UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

OPTIMIZACIÓN ROBUSTA DE PORTAFOLIOS EN UN MERCADO FINANCIERO A TIEMPO CONTINUO: CASO DE INCERTIDUMBRE NO COMPACTA O LINEAL

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

JULIO DANIEL BACKHOFF VERAGUAS

PROFESOR GUÍA:
JOAQUÍN FONTBONA TORRES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RENÉ ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES
JAIME RICARDO SAN MARTÍN ARISTEGUI

SANTIAGO DE CHILE
ENERO 2011

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: JULIO BACKHOFF VERAGUAS
PROF. JOAQUÍN FONTBONA TORRES

OPTIMIZACIÓN ROBUSTA DE PORTAFOLIOS EN UN MERCADO FINANCIERO A TIEMPO CONTINUO: CASO DE INCERTIDUMBRE NO COMPACTA O LINEAL

El problema clásico de optimización de portafolio, en el que un agente escoge sus estrategias de modo de maximizar su utilidad esperada ha sido estudiado en profundidad por mucho tiempo. Sin embargo sólo hace poco ha surgido el interés por plasmar el hecho de que la selección de un modelo particular al momento de hacer la toma de decisiones es en sí riesgosa. Se conoce como optimización robusta de portafolio al problema de maximización de utilidades que un agente considera cuando toma en cuenta la incerteza sobre los modelos.

El tema principal de esta memoria es estudiar el problema anterior cuando el conjunto de incerteza sobre los modelos no es compacto o cuando este se manifiesta a partir de restricciones lineales. Ninguno de estos escenarios para el problema de optimización robusta ha sido afrontado en generalidad en la literatura. Cuando el conjunto de modelos está delimitado mediante restricciones lineales, en este trabajo se resuelve inicialmente el problema tanto para mercados completos como incompletos mediante la técnica de minimización de funcionales de entropía desarrollada entre otros por C. Léonard, suponiendo la condición de compacidad débil sobre el conjunto de modelos usual en la literatura. Seguidamente, se resuelve el problema robusto en un mercado completo sólo bajo una cierta suposición de cerradura débil en un espacio de Orlicz conveniente, para lo cual se requieren además algunas condiciones sobre los ingredientes económicos del problema. En este punto se rescatan los resultados obtenidos en presencia de compacidad débil entre otros por A.Schied y H. Föllmer. Con esto, se vuelven a aplicar los métodos de C. Léonard para el caso lineal pero sin compacidad, obteniéndose entre otros nuevos resultados una igualdad primal-dual para el problema de optimización robusta y una caracterización para la medida (o modelo) menos favorable. Se presenta además un ejemplo simple que escapa a la teoría desarrollada con anterioridad, pero que es abordable mediante los resultados obtenidos en esta memoria.

Finalmente, se explora la relación entre la optimización robusta y el concepto de información débil introducido por F. Baudoin así como el de flujos de información. Con respecto a la información débil, se establece cómo la maximización de utilidades en presencia de esta más el cálculo de variaciones permiten resolver ciertos problemas robustos. En cuanto a los flujos de información, se propone y discute una manera de emplear la teoría desarrollada por C. Léonard respecto al problema de minimización de la entropía bajo restricciones sobre el flujo de marginales, para resolver el problema robusto asociado.

AGRADECIMIENTOS

A MIS FAMILIAS Y AMIGOS ... Y ESPECIALMENTE A MI MADRE.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Tras la crisis financiera de 2008, cuyas consecuencias todavía son palpables, el concepto de "riesgo de modelo" adquirió renovada importancia. En pocas palabras, este riesgo corresponde a los daños que puede generar un modelo de algún fenómeno real, por ejemplo al sub-evaluar una determinada cantidad o simplemente al ser demasiado simplificado. En finanzas, los modelos sobre los precios (entre otros) siempre han estado sujetos a este tipo de riesgo pero ahora más que nunca se ha puesto un énfasis en el tema de entenderlo, modelarlo y finalmente cubrirlo.

El problema de optimización de portafolio en un mercado financiero ha sido estudiado extensivamente durante décadas. Sin importar si el mercado es completo o incompleto, las herramientas de dualidad y análisis convexo se han empleado exitosamente en esta tarea. Pese a lo anterior, y a la luz del párrafo precedente, aparece la necesidad de entender el problema de optimización de portafolio bajo el paradigma de que la elección misma de un modelo probabilista para los precios acarrea un riesgo en sí. La forma en que este problema ha sido abordado durante los últimos 20 años ha sido mediante la noción de "utilidad robusta".

En esencia, dada la incerteza o ambigüedad en los modelos (que refleja el hecho de que en la práctica un modelo no representa con perfección la realidad), la utilidad robusta asociada a una posición en el mercado se entiende como la peor utilidad esperada del agente o inversionista, bajo todos los modelos factibles. En la sección 2.1 se discute en profundidad esta interpretación y se muestra la conexión existente con las "medidas de riesgo". Aún más, se repasa brevemente una generalización a la teoría axiomática de preferencias que permite modelar las elecciones de un agente en un mundo donde las distribuciones de probabilidad de sus posiciones son inciertas. Estas preferencias pueden ser representadas numéricamente y es a partir de esta representación que la forma de la utilidad robusta (como utilidad esperada en el peor caso) se ve justificada. Al final de dicha sección se ilustra además la conexión existente entre los modelos de "insider trading" y los modelos de robustez en un mercado financiero.

Una vez que se posee una noción de utilidad robusta, se puede definir el problema de optimización robusta de portafolio. En este, el agente o inversionista lo que desea es escoger óptimamente sus estrategias de modo de maximizar su utilidad robusta (dada una forma para la incerteza o ambigüedad en los modelos). Estos problemas han sido estudiados en profundidad en la última década, donde las herramientas de dualidad y análisis convexo siguen siendo tan vitales como en el caso no robusto. En la sección 2.2 se reproducen algunos resultados generales para el problema de optimización robusta.

En un cierto sentido, el problema de optimización robusta se puede entender como uno de proyección, pues en esencia lo que se busca es encontrar el peor modelo de entre aquellos considerados como plausibles. Este enfoque ya ha sido desarrollado en la literatura, obteniéndose resultados muy similares a los presentados en 2.2. Los problemas de proyección mediante funcionales convexos han sido estudiados durante muchos años y la literatura al respecto es abundante. Aún más, para el caso en que el conjunto sobre el cual se proyecta está determinado por restricciones lineales la resolución (e interpretación dual) de este problema de proyección es particularmente satisfactoria, por lo que en la sección 2.3 se presentan estos resultados. La idea es que en el caso de incerteza o ambigüedad lineal (cuando el conjunto de modelos está determinado por restricciones lineales) el enfoque de proyección (conocido como de minimización de la entropía) puede aportar para obtener resultados más fuertes que los usuales (los de la sección 2.2). Notar que las restricciones de tipo momento (que incluyen esperanzas, covarianzas y probabilidades) así como restricciones sobre las leyes de ciertas variables aleatorias, corresponden a funcionales lineales con respecto a las medidas de probabilidad bajo las cuales se calculan.

Desgraciadamente, cuando el conjunto de modelos (medias) factibles se debe a una incerteza lineal sobre el modelo, puede ocurrir que el conjunto de las densidades con respecto a una referencia de las medidas de probabilidad factibles no sea débilmente compacto en el espacio de las funciones integrables. Este es, hasta la fecha, un requerimiento común a todos los enfoques para el problema robusto. Con esto en vista, en las secciones 3.2 y 3.3 se resuelven explícitamente los problemas de optimización robusta en mercados completos e incompletos (respectivamente) cuando se tiene incerteza lineal sobre el modelo, bajo la suposición de que el conjunto de las densidades de los modelos es débilmente compacto en L^1. En esencia, la dificultad aquí radica en mezclar apropiadamente los resultados ya existentes sobre optimización robusta con las técnicas de minimización de la entropía, lo que se reduce a sumergir el problema robusto en un determinado espacio de Orlicz relevante. Tras esto, en la sección 3.4 se muestra cómo es posible resolver el problema robusto aún sin la condición de compacidad débil usual. Para esto, es necesario asumir reflexividad del espacio de Orlicz relevante, lo que se traduce en una condición fácilmente verificable sobre los ingredientes del problema robusto. En definitiva, la mayoría de los argumentos y resultados expuestos en la sección 2.2 siguen siendo válidos. La sección 3.5 aborda la incerteza lineal de modelo en el caso sin compacidad débil y finalmente se ilustra con un ejemplo. Para cerrar el capítulo 3, se expone la conexión entre el problema de optimización robusta con el de “insider trading” bajo información débil (en forma estática así como en flujo).

Luego, en el capítulo 4 se entregan las conclusiones del trabajo realizado, así como se enumeran una serie de problemas y direcciones que quedaron sin explorar o sin responder en el presente trabajo. En breve, la técnica de minimización de la entropía permite resolver con detalle y generalidad los problemas de optimización robusta cuando la incerteza sobre el modelo es lineal. Aún más, se logró resolver el problema robusto mediante técnicas de espacios de Orlicz incluso sin ninguna condición de compacidad bajo los ingredientes del problema. Resta principalmente encontrar ejemplos más complejos así como resolver en generalidad los problemas asociados a flujos débiles de información.

Capítulo 2

Revisión de la literatura

En esta sección se expondrán variados elementos presentes en la literatura, los que permitirán entender el problema de optimización robusta de portafolio así como la variante donde los modelos factibles aparecen de una incerteza o ambigüedad lineal. Los resultados de esta sección serán empleados repetidamente en las subsiguientes.

2.1. Contexto

En esta parte se introduce el concepto de robustez en optimización de portafolio, se presenta una motivación de este concepto basada en la teoría axiomática de preferencias robustas, se ilustra la conexión existente con la teoría de medidas de riesgo y se presenta su interpretación bajo el paradigma de “insider trading” (información privilegiada). Se sigue el compendio desarrollado en [FSW09], salvo en lo que se refiere a la relación con “insider trading”.

2.1.1. Introducción a la Robustez en Optimización de Portafolio

Los mercados financieros ofrecen una variada gama de instrumentos y posiciones para el inversionista. Este a su vez, escoge aquellos instrumentos y posiciones basado en sus preferencias y en su riqueza. En el día a día, por desgracia o por ventura, el resultado de cualquier decisión es incierto pues a su vez el valor de cualquier objeto financiero es incierto, lo que lleva a considerarlos como variables aleatorias.

En el problema clásico de optimización de portafolio, las preferencias (tipo von Neumann-Morgenstern) son representadas mediante una función de utilidad esperada de la forma $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U(X)]$, donde U es una función de utilidad cóncava y $\mathbb{Q}$ es una medida de probabilidad sobre el conjunto de escenarios posibles que modela las preferencias del inversionista. Además, típicamente una posición X se considera alcanzable si su valor (que se puede computar en base a las medidas martingalas equivalentes, conocidas también como medidas neutras al riesgo) no excede al de la riqueza inicial del inversionista. En la última década, sin embargo, se ha puesto mucha atención al problema de incerteza de modelo lo que ha impulsado el interés en una formulación robusta de la optimización de portafolio.

Es necesario entonces definir una expresión numérica para esta nueva función de utilidad, que tome en consideración la incerteza del modelo. En la literatura, se adoptó la siguiente forma general para una tal función de utilidad.

Definición 2.1.1.
Sea U una función de utilidad cóncava, $\mathcal{Q}$ un conjunto de medidas de probabilidad sobre el conjunto de escenarios posibles, y γ una función que penaliza dichas medidas. Se define entonces la **función utilidad robusta** asociada como:

$$\mathcal{U}(X) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U(X)] + \gamma(\mathbb{Q})\right]. \tag{2.1.1}$$

La idea tras esta expresión es la siguiente: el agente toma en consideración toda una clase ($\mathcal{Q}$) de modelos probabilistas sobre el conjunto de escenarios posibles (lo que corresponde a una medida $\mathbb{Q}$ en $\mathcal{Q}$), pero los modelos $\mathbb{Q}$ son considerados en mayor o menor medida mediante el término de penalización $\gamma(\mathbb{Q})$. Así, para protegerse ante la incerteza de modelo el inversionista escoge un enfoque tipo "peor caso", tomando el ínfimo de los valores penalizados de cada uno de los modelos considerados. Es importante tener presente que en el caso de un modelo de mercado financiero donde los precios son semimartingalas, y que sea libre de arbitraje, el cálculo del valor de las posiciones adoptadas por el agente está ligado al cálculo de los valores esperados de dichas posiciones bajo cada una de las medidas libres de riesgo (en el caso de un mercado completo, existe sólo una única medida libre de riesgo). Por lo tanto además de $\mathcal{Q}$, el conjunto de las medidas libres de riesgo debe ser también considerado.

Para poner 2.1.1 en más contexto, es ilustrativo ejemplificar quiénes podrían ser $\mathcal{Q}$ y γ.

Ejemplo 2.1.1. Imagínese que un inversionista (en el mundo real) desea emplear las herramientas de la optimización de portafolio usual para asistirlo en sus decisiones. Para lo anterior, comienza por ajustar un modelo de semimartingala de los precios o los retornos (procesos de Itô típicamente, donde el modelo tipo Black-Scholes es paradigmático) a los precios o retornos históricos (sin mirar mucho hacia el pasado, o haciéndolo ponderando, como empíricamente justifica la naturaleza de los mercados financieros mundiales). Así, se obtiene una cierta componente de tendencia instantánea (drift o deriva en la literatura). Evidentemente, ya el proceso de ajuste plantea la existencia de un error asociado a estas calibraciones. Aún más, las restricciones que se puedan adoptar a priori sobre la deriva (como que sea constante por tramos, determinista, aleatoria, etc.), o la elección arbitraria por ejemplo de la ventana de tiempo en que se realizará el ajuste, inducen otra fuente de error. En suma, el modelo estocástico de los precios o retornos futuros (que será ocupado para asistir en las estrategias futuras a seguir) es a su vez incierto. Parece entonces sensato, por ejemplo, establecer un intervalo alrededor del valor ajustado de la deriva, donde sería razonable que la "verdadera" deriva viviera. Se verá más adelante que esto es representable como un cambio en la media de probabilidad. Esto induce un conjunto $\mathcal{Q}$ que contiene las medidas tal que la deriva del proceso de precios bajo ella caiga en los intervalos considerados. Además, cualquier intuición sobre cuáles de estas es más o menos deseable o verosímil puede ser incorporada en γ

Ejemplo 2.1.2. Supóngase la misma situación del ejemplo anterior. En cierto sentido puede ser artificioso pretender darse un intervalo o una banda donde la "verdadera" deriva viva. Después de todo, en la realidad el inversionista sólo observa los precios o retornos. Es cierto que un buen ajuste (por ejemplo, mediante regresión) debería entregar un intervalo de confianza para los parámetros calibrados hacia el pasado, pero esto no dice nada acerca de sus valores más probables hacia el futuro. Además, no parece claro cómo la elección de un modelo particular repercute en el tamaño de estos intervalos. Con todo esto, quizá restringir el valor de los parámetros de un modelo directamente puede ser poco natural. Así, podría ser más deseable que en vez de protegerse ante los errores de parámetros, el inversionista se proteja ante sus propias expectativas de lo que serán los precios o retornos futuros. Por ejemplo, sus mejores estudios e intuiciones le podrían dar una noción sobre el rango que los precios o algunos estadísticos asociados a ellos seguirán en ciertos instantes futuros, y por lo tanto es deseable considerar todos aquellos modelos probabilistas que permiten que dichos precios o estadísticos pertenezcan a estos rangos, penalizados de acuerdo a algún criterio mediante γ.

2.1.2. Motivación desde la teoría axiomática de preferencias robustas

En la teoría desarrollada por von Neumann-Morgenstern, un agente puede elegir entre diversas apuestas monetarias (loterías), con sus probabilidades conocidas. De este modo, cada lotería se modela como una medida de probabilidad real boreliana. Para simplificar, se supondrá que estas medidas tienen soporte compacto contenido en un intervalo fijo $S \subset (-\infty, \infty)$, y se denotará $\mathcal{M}_{1,c}(S)$ a esta familia. Sobre este conjunto de medidas, el agente forma una relación (u orden) de preferencias $\succ$ (que se supone antisimétrico y negativamente transitivo). Es el avance de von Neumann-Morgenstern que permitió dar condiciones necesarias y suficientes (en la forma de axiomas y restricciones topológicas o de regularidad sobre $\succ$) para la existencia de una representación numérica de estas preferencias, en la forma de:

$$\mu \succ \nu \Leftrightarrow \mathcal{U}(\mu) > \mathcal{U}(\nu),$$

donde $\mathcal{U} : \mathcal{M}_{1,c}(S) \to (-\infty, \infty)$ se escribe como $\mathcal{U}(\mu) = \int U(x)\mu(dx)$, para una cierta función $U : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$, que se llamará función de utilidad cuando sea creciente y estrictamente cóncava (lo que está ligado a la aversión al riesgo del agente y a la interpretación económica de $\succ$)

La limitación de la teoría anterior, radica en que se asume que el agente conoce con exactitud las loterías, es decir, las distribuciones de probabilidad de las apuestas monetarias. En la práctica, el agente podría sólo tener una noción o una aproximación de estas, lo que se puede modelar como un ruido en su conocimiento de tales medidas. Para este fin se introduce sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F})$ en consideración, la clase $\tilde{\mathcal{X}}$ de Kernels Markovianos $\tilde{X}(\omega, dy)$ tales que existe un compacto $K \subset S$ con $\tilde{X}(\omega, K) = 1, \forall \omega$. Es decir, los pesos de la lotería son ahora aleatorios.

Dado que todo orden de preferencias $\succ$ sobre $\tilde{\mathcal{X}}$ induce uno sobre $\mathcal{M}_{1,c}(S)$ (mediante la asociación $\tilde{X}(\omega, dy) = \mu(dy)$), es interesante preguntarse si la existencia de una representación numérica para este orden restringido a $\mathcal{M}_{1,c}(S)$ (que es el caso clásico) se traduce en algo similar para el orden sobre $\tilde{\mathcal{X}}$. Sin entrar en los detalles, bajo ciertos axiomas sobre $\succ$ y $\succeq$ más condiciones topológicas o de regularidad sobre estos, la restricción de $\succ$ a $\mathcal{M}_{1,c}(S)$ efectivamente posee una representación de tipo von Neumann-Morgenstern $\mathcal{U} : \mathcal{M}_{1,c}(S) \to (-\infty, \infty)$, asociada a una función real U. Si U cumple ciertos requisitos (entre ellos, que sea una función de utilidad), se tiene entonces el resultado deseado:

Teorema 2.1.1.
Bajo las suposiciones anteriores, existe una única extensión de $\mathcal{U}$ a una representación numérica $\tilde{\mathcal{U}} : \tilde{\mathcal{X}} \to (-\infty, \infty)$. Esta es de la forma:

$$\tilde{\mathcal{U}}\left(\tilde{X}\right) = \phi\left(\mathcal{U}\left(\tilde{X}\right)\right) = \phi\left(\int U(x)\tilde{X}(\cdot, dx)\right),$$

para un "funcional de utilidad monetaria cóncavo" ϕ definida sobre $L^\infty(\Omega)$.

La noción de funcional de utilidad monetaria cóncavo será discutida en la siguiente parte. Para las referencias y una mayor discusión del resultado anterior, consultar [FSW09]

Como se verá, el funcional ϕ admite típicamente la representación siguiente:

$$\phi(X) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] - \gamma(\mathbb{Q})\right].$$

Donde $\mathcal{Q}$ es un conjunto de medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, y $\gamma : \mathcal{Q} \to (-\infty, \infty]$ es una función de penalización. Notar que todo $X \in L^\infty(\Omega)$ puede interpretarse como un elemento en $\tilde{\mathcal{X}}$ mediante la identificación $X \to \delta_X$, de modo que es posible escribir:

$$\tilde{\mathcal{U}}\left(\delta_X\right) = \phi(U(X)) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U(X)] - \gamma(\mathbb{Q})\right]. \tag{2.1.2}$$

La evidente similitud entre 2.1.1 y 2.1.2 explica por qué se ha introducido esta sección en este trabajo. En efecto, 2.1.2 permite justificar la adopción de 2.1.1 como una definición razonable de una función de utilidad robusta, partiendo de un tratamiento riguroso (axiomático, salvo aspectos técnicos) sobre un modelo verosímil de preferencias bajo incerteza. En todo caso, la sola interpretación de 2.1.1 como una técnica de elección basada en el enfoque tipo peor caso, donde el agente penaliza los modelos de acuerdo a su verosimilitud o a cuán deseable sean, es valiosa por sí misma.

2.1.3. Conexión con medidas de riesgo

Dada una posición en un mercado financiero, donde $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es el conjunto (espacio de probabilidad) de escenarios, es de interés preguntarse cuál es el riesgo asociado al valor (descontado) $X(\omega)$ de esta posición. La noción de una medida de riesgo $\rho(X)$, interpretada como la cantidad mínima de capital que invertida sin riesgo junto a la posición forman un portafolio aceptable, ha sido abordada de manera axiomática en las pasadas dos décadas y su importancia en la teoría y práctica financiera va en aumento. Si bien no toda medida de riesgo imaginable satisface las siguientes propiedades, estas son ampliamente aceptadas como razonables en las comunidades matemática y financiera:

Definición 2.1.2. Medidas de Riesgo Convexa y Coherente
Un funcional $\rho : L^\infty \to (-\infty, \infty)$ se dice medida de riesgo convexa, si satisface las siguientes propiedades $\forall X, Y \in L^\infty$:

- Monotonía: si $X \leq Y$, entonces, $\rho(X) \geq \rho(Y)$.
- Invarianza: si $m \in (-\infty, \infty)$, luego, $\rho(X+m) = \rho(X) - m$.
- Convexidad: $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

Si adicionalmente se tiene que $\forall\lambda \geq 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ (propiedad conocida como homogeneidad positiva), se dice que ρ es coherente.

