



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL**

**TARIFICACIÓN Y CONGESTIÓN EN TERMINALES DE
TRANSPORTE CUANDO HAY COMPETENCIA
PÚBLICO - PRIVADA**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

RODRIGO ALEJANDRO NÚÑEZ HERNÁNDEZ

**PROFESOR GUÍA:
LEONARDO BASSO SOTZ**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
SERGIO JARA DIAZ
ALEJANDRO ALDEA SALAZAR**

**SANTIAGO DE CHILE
NOVIEMBRE 2010**

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL
POR: RODRIGO NÚÑEZ HERNÁNDEZ
FECHA: 02/11/2010
PROF. GUÍA: SR. LEONARDO BASSO S.

TARIFICACIÓN Y CONGESTIÓN EN TERMINALES DE TRANSPORTE CUANDO HAY COMPETENCIA PÚBLICO – PRIVADA

El objetivo general del presente trabajo es estudiar a través de un modelo microeconómico la competencia entre dos terminales de transporte, en él que uno de ellos es público y el otro privado. Se pretende a través de este estudio establecer posibles políticas de acción de parte del terminal público que permitan condicionar el mercado a un nivel deseable de equilibrio.

Una característica esencial del modelo microeconómico utilizado consiste en que ambos terminales se modelarán como estructuras verticales que compiten a través de un juego de tres etapas donde primero los terminales toman decisiones de capacidad y precios a cobrar a las firmas de transporte o portadores, luego los portadores compiten por atraer a los consumidores finales (viajeros) fijando sus tarifas y frecuencias para finalmente observar a los usuarios finales (pasajeros) escogiendo el terminal y portador. En forma adicional se consideró que el terminal privado se encuentra integrado verticalmente con un único portador. En el caso del terminal público se analizó el efecto del número de portadores en los valores de equilibrio modificando este parámetro durante el desarrollo del problema.

La resolución de este problema considera la utilización de herramientas de teoría de juegos, donde debe resolverse el equilibrio sub-perfecto de juegos para cada nivel utilizando *backward induction*. De este modo es posible analizar el rendimiento del mercado en términos de variables como precios en terminales y a usuarios finales, número de viajeros en equilibrio por terminal, inversiones en capacidad y demoras.

La formulación del modelo estudiado creció en complejidad, debido principalmente a la no linealidad de la función de demora elegida. Esto derivó en que el equilibrio no pudo ser obtenido en forma analítica, situación ante la cual se optó por realizar una simulación numérica. Para esto fue necesario asignar valores a los parámetros del problema, los cuales debían tener consistencia con la realidad. En este sentido se decidió homologar el modelo planteado con el formulado por *De Borger y Van Dender (2006)* quienes estudiaron mediante simulación numérica un duopolio privado de dos medios congestionables en ausencia de estructura vertical.

Del mismo modo y atendiendo a los objetivos del trabajo se simularon nueve escenarios factibles, que difieren entre sí por la función objetivo que utiliza el terminal público al competir. De este modo se busca comparar diferentes cursos de acción seguidos por el agente público a través de los valores de equilibrio que alcanzan variables como los precios, la inversión en capacidad, las tarifas de los usuarios y los niveles de congestión en los terminales de transporte.

A la memoria de mis abuelos

AGRADECIMIENTOS

Dedico estas líneas a quienes de una u otra forma colaboraron para que este trabajo fuera posible.

A mi familia, en especial a mis padres, por su esfuerzo de años apoyando mi estadía en esta carrera, por ser un soporte en los momentos difíciles y por motivarme en las más variadas formas. A mi hermana, Carolina, por regalarme muchísimos momentos de alegría, en especial mientras vivimos juntos fuera del hogar que nos crió. A mi tía Cristina, por entregarme los medios que mis padres no podían. A Claudia, por su infinita paciencia, motivación y amor, pilares que sustentaron la última etapa de mi vida estudiantil.

A mis amigos. Los de infancia, con quienes inicié muchos procesos y que me acompañan todavía hoy. A los amigos que se fueron sumando en el camino, los que perduraron pese las dificultades y que me ayudaron a forjar este camino. A los amigos que ya no están, algún día nos sentiremos de nuevo a conversar.

A quienes me formaron profesionalmente. A mi profesor guía Leonardo Basso, por la paciencia, el empuje y la comprensión entregada cuando las cosas no fueron bien. Al profesor Sergio Jara, cuyo curso de economía terminó por motivarme a seguir la disciplina, A la profesora Marcela Munizaga por su constante ayuda, especialmente en temas administrativos. Al profesor Alejandro Aldea, por darse el tiempo de leer este trabajo y por las sugerencias entregadas.

Tabla de Contenidos

1. INTRODUCCIÓN	1
2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	4
2.1 Introducción.....	4
2.2 El Problema de la Congestión.....	5
2.2.1 Formas Funcionales para Caracterizar la Demora por Congestión.....	6
2.2.2 Competencia de Medios Congestionables	9
2.2.3 Otros Temas Relativos a la Congestión.....	12
2.3 Competencia Mixta	13
2.3.1 La Competencia en su Enfoque Más Tradicional.....	14
2.3.2 Competencia en Mercados con Estructura Vertical	16
2.3.3 Tipos de Competencia	18
2.3.4 <i>Timing</i> del Juego	19
2.4 Regulación de Mercados por Medio de Empresas Públicas	21
2.5 Otros Tópicos de Organización Industrial.....	24
2.5.1 Reducción de Costos e Ineficiencia X.....	24
2.5.2 Completitud de la Información y Riesgo Moral.....	26
2.6 Conclusiones y Comentarios.....	26
3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO	28
3.1 Introducción.....	28
3.1.1 Descripción del Juego a Modelar	28
3.2 Formulación del Modelo	30

3.3	Resumen y Características del Modelo	36
3.4	Definición de Escenarios: Funciones Objetivos Terminal Público	37
3.5	Cálculo de los excedentes del consumidor	40
3.5.1	Excedente del Consumidor para el Terminal 0	41
3.5.2	Excedente del Consumidor para el Terminal 1	41
4.	RESOLUCIÓN DEL MODELO	44
4.1	Introducción.....	44
4.2	Elección de Parámetros de Simulación.....	45
4.2.1	Modelación de De Borger y Van Dender	45
4.2.2	Homologación del Modelo.....	47
4.3	Determinación de Parámetros de Simulación.....	49
4.4	Metodología de Resolución.....	51
5.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	53
5.1	Introducción.....	53
5.2	Presentación de Resultados.....	54
5.2.1	Escenario Control.....	54
5.2.2	Resumen Funciones Relevantes por Escenario	55
5.2.3	Selección de Escenarios Mandantes.....	56
5.2.4	Precios y Cantidades de Equilibrio.....	59
5.2.5	Utilidades de los Agentes.....	64
5.2.6	Bienestar de los Agentes	67
5.2.7	Demoras en los Terminales	75
6.	CONCLUSIONES.....	80
6.1	Recomendaciones de Políticas Públicas	84

REFERENCIAS86

ANEXO 1 TABLAS RESUMEN SIMULACIÓN NUMÉRICA.....89

ANEXO 2 CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN - SOFTWARE *MATHEMATICA*94

1. Introducción

En el desarrollo actual de las ciudades resulta cada vez más frecuente la existencia de múltiples aeropuertos, puertos o terminales de transporte, tanto de carga como de pasajeros, en grandes áreas urbanas. Estos nacen como respuesta a diversas necesidades: En algunos casos como parte de especializaciones de mercados, situación que se ve en las líneas aéreas de bajo costo que buscan aeropuertos más chicos y alejados para generar ahorros. En otros casos esta multiplicidad se genera por motivos estratégicos o urbanos, como la instalación de diversos terminales de carga o de pasajeros para descentralizar las operaciones y descongestionar áreas de la ciudad. También es posible observar casos en que la simple privatización, de por ejemplo un puerto, permite entregar parte de sus instalaciones a un operador distinto, generando competencia por la atracción de carga a sus dependencias. En cualquiera de estos casos la interacción económica generará la competencia de estas instalaciones para atraer a los usuarios a sus dependencias.

No debe desconocerse el hecho de que junto con el incremento en el número de terminales ha ido cambiando la estructura del mercado. En aras de la eficiencia de los procesos y el mejoramiento de los niveles de servicio de los terminales se ha generado un fuerte interés de agentes privados para comenzar a operar en la industria. Esta incorporación se ha dado por dos caminos: el traspaso de servicios tradicionalmente ofertados por el Estado a manos privadas o bien a través de estímulos económicos y/o regulaciones como medida de generación de competencia. En ambos casos se ha llegado a observar que en muchos casos la privatización del mercado no ha sido completa, ya sea debido a la privatización parcial de los terminales o bien a la mantención de al menos una empresa pública en el mercado. Esto ha derivado en mercados con competencia mixta, situación que abre aristas interesantes de estudio.

La discusión al respecto siempre ha estado abierta y no parece haber consenso respecto de un único camino de acción. Puede argüirse, por ejemplo, que con las regulaciones adecuadas bastará un mercado de agentes privados, donde el rol del Estado se limite sólo a la fiscalización y mejoramiento del marco regulatorio. La literatura nos muestra que en ausencia de regulaciones los mercados imperfectos tienden a ser ineficientes, con alta tendencia a la colusión y captura de los consumidores, donde a través del uso de poderes de mercado se generarían tarifas excesivamente altas y niveles de servicio bajos. Sin embargo existe evidencia empírica a favor de la eficiencia de operadores privados en desmedro de operadores públicos, situación que como

se ha mencionado, no siempre ocurre y depende de varios factores, entre ellos, la estructura del mercado.

Sin embargo la existencia de competencia mixta permite al Estado llevar a cabo una nueva forma de regulación. Esta consiste en la implantación de políticas públicas funcionales al objetivo que se persigue, de modo de que a través de cambios en la o las empresas públicas que compiten en el mercado se pueda inducir a la industria completa a un óptimo deseable por el planificador central. La naturaleza de las acciones es variada y dependerá de las características particulares del mercado que se busca regular, así por ejemplo, si se desea mejorar el nivel de servicio de un gran puerto puede ser conveniente licitar varias terminales del puerto a privados, manteniendo algunos en control público. En este caso puede presuponerse que la existencia de competencia mejorará la eficacia de las operaciones, así como la existencia de competidores públicos ayudará a no elevar demasiado los precios. Luego las reacciones de los agentes frente a cambios en las estrategias del operador público son de interés para predecir el equilibrio del mercado, principalmente de las variables relevantes como precios, capacidad, tiempos de espera o beneficios a los usuarios.

El presente trabajo de título busca modelar este tipo de problemas, en el cuál dos terminales congestionables que se ubican en una ciudad compiten para atraer a los usuarios a sus dependencias. Esta modelación considera la existencia de estructura vertical, situación muy común en este tipo de mercados donde por ejemplo, un aeropuerto cobra a las aerolíneas por usar sus instalaciones, pista y embarcaderos o un buque debe cancelar al puerto por el uso de muelle, grúas y servicios de estibaje. Estos agentes, denominados portadores, son quienes cobran a los usuarios finales por los servicios de transporte.

Pese a que los usuarios que consumen servicios de transporte acuden a un terminal de carga para realizar el consumo, el servicio no es directamente prestado por la instalación, sino que es utilizado como insumo para los portadores, quienes finalmente ofrecen el servicio. En este sentido la demanda que enfrenta el terminal no es directa, sino derivada del equilibrio en el mercado de los portadores aguas abajo en la estructura de mercado.

Para el desarrollo del trabajo se considerará un caso particular de competencia. En primer lugar se tratará de un duopolio mixto, donde el terminal privado se encuentra integrado verticalmente con un único operador. Para analizar la posibilidad de regular el mercado a través de la empresa pública se modelaran varios escenarios, en los cuales el terminal público toma diferentes

funciones objetivos. Se buscará entonces determinar la incidencia de cada uno de estos escenarios en la variables de decisión como los precios cobrados por cada terminal y las capacidades a desarrollar en el equilibrio. A partir de este punto se determinaran los demás valores que definen el problema.

Se analizará también el efecto sobre las variables de interés que se generen debido a cambios en el número de portadores en el terminal público. En este sentido será de interés revisar las utilidades y beneficios de los diferentes agentes y de la sociedad en su conjunto. También se buscará determinar niveles de servicio a través de la congestión de los terminales y establecer políticas públicas que permitan mejorar la eficiencia de mercado.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en primer lugar se desarrolla una revisión bibliográfica del tema, abarcando los distintos tópicos que aportan a la construcción de un modelo matemático.

El capítulo 3 desarrolla la elaboración matemática del modelo, estipulando los distintos escenarios que se quieren simular. Adicionalmente se estiman funciones que son de utilidad para el desarrollo del problema.

En el capítulo 4 se busca establecer parámetros de simulación que permitan ilustrar con algún grado de validez el problema desarrollado. En este punto se homologará el modelo matemático a uno elegido durante la revisión bibliográfica, con lo que se determinarán los valores de parámetros para la simulación.

El capítulo 5 presenta los resultados, los cuales se discuten en profundidad buscando las políticas más adecuadas que arroje la simulación del modelo.

Finalmente el capítulo 6 entrega un resumen de las principales conclusiones obtenidas en el desarrollo del trabajo.

2. Revisión Bibliográfica

2.1 Introducción

El problema a estudiar busca modelar una competencia mixta de dos terminales de transporte en los cuales diversos portadores compiten por atraer usuarios (viajeros, carga) a consumir sus servicios. Dentro de la literatura actual no existen estudios sobre problemas similares que se puedan citar de referencia inmediata, por tanto resulta útil en este análisis identificar las diferentes líneas de estudio, variables o temáticas que en conjunto determinan el problema que se busca desarrollar.

El estudio de la competencia duopólica mixta se enmarca dentro de la rama económica de la organización industrial. Esta rama utiliza la teoría de juegos para establecer las mejores respuestas de los agentes frente a una decisión cualquiera del agente competidor, donde a través de funciones de pagos se determinan los equilibrios de Nash. Existen diversos tipos de juegos posibles de formular, donde el esquema elegido dependerá directamente de la estructura de mercado considerada. Diversos son los estudios que se pueden citar dentro de esta área, con énfasis muy distintos entre sí. Aquellos centrados en los resultados obtenidos al variar la estructura del mercado, el grado de participación óptima del estado en la industria y duopolios mixtos son de interés para este trabajo.

Pese a los innumerables estudios de organización industrial que tratan de duopolios u oligopolios mixtos, son muy pocos los trabajos que tratando competencia de agentes se enfocan a temáticas aplicables a la ingeniería de transporte. Esto se debe principalmente a la existencia de congestión en redes y terminales, lo que agrega un grado de dificultad mayor al habitual. La congestión es un problema muy común en redes, donde el costo de producir o utilizar un servicio aumenta con la cantidad si se considera una determinada capacidad; así en los puntos en que la demanda se acerca a esta es posible observar demoras considerablemente altas. En este sentido los trabajos seleccionados se encuentran relacionados principalmente con la competencia de bienes congestionables, donde los enfoques se centran en carreteras, redes de telefonía o servicios de internet.

Uno de los aspectos más relevantes que pueden observarse frecuentemente en los terminales de transporte es la existencia de estructura vertical en el modelo de negocios. Esto se explica por la

existencia de los portadores que toman al terminal como insumo para ofrecer el producto final (frecuencias). Así la demanda que enfrenta cada terminal es derivada de la que enfrentan los portadores en conjunto y no directa de los usuarios. De esta forma se produce un escalonamiento de los agentes, donde en el sector superior se encuentran los terminales de transporte, seguido por los portadores para dejar en el nivel inferior a los usuarios. Este orden no es arbitrario, sino que obedece a la secuencia en que estos agentes van tomando las decisiones. El enfoque tradicional de estructura vertical en los estudios de organización industrial habla de los beneficios y costos de generar estas estructuras, así como la eficiencia económica y el efecto sobre los salarios. El enfoque de los tres agentes considerando congestión aquí descrito es relativamente reciente, por lo que son muy pocos los estudios que incorporan este tratamiento. Todos los estudios sobre este tema han sido desarrollados durante la última década, destacándose los trabajos de *Basso y Zhang*.

Finalmente resulta importante mencionar el rol de una empresa estatal como ente regulador del mercado. Diversos trabajos han desarrollado las condiciones y estrategias que una empresa pública debe seguir para disciplinar un mercado sujeto a fallos de competencia. El camino usual es suponer un mercado libre de regulaciones, donde la empresa estatal se hace cargo de las ineficiencias –con un costo gubernamental asociado- o bien establece políticas de competencia que permitan mejorar o corregir en parte los fallos.

2.2 El Problema de la Congestión

El origen de la Ingeniería de Transporte como disciplina puede ligarse directamente con la congestión. Históricamente el Ser humano ha debido desplazarse continuamente para realizar sus diferentes labores, pese a esto se necesitó que el crecimiento económico y urbano comenzara a mostrar sus primeros efectos para enfocarnos en el problema. Así con el surgimiento de la congestión en las calles de Europa y Estados Unidos nacieron los primeros estudios del fenómeno, los que por lógica se enfocaron en la congestión de arcos y redes de transporte.

La congestión es un fenómeno que se genera por el uso intensivo de un bien con capacidad limitada por parte de los usuarios, donde la calidad de servicio está directamente relacionada con la intensidad de su uso. Existen casos en que la calidad de servicio aumenta conforme ingresan más usuarios, tal como lo señala *Baake y Mituch (2007)*. En este trabajo se estudia la competencia de redes congestionables, incorporando en el modelo la existencia de una

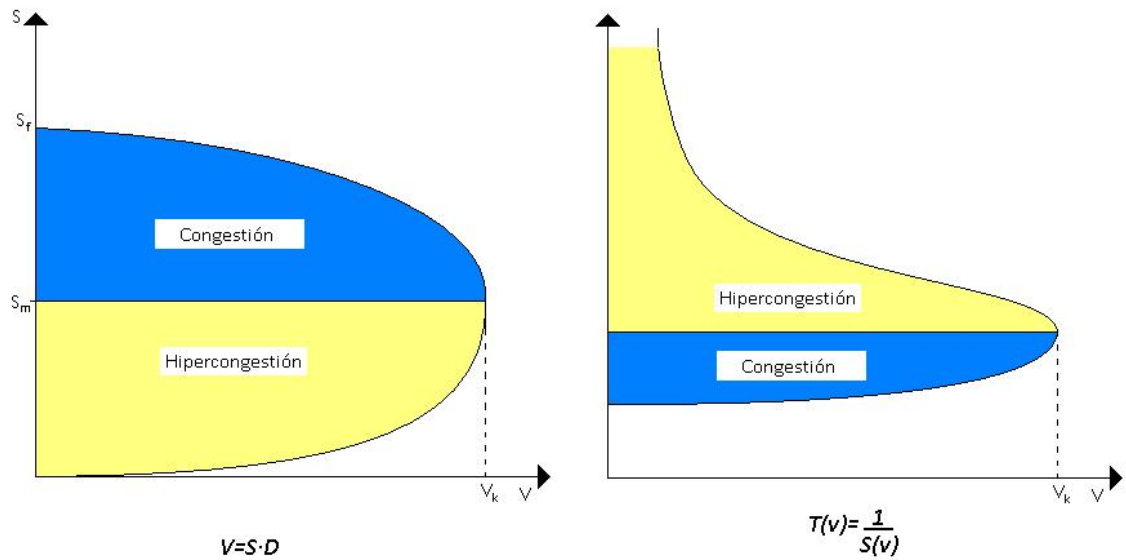
externalidad positiva generada por otros usuarios conectados - como sucede en las redes de internet - donde el beneficio se da en parte por la capacidad de interactuar con otros internautas. Sin embargo, lo común será observar descensos en la calidad de servicio conforme aumenta el uso de la infraestructura, como es el caso de carreteras, redes de información o servicios de atención al público. En el caso de las carreteras se observa que las velocidades de circulación tienden a disminuir conforme se alcanza la capacidad de la vía, lo que deriva en un deterioro del servicio expresado en término de aumento de los tiempos de viaje, polución y tasa de accidentabilidad.

2.2.1 Formas Funcionales para Caracterizar la Demora por Congestión

Pese a los años de estudio enfocados en el problema, no se ha logrado establecer una relación unificada directa que describa el fenómeno, lo que se debe principalmente a la complejidad matemática del fenómeno. Existen dos corrientes que intentan caracterizar la congestión. La primera intenta realizar una aproximación teórica derivada de la mecánica de fluidos, donde se asemeja el flujo vehicular de una carretera con el escurrimiento de un líquido en una tubería o canal. Pese a la aparente similitud de ambos fenómenos, estos modelos han demostrado una baja correlación con lo observado, por lo que surgió una serie de modelos empíricos basados en la observación del fenómeno.

Los modelos empíricos basan su estructura en una serie de variables relacionadas entre sí que permiten en conjunto describir la fenomenología de la congestión. Así la densidad de vehículos por pista (D), la velocidad de circulación (S) y el flujo de vehículos (V) son las tres variables más utilizadas para definir la congestión en carreteras. Se considera que el flujo de vehículos que pasan por un lugar es una función de la densidad y la velocidad, donde V alcanza un máximo (V_k) para ciertos valores de S y D . Antes que el flujo tome su valor máximo se habla de una carretera congestionada, ya que cada vehículo adicional reduce la velocidad, pero aumenta el flujo total de vehículos circulantes. Para valores sobre el máximo de vehículos se habla de una vía hipercongestionada, donde cada vehículo adicional además de disminuir la velocidad, también disminuye el flujo total de vehículos circulantes. De manera similar se obtiene la demora de un usuario, definida como el tiempo que un vehículo se demora en recorrer un kilómetro. Ambas curvas pueden apreciarse en la figura siguiente.

Figura 2.1: Curvas empíricas de Flujo- Velocidad y Flujo- Demora



La modelación matemática de estas curvas representa un gran problema, debido a los cambios que experimenta en el tiempo el comportamiento y a la forma funcional particular. La *Bureau of Public Roads* en Estados Unidos relacionó varias curvas observadas y a partir de estos resultados se propuso modelar la parte inferior o congestionada, por ser la de mayor importancia. Así nace la curva de Flujo-Demora BPR, una de las más utilizadas para la modelación de congestión en calles, caminos y carreteras.

$$T = T_f \left[1 + a \left(\frac{v}{V_k} \right)^b \right] \quad \text{Donde } a \in [0.05; 0.2] \text{ y } b \in [4; 10]$$

Se observa entonces que la función de demora depende del tiempo necesario para recorrer un kilómetro en ausencia de flujo (T_f) más un factor que dependerá del grado de saturación de la vía en función de otros parámetros que dependen de condiciones geométricas y de diseño del camino (valores a y b). Pese a modelar en buena forma la curva congestionada de flujo-demora, los problemas recaen en que la curva sigue permitiendo valores de demoras por sobre la capacidad máxima de la vía. Sin embargo, con valores razonables la capacidad no es excedida.

Este trabajo sirve de base para analizar el tema de la congestión en terminales de transporte ya que, en términos prácticos, el fenómeno es el mismo. Esta demora se puede entender como el costo adicional que un vehículo enfrenta en su operación de carga y descarga debido a la presencia de otros vehículos en el sector de maniobras de un terminal de transporte. Es importante remarcar que el usuario también percibe este costo adicional, ya sea por demoras en su embarque o en espera al interior del vehículo para su salida. Asimismo se debe señalar que la demora acá referida se produce en la operación del sector de maniobras de los portadores y no al interior del terminal, pese a lo cual muchas veces será posible observar hacinamiento de público o mercancías en estos sectores como una consecuencia del alto nivel de operaciones.

Aunque en ciertos modelos de competencia con enfoques más teóricos es posible abstraerse de una forma funcional que represente el fenómeno de la congestión, este es un tema importante que requiere de un grado de atención. La mayoría de los autores trabajan con una función explícita de demora por congestión derivada de la función BPR, sin embargo otros autores prefieren – en la medida que los modelos lo permiten- funciones generales donde sólo se explicita las condiciones que debe cumplir la función. En este caso particular se optará por una función explícita simplificada. *Basso y Zhang (2007)*, discute sobre las enormes facilidades que otorga al trabajo analítico el utilizar funciones de demora lineales o simplificadas, pero también advierte de los problemas que la condición de primer orden puede entregar si el resultado excede la capacidad de la infraestructura. Esto no sucede en funciones de demora lo suficientemente convexas (como $D(Q, K) = Q[K(K - Q)]^{-1}$ por ejemplo, que tiende a infinito cuando la demanda se acerca a la capacidad). Pese a esto, el problema señalado puede ser soslayado por uno de los siguientes caminos: (i) Se puede asumir que la solución es interior y luego encontrar condiciones bajo las cuales esta suposición se cumple o (ii) se puede imponer a priori una regla de racionamiento de la capacidad para el caso en que la capacidad es excedida. El trabajo señalado utiliza el primer enfoque para solucionar el problema, que es el mismo que se utilizó en este trabajo.

La función de demora elegida es la misma que utilizó *De Borger y Van Dender (2006)*, que a su vez utilizó *Basso y Zhang (2007)*. Esta mantiene la idea funcional de que la demora es proporcional al grado de saturación de la instalación, la que se encuentra factorizada por un parámetro a .

$$D(Q, K) = a \frac{Q}{K}$$

En una rápida comparación con la función de demora BRP se observa que esta corresponde a una linealización de dicha ecuación, omitiendo el término de demora en ausencia de flujo.

De Borger y Van Dender (2006) señalan que el uso de una función de demora lineal es común en los estudios de bienes congestionables, aún cuando asumir una solución interior es restrictivo. Se señala además que para efectos de análisis de los resultados, la utilización de formas funcionales simples versus otras más complejas no arrojan diferencia en las conclusiones cualitativas del estudio, para lo que debe tenerse siempre en consideración que los resultados se desprenden de una simplificación y analizar los posibles impactos de esta suposición.

2.2.2 Competencia de Medios Congestionables

Existen diversos estudios enfocados en el tema de la congestión, sin embargo la existencia de trabajos relacionados con la competencia de medios congestionables es escasa. Por otro lado la mayor parte de ellos están relacionados con competencia de carreteras o redes de información, pese a lo cual son útiles para identificar los enfoques metodológicos con que se trata el tema de las demoras.

Una primera aproximación al tema la presenta *Baake y Mituch (2007)*, quienes analizan la competencia de dos redes de comunicación (como pueden ser internet o telefonía) bajo el supuesto que la calidad del servicio se afecta negativamente al aumentar el número de usuarios conectados. También consideran la externalidad positiva que para un usuario significa la existencia de otros usuarios con quienes compartir en la red. El juego planteado por los autores se desarrolla en dos etapas. En la primera de ellas los prestadores de servicio deciden la capacidad a instalar, la que es asociada con un costo de inversión. En la segunda etapa los usuarios deben elegir a que servidor conectarse. Aunque analizan la competencia bajo *Bertrand* y *Cournot*, discuten acerca del modelo de competencia que mejor se ajusta al mercado. La conclusión obtenida es algo que resulta difícil de predecir, ya que depende entre otras cosas de la estructura de las empresas así como del grado de integración vertical. Este punto se discutirá con mayor detalle en las páginas siguientes, en la sección relativa a los tipos y formas de competencia.

