



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

**ANÁLISIS DEL MERCADO DE GENERACIÓN ELÉCTRICA: SPOT, CONTRATOS Y
COMPORTAMIENTOS ESTRATÉGICOS**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

CECILIA ANDREA TESTART PACHECO

PROFESOR GUÍA:
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN ESCOBAR CASTRO
RODRIGO PALMA BEHNKE

SANTIAGO DE CHILE
AGOSTO 2010

ANÁLISIS DEL MERCADO DE GENERACIÓN ELÉCTRICA: SPOT, CONTRATOS Y COMPORTAMIENTOS ESTRATÉGICOS

En Chile el sector eléctrico se distingue de la estructura monopólica tradicional por estar dividido en tres segmentos separados: generación, transmisión y distribución. El segmento de generación es un mercado desregulado conformado por un lado por el mercado spot de venta física de electricidad, y por otro lado por el mercado de contratos comerciales entre generadores y clientes.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo del mercado de generación eléctrica basado en teoría de juegos, que sirva de herramienta y permita analizar el comportamiento estratégico de las empresas presentes en este mercado, estudiando en conjunto su participación en el mercado spot con la venta física de energía, y en el mercado de contratos comercializando la energía futura.

La realización del trabajo comienza con un estudio en profundidad del funcionamiento del mercado de generación eléctrica y con una revisión de la bibliografía existente con respecto a modelos de mercados de generación desregulados.

A partir de esta base, se desarrolla un modelo basado en el mercado de generación chileno, para un nivel de inversión dada, que para efectos de simplicidad, no considera la capacidad máxima ni las pérdidas de transferencias, y donde la demanda es determinista. El modelo es dinámico, contempla dos etapas consecutivas, una para el mercado de contratos y otra para el mercado spot.

Para el modelo general no se encuentra equilibrio en estrategias puras y se demuestra la existencia de un equilibrio en estrategias mixtas. Las estrategias mixtas representan una probabilidad asociada a la oferta de un contrato en precio y cantidad de un generador en el mercado de contratos para satisfacer la demanda del cliente.

Gracias al estudio del modelo general y de casos particulares, se concluye que un mercado competitivo de generación eléctrica como el chileno es un mercado complejo en el cual la legislación juega un rol clave con respecto a los comportamientos de las empresas presentes. Es así como un generador contratado tiene incentivos para transmitir en el mercado spot su costo real de producción en el caso simétrico, o inferior al siguiente costo de producción en el caso asimétrico.

Del mismo modo, se obtienen principios del funcionamiento del mercado, observables en la historia reciente del mercado de generación chileno. Primero, mientras más cercana sea la demanda a la capacidad total del sistema, más elevado es el precio de los contratos. Segundo, un generador sobrecontratado disminuye su utilidad mercado spot con pérdidas relacionadas con sus contratos. Tercero, el generador con menor costo marginal de producción obtiene mayores ingresos.

El modelo y el trabajo desarrollado es un primer paso en el desarrollo de una herramienta para el estudio de la toma de decisiones en el mercado de generación y del mercado en sí. Se puede extender introduciendo por ejemplo en el modelo más generadores, las pérdidas por transferencia, las inversiones según la tecnología o considerando el juego repetido del modelo.

*A mis abuelos ingenieros,
quienes me motivaron a estudiar esta carrera.*

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a toda mi gran familia, a mi papá Enrique Testart, a Adriana Undurraga, a Gustavo Gonzalez, a Horacio Salamanca, a mi hermanito Luis Enrique Testart, y muy especialmente a mi mamá Patricia Pacheco, a mi hermano Javier Testart y a Pipa Isabel Bustamante, por ser tan unidos y apoyarme siempre incondicionalmente en mis proyectos y durante todos mis estudios.

Agradezco también a mis amigos, en especial a Bruno Carrillo, por ser mis otros hermanos, con su compañía, alegría, y optimismo durante toda la carrera, dentro y fuera de Chile.

En particular, le agradezco a Ricardo Díaz haber querido acompañarme y apoyarme en este trayecto, hasta decidir empezar a formar juntos nuestro propio camino.

Agradezco a los profesores Alejandro Jofré, Juan Escobar y Rodrigo Palma, por ayudarme, guiarme y animarme continuamente a lo largo del trabajo.

Finalmente, muchas gracias a quienes tuvieron la paciencia y el tiempo de explicarme el funcionamiento del sector eléctrico y de transmitirme su conocimiento.

Índice

1. Antecedentes Generales	1
1.1. Introducción	1
1.2. Motivación	1
1.3. Objetivos	3
1.3.1. Objetivo General	3
1.3.2. Objetivos Específicos	3
1.4. Marco Conceptual	3
1.5. Metodología	4
1.6. Resultados Esperados	5
1.7. Alcances	6
2. El Mercado de Generación Eléctrica Chileno	8
2.1. Descripción General del Sector Eléctrico Chileno	8
2.2. Marco Institucional del Mercado Eléctrico en Chile	10
2.3. Sistemas Interconectados de Chile	11
2.4. El Mercado Competitivo de Generación Eléctrica	15
2.4.1. El Mercado Spot	15
2.4.2. El Mercado de Contratos	17
3. Modelo del Mercado de Generación	20
3.1. Construcción del Modelo	20
3.2. Descripción del Modelo	23
3.3. Mecanismos de Decisión del Modelo	25
3.3.1. Mecanismo de Decisión del Cliente	25
3.3.2. Mecanismo de Decisión del Operador del Sistema	25
3.4. Funciones de Demanda de los Mercados	26
3.4.1. Demanda en el Mercado de Contratos	26

3.4.2.	Demanda en el Mercado Spot	26
3.5.	Utilidad de los generadores	27
4.	Equilibrios en Estrategias Puras	28
4.1.	Equilibrios Perfectos de Subjuego de la 2 ^a Etapa	28
4.1.1.	El problema del Generador en la 2 ^a Etapa	28
4.1.2.	Definición de un Equilibrio	28
4.1.3.	Búsqueda de los Equilibrios	29
4.2.	Equilibrios de la 1 ^a Etapa	31
4.2.1.	El problema del Generador en la 1 ^a Etapa	31
4.2.2.	Definición de un Equilibrio	31
4.2.3.	Búsqueda de los Equilibrios	32
5.	Equilibrios en Estrategias Mixtas	33
5.1.	Descripción del Modelo	33
5.2.	Equilibrios Perfectos de Subjuego de la 2 ^a Etapa	34
5.2.1.	El problema del Generador en la 2 ^a Etapa	35
5.2.2.	Definición de un Equilibrio	35
5.2.3.	Búsqueda de los Equilibrios	35
5.3.	Equilibrios de la 1 ^a Etapa	36
5.3.1.	El problema del Generador en la 1 ^a Etapa	36
5.3.2.	Existencia de Equilibrio en Estrategias Mixtas	37
6.	Desarrollo de Casos Particulares	39
6.1.	Descripción del Modelo Simplificado	39
6.2.	Mecanismos, Demanda y Utilidad	40
6.2.1.	Mecanismos de Decisión del Cliente y del CDEC	40
6.2.2.	Funciones de Demanda	41
6.2.3.	Utilidad de los Generadores	41

6.3.	Desarrollo de los Casos Particulares	42
6.3.1.	Caso simétrico con un generador que contrata la totalidad de la demanda	42
6.3.2.	Caso simétrico con un generador que contrata su capacidad total y otro la demanda residual	43
6.3.3.	Caso con asimetría leve y un generador que contrata la totalidad de la demanda	44
6.3.4.	Caso con asimetría fuerte y un generador que contrata la totalidad de la demanda	45
7.	Análisis de los Resultados	47
7.1.	Análisis del Modelo Estudiado	47
7.2.	Análisis de los Casos Particulares	48
7.2.1.	Análisis del Caso 1: Caso simétrico con $X = d$	49
7.2.2.	Análisis del Caso 2: Caso simétrico con $X = k$	50
7.2.3.	Análisis del Caso 3: Caso asimétrico leve con $X = d$	51
7.2.4.	Análisis del Caso 4: Caso asimétrico fuerte con $X = d$	52
7.2.5.	Análisis General de los Casos	53
7.3.	Contraste con el Mercado de Generación Chileno	55
8.	Conclusiones	57
	Bibliografía	59
	Anexos	60
A.	Descripción de las Licitaciones de Energía	62
B.	Detalle de los Cálculos del Equilibrio	63
C.	Detalle de los Cálculos de los Casos Particulares	67
D.	Modelo del Mercado Spot	77

Índice de figuras

1.	Esquema de un Sistema Eléctrico	9
2.	Sistema Interconectado Norte Grande	12
3.	Sistema Interconectado Central	13
4.	Mecanismo del CDEC para calcular el precio spot	16
5.	Diagrama del funcionamiento del Mercado Spot	17
6.	Representación gráfica del modelo	24
7.	Gráfico de la función $U_i^1(\cdot, c'_j)$ según los valores de $d - k - q_i^c$	29
8.	Gráfico de los intervalos de costos marginales para los casos asimétricos.	42
9.	Gráficos de distribuciones y densidades de probabilidad de equilibrio según el valor de la demanda.	44
10.	Gráfico de la función utilidad U_i en función de p_i , para $q_i, q_j \in [d - k, k]$	47
11.	Gráfico de la función utilidad U_i en función de c'_i , para un generador sin contrato	48
12.	Gráfico de los resultados de equilibrio del caso $X = d$ en función del valor de la demanda.	49
13.	Gráfico de la esperanza del precio de contrato $E_F(p_i)$ en función del valor de la demanda.	50
14.	Gráfico de los resultados de equilibrio del caso asimétrico leve en función del valor de la demanda.	51
15.	Gráfico de los resultados de equilibrio del caso asimétrico fuerte en función de la demanda.	53

Índice de cuadros

1. Capacidades instaladas en MW de los sistemas eléctricos chilenos 14
2. Costos variables de producción de las centrales térmicas del SIC a Octubre 2009 . . 15
3. Resumen de los resultados obtenidos en el equilibrio de los casos particulares . . . 54

1. Antecedentes Generales

A continuación se presentan los antecedentes generales con el objetivo de facilitar la comprensión de este trabajo. Se comienza con una breve introducción del entorno del mercado eléctrico, para luego explicar la motivación, los objetivos, el marco conceptual en el que se encuadra el trabajo, la metodología que lo articula, el alcance y los resultados esperados.

1.1. Introducción

En la década de los '80, Chile tomó un innovador camino hacia la transparencia y racionalidad en la fijación de precio de la energía: desregular el mercado eléctrico, introduciendo la libre competencia entre los generadores.

La organización tradicional de la industria eléctrica es de compañías integradas verticalmente, que son en su mayoría instituciones públicas. No obstante, el mercado eléctrico está compuesto por tres actividades diferentes: generación, transmisión y distribución. Al comienzo de la década de los '80, en Chile se decidió separar el sector eléctrico en los mercados correspondientes a las tres actividades diferentes, tanto en el plano de la regulación como en el de su propiedad.

El segmento de la generación -el segmento de interés de este trabajo- está compuesto por las empresas generadoras de electricidad, que producen con sus centrales hidroeléctricas, térmicas, eólicas u otras, como se describe con mayor detalle en la sección dedicada a la descripción del mercado de generación chileno¹.

Para comercializar la energía, las empresas generadoras establecen contratos a mediano, largo plazo con las empresas distribuidoras o con grandes clientes. Sin embargo, la venta física de la energía, se lleva a cabo en el mercado spot, donde el Centro de Despacho Económico de Carga (CDEC) regula el funcionamiento y asegura la producción al menor costo del sistema.

Las empresas generadoras están entonces presentes en estos dos mercados -de contratos y spot- donde tienen que tomar decisiones que afectan su desempeño económico. En este mercado de generación eléctrica, cómo interactúan las empresas generadoras entre si? Cómo se forman los precios? Existen equilibrios de mercado? Cómo influye la regulación de estos mercados en los equilibrios y comportamientos de los agentes?

1.2. Motivación

La principal motivación de este trabajo, es la de desarrollar un modelo simple del mercado de generación, incluyendo el mercado spot y el mercado de contratos, que permita observar los mecanismos de formación de precio en ambos mercados a partir de la interacción de las empresas generadoras entre si. Se quiere que el modelo sea una herramienta para ayudar a la toma de decisiones y al análisis del mercado de generación.

En la literatura actual, existen modelos de mercados de generación desregulados, mas son

¹Ver sección 2.4 página 15.

modelos que no incluyen particularidades del mercado chileno. Por ejemplo, en *Cournot Competition, Forward Markets and Efficiency* de Allaz y Villa (1991) [1], se considera un mercado de contratos futuros y un mercado spot, sin embargo la energía transada en los contratos no se transa en el mercado spot, mientras que en el mercado chileno toda la venta física de energía pasa por el mercado spot. Luego, Liski y Montero (2006) [18], extienden el trabajo anterior estudiando en caso en que se impone un mínimo de contratos a los generadores, pero también sin incluir esa venta física en el mercado spot.

En *Auction Design for the Colombian Electricity Market* de Stacchetti (1999) [22], el modelo diseñado considera que los generadores ofrecen contratos a los clientes pero estos últimos no están obligados a contratar la totalidad de su consumo como en el caso chileno. Además, el trabajo se centra principalmente en las situaciones en que las centrales hidráulicas de pasada pueden ejercer poder de mercado.

En *Making Competition Work in Electricity* de Hunt (2002) [14], se estudia largamente el caso de Estados-Unidos y los estados que han ido desregulando sus mercados de generación, donde los mecanismos de decisión del despacho son diferentes al caso chileno ya que tiene el mecanismo de bolsa de energía.

Además, se estudian los modelos económicos existente que incluyan competencia en precio y cantidad. En la mayoría, la cantidad es considerada la capacidad máxima como en Levitan y Shubik (1970) [16] y Kreps y Scheinkman (1983) [15]. Levitan y Shubik (1976) [17] analiza el precio y la cantidad como variables estratégicas introduciendo un costo de inventario.

Entonces, se quiere desarrollar un modelo que incorpore la participación de las empresas generadoras en el mercado spot y en el mercado de contratos, considerando las particularidades del mercado chileno.

Escobar y Jofré (2009) [12] desarrollaron un modelo del mercado spot que incluía las pérdidas por transferencia. A partir de este modelo, se incluye el mercado de contratos, con el fin de ayudar a la comprensión de las interacciones que se presentan por la participación en ambos mercados de los agentes económicos.

Con este nuevo modelo, se quiere observar los comportamientos de las empresas generadoras presentes en el mercado, como interactúan entre si y analizar la formación de los precios, viendo si existe algún equilibrio de mercado.

Al encontrar los equilibrios, se busca entender qué representa económicamente y en los comportamientos de las empresas generadoras para obtener una visión de lo que ocurre en el mercado modelado.

Finalmente, se quiere contrastar los resultados con la historia reciente del mercado de generación nacional, para poder verificar la pertinencia del modelo y sus supuestos.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

- Desarrollar un modelo basado en Teoría de Juegos dinámicos, que permita estudiar en el mediano plazo, el efecto en conjunto de la venta física de energía en el mercado Spot regulado y de la venta comercial de energía por contrato, para determinar posibles comportamientos estratégicos de las empresas generadoras.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Analizar el funcionamiento del mercado conjunto de generación eléctrica: el mercado spot junto con el mercado de contratos; estudiando entre otros la regulación, el marco institucional, los miembros integrantes del caso chileno.
- Construir un modelo analítico del mercado de generación incluyendo el mercado spot junto con el mercado de contratos, tomando en cuenta las variables y restricciones más importantes presentes en ambos mercados.
- Determinar la existencia de equilibrios de mercado del modelo. Obtener una expresión analítica cuando sea posible.
- Resolver casos específicos del modelo con valores relevantes en sus variables.
- Analizar el o los equilibrios obtenidos para estudiar la formación de los precios a través la interacción de las empresas presentes en ambos mercados.
- Contrastar los resultados obtenidos con la historia reciente del mercado de generación chileno.

1.4. Marco Conceptual: Teoría de Juegos²

La Teoría de Juegos quiere capturar matemáticamente el comportamiento de personas o grupos de personas en situaciones estratégicas. Es decir en situaciones en que el beneficio de una opción individual depende de las decisiones - o jugadas- de los otros.

En esta teoría, se considera que los agentes participantes, ya sean individuos o empresas, son racionales y siempre buscan maximizar su beneficio o utilidad esperada.

La Teoría de Juegos es la teoría matemática de la negociación como comportamiento económico y fue desarrollada en gran parte en su comienzo por John von Neumann y Oscar Morgenstern. Estos autores se enfocaron principalmente en los juegos de suma cero, en que un jugador gana a las expensas del otro. Luego, con el trabajo de John Nash en la década de los '50, se extendió el concepto de equilibrio a las situaciones en que los jugadores no tienen incentivos para cambiar su jugada - Equilibrios de Nash-.

²Basado en *Game Theory* de Fudenberg y Tirole [13], *A Course in game Theory* de Osborne y Rubinstein [19], *Industrial Organization* de Tirole [24] y *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New tools* de Vives [25].

En la economía de mercado, la teoría de juegos no cooperativos se ha transformado en una importante herramienta para el análisis de interacciones estratégicas entre jugadores. Por ejemplo, se utiliza la teoría de juegos dinámicos para identificar situaciones en que no se cumplen las condiciones para la competencia perfecta -del punto de vista del bienestar social-, y también, para minimizar riesgos en la toma de decisión -del punto de vista de un participante del mercado-. Es por esto que ha sido usada extensivamente en análisis microeconómicos, donde ha demostrado un grado elevado de predicción en áreas como la organización industrial.

En este trabajo en particular, se utiliza la Teoría de Juegos ya que permite interpretar el interés económico de las empresas generadoras: maximizar sus utilidades. Las utilidades de las generadoras -los jugadores-, dependen de sus decisiones -tener una parte, toda, o más que su producción contratada, transmitir o no sus verdaderos costos al operador del mercado spot-, como también dependen de las decisiones de los otros jugadores -el resto de las generadoras del sistema eléctrico. A estas distintas opciones de acción de los jugadores se les llama comportamiento estratégico.

El objetivo es encontrar equilibrios de Nash en estos juegos, que corresponden a las situaciones en que ninguna generadora tendrá incentivos de cambiar sus decisiones, ya que eso le implicaría disminuir su utilidad esperada.

Los equilibrios de Nash representan el equilibrio al que llega el mercado, estableciéndose un nivel óptimo para el precio de venta de la energía en el caso estudiado.

El concepto de equilibrio de Nash se puede extender a juegos dinámico o juego extensivos, utilizados para describir una secuencia estructurada de situaciones de toma de decisión. Sin embargo, en tales situaciones, en un equilibrio de Nash los jugadores consideran dadas las estrategias de los otros jugadores y por lo tanto no pueden influenciar esas decisiones, lo que puede llevar a equilibrios no plausibles o absurdos.

Entonces en juegos dinámicos se introduce la noción de Equilibrios de Nash Perfectos en Subjuego que corresponde básicamente a seleccionar los equilibrios de Nash que no consideran amenazas o decisiones no-creíbles. Para esto, se requiere que la elección de los jugadores sea óptima incluso para situaciones que no se consideran en el equilibrio de Nash.

Para obtener los equilibrios perfectos de subjuego, se utiliza el procedimiento de inducción inversa o *backward induction*.

En el trabajo se utilizan los equilibrios perfectos de subjuego al considerar que las decisiones de un mercado –por ejemplo el mercado de contratos-, pueden afectar las decisiones posteriores en otro mercado –el mercado spot-.

1.5. Metodología

Este trabajo está estructurado con una metodología en tres partes, orientadas a cada uno de los objetivos específicos.

1. Revisión Bibliográfica

Se efectúa una revisión bibliográfica para conocer en profundidad el funcionamiento del mercado de generación eléctrica, familiarizarse con los conceptos de Teoría de Juego en el

contexto del mercado eléctrico, y estudiar los modelos ya existentes en la literatura para los mercado de generación desregulados.

Además se efectúan entrevistas a expertos de distintas áreas -Comisión Nacional de Energía, Centro de Energía³, distribuidoras y consultores especializados- para entender las particularidades específicas al mercado de generación chileno, la legislación actual y la historia.

2. Construcción del Modelo Analítico

Se desarrolla un modelo analítico basado en teoría de juego que representa los mercados spot y de contratos en los que están presentes las empresas generadoras, junto con las restricciones más importantes en el contexto del mercado de generación eléctrica, determinadas con la información obtenida de la revisión bibliográfica.

3. Determinación de los Equilibrios de Mercado

Para establecer los equilibrios del mercado, se utiliza *backward induction*. Se comienza buscando equilibrios en estrategias puras. Al no encontrar algún equilibrio en estrategias puras, se busca en estrategias mixtas.

Para obtener mayor información del modelo cuando no se encuentra una solución explícita para el equilibrio en estrategias mixtas, se resuelven casos particulares interesantes, en los que existe una solución explícita del equilibrio en estrategias puras o en estrategias mixtas, y de los cuales se extraen conclusiones.

4. Análisis de los Resultados

Se analizan el o los equilibrios obtenidos, buscando entender la formación del precio de equilibrio con respecto a la interacción de las empresas generadoras y las restricciones impuestas del modelo.

La idea es determinar por qué es ese el equilibrio al que llega el modelo, qué significa con respecto a los comportamientos de las empresas en ambos mercados y cuáles son sus implicancias para todos los agentes del modelo, incluyendo los clientes y el CDEC.

5. Contraste del Modelo y Análisis del Mercado

Se verifica el modelo comparándolo con la realidad del mercado chileno. Se busca entender el o los equilibrios de Nash de los modelos. Analizando estos puntos, se busca detectar comportamientos estratégicos de las empresas generadoras.

1.6. Resultados Esperados

Con este trabajo se quiere obtener un modelo analítico que constituya una herramienta para estudiar el mercado de generación eléctrica chileno, considerando en conjunto la venta física de energía en el Mercado Spot y las ventas comerciales del Mercado de Contratos.

Con esta herramienta, se busca analizar la estructura de los ingresos de las empresas generadoras y los mecanismos de formación de los precios de ambos mercados presentes en el mercado de generación según las características del mercado y las decisiones que toman estas empresas.

³Centro de Energía de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

El análisis del modelo creado busca aportar a la comprensión de los comportamientos posibles de las empresas generadoras en el mercado de generación, contemplando el efecto de la regulación y de los distintos tipos de generación presentes en el mercado, tratando siempre de establecer su impacto en la eficiencia del mercado.

El modelo busca determinar cómo reaccionan las empresas generadoras cuando un regulador impone un precio máximo para la demanda existente y los clientes deben tener la totalidad de su consumo contratado, tal como lo es en el caso chileno con las bandas de licitación y la imposibilidad de los clientes de participar en el mercado spot.

Al acercar los resultados del modelo a la actualidad del mercado de generación, se identifican con mayor claridad los movimientos en el mercado y los grandes hitos en la historia reciente. Se espera aportar en la comprensión de dichos sucesos.

1.7. Alcances

Los modelos analíticos corresponden al mercado de generación eléctrica. En mercados eléctricos desregulados como el mercado chileno, sólo la parte de generación de energía tiene libre entrada para los competidores y está totalmente separado de la transmisión y de la distribución.

Debido a las características de los recursos usados para transmisión y distribución, es socialmente óptimo que sean monopolios regulados. Por lo tanto, el análisis toma en cuenta la demanda de los consumidores finales que pasa a través de la transmisión y distribución, y afecta el mercado de generación eléctrica.

Teniendo como foco principal estudiar la interacción de las empresas generadoras en ambos mercados del mercado de generación eléctrica, no se toman en cuenta restricciones del sistema eléctrico tales como las capacidades máximas de transmisión o las pérdidas de energía por transmisión.

Del mismo modo, se considera que el cliente es capaz de proyectar exactamente su demanda futura al momento de emitir el contrato. En los contratos existentes en el mercado chileno, en el caso del consumo regulado, una distribuidora tiene derecho a consumir un 10% más del contratado, en el caso de un cliente libre, los contratos incluyen generalmente penalizaciones si no cumple dentro de cierto rango con la cantidad de energía contratada. Es decir, el cliente que contrata asume un riesgo al contratar una cierta cantidad de energía.

En este trabajo, el cliente contrata exactamente su consumo futuro, si bien el trabajo se puede extender a casos con demanda aleatoria sin perturbar los principales resultados.

Por otro lado, el estudio se realiza para un nivel de inversión dado. Esto quiere decir, que se considera fijo el sistema eléctrico que se modela así como también son fijos los actores presentes en él. Es un modelo donde no se contempla la posibilidad de nuevos entrantes. Sin embargo, a partir del modelo se puede estudiar si el costo de una inversión en cierta tecnología es adecuado con respecto a los ingresos que genera.

Con respecto a las transferencias monetarias del mercado spot para los generadores, estas contemplan sólo el pago por compra-venta de energía, sin considerar el llamado pago por poten-

cia. Según la legislación chilena actual, el pago por potencia se calcula semestralmente y se paga una cantidad fija mensual a los generadores. Es entonces un pago exógeno en el que no influyen directamente las decisiones de las distintas empresas generadoras. Es por esto que no se refleja en el modelo propuesto.

Por último, en la actualidad del mercado eléctrico, se repiten continuamente las mismas instancias de decisión - establecimiento de contratos y traspaso de costos al operador-, por lo que se pueden producir comportamientos de coalición a través del tiempo o estrategias de almacenamiento de producción en la generación hidráulica de embalse.

Sin embargo, el interés de este trabajo es de dar un primer entendimiento y análisis del comportamiento de las empresas generadoras en estos mercados en conjunto. Por lo tanto, el trabajo plantea un modelo dinámico pero no repetido del mercado de generación. Para el estudio de posible coaliciones se debe considerar una extensión del presente trabajo, en el que se juega repetidas veces el modelo dinámico.

2. El Mercado de Generación Eléctrica Chileno

El objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo del mercado de generación eléctrica, basándose en el mercado de generación eléctrica chileno. Es entonces de suma importancia conocer en profundidad el funcionamiento de este mercado.

Esta sección comienza por una descripción general del sector eléctrico nacional, del marco institucional y de los cuatro sistemas eléctricos existentes, para luego centrarse en el mercado de generación, poniendo énfasis en la caracterización de los dos mercados subyacentes: el mercado spot y el mercado de contratos.

2.1. Descripción General del Sector Eléctrico Chileno

El sector eléctrico está dividido en tres segmentos⁴: Generación, Transmisión y Distribución. Estos segmentos corresponden a actividades diferentes en la cadena de valor de la energía eléctrica.

