partial\Omega\setminus\gamma'} + \tilde{I}_B^{\partial\Omega\setminus\gamma'} = 0$ .

$$\begin{aligned}
I_B' + \tilde{I}_B' &= \\
&- \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma \left( \frac{\partial w}{\partial n} w_t + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} \tilde{w}_t \right) d\sigma dt \\
&- 2s\lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \left( \eta \frac{\partial w}{\partial n} \nabla \psi \cdot \nabla w - \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} \nabla \psi \cdot \nabla \tilde{w} \right) d\sigma dt \\
&+ s\lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial n} (\eta |\nabla w|^2 - \tilde{\eta} |\nabla \tilde{w}|^2) d\sigma dt \\
&- 2s\lambda^2 \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial n} \left( \eta \frac{\partial w}{\partial n} w + \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} \tilde{w} \right) d\sigma dt \\
&- \frac{1}{4} \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma a \left( \frac{\partial w}{\partial n} e^{2s\varphi} w^3 + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} e^{2s\tilde{\varphi}} \tilde{w}^3 \right) d\sigma dt \\
&- \frac{1}{8} s\lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma a \frac{\partial \psi}{\partial n} (\eta e^{2s\varphi} |w|^4 - \tilde{\eta} e^{2s\tilde{\varphi}} |\tilde{w}|^4) d\sigma dt \\
&- s^3 \lambda^3 \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial n} |\nabla \psi|^2 (\eta^3 |w|^2 - \tilde{\eta}^3 |\tilde{w}|^2) d\sigma dt \\
&+ s^2 \lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma \frac{\partial \psi}{\partial n} (\eta \varphi_t |w|^2 - \tilde{\eta} \tilde{\varphi}_t |\tilde{w}|^2) d\sigma dt \\
&- \frac{3}{8} s\lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma a \frac{\partial \psi}{\partial n} (\eta e^{2s\varphi} |w|^4 - \tilde{\eta} e^{2s\tilde{\varphi}} |\tilde{w}|^4) d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Notemos que como  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial n} = s\lambda\eta \frac{\partial \psi}{\partial n} w \text{ y } \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} = -s\lambda\tilde{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial n} \tilde{w}.$$

Si enumeramos los términos anteriores por  $I_i$ ,  $i = 1 \dots 9$ , encontramos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -s\lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma \frac{\partial \psi}{\partial n} (\eta w w_t - \tilde{\eta} \tilde{w} \tilde{w}_t) d\sigma dt \\
&= -\frac{s\lambda}{2} \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma \frac{\partial \psi}{\partial n} \left( \eta \frac{\partial}{\partial t} |w|^2 - \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{w}|^2 \right) d\sigma dt \\
&= \frac{s\lambda}{2} \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma \frac{\partial \psi}{\partial n} (\eta_t |w|^2 - \tilde{\eta}_t |\tilde{w}|^2) d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Usando que sobre  $\gamma'$  se cumple que

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot n + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \cdot \tau,$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -2s\lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial n} \left( \eta \left| \frac{\partial w}{\partial n} \right|^2 - \tilde{\eta} \left| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} \right|^2 \right) d\sigma dt \\
&\quad - 2s\lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \left( \eta \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial \tau} - \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} \right) d\sigma dt \\
&= -2s^3\lambda^3 \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^3 (\eta^3 |w|^2 - \tilde{\eta}^3 |\tilde{w}|^2) d\sigma dt \\
&\quad - 2s^2\lambda^2 \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \left( \eta^2 \frac{\partial w}{\partial \tau} w + \tilde{\eta}^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} \tilde{w} \right) d\sigma dt,
\end{aligned}$$

y como se tiene que

$$|\nabla w|^2 = \left| \frac{\partial w}{\partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial w}{\partial \tau} \right|^2, \quad |\nabla \tilde{w}|^2 = \left| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} \right|^2,$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= s\lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial n} \left( \eta \left| \frac{\partial w}{\partial n} \right|^2 - \tilde{\eta} \left| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} \right|^2 \right) d\sigma dt \\
&\quad + s\lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \left( \eta \left| \frac{\partial w}{\partial \tau} \right|^2 - \tilde{\eta} \left| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} \right|^2 \right) d\sigma dt \\
&= s^3\lambda^3 \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^3 (\eta^3 |w|^2 - \tilde{\eta}^3 |\tilde{w}|^2) d\sigma dt \\
&\quad + s\lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial n} \left( \eta \left| \frac{\partial w}{\partial \tau} \right|^2 - \tilde{\eta} \left| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} \right|^2 \right) d\sigma dt
\end{aligned}$$

$$I_4 = -2s^2\lambda^3 \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|^2 (\eta^2 |w|^2 - \tilde{\eta}^2 |\tilde{w}|^2) d\sigma dt.$$

$$I_5 = -\frac{1}{4}s\lambda \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \sigma a \frac{\partial \psi}{\partial n} (\eta e^{2s\varphi} |w|^4 - \tilde{\eta} e^{2s\tilde{\varphi}} |\tilde{w}|^4) d\sigma dt.$$