En los casos relativos al transporte se encuentra abundante material. De interés a este trabajo resultan los relacionados con carreteras tarifcadas que compiten por atraer usuarios, como los desarrollados por *De Palma y Lindsey (2000)*, *Engel, Fisher y Galetovic (2004)* y *De Borger, Dunkerley y Proost (2007)*, todos los cuales analizan la tarifcación de carreteras en régimen de competencia. Asimismo resulta de interés el caso estudiado por *De Borger y Van Dender (2006)* donde se estudia un duopolio de dos terminales congestionables.

El estudio *De Palma y Lindsey (2000)* resulta interesante pues analiza los equilibrios de dos carreteras que tarifcan bajo tres regímenes distintos: público versus privado, público versus libre acceso y privado versus libre acceso. El modelo espacial es sencillo, consiste en dos arcos que unen un único par origen destino. La congestión es modelada de forma dinámica a través de un modelo de colas, el que permite a los usuarios no sólo la elección de ruta, sino también decidir si viajan o no, y de hacerlo, en que período. No existe inversión en capacidad y no hay restricciones a la tarifcación. Los resultados muestran que en el primer caso (privado vs. Libre acceso) se logra eficiencia distributiva, y en este caso la eficiencia ganada es siempre mayor al caso de ambas rutas tarifcadas. Además los peajes son variados durante el tiempo para eliminar la cola y cuando ningún privado tiene una fracción dominante de la capacidad. También se concluye que un duopolio privado es más eficiente que un duopolio mixto, aunque esto no es cierto si el público actúa como un líder en precios. Pese a lo anterior, en este caso se obtiene un rendimiento ligeramente superior típico de los liderazgos.

Resulta de especial interés destacar los resultados del caso mixto, por la similitud con el tema aquí desarrollado. Considerando que el operador A es un regulador central que busca maximizar el beneficio social y el operador B un ente privado maximizador de ingreso se analizan los dos casos siguientes: competencia bajo equilibrio de Nash y competencia de *Stackelberg* con firma pública líder. Luego del análisis de sensibilidad, los resultados del equilibrio de Nash muestran que, si la ruta A es operada por una firma pública y la B por un privado, la tarifa de A es positiva, dado que la ruta B esta sobre tarifcada. Esto se explica porque el regulador central (A) requiere traspasar igualmente parte de la demanda a la ruta privada para evitar mayores efectos de congestión. También se observa que la tarifa A será menor que la tarifa de B, ya que si bien sería operativamente eficiente tenerlas iguales (igual congestión en ambas vía), la excesiva reducción en el número de viajes no lo hace socialmente óptimo. Dado que el Operador público A coloca una tarifa baja (menor que el caso privado versus privado), el operador B se ve

obligado a bajar suavemente su tarifa. Esto deriva en que finalmente el excedente social es levemente superior al caso de dos privados compitiendo. Los consumidores también se encuentran levemente mejor que en el caso de dos privados. En todos los casos se observa que de concesionar una ruta, es preferible el caso público ante el privado. ($\text{PUBL-PRIV} > \text{PRIV-PRIV}$ y $\text{PUBL-FREE} > \text{PRIV-FREE}$). También se concluye que el operador público obtiene mayores ingresos que el privado, aún cuando esté maximizando beneficio en vez de ingreso. Esto sucede por la menor tarifa que traspasa tráfico de la ruta privada.

En el caso de un liderazgo de *Stackelberg* del operador público, el operador público fija las tarifas tomando en cuenta la influencia de su decisión en el privado. En este caso el regulador elige un precio aún menor que el caso anterior, obligando al privado a reducir aún más su tarifa, pero siempre suavemente. Sin embargo la diferencia es muy baja y los beneficios pequeños.

El trabajo de *De Borger, Dunkerley y Proost (2007)* presenta un caso distinto, con dos caminos en serie que compiten bajo un régimen público-público. El caso reviste diferencias importantes al que se busca modelar, principalmente en lo referido a la demanda de uso de la carretera, ya que en este modelo corresponde a un bien complementario y no sustituto. Sin embargo en la descripción del juego utiliza dos etapas, donde en la primera se busca la inversión en capacidad y en la segunda compiten en precios.

Por último, *Engel, Fisher y Galetovic (2004)* desarrollaron un modelo de competencia de carreteras tarifadas bajo el cual buscaban observar el comportamiento del mercado al variar el número de alternativas tarifadas disponibles. Los principales resultados de estudio sostienen que en el equilibrio se obtienen valores de peajes mayores que el óptimo, con niveles de congestión bajos. Esto se debe a que el concesionario logra internalizar la disposición a pagar de los usuarios. Por otro lado se obtiene que la distorsión disminuye a medida que aumenta el mercado y crece el número de carreteras. Esta disminución es tal que en el límite se obtendrá que el peaje será igual al óptimo social, haciendo que cada conductor internalice su propia congestión.

De mayor interés resulta el trabajo desarrollado por *De Borger y Van Dender (2006)*, que se aleja de la competencia de carreteras para acercarse con mayor fuerza al tema de este estudio. En este trabajo se estudia un duopolio entre dos terminales privados congestionables, que son sustitutos perfectos y toman decisiones secuenciales en capacidades y precios. Se resuelve el modelo mediante simulación numérica, para luego comparar estos resultados con los obtenidos

en los casos de un monopolio y el primer-mejor. Las principales conclusiones del trabajo dicen relación con que los valores de precios y capacidades en el equilibrio de Nash son mayores para el caso del duopolio que para el óptimo social, obteniéndose además que el mayor nivel de congestión es resultado de la tarificación estratégica de los agentes que buscan responder a las inversiones en capacidad. Se establece también que la existencia de costos marginales de capacidad más altos puede derivar en mayores ganancias para el duopolio. Por el contrario, si el costo de invertir en capacidad es relativamente barato o bien la demanda es relativamente inelástica es posible obtener un equilibrio de Nash estable y asimétrico donde el terminal de mayor tamaño ofrece menores tiempos y demoras a mayores precios, con una situación opuesta (mayores tiempos y menores tarifas) en el terminal de menor tamaño.

2.2.3 Otros Temas Relativos a la Congestión

La tarificación por congestión ha demostrado ser un instrumento de control de demoras eficiente y bastante difundido en la literatura. *Pigou (1920)* fue el primero en reconocer que la congestión vehicular introducía una externalidad negativa en el fenómeno de desplazamiento vehicular, la cual podía ser corregida mediante la implementación de un peaje que corrigiera dicha distorsión. Esto llevaría el problema a ser *Pareto* eficiente, resultado que se conoce como el primer mejor en la economía. Con posteridad diversos autores ampliaron el problema, incluyendo el comportamiento de largo plazo cuando las capacidades de los arcos son optimizadas. Estos nuevos enfoques develaron debilidades en los supuestos bajo los cuales se establecía que la tarificación por congestión calificaba como primer mejor. Como lo señala *Lindsey y Verhoef (2000)* y *Verhoef, Koh y Shepherd (2008)*, existen diversas características del fenómeno que atentan contra una optimización a través del primer mejor, entre las que se cuenta el hecho de que la subtarificación del mercado no es el único fallo económico presente junto a la existencia de instrumentos de tarificación ineficientes. A esto se suma el hecho de la heterogeneidad de los usuarios y el carácter estocástico y no determinístico de la congestión. El primer hecho se hace relevante al considerar la amplia interacción del mercado de transporte con el resto de los mercados económicos.

Un último tema que concierne al fenómeno de congestión tiene que ver con el problema de la congestión en los accesos. Dado que los vehículos acceden en gran número a los terminales de transporte, las redes cercanas a estos comienzan a verse más congestionadas, afectando a los demás usuarios que acceden a estas infraestructuras así como a los usuarios locales que se

desplazan en ella por otros motivos. *Van Dender (2005, 2008)* ha desarrollado modelos de accesos congestionados en dos instalaciones que compiten por atraer clientes. En el primer caso considera dos firmas privadas que compiten en un duopolio por vender un mismo bien homogéneo. Este se produce a costos marginales constantes. Los compradores salen desde un único origen a comprar el bien a una de las dos firmas. El costo de transporte se considera creciente con la cantidad de viajes que se realizan, donde cada viaje representa una única compra. El trabajo busca responder la pregunta de cómo traspasar el costo de congestión a los usuarios de forma de corregir las imperfecciones de los mercados, analizando los casos de tráfico puro – sólo se dirigen a consumir- versus tráfico mixto.

2.3 Competencia Mixta

El tema de la competencia de mercados es de amplio estudio en las ciencias económicas, el cual se ha desarrollado con diversos enfoques y motivaciones. Será de interés para este trabajo aquellos que comprometan duopolios mixtos, bienes diferenciados, medios congestionables tarifados, estructura vertical y/o inversión en capacidad como parte del estudio.

Un oligopolio mixto es un mercado en el que un bien – ya sea homogéneo o diferenciado- es producido por un número pequeño de empresas, donde la función objetivo de al menos una de ellas difiere del resto al incorporar '*términos sociales*' tal como lo haría una firma pública. Se entenderá por términos sociales a todos aquellos relativos al bienestar o utilidad de otros agentes en el mercado, además de las ganancias de la propia firma. Luego, un duopolio mixto es la competencia de dos empresas que producen un bien cualquiera, donde una de ellas tiene carácter público y la otra privada. Mientras la primera de ellas busca optimizar una función objetivo de carácter social, la segunda se preocupará de maximizar el beneficio económico propio.

Aunque tradicionalmente se habla de maximizar el bienestar social como función objetivo de una firma pública, algunos autores han estudiado las ventajas y desventajas de aplicar funciones objetivos distintas a estas firmas, buscando a través de estas estrategias mejorar ciertos aspectos del mercado. Este hecho, que se conoce como regulación de mercados a través de firmas públicas, será discutido en el punto 2.4.

2.3.1 La Competencia en su Enfoque Más Tradicional

Entre los principales estudios recabados se puede citar el trabajo de *Cremer, Marchand y Thisse (1991)*. La publicación se centra en estudiar el efecto de una firma pública en un mercado de bienes diferenciados. Para analizar el foco de estudio, se desarrolla un modelo de *Hotelling* espacial. Este modelo se refiere a la adquisición de ciertos poderes de mercados por parte de los productores de bienes y servicios debido a la diferenciación horizontal de sus productos. El modelo es generalmente representado como un número determinado de usuarios idénticos dispersos uniformemente a lo largo de una línea de longitud conocida. En esta misma línea se encuentran ubicadas las diferentes firmas productoras de los bienes. Luego, la distancia que cada consumidor tiene con una firma es entendida como el grado de diferenciación del producto. De este modo el valor a pagar por el bien de un consumidor se reduce conforme se aleja de la firma.

El modelo desarrollado por los autores consiste en n empresas que compiten a través de un juego de dos etapas –una de localización seguida de otra de competencia en precios- por atraer usuarios. Luego de desarrollados los distintos juegos se busca comparar socialmente un oligopolio mixto con uno privado. Sus resultados son concluyentes al mostrar que para mercados con un número de firmas bajo o muy grande ($n=2$ ó $n \geq 6$) la existencia de un oligopolio mixto resulta ser socialmente deseable a uno privado. Además obtienen como conclusión que, contrario a lo que se puede pensar, para un número bajo de firmas el beneficio esperado de una firma pública no es muy grande, ya que decrece al adoptar estrategias poco agresivas de competencia, con lo que los competidores privados se ubican demasiado cerca quitándole participación en el mercado. También se obtiene que para $n \geq 4$ la mejor posición para una firma pública es una ubicación periférica y no una central, como se podría pensar también a priori. El trabajo de *Fujiwara (2007)* permite reforzar la conclusión al ampliar el modelo anterior –entre otros puntos- a bienes diferenciados y homogéneos, desechando en este último caso el modelo de *Hotelling* como diferenciador de los bienes.

Asimismo, *Matsumura y Matsushima (2004)* investigan un duopolio mixto de bienes diferenciados a través de un modelo de *Hotelling*. Las funciones objetivo de las firmas siguen el canon tradicional de maximizar el bienestar social, en el caso de la firma pública, y maximizar el *profit*, en el caso de la firma privada. El trabajo desarrollado corresponde a una modificación del estudio de *Cremer, Marchand y Thisse (1991)*, al permitir costos de producción endógenos que son establecidos por las empresas a través de un nivel determinado de actividades reductoras de

costos. El juego ocurre en tres etapas: la primera permite a las firmas elegir su costo marginal de producción, en la segunda eligen simultáneamente su ubicación y en la tercera compiten en precios. En el equilibrio se observa que la empresa privada obtiene menores costos de producción ya que incurre en excesivas actividades de reducción. No obstante lo anterior, cuando los costos de cada firma son heterogéneos, la ubicación de las mismas es socialmente eficiente, dada la diferencia entre los costos. La privatización de la firma pública puede mejorar el bienestar social ya que mitiga la pérdida derivada de la excesiva reducción de costos. Otro resultado interesante además de los ya mencionados tiene que ver con que a medida que la empresa privada reduce sus costos, la firma pública se vuelve menos agresiva a reducir su porción de mercado, ya que como firma pública trata de minimizar los costos totales.

Un estudio de alto interés para este trabajo resulta ser el de *Sanjo (2007)*. El autor analiza un modelo de competencia mixta duopólica con diferenciación horizontal y vertical, donde la diferenciación horizontal es expresa a través de un modelo de *Hotelling*, asociada al costo de transporte de ir a consumir el bien en la ubicación determinada. A su vez la diferenciación vertical corresponde a la calidad del producto, decisión que corresponde a la empresa tomar en la etapa correspondiente. El juego se desarrolla en tres etapas, donde ambas firmas eligen simultáneamente localización, calidad y precios. La principal conclusión del estudio se centra en establecer que no existe un equilibrio perfecto de subjugos de Nash para la localización si los costos de transportes son lineales.

Finalmente se tiene el trabajo de *Ware y Winter (1986)*. Los autores desarrollaron un caso de competencia mixta de dos bienes sustitutos, donde uno de ellos se produce en un mercado monopolístico fuera del control del regulador. En forma adicional se tiene que la empresa pública está sujeta a cubrir costos, lo que se conoce en la literatura como *Ramsey pricing*. El estudio hace frente a una situación muy común en regulación de mercados, donde se obtiene que para corregir las distorsiones económicas a través de una firma pública, los óptimos de producción pueden derivar en pérdidas para el estado. Introduciendo esta restricción, se obtiene que el precio siempre excede el costo marginal y la restricción de presupuesto para la firma pública no necesita estar activa. Además se concluye que el bienestar social puede verse incrementado al existir distorsión de precios fuera del mercado regulado, con lo que se infiere que el número de mercados regulados (exógeno en la literatura clásica del segundo mejor) excluye algunos con poder de mercado. Los resultados de la firma pública actuando como líder de *Stackelberg* son

similares al menos en su forma cuantitativa, sin embargo no se toma en cuenta la extensión del control regulatorio cuando existe un costo asociado a incrementos de la centralización.

Para una revisión más detallada del estado del arte en temas de oligopolios mixtos se puede recurrir a *De Fraja y Delbono (1990)*. En este trabajo los autores se empeñan en recopilar y organizar los más importantes estudios en el área de oligopolios mixtos, tanto para bienes homogéneos como para bienes heterogéneos o diferenciados. Aunque este último tipo de bien no había sido estudiado con profundidad a la fecha de la publicación, se han citado en los párrafos anteriores casos de estudio de bienes diferenciados que contemplan los vacíos señalados por los autores.

La modelación económica de estos tipos de competencia requiere establecer al menos dos puntos importantes que en parte dependen de la estructura del mercado que se busca modelar. Así, es necesario establecer el tipo de competencia a desarrollar y el *timing* del juego, definiendo en este último caso las etapas del juego y el orden en que cada una de ellas se van jugando.

2.3.2 Competencia en Mercados con Estructura Vertical

Como ya se ha mencionado anteriormente, los estudios de competencia en mercados es amplia, siendo un punto de constante estudio en las ciencias económicas. Sin embargo la mayor parte de estos se realizan bajo el concepto de demanda directa, donde el consumidor requiere directamente del productor el bien o servicio. El prisma de la economía industrial ha permitido observar que la existencias de estructuras verticales induce cambios en los comportamientos de los agentes respecto del enfoque tradicional, lo que ha derivado en un nuevo grupo de estudios durante las últimas décadas. Sin embargo, los estudios de competencia en bienes congestionables bajo la existencia de estructura vertical de mercado es una arista que recientemente se introduce dentro de la literatura especializada. Las principales ideas han sido desarrolladas por Basso y Zhang en una serie de trabajos, enfocadas en los mercados aéreos, pero que permite ser ampliada a otros ámbitos.

El estudio de *Basso (2008)* busca establecer en forma analítica y numérica el efecto de las desregulaciones en los precios y las capacidades de los terminales aéreos. Para esto utiliza una estructura vertical de mercado donde las aerolíneas compiten formando un oligopolio. Al considerar la capacidad de las instalaciones se tiene presencia de congestión que afecta tanto a los pasajeros como a las aerolíneas. El trabajo establece que si un mercado con agentes privados

carece de regulaciones los aeropuertos tienden a sobre tarifcar por congestión, generando grandes ineficiencias y pérdidas económicas. También se establece que en el caso que se busque maximizar el bienestar social se obtendrán niveles de congestión similares al caso privado, pero sin reducciones drásticas en los niveles de tráfico. El juego planteado tiene tres etapas, con elección secuencial de capacidad y precios por parte de los aeropuertos y una etapa final en que las aerolíneas eligen su nivel de producción. Bajo este planteamiento y con la ayuda de ciertos supuestos es posible determinar que la demanda que enfrentan los aeropuertos deriva del equilibrio *Nash-Cournot* del mercado de las aerolíneas.

Se tiene entonces dos enfoques para la modelación de mercados competitivos con estructura vertical: El enfoque tradicional donde las demandas de los aeropuertos dependen de los precios y los niveles de congestión que enfrentan las aerolíneas y los pasajeros. Por otro lado se tiene el enfoque de estructura vertical, donde la demanda de los aeropuertos se obtiene como el resultado del equilibrio de los mercados aguas abajo. *Basso y Zhang (2008)* buscan comparar estas dos aproximaciones analíticamente. Una de sus principales conclusiones establece que el enfoque tradicional es válido si las aerolíneas no tienen poder de mercado, lo que puede suceder si el mercado se encuentra altamente atomizado o bien tienen un comportamiento competitivo. Cuando no sucede esto el enfoque tradicional entrega valores erróneos del excedente social, lo que deriva en niveles de tráfico por debajo del óptimo social.

Finalmente se tiene el estudio de *Basso y Zhang (2007)* quienes modelaron la competencia de dos agentes privados que compiten por atraer usuarios a sus instalaciones para consumir los servicios ofrecidos por alguno de sus portadores. La modelación utilizada consta de tres niveles, siendo el primero un modelo de ciudad lineal que se prolonga infinitamente en ambas direcciones, en la cual los potenciales usuarios se encuentran distribuidos uniformemente y con densidad de una persona por unidad de longitud. Esto corresponde a un modelo de *Hotelling* espacial en que la diferenciación ocurre debido a la lejanía del consumidor con el productor, lo que a su vez otorga a este último poder de mercado sobre un grupo de consumidores, en general, los más cercanos al centro de producción.

En el nivel intermedio se ubican los portadores para finalmente encontrar a los operadores de los terminales en el nivel superior del problema. La relación económica se da a través de aranceles que cada agente cobra al agente inferior. El comportamiento de los agentes se desarrolla a través de un juego de múltiples etapas, donde

1. los terminales determinan la inversión en capacidad y los precios a cobrar a los portadores. Se analizan los casos secuencial y simultáneo para comparar los resultados.
2. Determinadas las capacidades y precios de cada terminal, se desarrolla la competencia entre los portadores, donde en equilibrio se obtienen las tarifas de servicio.
3. En función de las variables determinadas en las dos fases anteriores los usuarios deciden consumir el servicio, y al mismo tiempo, el terminal en el cuál se realizará la compra.

Se resuelve el juego planteado obteniendo el equilibrio de *Nash* de los agentes para el juego secuencial y simultáneo. Los resultados del trabajo muestran que los precios de equilibrio en duopolio se elevan conjuntamente con los valores subjetivos del tiempo de consumidores y portadores. Además se observa que el ingreso de un nuevo portador a cualquiera de los dos terminales deriva en una reducción de precios en ambos terminales y que un costo marginal de los portadores más bajo en una de los terminales induce un precio mayor en ese recinto, pero lo reduce en el terminal competidor.

Al comparar los resultados con un monopolio (ambos terminales pertenecen a un mismo operador) y el óptimo social se observan conclusiones de interés. El duopolio ofrece menores precios de equilibrio que el monopolio, sin embargo el nivel de servicio es menor si las decisiones de inversión en capacidad son realizadas primero que las decisiones de tarificación. Si las decisiones se toman simultáneamente ambos operadores terminarían entregando un nivel de servicio similar. Se observa además que un duopolio en juego secuencial invierte menos en capacidad y cobra mayores precios a sus portadores que un duopolio resuelto bajo un juego simultáneo. Además se puede concluir que las reglas de inversión en capacidad son las mismas entre un monopolio y un duopolio privado si y sólo si los mercados de los niveles inferiores son perfectamente competitivos.

2.3.3 Tipos de Competencia

El tipo de competencia hace referencia a la forma en que los agentes compiten en el mercado. Existen al menos tres formas de competencia ampliamente estudiadas y difundidas: Competencia a lo *Cournot* o en cantidades, competencia a lo *Bertrand* o en precios y Competencia de *Stackelberg*, donde una firma actúa de líder y las demás de seguidoras.

De Fraja y Delbono (1990), en su recopilación de estudios sobre la competencia mixta se detienen a analizar este punto. En el señalan que la elección del tipo de competencia debe considerar la naturaleza de las variables estratégicas a las que se enfrentan los agentes. La mayor parte de los casos de estudio se enfocan en una competencia en cantidades que en precios. Este hecho resulta aparentemente fuera de todo sentido común, toda vez que parece no capturar el real comportamiento de las firmas, sin embargo es un supuesto ampliamente difundido en la economía industrial. El argumento a favor de una competencia a los *Cournot* radica en la facilidad de cálculo que implica este tipo de desarrollos versus competencia en precios. La discusión ahora debe centrarse en si existe diferencia entre uno y otro tipo de competencia. Los autores llegan a la conclusión de que una competencia de *Cournot* obtiene los mismos resultados que una competencia más sofisticada en precios, como puede ser Bertrand, aún cuando el trabajo matemático se relaja considerablemente. Para esto resulta fundamental el trabajo de *Kreps y Scheinkman (1983)* (citado por los autores) quienes demostraron que una competencia en precios de Bertrand es equivalente a un juego de dos etapas, donde primero eligen simultáneamente su capacidad y luego compiten en cantidades.

Por otro lado *Baake y Mituch (2007)* también discuten en su trabajo sobre el tipo de competencia que mejor describe la naturaleza del mercado, pero esta vez el enfoque está puesto en un medio congestionable como lo es el de las conexiones a internet. Señalan como conclusión que el tipo de competencia se relaciona directamente con el tipo de integración vertical que existe entre los agentes: si esta es baja o media el mercado queda mejor descrito por una competencia en precios o a lo *Bertrand*. Si al contrario, la integración vertical es alta, la competencia en cantidades o a lo *Cournot* es preferible al representar mejor la interacción entre agentes.

Los puntos anteriores y las características del problema que se desea estudiar sugieren que una competencia en cantidades de parte de los portadores se ajusta mejor a la naturaleza del mercado, lo que redundaría en conclusiones validadas y perfectamente aplicables a situaciones de la vida real.

2.3.4 Timing del Juego

Al observar la literatura relacionada con temas de competencia de firmas (mixta o entre privados) revisada, saltan a la vista dos puntos en común referentes a las etapas del juego: la elección simultánea de la localización de las firmas como etapa inicial y una etapa final de

competencia en precios. El tema de elección de la localización es frecuente en la competencia de firmas, especialmente en aquellas que utilizan diferenciación espacial de productos a través de *Hotelling*.

En el caso de la competencia de terminales la localización no resulta ser una variable de interés, toda vez que la atención se centra en la sección superior de la estructura del mercado. Desde 1980 en adelante existen varios estudios que han buscado determinar y acotar el impacto de estas instalaciones, tanto en variables urbanas como ambientales. Esto se debe al gran impacto medioambiental que generan en las inmediaciones los mentados recintos, con alta congestión vehicular en los accesos, contaminación acústica y visual además de polución y desvalorización de las viviendas y los suelos en las inmediaciones de los recintos.

En forma adicional se tienen las exigentes condiciones ambientales que se requieren para instalar un terminal. Por ejemplo en el caso de los aeropuertos se requiere que la dirección del viento permanezca en una misma dirección el 90% a 95% de las veces. De no cumplirse requiere la construcción de una nueva pista cruzada que opere de forma tal que en conjunto cubran el porcentaje requerido. En algunos casos se han necesitado tres pistas debido a lo cambiante de las condiciones meteorológicas. Además se requieren alturas mínimas en las zonas de aproximación, con la debida limitación del uso de suelo a actividades que no representen riesgo para la población. En el caso de los puertos el factor de profundidad, contaminación y uso de suelo es fundamental. Se requieren de bahías medianamente protegidas, que tengan al menos una profundidad mínima deseada que permita el recale de barcos de tamaño adecuado. El uso del borde costero genera impactos en la ciudad, perdiendo la ciudad su valor agregado visual y aportando grandes espacios desconectados de la trama urbana, con la consecuente pérdida de conectividad.

Estas razones han llevado a la creación de un exigente marco legal y regulatorio para la localización de grandes terminales de transporte, que hace bastante restrictiva la ubicación de nuevos terminales. En este sentido resulta razonable que la etapa de localización en sí no corresponde a una decisión estratégica, toda vez que las decisiones de instalar un terminal se reduce a un par de ubicaciones que cumplen con las condiciones técnicas, legales y ambientales. Luego, la utilización de una etapa de localización de los terminales no tiene sentido desde el punto de vista de la competencia de las firmas ya que estas no poseen la misma libertad en este aspecto que el que manejan en la determinación de sus precios y capacidades.

Interesante resulta contrastar los resultados de equilibrio en una competencia respecto a los obtenidos en distintos tipos de juegos. Al cambiar el *timing* se abarca una mayor cantidad de posibilidades, añadiendo por ejemplo los efectos de tener una empresa pública líder o analizar los resultados ante un cambio de elección de las variables. En este sentido el trabajo en desarrollo de *Lu y Poddar (2006)* resulta interesante. Los autores analizan los efectos de cambiar la elección exógena y secuencial de capacidad y luego cantidades en duopolios privados a una elección endógena. Tradicionalmente la literatura se ha concentrado en que ya sea la capacidad y/o los precios sean endógenos, desatendiendo la elección y *timing* de la capacidad como proceso endógeno previo. El trabajo se enfoca en analizar el problema de elecciones estratégicas cuando todos los *timing* de las variables estratégicas relevantes en todas las fases del juego son elegidos en forma endógena, a diferencia de los estudiados en la literatura previa. El análisis se desarrolla ante un duopolio mixto y uno privado que eligen en forma secuencial capacidad y cantidad con demoras observables y ante distintas estructuras de tiempo.