En países en que el mercado eléctrico se ha desregulado, es decir, en que se ha abierto la participación de empresas privadas en la producción eléctrica -el caso de Chile-, estos tres segmentos están separados tanto en el plano de la regulación como en el de su propiedad.

A continuación, se describen los tres segmentos y sus principales características.

- El segmento de Generación :

El segmento de Generación es donde se produce la energía a partir de distintas fuentes. En este segmento se encuentran las empresas generadoras de la electricidad que es transmitida y distribuida a los consumidores finales.

En este segmento, las inversiones son intensivas en capital y de recuperación en el largo plazo. Además, las tecnologías actuales de generación tienen economía de escala limitada y no siempre pueden ser explotadas dada las características de la tecnología y del sistema eléctrico⁵.

Es principalmente por estas razones por las que es factible organizar este sector en un mercado competitivo, como lo es en los mercados desregulados de energía como el chileno. En el modelo de mercado competitivo de generación, las empresas generadoras compiten en el mercado de contratos e interactúan entre sí a través del mercado spot, como se profundizará en la parte 2.4 dedicada al mercado de generación en la página 15.

- El segmento de Transmisión :

El segmento de Transmisión es el que se encarga de transmitir la energía desde sus diversos puntos de generación, hasta las estaciones cercanas a los sectores de distribución final de la energía, a través de cables de alta tensión.

⁴Basado en la descripción de la Comisión Nacional de Energía: www.cne.cl[5], y en el capítulo 20 de *Nom Liefke o El Rayo Domado* de Walter Brokering, Rodrigo Palma y Luis Vargas [4].

⁵La generación basada en recursos naturales tiene los límites propios del recurso natural y la seguridad necesaria en los sistemas eléctricos limita la capacidad máxima de una unidad generadora soportada por el sistema.

En este segmento, las inversiones también son grandes y con periodos largos de recuperación. Sin embargo, existen ventajas técnicas y económicas al interconectar sistemas. En la transmisión hay claras economías de escala que inducen la naturaleza monopólica de este segmento.

En los mercados desregulados, la transmisión se organiza a través de un sistema de pagos tipo peajes por el uso de las instalaciones. Estos pagos son calculados a través de un procedimiento regulado por organismos del Estado, con el cuidado de no desorientar las decisiones descentralizadas en este segmento.

Los sistemas de transmisión son los que permiten y fomentan la existencia de mercados competitivos de generación. Los mercados eléctricos se originan a partir de un sistema de transmisión.

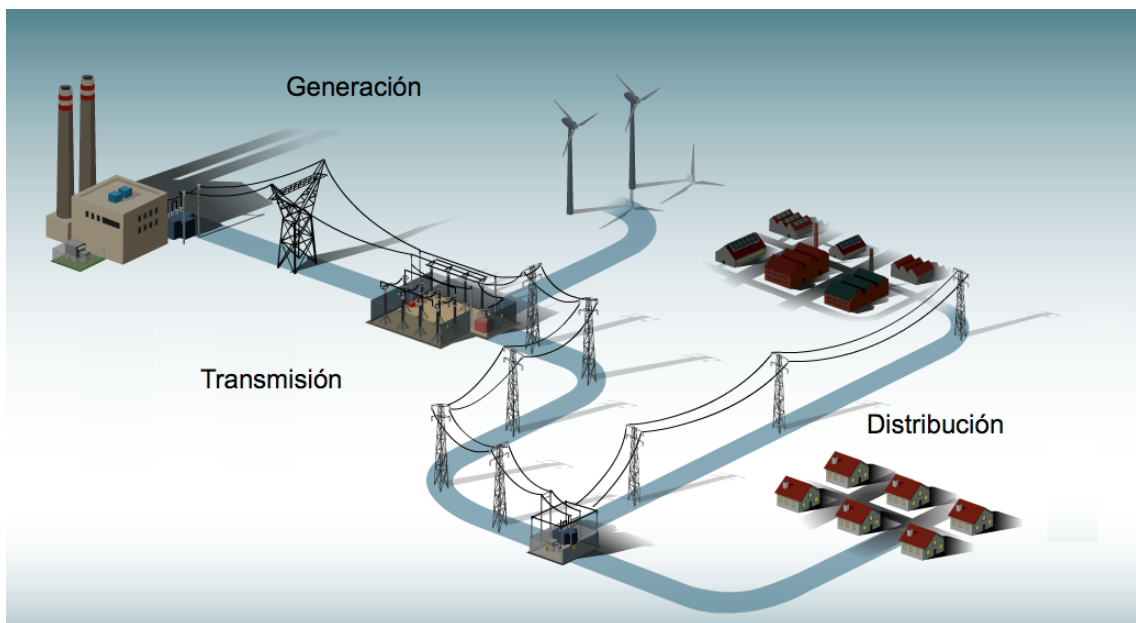
- El segmento de Distribución :

El segmento de Distribución es donde se distribuye la energía al cliente final a partir de las subestaciones de transmisión hasta las distintas residencias e industrias conectadas a la red de distribución.

En este sector hay economías de densidad que inducen la existencia de monopolios naturales de carácter geográficos, si bien no hay economías de escala tan marcadas como en la transmisión.

En los mercados desregulados se organiza la distribución a través de concesiones, con obligación de servicio en las respectivas zonas de concesión. Estas empresas están sujetas a la fijación de sus tarifas, obtenidas del análisis , efectuado por organismos estatales, de los costos de capital y operación de empresas modelo eficientes.

Figura 1: Esquema de un Sistema Eléctrico



Fuente: Red Eléctrica de España [10]

En la figura 1 se pueden observar los tres distintos segmentos dispuestos en un sistema eléctrico.

Cabe destacar que en ciertos mercados eléctricos desregulados existe un cuarto segmento, el de la comercialización. En este sector están presentes los agentes económicos que facilitan la generación de contratos de suministros entre las empresas generadoras y consumidores finales.

Como bien lo dice su nombre, la comercialización tiene una función comercial a diferencia de los otros sectores que tienen una función física. En la organización típica de la industria eléctrica hasta los años '90, no se pensaba en una función comercial separada de la distribución. Y sigue siendo el caso en la mayoría de los mercados eléctricos y en el de Chile.

A continuación se describen los principales organismos e instituciones que intervienen en el mercado eléctrico chileno.

2.2. Marco Institucional del Mercado Eléctrico en Chile

En los mercados desregulados, el Estado sólo ejerce funciones de regulación y fiscalización, dando también a veces indicaciones para la planificación de inversiones en alguno de los segmentos. En Chile, según lo establecido por la *Ley General de Servicios Eléctricos* (Decreto con Fuerza de Ley N°1 de 1982 del Ministerio de Minería), los principales organismos que participan en la regulación del mercado eléctrico son⁶:

- El Ministerio de Energía:

Recientemente creado, este ministerio nace a partir de la entrada en vigencia de la Ley N°20.402 el primero de febrero de 2010, con el fin de reordenar el sector público en el ámbito energético, traspasando funciones desde los Ministerios de Minería y Economía. Tiene como fin "diseñar y coordinar los planes, políticas y normas para el buen funcionamiento y desarrollo del sector" de acuerdo a la publicación oficial en el sitio web del Ministerio de Energía [9].

- La Comisión Nacional de Energía (CNE):

Principal organismo a cargo de proponer políticas para el sector y de la regulación. Además la CNE elabora los informes técnicos que sustentan las acciones administrativas. Es presidido por el Ministro de Energía y depende del Ministerio de Energía a partir de este año, anteriormente dependía de los Ministerios de Minería y de Economía.

- La Superintendencia de Electricidad y Combustibles (SEC):

Este organismo está a cargo de la fiscalización del sector, determinando el cumplimiento adecuado de la normativa de calidad y seguridad de servicio. La SEC también apoya en el otorgamiento de concesiones definitivas y transitorias de distribución. También depende del nuevo Ministerio de Energía.

- Los Centros de Despacho Económico de Carga (CDEC):

Los CDEC son organismos sin persona jurídica, a cargo de la coordinación de la operación de corto plazo de un sistema eléctrico interconectado, son a la vez operadores de sistema

⁶Basado en la documentación de la Comisión Nacional de Energía [5]: *La Regulación del Segmento Transmisión en Chile* [6] y *La Regulación del Segmento Distribución* [7] y del Ministerio de Energía [9].

independientes (*ISO Independent System Operator*) y operadores de mercado. Todos los propietarios de instalaciones interconectadas están sujetos a las instrucciones del CDEC del sistema eléctrico correspondiente.

Las funciones del CDEC, regidas por el Decreto Supremo N°327/97 y sus modificaciones, son de preservar la seguridad del servicio global y del sistema eléctrico, garantizar la operación al mínimo costo, y facilitar el uso compartido de los sistemas de transmisión mediante el pago de peajes para cubrir los costos.

Para funcionar adecuadamente, el CDEC programa las operaciones del sistema eléctrico día a día, planifica la operación del sistema eléctrico a mediano y largo plazo, calcula los costos marginales que se derivan de la planificación y programación de operaciones, determina y valoriza las transferencias de electricidad entre sus integrantes y coordina la mantención preventiva de las unidades de generación.

Es decir, el CDEC es el órgano encargado de determinar los pagos o transferencias monetarias entre las empresas generadoras del sistema eléctrico a su cargo. Estos pagos son producto de las transferencias de energía y potencia que se dan en el mercado de corto plazo, el mercado spot.

Este organismo está compuesto por las empresas generadoras, las empresas de transmisión troncal, de subtransmisión y un representante de clientes libres, cuyas instalaciones están interconectadas entre sí, con representación en su Directorio. Estas empresas son quienes lo financian.

En la sección 2.4.1 (página 15) dedicada al mercado spot, se detalla la importancia y rol del CDEC en dicho mercado.

Existen otros organismos administrativos y regulatorios en el sector eléctrico, que cumplen tareas más específicas. Estos son: la Comisión Nacional de Medio Ambiente (CONAMA), quien otorga la aprobación de los estudios de impacto ambientales de los proyectos del sector; el 'Panel de Expertos', encargado de resolver los conflictos entre agentes del sector, y las municipalidades, encargadas de extender permisos para la utilización de bienes públicos.

En la sección siguiente se describen los principales sistemas interconectados de Chile.

2.3. Sistemas Interconectados de Chile

Actualmente existen en Chile cuatro sistemas eléctricos independientes que se describen a continuación ⁷:

- **Sistema Interconectado Norte Grande (SING):**

Este sistema interconectado abastece a la Primera y Segunda Región, cubriendo 185.142km², equivalente a 24,5 % del territorio continental del país. Se extiende desde Arica hasta Coloso (Puerto al sur de Antofagasta) abasteciendo a ciudades y poblados como también a las industrias y mineras presentes en esa zona, tal como se muestra en la figura 2.

⁷Basado en la documentación de la CNE [5–7] y del Ministerio de Energía [9].

Figura 2: Sistema Interconectado Norte Grande



Fuente: Comisión Nacional de Energía [5]

El SING se caracteriza por tener una capacidad instalada que alcanza los 3.601,9MW, de los cuales el 99,64% es de origen térmico, el resto es de origen hidráulico.

Además, en este sistema interconectado, el consumo de los clientes regulados⁸, es decir aquellos cuya potencia conectada es inferior a 2000 kW, y para los cuales el precio y la calidad de suministro son regulados, representa alrededor del 10% del consumo total.

En el SING, a diciembre de 2008, operan 6 empresas de generación y una de transmisión. Junto con el representante de clientes libres⁹, componen el CDEC-SING, organismo encargado de la operación de corto plazo del sistema¹⁰.

- Sistema Interconectado Central (SIC):

Este sistema interconectado es el principal sistema eléctrico de Chile, abastece desde la Tercera a la Décima Región, entregando suministro eléctrico a más del 90% de la población nacional. Se extiende desde Taltal hasta la Isla Grande de Chiloé, como se observa en la figura 3.

La capacidad instalada del SIC es de 9.385,7MW. A diferencia del SING, el 53,46% de la capacidad instalada es de origen hidráulico, mientras que las centrales térmicas representan el 46,34%, y el restante 0,2% se compone de centrales eólicas.

⁸La definición precisa se encuentra en la sección 2.4.2 página 17.

⁹Cientes para los cuales el precio y la calidad de suministro no está regulado. La definición precisa se encuentra en la sección 2.4.2 página 18.

¹⁰Ver descripción CDEC página 10.

Figura 3: Sistema Interconectado Central



Fuente: Comisión Nacional de Energía [5]

Por otro lado, el consumo de clientes regulados representa alrededor del 65 % de la generación neta del sistema.

En este sistema operan más de veinte empresas generadoras, que junto con algunas empresas de transmisión y un representante de los clientes libres, conforman el CDEC-SIC.

- Sistema de Aysén:

Es el sistema de la Décimo Primera Región y abastece las ciudades de Coyhaique y Puerto Aysén. Su capacidad instalada es de 50,45MW, constituidas en un 54,2 % de centrales térmicas, un 41,7 % de centrales hidráulicas y 4,1 % de centrales eólicas. En condiciones hidrológicas favorables el 90 % del consumo es abastecido por centrales hidráulicas de pasada.

Este sistema se caracteriza porque el consumo total se compone integralmente de clientes regulados, y además existe una única empresa operadora dado el reducido tamaño, propietaria de las instalaciones de generación, transmisión y distribución de energía eléctrica, Edelaysen S.A.

- Sistema de Magallanes

Es el sistema de la Décimo Segunda Región que se compone de cuatro sistemas denominados medianos, el de Punta Arenas, Puerto Natales, Puerto Williams y Puerto Porvenir, que abastecen a las ciudades homónimas. La capacidad instalada total de estos cuatro sistemas independientes es de 98,7MW. El parque generador se compone totalmente de centrales térmicas, siendo el 85 % centrales térmicas a gas natural, y 15 % centrales térmicas a petróleo.

Al igual que en el sistema de Aysen, el consumo se compone integralmente de clientes regulados, y existe una única empresa operadora, propietaria de las instalaciones de generación, transmisión y distribución de energía eléctrica, Edelmag S.A.

Cuadro 1: Capacidades instaladas en MW de los sistemas eléctricos chilenos

Tipo de Central		SING	SIC	S.Aysen	S.Magallanes	TOTAL
Hidráulicas	Embalse	-	3.393,4	-	-	3.393,4
	Pasada	12,8	1.516,3	20,7	-	1.549,8
	Total	12,8	4.909,7	20,7	-	4.943,2
Térmicas	Carbón	1.205,6	879,7	-	-	2.085,3
	Gas Natural	2.111,7	2.547,3	-	84,5	4.743,5
	Petróleo	271,8	906,5	27,8	14,2	1220,7
	Biomasa	-	124,4	-	-	124,4
	Total	3.589,1	4.457,9	27,8	98,7	8.173,47
Eolicas	-	18,2	2,0	-	20,2	
TOTAL		3601,9	9.385,7	50,45	98,7	13136,75

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la Comisión Nacional de Energía [5]

El cuadro 1 resume las capacidades instaladas según tipo de generación a diciembre de 2008 de los cuatro principales sistemas eléctricos del país.

La presencia de ciertas tecnologías en los sistemas eléctricos tiene consecuencias directas tanto en el despacho como en el precio de venta de energía en el mercado spot. Este precio, se transmite finalmente a los contratos entre las empresas generadoras y los grandes clientes y/o distribuidoras, afectando el precio final de la energía percibido por los consumidores.

Los costos variables de producción son muy distintos de una tecnología a otra. Por ejemplo, el costo marginal de una central hidráulica de producir un MWh más dentro de su capacidad, es prácticamente nulo, mientras que para una central térmica, el costo marginal promedio de las tecnologías presentes en el SIC es de US\$71,70 por MWh¹¹, teniendo harta varianza dentro de esta categoría.

En el cuadro 2 se pueden apreciar los costos marginales (costos variables de producción) promedio por tecnología de las centrales térmicas y eólicas en base al nivel de precio de los combustibles de octubre de 2009.

De los cuatro sistemas eléctricos del país, sólo dos, el SING y el SIC son sistemas interconectados y de tamaño suficiente como para separar los tres segmentos presentes en el sector eléctrico. Cada uno de estos sistemas eléctricos forma un mercado eléctrico, compuesto de generadores, transmisoras, distribuidoras y clientes, y donde el mercado de generación está operado por un CDEC.

¹¹Promedio obtenido con los datos del informe de *Fijación de Precios de Nudo Octubre 2009 Sistema Interconectado Central* [8], efectuado por la Comisión Nacional de Energía.

Cuadro 2: Costos variables de producción de las centrales térmicas del SIC a Octubre 2009

Tipo de Combustible	Costo Variable de Producción [US\$/MWh]
Biomasa	38,35
Biomasa-Licor Negro-Petróleo N°6	91,98
Biomasa-Petróleo N°6	103,55
Carbón	47,31
Desechos Forestales	0,00
Eolica	7,70
Licor Negro-PetróleoN°6	0,00
Petróleo Diesel	165,66
Petróleo IFO-180	190,72
PROMEDIO	71,70

Fuente: Elaboración propia a partir del Informe *Fijación de Precios de Nudo Octubre 2009 SIC* [8].

A continuación, se describe el funcionamiento del sector de generación de un sistema interconectado.

2.4. El Mercado Competitivo de Generación Eléctrica

El mercado de generación en Chile, se organiza como un *Mandatory Pool*, compuesto por un mercado mayorista de carácter competitivo, en el cual se comercializa la producción del sector de generación. Este mercado resulta de la unión del mercado *spot* más el mercado de contratos. Estos mercados son detallados en las secciones que siguen.

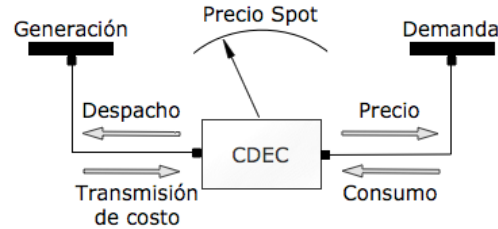
2.4.1. El Mercado Spot

El *mercado spot* se establece conforme a un sistema de despacho centralizado¹², a cargo del Centro de Despacho Económico de Carga (CDEC) cuyas decisiones las empresas generadoras deben obedecer (*Mandatory Pool*). El CDEC despacha las unidades generadoras por orden de mérito de los costos variables de operación de dichas unidades, y los precios se basan en el costo marginal de corto plazo del sistema eléctrico.

El precio del mercado *spot* para un período dado, corresponde al costo variable de la última unidad generadora despachada que esté en condiciones de satisfacer un incremento de demanda. Es decir que el precio corresponde al mayor costo variable de las unidades generadoras despachadas, tomando en cuenta las restricciones que tiene el sistema eléctrico.

¹²Basado en la descripción del modelo de mercado competitivo en generación, capítulo 2, *La Regulación del Segmento Transmisión en Chile* [6].

Figura 4: Mecanismo del CDEC para calcular el precio spot



Fuente: Elaboración propia en base a *Market Operations in Electric Power Systems*¹³

La figura 4 ilustra el mecanismo de decisión del precio de parte del CDEC. El CDEC recibe por un lado la declaración de costos marginales de parte de las unidades generadoras y por otro lado la necesidad de consumo. Con estos datos y las restricciones del sistema, determina el despacho (las unidades que producirán) y el precio del mercado spot, con el que se calcularán las transferencias monetarias entre los generadores presentes en el mercado.

El funcionamiento descrito para el mercado spot es el que se aplica en las horas de demanda normal del sistema eléctrico. En las horas de mayor demanda, el costo marginal de la energía tiene además del costo variable, un cargo por capacidad. Este cargo corresponde a una componente del costo esperado por pérdida de carga, es decir por insuficiente capacidad de generación ante una falla de unidades de generación. A este cargo se le llama pago por potencia.

Cabe destacar que los costos de las unidades generadoras son auditados. Además, si una empresa generadora considera que otra empresa presenta costos muy elevados al CDEC, puede pedir revisión de los cálculos efectuados para obtener el costo propuesto al CDEC, y existe una penalización en caso de que estos no hayan sido evaluados correctamente.

El despacho económico toma en cuenta las restricciones del sistema eléctrico, como las restricciones del sistema de transmisión y los mínimos técnicos de las unidades generadoras. Sin embargo, en el caso de racionamiento, el modelo cambia y se considera el valor del costo de falla de largo plazo en vez del costo marginal de energía.

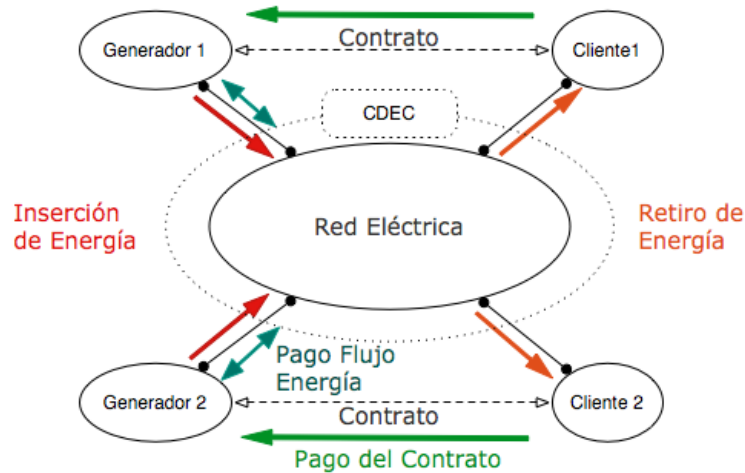
El mercado spot consiste en la compraventa de energía resultante de efectuar el despacho económico de las unidades generadoras disponibles para satisfacer la demanda de electricidad en un período dado.

En el mercado spot, la compra venta de energía se realiza sólo entre las unidades generadoras. Los clientes que retiran electricidad del sistema son representados por las empresas generadoras con las que han establecido contrato. A estas empresas se les 'cobra' el costo de suministro de sus clientes y se les paga la energía que inyectan al sistema.

La figura 5 representa el caso de una red eléctrica compuesta por dos generadores y dos clientes, en la que se muestran los flujos de energéticos y económicos del mercado spot con un despacho centralizado efectuado por el CDEC. En el ejemplo, el cliente 1 establece un contrato por suministro con el generador 1 y el cliente 2 con el generador 2.

Tal como lo muestra la figura 5, las unidades generadoras inyectan energía a la red y los clientes retiran el suministro de energía que utilicen. Los clientes pagan su utilización de energía

Figura 5: Diagrama del funcionamiento del Mercado Spot



Fuente: Elaboración propia

según lo estipulado a la empresa generadora con quien estableció el contrato.

De acuerdo con la información de los contratos vigentes, hay transferencias monetarias entre los generadores según estos sean exedentarios -producen más energía que la requerida por sus clientes- o deficitarios -producen menos energía que la requerida por sus clientes.

Es importante destacar que en Chile, los clientes no tienen acceso directo al mercado spot. Estos son representados por las empresas generadoras con las que establecen contratos. En otros países, se permite a los clientes comprar energía directamente del mercado spot, sin ser obligatorio tener su consumo contratado de antemano para ellos. Dicho de otra manera, en Chile las distribuidoras y los grandes clientes tienen la obligación de haber establecido contratos antes de retirar su consumo a través de la red eléctrica.

Enseguida se explica el funcionamiento del mercado de contratos asociado al mercado de generación eléctrica.

2.4.2. El Mercado de Contratos

En el mercado de contratos, se reconoce la existencia de dos tipos de suministro correspondientes a dos tipos de clientes distintos: el suministro a grandes clientes y el suministro a clientes regulados a través de empresas distribuidoras. A continuación se detallan los tipos de clientes¹⁴ :

- Clientes Regulados

Son clientes para los cuales el precio y la calidad de suministro están regulados. Estos clientes se caracterizan por tener una potencia conectada inferior o igual a 2.000kW y estar ubicados en zonas de concesión de servicio público de distribución (o bien conectado a ese sistema).

¹⁴Basado en la descripción de los tipos de clientes del mercado de generación, Capítulo 2, *La Regulación del Segmento de Distribución en Chile* [7].

Si la potencia conectada es mayor a 500 kW, el cliente tiene derecho a elegir entre el régimen de cliente regulado o el régimen de cliente libre, por un período mínimo de cuatro años de permanencia en cada régimen. Si desea cambiar de opción debe informar a la compañía distribuidora con más de un año de anticipación.

El consumo de los clientes regulados, se agrupa geográficamente en las zonas de concesión de las distribuidoras. Son las distribuidoras quienes establecen contrato con las empresas generadoras. El precio y la calidad del suministro negociados en esos contratos, son regulados.

■ Clientes Libres

Son clientes con contratos a precio libre, es decir, ellos mismos negocian su contrato. Estos clientes se caracterizan por tener una potencia conectada mayor a 2.000kW.

Clientes cuya potencia conectada es superior a 500kW pueden acceder a este régimen por un período mínimo de estadía de cuatro años, comunicando a la distribuidora correspondiente a la zona de concesión con más de un año de antelación¹⁵.

Estos dos tipos de clientes distintos, definen dos sub-mercados dentro del mercado de contratos. Por un lado está el mercado libre, del suministro de clientes libres, usualmente grandes clientes industriales y mineros, quienes negocian libremente con los generadores comercializadores el precio de la energía y de la potencia requerida, así como también las condiciones de los contratos.

Por otro lado está el 'segmento regulado', constituido por los suministros de los clientes regulados, cuya capacidad de negociación se considera baja dado su reducido tamaño, y considerando que las empresas distribuidoras no tienen incentivos suficientes para negociar precios convenientes con las generadoras, el proceso de adjudicación de contrato es regulado.

En Chile, la ley específica vigente hasta mayo de 2005, es decir, antes de la *Ley corta II*, establecía un procedimiento de precio regulado llamado *precio nudo*, que era calculado semestralmente por la Comisión Nacional de Energía conforme a una expectativa a cuatro años de los precios del mercado spot. Si bien este precio provenía de cálculos, era contrastado con el promedio de los precios observados en el mercado libre, limitando su diferencia.

En mayo de 2005 la promulgación de la *Ley Corta II*, estableció que los contratos para el segmento regulado deben ser adjudicados mediante "licitaciones públicas, abiertas y transparentes por el suministro de energía requerido"¹⁶. El precio determinado en estos contratos es el que se traspa al cliente final, en reemplazo del precio nudo calculado anteriormente por la CNE. Además, la nueva ley estableció la obligación a las distribuidoras, de asegurar su consumo proyectado por los tres siguientes años.

Las bases de las licitaciones son elaboradas por las empresas distribuidoras y deben ser aprobadas por la CNE. En las bases se detallan los requerimientos de energía en los distintos puntos (nudos) del sistema eléctrico que se incluyen en la licitación. Es importante señalar que la energía facturada a las distribuidoras por sus suministradoras con las que establecieron contrato, es la energía efectivamente consumida. Además, existe un precio máximo de la energía en cada subasta de

¹⁵La ley establece que son también clientes libres aquellos que necesiten calidades especiales de servicio, servicio por menos de doce meses, o tengan un momento de carga respecto a la subestación de distribución primaria superior a 20MW/km.