Para entender estos axiomas, es ilustrativo pensar en X como la pérdida asociada a una posición y en $\rho(X)$ como la cantidad de capital seguro que se podría invertir junto a la posición riesgosa, de modo que el portafolio resultante sea aceptable para el inversionista (de hecho, por la invarianza, $\rho(X + \rho(X)) = 0$). Ahora, si $\{X, \rho(X)\}$ cuantifican pérdidas y riesgos, entonces $\{-X, -\rho(-X)\}$ cuantifican ganancias y utilidades. Esto motiva la necesidad de estudiar $-\rho$ a su vez:

Definición 2.1.3. Funcional de Utilidad Monetaria Cóncavo y su Función Minimal de Penalización
Un funcional $\phi : L^\infty \to (-\infty, \infty)$ se dice funcional de utilidad monetaria cóncavo, si $\rho = -\phi$ es una medida de riesgo convexa. Asociada a este ϕ, está su función minimal de penalización $\gamma : \{\mathbb{Q} : \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}\} \to (-\infty, \infty]$, definida por:

$$\gamma(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in L^\infty} \left[\phi(X) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X)\right].$$

Como se vio en la sección anterior la utilidad de esta teoría, en lo que a optimización robusta de portafolio se refiere, radica en que bajo ciertas suposiciones todo funcional de utilidad monetaria cóncavo ϕ se puede entender como el valor esperado, en el peor caso, de la posición adoptada en el mercado previa penalización. En concreto, la propiedad de que ϕ sea continuo por arriba casi seguramente (ie. $\phi(X_n) \to \phi(X)$ cuando $X_n \searrow X, \mathbb{P} - cs.$) equivale a la representación:

$$\phi(X) = \inf_{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}} [\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) + \gamma(\mathbb{Q})]. \tag{2.1.3}$$

Cabe acotar que bajo estas suposiciones, ϕ es coherente (ie. $-\phi$ lo es) si y sólo si γ toma los valores 0 y/o $+\infty$ únicamente. De esta forma, $\phi(X) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X)]$, donde $\mathcal{Q} = \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} : \gamma(\mathbb{Q}) < \infty\}$ (conocido como el conjunto representante maximal de ϕ). Aún más, se puede mostrar que el ínfimo en 2.1.3 se alcanza para cada X, si y sólo si ϕ es continua por abajo casi seguramente.

Pese a que, como se ha visto, el problema de optimización de portafolio cae en el contexto de medidas de riesgo en cuanto a lo que a su función valor se refiere, la interpretación financiera (por ejemplo respecto a la determinación de estrategias óptimas robustas) cae en el contexto de dualidad en mercados financieros. Por lo demás, las técnicas de optimización necesarias para resolver instancias particulares de estos problemas pueden provenir de áreas tan diversas como el control óptimo estocástico, el cálculo variacional y la teoría de BSDE (ecuaciones diferenciales estocásticas retrógradas), hasta la teoría de grandes desvíos y problemas inversos estadísticos. En el presente trabajo se empleará principalmente este último enfoque, más la dualidad en mercados financieros, para resolver lo más explícito posible un tipo de problema de optimización robusta de portafolio.

2.1.4. Conexión con modelos de información privilegiada

En los modelos de información privilegiada, un agente financiero posee algún tipo de conocimiento que no es público y que le permite mejorar su posición en el mercado como especulador. En otras palabras, el problema de optimización de portafolio de este agente posee "algo más" que aquel del resto del mercado y le permite obtener mejores ganancias. Ese "algo más" es la información. Ya sea a través de contactos dentro de una empresa o un segmento de negocios, porque él mismo está en conocimiento de elementos aún no divulgados al público general, o porque legítimamente sus estudios y conocimiento expertos del mercado así lo permiten, este agente (conocido como "insider") tiene a su disposición mayores herramientas a la hora de elegir su portafolio que el resto del mundo. Si bien en la práctica esta información privilegiada suele venir en la forma de noticias aún no divulgadas sobre resultados de una compañía o sobre perspectivas futuras de esta (como que se esté negociando una fusión), lo que hace difícilmente cuantificable a priori el efecto de esta información en los precios bursátiles, en la teoría matemática esta información se traduce en algún conocimiento sobre los precios futuros.

Dentro del tipo de información privilegiada que ha sido modelada, destacan los enfoques de "información inicial", "información progresiva" e "información débil". La información inicial consiste en el conocimiento perfecto (es decir bajo cualquier escenario aleatorio) de alguna variable futura contingente al mercado financiero modelado, cuya información es conocida completamente por el agente desde el inicio. En tanto la información progresiva se refiere a un conocimiento aproximado sobre dicha variable futura, que mejora a cada instante, hasta revelarse por completo en un instante final. Ambos tipos de información se modelan y estudian matemáticamente típicamente mediante la teoría de expansión de filtraciones ("Enlargement of Filtration", "Grossissement de Filtrations") o el cálculo estocástico anticipativo (ver [Pon05]). En tanto, información débil se refiere al conocimiento de la distribución de la variable futura, mas no a su valor en cada escenario (ver [Bau02]). Cabe señalar que por variable futura se puede entender, por ejemplo, uno o varios precios en uno o varios instantes futuros, precios promedio en algún intervalo futuro o razones entre precios, así como una variable que indique si determinados precios, promedios o razones superaron o no un cierto umbral, pertenecen a algún intervalo, etc. Además, una vez estudiado cómo percibe el mercado financiero el "insider", dada su información privilegiada, se puede responder a la pregunta de cómo realiza su selección de portafolio mediante las técnicas usuales de esta área (dualidad en mercados financieros, control óptimo, etc.).

En términos prácticos, no parece demasiado razonable que un agente pueda anticipar (por muy bien informado o conectado que esté) el valor exacto de alguna variable futura, ni siquiera si a esta se le suma un ruido que desaparece en el tiempo. Aún más, tampoco parece claro que se pueda anticipar en la práctica la distribución de esta variable. Por otro lado, se puede argumentar que un "insider" puede tener acceso a tendencias medias o esperadas respecto a esta variable o a alguna función de esta. Por ejemplo, podría anticipar que en el caso esperado, el precio final de una acción pertenezca a algún rango, o que un segmento del mercado se va a alinear ante una noticia y que por lo tanto la correlación entre los precios de dos acciones se acerque a uno. Aún más, podría en vez de suponer que la variable tomará un cierto valor, asumir que la probabilidad de que su valor revelado esté cerca de este valor anticipado sea alta. Todos los ejemplos mencionados tienen la característica común de que corresponden a promedios de funcionales de los precios futuros. Matemáticamente, la información privilegiada en estos casos, pensando en un mercado con horizonte de tiempo T y con d bienes cuyos precios en el instante t se denotan $S(t)$, se expresa como:

$$\left\{\mathbb{E}\left[F^i\left(S(t_1^i),\ldots,S(t_{n_i}^i)\right)\right]\in C^i : n_i\in\mathbb{N}, i\in\{1,\ldots,N,\}, 0<t_j^i\leq T\right\}, \tag{2.1.4}$$

donde C^i son conjuntos medibles (intervalos para simplificar) y las funciones F^i borelianas.

En este trabajo se le dará un sentido al problema de optimización de portafolio asociado a esta información privilegiada, de hecho en un contexto mucho más general. Para imponer las restricciones 2.1.4 se buscará un modelo minimal que las garantice, lo que se traducirá en buscar dentro de las medidas de probabilidad que las satisfacen, aquella de "peor caso". Es aquí donde aparece la conexión con la optimización robusta de portafolio, por cuanto un insider con información privilegiada como en 2.1.4 querrá maximizar sobre sus estrategias factibles la siguiente expresión:

$$\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U(X_T)],$$

donde X_T es la riqueza asociada a su estrategia y $\mathcal{Q}=\{\mathbb{Q}\ll\mathbb{P} : 2.1.4 \text{ se satisface bajo } \mathbb{Q}\}$.

2.2. Dualidad para el Problema Robusto

En esta parte se seguirá principalmente el desarrollo de [SW05], donde se resuelve el problema robusto bajo una cierta condición de compacidad sobre el conjunto de modelos factibles.

Sean d acciones y un bono, que se considera spg. numerario (es decir, su valor es constante). Sea $S = (S^i)_{1\leq i\leq d}$ el proceso de precios, y $T < \infty$ un horizonte de tiempo. En el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F})_{t\leq T}, \mathbb{R})$, se asume que S es una semimartingala. En adelante $\mathbb{R}$ será siempre la medida de referencia y a menos que se indique explícitamente lo contrario, $\mathbb{E}$ (sin superíndice)denotará la esperanza bajo esta medida.

Un portafolio (autofinanciante) π se define como el par (x, H), donde la constante x es el valor inicial del portafolio y $H = (H^i)_{i=1}^d$, que denota la cantidad de acciones en posesión, es previsible y S-integrable.

Se define la riqueza de un portafolio π al proceso $X = (X_t)_{t\leq T}$ dado por:

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_u dS_u. \tag{2.2.1}$$

Se define el conjunto de riquezas finales admisibles desde x, como:

$$\mathcal{X}(x) = \{X \geq 0 : X \text{ como en } 2{,}2{,}1, \text{ tq. } X_0 \leq x\}. \tag{2.2.2}$$

Además, se define el conjunto de medidas martingalas locales equivalentes (o neutras al riesgo) asociadas a S como:

$$\mathcal{M}^e(S) = \{\mathbb{P} \sim \mathbb{R} : \text{ todo } X \in \mathcal{X}(1) \text{ es una } \mathbb{P}\text{-martingala local}\}. \tag{2.2.3}$$

Si S resulta ser localmente acotado, entonces el conjunto anterior se puede describir más simplemente como:

$$\mathcal{M}^e(S) = \{\mathbb{P} \sim \mathbb{R} : S \text{ es una } \mathbb{P}\text{-martingala local}\}.$$

Un mercado se dice **completo** si este conjunto se reduce a un singleton, i.e., $\mathcal{M}^e(S) = \{\mathbb{P}\}$.

Definición 2.2.1.
Se dice que una función $U : (0, \infty) \to (-\infty, +\infty)$ es una *función de utilidad en* $[0, +\infty)$, si es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continuamente diferenciable. Naturalmente se asumirá que una tal función se extiende por $-\infty$ en $(-\infty, 0]$.
Se dirá que satisface INADA si $U'(0+) = \infty$ y $U'(+\infty) = 0$, y se define además su elasticidad asintótica como $AE(U) = \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)}$.

De gran utilidad para el análisis que sigue será la conjugada de U (que es la conjugada de Fenchel de $-U(-\cdot)$), definida por:

$$V(y) = \sup_{x>0}[U(x) - xy] \ , \forall y > 0. \tag{2.2.4}$$

Notar que para una función de utilidad en $[0,+\infty)$ que satisface INADA, se tiene que $V(y) = U\circ I(y) - yI(y)$, donde $I = [U']^{-1}$.

Para representar la ambigüedad o incerteza de modelo, se introduce el conjunto de medidas de probabilidad factibles, $\mathcal{Q}$, que define el problema de optimización robusta. Sobre este, se realizan las siguientes suposiciones:

Suposición 2.2.1.

1. $\mathcal{Q}$ es convexo.
2. $\mathbb{R}(A) = 0$ si y solo si $[\mathbb{Q}(A) = 0, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}]$.
3. El conjunto $\mathcal{Z} := \left\{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{R}} | \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\right\}$ es cerrado en $L^0(\mathbb{R})$.

Aquí, $L^0(\mathbb{R})$ denota el espacio de las funciones medibles con la convergencia en probabilidad. Cabe señalar, que tal como se muestra en el *Lema 3.2* de [SW05], dadas las suposiciones (1) y (2), la (3) es equivalente a que $\mathcal{Z}$ sea $\sigma(L^1, L^\infty)$-compacto. Además, también bajo la suposición 2.2.1, el Teorema de Halmos-Savage (ver *Teorema 1.1* [KS96]) garantiza la existencia de al menos un $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ equivalente a la medida de referencia.

En el caso de mercados incompletos, será de vital importancia el siguiente conjunto, que generaliza a aquél de los procesos asociados a las densidades, con respecto a $\mathbb{Q}$, de las medidas neutras al riesgo equivalentes a $\mathbb{Q}$:

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}(y) := \{Y \geq 0 | Y_0 = y \ ,\ XY \text{ es } \mathbb{Q}-\text{supermartingala } \forall X \in \mathcal{X}(1)\}\,. \tag{2.2.5}$$

Para el siguiente Teorema, serán útiles las siguientes definiciones:

$$u(x) = \sup_{X\in\mathcal{X}(x)} \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(U\left(X_T\right)\right) \tag{2.2.6}$$

$$u_{\mathbb{Q}}(x) = \sup_{X\in\mathcal{X}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(U\left(X_T\right)\right) \tag{2.2.7}$$

$$v_{\mathbb{Q}}(y) = \inf_{Y\in\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}(y)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(V\left(Y_T\right)\right) \tag{2.2.8}$$

$$v(y) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}_e} v_{\mathbb{Q}}(y), \tag{2.2.9}$$

donde $\mathcal{Q}_e := \{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q} | \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}\}$.
Así, u es la utilidad robusta del inversionista y $u_{\mathbb{Q}}$ su utilidad “subjetiva” bajo el modelo $\mathbb{Q}$. Por otro lado v y $v_{\mathbb{Q}}$ corresponden respectivamente a sus candidatas a funciones conjugada.

En la misma línea que en el caso clásico (en que $\mathcal{Q}$ corresponde a un singleton), en [SW05] se demuestran los siguientes resultados.

Teorema 2.2.1 (*Teorema 2.2*, [SW05])**.**
Además de la suposición 2.2.1, supóngase que:

$$\exists x > 0, \mathbb{Q}_0 \in \mathcal{Q}_e \text{ tales que } u_{\mathbb{Q}_0}(x) < \infty. \tag{2.2.10}$$

Entonces la función u es cóncava, finita, y satisface:

$$u(x) := \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(U \left(X_T \right) \right) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(U \left(X_T \right) \right). \tag{2.2.11}$$

Aún más, las funciones u y v son conjugadas:

$$u(x) = \inf_{y>0} \left(v(y) + xy \right) \ , \ y \ , \ v(y) = \sup_{x>0} \left(u(x) - xy \right). \tag{2.2.12}$$

En particular, v es convexa. Se tiene además que las derivadas satisfacen:

$$u'(0+) = \infty \ , \ y \ , \ v'(\infty-) = 0. \tag{2.2.13}$$

Teorema 2.2.2 (*Teorema 2.6*, [SW05])**.**
Si además de la suposición 2.2.1 se supone:

$$v_{\mathbb{Q}}(y) < \infty, \forall y > 0, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e, \tag{2.2.14}$$

entonces las derivadas de las funciones valor cumplen:

$$v'(0+) = -\infty \ , \ y \ , \ u'(\infty-) = 0, \tag{2.2.15}$$

y $\forall x > 0$, $\exists \hat{X} \in \mathcal{X}(x)$ y una medida $\hat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$ tales que:

$$u(x) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[U \left(\hat{X}_T \right) \right] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}} \left[U \left(\hat{X}_T \right) \right] = u_{\hat{\mathbb{Q}}}(x), \tag{2.2.16}$$

es decir, los supremos e ínfimos en 2.2.11 se alcanzan. Además, existe $\hat{y}$ en el superdiferencial de u en x, y algún $Y \in \mathcal{Y}_{\mathbb{R}}(\hat{y})$ tales que:

$$v(\hat{y}) = \mathbb{E} \left[\hat{Z} V \left(\frac{Y_T}{\hat{Z}} \right) \right] \ , \ y \ , \ \hat{X}_T = I \left(\frac{Y_T}{\hat{Z}} \right) \ (\hat{\mathbb{Q}} - cs), \tag{2.2.17}$$

donde $\hat{Z} = \frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{R}}$ y $I = -V' = (U')^{-1}$. Aún más, $\hat{X}Y$ es una $\mathbb{R}$-martingala y v satisface:

$$v(y) = \inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}^e(S)} \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[V \left(y \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right) \right]. \tag{2.2.18}$$

Si adicionalmente $AE(U) < 1$, entonces u es estrictamente cóncava, v es continuamente diferenciable, y:

$$\left\{ \hat{X}_T Y_T > 0 \right\} = \left\{ \hat{Z} > 0 \right\} \ (\mathbb{R}\text{-}cs). \tag{2.2.19}$$

Tal como se señala en [SW05], la condición 2.2.14 se cumple cuando $u_{\mathbb{Q}}$ es finita $\forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e$ y $AE(U) < 1$.

Observación 1.

- La suposición de que $\mathcal{Z}$ es cerrado en L^0 (equivalentemente, bajo (1) y (2) en 2.2.1, a que sea débilmente compacto en L^1) es crucial en partes clave de los argumentos empleados en estos Teoremas. Por ejemplo, 2.2.11 es una consecuencia de esto, así como la expresión para $v(\hat{y})$ en 2.2.17

- En [FG06], los autores estudian este problema a su vez (más el caso de funciones de utilidad en todo los reales). El enfoque ahí utilizado es, a grandes rasgos, el de "proyectar" (sobre $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{M}$) mediante un funcional. En este caso, en vez de trabajar con procesos en $\mathcal{Y}$, los autores trabajan con medidas en un espacio de probabilidad expandido. Para esto, es igualmente necesario las suposiciones sobre $\mathcal{Z}$, y además se requiere cierta estructura (topología) en el espacio de probabilidad original.

2.3. Minimización de Funcionales de Entropía

En la literatura sobre Minimización de Funcionales de Entropía (Energía o Divergencia), el objeto de estudio son funcionales en forma integral actuando sobre algún conjunto de medidas (o sus densidades con respecto a una medida de referencia). El problema de interés es maximizar o minimizar dicho funcional, bajo ciertas restricciones. En esta sección se seguirá el artículo [Léo08], el que estudia el problema en gran generalidad, bajo "restricciones convexas".

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ un espacio de probabilidad (completo), y sea $\gamma^* : \Omega \times (-\infty, \infty) \to [0, \infty]$ una función medible, tal que $\gamma^*_\omega(\cdot) := \gamma^*(\omega, \cdot)$ es convexa y s.c.i., $\forall \omega$. Sea además M_Ω el espacio de las medidas con signo sobre Ω. Se define el **funcional de entropía**, que será la función objetivo del problema, como:

$$I(\mathbb{Q}) \quad = \quad \begin{cases} \int_\Omega \gamma^*_\omega \left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{R}}(\omega)\right) \mathbb{R}(d\omega) & \text{si } \mathbb{Q} \ll \mathbb{R} \\ +\infty & \text{si no,} \end{cases} \tag{2.3.1}$$

con $\mathbb{Q} \in M_\Omega$.
Para simplificar (con respecto a [Léo08]), se hace la suposición:

$$\gamma^*_\omega(m) = 0 \iff m = 0. \tag{2.3.2}$$

Notación 2.3.1. Al ser γ^*_ω convexa propia sci, es entonces la conjugada de una cierta función convexa propia sci para cada ω, la que se denotará γ_ω. Además, denotar γ_0 la versión par de γ siguiente:

$$\gamma_0(\omega, s) = \text{máx}\{\gamma(\omega, s), \gamma(\omega, -s)\}. \tag{2.3.3}$$

Antes de proseguir, se recuerdan las nociones de función de Young y espacios de Orlicz, que serán útiles en breve.

Definición 2.3.1.
Una función $\rho : \Omega \times (-\infty, \infty)$ se dice función de Young si para $\mathbb{R}-$casi todo ω, $\rho(\omega, \cdot)$ es convexa, par, a valores en $[0, \infty]$ tal que $\rho(\omega, 0) = 0$ y $0 < \rho(\omega, s(\omega)) < \infty$, para una cierta s medible.
Para una función de Young, se define el espacio de **Orlicz**:

$$L_\rho(\Omega, \mathbb{R}) := \left\{ u : \Omega \to (-\infty, \infty) | \exists \alpha_0 > 0, \int \rho(\omega, \alpha_0 |u(\omega)|) \mathbb{R}(d\omega) < \infty \right\}, \tag{2.3.4}$$

y su subespacio de interés:

$$E_\rho(\Omega, \mathbb{R}) := \left\{ u : \Omega \to (-\infty, \infty) | \forall \alpha > 0, \int \rho(\omega, \alpha |u(\omega)|) \mathbb{R}(d\omega) < \infty \right\}. \tag{2.3.5}$$

Con la norma $||u||_\rho = \text{ínf}\left\{\beta > 0 : \int \rho(\omega, |u(\omega)|/\beta) \leq 1\right\}$ el espacio L_ρ (de clases de equivalencia, que se denotará igual) es un Banach, el que se inyecta continuamente en L^1 si el espacio es de medida finita. Además, cuando una función de Young ρ es finita, el dual de E_ρ es isomorfo a L_{ρ^*}. Ver [RR91] para una discusión en profundidad de estos conceptos y propiedades. Por otra lado, L_ρ se tomará como abreviación de $L_\rho(\Omega,\mathbb{R})$, y cuando L_{ρ^*} se entienda como un subespacio de un dual o todo el dual de alguien, se denotará también $L_{\rho^*}\mathbb{R}$ identificándose $f \in L_{\rho^*}$ con la medida $f\mathbb{R}$ (o $fd\mathbb{R}$) que la tiene por densidad.