Así, sumando (4.15) y (4.16) obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\iint_Q \frac{1}{s\eta} (|\Delta w|^2 + |w_t|^2) dx dt + s^3\lambda^4 \iint_Q \eta^3 |w|^2 dx dt + s\lambda^2 \iint_Q \eta |\nabla w|^2 dx dt \\
&+ s^2\lambda^2 \iint_Q \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4 dx dt + \iint_Q e^{4s\varphi} a^2 |w|^6 dx dt \leq C \iint_Q (e^{-2s\varphi} + e^{-2s\tilde{\varphi}}) |G|^2 dx dt \\
&+ C \iint_{\Sigma_{\gamma'}} (s^3\lambda^3 (\eta^3 |w|^2 + \tilde{\eta}^3 |\tilde{w}|^2) + s\lambda (\eta e^{2s\varphi} |w|^4 + \tilde{\eta} e^{2s\tilde{\varphi}} |\tilde{w}|^4)) d\sigma dt \\
&+ C \iint_{\Sigma_{\gamma'}} s\lambda \left( \eta \left| \frac{\partial w}{\partial \tau} \right|^2 + \tilde{\eta} \left| \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} \right|^2 \right) d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Ahora, antes de volver a la variable original, debemos estimar los términos con derivada tangencial. Para ello, tomemos una función  $\rho \in C^\infty(\bar{\Omega})$  tal que

$$\rho = 1 \text{ sobre } \gamma', \rho = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \setminus \gamma, 0 \leq \rho \leq 1 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

y definamos  $\bar{w} = \rho w$  y notemos que

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} = \rho \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} w.$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda s \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \left| \frac{\partial w}{\partial \tau} \right|^2 d\sigma dt &\leq \lambda s \iint_{\Sigma} \rho^2 \left| \frac{\partial w}{\partial \tau} \right|^2 d\sigma dt \\ &\leq C \lambda s \iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} \right|^2 d\sigma dt + C \lambda s \iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right|^2 |w|^2 d\sigma dt. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para tratar el primer término en (4.17), debemos usar un argumento de interpolación. Notemos que

$$\lambda s \iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} \right|^2 d\sigma dt \leq \lambda s \|\bar{w}\|_{L^2(H^1(\partial\Omega))}^2.$$

Usando un teorema de interpolación [AF03], tenemos que

$$\|\bar{w}\|_{L^2(H^1(\partial\Omega))} \leq C \|\bar{w}\|_{L^2(L^2(\partial\Omega))}^{1/3} \cdot \|\bar{w}\|_{L^2(H^{3/2}(\partial\Omega))}^{2/3}.$$

De esta forma, tomando  $\epsilon > 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda s \iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} \right|^2 d\sigma dt &\leq C \lambda s \|\bar{w}\|_{L^2(L^2(\partial\Omega))}^{2/3} \cdot \|\bar{w}\|_{L^2(H^{3/2}(\partial\Omega))}^{4/3} \\ &= C \left( \lambda \frac{s^{5/3}}{\epsilon^{2/3}} \|\bar{w}\|_{L^2(L^2(\partial\Omega))}^{2/3} \right) \left( \frac{\epsilon^{2/3}}{s^{2/3}} \|\bar{w}\|_{L^2(H^{3/2}(\partial\Omega))}^{4/3} \right) \\ &\leq C \left( \lambda^3 \frac{s^5}{\epsilon^2} \|\bar{w}\|_{L^2(L^2(\partial\Omega))}^2 + \frac{\epsilon}{s} \|\bar{w}\|_{L^2(H^{3/2}(\partial\Omega))}^2 \right), \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Young en la última desigualdad. Usando que  $\bar{w} = 0$  sobre  $(0, T) \times \partial\Omega \setminus \gamma$  y el teorema de trazas, obtenemos de esta última desigualdad que

$$\lambda s \iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} \right|^2 d\sigma dt \leq C \left( \lambda^3 \frac{s^5}{\epsilon^2} \|\bar{w}\|_{L^2(L^2(\gamma))}^2 + \frac{\epsilon}{s} \|\bar{w}\|_{L^2(H^2(\Omega))}^2 \right).$$