¹⁶Cita del Artículo 79º-1 de la *Ley General de Servicios Eléctricos, en Materia de Energía Eléctrica. Decreto con Fuerza de Ley N° 1* [11].

las licitaciones, establecido por el Artículo 101º-ter de la Ley General de Servicios Eléctricos¹⁷. En el anexo A página 62, se encuentra una descripción detallada de la ley de las licitaciones de energía.

Los contratos entonces satisfacen las necesidades de suministro de los clientes -libres o regulados-, que dependen de la distribución de su demanda en el tiempo, característica de sus consumos. Los contratos de suministro son por lo tanto independientes de las unidades de generación y de las características particulares de la empresa generadora que suministra el contrato. De este modo, el cliente se desliga del funcionamiento físico propiamente tal del despacho de las unidades de generación del generador con el que estableció el contrato y del sistema eléctrico, su consumo queda cubierto por el contrato. Es por esto que se llaman *contratos financieros*.

Cabe destacar que modelo regulatorio de Chile considera una comercialización mayorista llevada a cabo por las propias empresas generadoras. Es decir, los comercializadores son las mismas empresas generadoras, si bien la ley no prohíbe la existencia de comercializadores independientes.

¹⁷Decreto con Fuerza de Ley N°1 de 1982, del Ministerio de Minería.

3. Modelo del Mercado de Generación

En este capítulo se explica en detalle los distintos aspectos relevantes del modelo del mercado de generación desarrollado en este trabajo. Se comienza explicando las consideraciones con respecto al sistema eléctrico y al mercado utilizadas, para luego describir de manera formal el modelo y sus etapas, los mecanismos de decisión, las funciones de demanda y las utilidades.

3.1. Construcción del Modelo

Este trabajo desarrolla un modelo dinámico del mercado de generación chileno. Si bien el modelo propuesto es un modelo estilizado, incorpora las principales características y restricciones del diseño de este mercado doble, con empresas generadoras que están presentes en el mercado de contratos y en el mercado spot.

Centrándose en los incentivos económicos de las empresas generadoras y sus estrategias de negociación en el mercado de contrato y de transmisión de costos propuestos en el mercado spot, se presentan a continuación las consideraciones correspondientes al sistema eléctrico en el cual se basa el mercado de generación del modelo, al mercado spot y al mercado de contratos modelados.

1. Consideraciones del Sistema eléctrico:

- Se considera un sistema eléctrico interconectado en que la capacidad instalada es mayor a la demanda total.

Esta restricción es una necesidad que se impone en todo sistema eléctrico para no tener restricciones de consumo o problemas de suministro. La alternativa de usar el costo de falla como forma de representar esta restricción, no permite capturar completamente el problema de comportamientos estratégicos con capacidad, por lo que no se adopta.

En el modelo, esta restricción se traduce por una demanda del cliente d estrictamente inferior a la suma de las capacidades k_i de los generadores del sistema ($d < \sum_i k_i$).

- Un solo generador conectado al sistema no es capaz de satisfacer toda la demanda. Por lo tanto, siempre son despachados dos generadores.

La holgura de la capacidad frente a la demanda no es excesiva, es decir, el sistema no está sobredimensionado.

Entonces, en el modelo la demanda del cliente d es estrictamente superior a la mayor de las capacidades k_i de los generadores del sistema ($d > \max_i k_i$).

- No se consideran pérdidas por transmisión, ni capacidades máximas de transmisión en las líneas del sistema interconectado.

Se imponen estas condiciones para no perturbar los resultados ya que este trabajo no busca estudiar la influencia de la localidad en el mercado de generación, como se explica en los alcances¹⁸.

Por lo tanto, en el modelo no se incluyen restricciones de capacidad en las líneas de transmisión, ni las pérdidas en los balances de energía.

¹⁸Alcances: sección 1.7 página 6. Para más información sobre la influencia de la localidad en el sistema eléctrico, ver Escobar y Jofré (2008) [12].

2. Consideraciones correspondientes al Mercado de Contratos:

- Se considera un mercado de contratos en el cual el cliente debe contratar la totalidad de su consumo ya que no tiene acceso a comprar energía en el mercado spot.

Tal como se explica en la sección 2.4 de descripción del mercado de generación chileno¹⁹, es una obligación de la legislación nacional actual de los mercados eléctricos que el cliente contrate la totalidad de su consumo y que no pueda acceder a comprar energía en el mercado spot.

En el modelo, la función de utilidad del cliente $Z_{cliente}$ y su pago T_i^c a los generadores, sólo incluyen energía que él contrata y no consideran la posibilidad de incluir una cantidad de energía proveniente del mercado spot ($Z_{cliente} = \sum_i p_i q_i^c$ y $T_i^c = p_i q_i^c$).

- Se considera un modelo en que el regulador impone un precio de referencia máximo para la demanda proyectada dada. Por lo tanto, la demanda del cliente es fija dentro del límite establecido.

En Chile, de acuerdo a la legislación actual para el sector regulado, los contratos entre las empresas generadoras y las distribuidoras son para una demanda proyectada dada a largo plazo, estimada por las distribuidoras. La Comisión Nacional de Energía, luego de verificar las bases de la licitación, fija un precio máximo del contrato para la demanda estipulada en las bases. Además, en las bases se especifica en qué puntos de la red eléctrica se requiere y contrata el consumo. Por lo tanto, del punto de vista de la distribuidora, no existe diferenciación en la energía producida por distintas unidades generadoras según la localidad.

En el caso de los contratos con grandes clientes, la gran mayoría proviene de sectores industriales como la minería, y no son capaces de reaccionar en el corto plazo con respecto a su consumo de energía. En este caso el precio de referencia máximo vendría dado por el límite a partir del cual los industriales prefieren generar ellos mismos su consumo eléctrico (construir sus propias centrales), en vez de contratarlo.

En el modelo, el precio p_i que ofertan las empresas generadoras al cliente tiene un límite superior \bar{p} , idéntico para todos los generadores ($p_i \leq \bar{p}$).

- La calidad de suministro es idéntica para todos los generadores y clientes. Solamente se negocia la cantidad y el precio de la energía ofrecida. Las ofertas de energía de las empresas generadoras no incluyen ningún servicio adicional a la venta de energía, ni tampoco ninguna condición especial de servicio.

Por lo tanto, las ofertas de las empresas generadoras a los clientes para contratar su energía, contemplan sólo el precio p_i y la cantidad máxima de energía q_i que aceptan contratar. Además, en el mecanismo de decisión del cliente, no hay restricciones que consideren la calidad u otro servicio que podría diferenciar la energía.

- El cliente es indiferente con respecto a las empresas generadoras, su único criterio para elegir un contrato es el precio (es un bien sustituto). El cliente contrata tanto como sea posible al generador que ofrezca el menor precio y el resto con el siguiente mejor precio. Así hasta contratar exactamente la totalidad de su consumo y no más.

Entonces, la función objetivo $Z_{cliente}$ del mecanismo de decisión del cliente es la suma de los pagos del cliente por su consumo de energía ($Z_{cliente} = \sum_i p_i q_i^c$). El cliente busca minimizar esta función, su variable de decisión es la cantidad q_i^c contratada a cada generador.

¹⁹Ver página 15.

- El cliente contrata exactamente su proyección de consumo. La suma de los contratos que firma es igual a su demanda futura. Se impone esta restricción para evitar perturbaciones en los resultados por el riesgo asociado a la proyección de la demanda.

En el modelo, la suma de la cantidad de energía contratada a los generadores, es igual a la cantidad de energía efectivamente consumida por el cliente, proveniente de la producción de los generadores, despachada por el CDEC en el marco del mercado spot.

En este modelo, se considera una demanda determinista en la que no existe aleatoriedad ($\sum_i q_i^c = \sum_i q_i^s$).

3. Consideraciones correspondientes al Mercado Spot:

- Se considera un mercado spot donde los generadores son despachados según las reglas establecidas por el CDEC: el despacho se realiza en orden de mérito creciente de los costos marginales.

Entonces, la función objetivo del CDEC es la suma de los costos marginales ponderados por la cantidad de energía que produce cada generador ($Z_{CDEC} = \sum_i c'_i q_i^s$). El CDEC busca minimizar esta función, su variable de decisión es la cantidad de energía q_i^s que decide despachar de cada generador.

- En el orden de despacho, no se consideran ajustes para la seguridad del sistema, provenientes de restricciones de la red eléctrica. Estos ajustes habitualmente considerados por el CDEC son pocos y no afectan mucho ni el despacho, ni el incentivo de las empresas, es por esto que se ignoran.

Por lo tanto, en el modelo no se incluyen restricciones que consideren las capacidades físicas del sistema para que sea seguro.

- Se considera que el CDEC tiene un *rango de aceptación* para los costos marginales que admite de cada generador al momento en que estos le transmiten sus costos para decidir el despacho, a pesar de que el CDEC no conoce exactamente esos costos. Es decir, existe un límite del costo que pueden proponer los generadores al CDEC.

Actualmente, de acuerdo a la legislación nacional, el CDEC no se encarga de fiscalizar constantemente los costos propuestos por los generadores ya que estos son auditados. Sin embargo, si alguna empresa considera que el costo propuesto por otra empresa generadora está fuera de rango, se puede pedir explícitamente una fiscalización de los cálculos y datos utilizados para llegar al costo que se le transmitió al CDEC. Por lo tanto, se considera que los generadores tienen algún rango de decisión en costo que transmiten al CDEC²⁰.

En el modelo, el costo propuesto c'_i que pueden transmitir los generadores al CDEC tiene un límite superior \bar{c}_i para cada generador ($c'_i \in [c_i, \bar{c}_i]$).

- En las transferencias monetarias del mercado spot entre las empresas generadoras por su producción de electricidad, se considera solamente la componente correspondiente a la venta de energía y no la componente por la potencia conectada a la red.

El pago por potencia como se entiende en la regulación nacional, no se contempla en el modelo ya que este último se calcula en base a proyecciones hechas por una institución externa -la Comisión Nacional de Energía- y es fijo para cada unidad de generación durante todo el período que cubre el contrato. Por lo tanto, este cargo por capacidad o

²⁰Para mayor detalle del funcionamiento del CDEC, dirigirse a la sección 2.4.1 página 15, donde se describe el Mercado Spot.

pago por potencia, no modifica los incentivos económicos de las empresas generadoras. En este trabajo, las transferencias monetarias entre los generadores en el mercado spot, corresponden solamente a la componente variable, es decir al pago por venta de energía. En el modelo, la función de utilidad del CDEC y las transferencias monetarias entre los generadores del mercado spot, sólo incluyen la compra-venta de energía según los generadores sean excedentarios o deficitarios, de acuerdo a la cantidad de energía producida q_i^s en comparación a la cantidad de energía consumida q_i^c por sus clientes con contratos activos ($Z_{CDEC} = \sum_i c'_i q_i^s$ y $T_i^s = \max_{q_k^c > 0} \{c'_k\} (q_i^s - q_i^c)$).

Además de estas consideraciones, el modelo propuesto tiene aspectos informacionales precisos:

- Los generadores conocen muy bien la industria a la que pertenecen y por lo tanto conocen los costos marginales reales de las otras unidades de generación.

En otras palabras, los generadores conocen c_i y \bar{c}_i para cada unidad generadora.

- El CDEC sólo conoce un *rango aproximado* de los costos marginales de operación de cada unidad generadora.

Es decir, el CDEC conoce \bar{c}_i pero no sabe c_i .

Con respecto a la sincronización de la entrega de información, se considera que los generadores efectúan sus ofertas al mismo tiempo al cliente, sin conocer la oferta de los otros generadores.

Luego, una vez públicos los resultados de los contratos, todos los generadores proponen simultáneamente costos marginales al CDEC en el mercado spot, para que este último decida el despacho de cada unidad generadora.

Por último, el modelo considera a modo de simplificación, una etapa para el mercado de contratos y una etapa para el mercado spot. Sin embargo, en el mercado de generación, por cada vez que se establece un contrato, se repite muchas veces la instancia de decisión del CDEC en el mercado spot. El hecho de considerar sólo una etapa en el mercado spot corresponde a tomar en cuenta el promedio del largo plazo del mercado spot.

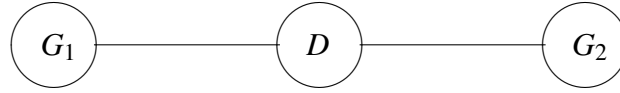
A continuación, se describe el modelo propuesto del mercado de generación.

3.2. Descripción del Modelo

El modelo propuesto considera tres nodos: un cliente y dos generadores, como se observa en la figura 6.

- El modelo está compuesto por :
 - dos generadores G_1 y G_2 , con capacidad de producción k_1 y k_2 y costos marginales c_1 y c_2 respectivamente, que pueden establecer contratos.

Figura 6: Representación gráfica del modelo



- un cliente D con demanda d determinista, con posibilidad de establecer contratos en un intervalo de precios $[c, \bar{p}]$.
 $d \in (\max_i\{k_i\}; k_1 + k_2)$, entonces no hay posibilidad de racionamiento y ambos generadores despachan siempre.

- Los generadores compiten en dos mercados correspondiente cada uno a una etapa:

1ª Etapa: Mercado de Contratos $t = 0$

En $t = 0$ se juega el mercado de contratos. Se establecen contratos para la venta de energía en $t = 1$.

Las firmas compiten ofertando precios y cantidades $(p, q) = ((p_i, q_i), (p_j, q_j))$ de forma independiente, para contratar la totalidad de la energía requerida por el cliente. Se tiene $p_i \in [c_i, \bar{p}]$ y $q_i \in [0, k_1 + k_2]$.

El cliente contrata la cantidad $q_{p_{min}}^c = q_{p_{min}}$ al generador que haya ofertado el menor precio, y $d - q_{p_{min}}^c = q_{p_{max}}^c$ al otro generador al segundo mejor precio, siempre que $d - q_{p_{min}}^c \leq q_{p_{max}}^c$.

En caso de que no se cumpla esta condición, se repite la instancia de negociación hasta que $q_i + q_j \geq d$.

Entonces $q_i^c + q_j^c = d$.

2ª Etapa: Mercado Spot $t = 1$

En $t = 1$ se juega el mercado spot. Se utilizan las reglas del CDEC y se sigue la regla de racionalidad eficiente:

- Las firmas proponen costos lineales con pendiente $c'_i \in [c_i; \bar{c}_i]$ al CDEC.
- La firma que oferta el menor costo propuesto se despacha primero, $q_{c_{min}}^s = k_{c_{min}}$.
- Si no se cubre la demanda con la primera firma, la demanda residual se cubre con el despacho de la segunda firma, $q_{c_{max}}^s = d - q_{c_{min}}^s$.
- El precio spot que se le paga a las firmas es el de la oferta de la firma marginal, es decir, el costo propuesto correspondiente a la última en entrar en producción.

- Cada mercado corresponde a una etapa del juego y se juegan en el orden descrito.
- La regla de desempate utilizada es la de dividir la demanda total por la mitad en caso de que ambos generadores oferten el mismo precio o propongan el mismo costo al CDEC. En el mercado de contratos, si la cantidad ofertada por un generador es menor a la mitad, produce esa cantidad y el otro generador completa hasta cubrir la demanda.

- Aspectos informacionales:
 - Existe información completa entre los generadores.
 - Existe información asimétrica entre los generadores y el CDEC: los generadores conocen la función de despacho del CDEC, pero este último no sabe los costos reales de producción de los generadores. El CDEC reacciona ante los costos propuestos por los generadores.

3.3. Mecanismos de Decisión del Modelo

3.3.1. Mecanismo de Decisión del Cliente

En el mercado de contratos, el cliente busca minimizar el costo de la energía que contrata. Las empresas generadoras ofertan precios y cantidades $(p, q) = ((p_i, q_i), (p_j, q_j))$ al cliente, quien contrata finalmente la cantidad $q_i^c(p, q)$ al precio p_i con la empresa i . El cliente resuelve entonces el problema siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \underset{q^c}{\text{mín}} \quad \sum_i p_i q_i^c \\
 & \text{s. a.} \quad q_i^c(p, q) \leq q_i, \forall i \\
 & \quad \quad \sum_i q_i^c = d
 \end{aligned} \tag{1}$$

Es decir, el cliente contrata tanto como sea posible con la empresa que le ofrece el menor precio, y el resto con el segundo mejor precio.

Los pagos del cliente a los generadores son:

$$T_i^c = p_i q_i^c(p, q) \tag{2}$$

3.3.2. Mecanismo de Decisión del Operador del Sistema

En el mercado spot, el CDEC busca minimizar el costo del despacho de las unidades generadoras, basándose en los costos marginales $c' = (c'_i, c'_j)$ que estas últimas le transmitieron. El CDEC resuelve el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 & \underset{q^s}{\text{mín}} \quad \sum_i c'_i q_i^s \\
 & \text{s. a.} \quad q_i^s \leq k_i, \forall i \\
 & \quad \quad \sum_i q_i^s = d
 \end{aligned} \tag{3}$$

Puesto en palabras, se despacha primero el generador que transmite el menor costo. La parte de la demanda que no es cubierta por su capacidad de generación, es producida por el otro generador.

El pago o transferencia monetaria entre los generadores del mercado spot, corresponde al balance de energía efectuado por el CDEC, entre lo que producen los generadores y lo que consumen los clientes con quienes los generadores tienen un contrato vigente. La ecuación 4 muestra la transferencia monetaria a los generadores proveniente del mercado spot.

$$T_i^s = \max_{q_i^s > 0} \{c'_k\} (q_i^s(c') - q_i^c(p, q)) \quad (4)$$

3.4. Funciones de Demanda de los Mercados

3.4.1. Demanda en el Mercado de Contratos

La demanda en el mercado de contratos depende del precio y cantidad (p_i, q_i) y (p_j, q_j) , ofertado por cada generador y del mecanismo de decisión del cliente representado en 1.

En la ecuación 5, la demanda contratada por el cliente al generador i es $q_i^c(p_i, q_i, p_j, q_j) \in S_i^c$ conjunto de funciones de cantidad de energía contratada solución del problema de minimización que resuelve el cliente para el generador i .

$$q_i^c(p_i, q_i, p_j, q_j) = \begin{cases} \min \{d, q_i\} & \text{si } p_i < p_j \\ \min \{\frac{d}{2}, q_i\} & \text{si } p_i = p_j \text{ y } q_j > \frac{d}{2} \\ \min \{d - q_j, q_i\} & \text{si } p_i = p_j \text{ y } q_j < \frac{d}{2} \\ \max \{0, \min \{d - q_j, q_i\}\} & \text{si } p_i > p_j \end{cases} \quad (5)$$

3.4.2. Demanda en el Mercado Spot

La demanda en el mercado spot depende de los costos transmitidos al CDEC y del mecanismo de decisión de este último representado en 3. Ambos generadores producen energía para satisfacer la demanda del cliente en este modelo.

La ecuación 6 muestra la cantidad de electricidad $q_i^s(c'_i, c'_j)$ producida por cada generador en función del costo transmitido c'_i y del costo transmitido del otro generador c'_j .

La función $q_i^s(c'_i, c'_j)$ pertenece a S_i^s conjunto de funciones de cantidad de energía despachada solución del problema de minimización que resuelve el CDEC para decidir el despacho de los generadores.

$$q_i^s(c'_i, c'_j) = \begin{cases} k_i & \text{si } c'_i < c'_j \\ \frac{d}{2} & \text{si } c'_i = c'_j \\ d - k_j & \text{si } c'_i > c'_j \end{cases} \quad (6)$$

3.5. Utilidad de los generadores

La utilidad de cada generador, una vez terminado el juego, depende de los precios y cantidades ofertados en la primera etapa, y de los costos transmitidos al CDEC en la segunda etapa.

Cuando un generador i responde a la demanda de contratos con (p_i, q_i) en la primera etapa y propone al CDEC el costo c'_i en la segunda etapa, a la vez que otro generador elige (p_j, q_j) y c'_j por su lado, la utilidad U_i del generador i se ve representada en la ecuación 7 .

La utilidad de la ecuación 7 se expresa como la suma del pago del contrato y la transferencia monetaria del mercado spot en función del balance de energía, menos el costo de producción.

$$\begin{aligned} U_i((p_i, q_i), c'_i), ((p_j, q_j), c'_j) &= \overbrace{T_i^c((p_i, q_i), (p_j, q_j))}^{\text{Pago Contrato}} + \overbrace{T_i^s(c'_i, c'_j)}^{\text{Transferencia Balance CDEC}} - \overbrace{c_i q_i^s(c'_i, c'_j)}^{\text{Costo de Producción}} \\ &= p_i q_i^c((p_i, q_i), (p_j, q_j)) + \max_k \{c'_k\} (q_i^s(c'_i, c'_j) - q_i^c((p_i, q_i), (p_j, q_j))) - c_i q_i^s(c'_i, c'_j) \quad (7) \\ &= \underbrace{(p_i - \max_k \{c'_k\}) q_i^c(p_i, q_i, p_j, q_j)}_{\text{Beneficios de Comercialización vía Contratos}} + \underbrace{(\max_k \{c'_k\} - c_i) q_i^s(c'_i, c'_j)}_{\text{Beneficios de Venta de Energía en el Mercado Spot}} \end{aligned}$$

Esta utilidad, también se puede entender como la suma de los beneficios provenientes de la comercialización de la energía a través en el mercado de contratos, con los beneficios ligados a la venta física de energía en el mercado spot, los ingresos inframarginales.

En efecto, un comercializador que no posee unidades de generación, y que establece contratos con los clientes en el mercado de contratos y luego compra energía en el mercado spot para satisfacer sus contratos, obtiene los beneficios –o pérdidas- correspondientes a la comercialización de la energía.

Por el contrario, un generador *merchant* que no establece ningún contrato y que vende su producción de energía en el mercado spot, tiene los ingresos inframarginales de esta venta.

4. Equilibrio en Estrategias Puras

Para encontrar equilibrios en estrategias puras del modelo, se aplica *backward induction*, buscando equilibrios perfectos en los subjuegos. De esta forma, se empieza por resolver la segunda etapa del juego ($t = 1$). Luego, introduciendo el equilibrio encontrado en la función de utilidad de los generadores en la primera etapa ($t = 0$), se resuelve el problema de optimización utilizando las variables correspondientes a esa etapa para encontrar el equilibrio del juego.

De aquí en adelante se considera el modelo simétrico en que ambos generadores tienen la misma capacidad y el mismo costo de producción, es decir, $k_1 = k_2 = k$ y $c_1 = c_2 = c$. Además el costo máximo aceptado por el CDEC es \bar{c} , el mismo para ambos generadores.

Para alivianar la notación, la utilidad de los generadores en la primera etapa en $t = 0$ se nota $U_i^0((p_i, q_i), (p_j, q_j))$, y la de la segunda etapa en $t = 1$, $U_i^1(c'_i, c'_j)$. En cada etapa la utilidad se expresa en función de las variables de decisión esa etapa en particular, si bien las otras variables igual están presentes en la expresión de la utilidad como se muestra en la ecuación 7.

4.1. Equilibrios Perfectos de Subjuego de la 2ª Etapa

4.1.1. El problema del Generador en la 2ª Etapa

En esta etapa, el generador i busca maximizar su utilidad $U_i^1(c'_i, c'_j)$ en función de los costos marginales que proponen todos los generadores al CDEC. Esto último se ve representado en el problema 8, donde q_i^c es la cantidad de energía contratada por el cliente al generador i a precio p_i , y $S_i^s(c')$ es el conjunto de despachos solución del mecanismo de decisión del CDEC²¹ considerando costos de los generadores $c' = (c'_i, c'_j)$. En esta etapa, q_i^c y p_i son sólo datos y no intervienen en la optimización.

$$\begin{aligned} \max_{c'_i} \quad & U_i^1(c'_i, c'_j) = p_i q_i^c + \max_k \{c'_k\} (q_i^s(c'_i, c'_j) - q_i^c) - c q_i^s(c'_i, c'_j) \\ \text{s. a.} \quad & c'_i \in [c, \bar{c}] \\ & q_i^s(c'_i, c'_j) \in S_i^s(c') \end{aligned} \tag{8}$$

4.1.2. Definición de un Equilibrio

En esta etapa, un equilibrio es un vector de estrategias:

$$c^{eq} = (c_i^{eq}, c_j^{eq})$$

Este vector induce:

- (a) $q^s(c^{eq}) \in S^s(c^{eq})$, las cantidades despachadas por el CDEC en el equilibrio.
- (b) $T^s(c^{eq})$, las transferencias monetarias entre generadores en el mercado spot.

²¹Problema 3 página 25.

4.1.3. Búsqueda de los Equilibrios

Reemplazando en la función objetivo del problema 8 el valor de $q_i^s(c'_i, c'_j)$ por el valor de la demanda de cada generador establecidos en la ecuación 6, el valor de $T_i^s(c'_i, c'_j)$ por la transferencia del mercado spot según la ecuación 4; y el valor de $\max_k\{c'_k\}$, según los valores de c'_i y c'_j , se obtiene la expresión 9.

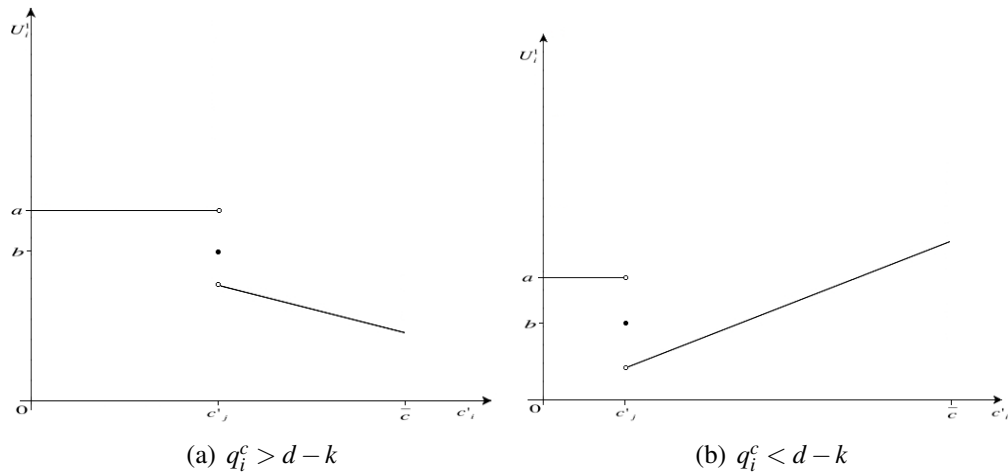
$$U_i^1(c'_i, c'_j) = \begin{cases} (p_i - c'_j)q_i^c + (c'_j - c)k & \text{si } c'_i < c'_j \\ (p_i - c')q_i^c + (c' - c)\frac{d}{2} & \text{si } c'_i = c'_j = c' \\ (p_i - c'_i)q_i^c + (c'_i - c)(d - k) & \text{si } c'_i > c'_j \end{cases} \quad (9)$$

La función $U_i^1(\cdot, c'_j)$ es una función en 3 partes donde:

$$\lim_{c'_i \rightarrow c'_j^-} U_i^1(c'_i, c'_j) > U_i^1(c'_j, c'_j) > \lim_{c'_i \rightarrow c'_j^+} U_i^1(c'_i, c'_j)$$

La primera parte de la función es un escalón ya que $U_i^1(c'_i, c'_j)$ no depende de c'_i mientras $c'_i < c'_j$. La tercera parte, es una recta de pendiente $d - q_i^c - k$, que puede ser positiva o negativa según los valores de q_i^c . En la figura 7 se observan dos casos distintos del gráfico de esta función.

