



**UNIVERSIDAD DE CHILE**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS**

**MODELAMIENTO DE LEYES EQUIVALENTES EN  
YACIMIENTOS POLIMETÁLICOS**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS**

**CARLOS ALBERTO CORRAL GONZÁLEZ**

PROFESOR GUÍA

XAVIER EMERY

MIEMBROS DE LA COMISIÓN

JULIÁN ORTIZ CABRERA

EDUARDO MAGRI VARELA

SANTIAGO DE CHILE

ENERO 2010

## Resumen

Cuantificar recursos en yacimientos con más de un elemento de interés puede resultar complejo debido a las posibles dependencias entre elementos, en particular si existen contaminantes que pueden hacer desfavorable el interés económico de una futura explotación de los recursos. El concepto de ley equivalente permite resolver en parte este problema, al transformar el problema multivariable en uno univariable. Además permite disminuir los tiempos de cálculo, pero a la vez genera inflexibilidad ya que, una vez estimada o simulada la ley equivalente, no se puede cambiar los factores de cálculo utilizados para definirla.

En este trabajo se considera dos bases de datos. La primera corresponde a un yacimiento de oro y plata, en donde la ley de oro equivalente es una combinación lineal de las leyes de ambos elementos. La segunda corresponde a un yacimiento de cobre con plata, arsénico y antimonio, en donde la ley de cobre equivalente es una combinación no lineal de las leyes de cobre, plata y arsénico o arsénico equivalente; este último incluye a su vez una combinación entre leyes de arsénico y antimonio.

Se compara tres enfoques geoestadísticos para modelar la ley equivalente en los dos yacimientos: kriging y simulación de las leyes de cada elemento por separado, para luego calcular la ley equivalente; cokriging y cosimulación de las leyes de todos los elementos; y cálculo directo en los datos de la ley equivalente, para finalmente realizar kriging y simulación.

Los resultados obtenidos presentan diferencias moderadas para el primer yacimiento: las correlaciones bloque a bloque entre las leyes de oro equivalente obtenidas por los distintos enfoques llegan a ser superiores a 0,87. Esto se explica porque la ley equivalente es una combinación lineal de las leyes de oro y plata, las cuales han sido igualmente muestreadas.

Las mayores diferencias se aprecian en el segundo yacimiento, en donde las correlaciones bloque a bloque pueden alcanzar valores inferiores a 0,5. Esto se debe a que la ley equivalente no es combinación lineal de las leyes originales (tiene términos de segundo grado y funciones por tramos) y a un muestreo fuertemente heterotópico para la ley de antimonio. En este caso, el enfoque recomendado es el de cosimulación de las leyes de todos los elementos, seguida del cálculo de la ley equivalente.

## **Abstract**

Quantifying resources and reserves in ore deposits with more than one mineral species of interest is an arduous task when there exist complex spatial dependency relationships between these species, in particular when there are contaminants that can affect the economic interest of a future economic exploitation. The equivalent grade solves part of this problem, by transforming the multivariate problem into a univariate one.

In addition, calculating the equivalent grade at the data considerably decreases the calculation time, but at a cost of losing flexibility because the calculation parameters cannot be changed after the variable has been estimated or simulated.

This work focuses on two databases. The first contains gold and silver, where the gold equivalent grade is an additive linear combination of both variables. The second corresponds to a copper deposit with silver, arsenic and antimony, where the equivalent copper grade is an additive linear combination with copper and silver and subtractive, quadratic and defined in specific intervals for arsenic or “equivalent arsenic” that includes a combination between arsenic and antimony (the subtraction is because arsenic and antimony are contaminants and their presence lowers the economic value).

Three geostatistical approaches are compared for modeling the equivalent grade in the databases: kriging and simulation of each variable separately followed by the calculation of the equivalent grade, cokriging and co-simulation of all the variables and finally direct calculation of the equivalent grade from the data followed by kriging and simulation.

The results obtained do not show considerable differences for the first deposit: the block to block correlations are above 0.87 among all methodologies, which is explained because the equivalent gold grade is a linear combination of gold and silver.

The differences can be seen in the other deposit, where the block to block correlations may be lower than 0.5. This is because the equivalent grade is not a linear combination of the original variables (it involves quadratic terms and indicator functions), and because of a strongly heterotopic sampling for antimony. Based on these results, it is concluded that the recommended approach is co-simulating the variables and then calculating the equivalent grade.

## **Agradecimientos**

Quiero agradecer de todo corazón primeramente a mi madre, a mi padre y a mi hermano por la comprensión y el fuerte apoyo recibido por ellos, que han sabido soportar mi carácter a lo largo de mi vida y entregarme su cariño en todo momento.

Quiero agradecer al profesor Xavier Emery por la paciencia sobrehumana que ha tenido para explicar los contenidos de geostatística, incluso llegando a hacerlo de la manera más didáctica posible, además agradecer también su calidad humana y el compromiso que tiene con el Departamento de Ingeniería de Minas. Agradecer también sus correcciones a este trabajo, junto con la de los profesores Julián Ortíz y Eduardo Magri.

También quiero agradecer a mis compañeros de mil batallas en la U: Nicolás “Poke”, Rodrigo “Pelao”, Javier “Chino” y Patrick “Hellboy”; por aguantar estoicamente todos los “condoros” que nos mandábamos, las maratones de estudios y por el apoyo recibido, también a Rodrigo Zúñiga por tener siempre la disposición de ayudar cuando había dudas. Tampoco puede faltar Juanita Vergara en estos agradecimientos, que siempre está dispuesta a ayudar a toda la gente del Departamento a resolver todos sus problemas.

No pueden faltar en estos agradecimientos mis grandes amigos Cristóbal Cruz, Sebastián Miño y Waldo Díaz, el mismo grupito del colegio que a pesar de haber pasado varios años, la amistad aún sigue intacta.

Y finalmente agradecer a Fondecyt por el financiamiento de este trabajo mediante el proyecto 1090013 y a Codelco Chile por patrocinar la Cátedra de Evaluación de Yacimientos del Departamento de Ingeniería de Minas, donde se desarrolló este trabajo.



# Índice

1. Introducción.....	1
1.1. Objetivos.....	1
1.1.1. Objetivo General.....	1
1.1.2. Objetivos Específicos .....	2
1.2. Alcances.....	2
1.2.1. Bases de Datos y Casos de Estudio .....	2
1.2.2. Generalidades .....	2
2. Antecedentes.....	3
2.1. Antecedentes sobre Geoestadística.....	3
2.1.1. Generalidades .....	3
2.1.2. Estimaciones mediante interpoladores lineales .....	6
2.1.3. Simulaciones.....	8
2.2. Antecedentes sobre Ley Equivalente.....	11
3. Cálculo de Ley Equivalente.....	13
3.1. Caso de Estudio 1 .....	13
3.2. Caso de Estudio 2 .....	14
3.3. Caso de Estudio 3 .....	14
4. Metodología.....	16
4.1. Primer Enfoque: Modelamiento de cada variable por separado .....	16
4.1.1. Estimación mediante Kriging Ordinario sobre cada variable.....	16
4.1.2. Simulación Multigaussiana sobre cada variable.....	16
4.2. Segundo Enfoque: Modelamiento conjunto de todas las variables .....	16
4.2.1. Cokriging Ordinario de todas las variables .....	17
4.2.2. Cosimulación Multigaussiana de todas las variables .....	17
4.3. Tercer Enfoque: Modelamiento directo de la ley equivalente.....	17
4.3.1. Kriging Ordinario sobre la ley equivalente .....	17
4.3.2. Simulación Multigaussiana de la ley equivalente.....	17
5. Casos de Estudio.....	19
5.1. Caso de Estudio 1 .....	19
5.1.1. Primer Enfoque: Kriging Ordinario sobre cada variable.....	20
5.1.2. Primer Enfoque: Simulación Multigaussiana sobre cada variable .....	24
5.1.3. Segundo Enfoque: Cokriging Ordinario sobre todas las variables.....	26
5.1.4. Segundo Enfoque: Cosimulación Multigaussiana sobre todas las variables.....	27
5.1.5. Tercer Enfoque: Kriging Ordinario sobre la Ley Equivalente .....	28

5.1.6.	Tercer Enfoque: Simulación Multigaussiana de la Ley Equivalente .....	30
5.2.	Caso de Estudio 2 .....	32
5.2.1.	Primer Enfoque: Kriging Ordinario sobre cada variable.....	33
5.2.2.	Primer Enfoque: Simulación Multigaussiana sobre cada variable .....	37
5.2.3.	Segundo Enfoque: Cokriging Ordinario sobre todas las variables.....	40
5.2.4.	Segundo Enfoque: Cosimulación Multigaussiana sobre todas las variables.....	42
5.2.5.	Tercer Enfoque: Kriging Ordinario sobre la Ley Equivalente .....	43
5.2.6.	Tercer Enfoque: Simulación Multigaussiana de la Ley Equivalente .....	45
5.3.	Caso de Estudio 3 .....	47
5.3.1.	Primer Enfoque: Kriging Ordinario sobre cada variable.....	48
5.3.2.	Primer Enfoque: Simulación Multigaussiana sobre cada variable .....	51
5.3.3.	Segundo Enfoque: Cokriging Ordinario sobre todas las variables.....	52
5.3.4.	Segundo Enfoque: Cosimulación Multigaussiana sobre todas las variables.....	54
5.3.5.	Tercer Enfoque: Kriging Ordinario sobre la ley equivalente .....	56
5.3.6.	Tercer Enfoque: Simulación Multigaussiana de la Ley Equivalente .....	58
6.	Análisis de Resultados.....	61
6.1.	Caso de Estudio 1 .....	61
6.2.	Caso de Estudio 2 .....	62
6.3.	Caso de Estudio 3 .....	63
7.	Conclusiones y Recomendaciones .....	65
8.	Bibliografía.....	67
Anexos	.....	68
Anexo A: Cálculos de Ley Equivalente .....		69
A1: Oro Equivalente.....		69
A2: Cobre Equivalente .....		69
A3: Arsénico Equivalente.....		71
Anexo B: Caso de Estudio 1.....		72
B1: Enfoque 1: Metodología 1 .....		73
B2: Enfoque 1: Metodología 2 .....		76
B3: Enfoque 2: Metodología 1 .....		79
B4: Enfoque 2: Metodología 2 .....		81
B5: Enfoque 3: Metodología 1 .....		84
B6: Enfoque 3: Metodología 2 .....		86
Anexo C: Caso de Estudio 2.....		88
C1: Enfoque 1: Metodología 1 .....		89
C2: Enfoque 1: Metodología 2 .....		94

C3: Enfoque 2: Metodología 1 .....	99
C4: Enfoque 2: Metodología 2 .....	104
C5: Enfoque 3: Metodología 1 .....	107
C6: Enfoque 3: Metodología 2 .....	109
Anexo D: Caso de Estudio 3 .....	112
D1: Enfoque 1: Metodología 1 .....	112
D2: Enfoque 1: Metodología 2 .....	114
D3: Enfoque 2: Metodología 1 .....	117
D4: Enfoque 2: Metodología 2 .....	122
D5: Enfoque 3: Metodología 1 .....	127
D6: Enfoque 3: Metodología 2 .....	129

## **1. Introducción**

La evaluación económica de una unidad básica de explotación en un yacimiento polimetálico generalmente resulta ser un problema complejo, debido a que al coexistir dos o más elementos de interés, el bloque queda caracterizado de manera heterogénea, en donde no hay una variable única para realizar una evaluación, pudiéndose optar por diversos caminos. Éste problema aún puede ser más complicado si existen elementos contaminantes, ya que en algunos casos se debe tomar medidas para mitigar este efecto, y en casos más extremos, no considerar la explotación de dicha unidad.

Una de las técnicas utilizadas en la actualidad para resolver el problema anterior es el uso de “Leyes Equivalentes” en donde se caracteriza un elemento principal de interés como una combinación aditiva que incluye solamente a los subproductos (generalmente una combinación lineal), tal que los ponderadores de dicha combinación dependen principalmente de factores económicos y de recuperación.

Con lo anterior, se pretende en este trabajo comparar diversas herramientas geoestadísticas, tanto univariantes como multivariantes, para poder modelar “Leyes Equivalentes” en diversos casos de estudio dentro de yacimientos polimetálicos, incluyendo además combinaciones sustractivas y por tramos.

La comparación y el análisis de las diversas metodologías va enfocado a las ventajas y desventajas que cada una presenta, con la finalidad de ver si es posible compensar errores de estimación o simulación, con tiempos de cálculo. Esto se traduce en la práctica en ser un poco más impreciso para ganar cálculos con mayor rapidez. Para ello se debe definir o cuantificar qué es tener mayor o menor precisión y qué significa ser más lento o más rápido en los tiempos de cálculo.

### **1.1. Objetivos**

#### ***1.1.1. Objetivo General***

El objetivo de este trabajo es poder comparar diversos enfoques geoestadísticos existentes para estimar recursos en yacimientos polimetálicos usando la metodología de leyes equivalentes, comparando sus resultados.

### ***1.1.2. Objetivos Específicos***

En los objetivos secundarios se encuentran los siguientes propósitos:

- Aplicar las herramientas de análisis multivariable, vale decir, modelos de correogionalización, cokriging y cosimulación.
- Analizar las ventajas y las desventajas de cada una de las diversas metodologías propuestas.
- Estudiar el impacto de un muestreo heterotópico en la aplicación de las diversas metodologías.

## **1.2. Alcances**

### ***1.2.1. Bases de Datos y Casos de Estudio***

Se trabajará con dos bases de datos reales de yacimientos polimetálicos, sin embargo, al ser confidenciales, no se puede dar la procedencia de éstas.

La primera base de datos corresponde a antiguos sondajes de exploración de un yacimiento aurífero – argentífero, mientras que la segunda pertenece a sondajes de exploración de un yacimiento tipo pórfido cuprífero, con presencia de plata, arsénico y antimonio.

De la primera se estudiará un caso, que corresponde a definir “Oro equivalente”, en tanto, de la segunda se estudiarán dos casos, ambos a calcular “Cobre equivalente”, con la diferencia que en uno no se considerará el antimonio, y en el otro, se definirá un “Arsénico equivalente” que contiene al antimonio en su definición.

### ***1.2.2. Generalidades***

Se realizarán estimaciones mediante kriging y cokriging, además de simulaciones y cosimulaciones utilizando el modelo multigaussiano. Dichas estimaciones y simulaciones, además de su respectivo post procesamiento se realizarán principalmente con ayuda de los softwares ISATIS, MATLAB, la librería de archivos ejecutables GSLib y Microsoft Excel.

Este trabajo se enmarca en el proyecto Fondecyt 1090013: “*Multivariate geostatistics and its applications to the characterization of mineral resources*”

## 2. Antecedentes

### 2.1. Antecedentes sobre Geoestadística

#### 2.1.1. Generalidades

La geoestadística es una rama de la estadística que se enmarca en el tratamiento de fenómenos espaciales, con el objetivo de estudiar variables regionalizadas [1, 2].

Una variable regionalizada es una variable numérica que presenta una distribución espacial definida dentro de un dominio limitado. Como característica general varía irregularmente en dicho dominio, por lo que se escapa a toda representación simplificadora, pero presenta cierta tendencia a una continuidad espacial, vale decir, suele ser coherente con el hecho de que en zonas de altos o bajos valores, los datos más cercanos presentan la misma tendencia. Un claro ejemplo de variable regionalizada en el marco de la minería es la ley de una especie mineral.

Una variable regionalizada queda caracterizada por:

- Su naturaleza, pudiendo ser continua, discreta o categórica.
- El dominio en donde se encuentra definida, que se denomina “*Campo*”.
- El área o volumen sobre donde está siendo medida, que se denomina “*Soporte*”.

Sea  $D$  el campo en donde se encuentra definida la variable regionalizada, los modelos de la geoestadística consideran el valor  $z(x)$  de dicha variable regionalizada como una realización de una variable aleatoria  $Z(x)$  en un punto  $x \in D$ . Si se recorre  $D$ , se obtiene una familia de variables aleatorias  $\{Z(x), x \in D\}$ , que constituye una función aleatoria.

Una variable aleatoria  $z$  se caracteriza por una distribución de probabilidad, que se representa mediante:

*Una función de distribución  $F(z)$ :*

$$\forall z \in R, F(z) = \text{Prob}(Z < z)$$

*Una densidad de probabilidad  $f(z)$ :*

$$\forall z \in R, f(z) = \frac{dF(z)}{dz}$$

En cambio, una función aleatoria se caracteriza por una distribución espacial. Si se considera  $\{Z(x), x \in D\}$ , donde  $D \subseteq \mathbf{R}^d$ , se tiene:

$$\forall j \in N, \forall x_1, \dots, x_j \in D, \forall z_1, \dots, z_j \in \mathbf{R}: \\ F(z_1, \dots, z_j; x_1, \dots, x_j) = \text{Prob}(Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_j) < z_j)$$

En los estudios geoestadísticos es necesario tener la capacidad de inferir todo o parte de la distribución espacial a partir de un conjunto de datos disponibles. Para poder realizar esto de la mejor manera posible, se deben hacer dos hipótesis simplificadoras:

*Estacionaridad:* La distribución espacial es invariante por traslación en el espacio, es decir:

$$\forall j \in N, \forall x_1, \dots, x_j \in D, \forall z_1, \dots, z_j \in \mathbf{R}, \forall h \in D: \\ F(z_1, \dots, z_j; x_1, \dots, x_j) = F(z_1, \dots, z_j; x_1 + h, \dots, x_j + h)$$

*Ergodicidad:* Es posible aproximar las estadísticas experimentales calculadas sobre una realización particular, hacia las estadísticas del modelo cuando el dominio se vuelve muy grande.

Para describir la distribución espacial bajo el supuesto de estacionaridad, se suelen considerar los siguientes parámetros, denominados “*momentos*”:

*Momento de Primer Orden:*

**Esperanza:**  $m = E[Z(x)].$

*Momentos de Segundo Orden:*

**Varianza:**  $\sigma^2 = \text{var}[Z(x)].$

**Covarianza:**  $C(h) = \text{cov}[Z(x+h), Z(x)].$

**Variograma:**  $\gamma(h) = 0,5 \text{ var}[Z(x+h) - Z(x)].$

Resumiendo en parte lo anterior, el interés esencial de la geoestadística radica en estimar o simular el comportamiento de variables regionalizadas, además previo a hacer un estudio geoestadístico se deben desarrollar etapas de estudio exploratorio y estudio variográfico, que se proceden a describir brevemente a continuación.

En el estudio exploratorio de datos se pretende conocer la distribución a priori de la variable regionalizada a estudiar, con la finalidad de delimitar el campo, además de sopesar posibles falencias o dificultades inherentes a la base de datos. Algunas de las herramientas que se utilizan mayormente son:

- **Mapas:** Sirven para visualizar la ubicación espacial de los datos.
- **Histogramas:** Se utilizan para apreciar la distribución estadística de los datos, detectar bimodalidades y valores extremos.
- **Estadísticas Básicas:** Sirven para hacerse una idea general de las medidas de dispersión y posicionamiento.
- **Nubes de Correlación:** Se utilizan para comparar valores de una variable respecto a otra e identificar dependencias y relaciones entre variables.

En el estudio variográfico se pretende conocer la continuidad o discontinuidad espacial de la variable regionalizada a estudiar, puesto que si fuese posible correlacionar valores en diferentes ubicaciones espaciales, se podría intentar modelar dicha correlación y ver cómo actúa al alejarse o acercarse a los datos. Este estudio se realiza con la función variograma definida anteriormente, que indica cuán desemejantes son los valores de la variable regionalizada entre dos sitios.

Se pueden calcular variogramas en diferentes direcciones del espacio. Como el variograma está definido para un vector “h”, asumiendo algunas tolerancias tanto en la longitud como en la orientación de éste, se puede obtener mayor información. Sin embargo dicho variograma experimental sigue siendo incompleto e imperfecto, ya que se calcula solamente para ciertas direcciones y distancias, razón por la cual debe ser modelado, existiendo una serie de modelos simples que solos o combinados, permiten hacer este modelamiento de manera adecuada.

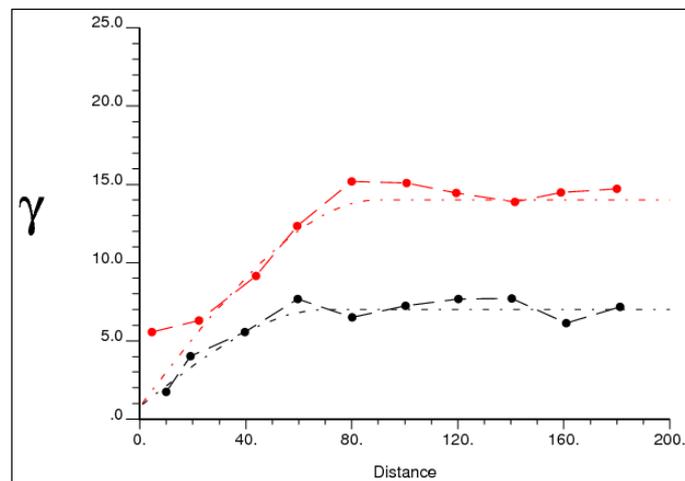


Imagen 1: Ejemplo de variogramas experimentales y modelados.

La imagen 1 presenta tanto variogramas experimentales como modelados y están representados mediante línea más gruesa y línea más segmentada respectivamente.

Dentro del ámbito de la minería, la evaluación de recursos minerales comienza por la entrega de información puntual, que proviene de la toma de muestras (sondajes, pozos de tronadura, etc.) Esta información se analiza mediante técnicas concernientes a la geoestadística especialmente con dos metodologías, que son las más ampliamente utilizadas: la estimación lineal por kriging ordinario y el uso de simulaciones condicionales para la evaluación de la incertidumbre.

### **2.1.2. Estimaciones mediante interpoladores lineales**

Uno de los grandes objetivos de la geoestadística es estimar el valor de una variable regionalizada en una posición “ $x_0$ ” del espacio en donde no se conoce el valor real a partir de los datos disponibles. Una forma de plantear el problema es mediante una combinación lineal, debido a su simplicidad:

$$Z^*(x_0) = a + \sum_{i=1}^j \lambda_i Z(x_i)$$

En donde:

$Z^*(x_0)$  = Valor estimado para la posición  $x_0$ .

$\{Z(x_i), i=1, \dots, j\}$  = Valores de los datos en las posiciones  $\{x_i: i=1, \dots, j\}$ .

$a$  = Coeficiente aditivo.

$\{\lambda_i, i=1, \dots, j\}$  = Ponderadores.

El problema de este planteamiento surge al momento de asignar valores a estos ponderadores. Resulta válido entonces plantear la siguiente pregunta: ¿Se deberán asignar por algún criterio de cercanía, redundancia, continuidad, variabilidad o alguna dirección preferencial?

La respuesta la encontramos a través del kriging, que incorpora todos los criterios anteriores. El kriging es el “mejor” estimador lineal insesgado, ya que es una combinación lineal ponderada de los datos, el error de estimación tiene una media nula y minimiza la varianza del error.

Existen diversos tipos de kriging, cada uno depende de las hipótesis con que fueron construidas sus funciones aleatorias. Dentro de la industria minera se destaca la utilización de kriging simple (en desuso en la actualidad), en que se asume la media conocida y de kriging ordinario, en que se desconoce la media [2, 5, 7, 8].

### ***Kriging y Cokriging Ordinario***

Como se mencionó anteriormente, cuando no se conoce el valor promedio de una variable regionalizada, suele utilizarse el denominado “kriging ordinario” (KO), mientras que la versión multivariable se denomina “cokriging ordinario” (CKO). Otra hipótesis que debe cumplir es que solamente se conoce la función variograma  $\gamma(h)$  o la función de covarianza  $C(h)$ . Con esto y utilizando la notación de la página anterior, los estimadores de kriging ordinario y cokriging ordinario quedan conformados de la siguiente manera:

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^j \lambda_i Z(x_i) \quad (KO)$$

$$Z_{i_0}^*(x_0) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^i Z_i(x_j^i) \quad (CKO)$$

El sistema de kriging ordinario para determinar los ponderadores se plantea de la siguiente forma, resultando ambas maneras válidas:

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) + \mu = C(x_0 - x_{\alpha}) \quad \forall \alpha = 1 \dots n$$

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \gamma(x_{\alpha} - x_{\beta}) - \mu = \gamma(x_{\alpha} - x_0) \quad \forall \alpha = 1 \dots n$$

En donde  $\mu$  es un multiplicador de Lagrange. Además se debe cumplir con la siguiente restricción para los ponderadores:

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} = 1$$

Mientras que el sistema de cokriging ordinario para determinar los ponderadores queda:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{\beta=1}^{n_k} \lambda_{\beta}^k C_{ik} (x_{\alpha}^i - x_{\beta}^{i_0}) + \mu_i = C_{ii_0} (x_{\alpha}^i - x_0) \quad \forall i = 1 \dots N; \forall \alpha = 1 \dots n_i$$

$$\sum_{\beta=1}^{n_i} \lambda_{\beta}^i = \delta_{i_0}^i \quad (1 \text{ si } i = i_0; 0 \text{ si } i \neq i_0) \quad \forall i = 1 \dots N$$

El kriging, ya sea de la forma univariable, como multivariable presenta algunas limitaciones considerables:

- Los valores estimados presentan una menor dispersión que los valores reales, esto se conoce como suavizamiento.
- La varianza de kriging, si bien incorpora información geométrica y de continuidad espacial, no considera el efecto proporcional, ya que no mide la información local, por ende, no mide todas las fuentes de incertidumbre.

Otro aspecto a destacar es que la precisión de la estimación que entrega el kriging depende únicamente del variograma y de la configuración geométrica de los datos, provocando esto, al no considerar el valor de los datos, que en zonas de alta variabilidad, dicha precisión no sea correctamente reflejada. Agregando a lo anterior que la visión suavizada de la realidad y la falta de modelamiento de la incertidumbre en la cantidad de recursos mineros que entrega kriging, hace necesario que se deban utilizar otras herramientas que permitan crear diversos escenarios acordes a la información disponible. Es por este motivo que se recurre a las técnicas de simulaciones.

### **2.1.3. Simulaciones**

Como se mencionó anteriormente, dadas las limitaciones que posee kriging, resulta ventajoso utilizar simulaciones para estimar la incertidumbre relacionada al poco conocimiento de los valores reales de la variable regionalizada en estudio.

El principio de las simulaciones consiste en crear una variable sintética que represente la variabilidad espacial de la variable regionalizada. Si se interpreta a esta variable regionalizada como una realización particular de una función aleatoria, se asume que es posible que existan diversos escenarios plausibles capaces de interpretar adecuadamente el fenómeno que ocurrió. Si se conoce de manera completa la distribución espacial de la función aleatoria, resulta factible modelar diversos escenarios a cada valor desconocido que se tiene, para ver la incertidumbre asociada.

Con lo anterior, las simulaciones se pueden describir formalmente como modelos numéricos que buscan representar y caracterizar la incertidumbre de una variable mediante la construcción de un conjunto de realizaciones, en donde cada realización representa un posible escenario. Las simulaciones pueden reproducir las distribuciones espaciales de dos maneras distintas:

- **Simulaciones Condicionales:** Reproducen la distribución espacial a posteriori, es decir, condicional a los datos.

- **Simulaciones No Condicionales:** Reproducen la distribución espacial a priori, solamente busca crear realizaciones que tengan la misma variabilidad que la variable en estudio, sin tomar en consideración los valores de los datos.

La incertidumbre de los valores desconocidos de la variable, puede ser caracterizada mediante la probabilidad de superar un límite o umbral, por intervalos de confianza o bien por el conocimiento los valores extremos que pueda tomar la variable y de la dispersión que presenten. Sumado a esto, la adecuada elección de la información que condiciona las simulaciones y sin dejar de lado la hipótesis de estacionaridad, puede permitir reproducir adecuadamente las características locales, ya sea tendencias o efecto proporcional [1, 2].

Para construir correctamente simulaciones condicionales, se requiere definir un modelo de distribución espacial que caracterice la función aleatoria, considerando que deben existir herramientas para inferir y validar el modelo propuesto. Además se debe construir las realizaciones de la función aleatoria definida y obviamente condicionar dichas realizaciones a los datos disponibles.

### ***Modelo Multigaussiano***

Si una función aleatoria  $\{Y(x), x \in \mathbf{R}^d\}$  presenta la propiedad que toda combinación lineal de sus valores sigue una distribución gaussiana, se dice que la función aleatoria tiene una distribución “multigaussiana”. No deja de ser curioso que siendo un modelo relativamente sencillo, presente varias propiedades interesantes: se caracteriza solamente por sus dos primeros momentos (media y variograma), todo variograma teórico es compatible con esta distribución y el teorema del límite central facilita la búsqueda de algoritmos de simulación [6].

Generalmente, la variable en estudio no presenta las características de una distribución gaussiana. Para trabajar con ella, se debe hacer un paso previo, el cual es transformar la variable regionalizada a una variable sintética que sea gaussiana. Esta transformación se realiza mediante una función denominada “anamorfosis”, que debe ser biyectiva, para que al final del proceso la transformación inversa vuelva a reproducir la variable regionalizada original.

Una vez transformados los datos originales a datos gaussianos, se debe corroborar si efectivamente siguen una distribución multigaussiana, esto se comprueba mediante algunos tests que se explican a continuación:

- **Nubes de correlación diferida:** Debido a que las curvas de isodensidad de la distribución bivariable  $\{Y(x), Y(x+h)\}$  son elipses concéntricas, en este test de manera gráfica para un vector “h” fijo debe visualizarse una elipse; a distancias tendientes a cero la nube se restringe en torno a la bisectriz debido a que cada vez  $Y(x)$  está más correlacionado con

$Y(x+h)$  mientras que para distancias muy grandes, las nubes se ven circulares ya que no debiese existir correlación entre  $Y(x)$  e  $Y(x+h)$ .

- **Cuociente entre la raíz cuadrada del variograma y el madograma:** El variograma de orden 1 (o “madograma”) de  $Y$  se define como:  $\gamma_1(h) = \frac{1}{2}E\{|Y(x+h) - Y(x)|\}$ . Con lo anterior, este test debe cumplir con lo siguiente:  $\frac{\sqrt{\gamma(h)}}{\gamma_1(h)} = \sqrt{\pi} \approx 1,77$ . Esta relación es independiente de  $h$ .

Una vez que la hipótesis de multigaussianidad ha sido aceptada, es posible realizar simulaciones mediante alguno de los algoritmos existentes. Si la simulación no es condicional, debe realizarse la etapa de condicionamiento de datos. Para realizar estas simulaciones, se debe definir que algoritmo se utilizará para hacer realizaciones del modelo definido. En la actualidad y en el caso particular del modelo multigaussiano, existen diversos algoritmos capaces de responder esta problemática [6]. A continuación se señalan algunos:

- Simulaciones condicionales:
  - Algoritmo secuencial.
  - Método de descomposición matricial.
- Simulaciones no condicionales:
  - Métodos espectrales.
  - Algoritmo de bandas rotantes.

Conviene señalar que los dos últimos, al ser no condicionales, se debe realizar una etapa adicional que condiciona los datos, ésta etapa está basada en un kriging simple y tiene la ventaja que al utilizar solamente los datos originales transformados, disminuye considerablemente los tiempos de cálculo respecto a algoritmos que condicionan directamente los datos, además se pueden condicionar todas las realizaciones mediante un solo kriging.

Resulta interesante utilizar el método de bandas rotantes, debido a que, si bien entrega una simulación no condicional, las hipótesis que emplea simplifican el problema de manera considerable, tanto en la realización como en los tiempos de cálculo [2, 6]

### ***Algoritmo de Bandas Rotantes***

Esta técnica de simulación geoestadística, tiene la particularidad de simplificar el problema de hacer simulaciones en  $\mathbf{R}^d$  a un problema de realizar simulaciones en  $\mathbf{R}$ , esto se logra mediante una discretización del espacio de trabajo en numerosas rectas lo mas regularmente repartidas posibles para realizar las simulaciones a lo largo de estas rectas (problema unidimensional), luego esparcir las en el espacio y finalmente sumarlas.

$$Y_S(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i^{(1)} (\langle x | u_i \rangle)$$

Donde:

$\{u_i: i=1 \dots N\}$ : Vectores que representan direcciones en el espacio  $\mathbf{R}^d$ .

$\{Y_i^{(1)}: i=1 \dots N\}$ : Simulaciones unidimensionales independientes.

$\langle x | u_i \rangle$ : Producto escalar definido en  $\mathbf{R}^d$  entre  $x$  y el vector  $u_i$ .

Resulta aconsejable utilizar cientos e incluso miles de direcciones, debido a que el teorema del límite central garantizaría que, con la suma de las simulaciones independientes, se obtendrían simulaciones multigaussianas, lo que resulta bastante ventajoso en comparación a algoritmos sencillos de implementar al caso unidimensional pero extremadamente lentos al pasarlos a  $\mathbf{R}^d$ , o bien, algoritmos que no cumplen con proporcionar realizaciones multigaussianas.

## 2.2. Antecedentes sobre Ley Equivalente

Dentro de las últimas décadas, el concepto de “Ley Equivalente” se ha utilizado en la industria minera, tanto para tratar de caracterizar depósitos con varias especies de interés, como ver su valor económico [9]. Sin embargo, solamente se utiliza para productos principales y sus subproductos, no para contaminantes u otros elementos.

En otras palabras, la ley equivalente de una especie se define como la ley de dicha especie que una tonelada métrica debe contener para producir los mismos ingresos, suponiendo que no existe(n) la(s) otra(s) especie(s) de interés [9]. Se muestra un ejemplo genérico de ley equivalente a continuación:

$$E1_{eq} = E1 + E2 * \frac{RF_{E2}}{RF_{E1}}$$

En donde:

$E1_{eq}$ : Ley de “Elemento 1 Equivalente”.

$E1$ : Ley del Elemento 1 (especie principal).

$E2$ : Ley del Elemento 2

$RF_{E1}$ : Factor de ajuste para el Elemento 1.

$RF_{E2}$ : Factor de ajuste para el Elemento 2.

Los factores de ajuste corresponden a consideraciones económicas que dependen tanto del precio, como de los costos de extraer y procesar, además de las conversiones de unidades de medida para que todo quede coherente [4, 9].

Esta metodología ha ido perdiendo algo de terreno durante el último tiempo, la razón de esto es que en la industria minera se está privilegiando tener una mayor flexibilidad en sus definiciones de leyes de corte. Un claro ejemplo de esta afirmación es el reemplazo de la ley equivalente dentro de las faenas mineras por otra metodología que se denomina “Net Smelter Return” (NSR).

El NSR en su definición principal se centra en el retorno de las ventas de concentrado, expresado en dólares por tonelada métrica de mineral, excluyendo costos de mina y de procesamiento [9]. Esto en vez de generar una ley de corte, ve el beneficio económico de una unidad de explotación minera, y obviamente la conveniencia o no de extraer dicho bloque en la explotación.

En [9] el autor plantea la comparación entre NSR y leyes equivalentes. Si bien, ambas están en lo correcto, para el último caso se deben especificar adecuadamente todos los supuestos utilizados en el cálculo, especialmente en el reporte de recursos o reservas, puesto que al ser una variable sintética la ley equivalente, al menos deben conocerse los parámetros con la que fue construida.

Otro problema que se plantea es el de las pérdidas de precisión. En [3] el autor explica que teóricamente, genera menores imprecisiones la combinación lineal de variables cokrigeadas, que el kriging directo sobre las variables. Sin embargo, en la práctica, a veces se requiere ser menos preciso para ganar en tiempos de cálculo.

### 3. Cálculo de Ley Equivalente.

En yacimientos polimetálicos, la caracterización de recursos resulta ser a veces un problema complejo, debido a que al tener varios elementos de interés, se convierte un problema no menor valorizar económicamente dicho depósito. El uso de la “Ley Equivalente” resuelve en parte esta problemática, debido a que crea una variable sintética, que permite homogeneizar de manera aceptable el valor de todas las especies de interés, dándole mayor relevancia a una de las variables, quedando caracterizada ésta en función de las otras.

Generalmente, la ley equivalente en la industria resulta ser combinación lineal aditiva de todas las variables involucradas, lo que resulta ser bastante favorable para las estimaciones mediante (co)kriging, sin embargo, en este trabajo se pretende agregar a esta definición clásica otras formas, ya sea intervalos de valores y/o expresiones cuadráticas, para poner a prueba las ventajas y las desventajas de los métodos de estimación y simulación. Con esto, en algunos casos al ser contaminantes, la ley equivalente contendrá factores de ajuste negativos, para provocar la disminución del valor económico del bloque, castigando el valor de éste.

Con todo lo anterior, se procede a estudiar las leyes equivalentes para cada uno de los tres casos de estudio.

#### 3.1. Caso de Estudio 1

Este caso de estudio corresponde a un yacimiento aurífero – argentífero, en donde la principal especie de interés es el oro. La ley equivalente de oro queda definida de la siguiente manera:

$$Au_{eq} = Au + \frac{Ag}{69,5}$$

Donde:

$Au_{eq}$  = Ley de “Oro Equivalente” en [ppm].

$Au$  = Ley de Oro en [ppm].

$Ag$  = Ley de Plata en [ppm].

Esta definición de ley equivalente resulta ser una combinación lineal de ambas variables, siguiendo la definición tradicional usada en la industria. Para el detalle del cálculo del factor de ajuste, ver anexo **A1: Oro Equivalente**.

### 3.2. Caso de Estudio 2

El segundo caso de estudio corresponde a un yacimiento cuprífero, con presencia de plata, arsénico y antimonio. En este caso particular, la especie de interés es el cobre, lo cual implica que la definición de ley de cobre equivalente está supeditada a la plata y el arsénico, quedando formulada de la siguiente manera:

$$Cu_{eq} = \begin{cases} Cu + \frac{Ag}{95,5} & Si\ As < 100 \left[ \frac{g}{t} \right] \\ \max \left\{ Cu + \frac{Ag}{95,5} - \left( \frac{As^2}{3310162,2} - \frac{As}{4714,8} \right); 0 \right\} & Si\ 100 \left[ \frac{g}{t} \right] \leq As < 25000 \left[ \frac{g}{t} \right] \\ 0 & Si\ As \geq 25000 \left[ \frac{g}{t} \right] \end{cases}$$

Donde:

$Cu_{eq}$  = Ley de “Cobre Equivalente” en [%].

$Cu$  = Ley de Cobre en [%].

$Ag$  = Ley de Plata en [ppm].

$As$  = Contenido de Arsénico en [ppm].

En este caso, la ley equivalente de cobre contiene una definición por tramos dependiendo del contenido de arsénico. Además no es una combinación lineal, pues contiene factores cuadráticos que castigan inclusive más la ley de cobre equivalente. Para este caso no se considera el antimonio en la formulación.

El cálculo tanto de los factores de ajuste como de la combinación de variables se explica en el anexo **A2: Cobre Equivalente**.

### 3.3. Caso de Estudio 3

El tercer caso de estudio corresponde al mismo depósito que el caso anterior. La diferencia radica en que se considera el antimonio como contaminante ligado al arsénico. Por ende, si bien la especie de interés sigue siendo el cobre, se formulan leyes equivalentes tanto para cobre como para arsénico, quedando de la siguiente manera:

$$Cu_{eq} = \begin{cases} Cu + \frac{Ag}{95,5} & Si\ As_{eq} < 100 \left[ \frac{g}{t} \right] \\ \max \left\{ Cu + \frac{Ag}{95,5} - \left( \frac{As_{eq}^2}{3310162,2} - \frac{As_{eq}}{4714,8} \right) ; 0 \right\} & Si\ 100 \left[ \frac{g}{t} \right] \leq As_{eq} < 25000 \left[ \frac{g}{t} \right] \\ 0 & Si\ As_{eq} \geq 25000 \left[ \frac{g}{t} \right] \end{cases}$$

$$As_{eq} = \begin{cases} As & Si\ \frac{As}{Sb} \geq 2 \\ As + Sb & Si\ \frac{As}{Sb} < 2 \end{cases}$$

Donde:

$Cu_{eq}$  = Ley de “Cobre Equivalente” en [%].

$Cu$  = Ley de Cobre en [%].

$Ag$  = Ley de Plata en [ppm].

$As_{eq}$  = Ley de “Arsénico Equivalente” en [ppm].

$As$  = Contenido de Arsénico en [ppm].

$Sb$  = Contenido de Antimonio en [ppm].

De igual manera que en el caso anterior, ver en el anexo **A2: Cobre Equivalente** los detalles del cálculo de los factores de ajuste y ver en el anexo **A3: Arsénico Equivalente**, la formulación de dicha ley equivalente.

## **4. Metodología**

Dentro del trabajo propuesto, se calculará la ley equivalente para tres casos de estudio, la cual debe ser definida adecuadamente. Además se definirán tres enfoques para cada caso de estudio, donde cada uno de estos tiene su propio punto de comparación para evaluarlas de dos maneras distintas. A continuación se procede a definir cada enfoque:

### **4.1. Primer Enfoque: Modelamiento de cada variable por separado**

Este enfoque consiste en realizar las estimaciones y simulaciones de las variables regionalizadas, como si fueran independientes entre sí, para luego conformar la ley equivalente. La manera de proceder para cada metodología es la siguiente:

#### ***4.1.1. Estimación mediante Kriging Ordinario sobre cada variable***

Se debe realizar el estudio exploratorio para ver las estadísticas básicas y si la base de datos contiene anomalías. Finalizado esto se debe hacer el análisis variográfico y validar el modelo variográfico propuesto, para proceder a realizar la estimación de cada variable de interés mediante kriging ordinario de bloques y, como última etapa, calcular la ley equivalente con los datos estimados.

#### ***4.1.2. Simulación Multigaussiana sobre cada variable***

Se deben transformar los valores originales a valores gaussianos mediante la anamorfosis y validar dicha transformación. Posterior a esto, se realiza el análisis variográfico de los datos transformados y se valida este modelo variográfico, para poder realizar la simulación multigaussiana de cada variable mediante el algoritmo de bandas rotantes. Terminado esto se realiza el cálculo de la ley equivalente con los bloques simulados, para finalmente realizar un post procesamiento consistente en calcular el promedio de las simulaciones y la desviación estándar de lo obtenido.

### **4.2. Segundo Enfoque: Modelamiento conjunto de todas las variables**

Este otro enfoque consiste en realizar las estimaciones y cosimulaciones de las variables regionalizadas, asumiendo que existen correlaciones entre éstas, luego se construye la ley equivalente. Las etapas son las siguientes:

#### ***4.2.1. Cokriging Ordinario de todas las variables***

El estudio exploratorio es el mismo que para el enfoque anterior. Entonces se debe empezar por hacer el análisis variográfico multivariable y validar el modelo variográfico lineal de correogionalización propuesto, para proceder a realizar la estimación de todas las variables de interés mediante cokriging ordinario de bloques y, como última etapa, calcular la ley equivalente con los bloques cokrigeados.

#### ***4.2.2. Cosimulación Multigaussiana de todas las variables***

La anamorfosis es la misma que para el enfoque anterior, por lo tanto se parte por el análisis variográfico multivariable de los datos transformados y la validación del modelo variográfico de correogionalización. Luego de esto se realiza la cosimulación multigaussiana de todas las variables mediante el algoritmo de bandas rotantes. Terminado esto se realiza el cálculo de la ley equivalente con los bloques cosimulados, para finalmente realizar de manera análoga al enfoque anterior, el post procesamiento de lo obtenido.

### **4.3. Tercer Enfoque: Modelamiento directo de la ley equivalente**

Este último enfoque consiste en calcular la ley equivalente directamente en los datos, para luego realizar las estimaciones y simulaciones de esta variable regionalizada artificial. Las etapas son las siguientes:

#### ***4.3.1. Kriging Ordinario sobre la ley equivalente***

Lo primero que hay que realizar es el cálculo de ley equivalente con los datos originales, luego se realiza el estudio exploratorio de esta variable sintética y el análisis variográfico. Se debe validar el modelo propuesto, para finalmente estimar mediante kriging ordinario de bloques la ley equivalente.

#### ***4.3.2. Simulación Multigaussiana de la ley equivalente***

Se debe primeramente transformar los datos de ley equivalente a datos gaussianos mediante la anamorfosis respectiva y se debe validar esta transformación propuesta. Posteriormente se debe hacer el análisis variográfico de los datos gaussianos y validar el modelo propuesto, para finalmente realizar la simulación multigaussiana de bloques de la ley equivalente mediante el algoritmo de bandas rotantes y al igual que en los enfoques anteriores, realizar el post procesamiento de los resultados.

Con los enfoques definidos anteriormente, se procederá a comparar la ley equivalente resultante tanto entre los dos métodos de cada enfoque, como entre las estimaciones y simulaciones de los tres enfoques diferentes.

Para validar las transformaciones propuestas se utilizarán los tests explicado en el capítulo de antecedentes, mientras que para la validación cruzada se usarán preferentemente los siguientes criterios:

- Las medias de los errores y de los errores estandarizados deben ser cercanas a cero.
- La varianza de los errores debe ser mínima.
- La varianza de los errores estandarizados de ser cercana a 1.
- Los datos robustos deben ser superiores al 95%, estos datos son aquellos para los cuales el error de estimación es menor, en valor absoluto, a 2,5 veces la desviación estándar de kriging.

Sin embargo, se aceptará tener un rango de flexibilidad, ya sean tanto para las transformaciones a datos gaussianos, como para las validaciones cruzadas, debido a que es impracticable y poco aconsejable ser tan riguroso en las exigencias de cada criterio empleado.

## 5. Casos de Estudio

En este capítulo se aplicará la metodología anteriormente expuesta y se mostrará los resultados para cada caso de estudio.

### 5.1. Caso de Estudio 1

La base de datos corresponde a antiguos sondajes de exploración de un depósito aurífero – argentífero. Los datos utilizados provienen de un sector de una veta del yacimiento. Para mantener la confidencialidad de los datos originales, las leyes fueron multiplicadas por un factor. Si bien la base de datos contiene alrededor de 6000 datos, solamente se consideran los datos ubicados al interior de la veta que está debidamente codificada.

Las siguientes imágenes muestran la ubicación espacial de la veta tanto en planta como una vista isométrica, mientras que la tabla muestra las coordenadas geográficas:

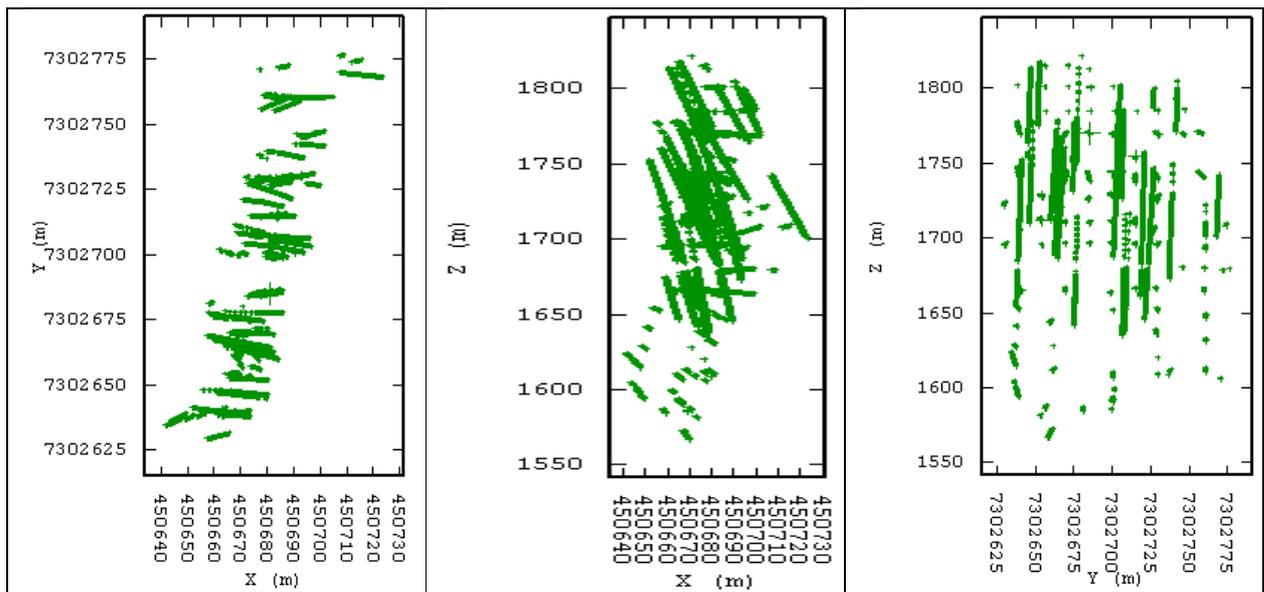


Imagen 2: Ubicación espacial depósito vistas XY (izquierda), XZ (centro) e YZ (derecha).

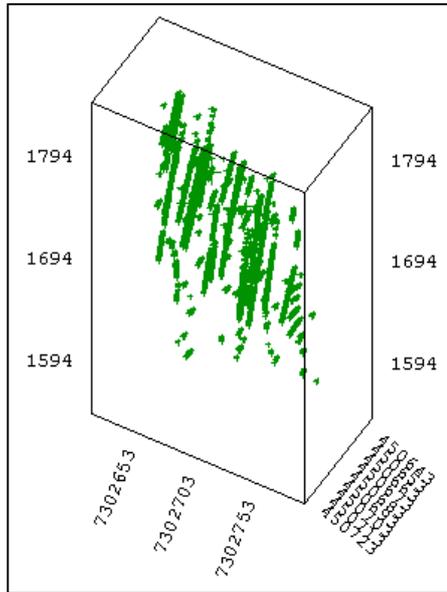


Imagen 3: Vista isométrica de los datos en la veta.

Coordenada	Este [m]	Norte [m]	Cota [m]
<b>Mínimo</b>	450641,93	7302629,60	1566,81
<b>Máximo</b>	450723,43	7302776,75	1821,74

Tabla 1: Coordenadas geográficas de la veta.

De lo anterior se aprecia que la veta presenta un ancho menor a los 20[m]. El rumbo de la veta es N16,7°E y el manto es prácticamente vertical. A continuación se presenta cada uno de los enfoques con sus diversas metodologías.

### 5.1.1. Primer Enfoque: Kriging Ordinario sobre cada variable

Como primera parte dentro del estudio exploratorio, se realizó un desagrupamiento de los datos mediante el método de las celdas. Las celdas ocupadas son de 5[m] x 5[m] x 5[m]. Esto se realiza debido a que hay zonas en donde existe un muestreo preferencial en donde la agrupación de datos puede distorsionar las estimaciones; además ese tamaño corresponde al tamaño de bloque a estimar.

Las siguientes tablas muestran las estadísticas básicas tanto de los datos originales, como desagrupados.

Variable	Cantidad de Datos	Mínimo [ppm]	Máximo [ppm]	Media [ppm]	Desviación Estándar [ppm]
Oro	3712	0,00	1190	7,74	46,17
Plata	3712	0,00	8788	159,37	586,00

Tabla 2: Estadísticas básicas dentro de la veta de los datos originales.

Variable	Cantidad de Datos	Mínimo [ppm]	Máximo [ppm]	Media [ppm]	Desviación Estándar [ppm]
Oro	3712	0,00	1190	7,61	45,01
Plata	3712	0,00	8788	159,91	597,34

Tabla 3: Estadísticas básicas dentro de la veta de los datos desagrupados.

Conviene señalar que se está en presencia de un muestreo homotópico, es decir, que se tiene la misma cantidad de datos para cada una de las variables regionalizadas. No se considera eliminar datos aberrantes puesto que los datos de los valores extremos son concordantes con sus vecinos. El coeficiente de correlación entre las variables es 0,58; con lo que se puede concluir que las variables dentro de la veta no presentan una correlación muy buena, tampoco mala. Además se aprecia que las leyes de plata son mayores que las de oro, lo que tiene sentido lógico y además valida en parte la manera con que actúa la fórmula de ley equivalente.

Los gráficos cuantil a cuantil entre las variables originales y desagrupadas se muestran a continuación:

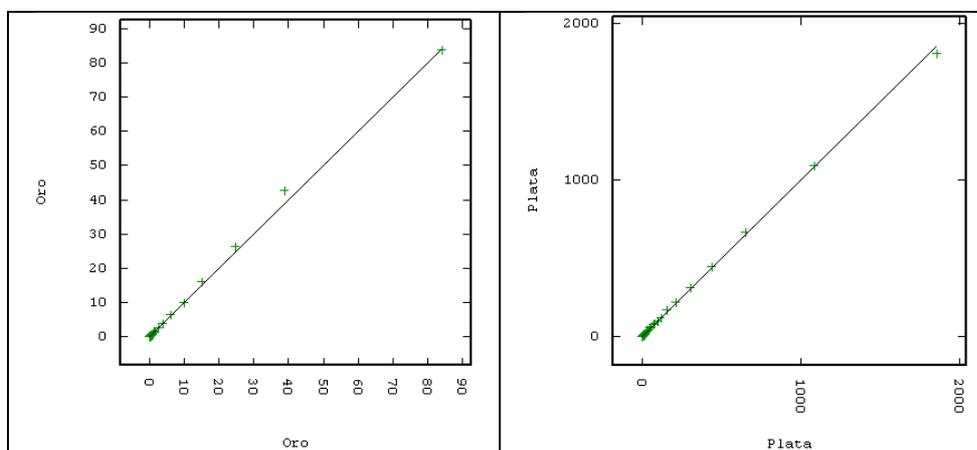


Imagen 4: Q-Q Plot entre las variables originales (abscisa) y desagrupadas (ordenada) de oro (izquierda) y plata (derecha).