Volviendo a (4.17), junto con el hecho de que  $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$  sobre  $\partial\Omega \setminus \gamma$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda s \iint_{\Sigma_{\gamma'}} \left| \frac{\partial w}{\partial \tau} \right|^2 d\sigma dt &\leq C \left( \lambda^3 \frac{s^5}{\epsilon^2} \|\bar{w}\|_{L^2(L^2(\gamma))}^2 + \frac{\epsilon}{s} \|\bar{w}\|_{L^2(H^2(\Omega))}^2 \right) + C \lambda s \iint_{\Sigma_{\gamma'}} |w|^2 d\sigma dt \\ &\leq C \left( \lambda^3 \frac{s^5}{\epsilon^2} \|w\|_{L^2(L^2(\gamma))}^2 + \frac{\epsilon}{s} \|w\|_{L^2(H^2(\Omega))}^2 \right) + C \lambda s \iint_{\Sigma_{\gamma'}} |w|^2 d\sigma dt. \end{aligned}$$

Tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeño, podemos absorber el término  $\|w\|_{L^2(H^2(\Omega))}^2$ . Los otros términos pasan a ser parte del término de observación.

Ahora, como  $\tilde{\eta} \leq \eta$ ,  $\tilde{\varphi} \geq \varphi$  y  $\tilde{w} \leq w$ , se tiene

$$(e^{-2s\varphi} + e^{-2s\tilde{\varphi}})|G|^2 \leq 2e^{-2s\varphi}|G|^2$$

y

$$\eta^3|w|^2 + \tilde{\eta}^3|\tilde{w}|^2 \leq 2\eta^3|w|^2, \quad \eta^2 e^{2s\varphi}|w|^4 + \tilde{\eta}^2 e^{2s\tilde{\varphi}}|\tilde{w}|^4 \leq 2\eta^2 e^{2s\varphi}|w|^4,$$

con lo que se tiene que

$$\begin{aligned} & \iint_Q \frac{1}{s\eta} (|\Delta w|^2 + |w_t|^2) dx dt + s^3 \lambda^4 \iint_Q \eta^3 |w|^2 dx dt + s\lambda^2 \iint_Q \eta |\nabla w|^2 dx dt \\ & + s^2 \lambda^2 \iint_Q \eta^2 e^{2s\varphi} |w|^4 dx dt + \iint_Q e^{4s\varphi} a^2 |w|^6 dx dt \leq C \iint_Q e^{-2s\varphi} |G|^2 dx dt \\ & + C \iint_{\Sigma_\gamma} (s^3 \lambda^4 \eta^3 |w|^2 + s\lambda\eta e^{2s\varphi} |w|^4) d\sigma dt. \end{aligned}$$

Volviendo a la variable original de la misma forma que en la demostración del teorema 4.2.1, se concluye la demostración del teorema 4.2.2  $\square$

### 4.3. Un resultado de estabilidad

El resultado principal de este capítulo es el siguiente teorema:

**Teorema 4.3.1.** Sean  $\sigma = \sigma(x) \in W^{2,\infty}(\Omega)$  un parámetro desconocido y  $v = v(t, x)$  solución de (4.1) y supongamos que se cumple (4.2). Consideremos  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(x)$  y  $\bar{v} = \bar{v}(t, x)$  un parámetro y trayectoria de referencia regular de (4.1), y supongamos que

$$|\nabla \bar{v}(\theta) \cdot \nabla \psi| > \mu_0 > 0 \text{ en } \bar{\Omega},$$

para  $\theta \in (0, T)$  y sea  $\gamma \subset \partial\Omega$ . Entonces, se tiene que existe una constante  $C = C(\Omega, \gamma)$  tal que

$$\begin{aligned} \|\sigma - \bar{\sigma}\|_{H^1(\Omega)} \leq C & \left( \|v - \bar{v}\|_{H^1(0,T;L^2(\gamma))} + \|v - \bar{v}\|_{L^4(0,T;L^4(\gamma))}^2 \right. \\ & \left. + \|v(\theta) - \bar{v}(\theta)\|_{L^6(\Omega)}^3 + \|v(\theta) - \bar{v}(\theta)\|_{H^3(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

*Observación 4.3.2.* Es posible obtener un teorema similar para el caso de observaciones internas gracias al teorema 4.2.1. Sin embargo, por efecto del lema 3.1.4, sería necesario suponer conocido el parámetro  $\sigma$  en la zona de observación.

*Demostración.* La demostración es muy similar a la del teorema 3.1.7, pero aplicada al caso de observaciones de borde. Muchos de los cálculos los extraeremos de esa demostración.