Figura 7: Gráfico de la función $U_i^1(\cdot, c'_j)$ según los valores de $d - k - q_i^c$.



Entonces, el máximo de la función utilidad está siempre en la primera parte de la función salvo cuando la pendiente $d - k - q_i^c$ es positiva. En tal caso, el máximo puede estar en la tercera parte de la función.

La pendiente es positiva si $d - k > q_i^c$. Buscando en qué caso el máximo de la función se obtiene en \bar{c} , se tiene :

$$\forall c'_j < \frac{\bar{c}(d - k - q_i^c) + c(2k - d)}{k - q_i^c} = c^*, \quad \max\{U_i^1(\bar{c}, c'_j)\} > \max\{U_i^1(c'_i < c'_j)\}$$

Es decir, si $c'_j < c^*$, el máximo de la función utilidad $U_i^1(\cdot, c'_j)$ se alcanza en \bar{c} . Se verifica que $c^* \in [c, \bar{c}]$.

Entonces, $\forall q_i^c < d - k, \exists c^* \in [c; \bar{c}]$ tal que:

$$\begin{aligned} \forall c'_j > c^*, \text{ máx } \{U_i^1(c'_i < c'_j)\} &> \text{ máx } \{U_i^1(c'_i > c'_j)\} \text{ y} \\ \forall c'_j < c^*, \text{ máx } \{U_i^1(c'_i < c'_j)\} &< \text{ máx } \{U_i^1(c'_i > c'_j)\} \end{aligned}$$

Luego, la función mejor respuesta del generador i es:

$$Br_i^1(c'_j) = \begin{cases} \bar{c} & \text{si } q_i^c < d - k \text{ y } c'_j < c^* \\ [c; c'_j] & \text{si } q_i^c < d - k \text{ y } c'_j \geq c^* \\ [c; c'_j] & \text{si } q_i^c \geq d - k \end{cases} \quad (10)$$

Por lo tanto, existen 3 equilibrios según los valores de q_i^c y q_j^c :

Primer caso:

Si $q_i^c \geq d - k$ y $q_j^c \geq d - k$, las funciones mejor respuesta son :

$$Br_i^1(c'_j) = [c; c'_j]$$

$$Br_j^1(c'_i) = [c; c'_i]$$

Entonces el equilibrio es $c^{eq} = (c, c)$.

Este equilibrio induce una producción en cada generador $q^s(c^{eq}) = (\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ y utilidades:

$$U_i^1(c, c) = (p_i - c)q_i^c \quad (11)$$

$$U_j^1(c, c) = (p_j - c)q_j^c \quad (12)$$

Segundo caso:

Si $q_i^c > k$ y $q_j^c < d - k$:

$$Br_i^{t=1}(c'_j) = [c; c'_j]$$

$$Br_j^{t=1}(c'_i) = \begin{cases} [c; c'_i] & \text{si } c'_i \geq c^* \\ \bar{c} & \text{si } c'_i < c^* \end{cases}$$

El equilibrio es $c^{eq} = (c^*, \bar{c})$.

Este equilibrio induce una producción en cada generador $q^s(c^{eq}) = (k, d - k)$ y utilidades:

$$U_i^{t=1}(c^*, \bar{c}) = (p_i - \bar{c})q_i^c + (\bar{c} - c)k \quad (13)$$

$$U_j^{t=1}(\bar{c}, c^*) = (p_j - \bar{c})q_j^c + (\bar{c} - c)(d - k) \quad (14)$$

Tercer caso:

Si $q_i^c < d - k$ y $q_j^c > k$

$$Br_i^{t=1}(c'_j) = \begin{cases} [c; c'_j] & \text{si } c'_j \geq c^* \\ \bar{c} & \text{si } c'_j < c^* \end{cases}$$

$$Br_j^{t=1}(c'_i) = [c; c'_i]$$

El equilibrio es $c^{eq} = (\bar{c}, c^*)$.

Este equilibrio induce una producción en cada generador $q^s(c^{eq}) = (d - k, k)$ y utilidades:

$$U_i^{t=1}(\bar{c}, c^*) = (p_i - \bar{c})q_i^c + (\bar{c} - c)(d - k) \quad (15)$$

$$U_j^{t=1}(c^*, \bar{c}) = (p_j - \bar{c})q_j^c + (\bar{c} - c)k \quad (16)$$

4.2. Equilibrios de la 1ª Etapa

4.2.1. El problema del Generador en la 1ª Etapa

En esta etapa, el generador i busca maximizar su utilidad $U_i^0((p_i, q_i), (p_j, q_j))$ en función de la oferta de precio y cantidad de la energía en respuesta a la demanda de contrato del cliente. Este problema se ve representado en el problema 17, donde c^{eq} es el costo propuesto de los equilibrios obtenidos en la segunda etapa, $q_i^s(c^{eq}, d)$ es la cantidad producida por cada generador en el mercado spot, y $S_i^c(p, q)$ es el conjunto de cantidades de energía contratada solución del mecanismo de decisión del cliente²² para la oferta de contratos $(p, q) = ((p_i, q_i), (p_j, q_j))$.

$$\begin{aligned} \max_{p_i, q_i} \quad & U_i^0((p_i, q_i), (p_j, q_j)) = p_i q_i^c(p, q) + c^{eq}(q^s(c^{eq}) - q_i^c(p, q)) - c q^s(c^{eq}) \\ \text{s. a.} \quad & p_i \in [c, \bar{p}] \\ & q_i \in [0, 2k] \\ & q_i^c(p, q) \in S_i^c(p, q) \end{aligned} \quad (17)$$

4.2.2. Definición de un Equilibrio

En esta etapa, un equilibrio es un vector de estrategias:

$$x^{eq} = ((p^{eq}, q^{eq}), c^{eq}) = (((p_i^{eq}, q_i^{eq}), c_i^{eq}), ((p_j^{eq}, q_j^{eq}), c_j^{eq}))$$

donde c^{eq} es el equilibrio de la segunda etapa para los valores (p^{eq}, q^{eq}) .

Este vector induce:

- (a) $q^c(p^{eq}, q^{eq}) \in S^c(p^{eq}, q^{eq})$, las cantidades de energía contratada a cada empresa generadora por el cliente en el equilibrio.
- (b) $T^c(p^{eq}, q^{eq})$, los pagos del cliente a los generadores
- (c) $q^s(c^{eq}) \in S^s(c^{eq})$, las cantidades despachadas por el CDEC en el equilibrio.
- (d) $T^s(c^{eq})$, las transferencias monetarias entre generadores en el mercado spot.

²²Problema 1 página 25.

4.2.3. Búsqueda de los Equilibrios

Reemplazando en la función objetivo el valor de $q_i^c((p_i, q_i), (p_j, q_j))$ por el valor de la demanda del mercado de contratos de cada generador establecidos en la ecuación 5, el valor de $T_i^c((p_i, q_i), (p_j, q_j))$ por el valor de los pagos del cliente según la ecuación 2; y utilizando el valor de la utilidad en los equilibrios perfectos de subjuego en la segunda etapa según las ecuaciones 11, 12, 13, 14, 15, 16 se obtiene la expresión 18.

$$U_i^0((p_i, q_i), (p_j, q_j)) = \begin{cases} (p_i - c)q_i & \text{si } p_i < p_j, d-k \leq q_i, q_j \leq k \\ (p_i - c) \min\{\frac{d}{2}; q_i\} & \text{si } p_i = p_j, d-k \leq q_i \leq k, \frac{d}{2} \leq q_j \leq k \\ (p_i - c) \min\{d-q_j; q_i\} & \text{si } p_i = p_j, d-k \leq q_i \leq k, d-k \leq q_j < \frac{d}{2} \\ (p_i - c) \min\{d-q_j; q_i\} & \text{si } p_i > p_j, d-k \leq q_i, q_j \leq k \\ (p_i - \bar{c})q_i + (\bar{c} - c)k & \text{si } p_i < p_j, q_i > k, q_j < d-k \\ (p_i - \bar{c}) \min\{d-q_j; q_i\} + (\bar{c} - c)k & \text{si } p_i \geq p_j, q_i > k, q_j < d-k \\ (p_i - \bar{c})q_i + (\bar{c} - c)(d-k) & \text{si } p_i \leq p_j, q_i < d-k, q_j > k \\ (p_i - \bar{c}) \min\{d-q_j; q_i\} + (\bar{c} - c)(d-k) & \text{si } p_i > p_j, q_i < d-k, q_j > k \end{cases} \quad (18)$$

A partir de la expresión 18, buscando los máximos de la función utilidad U_i^0 se obtiene la función mejor respuesta de la expresión 19.

$$Br_i^0(p_j, q_j) = \begin{cases} (\bar{p}, d-k) & \text{si } p < p^* \\ (p_j^-, k) & \text{si } p \in [p^*, \bar{c}] \\ (p_j^-, d) & \text{si } p > \bar{c} \end{cases} \quad (19)$$

Por lo tanto, no existe equilibrio en estrategias puras, ya que no existe un punto fijo en la función de mejor respuesta.

Efectivamente, cuando un generador oferta un precio muy bajo –inferior a p^* –, entonces al otro generador le conviene ofertar el precio máximo \bar{p} . Sin embargo, ante la oferta de un precio elevado –superior a p^* –, al otro generador le conviene ofrecer un precio apenas inferior a ese precio elevado. Por lo tanto, lo no hay equilibrio, siempre al menos uno de los dos generadores tiene incentivos de cambiar su jugada.

5. Equilibrios en Estrategias Mixtas

En el capítulo anterior, se prueba que no existe un equilibrio en estrategias puras en el modelo propuesto. Sin embargo, este modelo tiene un equilibrio en estrategias mixtas y en este capítulo se prueba su existencia.

Esta vez las estrategias de las empresas generadoras son distribuciones de probabilidad sobre los intervalos de las variables de decisión, y los generadores maximizan la utilidad esperada. Para permitir estas estrategias mixtas, se modifica levemente el modelo descrito en la sección 3, agregando una etapa más, como se describe a continuación.

Cabe destacar que para encontrar el equilibrio, se trabaja nuevamente con *backward induction*, buscando equilibrios perfectos en los subjuegos, en estrategias puras en la segunda etapa y en estrategias mixtas en la primera etapa.

5.1. Descripción del Modelo

Este modelo se basa en el modelo inicial descrito anteriormente, compuesto por tres nodos: un cliente y dos generadores, como se observa en la figura 6.

El modelo es un modelo simétrico compuesto por :

- dos generadores G_1 y G_2 , con capacidad de producción k y costo de producción c cada uno, que pueden establecer contratos.
- un cliente D con demanda d , con posibilidad de establecer contratos en un intervalo de precios $[c, \bar{p}]$.

$d \in (k; 2k)$, entonces no hay posibilidad de racionamiento y ambos generadores despachan siempre.

Los generadores compiten en dos mercados, representados en un juego compuesto de tres etapas:

1ª Etapa: $t = 0$

En esta etapa los generadores eligen óptimamente las distribuciones de probabilidad acumulada H_i y H_j pertenecientes a $M([c, \bar{p}] \times [0, 2k])$ ²³.

Para decidir, cada generador resuelve el problema de maximización 26²⁴, que se detalla sección 5.3.1, correspondiente al problema del generador en la primer etapa del juego.

Resolviendo este problema de maximización, los generadores obtienen las distribuciones de probabilidad óptimas H_i^* y H_j^* .

²³ $M(R)$ es el conjunto de medidas de probabilidad definidas sobre R .

²⁴Problema 26 página 36.

2ª Etapa: $t=1$

Para cada realización $\xi = (\xi_i, \xi_j)$ de las distribuciones de probabilidad acumulada solución del problema de la primera etapa, se obtiene una tupla $(p(\xi), q(\xi))$, con la cual el cliente determina $q^c(p(\xi), q(\xi))$ utilizando el mecanismo de decisión 20²⁵ :

$$\begin{aligned} \min_{q^c} \quad & \sum_i p_i q_i^c(p(\xi), q(\xi)) \\ \text{s. a.} \quad & q_i^c(p(\xi), q(\xi)) \leq q_i(\xi), \forall i \\ & \sum_i q_i^c(p(\xi), q(\xi)) = d \end{aligned} \quad (20)$$

Del mismo modo, para cada realización $\xi = (\xi_i, \xi_j)$ de las distribuciones de probabilidad solución del problema de la primera etapa, los generadores proponen costos c'_i y c'_j al CDEC que maximizan su utilidad.

Para decidir su propuesta, cada generador resuelve el problema de maximización 8²⁶, como se explica en la sección 5.2.1. Resolviendo este problema, los generadores obtienen los costos marginales c'_i y c'_j que proponen al CDEC.

3ª Etapa: $t=2$

Para cada par (c'_i, c'_j) el CDEC determina el despacho $q^s(c'_i, c'_j)$ utilizando su mecanismo de decisión, idéntico al del modelo inicial²⁷:

$$\begin{aligned} \min_{q^s} \quad & \sum_i c'_i q_i^s(c') \\ \text{s. a.} \quad & q_i^s(c') \leq k_i, \forall i \\ & \sum_i q_i^s(c') = d \end{aligned} \quad (21)$$

Con este mecanismo se obtiene $q^s(c'_i, c'_j)$.

5.2. Equilibrios Perfectos de Subjuego de la 2ª Etapa

En la tercera etapa de este modelo, el CDEC utiliza su mecanismo para decidir el despacho de cada una de las unidades generadoras, tal como se explica en la descripción del modelo. Por lo tanto, no hay ninguna decisión por parte de los generadores en la tercera etapa.

El resultado de esta tercera etapa es conocido, es la función de demanda del mercado spot de la ecuación 6²⁸, información que integran los generadores en la etapa anterior al momento de elegir los costos a transmitir al CDEC.

²⁵Es el mismo mecanismo de decisión 1 página 25 adaptado a estrategias mixtas para los generadores.

²⁶Problema 8 página 8.

²⁷Mecanismo 3 página 25.

²⁸Ecuación 6 página 27.

Es en la segunda etapa del modelo que los generadores eligen los costos que le van a transmitir al CDEC. Para elegir las variables, los generadores maximizan la utilidad de esta etapa.

En la segunda etapa de este modelo incluyendo estrategias mixtas, sólo intervienen variables en estrategias puras, como se describe con mayor detalle a continuación. Por lo tanto, se utiliza la metodología y los cálculos de los equilibrios perfectos de subjuego de la segunda etapa del modelo inicial.

5.2.1. El problema del Generador en la 2ª Etapa

En esta etapa, el generador i busca maximizar su utilidad esperada $U_i^1(c'_i, c'_j)$ en función de c'_i , siendo el mismo problema de maximización 8 de la segunda etapa aplicando sólo estrategias puras en el modelo²⁹.

Dada una realización $\xi = (\xi_i, \xi_j)$, se obtiene una tupla $(p(\xi), q(\xi))$ en la primera etapa, con la cual el cliente determina $q^c(p(\xi), q(\xi))$.

Por lo tanto, en esta segunda etapa, p_i y $q_i^c = q^c(p(\xi), q(\xi))$ son datos y no intervienen en la optimización, tal como se muestra en el problema 8.

5.2.2. Definición de un Equilibrio

En esta etapa se usa la misma definición de equilibrio de la segunda etapa usando estrategias puras³⁰: un equilibrio es un vector de estrategias:

$$c^{eq} = (c_i^{eq}, c_j^{eq})$$

Este vector induce:

- (a) $q^s(c^{eq}) \in S^s(c^{eq})$, las cantidades despachadas por el CDEC en el equilibrio.
- (b) $T^s(c^{eq})$, las transferencias monetarias entre generadores en el mercado spot.

5.2.3. Búsqueda de los Equilibrios

Los equilibrios perfectos de subjuego que se obtienen con los obtenidos para la segunda etapa en el modelo utilizando sólo estrategias puras³¹:

$$c^{eq} = \begin{cases} (c, c) & \text{si } q_i^c \geq d - k \text{ y } q_j^c \geq d - k \\ (c^*, \bar{c}) & \text{si } q_i^c > k \text{ y } q_j^c < d - k \\ (\bar{c}, c^*) & \text{si } q_i^c < d - k \text{ y } q_j^c > k \end{cases} \quad (22)$$

²⁹Problema 8 página 28, sección 4.1.1

³⁰Sección 4.1.2 página 28.

³¹Para mayor detalle de los cálculos, ver sección 4.1.3 página 29.

Estos equilibrios inducen las siguientes cantidades de energía producida por cada generador según el mecanismo de decisión del CDEC:

$$q^s(c^{eq}) = \begin{cases} (\frac{d}{2}, \frac{d}{2}) & \text{si } q_i^c \geq d - k \text{ y } q_j^c \geq d - k \\ (k, d - k) & \text{si } q_i^c > k \text{ y } q_j^c < d - k \\ (d - k, k) & \text{si } q_i^c < d - k \text{ y } q_j^c > k \end{cases} \quad (23)$$

Estos equilibrios inducen también transferencias monetarias $T^s(c^{eq})$ con las que se obtienen las siguientes utilidades:

$$U_i^1(c^{eq}) = \begin{cases} (p_i - c)q_i^c & \text{si } q_i^c \geq d - k \text{ y } q_j^c \geq d - k \\ (p_i - \bar{c})q_i^c + (\bar{c} - c)k & \text{si } q_i^c > k \text{ y } q_j^c < d - k \\ (p_i - \bar{c})q_i^c + (\bar{c} - c)(d - k) & \text{si } q_i^c < d - k \text{ y } q_j^c > k \end{cases} \quad (24)$$

$$U_j^1(c^{eq}) = \begin{cases} (p_j - c)q_j^c & \text{si } q_i^c \geq d - k \text{ y } q_j^c \geq d - k \\ (p_j - \bar{c})q_j^c + (\bar{c} - c)(d - k) & \text{si } q_i^c > k \text{ y } q_j^c < d - k \\ (p_j - \bar{c})q_j^c + (\bar{c} - c)k & \text{si } q_i^c < d - k \text{ y } q_j^c > k \end{cases} \quad (25)$$

5.3. Equilibrios de la 1ª Etapa

Utilizando los equilibrios obtenidos en la segunda etapa, se demuestra a continuación la existencia del equilibrio en estrategias mixtas en la primera etapa del juego.

5.3.1. El problema del Generador en la 1ª Etapa

En esta etapa los generadores eligen óptimamente las distribuciones de probabilidad acumulada H_i y H_j pertenecientes a $M([c, \bar{p}] \times [0, 2k])$, de forma tal a maximizar su utilidad esperada $E_H(u_i)$.

Para decidir, cada generador resuelve el problema de maximización 26 en que la distribución de probabilidad acumulada H_i es la variable.

$$\begin{aligned} \max_{H_i} U_i^0(H_i, H_j) &= \int_R \int_R u_i((p_i, q_i), (p_j, q_j)) dH_j dH_i \\ \text{s. a. } H_i &\in M([c, \bar{p}] \times [0, 2k]) \quad \forall i \end{aligned} \quad (26)$$

donde :

- $R = [c, \bar{p}] \times [0, 2k]$
- $u_i((p_i, q_i), (p_j, q_j)) = p_i q_i^c + \max_k c_k^{t=2} (q^s - q_i^c) - c q^s$
- $q_i^s = q_i^s(c_i^t, c_j^t) \in S^s$ conjunto de funciones solución del mecanismo del CDEC³²
- $q_i^c = q_i^c((p_i, q_i), (p_j, q_j)) \in S^c$ conjunto de funciones solución del mecanismo del cliente³³.

³²Mecanismo 21 página 34 .

³³Mecanismo 20 página 34.

5.3.2. Existencia de Equilibrio en Estrategias Mixtas

Para demostrar la existencia de un equilibrio en estrategias mixtas en este modelo, se aplica un resultado de Reny en *On the Existence of Pure and Mixed Strategy Nash Equilibria in Discontinuous Games* [20] y luego extendido por Bagh y Jofré en *Reciprocal Upper Semicontinuity and Better Reply Secure Games: A Comment* [2].

Se aplican los siguientes teorema y corolario³⁴:

Teorema. Si $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es compacto, cuasi-cóncavo y better-reply-secure, entonces tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Definición 1. Sea $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ un juego Hausdorff compacto y $X = \times_{i=1}^N X_i$. Sea $M(X_i)$ es el conjunto de medidas de probabilidad sobre los conjuntos de Borel de X_i . Bajo la topología débil*, $M(X_i)$ es compacto. Sea $M = \times_{i=1}^N M_i$, se define $u_i(\mu) = \int_X u_i(x) d\mu$ para todo $\mu \in M$.

Entonces, $\bar{G} = (M_i, u_i)_{i=1}^N$ es la extensión mixta del juego G .

Corolario. Supongamos que $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ es un juego Hausdorff compacto. Entonces, G tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas si la extensión mixta del juego \bar{G} es better-reply-secure. Por otro lado, \bar{G} es better-reply-secure si es ambos, reciprocally-upper-semicontinuous y payoff-secure.

Entonces hay que demostrar que el juego de la sección 5.3.1 es reciprocally-upper-semicontinuous y payoff-secure.

Definición 2.³⁵ Un juego es reciprocally-upper-semicontinuous (rusc), si para cualquier (x, u) en la cerradura de su grafo Γ y $u_i(x) \leq u_i$ para todo i , entonces $u_i(x) = u_i$ para todo i .

Sea $G = (X_i, U_i)_{i=1}^2$ el juego de la sección 5.3.1:

- $X_i = M(R)$, donde $R = [c, \bar{p}] \times [0, 2k]$
- $U_i(H_i, H_j) = \int_{R^2} u_i((p_i, q_i), (p_j, q_j)) dH_j dH_i$

Se tiene que X_i es el conjunto de las medidas de probabilidad definidas sobre R convexo y compacto en \mathbb{R}^2 , entonces, acompañado de la topología débil*, X_i es un espacio métrico compacto (y por lo tanto Hausdorff)³⁶.

Sea Γ el grafo del juego anterior:

$$\Gamma = \{(H_i, H_j, U_i, U_j) \in M(R) \times M(R) \times \mathbb{R} \mid U_i(H_i, H_j) = U_i \ \forall i\}$$

Sea $(H_i, H_j, U_i, U_j) \in \bar{\Gamma}$, la adherencia de Γ . Entonces existe una sucesión $(H_i^k, H_j^k, U_i^k, U_j^k)$ en Γ que tiende a (H_i, H_j, U_i, U_j) .

³⁴Teorema 3.1. y Corolario 5.2. en Reny (1999) [20].

³⁵Definición 3. en Bagh y Jofré (2006) [2].

³⁶Ver capítulo 3, páginas 120 y 127 de Stroock (1993) [23].

Se tiene:

$$\begin{aligned} U_i(H_i^k, H_j^k) &= U_i^k \quad \forall i \\ &= \int_{R^2} u_i((p_i, q_i), (p_j, q_j)) \, dH_j^k dH_i^k \end{aligned}$$

Dado que X_i es separable, $H_i^k \times H_j^k \rightarrow h_i \times H_j$ si y sólo si $H_i^k \rightarrow H_i$ y $H_j^k \rightarrow H_j$ ³⁷.

Como $H_i^k \rightarrow H_i$ y u_i es continua casi en todas partes, se tiene con la topología débil*:

$$U_i(H_i^k, H_j^k) = \int_{R^2} u_i((p_i, q_i), (p_j, q_j)) \, dH_j^k dH_i^k \rightarrow \int_{R^2} u_i((p_i, q_i), (p_j, q_j)) \, dH_j^k dH_i = U_i(H_i, H_j^k)$$

Del mismo modo, $H_j^k \rightarrow H_j$ y por lo tanto:

$$U_i(H_i, H_j^k) = \int_{R^2} u_i((p_i, q_i), (p_j, q_j)) \, dH_j^k dH_i \rightarrow \int_{R^2} u_i((p_i, q_i), (p_j, q_j)) \, dH_j dH_i = U_i(H_i, H_j) = U_i$$

Luego, para todo punto en la cerradura de Γ y $U_i(H_i, H_j) \leq U_i$, se tienen que $U_i(H_i, H_j) = U_i$. Entonces, de acuerdo a la definición 2, el juego G es rusc.

Definición 3. ³⁸ Un juego $(X_i, u_i)^N$ es payoff secure si lo siguiente es cierto para cada jugador i :

Para todo $x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \hat{x}_i \in X_i, \exists V(x_{-i})$ una vecindad de x_{-i} , tal que $\forall x'_{-i} \in V(x_{-i}), u_i(\hat{x}_i, x'_{-i}) \geq u_i(x) - \varepsilon$.

Para demostrar que la extensión mixta \bar{G} de un juego G es payoff secure, basta demostrar que G es payoff secure³⁹.

En el juego G , la función $u_i((p_i, q_i), (p_j, q_j))$ es continua en q_i por lo que para todo ε existe alguna vecindad de q_j en la cual la utilidad es mayor a $u_i((p_i, q_j), (p_j, q_j)) - \varepsilon$.

Con respecto a p_i , la función u_i es continua y creciente por parte. Luego, para $p_i \neq p_j$, para todo ε existe alguna vecindad de p_j en la cual la utilidad es mayor a $u_i((p_i, q_j), (p_j, q_j)) - \varepsilon$.

En el caso en que $p_i = p_j$, se tiene que $u_i((p_i = p_j, q_i), (p_j, q_j)) < u_i((p_j - \delta, q_i), (p_j, q_j))$. Luego, para todo ε , existe un δ tal que existe una vecindad de p_j y para todo p'_j en la vecindad de p_j , se tiene que $u_i((p_i - \delta, q_i), (p'_j, q_j)) > u_i((p_i, q_i), (p_j, q_j)) - \varepsilon$.