Las conclusiones obtenidas por los autores dicen relación con la invariabilidad de los resultados ante cambios en la elección del *timing* de elección de las variables de decisión. Además en un duopolio mixto las firmas eligen la mayor parte de las veces capacidad y luego cantidad en forma secuencial y no simultánea. Por otro lado, un duopolio mixto puede derivar en varios equilibrios, dependiendo de los distintos tipos de juego. En el caso de duopolio privado, la estrategia dominante es única y en este caso ambas empresas eligen simultáneamente al inicio de cada etapa. También se destaca que la empresa pública nunca invierte en sobre capacidad, mientras la firma privada nunca invierte en sub capacidad, para ambos casos

2.4 Regulación de Mercados por Medio de Empresas Públicas

Existen diversos estudios que intentan demostrar la efectividad de utilizar una empresa pública como una herramienta de regulación del mercado. La idea que subyace a esta lógica señala que a través de políticas públicas adecuadas de dirección de una empresa pública es posible disciplinar al mercado, sólo a través de la interacción estratégica de los agentes. Esto en ausencia de un marco legal regulatorio, instrumento comúnmente usado para controlar los excesos o distorsiones de un mercado imperfecto.

En primer lugar se puede citar el trabajo de *Cremer, Marchand y Thisse (1989)*. Este estudio busca responder en qué grado las empresas publicas pueden ser utilizadas como un instrumento

de regulación que permita mejorar la distribución de mercados competitivos imperfectos. Para esto se analizan particularmente los siguientes casos: (a) Beneficio Social o conveniencia de un Gobierno de nacionalizar un grupo de empresas que compiten en un equilibrio de *Nash-Cournot*, y de ser óptimo, determinar cuántas empresas nacionalizar. (b) Beneficio Social de crear nuevas empresas públicas en el mercado y su comparación con el punto (a). También se señala el enfoque inverso, es decir, estudiando la conveniencia de privatizar –todas o parte de– las empresas públicas presentes en el mercado.

Según consta en el trabajo, los estudios anteriores son escasos. Se destaca el de *Rees (1984)* y otros que estudian el margen en que una empresa pública –en un mercado con otras empresas no competitivas– puede alejarse de la tarificación a costo marginal (óptima), teniendo en cuenta que maximiza beneficio social y que las demás empresas del mercado la seguirán (*Stackelberg's leader game*). El trabajo de *Harris y Wiens (1980)* establece que el primer óptimo puede lograrse si la empresa pública es capaz de hacer saber a sus competidores que política seguirá. Esto se lograría calculando el precio óptimo de la industria, y anunciando que se compensará a las demás por la diferencia entre este y el nivel propio de producción. Con esto las empresas se enfrentarán a un precio fijo, y determinarán su nivel de producción para obtener el costo marginal. Esta última política, además de ser poco creíble, deriva en pérdidas enormes para la empresa pública, si se consideran ciertos niveles de producción privados. *Beato y Mas-Colell (1984)* investigaron el caso de un duopolio público-privado. En este caso la firma pública toma como dado el nivel de producción del privado (que actúa como líder) y tarifica a costo marginal para determinar su propio nivel de producción. Así, la empresa privada maximiza su beneficio a lo largo de la curva de reacción de la empresa pública. La conclusión más relevante señala que bajo ciertas circunstancias, este comportamiento lleva a niveles de bienestar mayores que en el enfoque tradicional.

El estudio se basa en un modelo de las siguientes características: Existen retornos crecientes a escala además de costos fijos y marginales constantes para las firmas. Además cada empresa enfrenta una restricción presupuestaria que la obliga a tener beneficios no negativos, se obtiene un equilibrio de *Nash-Cournot*. Además las empresas públicas pueden pagar primas a sus trabajadores y el gobierno anticipa el equilibrio de mercado en cuanto la creación o nacionalización de nuevas firmas.

El estudio no es concluyente sobre si es o no beneficioso privatizar o introducir una nueva firma, ya que existen argumentos para ambos lados y los resultados dependen mucho de la estructura del mercado. Para valores de c –prima de esfuerzo a empleados públicos- no muy grandes, siempre será conveniente la nacionalización de una empresa, punto que también es válido para el caso contrario, es decir, muchas empresas públicas derivan en mayor beneficio si se privatiza una de ellas. En caso de tener un valor de c demasiado grande, el mayor beneficio vendría dado por nacionalizar toda la industria (aunque depende del tamaño de los costos fijos), pero si esto no es políticamente posible, la mejor solución es dejarla totalmente privada. Por otro lado nacionalizar siempre será preferible a crear una nueva firma (en un análisis de bienestar puro) así como siempre es socialmente óptimo nacionalizar una pura empresa. En esto siempre se ha supuesto que un mayor salario en las empresas públicas no genera cambios en las rentas de las empresas privadas, lo que parece también poco realista, ya que se espera una nivelación al menos parcial de los salarios en las entidades privadas.

Otro trabajo interesante, aunque se dirige en una línea de acción un poco distintas, resulta ser el trabajo de *De Franja y Delbono (1989)*. En este estudio, los autores consideran una industria conformada por una firma pública compitiendo con algunas firmas privadas. Buscan demostrar que en el equilibrio de Nash, el bienestar social puede ser modificado mediante la introducción de funciones objetivo distintas a las tradicionales.

El estudio se concentra en un caso de oligopolio en que la regulación se hace a través de una única firma pública que compite con las demás firmas privadas, utilizando sólo instrumentos de mercado. Como es común, la firma pública se dedicará a maximizar el bienestar social mientras la firma privada no posee “términos sociales” de ningún tipo en su función objetivo.

El modelo considera a una industria con $n + 1$ empresas, todas ellas produciendo un bien homogéneo. Se adopta un análisis de equilibrio parcial y estático, donde se asume que todos los agentes poseen información completa de los otros agentes, además de que se omite el problema de principios cambiados en las gerencias (*i.e.* la función objetivo del dueño es internalizada completamente por el gerente). En este mercado hay n firmas privadas y 1 firma pública. La competencia se realiza por cantidades (*Cournot*) y todas las empresas tienen la misma tecnología, lo que implica un costo fijo constante, un costo marginal creciente e inexistencia de restricciones a la capacidad (corto plazo). Esto justifica la existencia de pocas firmas y elimina la trivialidad de la firma tarifando a costo marginal para disciplinar el mercado, proveyendo la

diferencia no satisfecha por los privados. Se descarta también la posible entrada de firmas a la industria. La firma cero es la firma pública.

Las conclusiones son interesantes. Al comparar los distintos escenarios se obtiene que la nacionalización es siempre socialmente mejor que un liderazgo de *Stackelberg* de la empresa pública, el cual a su vez es casi siempre mejor (socialmente) que una competencia *Cournot-Nash*. Si no es posible que la empresa pública actúe como un líder de *Stackelberg* hay varias líneas de acción a seguir y dependen de la estructura del mercado. Es aquí donde se desprende la conclusión más importante: si el mercado posee un número de firmas más cercano a un mercado perfecto que a un duopolio entonces conviene que la firma actúe como si maximizara *profit*, o como bien se puede llamar, utilizar un comportamiento egoísta.

Por otro lado, los empresarios privados siempre preferirían competir sin una firma pública en la industria, pero de haber una preferirán que esta actúe como un líder de *Stackelberg*. Esto se debe a que si no hay ventajas de movimientos para la empresa pública, esta terminará produciendo gran parte de la demanda (participación de mercado elevada) dejando poco que repartir a los privados.

En el caso de *Stackelberg* ninguna de las empresas, ni siquiera la firma pública, tarifica a costo marginal y demuestran también que bajo ciertas circunstancias es socialmente deseable quebrar ciertas empresas.

2.5 Otros Tópicos de Organización Industrial

Son diversas las consideraciones y supuestos que deben realizarse en función de lograr un modelo sencillo, pero que describa a su vez las principales variables del problema. En el ámbito de la organización industrial son diversos las líneas de estudio desarrolladas en el tiempo, siendo algunas de ellas poco atingentes para modelar el fenómeno deseado.

2.5.1 Reducción de Costos e Ineficiencia X

Un enfoque tradicional de los estudios de organización industrial concentra sus esfuerzos en los costos de las empresas como medio de aumento de utilidades. Una forma tradicional de realizar esto es enfocar el valor del costo como una variable endógena, donde cada empresa debe elegir el valor de este costo de producción antes de decidir el nivel de producción final. La elección del costo puede entenderse como la inversión en tecnología necesaria que lleva al costo de

producción al nivel deseado. Otros argumentos señalan que a través de un nivel adecuado de actividades reductoras de costos es posible alcanzar el nivel deseado.

El estudio de *Matsumura y Matsushima (2004)* indaga sobre las formas en que una empresa puede reducir su costo de producción. Se concluye que todas las empresas pueden desarrollar actividades reductoras de costos, sin embargo en las empresas públicas no existen los incentivos eficientes para lograrlo, por lo que en equilibrio alcanzarán costos de producción más elevados, volviéndose menos eficientes y menos competitivos.

El concepto bajo el cual se agrupa la diferencia entre un comportamiento empresarial asumido eficiente y el comportamiento real desarrollado por esta se llama *ineficiencia X*. Este concepto pretende agrupar en él todas las demás variables que no pueden ser explicadas en forma normal por la economía tradicional. Los investigadores han establecido, por ejemplo, que las funciones simplistas de empresas maximizadoras de *profit* o reductoras de costos no responde al comportamiento empírico, cuando en la práctica las funciones objetivos son muy amplias, cercanas al enfoque de multiobjetivo. Así por ejemplo una empresa puede tener como objetivo el maximizar sus ganancias, pero también lograr posicionarse en el mercado con una marca lo que desvirtúa en parte el concepto inicial.

Los autores *Hsin Lin & Ogawa (2005)* toman este concepto y lo desarrollan en el contexto de varias empresas que compiten, donde a través de actividades reductoras de costos optimizan el nivel de sus ingresos. El enfoque es aún más preciso e interesante, ya que se concentra en los aspectos de la ineficiencia X en el caso de un duopolio mixto, demostrando que al contrario de una firma privada, las firmas públicas no tienen incentivos para reducir sus costos, aún si para ello no requiriesen inversión extra. Una de sus principales conclusiones tiene que ver con el hecho de que mantener una alta estructura de costos de trabajo, es una estrategia esencial de una firma pública. Complementa el trabajo de *Matsumura y Matsushima (2004)* al deducir que ambas empresas pueden reducir sus costos mediante la introducción de inversión y demuestra además que no hay incentivos para ello en la empresa pública. Esto se complementa al agregar que aún cuando no es necesario realizar una inversión, la empresa pública no reduce sus costos. Esto se observa si la participación de mercado de la firma privada es lo suficientemente grande.

2.5.2 Completitud de la Información y Riesgo Moral

Un supuesto muy frecuente en los estudios de competencia oligopolística en mercados tiene que ver con la completitud de la información y el riesgo moral de los ejecutivos. El primer punto hace relación con el hecho de que todos los actores conocen a cabalidad las funciones de costos de sus competidores, pudiendo por tanto anticipar su respuesta ante cualquier movimiento. Por su parte, los demás competidores conocen de la misma forma las estructuras de costo de la empresa señalada, pudiendo ellos también anticipar la respuesta de este agente.

El tema de la completitud de la información es relevante a la hora de desarrollar los juegos. El conocimiento acabado de todos los jugadores entre sí permite al modelador desarrollar en forma simple un juego, que por sus características, no reviste complejidades matemáticas y permite a su vez obtener una conclusión del comportamiento del mercado bastante real. Parece evidente que en la práctica las empresas no poseen, a rasgos generales, un conocimiento muy acabado de los rivales, tanto a nivel de estructura de costos como a nivel de políticas que permitan anticipar una respuesta con cierta precisión. Así, la interacción estratégica se reduce a respuestas esperadas probables, asignando, a través de medios matemáticos un valor de ocurrencia a cada posibilidad. El tema no será tratado en esta tesis, sin embargo si se desea profundizar la temática se recomienda estudiar la línea de competencia imperfecta bajo información asimétrica.

Asimismo, aunque no tanta frecuencia, diversos estudios señalan la ausencia absoluta de riesgo moral en los ejecutivos y directores de las empresas competidoras. Pese a que no todos declaran en forma explícita este supuesto, casi la totalidad de los estudios lo considera como uno de sus supuestos fundamentales. Este concepto dice relación con la capacidad de los directores de las empresas para traspasar en forma íntegra las funciones objetivos que los dueños de ellas quieren hacer velar. Así, en ausencia de riesgo moral se tiene que las empresas que busquen maximizar el bienestar social, como son las empresas públicas, se encargarán precisamente de optimizar esta función y no existirán desvíos ni agregados a este objetivo.

2.6 Conclusiones y Comentarios

El desarrollo de la revisión bibliográfica permitió establecer la amplitud de aristas que forman el problema. Por una parte se tiene el estudio de infraestructuras congestionables con un alto enfoque en el análisis de mercados de redes informáticas. Del mismo modo se encuentran

aplicaciones a la ingeniería de transporte en el desarrollo de competencia de carreteras, enfocadas principalmente en la determinación de tarificación o similares.

Por otro lado se tiene el estudio de competencia mixta de empresas. Con variadas miradas, se centró la búsqueda en aquellos trabajos que utilizaban estructura vertical. El estudio de material bibliográfico arrojó como primera gran conclusión que la literatura que analiza competencia en mercados con existencia de estructura vertical es escasa, pues comprende a una línea de trabajo desarrollada durante los últimos años. Si a lo anterior se le agrega el requisito de que se traten de infraestructuras congestionables el universo de trabajos se reduce a un par de estudios, la mayor parte de ellos de tres autores quienes han desarrollado el tema durante los últimos cinco años. Estos resultaron ser los estudios de mayor aporte, en especial los trabajos de *L. Basso*, *A. Zhang* y *Y. Zhang* que trabajan los mercados del transporte aéreo a través de esta óptica.

Se buscaron también estudios que trataran la competencia mixta desde la mirada del *timing* o desde el punto de regulación de mercados a través de empresas públicas. Asimismo y a modo de complemento se decidió ampliar la búsqueda a diversos trabajos que estudiaran los diferentes tipos de competencia. Finalmente y dada la extensa búsqueda realizada, surgieron en forma natural otros tópicos relativos a la organización industrial que fueron revisados para chequear la pertinencia de incluirlos en el desarrollo del trabajo.

Concluida la labor de búsqueda y estudio, se comprobó que la literatura específica del tema es muy limitada. Sobre los trabajos que consideran competencia de infraestructuras congestionables bajo la presencia de estructura vertical fue posible concluir que estos sólo han desarrollado el tema de duopolios en mercados aéreos, con sólo un trabajo que busca comparar la competencia de dos terminales privados en un juego simultáneo y otro secuencial. Este trabajo incluye una comparación con el óptimo social y con un sistema monopólico. Esto permite concluir que no se han desarrollado trabajos de la índole propuesta, es decir, considerando un duopolio mixto. Si se agrega la presencia de integración vertical resulta una propuesta novedosa que busca un tratamiento específico de la temática.

3. Formulación Matemática del Modelo

3.1 Introducción

El presente capítulo desarrolla la formulación matemática que permite resolver el problema planteado. Para esto se buscó establecer las diferentes relaciones entre los agentes como las funciones de pago, funciones objetivo y otras para establecer y definir completamente el problema.

El estudio se desarrolló a partir del trabajo de *Basso y Zhang (2007)*, para lo cual se explican las ecuaciones necesarias, estableciendo adecuadamente las diferencias que permiten introducir la problemática singular que se busca modelar.

En este punto se busca detallar los distintos escenarios, explicitando las funciones objetivos que los determinan.

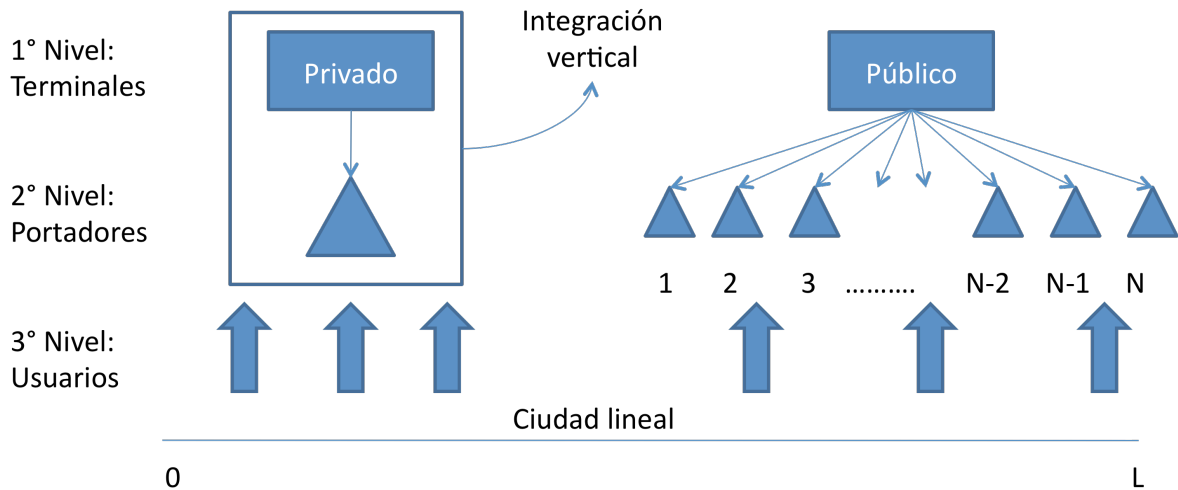
3.1.1 Descripción del Juego a Modelar

La situación que se busca modelar consiste en dos terminales de transporte que compiten en duopolio mixto de mercado. Ambos terminales poseen una estructura vertical de tres niveles, donde en el nivel superior se encuentran los operadores (administradores o dueños de cada recinto), en el nivel medio los portadores, que son los encargados de generar la oferta de transporte para finalmente ubicar en el nivel inferior a los usuarios, quienes son los consumidores finales. De este modo se observa que cada usuario elige un servicio de transporte prestado por algún operador, pero además este usuario estará eligiendo indirectamente el terminal de transporte en el cuál utilizará el servicio. Se consideró además que el operador privado posee integración vertical con un único portador de este recinto. Por el contrario, el operador público permite la existencia de varios portadores en sus dependencias.

También se considerará que los servicios están disponibles para ser consumidos en ambos terminales, por lo que siempre se tendrá la opción de elegir consumir en el terminal 0, en el terminal 1 o bien no consumir.

Lo anterior puede observarse en el esquema de modelación que se presenta en la figura siguiente.

Figura 3.1: Esquema de Modelación



Tal como puede observarse en la figura anterior, la modelación utilizará un juego simultáneo de tres etapas, cada una de las cuales se encuentra asociada al subjuego a desarrollar en cada nivel del problema. Estas etapas se describen a continuación.

1. los terminales determinan la inversión en capacidad y los precios a cobrar a los portadores en forma simultánea.
2. Determinadas las capacidades y precios de cada terminal, se desarrolla la competencia entre los portadores, donde en equilibrio se obtienen las tarifas de servicio.
3. En función de las variables determinadas en las dos fases anteriores los usuarios deciden consumir el servicio, y al mismo tiempo, el terminal en el cuál se realizará.

Este tipo de juegos se resuelven utilizando *backward induction*, proceso que consiste en ir estableciendo los equilibrios en los diferentes subjuegos que componen el problema razonando en el sentido contrario a la toma de decisiones o al flujo de información. De este modo se establecen en primer lugar los equilibrios de la última decisión o etapa, variables que quedarán sujetas a los parámetros del problema y las variables de los niveles superiores que aún no han sido determinadas. Una vez establecido el equilibrio del primer nivel se continúa con el nivel siguiente hasta resolver la totalidad de los subjuegos. Así se tiene el equilibrio de todos los subjuegos y a través de ellos del problema en general.

3.2 Formulación del Modelo

El modelo matemático utilizado se basa en el planteado por *Basso y Zhang (2007)*. Como se sabe este consiste en un juego de tres etapas, siendo la primera una ciudad lineal que se prolonga infinitamente en ambas direcciones, en la cual los potenciales usuarios se encuentran distribuidos uniformemente y con densidad de una persona por unidad de longitud en ella. Existen dos terminales de transporte ubicados en los puntos $z=0$ y $z=1$, denominados de aquí en adelante como terminales 0 y 1, respectivamente. Para efectos de esta modelación se considerará que el terminal 0 corresponde al terminal de carácter privado, mientras el terminal 1 será quien se comporte como público. Esta suposición no afecta los resultados, toda vez que el problema es simétrico desde el punto de vista de la ciudad y ésta de extensión infinita. Asimismo un usuario cualquiera ubicado en esta ciudad será individualizado a través de su ubicación, z .

De este modo un usuario final enfrenta una '*tarifa generalizada*', la que se compone del precio del servicio, el costo de la demora asociada al terminal y el costo por traslado. Luego, la tarifa generalizada de un usuario ubicado entre 0 y 1 que acude al terminal ubicado en $z = 0$ será

$$F = f_0 + \alpha \cdot D(Q_0, K_0) + \left(\frac{t}{4}\right) \cdot z, \quad \text{si } 0 \leq z \leq 1 \quad (3.1)$$

donde f_0 corresponde a la tarifa cobrada por el portador al usuario, α corresponde al valor subjetivo del tiempo de los usuarios, D es la demora del terminal y depende tanto de la demanda total que este enfrenta y la capacidad que dispone. Finalmente, el término asociado al costo de traslado es lineal respecto a la distancia z entre el terminal y el usuario, quedando el costo de viaje capturado en el parámetro $t/4$.

Si el producto es consumido se tiene que cada consumidor obtendrá una utilidad determinada por la ecuación siguiente

$$U_0 = V - f_0 - \alpha \cdot D(Q_0, K_0) - \left(\frac{t}{4}\right) z \quad (3.2)$$

lo que equivale al beneficio neto (V) menos la tarifa generalizada. En forma análoga es posible construir el beneficio obtenido por un usuario que acude al terminal 1, como se muestra en la siguiente expresión

$$U_1 = V - f_1 - \alpha \cdot D(Q_1, K_1) - \left(\frac{t}{4}\right) (1 - z) \quad (3.3)$$

donde debe notarse y deducirse que la tarifa generalizada, F , cambia en el término asociado a la distancia del consumidor al terminal utilizado, según se muestra en la ecuación 3.1. Luego, es posible observar el modelo de distanciamiento horizontal utilizado, basado en costos de transportes positivos y lineales. Si se asume que todos los usuarios ubicados en el intervalo $[0,1]$ consumen el servicio, y que ambos terminales reciben usuarios ubicados en este intervalo es posible determinar al usuario indiferente entre ir a uno u otro terminal haciendo $U_0=U_1$, con lo que se tiene que

$$\tilde{z} = \frac{1}{2} + \frac{f_1 + \alpha \cdot D(Q_1, K_1) - f_0 - \alpha \cdot D(Q_0, K_0)}{t/2} \quad (3.4)$$

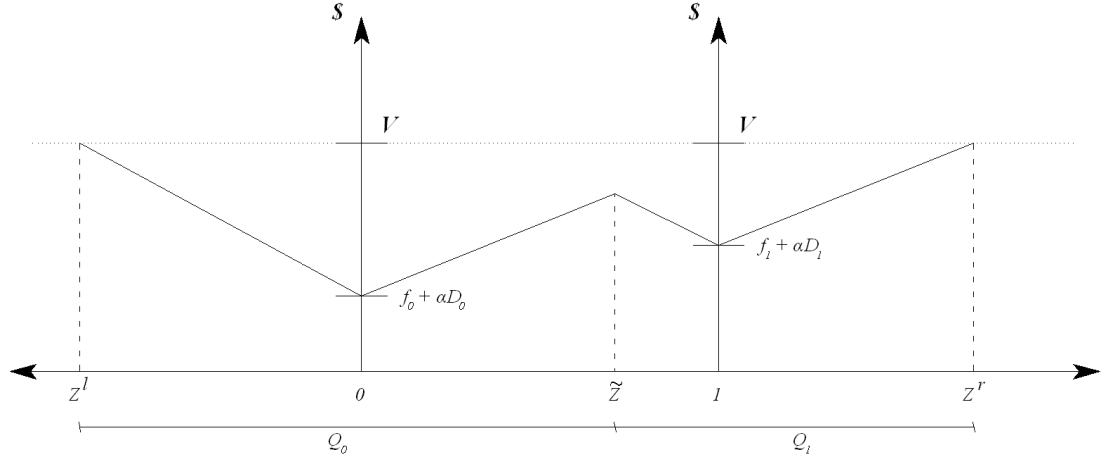
Bajo un razonamiento análogo es posible determinar los últimos usuarios que consumen en cada terminal y que vienen de sectores a la izquierda de cero o a la derecha de 1, con lo que se obtiene

$$z^l = -\frac{V - f_0 - \alpha \cdot D(Q_0, K_0)}{t/4} \quad (3.5)$$

$$z^r = 1 + \frac{V - f_1 - \alpha \cdot D(Q_1, K_1)}{t/4} \quad (3.6)$$

donde los superíndices l y r indican la posición relativa en la ciudad en que se ubica el último usuario (derecha o izquierda, de *right* o *left* en inglés siguiendo la notación utilizada por *Basso* y *Zhang*). A partir de estos puntos es posible establecer las áreas de influencia de cada terminal, según se muestra en la figura siguiente. En ellas es posible visualizar los últimos usuarios en consumir y el usuario indiferente. También se indica la tarifa generalizada para los usuarios que se ubican en el mismo lugar del terminal.

Figura 3.2 Distribución de los consumidores y áreas de captura de usuarios de los terminales de transporte



A partir de las expresiones anteriores es posible determinar las demandas de cada terminal como la agregación de usuarios bajo el área de captura.

$$Q_0 = \tilde{z} - |z^l| = \frac{(t/4) + 2V}{t/2} + \frac{f_1 + \alpha D_1 - 3(f_0 + \alpha D_0)}{t/2} \quad (3.7)$$

$$Q_1 = z^r - \tilde{z} = \frac{(t/4) + 2V}{t/2} + \frac{f_0 + \alpha D_0 - 3(f_1 + \alpha D_1)}{t/2} \quad (3.8)$$

Invirtiéndolo el sistema planteado en las ecuaciones 3.7 y 3.8 en las variables \$f_0\$ y \$f_1\$ se obtienen las tarifas que cada usuario debe pagar al portador por el servicio. Estas corresponden a las demandas inversas de los terminales y se resumen a continuación.

$$f_0(Q_0, Q_1, K_0) = 2t + V - 3tQ_0 - tQ_1 - \alpha D_0(Q_0, K_0) \quad (3.9)$$

$$f_1(Q_0, Q_1, K_1) = 2t + V - 3tQ_1 - tQ_0 - \alpha D_1(Q_1, K_1) \quad (3.10)$$

Como se puede observar, existe simetría en las expresiones que se deriva de la construcción del problema. Se observa además que las decisiones de un terminal dependen de las decisiones del terminal competidor, lo que los portadores observan a través de la congestión de ambos terminales. Asimismo, al observar con detenimiento las ecuaciones 3.9 y 3.10 se puede notar que las tarifas de los usuarios –variable de decisión de esta etapa– sólo dependen de parámetros exógenos y de variables de los niveles superiores del problema.