Usando el método de Bukhgeim-Klibanov, definimos  $w = u_t$ . Derivando (4.6) con respecto a  $t$ , tenemos que

$$\begin{cases} w_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla w) = -3au^2w + \operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}_t) + g_t \equiv H & \text{en } Q \\ w(\theta) = \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(\theta)) - au^3(\theta) + \operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta)) + g(\theta) & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (4.18)$$

Para esta ecuación consideraremos la desigualdad de Carleman usual para la ecuación del calor  $DC_\gamma$ . Al igual que antes, dividimos la demostración en etapas:

### Paso 1

Utilizando el Corolario 3.2.4 con el término  $\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta))$  en (4.18) y usando que  $\frac{\partial\bar{v}(\theta)}{\partial n} = 0$  (por condición de borde en (4.3)), se tiene

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega} (p(x)^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} |\nabla\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Debemos acotar ahora los términos del lado derecho de (4.19).

### Paso 1.a

Primero, por (4.18):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |w(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} |u(\theta)|^6 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} |\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} |g(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

Por la definición de  $g$  en (4.5) y por la regularidad de  $\sigma$ ,  $a$  y  $\alpha$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |w(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} |u(\theta)|^6 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} \sum_{1 \leq \beta \leq 2} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} |u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} |u(\theta)|^4 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned} \quad (4.20)$$



**Paso 1.b**

Veamos ahora que

$$\nabla \operatorname{div}(p(x)\nabla \bar{v}(\theta)) = \nabla w(\theta) + 3au^2(\theta)\nabla u(\theta) + u^3(\theta)\nabla a - \nabla \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(\theta)) - \nabla g(\theta),$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \operatorname{div}(p(x)\nabla \bar{v}(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |\nabla w(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ C \int_{\Omega} |u(\theta)|^6 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} (|u(\theta)|^2 + |\nabla u(\theta)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ C \int_{\Omega} |\nabla \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} |\nabla g(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \nabla g &= \nabla a(2(\alpha + 1)\bar{v} - \alpha - 3\bar{v}^2)u + \nabla a(\alpha + 1 - 3\bar{v})u^2 \\ &+ a(2\nabla \alpha \bar{v} + 2(\alpha + 1)\nabla \bar{v} - \nabla \alpha - 6\bar{v}\nabla \bar{v})u + a(\nabla \alpha - 3\nabla \bar{v})u^2 \\ &+ a(2(\alpha + 1)\bar{v} - \alpha - 3\bar{v}^2)\nabla u + 2a(\alpha + 1 - 3\bar{v})u\nabla u. \end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \operatorname{div}(p(x)\nabla \bar{v}(\theta))|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} |\nabla w(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ C \int_{\Omega} |u(\theta)|^6 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} \sum_{1 \leq \beta \leq 3} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ C \int_{\Omega} (|u(\theta)|^2 + |\nabla u(\theta)|^2 + |u(\theta)|^4) e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \quad (4.21) \end{aligned}$$

Usando (4.20) y (4.21) en (4.19), y usando que

$$\int_{\Omega} |u(\theta)|^4 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \leq \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + \int_{\Omega} |u(\theta)|^6 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \right),$$

tenemos finalmente

$$\begin{aligned} s^2 \int_{\Omega} (p(x)^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_{\Omega} (|w(\theta)|^2 + |\nabla w(\theta)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \quad (4.22) \\ &+ C \int_{\Omega} |u(\theta)|^6 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

**Paso 2:**

Este paso es análogo al paso 2 de la demostración del teorema 3.1.7. Se tiene la siguiente estimación:

$$\int_{\Omega} |w(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \leq \frac{C}{s} \iint_Q |H|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \iint_{\Sigma_\gamma} s^3 \eta^3 |w|^2 e^{-2s\varphi} d\sigma dt,$$

que se obtiene usando para la ecuación (4.18) la desigualdad de Carleman usual para la ecuación del calor.