Notación 2.3.2.
Para definir las restricciones del problema se consideran los espacios vectoriales $\mathcal{X}_0$, donde toman valores las restricciones, y $\mathcal{G}_0$, tales que $\mathcal{X}_0 = (\mathcal{G}_0)^*$ (dualidad algebraica).
Se definen además los operadores $\theta : \Omega \to \mathcal{X}_0$ y $T_0^* : \mathcal{G}_0 \mapsto T_0^*\mathcal{G}_0$, con $T_0^*g(\omega) = \langle g, \theta(\omega)\rangle_{\mathcal{G}_0,\mathcal{X}_0}$.
Si $T_0^*\mathcal{G}_0 \subset L_{\gamma_0}$, se puede construir el operador de restricciones $T_0 : L_{\gamma_0^*}\mathbb{R} \mapsto \mathcal{X}_0$ mediante $T_0 f := \int_\Omega \theta df$, para $f \in L_{\gamma_0^*}\mathbb{R} := \left\{\mathbb{Q} \ll \mathbb{R} | \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{R}} \in L_{\gamma_0^*}\right\}$, por medio de:

$$\left\langle g, \int \theta dl \right\rangle_{\mathcal{G}_0,\mathcal{X}_0} = \int_\Omega \langle g, \theta(\omega)\rangle_{\mathcal{G}_0,\mathcal{X}_0} l(d\omega). \qquad (2.3.6)$$

La definición y existencia de T_0 viene de la desigualdad de Hölder en espacios de Orlicz (ver A.0.2), pues así $\int_\Omega \langle g, \theta(\omega)\rangle_{\mathcal{G}_0,\mathcal{X}_0} l(d\omega) \le 2|| \langle g, \theta\rangle_{\mathcal{G}_0,\mathcal{X}_0} ||_{L_{\gamma_0}} ||dl/d\mathbb{R}||_{L_{\gamma_0^*}}$, de donde para cada g fijo se induce un operador lineal continuo.

Con todos estos ingredientes, se plantea el problema de minimización de la entropía siguiente:

$$\textit{Minimizar } I(\mathbb{Q}) \text{ s.a. } \int_\Omega \theta d\mathbb{Q} \in C \ , \ \mathbb{Q} \in L_{\gamma_0^*}\mathbb{R}, \qquad \text{(PC)}$$

donde $C \subset \mathcal{X}_0$ es un convexo. Notar que la restricción dice que $T_0(d\mathbb{Q}/d\mathbb{R}) \in C$.
A continuación se resumen las principales suposiciones sobre los "ingredientes" del problema que permitirán llegar a una solución satisfactoria de este.

Suposición 2.3.1.

- $T_0^*\mathcal{G}_0 \subset E_{\gamma_0}$, o equivalentemente, $\forall g \in \mathcal{G}_0, \int \gamma\left(\langle g, \theta\rangle\right) d\mathbb{R} < \infty$.
- $\gamma^*(\cdot, s)$ es medible para todo s. Para $\mathbb{R}-$casi todo ω, $\gamma^*(\omega,\cdot)$ es sci, convexa (estrictamente en su dominio) y a valores en $[0,\infty]$ tal que $[\forall z : \gamma^*(z,m) = 0 \iff m = 0]$.
- $\forall g \in \mathcal{G}_0$, la función $\omega \in \Omega \mapsto \langle g, \theta(\omega)\rangle$ es medible.
- $\forall g \in \mathcal{G}_0$, $[\langle g, \theta(\cdot)\rangle = 0, \mathbb{R}\text{-cs.} \Rightarrow g = 0]$.

Para presentar el problema dual a (PC) es necesario introducir un par de notaciones y definiciones.

Notación 2.3.3.
Sea $\mathcal{G}$ la completación de $\mathcal{G}_0$ con la norma $|g|_\Gamma := ||\langle g, \theta\rangle||_{\gamma_0}$ (que es isomorfo a la cerradura de $\{\langle g, \theta\rangle | g \in \mathcal{G}_0\}$ en L_{γ_0}, lo que sale fácilmente de los supuestos anteriores), y $\mathcal{X} = \mathcal{G}'$ su dual topológico.
Será útil considerar la conjugada de la función $\Gamma(g) := \int \gamma(\langle g, \theta\rangle) d\mathbb{R}$, para $g \in \mathcal{G}_0$, a saber: $\Gamma^*(x) = \sup_{g\in\mathcal{G}_0} \{\langle g, x\rangle - \Gamma(g)\}$, con $x \in \mathcal{X}_0$.

Con esto, el problema Dual es:

$$\textit{Maximizar} \inf_{x \in C \cap \mathcal{X}} \langle g, x \rangle - \int \gamma(\langle g, \theta \rangle) d\mathbb{R} \ , \ g \in \mathcal{G}. \tag{DC}$$

Aún más, será de utilidad considerar la extensión de este problema como sigue:

Sea $K_\gamma := \{u \text{ medible} | \exists a > 0, \int \gamma_\omega(au)\mathbb{R}(d\omega) < \infty\}$, y $\tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{X}^*$ el cono convexo que es isomorfo a la $\sigma(K_\gamma, L_\pm)$ clausura en K_γ de $T_0^* \mathcal{G}_0$. Se dice que u pertenece a la $\sigma(K_\gamma, L_\pm)$ clausura de un conjunto A si u_+ y u_- están respectivamente en la $\sigma(L_{\gamma_<}, L_{\gamma^*_<})$ y $\sigma(L_{\gamma_>}, L_{\gamma^*_>})$ clausura de los conjuntos A_+ y A_-, donde el subíndice $\pm$ se refiere a la o las partes positivas y negativas de el o los elementos en un conjunto. Además $\gamma_<(s) := \gamma(|s|)$ y $\gamma_>(s) := \gamma(-|s|)$ (ver la sección 3 de [Léo08] para los detalles). Con lo anterior se define el problema dual extendido como sigue:

$$\textit{Maximizar} \inf_{x \in C \cap \mathcal{X}} \langle \tilde{g}, x \rangle - \int \gamma(\langle \tilde{g}, \theta \rangle) d\mathbb{R} \ , \ \tilde{g} \in \tilde{\mathcal{G}}. \tag{$\tilde{DC}$}$$

Para el siguiente Teorema clave, se requiere la noción de dominio, subespacio afin e "intrinsic core". Dada una función f a valores reales sobre un espacio vectorial topológico B, su dominio es $dom(f) = \{b \in B | f(b) < \infty\}$. Además, el subespacio afin $\text{aff}(A)$ de $A \subset B$ es el menor subespacio afin que le contiene, y su "intrinsic core" es $icor(A) = \{a \in A | \forall x \in \text{aff}(A), \exists t > 0 \text{ tq. } a + t(x - a) \in A\}$.
Finalmente, se requerirá que el conjunto C satisfaga una cierta condición de cerradura:

Suposición 2.3.2.
El conjunto convexo $C \subset \mathcal{X}_0$ es tal que $T_0^{-1}C \cap L_{\gamma_0^*}\mathbb{R}$ es un subconjunto $\sigma(L_{\gamma_0^*}\mathbb{R}, E_{\gamma_0})$-cerrado de $L_{\gamma_0^*}\mathbb{R}$. En otros términos:

$$T_0^{-1}C \cap L_{\gamma_0^*}\mathbb{R} = \bigcap_{y \in A} \left\{ f\mathbb{R} \in L_{\gamma_0^*}\mathbb{R} | \int \langle y, \theta \rangle f d\mathbb{R} \geq a_y \right\},$$

para un cierto conjunto A de $\mathcal{X}_0^*$ tal que $\langle y, \theta \rangle \in E_{\gamma_0}, \forall y \in A$, y una cierta función real $y \in A \mapsto a_y$.

Con todo esto, se presenta una versión simplificada del *Teorema 3.2* de [Léo08]

Teorema 2.3.1.
Considerar las suposiciones 2.3.2 y 2.3.1, más lo siguiente:

$$\textit{Para } \mathbb{R} - \textit{casi todo } \omega : \lim_{t \to \pm\infty} \frac{\gamma^*_\omega(t)}{t} = +\infty. \tag{2.3.7}$$

Entonces:

- *Se tiene igualdad dual para* (PC): $\inf(PC) = \sup(DC) \in [0, \infty]$.
- *Si* $C \cap T_0 dom(I) \neq \emptyset$, *entonces* (PC) *admite una solución única* $\hat{\mathbb{Q}} \in L_{\gamma_0^*}\mathbb{R}$.

Suponiendo además que $C \cap icor(T_0 dom(I)) \neq \emptyset$:

- *Definir* $\hat{x} = \int \theta d\hat{\mathbb{Q}}$. *Entonces existe* $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{G}}$ *tal que:*

$$\begin{cases} (a) & \hat{x} \in C \cap dom\left(\Gamma^*\right), \\ (b) & \langle \tilde{g}, \hat{x} \rangle_{\mathcal{X}_0^*, \mathcal{X}_0} \leq \langle \tilde{g}, x \rangle_{\mathcal{X}_0^*, \mathcal{X}_0}, \forall x \in C \cap dom\left(\Gamma^*\right), \\ (c) & \hat{\mathbb{Q}}(d\omega) = \gamma'_\omega\left(\langle \tilde{g}, \theta(\omega) \rangle\right) \mathbb{R}(d\omega). \end{cases} \tag{2.3.8}$$

  Aún más, $\hat{\mathbb{Q}} \in L_{\gamma_0^*}\mathbb{R}$ *y* $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{G}}$ *satisfacen 2.3.8 (a,b,c) si y sólo si* $\hat{\mathbb{Q}}$ *resuelve* (PC) *y* $\tilde{g}$ *resuelve* $(\tilde{DC})$.

- *Se tiene que* $\hat{x} = \int \theta \gamma' \left(\langle \tilde{g}, \theta \rangle\right) d\mathbb{R}$. *Más aún:*

  1. $\hat{x}$ *minimiza* Γ^* *sobre* C,
  2. $I\left(\hat{\mathbb{Q}}\right) = \Gamma^*\left(\hat{x}\right) = \int \gamma^* \circ \gamma'\left(\langle \tilde{g}, \theta \rangle\right) d\mathbb{R} < \infty$,
  3. $I\left(\hat{\mathbb{Q}}\right) + \int \gamma\left(\langle \tilde{g}, \theta \rangle\right) d\mathbb{R} = \int \langle \tilde{g}, \theta \rangle \, d\hat{\mathbb{Q}}$.

Capítulo 3

El Problema de Optimización Robusta bajo Incerteza Lineal en el Modelo

En esta sección se estudiará el problema de optimización robusta cuando la incerteza en los modelos es "lineal" (de la forma $T\mathbb{Q} \in C$). En una primera instancia se mantiene la hipótesis de compacidad sobre este conjunto de modelos. Luego esta restricción se levanta y se muestra cómo resolver el problema bajo la suposición de que cierto espacio de Orlicz sea reflexivo. Con esto, en el caso de incerteza lineal, se obtiene un resultado general más fuerte que aquellos encontrados en la literatura. Finalmente, se explora la conexión entre el problema robusto y el problema de "insider trading" con (flujos de) información débil.

3.1. Funciones Relevantes

Sea un espacio de probabilidad filtrado y completo $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\leq T}, \mathbb{R})$, donde se asume que S es una semimartingala localmente acotada. Se considerará un agente (inversionista) que desea maximizar su utilidad robusta en este mercado. Se empleará toda la notación de la sección 2 (en particular, U y V). En adelante U es una función utilidad en $[0, \infty)$ que satisface INADA.

A continuación, algunas definiciones que servirán para relacionar las secciones 2.2 y 2.3:

Definición 3.1.1.
Para V como en 2.2.4 y $l \geq 0$, se define la función real:

$$\gamma_l^*(z) \quad = \quad \begin{cases} \infty & \text{si } z < 0, \\ zV\left(\frac{l}{z}\right) & \text{si } z \geq 0. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Se define además $\eta^*(l, z) := \gamma_l^*(z)$. Notar que γ_l^* es convexa semicontinua inferior propia (se hereda a partir de V, que es convexa sci pues es la conjugada de Fenchel de $-U(-\cdot)$, al entenderse que $U(x) = -\infty$ si $x < 0$). Por lo tanto, $\forall l, \exists \gamma_l$ tal que su conjugada efectivamente es γ_l^*. Notar que γ_l es a su vez convexa y s.c.i.

Antes de seguir, se verán algunas propiedades de la función γ_l:

Lema 3.1.1.
Sea $\gamma_l^*(\cdot)$ definida como en 3.1.1. Entonces:

- $\gamma_l^*(\cdot)$ *es sci, convexa, finita en los reales positivos, y es la conjugada de una función γ_l, que es a su vez convexa, sci y propia. Aún más, $\gamma_l(\cdot) = l\gamma_1(\cdot), \forall l > 0$*

Suponer además que $\gamma_l^*(\cdot)$ toma valores en $[0, \infty]$ y es tal que $[\gamma_l^*(m) = 0 \iff m = 0]$. Entonces:

- $\forall l > 0$, *$\gamma_l(\cdot)$ es no negativa, no idénticamente nula y $\gamma_l(x) = 0$ si $x \leq 0$*

Finalmente, si $\gamma_l^*(\cdot)$ es estrictamente convexa en su dominio y $\lim_{t\to+\infty} \frac{\gamma_l^*(t)}{t} = +\infty$, entonces:

- $\forall l > 0$, *$\gamma_l(\cdot)$ es finita y diferenciable en todas partes.*

Demostración. El primer punto sigue de la discusión más arriba, donde $\gamma_l := [\gamma_l^*]^*$. Ahora γ_l^* es finita en los reales positivos pues $V(y) = U \circ I(y) - yI(y)$ es finita, donde I es la inversa de U'. Además,

$$\gamma_l(x) = \sup_{y>0}[xy - yV(l/y)] = l \sup_{z>0}[xz - zV(1/z)] = l\gamma_1(x).$$

Para el segundo punto, como $\gamma_l(x) = \sup_y[xy - \gamma_l^*(y)]$, entonces $\gamma_l(x) \geq [-\gamma_l^*(0)] = 0$, ie. es no negativa. Además, $\gamma_l(0) = \sup_y[-\gamma_l^*(y)] \leq 0$, de donde $\gamma_l(0) = 0$. Si $x < 0$, $\gamma_l(x) = \sup_{y\geq 0}[xy - \gamma_l^*(y)] \leq 0$. Finalmente γ_l no es idénticamente nula, pues si lo fuera, γ_l^* valdría infinito, lo que contradice el primer punto.
Para el tercer punto, notar que $\lim_{t\to+\infty} \frac{\gamma_l^*(t)}{t} = +\infty$ implica que la función de recesión de γ_l^* es idénticamente infinito, es decir, γ_l^* es co-finita en el sentido del *Corolario 13.3.1*, de [Roc70], lo que según este mismo equivale a que γ_l sea finita. Aún más, a partir del *Teorema 26.3* de [Roc70], la convexidad de $\gamma_l^*(\cdot)$ más la convexidad estricta en su dominio (que implican que esta función sea esencialmente estrictamente convexa), implican por este resultado que $\gamma_l(\cdot)$ sea esencialmente suave. Como esta última es finita, ello quiere decir que esta sea diferenciable en todas partes.

$\diamond$

Ahora, se establecen algunas propiedades de γ, V y U, y conexiones entre ellas.

Lema 3.1.2.
Si U es una función de utilidad en $[0, \infty)$, tal que $U(0+) = 0$ y que satisface INADA, entonces V es finita y diferenciable (en $[0, \infty)$), estrictamente decreciente, estrictamente positiva, y satisface:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{V(x)}{x} = 0, \tag{3.1.2}$$

$$V(0) = \lim_{x\to\infty} U(x). \tag{3.1.3}$$

Aún más, la función $\eta^*(l, z) := \gamma_l^*(z)$ es convexa y continuamente diferenciable en $(0, +\infty)^2$. Si U satisface además que $AE(U) < 1$, entonces $\forall\lambda > 0, \exists : a(\lambda) > 0, b(\lambda) > 0$ tales que:

$$V(\lambda y) \leq a(\lambda)V(y) + b(\lambda)(y + 1)\ ,\ \forall y. \tag{3.1.4}$$

Demostración. Los resultados 3.1.2, 3.1.3 y 3.1.4, más la diferenciabilidad de η^* aparecen en el *Lema 2.1.6* de [Gun06] (notando que en su notación, $x_u = 0$). V es finita pues $V(y) = U \circ I(y) - yI(y)$, donde I es la inversa de U', y es diferenciable pues U es estrictamente cóncava. Aún más, $V' = -I$, y notando que $I(\cdot) > 0$, resulta que V es estrictamente decreciente. Por definición $V(y) \geq U(0+) = 0$, y esto más su decrecimiento estricto implican su positividad estricta. En tanto, la convexidad conjunta de η^* viene de la observación hecha en (21) en [SW05].

◇

Suposición 3.1.1. *U es una función de utilidad en $[0,\infty)$, no acotada, tal que $U(0+) = 0$, y que satisface INADA.*

Observación 2. Bajo la suposición anterior, y gracias al Lema 3.1.2, todas las propiedades y suposiciones para γ y γ^* en el Lema 3.1.1 son satisfechas. Además, si más generalmente $U(0+) > -\infty$ solamente, entonces por traslación igualmente se puede suponer spg que $U(0+) = 0$.

En la definición de los espacios de Orlicz de interés, será necesario trabajar con la función $\gamma_{l,0}(\cdot) := \text{máx}\{\gamma_l(\cdot), \gamma_l(-\cdot)\} = \gamma_l(|\cdot|)$, pues γ_l vale 0 en los reales negativos. A continuación se establece una relación entre las conjugadas de γ_l y $\gamma_{l,0}$:

Lema 3.1.3.
Bajo la suposición 3.1.1, se tiene que $(\gamma_{l,0})^*(\cdot) = \gamma_l^*(|\cdot|) \leq \gamma_l^*(\cdot), \forall l > 0$.

Demostración. Como $\gamma_l(|\cdot|) \geq \gamma_l(\cdot)$, entonces $(\gamma_{l,0})^*(\cdot) \leq \gamma_l^*(\cdot)$.
Se tiene que $(\gamma_{l,0})^*(y) = \sup_x\{xy - \gamma_l(|x|)\} = \sup_{x>0}\{x|y| - \gamma_l(x)\}$. Así, si $y > 0$, $\sup_{x>0}\{xy - \gamma_l(x)\} = (\gamma_{l,0})^*(y) \leq \gamma_l^*(y) = \text{máx}\{\sup_{x>0}\{xy - \gamma_l(x)\}, \sup_{x\leq 0}\{xy - \gamma_l(x)\}\}$. Ahora, se verá que $\sup_{x>0}\{xy - \gamma_l(x)\} \geq \sup_{x\leq 0}\{xy - \gamma_l(x)\} = \sup_{x\leq 0}\{xy\}$. Para esto, dado $c \leq 0$ se verá que $\exists z > 0$ tal que $cy \leq zy - \gamma_l(z)$, ie., que $\gamma_l(z) \leq (z - c)y$. Notar que $\gamma_l(\cdot)$ por la suposición es continua. Así $\exists a_0 > 0$ tal que $\forall 0 < a \leq a_0$, $\gamma_l(a) \leq y$. Fijar ahora $0 < a \leq \text{mín}\{a_0, 1\}$, y, $0 < x \leq \text{mín}\{1, \frac{c}{a-1}\}$. Por convexidad, sigue que $\gamma_l(ax) = \gamma_l(ax + 0(1-x)) \leq x\gamma_l(a) \leq xy$. Pero como $x \leq \frac{c}{a-1}$, entonces $x \leq ax - c$, de donde $xy \leq (ax - c)y$, y por lo tanto $\gamma_l(ax) \leq (ax - c)y$. Luego tomando $z = ax > 0$, se concluye que si $y > 0$, $(\gamma_{l,0})^*(y) = \gamma_l^*(y)$. Pero $(\gamma_{l,0})^*$ es par, como se ve del comienzo de la demostración, lo que concluye la demostración.

◇

En adelante, γ se tomará como abreviación de γ_1 (así, $\gamma_l = l\gamma$), y γ_0 como abreviación de $\gamma_{1,0}$.

3.2. Optimización Robusta, caso Completo y $\frac{d\mathcal{Q}}{d\mathbb{R}}$ Débil Compacto Lineal

En esta parte se retomará el problema de Optimización Robusta introducido en la sección 2.2, pero especializado en el contexto de ambigüedad o incerteza "lineal" de modelo. Se asume el contexto y notación de la sección anterior, además de las definiciones de la sección 2.2. Aún más, se asume la suposición 3.1.1.

Sean espacios vectoriales $\mathcal{X}_0$ y $\mathcal{G}_0$, tales que $\mathcal{X}_0 = (\mathcal{G}_0)^*$ (dualidad algebraica), un operador $\theta : \Omega \to \mathcal{X}_0$ y $C \subset \mathcal{X}_0$ un convexo. Se define $T_0^* g(\omega) = \langle g, \theta(\omega) \rangle_{\mathcal{G}_0, \mathcal{X}_0}$ y $T_0 f := \int_\Omega \theta df$, para $f \in L_{\gamma_0^*}\mathbb{R}$, tal como en la sección 2.3 (se asume aquí que $T_0^* \mathcal{G}_0 \subset L_{\gamma_0}\mathbb{R}$). Recuérdese la notación sobre espacios de Orlicz ahí introducida.

En esta parte el mercado se supondrá completo, con $\mathcal{M}_e = \{\mathbb{P}\}$.