Los variogramas experimentales de las variables oro y plata fueron calculados en el plano horizontal y en la dirección vertical, debido a que los mapas variográficos no entregan información clara de existencia de alguna anisotropía, para finalmente modelar dichos variogramas experimentales de la siguiente forma:

$$\gamma_{Au}(h) = 550\text{efecto pepa} + 700\text{esf}(8,8,10) + 1800\text{esf}(15,15,22) + 800\text{esf}(20,20,\infty)$$

$$\gamma_{Ag}(h) = 31000\text{efecto pepa} + 25000\text{esf}(8,8,10) + 300000\text{esf}(15,15,22) + 140000\text{esf}(20,20,\infty)$$

Los alcances en metros fueron indicados entre paréntesis para las direcciones este, norte y vertical. Para validar los variogramas anteriores, se utiliza el método de validaciones cruzadas que estima sucesivamente cada dato considerando solamente los datos restantes.

Las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados, tanto para el oro como para la plata.

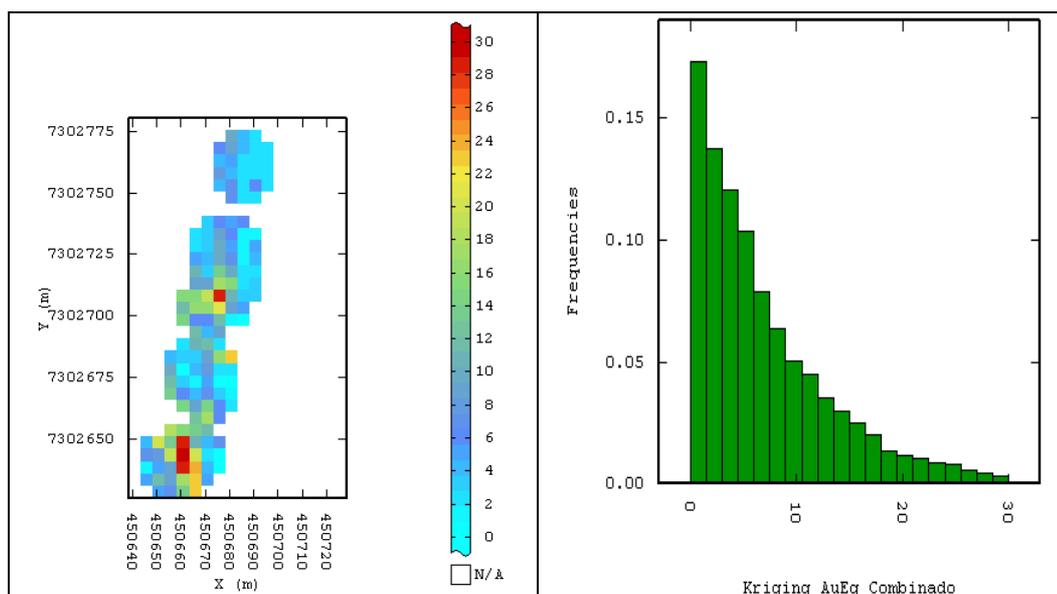
	3712 Datos Totales	100%	3622 Datos Robustos	97,58%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,105	972,6	0,974	96,57
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	1,122	0,032	0,110

Tabla 4: Estadísticas validación cruzada oro.

	3712 Datos Totales	100%	3589 Datos Robustos	96,69%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	2,969	97008	10,94	12457
<b>Error Estandarizado</b>	0,006	1,516	0,043	0,206

Tabla 5: Estadísticas validación cruzada plata.

Se aprecia en ambos casos, que se cumple con los criterios de validación cruzada definidos en el capítulo anterior, lo que implica que se validan ambos modelos de variograma. Una vez validado ambos modelos, se procede a realizar kriging ordinario de cada variable. Finalmente se realiza el cálculo de la ley equivalente definida en el tercer capítulo, usando los kriging de ambas variables, quedando de la siguiente manera:



**Imagen 5: Kriging ordinario oro equivalente (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).**

La imagen anterior muestra la envolvente utilizada en la veta, que se basa estrictamente en criterios geométricos. Además, como se mencionó con anterioridad, el tamaño de los bloques es de 5[m] x 5[m] x 5[m].

El plan de kriging utilizado consiste en una vecindad móvil, en donde las siguientes tablas muestran los parámetros usados:

<b>Distancia</b>	<b>Radio de Búsqueda</b>
<i>Este (X)</i>	50[m]
<i>Norte (Y)</i>	50[m]
<i>Vertical (Z)</i>	100[m]

**Tabla 6: Radios de búsqueda la vecindad móvil para el caso de estudio 1.**

<i>Sectores angulares</i>	8 sectores
<i>Mínimo de datos por sector</i>	1 dato
<i>Máximo de datos por sector</i>	5 datos

**Tabla 7: Parámetros utilizados para los sectores angulares en el caso de estudio 1.**

Es conveniente señalar que se trabaja con esta vecindad para todas las metodologías de este caso de estudio, incluyendo las referentes a simulaciones y también se utiliza el mismo criterio geométrico de la veta, todo esto a objeto de tener parámetros que permitan comparar adecuadamente todas las metodologías.

### 5.1.2. Primer Enfoque: Simulación Multigaussiana sobre cada variable

Las variables originales no cumplen con el requisito de ser gaussianas. Por ende, antes de empezar a trabajar, debe hacerse una anamorfosis para transformar los datos a una distribución gaussiana. Las transformaciones deben ser validadas mediante diversos tests explicados en el capítulo de antecedentes. Los histogramas gaussianos quedan de la siguiente manera:

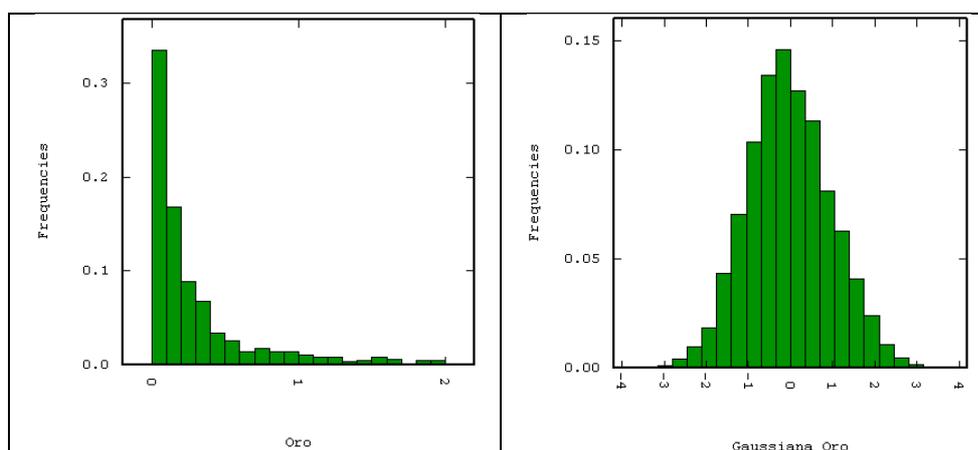


Imagen 6: Histograma datos originales leyes de oro (izquierda) y datos transformados (derecha).

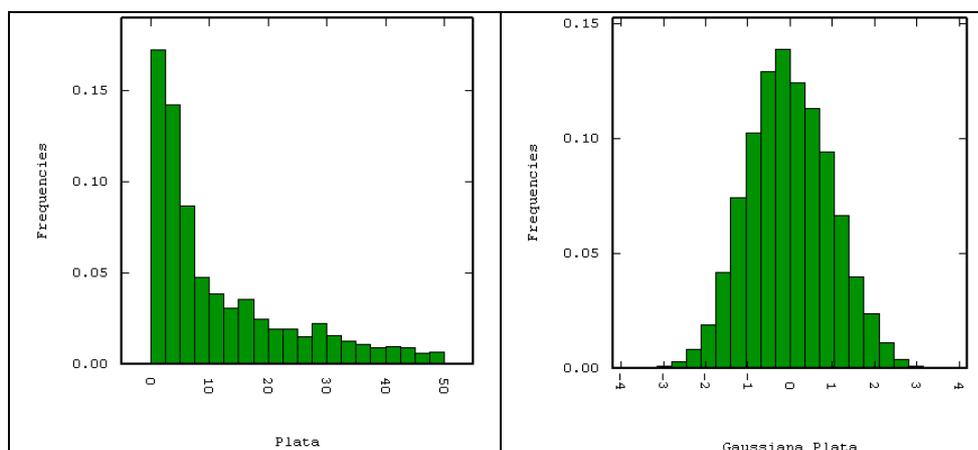


Imagen 7: Histograma datos originales leyes de plata (izquierda) y datos transformados (derecha).

Con esto ahora se pueden calcular los variogramas experimentales de las variables gaussianas de oro y plata. Estos variogramas son creados en el plano horizontal y en la dirección vertical, de la misma manera que en el caso anterior, ya que los mapas variográficos tampoco entregan información notoria de existencia de alguna anisotropía. Las fórmulas de los variogramas modelados son las siguientes:

$$\gamma_{G.Au}(h) = 0,1 \text{ efecto pepa} + 0,25 \text{esf}(5,5,10) + 0,65 \text{esf}(13,13,35)$$

$$\gamma_{G.Ag}(h) = 0,1 \text{ efecto pepa} + 0,1 \text{esf}(5,5,10) + 0,8 \text{esf}(13,13,35)$$

Se debe validar estos modelos de variograma utilizando el método de validación cruzada. Las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados de ambas variables.

	3712 Datos Totales	100%	3666 Datos Robustos	98,76%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,002	0,122	0,001	0,099
<b>Error Estandarizado</b>	0,001	0,632	0,000	0,510

Tabla 8: Estadísticas validación cruzada gaussiana oro.

	3712 Datos Totales	100%	3682 Datos Robustos	99,19%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,002	0,093	0,004	0,075
<b>Error Estandarizado</b>	0,003	0,512	0,007	0,424

Tabla 9: Estadísticas validación cruzada gaussiana plata.

Con lo anterior, se procede a realizar las simulaciones mediante el algoritmo de bandas rotantes, realizando 100 simulaciones con 2000 direcciones. Es conveniente señalar que los softwares utilizados condicionan y destransforman automáticamente las variables. Se realiza el cálculo de la ley equivalente simulación a simulación, para recrear los 100 escenarios posibles.

En la etapa final, se decide promediar las simulaciones para tener un parámetro de comparación con lo expuesto en kriging.

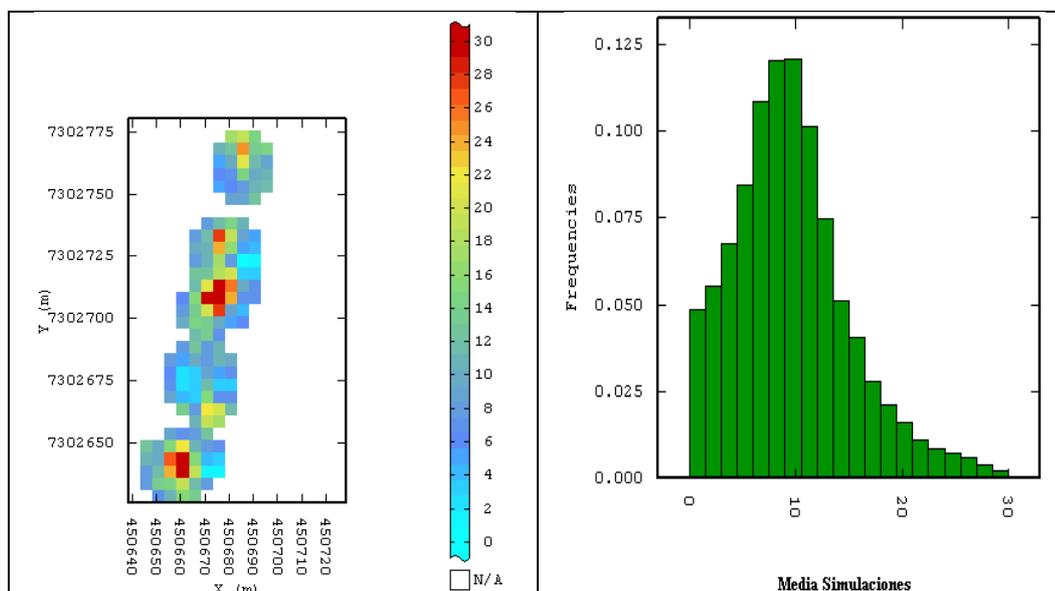


Imagen 8: Promedio de las simulaciones de ley equivalente de oro (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

### 5.1.3. Segundo Enfoque: Cokriging Ordinario sobre todas las variables

El estudio exploratorio de cada variable es el mismo que para el enfoque anterior, debido a que las diferencias se presentan a partir del estudio variográfico.

Se debe calcular el variograma experimental para ambas variables, además de calcular el variograma cruzado. Las direcciones en que se calcula son las mismas que para el enfoque anterior, puesto que es el mismo mapa variográfico. Con esto se debe utilizar un modelo de correogionalización, quedando la matriz de variograma de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} Y_{Au} & Y_{Au/Ag} \\ Y_{Ag/Au} & Y_{Ag} \end{pmatrix}(h) \\ = \begin{pmatrix} 550 & 2000 \\ 2000 & 31000 \end{pmatrix} \text{efecto pepa} + \begin{pmatrix} 700 & 1000 \\ 1000 & 25000 \end{pmatrix} \text{esf}(8,8,10) \\ + \begin{pmatrix} 1800 & 18000 \\ 18000 & 300000 \end{pmatrix} \text{esf}(15,15,22) + \begin{pmatrix} 800 & 4000 \\ 4000 & 140000 \end{pmatrix} \text{esf}(20,20,\infty)$$

Los variogramas experimentales y teóricos como puede apreciarse en la fórmula son los mismos que para el enfoque anterior. En otras palabras, en el primer enfoque se asume que el variograma cruzado es nulo. Para validar el modelo anterior, se debe realizar la validación cruzada, que debe dar resultados un poco distintos respecto al enfoque anterior, puesto que considera la interacción entre variables para la estimación. Las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados tanto para el oro como para la plata.

	3712 Datos Totales	100%	3660 Datos Robustos	98,60%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,102	954,64	0,832	99,72
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	1,105	0,027	0,115

Tabla 10: Estadísticas validación cruzada oro.

	3712 Datos Totales	100%	3588 Datos Robustos	96,66%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	2,967	96345,8	11,08	12456,9
<b>Error Estandarizado</b>	0,006	1,507	0,043	0,205

Tabla 11: Estadísticas validación cruzada plata.

Con el modelo validado, se realiza cokriging ordinario de ambas variables y con este resultado, se formula la ley equivalente, quedando de la siguiente manera:

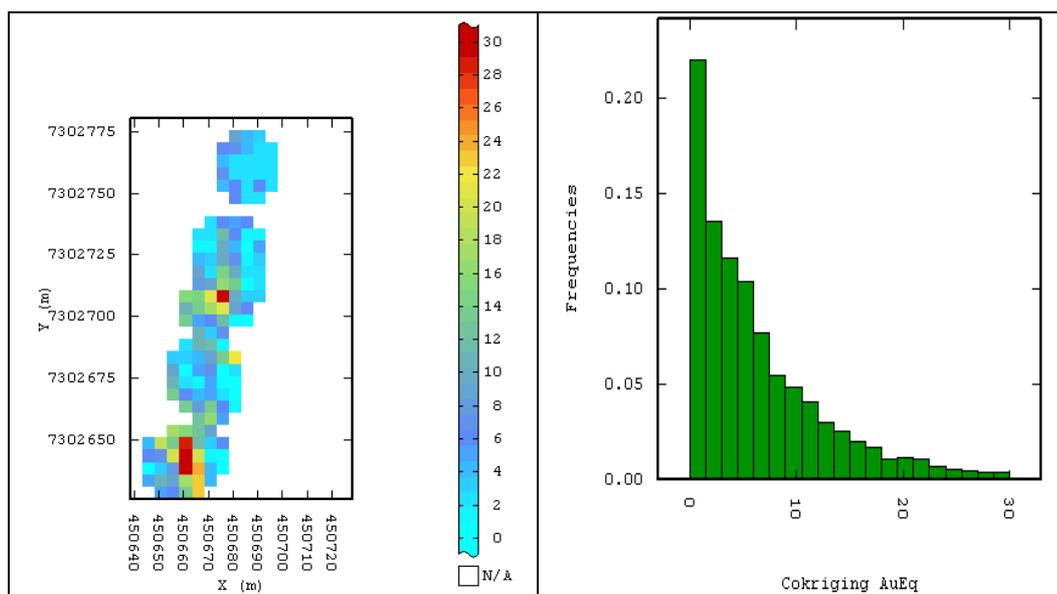


Imagen 9: Cokriging ordinario oro equivalente (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

#### 5.1.4. Segundo Enfoque: Cosimulación Multigaussiana sobre todas las variables

La transformación de datos a datos gaussianos es la misma que en el enfoque anterior, por ende ya está validado. Como los variogramas son similares al enfoque anterior, y agregándole el variograma cruzado de los datos gaussianos, el modelo de correogionalización queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{G.Au} & \gamma_{G.Au/G.Ag} \\ \gamma_{G.Ag/G.Au} & \gamma_{G.Ag} \end{pmatrix}(h) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,08 \\ 0,08 & 0,1 \end{pmatrix} \text{efecto pepa} + \begin{pmatrix} 0,25 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \text{esf}(5,5,10) + \begin{pmatrix} 0,65 & 0,65 \\ 0,65 & 0,8 \end{pmatrix} \text{esf}(13,13,35)$$

El modelo de correogionalización debe ser validado mediante validación cruzada, las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados de ambas variables:

	3712 Datos Totales	100%	3665 Datos Robustos	98,73%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,002	0,121	0,001	0,098
<b>Error Estandarizado</b>	0,001	0,630	-0,001	0,507

Tabla 12: Estadísticas validación cruzada gaussiana oro.

	3712 Datos Totales	100%	3682 Datos Robustos	99,19%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,002	0,093	0,003	0,076
<b>Error Estandarizado</b>	0,003	0,514	0,005	0,426

Tabla 13: Estadísticas validación cruzada gaussiana plata.

Se prosigue con la realización de las cosimulaciones, mediante el algoritmo de bandas rotantes, con 2000 direcciones. Se realizan 100 cosimulaciones y al igual que en caso anterior, los datos se condicionan y destransforman automáticamente con el software.

Con el resultado anterior, se formula la ley equivalente de cada cosimulación, para recrear 100 escenarios posibles.

En la etapa final, se decide promediar las cosimulaciones para tener un parámetro de comparación con los resultados anteriores.

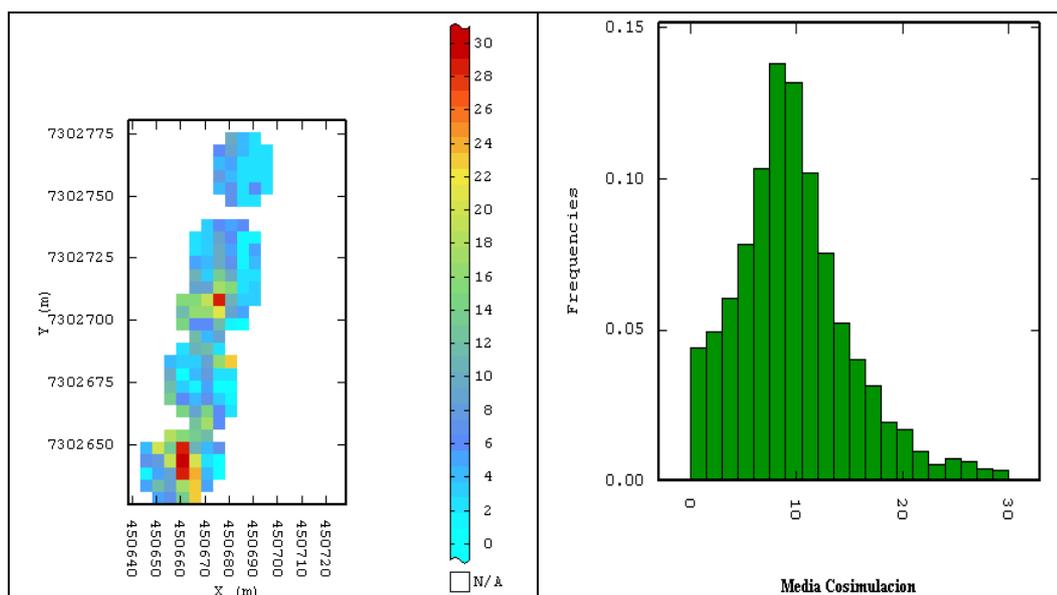


Imagen 10: Promedio de las cosimulaciones de ley equivalente de oro (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

### 5.1.5. Tercer Enfoque: Kriging Ordinario sobre la Ley Equivalente

Lo primero que se debe realizar es calcular la ley equivalente de los datos dentro de la veta, para luego tener estadísticas básicas, y al igual que con los datos originales, no se considera eliminar datos aberrantes. Las siguientes tablas muestran lo anteriormente dicho y se muestra también el histograma de los datos desagrupados:

Variable	Cantidad de Datos	Mínimo [ppm]	Máximo [ppm]	Media [ppm]	Varianza [ppm <sup>2</sup> ]
Oro Equivalente	3712	0,00	1252,9	10,03	2652,5

Tabla 14: Estadísticas básicas dentro de la veta de los datos sin desagrupar de oro equivalente.

Variable	Cantidad de Datos	Mínimo [ppm]	Máximo [ppm]	Media [ppm]	Varianza [ppm <sup>2</sup> ]
Oro Equivalente	3712	0,00	1252,9	9,91	2549,6

Tabla 15: Estadísticas básicas dentro de la veta de los datos desagrupados de oro equivalente.

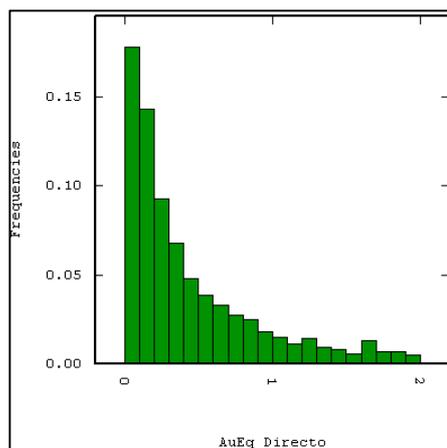


Imagen 11: Histograma de ley de oro equivalente.

El variograma experimental de la variable sintética se calcula al igual que para los datos originales en el plano horizontal y en la dirección vertical, ya que los mapas variográficos no son claros respecto a la existencia de anisotropías. El variograma modelado queda de la siguiente manera:

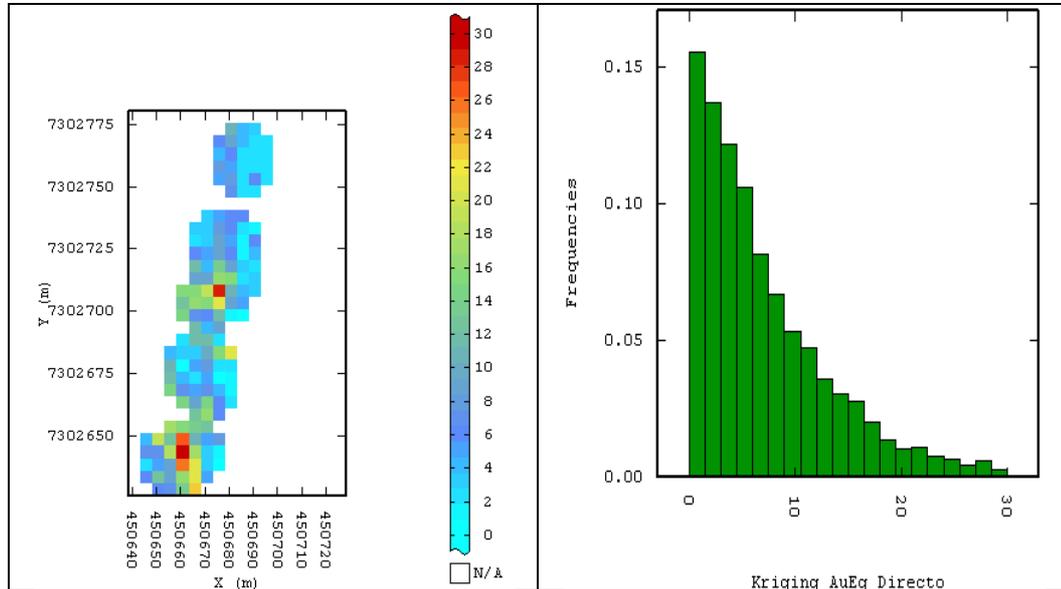
$$\gamma_{Au_{eq}}(h) = 350 \text{ efecto pepa} + 1400 \text{esf}(10,10,15) + 750 \text{esf}(15,15,55) + 600 \text{esf}(20,20, \infty)$$

Para validar el variograma anterior, se debe recurrir a la validación cruzada. La tabla siguiente muestra los errores y errores estandarizados del oro equivalente.

	3712 Datos Totales	100%	3644 Datos Robustos	98,17%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,141	1118,7	1,08	116,72
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	1,204	0,034	0,123

Tabla 16: Estadísticas validación cruzada oro equivalente.

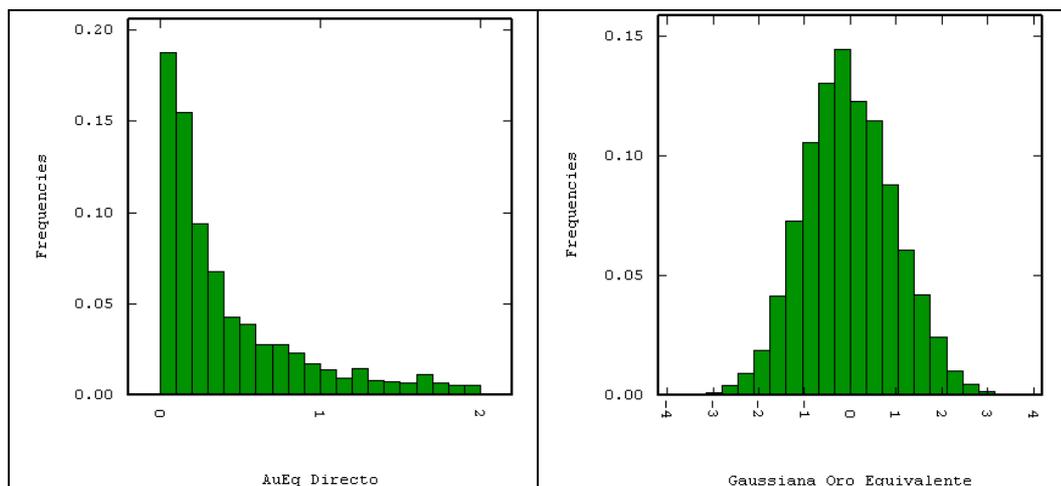
La tabla 16 muestra que se cumplen los criterios de la validación cruzada expuestos en el capítulo anterior, a excepción de la varianza del error estandarizado. Se procede entonces a realizar kriging ordinario de la ley equivalente. Gráficamente queda de la siguiente manera:



**Imagen 12: Kriging ordinario directo oro equivalente (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).**

### 5.1.6. Tercer Enfoque: Simulación Multigaussiana de la Ley Equivalente

Al no cumplir las variables el requisito de ser gaussianas, deben ser transformadas mediante una anamorfosis. Esta transformación debe ser validada por los test mencionados con anterioridad. El histograma gaussiano queda de la siguiente forma:



**Imagen 13: Histogramas datos originales ley equivalente (izquierda) y datos transformados (derecha).**

Los tests arrojan como resultado que la anamorfosis propuesta es válida. Ahora se puede calcular el variograma experimental de la variable gaussiana de ley equivalente y, al igual que en los enfoques anteriores, los mapas variográficos son insatisfactorios a la hora de mostrar anisotropías. Por ende, se escogen el plano horizontal y la dirección vertical, quedando la fórmula del variograma modelado de la siguiente manera:

$$\gamma_{G.Au_{eq}}(h) = 0,1 \text{ efecto pepa} + 0,3 \text{esf}(10,10,15) + 0,35 \text{esf}(15,15,55) + 0,25 \text{esf}(20,20, \infty)$$

La siguiente tabla muestra los errores y errores estandarizados de la validación cruzada.

	3712 Datos Totales	100%	3688 Datos Robustos	99,35%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,002	0,092	0,006	0,080
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	0,509	0,011	0,445

Tabla 17: Estadísticas validación cruzada gaussiana oro equivalente.

Se procede a realizar las simulaciones de la ley equivalente mediante el algoritmo de bandas rotantes, realizando 100 simulaciones con 2000 direcciones.

Para finalizar, se decide promediar las simulaciones para tener un parámetro de comparación con lo expuesto en kriging.

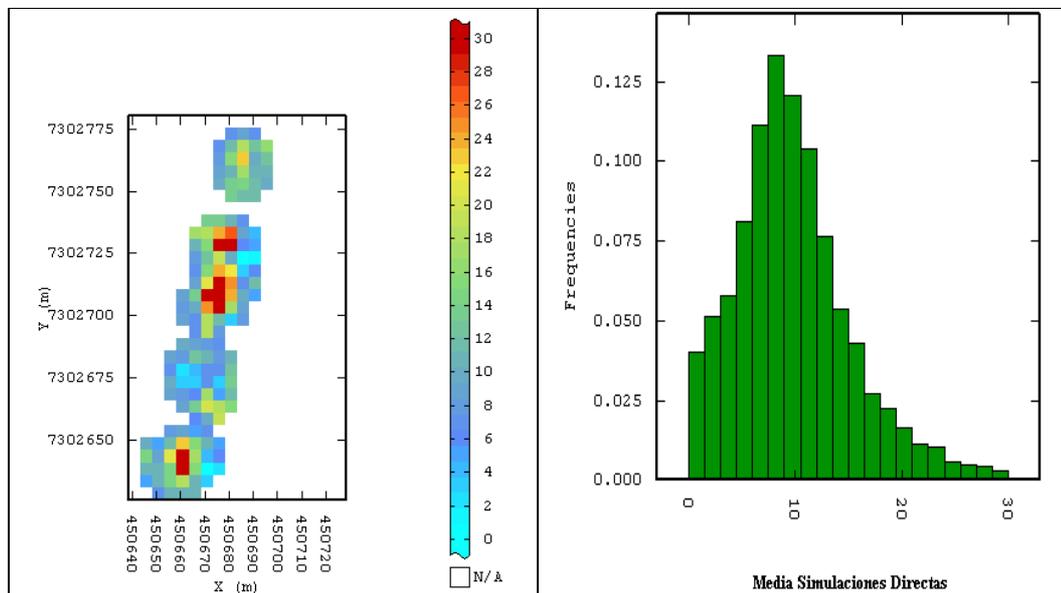


Imagen 14: Promedio de las simulaciones directas de ley equivalente de oro (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

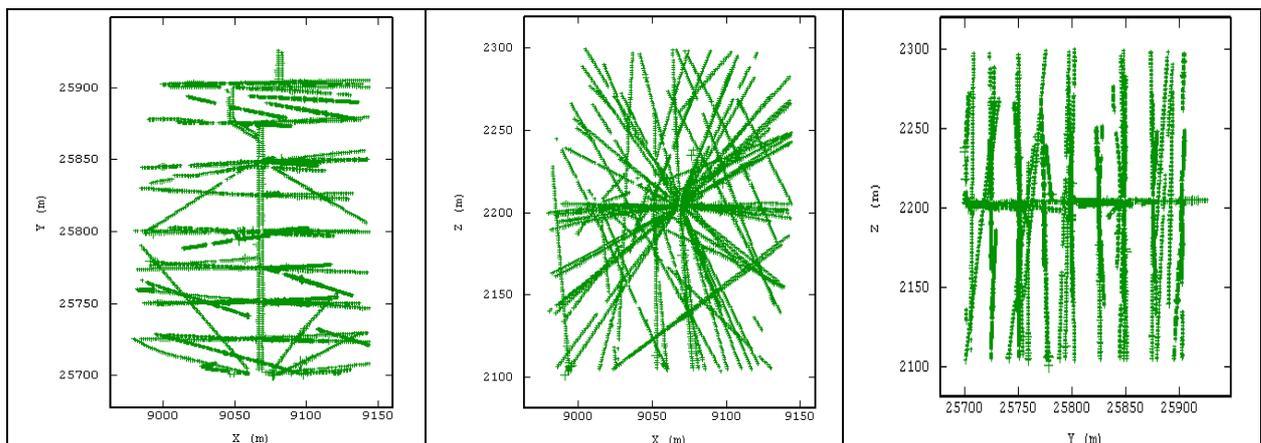
En el **Anexo B: Caso de Estudio 1** se encuentran respectivamente los anexos concernientes a cada metodología, esto incluye:

- Los histogramas de las variables originales y desagrupadas y las nubes de correlación entre las variables.
- Los mapas variográficos, los variogramas experimentales y los variogramas modelados, tanto de las variables originales como de las variables gaussianas.
- Los gráficos que entrega la validación cruzada.
- Los resultados gráficos de los kriging, cokriging de cada una de las variables.
- Las desviaciones estándar de los errores de kriging y cokriging de cada variable y las desviaciones estándar de las simulaciones y cosimulaciones.
- Los test de la distribución bigaussiana: las nubes de correlación diferida a diferentes distancias y el cociente entre la raíz cuadrada del variograma y el madograma.

## 5.2. Caso de Estudio 2

La base de datos corresponde a sondajes de exploración de un sector de un depósito tipo pórfido cuprífero con presencia de plata. El problema plantea también la presencia de arsénico, debido a la existencia de enargita. Para mantener la confidencialidad de los datos originales, las leyes fueron multiplicadas por una constante. Es conveniente señalar que solamente se poseen datos de leyes, no disponiéndose del modelo geológico de la zona.

La ubicación espacial de los datos tanto en planta como en una vista isométrica, se muestran en las siguientes imágenes. Asimismo, se muestra la tabla con las coordenadas geográficas:



**Imagen 15: Ubicación espacial pórfido vistas XY (izquierda), XZ (centro) e YZ (derecha).**

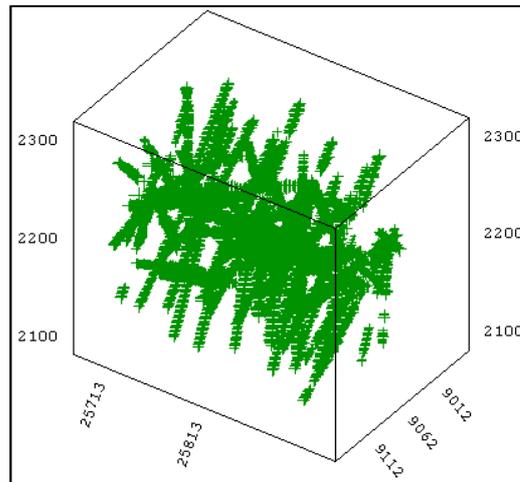


Imagen 16: Vista isométrica de los datos en el pórfido.

Coordenada	Este [m]	Norte [m]	Cota [m]
<b>Mínimo</b>	8979,58	25700,21	2101,31
<b>Máximo</b>	9144,12	25925,96	2299,57

Tabla 18: Coordenadas geográficas del pórfido.

Se aprecia que los datos utilizados provienen de un sector del depósito de aproximadamente 200[m] en cada una de las direcciones, en general sin un claro muestreo preferencial. A continuación se presentan cada uno de los enfoques con sus diversas metodologías.

### 5.2.1. Primer Enfoque: Kriging Ordinario sobre cada variable

Como parte fundamental dentro del estudio exploratorio, la tabla siguiente muestra las estadísticas básicas. Conviene señalar que se realiza un desagrupamiento de los datos mediante el método de las celdas. El tamaño de las celdas es de 10[m] x 5[m] x 5[m], debido a que ese tamaño corresponde a los bloques a estimar y que no se aprecia de manera clara algún muestreo preferencial.

Variable	Cantidad de Datos	Mínimo	Máximo	Media	Desviación Estándar
<b>Cobre [%]</b>	5754	0,01	29,9	1,66	2,40
<b>Plata [ppm]</b>	5594	0,40	855	36,9	58,2
<b>Arsénico [ppm]</b>	5726	5,00	126100	2000,4	4501,3

Tabla 19: Estadísticas básicas de los datos originales del caso de estudio 2.

<b>Variable</b>	<b>Cantidad de Datos</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>	<b>Media</b>	<b>Desviación Estándar</b>
<b>Cobre [%]</b>	5754	0,01	29,9	1,64	2,47
<b>Plata [ppm]</b>	5594	0,40	855	36,0	58,5
<b>Arsénico [ppm]</b>	5726	5,00	126100	1967,5	4646,6

Tabla 20: Estadísticas básicas de los datos desagrupados del caso de estudio 2.

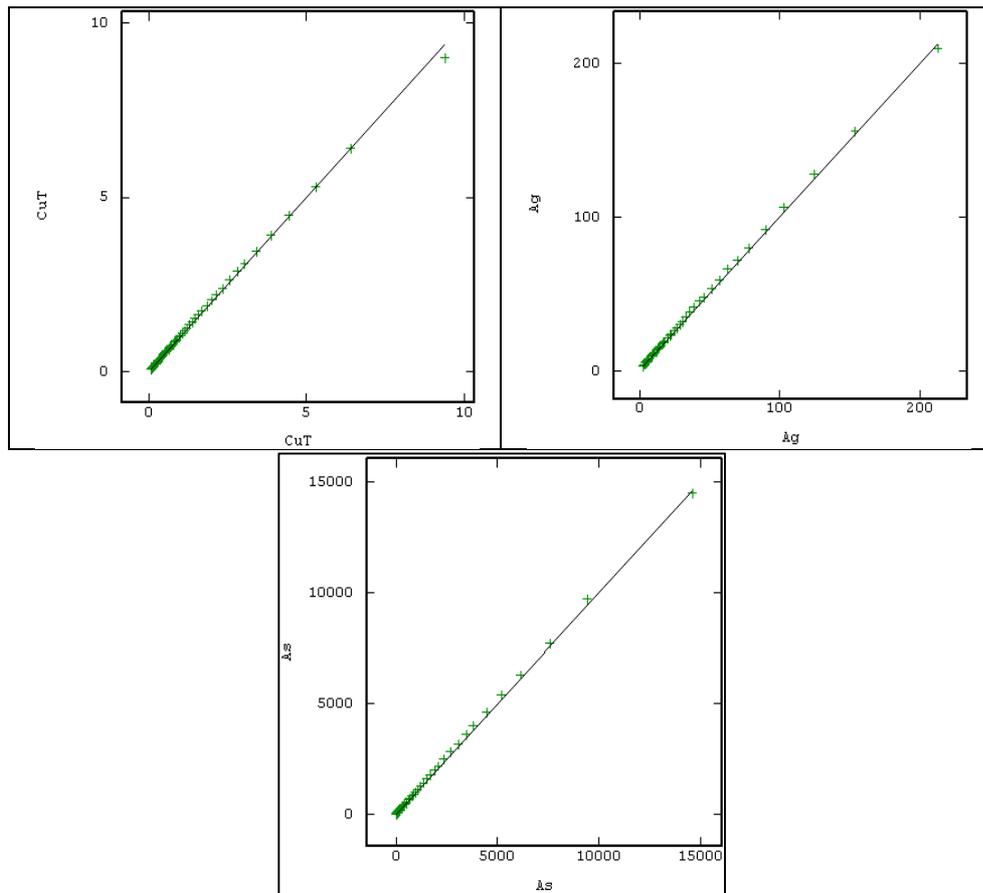
No se considera eliminar datos aberrantes puesto que, particularmente en el caso de contaminantes, sí es conveniente ver valores radicalmente extremos. Además la base de datos no presenta aparentemente inconsistencias de este tipo. Se observa también que en estricto rigor corresponde a un muestreo heterotópico. Sin embargo, al ser la mayor diferencia entre los datos, menor a 3%, se analizará como si fuese un muestreo homotópico. Los coeficientes de correlación entre las variables se muestran a continuación:

<b>Variable</b>	<b>Cobre</b>	<b>Plata</b>	<b>Arsénico</b>
<b>Cobre</b>	1,00	0,82	0,70
<b>Plata</b>	0,82	1,00	0,44
<b>Arsénico</b>	0,70	0,44	1,00

Tabla 21: Correlaciones entre las variables regionalizadas.

Se puede concluir que las variables Ag-Cu y As-Cu poseen una muy buena correlación, caso contrario ocurre con las variables Ag-As. Al ser un pórfido, la variable relevante va a ser el cobre. Sin embargo, la variable arsénico, debido a los valores extremos que presenta, va a jugar un rol fundamental el cálculo de la ley equivalente.

Se muestran a continuación los gráficos cuantil a cuantil de todas las variables:



**Imagen 17: Q-Q Plot entre las variables originales (abscisa) y desagrupadas (ordenada) de cobre (izquierda arriba) y plata (derecha arriba) y arsénico (abajo).**

Los variogramas experimentales de las tres variables son calculados en el plano horizontal y en la dirección vertical, debido a que, si bien aparentemente se aprecian algunas anisotropías en los mapas variográficos, al estudiarlo en más detalle, no entrega resultados interpretables. Finalmente se modelan dichos variogramas experimentales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \gamma_{Cu}(h) &= 1,95\text{efecto pepa} + 3,1\exp(25,30,40) + 0,6\text{esf}(40,45, \infty) + 1,73\text{esf}(120, \infty, \infty) \\ \gamma_{Ag}(h) &= 1850\text{efecto pepa} + 2000\exp(25,30,40) + 50\text{esf}(40,45, \infty) + 500\text{esf}(120, \infty, \infty) \\ \gamma_{As}(h) &= 1000(4180\text{efecto pepa} + 7155\exp(25,30,40) + 3600\text{esf}(40,45, \infty) + 14000\text{esf}(120, \infty, \infty)) \end{aligned}$$

Para validar los variogramas anteriormente expuestos, se utiliza el método de validaciones cruzadas. Las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados para las tres variables.

	5754 Datos Totales	100%	5586 Datos Robustos	97,08%
	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>
<b>Error</b>	0,002	3,393	0,155	1,283
<b>Error Estandarizado</b>	0,001	0,979	0,083	0,373

Tabla 22: Estadísticas validación cruzada cobre.

	5594 Datos Totales	100%	5477 Datos Robustos	97,91%
	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>
<b>Error</b>	0,147	2002,8	3,798	755,87
<b>Error Estandarizado</b>	0,003	0,720	0,072	0,270

Tabla 23: Estadísticas validación cruzada plata.

	5726 Datos Totales	100%	5530 Datos Robustos	96,58%
	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>
<b>Error</b>	4,411	14339054	276,28	2967543
<b>Error Estandarizado</b>	0,001	1,749	0,097	0,366

Tabla 24: Estadísticas validación cruzada arsénico.

Una vez validado los modelos, se procede a realizar kriging ordinario de cada variable. Finalmente se realiza el cálculo de la ley equivalente definida en el capítulo de antecedente, usando los kriging de las tres variables, dando como resultado lo siguiente:

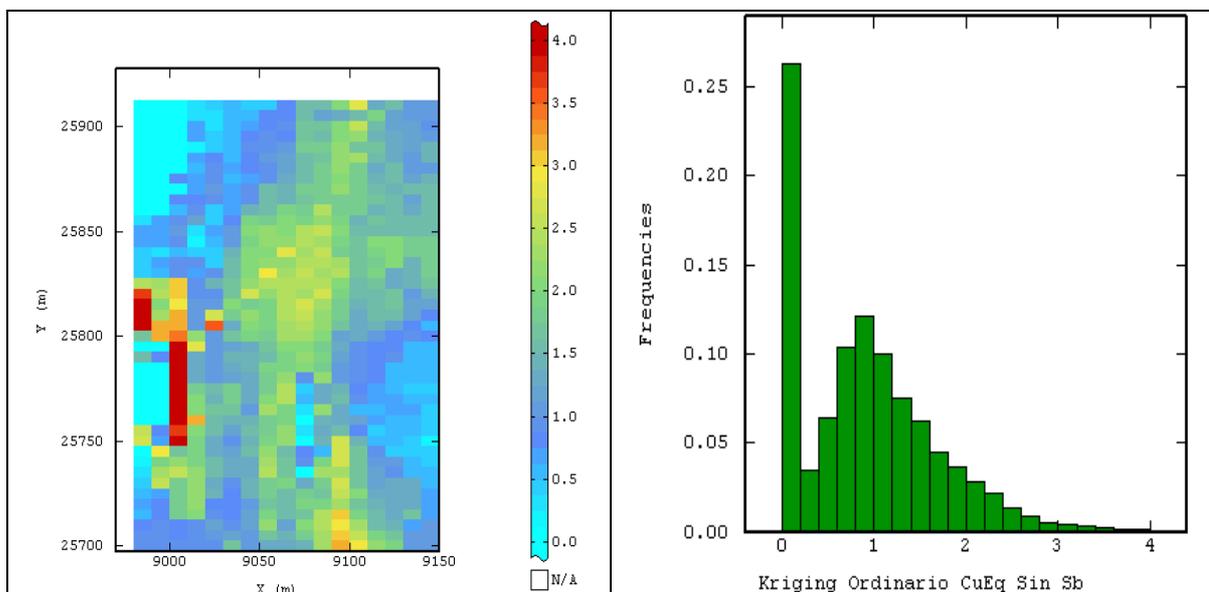


Imagen 18: Kriging ordinario cobre equivalente (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

Como se mencionó con anterioridad, la grilla utilizada es de 10[m] x 5[m] x 5[m]. El plan de kriging utilizado consistió en una vecindad móvil con los siguientes parámetros:

Distancia	Radio de Búsqueda
<i>Este (X)</i>	50[m]
<i>Norte (Y)</i>	50[m]
<i>Vertical (Z)</i>	50[m]

Tabla 25: Radios de búsqueda la vecindad móvil para el caso de estudio 2.

<i>Sectores angulares</i>	8 sectores
<i>Mínimo de datos por sector</i>	1 dato
<i>Máximo de datos por sector</i>	5 datos

Tabla 26: Parámetros utilizados para los sectores angulares en el caso de estudio 2.

Es conveniente señalar que se trabaja con esta vecindad para todas las metodologías de este caso de estudio, incluyendo las referentes a simulaciones.

### 5.2.2. Primer Enfoque: Simulación Multigaussiana sobre cada variable

Las tres variables originales no cumplen con ser gaussianas, por ende, antes debe hacerse una anamorfosis para transformar los datos. Las transformaciones deben ser validadas mediante diversos tests explicados en el capítulo de antecedentes. Los histogramas gaussianos quedan de la siguiente manera:

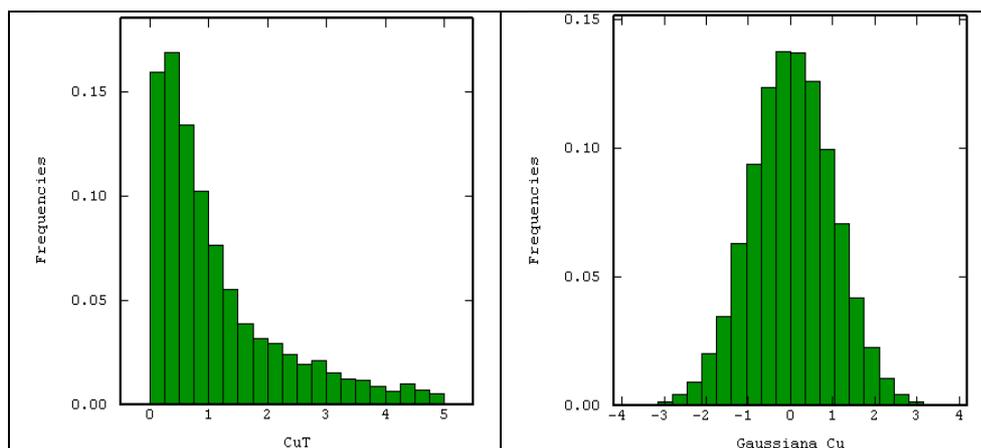


Imagen 19: Histogramas datos originales desagrupados de leyes de cobre (izquierda) y datos transformados (derecha).

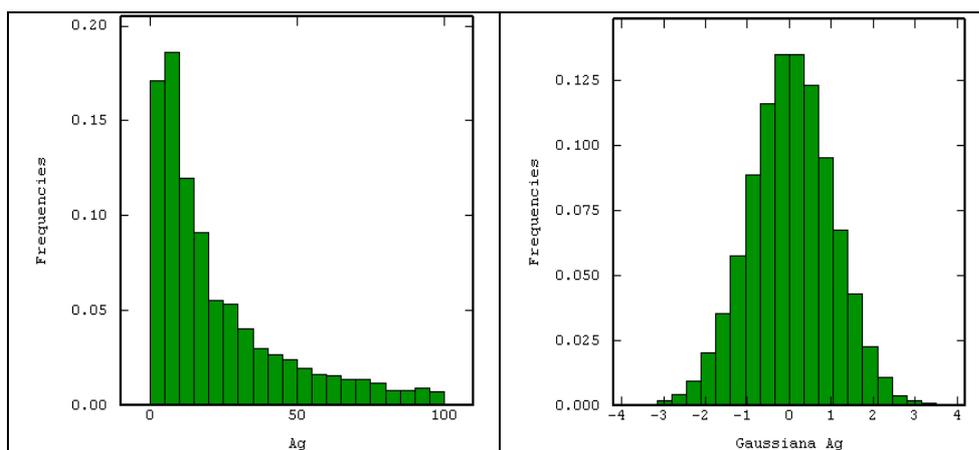


Imagen 20: Histogramas datos originales desagrupados de leyes de plata (izquierda) y datos transformados (derecha).

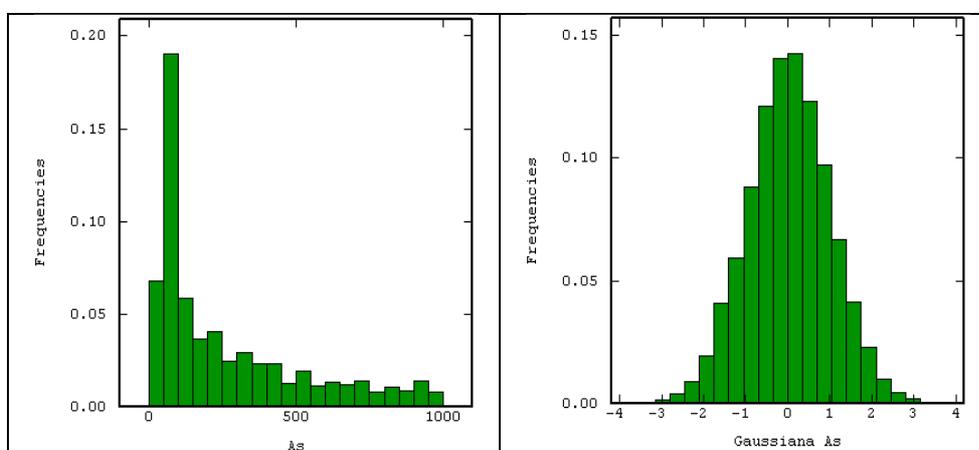


Imagen 21: Histogramas datos originales leyes de arsénico (izquierda) y datos transformados (derecha).

Los tests muestran que las transformaciones propuestas son válidas. Con esto ahora se pueden calcular los variogramas experimentales de las variables gaussianas de cobre, plata y arsénico. Las fórmulas de los variogramas modelados son las siguientes:

$$\gamma_{G.Cu}(h) = 0,403\text{efecto pepa} + 0,486\text{exp}(25,30,40) + 0,023\text{esf}(40,45, \infty) + 0,215\text{esf}(120, \infty, \infty)$$

$$\gamma_{G.Ag}(h) = 0,302\text{efecto pepa} + 0,523\text{exp}(25,30,40) + 0,071\text{esf}(40,45, \infty) + 0,419\text{esf}(120, \infty, \infty)$$

$$\gamma_{G.As}(h) = 0,215\text{efecto pepa} + 0,548\text{exp}(25,30,40) + 0,059\text{esf}(40,45, \infty) + 0,391\text{esf}(120, \infty, \infty)$$

Se deben validar estos modelos de variograma utilizando el método de validación cruzada explicada en el capítulo anterior. Las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados de las tres variables:

	<i>5726 Datos Totales</i>	<i>100%</i>	<i>5594 Datos Robustos</i>	<i>97,69%</i>
	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>
<b>Error</b>	0,002	0,278	0,017	0,215
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	0,874	0,029	0,670

Tabla 27: Estadísticas validación cruzada gaussiana cobre simulación.