□

**Paso 3:**

Así como para el paso anterior, recuperamos el cálculo hecho en el paso 3 de la demostración del teorema 3.1.7:

$$\int_{\Omega} |\nabla w(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx \leq Cs \iint_Q |H|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + Cs \iint_{\Sigma_\gamma} s^3 \eta^3 |w|^2 e^{-2s\varphi} d\sigma dt.$$

□

Notemos que los pasos 2 y 3 entregan una estimación del lado derecho de (4.22) en función de  $H$ , la que viene dada por la expresión

$$\begin{aligned} H = & -3au^2w + \operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}_t) + a(2(\alpha+1)\bar{v}_t - 6\bar{v}\bar{v}_t)u \\ & + a(2(\alpha+1)\bar{v} - \alpha - 3\bar{v}^2)w - 3a\bar{v}_t u^2 + 2a(\alpha+1 - \bar{v})uw. \end{aligned}$$

Tenemos así que

$$\begin{aligned} \iint_Q |H|^2 e^{-2s\varphi} \leq & C \iint_Q |w|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + C \iint_Q (|u|^2 + |u|^4) e^{-2s\varphi} dx dt \\ & + C \iint_Q |\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}_t)|^2 e^{-2s\varphi} dx dt, \end{aligned}$$

lo que nos entrega una estimación de  $p$  en función de normas de  $u$  en todo el espacio  $Q$ . Sin embargo, el objetivo es obtener estimaciones con normas locales (en  $\Sigma_\gamma$  y en  $t = \theta$ ). El paso 4 muestra cómo lograrlo mediante la combinación de las desigualdades de Carleman.

**Paso 4:**

Retomando la desigualdad anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_Q |H|^2 e^{-2s\varphi} dx dt &\leq \frac{C}{s} \iint_Q s|w|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \iint_Q (s|u|^2 + s|u|^4) e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\quad + C \iint_Q |\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v}_t)|^2 e^{-2s\varphi} dx dt. \end{aligned}$$

Usando Carleman usual para  $w$  (teorema 2.2.6) y  $(DC_{BS\gamma})$  para  $u$ , tenemos, para  $s$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \iint_Q |H|^2 e^{-2s\varphi} dx dt &\leq \frac{C}{s} \iint_Q |H|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \iint_{\Sigma_\gamma} s^3 \eta^3 |w|^2 e^{-2s\varphi} d\sigma dt \\ &\quad + \frac{C}{s} \iint_Q |G|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \iint_{\Sigma_\gamma} (s^3 \eta^3 |u|^2 + s^2 \eta^2 |u|^4) e^{-2s\varphi} d\sigma dt \\ &\quad + C \iint_Q (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi} dx dt. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Notemos que gracias al factor  $s^{-1}$ , podemos absorber el primer término del lado derecho de la desigualdad con el lado izquierdo. Sin embargo, hay una integral de  $G$  que trae los mismos problemas que  $H$ . Para deshacernos de tal término, debemos, de forma similar, estimar el término  $\frac{C}{s} \iint_Q |G|^2 e^{-2s\varphi}$ . De (4.6) y (4.5), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{C}{s} \iint_Q |G|^2 e^{-2s\varphi} dx dt &\leq \frac{C}{s} \iint_Q |\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v})|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\quad + \frac{C}{s} \iint_Q (|u|^2 + |u|^4) e^{-2s\varphi} dx dt \\ &= \frac{C}{s} \iint_Q |\operatorname{div}(p(x)\nabla\bar{v})|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\quad + \frac{C}{s^3} \iint_Q (s^2 |u|^2 + s^2 |u|^4) e^{-2s\varphi} dx dt. \end{aligned}$$

Usando  $(DC_{BS\gamma})$  para  $u$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{C}{s} \iint_Q |G|^2 e^{-2s\varphi} dx dt &\leq \frac{C}{s} \iint_Q (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi} dx dt \\ &\quad + \frac{C}{s^3} \iint_Q |G|^2 e^{-2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s^3} \iint_{\Sigma_\gamma} (s^3 \eta^3 |u|^2 + s^2 \eta^2 |u|^4) e^{-2s\varphi} d\sigma dt, \end{aligned}$$

y para  $s$  suficientemente grande

$$\begin{aligned} \frac{C}{s} \iint_Q |G|^2 e^{-2s\varphi} dx dt &\leq \frac{C}{s} \iint_Q (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi} dx dt \\ &+ \frac{C}{s^3} \iint_{\Sigma_\gamma} (s^3 \eta^3 |u|^2 + s^2 \eta^2 |u|^4) e^{-2s\varphi} d\sigma dt. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por (4.24) en (4.23), y para  $s$  suficientemente grande, se tiene finalmente que

$$\begin{aligned} \iint_Q |H|^2 e^{-2s\varphi} dx dt &\leq \frac{C}{s} \iint_{\Sigma_\gamma} s^3 \eta^3 |w|^2 e^{-2s\varphi} d\sigma dt \\ &+ \frac{C}{s} \iint_{\Sigma_\gamma} (s^3 \eta^3 |u|^2 + s^2 \eta^2 |u|^4) e^{-2s\varphi} d\sigma dt \\ &+ C \iint_Q (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi} dx dt. \end{aligned}$$