Establecido el equilibrio en el nivel de los usuarios y siguiendo la metodología de *backward induction* se debe establecer el equilibrio en el nivel siguiente. Las funciones de pago de los portadores se construyen considerando simetría *ex ante*, por lo que es posible determinar una expresión general para el costo de un operador en función del terminal en que opera. De esta forma se tiene que la función de costo del portador i en el terminal h esta dado por la expresión siguiente

$$C^{ih}(Q_h^i, \bar{Q}_h^{-i}) = (c_h + P_h + \beta_h D_h(Q_h, K_h)) \cdot Q_h^i \quad (3.11)$$

donde c_h representa el costo marginal de operación, considerado constante en el estudio. P_h representa el precio que el terminal h cobra a cada portador y β_h el parámetro asociado al costo por demora de un portador que opera en el terminal h . Esta corresponde al valor subjetivo del tiempo de cada portador, y se asume constante para todos los portadores de un terminal, pudiendo variar entre terminales tal como lo indica el subíndice h . Se observa que el costo del operador depende tanto de su propia demanda (Q_h^i) como la demanda de todos los demás portadores, lo que se denota como \bar{Q}_h^{-i} . Nótese que dada la simetría *ex-ante* de los portadores en el terminal público se pueden relacionar las demandas de cada portador con la demanda del terminal a través de la expresión siguiente

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N_h} Q_h^i = N_h Q_h^i \quad (3.12)$$

La función de demora es definida como el coeficiente entre la demanda y la capacidad de cada terminal. Esta se regula mediante la incorporación de un parámetro a , como se muestra a continuación.

$$D(Q, K) = a \frac{Q}{K} \quad (3.13)$$

Como ya se discutió en la sección 2.2.1, la elección de este tipo de demora simplifica los cálculos al linealizar las curvas de demoras empíricas, sin embargo se debe tener cuidado en revisar que las soluciones de equilibrio sean interiores.

Con las expresiones anteriores se define la función de utilidad de los portadores, según se muestra a continuación para el caso un portador operando en el terminal 1.

$$\varphi^{i1}(Q_1^i, \bar{Q}_1^{-i}, Q_0, K_1) = f_1(Q_0, Q_1, K_1)Q_1^i - (c_1 + P_1 + \beta_1 D_1(Q_1, K_1))Q_1^i, \text{ con } i=1, \dots, N_0 \quad (3.14)$$

Al observar la expresión se puede identificar que esta se compone de los ingresos generados por los usuarios, a los que se restan los costos de producción. Los ingresos monetarios se obtienen multiplicando el valor de la tarifa f_1 , con el número de consumidores Q_1^i del portador i en el terminal 1.

La condición de primer orden en el nivel de los portadores se define como

$$\partial \phi^{ih} / \partial Q_1^i = 0, \quad i = 1, \dots, N_h, \quad h = 0, 1 \quad (3.15)$$

con lo que es posible determinar la demanda derivada que enfrenta cada terminal. Esta corresponde al resultado del equilibrio del subjuego entre los portadores y se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} Q_0(\bar{P}, \bar{K}) &= \frac{t(c_1 + P_1 - 2t - V) - g_1(c_0 + P_0 - 2t - V)}{g_0 g_1 - t^2} \\ Q_1(\bar{P}, \bar{K}) &= \frac{t(c_0 + P_0 - 2t - V) - g_0(c_1 + P_1 - 2t - V)}{g_0 g_1 - t^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

En esta ecuación se ha simplificado la notación a través de los términos \bar{P} , \bar{K} y g_0 . Mientras los dos primeros corresponden al vector de precios y capacidades de los terminales respectivamente, el último queda determinado por las expresiones siguientes

$$g_0 = \frac{N_0 + 1}{N_0} \left(3t + a \frac{\alpha + \beta_0}{K_0} \right) \quad g_1 = \frac{N_1 + 1}{N_1} \left(3t + a \frac{\alpha + \beta_1}{K_1} \right) \quad (3.17)$$

y dado que el terminal privado posee un único portador en el caso estudiado es posible redefinir inmediatamente el término g_0 .

$$g_0 = 2 \cdot \left(3t + a \frac{\alpha + \beta_0}{K_0} \right) \quad g_1 = \frac{N_1 + 1}{N_1} \left(3t + a \frac{\alpha + \beta_1}{K_1} \right) \quad (3.18)$$

Es importante notar que las expresiones de g_0 y g_1 dependen tan sólo del número de portadores de cada terminal, el costo de transporte, los valores subjetivos del tiempo de los usuarios finales, el valor subjetivo del tiempo de los portadores y la capacidad del terminal respectivo. A

excepción de éste último, los demás términos corresponden a parámetros exógenos del problema, por lo que se tiene que la expresión corresponde a una función que depende tan sólo de la capacidad del terminal.

Una vez más se observa que la ecuación 3.16 sólo depende de las variables P_h y K_h , determinantes del equilibrio del subjuego superior. Con la determinación de las demandas derivadas de los terminales y reemplazando en las ecuaciones anteriores es posible establecer que tanto las tarifas de los usuarios (ecuaciones 3.9 y 3.10), la función de demora (ecuación 3.13) y la utilidad de los portadores (ecuación 3.14) dependen finalmente de los precios y las capacidades de los terminales, P_h y K_h .

Con esto se tiene completamente resuelto los niveles inferiores del problema, restando sólo el nivel superior. En este la utilidad de un agente privado queda determinada por la siguiente función

$$\pi^h(P_0, P_1, K_0, K_1) = Q_h(\bar{P}, \bar{K})P_h - m_h K_h \quad (3.19)$$

Ecuación donde se ha simplificado la notación a través de los términos \bar{P} y \bar{K} que corresponden al vector de precios y capacidades de los terminales respectivamente. De la observación de la expresión planteada se deduce que los ingresos corresponden nuevamente a la multiplicación del precio cobrado a los agentes inferiores, en este caso P_h , con la demanda del terminal, Q_h . Los costos de operación del terminal sólo corresponden al costo marginal de invertir en capacidad, donde m_h corresponde al costo marginal y K_h al nivel de capacidad elegida por el agente.

A diferencia de lo planteado por *Basso y Zhang (2007)*, el terminal privado considerado en este trabajo posee integración vertical con el único portador que opera en sus instalaciones. Esta se representa como la suma de las utilidades de los agentes integrados, en este caso, el terminal privado y el portador presente en el. De esta forma se deben redefinir la función objetivo del terminal privado respecto de lo planteado en *Basso y Zhang (2007)* en la forma siguiente

$$\xi_0(\bar{P}, \bar{K}) = \pi^0(\bar{P}, \bar{K}) + \phi^0(Q_0(\bar{P}, \bar{K}), Q_1(\bar{P}, \bar{K}), K_0) \quad (3.20)$$

Al reemplazar las ecuaciones 3.14 y 3.19 se puede observar que se cancelará el término $Q_1 \cdot P_1$. Esto se debe a que en el caso del terminal privado, el cobro por el uso del terminal al operador

corresponde a una transferencia interna y no a una transacción entre diferentes agentes, por tanto no es optimizable y se cancela de la función.

3.3 Resumen y Características del Modelo

El modelo utilizado posee tres niveles de estructura vertical. El nivel inferior está compuesto por los usuarios, quienes acuden a un determinado terminal para consumir un servicio de transporte. La modelación de los usuarios sigue un modelo de *Hotelling* espacial, donde a través de la utilidad es posible determinar las demandas de cada recinto en función del valor de las tarifas que cobren los portadores de dicho terminal. Los usuarios son homogéneos y se encuentran distribuidos uniformemente a lo largo de la ciudad. La homogeneidad tiene su expresión en el valor subjetivo del tiempo, constante para todos y capturado a través de α .

El nivel de los portadores se utiliza como función de pago la utilidad del agente. Resulta de importancia remarcar la existencia de costos marginales constantes al interior de cada terminal. Del mismo modo los portadores poseen homogeneidad al interior de cada terminal, lo que se captura mediante un valor subjetivo del tiempo diferente para cada recinto. En este nivel se introduce en el problema la función de demora, útil para definir el nivel de servicio y que afecta los costos de los portadores y usuarios. La forma funcional elegida requiere que se revise el resultado final para comprobar que la solución sea interior o no.

En el nivel de los terminales se observa que los costos de inversión en capacidad son constantes para cada terminal, pero pueden diferir entre sí.

Al revisar la formulación del modelo y la definición de los escenarios se puede observar que éste aumenta en complejidad conforme se van resolviendo los distintos niveles de estructura vertical. Esto se debe a que niveles superiores utilizan resultados de equilibrio de los niveles inferiores, generando largas expresiones que aumentan la complejidad del problema que se busca desarrollar. Un ejemplo que gráfica este punto se ve en la introducción de las ecuaciones g_0 y g_1 (ecuaciones 3.16 y 3.17). Estas permiten separar variables y parámetros de las expresiones de demanda para cada terminal, lo cual permite visualizar mejor la expresión obtenida.

Sin embargo las principales dificultades provienen del carácter no lineal del modelo. Al observar las expresiones desarrolladas en el capítulo 3.2 es posible concluir que todas las variables del problema quedan determinadas en función de los precios y las capacidades de ambos terminales. Mientras el carácter de los precios es siempre lineal, las capacidades se tornan no lineales debido

principalmente a la introducción de la función de demora en el nivel de los portadores, como se muestra en el punto 3.2, a partir de la ecuación 3.13 en adelante. Esta característica impide la resolución de esta variable, aún utilizando software de cálculo matemático.

Se consideraron para este trabajo dos formas posibles de resolución: Obtención de expresiones analíticas o el uso de simulación numérica. La primera de ellas tiene relación con la obtención de expresiones en forma analítica, las que sólo dependen de los parámetros del problema. La simulación en tanto busca establecer mediante el cálculo numérico valores de equilibrio para cada variable estudiada, las que pueden ser comparadas a través de escenarios o bien mediante un análisis de sensibilidad.

Las características de no linealidad de una de las variables de decisión utilizadas agotó las posibilidades a seguir mediante el camino del desarrollo analítico, por lo que la metodología de obtención de resultados apuntó a la simulación numérica de varios escenarios.

3.4 Definición de Escenarios: Funciones Objetivos Terminal Público

El principal análisis que se persigue busca determinar los diferentes efectos en las políticas económicas y variables de relevancia de los distintos agentes, una vez logrado el equilibrio. Para este se considerará que el terminal público puede actuar como un ente regulador de mercados modificando sólo su comportamiento económico. Esto es posible de lograr al asignar diferentes funciones objetivo.

Buscando generar una amplia gama de posibilidades se definieron un total de 5 escenarios, equivalentes a 5 funciones objetivos distintas para el terminal público, las que se denotarán ξ_{1j} , con j el escenario al que corresponde dicha expresión. El terminal privado mantendrá siempre su comportamiento de integración vertical y buscará maximizar la utilidad a través de los diferentes escenarios.

Asimismo se proponen 5 escenarios adicionales, que corresponden a los escenarios originales sujetos a tarificación de *Ramsey*. La tarificación de *Ramsey* busca que el agente pueda autofinanciar su operación. Estos escenarios serán denotados con el superíndice R .

Los escenarios a modelar son los siguientes:

- **Escenario 1:** Maximiza el bienestar de todos los consumidores finales

En este escenario el terminal público sólo considera el bienestar de los usuarios finales, evadiendo a portadores y terminales. Esto implica que tampoco toma en cuenta su propio bienestar. Las funciones objetivo del terminal público para este escenario se definen como

$$\max_{P_1, K_1} \xi_{11}(\bar{P}, \bar{K}) = ECT(Q_0(\bar{P}, \bar{K}), Q_1(\bar{P}, \bar{K})) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \max_{P_1, K_1} \xi_{11}^R(\bar{P}, \bar{K}) &= ECT(Q_0(\bar{P}, \bar{K}), Q_1(\bar{P}, \bar{K})) \\ \text{s.a. } \pi^1(\bar{P}, \bar{K}) &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Donde ECT representa el excedente del consumidor total. Estas no se obtienen en forma directa del trabajo de *Basso y Zhang (2007)* y requieren ser calculadas, situación que se desarrolla en el capítulo 3.4. Luego el problema que se debe resolver para obtener el equilibrio en estos escenarios esta dado por la ecuación siguiente

- **Escenario 2:** Maximiza el bienestar propio y de todos los consumidores finales

Este escenario representa una extensión del anterior, al agregar al bienestar de los consumidores finales las utilidades propias del operador público. Bajo este escenario no se considera el bienestar de los portadores que operan en el terminal público. Luego, las funciones objetivas se definen como

$$\max_{P_1, K_1} \xi_{12}(\bar{P}, \bar{K}) = ECT(Q_0(\bar{P}, \bar{K}), Q_1(\bar{P}, \bar{K})) + \pi^1(\bar{P}, \bar{K}) \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \max_{P_1, K_1} \xi_{12}^R(\bar{P}, \bar{K}) &= ECT(Q_0(\bar{P}, \bar{K}), Q_1(\bar{P}, \bar{K})) + \pi^1(\bar{P}, \bar{K}) \\ \text{s.a. } \pi^1(\bar{P}, \bar{K}) &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Donde es directo que la ecuación 3.24 es equivalente a la ecuación 3.22. Por tanto ambos escenarios deben derivar en resultados similares. Sin embargo esta conclusión no aplica al escenario 3.23, que es diferente a los otros dos señalados.

- **Escenario 3:** Comportamiento Egoísta. Maximización de utilidades.

En la literatura se conoce con este nombre al comportamiento de empresas públicas que buscan maximizar sus utilidades, tal como si se trataran de empresas netamente privadas. Luego la Función Objetivo del terminal público queda definida como

$$\max_{P_1, K_1} \xi_{13}(\bar{P}, \bar{K}) = \pi^1(\bar{P}, \bar{K}) \quad (3.25)$$

$$\max_{P_1, K_1} \xi_{13}^R(\bar{P}, \bar{K}) = \pi^1(\bar{P}, \bar{K})$$

$$s.a. \quad \pi^1(\bar{P}, \bar{K}) \geq 0 \quad (3.26)$$

- **Escenario 4:** Maximiza el bienestar de todos los agentes aguas abajo

Este escenario establece como objetivo la maximización de todos los agentes que participan del terminal público. Así sólo serán considerados los consumidores finales que acuden al terminal público, así como todos los portadores que operan en dicho lugar y las utilidades del operador del terminal. Las expresiones quedan todas en función de las variables P_h y K_h debido a que es posible reemplazar en las expresiones de aguas abajo los términos obtenidos en el equilibrio de los subjuegos aguas arriba, tal como ya se explicó anteriormente. Así se tiene

$$\max_{P_1, K_1} \xi_{14}(\bar{P}, \bar{K}) = EC_1(Q_0(\bar{P}, \bar{K}), Q_1(\bar{P}, \bar{K})) + \sum \phi^{li}(\bar{P}, \bar{K}) + \pi^1(\bar{P}, \bar{K}) \quad (3.27)$$

$$\max_{P_1, K_1} \xi_{14}^R(\bar{P}, \bar{K}) = EC_1(Q_0(\bar{P}, \bar{K}), Q_1(\bar{P}, \bar{K})) + \sum \phi^{li}(\bar{P}, \bar{K}) + (1 - \lambda)\pi^1(\bar{P}, \bar{K})$$

$$s.a. \quad \pi^1(\bar{P}, \bar{K}) \geq 0 \quad (3.28)$$

- **Escenario 5:** Comportamiento Tradicional. Maximización beneficio social.

Este escenario utiliza la función objetivo que tradicionalmente se le asigna a los operadores públicos. Esta consiste en maximizar el bienestar social de todos los agentes del mercado, incluyendo competidores. La función objetivo así definida toma la forma siguiente

$$\max_{P_1, K_1} \xi_{15}(\bar{P}, \bar{K}) = ECT(\bar{P}, \bar{K}) + \phi^0(\bar{P}, \bar{K}) + \sum \phi^{li}(\bar{P}, \bar{K}) + \pi^0(\bar{P}, \bar{K}) + \pi^1(\bar{P}, \bar{K}) \quad (3.29)$$

$$\max_{P_1, K_1} \xi_{15}^R(\bar{P}, \bar{K}) = ECT(Q_0(\bar{P}, \bar{K}), Q_1(\bar{P}, \bar{K})) + \phi^0(\bar{P}, \bar{K}) + \sum \phi^{li}(\bar{P}, \bar{K}) + \pi^0(\bar{P}, \bar{K}) + \pi^1(\bar{P}, \bar{K})$$

$$s.a. \quad \pi^1(\bar{P}, \bar{K}) \geq 0 \quad (3.30)$$

A lo anterior se debe de sumar un escenario de control, utilizado para validar la modelación en base a resultados conocidos de otros autores.

Como puede observarse, el escenario 1 bajo tarificación Ramsey deriva en el escenario 2 con tarificación Ramsey. Esto sucede debido a que al incluir la restricción de cubrir los costos se introduce en el primer escenario el término de la utilidad del terminal 1, resultando similar al escenario 2. Esto se comprobará más tarde con la simulación del modelo.

3.5 Cálculo de los excedentes del consumidor

Para definir completamente los escenarios se requiere calcular el excedente del consumidor para los usuarios de ambos terminales. En primer lugar es importante señalar que el excedente del consumidor total equivale a la suma de los excedentes parciales de los usuarios de cada terminal.

$$ECT = EC_0 + EC_1 \quad (3.31)$$

Del trabajo de *Basso y Zhang (2007)* es posible rescatar un valor del excedente del consumidor total. Sin embargo no se profundiza respecto del excedente del consumidor de los usuarios de cada terminal, por lo que debe ser calculada.

El excedente del consumidor puede ser obtenido como la integral de la función de utilidad entre todos los usuarios que consumen, lo que para este caso deriva en una expresión del siguiente tipo

$$EC = \int_A^B [U(v)] dv = \int_{z^l}^{z^r} \left[V - f_i(Q_0, Q_1) - \alpha D_i - \frac{t}{4} z \right] dz \quad (3.32)$$

Al observar la expresión anterior es posible establecer que la variable de integración sólo está presente en el costo de transporte, pues tanto Q_0 como Q_1 no dependen de la distancia z . Por otro lado se tiene que los límites de integración z^l , z^r y \tilde{z} dependen de Q_0 y Q_1 . Esto permite expresar el excedente del consumidor en términos de las demandas de cada terminal.

Utilizando las expresiones 3.4, 3.5 y 3.6 donde se establecen las ubicaciones de los usuarios finales e indiferente (z^l , z^r y \tilde{z}) y las determinadas en 3.2, 3.3, 3.9 y 3.10 es posible establecer las ecuaciones y determinar los excedentes de los consumidores del terminal privado y público.

3.5.1 Excedente del Consumidor para el Terminal 0

Considerando que los usuarios se encuentran uniformemente distribuidos a lo largo de la ciudad con densidad de un habitante por unidad de longitud, se puede establecer el bienestar de los usuarios de cada terminal según las ecuaciones siguientes

$$EC_0 = \int_0^{z^l} \left[V - f_0(Q_0, Q_1) - \alpha D_0 - \frac{t}{4} z \right] dz + \int_0^{\tilde{z}} \left[V - f_0(Q_0, Q_1) - \alpha D_0 - \frac{t}{4} z \right] dz \quad (3.33)$$

Resolviendo las integrales en la ecuación anterior se tiene que

$$-\frac{t}{8} |z^2|_0^{z^l} - \frac{t}{8} |z^2|_0^{\tilde{z}} + [V - f_0(Q_0, Q_1) - \alpha D_0]_0^{z^l + \tilde{z}} \quad (3.34)$$

Y luego, al reemplazar los límites de integración se tiene

$$-\frac{t}{8} (z^l)^2 - \frac{t}{8} (\tilde{z})^2 + (V - f_0(Q_0, Q_1) - \alpha D_0)(z^l + \tilde{z}) \quad (3.35)$$

De la ecuación 3.5 se puede observar que las expresiones correspondientes al último término del excedente del consumidor puede ser reemplazado por la expresión siguiente

$$\frac{t}{4} z^l = (V - f_0(Q_0, Q_1) - \alpha D_0) \quad (3.36)$$

Con lo que se tiene la expresión

$$-\frac{t}{8} (z^l)^2 - \frac{t}{8} (\tilde{z})^2 + \frac{t}{4} z^l (z^l + \tilde{z}) \quad (3.37)$$

Luego, si se reemplazan los valores de z^l y \tilde{z} establecidos en las ecuaciones 3.4 y 3.5 es posible determinar el valor del excedente de los consumidores del terminal 0 en función de Q_0 y Q_1 , tal como se muestra en la expresión siguiente

$$EC_0 = \frac{t}{4} (7Q_0^2 + 2Q_0Q_1 - Q_1^2 - 4Q_0 + 4Q_1 - 4) \quad (3.38)$$

3.5.2 Excedente del Consumidor para el Terminal 1

El excedente de este terminal puede ser calculado de manera análoga al anterior, sin embargo se debe hacer un alcance. Este dice relación con la conveniencia de centrar el problema en el origen

para simplificar los cálculos, con lo que será posible aplicar las mismas ecuaciones anteriores. Se tiene entonces que al plantear el problema equivalente, pero centrado en el origen

$$EC_1 = \int_0^{(1-\tilde{z})} \left[V - f_1(Q_0, Q_1) - \alpha D_1 - \frac{t}{4} z \right] dz + \int_0^{(z^r-1)} \left[V - f_1(Q_0, Q_1) - \alpha D_1 - \frac{t}{4} z \right] dz \quad (3.39)$$

Al resolver las integrales se obtiene la siguiente expresión

$$-\frac{t}{8} \left| z^2 \right|_0^{1-\tilde{z}} - \frac{t}{8} \left| z^2 \right|_0^{z^r-1} + [V - f_1(Q_0, Q_1) - \alpha D_1]_0^{(1-\tilde{z})+(z^r-1)} \quad (3.40)$$

Reemplazando los límites de integración y reordenando, se obtiene

$$\begin{aligned} & -\frac{t}{8}(1-\tilde{z})^2 - \frac{t}{8}(z^r-1)^2 + (V - f_1(Q_0, Q_1) - \alpha D_1)((1-\tilde{z})-0 + (z^r-1)-0) \\ & -\frac{t}{8}(1-\tilde{z})^2 - \frac{t}{8}(z^r-1)^2 + (V - f_1(Q_0, Q_1) - \alpha D_1)((1-\tilde{z}) + (z^r-1)) \end{aligned} \quad (3.41)$$

De la ecuación 3.6 se puede observar que las expresiones correspondientes el tercer término del excedente del consumidor puede ser reemplazado por la expresión siguiente

$$\frac{t}{4}(z^r-1) = (V - f_1(Q_0, Q_1) - \alpha D_1) \quad (3.42)$$

Con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} & -\frac{t}{8}(1-\tilde{z})^2 - \frac{t}{8}(z^r-1)^2 + \frac{t}{4}(z^r-1)((1-\tilde{z}) + (z^r-1)) \\ & -\frac{t}{8}(1-\tilde{z})^2 - \frac{t}{8}(z^r-1)^2 + \frac{t}{4}(z^r-1)(1-\tilde{z}) + \frac{t}{4}(z^r-1)^2 \\ & -\frac{t}{8}(1-\tilde{z})^2 + \frac{t}{8}(z^r-1)^2 + \frac{t}{4}(z^r-1)(1-\tilde{z}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Luego, si se reemplazan los valores de z^r y \tilde{z} establecidos en las ecuaciones 3.4 y 3.6 es posible determinar el valor del excedente de los consumidores del terminal 1 en función de Q_0 y Q_1 , tal como se muestra en la expresión siguiente

$$EC_1 = \frac{t}{4}(7Q_1^2 + 2Q_0Q_1 - Q_0^2 - 4Q_1 + 4Q_0 - 4) \quad (3.44)$$

Luego se tiene que la suma de 3.37 y 3.43 es

$$ECT = \frac{t}{2} (3Q_1^2 + 2Q_0Q_1 + 3Q_0^2 - 4) \quad (3.45)$$

Lo que es similar a la expresión establecida por *Basso y Zhang (2007)*. Si se observan las ecuaciones planteadas en 3.16 en donde se plantean las demandas derivadas de cada terminal Q_0 y Q_1 , se puede determinar que los excedentes del consumidor dependen finalmente de los precios y las capacidades de los terminales. De este modo se tiene que

$$EC_0(Q_0, Q_1) = EC_0(\bar{P}, \bar{K}) \quad (3.46)$$

$$EC_1(Q_0, Q_1) = EC_1(\bar{P}, \bar{K}) \quad (3.47)$$

$$ECT(Q_0, Q_1) = ECT(\bar{P}, \bar{K}) \quad (3.48)$$

4. Resolución del Modelo

4.1 Introducción

Este capítulo presenta los diferentes esfuerzos destinados a obtener la resolución del modelo planteado en el capítulo anterior. Estos pueden separarse en la obtención de los parámetros de simulación y la obtención de los valores de equilibrio.

Dada la complejidad desarrollada en la elaboración del modelo no es posible obtener expresiones analíticas para los variables de interés en equilibrio de *Nash-Cournot*. Esto requiere que los análisis económicos se realicen a través de simulación numérica, la que permite comparar los valores obtenidos en los distintos escenarios.

La utilización de valores adecuados para estos parámetros es de vital importancia debido a múltiples razones. En primer lugar permite anclar a la realidad el problema modelado, sin lo cual las conclusiones carecerían de aplicación práctica. En segundo lugar permite definir matemáticamente el problema, lo cual se debe a que la complejidad de los modelos hace que los espacios de solución factibles se vean reducido considerablemente.

Para la obtención de parámetros de simulación se estudió cuidadosamente el trabajo de *De Borger y Van Dender (2006)*. Este trabajo estudia los efectos en los niveles de servicio, precios y capacidad de un duopolio de Bertrand mediante simulación numérica. El enfoque busca determinar la incidencia de ciertos parámetros en las variables determinantes del juego. Es un modelo similar al que se busca estudiar en este trabajo, con la diferencia en que no posee estructura vertical, es competencia entre privados y el *timing* del juego es distinto. Además el trabajo de *De Borger y Van Dender* utiliza un duopolio de Bertrand, mientras el modelo planteado en este trabajo utiliza un duopolio de *Cournot*. Pese a las diferencias señaladas entre ambos modelos este resulta útil para definir el modelo que se busca plantear en este trabajo. La determinación de los parámetros a partir de valores validados en otro estudio permite establecer con suficiente confianza que los valores utilizados se corresponden con la realidad que se busca modelar.

Así, para obtener los valores de los parámetros de simulación se debe en primer lugar modificar el modelo planteado para este trabajo, de manera tal que busque replicar el trabajo de *De Borger y Van Dender*, Una vez homologado el modelo se resolverá analíticamente buscando determinar

las reglas de tarificación y capacidad de cada terminal. A través de estas expresiones se establecerán las comparaciones entre los parámetros de cada modelación, determinando así los valores a utilizar para cada parámetro.