	<i>5594 Datos Totales</i>	<i>100%</i>	<i>5516 Datos Robustos</i>	<i>98,61%</i>
	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>
<b>Error</b>	0,003	0,338	0,012	0,288
<b>Error Estandarizado</b>	0,004	0,788	0,017	0,664

Tabla 28: Estadísticas validación cruzada gaussiana plata simulación.

	<i>5754 Datos Totales</i>	<i>100%</i>	<i>5693 Datos Robustos</i>	<i>98,94%</i>
	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>
<b>Error</b>	0,004	0,431	0,011	0,383
<b>Error Estandarizado</b>	0,005	0,768	0,014	0,682

Tabla 29: Estadísticas validación cruzada gaussiana arsénico simulación.

Con lo anterior, se procede a realizar las simulaciones, mediante el algoritmo de bandas rotantes, realizando 100 simulaciones con 2000 direcciones. Se realiza el cálculo de la ley equivalente simulación a simulación, para recrear los 100 escenarios posibles.

En la etapa final, se decide promediar las simulaciones para tener un parámetro de comparación con lo expuesto en kriging.

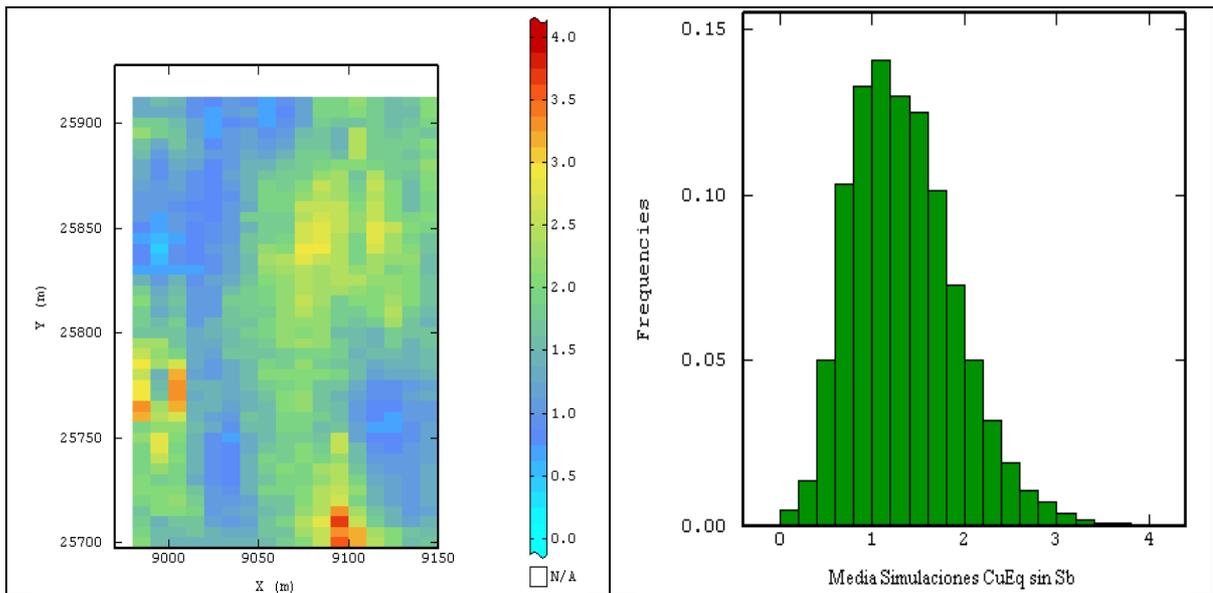


Imagen 22: Promedio de las simulaciones de ley equivalente de cobre (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

### 5.2.3. Segundo Enfoque: Cokriging Ordinario sobre todas las variables

El estudio exploratorio de cada variable es el mismo que en el enfoque anterior. Se debe calcular el variograma experimental para todas las variables, además de calcular los tres variogramas cruzados. Las direcciones en que se calcula son las mismas que para el enfoque anterior, puesto que es el mismo mapa variográfico. Con todo esto se debe utilizar un modelo de correogionalización, quedando la matriz de variograma de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{Cu} & \gamma_{Cu/Ag} & \gamma_{Cu/As} \\ \gamma_{Ag/Cu} & \gamma_{Ag} & \gamma_{Ag/As} \\ \gamma_{As/Cu} & \gamma_{As/Ag} & \gamma_{As} \end{pmatrix} (h)$$

$$= \begin{pmatrix} 1,95 & 50 & 2057 \\ 50 & 1850 & 23470 \\ 2057 & 23470 & 4180000 \end{pmatrix} \text{efecto pepa} + \begin{pmatrix} 3,1 & 70 & 3480 \\ 70 & 2000 & 79200 \\ 3480 & 79200 & 7155000 \end{pmatrix} \text{exp}(25,30,40)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 & 850 \\ 0,5 & 50 & -600 \\ 850 & -600 & 3600000 \end{pmatrix} \text{esf}(40,45,\infty) + \begin{pmatrix} 1,73 & 14 & 4300 \\ 14 & 500 & 46300 \\ 4300 & 46300 & 14000000 \end{pmatrix} \text{esf}(120,\infty,\infty)$$

Los variogramas experimentales y teóricos para las variables son los mismos que para el enfoque anterior, salvo que los variogramas cruzados anteriormente eran nulos. Para validar el modelo anterior, se debe realizar la validación cruzada. Las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados para las tres variables.

	5754 Datos Totales	100%	5584 Datos Robustos	97,05%
	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>
<b>Error</b>	0,002	3,406	0,159	1,287
<b>Error Estandarizado</b>	0,001	0,990	0,086	0,378

Tabla 30: Estadísticas validación cruzada cobre cokriging.

	5594 Datos Totales	100%	5478 Datos Robustos	97,93%
	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>
<b>Error</b>	0,111	2000,7	3,720	764,56
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	0,723	0,070	0,275

Tabla 31: Estadísticas validación cruzada plata cokriging.

	5726 Datos Totales	100%	5525 Datos Robustos	96,46%
	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>
<b>Error</b>	2,811	14610457	284,21	2989510
<b>Error Estandarizado</b>	0,001	1,798	0,100	0,372

Tabla 32: Estadísticas validación cruzada arsénico cokriging.

Con el modelo validado, se realiza cokriging ordinario de todas las variables y se formula la ley equivalente, quedando de la siguiente manera:

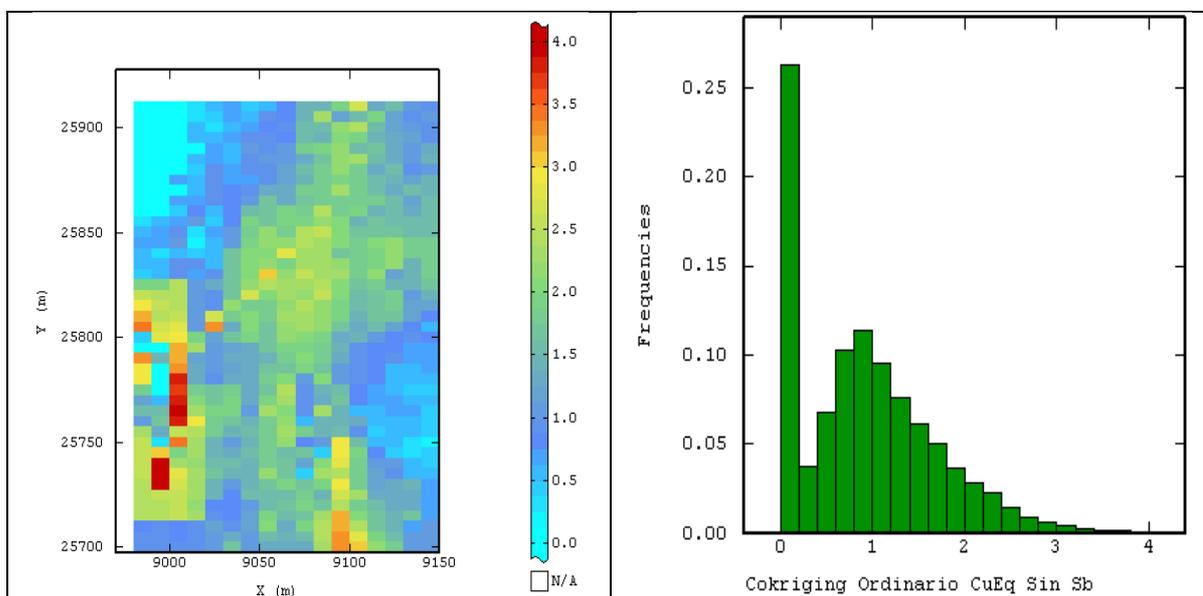


Imagen 23: Cokriging ordinario cobre equivalente (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

#### 5.2.4. Segundo Enfoque: Cosimulación Multigaussiana sobre todas las variables

La transformación a datos gaussianos es la misma anamorfosis que en el enfoque anterior. Como los variogramas son similares al enfoque anterior, y agregándole los variogramas cruzados de los datos gaussianos, el modelo de correogionalización queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{G.Cu} & \gamma_{G.Cu/G.Ag} & \gamma_{G.Cu/G.As} \\ \gamma_{G.Ag/G.Cu} & \gamma_{G.Ag} & \gamma_{G.Ag/G.As} \\ \gamma_{G.As/G.Cu} & \gamma_{G.As/G.Ag} & \gamma_{G.As} \end{pmatrix} (h) = \begin{pmatrix} 0,403 & 0,296 & 0,222 \\ 0,296 & 0,302 & 0,128 \\ 0,222 & 0,128 & 0,215 \end{pmatrix} \text{efecto pepa} + \begin{pmatrix} 0,486 & 0,439 & 0,391 \\ 0,439 & 0,523 & 0,421 \\ 0,391 & 0,421 & 0,548 \end{pmatrix} \text{exp}(25,30,40) + \begin{pmatrix} 0,023 & 0,040 & 0,036 \\ 0,040 & 0,071 & 0,064 \\ 0,036 & 0,064 & 0,059 \end{pmatrix} \text{esf}(40,45, \infty) + \begin{pmatrix} 0,215 & 0,260 & 0,168 \\ 0,260 & 0,419 & 0,227 \\ 0,168 & 0,227 & 0,391 \end{pmatrix} \text{esf}(120, \infty, \infty)$$

Las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados de la validación cruzada de todas las variables:

	5754 Datos Totales	100%	5688 Datos Robustos	98,85%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,004	0,432	0,010	0,382
<b>Error Estandarizado</b>	0,004	0,779	0,013	0,686

Tabla 33: Estadísticas validación cruzada gaussiana cobre cosimulación.

	5594 Datos Totales	100%	5513 Datos Robustos	98,55%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,001	0,345	0,009	0,295
<b>Error Estandarizado</b>	0,001	0,827	0,013	0,700

Tabla 34: Estadísticas validación cruzada gaussiana plata cosimulación.

	5726 Datos Totales	100%	5591 Datos Robustos	97,64%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,001	0,286	0,017	0,222
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	0,934	0,031	0,718

Tabla 35: Estadísticas validación cruzada gaussiana arsénico cosimulación.

Se prosigue con la realización de las cosimulaciones mediante el algoritmo de bandas rotantes, con 2000 direcciones, se realizan 100 cosimulaciones. Con este resultado, se formula la ley equivalente de cada cosimulación, para recrear 100 escenarios posibles.

En la etapa final, se decide promediar las cosimulaciones para tener una medida de comparación con los resultados anteriores.

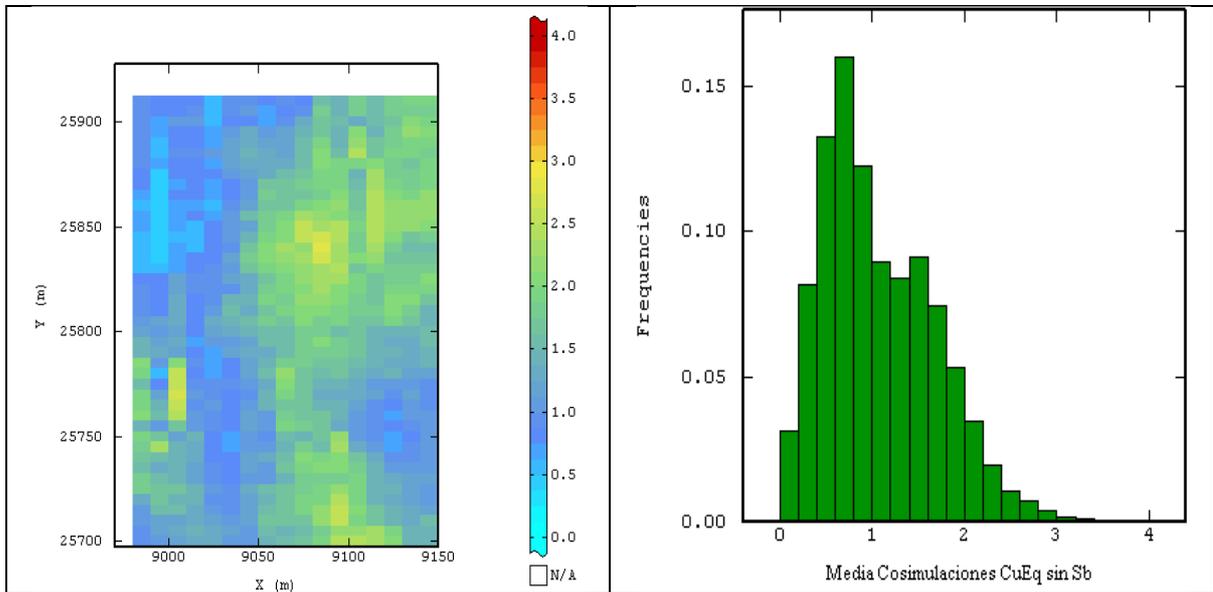


Imagen 24: Promedio de las cosimulaciones de ley equivalente de cobre (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

### 5.2.5. Tercer Enfoque: Kriging Ordinario sobre la Ley Equivalente

Lo primero que se debe realizar es calcular la ley equivalente de los datos dentro del sector del pórfido, para luego tener estadísticas básicas que se muestran la siguiente tabla:

Variable	Cantidad de Datos	Mínimo [ppm]	Máximo [ppm]	Media [ppm]	Varianza [ppm <sup>2</sup> ]
<b>Cobre Equivalente</b>	5573	0,00	27,98	0,99	2,23

Tabla 36: Estadísticas básicas de los datos sin desagrupar de cobre equivalente.

Variable	Cantidad de Datos	Mínimo [ppm]	Máximo [ppm]	Media [ppm]	Varianza [ppm <sup>2</sup> ]
<b>Cobre Equivalente</b>	5573	0,00	27,98	0,99	2,46

Tabla 37: Estadísticas básicas de los datos desagrupados de cobre equivalente.

Se observa que existen algunos datos sin información de  $Cu_{eq}$  por muestreo levemente heterotópico. Al igual que con los datos originales, no se considera eliminar datos aberrantes. A continuación, se procede a mostrar el histograma de los datos desagrupados:

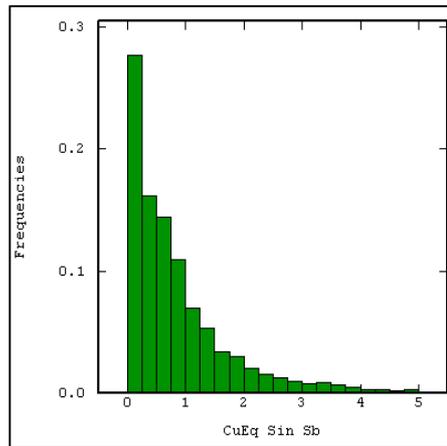


Imagen 25: Histograma de ley equivalente de cobre.

El variograma experimental de esta nueva variable se calcula al igual que los datos originales en el plano horizontal y en la dirección vertical. El variograma modelado queda de la siguiente manera:

$$\gamma_{Cu_{eq}}(h) = 1,25 \text{ efecto pepa} + 1esf(10,10,4) + 0,21esf(\infty, \infty, 13)$$

La tabla siguiente muestra los errores y errores estandarizados del oro equivalente.

	5573 Datos Totales	100%	5463 Datos Robustos	98,03%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,009	1,773	0,106	0,645
<b>Error Estandarizado</b>	0,006	0,912	0,075	0,328

Tabla 38: Estadísticas validación cruzada oro equivalente.

Luego, se procede a realizar kriging ordinario de la ley equivalente.

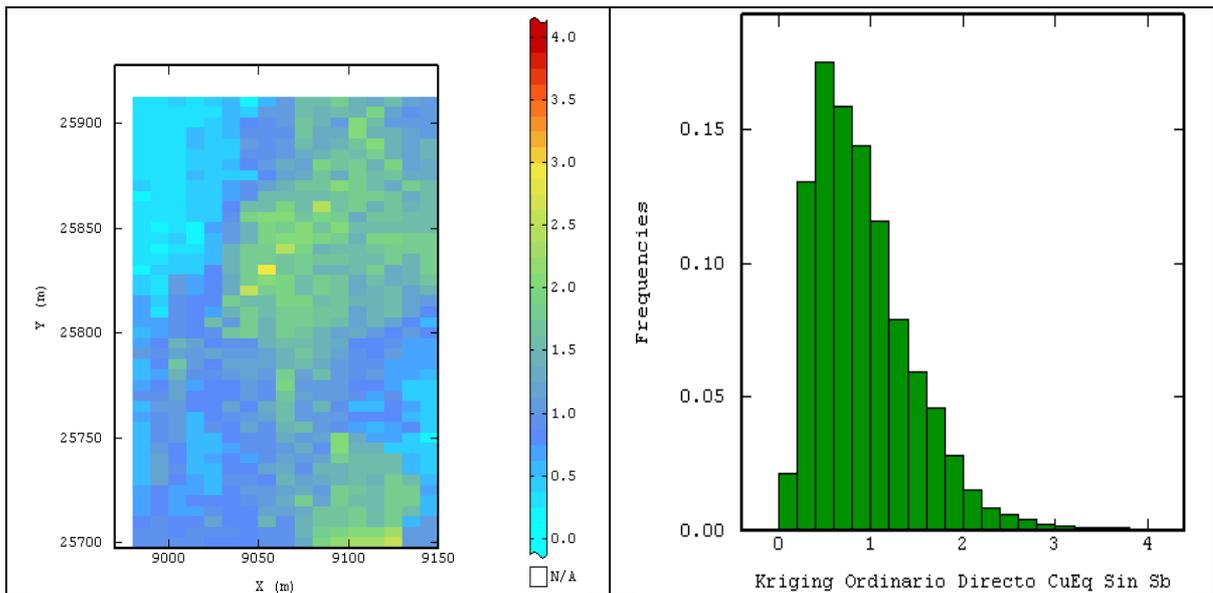


Imagen 26: Kriging ordinario directo cobre equivalente (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

### 5.2.6. Tercer Enfoque: Simulación Multigaussiana de la Ley Equivalente

Al no cumplir la ley equivalente el requisito de ser gaussiana, debe ser transformada mediante una anamorfosis. El histograma gaussiano queda de la siguiente forma:

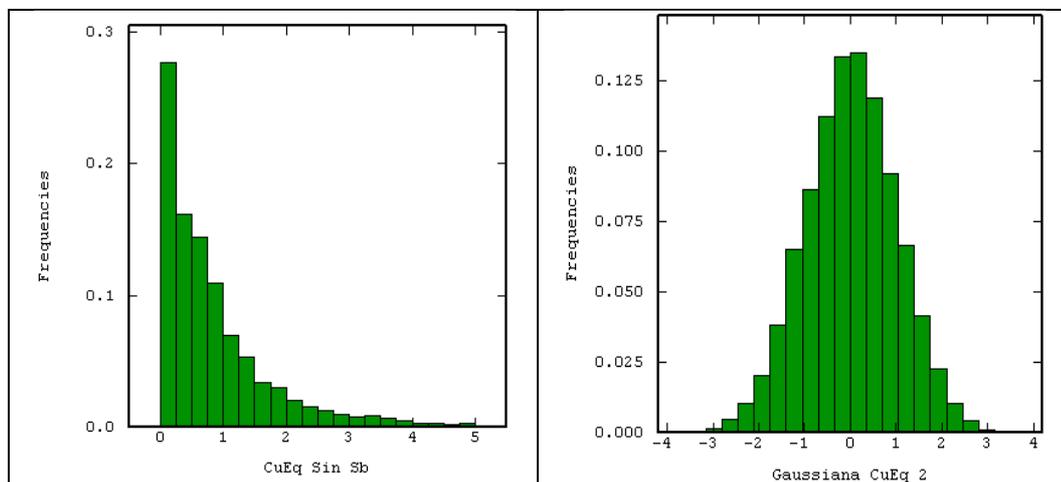


Imagen 27: Histogramas datos originales ley equivalente de cobre (izquierda) y datos transformados (derecha).

Los tests arrojan como resultado que la anamorfosis propuesta es válida. Ahora se puede calcular el variograma experimental de la variable gaussiana de ley equivalente y al igual que en los enfoques anteriores, se escogen el plano horizontal y la dirección vertical, quedando la fórmula del variograma modelado de la siguiente manera:

$$\gamma_{Cu_{eq}}(h) = 0,54 \text{ efecto pepa} + 0,24 \text{esf}(12,12,15) + 0,17 \text{esf}(60,60,65) + 0,05 \text{esf}(\infty, \infty, 80)$$

La siguiente tabla muestra los errores y errores estandarizados de la validación cruzada de la variable gaussiana.

	5573 Datos Totales	100%	5437 Datos Robustos	97,56%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,001	0,624	0,000	0,504
<b>Error Estandarizado</b>	0,001	0,996	0,000	0,803

Tabla 39: Estadísticas validación cruzada gaussiana cobre equivalente.

Se procede a realizar las simulaciones de la ley equivalente mediante el algoritmo de bandas rotantes, realizando 100 simulaciones con 2000 direcciones.

Para finalizar, se decide promediar las simulaciones para tener un parámetro de comparación con lo expuesto en kriging.

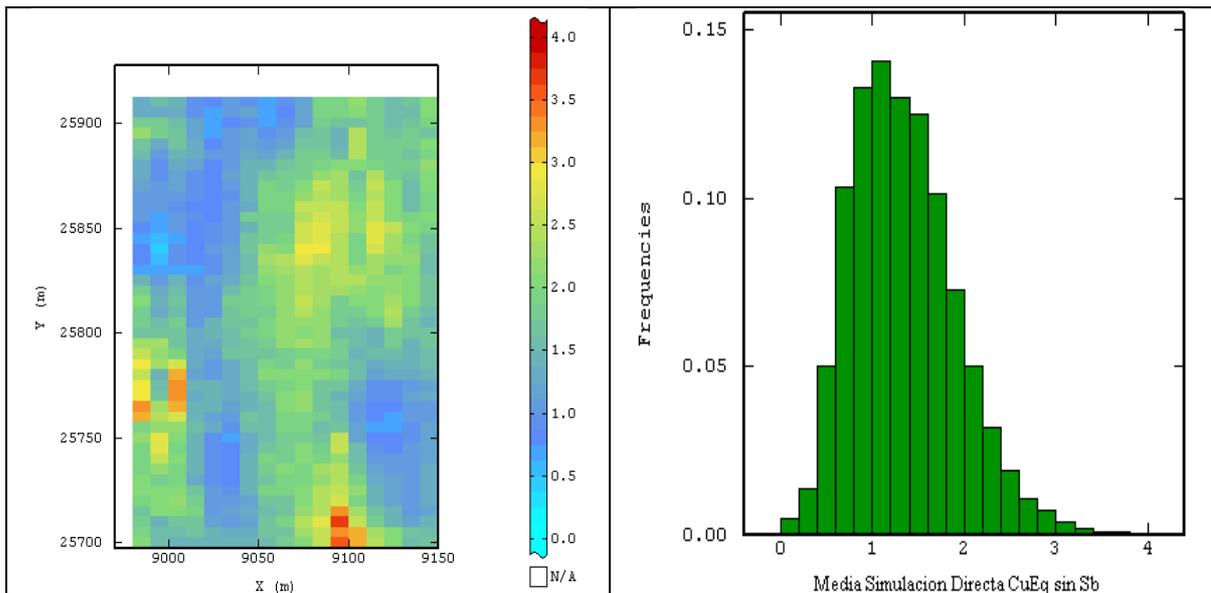


Imagen 28: Promedio de las simulaciones directas de ley equivalente de cobre (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

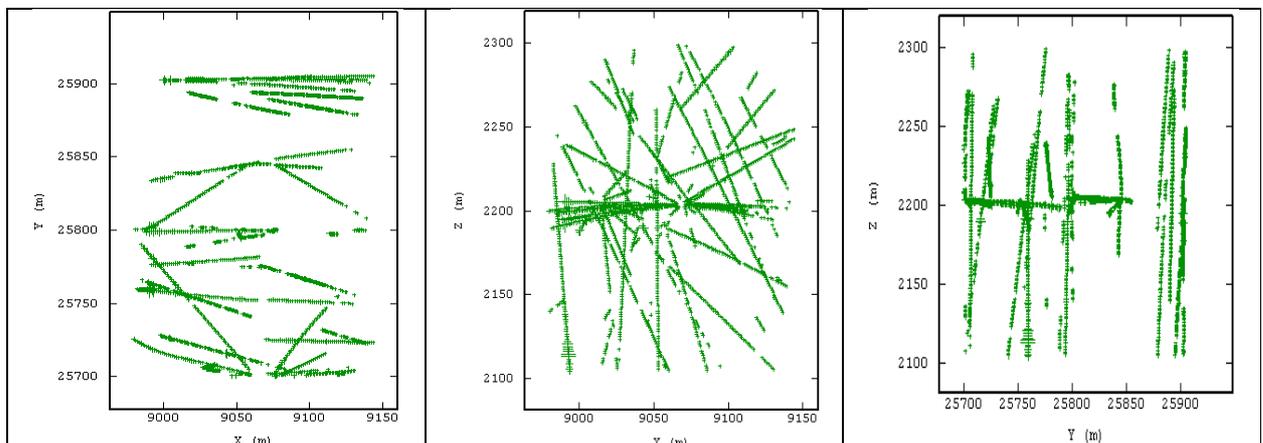
De manera análoga al caso de estudio anterior, en el **Anexo C: Caso de Estudio 2**, se encuentran los anexos respectivos a cada metodología, vale decir:

- Los histogramas de las variables originales y desagrupadas y las nubes de correlación entre las variables.
- Los mapas variográficos, los variogramas experimentales y los variogramas modelados, tanto de las variables originales como de las variables gaussianas.
- Los gráficos que entrega la validación cruzada.
- Los resultados gráficos de los kriging, cokriging de cada una de las variables.
- Las desviaciones estándar de los errores de kriging y cokriging de cada variable y las desviaciones estándar de las simulaciones y cosimulaciones.
- Los test de la distribución bigaussiana: las nubes de correlación diferida a diferentes distancias y el cociente entre la raíz cuadrada del variograma y el madograma.

### 5.3. Caso de Estudio 3

La base de datos corresponde a la misma del caso de estudio anterior, con la salvedad de contener además antimonio, lo que plantea una restricción adicional a la presencia de contaminantes. Como se señaló anteriormente, solamente se cuenta con datos de leyes, no del modelo geológico del sector.

Las siguientes imágenes muestran la ubicación espacial de los datos de antimonio, tanto en planta como una vista isométrica:



**Imagen 29: Ubicación espacial antimonio dentro del pórfido, vistas XY (izquierda), XZ (centro) e YZ (derecha).**

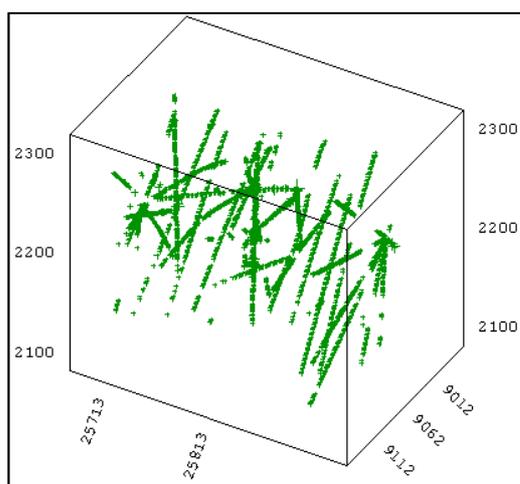


Imagen 30: Vista isométrica de los datos de antimonio en el pórfido.

A simple vista se aprecia una menor cantidad de datos de antimonio en comparación al resto de las variables, esto quiere decir que se está bajo un muestreo heterotópico. Principalmente se mostrará lo que atañe al antimonio y su interacción con las otras variables, debido a que estas últimas ya fueron presentadas en el caso de estudio anterior. A continuación se presenta cada uno de los enfoques con sus diversas metodologías.

### 5.3.1. Primer Enfoque: Kriging Ordinario sobre cada variable

Como parte fundamental dentro del estudio exploratorio se debe hacer una comparación de todas las variables. La tabla siguiente muestra las estadísticas básicas de las cuatro variables. El desagrupamiento y el tamaño de los bloques es el mismo que en el del estudio anterior, vale decir, corresponden a bloques de 10[m] x 5[m] x 5[m].

Variable	Cantidad de Datos	Mínimo	Máximo	Media	Desviación Estándar
Cobre [%]	5754	0,01	29,90	1,66	2,40
Plata [ppm]	5594	0,40	855,0	36,87	58,16
Arsénico [ppm]	5726	5,00	126100	2000,4	4501,3
Antimonio [ppm]	2160	1,00	8240,0	220,3	557,8

Tabla 40: Estadísticas básicas de los datos originales del caso de estudio 3

Variable	Cantidad de Datos	Mínimo	Máximo	Media	Desviación Estándar
<b>Cobre [%]</b>	5754	0,01	29,90	1,64	2,47
<b>Plata [ppm]</b>	5594	0,40	855,0	36,01	58,47
<b>Arsénico [ppm]</b>	5726	5,00	126100	1967,5	4646,6
<b>Antimonio [ppm]</b>	2160	1,00	8240,0	213,5	564,2

Tabla 41: Estadísticas básicas de los datos desagrupados del caso de estudio 3.

No se considera eliminar datos aberrantes por el mismo motivo que en el caso de estudio anterior. Se observa también que se confirma lo que indicaban los mapas de las muestras, es decir, un muestreo fuertemente heterotópico. El coeficiente de correlación entre las variables se muestra a continuación:

Variable	Cobre	Plata	Arsénico	Antimonio
<b>Cobre</b>	1,00	0,82	0,70	0,66
<b>Plata</b>	0,82	1,00	0,44	0,33
<b>Arsénico</b>	0,70	0,44	1,00	0,68
<b>Antimonio</b>	0,66	0,33	0,68	1,00

Tabla 42: Correlaciones entre todas las variables regionalizadas.

Se puede concluir que las variables Cu-Sb, y As-Sb tienen una buena correlación, lo contrario ocurre con Ag-Sb. Las variables arsénico y antimonio van a jugar un papel fundamental debido a los valores extremos que presentan y a que, además de definir una ley equivalente para el cobre, también se definirá una para arsénico. Se muestra a continuación el gráfico cuantil a cuantil de la variable antimonio original respecto a la desagrupada:

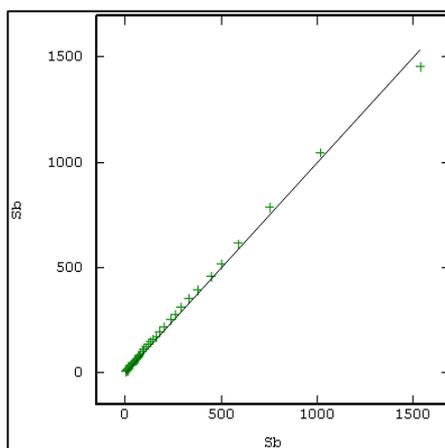


Imagen 31: Q-Q Plot entre la variable original (abscisa) y desagrupada (ordenada) de antimonio.

Los variogramas experimentales del cobre, la plata, el arsénico y el antimonio son creados en el plano horizontal y en la dirección vertical. Finalmente se modelan los variogramas experimentales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \gamma_{Cu} &= 1,95 \text{ efecto pepa} + 3,1 \exp(25,30,40) + 0,6 \text{esf}(40,45,\infty) + 1,73 \text{esf}(120,\infty,\infty) \\ \gamma_{Ag} &= 1850 \text{ efecto pepa} + 2000 \exp(25,30,40) + 50 \text{esf}(40,45,\infty) + 500 \text{esf}(120,\infty,\infty) \\ \gamma_{As} &= 1000(4180 \text{ efecto pepa} + 7155 \exp(25,30,40) + 3600 \text{esf}(40,45,\infty) + 14000 \text{esf}(120,\infty,\infty)) \\ \gamma_{Sb} &= 1000(146 \text{ efecto pepa} + 32 \exp(25,30,40) + 138 \text{esf}(40,45,\infty) + 45 \text{esf}(120,\infty,\infty)) \end{aligned}$$

Para validar los modelos anteriores, se utiliza el método de validaciones cruzadas. Las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados para el antimonio, ya que en el caso de estudio anterior, fueron validados los otros tres elementos:

	2160 Datos Totales	100%	1939 Datos Robustos	89,77%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,051	174310	24,33	49166
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	0,872	0,074	0,372

Tabla 43: Estadísticas validación cruzada antimonio kriging.

Se procede a realizar kriging ordinario del antimonio. Finalmente se realiza el cálculo de la ley equivalente de arsénico primeramente, definida en el capítulo de antecedente para luego calcular la ley equivalente de cobre, usando los kriging de las variables cobre y plata y el kriging del arsénico equivalente, dando como resultado lo siguiente:

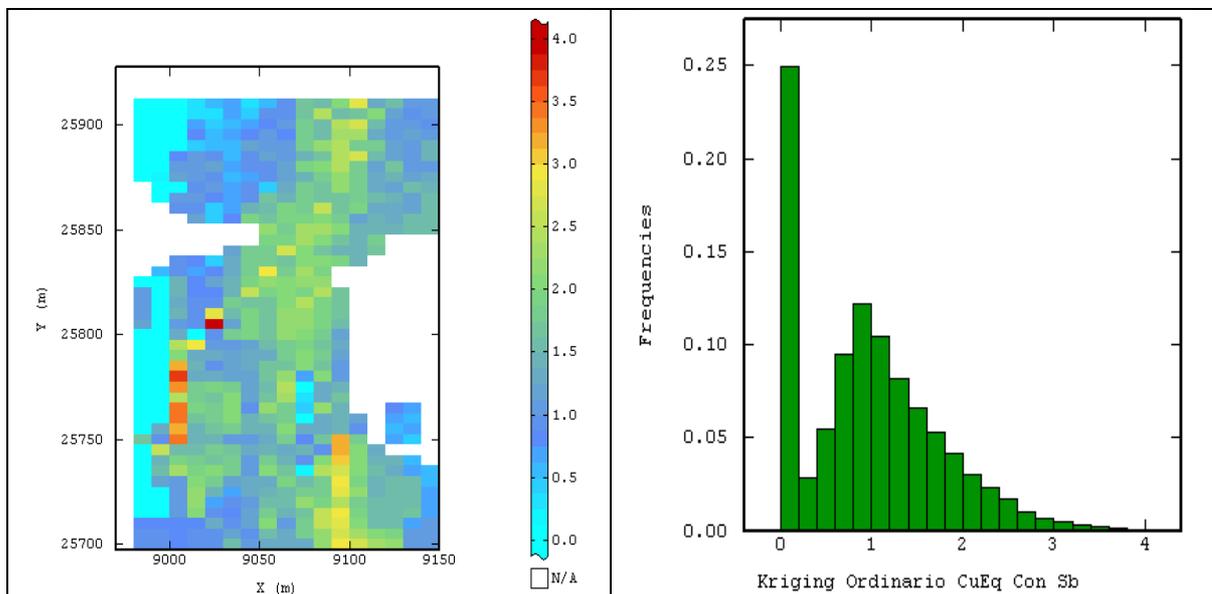


Imagen 32: Kriging ordinario cobre equivalente (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

### 5.3.2. Primer Enfoque: Simulación Multigaussiana sobre cada variable

Al igual que las tres variables originales, el antimonio tampoco cumple con ser gaussiana, por ende, antes debe hacerse una anamorfosis para transformar los datos. El histograma gaussiano de antimonio queda de la siguiente manera:

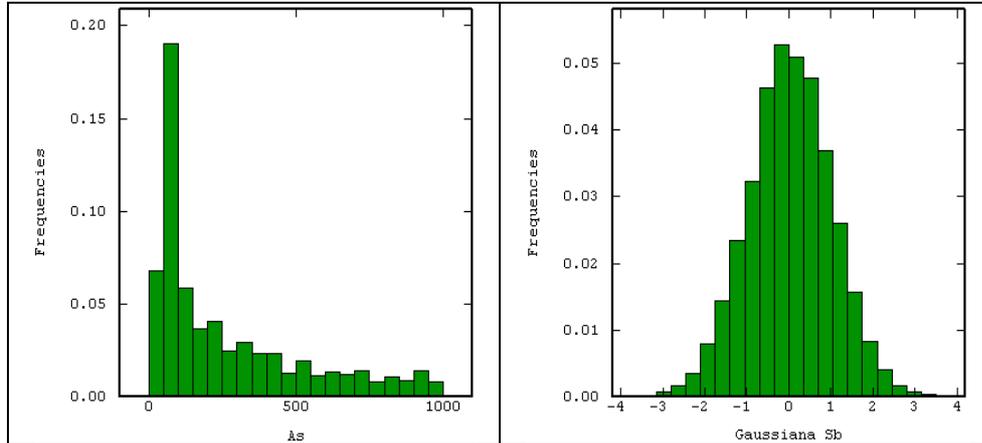


Imagen 33: Histogramas datos originales leyes de antimonio (izquierda) y datos transformados (derecha).

Los tests muestran la transformación propuesta es válida. Con esto ahora se pueden calcular los variogramas experimentales de la variable gaussiana de antimonio. La fórmula de los variogramas modelados son las siguientes:

$$\begin{aligned} \gamma_{G.Cu} &= 0,403 \text{ efecto pepa} + 0,486 \exp(25,30,40) + 0,023 \text{esf}(40,45,\infty) + 0,215 \text{esf}(120,\infty,\infty) \\ \gamma_{G.Ag} &= 0,302 \text{ efecto pepa} + 0,523 \exp(25,30,40) + 0,071 \text{esf}(40,45,\infty) + 0,419 \text{esf}(120,\infty,\infty) \\ \gamma_{G.As} &= 0,215 \text{ efecto pepa} + 0,548 \exp(25,30,40) + 0,059 \text{esf}(40,45,\infty) + 0,391 \text{esf}(120,\infty,\infty) \\ \gamma_{G.Sb} &= 0,173 \text{ efecto pepa} + 0,547 \exp(25,30,40) + 0,137 \text{esf}(40,45,\infty) + 0,287 \text{esf}(120,\infty,\infty) \end{aligned}$$

Las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados de la validación cruzada para la variable gaussiana de antimonio, ya que las otras tres fueron mostradas en el caso de estudio anterior:

	2160 Datos Totales	100%	1909 Datos Robustos	88,38%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,002	0,278	0,018	0,225
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	0,874	0,029	0,698

Tabla 44: Estadísticas validación cruzada gaussiana antimonio simulación.

Se procede a realizar las simulaciones, mediante el algoritmo de bandas rotantes, realizando 100 simulaciones con 2000 direcciones. Se realiza el cálculo de la ley equivalente

simulación a simulación, primero para la ley equivalente de arsénico y luego para la ley equivalente de cobre, para recrear los 100 escenarios posibles.

En la etapa final, se decide promediar las simulaciones para tener un parámetro de comparación con lo expuesto en kriging.

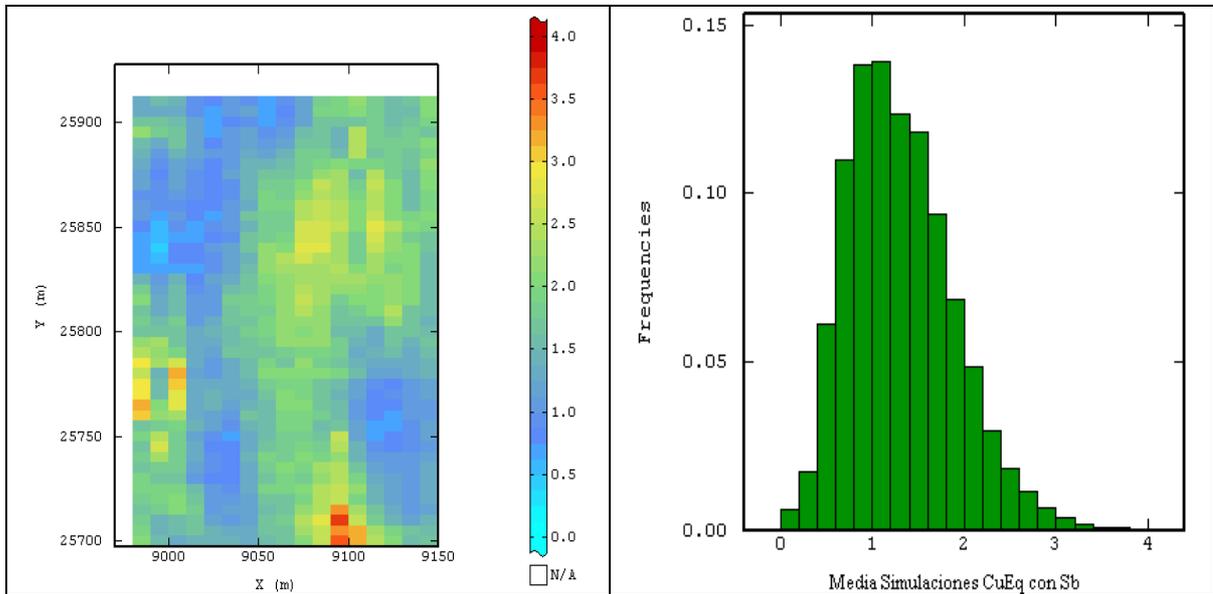


Imagen 34: Promedio de las simulaciones de ley equivalente de cobre (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

### 5.3.3. Segundo Enfoque: Cokriging Ordinario sobre todas las variables

El estudio exploratorio de cada variable es el mismo que en el enfoque anterior. Se debe calcular el variograma experimental para el antimonio y los tres variograma cruzados que tiene asociado. Las direcciones en que se calcula son las mismas que para el enfoque anterior. Con todo esto se debe utilizar un modelo de correogionalización, quedando la matriz de variograma de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{Cu} & \gamma_{Cu/As} & \gamma_{Cu/Sb} & \gamma_{Cu/Ag} \\ \gamma_{As/Cu} & \gamma_{As} & \gamma_{As/Sb} & \gamma_{As/Ag} \\ \gamma_{Sb/Cu} & \gamma_{Sb/As} & \gamma_{Sb} & \gamma_{Sb/Ag} \\ \gamma_{Ag/Cu} & \gamma_{Ag/As} & \gamma_{Ag/Sb} & \gamma_{Ag} \end{pmatrix} (h)$$

$$= \begin{pmatrix} 1,95 & 2057 & 375,5 & 50 \\ 2057 & 4180000 & 625000 & 23470 \\ 375,5 & 625000 & 146000 & 4230 \\ 50 & 23470 & 4230 & 1850 \end{pmatrix} \text{efecto pepa}$$

$$+ \begin{pmatrix} 3,1 & 3480 & 225 & 70 \\ 3480 & 7155000 & 407200 & 79200 \\ 225 & 407200 & 32000 & 5880 \\ 70 & 79200 & 5880 & 2000 \end{pmatrix} \text{exp}(25,30,40)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0,6 & 850 & 270 & 0,5 \\ 850 & 3600000 & 559000 & -600 \\ 270 & 559000 & 138000 & 140 \\ 0,5 & -600 & 140 & 50 \end{pmatrix} \text{esf}(40,45,\infty)$$

$$+ \begin{pmatrix} 1,73 & 4300 & 10 & 14 \\ 4300 & 14000000 & 290000 & 46300 \\ 10 & 290000 & 45000 & -1620 \\ 14 & 46300 & -1620 & 500 \end{pmatrix} \text{esf}(120,\infty,\infty)$$

Los variogramas experimentales y teóricos para las variables son los mismos que para el enfoque anterior, salvo que los variogramas cruzados anteriormente eran nulos. Para validar el modelo anterior, se debe realizar la validación cruzada. Las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados para las cuatro variables.

	5754 Datos Totales	100%	5586 Datos Robustos	97,08%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0	3,398	0,157	1.308
<b>Error Estandarizado</b>	0	0,996	0,085	0,387

Tabla 45: Estadísticas validación cruzada cobre cokriging.

	5594 Datos Totales	100%	5479 Datos Robustos	97,94%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,082	1995,93	3,557	767,493
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	0,723	0,067	0,276

Tabla 46: Estadísticas validación cruzada plata cokriging.

	5726 Datos Totales	100%	5520 Datos Robustos	98,68%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,154	14692823	287,005	2968420
<b>Error Estandarizado</b>	0	1,820	0,102	0,373

Tabla 47: Estadísticas validación cruzada arsénico cokriging.

	2160 Datos Totales	100%	1925 Datos Robustos	89,12%
	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>
<b>Error</b>	4,059	164321,67	29,78	48125
<b>Error Estandarizado</b>	0,008	0,833	0,058	0,35

Tabla 48: Estadísticas validación cruzada antimonio cokriging.

Se realiza cokriging ordinario de todas las variables. Con este resultado, se formula la ley equivalente de arsénico y posteriormente la de cobre, quedando de la siguiente manera:

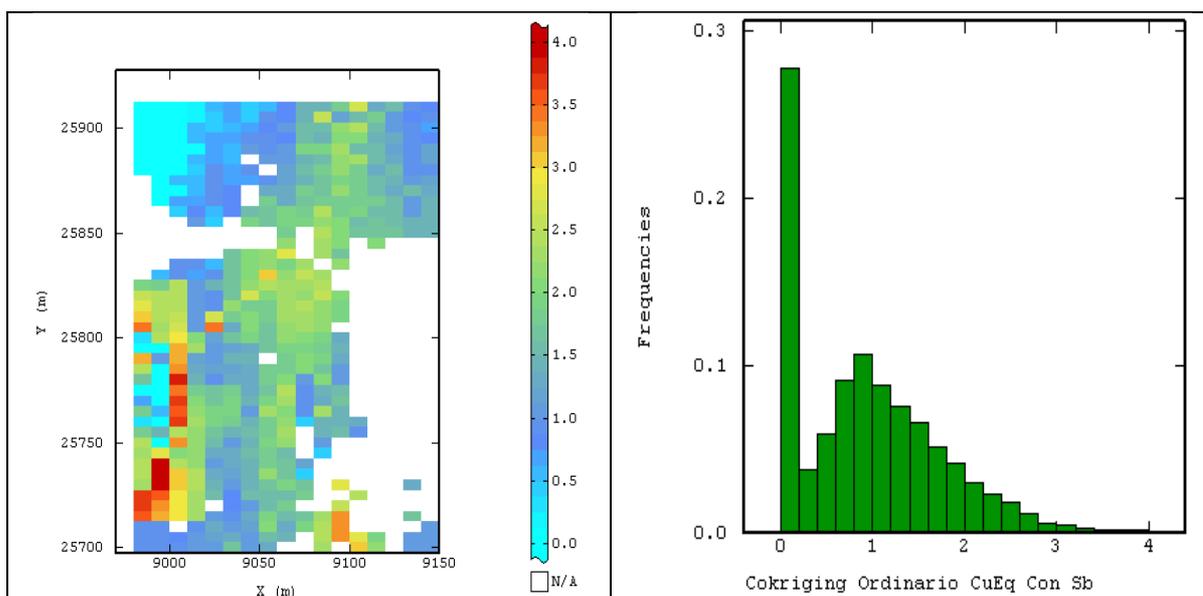


Imagen 35: Cokriging ordinario cobre equivalente (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

#### 5.3.4. Segundo Enfoque: Cosimulación Multigaussiana sobre todas las variables

La transformación a datos gaussianos utilizó la misma anamorfosis que en el enfoque anterior. Como los variogramas son similares al enfoque anterior, y agregándole los variogramas cruzados de los datos gaussianos de antimonio, el modelo de correionalización queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix}
Y_{G.Cu} & Y_{G.Cu/G.As} & Y_{G.Cu/G.Sb} & Y_{G.Cu/G.Ag} \\
Y_{G.As/G.Cu} & Y_{G.As} & Y_{G.As/G.Sb} & Y_{G.As/G.Ag} \\
Y_{G.Sb/G.Cu} & Y_{G.Sb/G.As} & Y_{G.Sb} & Y_{G.Sb/G.Ag} \\
Y_{G.Ag/G.Cu} & Y_{G.Ag/G.As} & Y_{G.Ag/G.Sb} & Y_{G.Ag}
\end{pmatrix} (h)$$

$$= \begin{pmatrix} 0,403 & 0,222 & 0,132 & 0,296 \\ 0,222 & 0,215 & 0,124 & 0,128 \\ 0,132 & 0,124 & 0,173 & 0,064 \\ 0,296 & 0,128 & 0,064 & 0,302 \end{pmatrix} \text{efecto pepa}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0,486 & 0,391 & 0,406 & 0,439 \\ 0,391 & 0,548 & 0,475 & 0,421 \\ 0,406 & 0,475 & 0,547 & 0,393 \\ 0,439 & 0,421 & 0,393 & 0,523 \end{pmatrix} \text{exp}(25,30,40)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0,023 & 0,036 & 0,055 & 0,040 \\ 0,036 & 0,059 & 0,89 & 0,64 \\ 0,055 & 0,089 & 0,137 & 0,097 \\ 0,040 & 0,064 & 0,097 & 0,071 \end{pmatrix} \text{esf}(40,45,\infty)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0,215 & 0,168 & 0,177 & 0,260 \\ 0,168 & 0,391 & 0,232 & 0,227 \\ 0,177 & 0,232 & 0,287 & 0,244 \\ 0,260 & 0,227 & 0,244 & 0,419 \end{pmatrix} \text{esf}(120,\infty,\infty)$$

El modelo de correogionalización debe ser validado mediante validación cruzada, las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados de todas las variables:

	5754 Datos Totales	100%	5682 Datos Robustos	98,75%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,004	0,437	0,008	0,384
<b>Error Estandarizado</b>	0,004	0,794	0,011	0,695

Tabla 49: Estadísticas validación cruzada cobre cosimulación.

	5594 Datos Totales	100%	5512 Datos Robustos	98,53%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,001	0,347	0,008	0,230
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	0,839	0,013	0,710

Tabla 50: Estadísticas validación cruzada plata cosimulación.

	5726 Datos Totales	100%	5591 Datos Robustos	97,64%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	0,002	0,287	0,017	0,223
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	0,942	0,031	0,725

Tabla 51: Estadísticas validación cruzada arsénico cosimulación.

	2160 Datos Totales	100%	1891 Datos Robustos	87,55%
	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>	<b>Media</b>	<b>Varianza</b>
<b>Error</b>	0,007	0,305	0,017	0,238
<b>Error Estandarizado</b>	0,014	1,097	0,033	0,875

Tabla 52: Estadísticas validación cruzada antimonio cosimulación.

Se prosigue con la realización de las cosimulaciones, mediante el algoritmo de bandas rotantes, con 2000 direcciones. En total se realizan 100 cosimulaciones. Con este resultado, se formula la ley equivalente de arsénico y luego la ley equivalente de cobre de cada cosimulación, para recrear 100 escenarios posibles.

En la etapa final, se decide promediar las cosimulaciones para tener una medida de comparación con el resultado que da el cokriging.