Definición 3.2.1.
Se define el conjunto de modelos (medidas) factibles como:

$$\mathcal{Q} := \left\{ \mathbb{Q} = Z\mathbb{R} \in L_{\eta_0^*}\mathbb{R} | \mathbb{Q} \text{ es medida de probabilidad }, \int \theta Z d\mathbb{R} \in C \right\}, \tag{3.2.1}$$

donde $\eta_0(\omega, \cdot) := \eta\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{R}}(\omega), |\cdot|\right)$, con $\eta(l,z) = \gamma_l(z)$ (γ_l^* definido como en 3.1.1).
Al igual que en la sección 2.2, se asume la suposición 2.2.1 (notar que la convexidad de $\mathcal{Q}$ se satisface siempre). Recordar que bajo esta suposición el conjunto $\frac{d\mathcal{Q}}{d\mathbb{R}} := \{d\mathbb{Q}/d\mathbb{R} : \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\} \subset L^1$ es débil compacto en L^1 (de ahí el nombre de esta sección).

Asumiendo todas las hipótesis del Teorema 2.2.2, se tiene la existencia, para cada $x > 0$, de un $\hat{y}$ en el superdiferencial de $u(x)$, un $\hat{Y} \in \mathcal{Y}_\mathbb{R}(\hat{y})$ y una $\hat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$ tales que:

$$v(\hat{y}) = \mathbb{E}^\mathbb{R}\left[\hat{Z} V\left(\frac{\hat{Y}_T}{\hat{Z}}\right)\right] \text{ , con } \hat{Z} = \frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{R}}.$$

Por el *Lema 4.3* de [KS99], se tiene en este caso que $Y \in \mathcal{Y}_\mathbb{R}(y) \Rightarrow Y_T \leq y\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{R}}$, y como V es decreciente, necesariamente:

$$v(\hat{y}) = \mathbb{E}^\mathbb{R}\left[\hat{Z} V\left(\hat{y}\frac{d\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{\hat{Z}}\right)\right] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}}\left[V\left(\hat{y}\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\right)\right]. \tag{3.2.2}$$

Definiendo $\mathcal{Z} := \left\{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{R}} | \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\right\}$ y $\mathcal{Z}_e = \{Z \in \mathcal{Z} | Z d\mathbb{R} \in \mathcal{Q}_e\}$, lo anterior se escribe equivalentemente como:

$$\begin{aligned}
v(\hat{y}) &= \inf_{Z \in \mathcal{Z}_e} \mathbb{E}^\mathbb{R}\left[Z V\left(\frac{\hat{y} d\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{Z}\right)\right] && (3.2.3)\\
&= \inf_{Z \in \mathcal{Z}} \mathbb{E}^\mathbb{R}\left[Z V\left(\frac{\hat{y} d\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{Z}\right)\right] && (3.2.4)\\
&= \inf_{Z \in \mathcal{Z}} \int \gamma_\omega^*(Z(\omega))\mathbb{R}(d\omega), && (3.2.5)
\end{aligned}$$

donde $\gamma^*_\omega(\cdot) := \gamma^*_{\hat{y}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{R}}(\omega)}(\cdot) = \eta^*\left(\hat{y}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{R}}(\omega), \cdot\right)$. La igualdad en 3.2.4 sale del siguiente Lema:

Lema 3.2.1.
Si $v(y) < \infty$, entonces:

$$v(y) = \inf_{Z\in\mathcal{Z}} \mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[ZV\left(\frac{yd\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{Z}\right)\right]. \tag{3.2.6}$$

Demostración. Por el *Lema 4.3* en [KS99], se tiene que

$$v(y) := \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}_e} v_{\mathbb{Q}}(y) = \inf_{Z\in\mathcal{Z}_e} \mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[ZV\left(\frac{yd\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{Z}\right)\right],$$

de donde $v(y) \geq \inf_{Z\in\mathcal{Z}} \mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[ZV\left(\frac{yd\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{Z}\right)\right]$.

Ahora, replicando el argumento en el *Lema 3.5* de [SW05], tomar $Z_1 \in \mathcal{Z}/\mathcal{Z}_e$ tal que $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[Z_1V\left(\frac{yd\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{Z_1}\right)\right] < \infty$. Como $v(y) < \infty$, $\exists Z_0 \in \mathcal{Z}_e$ tal que $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[Z_0V\left(\frac{yd\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{Z_0}\right)\right] < \infty$. Ahora, definiendo la función $t \in [0,1) \mapsto \mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[Z_tV\left(\frac{yd\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{Z_t}\right)\right]$, con $Z_t = tZ_1 + (1-t)Z_0$, esta resulta ser scs (pues es convexa y finita). De esto, $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[Z_1V\left(\frac{yd\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{Z_1}\right)\right] \geq \limsup_{t\to 1} \mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[Z_tV\left(\frac{yd\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{Z_t}\right)\right]$, lo que concluye la demostración.

$\diamond$

Es en este punto, gracias a 3.2.5, donde se hace evidente cómo la metodología de minimización de la entropía puede permitir resolver este problema. Para esto, se define:

$$I(Z) = I(Zd\mathbb{R}) := \int \gamma^*_\omega(Z(\omega))\mathbb{R}(d\omega). \tag{3.2.7}$$

Antes que todo, es necesario recordar que el problema de minimización de la entropía presentado, tenía lugar en el espacio de las medidas con signo integrables en $L_{\eta_0^*}$. Así, definínase $\bar{T}_0\mathbb{Q} = \left(\int d\mathbb{Q}, T_0\mathbb{Q}\right)$ y llámese $\bar{C} = \{1\} \times C$. De este modo, $[\bar{T}_0\mathbb{Q} \in \bar{C} \iff \mathbb{Q}$ integra $1, \int \theta d\mathbb{Q} \in C]$.
Notar que si $Z \in L_{\eta_0^*}$ es tal que Z_- es no nula ctp, por la definición de γ, se tiene que $I(Z) = +\infty$. Además, claramente $\mathrm{dom}(I) \subset L_{\eta_0^*}d\mathbb{R}$, lo que justifica que $\mathcal{Q}$ se sumerja a priori en este espacio. De todo esto sale que:

$$\mathbb{Q} \in \mathrm{dom}(I) \Rightarrow [\bar{T}_0\mathbb{Q} \in \bar{C} \iff \mathbb{Q} \text{ es medida de probabilidad}, \int \theta d\mathbb{Q} \in C]. \tag{3.2.8}$$

Notar que igualmente $\bar{T}_0\mathbb{Q} = \int(1,\theta)d\mathbb{Q}$ (pensado vectorialmente). En adelante, por conveniencia, θ denotará a este $(1,\theta)$ expandido. Igualmente se considerará $(-\infty,\infty)\times\mathcal{X}_0$ en vez de $\mathcal{X}_0$ (pero se denotará igual), y se modifica $\mathcal{G}_0$ de manera acorde.
Con todo esto en mente, definiendo $\bar{\mathcal{Q}} = \left\{\mathbb{Q} \in L_{\eta_0^*}d\mathbb{R} | \bar{T}_0\mathbb{Q} \in \bar{C}\right\}$, resulta que $v(\hat{y}) = \inf_{\mathbb{Q}\in\bar{\mathcal{Q}}} I(\mathbb{Q})$. Esto dice que el problema primal (PC) es equivalente a encontrar v, en el punto $\hat{y}$ que viene del Teorema 2.2.2.
En adelante se omitirá la barra sobre T, $\mathcal{Q}$ y C, entendiéndose que el contexto aclara la situación.
Con todo esto, es posible combinar los Teoremas 2.2.2 y 2.3.1 para obtener un resultado más potente. Por razones de orden, se explicitan las suposiciones mínimas relevantes:

Suposición 3.2.1. Sobre las Restricciones

- El conjunto convexo $C \subset \mathcal{X}_0$ es tal que $T_0^{-1}C \cap L_{\eta_0^*}\mathbb{R}$ es un subconjunto $\sigma(L_{\eta_0^*}\mathbb{R}, E_{\eta_0})$-cerrado de $L_{\eta_0^*}\mathbb{R}$. En otros términos:

$$T_0^{-1}C \cap L_{\eta_0^*}\mathbb{R} = \bigcap_{y \in A} \left\{ f\mathbb{R} \in L_{\eta_0^*}\mathbb{R} | \int \langle y, \theta \rangle f d\mathbb{R} \geq a_y \right\},$$

para un cierto conjunto A de $\mathcal{X}_0^*$ tal que $\langle y, \theta \rangle \in E_{\eta_0}, \forall y \in A$, y una cierta función real $y \in A \mapsto a_y$.

- $T_0^* \mathcal{G}_0 \subset E_{\eta_0}$, o equivalentemente, $\forall g \in \mathcal{G}_0 : \int \gamma\left(\langle g, \theta \rangle\right) d\mathbb{P} < \infty$.
- $\forall g \in \mathcal{G}_0$, la función $\omega \in \Omega \mapsto \langle g, \theta(\omega) \rangle$ es medible.
- $\forall g \in \mathcal{G}_0$, $[\langle g, \theta(\cdot) \rangle = 0, \mathbb{R}\text{-cs.} \Rightarrow g = 0]$.

Suposición 3.2.2. Sobre el Conjunto de Modelos

- $\mathbb{R}(A) = 0$ si y solo si $[\mathbb{Q}(A) = 0, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}]$.
- El conjunto $\mathcal{Z} := \left\{ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{R}} | \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \right\}$ es cerrado en $L^0(\mathbb{R})$.

Se recuerda que el problema de optimización robusta es $u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(U\left(X_T\right)\right)$, donde $\mathcal{Q} = \left\{ \mathbb{Q} = Zd\mathbb{R} \in L_{\eta_0^*}\mathbb{R} | \mathbb{Q} \text{ es medida de probabilidad }, \int \theta Z d\mathbb{R} \in C \right\}$ y $\eta_0(\omega, \cdot) := \eta\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{R}}(\omega), |\cdot|\right)$, con $\eta(l, z) = \gamma_l(z)$ y γ_l^* definido como en 3.1.1.

Proposición 3.2.1.
Considerar el problema de optimización robusta en un mercado completo (con $\mathcal{M}_e = \{\mathbb{P}\}$) recién descrito.
Asumir que se satisfacen las suposiciones 3.1.1, 3.2.1, 3.2.2, y que:

$$v_{\mathbb{Q}}(y) < \infty, \forall y > 0, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e. \tag{3.2.9}$$

Entonces se satisfacen todos los resultados del Teorema 2.2.2. En particular, para todo $x > 0$:

$$u(x) = v(\hat{y}) + x\hat{y} = u_{\hat{\mathbb{Q}}}(x) = \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}\left[U\left(\hat{X}_T\right)\right], \tag{3.2.10}$$

donde $\hat{y}$ está en el superdiferencial de $u(x)$, $\hat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$, $\hat{X} \in \mathcal{X}(x)$ tal que $\hat{\mathbb{Q}}-$cs: $\hat{X}_T = [U']^{-1}\left(\hat{y}\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\right)$.
Además:

$$v(\hat{y}) = \mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[\frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{R}} V\left(\hat{y}\frac{d\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{d\hat{\mathbb{Q}}/d\mathbb{R}}\right)\right] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}}\left[V\left(\hat{y}\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\right)\right] = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} I(\mathbb{Q}), \tag{3.2.11}$$

con $\mathcal{Q} = \left\{ \mathbb{Q} \in L_{\eta_0^*} d\mathbb{R} | T_0 \mathbb{Q} \in C \right\}$, e I como en 3.2.7. A este último problema (de minimización de la entropía) se le puede aplicar el Teorema 2.3.1. En particular:

$$v(\hat{y}) = \sup_{G \in \mathcal{G}} \left\{ \inf_{W \in C \cap \mathcal{X}} \langle G, W \rangle - \hat{y} \int \gamma(\langle G, \theta \rangle) d\mathbb{P} \right\}. \tag{3.2.12}$$

Además el problema de minimización en 3.2.11 posee siempre solución única.
Si adicionalmente $C \cap icor(T_0 dom(I)) \neq \emptyset$, entonces definiendo $\hat{W} = \int \theta d\hat{\mathbb{Q}}$, existe $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$ tal que:

$$\begin{cases} (a) & \hat{W} \in C \cap dom\,(\Gamma^*)\,, \\ (b) & \left\langle \tilde{G}, \hat{W} \right\rangle_{\mathcal{X}_0^*, \mathcal{X}_0} \leq \left\langle \tilde{G}, W \right\rangle_{\mathcal{X}_0^*, \mathcal{X}_0}, \forall W \in C \cap dom\,(\Gamma^*)\,, \\ (c) & \hat{\mathbb{Q}}(d\omega) = \hat{y}\gamma'\left(\left\langle \tilde{G}, \theta(\omega) \right\rangle\right)\mathbb{P}(d\omega). \end{cases} \tag{3.2.13}$$

Aún más, $\hat{\mathbb{Q}} \in L_{\eta_0^*}\mathbb{R}$ y $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$ satisfacen 3.2.13 (a,b,c) si y sólo si $\hat{\mathbb{Q}}$ resuelve 3.2.11 y $\tilde{G}$ resuelve lo siguiente:

$$Maximizar \inf_{W \in C \cap \mathcal{X}} \langle \tilde{G}, W \rangle - \hat{y} \int \gamma(\langle \tilde{G}, \theta \rangle) d\mathbb{P}\ ,\ \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}. \tag{3.2.14}$$

Observación 3.
Las definiciones para Γ, $\mathcal{X}$, $\mathcal{G}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ son análogas a las de la sección 2.3, salvo que el rol que ahí juega γ_0 lo toma η_0 ahora (que es la función de Young de interés en esta parte), y el de γ lo toma $\eta\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{R}}(\omega), \cdot\right)$.

Demostración. Es un resultado directo de los Teoremas 2.2.2 y 2.3.1, más la discusión planteada arriba.
Gracias a las suposiciones 3.1.1 y 3.2.1, se satisfacen las suposiciones 2.3.2 y 2.3.1, y que $\mathbb{R}-$cs: $\lim_{t \to \pm\infty} \frac{\gamma_\omega^*(t)}{t} = +\infty$ gracias a lo cual aplica el Teorema 2.3.1.
Gracias a las suposiciones 3.1.1, 3.2.2 y 3.2.9 se satisfacen las condiciones del Teorema 2.2.2.
Notar que la condición 3.2.9 implica que $C \cap T_0\text{dom}(I) \neq \emptyset$, lo que explica por qué 3.2.11 siempre posee solución única (ver Teorema 2.3.1). En efecto, $v(\hat{y}) < \infty$ gracias a 3.2.9, y luego por 3.2.11, se tiene que $I(\hat{\mathbb{Q}}) < \infty$, de donde $T_0\hat{\mathbb{Q}} \in C \cap T_0\text{dom}(I)$.
Finalmente, como $\gamma_\omega^*(\cdot) := \gamma^*_{\hat{y}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{R}}(\omega)}(\cdot)$, ello implica que $\gamma_\omega(\cdot) = \hat{y}\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{R}}(\omega)\gamma(\cdot)$, lo que explica la presencia de $\mathbb{P}$ en vez de $\mathbb{R}$ en 3.2.12, 3.2.13, 3.2.14 y en el segundo punto de la suposición 3.2.1.

$\diamond$

3.3. Optimización Robusta, caso Incompleto y $\frac{d\mathcal{Q}}{d\mathbb{R}}$ Débil Compacto Lineal

Los elementos necesarios para resolver el caso de un mercado incompleto son bastante similares a los empleados en la sección anterior. Así como en la sección 2.2, para cada modelo admisible $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, es necesario introducir el conjunto:

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}(y) := \{Y \geq 0 | Y_0 = y \ , \ XY \text{ es } \mathbb{Q} - \text{supermartingala } \forall X \in \mathcal{X}(1)\}\,. \tag{3.3.1}$$

Este conjunto, que interviene en la definición de $v_{\mathbb{Q}}$ (ver 2.2.8), es irrelevante en el caso completo, pues en ese caso y veces la densidad con respecto a $\mathbb{Q}$ de la única medida neutra al riesgo, domina a cada $Y \in \mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}(y)$. Aún más, dada la definición de I en 3.2.7 en el caso completo ($\mathcal{M}_e(S) = \{\mathbb{P}\}$), el correspondiente espacio de Orlicz de interés es $L_{\eta_0^*}$, con $\eta_0^* = \eta(d\mathbb{P}/d\mathbb{R}, \cdot)$, y por lo tanto la restricción sobre T_0 para definir a θ está bien definida (ver el segundo punto de la suposición 3.2.1). En el caso incompleto, en cambio, no es claro a priori con qué $Y \in \mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}(y)$ definir el correspondiente $\eta_0^* = \eta(Y_T, \cdot)$. Es por esto, que se debe considerar una condición de integrabilidad más fuerte sobre θ para que esté bien definido el problema de minimización de la energía.
Salvo esto, el resto del procedimiento sigue igual (excepto por la complejidad adicional de considerar los conjuntos $\mathcal{Y}_{\mathbb{Q}}(y)$).

Asumiendo que se tienen las condiciones del Teorema 2.2.2, se tiene la existencia, para cada $x > 0$, de un $\hat{y}$ en el superdiferencial de $u(x)$, un $\hat{Y} \in \mathcal{Y}_{\mathbb{R}}(\hat{y})$ y una $\hat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$ tales que:

$$v(\hat{y}) = \mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[\hat{Z}V\left(\frac{\hat{Y}_T}{\hat{Z}}\right)\right] \ , \text{con } \hat{Z} = \frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{R}}.$$

Además:

$$v(\hat{y}) = \inf_{Z\in\mathcal{Z}_e} \mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[ZV\left(\frac{\hat{Y}_T}{Z}\right)\right] \tag{3.3.2}$$

$$= \inf_{Z\in\mathcal{Z}} \mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[ZV\left(\frac{\hat{Y}_T}{Z}\right)\right] \tag{3.3.3}$$

$$= \inf_{Z\in\mathcal{Z}} \int \gamma_\omega^*(Z(\omega))\mathbb{R}(d\omega), \tag{3.3.4}$$

donde esta vez $\gamma_\omega^*(\cdot) := \gamma_{\hat{Y}_T(\omega)}^*(\cdot) = \eta^*\left(\hat{Y}_T(\omega), \cdot\right)$, y se recuerda que $\eta(l, z) = \gamma_l(z)$. Además se define $\eta_0(\omega, \cdot) := \eta\left(\hat{Y}_T^0(\omega), |\cdot|\right)$, donde $\hat{Y}^0 := \frac{\hat{Y}}{\hat{y}} \in \mathcal{Y}_{\mathbb{R}}(1)$. La igualdad en 3.3.3 sale de argumentos similares a los del Lema 3.2.1.

Análogamente, se define el funcional de entropía I como en 3.2.7 y se repite la discusión generada en torno de la ecuación 3.2.8. La gran diferencia está en el segundo punto de las restricciones. Esta asegura que el operador de restricciones (y por lo tanto el conjunto $\mathcal{Q}$) esté bien definido sea cual sea el $Y \in \mathcal{Y}_{\mathbb{R}}(y)$ óptimo (y sea cual sea el y óptimo):

Suposición 3.3.1. Sobre las Restricciones

- El conjunto convexo $C \subset \mathcal{X}_0$ es tal que $T_0^{-1}C \cap L_{\eta_0^*}\mathbb{R}$ es un subconjunto $\sigma(L_{\eta_0^*}\mathbb{R}, E_{\eta_0})$-cerrado de $L_{\eta_0^*}\mathbb{R}$. En otros términos:

$$T_0^{-1}C \cap L_{\eta_0^*}\mathbb{R} = \bigcap_{y \in A} \left\{ f\mathbb{R} \in L_{\eta_0^*}\mathbb{R} | \int \langle y, \theta \rangle f d\mathbb{R} \geq a_y \right\},$$

  para un cierto conjunto A de $\mathcal{X}_0^*$ tal que $\langle y, \theta \rangle \in E_{\eta_0}, \forall y \in A$, y una cierta función real $y \in A \mapsto a_y$.

- $\forall g \in \mathcal{G}_0, \forall Y \in \mathcal{Y}_{\mathbb{R}}(1) : \int Y_T \gamma\left(\langle g, \theta \rangle\right) d\mathbb{R} < \infty$.

- $\forall g \in \mathcal{G}_0$, la función $\omega \in \Omega \mapsto \langle g, \theta(\omega) \rangle$ es medible.

- $\forall g \in \mathcal{G}_0$, $[\langle g, \theta(\cdot) \rangle = 0, \mathbb{R}\text{-cs.} \Rightarrow g = 0]$.

Con todo esto, se puede replicar la Proposición 3.2.1

Proposición 3.3.1.
Considerar el problema de optimización robusta en un mercado incompleto, como fue recién descrito.
Asumir que se satisfacen las suposiciones 3.1.1, 3.3.1, 3.2.2, y que:

$$v_{\mathbb{Q}}(y) < \infty, \forall y > 0, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e. \tag{3.3.5}$$

Entonces se satisfacen todos los resultados del Teorema 2.2.2. En particular, para todo $x > 0$:

$$u(x) = v(\hat{y}) + x\hat{y} = u_{\hat{\mathbb{Q}}}(x) = \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}\left[U\left(\hat{X}_T\right)\right], \tag{3.3.6}$$

donde $\hat{y}$ está en el superdiferencial de $u(x)$, $\hat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$, $\hat{Y} \in \mathcal{Y}_{\mathbb{R}}(\hat{y})$, $\hat{X} \in \mathcal{X}(x)$ y $\hat{\mathbb{Q}}-cs$: $\hat{X}_T = [U']^{-1}\left(\frac{\hat{Y}_T}{\hat{Z}}\right)$, donde $\hat{Z} = d\hat{\mathbb{Q}}/d\mathbb{R}$. Además:

$$v(\hat{y}) = \mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[\hat{Z}V\left(\frac{\hat{Y}_T}{\hat{Z}}\right)\right] = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} I(\mathbb{Q}), \tag{3.3.7}$$

con $\mathcal{Q} = \left\{\mathbb{Q} \in L_{\eta_0^*}d\mathbb{R} | T_0\mathbb{Q} \in C\right\}$, e I como en 3.2.7. A este último problema (de minimización de la entropía) se le puede aplicar el Teorema 2.3.1. En particular:

$$v(\hat{y}) = \sup_{G \in \mathcal{G}} \left\{ \inf_{W \in C \cap \mathcal{X}} \langle G, W \rangle - \int \hat{Y}_T \gamma(\langle G, \theta \rangle) d\mathbb{R} \right\}. \tag{3.3.8}$$

Además el problema de minimización en 3.3.7 posee siempre solución única.