Entonces, el juego en estrategias mixtas es payoff secure.

Conclusión.

Utilizando el corolario, se demuestra que el juego G es better-reply-secure y por lo tanto tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

³⁷Teorema 2.8. en Billingsley (1999) [3].

³⁸Definición 4. en Bagh y Jofré (2006) [2].

³⁹Ver ejemplo 5.1. en Reny (1999) [20]

6. Desarrollo de Casos Particulares

En los capítulos anteriores se estudia el modelo propuesto del mercado de generación eléctrica con todos los grados de libertad que contiene. Sin embargo, no se obtiene alguna expresión explícita del equilibrio del mercado de generación a partir de la cual se pueda estudiar la formación de los precios y las utilidades de las empresas generadoras.

Para obtener mayor información a partir del modelo, se desarrollan algunos casos particulares en los que se restringen la elección de la cantidad de energía contratada por parte de los generadores. En los casos particulares que se describen a continuación, los generadores pueden escoger sólo entre dos cantidades de energía a contratar.

La ventaja de estos casos particulares usando un modelo simplificado, es que se obtiene explícitamente el valor del equilibrio en cada caso, ya sea en estrategias puras o en estrategias mixtas. De este modo, se pueden analizar en mayor profundidad los resultados.

A continuación, se describe primero el modelo simplificado utilizado para luego desarrollar los casos particulares.

6.1. Descripción del Modelo Simplificado

Al igual que el modelo inicial, el modelo simplificado se compone de dos generadores y un cliente, teniendo la misma representación gráfica de la figura 6 página 24. Nuevamente, las empresas generadoras compiten en dos mercados, cada uno en una etapa.

- El modelo simplificado está compuesto por :
 - dos generadores G_1 y G_2 , ambos con capacidad de producción k , que pueden establecer contratos y cuyo costo marginal es c_1 y c_2 respectivamente⁴⁰.
 - un cliente D con demanda d , con posibilidad de establecer contratos en un intervalo de precios $[c, \bar{p}]$.
Nuevamente $d \in (k; 2k)$, entonces no hay posibilidad de racionamiento y ambos generadores despachan siempre.
- Los generadores compiten en dos mercados correspondiente cada uno a una etapa:

1ª Etapa: Mercado de Contratos $t = 0$

En $t = 0$ se juega el mercado de contratos. Se establecen contratos para la venta de energía en $t = 1$.

Las firmas compiten ofertando precios p_i de forma independiente, para contratar una cantidad X o $d - X$ ⁴¹, ambas en $[0, d]$, del suministro del cliente. Se tiene $p_i \in [c_i, \bar{p}]$.

⁴⁰En los dos primeros casos $c_1 = c_2 = c$ y en los últimos dos casos $c_1 \neq c_2$.

⁴¹En el primer caso, así como también en los dos últimos casos asimétricos, $X = d$, es decir, un generador contrata la totalidad de la demanda. En el segundo caso, $X = k$, un generador contrata una cantidad equivalente a su capacidad y el otro generador la demanda residual.

El cliente contrata la cantidad X con la empresa generadora que haya ofertado el menor precio, y contrata la cantidad $d - X < X$ con la otra empresa al segundo mejor precio. De tal forma, la totalidad del consumo del cliente está contratado.

2ª Etapa: Mercado Spot $t = 1$

En $t = 1$ se juega el mercado spot. Se utilizan las reglas del CDEC y se sigue la regla de racionalidad eficiente:

- Las firmas proponen costos lineales con pendiente $c'_i \in [c_i, \bar{c}_i]$ al CDEC.
 - La firma que oferta el menor costo propuesto se despacha primero.
 - Si no se cubre la demanda con la primera firma, la demanda residual se cubre con el despacho de la segunda firma.
 - El precio spot que se le paga a las firmas es el de la oferta de la firma marginal, es decir el correspondiente a la última en entrar en producción.
- Cada mercado corresponde a una etapa del juego y se juegan en el orden descrito.
 - La regla de desempate utilizada es la de dividir la demanda total por la mitad en caso de que ambos generadores oferten el mismo precio o propongan el mismo costo al CDEC.
 - Aspectos informacionales:
 - Existe información completa entre los generadores.
 - Existe información asimétrica entre los generadores y el CDEC: los generadores conocen la función de despacho del CDEC, pero este último no sabe los costos reales de producción de los generadores.

6.2. Mecanismos, Demanda y Utilidad

Los mecanismos, las funciones de demanda y utilidad del modelo simplificado son muy similares a las del modelo inicial. Las diferencias se explican a continuación.

6.2.1. Mecanismos de Decisión del Cliente y del CDEC

El mecanismo de decisión del cliente es muy similar al mecanismo 1 descrito en la sección 3.3.1, sin embargo esta vez las empresas generadoras ofertan sólo precios $p = (p_i, p_j)$ al cliente.

Además, la cantidad de energía que el cliente contrata a cada generador sólo puede tomar valores: X , $d - X$, o $\frac{d}{2}$ en caso de empate en la oferta de precios. El cliente contrata la cantidad $q_i^c(p_i, p_j)$ a precio p_i con la empresa i . El mecanismo se describe en el problema 27.

$$\begin{aligned}
& \min_{q^c} \sum_i p_i q_i^c(p_i, p_j) \\
& \text{s. a. } q_i^c(p_i, p_j) \in \{X, d - X, \frac{d}{2}\} \\
& \sum_i q_i^c(p_i, p_j) = d
\end{aligned} \tag{27}$$

Los pagos del cliente a los generadores son:

$$T_i^c = p_i q_i^c(p_i, p_j) \tag{28}$$

El mecanismo de decisión del CDEC para el despacho de las unidades de generación, es el mismo mecanismo 3 del modelo inicial descrito en la sección 3.3.2⁴² donde los generadores transmiten sus costos lineales de producción $c^l = (c'_i, c'_j)$ al CDEC para que luego este último decida minimizando el costo total de producción del sistema.

Del mismo modo, las transferencias monetarias del mercado spot son las mismas del modelo inicial descritas en la ecuación 4.

6.2.2. Funciones de Demanda

La demanda inducida por el mecanismo de decisión del cliente en el mercado de contratos, depende de los precios ofertados por los generadores. En la ecuación 29, $q_i^c(p_i, p_j)$ es la cantidad contrada por el generador i para una oferta (p_i, p_j) .

$$q_i^c(p_i, p_j) = \begin{cases} X & \text{si } p_i < p_j \\ \frac{d}{2} & \text{si } p_i = p_j \\ d - X & \text{si } p_i > p_j \end{cases} \tag{29}$$

La demanda inducida por el mecanismo de decisión del CDEC en el mercado Spot es la demanda descrita en la ecuación 6 en la sección 3.3.2.

6.2.3. Utilidad de los Generadores

La ecuación de la demanda en el modelo simplificado es análoga a la ecuación 7 :

$$\begin{aligned}
U_i((p_i, c'_i); (p_j, c'_j)) &= \overbrace{\max_k \{c'_k\} (q_i^s(c'_i, c'_j) - q_i^c(p_i, p_j))}^{\text{Transferencia Balance CDEC } T_i^s} + \overbrace{p_i q_i^c(p_i, p_j)}^{\text{Pago Contrato } T_i^c} - \overbrace{c_i q_i^s(c'_i, c'_j)}^{\text{Costo Producción}} \\
&= \underbrace{(p_i - \max_k \{c'_k\}) q_i^c(p_i, p_j)}_{\text{Beneficios de Comercialización vía Contratos}} + \underbrace{(\max_k \{c'_k\} - c_i) q_i^s(c'_i, c'_j)}_{\text{Beneficios de Venta de Energía en el Mercado Spot}}
\end{aligned} \tag{30}$$

⁴²Mecanismo 3, al igual que la transferencia monetaria del mercado spot, ecuación 4 de la sección 3.3.2 página 25.

6.3. Desarrollo de los Casos Particulares

En esta sección, se presentan los equilibrios obtenidos con el modelo simplificado para cada caso. Al igual que en el modelo inicial, para encontrar el equilibrio, se utiliza *backward induction*. Los cálculos detallados se encuentran en el anexo 3 página 67.

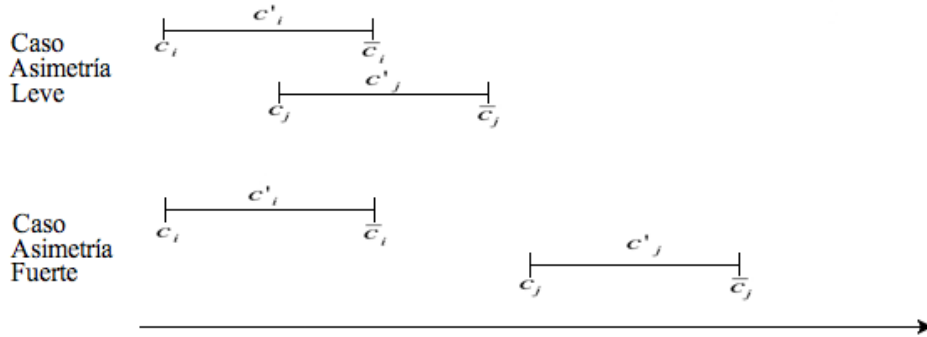
Los distintos casos corresponden a los diferentes valores de X y de los costos reales de producción c_i y c_j , con los cuales se resuelve este modelo.

En primer lugar se buscan equilibrios en el caso simétrico $c_i = c_j$ para $X = d$, luego para $X = k$. En seguida se desarrollan dos casos asimétricos con $X = d$:

- el primero con una asimetría leve: $c_i < c_j$ pero $\bar{c}_i > c_j$,
- el segundo con una asimetría fuerte: $c_i < \bar{c}_i < c_j < \bar{c}_j$.

En la figura 8, se muestran gráficamente los intervalos de los costos marginales que pueden proponer los generadores al CDEC en los casos asimétricos.

Figura 8: Gráfico de los intervalos de costos marginales para los casos asimétricos.



6.3.1. Caso simétrico con un generador que contrata la totalidad de la demanda

En este caso, con $X = d$, la empresa generadora que oferta el menor precio en el mercado de contratos, establece un contrato con el cliente por la totalidad de su consumo. El otro generador, no establece contratos, sólo vende energía en el mercado spot.

Para esta configuración, los equilibrios de la segunda etapa del modelo simplificado se expresan en la ecuación 31, donde $\hat{c} \in [c, c + (\bar{c} - c)\frac{d-k}{k}]$, y en la ecuación 32 es el despacho que induce.

$$c^{eq} = \begin{cases} (\hat{c}, \bar{c}) & \text{si } p_i < p_j \\ (c, c) & \text{si } p_i = p_j \\ (\bar{c}, \hat{c}) & \text{si } p_i > p_j \end{cases} \quad (31) \quad q^s(c^{eq}) = \begin{cases} (k, d - k) & \text{si } p_i < p_j \\ (\frac{d}{2}, \frac{d}{2}) & \text{si } p_i = p_j \\ (d - k, k) & \text{si } p_i > p_j \end{cases} \quad (32)$$

A partir de estos equilibrios en la segunda etapa, se obtienen tres equilibrios (p^{eq}, c^{eq}) para la 1ª etapa del modelo:

- $((p_d^*, p^+), (\hat{c}, \bar{c}))$ que induce $q^c(p^{eq}) = (d, 0)$ y $q^s(c^{eq}) = (k, d - k)$.
- $((p_d^*, p_d^*), (c, c))$ que induce $q^c(p^{eq}) = (\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ y $q^s(c^{eq}) = (\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$.
- $((p^+, p_d^*), (\bar{c}, \hat{c}))$ que induce $q^c(p^{eq}) = (0, d)$ y $q^s(c^{eq}) = (d - k, k)$.

donde $p_d^* = \bar{c} - (\bar{c} - c)\frac{2k-d}{d}$ y $p^+ \in [p_d^*, \bar{p}]$.

Estos tres equilibrios tienen la misma utilidad calculada a partir de los pagos de equilibrio:

$$U_i^{eq}(p_d^*, p^+) = U_i^{eq}(p^+, p_d^*) = U_i^{eq}(p_d^*, p_d^*) = (\bar{c} - c)(d - k) \quad (33)$$

6.3.2. Caso simétrico con un generador que contrata su capacidad total y otro la demanda residual

En este caso, la empresa generadora que oferta el menor precio en el mercado de contratos, establece un contrato con el cliente por una cantidad de energía k igual a su capacidad. El otro generador, contrata la demanda residual $d - k < k$ con el cliente.

Con esta configuración, el equilibrio que se obtiene en el mercado spot de la segunda etapa del modelo es $c^{eq} = (c, c)$ que induce un despacho de equilibrio $q^s(c^{eq}) = (\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$.

A partir de la ecuación 29 de la cantidad contratada y de las utilidades calculadas para los equilibrios perfectos de subjuego en la segunda etapa, se obtiene la función de utilidad para la primera etapa, representada en la ecuación 34.

$$U_i^0(p_i, p_j) = \begin{cases} (p_i - c)k & \text{si } p_i < p_j \\ (p - c)\frac{d}{2} & \text{si } p_i = p_j = p \\ (p_i - c)(d - k) & \text{si } p_i > p_j \end{cases} \quad (34)$$

Para esta función de utilidad, no existe equilibrio en estrategias puras. Hay que buscar un equilibrio en estrategias mixtas.

Las estrategias mixtas se aplican solamente a la primera etapa de este modelo. Para cada realización de la oferta de precios de los generadores en el mercado de contratos, hay una respuesta óptima del cliente utilizando el mecanismo de decisión 27⁴³ que considera el modelo simplificado.

En seguida, los generadores y el CDEC reaccionan óptimamente en el mercado spot de la segunda etapa del modelo, resolviendo el problema de maximización 8 y el mecanismo 3 respectivamente⁴⁴.

⁴³Mecanismo 27 página 41.

⁴⁴Problema 8 página 28 y mecanismo 3 página 25.

Entonces, al utilizar estrategias mixtas para la oferta de precios de los generadores, lo que cambia es el problema que resuelven los generadores en la primera etapa. El problema 35 representa la maximización de la utilidad esperada que efectúan los generadores al utilizar estrategias mixtas.

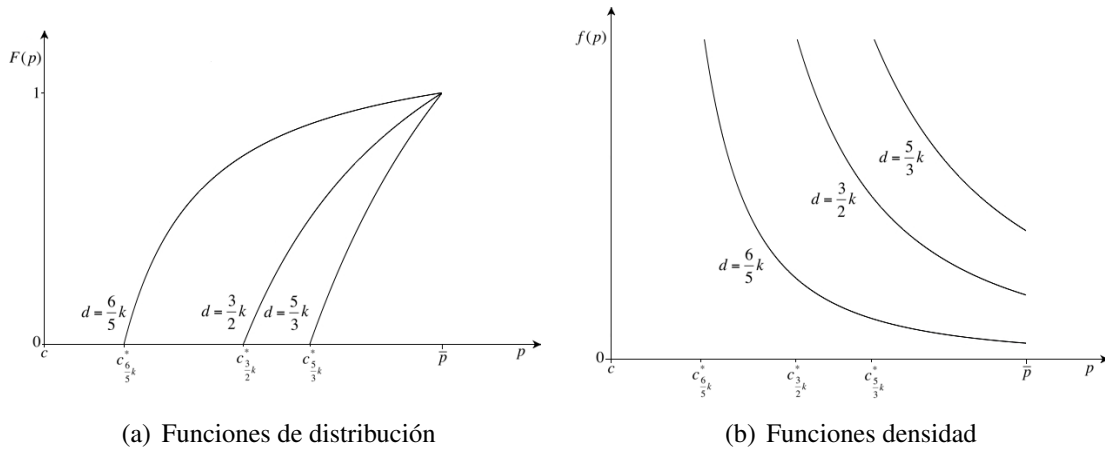
$$\begin{aligned} \max_{p_i, q_i} U_i^0(F_i, F_j) &= \int_{[c, \bar{p}]^2} u_i(p_i, p_j) dF_j dF_i \\ \text{s. a. } F_i &\in M[c, \bar{p}] \quad \forall i \end{aligned} \quad (35)$$

Utilizando la simetría del problema y las condiciones de bordes, se determina la distribución de probabilidad de equilibrio F^{eq} de la primera etapa, representada en la ecuación 36.

En la figura 9, se observan las funciones de distribución de probabilidad de equilibrio y sus densidades respectivas, para distintos valores relativos de la demanda en relación a la capacidad de los generadores.

$$F^{eq}(p_i) = \frac{(p_i - c)k - (\bar{p} - c)(d - k)}{(p_i - c)(2k - d)}, \quad p \in [c + (\bar{p} - c)\frac{d - k}{k}, \bar{p}] \quad (36)$$

Figura 9: Gráficos de distribuciones y densidades de probabilidad de equilibrio según el valor de la demanda.



Las utilidades esperadas de este equilibrio son:

$$U_i^0(F^{eq}(p_i), F^{eq}(p_j)) = U_j^0(F^{eq}(p_j), F^{eq}(p_i)) = (\bar{p} - c)(d - k)$$

6.3.3. Caso con asimetría leve y un generador que contrata la totalidad de la demanda

En este caso, con $X = d$ y una asimetría leve en los costos reales de producción, la empresa generadora que oferta el menor precio en el mercado de contratos, establece un contrato con el cliente por la totalidad de su consumo. El otro generador, no establece contratos, sólo vende energía en el mercado spot.

Como la asimetría de costos marginales es leve, los intervalos de los costos marginales que pueden proponer ambos generadores al CDEC se superponen, como se muestra en la figura 8.

Sea el generador i , el generador con menor costo marginal real c_i . En este caso, $c_i < c_j$, pero $\bar{c}_j > \bar{c}_i$. Entonces, existen costos c_j que el generador j puede proponer al CDEC que son menores a costos c_i que puede proponer al CDEC el generador i .

Para esta configuración, los equilibrios de la segunda etapa del modelo simplificado se describen en la ecuación 37 y el despacho que inducen en la ecuación 38, donde $\hat{c}_i = c_i + (\bar{c}_i - c_i) \frac{d-k}{k} \in (c_i, \bar{c}_i)$.

$$c^{eq} = \begin{cases} (\text{mín}\{\bar{c}_i, \hat{c}_i\}, \bar{c}_j) & \text{si } p_i < p_j \\ (c_j^-, c_j) & \text{si } p_i = p_j \\ (\bar{c}_i, \hat{c}_i) & \text{si } p_i > p_j \text{ y } \hat{c}_i > c_j \\ (c_j^-, c_j) & \text{si } p_i > p_j \text{ y } \hat{c}_i < c_j \end{cases} \quad (37)$$

$$q^s(c^{eq}) = \begin{cases} (k, d-k) & \text{si } p_i < p_j \\ (k, d-k) & \text{si } p_i = p_j \\ (d-k, k) & \text{si } p_i > p_j \text{ y } \hat{c}_i > c_j \\ (k, d-k) & \text{si } p_i > p_j \text{ y } \hat{c}_i < c_j \end{cases} \quad (38)$$

A partir de estos equilibrios y según el valor de \hat{c}_i con respecto a c_j , existen dos casos para el equilibrio de este modelo en la primera etapa:

- Si $\hat{c}_i > c_j$, las estrategias de equilibrio son $(p^{eq}, c^{eq}) = ((\text{mín}\{\bar{p}, p_j^{*2}\}, \text{mín}\{\bar{c}_i, \hat{c}_j\}), (p_j^+, \bar{c}_j))$, donde $p_j^{*2} = \bar{c}_i \frac{d-k}{d} + c_j \frac{2k-d}{d} + \bar{c}_j \frac{d-k}{d}$, y $p_j^+ \in (p_j^{*2}, \bar{p}]$, que inducen $q^c(p^{eq}) = (d, 0)$ y $q^s(c^{eq}) = (d, d-k)$.

Las utilidades de este equilibrio son:

$$U_i^0(p^{eq}, c^{eq}) = \text{mín}\{(\bar{p} - \bar{c}_j)d + (\bar{c}_j - c_i)k, (\bar{c}_i - c_j)(d-k) + (c_j - c_i)k\}$$

$$U_j^0(p^{eq}, c^{eq}) = (\bar{c}_j - c_j)(d-k)$$

- Si $\hat{c}_i < c_j$, las estrategias de equilibrio son $(p^{eq}, c^{eq}) = ((\text{mín}\{\bar{p}, p_j^{*2}\}, \text{mín}\{\bar{c}_i, \hat{c}_j\}), (p_j^{+2}, \bar{c}_j))$, donde $p_j^{*2} = \bar{c}_i + (\bar{c}_j - c_j) \frac{d-k}{d}$ y $p_j^{+2} \in (p_j^{*2}, \bar{p}]$, que inducen $q^c(p^{eq}) = (d, 0)$ y $q^s(c^{eq}) = (d, d-k)$.

Las utilidades de este equilibrio son:

$$U_i^0(p^{eq}, c^{eq}) = \text{mín}\{(\bar{p} - \bar{c}_j)d + (\bar{c}_j - c_i)k, (c_j - c_i)k\}$$

$$U_j^0(p^{eq}, c^{eq}) = (\bar{c}_j - c_j)(d-k)$$

6.3.4. Caso con asimetría fuerte y un generador que contrata la totalidad de la demanda

En este caso, con $X = d$ y una asimetría fuerte en los costos reales de producción, la empresa generadora que oferta el menor precio en el mercado de contratos, establece un contrato con el cliente por la totalidad de su consumo. El otro generador, no establece contratos, sólo vende energía en el mercado spot.

Sin embargo, dada la gran asimetría de los costos reales en este caso como se muestra en la figura 8, el generador con el menor costo de producción está asegurado de ser despachado antes del generador con mayores costos. Es decir, el generador con costo marginal inferior genera siempre su capacidad k para el mercado spot, mientras que el generador con costo marginal superior produce $d - k$ para el mercado.

Dada esta configuración, el equilibrio de la segunda etapa es $c^{eq} = (\bar{c}_i, \bar{c}_j)$, y el despacho es $q^s(c^{eq}) = (k, d - k)$.

A partir de este equilibrio, se obtiene el equilibrio de la primera etapa para este modelo $(p^{eq}, c^{eq}) = ((\bar{c}_j, \bar{c}_i), (\bar{c}_j, \bar{c}_j))$ y las cantidades contratadas en equilibrio $q^c(p^{eq}) = (d, 0)$.

Luego, las utilidades de los generadores en el equilibrio son:

$$U_i^1(p^{eq}, c^{eq}) = (\bar{c}_j - c_i)k \quad (39)$$

$$U_j^1(p^{eq}, c^{eq}) = (\bar{c}_j - c_j)(d - k) \quad (40)$$

7. Análisis de los Resultados

En este capítulo, se estudian los resultados obtenidos en los tres últimos capítulos, con el objetivo de esclarecer por qué se obtienen esos resultados y qué representan esos resultados. Se comienza analizando los resultados obtenidos a partir del modelo general y luego se estudian los resultados de los casos particulares. Finalmente, se contrasta con eventos de la historia reciente del mercado de generación chileno.

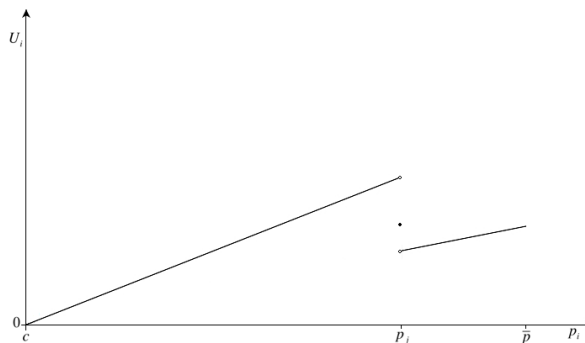
7.1. Análisis del Modelo Estudiado

El modelo que se desarrolla en los capítulos 3, 4 y 5, toma como base el funcionamiento del mercado de generación chileno como se explica al comienzo del capítulo 3. Una característica particular del mercado chileno y representada en el modelo, es que el cliente está obligado a contratar la totalidad de su consumo, ya que no puede ir a comprar energía al mercado spot.

Visto desde el punto de vista de los generadores, estos saben que en algún momento el cliente tendrá que contratar su energía y por lo tanto, si la banda de precios posibles no los incentiva a participar del mercado de contratos, esperarán a que haya una banda conveniente para hacerlo. Ningún generador establecerá un contrato con el cliente si sus ganancias al hacerlo son menores que las ganancias de sólo vender energía en el mercado spot, considerando que otro generador puede contratar la demanda del cliente.

Por otro lado, por el tipo de pago del mercado de contratos –pago variable según el consumo del cliente–, las funciones de utilidad de los generadores al incluir ambos mercados, son muy sensibles al precio y tiene una discontinuidad en la igualdad de las ofertas en precio, si bien son crecientes por partes. Por estas razones, no existe equilibrio en estrategias puras del modelo propuesto.

Figura 10: Gráfico de la función utilidad U_i en función de p_i , para $q_i, q_j \in [d - k, k]$



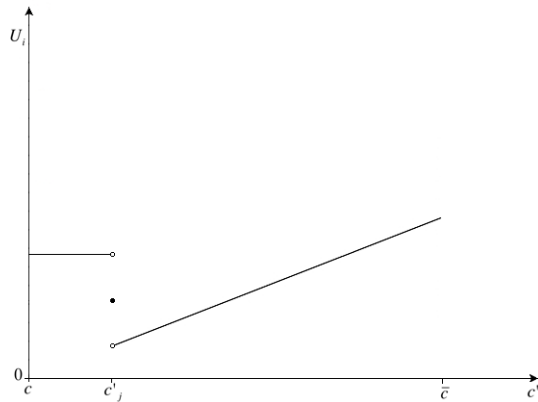
En la figura 10, se observa la función utilidad de un generador en función del precio de contratos p_i cuando el otro generador oferta p_j y para cantidades de contrato ofertadas dentro del intervalo $[d - k, k]$. Esta función es estrictamente creciente por partes y tiene una discontinuidad del primer tipo en $p_i = p_j$. De acuerdo al gráfico, al generador i le conviene ofertar un precio inferior a p_j tan cercano a p_j como sea posible, siempre cuando p_j sea mayor a un cierto valor, a partir del cual la utilidad máxima se obtiene en \bar{p} .

Sin embargo, si un generador oferta \bar{p} , al otro le conviene ofertar $\bar{p} - \epsilon$ y no un valor menor. Es por esto que no existe equilibrio en estrategias puras.