4.2 Elección de Parámetros de Simulación

4.2.1 Modelación de De Borger y Van Dender

El modelo planteado por estos autores considera la existencia de dos instalaciones privadas y congestionables, que enfrentan demanda directamente de los consumidores. Este punto marca una diferencia con el modelo planteado en este trabajo debido a la ausencia de estructura vertical, situación que genera demandas indirectas a cada terminal. Se tiene además que cada instalación provee idénticos servicios a los usuarios. Luego se define la disposición a pagar marginal como

$$G = \alpha - \beta q = \alpha - \beta(q_A + q_B) \quad (4.1)$$

donde q_A , q_B corresponden al número de usuarios simultáneos en las instalaciones A y B respectivamente. Por otro lado se tiene que el precio generalizado que cada usuario enfrenta depende tanto del precio del servicio, p_A y p_B , como del costo en tiempo que cada usuario incurre. Al considerar la congestión del terminal como un cociente entre la demanda y la capacidad de cada instalación se tiene que el costo en tiempo de un usuario que concurre a A está dado por $\gamma \cdot q_A \cdot R_A$, donde R_A corresponde a la inversa de la capacidad del recinto A. De esta forma se tiene que el costo generalizado de los consumidores que acuden al recinto A está dado por la expresión

$$p_A + \gamma \cdot q_A \cdot R_A \quad (4.2)$$

donde la expresión para el recinto B se obtiene del reemplazo de los subíndices. Luego, los autores asumen que las soluciones serán interiores, lo que significa que los costos generalizados de ambas instalaciones son iguales a la disposición a pagar. Con esto se obtiene el sistema siguiente

$$\begin{aligned} G[q_A + q_B] &= p_A + \gamma \cdot q_A \cdot R_A \\ G[q_A + q_B] &= p_B + \gamma \cdot q_B \cdot R_B \end{aligned} \quad (4.3)$$

Donde la disposición a pagar se obtiene de la ecuación 4.1. Dado el sistema de ecuaciones es posible despejar las demandas de cada instalación, según se muestra en las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} q_A^r(p_A, p_B, R_A, R_B) &= \frac{\beta \cdot p_B + \alpha \cdot \gamma \cdot R_B - p_A(\beta + \gamma \cdot R_B)}{\gamma(\gamma \cdot R_A R_B + \beta(R_A + R_B))} \\ q_B^r(p_A, p_B, R_A, R_B) &= \frac{\beta \cdot p_A + \alpha \cdot \gamma \cdot R_A - p_B(\beta + \gamma \cdot R_A)}{\gamma(\gamma \cdot R_A R_B + \beta(R_A + R_B))} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Una vez establecidas las demandas se resuelve mediante *backward induction* el juego secuencial que plantean los autores. La primera de ellas dice relación con el equilibrio en capacidades, la segunda con equilibrio en precios.

Tomando el caso de la instalación A y dado que son agentes privados se define la función objetivo del operador.

$$\max_{p_A} \pi_A = p_A q_A - \frac{c_A}{R_A} \quad (4.5)$$

Donde c_A es el costo marginal de invertir en capacidad, y se asume constante. El caso para la instalación B es análogo al mostrado, donde sólo basta reemplazar los subíndices A por B.

Las demandas quedan determinadas por las ecuaciones planteadas en 4.4. Entonces planteando las condiciones de primer orden se obtienen las funciones de reacción para ambos terminales.

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{\beta \cdot p_B + \alpha \cdot \gamma \cdot R_B}{\gamma \cdot R_B + \beta} \\ p_B &= \frac{\beta \cdot p_A + \alpha \cdot \gamma \cdot R_A}{\gamma \cdot R_A + \beta} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Con lo que resolviendo el sistema se obtienen las reglas de tarificación, según se muestra a continuación

$$\begin{aligned} p_A &= q_A^r(\cdot) \cdot \left[\gamma \cdot R_A + \gamma \frac{\beta \cdot R_B}{\gamma \cdot R_B + \beta} \right] \\ p_B &= q_B^r(\cdot) \cdot \left[\gamma \cdot R_B + \gamma \frac{\beta \cdot R_A}{\gamma \cdot R_A + \beta} \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Las reglas de capacidad se derivan de la resolución de la primera etapa del juego. Aplicando las condiciones de primer orden respecto a las capacidades a la ecuación 4.5 se tiene

$$\frac{\partial p_A^{NE}}{\partial R_A} q_A^r(\cdot) + p_A^{NE} \frac{dq_A^r}{dR_A} + \frac{c_A}{R_A^2} = 0 \quad (4.8)$$

De donde es posible despejar la regla de capacidad del terminal A¹.

Para verificar que la reconstrucción del modelo señalado fuese adecuado se simuló un escenario, obteniéndose los mismos valores de salida que los señalados en el estudio.

4.2.2 Homologación del Modelo

El modelo homologado corresponde al modelo definido como base de este trabajo, pero modificado para reproducir lo planteado por *De Borger y Van Dender*. Para esto se deben redefinir ciertos aspectos de la modelación de modo tal que permitan comparar las diferentes modelaciones. Con esto será posible determinar los valores de los parámetros de modelación del modelo que se busca plantear en base a los parámetros utilizados en el modelo de *De Borger y Van Dender*.

En primer lugar se tiene que las variables de decisión del juego deberán estar definidas por los precios y las capacidades de los terminales. Esto significa llevar el juego desde una competencia de *Cournot* a una de *Bertrand*, tal como lo plantean los autores.

En segundo lugar se tiene que eliminar la estructura vertical. Para esto se considerará que las demandas que enfrentan los terminales no son derivadas, sino que directas, eliminando los dos niveles inferiores del problema.

Finalmente se requiere desarrollar un juego secuencial, donde en primer lugar se determinan los precios y luego las capacidades. En función de estas tres etapas se redefinen las diferentes expresiones determinadas en el capítulo 3. Dado que los niveles inferiores del problema no presentan interés, se debe centrar la atención en el nivel de los terminales. En este sentido las

¹ Se omite esta expresión debido a su extensión y a que no aporta a la consecución del objetivo. Esto responde al hecho de que sólo se utiliza como medio de control al reconstruir el modelo y no como medio de comparación entre modelos.

demandas que enfrentan estos agentes no sufren modificaciones en su estructura, quedando definidas como

$$\begin{aligned} Q_0(\bar{P}, \bar{K}) &= \frac{t(c_1 + P_1 - 2t - V) - g_1(c_0 + P_0 - 2t - V)}{g_0 g_1 - t^2} \\ Q_1(\bar{P}, \bar{K}) &= \frac{t(c_0 + P_0 - 2t - V) - g_0(c_1 + P_1 - 2t - V)}{g_0 g_1 - t^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sin embargo la ausencia de portadores requiere que se redefinan los valores de las funciones g_h . El camino para lograr esto consiste en hacer que el número de portadores tienda a infinito. Esto derivará en un terminal donde el mercado de los portadores se encuentra altamente atomizado, situación que busca replicar el caso de un proveedor que enfrenta demanda directa.

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} g_0 = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \frac{N_0 + 1}{N_0} \left(3t + a \frac{\alpha + \beta_0}{K_0} \right) \Rightarrow g_0 = \left(3t + a \frac{\alpha + \beta_0}{K_0} \right) \quad (4.10)$$

$$\lim_{N_1 \rightarrow \infty} g_1 = \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \frac{N_1 + 1}{N_1} \left(3t + a \frac{\alpha + \beta_1}{K_1} \right) \Rightarrow g_1 = \left(3t + a \frac{\alpha + \beta_1}{K_1} \right) \quad (4.11)$$

Luego, si se definen las funciones de pago para los terminales, asumiendo duopolio privado

$$\pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) = Q_0(\bar{P}, \bar{K})P_0 - m_0 K_0 \quad (4.12)$$

$$\pi^1(P_0, P_1, K_0, K_1) = Q_1(\bar{P}, \bar{K})P_1 - m_1 K_1 \quad (4.13)$$

Con lo que es posible determinar la función de reacción para los terminales 0 y 1. Esta queda determinada por la condición de primer orden al resolver la segunda etapa del juego, sin establecer el equilibrio

$$\frac{\partial \pi^0}{\partial P_0} = \frac{\partial Q_0}{\partial P_0} P_0 + Q_0 = 0 \quad (4.14)$$

Desarrollando la expresión y despejando el precio es posible obtener la función de reacción

$$P_0 = \frac{1}{2} \left(2t + V - c_0 + \frac{K_1 t (c_1 + P_1 - 2t - V)}{3K_1 t + a(\alpha + \beta_1)} \right) \quad (4.15)$$

4.3 Determinación de Parámetros de Simulación

Una vez realizada la homologación de los modelos se requiere establecer una relación que permita la comparación. Para esto se utilizarán las funciones de reacción de ambos modelos.

Si se toma la ecuación 4.15, se reordenan los términos y se multiplican por $(1/K_1)/ (1/K_1)$ es posible construir el término R_1

$$\frac{1}{2} \left(\frac{(2t + V - c_0)(3K_1t + a(\alpha + \beta_1)) + K_1t(c_1 + P_1 - 2t - V)}{3K_1t + a(\alpha + \beta_1)} \right) \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{(2t + V - c_0)(3t + a(\alpha + \beta_1)R_1) + t(c_1 + P_1 - 2t - V)}{3t + a(\alpha + \beta_1)R_1} \right) \quad (4.17)$$

Agrupando términos en forma conveniente es posible obtener una expresión reducida de la función de reacción

$$\frac{1}{2} \left(\frac{X_0 + X_1R_1 + tP_1}{Y_0 + Y_1R_1} \right) \quad (4.18)$$

Donde

$$\begin{aligned} X_0 &= t(4 \cdot t + 2 \cdot V - 3 \cdot c_0 + c_1) \\ X_1 &= (2t + V - c_0)a(\alpha + \beta_1) \\ Y_0 &= 3t \\ Y_1 &= a(\alpha + \beta_1) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si se compara con las obtenidas en 4.6 para el modelo de *De Borger y Van Dender* es posible establecer relaciones entre ambas funciones de reacción. Debe entenderse que las expresiones a lado derecho de la igualdad provienen del modelo de *De Borger y Van Dender*, el cual presenta ciertos alcances con algunos de los parámetros del modelo de *Basso y Zhang*. Debido a esto se diferenciaran durante este análisis utilizando un asterisco en aquellos parámetros que provengan del modelo.

$$X_0 \Rightarrow t(4 \cdot t + 2 \cdot V - 3 \cdot c_0 + c_1) = 0 \quad (4.20)$$

$$X_1 \Rightarrow (2t + V - c_0)a(\alpha + \beta_1) = \alpha^* \cdot \gamma^* \quad (4.21)$$

$$t = \beta^* \quad (4.22)$$

$$Y_0 \Rightarrow 3t = \beta^* \quad (4.23)$$

$$Y_1 \Rightarrow a(\alpha + \beta_1) = \gamma^* \quad (4.24)$$

La simple observación de las ecuaciones 4.20 a 4.24 permite establecer ciertas contradicciones entre los modelos comparados. El caso más directo se observa al comparar las ecuaciones 4.22 y 4.23, donde se observa que β^* está asociado con valores levemente diferentes entre sí. Sin embargo no se busca establecer valores precisos para cada parámetro, pues basta con acotar los parámetros dentro de un cierto orden de magnitud para validar.

Así, una vez comparado ambos modelos es posible establecer lo siguiente

1. El parámetro t se acotará a valores entre β^* y $\beta^*/3$.
2. De la ecuación 4.24 es directo que $a(\alpha + \beta_1) = \gamma^*$.
3. Lo anterior combinado con la ecuación 4.21 permite establecer que $(2t + V - c_0) = \alpha^*$
4. Por otro lado, de la formulación de ambos modelos es directo que $m_h = c_i^*$, siendo ambos los costos marginales de invertir en capacidad.
5. El valor de c_i , el costo marginal de los portadores, no es posible deducirlo de este análisis. Su determinación se basó en el trabajo de *Basso (2008)*, quién analiza los efectos de desregular un mercado aéreo mediante la simulación numérica.

Establecido los valores de t , c_i y m_h es posible determinar el valor de V a través de lo establecido en el punto 3. Los valores subjetivos del tiempo de los usuarios y aerolíneas (α y β_i respectivamente), junto con el parámetro asociado a la demora fueron establecidos a partir de lo planteado en *Basso (2008)* y lo establecido en el punto 2.

Tabla 1: Resumen de valores de parámetros utilizados en la modelación

t	V	a	α	β_0	β_1	c_0	c_1	m_0	m_1
0.5	15	0.3	5	5	5	1	1	1	1

Estos valores son ilustrativos y no tienen interpretación real, por lo que la asignación de unidades a cada uno de ellos carece de relevancia. Sin embargo, estos valores permiten que la simulación del próximo capítulo sea comparable a *De Borger y Van Dender (2006)* y *Basso (2008)*.

4.4 Metodología de Resolución

La resolución del modelo establecido se realizó con el apoyo del software *Mathematica*. La metodología de resolución consideró en primer lugar la construcción de archivos automatizados que requieran del mínimo de intervención manual. Esto permitió minimizar errores y realizar simulaciones numéricas en forma rápida. Sin embargo se requirió de un proceso largo de codificación, chequeo y corrección de errores y validación. La construcción de los archivos se realizó en función del número de portadores en el terminal público. Así, se tiene un archivo para cada número de portadores a simular. Se estableció además que cuatro valores distintos del número de portadores en el terminal público resultaban suficientes para estudiar la variación de los valores de equilibrio. Estos fueron establecidos en 1, 5, 10 y 20 portadores a simular. Esto generó un total de cuatro archivos base a simular, todos autos contenidos. Paralelamente se fueron construyendo archivos adicionales que permitieran desarrollar otras demostraciones o cálculos, como el excedente del consumidor o la construcción del escenario de control.

Como ya se indicó, en primer lugar se buscó desarrollar soluciones analíticas. El desarrollo de éstas arrojó que era posible resolver en casi todos los escenarios la variable precios, sin embargo las capacidades no entregaban resultados debido principalmente al carácter no lineal de esta. Luego de probar con resoluciones de juegos simultáneos y secuenciales sin éxito alguno, se estableció la simulación numérica como único camino de solución.

La automatización del programa se realizó en varios cuerpos. El primero de ellos contenía la definición de todos los parámetros a utilizar en la simulación. Se indicaba un título en forma previa que permitiese recordar en forma rápida el significado del parámetro.

En segundo lugar se definieron todas las funciones determinantes del problema. Estas debían ir en sentido ascendente de información para que todas quedasen bien definidas y no hubiesen pérdidas de expresiones.

El tercer cuerpo describía los diferentes escenarios, en lenguaje que permitiese su resolución numérica. Se agregó al final de cada escenario un sistema de extracción automática de datos, que

identificaba la solución factible de entre todas las que devolvía el software, señalaba su ubicación al interior del vector de soluciones y extraía las cuatro variables a una etiqueta única en el archivo que impedía pérdida de datos por sobre escritura. De existir más de una solución entregaba todos los vectores factibles, sin embargo sólo almacenaba el primero. Esto requirió que al final de cada simulación se chequeasen el número de soluciones factibles, para que en caso de existir diferencias se buscara el valor correcto. Esta búsqueda se hizo en base a chequeos de consistencia, como verificar que las soluciones fuesen interiores o bien que las capacidades de los terminales en equilibrio fueran positivas. Este criterio permitió establecer para todos los casos una única solución factible.

En un cuarto cuerpo se ubicó una tabla que permitía desplegar los datos en pantalla para visualizar cualquier error u omisión.

Finalmente se comandaba un archivo de salida Excel, en formato similar a la tabla desplegada. Los datos fueron tabulados y analizados utilizando este software.

5. Resultados y Discusión

5.1 Introducción

La simulación del modelo se realizó en base a las funciones de pago desarrolladas en el capítulo 3, para lo cual se utilizaron los parámetros establecidas en el capítulo 4. El proceso de simulación considera en primer lugar la construcción de un escenario de control, que tiene como finalidad la revisión en la construcción del modelo en el software de modelación.

En segundo lugar se desarrollará la simulación. Esta considera cinco escenarios iniciales que difieren entre sí por la definición de la función objetiva utilizada por el terminal público. Se suman a este proceso 5 escenarios alternativos que se derivan de los cinco iniciales, con la diferencia de que estos estén sujetos a cubrir costos. La definición de estos escenarios se realizó en el acápite 3.2.1. En forma adicional se realizaron diferentes simulaciones modificando el número de portadores del terminal público. Cada simulación consideró todos los escenarios, mientras la variable N_1 se estableció en 1, 5, 10 y 20, siendo esta el número de portadores operando en el terminal público.

Existen varios cuidados que se deben tener en cuenta a la hora de interpretar los resultados. En primer lugar se debe señalar que el formato de salida de las soluciones es vectorial, lo que se debe a la forma en que se codificó el problema y a la estructura del modelo. Las variables de decisión que determina la simulación corresponden al precio que el terminal cobra a los portadores y a la capacidad elegida, P_h y K_h respectivamente. El resto de índices relevantes se calculan en base a estos valores.

En segundo lugar se tiene el número de soluciones otorgado por la simulación. Dado que la simulación corresponde a una resolución numérica de las ecuaciones planteadas no existen soluciones analíticas que arrojen un número acotado de soluciones. Las metodologías de aproximación numérica que utiliza el software arrojan en general un alto número de soluciones – a priori- factibles, lo que hace necesario discriminar entre ellas. En primer lugar se debe discriminar entre todas las soluciones a aquellas que carecen de sentido físico para el problema planteado, lo que sucede con niveles de capacidad negativos. El caso de los precios no significa necesariamente una falta de sentido físico, ya que puede representar una relación inversa de flujo de dinero al planteado en el problema. Del mismo modo debe revisarse que las soluciones sean

interiores respecto de la demora, lo que dado las funciones establecidas equivale a decir que la demanda del terminal no supere a la capacidad del recinto. Realizado este procedimiento se encontró que en todos los escenarios se obtenía sólo una solución factible.

Dado el alto número de variables se estableció un archivo de salida en formato Excel, en el que se entregan todas las variables de decisión determinadas en la simulación junto con los demás índices y funciones que permiten definir completamente un escenario. Estas fueron consolidadas en un solo archivo para generar los análisis correspondientes.

El presente capítulo se concentra primeramente en una breve descripción del proceso de construcción del escenario de control. Seguidamente se presentará un resumen de las funciones más relevantes que definen cada escenario, de modo de facilitar la lectura de los resultados. Finalmente se muestran los resultados obtenidos en la simulación del problema. Esta se presentará en forma parcelada, buscando separar las variables relevantes del resto. Las tablas completas de cada simulación se pueden encontrar como parte de los Anexos.

5.2 Presentación de Resultados

5.2.1 Escenario Control

Para certificar la validez de las conclusiones se incluyó un escenario de control. Este consiste en implementar como parte de los análisis un caso estudiado previamente por otro autor de manera que al modelar sea posible observar el comportamiento de este escenario. Esto permite detectar errores, pues se tiene un modelo ya revisado.

Para este efecto se utilizó el modelo de *Basso y Zhang (2007)*, el que trata de un duopolio privado. Este modelo fue la base de construcción de este trabajo y sólo requiere que se redefinan las funciones de pago de los agentes operadores de los terminales.

$$\begin{aligned}\xi_{00}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) \\ \xi_{10}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^1(P_0, P_1, K_0, K_1)\end{aligned}\tag{5.1}$$

Donde el primer subíndice indica el terminal de referencia y el segundo el escenario en que se define dicha función, la que para el caso del escenario de control se denominará “0”. Como se observa además para este caso, las funciones objetivo de los terminales equivalen a las utilidades del operador. Estas se describen en detalle en el capítulo 3, ecuación 3.18.

El control se realizó mediante la comparación analítica del modelo. Para esto se reconstruyó a través del software las expresiones matemáticas derivadas en el modelo de *Basso y Zhang*. De esta forma se logró replicar expresiones como la regla de tarificación y expresiones de análisis relativas a la inversión en capacidad. Este procedimiento permitió establecer certezas sobre la validez del modelo, lo que permite proyectarlo sobre nuevos escenarios.

5.2.2 Resumen Funciones Relevantes por Escenario

Dado que los niveles inferiores del problema mantienen su estructura a través de los distintos escenarios, sólo se resumirá las funciones objetivos planteadas para el nivel superior, separadas por escenario de modelación. A partir de este punto se hará distinción entre los escenarios con y sin tarificación Ramsey, señalando con una ‘r’ aquel escenario sujeto a cubrir sus costos. Conviene recordar que el primer subíndice corresponde al denominador de terminal para el cual se define la función mientras el segundo corresponde al escenario de modelación.

- **Escenario 1**

$$\begin{aligned}\xi_{01}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) + \phi^0(P_0, P_1, K_0) \\ \xi_{11}(\bar{P}, \bar{K}) &= ECT(\bar{P}, \bar{K})\end{aligned}\quad (5.2)$$

- **Escenario 1r**

$$\begin{aligned}\xi_{01}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) + \phi^0(P_0, P_1, K_0) \\ \xi_{11}^R(\bar{P}, \bar{K}) &= ECT(\bar{P}, \bar{K}) - \lambda\pi^1(\bar{P}, \bar{K})\end{aligned}\quad (5.3)$$

- **Escenario 2**

$$\begin{aligned}\xi_{02}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) + \phi^0(P_0, P_1, K_0) \\ \xi_{12}(\bar{P}, \bar{K}) &= ECT(\bar{P}, \bar{K}) + \pi^1(\bar{P}, \bar{K})\end{aligned}\quad (5.4)$$

- **Escenario 2r**

$$\begin{aligned}\xi_{02}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) + \phi^0(P_0, P_1, K_0) \\ \xi_{12}^R(\bar{P}, \bar{K}) &= ECT(\bar{P}, \bar{K}) + (1 - \lambda)\pi^1(\bar{P}, \bar{K})\end{aligned}\quad (5.5)$$

- **Escenario 3**

$$\begin{aligned}\xi_{03}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) + \phi^0(P_0, P_1, K_0) \\ \xi_{13}(\bar{P}, \bar{K}) &= \pi^1(\bar{P}, \bar{K})\end{aligned}\quad (5.6)$$

- **Escenario 3r**

$$\begin{aligned}\xi_{03}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) + \phi^0(P_0, P_1, K_0) \\ \xi_{13}^R(\bar{P}, \bar{K}) &= (1 - \lambda)\pi^1(\bar{P}, \bar{K})\end{aligned}\quad (5.7)$$

- **Escenario 4**

$$\begin{aligned}\xi_{04}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) + \phi^0(P_0, P_1, K_0) \\ \xi_{14}(\bar{P}, \bar{K}) &= EC_1(\bar{P}, \bar{K}) + \sum \phi^{li}(\bar{P}, \bar{K}) + \pi^1(\bar{P}, \bar{K})\end{aligned}\quad (5.8)$$

- **Escenario 4r**

$$\begin{aligned}\xi_{04}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) + \phi^0(P_0, P_1, K_0) \\ \xi_{14}^R(\bar{P}, \bar{K}) &= EC_1(\bar{P}, \bar{K}) + \sum \phi^{li}(\bar{P}, \bar{K}) + (1 - \lambda)\pi^1(\bar{P}, \bar{K})\end{aligned}\quad (5.9)$$

- **Escenario 5**

$$\begin{aligned}\xi_{05}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) + \phi^0(P_0, P_1, K_0) \\ \xi_{15}(\bar{P}, \bar{K}) &= ECT(\bar{P}, \bar{K}) + \phi^0(\bar{P}, \bar{K}) + \sum \phi^{li}(\bar{P}, \bar{K}) + \pi^0(\bar{P}, \bar{K}) + \pi^1(\bar{P}, \bar{K})\end{aligned}\quad (5.10)$$

- **Escenario 5r**

$$\begin{aligned}\xi_{05}(P_0, P_1, K_0, K_1) &= \pi^0(P_0, P_1, K_0, K_1) + \phi^0(P_0, P_1, K_0) \\ \xi_{15}^R(\bar{P}, \bar{K}) &= ECT(\bar{P}, \bar{K}) + \phi^0(\bar{P}, \bar{K}) + \sum \phi^{li}(\bar{P}, \bar{K}) + \pi^0(\bar{P}, \bar{K}) + (1 - \lambda)\pi^1(\bar{P}, \bar{K})\end{aligned}\quad (5.11)$$

5.2.3 Selección de Escenarios Mandantes

Al construir el problema y definir los escenarios a través de las diferentes funciones objetivos no es posible prever comportamientos anómalos de algunas funciones. En el caso del escenario 1, luego de varios intentos de simulación fue posible observar que no existía convergencia en el valor de las variables de optimización al buscar el equilibrio del juego. Esto sucede a causa de la estructura que tiene el excedente total de los consumidores.

$$ECT(Q_0, Q_1) = \frac{t}{2}(3Q_1^2 + 2Q_0Q_1 + 3Q_0^2 - 4) \quad (5.12)$$

Es por esto que se analizó la función objetivo para este escenario, buscando determinar que no posee máximo. Para que una función posea máximo debe ser cóncava, para lo cual se requiere demostrar que el hessiano de la función es semidefinida negativa. Se define el hessiano para la función $\xi_{11}(\vec{Q}, \vec{K}) = ECT(\vec{Q}, \vec{K})$ como sigue

$$H(\xi_{11}(P_0, P_1, K_0, K_1)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_{11}}{\partial P_1^2} & \frac{\partial \xi_{11}}{\partial P_1 \partial K_1} \\ \frac{\partial \xi_{11}}{\partial K_1 \partial P_1} & \frac{\partial \xi_{11}}{\partial K_1^2} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

de la determinación analítica del hessiano a partir de la ecuación anterior, se establece que este es simétrico, donde los valores de la diagonal son los de mayor interés para determinar el signo de la matriz. Si se analiza el primer elemento de la diagonal,

$$\frac{\partial \xi_{11}}{\partial P_1^2} = \frac{(54 + 51K_0 + 12.375K_0^2)K_1^2}{(36 + 18K_1 + K_0(18 + 8.75K_1))^2} \quad (5.14)$$

es posible observar que este siempre es positivo, ya que las capacidades no pueden ser negativas. Con este resultado se demuestra que la matriz no puede ser semidefinida negativa, y por tanto la función objetivo no posee máximo y el problema planteado en este escenario no tendrá solución interior. Esto puede explicarse por el hecho de que la función no impone restricciones para el crecimiento si la capacidad crece y el precio baja constantemente.

Con esta característica el escenario no puede ser modelado, lo que obliga al escenario 1 a utilizar tarificación de Ramsey para poder ser resuelto.

La existencia de escenarios “normales” y “de Ramsey”, o “no tarificados” y “tarificados” no busca duplicar la cantidad de escenarios a modelar, sino establecer un criterio de cubrir costos para aquellos casos en que el óptimo obliga al terminal público a generar utilidades negativas. Así, de los 10 escenarios previamente definidos sólo deben quedar cinco, donde para cada caso se deberá elegir el caso *normal* o el caso *Ramsey*. La tabla siguiente determina los ingresos de los terminales público y privado para los nueve escenarios aún factibles. A partir de estos datos es posible determinar la función dominante para cada escenario.