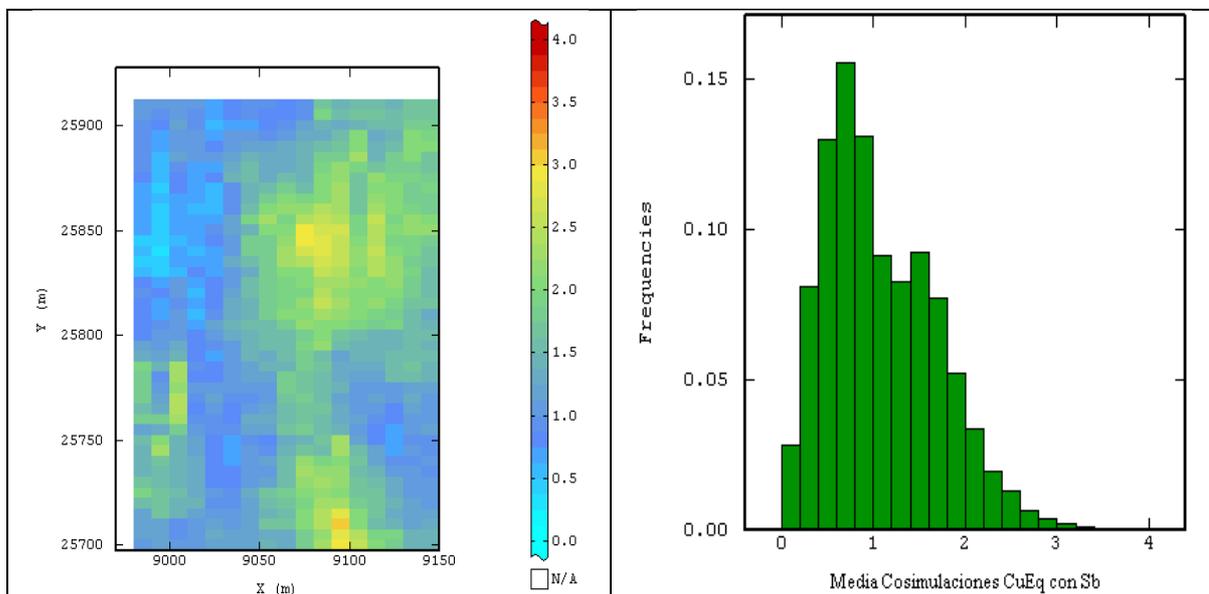


Imagen 36: Promedio de las cosimulaciones de ley equivalente de cobre (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

### 5.3.5. Tercer Enfoque: Kriging Ordinario sobre la ley equivalente

Lo primero que se debe realizar es calcular la ley equivalente en los datos dentro del sector del pórfido. Como se aprecia en la siguiente tabla, los datos de cobre equivalente disminuyeron considerablemente respecto al caso de estudio anterior.

Variable	Cantidad de Datos	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Varianza [% <sup>2</sup> ]
<b>Cobre Equivalente</b>	2148	0,00	19,61	0,86	1,63

Tabla 53: Estadísticas básicas de los datos originales de cobre equivalente caso de estudio 3.

Variable	Cantidad de Datos	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Varianza [% <sup>2</sup> ]
<b>Cobre Equivalente</b>	2148	0	19,61	0,91	2,45

Tabla 54: Estadísticas básicas de los datos desagrupados de cobre equivalente caso de estudio 3.

Al igual que con los datos originales, no se consideró eliminar datos aberrantes. A continuación, se procede a mostrar el histograma de los datos desagrupados:

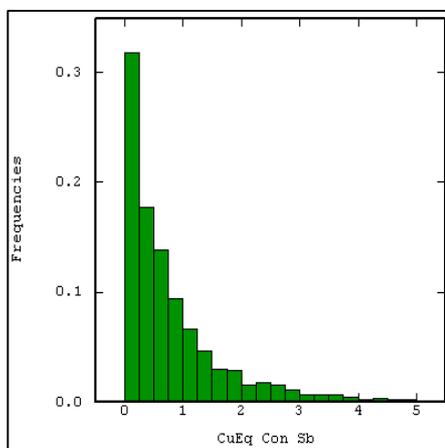


Imagen 37: Histograma de ley equivalente de cobre.

El variograma experimental de esta nueva variable es creado, al igual que los datos originales, en el plano horizontal y en la dirección vertical. El variograma modelado queda de la siguiente manera:

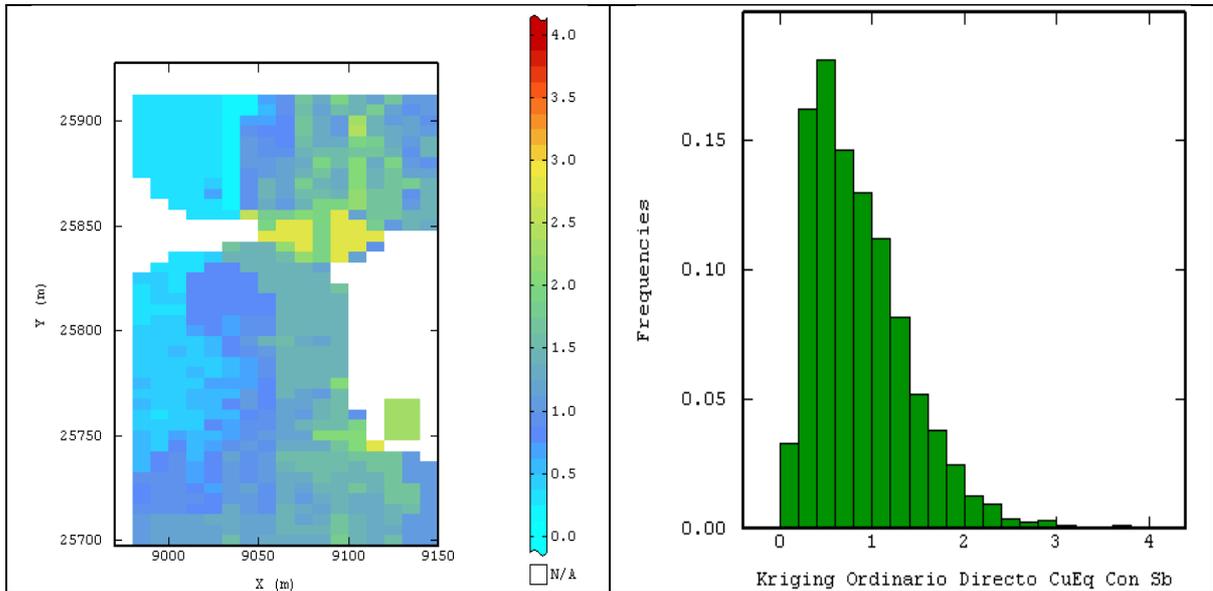
$$\gamma_{Cu_{eq}}(h) = 0,55efecto\ pepa + 0,43esf(5,5,40) + 0,55esf(20,20,55) + 0,1esf(35,35, \infty)$$

La tabla siguiente muestra los errores y errores estandarizados del oro equivalente.

	2148 Datos Totales	100%	2023 Datos Robustos	94,18%
	Media	Varianza	Media	Varianza
<b>Error</b>	-0,001	1,106	0,089	0,423
<b>Error Estandarizado</b>	0,002	1,224	0,094	0,475

Tabla 55: Estadísticas validación cruzada cobre equivalente.

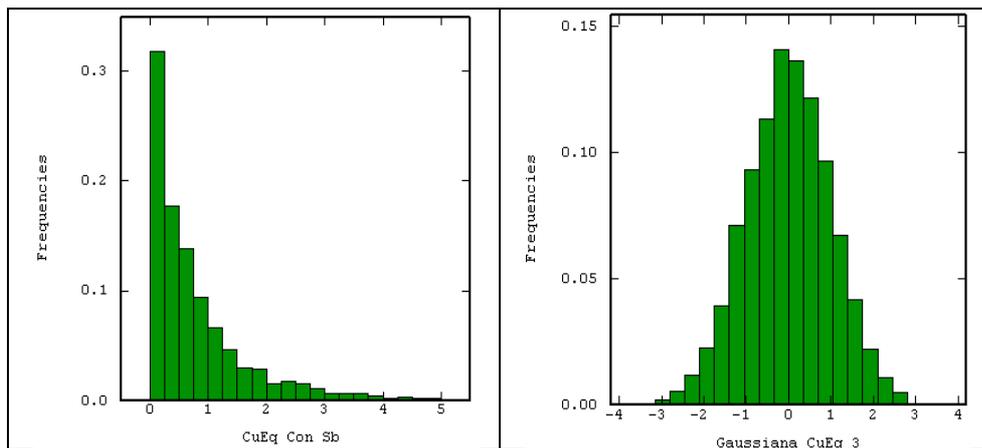
Una vez validado el modelo, se procede a realizar kriging ordinario de la ley equivalente.



**Imagen 38: Kriging ordinario directo cobre equivalente (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).**

### 5.3.6. Tercer Enfoque: Simulación Multigaussiana de la Ley Equivalente

Al no cumplir la ley equivalente el requisito de ser gaussianas, debe ser transformada mediante una anamorfosis. El histograma gaussiano queda de la siguiente forma:



**Imagen 39: Histogramas datos originales ley equivalente de cobre (izquierda) y datos transformados (derecha).**

Ahora se puede calcular el variograma experimental de la variable gaussiana de ley equivalente y, al igual que en los enfoques anteriores, se escogen el plano horizontal y la dirección vertical, quedando la fórmula del variograma modelado de la siguiente manera:

$$\gamma_{Cu_{eq}}(h) = 0,39 \text{ efecto pepa} + 0,52 \text{esf}(15,15,70) + 0,21 \text{esf}(35,35, \infty)$$

Las siguientes tablas muestran los errores y errores estandarizados de la validación cruzada para la variable gaussiana.

	2148 Datos Totales		100%	2015 Datos Robustos		93,81%
	Media	Varianza		Media	Varianza	
<b>Error</b>	-0,006	0,632		-0,027	0,463	
<b>Error Estandarizado</b>	-0,007	1,100		-0,005	0,832	

Tabla 56: Estadísticas validación cruzada gaussiana cobre equivalente.

Se procede a realizar las simulaciones de la ley equivalente mediante el algoritmo de bandas rotantes, realizando 100 simulaciones con 2000 direcciones.

Para finalizar, se decide promediar las simulaciones para tener un parámetro de comparación con lo expuesto en kriging.

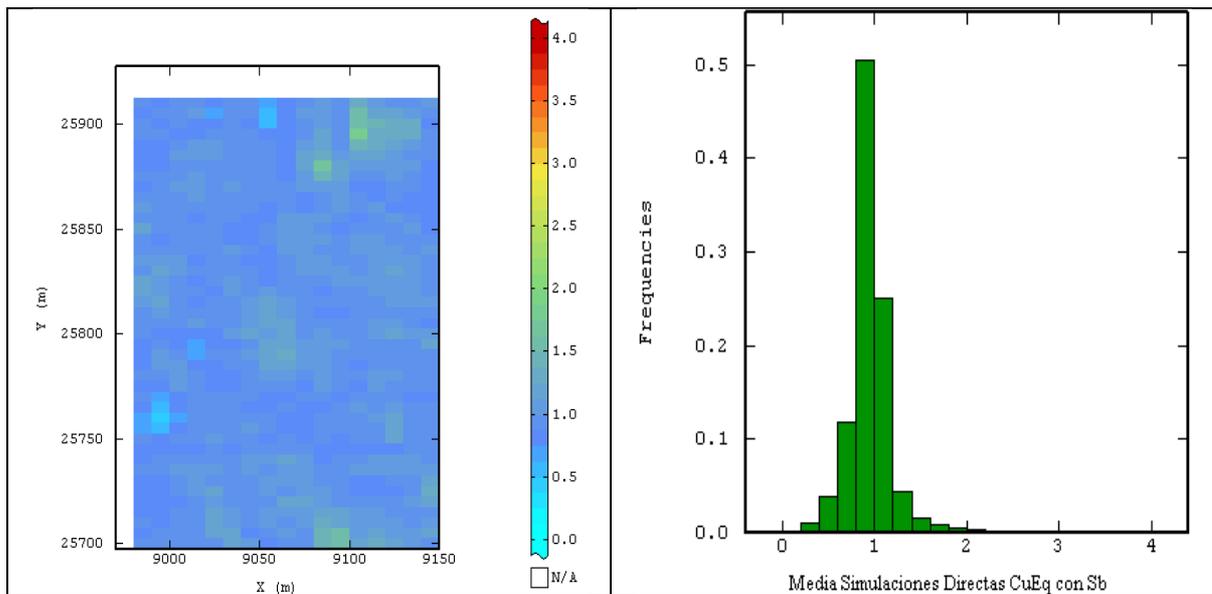


Imagen 40: Promedio de las simulaciones directas de ley equivalente de cobre (izquierda) e histograma asociado a éste (derecha).

De manera similar que en los casos de estudios anteriores, en el **Anexo D: Caso de Estudio 3**, se encuentran los anexos referentes a cada metodología, esto es:

- Los histogramas de las variables originales y desagrupadas y las nubes de correlación entre las variables.
- Los mapas variográficos, los variogramas experimentales y los variogramas modelados, tanto de las variables originales como de las variables gaussianas.
- Los gráficos que entrega la validación cruzada.
- Los resultados gráficos de los kriging, cokriging de cada una de las variables.
- Las desviaciones estándar de los errores de kriging y cokriging de cada variable y las desviaciones estándar de las simulaciones y cosimulaciones.
- Los test de la distribución bigaussiana: las nubes de correlación diferida a diferentes distancias y el cociente entre la raíz cuadrada del variograma y el madograma.

## 6. Análisis de Resultados

Las bases de datos entregadas contienen solamente información de las leyes de los elementos de interés al soporte de datos (puntual), no de las leyes equivalentes al soporte de bloques. Es por esta razón que ya se empieza con una limitante al momento de querer definir fronteras duras para las estimaciones y simulaciones dadas en los diversos enfoques vistos.

Para simplificar el análisis de cada caso de estudio, la siguiente tabla muestra la notación empleada en este capítulo.

Enfoque y Método	Notación
Enfoque 1: Kriging	(I)
Enfoque 1: Simulaciones	(II)
Enfoque 2: Cokriging	(III)
Enfoque 2: Cosimulaciones	(IV)
Enfoque 3: Kriging directo	(V)
Enfoque 3: Simulaciones directas	(VI)

Tabla 57: Notación para cada enfoque y método.

### 6.1. Caso de Estudio 1

En el primer caso de estudio se aprecia que se presentan resultados bastante similares si se hacen comparaciones entre las metodologías (I), (III) y (V); y También entre (II) (IV) y (VI). Los coeficientes de correlación son superiores a 0,97 para el primer grupo y superiores a 0,87 para el segundo.

La siguiente tabla muestra las correlaciones bloque a bloque de todas las metodologías.

$\rho$	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	(VI)
(I)	<b>1,00</b>	0,56	<b>0,99</b>	0,53	<b>1,00</b>	0,59
(II)	0,56	<b>1,00</b>	0,56	<b>0,89</b>	0,55	<b>0,89</b>
(III)	<b>0,99</b>	0,56	<b>1,00</b>	0,54	<b>0,98</b>	0,59
(IV)	0,53	<b>0,89</b>	0,54	<b>1,00</b>	0,52	<b>0,88</b>
(V)	<b>1,00</b>	0,55	<b>0,98</b>	0,52	<b>1,00</b>	0,57
(VI)	0,59	<b>0,89</b>	0,59	<b>0,88</b>	0,57	<b>1,00</b>

Tabla 58: Correlaciones bloque a bloque entre los resultados de las diferentes metodologías para el caso de estudio 1.

Los números destacados en la tabla 58 se deben a que al ser un muestreo homotópico, el enfoque 3 no pierde información cuando se calcula la ley equivalente de los datos directamente. Además, al estar definida la ley equivalente como combinación lineal aditiva de los datos

originales, el cambio de soporte no genera problemas. Esto explica también que, si bien teóricamente, el tercer enfoque tiene menos precisión que los otros dos enfoques (visto en el capítulo de antecedentes), en este caso en particular, las pérdidas aparentemente no fueron considerables.

Las diferencias se observan en los números sin destacar: los coeficientes de correlación se encuentran entre 0,5 y 0,6. Estas diferencias se deben principalmente a que los histogramas de las variables oro y plata presentan una “cola larga” y también existen algunos valores extremos considerablemente altos. La estimación lineal por kriging es muy sensible a lo anterior, mientras que las simulaciones trabajan con los valores transformados que tienen una distribución normal, por ende no hay valores extremos.

Paradójicamente, las (co)simulaciones suavizan más al considerar el promedio, puesto que la alta variabilidad y la presencia de valores extremos, generan sectores grandes de alta ley en el (co)kriging, no así en las (co)simulaciones. Esto también se ve reflejado en la siguiente tabla, en las menores desviaciones estándar y máximos que presentan (II), (IV) y (VI).

<b>Enfoque y Método</b>	<b>Resultado</b>	<b>Mínimo [ppm]</b>	<b>Máximo [ppm]</b>	<b>Media [ppm]</b>	<b>Desviación Estándar [ppm]</b>
(I)	6617 bloques	0,00	316,9	9,97	17,6
(II)	6617 bloques	0,00	186,5	10,44	8,31
(III)	6617 bloques	0,00	316,7	9,46	17,9
(IV)	6617 bloques	0,00	197,6	10,49	7,90
(V)	6617 bloques	0,00	315,0	10,09	17,2
(VI)	6617 bloques	0,00	193,8	10,61	8,28
<i>Datos Originales</i>	3712 datos	0,00	1252,92	9,91	50,5

Tabla 59: Estadísticas de los resultados para la ley equivalente y datos originales para el caso de estudio 1.

## 6.2. Caso de Estudio 2

A diferencia del caso de estudio anterior, (V) presenta buenas correlaciones bloque a bloque con todos los enfoques, como lo muestra la siguiente tabla.

<b><math>\rho</math></b>	<b>(I)</b>	<b>(II)</b>	<b>(III)</b>	<b>(IV)</b>	<b>(V)</b>	<b>(VI)</b>
<b>(I)</b>	<b>1,00</b>	0,64	<b>0,98</b>	<b>0,71</b>	<b>0,75</b>	0,64
<b>(II)</b>	0,64	<b>1,00</b>	0,64	<b>0,89</b>	<b>0,71</b>	<b>1,00</b>
<b>(III)</b>	<b>0,98</b>	0,64	<b>1,00</b>	<b>0,71</b>	<b>0,74</b>	0,64
<b>(IV)</b>	<b>0,71</b>	<b>0,89</b>	<b>0,71</b>	<b>1,00</b>	<b>0,74</b>	<b>0,89</b>
<b>(V)</b>	<b>0,75</b>	<b>0,71</b>	<b>0,74</b>	<b>0,74</b>	<b>1,00</b>	<b>0,71</b>
<b>(VI)</b>	0,64	<b>1,00</b>	0,64	<b>0,89</b>	<b>0,71</b>	<b>1,00</b>

Tabla 60: Correlaciones bloque a bloque entre los resultados de las diferentes metodologías para el caso de estudio 2.

Esto se debe principalmente a que al ser un muestreo prácticamente homotópico, no se pierde mucha información de los datos al calcular directamente la ley equivalente. Además, al haber una buena correlación entre leyes de cobre y arsénico ( $\rho = 0,70$ ), y por la misma definición de la ley equivalente de cobre (con castigos a mayores valores de arsénico), los valores máximos de la ley equivalente bajan considerablemente y hay bastante valores cercanos al mínimo. Lo anterior se aprecia en la siguiente tabla:

<b>Enfoque y Método</b>	<b>Resultado</b>	<b>Mínimo [ppm]</b>	<b>Máximo [ppm]</b>	<b>Media [ppm]</b>	<b>Desviación Estándar [ppm]</b>
(I)	29971 bloques	0,00	10,07	0,96	0,84
(II)	29971 bloques	0,00	5,74	1,35	0,59
(III)	29971 bloques	0,00	11,39	0,97	0,85
(IV)	29971 bloques	0,00	4,94	1,08	0,61
(V)	29971 bloques	0,00	8,26	0,93	0,56
(VI)	29971 bloques	0,00	5,74	1,35	0,59
<i>Datos Originales</i>	5573 datos	0,00	27,98	0,99	1,49

**Tabla 61: Estadísticas de los resultados para la ley equivalente y datos originales para el caso de estudio 2.**

Al no estar definida la ley equivalente como combinación lineal de las variables originales, produce que (I) y (III) tengan sesgos, debido a la propiedad de suavizamiento del (co)kriging que provoca que la distribución de las leyes estimadas por sobre una ley de corte no sea la misma que la distribución de las leyes reales. Existe sesgo también en (V) y (VI), ya que la ley equivalente no es una variable aditiva: por ende, el cambio de soporte de datos puntuales a bloques no genera que el promedio aritmético de las leyes equivalentes de soporte puntual sea el valor del bloque. Hay que agregar que (II) no considera la dependencia espacial de las leyes, creando también resultados sesgados.

La única metodología que no produce estimaciones sesgadas de la ley equivalente es (IV), que reproduce la variabilidad espacial de las leyes así como sus dependencias o correlaciones. Sin embargo, es la más exigente en términos de modelamiento y tiempos de cálculo, debido al ajuste del modelo de correogionalización y a la construcción de numerosas realizaciones para cada variable.

### **6.3. Caso de Estudio 3**

En contraste con el caso de estudio anterior, se producen considerables diferencias en los resultados. Esto se observa en la siguiente tabla que muestra las correlaciones bloque a bloque de cada metodología.

$\rho$	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	(VI)
(I)	<b>1,00</b>	0,66	<b>0,97</b>	<b>0,74</b>	0,49	0,46
(II)	0,66	<b>1,00</b>	0,67	<b>0,90</b>	0,53	0,52
(III)	<b>0,97</b>	0,67	<b>1,00</b>	<b>0,74</b>	0,49	0,46
(IV)	<b>0,74</b>	<b>0,90</b>	<b>0,74</b>	<b>1,00</b>	0,54	0,53
(V)	0,49	0,53	0,49	0,54	<b>1,00</b>	0,52
(VI)	0,46	0,52	0,46	0,53	0,52	<b>1,00</b>

Tabla 62: Correlaciones bloque a bloque entre los resultados de las diferentes metodologías para el caso de estudio 3.

Una de las razones del porqué ocurre esto es el fuerte muestreo heterotópico, que disminuye de manera significativa la cantidad de datos de cobre equivalente por efecto del antimonio (a menos de la mitad que en el caso de estudio 2). Esto provoca que el tercer enfoque diste significativamente con el resto, reflejándose también en la siguiente tabla

Enfoque y Método	Resultado	Mínimo [ppm]	Máximo [ppm]	Media [ppm]	Desviación Estándar [ppm]
(I)	24936 bloques	0,00	10,07	0,91	0,80
(II)	24936 bloques	0,00	5,27	1,29	0,58
(III)	24936 bloques	0,00	10,45	0,92	0,80
(IV)	24936 bloques	0,00	4,46	1,05	0,60
(V)	24936 bloques	0,00	9,85	0,83	0,55
(VI)	24936 bloques	0,14	4,56	0,94	0,25
<i>Datos Originales</i>	2148 datos	0,00	19,61	0,91	1,56

Tabla 63: Estadísticas de los resultados para la ley equivalente y datos originales para el caso de estudio 3.

Otra de las razones es la definición propia de la ley equivalente, que castiga en mayor medida al cobre equivalente que el segundo caso de estudio

En lo que respecta al sesgo de cada metodología, se explica por las mismas razones que el caso de estudio anterior, vale decir, el único enfoque insesgado es (IV).

## 7. Conclusiones y Recomendaciones

La ley equivalente es una herramienta bastante útil cuando se tienen todos los factores de ajuste definidos para cada variable, principalmente porque permite valorizar un yacimiento polimetálico de una manera alternativa a analizarlo por cada una de sus variables de interés.

Una de las mayores ventajas que presenta calcular la ley equivalente directamente en los datos, y estimarlo o simularlos a partir de ahí, es que se produce un ahorro considerable de tiempo, tanto en los tiempos de procesamiento de cálculo, como en el modelamiento de variogramas.

En faenas de mediana minería puede ser de gran utilidad, debido a que no se cuenta ni con tiempo ni con recursos para hacer un estudio más exhaustivo de las variables de interés implicadas. En contrapartida, ganar en tiempo significa indudablemente una pérdida de precisión en la estimación o simulación de la variable.

La clara desventaja que presenta calcular directamente la ley equivalente en los datos es su inflexibilidad. Al estar definida por parámetros económicos, si uno se rige a corto plazo o día a día en una faena minera, no resulta conveniente siquiera pensar en cambiar regularmente los factores de ajuste de la ley equivalente. Esto conlleva también a que no pueda existir un análisis de riesgo. A modo de ejemplo, no podría haber un estudio de la manera en que afectaría al valor económico del depósito en el transcurso del tiempo, el modificar los factores económicos.

Cuando la ley equivalente no es una función lineal (por ejemplo, cuando se tienen términos de segundo grado y/o definiciones por tramos), la mayoría de las metodologías produce sesgo por diferentes motivos: la simulación por separado de las variables hace caso omiso de la dependencia entre ellas; el kriging por separado y el cokriging suavizan la distribución de las leyes; el kriging directo y las simulaciones directas de la ley equivalente no deben ser utilizadas con un cambio de soporte a bloques, ya que no resultaría ser una variable aditiva.

Como se constata en el capítulo anterior, la cosimulación conjunta de todas las variables es la única metodología que no produce sesgo en sus realizaciones cuando la ley equivalente no es una función lineal, puesto que reproduce la variabilidad espacial entre las leyes y su dependencia.

Cuando se tienen condiciones como el primer caso de estudio, el cálculo de la ley equivalente directamente en los datos para realizar estimaciones mediante kriging, es una metodología recomendable, debido a que no se pierde información de manera considerable y además es la que demanda menores tiempos de cálculo, puesto que transforma un problema multivariable a uno univariable.

Por otra parte, cuando se tiene un contexto más similar o cercano al tercer caso de estudio, la metodología que no produce sesgo, es la que conlleva mayores tiempos de cálculo, debido básicamente a la construcción de numerosas realizaciones para cada variable y tiempo empleado en obtener un modelo de correionalización adecuado.

Englobando todo lo anterior en un contexto general, cada enfoque con que se puede calcular la ley equivalente presenta sus pros y sus contras. Es por esto que para una faena minera modelar la ley equivalente dependerá principalmente de sus objetivos y las estrategias con que enfrenten su negocio.

Se recomienda usar la metodología de ley equivalente calculada directamente en los datos en depósitos de tamaño pequeño o en sectores con una pequeña cantidad de datos cuando la ley equivalente sea combinación lineal de las variables, el muestreo sea homotópico y se tenga certeza que los parámetros económicos de los factores de ajuste de la ley equivalente sean relativamente constantes en el tiempo, puesto que al ser un método inflexible, no permite cambiar dichas condiciones muy a menudo. En otros casos, puede producir resultados sesgados cuando no es combinación lineal o perder información, como en un muestreo heterotópico.

No se recomienda categorizar recursos y/o reservas por medio de ley equivalente directa, puesto que deben explicitarse cómo se calcularon los parámetros económicos de los factores de ajuste y además qué criterio se utilizó para definir las variables de interés, lo que puede generar desconfianza o discrepancia en dicho reporte.

## 8. Bibliografía

- [1] Journel A.G., 1974, *Geostatistics for conditional simulation of orebodies*, Economic Geology, Vol. 69, p.673-678.
- [2] Journel A.G. & Huijbregts, 1978, *Mining Geostatistics*, Academic Press, London, 600 p.
- [3] Myers D., 1983, *Estimation of linear combinations and co-kriging*, Mathematical Geology, Vol. 15, p. 633-637.
- [4] David M., 1988, *Handbook of applied advanced geostatistical ore reserve estimation*, Elsevier, Amsterdam, p. 16-24.
- [5] Goovaerts P., 1997, *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*, Oxford University Press, New York, 480 p.
- [6] Chilès J.P. & Delfiner, P., 1999, *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*, Wiley, New York, 695 p.
- [7] Emery X, 2000, *Geoestadística lineal*, Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago, Chile, 411 p
- [8] Wackernagel H., 2003, *Multivariate Geostatistics: an Introduction with Applications*, 3rd edn., Springer, Berlin, 387 pp.
- [9] Rendu J.M., 2008, *An Introduction to cut-off grade estimation*, Society for Mining, Metallurgy, and Exploration, Inc., Littleton, Colorado, p.37-42.

## **Anexos**

## Anexo A: Cálculos de Ley Equivalente

A continuación, se presentan los supuestos utilizados en el cálculo de las diferentes leyes equivalentes.

### *A1: Oro Equivalente*

La ley equivalente de oro fue formulada de la siguiente manera:

$$Au_{eq} = Au + \frac{Ag}{69,5}$$

El factor de ajuste utilizado es  $1/69,5$  debido a que es la relación de precios del primer semestre del año 2009 entre la plata y el oro. Ésta es una hipótesis simplificadora debido a que no está dentro de los alcances estimar de manera exacta los “Factores de Ajuste” de cada elemento. Sin embargo, a pesar de ser una simplificación, no está tan alejada de los parámetros usados en la industria minera.

El precio promedio del oro durante ese período fue 915,27 [US\$/oz t], mientras que el de la Ppata fue 13,17 [US\$/oz t]. La división entre el segundo y el primero da el factor de ajuste expuesto.<sup>1</sup>

### *A2: Cobre Equivalente*

Para los casos de estudio 2 y 3, la determinación de la ley equivalente es similar, la diferencia radica que en el primero se usa el arsénico, mientras que en el segundo se utiliza el arsénico equivalente.

$$Cu_{eq} = \begin{cases} Cu + \frac{Ag}{95,5} & Si As_* < 100 \left[ \frac{g}{t} \right] \\ \max \left\{ Cu + \frac{Ag}{95,5} - \left( \frac{As_*^2}{3310162,2} - \frac{As_*}{4714,8} \right); 0 \right\} & Si 100 \left[ \frac{g}{t} \right] \leq As_* < 25000 \left[ \frac{g}{t} \right] \\ 0 & Si As_* \geq 25000 \left[ \frac{g}{t} \right] \end{cases}$$

Donde:

$$As_* = \begin{cases} As & \text{Caso de Estudio 2} \\ As_{eq} & \text{Caso de Estudio 3} \end{cases}$$

---

<sup>1</sup> Fuente: [www.cochilco.cl](http://www.cochilco.cl)

El factor de ajuste utilizado para la plata es 1/95,5. El criterio empleado es el mismo que para el caso anterior, vale decir, el cociente entre el precio promedio de la Plata y el Cobre del primer semestre del año 2009, además de un factor de conversión que transforma de [ppm] a [%] para ser consistentes con las unidades de medida.

El precio promedio de la Plata durante ese período fue 13,17 [US\$/oz t], lo que equivale a 192,08 [US\$/lb], mientras que el del Cobre fue 183,58 [cUS\$/lb]<sup>2</sup>. La división entre el segundo y el primero da un factor  $95,5 * 10^{-4}$ , y recordando que 10.000 [ppm] es equivalente a 1%, se obtiene el factor de ajuste expuesto.

Los factores para el caso del arsénico resultan ser un poco más complejos, debido a que no existe un “precio” de este elemento, se consideró trabajar con las penalidades. Si hay poco contenido de arsénico, se considerará que no afecta, en cambio, si hay demasiado, se considerará que el bloque no contiene cobre. Los umbrales escogidos para que la ley de cobre equivalente incluya el As\* se dan entre 100 [ppm] y 25000 [ppm]. Además se consideró que la relación no debía ser lineal, puesto que a mayor cantidad de As\*, mucho mayor debe ser la penalización:

$$a * As_*^2 + b * As_* + c$$

Las penalidades mínimas por arsénico son aproximadamente 1 US\$/t de concentrado, siendo que este concentrado debe tener 50% de Cu, ya que sobre 150 ppm de As se consideran concentrados ricos en arsénico. Esto se traduce en 2 [US\$/t Cu], o bien 0,09 [cUS\$/lb Cu]. Al imponer  $Cu_{eq} = 0$ , el límite superior es el precio del cobre (183,58 [cUS\$/lb Cu]), asumiendo la simplificación de precios realizada en los casos anteriores. Además, si no existe arsénico, no existen penalidades. Con toda esta información se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a * 0[ppm]^2 + b * 0[ppm] + c &= 0[cUS\$/lb Cu] \\ a * 100[ppm]^2 + b * 100[ppm] + c &= 0,09[cUS\$/lb Cu] \\ a * 25000[ppm]^2 + b * 25000[ppm] + c &= 183,58[cUS\$/lb Cu] \end{aligned}$$

Con esto se obtiene:

$$a = \frac{1}{3310162,2}; b = \frac{-1}{4714,8}; c = 0$$

---

<sup>2</sup> Fuente: www.cochilco.cl

### *A3: Arsénico Equivalente*

La ley equivalente de arsénico se formuló como una combinación lineal entre As y Sb cuando sobrepasa el umbral típico permitido en los cátodos de cobre:

$$As_{eq} = \begin{cases} As & Si \frac{As}{Sb} \geq 2 \\ As + Sb & Si \frac{As}{Sb} < 2 \end{cases}$$

## Anexo B: Caso de Estudio 1

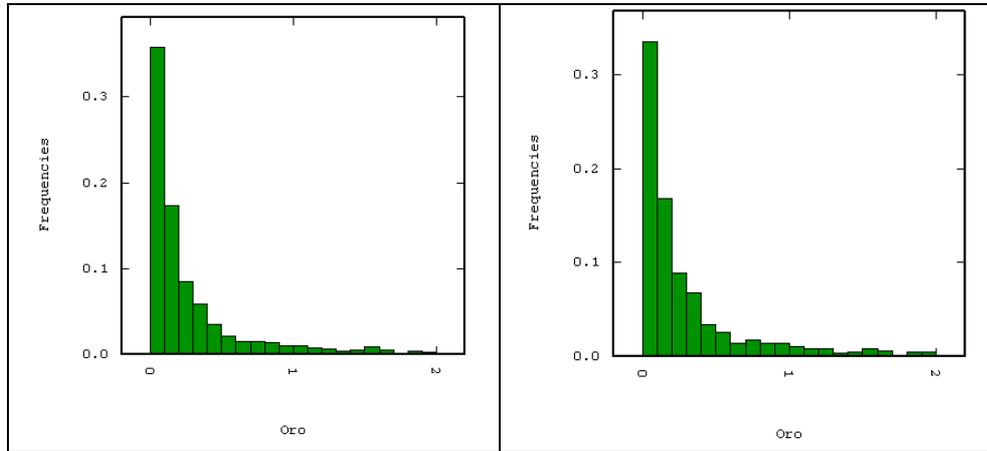


Imagen 41: Histogramas de leyes de oro sin desagrupar (izquierda) y desagrupado (derecha).

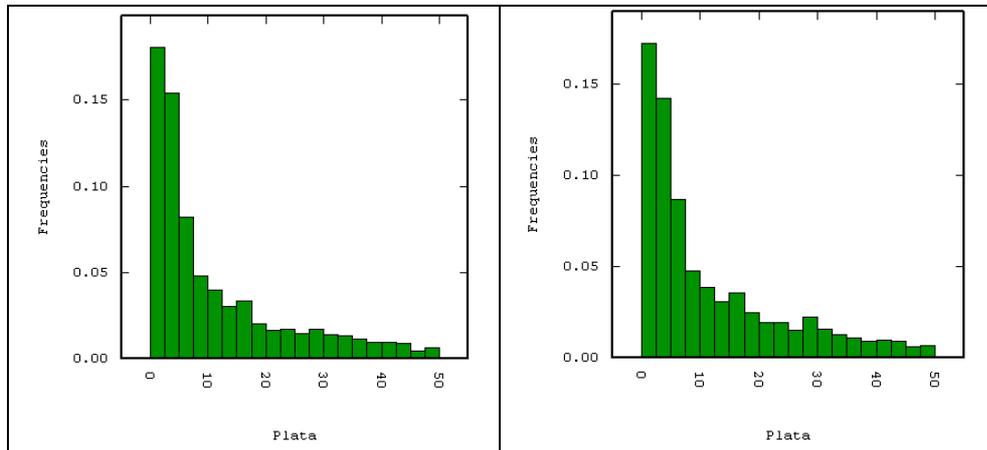


Imagen 42: Histogramas de leyes de plata sin desagrupar (izquierda) y desagrupado (derecha).

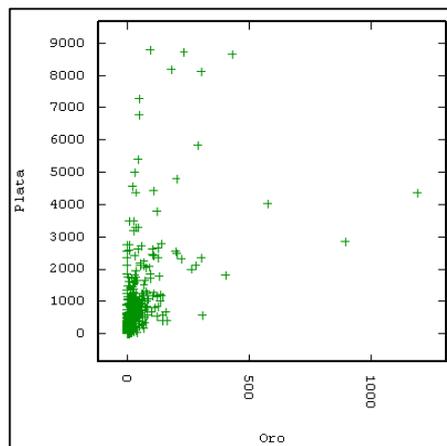
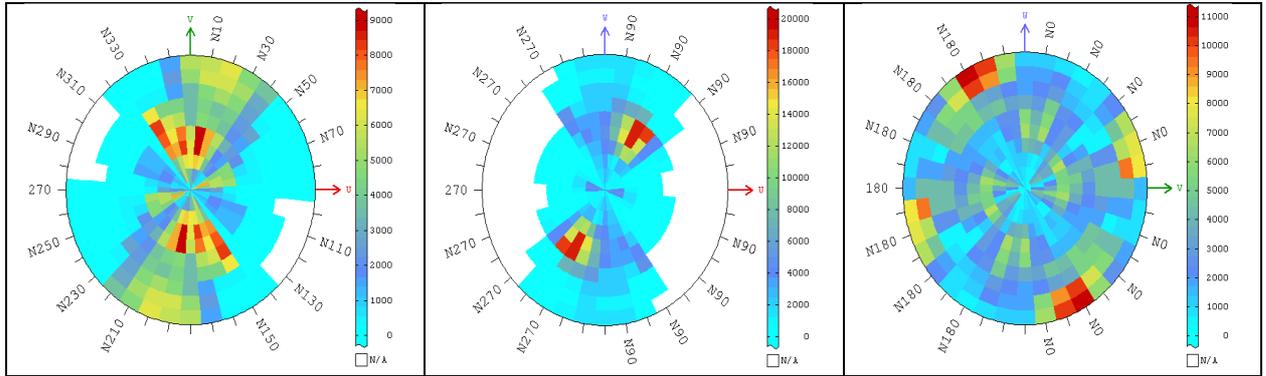
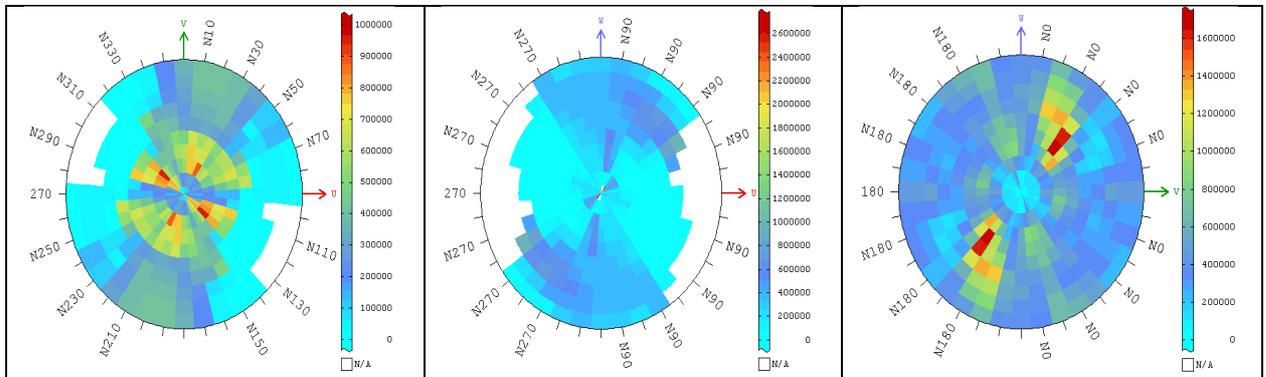


Imagen 43: Nube de correlación entre leyes de oro y plata.

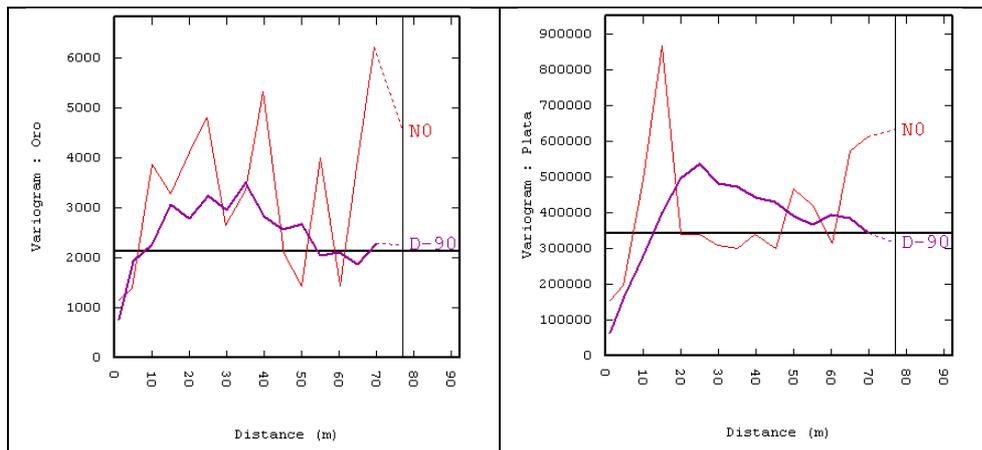
**B1: Enfoque 1: Metodología 1**



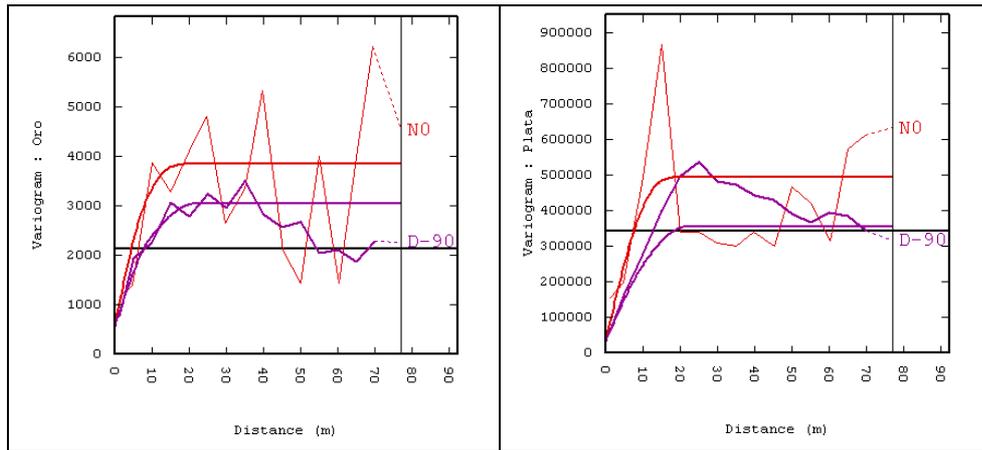
**Imagen 44: Mapas variográficos oro planos XY (derecha), XZ (centro) e YZ (izquierda).**



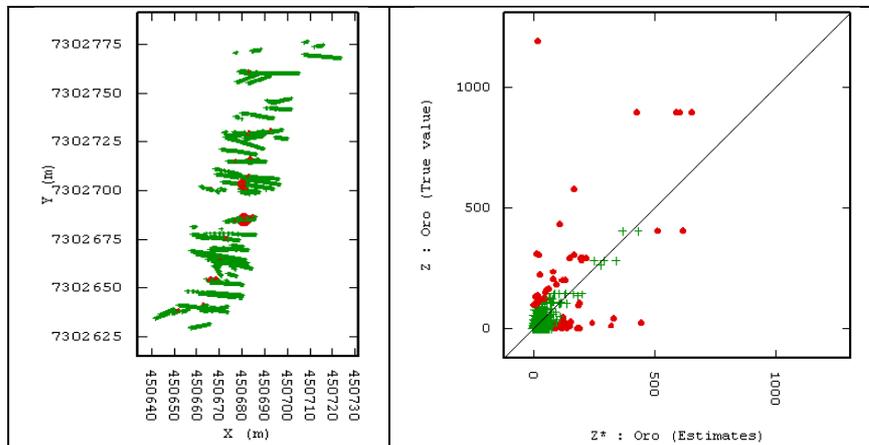
**Imagen 45: Mapas variográficos plata planos XY (derecha), XZ (centro) e YZ (izquierda).**



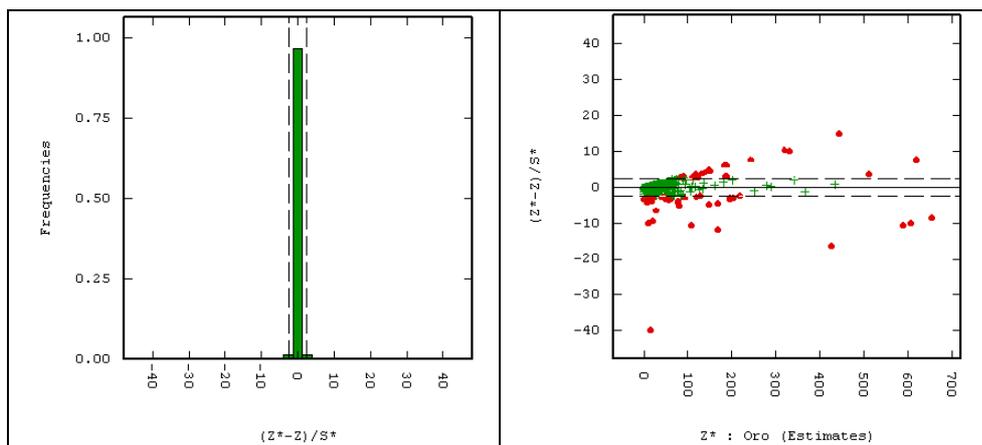
**Imagen 46: Variogramas experimentales oro (izquierda) y plata (derecha), en el plano horizontal (rojo) y dirección vertical (morado).**



**Imagen 47: Variogramas modelados oro (izquierda) y plata (derecha), en el plano horizontal (rojo) y dirección vertical (morado).**



**Imagen 48: Validación cruzada oro kriging: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



**Imagen 49: Validación cruzada oro kriging: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**

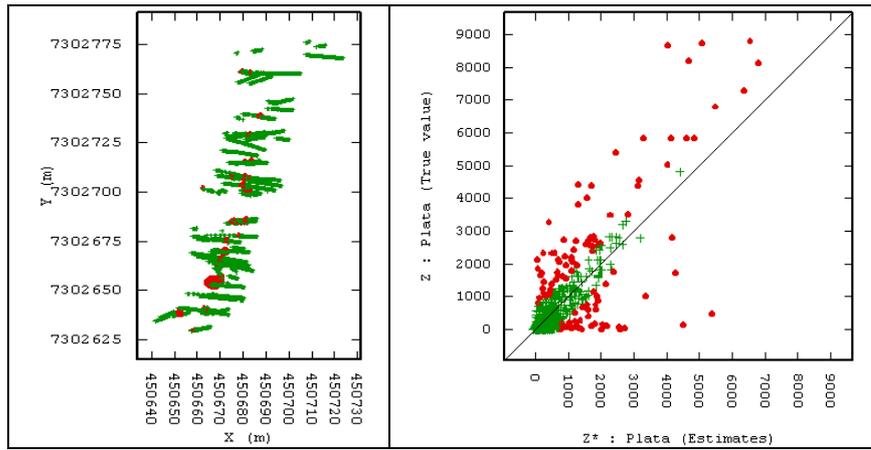


Imagen 50: Validación cruzada plata kriging: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

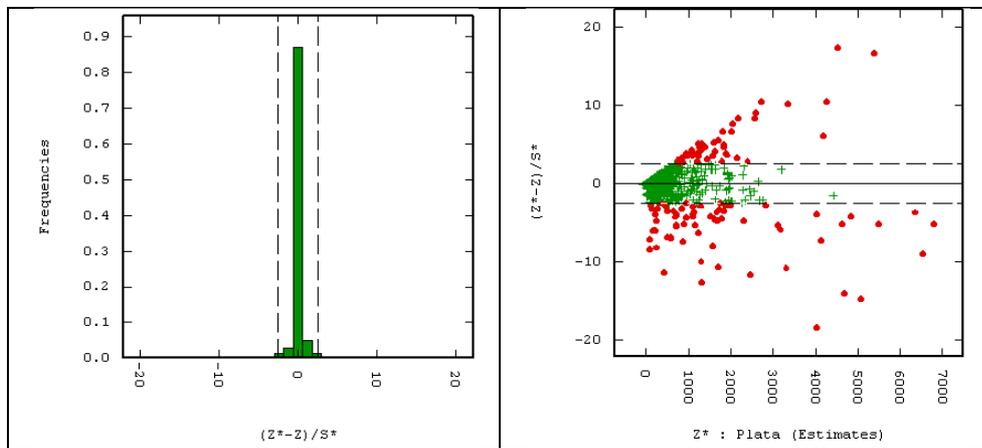


Imagen 51: Validación cruzada plata kriging: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

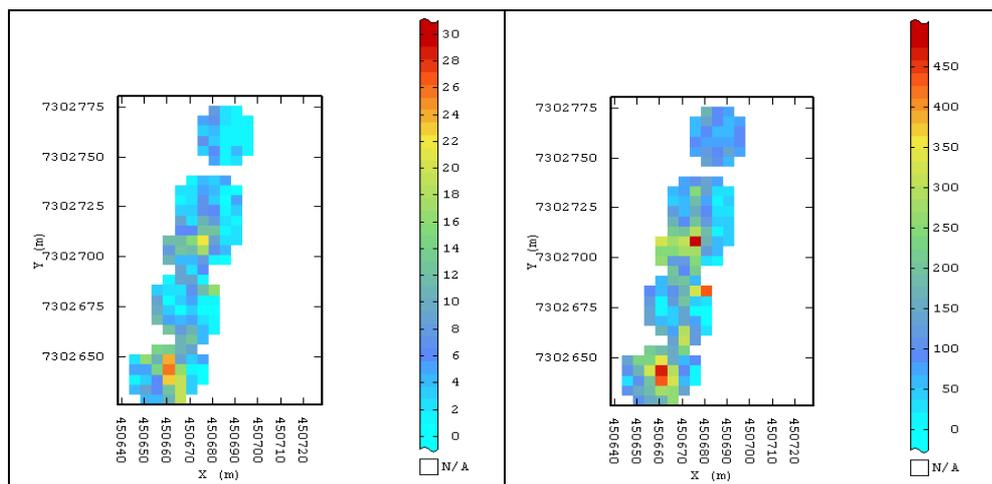
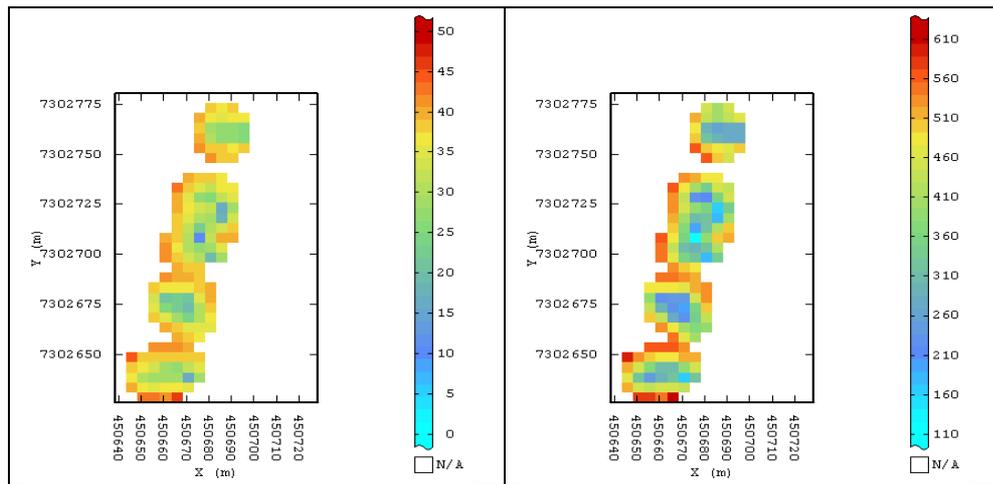
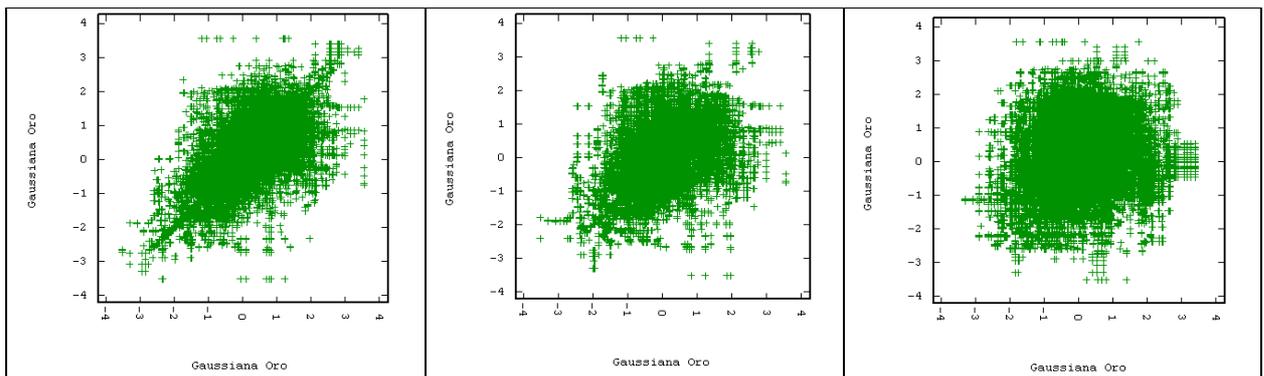


Imagen 52: Kriging ordinario oro (izquierda) y plata (derecha)

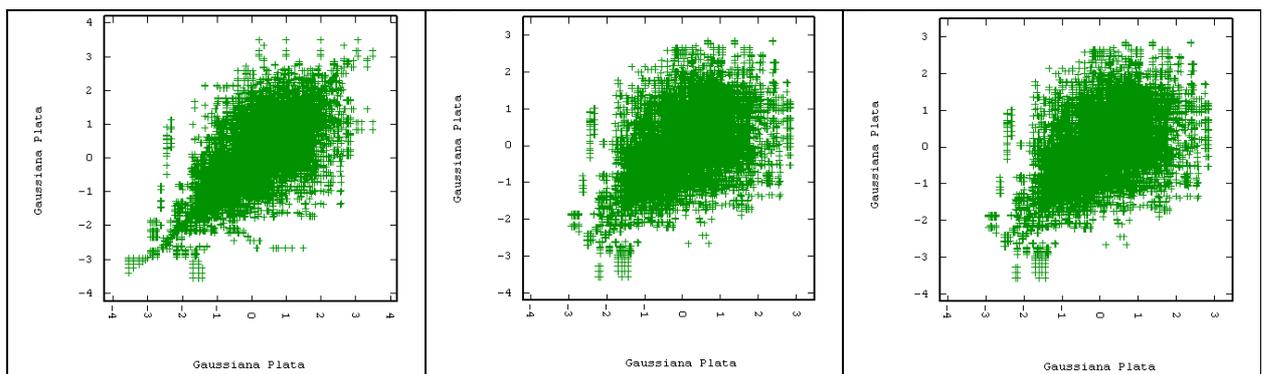


**Imagen 53: Desviaciones estándar de error de kriging de oro (izquierda) y plata (derecha).**

**B2: Enfoque 1: Metodología 2**



**Imagen 54: Nubes de correlación diferida oro (arriba) a 2,5[m] (izquierda), a 5[m] (centro) y a 10[m] (derecha).**



**Imagen 55: Nubes de correlación diferida oro (arriba) a 2,5[m] (izquierda), a 5[m] (centro) y a 10[m] (derecha).**

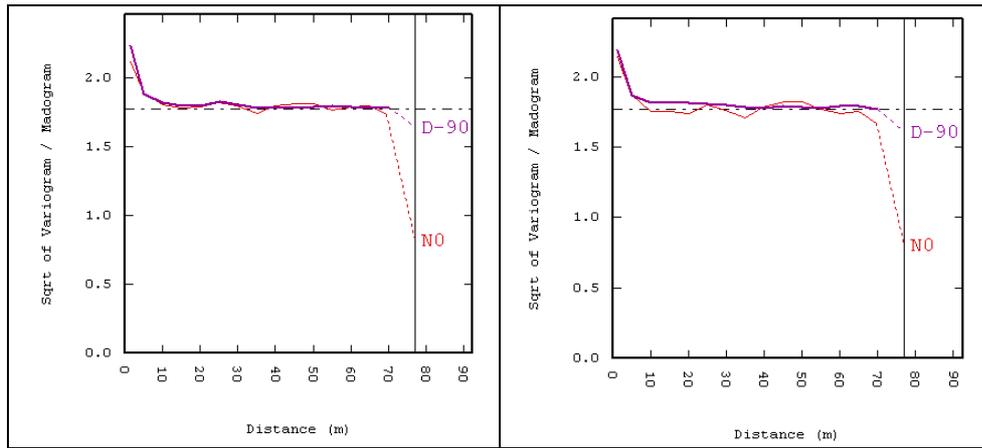


Imagen 56: Cuociente entre raíz cuadrada de variograma y madograma oro (izquierda) y plata (derecha), en el plano horizontal (rojo) y dirección vertical (morado).