### Juntando los pasos

Finalicemos la demostración recopilando los pasos seguidos. Por el paso 1, tenemos que

$$\begin{aligned} s^2 \int_\Omega (p(x)^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \int_\Omega (|w(\theta)|^2 + |\nabla w(\theta)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\ &+ C \int_\Omega |u(\theta)|^6 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_\Omega \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

Por los pasos 2 y 3 obtenemos

$$\begin{aligned} s^2 \int_\Omega (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq Cs \iint_Q |H|^2 e^{-2s\varphi} dx dt \\ &+ Cs \iint_{\Sigma_\gamma} s^3 \eta^3 |w|^2 e^{-2s\varphi} d\sigma dt \\ &+ C \int_\Omega |u(\theta)|^6 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_\Omega \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx. \end{aligned}$$

Por el paso 4,

$$\begin{aligned}
s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq C \iint_{\Sigma_\gamma} (s^3 \eta^3 |w|^2 + s^3 \eta^3 |u|^2) e^{-2s\varphi} d\sigma dt \\
&+ C \iint_{\Sigma_\gamma} s^2 \eta^2 |u|^4 e^{-2s\varphi} d\sigma dt + Cs \iint_{\Sigma_\gamma} s^3 \eta^3 |w|^2 e^{-2s\varphi} d\sigma dt \\
&+ Cs \iint_Q (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi} dx dt \quad (4.25) \\
&+ C \int_{\Omega} |u(\theta)|^6 e^{-2s\varphi(\theta)} dx + C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx.
\end{aligned}$$

Por la observación 3.1.3 del capítulo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\iint_Q (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi} &\leq \iint_Q (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)}, \quad \forall t \in [0, T] \\
&= T \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)}.
\end{aligned}$$

Usando esto último en (4.25) obtenemos

$$\begin{aligned}
s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq Cs^4 \iint_{\Sigma_\gamma} \eta^3 (|w|^2 + |u|^2) e^{-2s\varphi} d\sigma dt \\
&+ Cs^2 \iint_{\Sigma_\gamma} \eta^2 |u|^4 e^{-2s\varphi} d\sigma dt \\
&+ Cs \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx \\
&+ C \int_{\Omega} |u(\theta)|^6 e^{-2s\varphi(\theta)} + C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx,
\end{aligned}$$

de donde, para  $s$  suficientemente grande y recordando que  $w = u_t$

$$\begin{aligned}
s^2 \int_{\Omega} (|p(x)|^2 + |\nabla p(x)|^2) e^{-2s\varphi(\theta)} dx &\leq Cs^4 \iint_{\Sigma_\gamma} \eta^3 (|u_t|^2 + |u|^2) e^{-2s\varphi} d\sigma dt \\
&+ Cs^2 \iint_{\Sigma_\gamma} \eta^2 |u|^4 e^{-2s\varphi} d\sigma dt \\
&+ C \int_{\Omega} |u(\theta)|^6 e^{-2s\varphi(\theta)} + C \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq 3} |D_x^\beta u(\theta)|^2 e^{-2s\varphi(\theta)} dx.
\end{aligned}$$

Más aún, como  $\theta > 0$ , podemos acotar inferiormente  $e^{-2s\varphi(\theta)}$  por una constante positiva, por ejemplo, por  $C = \exp\left(-2s \frac{e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}}{T^2/4}\right) > 0$ . Además,  $\eta^2 e^{-2s\varphi}$  y  $\eta^3 e^{-2s\varphi}$  son funciones acotadas, por lo que obtenemos así finalmente que

$$\|p\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|u\|_{H^1(0,T;L^2(\gamma))} + \|u\|_{L^4(0,T;L^4(\gamma))}^2 + \|u(\theta)\|_{L^6(\Omega)}^3 + \|u(\theta)\|_{H^3(\Omega)} \right).$$

finalizando la demostración.  $\square$

# Capítulo 5

## Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones de este trabajo de memoria, y se mencionan posibles trabajos futuros. Para demarcar claramente el trabajo realizado, veamos un resumen de los resultados obtenidos para los dos problemas abordados.