Tabla 2: Utilidades de los terminales para los distintos escenarios y número de portadores en terminal público

Escenario	Terminal	N1 = 1	N1 = 5	N1 = 10	N1 = 20
1r	Privado	-11.575	-10.8798	-10.666	-10.534
	Público	0.000	0.0000	0.000	0.000
2	Privado	-11.874	-11.0237	-10.609	-10.319
	Público	4.033	2.1595	-0.886	-3.477
2r	Privado	-11.575	-10.8798	-10.666	-10.534
	Público	0.000	0.0000	0.000	0.000
3	Privado	-12.134	-12.2856	-12.300	-12.305
	Público	5.530	12.0822	13.694	14.632
3r	Privado	-11.533	-10.8435	-10.632	-10.502
	Público	0.000	0.0000	0.000	0.000
4	Privado	-8.105	-8.5935	-8.709	-8.775
	Público	-173.332	-59.5505	-45.357	-38.266
4r	Privado	-11.533	-10.8435	-10.632	-10.502
	Público	0.000	0.0000	0.000	0.000
5	Privado	-9.328	-9.9213	-10.061	-10.141
	Público	-86.108	-18.6496	-10.251	-6.058
5r	Privado	-11.529	-10.8398	-10.629	-10.499
	Público	0.000	0.0000	0.000	0.000

Como se puede observar de la tabla anterior, el terminal público genera pérdidas en casi todos los escenarios, a excepción del escenario 3. Esto resulta lógico pues este escenario representa el comportamiento egoísta al comportarse el terminal público como privado. Se observa además que en el caso del escenario 2 este genera utilidades que decrecen a medida que aumenta el número de portadores en el terminal público. Esta situación lleva a requerir tarificación de Ramsey para este escenario cuando N_1 es superior a 10 portadores. En el caso de los escenarios 4 y 5 se observa que se generan pérdidas en todos los casos. Los escenarios dominantes se muestran en la tabla siguiente

Tabla 3: Selección de escenarios dominantes

Nº Portadores	1	5	10	20
Escenario 1	1r	1r	1r	1r
Escenario 2	2	2	2r	2r
Escenario 3	3	3	3	3
Escenario 4	4r	4r	4r	4r
Escenario 5	5r	5r	5r	5r

Como un modo de recordar que el escenario 2 posee funciones dominantes con y sin tarificación de Ramsey será denominado a partir de ahora como “2*”.

5.2.4 Precios y Cantidades de Equilibrio

5.2.4.1 Variables de Decisión

El primer resultado de análisis debe realizarse sobre las variables de decisión, pues son estos valores lo que en definitiva determinará el resto del problema. A continuación se muestran los valores de salida para los precios cobrados por los terminales a los operadores.

Tabla 4 – Precios terminal privado (P_0)

N_0	N_1	1r	2*	3	4r	5r
1	1	-1.741	-1.731	-1.708	-1.728	-1.725
1	5	-1.888	-1.889	-1.876	-1.875	-1.871
1	10	-1.915	-1.915	-1.913	-1.903	-1.900
1	20	-1.930	-1.930	-1.934	-1.918	-1.915

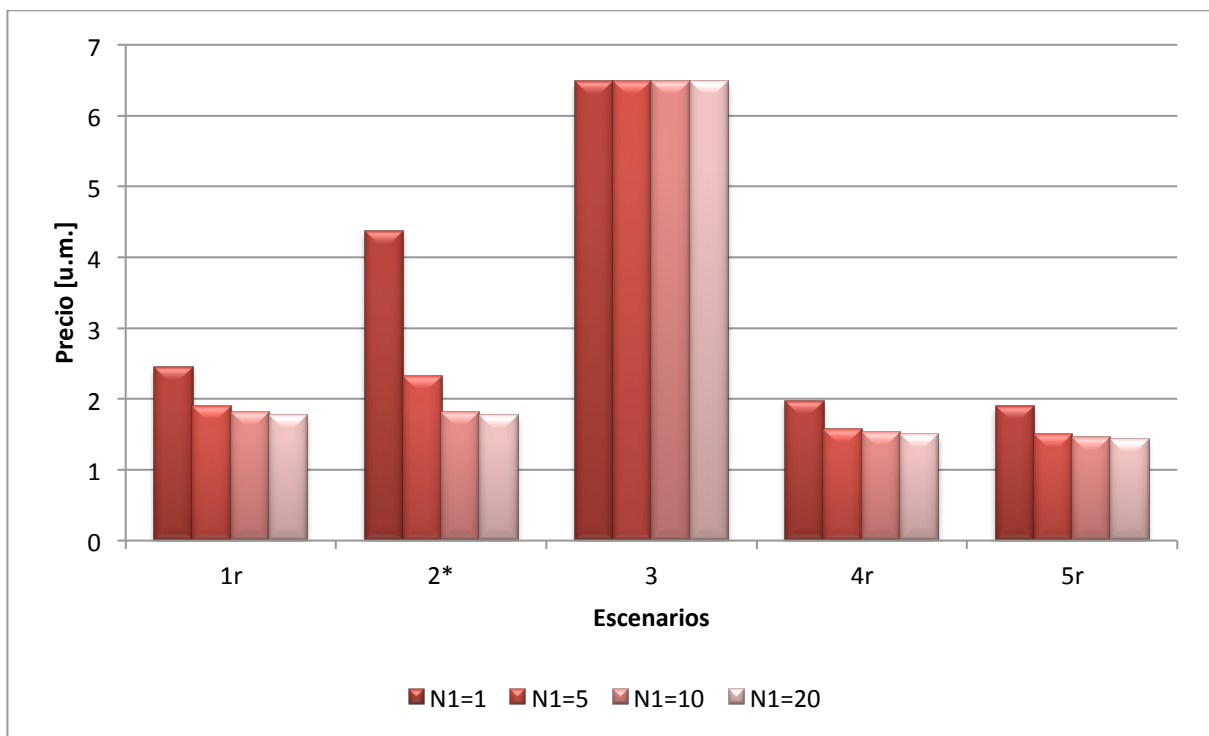
Tabla 5 – Precios terminal público (P_1)

N_0	N_1	1r	2*	3	4r	5r
1	1	2.449	4.378	6.481	1.973	1.901
1	5	1.897	2.324	6.482	1.578	1.504
1	10	1.817	1.817	6.483	1.528	1.454
1	20	1.775	1.775	6.483	1.504	1.430

Se observa que todos los precios del terminal privado son negativos, lo que equivale a un subsidio por parte del agente hacia su operador. Esto no debe de extrañar si se recuerda que ambos están integrados verticalmente, lo que significa que el cobro sólo es una transferencia interna. Se observa además que los valores se reducen a medida que aumenta el número de portadores en el terminal público.

Si nos concentramos en el terminal público es posible observar un comportamiento similar. Este posee una tendencia a bajar los precios conforme crece el número de portadores. Además se observa que en el caso de duopolio privado (escenario 3) prácticamente no existen variaciones de precio, encontrándose además los valores más alto de todos los escenarios.

Gráfico 1 - Variación de P_1 con el número de portadores, por escenario



Del mismo modo se observan las capacidades de los terminales a través de las tablas siguientes

Tabla 6 – Capacidades terminal privado (K_0)

N_0	N_1	1r	2*	3	4r	5r
1	1	5.152	5.301	5.458	5.155	5.157
1	5	4.626	4.685	5.242	4.629	4.632
1	10	4.497	4.497	5.190	4.500	4.503
1	20	4.422	4.422	5.159	4.424	4.428

Tabla 7 – Capacidades terminal público (K_1)

N_0	N_1	1r	2*	3	4r	5r
1	1	6.741	5.123	3.360	5.354	5.131
1	5	10.065	9.593	5.000	8.313	7.892
1	10	10.742	10.742	5.332	8.986	8.517
1	20	11.119	11.119	5.516	9.375	8.880

En ellas es posible observar un efecto cruzado en ambos terminales. Mientras el terminal público busca crecer, invirtiendo más en capacidad conforme crece el número de portadores en sus instalaciones, el terminal privado reduce su tamaño. La tasa de crecimiento del terminal público es superior que la tasa de reducción del terminal privado, ya que se observa que una variación cercana al 50% para el caso público versus una reducción del 20% aproximado en el terminal privado.

Se observa también que cuando el terminal público se comporta como privado las capacidades se reducen a cerca de la mitad de las observadas en los demás escenarios. Esto es indicador de que una competencia privada, con un operador integrado verticalmente produce bajos niveles de capacidad en el terminal no integrado, versus niveles superiores en el terminal integrado. Este efecto puede explicarse por el hecho de que al integrar a los portadores al nivel superior, este termina capturando los niveles de congestión, por lo que se esfuerza en reducirlos.

Al comparar ambas variables es posible entrever las estrategias de los terminales en el juego planteado. El terminal privado compite con niveles de capacidad similares al público si éste sólo posee un portador. Sin embargo al crecer la competencia en este último terminal se debe invertir en capacidad para no elevar los niveles de congestión. El terminal privado reacciona reduciendo

su capacidad, con lo que ambos deben reducir sus precios para poder seguir compitiendo. En el caso del terminal público esta reducción queda limitada por la restricción de no generar pérdidas, sin lo cual se tarificaría muy por debajo en el equilibrio.

5.2.4.2 Tarifas Consumidores Finales y Demanda de Terminales

Las tarifas de los consumidores finales corresponden al costo generalizado de consumir el servicio. Este se compone de un valor monetario sumado a un costo en tiempo que se deriva de la congestión. Corresponde al valor final pagado por el usuario.

Tabla 8 – Tarifas de Equilibrio usuarios terminal privado (f_0)

N₀	N₁	1r	2*	3	4r	5r
1	1	8.016	8.186	8.377	8.032	8.037
1	5	7.304	7.365	7.977	7.320	7.327
1	10	7.138	7.138	7.884	7.153	7.160
1	20	7.043	7.043	7.830	7.057	7.064

Al observar las tarifas del terminal privado se encuentran valores con baja variabilidad, cercanos a 7.5 para todos los escenarios. Al analizar por número de portadores se observa que los valores más altos se producen cuando el número de portadores en el terminal público es igual a 1. Esto puede deberse a la posibilidad de ejercer poder de mercado ante la falta de oferta en el terminal rival, situación que capta el agente. El comportamiento de las tarifas a medida que crece la competencia del terminal rival es a la baja, llegando a valores cercanos a 7.0 en casi todos los escenarios.

Analizando ambos escenarios se observa que las tarifas más altas se obtienen en el escenario 3. Este escenario es además el menos sensible a bajar las tarifas por efecto del aumento de portadores en el terminal público. Esto es de esperar en un duopolio privado como el modelado en este escenario, donde la inexistencia de regulación por parte de la empresa pública competidora deriva en mayor captura de excedentes por parte de los agentes, lo que se traduce en menor inversión y mayores precios.

Al observar las tarifas del terminal público se observa que estas bajan a medida que aumenta la competencia de portadores. Sin embargo las diferencias de tarifas son mucho mayores a las producidas en el terminal privado, donde se observaban disminuciones en torno al 15%. El

terminal público genera disminuciones de tarifas que fluctúan alrededor del 50%. La excepción a esto lo constituye el escenario 3, donde las reducciones son sólo del orden del 20%.

Tabla 9 – Tarifas de Equilibrio usuarios terminal público (f₁)

N₀	N₁	1r	2*	3	4r	5r
1	1	9.415	10.352	11.376	9.324	9.316
1	5	5.596	5.948	9.379	5.489	5.474
1	10	4.694	4.694	8.914	4.588	4.571
1	20	4.174	4.174	8.646	4.069	4.050

Por otro lado las demandas que enfrentan ambos terminales y las demandas totales se muestran en las tablas siguientes.

Tabla 10 – Demanda terminal privado (Q₀)

N₀	N₁	1r	2*	3	4r	5r
1	1	3.689	3.796	3.908	3.691	3.693
1	5	3.313	3.355	3.754	3.315	3.317
1	10	3.221	3.221	3.716	3.222	3.225
1	20	3.167	3.167	3.695	3.168	3.171

Tabla 11 – Demanda terminal público (Q₁)

N₀	N₁	1r	2*	3	4r	5r
1	1	2.752	2.092	1.372	2.713	2.699
1	5	5.305	5.056	2.635	5.268	5.247
1	10	5.913	5.913	2.935	5.880	5.857
1	20	6.265	6.265	3.108	6.233	6.211

Tabla 12 - Demanda total (Q = Q₀ + Q₁)

N₀	N₁	1r	2	3	4r	5r
1	1	6.442	5.888	5.280	6.405	6.392
1	5	8.618	8.411	6.389	8.583	8.564
1	10	9.134	9.134	6.651	9.102	9.082
1	20	9.432	9.432	6.802	9.402	9.381

De estas tablas se deduce que la demanda del terminal privado posee una variabilidad baja. Esta se mantiene en torno a valores entre 3 y 4, con tendencia a la baja a medida que aumentan los portadores en el terminal público. Por el contrario, las demandas del terminal público comienzan a crecer con el número de portadores.

Se observa además que en el caso de que el terminal público sólo posea un portador, las demandas serán superiores en el terminal privado. La situación se revierte una vez aumentan los portadores. En el caso de un duopolio privado (escenario 3), las demandas del terminal público son siempre menores que las del terminal privado. Esta preferencia por el terminal privado se debe en parte a que las tarifas de equilibrio del terminal público durante este escenario son mayores que la del privado.

Lo anteriormente expuesto se refuerza al observar la participación de mercado de ambos terminales.

Tabla 13 - Participación de mercado terminal privado

N₀	N₁	1r	2	3	4r	5r
1	1	0.57	0.64	0.74	0.58	0.58
1	5	0.38	0.40	0.59	0.39	0.39
1	10	0.35	0.35	0.56	0.35	0.36
1	20	0.34	0.34	0.54	0.34	0.34

Tabla 14 - Participación de mercado terminal privado

N₀	N₁	1r	2	3	4r	5r
1	1	0.43	0.36	0.26	0.42	0.42
1	5	0.62	0.60	0.41	0.61	0.61
1	10	0.65	0.65	0.44	0.65	0.64
1	20	0.66	0.66	0.46	0.66	0.66

5.2.5 Utilidades de los Agentes

Al observar la tabla 2 se puede ver que los valores de las utilidades son siempre negativas en el caso del terminal privado. Esto se debe a la integración vertical de los agentes, donde al analizar el terminal por separado se está ignorando el aporte económico del agente integrado, en este caso

el portador. Las tablas siguientes grafican la utilidad de los terminales y portadores, donde para el caso del terminal público se ha agregado una columna con el valor agregado de la utilidad para todos los portadores ($N_1 \phi_1$)

Tabla 15 - Utilidades de terminales y portadores, caso N1=1

Escenario	$N_1 \phi_1$	ϕ_1	π_1	$\Pi_1 + \phi_1$	ϕ_0	π_0	$\pi_0 + \phi_0$
1r	15.911	15.911	0.000	15.911	31.118	-11.575	19.543
2*	10.020	10.020	4.033	14.053	32.628	-11.874	20.754
3	5.091	5.091	5.530	10.621	34.250	-12.134	22.116
4r	16.614	16.614	0.000	16.614	31.147	-11.533	19.614
5r	16.674	16.674	0.000	16.674	31.169	-11.529	19.640

Tabla 16 - Utilidades de terminales y portadores, caso N1=5

Escenario	$N_1 \phi_1$	ϕ_1	π_1	$\Pi_1 + \phi_1$	ϕ_0	π_0	$\pi_0 + \phi_0$
1r	13.056	2.611	0.000	13.056	26.071	-10.880	15.191
2*	12.066	2.413	2.159	14.225	26.613	-11.024	15.590
3	4.375	0.875	12.082	16.457	32.026	-12.286	19.740
4r	13.836	2.767	0.000	13.836	26.094	-10.843	15.250
5r	14.013	2.803	0.000	14.013	26.126	-10.840	15.286

Tabla 17 - Utilidades de terminales y portadores, caso N1=10

Escenario	$N_1 \phi_1$	ϕ_1	π_1	$\Pi_1 + \phi_1$	ϕ_0	π_0	$\pi_0 + \phi_0$
1r	9.639	0.964	0.000	9.639	24.900	-10.666	14.234
2*	9.639	0.964	0.000	9.639	24.900	-10.666	14.234
3	3.473	0.347	13.694	17.167	31.496	-12.300	19.196
4r	10.379	1.038	0.000	10.379	24.919	-10.632	14.287
5r	10.583	1.058	0.000	10.583	24.951	-10.629	14.323

Tabla 18 - Utilidades de terminales y portadores, caso N1=20

Escenario	$N_1 \phi_1$	ϕ_1	π_1	$\Pi_1 + \phi_1$	ϕ_0	π_0	$\pi_0 + \phi_0$
1r	7.179	0.359	0.000	7.179	24.229	-10.534	13.695
2*	7.179	0.359	0.000	7.179	24.229	-10.534	13.695
3	2.826	0.141	14.632	17.458	31.190	-12.305	18.884
4r	7.887	0.394	0.000	7.887	24.246	-10.502	13.744
5r	8.105	0.405	0.000	8.105	24.278	-10.499	13.779

Como se puede ver, al asociar al terminal privado con el portador se logra generar una utilidad positiva, como es de esperarse para un terminal privado. Al observar sobre que agente aporta las utilidades, se tiene que esta se concentra en el portador. Esta situación es esperable toda vez que es el quién enfrenta a los usuarios, siendo el agente que logra extraer excedente del consumidor.

Como es de esperarse, el escenario 3 genera las mayores utilidades para los terminales, sin embargo para este escenario en particular los portadores del terminal público ven reducida sus utilidades respecto a los otros escenarios. Esto se debe a que el terminal genera utilidades a costa de los excedentes de los agentes que se encuentran aguas abajo. La misma situación se observa en el escenario 2 cuando el número de portadores en el terminal público es 1 y 5, situación en que no se requiere cubrir costos pues en el equilibrio el terminal público es rentable. Cuando el terminal público se ve obligado a cubrir sus costos, la captura de excedentes se realiza por parte de los portadores, quienes aumentan sus utilidades reduciendo los excedentes de los consumidores.

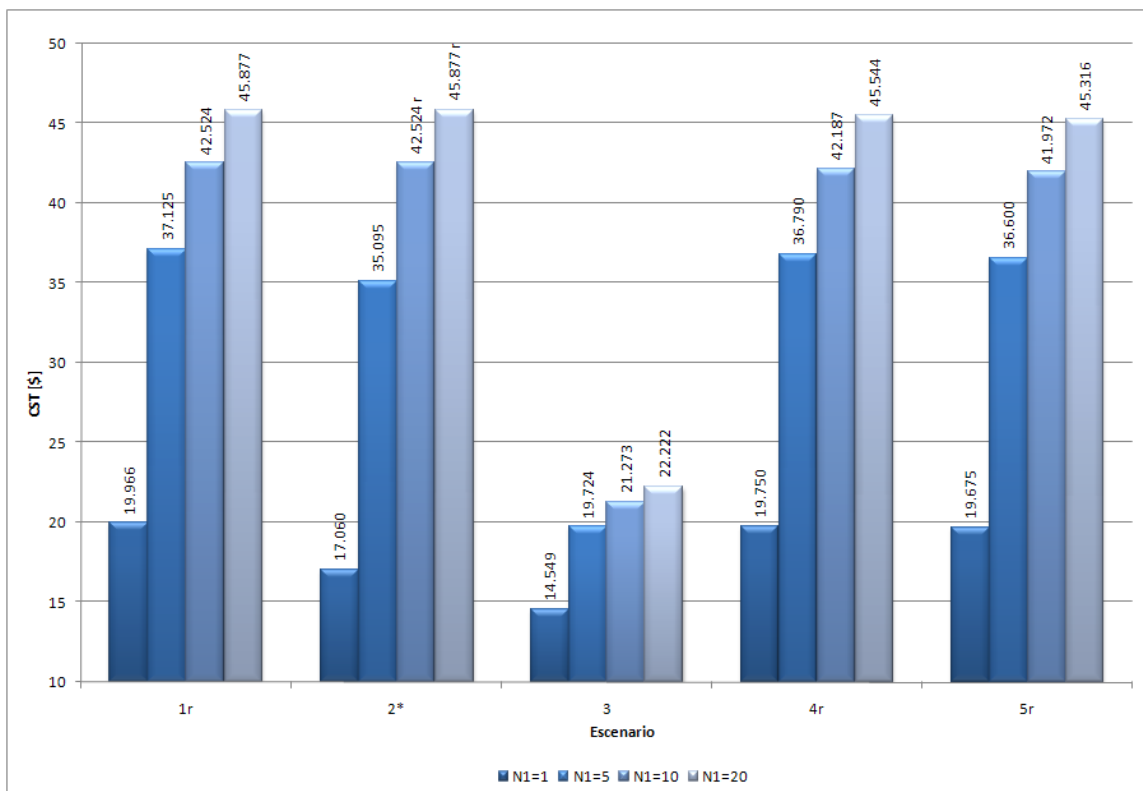
Si se centra el análisis en el escenario 3, es posible establecer que en todos los casos las utilidades del agente privado e integrado superaron a la suma de las utilidades de los portadores y el terminal público. Esto permite sugerir que la integración vertical es deseable pues genera mayores ganancias que la suma de las utilidades individuales. Esta ventaja se ve reducida a medida que crece el número de portadores en el terminal público, ya que una alta atomización del mercado redundaría en utilidades similares, lo que no hace deseable la integración.

Al observar la evolución de las utilidades respecto del número de portadores se observa que las utilidades del agente privado e integrado se van reduciendo conforme aumentan los portadores de terminal público. Por otro lado, para el último se observa un crecimiento de las utilidades bajo el escenario 3 a medida que crece la competencia de los portadores. Una excepción la marca el escenario 2, que tiene tendencia a la baja hasta hacer activa la restricción de cubrir los costos.

5.2.6 Bienestar de los Agentes

Es posible analizar el bienestar de los agentes a través de funciones definidas en el problema que muestran los beneficios de cada uno de ellos. En primer lugar se tiene el excedente del consumidor. El gráfico siguiente muestra el desarrollo del excedente total del consumidor por escenario en función de la variación del número de portadores.

Gráfico 2 – Excedente Total de los consumidores, según escenario



Como se puede observar con claridad, todos los escenarios muestran crecimientos del excedente total del consumidor a medida que crece el número de portadores del terminal público. Además este crecimiento parece ser a tasas decrecientes, sin embargo esto no puede ser establecido con claridad pues faltan simulaciones con un número de portadores suficientemente alto para establecer una tendencia. En términos globales se observan cuatro escenarios muy similares, en contraste con el escenario 3 que presenta los índices más bajos. Esto se debe a que en el caso de un duopolio privado buena parte del excedente de los consumidores es captado por los agentes aguas arriba quienes lo capitalizan como utilidades.

Tabla 19 - Excedente Total de los Consumidores (ECT)

N₀	N₁	1r	2*	3	4r	5r
1	1	19.966	17.060	14.549	19.750	19.675
1	5	37.125	35.095	19.724	36.790	36.600
1	10	42.524	42.524	21.273	42.187	41.972
1	20	45.877	45.877	22.222	45.544	45.316

De la tabla anterior se puede comprobar directamente que el escenario que entrega un mayor excedente del consumidor resulta ser el escenario 1r. Esto no representa novedad, ya que este escenario define como función objetivo del terminal público la maximización del excedente total de los consumidores. Por el contrario, el escenario de peor rendimiento resulta ser el duopolio privado modelado a través del escenario 3.

Resulta de interés observar el aporte de cada terminal al excedente total, a través de las tablas y gráficos siguientes se pretende clarificar este punto.

Tabla 20 - Excedente del consumidor para usuarios del terminal privado

N₀	N₁	1r	2*	3	4r	5r
1	1	12.533	12.696	12.704	12.518	12.518
1	5	10.975	11.244	12.877	10.987	11.003
1	10	10.313	10.313	12.845	10.329	10.349
1	20	9.879	9.879	12.813	9.897	9.919

Tabla 21 - Excedente del consumidor para usuarios del terminal público

N₀	N₁	1r	2*	3	4r	5r
1	1	7.433	4.364	1.846	7.232	7.157
1	5	26.150	23.850	6.848	25.803	25.597
1	10	32.212	32.212	8.428	31.858	31.623
1	20	35.998	35.998	9.409	35.647	35.397