Paralelamente, en el mercado spot, los equilibrios encontrados dependen de la cantidad de energía que tiene contratado cada generador. Claramente si un generador tiene que pagar por el consumo de su cliente al precio que haya en el momento mismo del consumo en el mercado spot, le conviene pagarlo al mínimo costo posible, es decir en este caso simétrico, a su costo marginal. Esto se obtiene cuando el mismo generador que contrató el consumo del cliente produce la cantidad de energía requerida.

Por la misma razón, cuando un generador tiene muy poca energía contratada (menos que lo que genera en el mercado spot), tiene incentivos de subir el precio de la energía del mercado spot tanto como sea posible. Además sus ganancias vendrán sólo de este mercado. Es por esto que cuando la cantidad de energía contratada de un generador representa muy poco con respecto a su capacidad de producción, hay ocasiones en que le conviene transmitir el costo propuesto más elevado posible al CDEC, aunque implique que genere sólo la demanda residual.

Figura 11: Gráfico de la función utilidad U_i en función de c'_i , para un generador sin contrato



La figura 11 muestra el gráfico de la función utilidad U_i de un generador sin contratos, en función del costo propuesto c'_i que transmite al CDEC cuando el otro generador propone c'_j . En el gráfico se observa claramente que para ciertos valores de c'_j el máximo de la utilidad del generador se alcanza en \bar{c} , a pesar de que implique que el generador sólo produce la demanda residual en el mercado spot.

Luego, a modo de principios generales se puede concluir a partir del modelo, que mientras un generador tenga contratos que representen en cantidad de energía una parte considerable de su capacidad, tiene incentivos para transmitir su costo marginal real (o un costo propuesto muy cercano) para asegurar su despacho.

Inversamente, si un generador tiene muy pocos contratos y está seguro de al menos generar la demanda residual, tratará de subir tanto como sea posible el precio en el mercado spot.

7.2. Análisis del los Casos Particulares

Los casos particulares, basados en un modelo simplificado a partir del modelo base, se desarrollan para tener mayor *insight* del modelo original. A continuación se presenta primero un análisis

de cada uno de los cuatro casos para luego estudiarlos en conjunto.

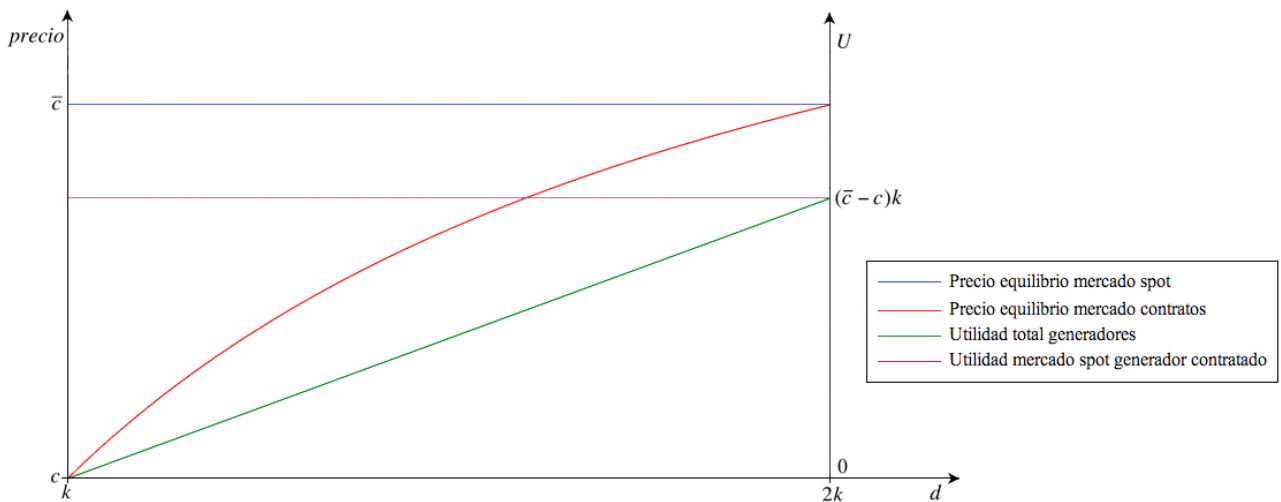
7.2.1. Análisis del Caso 1: Caso simétrico con $X = d$

En este caso, un solo generador contrata la totalidad del consumo del cliente. Se obtienen con el modelo simplificado, tres equilibrios que tienen la misma utilidad final, idéntica para ambos generadores. Es decir, el generador que establece el contrato tiene el mismo beneficio que el generador que sólo participa en el mercado spot.

Sin embargo, ambos generadores no producen la misma cantidad de energía en los equilibrios no simétricos ($p_i \neq p_j$). La utilidad de equilibrio $U^{eq} = (\bar{c} - c)(d - k)$, corresponde a las ganancias del generador sin contrato que produce la demanda residual $d - k$ en el mercado spot. Esto quiere decir que el otro generador, el que contrata la demanda del cliente, disminuye su utilidad del mercado spot $U_{q^c=d}^{spot} = (\bar{c} - c)k$ al establecer el contrato.

En la figura 12 se observa con mayor claridad esta situación del equilibrio asimétrico según el valor de la demanda, $d \in (k, 2k)$. La curva en azul representa el precio de la energía en el mercado spot. Este precio siempre es mayor al precio del mercado de contratos, representado por la curva roja. Con respecto a las utilidades, se observa que la utilidad final de los generadores es siempre inferior a la utilidad que obtiene en el mercado spot el generador contratado.

Figura 12: Gráfico de los resultados de equilibrio del caso $X = d$ en función del valor de la demanda.



Cabe destacar, tal como se observa en el gráfico de la figura 12, el cliente obtiene un precio de contrato menor al precio del mercado spot, precio al que tendría que pagar su consumo de ir a comprar energía directamente en el mercado spot.

En resumen, el mercado de contratos no aporta beneficios adicionales a los generadores en el caso en que un generador está obligado a contratar toda la demanda del cliente, la cual sobrepasa su capacidad. Es más, puntualmente, disminuye los beneficios obtenidos en el mercado spot del generador que establece el contrato.

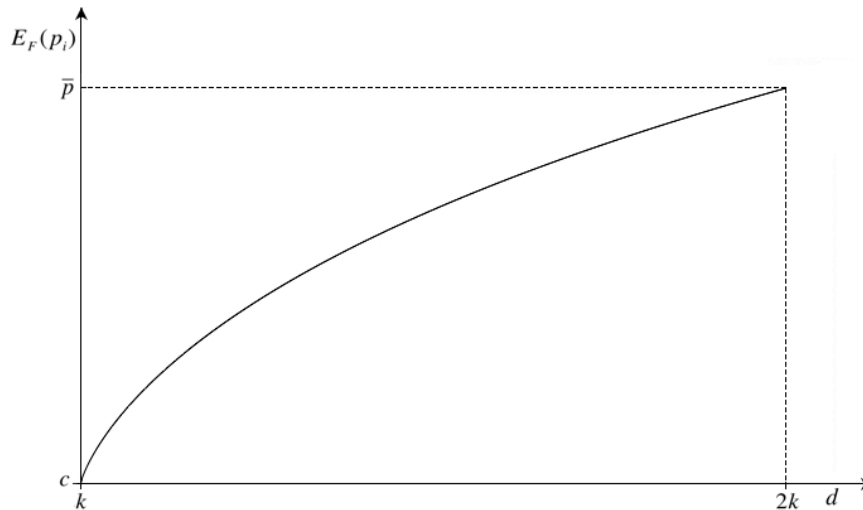
7.2.2. Análisis del Caso 2: Caso simétrico con $X = k$

En este caso, los generadores se reparten la energía a contratar del cliente, contratando uno su capacidad k y el otro la demanda residual $d - k$. Para esta configuración, no existe equilibrio en estrategias puras, dado que la función utilidad de los generadores creciente y tiene una discontinuidad del primer tipo como en la figura 10, página 47.

Resolviendo el problema con estrategias mixtas, se obtiene la función distribución de equilibrio representada junto con la función densidad asociada, en la figura 9 página 44. Se observa en los gráficos que se le asigna una alta probabilidad al comienzo del intervalo de precios del soporte de la función distribución de equilibrio, y que luego el peso relativo va disminuyendo hasta llegar al límite del intervalo \bar{p} .

En los gráficos de la figura 9, se observa que el intervalo soporte de la función distribución de equilibrio se va estrechando y acercando al límite \bar{p} , cuando aumenta la demanda y se acerca a la capacidad máxima del sistema. Por el mismo motivo, se observa en la figura 13 que la esperanza de los precio va aumentado a medida que la demanda se acerca a la capacidad total del sistema eléctrico.

Figura 13: Gráfico de la esperanza del precio de contrato $E_F(p_i)$ en función del valor de la demanda.



Cabe destacar que la utilidad de equilibrio de los generadores $U_i = (\bar{p} - c)(d - k)$, es la misma que obtendrían en estrategias puras si un generador oferta \bar{p} y el otro $p_k^* = c + (\bar{p} - c)\frac{d-k}{k}$, en cuyo caso las utilidades de los generadores son idénticas. Sin embargo, esta oferta no constituye un equilibrio en estrategias puras dado que al generador que oferta p_k^* obtendría mayores beneficios de ofertar $\bar{p} - \epsilon$. No obstante, podría ser interpretado como un equilibrio bajo amenaza: si el generador juega un precio mayor a p_k^* entonces el otro jugador ya no jugaría \bar{p} y ambos generadores perderían utilidad.

La distribución de probabilidad de equilibrio en estrategias mixtas se puede interpretar por la misma línea. El intervalo soporte de la función distribución es $[p_k^*, \bar{p}]$. El hecho que los precios mayores a p_k^* tengan probabilidad positiva, significa que podrían ser ofertados por los generadores aunque con menor probabilidad, ya que, como se vio anteriormente, la densidad máxima se alcanza al comienzo del intervalo.

Por último, en este escenario, todo el beneficio de los generadores proviene del mercado de contratos ya que estando ambos contratados, siempre les conviene generar lo más posible en el mercado spot. El precio en el mercado spot es esta vez competitivo y el precio de la energía en los contratos es mayor al precio de la energía vendida en el mercado spot.

7.2.3. Análisis del Caso 3: Caso asimétrico leve con $X = d$

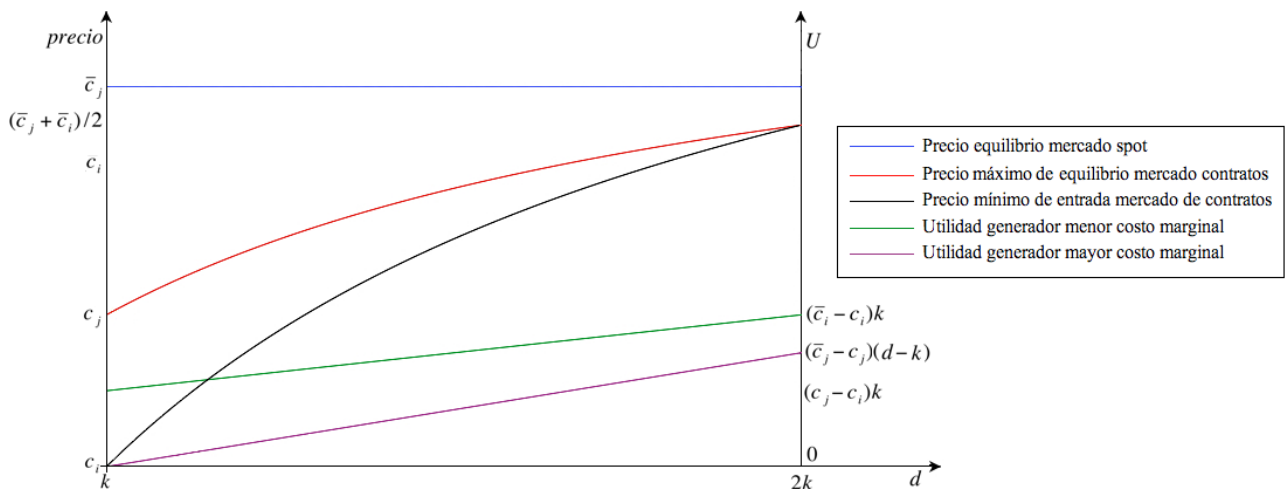
En este caso, un sólo generador contrata toda la demanda del cliente. Sin embargo, esta vez, los generadores tienen distintos costos de producción y por lo tanto cada generador tiene un intervalo distinto de costos marginales que puede proponer al CDEC. Como los costos marginales no son tan diferentes en este caso, existen valores que están en la intersección de ambos intervalos.

En el equilibrio, el generador con menor costo de producción es quien establece contrato con el cliente y el que genera la mayor porción de la demanda en el mercado spot. El precio del mercado spot es el mayor costo que el generador más caro puede transmitir.

El precio del mercado de contratos es el mínimo entre el precio límite \bar{p} , y el precio a partir del cual al generador más caro le interesa entrar a competir en el mercado de contratos. Sin embargo, existe un precio mínimo para que el generador con el menor costo de producción participe en el mercado de contratos. Si el precio límite está bajo este precio de entrada, ninguno de los generadores tiene incentivos para participar en la oferta de contrato del cliente.

En la figura 14, se observan los resultados de este caso particular en función del valor de la demanda, cuando \bar{p} es suficientemente grande como para no ser el precio de equilibrio del mercado de contratos.

Figura 14: Gráfico de los resultados de equilibrio del caso asimétrico leve en función del valor de la demanda.



Se destaca que los precios en la banda de precios de equilibrio del mercado de contratos siempre son menores al precio de la energía en el mercado spot. A medida que la demanda va alcanzado la capacidad máxima del sistema eléctrico ($d \rightarrow 2k$), la banda de precios de equilibrio se va haciendo más estrecha, siendo siempre menor al precio del mercado spot.

Por otro lado, tal como se esperaba, la utilidad del generador con menor costo marginal es superior a la del generador con mayor costo de producción, si bien ambas utilidades dependen de la amplitud del intervalo de costos que puedan transmitir al CDEC. Con la razón de los ingresos de ambos generadores se puede calcular si la mayor inversión en una tecnología con menor costo marginal se justifica o no.

En este caso asimétrico, existen dos familias de resultados según la intersección que tengan los intervalos de costos que pueden transmitir los generadores al CDEC. Tal como se observa en el cuadro 3, existe un valor \hat{c}_i , y según pertenezca a $[c_j, \bar{c}_j]$ o no, dependen los resultados del modelo.

\hat{c}_i corresponde al valor a partir del cual al generador i sin contratos, le conviene producir $d - k$ energía en el mercado spot transmitiendo el costo \bar{c}_i en vez de producir k a un valor menor a \hat{c}_i . Este valor puede ser mayor o menor a c_j :

- Si es mayor a c_j , entonces el generador j puede proponer un costo muy bajo para el cual al generador i le conviene subir el precio y producir menos en vez de producir toda su capacidad a su precio.
- Si \hat{c}_i es menor a c_j , entonces al generador i siempre le conviene transmitir un costo menor al del generador j y generar toda su capacidad en el mercado spot.

Los resultados son diferentes según cual de los casos se presente. Sin embargo, siguen los mismos principios explicados anteriormente.

En resumen, en este caso asimétrico con los intervalos de costos posibles para transmitir al CDEC que se interceptan se tiene que el precio del mercado de contratos es siempre inferior al mayor de los costos marginales posibles, precio de la energía en el mercado spot.

Existe una banda de precios de equilibrio en el mercado de contratos según el precio límite que se impone para contratar la energía, y un precio mínimo para que al menos un generador participe del mercado de contratos.

Por último, las utilidades obtenidas por los generadores son asimétricas, siendo mayor la del generador con menor costo marginal. Esto permite estudiar si la inversión en menor costo de producción es adecuada.

7.2.4. Análisis del Caso 4: Caso asimétrico fuerte con $X = d$

En este último caso, un sólo generador contrata toda la demanda, pero los generadores tienen distintos costos de producción. Sin embargo, esta vez, los costos marginales de producción son tan diferentes, que los intervalos de costos que pueden transmitir al CDEC no se interceptan.

En el equilibrio, el precio del mercado spot y el precio del mercado de contrato son idénticos: \bar{c}_j , el costo propuesto más elevado que puede transmitir el generador con mayores costos de producción. Por lo tanto, ningún generador obtiene beneficios del mercado de contratos, aunque establezca contrato con el cliente.

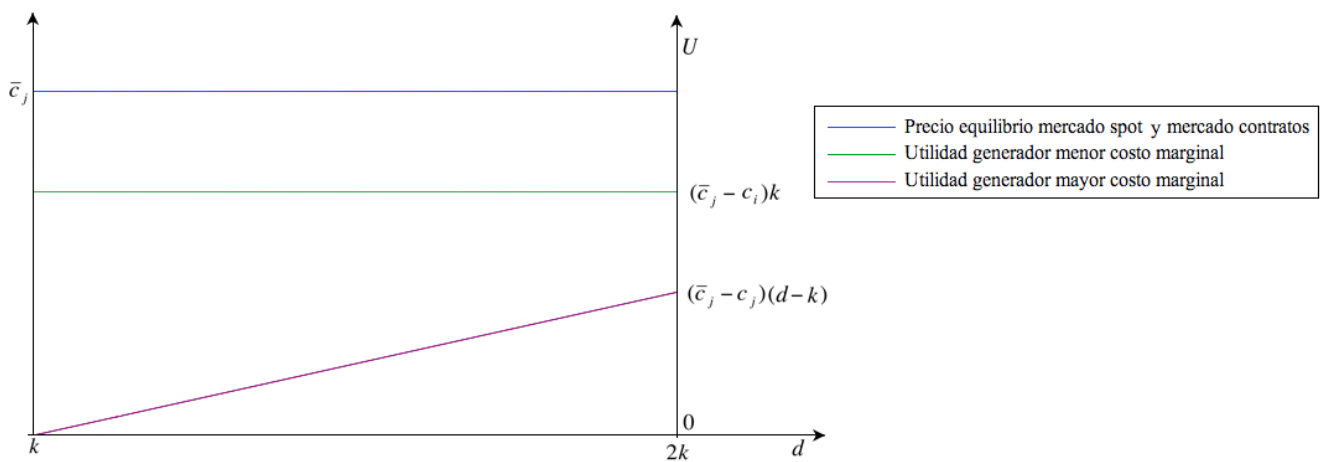
Dada la asimetría de costos marginales, los generadores no compiten por la producción en el mercado spot: los generadores saben de antemano qué cantidad de energía producirá cada uno. Por

lo tanto, para aumentar sus beneficios, el generador más caro transmite el costo más alto posible y ese costo fija el precio de la energía en el mercado spot.

Luego, los generadores ya saben a qué precio se les cobrará el consumo del cliente en el mercado spot. Entonces, ninguno aceptará un contrato por un precio menor a ese, ya que le significaría ganar menos utilidad que participando sólo del mercado spot. Es decir, en este caso el precio de equilibrio es el precio mínimo para que los generadores entren a participar en el mercado de contratos.

En la figura 15 se observan los resultados del caso según el valor de la demanda dentro del rango $(k, 2k)$. Tal como se esperaba, las utilidades del generador con menor costo marginal son mayores que las del generador con mayor costo marginal, a pesar de que dependen de la amplitud de los intervalos que podrían no ser idénticas. Sin embargo se espera que $(\bar{c}_i - c_i) \approx (\bar{c}_j - c_j)$.

Figura 15: Gráfico de los resultados de equilibrio del caso asimétrico fuerte en función de la demanda.



En resumen, en este caso el precio de ambos mercados es idéntico e igual al mayor costo propuesto posible del generador con mayor costo marginal. Las utilidades de los generadores provienen del mercado spot, y el generador con menor costo marginal tiene mayor utilidad. Al igual que en el caso anterior, esto permite estudiar si la inversión en menor costo de producción es adecuada.

7.2.5. Análisis General de los Casos

En el modelo simplificado, se observan los mismos principios que en el modelo general, ya que nuevamente el cliente está obligado a contratar su energía y la demanda obliga a ambos generadores a producir energía, establezcan o no contrato.

En otras palabras, a pesar de que un generador no contrate la demanda del cliente, esa demanda existirá en el mercado spot. Los generadores saben que al menos esa demanda deberá ser despachada en el mercado spot.

Por lo tanto, ningún generador establecerá contrato con el cliente si los beneficios de hacerlo

Cuadro 3: Resumen de los resultados obtenidos en el equilibrio de los casos particulares

Caso	Características	Precio Spot	Precio Contrato	Utilidades de Equilibrio
1	$X = d$ $c_i = c_j = c$	\bar{c} si $p_i \neq p_j$ c si $p_i = p_j$	$p_d^* = \bar{c} - (\bar{c} - c) \frac{2k-d}{d}$	$U_i^{eq} = U_j^{eq} = (\bar{c} - c)(d - k)$
2	$X = k$ $c_i = c_j = c$	c	$E(p_i)$ $p_i \in [c + (\bar{p} - c) \frac{d-k}{k}, \bar{p}]$	$U_i^{eq} = U_j^{eq} = (\bar{p} - c)(d - k)$
3	$X = d$	\bar{c}_j	<ul style="list-style-type: none"> ■ Si $\hat{c}_i > c_j$: 	$U_i^{eq} = \min \left\{ \begin{array}{l} (\bar{p} - \bar{c}_j)d + (\bar{c}_j - c_i)k, \\ (\bar{c}_i - c_j)(d - k) + (c_j - c_i)k \end{array} \right\}$ $U_j^{eq} = (\bar{c}_j - c_j)(d - k)$
	<ul style="list-style-type: none"> ■ Si $\hat{c}_i < c_j$: 		$U_i^{eq} = \min \left\{ \begin{array}{l} (\bar{p} - \bar{c}_j)d + (\bar{c}_j - c_i)k, \\ (c_j - c_i)k \end{array} \right\}$ $U_j^{eq} = (\bar{c}_j - c_j)(d - k)$	
4	$X = d$ $c_i < \bar{c}_i < \bar{c}_j < c_j$	\bar{c}_j	\bar{c}_j	$U_i^{eq} = (\bar{c}_j - c_i)k$ $U_j^{eq} = (\bar{c}_j - c_j)(d - k)$

$$\hat{c}_i = c_i + (\bar{c}_i - c_i) \frac{d-k}{k} \in (c_i, \bar{c}_i)$$

$$p_j^{*2} = \bar{c}_i + (\bar{c}_j - c_j) \frac{d-k}{d}$$

$$p_j^* = \bar{c}_i \frac{d-k}{d} + c_j \frac{2k-d}{d} + \bar{c}_j \frac{d-k}{d}$$

$$p_i^{*2} = \bar{c}_j - (\bar{c}_j - c_j) \frac{k}{d}$$

$$p_i^* = \bar{c}_j \frac{d-k}{k} + c_i \frac{2k-d}{d} + \bar{c}_i \frac{d-k}{d}$$

Fuente: Elaboración propia.

no igualan o superan los beneficios de participar solamente en el mercado spot. En el cuadro 3, se observan los resultados obtenidos en el equilibrio en los cuatro casos.

En los casos simétricos, las utilidades de equilibrio corresponden a lo mínimo que un generador puede asegurarse de ganar dada la configuración de ambos mercados del modelo. En efecto, en el caso en que sólo un generador establece contrato, las utilidades de equilibrio corresponden al mínimo que un generador puede asegurarse como transferencia en este modelo participando sólo en el mercado spot. En el caso en que un generador contrata su capacidad y el otro la demanda residual, las utilidades de equilibrio corresponden al mínimo que puede asegurar el generador que contrata la demanda residual.

Además, al comparar los beneficios obtenidos por los generadores, se detecta que los generadores obtienen mayores utilidades en caso de que no estén sobrecontratados. Este resultado se obtiene considerando capacidad fija de los generadores, por lo que se puede extender que a los generadores no les conviene contratar más cantidad que el mínimo de su capacidad máxima en caso de que esta capacidad fluctúe, como sucede con las unidades de generación hidráulicas por ejemplo.

En los casos asimétricos, claramente el generador con menor costo marginal obtiene más beneficios en comparación al con mayor costo marginal. En particular esta situación se accentúa por la forma de las transferencias monetarias en el mercado spot: el precio es el costo propuesto más elevado que puede transmitir el generador con mayor costo de producción en el despacho. Desde ahí nace la asimetría de las utilidades que percibe cada generador que permite estudiar si la inversión en una tecnología con menor costo de producción se justifica.

Por último, en los casos estudiados, el precio de equilibrio en el mercado de contratos es siempre inferior al precio que tendría que pagar el cliente de no existir el mercado de contratos. Efectivamente, en un modelo que considera sólo el mercado spot en las mismas condiciones, el precio del mercado es el costo máximo que pueden proponer los generadores⁴⁵. Entonces, es socialmente es más conveniente introducir el mercado de contratos y obligar a las empresas generadoras a participar en ambos mercados, por ejemplo impidiendo el acceso de los clientes al mercado spot.

Cabe señalar que todos los modelos estudiados consideran una demanda determinista. Sin embargo, los resultados son equivalentes al introducir una demanda aleatoria y considerar la esperanza de los pagos, la esperanza de las transferencias monetarias y de las utilidades, mutatis mutandis.

7.3. Contraste con el Mercado de Generación Chileno

Con el estudio del modelo del mercado de generación y de los casos particulares, se concluye que la respuesta óptima es compleja y difícil de caracterizar, a pesar de que se obtienen ciertos principios generales. En el mercado de generación chileno, se observa que las empresas presentes en él han optado por soluciones diferentes a la hora de enfrentar las decisiones del mercado (precios y cantidades de los contratos en particular).

En Chile, tanto en el SIC como en el SING se han visto problemas de empresas sobrecontratadas dado a cambios violentos en los costos de producción –discontinuidad del Gas desde Argentina, extrema sequía por ejemplo- y por lo tanto a los equilibrios de los mercados. Estas empresas se enfrentaron a graves problemas financieros. En el caso de Gas Atacama, terminaron con su quiebra y una gran intervención para cuidar la seguridad del sistema eléctrico por los contratos no cumplidos. En el caso de Colbún hace unos años atrás, fue necesario un cambio de política de contratos para volver a surgir.

Con la finalidad de protegerse ante un cambio imprevisto y violento de los costos de producción durante el período de validez del contrato, algunos generadores negocian una forma de indexación del precio de contrato al precio del mercado spot.

Con el mismo objetivo, de acuerdo a consultores del área eléctrica, los porcentajes de capacidad contratada en comparación a la capacidad instalada total de las empresas, es hoy en día siempre menor al 100%.