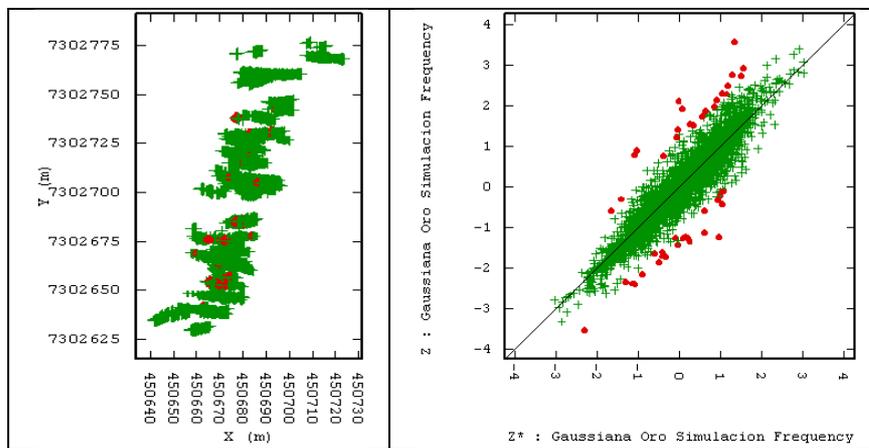


Imagen 57: Validación cruzada gaussiana oro simulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

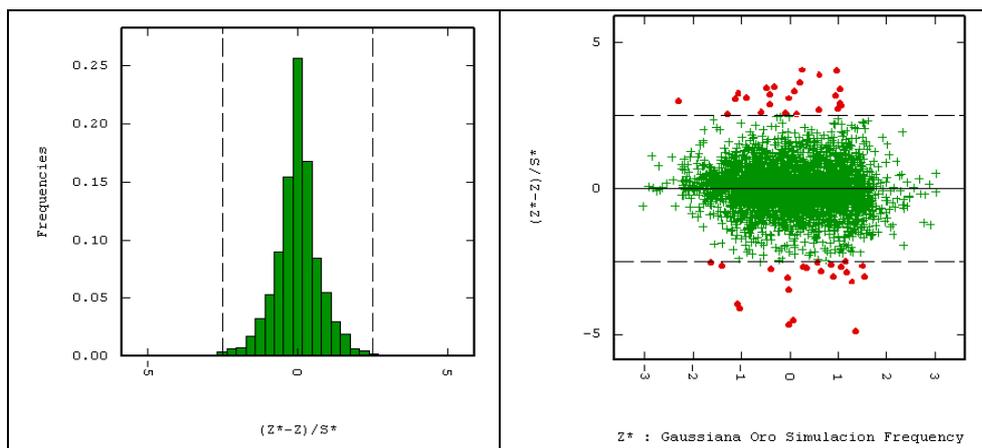


Imagen 58: Validación cruzada gaussiana oro simulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

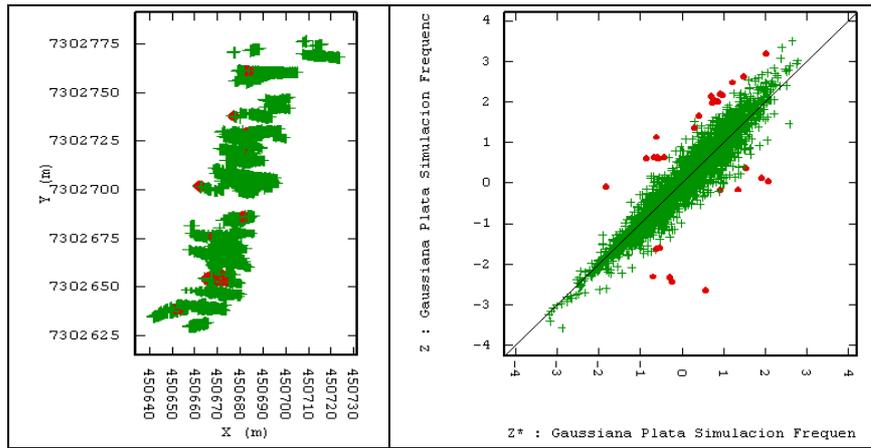


Imagen 59: Validación cruzada gaussiana plata simulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

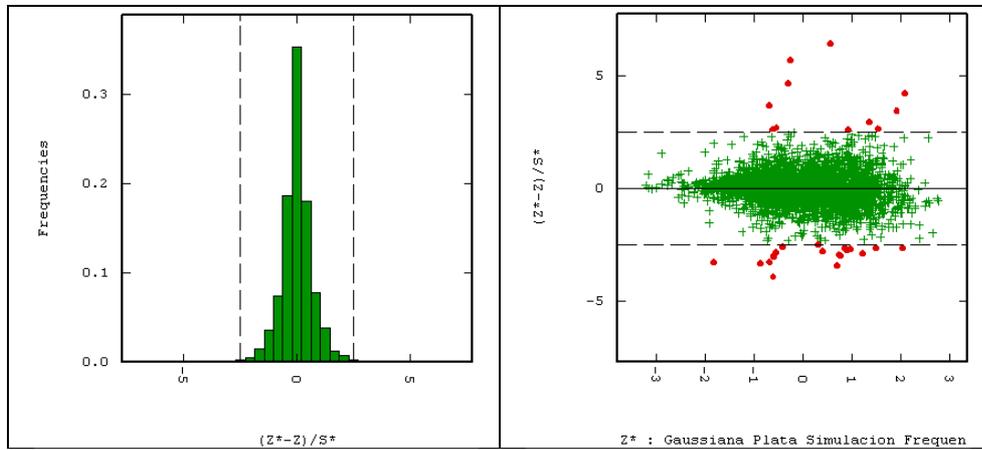


Imagen 60: Validación cruzada gaussiana plata simulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

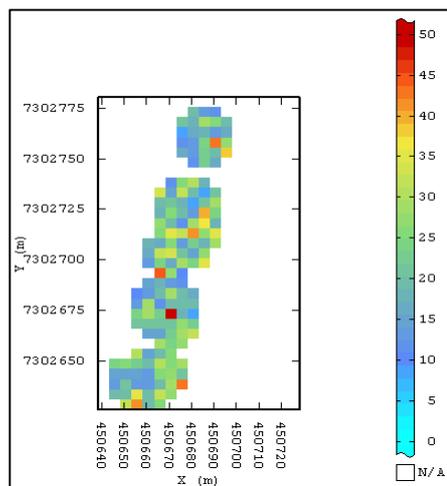
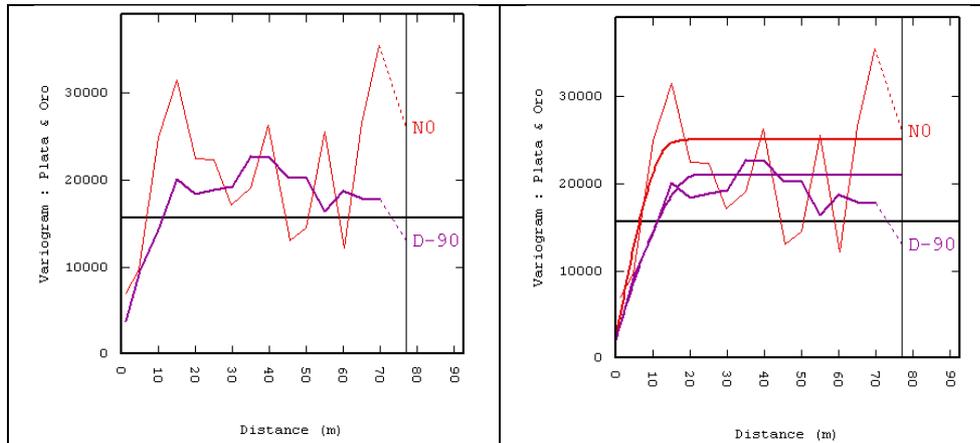
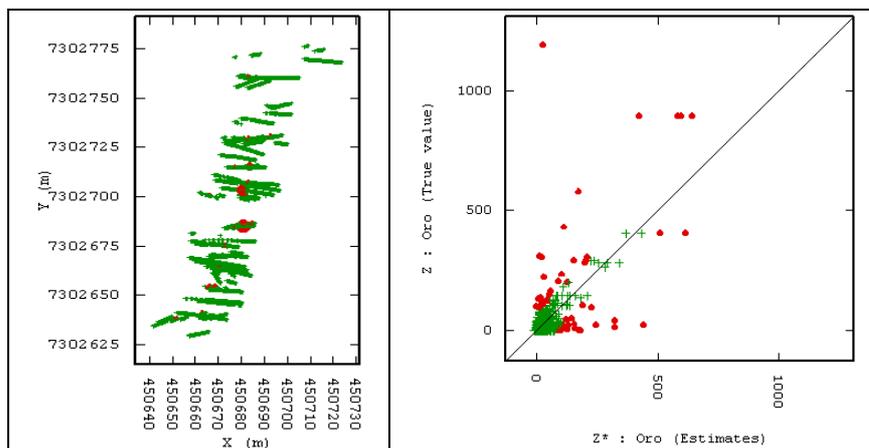


Imagen 61: Desviación estándar de las simulaciones de ley de oro equivalente.

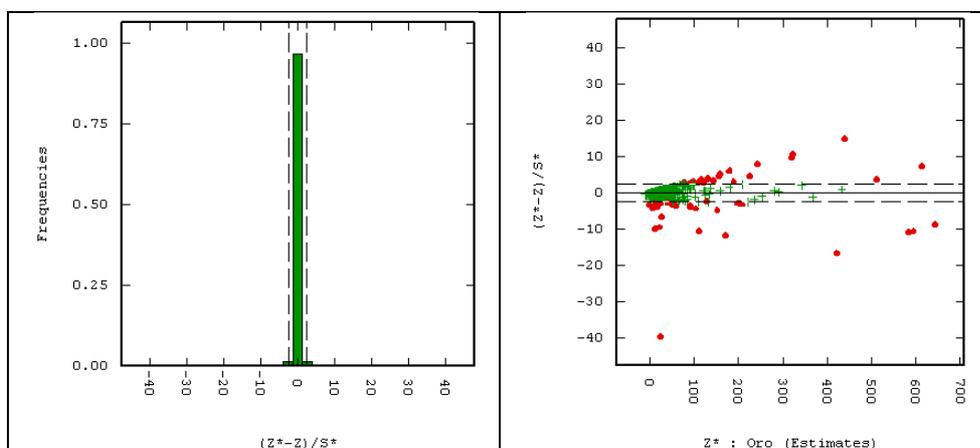
**B3: Enfoque 2: Metodología 1**



**Imagen 62: Variograma cruzado oro-plata experimental (izquierda) y modelado (derecha), en el plano horizontal (rojo) y dirección vertical (morado).**



**Imagen 63: Validación cruzada oro cokriging: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



**Imagen 64: Validación cruzada oro cokriging: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**

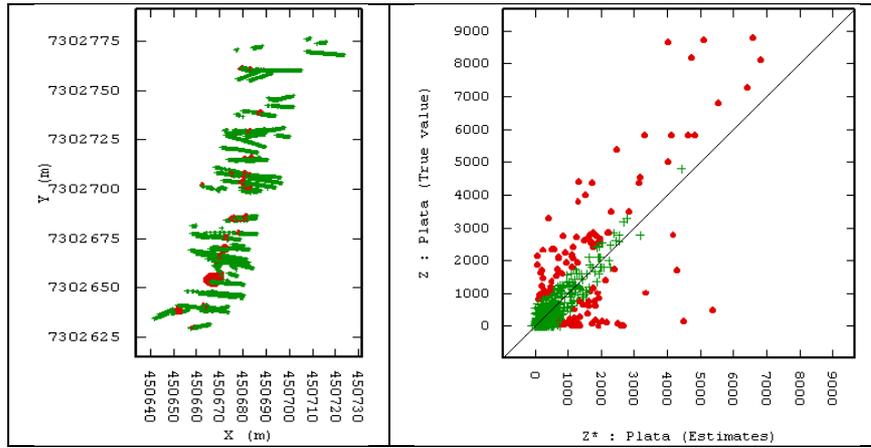


Imagen 65: Validación cruzada plata cokriging: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

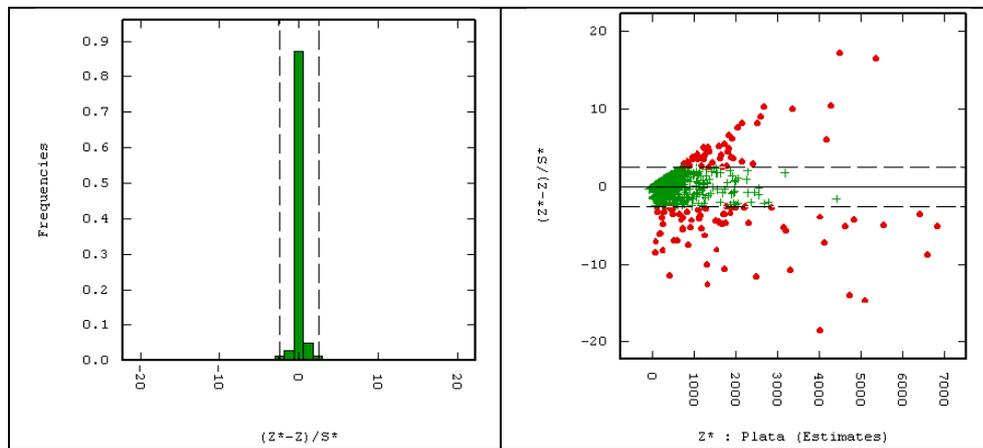


Imagen 66: Validación cruzada oro cokriging: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

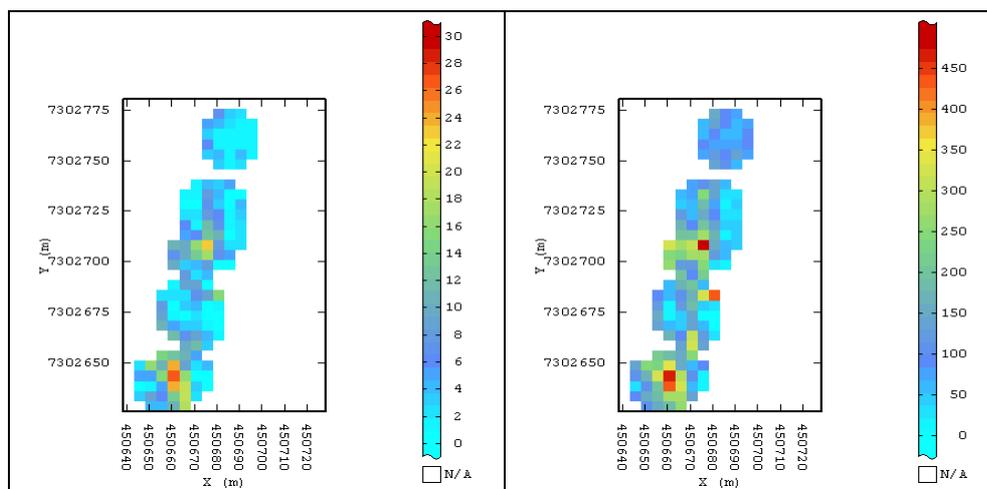


Imagen 67: Cokriging ordinario oro (izquierda) y plata (derecha).

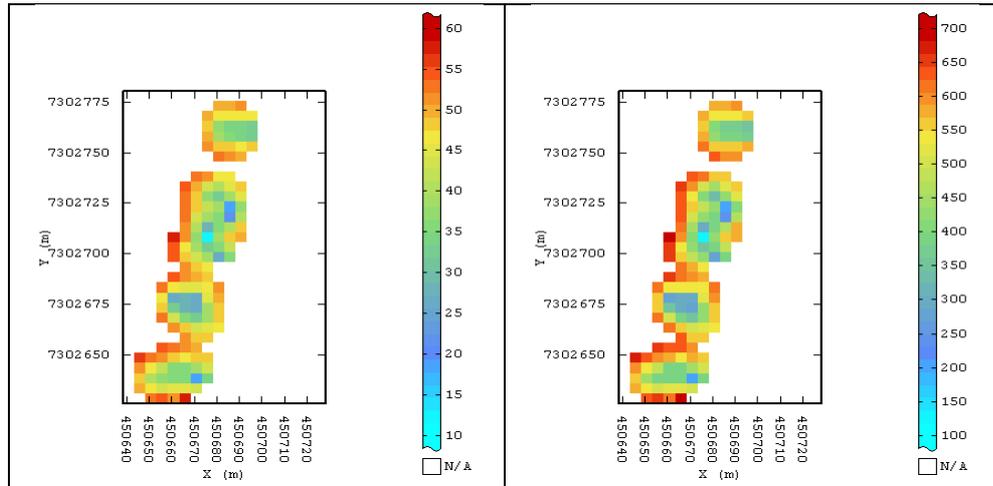


Imagen 68: Desviación estándar error de cokriging ordinario leyes de oro (izquierda) y plata (derecha)

**B4: Enfoque 2: Metodología 2**

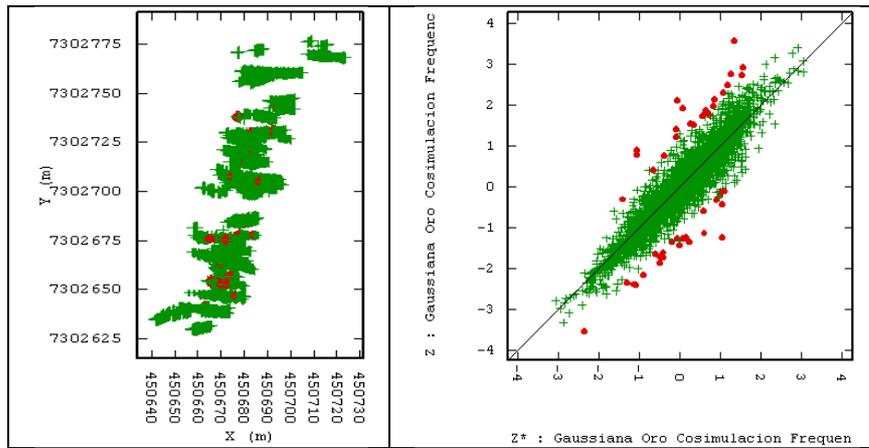
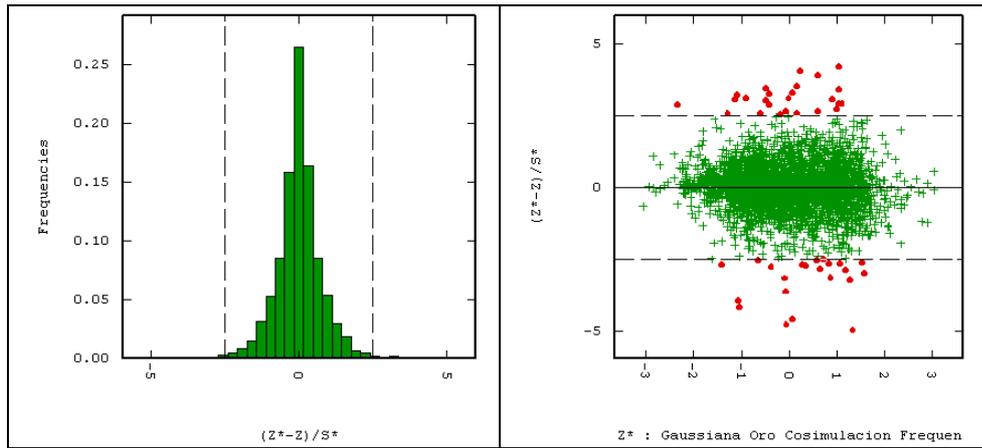
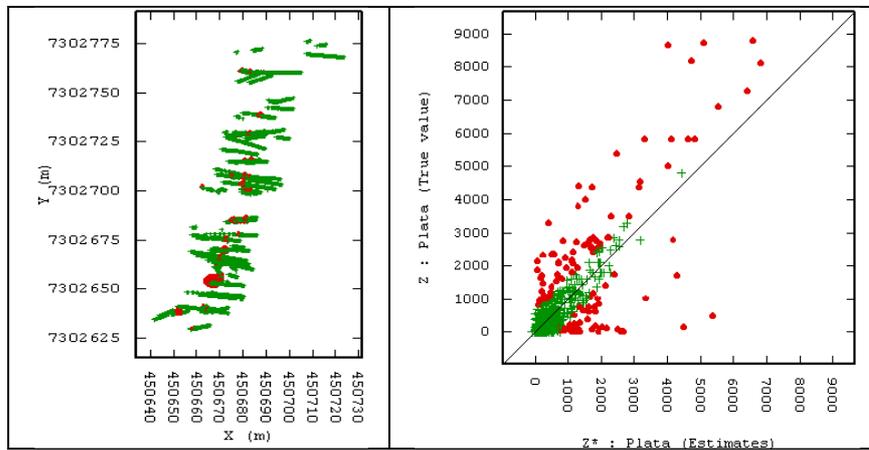


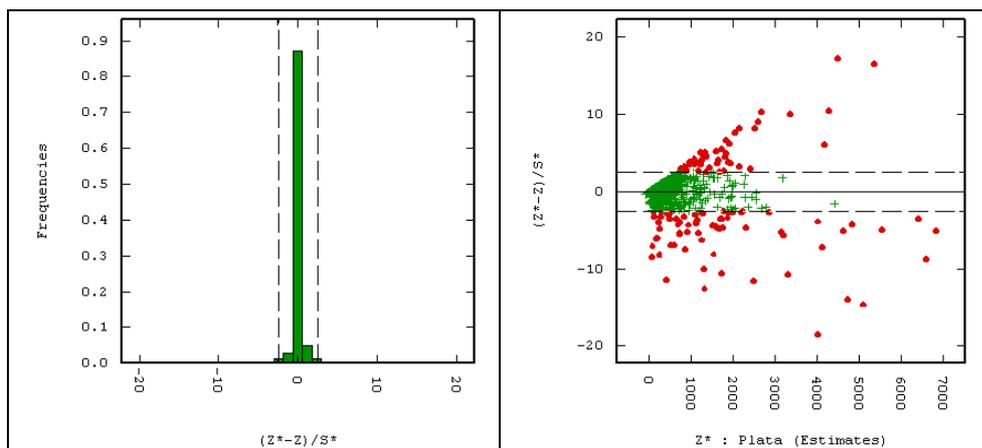
Imagen 69: Validación cruzada gaussiana oro cosimulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).



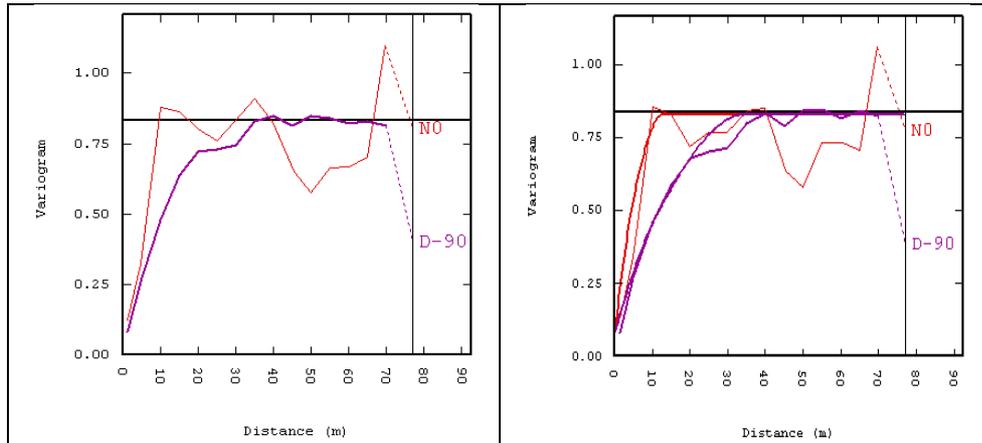
**Imagen 70: Validación cruzada gaussiana oro cosimulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**



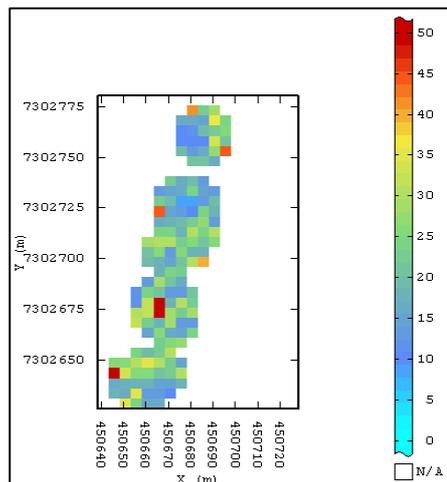
**Imagen 71: Validación cruzada gaussiana plata cosimulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



**Imagen 72: Validación cruzada gaussiana plata cosimulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**

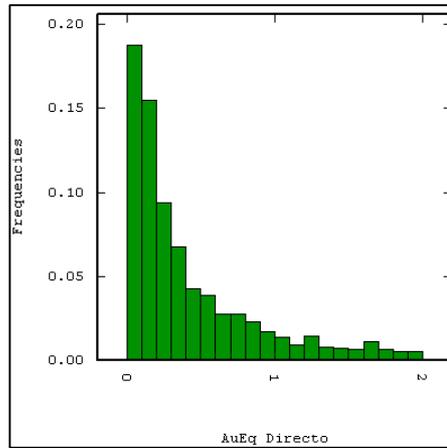


**Imagen 73: Variograma cruzado Au-Ag datos gaussianos experimental (izquierda) y modelado (derecha), en el plano horizontal (rojo) y dirección vertical (morado).**

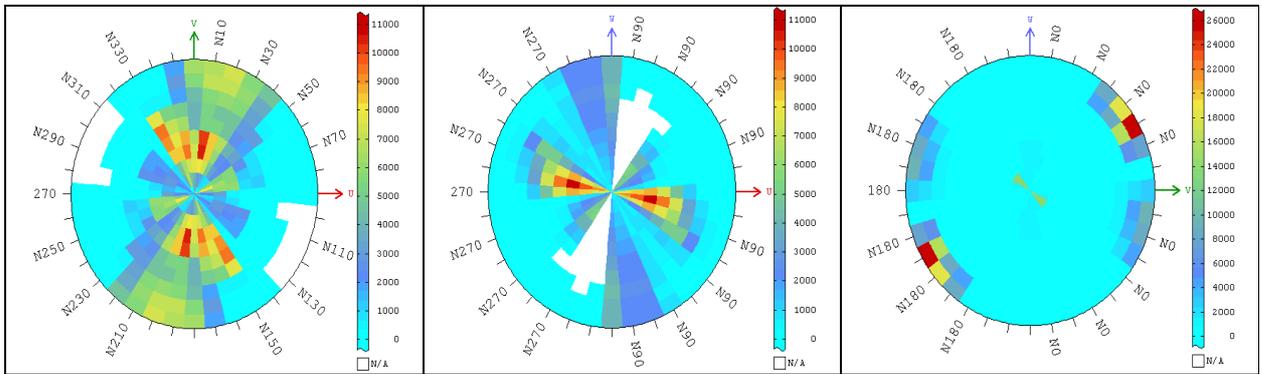


**Imagen 74: Desviación estándar de las cosimulaciones de ley de oro equivalente.**

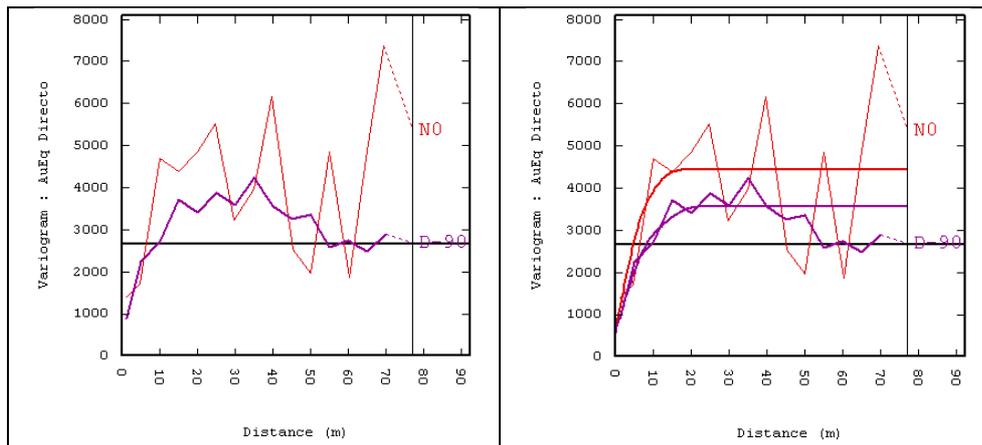
**B5: Enfoque 3: Metodología 1**



**Imagen 75: Histograma de ley equivalente de oro sin desagrupar.**



**Imagen 76: Mapas variográficos oro equivalente planos XY (derecha), XZ (centro) e YZ (izquierda).**



**Imagen 77: Variogramas experimentales oro equivalente (izquierda) y modelado (derecha), en el plano horizontal (rojo) y dirección vertical (morado).**

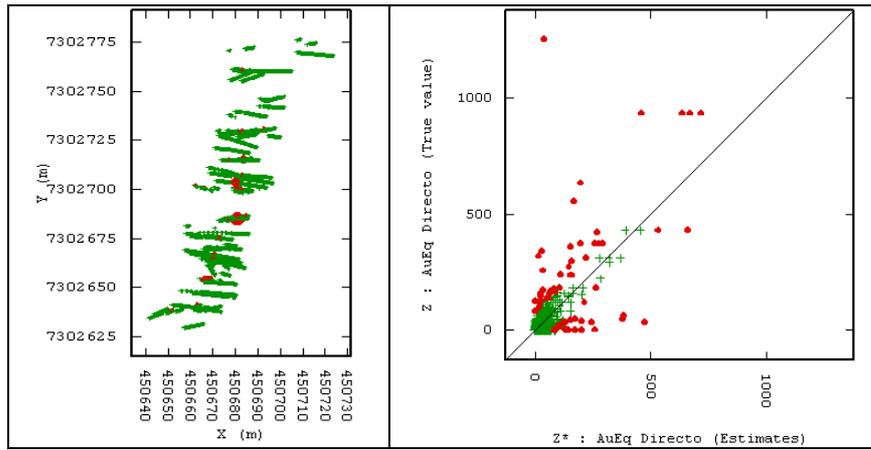


Imagen 78: Validación cruzada oro equivalente: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

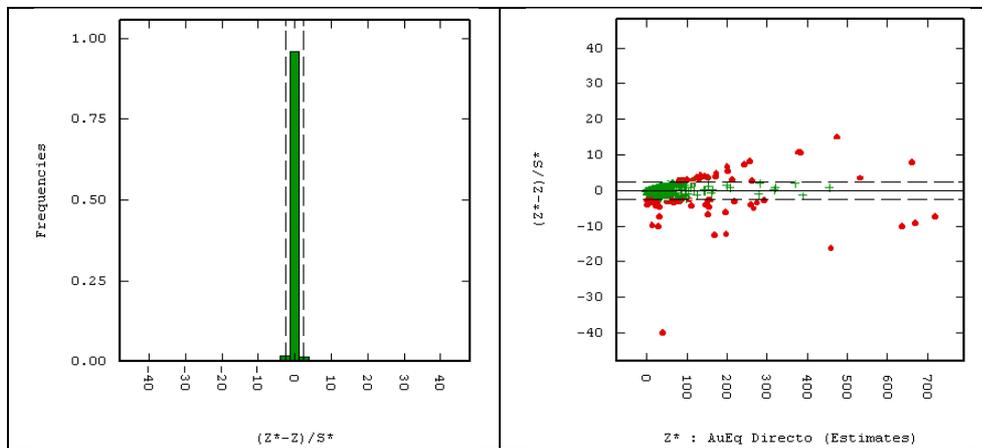


Imagen 79: Validación cruzada oro equivalente: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

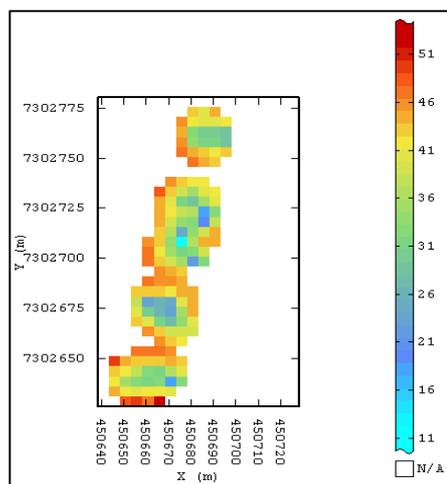
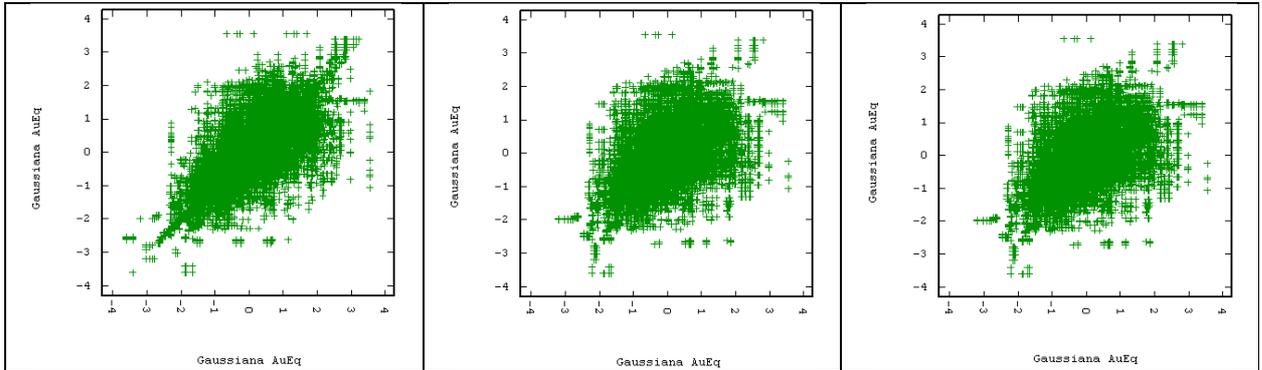
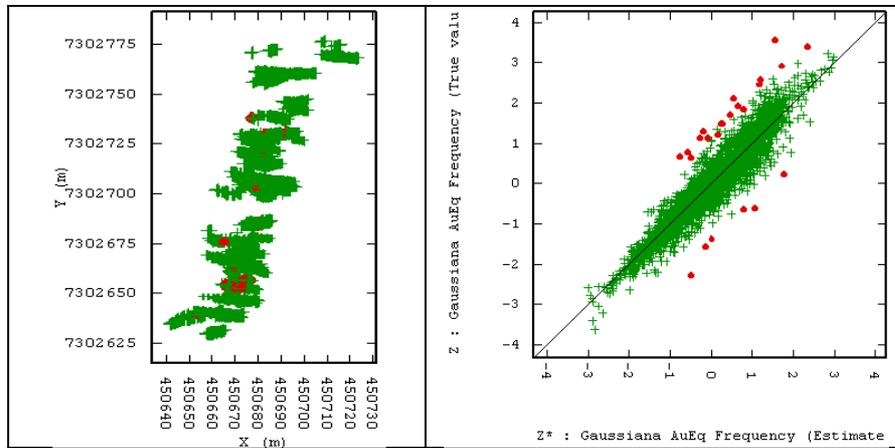


Imagen 80: Desviación estándar de error de kriging de oro equivalente sus respectiva leyenda.

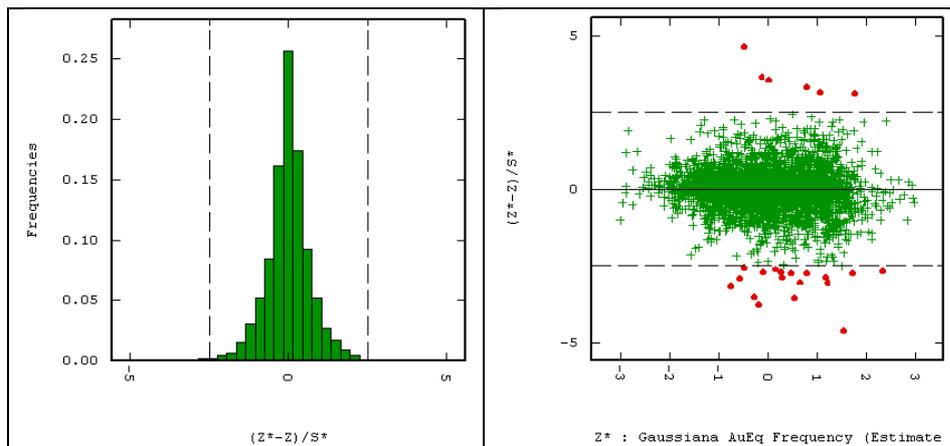
**B6: Enfoque 3: Metodología 2**



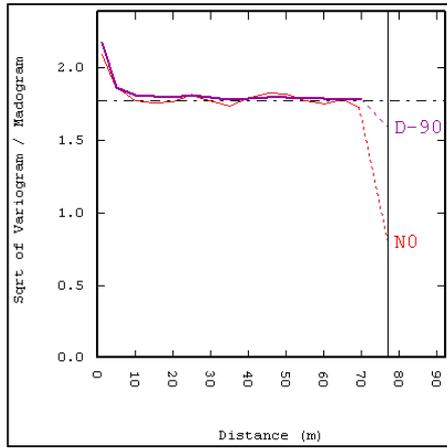
**Imagen 81: Nubes de correlación diferida de oro equivalente a 2,5[m] (derecha), a 5[m] (centro) y a 10[m] (izquierda).**



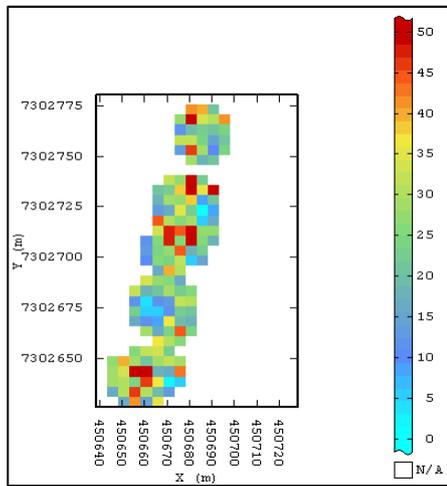
**Imagen 82: Validación cruzada gaussiana oro equivalente: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



**Imagen 83: Validación cruzada gaussiana oro equivalente: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**



**Imagen 84:** Cuociente entre raíz de variograma y madograma de oro equivalente, en el plano horizontal (rojo) y dirección vertical (morado).



**Imagen 85:** Desviación estándar de las realizaciones de oro equivalente.

## Anexo C: Caso de Estudio 2

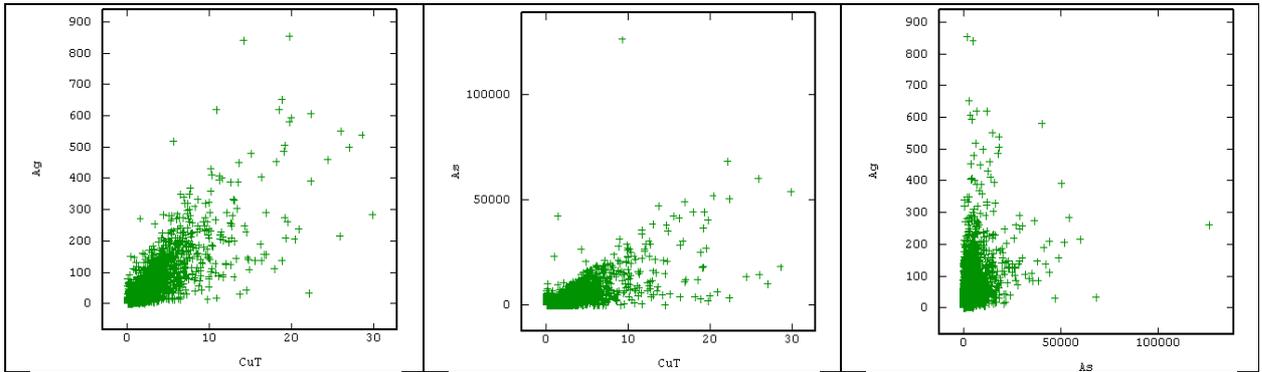


Imagen 86: Nubes de correlación leyes de Cu-Ag (izquierda), Cu-As (centro) y As-Ag (derecha).

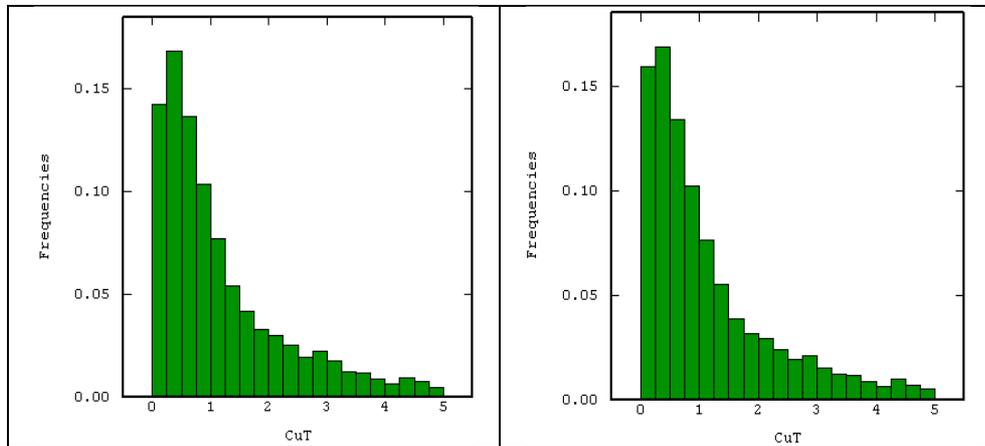


Imagen 87: Histogramas de leyes de cobre sin desagrupar (izquierda) y desagrupado (derecha).

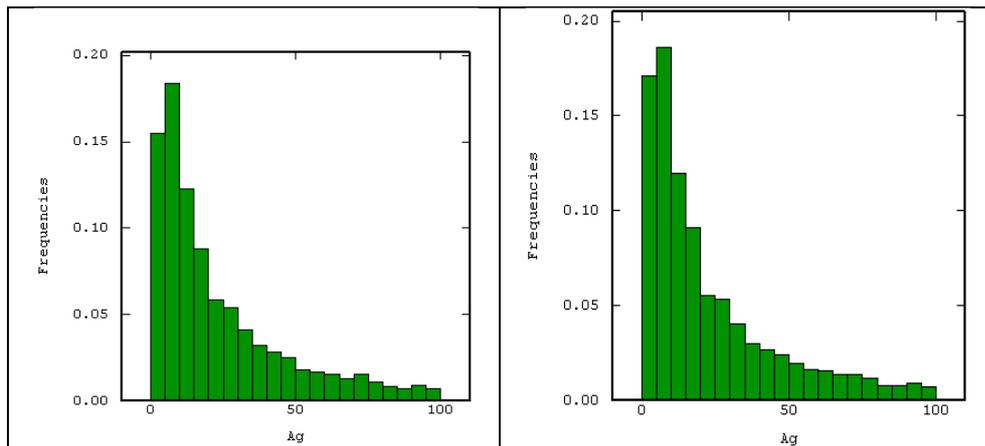


Imagen 88: Histogramas de leyes de plata sin desagrupar (izquierda) y desagrupado (derecha).

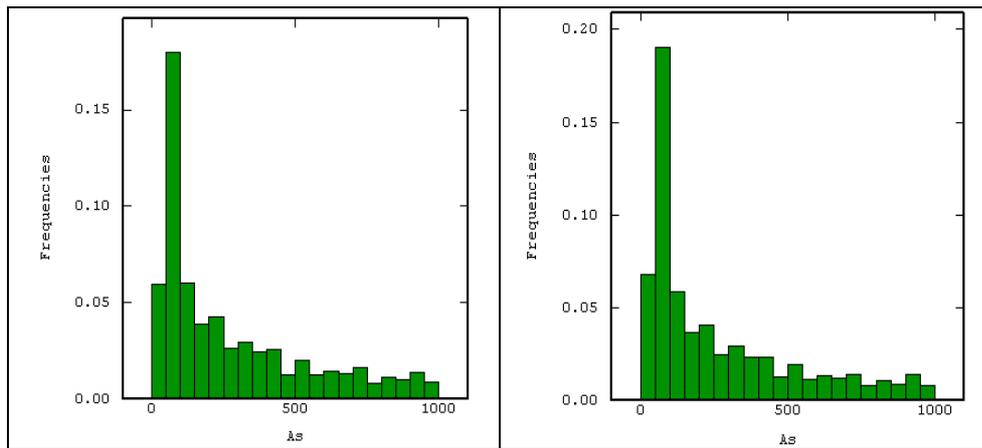


Imagen 89: Histogramas de cantidad de arsénico sin desagrupar (izquierda) y desagrupado (derecha).

**CI: Enfoque 1: Metodología 1**

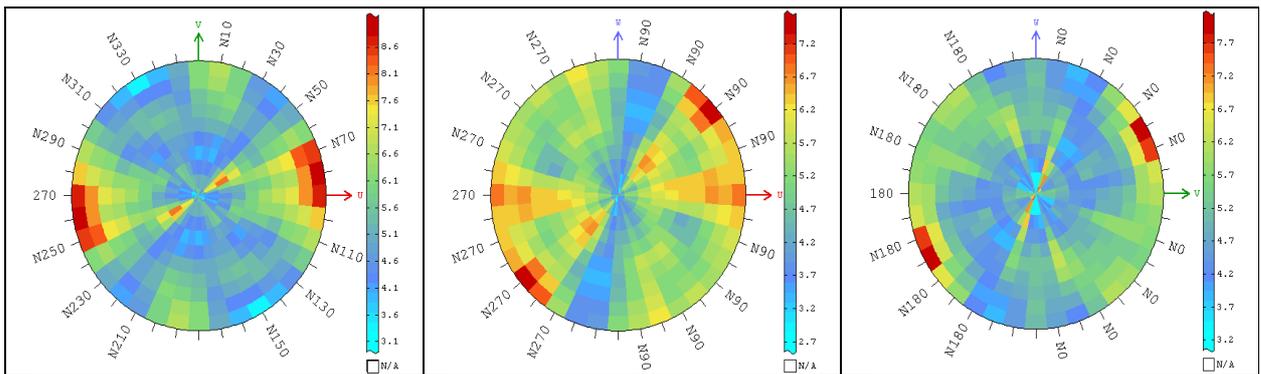


Imagen 90: Mapas variográficos cobre planos XY (derecha), XZ (centro) e YZ (izquierda).

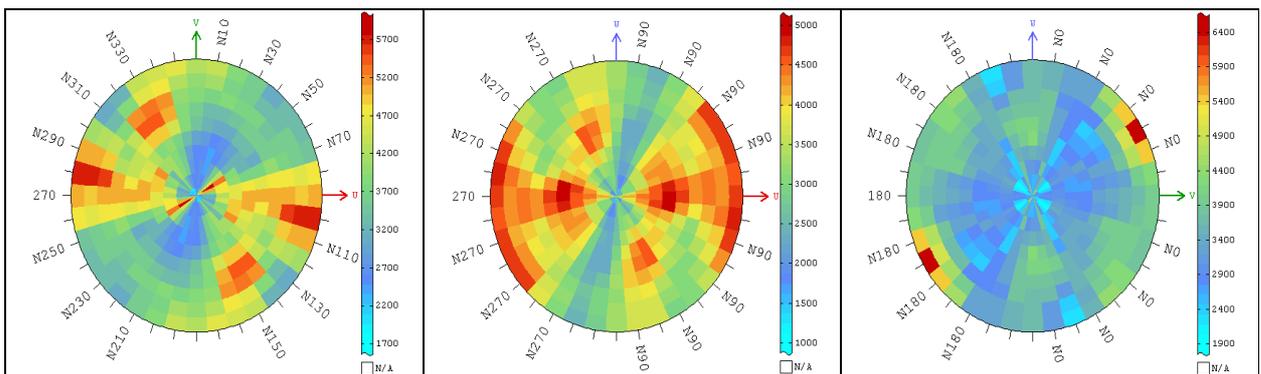
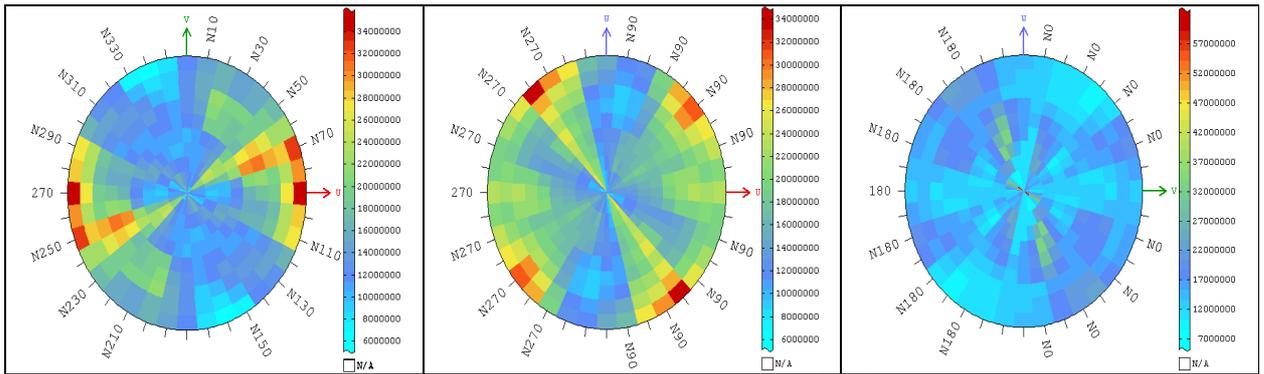
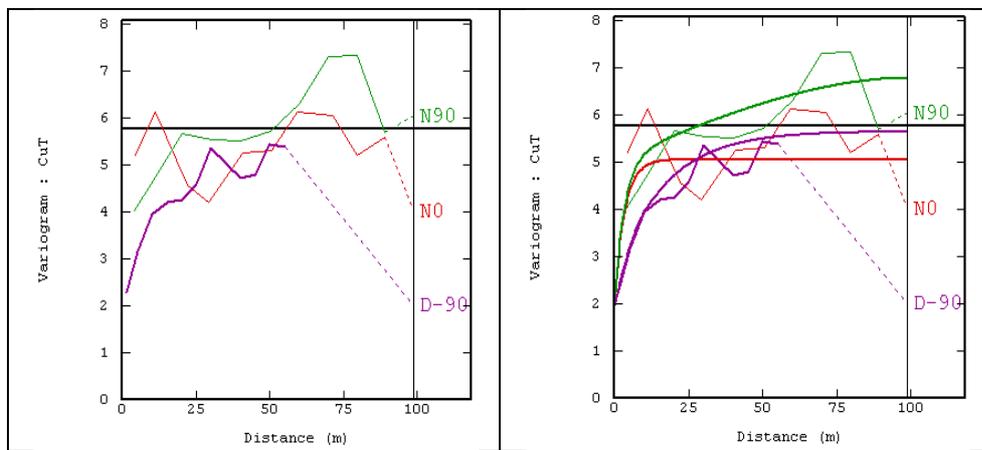


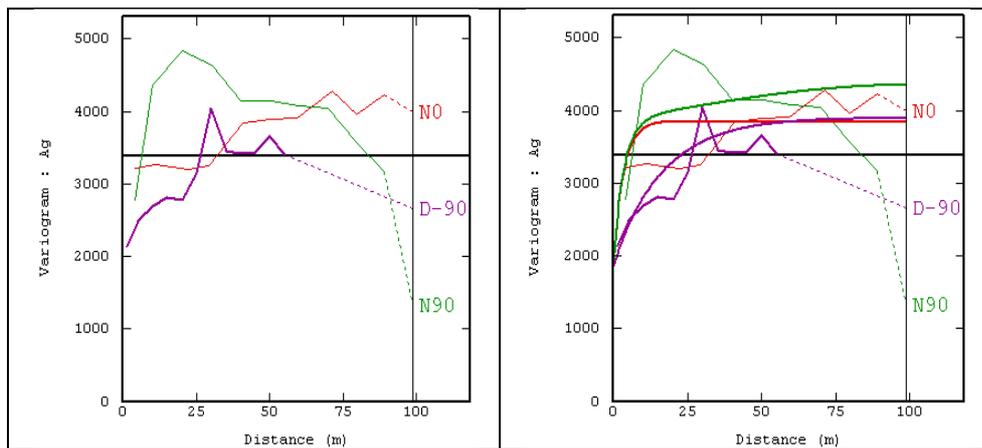
Imagen 91: Mapas variográficos plata planos XY (derecha), XZ (centro) e YZ (izquierda).