Si adicionalmente $C \cap icor(T_0 dom(I)) \neq \emptyset$, entonces definiendo $\hat{W} = \int \theta d\hat{\mathbb{Q}}$, existe $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$ tal que:

$$\begin{cases} (a) & \hat{W} \in C \cap dom\left(\Gamma^*\right), \\ (b) & \left\langle \tilde{G}, \hat{W} \right\rangle_{\mathcal{X}_0^*, \mathcal{X}_0} \leq \left\langle \tilde{G}, W \right\rangle_{\mathcal{X}_0^*, \mathcal{X}_0}, \forall W \in C \cap dom\left(\Gamma^*\right), \\ (c) & \hat{\mathbb{Q}}(d\omega) = \hat{Y}_T \gamma'\left(\left\langle \tilde{G}, \theta(\omega) \right\rangle\right) \mathbb{R}(d\omega). \end{cases} \tag{3.3.9}$$

Aún más, $\hat{\mathbb{Q}} \in L_{\eta_0^*}\mathbb{R}$ *y* $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$ *satisfacen* 3.3.9 *(a,b,c) si y sólo si* $\hat{\mathbb{Q}}$ *resuelve* 3.3.7 *y* $\tilde{G}$ *resuelve lo siguiente:*

$$\textit{Maximizar} \inf_{W \in C \cap \mathcal{X}} \langle \tilde{G}, W \rangle - \int \hat{Y}_T \gamma(\langle \tilde{G}, \theta \rangle) d\mathbb{R} \ , \ \tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}. \tag{3.3.10}$$

3.4. Optimización Robusta, caso Completo Sin Compacidad

En la sección 3.2 se resolvió satisfactoriamente el problema de optimización robusta en un mercado completo, bajo la condición de que el conjunto de densidades de los modelos $\frac{d\mathcal{Q}}{d\mathbb{R}}$ fuera débilmente compacto en L^1 (o equivalentemente, cerrado para la convergencia en probabilidad). Sin embargo, para el caso de restricciones lineales de modelos $T_0\mathbb{Q} := \int \theta d\mathbb{Q} \in C$, esta condición muchas veces no es satisfecha, como ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4.1. En la sección 3.5.1, se resuelve un ejemplo en el cual el conjundo $\frac{d\mathcal{Q}}{d\mathbb{R}}$ no es cerrado en L^0, y de hecho no es acotado en L^2 que como se verá ahí, es el espacio natural para este ejemplo (ver observación 9). El mercado corresponde a un solo bien riesgoso, cuyo precio evoluciona como un browniano geométrico (con coeficientes de volatilidad y deriva constantes) y el conjunto de modelos factibles corresponde a aquellas medidas de probabilidad tales que el precio final posee una media mayor o igual a una constante A.

Cabe señalar eso sí, que para restricciones del estilo $\int \theta d\mathbb{Q} = \int \theta \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{R}} d\mathbb{R} \leq \alpha$ (pensando en $(-\infty, \infty)^d$, algún d, y en desigualdad e integración por componentes), muchas veces el correspondiente conjunto $\mathcal{Q}$ sí puede resultar cerrado en L^0 (por ejemplo mediante el Lema de Fatou), para θ suficientemente bueno. Uno puede pensar en otros contextos donde esto seguirá siendo cierto, pero claramente estos casos no aprovechan toda la generalidad de la teoría de minimización de la entropía.

Como se vió en la sección 3.2, gracias a la expresión 3.2.2, se tiene que en el contexto de un mercado completo debiera ocurrir que:

$$v(y) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}}\left[V\left(y\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\right)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}}V\left(y\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\right)\right] = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}V\left(y\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right] = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \int \gamma_y^*\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) d\mathbb{P}. \tag{3.4.1}$$

donde $\mathbb{P}$ es la única medida neutra al riesgo y γ_y viene dada por 3.1.1. Se recuerda la convención $\gamma = \gamma_1$ y la definición $\eta_0(\cdot) = \gamma(|\cdot|)$. Notar que así, en vez del camino seguido en la sección 3.2, se considera ahora a $\mathbb{P}$ como la medida de probabilidad natural (por eso es que η se define en función de γ_1 y no de $\gamma_{\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{R}}}$ como antes).

Como η_0 y η_0^* son, a la luz de la suposición 3.1.1, funciones de Young, se definen los espacios E_{η_0} y $L_{\eta_0^*}$, más las normas asociadas, de acuerdo a la definición 2.3.1.
El siguiente conjunto de densidades será de gran utilidad en adelante:

Definición 3.4.1.
$\mathcal{Z}_{\mathbb{P}} := \frac{d\mathcal{Q}}{d\mathbb{P}} := \left\{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\right\}$.

El siguiente Lema permite entender la topología de este conjunto cuando es acotado:

Lema 3.4.1.
Si $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ es acotado en $L_{\eta_0^*}$ (ie. $\sup_{Z\in\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}} ||Z||_{\eta_0^*} < \infty$), entonces $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ es débilmente relativamente compacto en L^1.

Demostración. Tomando $k^{-1} = \sup_{Z\in\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}} ||Z||_{\eta_0^*}$ y $G(\cdot) = \eta_0^*(k\cdot)$ (que es función de Young también), se tiene que $\forall Z \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$, $\mathbb{E}(G(Z)) = \mathbb{E}\left(\eta_0^*\left(k||Z||\frac{Z}{||Z||}\right)\right) \leq k||Z||\mathbb{E}\left(\eta_0^*\left(\frac{Z}{||Z||}\right)\right) \leq k||Z|| \leq 1$, por definición de k y de la norma $||\cdot||_{\eta_0^*}$, y porque η_0^* es convexa y vale 0 en 0. Así, se concluye gracias al Teorema de *de la Vallée Poussin* más el Teorema de *Dunford-Pettis* (ver Teoremas A.0.2 y A.0.3 del apéndice A).

$\diamond$

Observación 4.
En vista del Lema anterior, si $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ es acotado en $L_{\eta_0^*}$ y cerrado en L^1 (fuerte o débil, equivalentemente), entonces $\mathcal{Q}$ satisface las condiciones de la suposición 2.2.1 y por lo tanto se aplican los resultados de la sección 3.2. Este, en particular, es el caso cuando $L_{\eta_0^*}$ es reflexivo y $T_0^{-1}C \cap L_{\eta_0^*}d\mathbb{R}$ es *-débil compacto en $L_{\eta_0^*}$ (esta última es una suposición usual cuando se quiere usar la metodología de minimización de la entropía: ver secciones anteriores).

A la luz de lo anterior se ve la necesidad de considerar el caso en que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ es **no** acotado. Para facilitar la notación, se necesitarán las siguientes definiciones y resultados concernientes a espacios de Orlicz:

Definición 3.4.2.
Una función de Young Φ:

1. se dice que satisface la condición Δ_2 (globalmente), y se denota $\Phi \in \Delta_2$ ($\Phi \in \Delta_2$ globalmente), si para alguna constante $k > 0$ y un $x_0 \geq 0$ ($x_0 = 0$ en el caso global):
$$\Phi(2x) \leq k\Phi(x)\ ,\ \forall x \geq x_0,$$
2. se dice que satisface la condición ∇_2 (globalmente), y se denota $\Phi \in \nabla_2$ ($\Phi \in \nabla_2$ globalmente), si para alguna constante $l > 1$ y un $x_0 \geq 0$ ($x_0 = 0$ en el caso global):
$$\Phi(x) \leq \frac{1}{2l}\Phi(lx)\ ,\ \forall x \geq x_0,$$
3. se dice que es **N-función** si: es continua, $[\Phi(x) = 0 \iff x = 0]$, $\Phi(\cdot) \in [0, \infty)$, $\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$, y $\lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$.

Proposición 3.4.1 (*Corolario 12*, [RR91], p. 113)**.**
Si el espacio de medida es finito y Φ es una N-función, entonces [L_Φ es reflexivo $\iff$ $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$].

Observación 5.
En el espacio de Orlicz $L_\Phi(\mathbb{P})$ (Φ función de Young), se había definido la norma $||u||_\Phi = \inf\left\{\beta > 0 : \int \Phi(u(\omega)/\beta)\mathbb{P}(d\omega) \leq 1\right\}$. Además de esta, se puede definir la norma equivalente:
$$|u|_\Phi = \sup\left\{\int |ug|d\mathbb{P} : \int \Phi^*(|g|)d\mathbb{P} \leq 1\right\}.$$
Gracias a la *Proposición 4* de [RR91] p. 61, se tiene que $||u||_\Phi \leq |u|_\Phi \leq 2||u||_\Phi, \forall u \in L_\Phi$
Aún más, si Φ es N-función, en virtud del *Teorema 13* de [RR91] p. 69, se tiene además que $\forall u \in L_\Phi(\mathbb{P})$:
$$|u|_\Phi = \inf_{k>0}\left\{\frac{1}{k}\left(1 + \int \Phi(ku)d\mathbb{P}\right)\right\}, \tag{3.4.2}$$
y aún más, el ínfimo se alcanza en un ciero $k^* = k^*(u) > 0$.

Con todos estos elementos, cabe preguntarse qué propiedades sobre los ingredientes del problema de optimización robusta se requieren para obtener las correspondientes propiedades sobre las funciones de Young y espacios de Orlicz asociados, mencionadas más arriba:

Lema 3.4.2.
Suponer que se satisface la suposición 3.1.1. Entonces, para la función de Young $\eta_0^*(\cdot) = \gamma^*(|\cdot|) := |\cdot|V(1/|\cdot|)$ *(ver Lema 3.1.3) se tiene:*

1. η_0^* *es una N-función.*
2. *Si* $AE(U) := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1$, *entonces* $\eta_0^* \in \Delta_2$.
3. *Si* $\exists\alpha \in (0,1), \epsilon > 0, y_0 > 0$ *tal que* $\forall y \geq y_0 : \alpha U'(y) \leq U'\left(\frac{2+\epsilon}{\alpha}y\right)$, *entonces* $\eta_0^* \in \nabla_2$.

Demostración. Para el primer punto, a partir de la observación 2 (ie. por los Lemas 3.1.1 y 3.1.2), se obtiene que necesasiamente η_0^* es finita, vale 0 exclusivamente en el origen, $\lim_{x\to\infty} \eta_0^*(x)/x = V(0) = U(\infty) = \infty$ y $\lim_{x\to 0} \eta_0^*(x)/x = V(+\infty)$. Ahora, como $V(y) = U(I(y)) - yI(y)$, donde $I := (U')^{-1} \geq 0$, resulta que $V(U'(x)) \leq U(x)$ de donde $U(0+) = 0 \geq V(+\infty)$, por INADA y la suposición 3.1.1. Así, como $V \geq 0$ (por el Lema 3.1.2)), se tiene $V(+\infty) = 0$ y por lo tanto η_0^* es N-función.
Para el segundo punto, a partir de 3.1.4, se tiene para $z > 0$ que:

$$\eta_0^*(2z) = 2zV(\frac{1}{2z}) \leq a\eta_0^*(z) + b(1+z).$$

Ahora, dado cualquier $c > 0$, para $z \geq \frac{1}{c}$ se tiene que $1 + \frac{1}{z} \leq 1 + c$. Por otro lado, como $\lim_{x\to\infty} \eta_0^*(x)/x = \infty$, entonces $\exists z_0 > 0$ tal que $z \geq z_0 \Rightarrow \eta_0^*(z)/z \geq 1 + c$, de donde $\forall z \geq z_c := \max\{1/c, z_0\} : 1 + \frac{1}{z} \leq \frac{\eta_0^*(z)}{z}$, de donde $1 + z \leq \eta_0^*(z)$ para tales z. Combinando, $\eta_0^*(2z) \leq k\eta_0^*(z)$ para un cierto $k > 0$ y para todo $z \geq z_c$.
Para el tercer punto, haciendo el cambio de variable $z := U'(y)$, notar que $y \geq y_0 \iff z \leq z_0 := U'(y_0)$. De este modo, se tiene que $\alpha z \leq U'\left(\frac{2+\epsilon}{\alpha}I(z)\right)$. En este punto notar que I es estrictamente decreciente pues U' lo es. Así $\alpha\frac{I(\alpha z)}{I(z)} \geq 2 + \epsilon$, y como $V' = -I$ se tiene que $\alpha\frac{V'(\alpha z)}{V'(z)} \geq 2 + \epsilon$ $(\forall z \leq z_0)$. Ahora, como V es diferenciable y $V(0+) = +\infty$, se tiene que $\lim_{z\to 0} \frac{V(\alpha z)}{V(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{V(\alpha z)'}{V(z)'} = \lim_{z\to 0} \frac{\alpha V'(\alpha z)}{V'(z)} \geq 2 + \epsilon$, por la regla de L'Hôpital. Luego, $\exists \bar{z} > 0$ tal que $\forall z \leq \bar{z} : \frac{V(\alpha z)}{V(z)} \geq 2$ de donde haciendo el cambio de variable $z = \frac{1}{x}$ y definiendo $l := \frac{1}{\alpha} > 1$ se tiene que $xV\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2l}lxV\left(\frac{1}{lx}\right)$, es decir, $\eta_0^*(x) \leq \frac{1}{2l}\eta_0^*(lx)$, $\forall x \geq \frac{1}{\bar{z}}$. Esto completa la Proposición.

◇

Volviendo al problema robusto, hay que notar el siguiente punto: en el caso en que $\mathcal{Q}$ es cerrado en L^0, su convexidad implica que este es además cerrado para combinaciones convexas infinitas (ie. $\forall\lambda_n \geq 0, \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 1, \forall\mathbb{Q}_n \in \mathcal{Q} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\mathbb{Q}_n \in \mathcal{Q}$). Esto y la condición de que $[\mathbb{R}(A) = 0 \iff \forall\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}, \mathbb{Q}(A) = 0]$ implican gracias al Teorema de Halmos-Savage (ver *Teorema 1.1* [KS96]) la existencia de al menos un $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e := \{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q} | \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}\}$. Sin embargo, en el contexto de esta sección no es claro que el conjunto $\mathcal{Q}$ sea cerrado para combinaciones convexas infinitas. Por lo tanto, sin todavía exigir una forma explícita como un conjunto de modelos con ambigüedad lineal (ie. sin introducir a T_0, C, etc.),sobre $\mathcal{Q}$ se piden la siguiente hipótesis:

Suposición 3.4.1.

1. $\mathcal{Q}$ es cerrado para combinaciones convexas de infinitos elementos.
2. $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}} = d\mathcal{Q}/d\mathbb{P}$ es un subconjunto $\sigma(L_{\eta_0^*}(\mathbb{P}), E_{\eta_0}(\mathbb{P}))$-cerrado de $L_{\eta_0^*}(\mathbb{P})$.
3. $[\mathbb{P}(A) = 0 \iff \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}, \mathbb{Q}(A) = 0]$.

La siguiente Proposición permitirá mostrar la igualdad *minimax* para la función de utilidad robusta:

Proposición 3.4.2.
Asumir la suposición 3.1.1, y que $\eta_0^* \in \Delta_2$ globalmente.
Además, suponer que $\exists x > 0, \exists \mathbb{Q}_0 \in \mathcal{Q}_e$ tal que $u_{\mathbb{Q}_0}(x) < \infty$, donde $\mathcal{Q}$ satisface la suposición 3.4.1.
Entonces:

$$\forall x > 0, \exists C = C(x) \text{ tal que } u_Z(x) \geq C||Z||_{\eta_0^*}$$

Luego, si $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ es no acotado, entonces:

$$\forall x > 0, u_Z(x) := \sup_{X_T \in \mathcal{X}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(ZU(X_T)) \longrightarrow +\infty \quad \text{cuando } ||Z||_{\eta_0^*} \to \infty, Z \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}. \quad (3.4.3)$$

Demostración. Suponer que $Z \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ es tal que $Zd\mathbb{P} \in \mathcal{Q}_e$. Luego, se tiene que $u_Z(x) = \inf_{y>0} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(ZV\left(\frac{y}{Z}\right)\right) + xy\right]$. Al ser η_0^* una N-función, se tiene que $||Z||_{\eta_0^*} \leq y + \int y\eta_0^*\left(\frac{Z}{y}\right) d\mathbb{P}$, gracias a la observación 5. De esto, sale que llamando $A_Z(y) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(ZV\left(\frac{y}{Z}\right)\right) + xy$, se tiene que $A_Z(y) \geq ||Z||_{\eta_0^*} + (x-1)y$. Así, tomando ínfimos sobre $\{y > 0\}$, resulta que si $x > 1$, se cumple que $u_Z(x) \geq ||Z||_{\eta_0^*}$.
Más en general, de la condición Δ_2-global se infiere que $\eta_0^*(2^n x) \leq K^n \eta_0^*(x), \forall x > 0$. Aún más, como η_0^* es creciente en los reales positivos (pues $(\cdot)V(1/(\cdot))$ lo es), necesariamente este K debe ser mayor estricto que 1. Por las mismas razones que antes, $\int y\eta_0^*\left(\frac{Z}{y}\right) d\mathbb{P} \geq \frac{1}{K^n}\int y\eta_0^*\left(\frac{Z2^n}{y}\right) d\mathbb{P} \geq \frac{1}{K^n}\left[2^n||Z||_{\eta_0^*} - y\right]$, de donde $A_Z(y) \geq \left(\frac{2}{K}\right)^n ||Z||_{\eta_0^*} + y\left(x - \frac{1}{K^n}\right)$. Así, dado $x > 0$, escogiendo n tal que $x - \frac{1}{K^n} > 0$, se tiene que $u_Z(x) \geq \left(\frac{2}{K}\right)^n ||Z||_{\eta_0^*}$
Con todo lo anterior, $\forall x > 0, \exists C = C(x) > 0, \forall Zd\mathbb{P} \in \mathcal{Q}_e : u_Z(x) \geq C(x)||Z||_{\eta_0^*}$.
Si $Zd\mathbb{P} \notin \mathcal{Q}_e$ es tal que $u_Z(x) = \infty$, el resultado saldrá trivial. Si en cambio $u_Z(x) < \infty$, se recurre al *Lema 3.3* de [SW05], que prueba que la función $t \in [0,1] \to u_{t\mathbb{Q}_1+(1-t)\mathbb{Q}_2}(x)$ es continua $\forall x > 0$, si $\mathbb{Q}_i \in \mathcal{Q}$ son tales que $u_{\mathbb{Q}_i} < \infty$, con $i = 1, 2$. Así, tomando $\mathbb{Q}_0$ como en el enunciado, $t \in (0,1]$ y definiendo $Z_t = td\mathbb{Q}_0/d\mathbb{P} + (1-t)Z$, se tiene que $Z_t d\mathbb{P} \in \mathcal{Q}_e$. Aún más, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$ tal que $t \in (0, \delta) \Rightarrow u_Z(x) \geq u_{Z_t}(x) - \epsilon \geq C(x)||Z_t||_{\eta_0^*} - \epsilon$, donde la última igualdad sale del párrafo anterior. Así, tomando $\liminf$ cuando $t \to 0+$, resulta que $u_Z(x) \geq C(x)||Z||_{\eta_0^*} - \epsilon, \forall \epsilon > 0$ (por semicontinuidad inferior de la norma). Así, se tiene que $\forall Z \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}, u_Z(x) \geq C||Z||_{\eta_0^*}$, de donde se concluye la Proposición.

$\diamond$

Observación 6.

1. Notar que la Proposición es cierta para $x > 1$, sin imponer que $\eta_0^* \in \Delta_2$.

2. Notar que necesariamente la constante K en la definición de $\eta_0^* \in \Delta_2$ debe cumplir que $K \geq 2$ para que el resultado sea cierto, pues en caso contrario los mismos cálculos llevan a que $\forall x, Z : U_Z(x) = +\infty$, lo que contradice las hipótesis.

3. Si bien en el contexto de [SW05] el conjunto $\mathcal{Q}$ se asume cerrado en L^0, en la demostración del *Lema 3.3* ahí, no se emplea esta hipótesis.