Gráfico 3 - Excedente Total de los consumidores para el caso $N_1=1$

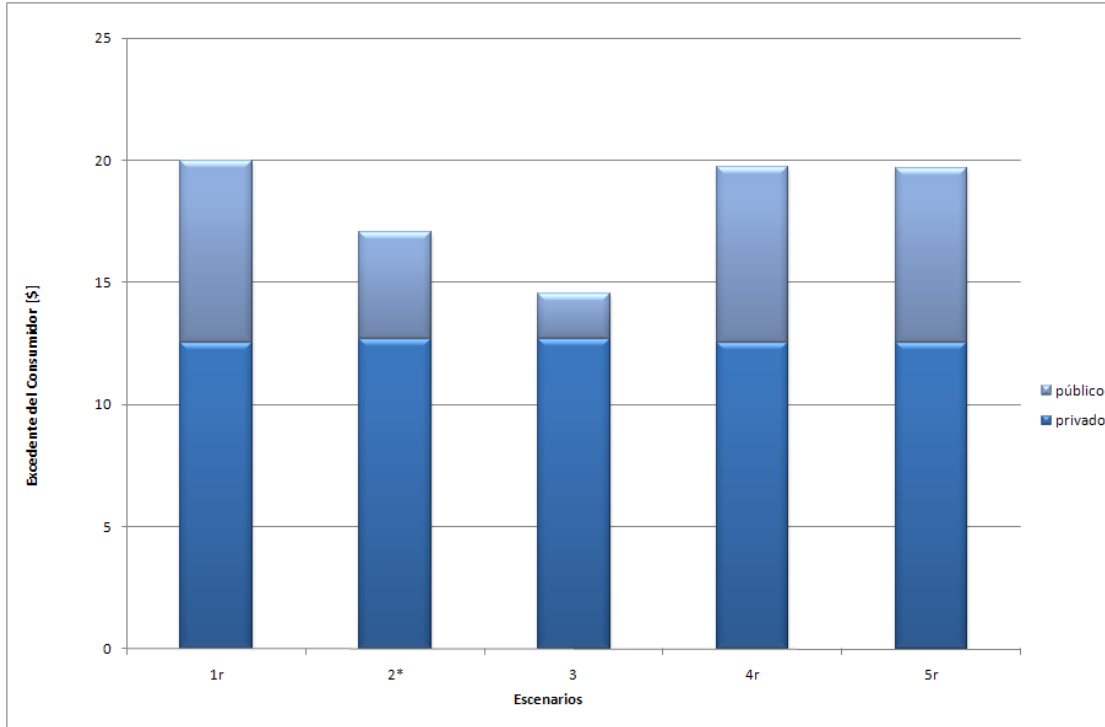


Gráfico 4 - Excedente Total de los consumidores para el caso $N_1=5$

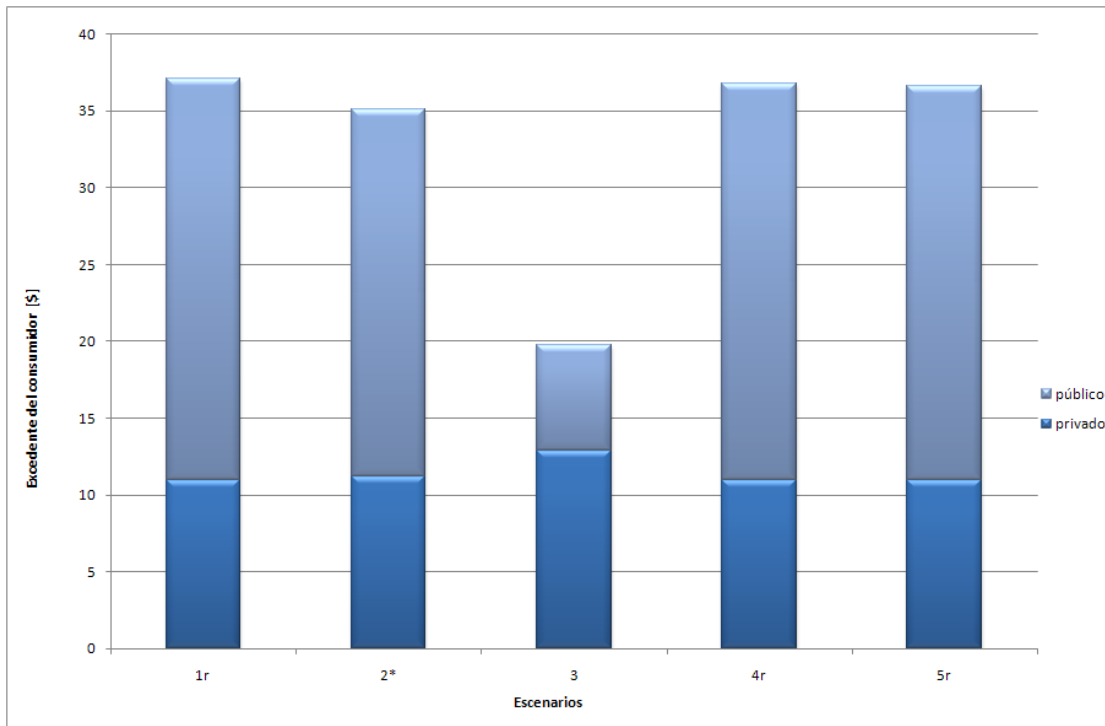


Gráfico 5 - Excedente Total de los consumidores para el caso $N_1=10$

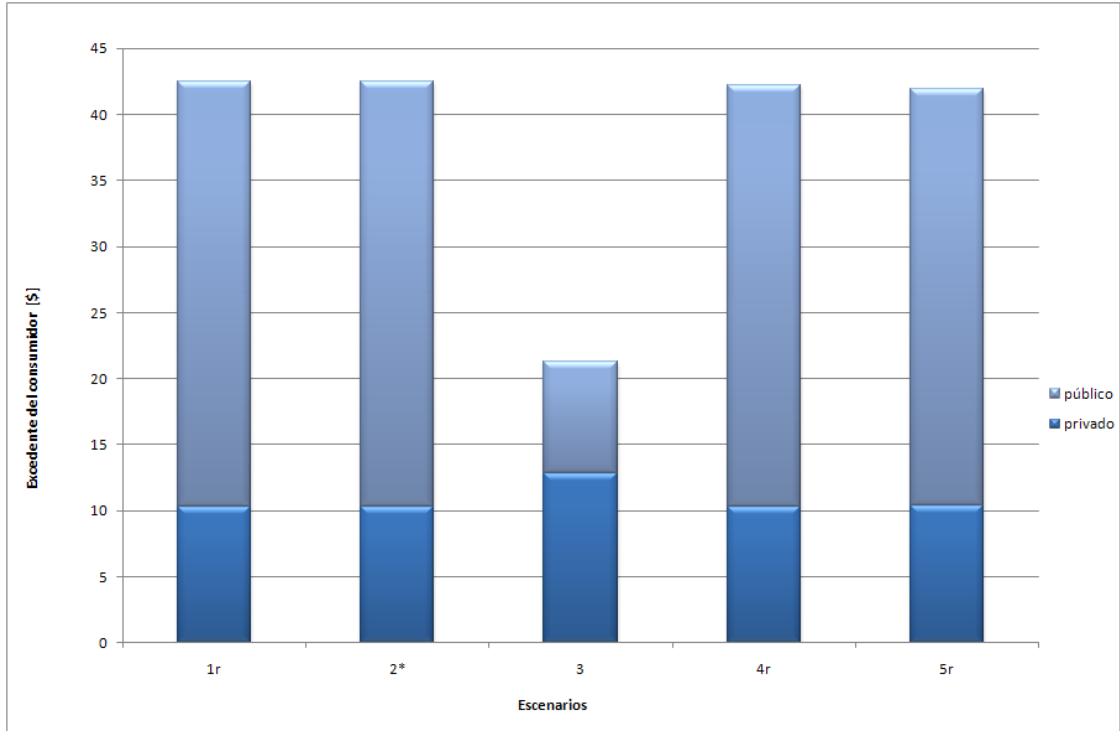
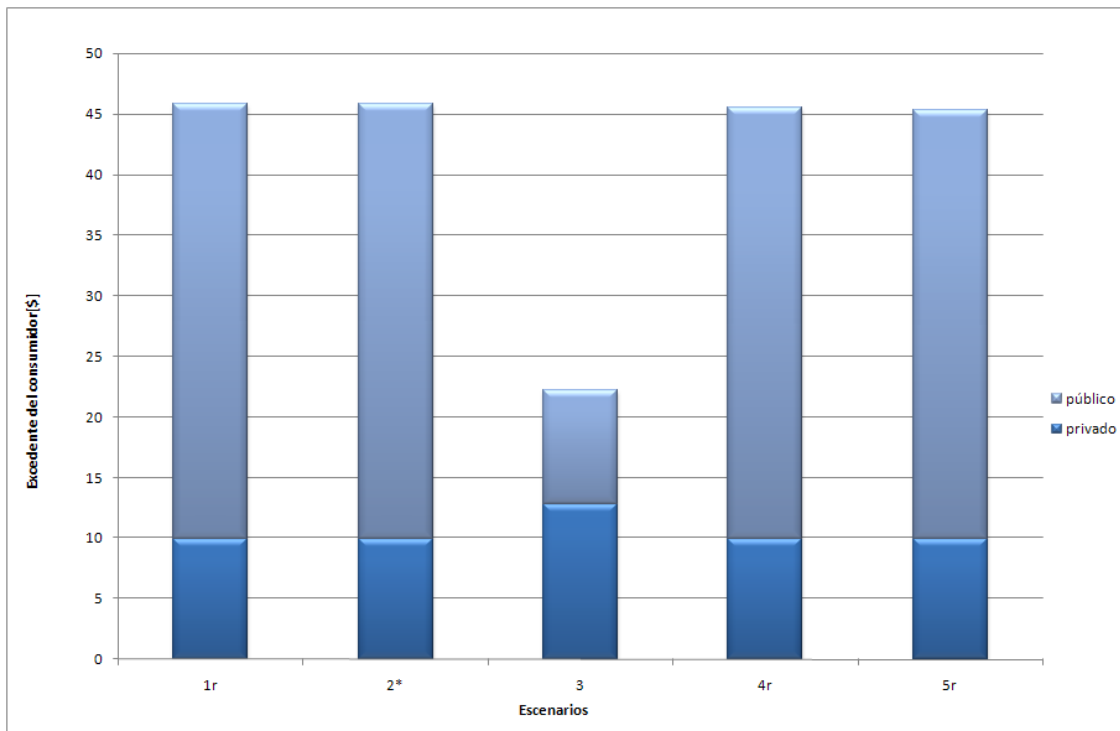


Gráfico 6 - Excedente Total de los consumidores para el caso $N_1=20$



Como se puede observar, la participación del excedente de los consumidores del terminal público comienza a aumentar, exclusivamente debido a un aumento del excedente de los consumidores del terminal público, ya que el excedente de los usuarios del terminal privado se mantiene prácticamente constante. Estas ganancias de excedente se producen por el aumento de usuarios y la baja de precios del terminal público, situación que ya se estableció en los puntos anteriores.

En el caso del bienestar social se observa un comportamiento similar al del excedente del consumidor. Para todos los escenarios es posible determinar una tendencia de crecimiento a tasas decrecientes respecto al número de portadores del terminal público. Sin embargo en este caso la tendencia de estancamiento parece ser más clara, pese a lo cual sería necesario establecer más simulaciones si se quiere ratificar esta tendencia.

Como es de esperar, el escenario que entrega los valores más altos de bienestar social resulta ser el escenario 5, pues la función objetivo definida para el terminal público busca maximizar el bienestar de todos los agentes del problema. Resulta interesante observar que las diferencias entre este escenario y los tres más cercanos son menores. Esto permite anticipar que cualquiera de los cuatro escenarios señalados (1r, 2*, 4r y 5r) puede satisfacer un objetivo de bienestar social, lo cuál permite desviar la medida a un segundo objetivo deseable.

Tabla 22: Bienestar Social por escenario, según número de portadores en terminal público

N₀	N₁	1r	2*	3	4r	5r
1	1	55.420	51.867	47.286	55.978	55.990
1	5	65.372	64.909	55.922	65.876	65.899
1	10	66.397	66.397	57.636	66.853	66.878
1	20	66.751	66.751	58.565	67.175	67.200

Gráfico 7 - Beneficio Social según número de portadores en terminal público

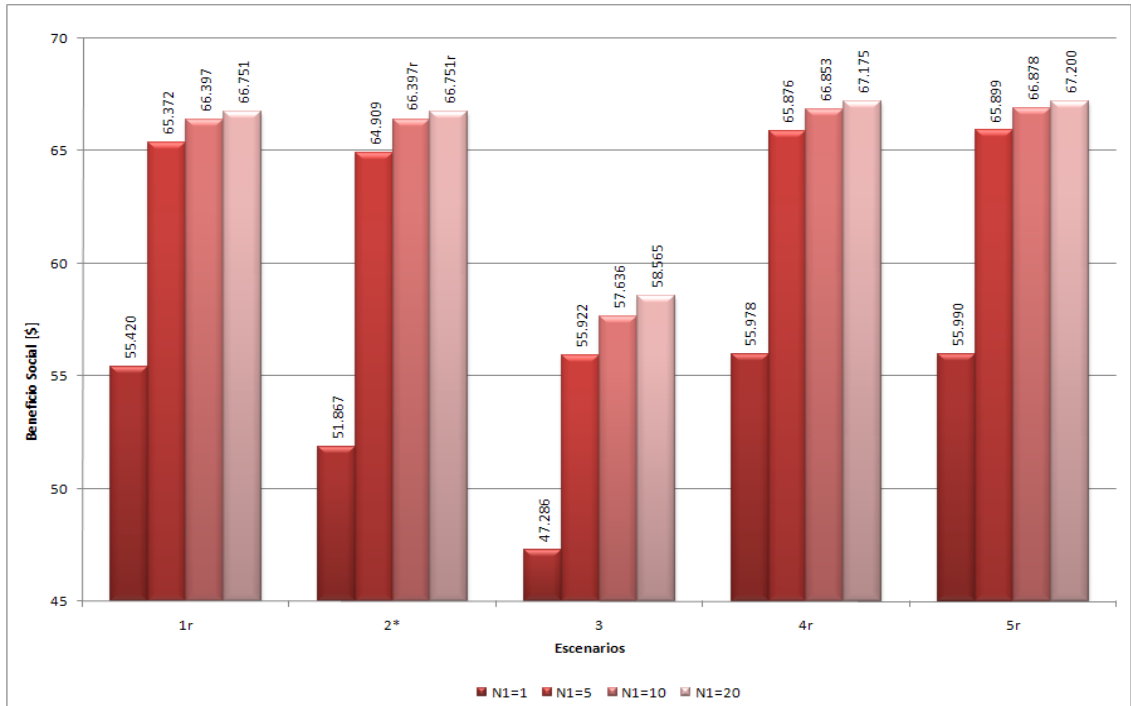


Tabla 23 - Desagregación del Beneficio Social por Escenario y número de portadores

N_1	Esc.	ECT	$N_1 \phi_1$	π_1	$\pi_0 + \phi_0$	BS
1	1r	19.966	15.911	0.000	19.543	55.420
	2*	17.060	10.020	4.033	20.754	51.867
	3	14.549	5.091	5.530	22.116	47.286
	4r	19.750	16.614	0.000	19.614	55.978
	5r	19.675	16.674	0.000	19.640	55.990
5	1r	37.125	13.056	0.000	15.191	65.372
	2*	35.095	12.066	2.159	15.590	64.909
	3	19.724	4.375	12.082	19.740	55.922
	4r	36.790	13.836	0.000	15.250	65.876
	5r	36.600	14.013	0.000	15.286	65.899
10	1r	42.524	9.639	0.000	14.234	66.397
	2*	42.524	9.639	0.000	14.234	66.397
	3	21.273	3.473	13.694	19.196	57.636
	4r	42.187	10.379	0.000	14.287	66.853
	5r	41.972	10.583	0.000	14.323	66.878
20	1r	45.877	7.179	0.000	13.695	66.751
	2*	45.877	7.179	0.000	13.695	66.751
	3	22.222	2.826	14.632	18.884	58.565
	4r	45.544	7.887	0.000	13.744	67.175
	5r	45.316	8.105	0.000	13.779	67.200

Gráfico 8 - Bienestar Social desagregado para el caso $N_1=1$

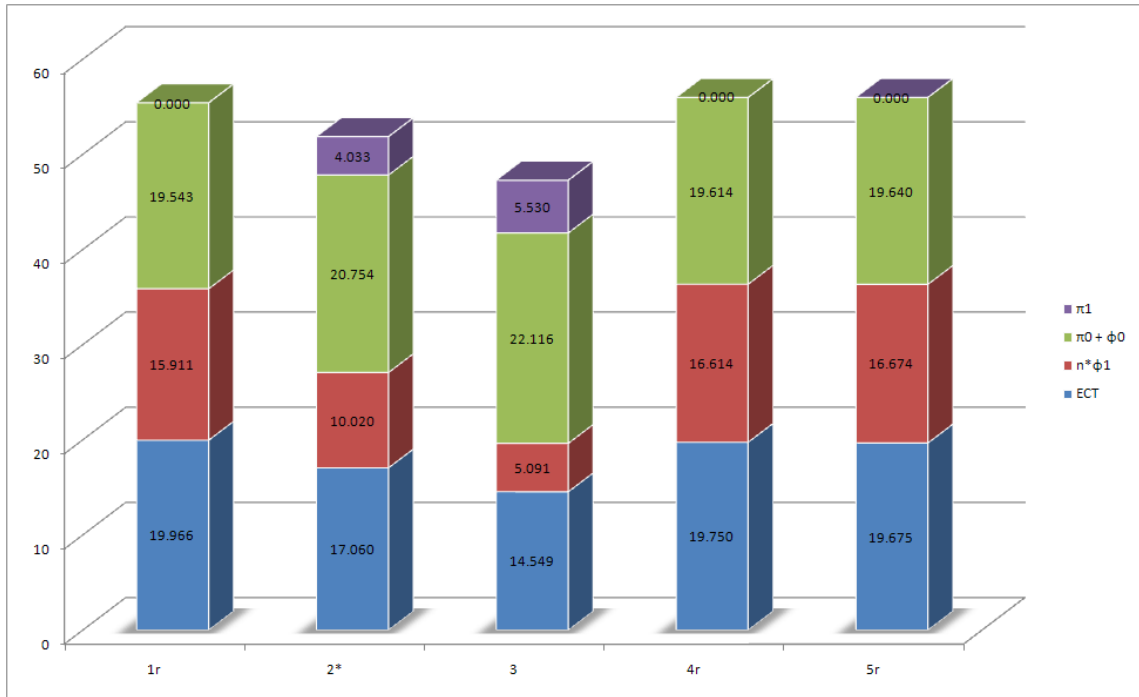


Gráfico 9 - Bienestar Social desagregado para el caso $N_1=5$

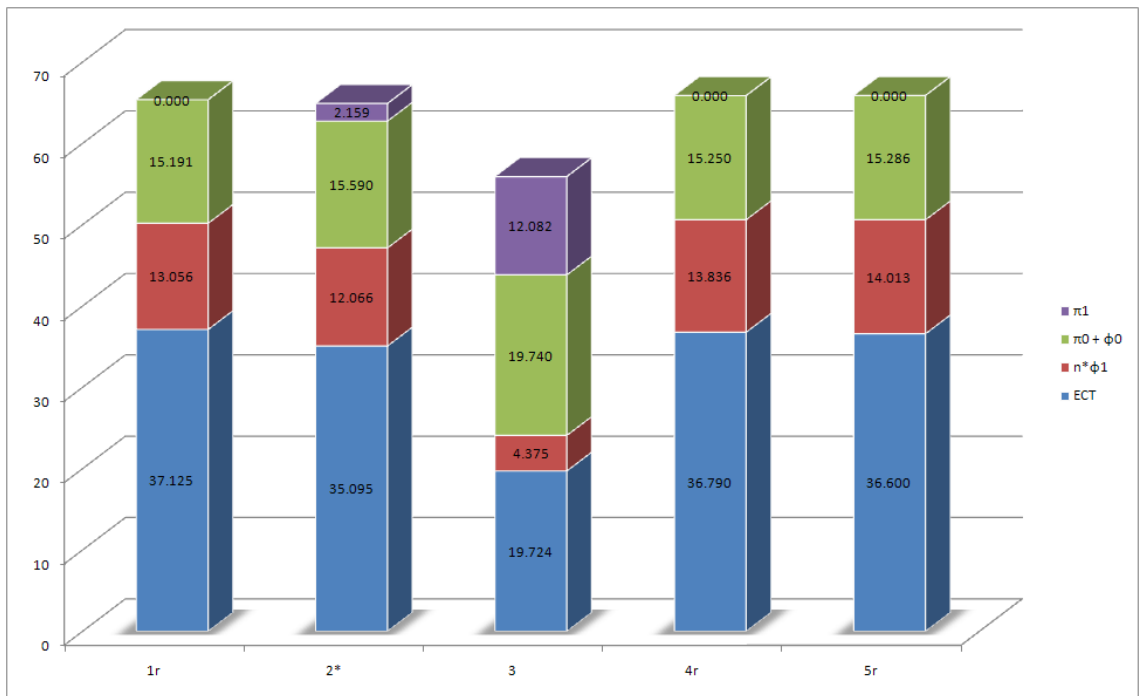


Gráfico 10 - Bienestar Social desagregado para el caso $N_1=10$

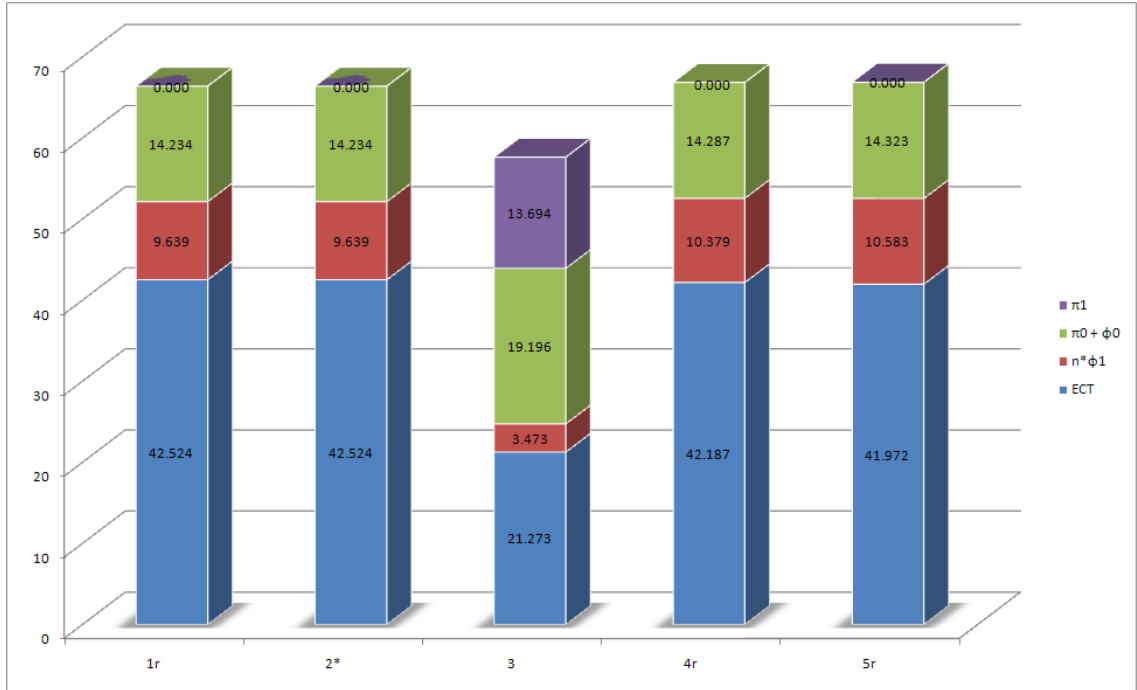
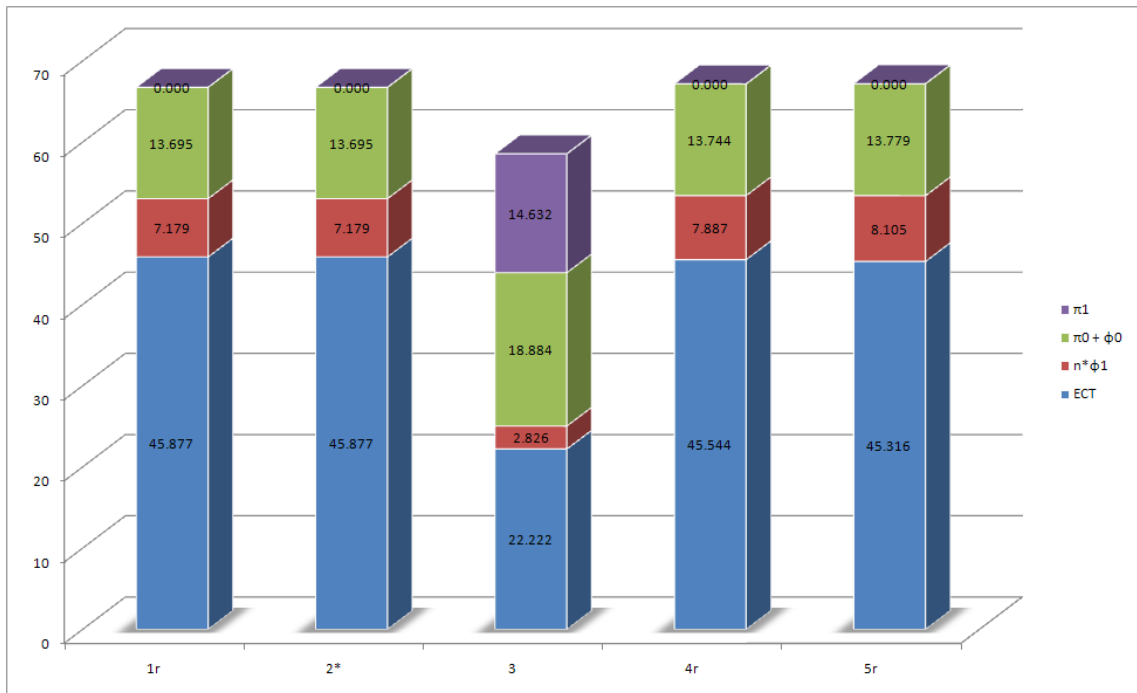


Gráfico 11 - Bienestar Social desagregado para el caso $N_1=20$



Al observar la evolución del bienestar social en forma desagregada es posible determinar algunos puntos importantes. Como ya se ha deducido, a medida que aumenta el número de portadores disminuye el aporte del agente privado integrado verticalmente y de los portadores del terminal público. Por otro lado aumenta el excedente del consumidor. En el caso de la utilidad del terminal público, estas disminuyen en el escenario 2*, pero aumentan en el escenario 3 debido a la acción del duopolio privado.

5.2.7 Demoras en los Terminales

Un elemento de importancia en el análisis de congestión es la medición de la calidad de servicio. Esta se captura a través del grado de congestión en cada terminal, que como se definió en la ecuación 3.12, es el cociente entre la demanda y la capacidad. Esta se muestra en las tablas siguientes para los escenarios dominantes, indicando además la cantidad de portadores presentes en cada terminal

Tabla 24 - Demoras en el terminal privado

N₀	N₁	1r	2*	3	4r	5r
1	1	0.2148	0.2148	0.2148	0.2148	0.2148
1	5	0.2148	0.2148	0.2148	0.2148	0.2148
1	10	0.2148	0.2148	0.2148	0.2148	0.2148
1	20	0.2148	0.2148	0.2148	0.2148	0.2148

En el caso de las demoras del terminal privado se tiene que son siempre constantes, para todos los escenarios e independiente del número de portadores del terminal público. Esto se observa pese a que los niveles de demanda y capacidad para cada caso difieren, como se puede observar en las tablas 6, 7, 10 y 11. En su estudio, *Basso y Zhang* determinaron que en el caso de un portador privado las demoras son constantes. Esto se deduce analíticamente de la regla de capacidad de un terminal privado, en cuyo caso el problema que enfrenta el agente esta dado por

$$\max_{P_0, K_0} \pi(\bar{P}, \bar{K}) = Q_0(\bar{P}, \bar{K})P_0 - m_0K_0 \quad (5.15)$$

De donde se puede determinar las reglas de inversión en capacidad a través de la condición de primer orden, resultando

$$K_0 = \left(\frac{a(\alpha + \beta_0)(N_0 + 1)}{m_0 N_0} \right)^{\frac{1}{2}} Q_0 \quad (5.16)$$

Reemplazando la expresión 5.16 en la expresión de demora definida en la ecuación 3.12 se tiene que

$$D(Q_0, K_0) = a \frac{Q_0}{K_0} = \left(\frac{a \cdot m_0 \cdot N_0}{(\alpha + \beta_0)(N_0 + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$

Y si se tiene que el número de portadores en el terminal privado es 1, esta se reduce a

$$D(Q_0, K_0) = a \frac{Q_0}{K_0} = \left(\frac{a \cdot m_0}{2(\alpha + \beta_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.18)$$

Donde se puede ver con claridad que las demoras de un terminal privado son constantes y sólo dependen de parámetros del propio terminal, entre ellos, los valores subjetivos del tiempo, costo marginal de inversión en capacidad. El número de portadores y el parámetro asociado a la demora. Este resultado se principalmente al carácter lineal de la función de demora elegida y a la existencia de costos marginales constantes, por lo que no debe hacerse extensible. En el caso de este trabajo la función objetivo del problema que enfrenta el terminal es más compleja, pues se encuentra integrado verticalmente. Esto impide determinar analíticamente una expresión como la señalada en la ecuación 5.17 y obliga demostrar el comportamiento de este numéricamente.

Para esto se cambio la función de demora, se consideró un mismo parámetro a , dependencia lineal con la demanda e inversamente proporcional con el cuadrado de las capacidades.

$$D^*(Q_0, K_0) = a \frac{Q_0}{K_0^2} \quad (5.19)$$

Y en forma similar para los usuarios del terminal 1. Esta modificación conserva gran parte del problema original, ya que sólo requiere redefinir las expresiones de g (ecuación 3.17) que permiten simplificar las expresiones de las demandas de los terminales.

$$g_0 = 2 \cdot \left(3t + a \frac{\alpha + \beta_0}{K_0^2} \right) \quad g_1 = \frac{N_1 + 1}{N_1} \left(3t + a \frac{\alpha + \beta_1}{K_1^2} \right) \quad (5.20)$$

Los resultados de estas modificaciones llevaron a reconstruir las tablas de demoras, según se muestra a continuación.