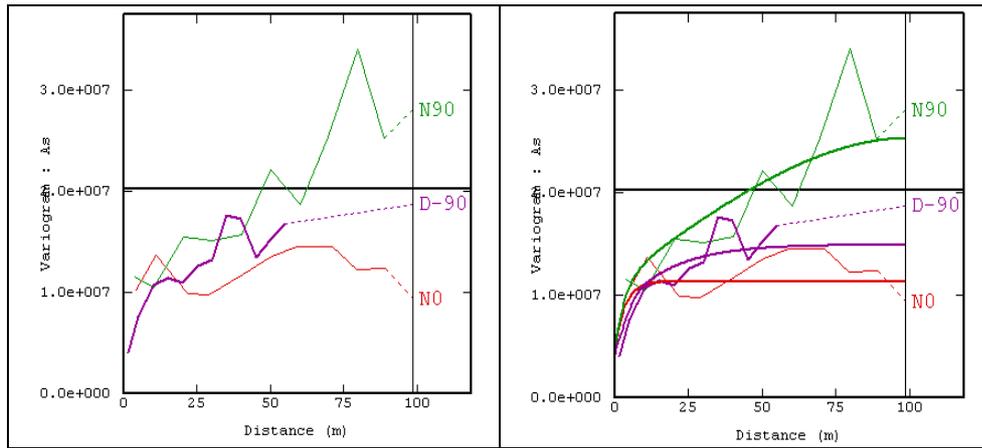
**Imagen 92: Mapas variográficos arsénico planos XY (derecha), XZ (centro) e YZ (izquierda).**



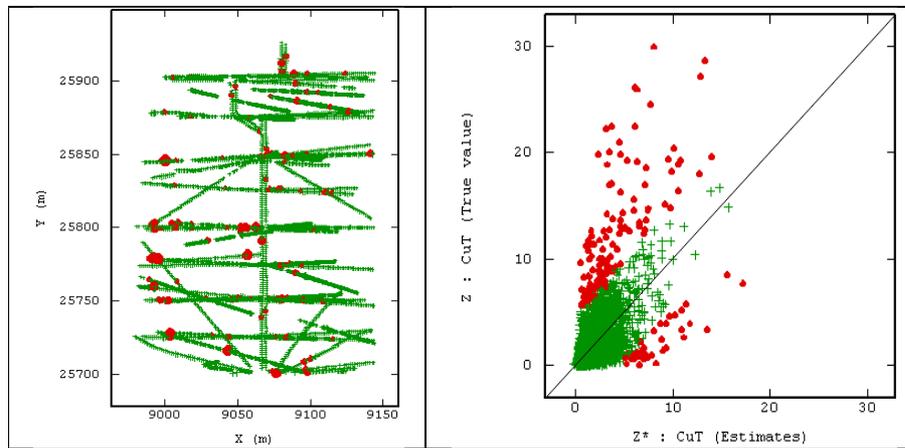
**Imagen 93: Variogramas experimentales cobre (izquierda) y modelados (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).**



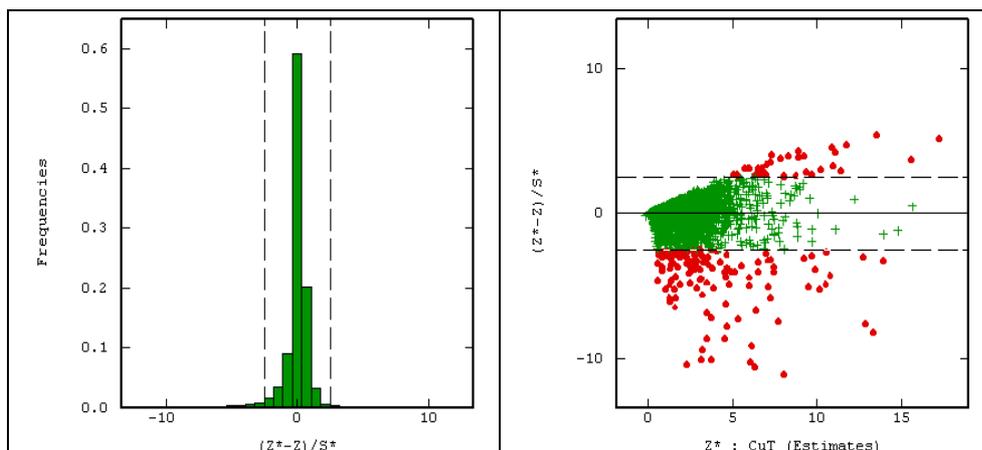
**Imagen 94: Variogramas experimentales plata (izquierda) y modelados (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).**



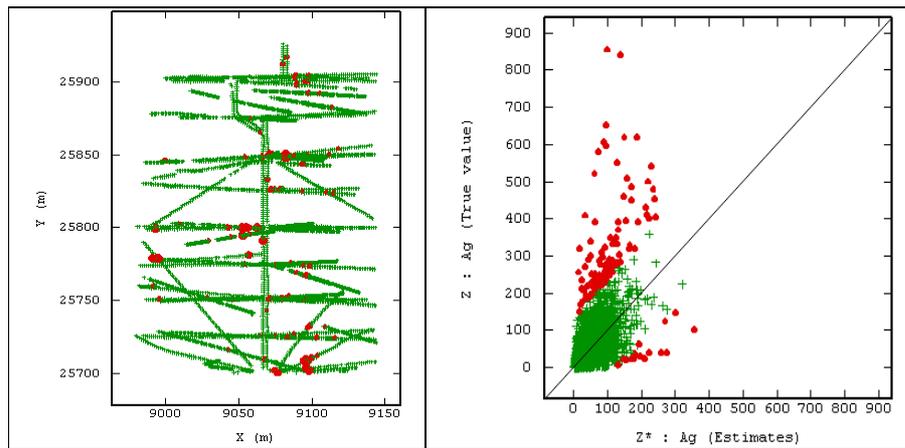
**Imagen 95:** Variogramas experimentales arsénico (izquierda) y modelados (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).



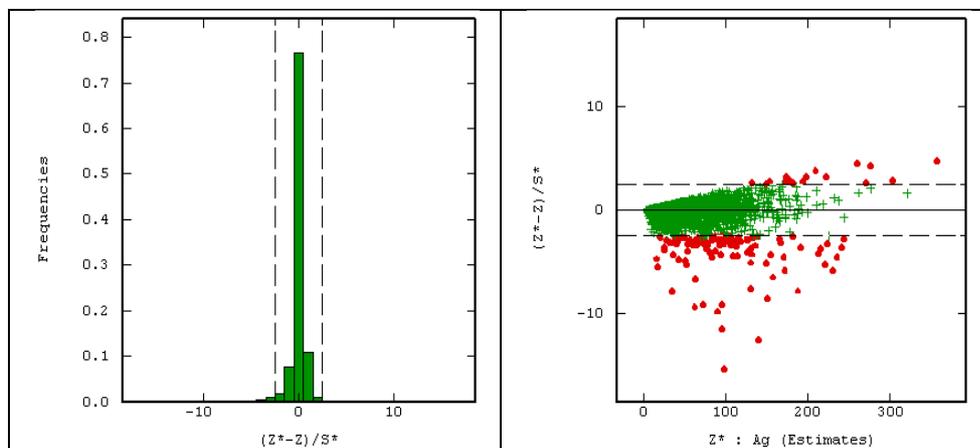
**Imagen 96:** Validación cruzada cobre: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).



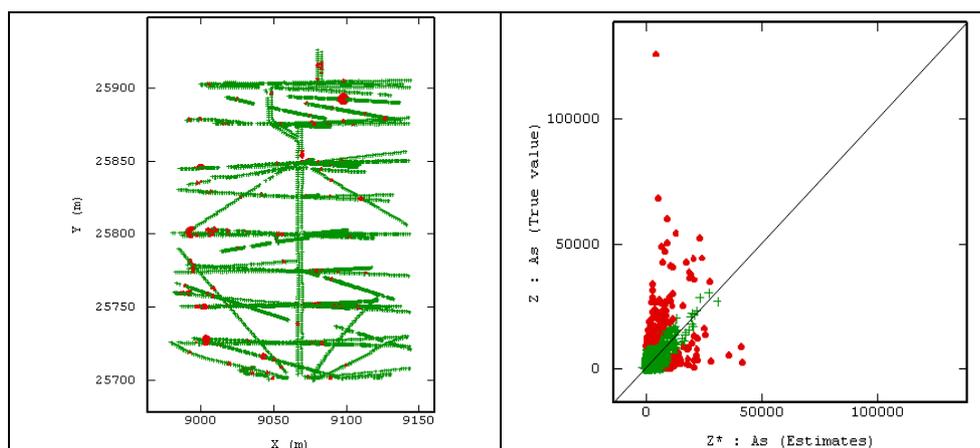
**Imagen 97:** Validación cruzada cobre: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).



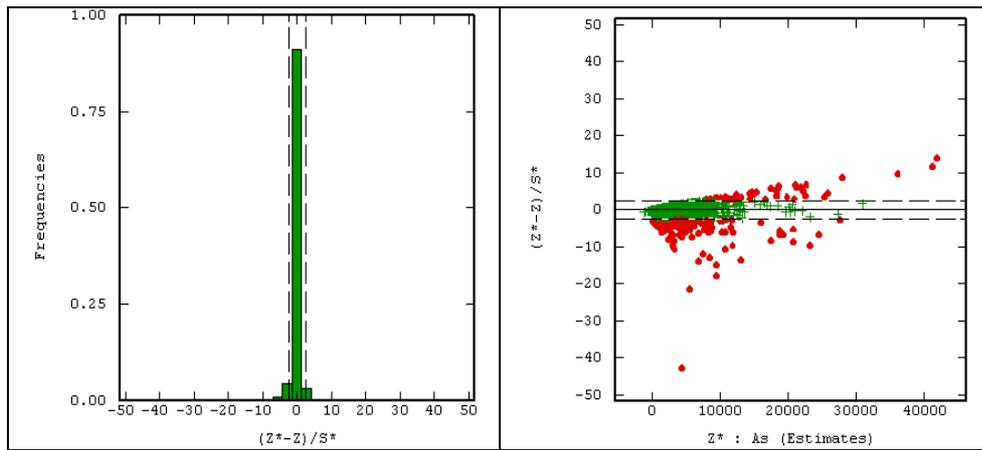
**Imagen 98: Validación cruzada plata: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



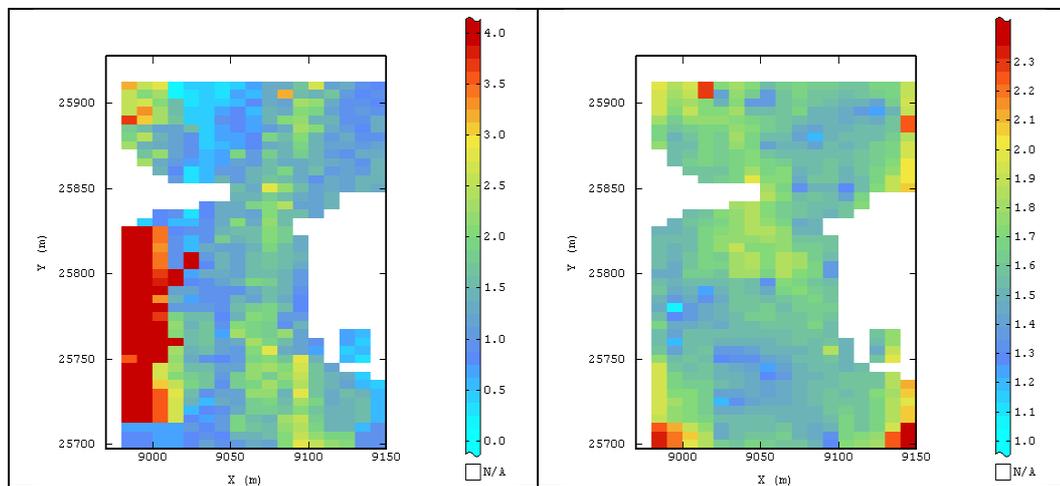
**Imagen 99: Validación cruzada plata: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**



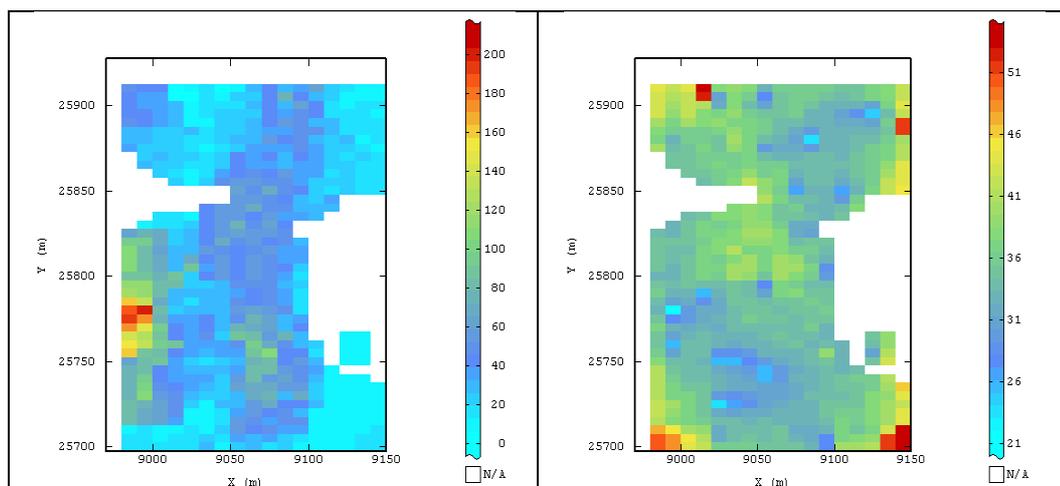
**Imagen 100: Validación cruzada arsénico: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



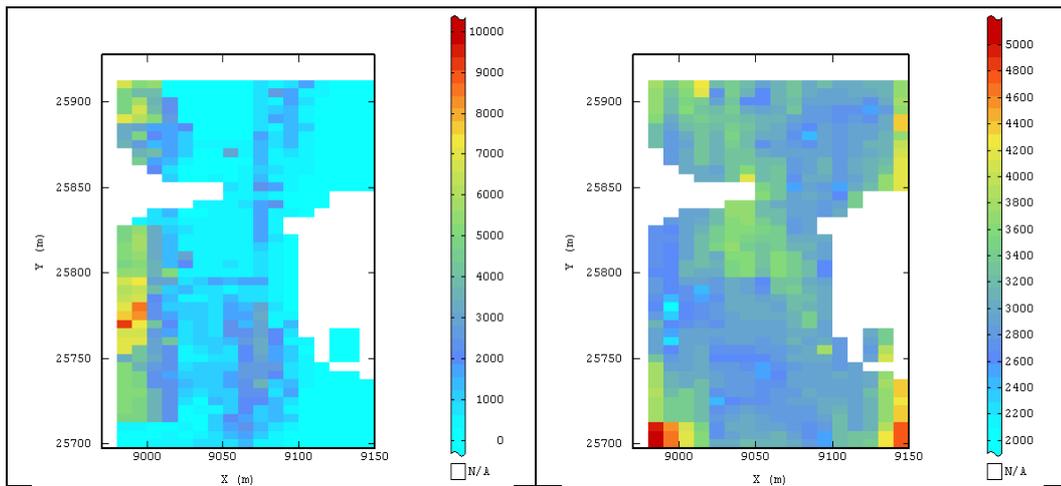
**Imagen 101: Validación cruzada arsénico: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**



**Imagen 102: Kriging ordinario cobre (izquierda) y desviación estándar del error de kriging de cobre (derecha).**

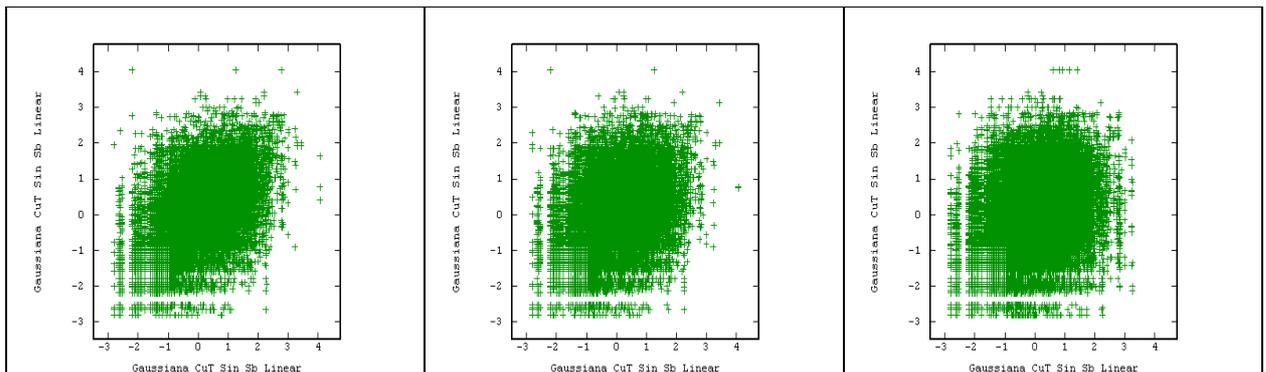


**Imagen 103: Kriging ordinario plata (izquierda) y desviación estándar del error de kriging de plata (derecha).**

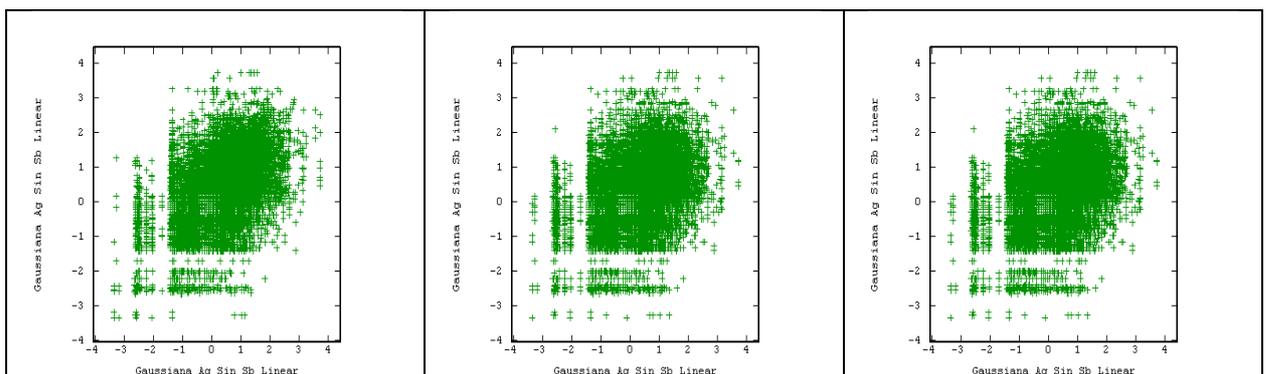


**Imagen 104: Kriging ordinario arsénico (izquierda) y desviación estándar del error de kriging de arsénico (derecha).**

***C2: Enfoque 1: Metodología 2***



**Imagen 105: Nubes de correlación diferida de cobre a 2,5[m] (derecha), a 5[m] (centro) y a 10[m] (izquierda).**



**Imagen 106: Nubes de correlación diferida de plata a 2,5[m] (derecha), a 5[m] (centro) y a 10[m] (izquierda).**

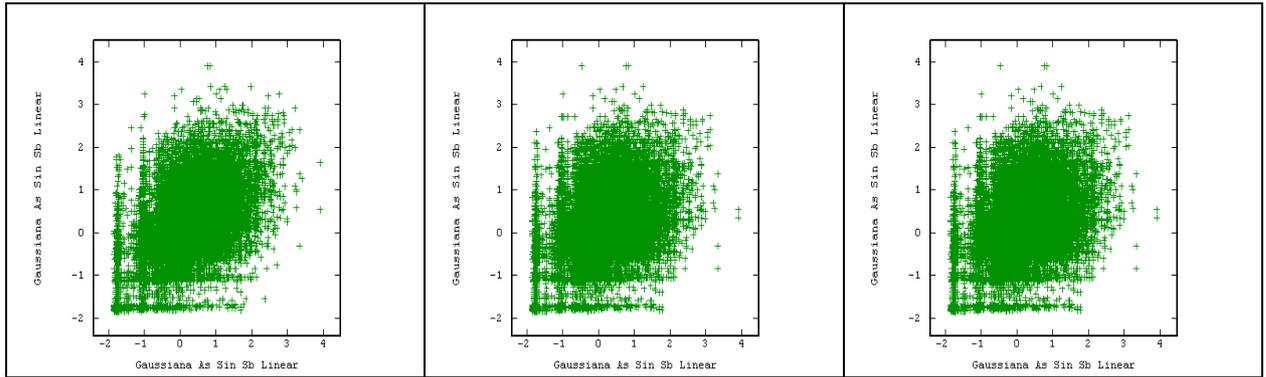


Imagen 107: Nubes de correlación diferida de arsénico a 2,5[m] (derecha), a 5[m] (centro) y a 10[m] (izquierda).

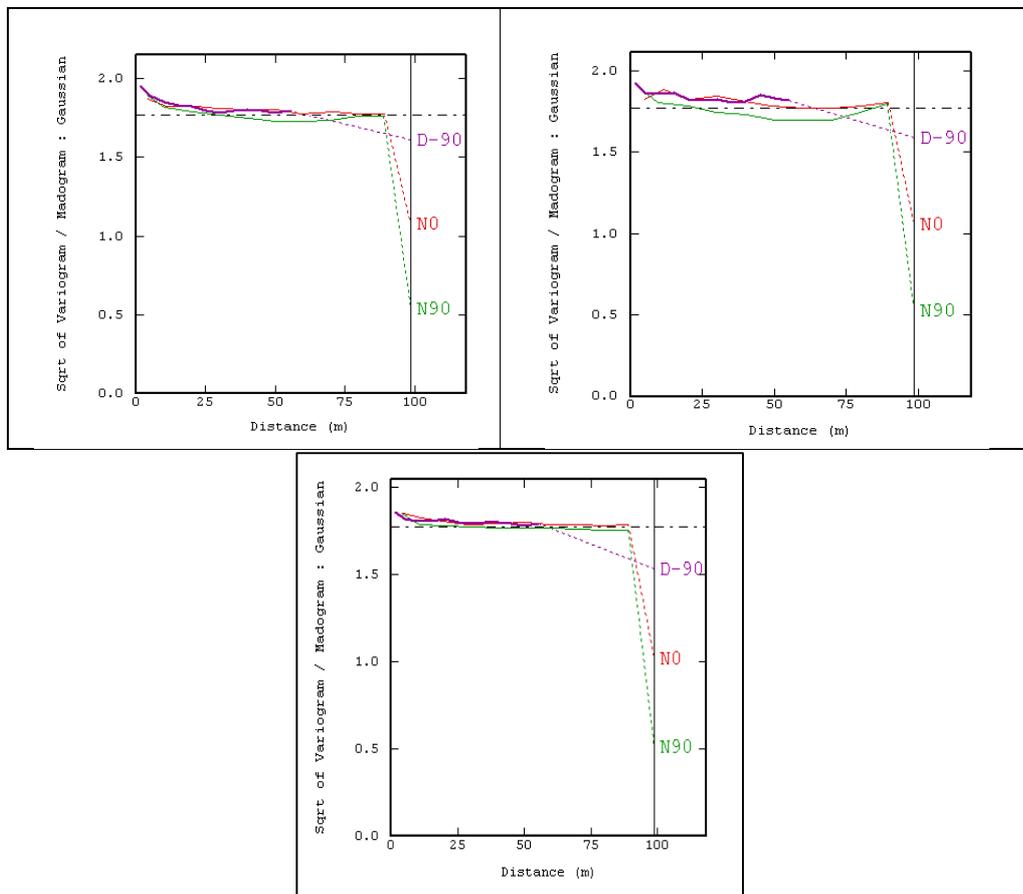
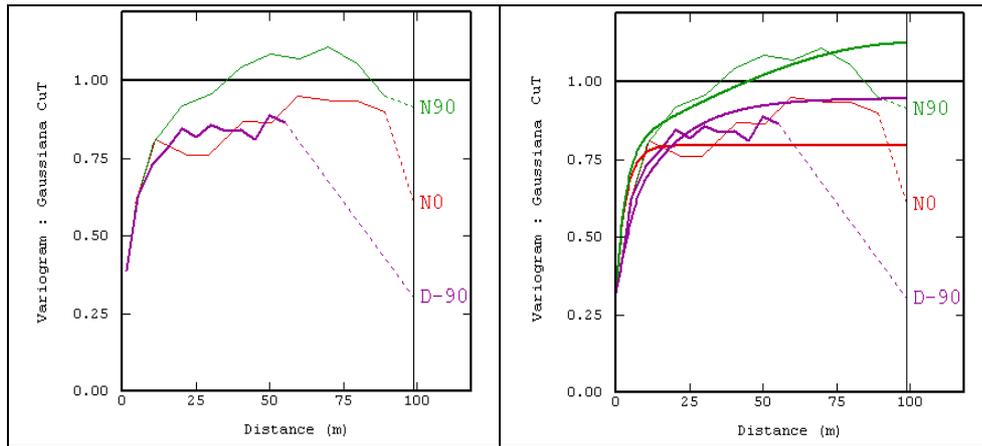
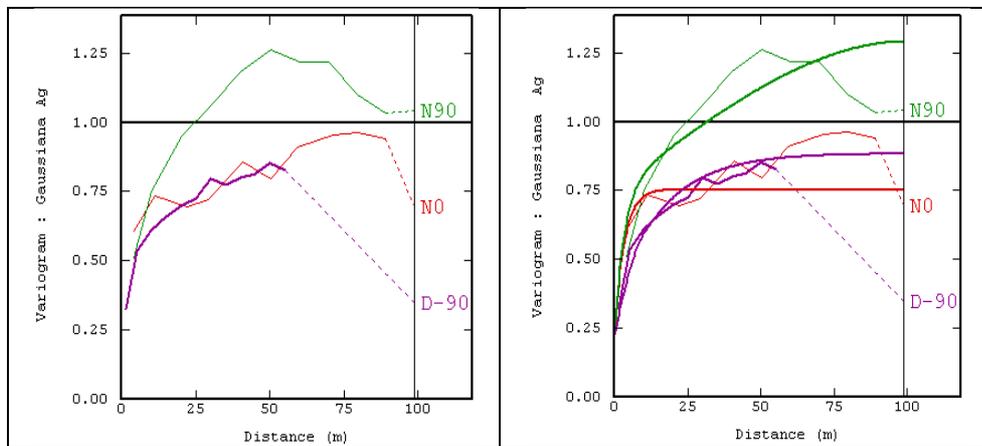


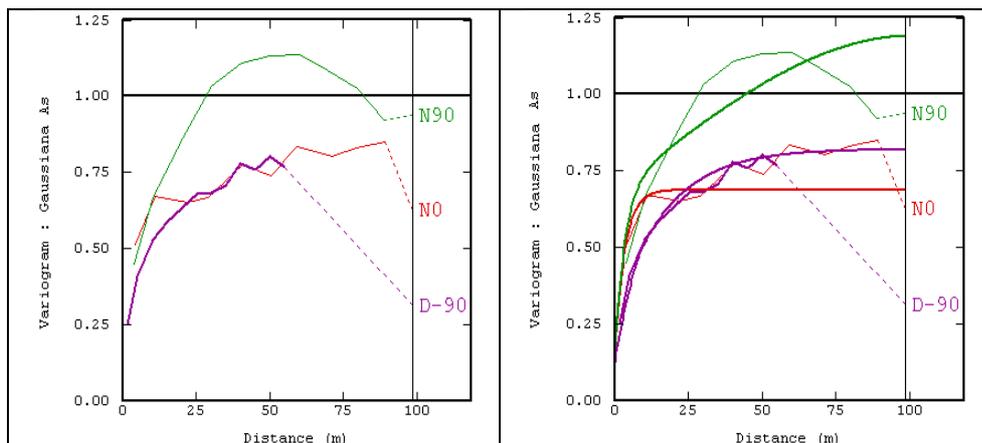
Imagen 108: Cuociente entre raíz de variograma y madograma variables cobre (izquierda arriba), plata (derecha arriba) y arsénico (abajo), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).



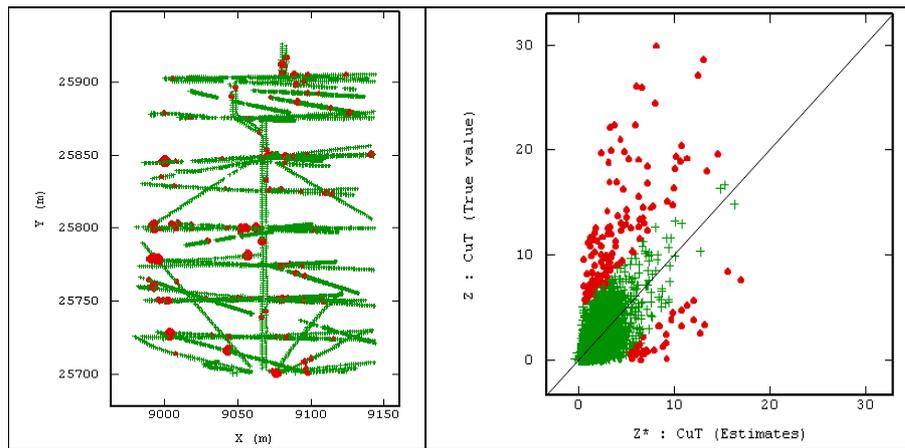
**Imagen 109: Variograma datos gaussianos cobre experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).**



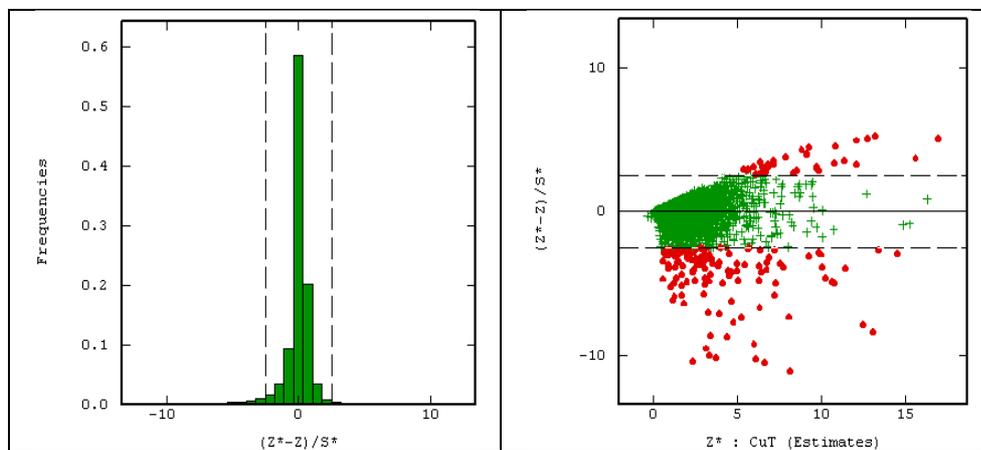
**Imagen 110: Variograma datos gaussianos plata experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).**



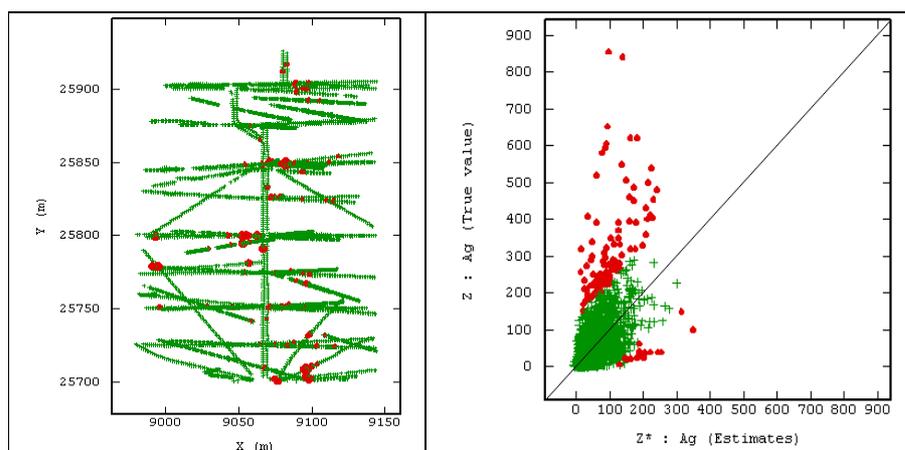
**Imagen 111: Variograma datos gaussianos arsénico experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).**



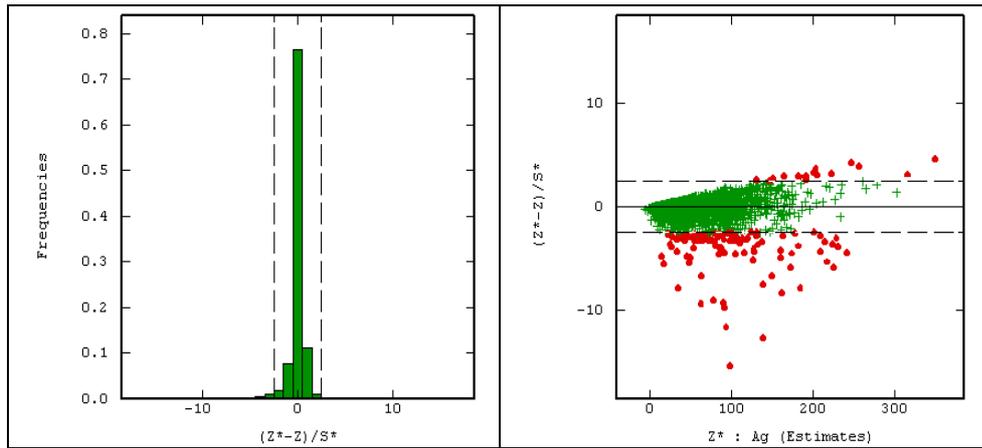
**Imagen 112: Validación cruzada gaussiana cobre simulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



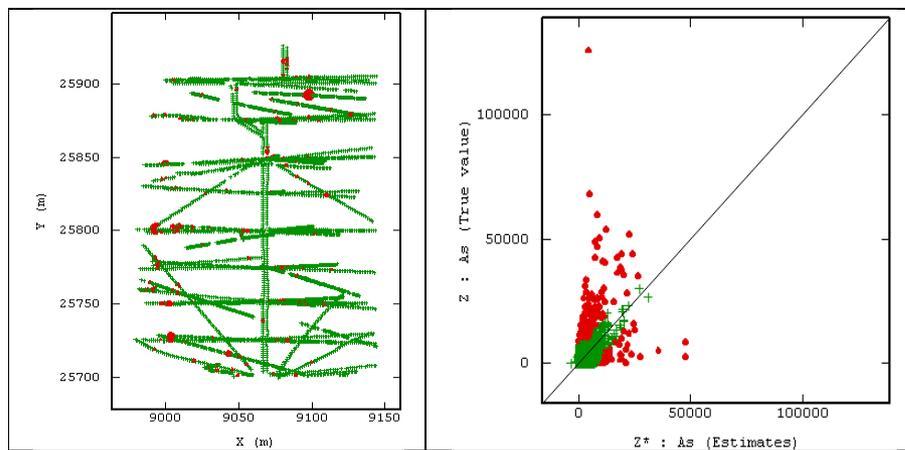
**Imagen 113: Validación cruzada gaussiana cobre simulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**



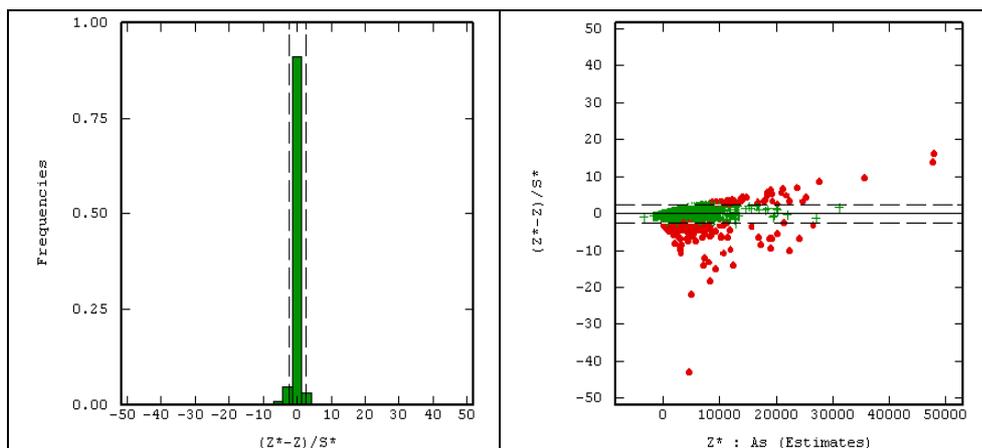
**Imagen 114: Validación cruzada gaussiana plata simulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



**Imagen 115: Validación cruzada gaussiana plata simulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**



**Imagen 116: Validación cruzada gaussiana arsénico simulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



**Imagen 117: Validación cruzada gaussiana arsénico simulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**

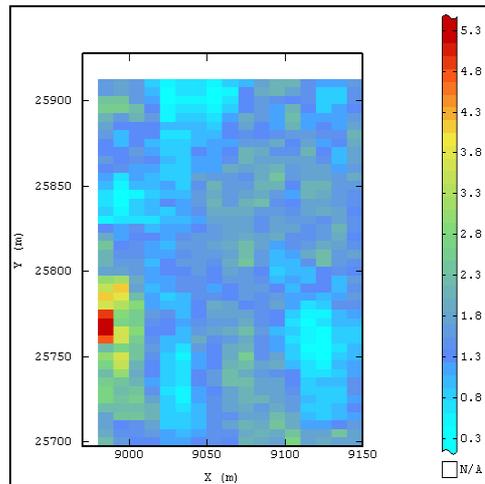


Imagen 118: Desviación estándar de las simulaciones de ley de cobre equivalente.

**C3: Enfoque 2: Metodología 1**

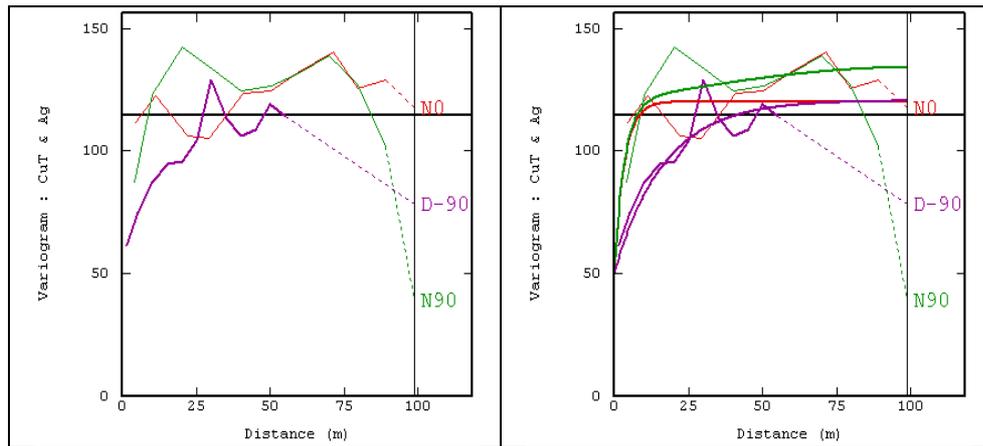
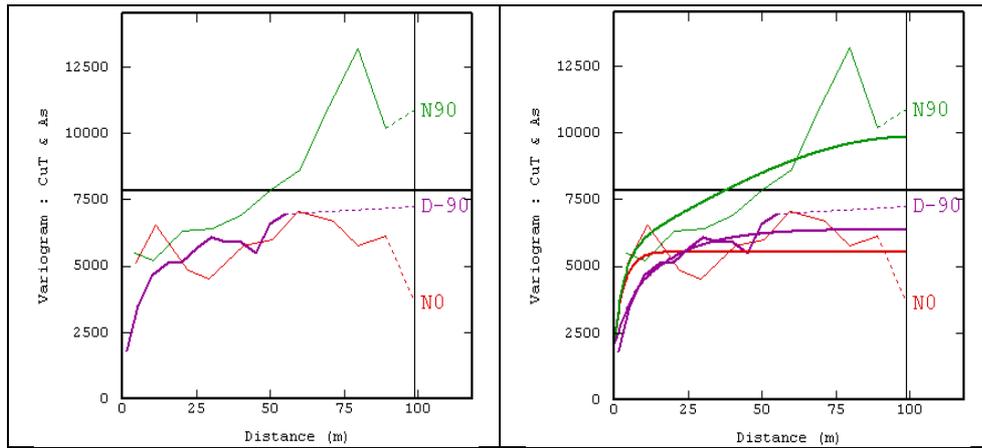
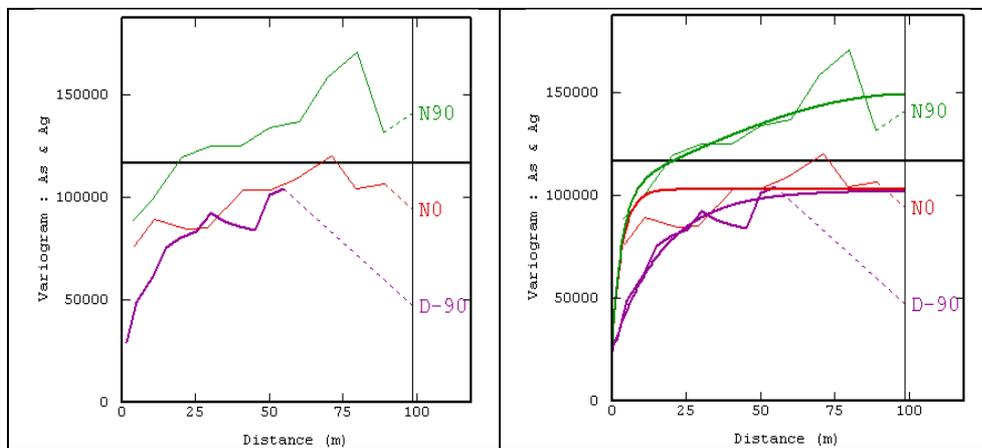


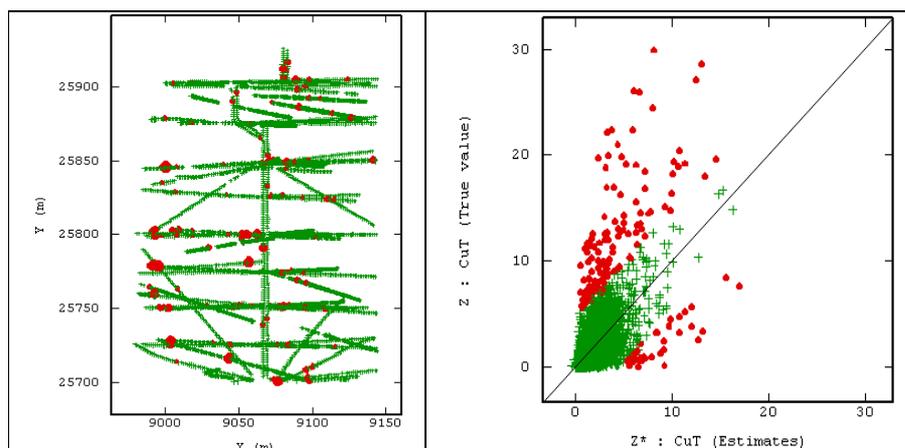
Imagen 119: Variograma cruzado Cu-Ag experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).



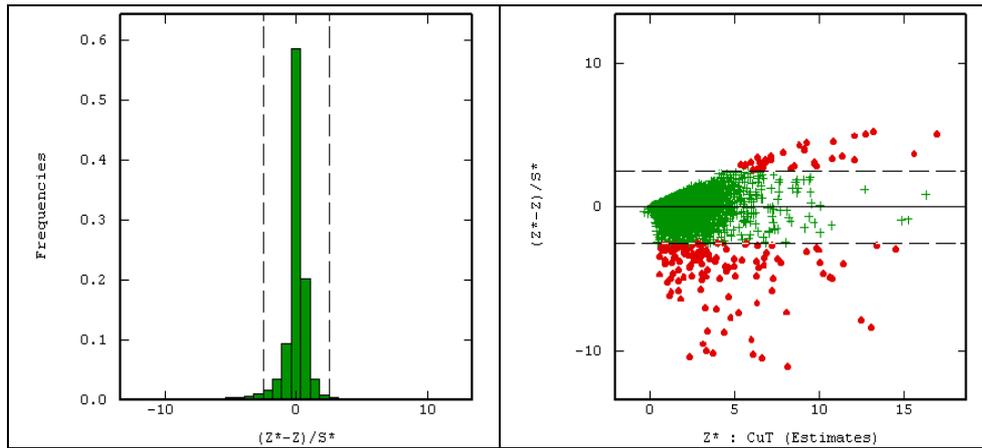
**Imagen 120:** Variograma cruzado Cu-As experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).



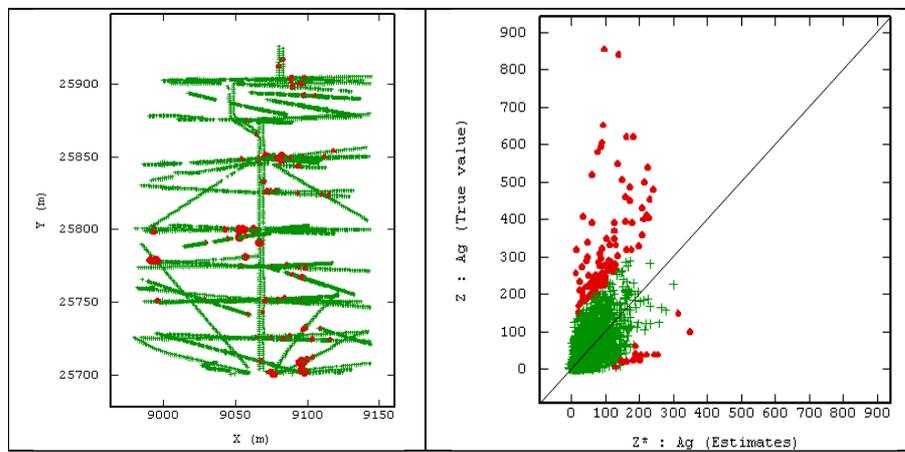
**Imagen 121:** Variograma cruzado As-Ag experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).



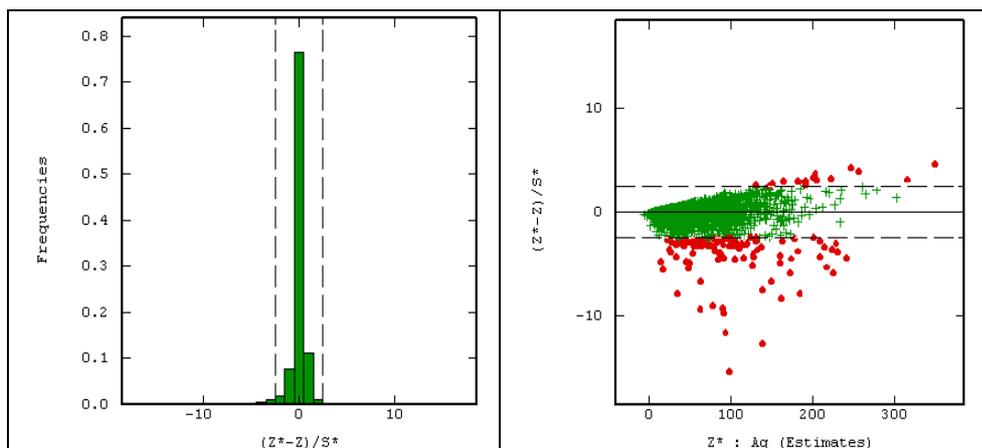
**Imagen 122:** Validación cruzada cobre cokriging: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).