Con estos ingredientes, se demuestra el siguiente Teorema:

Teorema 3.4.1.
Considerar las suposiciones 3.1.1 y 3.4.1, y que $[\exists x > 0, \exists \mathbb{Q}_0 \in \mathcal{Q}_e$ *tal que* $u_{\mathbb{Q}_0}(x) < \infty]$. *Además, suponer que* $\eta_0^* \in \Delta_2$ *globalmente, que el espacio* $L_{\eta_0^*}$ *es reflexivo (ie.* $\eta_0^* \in \nabla_2$ *adicionalmente) y que* $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ *es NO acotado en* $L_{\eta_0^*}$.
Entonces:

$$u(x) := \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(U\left(X_T\right)\right) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(U\left(X_T\right)\right) = \min_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(U\left(X_T\right)\right) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e} \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(U\left(X_T\right)\right). \tag{3.4.4}$$

Demostración. Fijar $x > 0$. Sea $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}} \subset L_{\eta_0^*}$, $D := \{g \in L^0 | 0 \leq g \leq X_T$, algún $\mathcal{X}(x)\} \subset L^0$ y $F : C \times D \to (-\infty, \infty)$ definida por $F(Z, X) := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[ZU\left(X_T\right)\right]$. Del hecho que $F(\cdot, X)$ es lineal y U es acotada por abajo (es no negativa), sale que $F(\cdot, X)$ es (cuasi)convexa en el convexo C y sci-fuerte en $L_{\eta_0^*}$ (usando el Lema de Fatou). Por otro lado, $F(Z, \cdot)$ es (cuasi)cóncava en el convexo D y luego, al ser acotada por abajo (es no negativa), resulta ser scs sobre cada segmento de línea (como función real cóncava con dominio completo), y de hecho continua. Ahora, ambos C y D son subconjuntos cerrados en sus respectivos espacios con sus respectivas topologías: C gracias a la suposición 3.4.1 y D gracias a la *Proposición 3.1* (parte (i)) de [KS99]. Así, notando que al reemplazar $\mathcal{X}(x)$ por D no cambia el valor de la utilidad robusta (ni el de u_Z), puesto que U es creciente, sale que por la Proposición 3.4.2, $\sup_{X \in D} F(Z, X) \to +\infty$ a medida que $||Z||_{L_{\eta_0^*}} \to \infty$, $Z \in C$. Con todo esto más la suposición de reflexividad, se puede aplicar el Teorema MiniMax A.0.4 en el apéndice A. Finalmente, para la última igualdad, el hecho de que $\mathcal{Q}_e$ se asume no vacío, más el *Lema 3.3* de [SW05] permiten concluir que, gracias a lo ya demostrado, $u(x) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e} u_{\mathbb{Q}}(x)$, de donde se concluye fácilmente.

◇

A partir del Teorema 3.4.4, y en vista de que para cada $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e$ el correspondiente mercado hereda la completitud del mercado en $\mathbb{R}$ (la medida de referencia), se pueden ocupar los resultados usuales de la optimización de portafolio en mercados completos: por ejemplo, ver el *Teorema 2.2.3* en [Gun06], o el *Teorema 2.0* en [KS99]. Luego, en particular, dadas las hipótesis del Teorema anterior, se tiene que al igual que en las secciones anteriores:

$$\begin{aligned} u(x) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e} \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(U\left(X_T\right)\right) &= \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e} \inf_{y > 0} \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[V\left(y \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right) \right] + xy \right\} \\ &= \inf_{y > 0} \left\{ \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[V\left(y \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right) \right] + xy \right\}. \end{aligned}$$

de donde finalmente el siguiente corolario sigue:

Corolario 3.4.1.
Bajos las suposiciones del Teorema anterior, se tiene que:

$$u(x) = \inf_{y>0}\left\{\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}_e}\int\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}V\left(y\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)d\mathbb{P}\right]+xy\right\} = \inf_{y>0}\left\{\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}_e}\int\left[\gamma_y^*\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)d\mathbb{P}\right]+xy\right\}. \tag{3.4.5}$$

Se denotará por ahora $I_y(\mathbb{Q}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[V\left(y\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right] = \int\left[\gamma_y^*\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)d\mathbb{P}\right]$. Notar aún más que, al igual que en el Lema 3.2.1, se tiene que si $y > 0$ es tal que $v(y) < \infty$, entonces:

$$\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}_e} I_y(\mathbb{Q}) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} I_y(\mathbb{Q}) = v(y). \tag{3.4.6}$$

Observación 7.
Como la idea es imitar los resultados ya conocidos en la literatura ([KS99] en el caso no robusto y [SW05], [Gun06] en el caso robusto), vale la pena realizar las siguientes observaciones:

1. La principal diferencia con el contexto de [SW05] (y [Gun06]) es que ellos tienen que $\mathcal{Q}$ es débilmente compacto en L^1 (lo que equivale a que, dada su estructura, sea cerrado en L^0). En la presente sección este no es típicamente el caso, y aún más, se asume que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}} = d\mathcal{Q}/d\mathbb{P}$ es no acotado en $L_{\eta_0^*}$ (ver la observación 4).

2. La utilidad de que $d\mathcal{Q}/d\mathbb{P}$ sea cerrado en L^0, viene del siguiente hecho (*Lema 3.1* de [KS99]): si f_n es una sucesión de variables aleatorias no negativas, entonces existe otra sucesión $g_n \in \operatorname{conv}(f_n, f_{n+1}, \dots)$ que es convergente en probabilidad (y en convergencia casi segura) a una va. $g \in [0, +\infty]$. Gracias a esto, y a la convexidad de $Z \to u_Z(x)$, se puede encontrar una sucesión $\{Z_n\} \subset \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ tal que $Z_n \to Z$ en probabilidad, con $Z \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$, y tal que $u_{Z_n}(x) \to u(x)$ (la clave aquí es que $Z \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ gracias a que este conjunto es cerrado en L^0). También, de la definición de I_y y la convexidad de $Z \to ZV\left(\frac{y}{Z}\right)$, un argumento similar muestra que se puede escoger $Z_n \to Z$ (todos elementos de $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$, y la convergencia en probabilidad) tal que $I_y(Z_n\mathbb{P}) \to \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} I_y(\mathbb{Q}) = v(y)$.

Pese a la observación anterior, muchos de los resultados en [SW05], [Gun06] se traspasan directamente, gracias al siguiente Lema (notar eso sí que el de ellos es un contexto de un mercado incompleto, lo que añade algo más de dificultad):

Lema 3.4.3.
Bajo las mismas suposiciones del Teorema 3.4.1:
$\forall x > 0$, *existe un* $\hat{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ $(\hat{\mathbb{Q}} = \hat{Z}d\mathbb{P})$ *tal que:*

$$u(x) = u_{\hat{Z}}(x) := \sup_{X\in\mathcal{X}(x)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}}\left(U\left(X_T\right)\right). \tag{3.4.7}$$

Aún más, $\hat{Z}$ *se puede escoger como el límite en probabilidad y en* $L_{\eta_0^*}-$*débil de una sucesión* $\{B_n\}_n \subset \frac{d\mathcal{Q}_e}{d\mathbb{P}}$ *tal que* $u(x) = \lim u_{B_n}(x)$.
Además $\forall y > 0$ *tal que* $v(y) < \infty$, *existe una sucesión* $\{Z_n\}_n \subset \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ *tal que* $Z_n \to Z \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$, *donde la convergencia es en probabilidad y en* $L_{\eta_0^*}-$*débil, de modo que:*

$$I_y(Z_n\mathbb{P}) \to v(y). \tag{3.4.8}$$

Demostración. Para la segunda parte, como $v(y) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} I_y(\mathbb{Q})$, sea $W_n \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ tal que $I_y(W_n\mathbb{P}) \searrow v(y)$. Por el *Lema 3.1* de [KS99], se puede escoger otra sucesión $Z_n = \sum_{m\geq n} \lambda_m^n W_m \in \operatorname{conv}(W_n, W_{n+1}, \dots)$ convergente en probabilidad (a un Z). Como $\mathcal{Q}$ es cerrado para combinaciones convexas infinitas, se tiene que $\forall n : Z_n \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$. Por otro lado, $v(y) \leq \liminf I_y(Z_n\mathbb{P}) \leq \limsup I_y(Z_n\mathbb{P}) \leq \limsup I_y(W_n\mathbb{P}) = v(y)$, puesto que se tiene que
$I_y(Z_n\mathbb{P}) \leq \sum_{m\geq n} \lambda_m^n I_y(W_m\mathbb{P}) \leq I_y(W_n\mathbb{P})$ (convexidad de I, más la elección de W como límite decreciente), de donde $v(y) = \lim I_y(Z_n\mathbb{P})$. De esto sale que $\sup_n \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\gamma_y^*(Z_n)\right] =: \kappa < \infty$, y como γ_y^* satisface las condiciones del Teorema de de la Vallée Poussin (ver Teorema A.0.2), resulta que esta sucesión es uniformemente integrable. Así, por el Teorema de convergencia de Vitali, $Z_n \to Z$ en $L^1(\mathbb{P})$. Por otro lado, de 3.4.2 (tomando $k = y^{-1}$), resulta que $||Z_n||_{\eta_0^*} \leq y + I_y(Z_n\mathbb{P}) \leq y + \kappa$. Por lo tanto, como $L_{\eta_0^*}$ es reflexivo, existe una subsucesión $\left\{Z_{\sigma(n)}\right\}$ convergente $L_{\eta_0^*}-$débilmente a un $\tilde{Z} \in L_{\eta_0^*} \cap \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ (pues este último conjunto es cerrado en esta topología). Ahora, como $L_{\eta_0^*}$ se inyecta continuamente en L^1 (en particular dotados de sus topologías débiles), necesariamente $\tilde{Z} = Z$. Esta subsucesión cumple lo requerido.
Para la primera parte, la existencia del $\hat{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ se debe al “mínimo” en 3.4.4. De ahí también, se puede tomar una sucesión $\{A_n\}_n \subset \frac{d\mathcal{Q}_e}{d\mathbb{P}}$ tal que $u_{A_n}(x) \searrow u(x)$. Como en el párrafo anterior, y de la convexidad de $Z \to u_Z(x)$, se puede encontrar una sucesión $\{B_n\}_n \subset \frac{d\mathcal{Q}_e}{d\mathbb{P}}$ tal que $u(x) = \lim u_{B_n}(x)$, y convergente en probabilidad a un cierto B. Del hecho que la sucesión $u_{B_n}(x)$ esté acotada, sale que B_n está acotada en $L_{\eta_0^*}$ (ver la estimación de la Proposición 3.4.2). Así, salvo subsucesión, $B_n \to A \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ débilmente. Además, repitiendo la demostración del Lema 3.4.1, ésta sucesión es UI y por lo tanto converge en L^1 a B, y tal como antes se concluye que $A = B$. Luego esta subsucesión y $\hat{Z} = B$ cumplen lo requerido.

$\diamond$

La siguiente Proposición (que engloba los resultados principales de [SW05]), se obtiene gracias al Lema anterior y a la idea misma de cómo a partir de una sucesión minimizante en $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$, se puede obtener otra análoga pero además convergente en probabilidad y en $L_{\eta_0^*}-$débil a un límite también en $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$.

Proposición 3.4.3.
Considerar las suposiciones 3.1.1 y 3.4.1. Además, suponer que $\eta_0^* \in \Delta_2$ globalmente, que el espacio $L_{\eta_0^*}$ es reflexivo (ie. $\eta_0^* \in \nabla_2$ adicionalmente) y que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ es NO acotado en $L_{\eta_0^*}$. Si $[\exists x > 0, \exists \mathbb{Q}_0 \in \mathcal{Q}_e$ tal que $u_{\mathbb{Q}_0}(x) < \infty]$, entonces la función u es cóncava, finita, y satisface las igualdades en 3.4.4. Aún más, v es convexa sci, y conjugada con la función u:

$$u(x) = \inf_{y>0} (v(y) + xy) \ \ , \ v(y) = \sup_{x>0} (u(x) - xy) \, .$$

Si además de todo lo anterior, se supone que $[v_{\mathbb{Q}}(y) < \infty, \forall y > 0, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e]$, entonces $\forall x > 0$, existen una medida $\hat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$ y una $\mathbb{P}-$martingala $\hat{X} \in \mathcal{X}(x)$ tales que:

$$u(x) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[U\left(\hat{X}_T\right)\right] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}}\left[U\left(\hat{X}_T\right)\right] = u_{\hat{\mathbb{Q}}}(x) = v(\hat{y}) + x\hat{y}, \tag{3.4.9}$$

donde $\hat{y}$ *está en el superdiferencial de* u *en* x*, y* $\hat{\mathbb{Q}}-$*cs:* $\hat{X}_T = [U']^{-1}\left(\hat{y}\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\right)$*, de modo que:*

$$v(\hat{y}) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}}\left[\hat{y}\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\right].$$

Si adicionalmente $AE(U) < 1$*, entonces* u *es estrictamente cóncava,* v *es continuamente diferenciable, y* $\mathbb{P}-$*cs:* $\hat{X}_T = [U']^{-1}\left(\hat{y}\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\right)$.

Demostración. Las igualdades en 3.4.4 son el Teorema 3.4.1. Notar que los Lemas *3.6* y *3.7* de [SW05] siguen siendo válidos en este contexto, puesto que $V^- = 0$ (pues $U(0+) = 0$ por suposición) y gracias al comentario antes de esta Proposición más el Lema 3.4.3, que permite adaptar estas demostraciones al presente contexto. Con esto, la demostración del *Teorema 2.2* de [SW05] sigue igual, lo que demuestra la finitud y concavidad de u, la convexidad y semicontinuidad inferior de v, y el hecho de que sean funciones conjugadas. Para el resto de los resultados, basta notar que el *Lema 4.1* de [SW05] sale del comentario antes de esta Proposición y el Lema 3.4.3. Sólo hay que notar, que al final de la demostración de ese resultado, cuando $y_n \to \hat{y}$, se tiene que $v_{Z'_n}(y_n) = \mathbb{E}[Z'_n V(y_n/Z'_n)] \to v(\hat{y})$, con Z'_n convergente en probabilidad (y casi seguramente). Notando que $||Z'_n||_{\eta_0^*} \leq y_n + I_{y_n}(Z'_n d\mathbb{P}) = y_n + v_{Z'_n}(y_n) \leq \kappa$, se concluye igual que antes. Los siguientes resultados de [SW05] salen directamente (salvo adaptación al caso completo), pues no emplean la topología de $\mathcal{Q}$. Así, el *Teorema 2.6* ahí es aplicable. El hecho de que X es $\mathbb{P}-$martingala sale de que $X_t\mathbb{E}^{\mathbb{R}}[d\mathbb{P}/d\mathbb{R}|\mathcal{F}_t]$ es $\mathbb{R}-$martingala, más el Teorema de Bayes para esperanzas condicionales. El hecho de que si $AE(U) < 1$, entonces gracias al Teorema 2.2.2, $X_T = 0 \iff \frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{R}} = 0$ ($\mathbb{R}-$cs), muestra que la expresión para X_T es válida $\mathbb{P}-$cs, pues $I(\infty) := [U']^{-1}(\infty) = 0 = X_T$ en $\frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{R}} = 0$, $\mathbb{P}-$cs.

◇

La Proposición anterior "resuelve" el problema de optimización robusta en un mercado completo, esencialmente bajo las hipótesis de que $\eta_0^* \in \nabla_2 \cap [\Delta_2 \text{ global}]$ y que $d\mathcal{Q}/d\mathbb{P}$ sea convexo para combinaciones infinitas, cerrado débil y no acotado (en $L_{\eta_0^*}$), para ciertas funciones de utilidad razonables (suposición 3.1.1). Un punto clave, en la igualdad 3.4.9, es que $u(x) = v(\hat{y}) + x\hat{y}$. Ello implica, gracias a la ecuación 3.4.5 y los comentarios en torno a ella, que:

$$u(x) = x\hat{y} + \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} I_{\hat{y}}(\mathbb{Q}) \tag{3.4.10}$$

con $\hat{y}$ como en la Proposición 3.4.3. Aún más, el argumento del ínfimo en 3.4.10 coincide con el $\hat{\mathbb{Q}}$ de esta misma Proposición. Así, al igual que en las secciones anteriores, se puede emplear la metodología de minimización de la entropía al funcional $I_{\hat{y}}$, cuando $\mathcal{Q}$ proviene de una ambigüedad o incerteza lineal, como se verá a continuación.

3.5. Optimización Robusta, caso Completo Lineal Sin Compacidad

En esta parte se aplicará la metodología de minimización de la entropía al problema de optimización robusta en un mercado completo, cuando el conjunto de modelos factibles se manifiesta a partir de resticciones lineales y carece de una condición de compacidad (ver sección anterior).
Como siempre, $\mathbb{P}$ denotará la única medida neutra al riesgo. Para los detalles sobre la notación y las definiciones precisas de los espacios y elementos involucrados, remitirse a la sección 2.3. Aquí se avanzará más rápidamente.

Sean $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{X}_0 = (\mathcal{G}_0)^*$, $\theta : \Omega \to \mathcal{X}_0$ y $C \subset \mathcal{X}_0$ un convexo. Se definen (cuando tengan sentido) $T_0^* g(\omega) = \langle g, \theta(\omega)\rangle_{\mathcal{G}_0,\mathcal{X}_0}$ y $T_0 f := \int_\Omega \theta df$, para $f \in L_{\gamma_0^*}\mathbb{P}$. Con esto, se define el conjunto:

Definición 3.5.1.

$$\mathcal{Q} := \left\{ \mathbb{Q} = Zd\mathbb{P} \in L_{\eta_0^*}\mathbb{P} | \mathbb{Q} \text{ es medida de probabilidad }, \int \theta Z d\mathbb{P} \in C \right\}. \tag{3.5.1}$$

Al igual que antes, se redefine $T_0\mathbb{Q} := \left(\int d\mathbb{Q}, T_0\mathbb{Q}\right) =: \int (1,\theta) d\mathbb{Q}$ (pensar vectorialmente) y $C = \{1\} \times C$, y se observa que:

$$\mathbb{Q} \in L_{\eta_0^*} d\mathbb{P} \cap \operatorname{dom}(I_{\hat{y}}) \Rightarrow [T_0\mathbb{Q} \in C \iff \mathbb{Q} \text{ es medida de probabilidad}, \int \theta d\mathbb{Q} \in C]. \tag{3.5.2}$$

Como antes, se abusará de la notación denotando indiferentemente θ y $\mathcal{X}_0$ a $(1,\theta)$ y $(-\infty,\infty) \times \mathcal{X}_0$ (lo mismo con $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{X}$ y $\mathcal{G}$); el contexto aclarará la situación. Además se redefine $\mathcal{Q} = \left\{ \mathbb{Q} \in L_{\eta_0^*} d\mathbb{P} | T_0\mathbb{Q} \in C \right\}$. Así, por 3.5.2, $v(\hat{y}) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathbb{Q}} I_{\hat{y}}(\mathbb{Q})$.

Suposición 3.5.1. Sobre las Restricciones

- El conjunto convexo $C \subset \mathcal{X}_0$ es tal que $T_0^{-1}C \cap L_{\eta_0^*}\mathbb{P}$ es un subconjunto $\sigma(L_{\eta_0^*}\mathbb{P}, E_{\eta_0})$-cerrado de $L_{\eta_0^*}\mathbb{P}$. En otros términos:

$$T_0^{-1}C \cap L_{\eta_0^*}\mathbb{P} = \bigcap_{y\in A} \left\{ f\mathbb{P} \in L_{\eta_0^*}\mathbb{P} | \int \langle y, \theta\rangle f d\mathbb{P} \geq a_y \right\},$$

  para un cierto conjunto A de $\mathcal{X}_0^*$ tal que $\langle y, \theta\rangle \in E_{\eta_0}, \forall y \in A$, y una cierta función real $y \in A \mapsto a_y$.

- $T_0^*\mathcal{G}_0 \subset E_{\eta_0}$, o equivalentemente, $\forall g \in \mathcal{G}_0 : \int \gamma\left(\langle g, \theta\rangle\right) d\mathbb{P} < \infty$.

- $\forall g \in \mathcal{G}_0$, la función $\omega \in \Omega \mapsto \langle g, \theta(\omega)\rangle$ es medible.

- $\forall g \in \mathcal{G}_0$, $[\langle g, \theta(\cdot)\rangle = 0, \mathbb{P}\text{-cs.} \Rightarrow g = 0]$.

Con esto, se tiene la siguiente caracterización para $\hat{Q}$:

Proposición 3.5.1.

Considerar las suposiciones 3.1.1, 3.4.1 y 3.5.1, donde el conjunto $\mathcal{Q}$ es como en la definición 3.5.1. Además, suponer que $\eta_0^* \in \Delta_2$ globalmente, que el espacio $L_{\eta_0^*}$ es reflexivo (ie. $\eta_0^* \in \nabla_2$ adicionalmente) y que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ es NO acotado en $L_{\eta_0^*}$. Suponer además que $[v_{\mathbb{Q}}(y) < \infty, \forall y > 0, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_e]$.

Entonces se satisfacen todos los resultados de la Proposición 3.4.3 (salvo lo que supone $AE(U) < 1$). Además, $\forall x > 0$ ($\hat{y}$ como antes):

$$v(\hat{y}) = \mathbb{E}^{\mathbb{R}}\left[\frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{R}} V\left(\hat{y}\frac{d\mathbb{P}/d\mathbb{R}}{d\hat{\mathbb{Q}}/d\mathbb{R}}\right)\right] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}}\left[V\left(\hat{y}\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\right)\right] = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} I(\mathbb{Q}). \tag{3.5.3}$$

A este último problema (de minimización de la entropía) se le puede aplicar el Teorema 2.3.1. En particular:

$$v(\hat{y}) = \sup_{G\in\mathcal{G}}\left\{\inf_{W\in C\cap\mathcal{X}}\langle G, W\rangle - \hat{y}\int \gamma(\langle G,\theta\rangle)d\mathbb{P}\right\}. \tag{3.5.4}$$

Además el problema de minimización en 3.5.3 posee siempre solución única, $\hat{Q}$ (ver Proposición 3.4.3).
Si adicionalmente $C \cap icor(T_0 dom(I)) \neq \emptyset$, entonces definiendo $\hat{W} = \int \theta d\hat{\mathbb{Q}}$, existe $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$ tal que:

$$\begin{cases} (a) & \hat{W} \in C \cap dom\,(\Gamma^*)\,, \\ (b) & \left\langle \tilde{G}, \hat{W}\right\rangle_{\mathcal{X}_0^*,\mathcal{X}_0} \leq \left\langle \tilde{G}, W\right\rangle_{\mathcal{X}_0^*,\mathcal{X}_0}, \forall W \in C\cap dom\,(\Gamma^*)\,, \\ (c) & \hat{\mathbb{Q}}(d\omega) = \hat{y}\gamma'\left(\left\langle \tilde{G}, \theta(\omega)\right\rangle\right)\mathbb{P}(d\omega). \end{cases} \tag{3.5.5}$$

Aún más, $\hat{\mathbb{Q}} \in L_{\eta_0^*}\mathbb{R}$ y $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$ satisfacen 3.5.5 (a,b,c) si y sólo si $\hat{\mathbb{Q}}$ resuelve 3.5.3 y $\tilde{G}$ resuelve lo siguiente:

$$\textit{Maximizar} \inf_{W\in C\cap\mathcal{X}}\langle \tilde{G}, W\rangle - \hat{y}\int \gamma(\langle \tilde{G},\theta\rangle)d\mathbb{P}\ ,\ \tilde{G}\in\tilde{\mathcal{G}}. \tag{3.5.6}$$

Demostración. Misma demostración que la Proposición 3.2.1, gracias a la Proposición 3.4.3.