### 5.1. Problema lineal

Para el problema lineal

$$\begin{cases} v_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla v) = g(x) & \text{en } Q = (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega \\ v(0) = v_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde  $g$  es una fuente,  $T > 0$  y  $\Omega$  es un dominio acotado de frontera regular, se estudió el problema inverso de recuperar el coeficiente principal  $\sigma$  en el caso de observaciones internas y de borde de tipo Dirichlet. En adición a estas observaciones, se debe también medir la solución en todo  $\Omega$  para un tiempo fijo  $\theta > 0$ . En ambos casos, se demostró estabilidad Lipschitz local en torno a una solución regular (de referencia) con norma  $H^1(\Omega)$  para los parámetros y una norma adecuada para las mediciones. La demostración de estabilidad está basada en el método de Bukhgeim-Klibanov y la desigualdad de Carleman para la ecuación del calor, suponiendo  $\sigma$  regular. En el caso de observaciones internas, es necesario suponer conocido este parámetro para lograr un resultado estándar de estabilidad, esto es, que el lado derecho de la desigualdad sólo dependa de mediciones locales de la solución y no del parámetro. En el caso de observaciones de borde, tal supuesto no es necesario para lograr el resultado buscado gracias a la función de Carleman.

Se obtuvieron los lemas 3.1.4 y 3.2.2, cuya utilidad está dada en ponderar con un término  $s^2$  al parámetro en el lado izquierdo de las desigualdades, hecho que es muy útil en este tipo de problemas donde se trata de absorber términos positivos basados en el orden

del exponente de los parámetros  $s$  y  $\lambda$ . Como se verá luego, estos lemas serían de gran utilidad para el capítulo 4.

Debido a la regularidad que se le pidió a  $\sigma$  (y que también repercute en que la norma de la medición debe ser en un espacio más regular,  $H^3(\Omega)$  en este caso), queda como posible trabajo futuro estudiar el caso menos regular y obtener la estabilidad Lipschitz en norma  $L^2(\Omega)$  para los parámetros. Para esto, como primer enfoque, es necesario obtener una desigualdad de Carleman para lados derechos en  $H^{-1}(\Omega)$ , lo cual no se ha logrado aún para la regularidad que deseamos de las soluciones de la ecuación en cuestión.

## 5.2. Problema ecuación no lineal biestable

Para la ecuación biestable

$$\begin{cases} v_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla v) = f(v) & \text{en } Q \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ v(0) = v_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

donde  $f(v) = a(x)v(1-v)(v-\alpha(x))$ , se estudió la recuperación de la conductividad  $\sigma$ , que se supone regular, a partir de mediciones tipo Dirichlet en una parte del borde de  $\Omega$  y en un tiempo fijo  $\theta > 0$  en todo  $\Omega$ . Para este problema inverso, se obtuvo estabilidad Lipschitz local en torno a una solución regular con norma  $H^1(\Omega)$  para los parámetros y una norma similar al caso lineal para las mediciones. La demostración sigue la misma estrategia que para el caso lineal, pero con una desigualdad de Carleman nueva para la ecuación no lineal, utilizada en conjunto con la desigualdad usual para la ecuación del calor.

El lema 3.2.2 juega un papel muy importante en la obtención del resultado de estabilidad, pues gracias al factor  $s^2$  es posible absorber términos para obtener las estimaciones buscadas.

Un gran aporte en esta parte del trabajo es la demostración de la nueva desigualdad de Carleman en el caso de observaciones de borde. Se explicitaron los cálculos que en la literatura son difíciles de encontrar debido a que generalmente sólo se menciona como extensión del caso de observaciones internas, el cual es más simple de obtener.

Al igual que en el caso lineal, para la ecuación biestable se puede estudiar el caso en que la conductividad  $\sigma$  tiene menos regularidad. Sin embargo, los resultados obtenidos aquí motivan sin duda la extensión a los modelos de Fitzhugh-Nagumo (1.2) y Aliev-Panfilov (1.3). Aunque, como se vió en el capítulo 1, existen trabajos en estos modelos, no existen, a nuestro conocimiento, resultados de estabilidad usando desigualdades de Carleman, por lo que sería un trabajo original.

### 5.3. Comentarios finales

Aunque no constituye uno de los objetivos principales de esta memoria, se hizo un análisis cualitativo y numérico de la ecuación biestable en una dimensión. Con  $\sigma$  constante, se obtuvo una solución explícita para el caso de dominio no acotado, de la cual es posible encontrar fórmulas para la recuperación de los parámetros presentes en la parte no lineal, así como también de  $\sigma$ . Mediante pruebas numéricas se vio que estas fórmulas son sensibles a pequeños errores en las mediciones.

En el caso de  $\sigma$  variable, se realizaron simulaciones mediante el método de diferencias finitas para comparar el comportamiento de la solución con la onda viajera correspondiente a  $\sigma$  constante. Se confirmó numéricamente que la onda se retrasa cuando pasa por una zona de baja conductividad, la cual simula un tejido cardíaco muerto.

La recuperación de la conductividad es un tema que amerita un trabajo más profundo en el aspecto numérico, al igual que simulaciones en dimensiones mayores.