**Imagen 123: Validación cruzada cobre cokriging: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**



**Imagen 124: Validación cruzada plata cokriging: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



**Imagen 125: Validación cruzada plata cokriging: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**

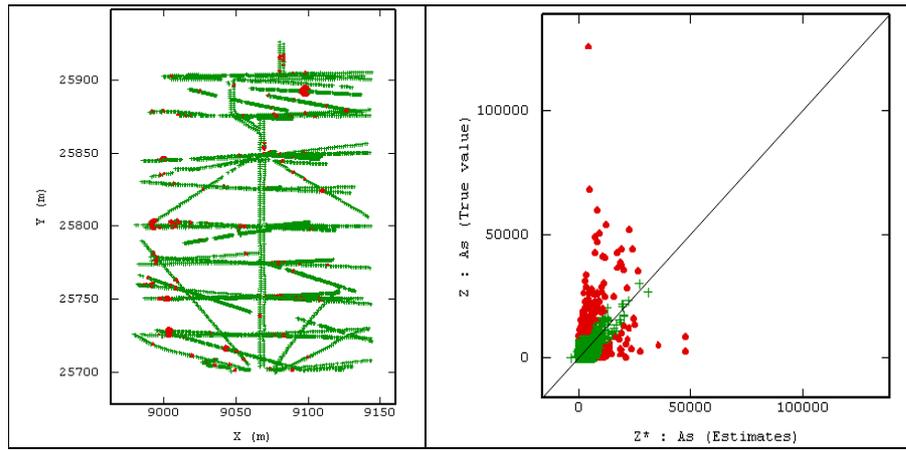


Imagen 126: Validación cruzada arsénico cokriging: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

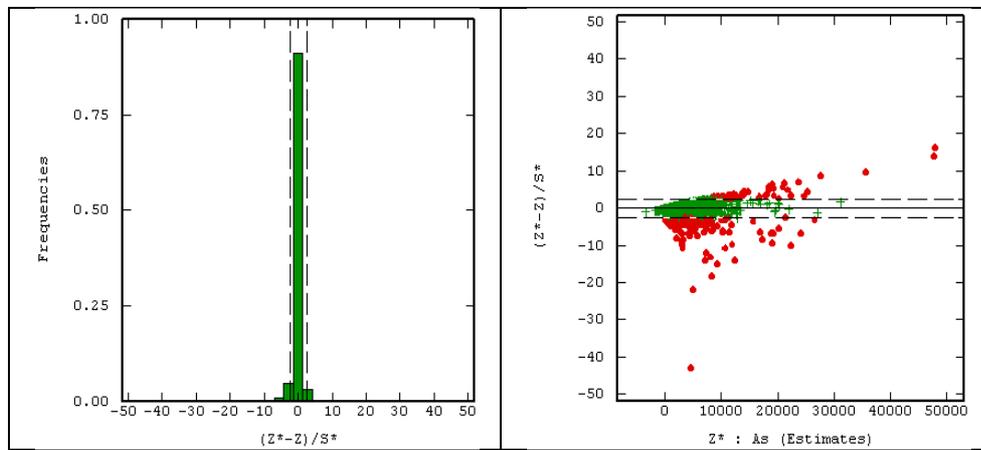


Imagen 127: Validación cruzada arsénico cokriging: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

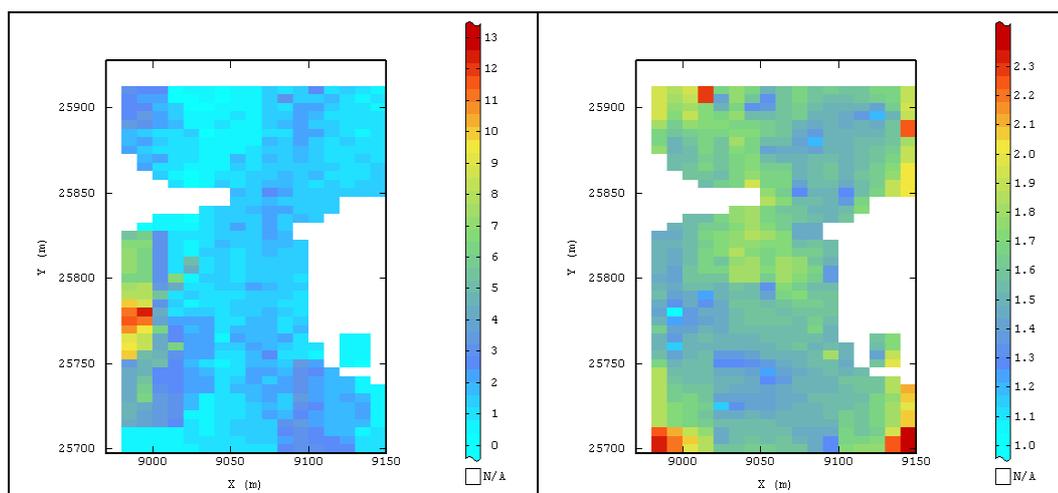
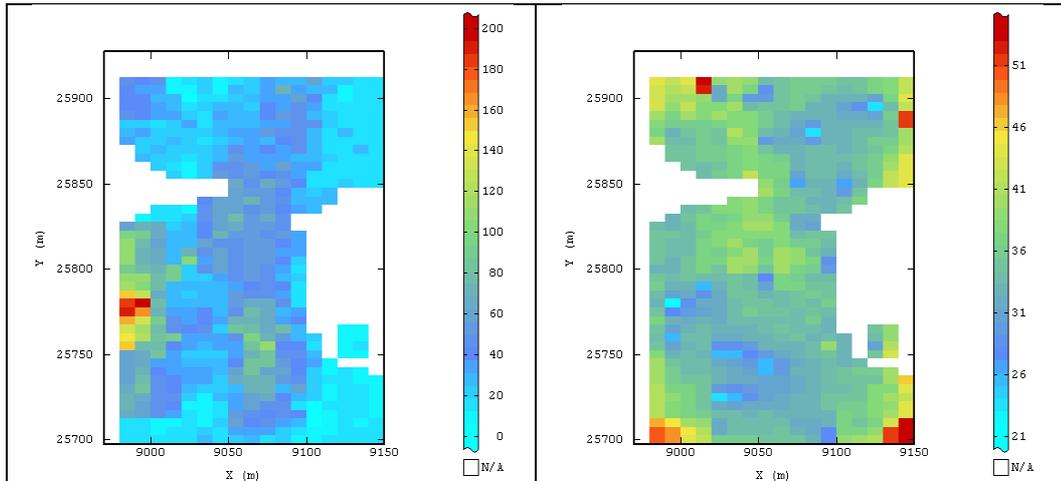
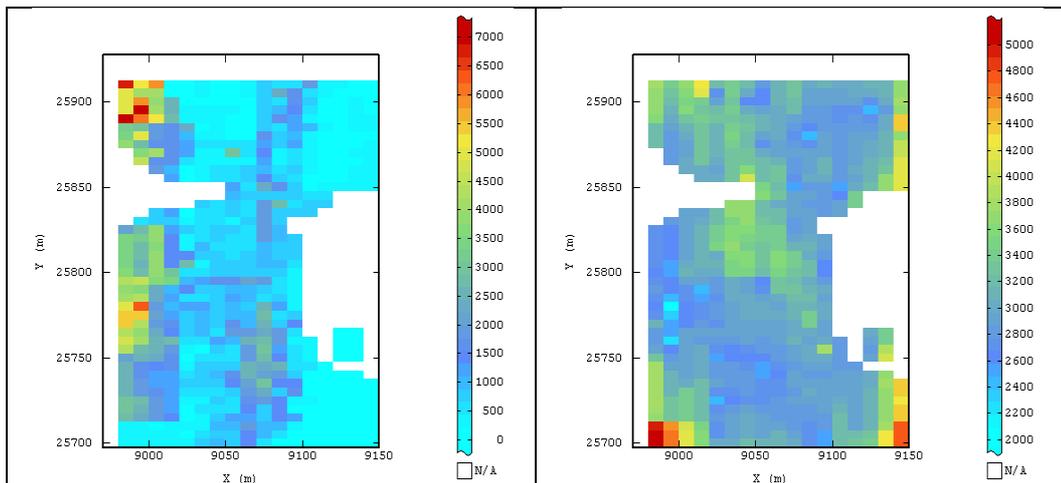


Imagen 128: Cokriging ordinario cobre (izquierda) y desviación estándar del error de cokriging de cobre (derecha).



**Imagen 129: Cokriging ordinario plata (izquierda) y desviación estándar del error de cokriging de plata (derecha).**



**Imagen 130: Cokriging ordinario arsénico (izquierda) y desviación estándar del error de cokriging de arsénico (derecha).**

#### C4: Enfoque 2: Metodología 2

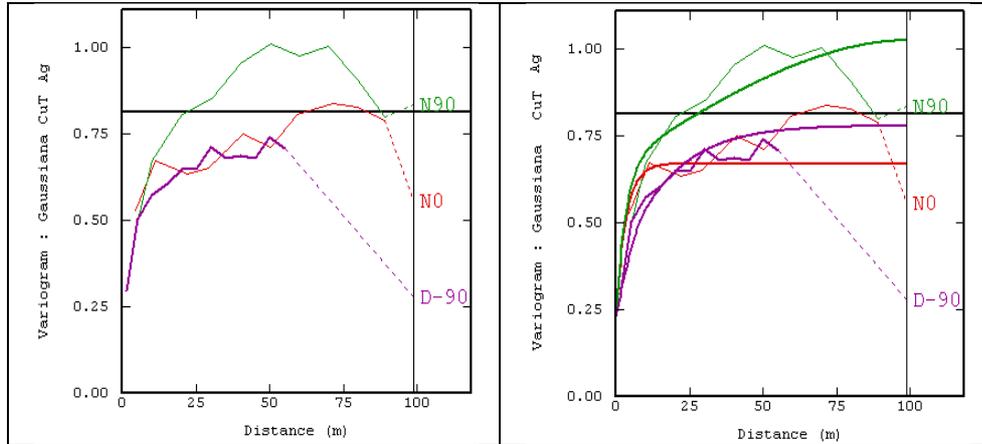


Imagen 131: Variograma cruzado datos gaussianos Cu-Ag experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).

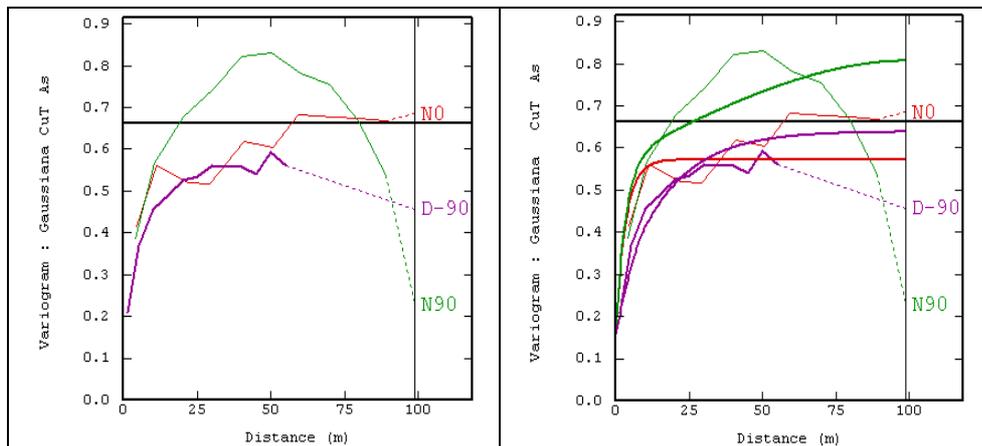


Imagen 132: Variograma cruzado datos gaussianos Cu-As experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).

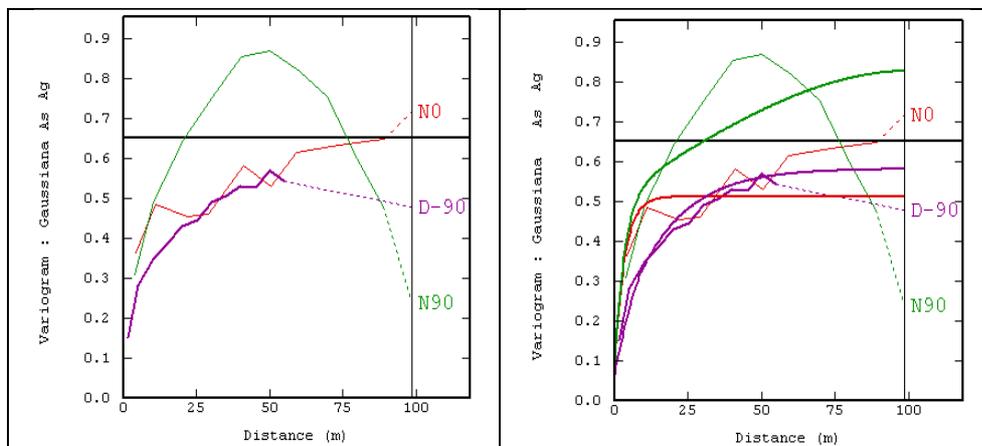


Imagen 133: Variograma cruzado datos gaussianos As-Ag experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).

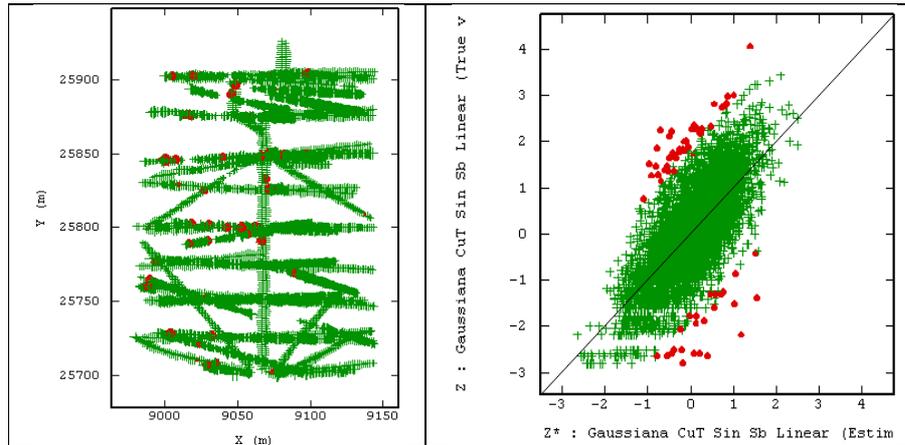


Imagen 134: Validación cruzada gaussiana cobre cosimulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

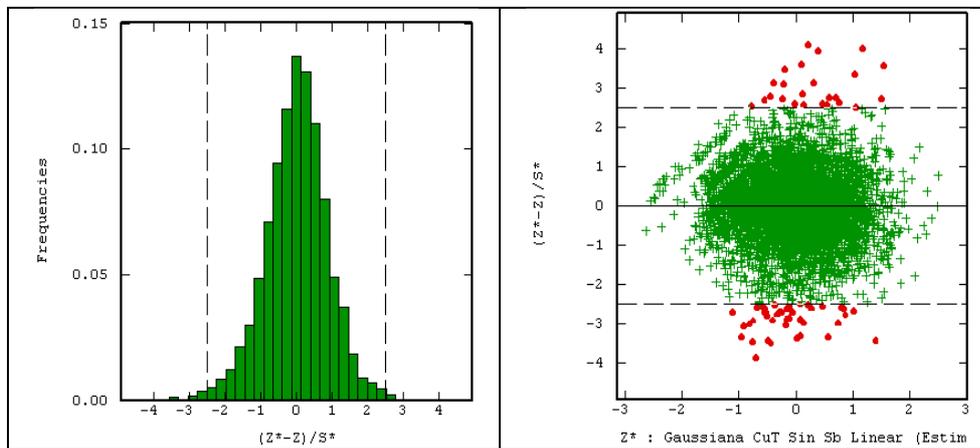


Imagen 135: Validación cruzada gaussiana cobre cosimulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

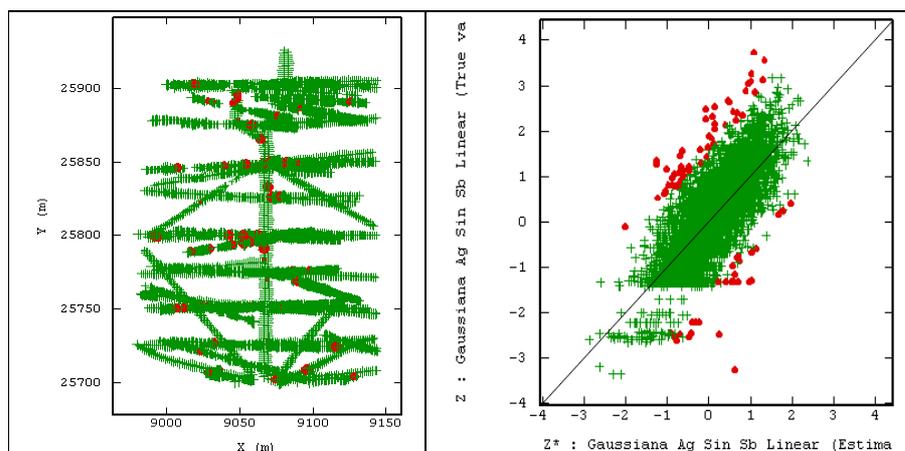
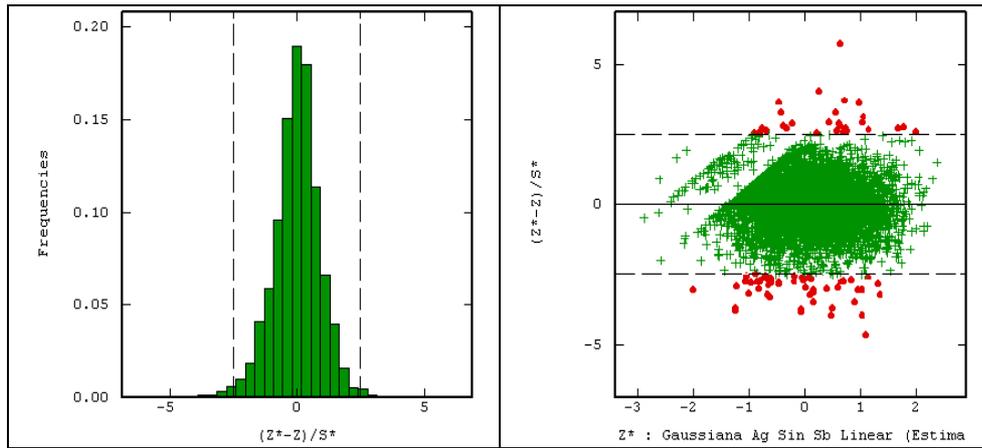
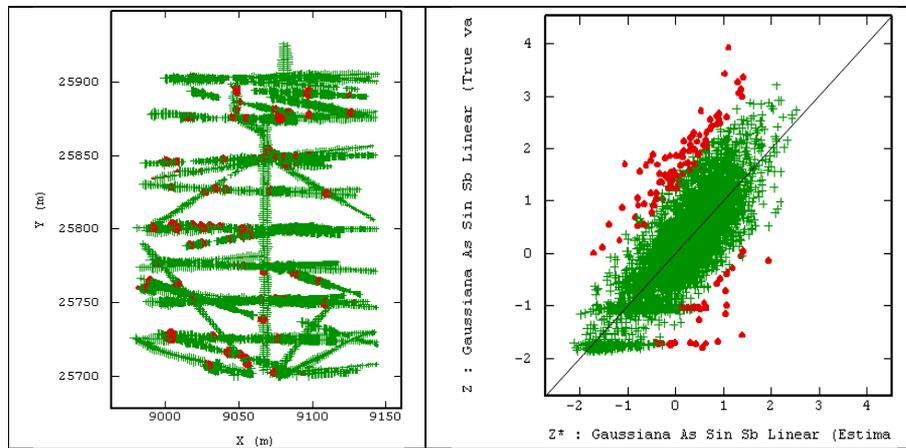


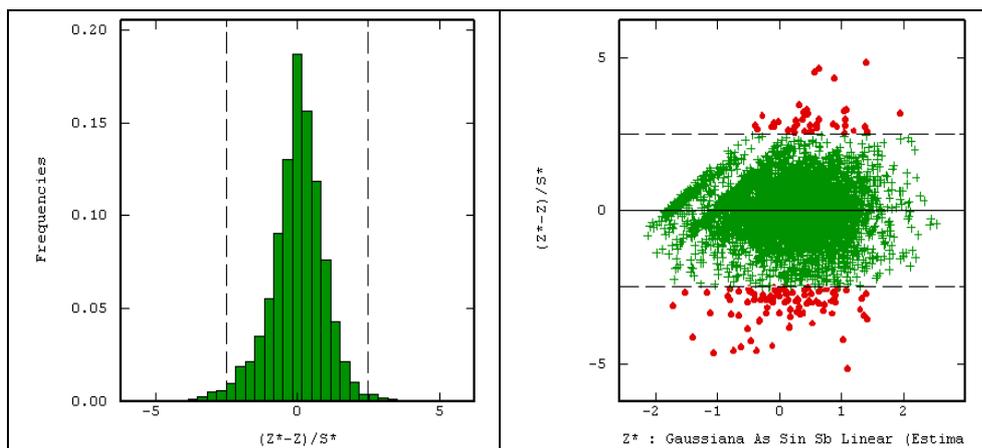
Imagen 136: Validación cruzada gaussiana plata cosimulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).



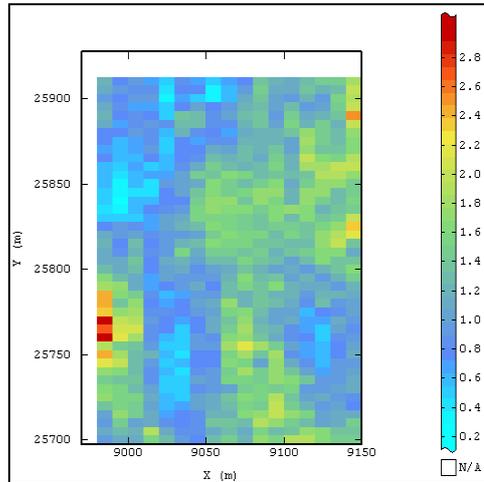
**Imagen 137: Validación cruzada gaussiana plata cosimulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**



**Imagen 138: Validación cruzada gaussiana arsénico cosimulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**

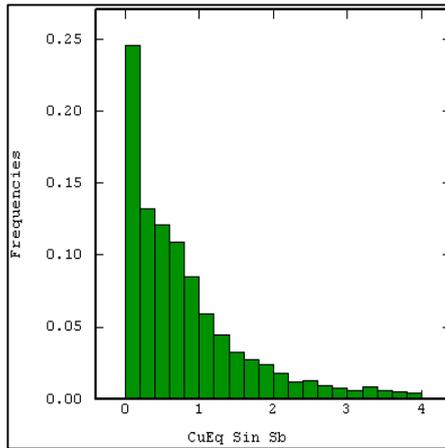


**Imagen 139: Validación cruzada gaussiana arsénico cosimulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**

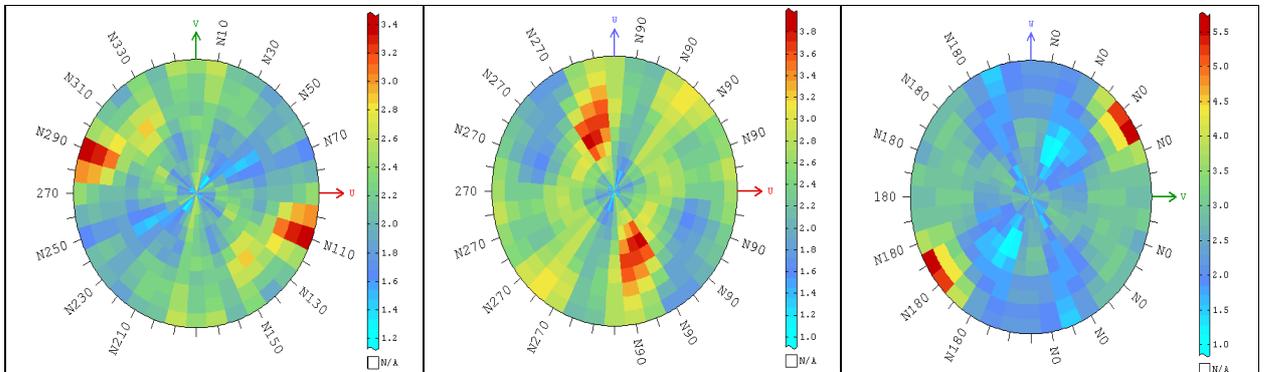


**Imagen 140:** Desviación estándar de las cosimulaciones de ley de cobre equivalente.

**C5: Enfoque 3: Metodología 1**



**Imagen 141:** Histograma de ley equivalente de cobre sin desagrupar.



**Imagen 142:** Mapas variográficos cobre equivalente planos XY (derecha), XZ (centro) e YZ (izquierda).

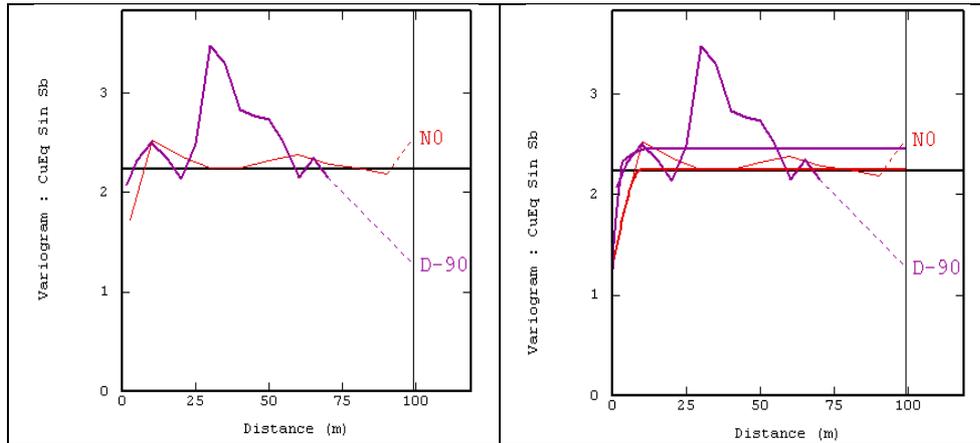


Imagen 143: Variogramas experimentales cobre equivalente (izquierda) y modelado (derecha).

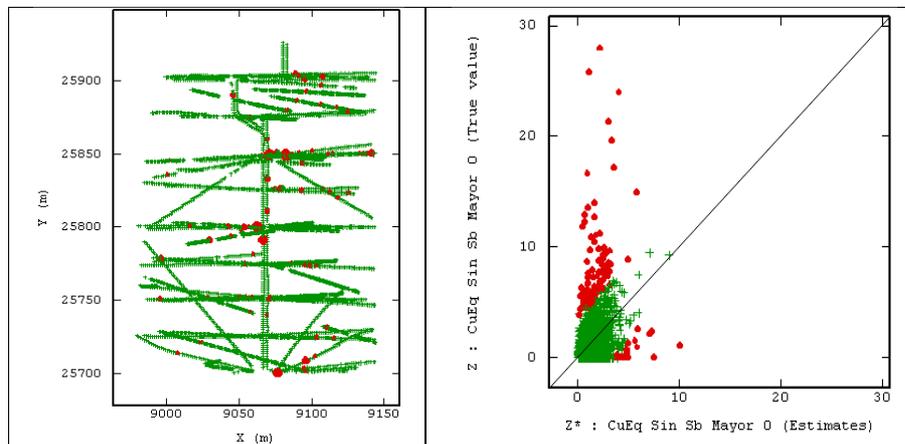


Imagen 144: Validación cruzada cobre equivalente: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

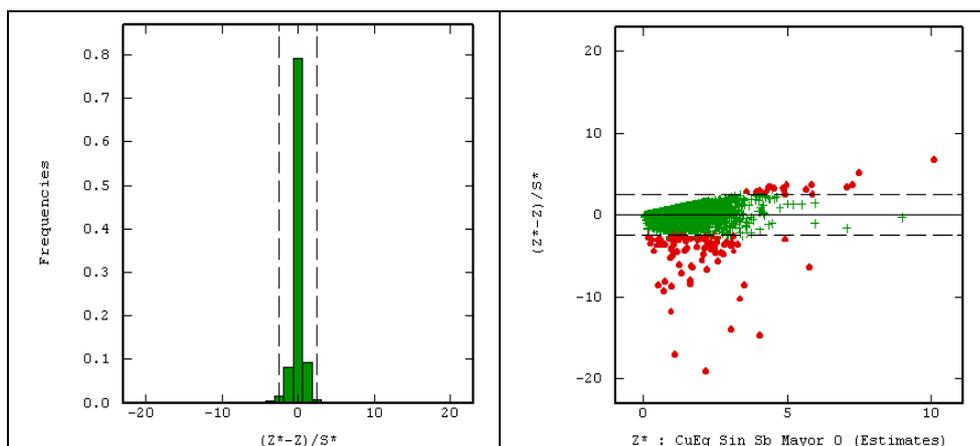


Imagen 145: Validación cruzada cobre equivalente: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

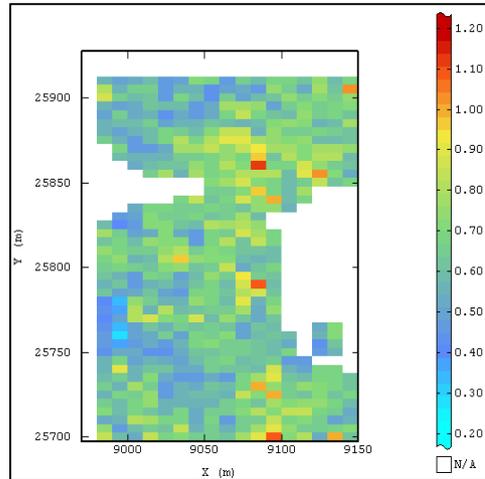


Imagen 146: Desviación estándar de error de kriging de cobre equivalente a su respectiva leyenda.

**C6: Enfoque 3: Metodología 2**

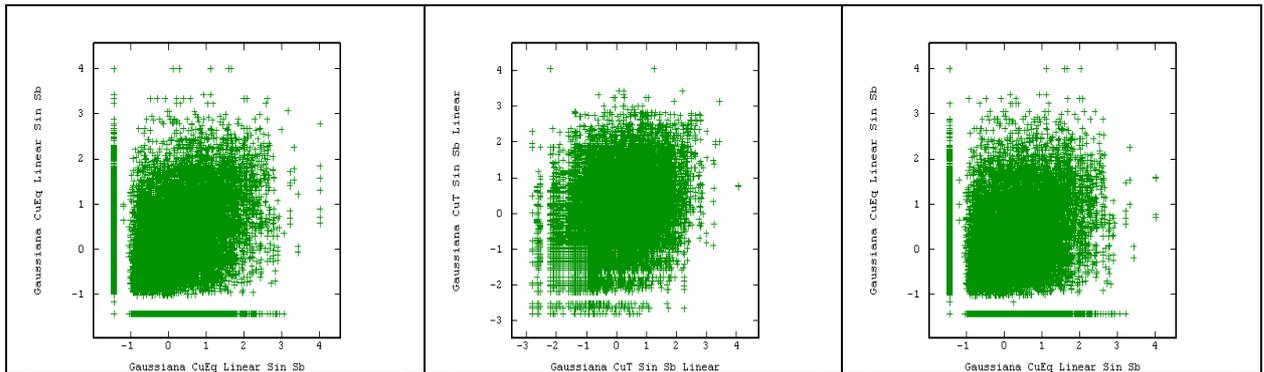


Imagen 147: Nubes de correlación diferida de cobre equivalente a 2,5 [m] (derecha), a 5 [m] (centro) y a 10 [m] (izquierda).

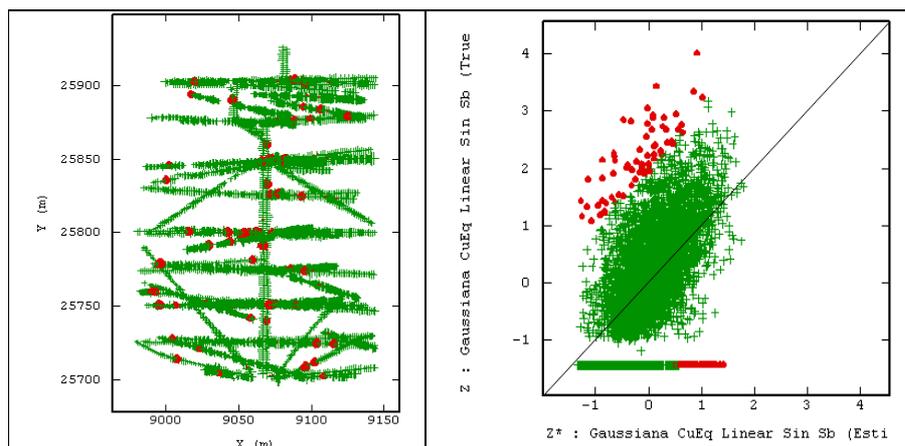


Imagen 148: Validación cruzada gaussiana oro equivalente: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

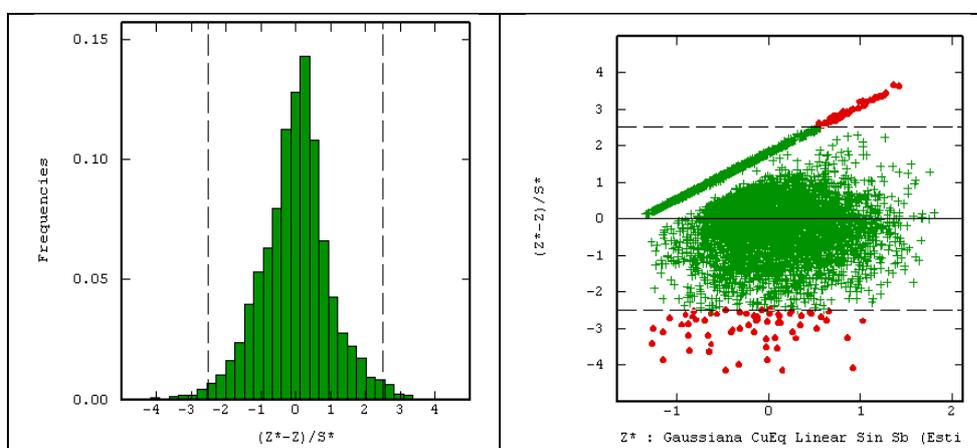


Imagen 149: Validación cruzada gaussiana oro equivalente: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

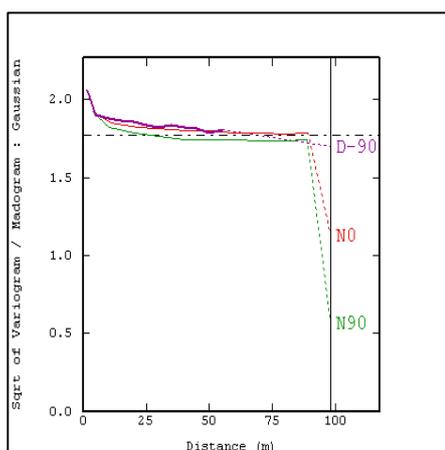
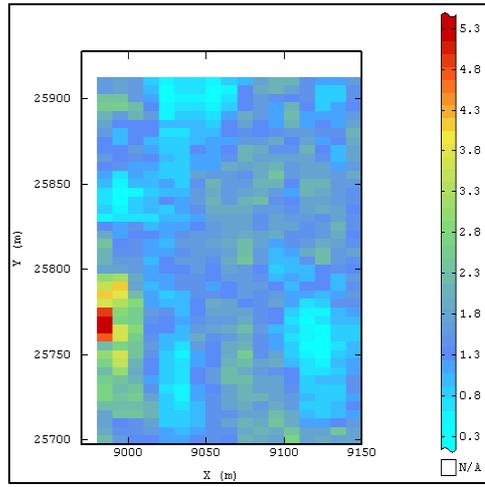


Imagen 150: Cuociente entre raíz de variograma y madograma cobre equivalente.



**Imagen 151: Desviación estándar de las realizaciones de cobre equivalente.**

### Anexo D: Caso de Estudio 3

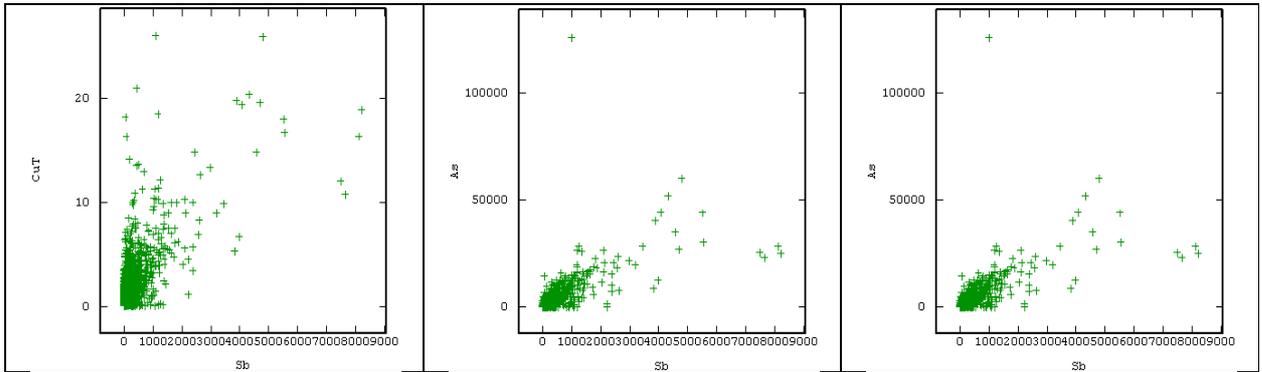


Imagen 152: Nubes de correlación de leyes de Sb-Cu (izquierda), Sb-Ag (centro) y Sb-As (derecha).

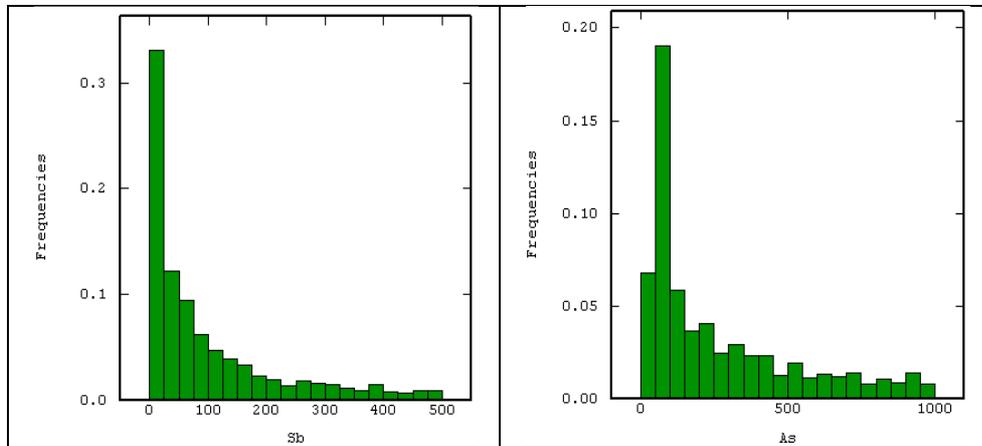


Imagen 153: Histogramas de leyes de antimonio sin desagrupar (izquierda) y desagrupado (derecha).

### D1: Enfoque 1: Metodología 1

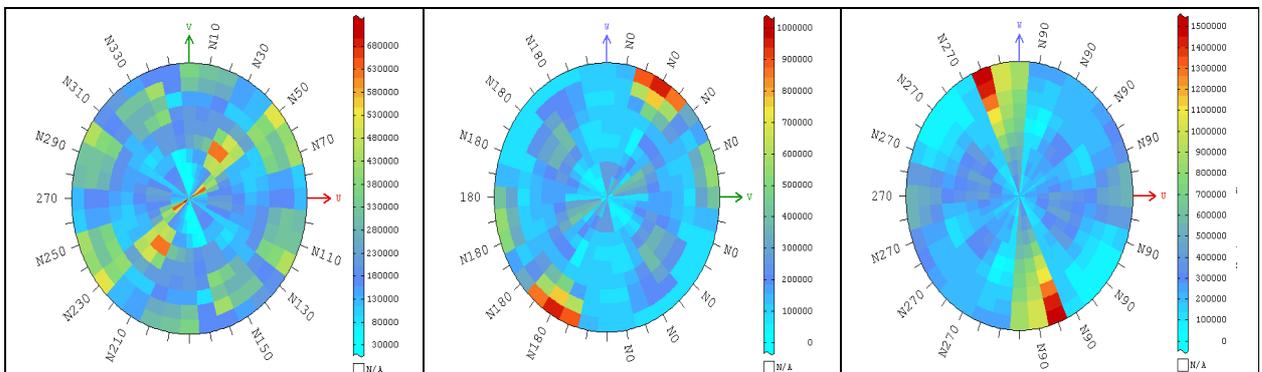
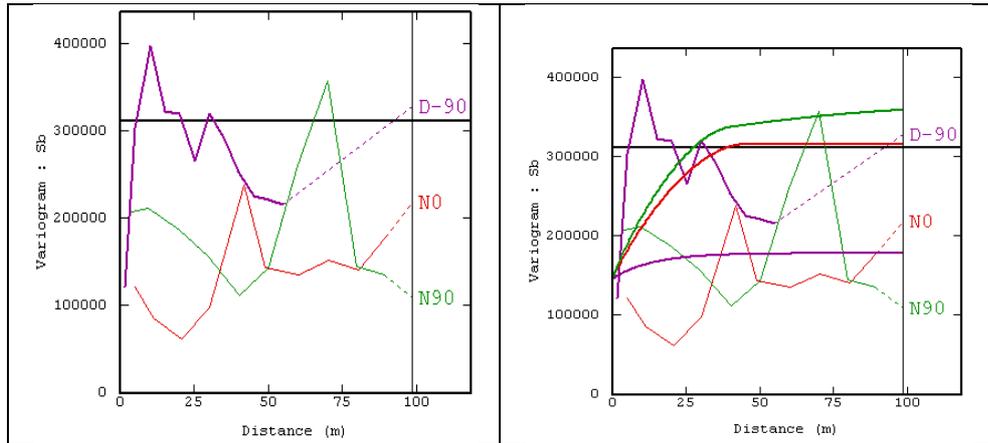
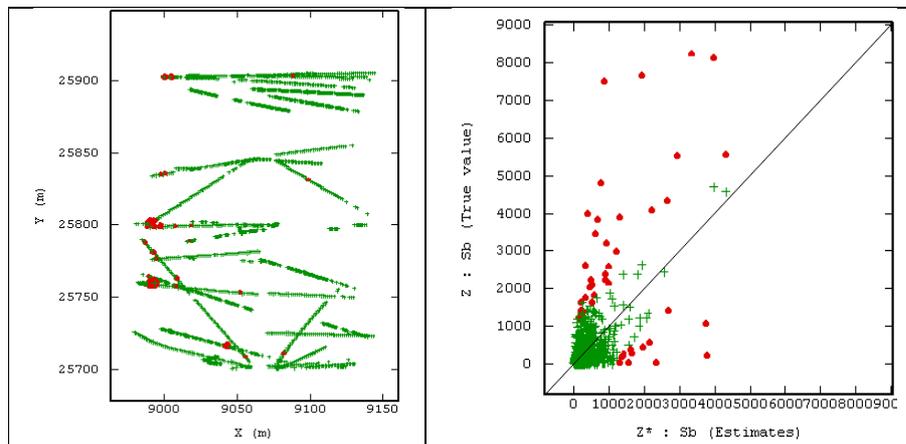


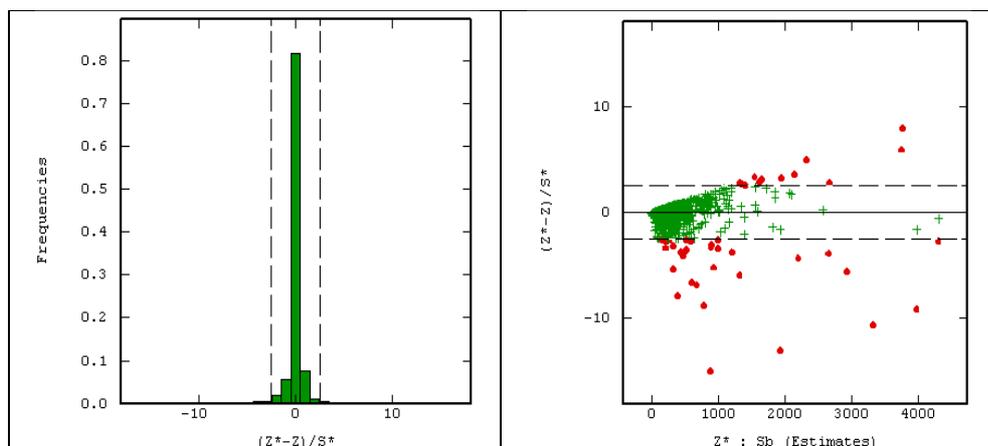
Imagen 154: Mapas variográficos antimonio planos XY (derecha), XZ (centro) e YZ (izquierda).



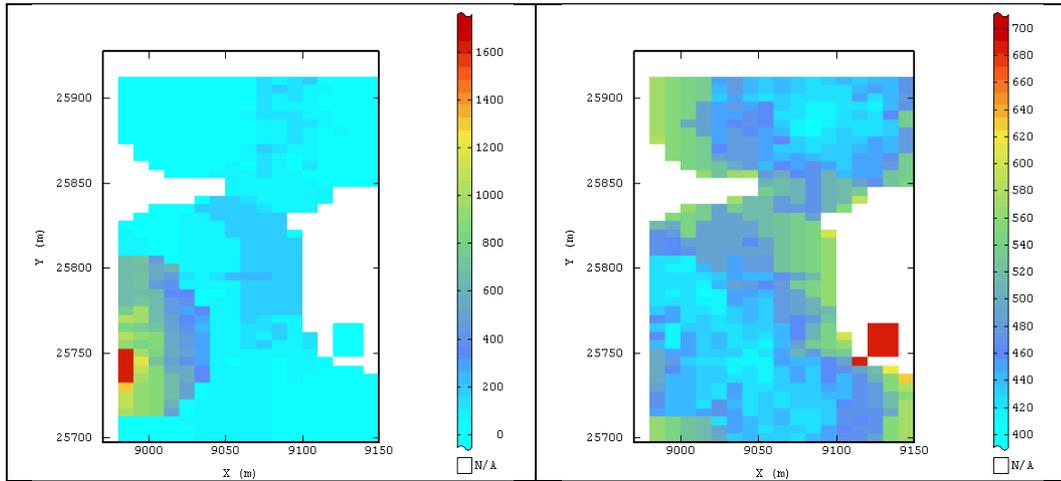
**Imagen 155: Variogramas experimentales antimonio (izquierda) y modelados (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).**



**Imagen 156: Validación cruzada antimonio: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**

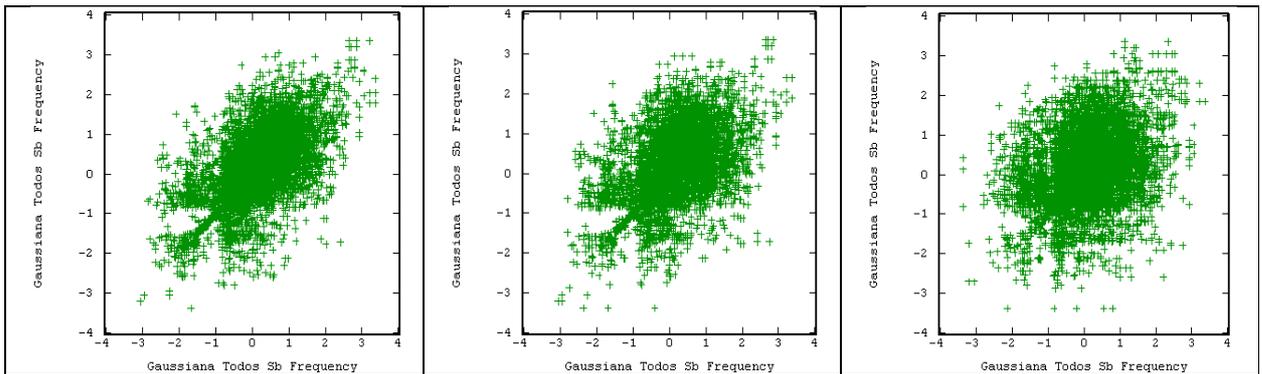


**Imagen 157: Validación cruzada antimonio: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**

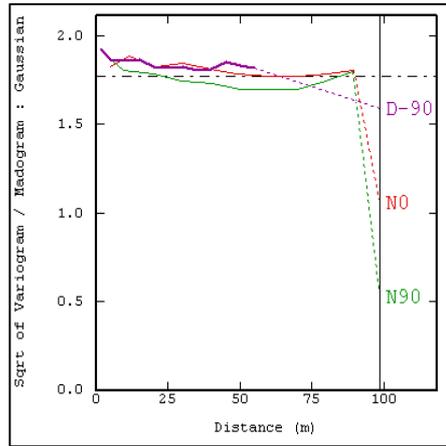


**Imagen 158: Kriging ordinario antimonio (izquierda) y desviación estándar del error de kriging de antimonio (derecha).**

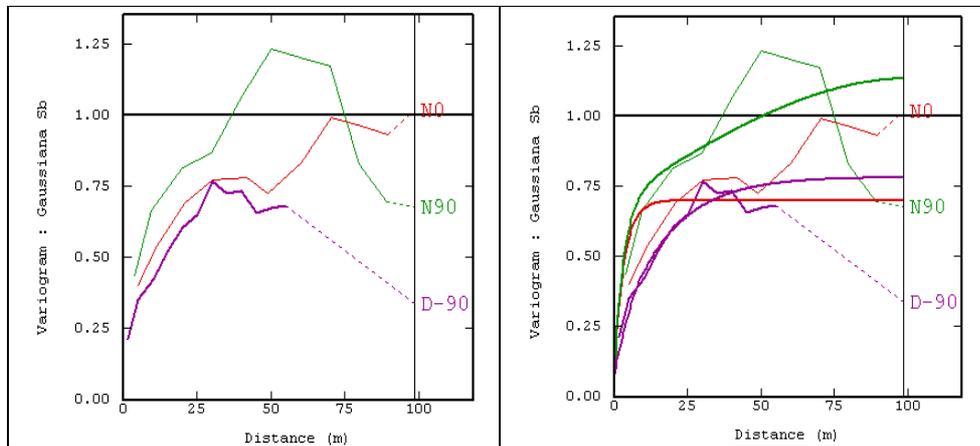
***D2: Enfoque 1: Metodología 2***



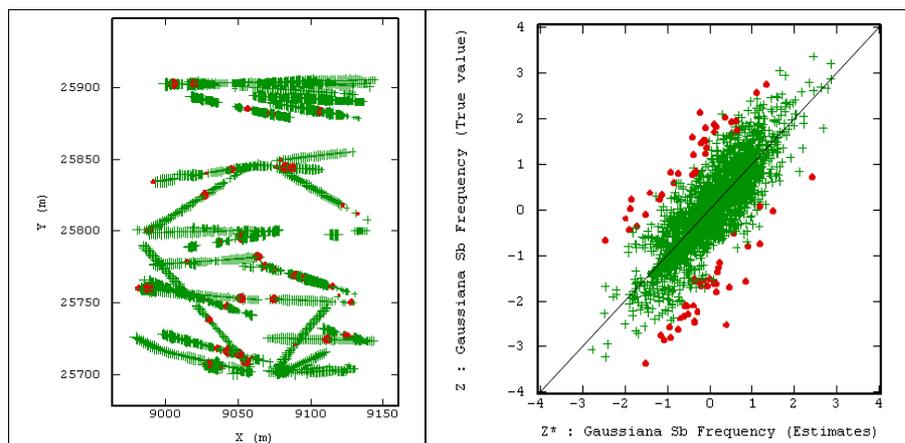
**Imagen 159: Nubes de correlación diferida de antimonio a 2,5[m] (derecha), a 5[m] (centro) y a 10[m] (izquierda).**



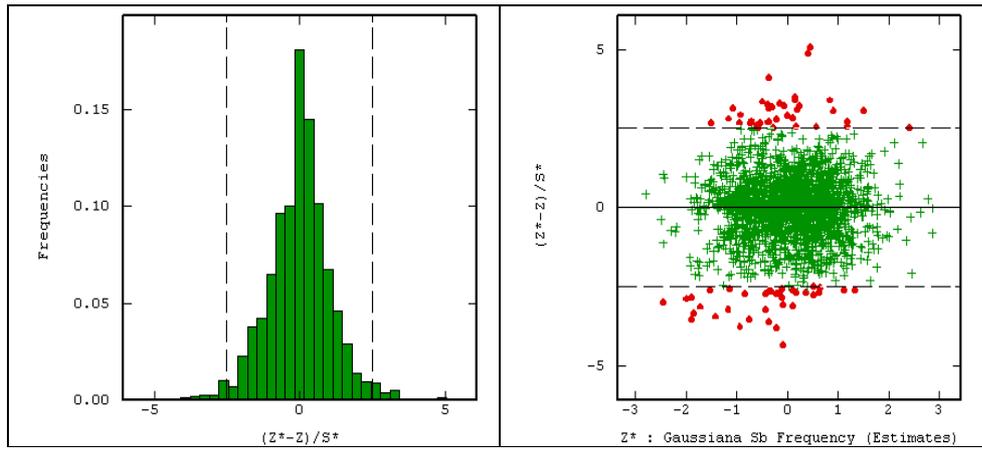
**Imagen 160:** Cuociente entre raíz de variograma y madograma antimonio, a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).



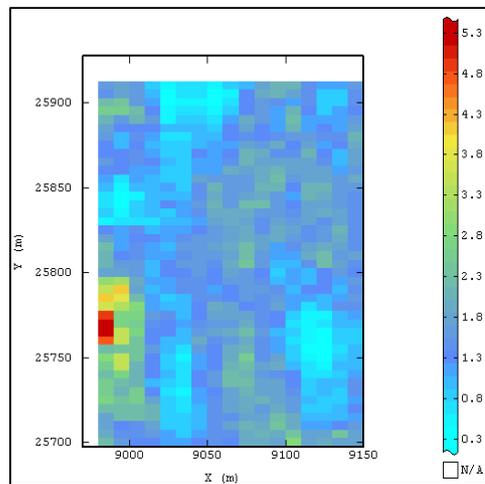
**Imagen 161:** Variograma datos gaussianos antimonio experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).