$\diamond$

Observación 8.

1. Para las definiciones de $\tilde{\mathcal{G}}$, Γ^* y otros, consultar las secciones 2.3 y 3.2.
2. Notar que el primer punto en la suposición 3.5.1 es equivalente al segundo punto en la suposición 3.4.1 (cerradura débil). Además, por la definición 3.5.1, este conjunto es inmediatamente convexo (mas no necesariamente para combinaciones infinitas).

A continuación, se emplearán este resultado más el final de la sección anterior, en un ejemplo simple de mercado completo.

3.5.1. Ejemplo

Sea $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$ y $x \in (0,\infty)$. Notar que esta función es estrictamente creciente, estrictamente cóncava, continuamente diferenciable en $(0,\infty)$, y satisface que $U'(0+) = \infty$, $U'(\infty) = 0$. Además U es no acotada y $U(0+) = 0$. De este modo, satisface la suposición 3.1.1.

Sea $V(y) = \left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right] y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$. Luego $DV(y/D) = \left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right] y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} D^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Sea

$$\tilde{f}_y(D) = \begin{cases} \left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right] y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} D^{\frac{1}{1-\alpha}} & , \quad D > 0 \\ 0 & , \quad D = 0 \\ \infty & , \quad D < 0 \end{cases} \tag{3.5.7}$$

y sea

$$\gamma(D) = \begin{cases} \alpha D^{\frac{1}{\alpha}} & , \quad D > 0 \\ 0 & , \quad D \leq 0 \end{cases} \tag{3.5.8}$$

Por lo tanto,

$$\gamma^*(z) = \begin{cases} \infty & , \quad z < 0 \\ 0 & , \quad z = 0 \\ (1-\alpha) z^{\frac{1}{1-\alpha}} & , \quad z > 0 \end{cases} \tag{3.5.9}$$

Ahora, para $y > 0$ sea

$$\gamma_y(D) = \begin{cases} 0 & , \quad D \leq 0 \\ \alpha^{\frac{1}{\alpha}} y D^{\frac{1}{\alpha}} & , \quad D > 0 \end{cases} \tag{3.5.10}$$

Entonces $\gamma_y(D) = \gamma(\alpha^{1-\alpha} y^\alpha D)$, y luego

$$\gamma_y^*(z) = \left[\gamma\left(\alpha^{1-\alpha} y^\alpha D\right)\right]^* = \gamma^*\left(\frac{z}{y^\alpha \alpha^{1-\alpha}}\right) = \begin{cases} \left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right] y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} z^{\frac{1}{1-\alpha}} & , \quad z > 0 \\ 0 & , \quad z = 0 \\ \infty & , \quad z < 0 \end{cases} = \tilde{f}_y(z) \tag{3.5.11}$$

Por lo tanto, esta γ_y es la candidata a emplearse para resolver el problema.

Definiendo $\eta_0^*(z) = \gamma_1^*(|z|) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) |z|^{\frac{1}{1-\alpha}}$, se muestra que $\eta_0^*(2z) = k\eta_0^*(z)$ y que $\frac{1}{2l}\eta_0^*(lz) = \frac{1}{2} l^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \eta_0^*(z)$. Así, tomando $l \geq 2^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$, se demuestra que $\eta_0^* \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ globalmente.

Ahora se define un mercado. Considerar en $\left(\Omega, \mathbb{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T, \mathbb{R}\right)$, y para $t \leq T$, la difusión

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t\{bdt + \sigma dW_t\}, \\ S_0 &= 1, \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

donde W es un mov.Browniano unidimensional y los parámetros b y σ son constantes (este es el modelo tipo Black-Scholes más elemental). La solución explícita de lo anterior es $S_t = \exp\left\{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right\}$. Este modelo es completo, donde la única medida equivalente de martingala está definida por $d\mathbb{P} = \exp\left\{-\frac{b}{\sigma}W_T - \frac{b^2}{2\sigma^2}T\right\} d\mathbb{R}$. Bajo esta medida, S se escribe como $S_t = \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma\tilde{W}_t\right\}$, con $\tilde{W}$ un Browniano con respecto a esta medida de probabilidad. De este modo, S_T se distribuye como una lognormal de parámetros $B = -\frac{\sigma^2}{2}T$ y $K^2 = \sigma^2 T$ (se escribe $S_T \sim lognormal(B, K^2)$).

Se considera ahora el problema de optimización robusta, donde el conjunto de modelos factibles, $\mathcal{Q}$, sale de la restricción $\int S_T \geq A$, es decir $\theta = S_T$, $T_0\mathbb{Q} = \int S_T d\mathbb{Q}$, $C = [A, +\infty)$ y $\mathcal{Q} := \left\{\mathbb{Q} = Zd\mathbb{P} \in L_{\eta_0^*}\mathbb{P} | \mathbb{Q} \text{ medida de prob.}, \int S_T Z d\mathbb{P} \geq A\right\}$. Notar que este conjunto es cerrado para combinaciones convexas infinitas. Aún más, $d\mathcal{Q}/d\mathbb{P}$ es cerrado en $\sigma\left(L_{\eta_0^*}, E_{\eta_0}\right)$, pues tanto la función idénticamente igual a 1, como S_T están en E_{η_0} (en este último caso, pues $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\eta_0(\lambda S_T)] = c(\lambda, \alpha)\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_T^{1/\alpha}] < \infty, \forall \lambda > 0$, pues la lognormal posee momentos finitos), de donde $\mathcal{Q}$ es la pre-imagen de cerrados mediante funcionales de evaluación, los que siempre son *-débil continuos. Finalmente, si $\exp\{K^2\} \geq A \geq 1$, entonces se tiene que $\mathbb{Q}_L(d\omega) := \frac{e^{K^2} - L + S_T(L-1)}{e^{K^2}-1}\mathbb{P}(d\omega) \in \mathcal{Q}_e, \forall \exp\{K^2\} \geq L \geq A$, y así $\mathcal{Q}_e \neq \emptyset$. Con todo, se satisface la suposición 3.4.1. Aún más, la suposición 3.5.1 se satisface trivialmente.

En adelante se supondrá que $\exp\{K^2\} \geq A \geq 1$ y que $\alpha = \frac{1}{2}$. En este caso, $\eta_0^*(z) = z^2$, lo que implica que $L_{\eta_0^*} = L^2$ y $||\cdot||_{\eta_0^*} = ||\cdot||_2$. Además:

$$\gamma_y(D) = \begin{cases} 0 & , \quad D \leq 0 \\ \frac{y}{4}D^2 & , \quad D > 0. \end{cases}$$

Como se verá en la observación 9, el conjunto $\mathcal{Q}$ resulta ser no acotado en L^2. Con todo esto, los resultados de esta sección son aplicables.

Por la discusión de la sección anterior (3.4.6 y 3.5.4, que si bien se escribió para un $\hat{y}$, es válida para todo y), se tiene que :

$$\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} I_y(\mathbb{Q}) = \sup_{(z_1,z_2)\in(-\infty,\infty)^2}\left[\inf_{c\geq A} z_1 + cz_2 - \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\gamma_y(z_1 + S_T z_2)\right)\right] = \sup_{z_1\in(-\infty,\infty), z_2>0}\left[z_1 + Az_2 - \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\gamma_y(z_1 + S_T z_2)\right)\right]. \tag{3.5.13}$$

Luego, 3.5.13 es igual a $\sup_{z_1\in(-\infty,\infty),z_2>0}\left[z_1 + Az_2 - \frac{y}{4}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left((z_1 + S_T z_2)^2 \mathbb{1}_{z_1+S_T z_2>0}\right)\right]$. Definir $\Delta(z_1, z_2) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left((z_1 + S_T z_2)^2 \mathbb{1}_{z_1+S_T z_2>0}\right)$.

Si $z_1 > 0, z_2 > 0$, entonces (tras algunos cálculos):

$$\Delta = \int_0^\infty \frac{(z_1 + z_2 x)^2}{xK\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - B)^2}{2K^2}} = \cdots = z_1^2 + 2z_1 z_2 + e^{K^2} z_2^2.$$

Sea ahora $F(z_1, z_2)$ la función que se está maximizando en 3.5.13. No es difícil de ver que la función Δ es convexa en todo $(-\infty,\infty)^2$ (esto se hereda de la convexidad de la función dentro de la esperanza, la que viene a su vez del hecho que $(z_1 + S_T z_2)^2$ es convexa c.s. y que esta se pega "convexamente" en la línea $\{z_1 + S_T z_2 = 0\}$ al plano horizontal por el origen). Por lo tanto F es cóncava en todo $(-\infty,\infty)^2$ y por lo tanto admite un máximo global.

En $\{z_1 > 0, z_2 > 0\}$, se tiene que $F(z_1, z_2) = z_1 + Az_2 - \frac{y}{4}\left(z_1^2 + 2z_1z_2 + e^{K^2}z_2^2\right)$, así F es continuamente diferenciable dos veces en dicha región. Se verifica que tomando $(a, b) = \left(\frac{2(A-2)}{y\left(e^{K^2}-1\right)}, \frac{2(e^{K^2}-A)}{y\left(e^{K^2}-1\right)}\right)$, se satisface bajo la suposición de que $\exp\{K^2\} \geq A \geq 1$, que $(a, b) \in (0, \infty)^2$ y que $\nabla F(a, b) = 0$. De este modo (a, b) es un máximo local de F y por lo tanto también un máximo global. Esto demuestra, tras algunos cálculos, que 3.5.13 es igual a $\frac{1}{y}\left[1 + \frac{(A-1)^2}{e^{K^2}-1}\right]$. Con esto, finalmente:

$$u(x) = \inf_{y>0}\left\{xy + \frac{1}{y}\left[1 + \frac{(A-1)^2}{e^{K^2}-1}\right]\right\} = 2\sqrt{x\left(1 + \frac{(A-1)^2}{e^{K^2}-1}\right)},$$

es decir:

$$u(x) = 2\sqrt{x\left(1 + \frac{(A-1)^2}{e^{\sigma^2 T}-1}\right)}. \tag{3.5.14}$$

Ahora, notar que se satisface la condición de factibilidad $C \cap \operatorname{icor}(T_0\mathrm{dom}I_y) \neq \emptyset$, donde $C = \{1\} \times [A, \infty)$ y $T_0\mathbb{Q} = \left(\int 1d\mathbb{Q}, \int S_T d\mathbb{Q}\right)$. En efecto, $\mathrm{dom}I_y = L_+^2$, de donde $T_0\mathrm{dom}I_y \supset B := \{(x, y) : x \geq 0, \exp\{K^2\}x \geq y \geq x\}$ (pues $T_0(\alpha\mathbb{Q}_L) = (\alpha, \alpha L), \forall\alpha \geq 0, \exp\{K^2\} \geq L \geq 1$), y así $\operatorname{icor}(T_0\mathrm{dom}I_y) \supset \overset{\circ}{B}$. Así a partir de 3.5.6 y 3.5.5, se concluye que a partir de la dupla (a, b) del párrafo anterior, se puede obtener la medida óptima (la "menos favorable"), mediante $\hat{\mathbb{Q}} = \hat{y}\gamma'\left(\langle(a, b), (1, S_T)\rangle\right)\mathbb{P}(d\omega)$ (donde $\gamma = \gamma_1$). De esto resulta que $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_A$, es decir:

$$\hat{\mathbb{Q}}(d\omega) := \frac{e^{K^2} - A + S_T(A-1)}{e^{K^2}-1}\mathbb{P}(d\omega). \tag{3.5.15}$$

Observación 9.
En este ejemplo se tiene que el conjunto $d\mathcal{Q}/d\mathbb{P}$ es no acotado en $L^2 = L_{\eta_0^*}$ (caso $\alpha = 1/2$ y $\exp\{K^2\} \geq A \geq 1$) y además se tiene que este conjunto no puede ser cerrado para la convergencia en probabilidad. En efecto, a partir de la expresión explícita para S_T bajo $\mathbb{P}$ (donde $\tilde{W}$ era un $\mathbb{P}-$browniano) se tiene que $\forall Z > T$ las variables aleatorias $A_Z := \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{|\tilde{W}_Z - \tilde{W}_T|}{\sqrt{Z-T}}$ son independientes de S_T. Unos pocos cálculos muestran que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[A_Z] = 1$. De este modo, definiendo $d\mathbb{Q}^Z = S_T A_Z d\mathbb{P}$, se tiene que $\forall Z > T : \mathbb{Q}^Z \in \mathcal{Q}$. En efecto, $\mathbb{Q}^Z$ es una medida de probabilidad pues $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Z}(1) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(S_T A_Z) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(S_T)\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(A_Z) = 1$ y $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Z}(S_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(S_T^2)\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(A_Z) = \exp\{K^2\} \geq A$. Además, se tiene el siguiente límite casi seguro, que sale de la ley del logaritmo iterado (pues $|\tilde{W}_Z - \tilde{W}_T|$ es del orden de $\sqrt{2(Z-T)\log\log(Z-T)}$ asintóticamente): $\lim_{Z\to\infty} A_Z = +\infty$. Así, la correspondiente densidad $A_Z S_T$ satisface este límite a su vez. También $\liminf_{Z\to\infty} ||S_T A_Z||_{L^2}^2 \geq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\liminf_{Z\to\infty} S_T^2 A_Z^2\right] = +\infty$, de donde $\mathcal{Q}$ es no acotado en L^2. Por otro lado, llamando $B_Z = \exp\left[\tilde{W}_Z - \tilde{W}_T - \frac{1}{2}(Z-T)\right]$, se tiene que se cumplen las mismas propiedades que las de A_Z ($\forall Z > T$), salvo que en este caso $\lim_{Z\to\infty} B_Z = 0$, donde ahora se ocupa el hecho de que si $t \to L_t$ es un browniano, entonces $t \to tL_{\frac{1}{t}}$ también lo es, y luego $\lim_{Z\to\infty}\frac{\tilde{W}_Z - \tilde{W}_T}{Z-T} = 0$. Luego, tomando las densidades $B_Z S_T$ se tiene que como antes todas estas pertenecen a $\mathcal{Q}$, pero su límite casi seguro (y en probabilidad) es igual a 0, que obviamente no está en este conjunto.

3.6. Optimización de Portafolio bajo Información Débil

En esta parte se explora la relación entre el problema de optimización robusta con el de "insider trading". Cabe destacar que la discusión es informal e ilustrativa.

3.6.1. Relación con el Cálculo de Variaciones

En la *sección 4* de [Bau02], se explora la noción de "información débil", en el contexto de modelos de información privilegiada. Esta consiste en el conocimiento a priori de la distribución de un funcional $\mathcal{F}_T-$medible, que es ocupado por un agente (el "insider", que está en posesión de esta información privilegiada) al momento de elegir su estrategia óptima de gestión de su portafolio. En concreto, sea Y una v.a. $\mathcal{F}_T-$medible y ν la distribución "adivinada" de Y por el inversionista (se dice que (Y, ν) es la información débil). Suponer que $\mathbb{P}$ es la única medida neutra al riesgo en este mercado, y que μ es la distribución de Y bajo $\mathbb{P}$. Finalmente, se define la probabilidad subjetiva $d\mathbb{Q}^\nu := \frac{d\nu}{d\mu}(Y)d\mathbb{P}$ (notar que bajo esta la distribución de Y es ν justamente).

Así, en el *Teorema 19* el autor establece que la función de utilidad del agente "insider", dada una riqueza inicial $x > 0$ e información débil ν, es:

$$u(x, \nu) = \int \left[U \circ (U')^{-1} \right] \left(\frac{\Lambda(x)}{\xi(y)} \right) \nu(dy), \tag{3.6.1}$$

donde $\xi(y) = \frac{d\nu}{d\mu}(y)$, y donde $\Lambda(x)$ se obtiene de la siguiente ecuación implícita:

$$\int (U')^{-1} \left(\frac{\Lambda(x)}{\xi(y)} \right) \mu(dy) = x.$$

Cabe destacar que este problema puede entenderse como uno de optimización robusta, donde el conjunto de modelos factibles son las medidas de probabilidad absolutamente continuas tales que la distribución de Y es ν.

Típicamente, la variable Y suele ser el precio final S_T o un precio promedio, por ejemplo. Ahora, en el contexto de la sección 3.5, donde la ambigüedad de modelo se manifiesta a través de una restricción lineal (ver la definición 3.5.1 y la notación en torno a ella), puede considerarse el caso particular de restricciones tipo momento (así, θ es un vector finito de variables aleatorias $\mathcal{F}_T-$medibles). Entonces aparece la siguiente interpretación: podrían considerarse todos las distribuciones posibles de este θ (denotadas ν) tales que se satisfacen las restricciones tipo momento (donde ahora los momentos se calculan sólo a partir de ν), y para cada uno de estos ν fijos, maximizar la utilidad del inversionista bajo todas las medidas tales que la distribución de θ es justamente ν. En otras palabras, el conjunto $\mathcal{Q}$ se particiona de modo que las medidas son clasificadas según la distribución de θ, se resuelve este problema para una distribución fija ν (que es análogo al problema de información débil con $Y = \theta$ y ν), y finalmente se maximiza sobre todas las distribuciones ν que permiten que las restricciones tipo momento sean satisfechas (por lo explicado en el párrafo anterior, este método entrega el mismo valor que la utilidad robusta). Este último problema puede entenderse como un problema de cálculo de variaciones con restricciones.

Para clarificar el método anterior, considérese $\theta = (f_1(S_T), \ldots, f_n(S_T))$ y $C = (c_1, \ldots, c_n)$. Sea μ la distribución de S_T bajo $\mathbb{P}$, que se supone absolutamente continua, y llamar además $f_0 = 1$ y $c_0 = 1$. Así, la utilidad robusta (u) asociada al conjunto de modelos $\mathcal{Q} = \left\{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \text{ medida de probabilidad } : \int \theta d\mathbb{Q} = C\right\}$, necesariamente debe satisfacer que:

$$u(x) = \inf_{\left\{\nu \geq 0 : \int f_i d\nu = c_i, \forall i\right\}} u(x, \nu) = \inf_{\left\{\nu \geq 0 : \int f_i d\nu = c_i, \forall i\right\}} \int \left[U \circ (U')^{-1}\right] \left(\frac{\Lambda(x, \nu)\mu(y)}{\nu(y)}\right) \nu(y) dy, \tag{3.6.2}$$

donde Λ queda definido por $\int (U')^{-1} \left(\frac{\Lambda(x,\nu)}{\xi(y)}\right) \mu(dy) = x$. El anterior es claramente un problema de cálculo de variaciones con restricciones sobre ν. En esta tesis no se hace un estudio teórico sobre este problema particular, ni mucho menos sobre la generalización a casos más complicados, por ejemplo cuando hay más variables de interés que S_T. Sin embargo, para mostrar que este método puede ser útil, se ilustra con el ejemplo en 3.5.1. En este caso $U(y) = y^\alpha/\alpha$, y como se indica en el *ejemplo 7* de [Bau02] (más algunas manipulaciones), se tiene que $u(x, \nu) = \frac{x^\alpha}{\alpha} \left[\int \nu(y)^{\frac{1}{1-\alpha}} \mu(y)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]^{1-\alpha}$. Luego, se considera el problema:

$$\inf_{\left\{\nu \geq 0 : \int \nu(y) dy = 1, \int y\nu(y) dy \geq A\right\}} \int \nu(y)^{\frac{1}{1-\alpha}} \mu(y)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} dy.$$

Así se considera el lagrangiano para este problema con restricciones (donde la no-negatividad no se impone, mas se verifica a posteriori) $L = \nu^{\frac{1}{1-\alpha}} \mu(y)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - a\nu - by\nu$, y se impone la ecuación de Euler-Lagrange (que se reduce a $\frac{\partial L}{\partial \nu} = 0$), de donde se obtiene que $\nu = \mu \left\{(1-\alpha)(a + by)\right\}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$, donde las constantes a, b se ajustan para que $\int \nu = 1$ y $\int y\nu(y) dy = A$ (esta última igualdad sale de que $u(x, \nu)$ termina siendo creciente en b). Para el caso $\alpha = \frac{1}{2}$, lo anterior se resuelve fácilmente ocupando propiedades sobre los momentos de una lognormal (reocordar que μ corresponde a una lognormal con parámetros $B = -\frac{\sigma^2}{2} T$ y $K^2 = \sigma^2 T$). Así, se obtiene que:

$$\nu(y) = \frac{\mu(y)}{2}(a + by),$$

donde $a = 2\frac{\left(e^{K^2} - A\right)}{\left(e^{K^2} - 1\right)}$ y $b = 2\frac{(A-1)}{\left(e^{K^2} - 1\right)}$. No es difícil verificar que con este ν, se cumple que:

$$u(x, \nu) = 2\sqrt{x\left(1 + \frac{(A-1)^2}{e^{\sigma^2 T} - 1}\right)} = u(x),$$

que es la ecuación 3.5.14 exactamente. Aún más, por [Bau02] se sabe que la medida menos favorable, dado ν, es $\frac{d\mathbb{Q}^\nu}{d\mathbb{P}} = \frac{d\nu}{d\mu}(S_T)$. A partir de las expresiones anteriores se obtiene que

$$\frac{\mathbb{Q}^\nu}{d\mathbb{P}} = \frac{e^{K^2} - A + S_T(A-1)}{e^{K^2} - 1},$$

que es exactamente la ecuación 3.5.15 para $\hat{\mathbb{Q}}$.