Es así como las empresas con una mayor parte de su capacidad instalada siendo centrales hidroeléctrica de embalses se contratan incluso menos, al rededor de 60 a 70% como máximo para poder enfrentar bien el riesgo de sequía y porque además tienen casi asegurado su despacho y por lo tanto ingresos en el mercado spot. No obstante, las empresas con mayor producción termoeléctrica, tienen por lo general un mayor porcentaje de energía contratada.

Con respecto a los márgenes de ganancias según los costos marginales, cabe destacar que por lo general las tecnologías con menores costos marginales (hidroeléctricas, eólicas,...) y que por lo tanto obtienen mayores ganancias, en particular provenientes del mercado spot, son gene-

⁴⁵Para más detalle del modelo del mercado spot, ver anexo D, página 77.

ralmente tecnologías más caras de inversión que las tecnologías con mayores costos marginales (termoeléctricas). Por lo tanto, los resultados operacionales deben luego cubrir la mayor inversión inicial.

Finalmente, en todos los casos particulares, se observa que mientras más cercana esté la demanda de la capacidad máxima del sistema, más elevados son los precios de equilibrios en el mercado spot y en el mercado de contratos.

Un fenómeno similar se observa hoy en día en el mercado chileno, donde luego de algunos años de intensa inversión en capacidad de generación y la reducción del consumo, la holgura actual existente en el sistema permite la reducción de los precios.

8. Conclusiones

El mercado eléctrico es un mercado que se destaca de los mercados de bienes tradicionales por las características físicas de la energía eléctrica, que por un lado hacen muy importantes los ajustes de oferta y demanda para mantener la seguridad del sistema y asegurar el suministro, y que por otro lado, no permiten diferenciar los clientes o generadores que consumen o producen respectivamente.

Además, en los mercados desregulados de generación como el mercado chileno, la legislación interviene profundamente en las funciones de utilidad, y por lo tanto en los beneficios, de las empresas presentes en el mercado.

Por estas razones en particular, el mercado de generación, compuesto del mercado de contratos y del mercado spot, es un mercado complejo en que los incentivos de las empresas no se destacan directamente. De ahí el interés de estudiar el mercado y desarrollar un modelo que se asemeje.

Gracias al estudio del mercado eléctrico y de la literatura existente, se logra desarrollar un modelo para el mercado de generación chileno considerando el mercado spot y el mercado de contratos, que toma en cuenta las principales particularidades del mercado chileno.

En particular, este modelo toma en cuenta los aspectos relevantes para la decisión de despacho del CDEC en el mercado spot, y considera que la totalidad de la energía consumida por el cliente debe ser contratada a priori. Estas características singulares del mercado de generación chileno no han sido analizadas en conjunto en la literatura existente.

Al estudiar el modelo y buscar los equilibrios en las diferentes etapas, se concluye que el modelo general desarrollado no tiene equilibrio en estrategias puras, principalmente por tener funciones de utilidad discontinuas. No obstante, se demuestra la existencia de un equilibrio en estrategias mixtas gracias a la aplicación de teoremas robustos de existencia de equilibrio.

Gracias al desarrollo de casos particulares del modelo para los que se obtiene una caracterización de los equilibrios, se deducen algunos principios generales del funcionamiento del mercado:

- Mientras más cercana la demanda a la capacidad máxima del sistema, más elevado será el precio de equilibrio en el mercado de contratos.
- En caso de que un generador esté sobre contratado, disminuye su beneficio obtenido en el mercado spot con pérdidas relacionadas al mercado de contratos. Un generador que establece contratos por una cantidad de energía menor a su capacidad obtiene mayores beneficios que uno sobrecontratado.
- En caso de asimetría de los costos marginales de producción de los generadores, el generador con menores costos marginales de producción obtiene mayores beneficios, y se puede calcular si una mayor inversión en una tecnología con menor costo marginal se justifica.
- Si un generador establece contratos por una cantidad de energía considerable con respecto a su capacidad de producción, no tiene incentivos de transmitir al CDEC un costo distinto a su costo real de producción en el mercado spot.

Los tres primeros son principios posibles de observar en la historia reciente del mercado de generación chileno, con los datos del mercado de generación y el estudio de medios especializados. Para verificar el último, es necesario estudiar con mayor detalle la información proveniente del mercado de generación.

Al comparar los resultados de los casos particulares con un modelo en que los clientes van a comprar energía al mercado spot, se tiene que el precio de compra de energía de los clientes es inferior en el modelo que incluye ambos mercados, el spot y el de contratos. El modelo con ambos mercados es más competitivo, y por lo tanto, socialmente más conveniente.

A partir de este trabajo, es posible extender el modelo acercándolo aún más a la realidad, introduciendo por ejemplo más generadores, las pérdidas por transferencia en la red eléctrica, demanda aleatoria, capacidades máximas de los generadores variables, los pagos por potencia en el mercado Spot. Además, con respecto a la temporalidad del modelo, puede ser interesante considerar un juego en que la etapa del mercado spot se juegue varias veces, o también considerar el juego repetido del modelo desarrollado.

Bibliografía

- [1] BLAISE ALLAZ y JEAN-LUC VILLA. Cournot Competition, Forward Markets and Efficiency. *Journal of Economic Theory*, 59(1), 1991.
- [2] ADIB BAGH y ALEJANDRO JOFRÉ. Reciprocal Upper Semicontinuity and Better Reply Secure Games: A Comment. *Econometrica*, 74(6):1715–1721, 2006.
- [3] PATRICK BILLINGSLEY. *Convergence of Probability Measures*. Wiley Inter-Science, second edición, 1999.
- [4] WALTER BROKERING, RODRIGO PALMA y LUIS S. VARGAS. *Ñom Lüfke (el Rayo Domado) o Sistemas Eléctricos de Potencia*. Prentice Hall - Pearson Education, 2008.
- [5] COMISIÓN NACIONAL DE ENERGÍA. www.cne.cl. .
- [6] COMISION NACIONAL DE ENERGÍA. *La Regulación del Segmento Transmisión en Chile*. Gobierno de Chile, 2005.
- [7] COMISION NACIONAL DE ENERGÍA. *La Regulación del Segmento Distribución en Chile*. Gobierno de Chile, 2006.
- [8] COMISION NACIONAL DE ENERGÍA. Fijación de Precios de Nudo Octubre 2009 Sistema Interconectado Central. Informe técnico, Gobierno de Chile, 2009.
- [9] MINISTERIO DE ENERGÍA. www.minenergia.cl. .
- [10] RED ELÉCTRICA DE ESPAÑA. www.ree.es.
- [11] MINISTERIO DE MINERÍA. *Ley General de Servicios Eléctricos, en Materia de Energía Eléctrica. Decreto con Fuerza de Ley N°1*. Gobierno de Chile, 1982.
- [12] JUAN F. ESCOBAR y ALEJANDRO JOFRÉ. Monopolistic Competition in Electricity Networks with Resistance Losses. 2008.
- [13] DREW FUDENBERG y JEAN TIROLE. *Game Theory*. MIT Press, 1991.
- [14] SALLY HUNT. *Making Competition Work in Electricity*. Wiley Finance, 2002.
- [15] DAVID M. KREPS y JOSÉ A. SCHEINKMAN. Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yields Cournot Outcomes. *The Bell Journal of Economics*, 14(2):326–337, 1983.
- [16] RICHARD LEVITAN y MARTIN SHUBIK. Price Duopoly and Capacity Constraints. *International Economic Review*, 13(1):111–122, 1970.
- [17] RICHARD LEVITAN y MARTIN SHUBIK. Duopoly with Price and Quantity as Strategic Variables. *International Journal of Game Theory*, 7(1):1–11, 1976.
- [18] MATTI LISKI y JUAN-PABLO MONTERO. Forward Trading and Collusion in Oligopoly. *Journal of Economic Theory*, 131:212–230, 2006.
- [19] MARTIN J. OSBORNE y ARIEL RUBINSTEIN. *A Course in Game Theory*. MIT Press, 1994.

- [20] PHILIP J. RENY. On the Existence of Pure and Mixed Strategy Nash Equilibria in Discontinuous Games. *Econometrica*, 67(5):1029–1056, 1999.
- [21] MOHAMMAD SHAHIDEHPOUR, HATIM YAMIN y ZUYI LI. *Market Operations in Electric Power Systems*. Wiley - IEEE Press, 2002.
- [22] ENNIO STACCCHETT. Auction Design for the Colombian Electricity Market. *Journal of Economic Literature*, 1999.
- [23] DANIEL W. STROOCK. *Probability Theory: An Analytic View*. Cambridge University Press, 1993.
- [24] JEAN TIROLE. *The Theory of Industrial Organization*. MIT Press, 1988.
- [25] XAVIER VIVES. *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools*. MIT Press, 2001.

Anexos

A. Descripción de las Licitaciones de Energía⁴⁶

Este anexo busca explicar con mayor detalle lo correspondiente a las licitaciones de energía de la Ley General de Servicios Eléctricos, relevante dentro del contexto de este trabajo.

Con respecto a las bases de las licitaciones de energía, la Ley establece lo siguiente:

- Las concesionarias pueden efectuar una licitación de sus necesidades de suministro de manera individual o conjunta. (Art. 79^o-1).
- Las bases deben ser elaboradas por las concesionarias, previa aprobación de la Comisión Nacional de Energía (CNE, Art. 79^o-2).
- Las bases deben especificar, a lo menos, los puntos del sistema eléctrico en el cual se efectuará el suministro, la cantidad a licitar y el período de suministro cubierto (Art. 79^o-2).
- El período de suministro que cubra la oferta no puede ser superior a quince años (Art. 79^o-3).
- Las exigencias de seguridad y calidad de servicio establecidas en la licitación deben ser homogéneas, según la normativa y no discriminatorias para los oferentes (Art. 79^o-3).
- Se prohíbe la oferta de calidades especiales de servicio y la inclusión de regalías o beneficios adicionales al suministro (Art. 79^o-3).
- El precio de la potencia es fijado en el decreto de precio nudo vigente al momento de la licitación y se mantiene fijo durante todo el período del contrato (Art. 79^o-3).
- Las fórmulas de indexación del precio de energía y de la potencia, deben reflejar la variación de los costos de los combustibles y otros instrumentos relevantes para la generación eléctrica, para que su valor no varíe en términos reales durante la duración del contrato (Art. 79^o-3).
- La licitación se adjudicará al oferente que ofrezca el menor precio de energía (Art. 79^o-4).
- El precio se mantendrá fijo durante el período de facturación.
- El total de la energía que se factura a una distribuidora es igual a la energía que efectivamente consume durante el período de facturación.
- El valor máximo de las ofertas de precio es el límite superior de la banda definida en el artículo 101^oter, incrementado en el 20 % vigente al momento de la licitación.
- Si una licitación es declarada desierta, la concesionaria debe convocar a una nueva licitación, en la cual el Consejo Directivo de la CNE puede acordar incrementar el límite superior de la banda de precios hasta en el 15 %.

⁴⁶Basado en el Anexo 3: Efecto de los cambios introducidos por la Ley Corta II sobre los clientes regulados de distribución, de *La Regulación del Segmento Distribución en Chile* [7] y en la *Ley General de Servicios Eléctricos, en Materia de Energía Eléctrica. Decreto con Fuerza de Ley N° I*[11]. Para mayor información, dirigirse a esta última.

B. Detalle de los Cálculos de la Búsqueda de Equilibrios⁴⁷

Determinación del máximo de la función U_i^1

$$U_i^1(c'_i, c'_j) = \begin{cases} (p_i - c'_j)q_i^c + (c'_j - c)k & \text{si } c'_i < c'_j \\ (p_i - c')q_i^c + (c' - c)\frac{d}{2} & \text{si } c'_i = c'_j = c' \\ (p_i - c'_i)q_i^c + (c'_i - c)(d - k) & \text{si } c'_i > c'_j \end{cases}$$

En caso que la pendiente $d - k - q_i^c$ sea positiva, el máximo podría estar en la tercera parte de la función anterior. En tal caso, el máximo se obtendría en \bar{c} dado que la pendiente es positiva para $c'_i \in [c'_j, \bar{c}]$.

$$\begin{aligned} \text{máx} \{U_i^1(\bar{c}, c'_j)\} &> \text{máx} \{U_i^1(c'_i < c'_j)\} \\ (p_i - \bar{c})q_i^c + (\bar{c} - c)(d - k) &> (p_i - c'_j)q_i^c + (c'_j - c)k \\ \bar{c}(d - q_i^c - k) + c(2k - d) &> c'_j(k - q_i^c) \\ c'_j &< \frac{\bar{c}(d - k - q_i^c) + c(2k - d)}{k - q_i^c} = c^* \end{aligned}$$

Entonces, si $c'_j < c^*$, el máximo de la función utilidad $U_i^1(c'_i, c'_j)$ se alcanza en \bar{c} .

Se verifica que $c^* \in [c, \bar{c}]$:

- $c^* < \bar{c}$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{c}(d - q_i^c - k) + c(2k - d)}{k - q_i^c} &< \bar{c} \\ \bar{c}(d - q_i^c - k) + c(2k - d) &< \bar{c}(k - q_i^c) \\ \underbrace{(c - \bar{c})}_{(-)} \underbrace{(2k - d)}_{(+)} &< 0 \end{aligned}$$

- $c^* > c$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{c}(d - q_i^c - k) + c(2k - d)}{k - q_i^c} &> c \\ \bar{c}(d - q_i^c - k) + c(2k - d) &> c(k - q_i^c) \\ \underbrace{(\bar{c} - c)}_{(+)} \underbrace{(d - q_i^c - k)}_{(+)} &> 0 \end{aligned}$$

Entonces $c^* \in [c, \bar{c}] \forall q_i^c < d - k$.

⁴⁷Sección 4 página 28.

Determinación de la Función Mejor Respuesta $Br_i^0(p_j, q_j)$

Buscando el máximo de la función de utilidad de la expresión 18, se obtiene la expresión:

$$\arg \max_{(p_i, q_i)} U_i^0((p_i, q_i); (p_j, q_j)) = \begin{cases} (p_j^- - c)k & \text{si } p_i < p_j, d-k \leq q_i, q_j \leq k \\ (p_j - c)\frac{d}{2} & \text{si } p_i = p_j, d-k \leq q_i \leq k, \frac{d}{2} \leq q_j \leq k \\ (p_j - c)(d - q_j) & \text{si } p_i = p_j, d-k \leq q_i \leq k, d-k \leq q_j < \frac{d}{2} \\ (\bar{p} - c)(d - q_j) & \text{si } p_i > p_j, d-k \leq q_i, q_j \leq k \\ (p_j^- - \bar{c})d + (\bar{c} - c)k & \text{si } p_i < p_j, q_i > k, q_j < d-k \\ (\bar{p} - \bar{c})(d - q_j) + (\bar{c} - c)k & \text{si } p_i \geq p_j, q_i > k, q_j < d-k \\ (p_j^- - \bar{c})(d - k^+) + (\bar{c} - c)(d - k) & \text{si } p_i \leq p_j, q_i < d-k, q_j > k \\ (\bar{p} - \bar{c})(d - q_j) + (\bar{c} - c)(d - k) & \text{si } p_i > p_j, q_i < d-k, q_j > k \end{cases} \quad (41)$$

Donde $p_j^- = p_j - \varepsilon_1$ y $k^+ = k + \varepsilon_2$.

Luego definiendo

$$(\tilde{p}_j, \tilde{q}_j) = \arg \max_{(p_j, q_j)} U_j^0((p_j, q_j), (p_i, q_i))$$

se tiene:

$$\arg \max_{(p_i, q_i)} U_i^0((p_i, q_i); (\tilde{p}_j, \tilde{q}_j)) = \begin{cases} (p_j^- - c)k & \text{si } p_i < p_j, d-k \leq q_i, q_j \leq k \\ (p_j - c)\frac{d}{2} & \text{si } p_i = p_j, d-k \leq q_i \leq k, \frac{d}{2} \leq q_j \leq k \\ (p_j - c)\frac{d}{2} & \text{si } p_i = p_j, d-k \leq q_i \leq k, d-k \leq q_j < \frac{d}{2} \\ (\bar{p} - c)(d - k) & \text{si } p_i > p_j, d-k \leq q_i, q_j \leq k \\ (p_j^- - \bar{c})d + (\bar{c} - c)k & \text{si } p_i < p_j, q_i > k, q_j < d-k \\ (\bar{p} - \bar{c})k^+ + (\bar{c} - c)k & \text{si } p_i \geq p_j, q_i > k, q_j < d-k \\ (p_j^- - \bar{c})(d - k^+) + (\bar{c} - c)(d - k) & \text{si } p_i \leq p_j, q_i < d-k, q_j > k \\ (\bar{c} - c)(d - k) & \text{si } p_i > p_j, q_i < d-k, q_j > k \end{cases} \quad (42)$$

Se tiene que :

$$\lim_{p_j^- \rightarrow p_j} (p_j^- - c)k > (p_j - c)\frac{d}{2}$$

Si $\bar{p} \geq \bar{c}$:

$$\lim_{p_j^- \rightarrow \bar{p}} (p_j^- - \bar{c})d + (\bar{c} - c)k > (\bar{p} - \bar{c})k^+ (\bar{c} - c)k$$

$$(\bar{p} - \bar{c})k^+ (\bar{c} - c)k > \lim_{p_j^- \rightarrow \bar{p}} (p_j^- - \bar{c})(d - k^+) + (\bar{c} - c)(d - k)$$

$$\lim_{p_j^- \rightarrow \bar{p}} (p_j^- - \bar{c})(d - k^+) + (\bar{c} - c)(d - k) > (\bar{c} - c)(d - k)$$

Entonces existen tres máximos según el valor de p_j^- :

- $(p_j^- - c)k$
- $(\bar{p} - c)(d - k)$
- $(p_j^- - \bar{c})d + (\bar{c} - c)k$

Buscando el máximo según el valor de p_j^- se tiene:

- $(p_j^- - c)k > (\bar{p} - c)(d - k)$:

$$\implies p_j^- > c + (\bar{p} - c)\frac{d - k}{k} = p^*$$

- $(p_j^- - c)k > (p_j^- - \bar{c})d + (\bar{c} - c)k$:

$$p_j^- k - ck > p_j^- d - \bar{c}d + \bar{c}k - ck$$

$$\bar{c}(d - k) > p_j^- (d - k)$$

$$\implies p_j^- < \bar{c}$$

- $(\bar{p} - c)(d - k) > (p_j^- - \bar{c})d + (\bar{c} - c)k$

$$\bar{p}d - \bar{p}k - cd + ck > p_j^- d - \bar{c}d + \bar{c}k - ck$$

$$p_j^- d < d(\bar{p} + \bar{c} - c) - k(\bar{p} + \bar{c} - c) + ck$$

$$\implies p_j^- < (\bar{p} + \bar{c} - c)\frac{d - k}{d} + c\frac{k}{d} = p^{*2}$$

$p^* \in [c, \bar{c}]$ pues:

▪

$$c + \underbrace{(\bar{p} - c)\frac{d - k}{k}}_{(+)} > c$$

▪

$$k > d - k \text{ y } \bar{p} \approx \bar{c} \implies (\bar{c} - c)k > (\bar{p} - c)(d - k)$$

$$\implies \bar{c} > c + (\bar{p} - c)\frac{d - k}{k}$$

Entonces $p^* \in [c, \bar{c}]$.

$p^{*2} \in [c, \bar{c}]$ pues:

- Sea $\alpha, \beta \in (1, 2)$ tal que $\bar{c} = \alpha c$ y $\bar{p} = \beta c$:

$$\begin{aligned}
 p^{*2} &= c(\alpha + \beta - 1) \frac{d-k}{d} + c \frac{k}{d} > c \\
 (\alpha + \beta - 1) \frac{d-k}{d} + \frac{k}{d} &> 1 \\
 \underbrace{(\alpha + \beta)}_{>2} (d-k) &> 2(d-k)
 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 p^{*2} &= c(\alpha + \beta - 1) \frac{d-k}{d} + c \frac{k}{d} < \bar{c} \\
 (\alpha + \beta - 1) \frac{d-k}{d} + \frac{k}{d} &< \alpha \\
 (\beta - 1)(d-k) + k &< \alpha k \\
 \implies \alpha &> 1 + \underbrace{(\beta - 1) \frac{d-k}{k}}_{<1}
 \end{aligned}$$

Luego, si $\alpha > 1 + (\beta - 1) \frac{d-k}{k}$, $p^{*2} \in [c, \bar{c}]$.

Entonces se obtienen la función mejor respuesta de la expresión 19.

C. Detalle de los Cálculos de los Casos Particulares⁴⁸

Caso simétrico con un generador que contrata la totalidad de la demanda

Se tiene $X = d$ y además los costos marginales de las unidades de generación son $c_i = c_j = c$ y $\bar{c}_i = \bar{c}_j = \bar{c}$. El generador que oferta el menor precio contrata toda la demanda d del cliente.

Equilibrios Perfectos de Subjuego 2ª Etapa

Sea q_i^c la cantidad de energía contratada por el generador i a precio p_i . Su utilidad en $t = 1$ según c'_i y c'_j esta representada en la ecuación 43:

$$U_i^1(c'_i, c'_j) = \begin{cases} (p_i - c'_j)q_i^c + (c'_j - c)k & \text{si } c'_i < c'_j \\ (p_i - c')q_i^c + (c' - c)\frac{d}{2} & \text{si } c'_i = c'_j = c' \\ (p_i - c'_i)q_i^c + (c'_i - c)(d - k) & \text{si } c'_i > c'_j \end{cases} \quad (43)$$

$U_i^1(\cdot, c'_j)$ es una función en 3 partes donde:

$$\lim_{c'_i \rightarrow c'_j^-} U_i^1(c'_i, c'_j) > U_i^1(c'_j, c'_j) > \lim_{c'_i \rightarrow c'_j^+} U_i^1(c'_i, c'_j)$$

La primera parte de la función es un escalón ya que $U_i^1(c'_i, c'_j)$ no depende de c'_i mientras $c'_i < c'_j$. La tercera parte, es una recta de pendiente $-q_i^c + d - k$ que puede ser positiva o negativa, como el caso de la figura 7 página 29.

- Si $p_i \leq p_j$, $q_i^c(p_i, p_j) \geq \frac{d}{2}$ y por lo tanto la pendiente de la recta es negativa. Es decir, para $p_i \leq p_j$ los valores máximos de U_i^1 se obtienen para $c'_i < c'_j$.
- Si $p_i > p_j$, $q_i^c(p_i, p_j) = 0$ y por lo tanto la pendiente es positiva. Entonces pueden existir valores $c'_i > c'_j$ para los cuales la utilidad sea mayor que en el caso contrario. El máximo de $U_i^1(c'_i, c'_j)$ en este segmento se alcanza para $c'_i = \bar{c}$.

$$(c'_i - c)k < (\bar{c} - c)(d - k)$$

$$c'_i < c + (\bar{c} - c)\frac{d - k}{k} = c_d^*$$

Como $\frac{d-k}{k} \in (0, 1)$, $c_d^* \in (c, \bar{c})$. Luego si $c_j \leq c_d^*$, el máximo de la función $U_i^1(c'_i, c'_j)$ en este segmento se alcanza para $c'_i = \bar{c}$.

Esto configura tres valores distintos de equilibrio para esta etapa:

⁴⁸Sección 6.3 página 42.

- Si $p_i < p_j$, (\hat{c}, \bar{c}) con $\hat{c} \in [c, c_d^*]$ son las estrategias de equilibrio que inducen las cantidades despachadas $q^s(c^{eq}) = (d, d-k)$ y la utilidad del generador i es $U_i^1(\hat{c}, \bar{c}) = (p_i - \bar{c})d + (\bar{c} - c)k$.
- Si $p_i > p_j$, (\bar{c}, \hat{c}) con $\hat{c} \in [c, c_d^*]$ son las estrategias de equilibrio que inducen las cantidades despachadas $q^s(c^{eq}) = (d-k, k)$ y la utilidad del generador i es $U_i^1(\bar{c}, \hat{c}) = (\bar{c} - c)(d-k)$.
- Si $p_i = p_j = p$, (c, c) son las estrategias de equilibrio que inducen las cantidades despachadas $q^s(c^{eq}) = (\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ y la utilidad de los generadores es $U_{i,j}^1(c, c) = (p - c)\frac{d}{2}$.

Equilibrios 1ª Etapa

A partir de la ecuación 29 de la cantidad de energía contratada y de las utilidades calculadas para los equilibrios perfectos de subjuego en la segunda etapa, se obtiene la función de utilidad para la primera etapa:

$$U_i^0(p_i, p_j) = \begin{cases} (p_i - \bar{c})d + (\bar{c} - c)k & \text{si } p_i < p_j \\ (p - c)\frac{d}{2} & \text{si } p_i = p_j = p \\ (\bar{c} - c)(d - k) & \text{si } p_i > p_j \end{cases} \quad (44)$$

$U_i^0(\cdot, p_j)$ es una función en 3 partes. En el primer segmento para $p_i < p_j$, $U_i^0(\cdot, p_j)$ es estrictamente creciente. Luego si el equilibrio se alcanza en el primer segmento, se alcanza en el límite cuando p_i tiende a p_j .

En el tercer segmento para $p_i > p_j$, $U_i^0(\cdot, p_j) = (\bar{c} - c)(d - k)$ constante.

El generador i contraerá el contrato siempre cuando sus utilidades sean mayores que de no contraerlo, es decir siempre que :

$$\begin{aligned} (p_i - \bar{c})d + (\bar{c} - c)k &> (\bar{c} - c)(d - k) \\ p_i &> \bar{c} - (\bar{c} - c)\frac{2k - d}{d} = p_d^* \end{aligned}$$

Como $d \in (k, 2k)$, $p_d^* \in (c, \bar{c})$.

Por lo tanto, en p_d^* los jugadores son indiferentes entre contratar la energía d requerida por el cliente a precio p_d^* , o no establecer contrato y generar ganancias sólo a partir del mercado spot.

Si ambos generadores ofrecen p_d^* , sus utilidades son:

$$\begin{aligned} U_i^0(p_d^*, p_d^*) &= (p_d^* - c)\frac{d}{2} \\ &= (\bar{c} - (\bar{c} - c)\frac{2k - d}{d} - c)\frac{d}{2} \\ &= 2(\bar{c} - c)\frac{d - kd}{2d} \\ &= (\bar{c} - c)(d - k) \\ &= U_i^0(p_d^*, p^+) = U_i^0(p^+, p_d^*) \end{aligned} \quad (45)$$

Donde $p^+ \in [p_d^*, \bar{p}]$.