Como comentario final, se puede decir que este trabajo servirá como un primer acercamiento a quienes se interesen por los problemas inversos en EDP, en especial si se quiere aprender cómo se aplican las desigualdes de Carleman a estos problemas.



# Bibliografía

- [AF03] R. Adams and J. Fournier, *Sobolev spaces*, Academic Press, 2003. [56](#)
- [BGO09] M. Boulakia, C. Grandmont, and A. Osses, *Some inverse stability results for the bistable reaction-diffusion equation using carleman inequalities*, *Comptes Rendus Mathématique* **347** (2009), no. 11-12, 619 – 622. [4](#), [42](#), [43](#), [44](#)
- [BGR07] A. Benabdallah, P. Gaitan, and J. Rousseau, *Stability of discontinuous diffusion coefficients and initial conditions in an inverse problem for the heat equation*, *SIAM J. Control Optim.* **46** (2007), no. 5, 1849–1881. [4](#)
- [BIY08] M. Bellassoued, O. Imanuvilov, and M. Yamamoto, *Inverse problem of determining the density and two lamé coefficients by boundary data*, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **40** (2008), no. 1, 238–265. [29](#)
- [BK81] A. L. Bukhgeim and M. V. Klibanov, *Global uniqueness of a class of multidimensional inverse problems*, *Sov. Math. Dokl.* **24** (1981), 244–247. [3](#), [27](#)
- [BMO07] L. Baudouin, A. Mercado, and A. Osses, *A global carleman estimate in a transmission wave equation and application to a one-measurement inverse problem*, *Inverse Problems* **23** (2007), no. 1, 257–278. [4](#)
- [BSB08] N. Baranibalan, K. Sakthivel, and K. Balachandran, *Uniqueness and stability in inverse parabolic equations with memory*, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* **2** (2008), no. 4, 1077 – 1088. [4](#)
- [BY06] M. Bellassoued and M. Yamamoto, *Inverse source problem for a transmission problem for a parabolic equation*, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems* **14** (2006), no. 1, 47–56. [4](#)
- [CW04] S. Cox and A. Wagner, *Lateral overdetermination of the fitzhugh-nagumo system*, *Inverse Problems* **20** (2004), no. 5, 1639–1647. [4](#)
- [EEK05] H. Egger, H. W. Engl, and M. V. Klibanov, *Global uniqueness and hölder stability for recovering a nonlinear source term in a parabolic equation*, *Inverse Problems* **21** (2005), no. 1, 271–290. [4](#)

- [FI96] A. Fursikov and O. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Seoul National University Lecture Notes Series **34** (1996). [10](#), [28](#), [44](#), [45](#), [50](#)
- [IY98] O. Imanuvilov and M. Yamamoto, *Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the carleman estimate*, *Inverse Problems* **14** (1998), no. 5, 1229–1245. [3](#), [4](#), [27](#)
- [IY03a] ———, *Carleman inequalities for parabolic equations in sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations*, *RIMS, Kyoto University* **39** (2003), no. 2, 227–274. [39](#)
- [IY03b] ———, *Determination of a coefficient in an acoustic equation with a single measurement*, *Inverse Problems* **19** (2003), no. 1, 157–171. [4](#), [27](#)
- [Ji00] L. Ji, *The inverse problem of neuron identification*, Ph.D. thesis, Rice University, 2000. [3](#), [4](#)
- [Kir96] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1996. [7](#)
- [Kli04] M. V. Klibanov, *Global uniqueness of a multidimensional inverse problem for a nonlinear parabolic equation by a carleman estimate*, *Inverse Problems* **20** (2004), no. 4, 1003–1032. [4](#)
- [KS98] J. Keener and J. Sneyd, *Mathematical physiology*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1998. [3](#), [13](#)
- [MVDS<sup>+</sup>05] V. Moreau-Villéger, H. Delingette, M. Sermesant, H. Ashikaga, O. Faris, E. McVeigh, and N. Ayache, *Estimating local apparent conductivity with a 2-d electrophysiological model of the heart*, *Proc. of Functional Imaging and Modeling of the Heart 2005 (FIMHÓ5)*, LNCS, vol. 3504, Springer, June 2005, pp. 256–266. [3](#), [22](#)
- [Xin00] J. Xin, *Front propagation in heterogeneous media*, *SIAM Review* **42** (2000), no. 2, 161–230. [2](#), [15](#)
- [YY09] G. Yuan and M. Yamamoto, *Lipschitz stability in the determination of the principal part of a parabolic equation*, *ESAIM: COCV* **15** (2009), no. 3, 525–554. [4](#)