**Imagen 162:** Validación cruzada gaussianas antimonio simulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

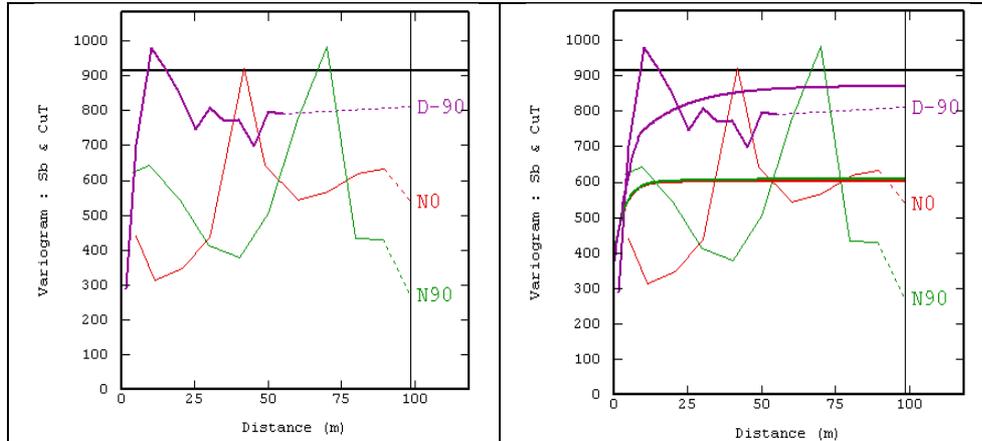


**Imagen 163:** Validación cruzada gaussiana antimonio simulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

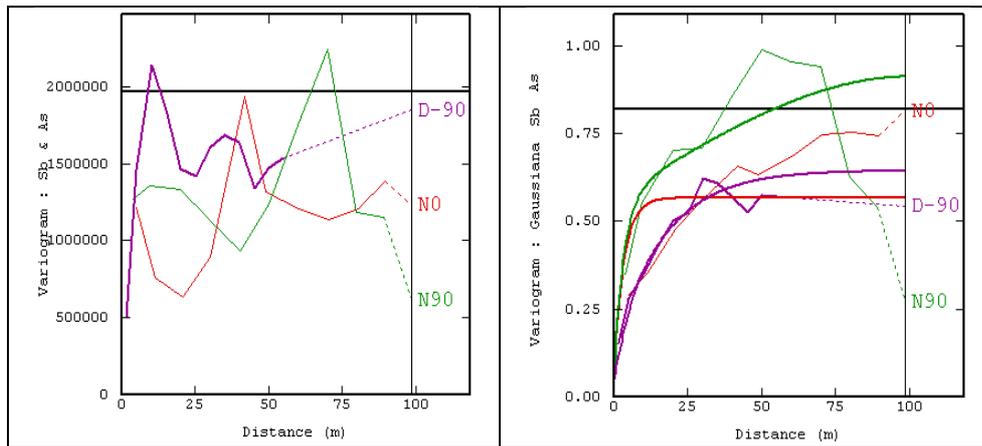


**Imagen 164:** Desviación estándar de las simulaciones de ley de cobre equivalente.

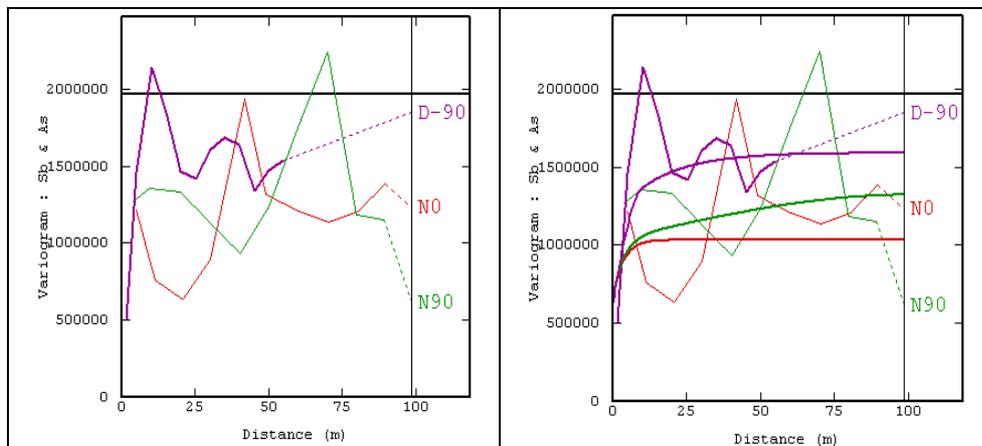
**D3: Enfoque 2: Metodología 1**



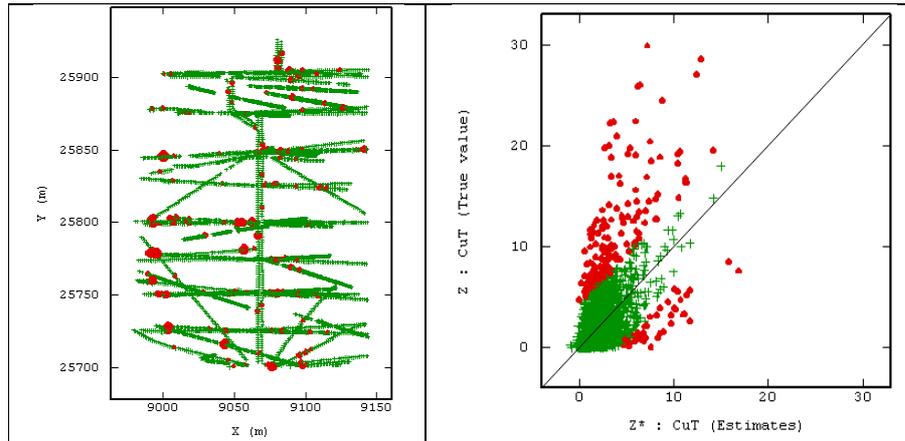
**Imagen 165: Variograma cruzado Sb-Cu experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).**



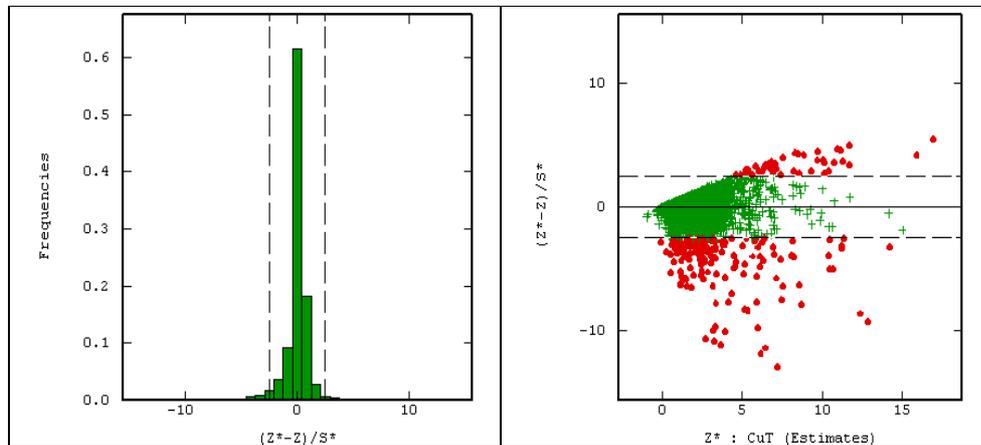
**Imagen 166: Variograma cruzado Sb-Ag experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).**



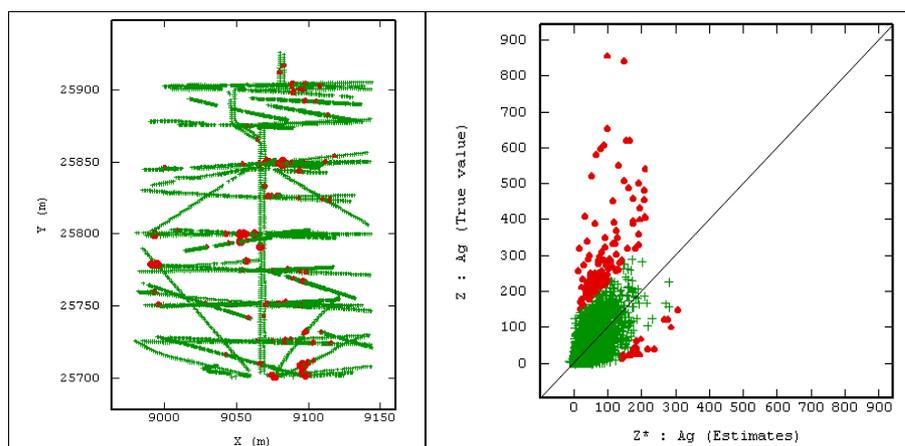
**Imagen 167: Variograma cruzado Sb-As experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).**



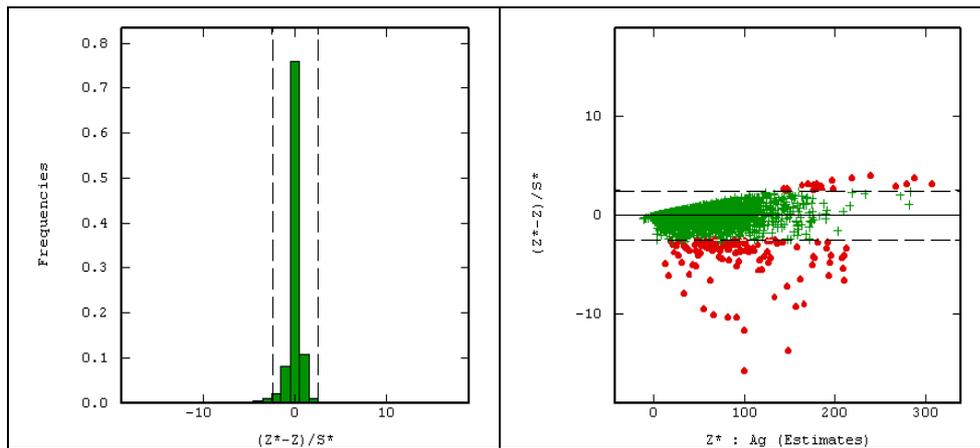
**Imagen 168: Validación cruzada cobre cokriging: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



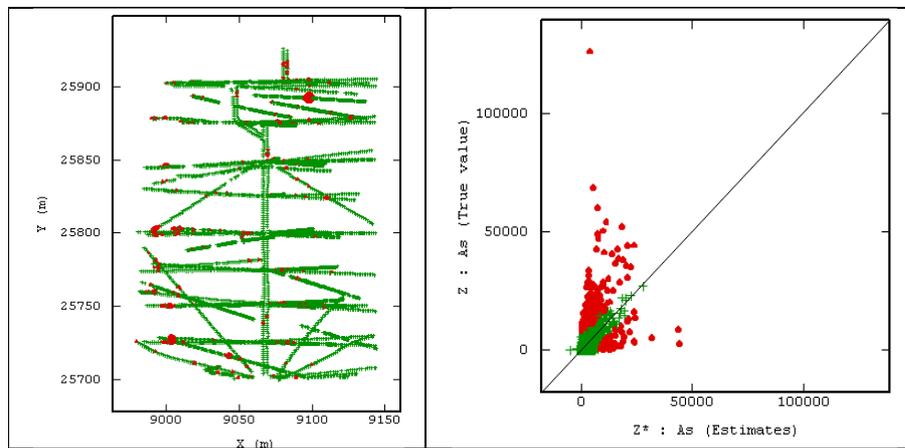
**Imagen 169: Validación cruzada cobre cokriging: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**



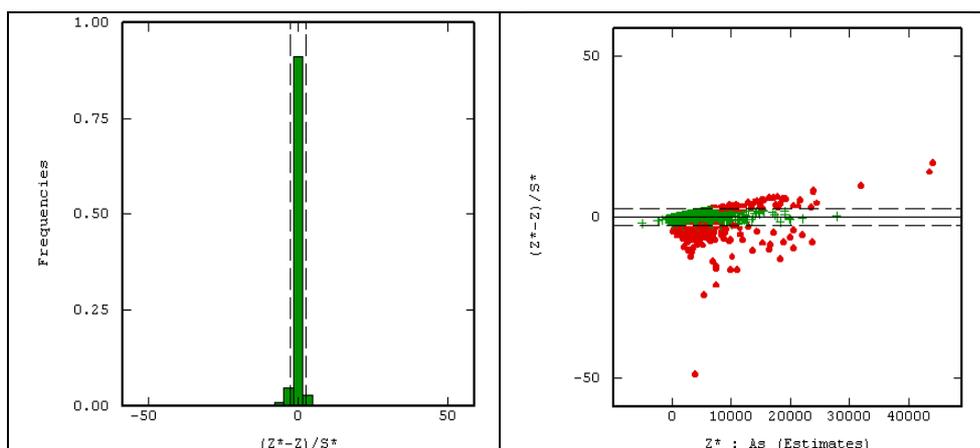
**Imagen 170: Validación cruzada plata cokriging: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



**Imagen 171: Validación cruzada plata cokriging: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**



**Imagen 172: Validación cruzada arsénico cokriging: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).**



**Imagen 173: Validación cruzada arsénico cokriging: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).**

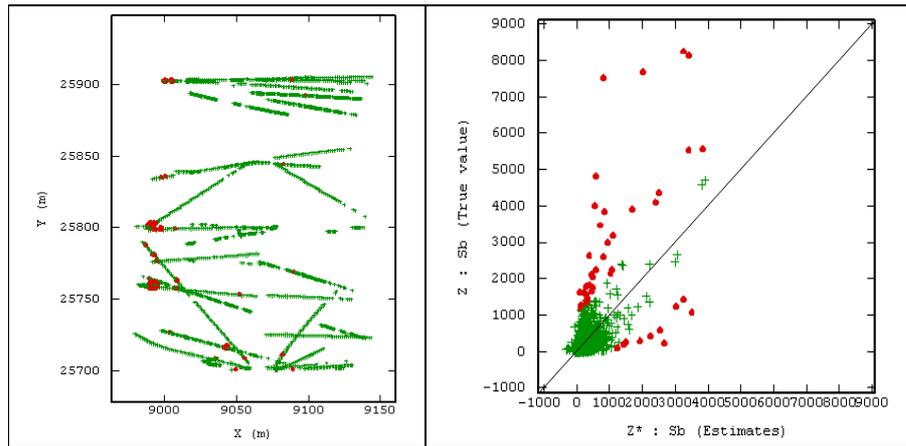


Imagen 174: Validación cruzada antimonio cokriging: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

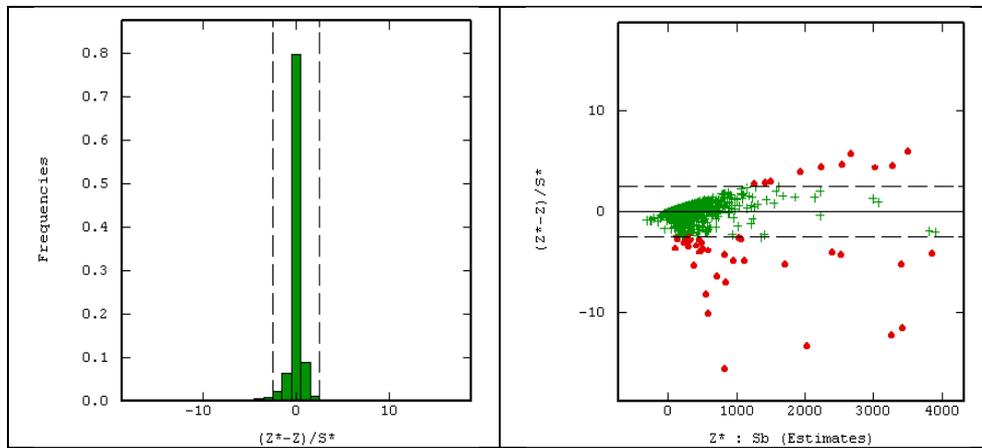


Imagen 175: Validación cruzada antimonio cokriging: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

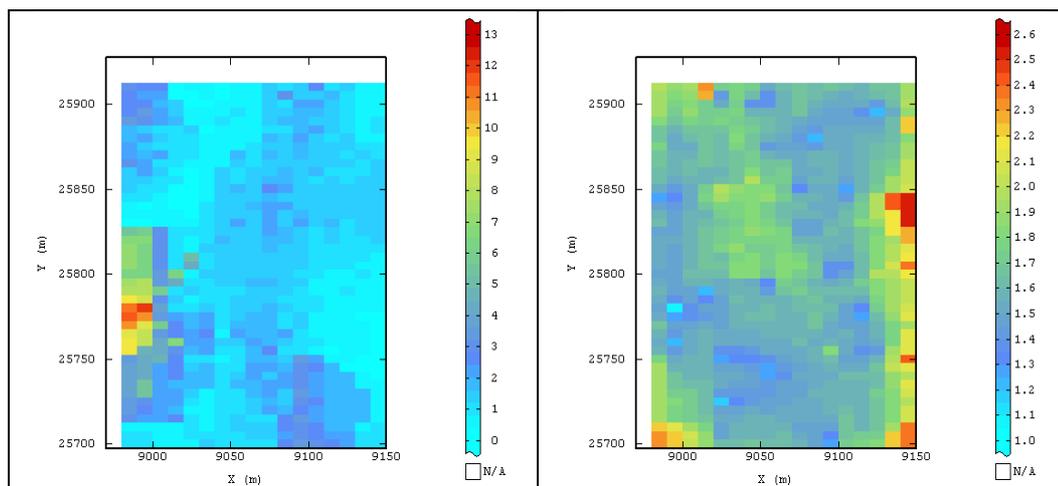
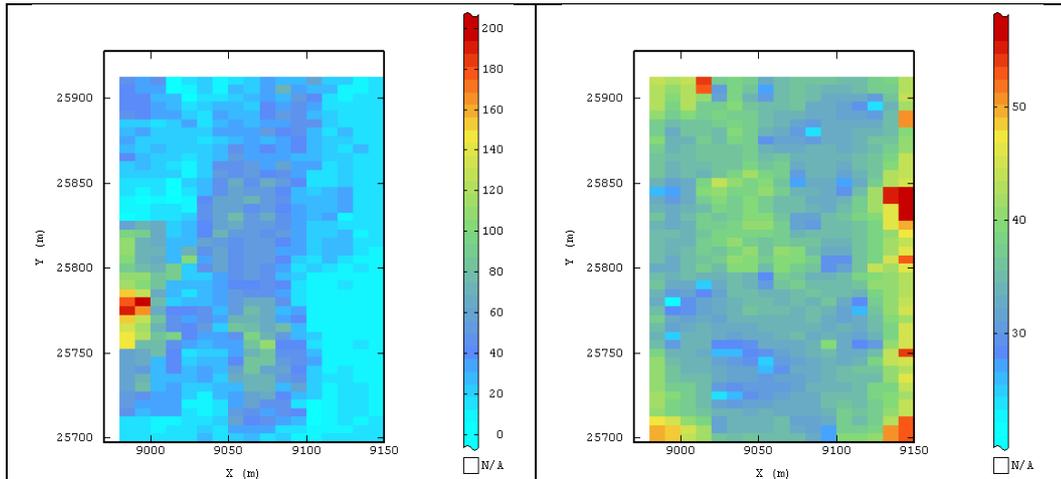
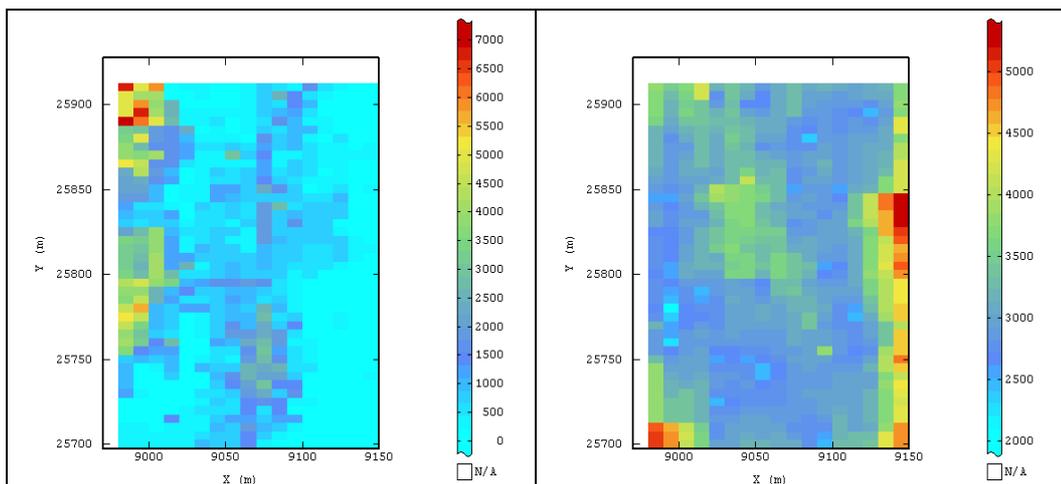


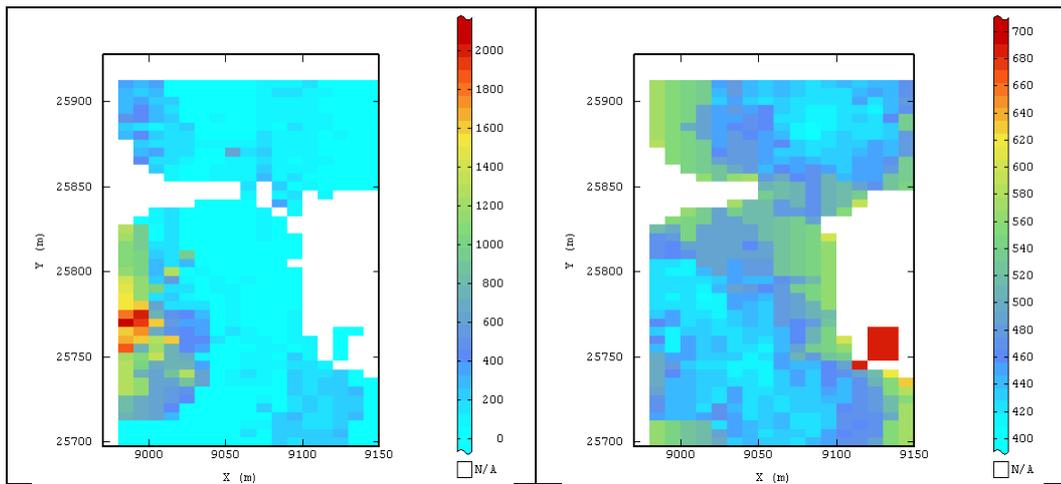
Imagen 176: Cokriging ordinario cobre (izquierda) y desviación estándar del error de cokriging de cobre (derecha).



**Imagen 177: Cokriging ordinario plata (izquierda) y desviación estándar del error de cokriging de plata (derecha).**

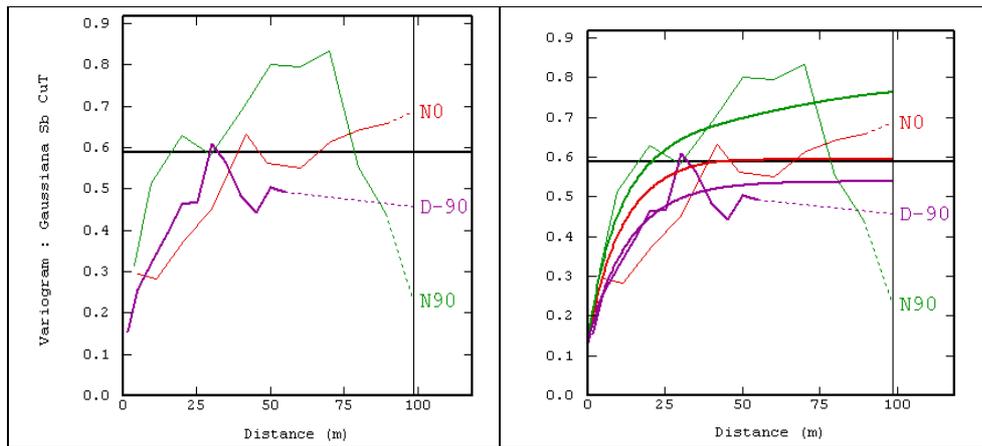


**Imagen 178: Cokriging ordinario arsénico (izquierda) y desviación estándar del error de cokriging de arsénico (derecha).**



**Imagen 179: Cokriging ordinario antimonio (izquierda) y desviación estándar del error de cokriging de antimonio (derecha).**

***D4: Enfoque 2: Metodología 2***



**Imagen 180: Variograma cruzado datos gaussianos Sb-Cu experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).**

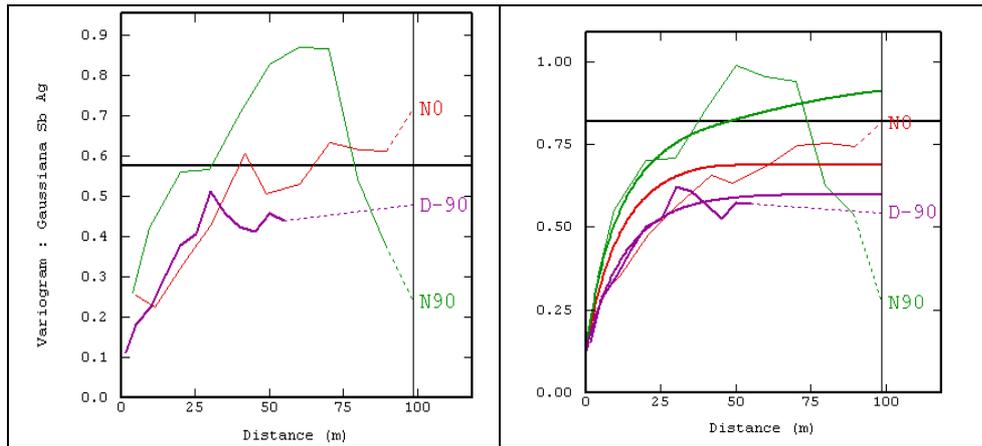


Imagen 181: Variograma cruzado datos gaussianos Sb-Ag experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).

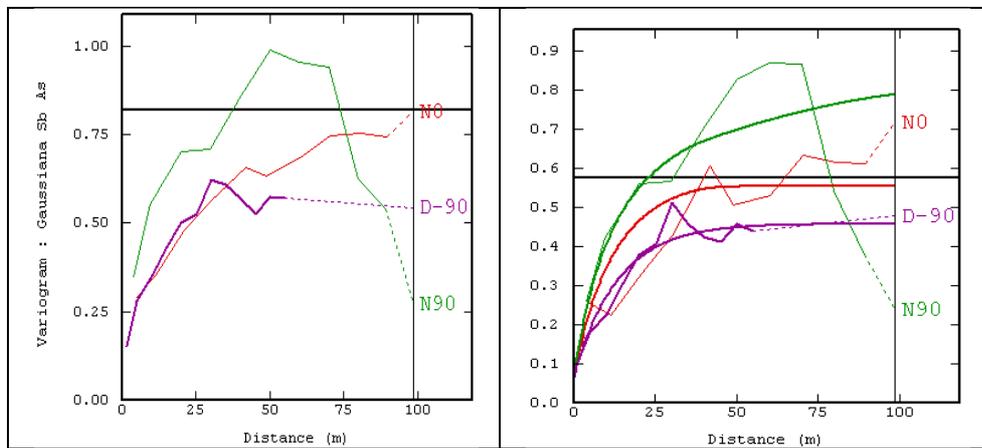


Imagen 182: Variograma cruzado datos gaussianos Sb-As experimental (izquierda) y modelado (derecha), a lo largo de las direcciones de anisotropía norte (rojo), este (verde) y vertical (morado).

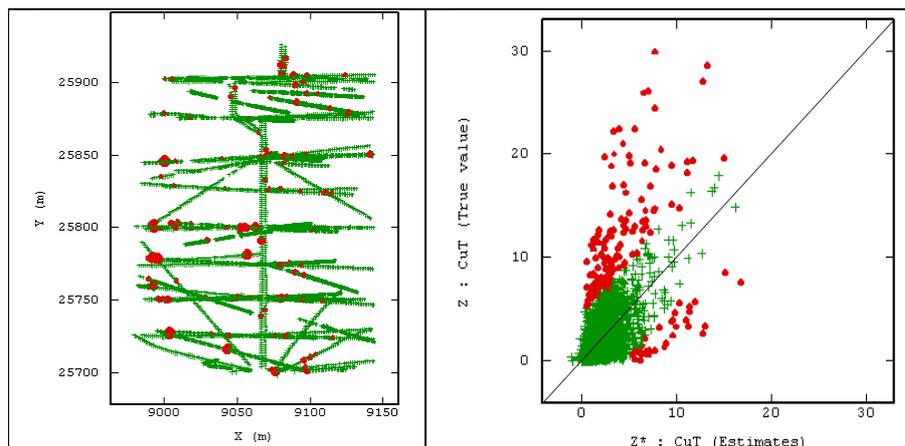


Imagen 183: Validación cruzada gaussiana cobre cosimulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

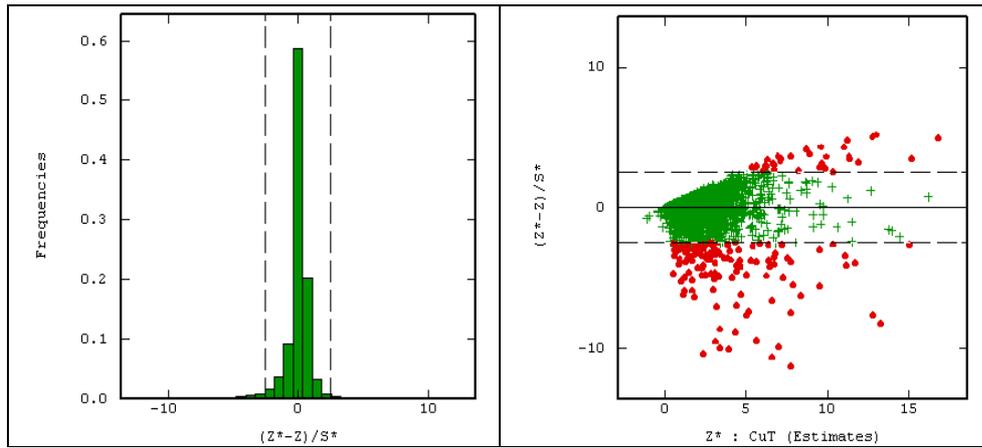


Imagen 184: Validación cruzada gaussiana cobre cosimulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

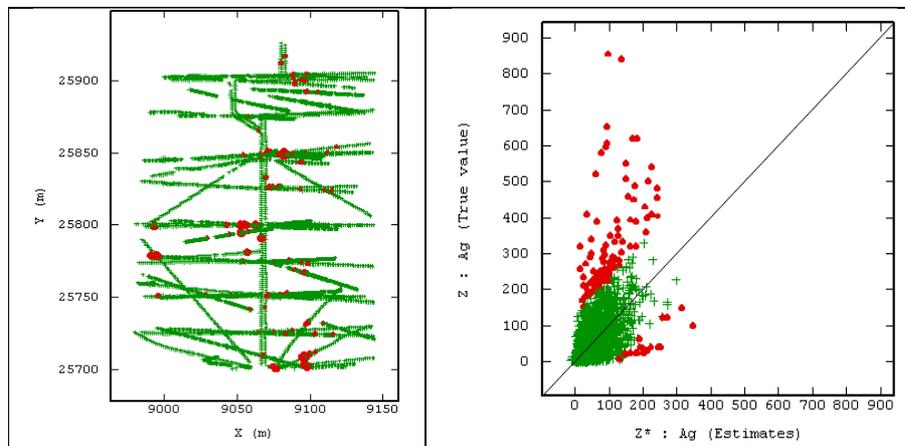


Imagen 185: Validación cruzada gaussiana plata cosimulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

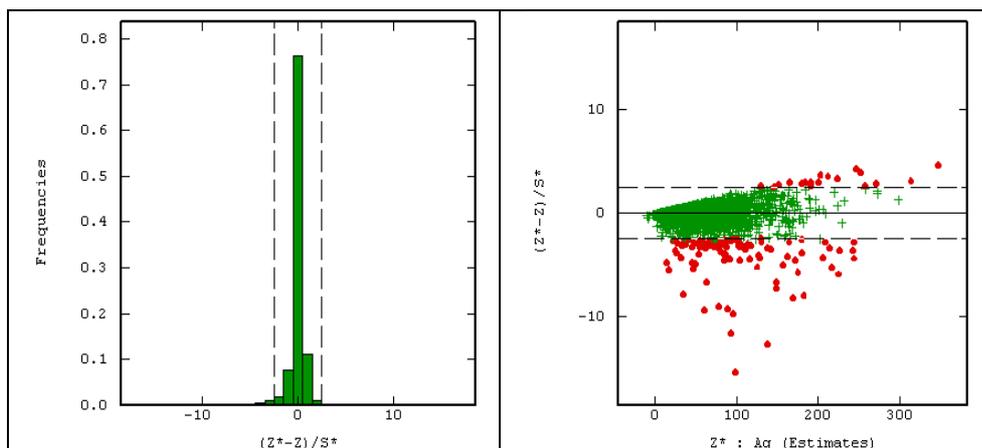


Imagen 186: Validación cruzada gaussiana plata cosimulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

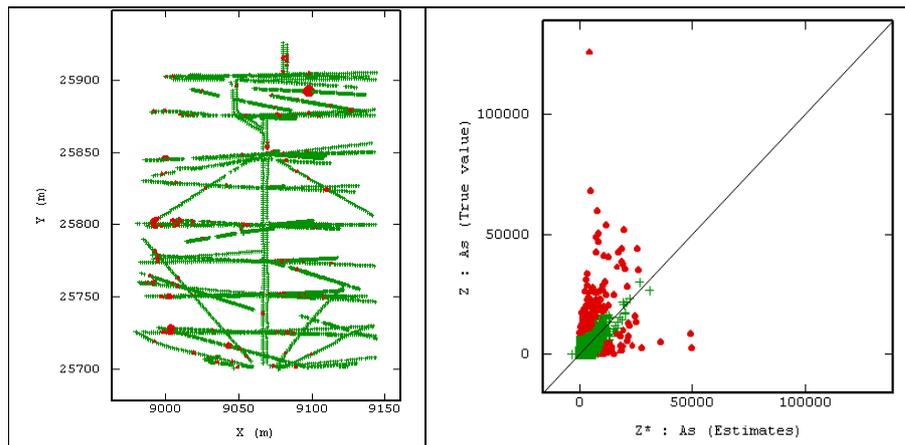


Imagen 187: Validación cruzada gaussiana arsénico cosimulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

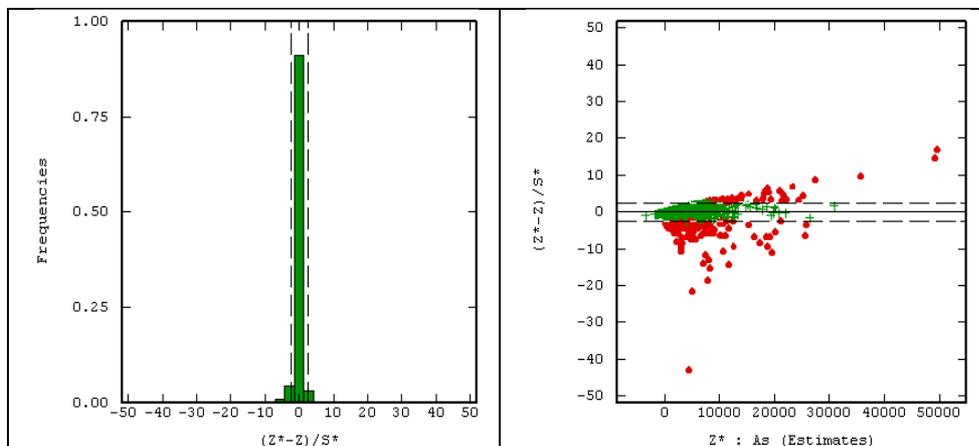


Imagen 188: Validación cruzada gaussiana arsénico cosimulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

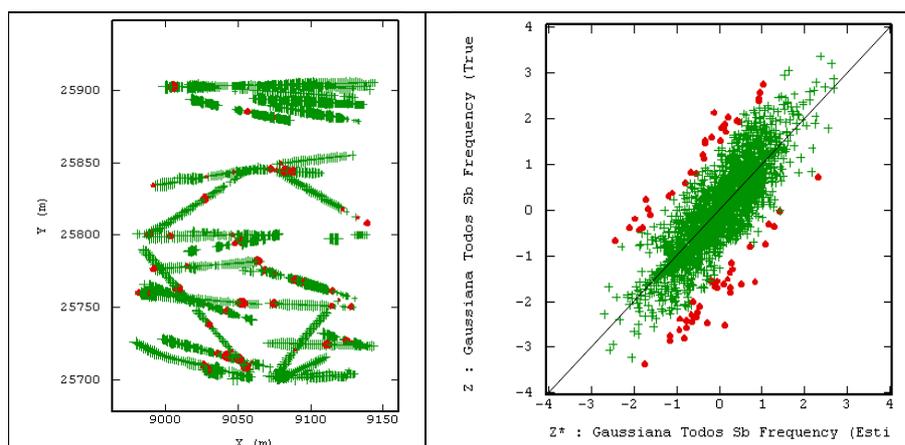


Imagen 189: Validación cruzada gaussiana antimonio cosimulación: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

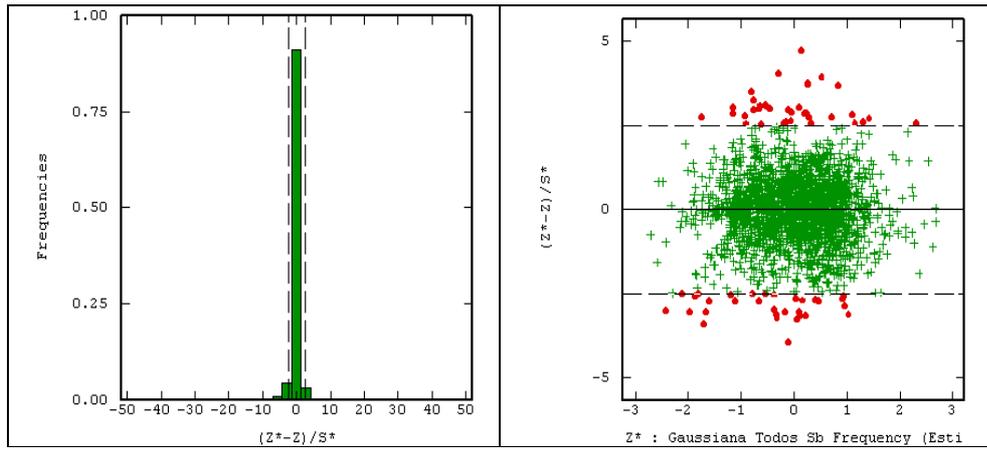


Imagen 190: Validación cruzada gaussiana antimonio cosimulación: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

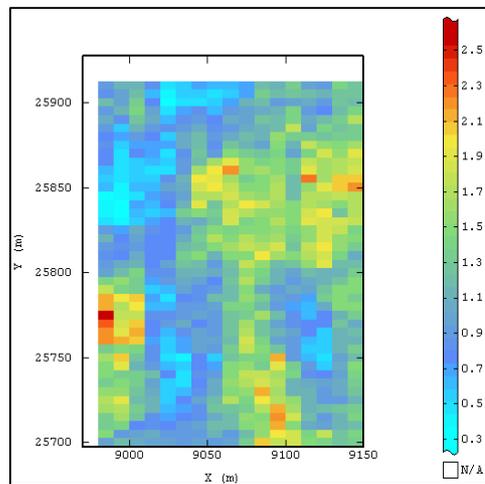
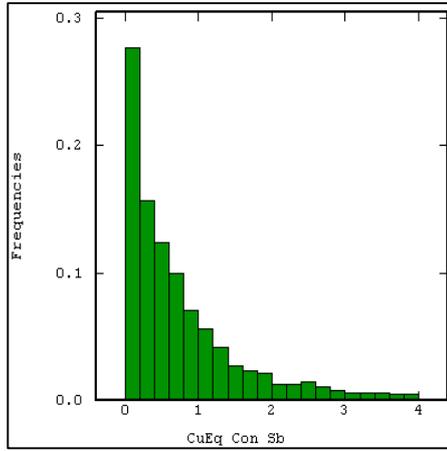
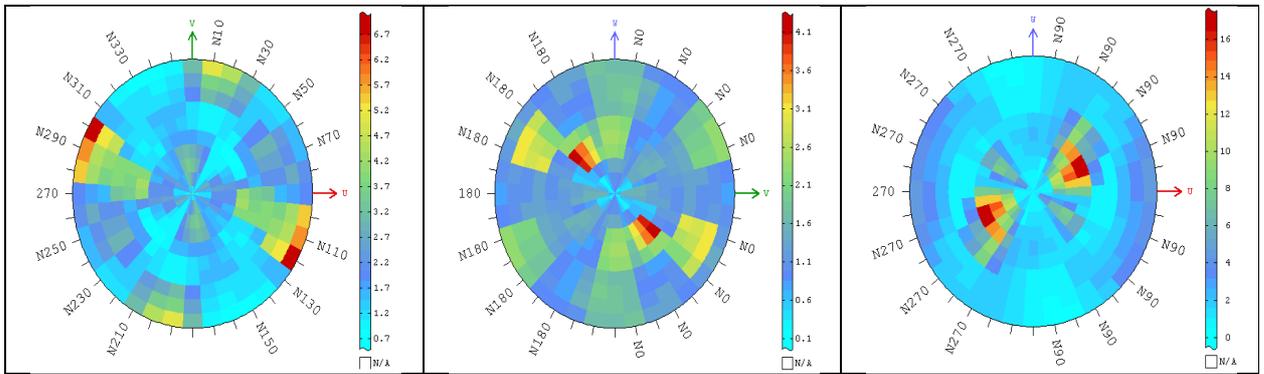


Imagen 191: Desviación estándar de las cosimulaciones de ley de cobre equivalente.

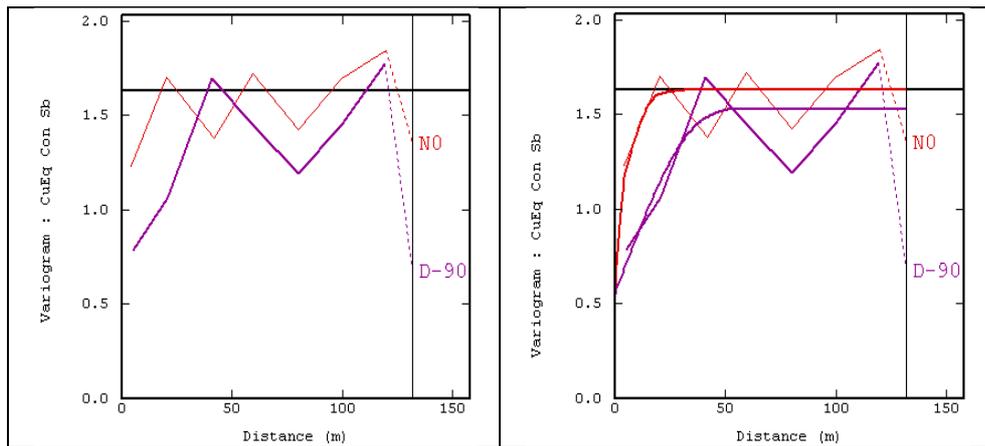
**D5: Enfoque 3: Metodología 1**



**Imagen 192: Histograma de ley equivalente de cobre sin desagrupar.**



**Imagen 193: Mapas variográficos cobre equivalente planos XY (derecha), XZ (centro) e YZ (izquierda).**



**Imagen 194: Variogramas experimentales cobre equivalente (izquierda) y modelado (derecha).**

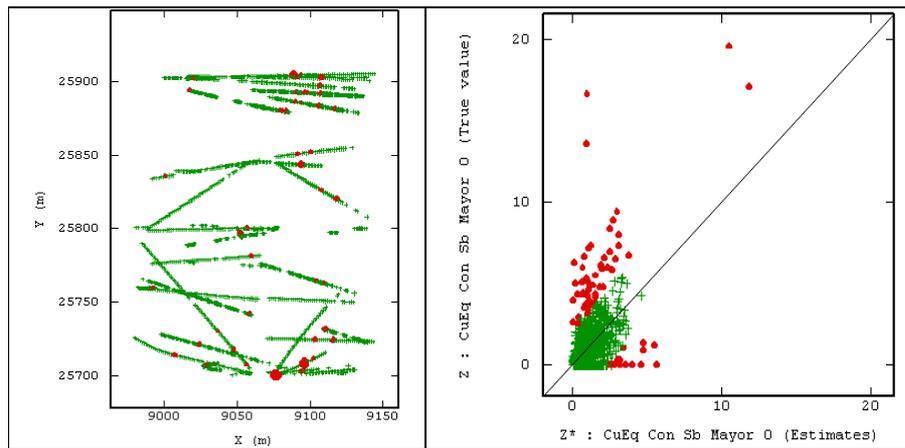


Imagen 195: Validación cruzada cobre equivalente: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).

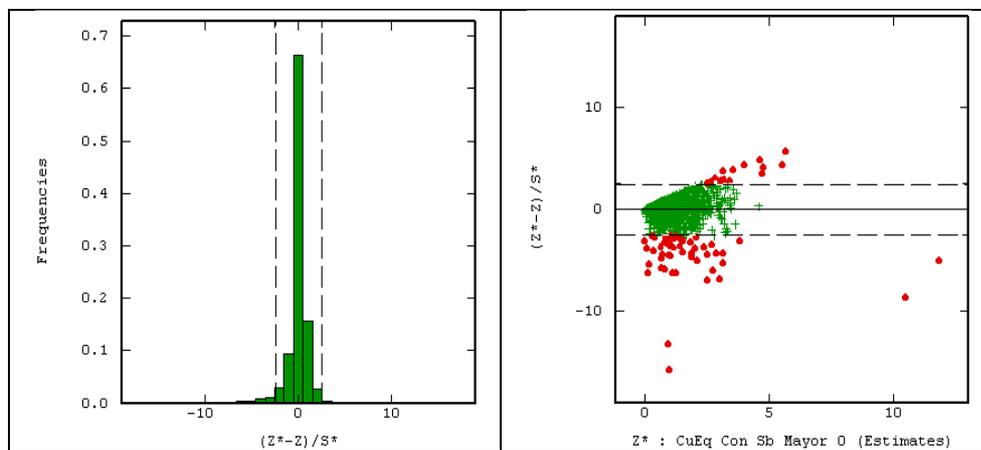


Imagen 196: Validación cruzada cobre equivalente: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).

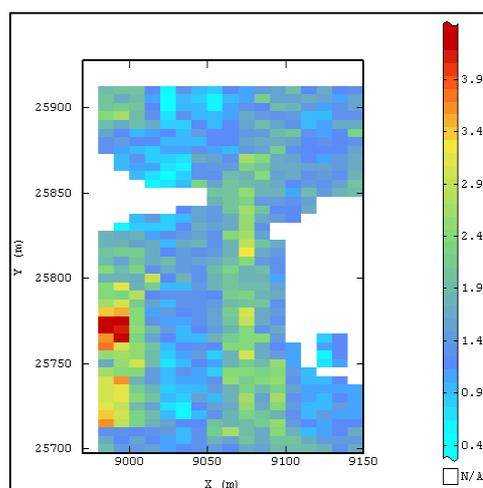
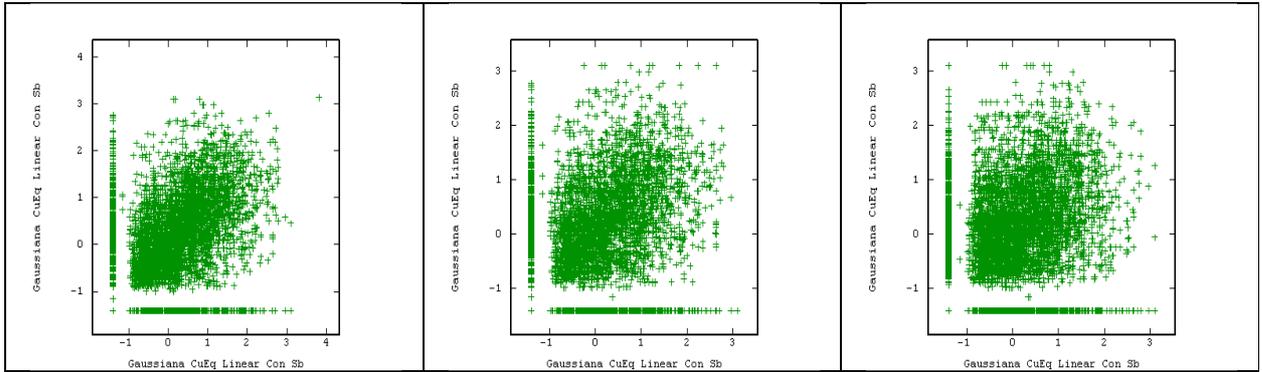
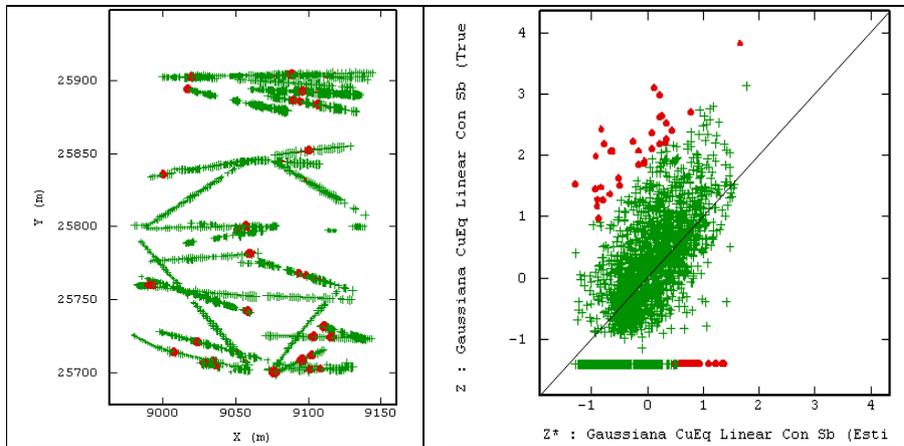


Imagen 197: Desviación estándar de error de kriging de cobre equivalente con su respectiva leyenda.

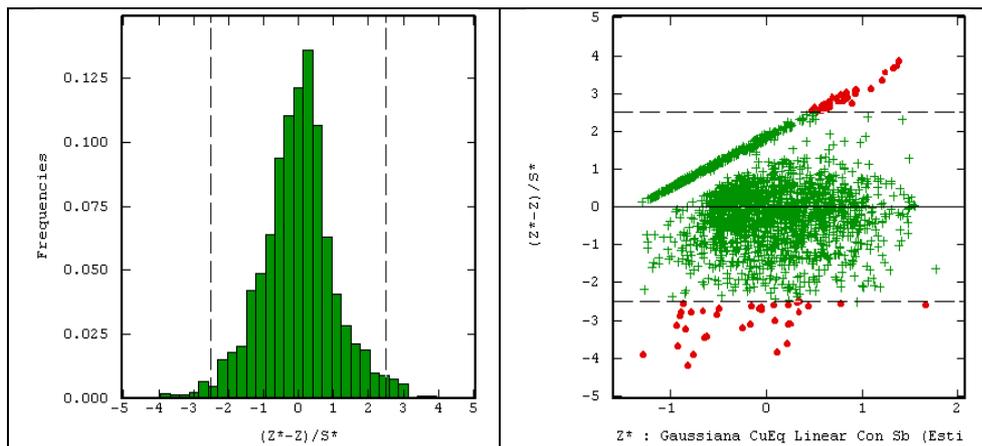
**D6: Enfoque 3: Metodología 2**



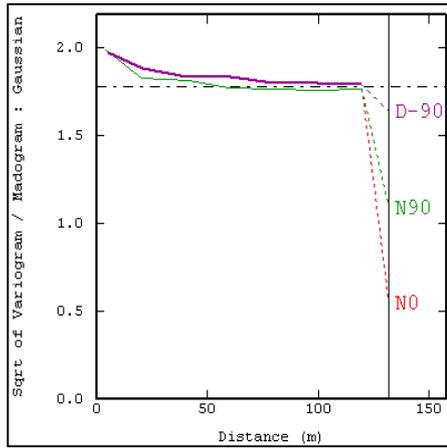
**Imagen 198:** Nubes de correlación diferida de cobre equivalente a 2,5[m] (derecha), a 5[m] (centro) y a 10[m] (izquierda).



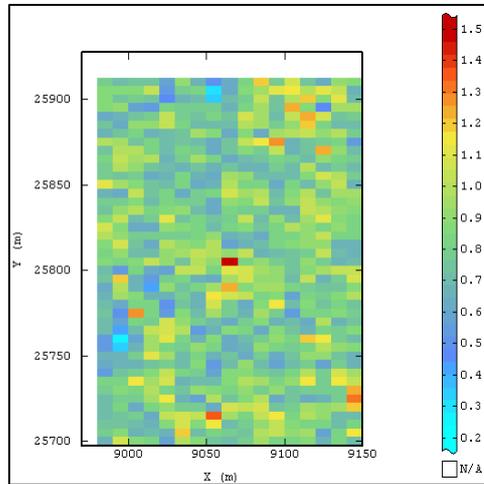
**Imagen 199:** Validación cruzada gaussiana cobre equivalente: mapa indicando los datos no robustos (izquierda) y nube de correlación entre valores reales y estimados (derecha).



**Imagen 200:** Validación cruzada gaussiana cobre equivalente: histograma de errores estandarizados (izquierda) y nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados (derecha).



**Imagen 201: Cuociente entre raíz de variograma y madograma cobre equivalente.**



**Imagen 202: Desviación estándar de las realizaciones de cobre equivalente.**