Por lo tanto los equilibrios en la primera etapa son :

- $((p_d^*, c), (p_d^*, c))$ que induce $q^c(p^{eq}) = (\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ y $q^s(c^{eq}) = (\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$.
- $((p^+, \bar{c}), (p_d^*, \hat{c}))$ que induce $q^c(p^{eq}) = (0, d)$ y $q^s(c^{eq}) = (d - k, k)$
- $((p_d^*, \hat{c}), (p^+, \bar{c}))$ que induce $q^c(p^{eq}) = (d, 0)$ y $q^s(c^{eq}) = (k, d - k)$

Estos tres equilibrios tienen la misma utilidad, como se muestra en la ecuación 45.

Caso simétrico con un generador que contrata su capacidad total y otro la demanda residual

Se tiene $X = k$ y además los costos marginales de las unidades de generación son $c_i = c_j = c$ y $\bar{c}_i = \bar{c}_j = \bar{c}$. El generador que oferta el menor precio contrata la cantidad k de energía y el otro generador contrata la cantidad $d - k$.

Equilibrios Perfectos de Subjuego 2ª Etapa

Siguiendo el mismo desarrollo del modelo anterior, sea q_i^c la cantidad de energía contratada por el generador i a precio p_i . Su utilidad en $t = 1$ según c'_i y c'_j está representada en la ecuación 43 página 67.

Nuevamente, $U_i^1(\cdot, c'_j)$ es una función en 3 partes donde:

$$\lim_{c'_i \rightarrow c'_j^-} U_i^1(c'_i, c'_j) > U_i^1(c'_j, c'_j) > \lim_{c'_i \rightarrow c'_j^+} U_i^1(c'_i, c'_j)$$

La primera parte de la función es un escalón ya que $U_i^1(c'_i, c'_j)$ no depende de c'_i mientras $c'_i < c'_j$. La tercera parte, es una recta de pendiente $-q_i^c + d - k$ que puede ser positiva o negativa, como el caso de la figura 7 página 29.

- Si $p_i \leq p_j$, $q_i^c(p_i, p_j) \geq \frac{d}{2}$ y por lo tanto la pendiente de la recta es negativa. Es decir, para $p_i \leq p_j$ los valores máximos de U_i^1 se obtienen para $c'_i < c'_j$.
- Si $p_i > p_j$, $q_i^c(p_i, p_j) = d - k$ y por lo tanto la pendiente es nula.

Luego, el máximo de la función de utilidad $U_i^1(c'_i, c'_j)$ en esta etapa se encuentra en el primer escalón, es decir en $[c, c'_j)$.

Entonces el equilibrio que se obtiene en este caso es competitivo, $((c, c), (\frac{d}{2}, \frac{d}{2}))$, y la utilidad es nula en el mercado spot.

Equilibrio 1ª Etapa en Estrategias Puras

A partir de la ecuación 29 de la cantidad contratada y de las utilidades calculadas para los equilibrios perfectos de subjuego en la segunda etapa, se obtiene la función de utilidad para la primera etapa, representada en la ecuación 34 página 43.

Para esa función de utilidad, no existe equilibrio en estrategias puras. A continuación la demostración:

Sea (p_i^*, p_j^*) equilibrio de Nash del juego anterior:

- Si $p_i^* = p_j^* = p^*$, las utilidades de cada generador son $(p^* - c)\frac{d}{2}$. Entonces, el generador i por ejemplo, tiene incentivos de bajar su precio en ε y sus utilidades serían $(p^* - \varepsilon - c)k > p^*\frac{d}{2}$. Por lo tanto, $p_i^* = p_j^*$ no es equilibrio de Nash.
- Si $p_i^* < p_j^*$, las utilidades de i son $(p_i^* - c)k$ y por lo tanto tiene incentivos a aumentar su precio pues $(p_i^* + \varepsilon - c)k > (p_i^* - c)k$. Luego no es equilibrio de Nash.
- Si $p_i^* > p_j^*$, por razonamiento análogo al anterior, no hay equilibrio de Nash.

Entonces, este caso no admite equilibrio en estrategias puras. Hay que buscar un equilibrio en estrategias mixtas.

Equilibrios 1ª Etapa en Estrategias Mixtas

Las estrategias mixtas se aplican solamente a la primera etapa de este modelo. Para cada realización de la oferta de precios de los generadores en el mercado de contratos, hay una respuesta óptima en el resto del juego.

Entonces, al utilizar estrategias mixtas para la oferta de precios de los generadores, lo que cambia es el problema que resuelven los generadores en la primera etapa. El problema con estrategias mixtas se expresa en el problema de maximización 35 página 44.

Dado que el problema es simétrico, la distribución de probabilidad definida sobre $[c; \bar{p}]$ que maximiza el beneficio esperado de los generadores es idéntica para ambos generadores, es decir, $F_1(p_1) = F_2(p_2) = F(p_i)$.

Utilizando la propiedad de los equilibrios de Nash que todas las acciones en el soporte del equilibrio en estrategias mixtas de un jugador tienen el mismo pago esperado⁴⁹, se tiene:

$$(p_i - c)k(1 - F(p_i)) + (p_i - c)(d - k)F(p_i) = \lambda$$

$$F(p_i) = \frac{(p_i - c)k - \lambda}{(p_i - c)(2k - d)}$$

⁴⁹De las acciones presentes en el soporte de la distribución de probabilidad de equilibrio, ninguna tiene un pago que excede el pago de equilibrio y el conjunto de acciones que tiene un pago menor al pago de equilibrio, tiene medida nula

Considerando medidas de probabilidad que son funciones continuas y no tienen átomos, se obtiene el valor de λ .

$$F(\bar{p}) = \frac{(\bar{p} - c)k - \lambda}{(\bar{p} - c)(2k - d)} = 1$$

$$\lambda = (\bar{p} - c)(d - k)$$

Con esto se tiene una forma explícita de $F^{eq}(p_i) = \frac{(p_i - c)k - (\bar{p} - c)(d - k)}{(p_i - c)(2k - d)}$, $p \in [c + (\bar{p} - c)\frac{d - k}{k}, \bar{p}]$.

Utilidad Esperada de Equilibrio

La utilidad esperada de este equilibrio es, donde $R = [c + (\bar{p} - c)\frac{d - k}{k}, \bar{p}]$:

$$U_i^0(F_i^{eq}, F_j^{eq}) = \int_R \int_R u_i((p_i, q_i), (p_j, q_j)) dF_j^{eq}(p_j) dF_i^{eq}(p_i)$$

$$= \int_R \underbrace{[(p_i - c)k (1 - F_j^{eq}(p_i))]}_{A(p_i)} + \underbrace{(p_i - c)(d - k)F_j^{eq}(p_i)}_{B(p_i)} dF_i^{eq}(p_i)$$

$$A(p_i) = (p_i - c)k \left(1 - \frac{(p_i - c)k - (\bar{p} - c)(d - k)}{(p_i - c)(2k - d)}\right)$$

$$= k \frac{(p_i - c)(k - d) - (\bar{p} - c)(d - k)}{(2k - d)}$$

$$= k \frac{(d - k)(\bar{p} - p_i)}{2k - d}$$

$$B(p_i) = (p_i - c)(d - k) \frac{(p_i - c)k - (\bar{p} - c)(d - k)}{(p_i - c)(2k - d)}$$

$$= (d - k) \frac{(p_i - c)k - (\bar{p} - c)(d - k)}{2k - d}$$

$$U_i^0(F_i^{eq}, F_j^{eq}) = \int_R \left[k \frac{(d - k)(\bar{p} - p_i)}{2k - d} + (d - k) \frac{(p_i - c)k - (\bar{p} - c)(d - k)}{2k - d} \right] dF_i^{eq}(p_i)$$

$$= \int_R \frac{d - k}{2k - d} [k(\bar{p} - p_i) + k(p_i - c) - (\bar{p} - c)(d - k)] dF_i^{eq}(p_i)$$

$$= \int_R \frac{d - k}{2k - d} [(\bar{p} - c)(2k - d)] dF_i^{eq}(p_i)$$

$$= (d - k)(\bar{p} - c) \int_R dF_i^{eq}(p_i)$$

$$= (d - k)(\bar{p} - c)$$

Esperanza de p_i^{eq}

La función de distribución de equilibrio $F^{eq}(p_i) = \frac{(p_i-c)k - (\bar{p}-c)(d-k)}{(p_i-c)(2k-d)}$, $p \in [c + (\bar{p}-c)\frac{d-k}{k}, \bar{p}]$ es continua para todo $p > c$ y por lo tanto es continua en $R = [c + (\bar{p}-c)\frac{d-k}{k}, \bar{p}]$.

Luego, la densidad de probabilidad asociada a $F^{eq}(p_i)$ es:

$$f(p_i) = [F^{eq}(p_i)]' = \frac{(\bar{p}-c)(d-k)}{(p_i-c)^2(2k-d)}$$

Cálculo de la esperanza del precio p_i^{eq} :

$$\begin{aligned} E_F(p_i^{eq}) &= \int_R p_i dF^{eq}(p_i) = \int_R p_i f(p_i) dp_i \\ &= \int_R p_i \frac{(\bar{p}-c)(d-k)}{(p_i-c)^2(2k-d)} dp_i \\ &= \frac{(\bar{p}-c)(d-k)}{(2k-d)(p_i-c)} [(p_i-c)\ln(p_i-c) - p_i] \Big|_{c+(\bar{p}-c)\frac{d-k}{k}}^{\bar{p}} \\ &= \frac{(\bar{p}-c)(d-k)}{2k-d} \ln\left(\frac{k}{d-k}\right) + c \end{aligned}$$

Caso con asimetría leve y un generador contrata la totalidad de la demanda

Se tiene que $c_i < c_j$ y $\bar{c}_i > c_j$. Además, $X = d$, es decir que el generador que oferta el menor precio en el mercado de contratos, contrata toda la demanda.

Equilibrios Perfectos de Subjuego 2ª Etapa

Sea q_i^c la cantidad de energía contratada por el generador i a precio p_i . Su utilidad $U_i^1(c'_i, c'_j)$ en $t = 1$ según c'_i y c'_j esta representada en la ecuación 43 página 67.

$U_i^1(\cdot, c'_j)$ es una función en 3 partes donde:

$$\lim_{c'_i \rightarrow c'_j-} U_i^1(c'_i, c'_j) > U_i^1(c'_j, c'_j) > \lim_{c'_i \rightarrow c'_j+} U_i^1(c'_i, c'_j)$$

La primera parte de la función es un escalón ya que $U_i^1(c'_i, c'_j)$ no depende de c'_i mientras $c'_i < c'_j$. La tercera parte, es una recta de pendiente $-q_i^c + d - k$ que puede ser positiva o negativa, como el caso de la figura 7.

Para ambos generadores, a partir de la función de utilidad de la segunda etapa se tiene:

- Si $p_i \leq p_j$, $q_i^c(p_i, p_j) \geq \frac{d}{2}$ y por lo tanto la pendiente de la recta es negativa. Es decir, para $p_i \leq p_j$ los valores máximos de U_i^1 se obtienen para $c'_i < c'_j$.

- Si $p_i > p_j$, $q_i^c(p_i, p_j) = 0$ y por lo tanto la pendiente es positiva. Entonces pueden existir valores $c'_i > c'_j$ para los cuales la utilidad sea mayor que en el caso contrario. El máximo de $U_i^1(c'_i, c'_j)$ en este segmento se alcanza para $c'_i = \bar{c}_i$.

$$(c'_i - c_i)k < (\bar{c}_i - c_i)(d - k)$$

$$c'_i < c_i + (\bar{c}_i - c_i) \frac{d - k}{k} = \hat{c}_i$$

Como $\frac{d-k}{k} \in (0, 1)$, $\hat{c}_i \in (c_i, \bar{c}_i)$ para todo i . Luego, si $c_j \leq \hat{c}_i$, el máximo de la función $U_i^1(c'_i, c'_j)$ en este segmento se alcanza para $c'_i = \bar{c}_i$.

Esto configura tres valores distintos de equilibrio para esta etapa:

- Si $p_i < p_j$, las funciones mejores respuesta de los generadores en esta segunda etapa son las siguientes:

$$Br_i^1(c'_j) = \{[c_i, c'_j]\} \quad (46) \quad Br_j^1(c'_i) = \begin{cases} [c_j, c'_i] & \text{si } \bar{c}_i > c'_i > \hat{c}_j \\ \bar{c}_j & \text{si } c'_i \leq \hat{c}_j \end{cases} \quad (47)$$

Entonces las estrategias de equilibrio son $c^{eq} = (\min\{\bar{c}_i, \hat{c}_j\}, \bar{c}_j)$, que inducen el despacho $q^s(c^{eq}) = (k, d - k)$ y las utilidades:

$$U_i^1(c^{eq}) = (p_i - \bar{c}_j)d + (\bar{c}_j - c_i)k$$

$$U_j^1(c^{eq}) = (\bar{c}_j - c_j)(d - k)$$

- Si $p_i > p_j$, las funciones mejores respuesta de los generadores en esta segunda etapa son las siguientes:

$$Br_i^1(c'_j) = \begin{cases} [c_i, c'_j] & \text{si } c'_j > \hat{c}_i \\ \bar{c}_i & \text{si } c'_j \leq \hat{c}_i \end{cases} \quad (48) \quad Br_j^1(c'_i) = \{[c_j, c'_i]\} \quad (49)$$

Luego, existen dos equilibrio según el valor de \hat{c}_i :

- Si $\hat{c}_i > c_j \geq c'_j$, el equilibrio es $c^{eq} = (\bar{c}_i, \hat{c}_i)$, que induce el despacho $q^s(c^{eq}) = (d - k, k)$ y las utilidades:

$$U_i^1(c^{eq}) = (\bar{c}_i - c_i)(d - k)$$

$$U_j^1(c^{eq}) = (p_j - \bar{c}_i)d + (\bar{c}_i - c_j)k$$

- Si $\hat{c}_i < c_j$, el equilibrio es $c^{eq} = (c_j^-, c_j)$, donde c_j^- es el límite de c'_i cuando tiende a c_j , que induce el despacho $q^s(c^{eq}) = (k, d - k)$ y las utilidades:

$$U_i^1(c^{eq}) = (c_j - c_i)k$$

$$U_j^1(c^{eq}) = (p_j - \bar{c}_i)d$$

- Si $p_i = p_j = p$, las funciones mejores respuesta de los generadores i y j en esta segunda etapa son equivalentes a las funciones de las ecuaciones 46 y 49 respectivamente.

Entonces el equilibrio es $c^{eq} = (c_j^-, c_j)$ que induce el despacho $q^s(c^{eq}) = (k, d - k)$ y las utilidades:

$$U_i^1(c^{eq}) = (p - c_j) \frac{d}{2} + (c_j - c_i)k$$

$$U_j^1(c^{eq}) = (p - c_j) \frac{d}{2}$$

Equilibrios 1ª Etapa

A partir de las utilidades de los equilibrios perfectos de subjuego de la segunda etapa, se observa que no puede haber un equilibrio simétrico en la primera etapa.

Efectivamente, la utilidad obtenida por el generador i si $p_i = p_j = p$ es estrictamente menor que si oferta $p_i = p - \varepsilon$ contratando la totalidad de la energía consumida por el cliente. Por lo tanto no hay equilibrio simétrico en este caso.

Para encontrar el equilibrio en la primera etapa, existen dos casos según el valor de \hat{c}_i con respecto a c_j :

$\hat{c}_i > c_j$: El generador i contrata la energía del cliente sólo si esto le aporta más beneficios en comparación a los beneficios de sólo producir energía en el mercado spot. Esto es:

$$U_i^0(p_i < p_j) > U_i^0(p_i > p_j)$$

$$(p_i - \bar{c}_j)d + (\bar{c}_j - c_i)k > (\bar{c}_i - c_i)(d - k)$$

$$p_i > \bar{c}_j \frac{d - k}{d} + c_i \frac{2k - d}{d} + \bar{c}_i \frac{d - k}{d} = p_i^*$$

Del mismo modo, el generador j contrata sólo si le conviene respecto a solamente vender energía en el mercado spot. Es decir:

$$U_j^0(p_j < p_i) > U_j^0(p_j > p_i)$$

$$(p_j - \bar{c}_i)d + (\bar{c}_i - c_j)k > (\bar{c}_j - c_j)(d - k)$$

$$p_j > \bar{c}_i \frac{d - k}{d} + c_j \frac{2k - d}{d} + \bar{c}_j \frac{d - k}{d} = p_j^*$$

Se observa que $p_i^* < p_j^*$ por lo que el generador i puede ofertar un precio menor al del generador j y seguir teniendo beneficios positivos de hacerlo.

Existe la posibilidad que $\bar{p} < p_j^*$. En tal caso, sólo el generador i tiene incentivos de participar en el mercado de contratos.

Si $\bar{p} < p_i^*$, ninguno de los generadores tiene incentivos de participar en el mercado de contratos. Se supone entonces que $\bar{p} \geq p_i^*$, para que al menos un generador quiera participar del mercado de contratos.

Luego, el equilibrio del mercado de contratos es $\min\{\bar{p}, p_j^*\}$.

Las estrategias de equilibrio son $(p^{eq}, c^{eq}) = ((\min\{\bar{p}, p_j^*\}, \min\{\bar{c}_i, \hat{c}_j\}), (p_j^+, \bar{c}_j))$, donde $p_j^+ \in (p_j^*, \bar{p}]$, que inducen $q^c(p^{eq}) = (d, 0)$ y $q^s(c^{eq}) = (d, d - k)$.

$\hat{c}_i < c_j$: Nuevamente, el generador i contrata la energía del cliente sólo si esto le aporta más beneficios en comparación a los beneficios de sólo producir energía en el mercado spot. Esto es:

$$\begin{aligned} U_i^0(p_i < p_j) &> U_i^0(p_i > p_j) \\ (p_i - \bar{c}_j)d + (\bar{c}_j - c_i)k &> (c_j - c_i)k \\ p_i &> \bar{c}_j - (\bar{c}_j - c_j)\frac{k}{d} = p_i^{*2} \end{aligned}$$

Del mismo modo, el generador j contrata sólo si le conviene respecto a solamente vender energía en el mercado spot. Es decir:

$$\begin{aligned} U_j^0(p_j < p_i) &> U_j^0(p_j > p_i) \\ (p_j - \bar{c}_i)d &> (\bar{c}_j - c_j)(d - k) \\ p_j &> \bar{c}_i + (\bar{c}_j - c_j)\frac{d - k}{d} = p_j^{*2} \end{aligned}$$

Se observa que $p_i^* < p_j^*$ por lo que el generador i puede ofertar un precio menor al del generador j y seguir teniendo beneficios positivos de hacerlo.

Al igual que en el caso anterior, existe la posibilidad que $\bar{p} < p_j^{*2}$.

Suponiendo entonces que $\bar{p} \geq p_i^{*2}$ para que al menos un generador participe del mercado de contratos, se tiene que el equilibrio del mercado es $\min\{\bar{p}, p_j^{*2}\}$.

Las estrategias de equilibrio son $(p^{eq}, c^{eq}) = ((\min\{\bar{p}, p_j^{*2}\}, \min\{\bar{c}_i, \hat{c}_j\}), (p_j^{+2}, \bar{c}_j))$, donde $p_j^{+2} \in (p_j^{*2}, \bar{p}]$, que inducen $q^c(p^{eq}) = (d, 0)$ y $q^s(c^{eq}) = (d, d - k)$.

Caso con asimetría fuerte y un generador contrata la totalidad de la demanda

Se tiene que $c_i < \bar{c}_i < c_j < \bar{c}_j$. Además, $X = d$, es decir que el generador que oferta el menor precio en el mercado de contratos, contrata toda la demanda.

Equilibrios Perfectos de Subjuego 2ª Etapa

Sea q_i^c la cantidad de energía contratada por el generador i a precio p_i en la primera etapa.

Dada la asimetría existente en los costos marginales que pueden transmitir los generadores al CDEC, el generador i siempre genera su capacidad k de energía, y el generador j la cantidad marginal $d - k$, independiente de c'_i y c'_j .

Luego, cada generador busca maximizar sus ganancias en este escenario transmitiendo el máximo costo posible \bar{c}_i al CDEC.

Entonces, el equilibrio de la segunda etapa es $c^{eq} = (\bar{c}_i, \bar{c}_j)$. El despacho es $q^s(c^{eq}) = (k, d - k)$ al igual que para todo c'_i y c'_j que pueden transmitir los generadores.

Las utilidades de esta etapa son:

$$U_i^1(c^{eq}) = (\bar{c}_i - c_i)k \quad U_j^1(c^{eq}) = (\bar{c}_j - c_j)(d - k)$$

Equilibrios 1ª Etapa

A partir de las utilidades y despachos de equilibrio de la segunda etapa, se tiene la siguiente función utilidad en esta primera etapa:

$$U_i^0(p_i, p_j) = \begin{cases} (p_i - \bar{c}_j)d + U_i^1(c^{eq}) & \text{si } p_i < p_j \\ (p_i - \bar{c}_j)\frac{d}{2} + U_i^1(c^{eq}) & \text{si } p_i = p_j \\ U_i^1(c^{eq}) & \text{si } p_i > p_j \end{cases}$$

Por lo tanto, ningún generador tiene incentivos para establecer un contrato con el cliente por su energía si $\bar{p} < \bar{c}_j$. Para que los generadores participen del mercado de contratos, es necesario que $\bar{p} \geq \bar{c}_j$.

Suponiendo que $\bar{p} \geq \bar{c}_j$, ambos generadores quieren aumentar sus utilidades adjudicándose el contrato a cualquier precio superior a \bar{c}_j .

Luego el equilibrio se alcanza para $p^{eq} = (\bar{c}_j, \bar{c}_j)$. y las cantidades contratadas son $q^c(p^{eq}) = (\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$.

Las estrategias de equilibrio son $(p^{eq}, c^{eq}) = ((\bar{c}_j, \bar{c}_i), (\bar{c}_j, \bar{c}_j))$.

D. Modelo del Mercado Spot

Descripción del Modelo

El modelo del mercado spot considera tres nodos: un cliente y dos generadores, al igual que el modelo general representado en la figura 6 página 24.

- El modelo está compuesto por :
 - dos generadores G_1 y G_2 , con capacidad de producción k y costos marginales c que participan en el mercado spot.
 - un cliente D con demanda d que va a comprar la energía al mercado spot.
 $d \in (k, 2k)$, entonces no hay posibilidad de racionamiento y ambos generadores despachan siempre.
- La compra-venta de energía entre el cliente y los generadores se efectúa en el mercado spot, siguiendo el mecanismo del CDEC. Es el CDEC quien determina el despacho y el precio de la energía transada de la siguiente forma:
 - Las firmas proponen costos lineales con pendiente $c'_i \in [c; \bar{c}]$ al CDEC.
 - La firma que oferta el menor costo marginal se despacha primero, $q_{c_{min}}^s = k$.
 - Si no se cubre la demanda con la primera firma, la demanda residual se cubre con el despacho de la segunda firma, $q_{c_{max}}^s = d - k$.
 - El precio spot que se considera en las transacciones es el de la oferta de la firma marginal, es decir, el correspondiente a la última unidad que entrar en producción.

Función de la Demanda

A partir del mecanismo del CDEC representado en la ecuación 3 página 25, se obtiene la función de utilidad siguiente:

$$q_i^s(c'_i, c'_j) = \begin{cases} k & \text{si } c'_i < c'_j \\ \frac{d}{2} & \text{si } c'_i = c'_j \\ d - k & \text{si } c'_i > c'_j \end{cases} \quad (50)$$

Función de Utilidad

A partir de la función de la demanda, la expresión analítica de la función de utilidad del generador i es:

$$U_i(c'_i, c'_j) = \begin{cases} (c'_j - c)k & \text{si } c'_i < c'_j \\ (c' - c)\frac{d}{2} & \text{si } c'_i = c'_j = c' \\ (c'_i - c)(d - k) & \text{si } c'_i > c'_j \end{cases} \quad (51)$$

Equilibrio en Estrategias Puras

Un equilibrio de Nash en este modelo corresponde a una tupla $c^{eq} = (c_i^{eq}, c_j^{eq})$ que induce un despacho de los generadores $q^s(c^{eq})$, a través del mecanismo del CDEC.

El equilibrio de este modelo no puede ser simétrico, ya que $k > \frac{d}{2}$ por lo que si $c'_i = c'_j$ los generadores tienen incentivo en disminuir levemente su costo propuesto y producir toda su capacidad.

La función de utilidad en función del costo propuesto c'_i de un generador es en tres partes. La primera parte es constante y no depende del costo propuesto c'_i mientras sea inferior a c'_j . El máximo de la tercera parte se alcanza en \bar{c} ya que la función es creciente para $c'_i > c'_j$.

Para $c^* = c + (\bar{c} - c)\frac{d-k}{k}$, se tiene que $U_i(c^*, \bar{c}) = U_j(\bar{c}, c^*)$.

(c^+, \bar{c}) y (\bar{c}, c^+) con $c^+ \in [c, c^*]$ son los equilibrios de este modelo.

Efectivamente, en el caso (c^+, \bar{c}) , ningún generador tiene incentivos de cambiar el costo que propone al CDEC:

- La utilidad del generador i en este caso es $(\bar{c} - c)k$. Según el mecanismo del CDEC, para cualquier $c'_i < c'_j = \bar{c}$ se obtiene el mismo resultado. Entonces el generador i es indiferente en proponer cualquier $c'_i < \bar{c}$ y no tiene incentivos en modificar su costo propuesto $c^+ \in [c, c^*]$.
- La utilidad del generador j en este caso es $(\bar{c} - c)(d - k)$. Este generador no puede aumentar el costo propuesto al CDEC, \bar{c} es el costo límite que puede proponer. Por otro lado, si disminuye su precio, sus utilidades también disminuyen, incluso cuando propone un costo inferior a c^+ pues se tiene que para $c'_j < c^+$, $(c'_j - c)k < (c^* - c)k \leq (\bar{c} - c)(d - k)$. Entonces, el generador 2 no tiene incentivos en cambiar su costo propuesto siempre cuando $c^+ \in [c, c^*]$.

De manera análoga se demuestra que (\bar{c}, c^+) también es equilibrio de Nash.

Para estos equilibrios, los despacho y las utilidades inducidas son:

$$\begin{aligned} q^s(c^+, \bar{c}) &= (k, d - k) & q^s(\bar{c}, c^+) &= (d - k, k) \\ U(c^+, \bar{c}) &= ((\bar{c} - c)k, (\bar{c} - c)(d - k)) & U(\bar{c}, c^+) &= ((\bar{c} - c)(d - k), (\bar{c} - c)k) \end{aligned}$$

Conclusión

Para el cliente, el precio de compra de la energía para los dos equilibrios encontrados en el modelo incluyendo sólo el mercado spot es \bar{c} , dado el mecanismo y las transferencias utilizados en el mercado spot.