Aún más, al encontrarse este ν óptimo, se tiene que el problema de optimización robusta (que es el meollo del presente trabajo) es equivalente al problema de "insider trading" con información débil (ν, S_T). Con esto se pueden aplicar todos los resultados en la *sección 4* de [Bau02], así como [BNN04], donde se interpreta además el mercado financiero definido bajo $\mathbb{Q}^\nu$, encontrándose la descomposición del precio S y caracterizándose su deriva (drift) mediante una ecuación de Burgers.

3.6.2. Conexión con los problemas de Flujo de Información Débil

Como se señaló en la sección 3.6.1 anterior, existe una conexión entre los problemas de optimización robusta estudiados aquí, y el problema de maximización de utilidades con información débil. De hecho, este último problema se puede ver a su vez como un problema de optimización robusta, a saber: si Y es $\mathcal{F}_T-$medible y ν es una distribución, considerar $\mathcal{Q}^\nu := \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} : \mathbb{Q} \circ Y^{-1} = \nu\}$, donde $\mathbb{P}$ es la única medida neutra al riesgo. Entonces el problema de maximización de utilidades mediante la información débil (Y, ν), para una riqueza inicial x, es por definición (ver *definición 4* de [BNN04]):

$$\text{Minimizar} \sup_{\Theta \in A(S)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[U \left(x + \int_0^T \Theta_u dS_u \right) \right] \text{ para } \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}^\nu. \tag{3.6.3}$$

En este contexto, la función valor $u(x, \nu)$ de este problema es llamada "el valor financiero de la información débil" y se interpreta como una utilidad en el peor caso. Aquí se hace evidente la conexión con la optimización robusta (salvo orden del min y el max). En efecto, en el *ejemplo 3.12* de [Sch05] se muestra cómo este problema se puede abordar en el contexto robusto, y cómo son satisfechas las condiciones sobre $\mathcal{Q}^\nu$ de su enfoque (se necesita una topología razonable sobre Ω). Baudoin encuentra mediante técnicas ad-hoc la medida Q^ν que resuelve 3.6.3 (esencialmente se muestra que esta medida minimiza todos los funcionales de entropía sobre $\mathcal{Q}^\nu$), la que viene dada por $\frac{dQ^\nu}{d\mathbb{P}} = \frac{d\nu}{d\mathbb{P}\circ Y^{-1}}(Y)$, y de hecho Schied demuestra que esta es la "least favorable measure" (cuando $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ es un espacio de Borel) asociada a $\mathcal{Q}^\nu$; ver [Sch05].

Un problema relacionado es cuando en vez de la distribución de una sola variable aleatoria, lo que se conoce es un "flujo" de información de este estilo. Más precisamente, sea $\Omega = C\left([0, T], (-\infty, \infty)^d\right)$ y $(\mathcal{F}_t)_{t<T}$ la filtración asociada al proceso de coordenadas sobre Ω. Considerar el generador no homogéneo:

$$Af(t, z) = \sum_i b_i(t, z)\partial_{z_i} f(t, z) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{i,j}(t, z)\partial_{z_i}\partial_{z_j} f(t, z), \tag{3.6.4}$$

donde se hace la siguiente:

Suposición 3.6.1.
$\exists \sigma : [0, T] \times (-\infty, \infty)^d \to (-\infty, \infty)^d$ tal que $a = \sigma\sigma^*$, a es acotado y $\sigma, b \in C_b^{1,2,\alpha}\left([0, T], (-\infty, \infty)^d\right)$ (funciones diferenciables una vez en el tiempo y dos veces en el espacio, con derivadas acotadas Hölder continuas globalmente).

Bajo esta suposición, el problema de martingala con generador A en el dominio $C_0^\infty\left((0, T), (-\infty, \infty)^d\right)$ posee una solución única $\mathbb{P}$. En adelante se denotará X al proceso de coordenadas, $M_1\left((-\infty, \infty)^d\right)$ a las medidas de probabilidad en $(-\infty, \infty)^d$ y

$C_{M_1} := C\left([0,T], M_1\left((-\infty,\infty)^d\right)\right)$ (flujos de leyes marginales).

En [CL95], se estudia el problema de encontrar una medida de probabilidad de mínima entropía tal que las marginales de X sean igual a un flujo de leyes marginales en C_{M_1} dado. En concreto, se tiene el siguiente resultado (que es un extracto del *Teorema 3.6* de dicha publicación):

Teorema 3.6.1.

Bajo la suposición 3.6.1, sea $\nu \in C_{M_1}$ un flujo de leyes marginales dado, tal que $\nu_0 = \mathbb{P}\circ X_0^{-1}$. Además, sea $B : [0,T]\times(-\infty,\infty)^d \to (-\infty,\infty)^d$ tal que ν es solución de la siguiente ecuación débil de Fokker-Planck, asociada al generador $A + aB\cdot\nabla$:

$$\int_{[0,T]\times(-\infty,\infty)^d} \left(\partial_t + A + aB(t,z)\cdot\nabla\right) f(t,z)\nu_t(dz)dt = 0 \ ,\ \forall f \in C_0^\infty\left((0,T),(-\infty,\infty)^d\right),$$

y tal que posee la siguiente condición de energía finita con respecto a ν:

$$\int_{[0,T]\times(-\infty,\infty)^d} B\cdot aB(t,z)\nu_t(dz)dt < \infty.$$

Definir:

$$\mathbb{Q}^B(dx) := \mathbb{1}_{\left\{\int_0^T \frac{1}{2}B\cdot aB(t,\cdot)dt<\infty\right\}}(x)\exp\left\{\int_0^T B(t,x_t)\cdot(dx_t - b(t,x_t)dt) - \int_0^T \frac{1}{2}B\cdot aB(t,x_t)dt\right\}\mathbb{P}(dx), \tag{3.6.5}$$

con $x\in\Omega$. Luego $\mathbb{Q}^B$ es una media de probabilidad solución al problema de martingala asociado a $\partial_t + A + aB\cdot\nabla$ en el dominio $C_0^\infty\left((0,T),(-\infty,\infty)^d\right)$ y $\mathbb{Q}^B\circ X_t^{-1} = \nu_t$, para todo $0\le t\le T$.
Aún más, si $B\in H_{-1}(\nu)$, entonces:

$$\begin{aligned} H(\mathbb{Q}^B|\mathbb{P}) &= \inf\left\{H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) : \mathbb{Q} \text{ es media de probabilidad en } \Omega, \mathbb{Q}\circ X_t^{-1} = \nu_t, \forall t\le T\right\} \\ &= \int_{[0,T]\times(-\infty,\infty)^d} B\cdot aB(t,z)\nu_t(dz)dt, \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

donde $H(\cdot|\mathbb{P})$ es la entropía relativa:

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \begin{cases} \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\log\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] & \text{si } \mathbb{Q}\ll\mathbb{P} \\ +\infty & \text{si no,} \end{cases}$$

y donde $H_{-1}(\nu)$ es igual a la cerradura en $L^2(\nu) := \left\{B|\int_0^T B\cdot aB(t,z)\nu_t(dz)dt<\infty\right\}$ del conjunto $\left\{B : [0,T]\times(-\infty,\infty)^d \to (-\infty,\infty)^d | \text{medibles}, B = \nabla f, f\in C_0^\infty((0,T)\times(-\infty,\infty)^d)\right\}$.

Sea $\mathcal{Q}^\nu := \left\{\mathbb{Q}\ll\mathbb{P} : \mathbb{Q} \text{ es media de probabilidad en } \Omega, \mathbb{Q}\circ X_t^{-1} = \nu_t, \forall t\le T\right\}$. Como en el caso de la información débil, es interesante preguntarse sobre el problema de optimización de portafolio para un agente con información privilegiada $(X_t,\nu_t)_t$. Notar que esta pregunta a priori no se puede responder mediante el enfoque de Baudoin, pues en este caso habría que conocer la ley entera del proceso X, no sólo las leyes de sus marginales. Igual que antes, este problema puede interpretarse como uno de optimización robusta, donde el conjunto de modelos factibles ahora es $\mathcal{Q}^\nu$. Si se define la utilidad del "insider" como en 3.6.3, y se considera como función de utilidad la función sobre $(0,\infty)$:

$$U_H(x) \quad := \quad \begin{cases} 1 + log(x) & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si no,} \end{cases} \tag{3.6.7}$$

entonces se tiene la siguiente:

Proposición 3.6.1.
Si se satisfacen todas las condiciones del Teorema 3.6.1, y $\exists \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}^\nu$ tal que el supremo en 3.6.3 es finito, entonces para cada riqueza inicial x:

$$\begin{aligned} u_H(x) \quad &:= \quad \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}^\nu} \sup_{\Theta\in A(S)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[U_H\left(x + \int_0^T \Theta_u dS_u\right)\right] && (3.6.8) \\ &= \quad H\left(\mathbb{Q}^\nu|\mathbb{P}\right) + U_H(x) && (3.6.9) \\ &= \quad \int_{[0,T]\times(-\infty,\infty)^d} B \cdot aB(t,z)\nu_t(dz)dt + U_H(x), \end{aligned}$$

donde $\mathbb{Q}^B$ y B están definidos como en 3.6.6 y $A(S)$ son los procesos previsibles integrables con respecto a los precios S.
El ínfimo y supremo se alcanzan.

Demostración. Se emplean argumentos similares a los de Schied-Wu para mostrar que basta reducir 3.6.8 a aquellos $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. Con esto, $u_H(x) = \inf_{y>0}\left\{xy + \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}^\nu} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\tilde{U}_H\left(y\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right]\right\}$ mediante los argumentos clásicos de dualidad de Schachermayer, donde $\tilde{U}_H(z) = -\log(z)\mathbb{1}_{(0,\infty)}$. Ahora, gracias a 3.6.6, de esto sale que $u_H(x) = \inf_{y>0}\{xy - \log(y) + H\left(\mathbb{Q}^\nu|\mathbb{P}\right)\}$, de donde se concluye.

◇

Evidentemente es razonable preguntarse por la existencia de estrategias óptimas. Aún más, en vez de definir el problema del "insider" (donde la utilidad tiene el enfoque del peor caso), se podría partir del problema robusto donde el ínfimo y supremo en la definición de u_H estarían intercambiados. En los trabajos de C. Léonard se ha tratado de abordar el tema (de minimización de la entropía) mediante las técnicas expuestas en la sección 2.3, pero parece ser que un enfoque más ad-hoc (que se basa en la teoría de grandes desvíos) es más apropiado o directamente aplicable. Por esta razón es que este problema no se trató aquí con los resultados de las secciones anteriores.

Si en vez de la utilidad logarítmica U_H se empleara alguna otra, el problema es mucho más complicado. En esencia, esto se debe a que heurísticamente (por Itô), si $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ y Z es el proceso de densidad, entonces: $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W(Z_T)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W(Z_0)\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T W''(Z_s)Z_s\beta_s a(X_s)\beta_s\right]$, donde X es el proceso de coordenadas que se supone satisface junto a $\mathbb{P}$ el problema de martingala asociado a 3.6.4 y β es el logaritmo estocástico con respecto a $M =$

$X - X_0 - \int_0 b(X_s, s)ds$. Así, en el problema de optimización de portafolio de la Proposición anterior $W(z) = z\log(z)$, de donde el término $W''(Z_s)Z_s = 1$. Esto simplifica notablemente la minimización de $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W(Z_T)]$ al mover Z sobre todos los $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ tal que el proceso de coordenadas tenga marginales predefinidas. Aún así, se puede dar una respuesta semi satisfactoria en el caso de utilidades tipo potencia:

Sea $\alpha \in (0,1)$ y definir:

$$U_\alpha(x) \quad := \quad \begin{cases} \frac{x^\alpha}{\alpha} & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si no.} \end{cases} \tag{3.6.10}$$

Unos cálculos un poco tediosos muestran, en la misma línea que en la Proposición anterior, que la correspondiente utilidad del "insider" asociada al flujo de información débil (o al problema robusto $\mathcal{Q}^\nu$) es:

$$u_\alpha(x) := \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}^\nu} \sup_{\Theta\in A(S)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[U_\alpha\left(x + \int_0^T \Theta_u dS_u\right)\right] = \frac{x^\alpha}{\alpha}\left[1 + \frac{\alpha R}{2(1-\alpha)^2}\right]^{1-\alpha},$$

donde $R := \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}^\nu} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T Z_s^{\frac{1}{1-\alpha}} \beta_s \cdot a(X_s, s)\beta_s\right]$. En el caso de $\alpha = 1/2$, se tiene que $R = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}^\nu} \frac{1}{2} Var\left(Z_T^2\right)$ y luego la solución del problema es la medida de mínima varianza dentro de $\mathcal{Q}^\nu$.

Capítulo 4

Conclusiones y Problemas Abiertos

Los logros o avances del presente trabajo pueden agruparse en torno a dos ideas: aplicar la técnica de minimización de la entropía al problema de optimización robusta bajo restricciones lineales y resolver el problema de optimización robusta sin una condición de compacidad sobre el conjunto de modelos. Para ambos lineamientos, fue útil y necesario establecer una relación entre los ingredientes del problema robusto con los ingredientes de los espacios de Orlicz.

Para lograr prescindir de la condición de compacidad débil del conjunto de densidades de los modelos factibles, fue necesario asumir la reflexividad de un determinado espacio de Orlicz relevante (asociada a una determinada función de Young). Afortunadamente esta condición de reflexividad todavía se puede verificar de manera relativamente simple a partir de los ingredientes originales del problema. Se intentó emular lo más posible los resultados en [SW05] para lo cual fue necesario verificar la legitimidad de sus argumentos en el presente contexto. Así, todo culmina en la proposición 3.4.3 esencialmente bajo la suposición de que la función de utilidad no llegue continuamente a $-\infty$, que la función de Young pertenezca a $\nabla_2 \cap [\Delta_2 \text{ global}]$ más que el conjunto de densidades de los modelos factibles sea convexo para combinaciones infinitas, cerrado débil y no acotado en el espacio de Orlicz dado (caso acotado es más simple). Con todo, se logra aplicar los resultados de [Léo08] concernientes a minimización de la entropía en las proposiciones 3.2.1, 3.3.1 y 3.5.1 (caso completo e incompleto con compacidad débil y caso completo sin compacidad débil, respectivamente), cuando la incerteza es lineal en el modelo.

No fue posible prescindir de la convexidad bajo combinaciones infinitas del conjunto de densidades factibles, ni está clara su necesidad en el caso de incerteza lineal. Aún más, para este último caso no fue posible entender en términos de los ingredientes originales del problema una cierta condición de factibilidad (que involucraba el "intrinsic core" de la imagen del dominio del funcional de proyección). Por otro lado, en la sección 3.5.1 se ilustra la teoría desarrollada en un ejemplo bastante sencillo. Sería interesante encontrar más ejemplos, ojalá de mayor complejidad, para seguir explorando la utilidad práctica de los resultados anteriores. En términos más amplios, hubiera sido deseable entregar una interpretación probabilista de los resultados generales obtenidos. A modo de ejemplo, parece intuitivamente claro que la solución del problema dual debiera estar relacionada con el "drift" del precio bajo la medida óptima, o al menos dicha medida debiera resolver un problema de martingala asociado a algún operador que dependa de la solución del problema dual. Esto permitiría aportar una mirada trayectorial del mercado formado. Por otra parte, en lo que se refiere a dualidad, queda abierto el problema asociado a restricciones no lineales.

En la sección 3.6 se mostró cómo emplear los resultados de "insider trading" bajo información débil, para resolver el problema de optimización robusta cuando la incerteza de modelo es de tipo momento. Se ilustró con un ejemplo cómo el cálculo de variaciones puede ser útil para resolver dicho problema robusto. Además, se resolvió con cierta limitación el problema robusto o de "insider trading" asociado a un flujo de información débil (donde las marginales de una variable aleatoria son conocidas para cada tiempo). Tanto las discusiones como los argumentos fueron en general más informales en estas partes, por lo que una formalización más profunda se hace necesaria.

Apéndice A

Apéndice

Los siguientes dos teoremas clásicos ilustran la relación que existe entre los conceptos de espacios de Orlicz, integrabilidad uniforme y compacidad débil en L^1.

Teorema A.0.2. *Teorema de de la Vallée Poussin*
Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto de $L^1(\Omega, \mathbb{P})$. Entonces son equivalentes:

1. *$\mathcal{K}$ es uniformemente integrable.*
2. *Existe una función positiva $G(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, tal que $\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = +\infty$ y:*

$$\sup_{f\in\mathcal{K}} \mathbb{E}(G(f)) < \infty.$$

Demostración. Ver el *Teorema* 22, página 24 del capítulo II, de [DM78].

◇

En el Teorema anterior, G se puede escoger convexa e incluso puede escogerse como una función de Young, o aún más, como una N-función.

Teorema A.0.3. *Criterio de compacidad de Dunford-Pettis*
Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto de $L^1(\Omega, \mathbb{P})$. Entonces son equivalentes:

1. *$\mathcal{K}$ es uniformemente integrable.*
2. *$\mathcal{K}$ es relativamente compacto en L^1 con su topología débil $\sigma(L^1, L^\infty)$.*
3. *Toda sucesión en $\mathcal{K}$ posee una subsucesión convergente en la topología débil $\sigma(L^1, L^\infty)$.*

Demostración. Ver el *Teorema* 25, página 27 del capítulo II, de [DM78].

◇

Proposición A.0.2. *Proposición 1, [RR91]*
Si ϕ, γ son dos funciones de Young conjugadas, entonces si $f \in L_\phi(\mu)$ y $g \in L_\gamma(\mu)$, se tiene la desigualdad de Hölder siguiente:

$$\int |fg| d\mu \leq 2||f||_{L_\phi}||g||_{L_\gamma}.$$

Demostración. Ver la *Proposición 1*, página 58 de [RR91], más el comentario ("remark") que le sigue.

◇

En el desarrollo de la optimización robusta cuando el conjunto de densidades de los modelos es no acotado en un cierto Orlicz reflexivo, se hace necesario emplear un Teorema minimax ad-hoc, como el siguiente:

Teorema A.0.4. *Teorema 4*, [Tuy04]*
Sean C, D dos subconjuntos cerrados y convexos de dos espacios vectoriales topológicos X e Y respectivamente. Sea además una función $F : C \times D \to \mathbb{R}$ cuasiconvexa y sci en la primera variable, y cuasicóncava y scs en la segunda sobre todo segmento de línea.
En el caso en que X es un Banach reflexivo, y $\sup_{y\in D} F(x, y) \to +\infty$ a medida que $||x|| \to \infty$, $x \in C$, se tiene que:

$$\sup_{y\in D} \inf_{x\in C} F(x, y) = \inf_{x\in C} \sup_{y\in D} F(x, y) = \min_{x\in \hat{C}} \sup_{y\in D} F(x, y),$$

donde $\hat{C} \subset C$ es un compacto.

Demostración. Esta es la parte $(\tilde{Q})$ del *Teorema 4**, [Tuy04].

◇

Bibliografía

[Bau02] F. Baudoin. Modelling anticipations on financial markets. *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance*, 70:43–94, 2002.

[BNN04] F. Baudoin and L. Nguyen-Ngoc. The financial value of a weak information on a financial market. *Finance Stoch.*, 8 no. 3:415–435, 2004.

[CL95] P. Cattiaux and C. Léonard. Large deviations and nelson processes. *Forum Math.*, 7 no. 1:95–115, 1995.

[DM78] C. Dellacherie and P.-A. Meyer. *Probabilities and Potential*, volume 29 of *North-Holland Mathematics Studies.* North-Holland Publishing Co., 1978.

[FG06] H. Föllmer and A. Gundel. Robust projections in the class of martingale measures. *Illinois J. Math.*, 50 no. 1-4:439–472, 2006.

[FSW09] H. Föllmer, A. Schied, and S. Weber. Robust preferences and robust portfolio. *Handbook of Numerical Analysis*, 15:29–87, 2009.

[Gun06] A. Gundel. *Utility Maximization, f-Projections and Risk Constraints.* PhD thesis, Humboldt Universität zu Berlin, 2006.

[KS96] I. Klein and W. Schachermayer. A quantitative and a dual version of the halmos-savage theorem with applications to mathematical finance. *Ann. Probab.*, 24 no. 2:867–881, 1996.

[KS99] D. Kramokov and W. Schachermayer. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. *Ann. Appl. Probab.*, 9 no. 3:904–950, 1999.

[Léo08] C. Léonard. Minimization of entropy functionals. *J. Math. Anal. Appl.*, 346 no. 1:183–204, 2008.

[Pon05] M. Pontier. Essai de panorama de la modélisation et de la détection du délit dínitié. *Matapli*, 70:58–75, 2005.

[Roc70] T. Rockafellar. *Convex Analysis*, volume 28 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, 1970.

[RR91] M. Rao and Z. Ren. *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker, Inc., 1991.

[Sch05] A. Schied. Optimal investments for robust utility functionals in complete market models. *Math. Oper. Res.*, 30 no. 3:750–764, 2005.

[SW05] A. Schied and C.-T Wu. Duality theory for optimal investments under model uncertainty. *Statist. Decisions*, 23 no. 3:199–217, 2005.

[Tuy04] H. Tuy. Minimax theorems revisited. *Acta Math. Vietnam.*, 29 no. 3:217–229, 2004.