Tabla 25 - Demoras en el terminal privado con dependencia cuadrática de la capacidad

N₀	N₁	1r	2	3	4r	5r
1	1	1.0239	0.0738	0.0731	1.1528	N/R
1	5	0.0765	0.0764	0.0739	1.1495	N/R
1	10	0.0770	0.0770	0.0741	1.1485	N/R
1	20	0.0774	0.0774	0.0742	1.1478	N/R

La simbología *N/R* señala que el escenario no fue posible de resolver numéricamente, lo que se debe a la complejidad de la función objetivo 5, que maximiza el bienestar social. Además es posible observar valores de congestión sobre 1, lo que indica que las soluciones no son interiores y no existe equilibrio de Nash en los juegos señalados. Como se puede observar, los valores de demora cambian al inducir modificaciones en la estructura de la función. Pese a esto se puede observar que la similitud entre los escenarios 1 y 2r persiste, lo que siempre debe cumplirse ya que se debe a la forma en que se construyó el modelo.

Al revisar los datos en un sentido más económico se observa que los valores así obtenidos son notoriamente más bajos que los originales, lo que se debe a la mayor sensibilidad de la demora a cambios en las capacidades, ya que ahora son cuadráticas. Así, un pequeño incremento de esta variable reduce considerablemente la demora en los terminales, donde la magnitud del cambio depende de la parte de la curva en que se logre el equilibrio. Sin embargo el comportamiento de las demoras a medida que crece el valor de portadores en el terminal público no es claro. Mientras todos los escenarios aumentan su nivel de congestión conforme va en aumento el número de portadores en el terminal público, el escenario 4 adopta el efecto contrario. Esto no será considerado en profundidad, toda vez que las soluciones de este escenario no son interiores, con lo que no es posible establecer un equilibrio de Nash.

Las demoras resultantes en el equilibrio para el terminal público arrojan datos interesantes. En primer lugar se observa que éstas son siempre menores que el caso del terminal privado.

Tabla 26 - Demoras en terminal público

N₀	N₁	D1	1r	2	3	4r	5r
1	1	1	0.1225	0.1225	0.1225	0.1520	0.1578
1	5	5	0.1581	0.1581	0.1581	0.1901	0.1995
1	10	10	0.1651	0.1651	0.1651	0.1963	0.2063
1	20	20	0.1690	0.1690	0.1690	0.1995	0.2098

También se observa que éstas dependen del número de portadores presentes en el terminal, ya que como es de esperarse, los valores aumentan a medida que crece el número de éstos, lo que indica que a mayor número de portadores crece la congestión de manera óptima. Del mismo modo y como ya se adelantó en el capítulo 3.3 los escenarios 1 y 2r entregan valores similares de demora debido a que la tarificación de *Ramsey* en el escenario 1 introduce el término de la utilidad en la función objetivo. Sin embargo llama la atención que para estos mismos escenarios, en los casos donde N_1 es igual a 1 y 5, también se produzca la igualdad. Esto se debe a diferencias pequeñas en los resultados numéricos que no son apreciables con la cantidad de cifras significativas con que se presentan los resultados.

Sin embargo esto no explica la similitud entre los escenarios 1 y el escenario 3. Nuevamente se observa que los tres primeros escenarios existen valores de demora que no dependen ni de la demanda ni de la capacidad, por lo que se pueden considerar constantes. Para justificar este comportamiento se ha de recurrir a la misma estrategia anterior, donde se modificarán las funciones de demora y las funciones g_h . El resultado se presenta a continuación

Tabla 27: Demoras en el terminal público con dependencia cuadrática de la capacidad

N₀	N₁	1r	2	3	4r	5r
1	1	0.0149	0.0241	0.0379	0.0752	N/R
1	5	0.0163	0.0166	0.0328	0.0132	N/R
1	10	0.0159	0.0159	0.0321	0.0107	N/R
1	20	0.0157	0.0157	0.0318	0.0095	N/R

Y como se puede ver, los valores de los escenarios cambian, al igual como sucedió con el terminal privado. Al igual que en el terminal privado se observa una disminución de las magnitudes de los números, lo que se debe a la forma cuadrática de la función, lo que produce mayor sensibilidad a cambios en la capacidad. En este caso las demoras tienen a bajar a medida que aumenta el número de portadores, lo que puede deberse al hecho de que al internalizar la

congestión el terminal decide invertir en capacidad, lo que sumado a la sensibilidad de la función genera escenarios con niveles de congestión muy bajos. La excepción a esto lo constituye el escenario 1r, donde se observa que las demoras aumentan conforme crece el número de portadores en el recinto.

Al realizar un análisis comparativo de los niveles de servicio en ambos terminales se tiene que ambos mantienen niveles de congestión bajos, siendo siempre menor el terminal público. Al comparar la tabla 26 con la tabla 5 es posible establecer con claridad que los niveles de congestión más bajos se encuentran asociados a mayores precios por parte de los terminales a los portadores. Esto es de esperar pues el terminal debe tarificar adecuadamente si desea disminuir las demoras en sus instalaciones. Se observa además que las demoras del terminal público son similares en los escenarios 1r, 2 y 3, sin embargo los precios que los terminales cobran a los portadores como resultados de los equilibrios cambian. En este sentido el escenario 3 resulta ser el menos deseable pues deriva en precios elevados para los portadores y tarifas altísimas para los consumidores. Por el contrario, los escenarios 1r y 2 obtienen similares niveles de servicio a tarifas y precios más bajas. En el caso de los otros escenarios no existen diferencias sustanciales entre ambos terminales respecto a las demoras, situación que lleva a concluir que en términos de calidad de servicio en el equilibrio, ambos terminales no logran diferenciarse, sino que al contrario, obtienen niveles similares de congestión.

Más allá de que los niveles de demora se muestren constantes en el equilibrio del juego para el terminal privado, es de esperar que los niveles de servicio no sean altos pues al existir integración vertical el terminal y el operador internalizan de buena forma los efectos de la congestión.

6. Conclusiones

Finalizado el proceso de elaboración y simulación del modelo es posible establecer las principales conclusiones referentes a los valores obtenidos y el comportamiento de los agentes en equilibrio.

A nivel general llama la atención que la mayoría de los escenarios tuviesen su restricción de utilidades positivas activas. De los cinco escenarios sólo aquél que replicaba un duopolio privado generaba ganancias para el terminal. A éste se puede sumar el escenario 2, que generaba ganancias cuando el número de portadores era bajo (i.e. $N_1 \leq 5$). Esto permite establecer con propiedad que el problema modelado, en sus distintos enfoques, requiere de un subsidio para lograr alcanzar su equilibrio óptimo. En algunos casos los niveles a subsidiar son altos, en especial cuando mayor es el número de agentes que el terminal público busca resguardar.

Respecto de los precios que los terminales cobran a los operadores se observa que todos los precios del terminal privado son negativos, lo que equivale a un subsidio por parte del agente hacia su operador. Esto resulta lógico en agentes que están integrados verticalmente, lo que significa que el cobro sólo es una transferencia interna. Se observa además que los valores se reducen a medida que aumenta el número de portadores en el terminal público. La situación es similar si nos concentramos en el terminal público, donde es posible observar un comportamiento similar con tendencia a bajar los precios conforme crece el número de portadores. La salvedad se da en el caso del duopolio privado (escenario 3), donde prácticamente no existen variaciones de precio, encontrándose además los valores más altos de todos los escenarios.

Es destacable el alto valor que alcanza el precio del terminal 1 cuando el escenario modelado es el duopolio entre privados. Esta alza no se replica en los precios del terminal 0, que se mantienen al dentro de un rango acotado a través de todos los escenarios. Existe además una baja variabilidad de esta variable a medida que crece el número de portadores en el terminal privado, siendo para efectos prácticos constante.

Respecto a los valores de equilibrio de las capacidades de los terminales se observa un efecto cruzado entre ambos terminales. El terminal público busca crecer invirtiendo más en capacidad, lo que responde al crecimiento del número de portadores en sus instalaciones. Esto ayuda a

mantener niveles de servicios adecuados en las instalaciones. Por el contrario, mientras el terminal público crece con el número de portadores el terminal privado reduce su tamaño. Al comparar las tasas de crecimiento de ambos terminales se observa que la del terminal público es superior que la tasa de reducción del terminal privado, ya que se observa que una variación cercana al 50% para el caso público versus una reducción del 20% aproximado en el terminal privado. La reducción del terminal privado va de la mano con la pérdida de mercado. El terminal público crece en portadores mejorando su oferta a niveles de servicios buenos, lo que le da ventajas respecto de su competidor. Luego la reducción de tamaño es una reacción esperable para enfrentar la competencia.

En caso que el terminal público se comporte como privado las capacidades se reducen a cerca de la mitad de las observadas en los demás escenarios. Esto es indicador de que una competencia privada, con un operador integrado verticalmente produce bajos niveles de capacidad en el terminal no integrado, versus niveles superiores en el terminal integrado. Este efecto puede explicarse por el hecho de que al integrar a los portadores al nivel superior, este termina capturando los niveles de congestión, por lo que se esfuerza en reducirlos. La reducción de capacidad en el terminal no integrado se explica en el hecho de que ciertos niveles de congestión son deseables por el operador, toda vez que esto le permite tarifcar por congestión y mejorar utilidades. Luego en un duopolio privado se da el caso de un terminal privado integrado verticalmente más eficiente, de capacidad mayor al no integrado y demanda levemente superior. Por otro lado el terminal no integrado ve mayor congestión en sus instalaciones, además de mayores tarifas para los portadores y los consumidores finales.

En un análisis más amplio es posible observar las estrategias de los terminales en el juego planteado. El terminal privado compite con niveles de capacidad similares al público si éste sólo posee un portador, sin embargo al crecer la competencia en este último terminal se debe invertir en capacidad para no elevar los niveles de congestión. El terminal privado reacciona reduciendo su capacidad, con lo que ambos deben reducir sus precios para poder seguir compitiendo. En el caso del terminal público esta reducción queda limitada por la restricción de no generar pérdidas, sin lo cual se tarifcaría muy por debajo en el equilibrio.

Respecto de las tarifas del terminal privado se encuentran valores con baja variabilidad en todos los escenarios. Las tarifas más altas se producen cuando el número de portadores en el terminal público es igual a 1. Esto se debe a la posibilidad de ejercer poder de mercado ante la falta de

oferta en el terminal rival, situación que capta el agente. En este sentido un aumento de portadores en el terminal público genera tendencias a la baja en las tarifas.

Analizando ambos escenarios se observa que las tarifas más altas se obtienen en el escenario 3. Este escenario es además el menos sensible a bajar las tarifas por efecto del aumento de portadores en el terminal público. Esto es de esperar en un duopolio privado como el modelado en este escenario, donde la inexistencia de regulación por parte de la empresa pública competidora deriva en mayor captura de excedentes por parte de los agentes, lo que se traduce en menor inversión y mayores precios.

Al observar las tarifas del terminal público se observa que estas bajan a medida que aumenta la competencia de portadores. Sin embargo las diferencias de tarifas son mucho mayores a las producidas en el terminal privado, donde se observaban disminuciones en torno al 15%. El terminal público genera disminuciones de tarifas que fluctúan alrededor del 50%. La excepción a esto lo constituye el escenario 3, donde las reducciones son sólo del orden del 20%.

Al observar las utilidades de los agentes se puede ver que al asociar al terminal privado con el portador se logra generar una utilidad positiva, situación esperable para un terminal privado. Como es de esperar, es el portador quién extrae la mayor cantidad de recursos ya que es el agente que enfrenta en forma directa a los consumidores.

Consecuentemente con la lógica económica, el escenario 3 genera las mayores utilidades para los terminales. Esta ganancia se logra a costa de los portadores, quienes ven reducida sus excedentes. Esto se debe a que el terminal genera utilidades a costa de los excedentes de los agentes que se encuentran aguas abajo, a quienes sobretarififica por congestión. La misma situación se observa en el escenario 2 cuando el número de portadores en el terminal público es 1 y 5, situación en que no se requiere cubrir costos pues en el equilibrio el terminal público es rentable.

Si se centra el análisis en el escenario 3, es posible establecer que en todos los casos las utilidades del agente privado e integrado superaron a la suma de las utilidades de los portadores y el terminal público. Esto permite sugerir que la integración vertical es deseable pues genera mayores ganancias que la suma de las utilidades individuales. Esta ventaja se ve reducida a medida que crece el número de portadores en el terminal público, ya que una alta atomización del mercado aguas abajo redundaría en utilidades similares, lo que no hace deseable la integración.

Al observar la evolución de las utilidades respecto del número de portadores se observa que las utilidades del agente privado e integrado se van reduciendo conforme aumentan los portadores de terminal público. Por otro lado, para el último se observa un crecimiento de las utilidades bajo el escenario 3 a medida que crece la competencia de los portadores. La excepción la marca el escenario 2, que tiene tendencia a la baja hasta hacer activa la restricción de cubrir los costos.

Una conclusión importante resulta ser el hecho de que todos los escenarios muestran crecimientos del excedente total del consumidor a medida que crece el número de portadores del terminal público. Pese a que este crecimiento parece ser a tasas decrecientes, esto no puede ser establecido con claridad pues faltan simulaciones con un número de portadores suficientemente alto para establecer una tendencia. En términos globales se observan cuatro escenarios muy similares, en contraste con el escenario 3 que presenta los índices más bajos. Esto se debe a que en el caso de un duopolio privado buena parte del excedente de los consumidores es captado por los agentes aguas arriba quienes lo capitalizan como utilidades.

También se observa que la participación del excedente de los consumidores del terminal público respecto del excedente total de los consumidores comienza a aumentar, exclusivamente debido a un aumento del excedente de los consumidores del terminal público, ya que el excedente de los usuarios del terminal privado se mantiene prácticamente constante. Estas ganancias de excedente se producen por el aumento de usuarios y la baja de precios del terminal público, situación que ya se estableció en los puntos anteriores.

En el caso del bienestar social se observa un comportamiento similar al del excedente del consumidor. Para todos los escenarios es posible determinar una tendencia de crecimiento a tasas decrecientes respecto al número de portadores del terminal público. Sin embargo en este caso la tendencia de estancamiento parece ser más clara, pese a lo cual sería necesario establecer más simulaciones si se quiere ratificar esta tendencia.

Como es de esperar, el escenario que entrega los valores más altos de bienestar social resulta ser el escenario 5, pues la función objetivo definida para el terminal público busca maximizar el bienestar de todos los agentes del problema. Resulta interesante observar que las diferencias entre este escenario y los tres más cercanos son menores. Esto permite anticipar que cualquiera de los cuatro escenarios señalados (1r, 2*, 4r y 5r) puede satisfacer un objetivo de bienestar social, lo cual permite desviar la medida a un segundo objetivo deseable.

Finalmente, al analizar las demoras de los terminales se tiene que ambos mantienen niveles de congestión bajos, siendo siempre menor el terminal público. Es un hecho observable que los niveles de congestión más bajos se encuentran asociados a mayores precios por parte de los terminales a los portadores. Esto es de esperar pues el terminal debe tarificar adecuadamente si desea disminuir las demoras en sus instalaciones. Se observa además que las demoras del terminal público son similares en los escenarios 1r, 2 y 3, sin embargo los precios que los terminales cobran a los portadores como resultados de los equilibrios cambian. En este sentido el escenario 3 resulta ser el menos deseable pues deriva en precios elevados para los portadores y tarifas altísimas para los consumidores. Por el contrario, los escenarios 1r y 2 obtienen similares niveles de servicio a tarifas y precios más bajas. En el caso de los otros escenarios no existen diferencias sustanciales entre ambos terminales respecto a las demoras, situación que lleva a concluir que en términos de calidad de servicio en el equilibrio, ambos terminales no logran diferenciarse, sino que al contrario, obtienen niveles similares de congestión.

6.1 Recomendaciones de Políticas Públicas

Revisado todos los resultados obtenidos del modelo a través de los diferentes escenarios es posible determinar políticas públicas que delineen el comportamiento del terminal estatal.

Como líneas generales se puede recomendar que de existir un escenario como los planteados se debe procurar que el número de portadores sea alto. En estos casos los niveles de congestión no son altos debido a adecuada inversión en capacidad. Además se observa que los precios y las tarifas bajan, lo que redundará en un aumento de la demanda del terminal y un crecimiento del excedente del consumidor y del bienestar social.

También se demuestra que la existencia de un escenario duopólico entre privados sólo genera desbeneficios, ya que como se vio, este escenario entrega los peores niveles de bienestar y excedentes de consumidor bajos debido a que parte de esa ganancia la captura como utilidad. Esto se refleja en precios elevados y capacidades más reducidas. Este escenario es el menos deseado y permite establecer con claridad que la existencia de mercados completamente privados, al menos en el caso de duopolio, no es óptima.

Respecto al resto de los escenarios todos generan equilibrios con beneficios a los usuarios, entregando cada uno de ellos matices. Los escenarios en que la preocupación del agente público por considerar a gran parte de los agentes (escenarios 4 y 5) redundará en beneficios a los usuarios,

con tarifas bajas, demoras razonables además de precios y capacidades adecuadas. Sin embargo, a la luz de los resultados obtenidos se recomienda la utilización de funciones objetivo en que la preocupación del agente se concentre sólo en los usuarios finales. Esto produce similares niveles de bienestar, a un menor costo para el Estado. Incluso, si el número de portadores es bajo, es posible que en el equilibrio, el terminal público genere utilidades.

Referencias

- Baake, P. y Mitusch, K. (2007) Competition with congestible networks. *Journal of Economics*. 91, 151-176.
- Basso, L. J. (2008) Airport deregulation: Effects on pricing and capacity. *International Journal of Industrial Organization*. 26, 1015-1031.
- Basso, L. J. y Zhang, A. (2007) Congestible facility rivalry in vertical structures. *Journal of Urban Economics*, 61, 218-237.
- Basso, L. J. y Zhang, A. (2008) On the relationships between airports pricing models. *Transportation Research Part B*, 42, 725-735.
- Cornes, R. C. y Sepahvand, M. (2003) Cournot Vs Stackelberg Equilibria with a Public Enterprise and International Competition. *University of Nottingham Economics*. Discussion Paper N° 03/12.
- Cremer, H., Marchand, M. y Thisse, J. (1989) The public firm as an instrument for regulating and oligopolistic market. *Oxford Economic Papers*, 41, 283-301.
- De Borger, B. y Van Dender, K. (2006) Prices, capacities and service levels in a congestible bertrand duopoly. *Journal of Urban Economics*. 60, 264-283.
- De Borger, B., Dunkerley, F. y Proost, S. (2007) Strategic investment and pricing decisions in a congested transport corridor. *Journal of Urban Economics*. 62, 294-316.
- De Palma A. y Lindsey R. (2000) Private toll roads: competition under various ownerships regimes. *The Annals of Regional Science*, 34, 13-35.
- Engel, E., Fisher, R. y Galetovic, A. (2004) Toll competition among congested roads. *Topics in Economics Analysis & Policy*. 4, art. 4.
- Fjell, K. y Heywood, J. S. (2000) Public Stackelberg leadership in a mixed oligopoly with a foreign firm. *Australian Economics Papers*, 41:3, 267-281.
- Fujiwara, K. (2007) Partial privatization in a differentiated mixed oligopoly. *Journal of Economics*. 92, 51-65.
- Hsin Lin, M. y Ogawa, H. (2005) Cost reducing incentives in a mixed duopoly market. *Economics Bulletin*. 12, 1-6.

- Lindsey, R. y Verhoef, E. (2000) Traffic congestion and congestion pricing. *Tinbergen Institute Discussion Paper*. 101/3.
- Lu, Y. y Poddar, S. (2006) Endogenous timing in a mixed duopoly and private duopoly- 'Capacity-then-quantity' game: the linear demand case. 48:2, 138-150.
- Matsumura, T. (2003) Stackelberg mixed duopoly with a foreign competitor. *Bulletin of Economics Research*, 55:3, 275-287.
- Matsumura, T. y Matsushima, N. (2004) Endogenous cost differentials between public and private enterprises: a mixed duopoly approach. *Economica*, 71, 671-688.
- Matsumura, T. y Matsushima, N. (2007) Cost differential and mixed strategy equilibria in a hotelling model. *The Annals of Regional Science*. 43, 215-234.
- Sanjo, Y. (2007) Hotelling's location model with quality choice in a mixed duopoly. *Economics Bulletin*. 18, 1-11.
- Van Dender, K. (2005) Duopoly prices under congested access. *Journal of Regional Science*. 45, 343-362.
- Van Dender, K. (2008) Nash-Bertrand competition in a duopoly with congestion. *Working Paper*.
- Verhoef, E., Koh, A. y Shepherd, S. (2008) Pricing, capacity and long-run cost functions for first-best and second best network problems. *Tinbergen Institute Discussion Paper*. 056/3.
- Ware, R. y Winter, R. A. (1986) Public pricing under imperfect competition. *International Journal of Industrial Organization*. 4:1, 87-97.
- Weintraub, G. Y., Johari, R. y Van Roy, B. (2009) Investment and market structure in industries with congestion. *Operation Research Manuscript*.
- Zhang, A. y Zhang, Y. (2006) Airport capacity and congestion when carriers have market power. *Journal of Urban Economics*. 60, 229-247.

Anexo 1
Tablas Resumen Simulación Numérica

Tabla 28: Resultados de simulación, todos los escenarios con $N_1 = 1$

Escenario	Nº Portadores	Terminal	λ	P	K	f	Q	D	F.O.	Π	ϕ	$\Sigma\phi$	CS	CST	SW
Escenario 1: Terminal PIV vs. Max CST															
1r	1	0	N/A	-1.741	5.152	8.016	3.689	0.215	19.543	-11.575	31.118	31.118	12.533	19.966	55.42
	1	1	0.636	2.449	6.741	9.415	2.752	0.122	19.966	0	15.911	15.911	7.433		
Escenario 2: Terminal PIV vs. Max CST+Π															
2	1	0	N/A	-1.731	5.301	8.186	3.796	0.215	20.754	-11.874	32.628	32.628	12.696	17.06	51.867
	1	1	N/A	4.378	5.123	10.352	2.092	0.122	21.093	4.033	10.02	10.02	4.364		
2r	1	0	N/A	-1.741	5.152	8.016	3.689	0.215	19.543	-11.575	31.118	31.118	12.533	19.966	55.42
	1	1	-0.364	2.449	6.741	9.415	2.752	0.122	19.966	0	15.911	15.911	7.433		
Escenario 3: Terminal PIV vs. Max Π															
3	1	0	N/A	-1.708	5.458	8.377	3.908	0.215	22.116	-12.134	34.25	34.25	12.704	14.549	47.286
	1	1	N/A	6.481	3.36	11.376	1.372	0.122	5.53	5.53	5.091	5.091	1.846		
3r	1	0	N/A	-1.728	5.155	8.032	3.691	0.215	19.614	-11.533	31.147	31.147	12.518	19.75	55.978
	1	1	0.922	1.973	5.354	9.324	2.713	0.152	0	0	16.614	16.614	7.232		
Escenario 4: Terminal PIV vs. Max Π+$\Sigma\phi$+CST1															
4	1	0	N/A	-1.693	3.664	6.465	2.624	0.215	9.831	-8.105	17.935	17.935	4.435	77.456	63.042
	1	1	N/A	-17.757	12.637	0.04	9.05	0.215	48.776	-173.332	149.088	149.088	73.02		
4r	1	0	N/A	-1.728	5.155	8.032	3.691	0.215	19.614	-11.533	31.147	31.147	12.518	19.75	55.978
	1	1	0.9221	1.973	5.354	9.324	2.713	0.152	23.846	0	16.614	16.614	7.232		
Escenario 5: Terminal PIV vs. Max SW															
5	1	0	N/A	-1.711	4.192	7.015	3.002	0.215	12.9	-9.328	22.228	22.228	8.603	50.813	67.017
	1	1	N/A	-11.24	9.515	3.204	6.814	0.215	67.017	-86.108	89.411	89.411	42.21		
5r	1	0	N/A	-1.725	5.157	8.037	3.693	0.215	19.64	-11.529	31.169	31.169	12.518	19.675	55.99
	1	1	1.901	1.901	5.131	9.316	2.699	0.158	55.99	0	16.674	16.674	7.157		

Tabla 29: Resultados de simulación, todos los escenarios con $N_1 = 5$

Escenario	N° Portadores	Terminal	λ	P	K	f	Q	D	F.O.	Π	ϕ	$\Sigma\phi$	CS	CST	SW
Escenario 1: Terminal PIV vs. Max CST															
1r	1	0	N/A	-1.888	4.626	7.304	3.313	0.215	15.191	-10.88	26.071	26.071	10.975	37.125	65.372
	5	1	0.944	1.897	10.065	5.596	5.305	0.158	37.125	0	2.611	13.056	26.15		
Escenario 2: Terminal PIV vs. Max CST+Π															
2	1	0	N/A	-1.889	4.685	7.365	3.355	0.215	15.59	-11.024	26.613	26.613	11.244	35.095	64.909
	5	1	N/A	2.324	9.593	5.948	5.056	0.158	37.254	2.159	2.413	12.066	23.85		
2r	1	0	N/A	-1.888	4.626	7.304	3.313	0.215	15.191	-10.88	26.071	26.071	10.975	37.125	65.372
	5	1	-0.056	1.897	10.065	5.596	5.305	0.158	37.125	0	2.611	13.056	26.15		
Escenario 3: Terminal PIV vs. Max Π															
3	1	0	N/A	-1.876	5.242	7.977	3.754	0.215	19.74	-12.286	32.026	32.026	12.877	19.724	55.922
	5	1	N/A	6.482	5	9.379	2.635	0.158	12.082	12.082	0.875	4.375	6.848		
3r	1	0	N/A	-1.875	4.629	7.32	3.315	0.215	15.25	-10.843	26.094	26.094	10.987	36.79	65.876
	5	1	0.486	1.578	8.313	5.489	5.268	0.19	0	0	2.767	13.836	25.803		
Escenario 4: Terminal PIV vs. Max Π+$\Sigma\phi$+CST1															
4	1	0	N/A	-1.824	3.726	6.402	2.669	0.215	9.828	-8.593	18.422	18.422	4.73	77.734	63.227
	5	1	N/A	-5.189	12.627	0.028	9.043	0.215	48.669	-59.551	7.043	35.216	73.004		
4r	1	0	N/A	-1.875	4.629	7.32	3.315	0.215	15.25	-10.843	26.094	26.094	10.987	36.79	65.876
	5	1	0.4864	1.578	8.313	5.489	5.268	0.19	39.639	0	2.767	13.836	25.803		
Escenario 5: Terminal PIV vs. Max SW															
5	1	0	N/A	-1.854	4.2623	6.9469	3.0523	0.215	12.906	-9.921	22.8272	22.8272	8.93429	51.056	67.224
	5	1	N/A	-1.346	9.4969	3.1983	6.8009	0.215	67.224	-18.65	4.38232	21.9116	42.1215		
5r	1	0	N/A	-1.871	4.632	7.327	3.317	0.215	15.286	-10.84	26.126	26.126	11.003	36.6	65.899
	5	1	0.234	1.504	7.892	5.474	5.247	0.199	65.899	0	2.803	14.013	25.597		

Tabla 30: Resultados de simulación, todos los escenarios con $N_1 = 10$

Escenario	N° Portadores	Terminal	λ	P	K	f	Q	D	F.O.	Π	ϕ	$\Sigma\phi$	CS	CST	SW
Escenario 1: Terminal PIV vs. Max CST															
1r	1	0	N/A	-1.915	4.497	7.138	3.221	0.215	14.234	-10.666	24.9	24.9	10.313	42.524	66.397
	10	1	1.018	1.817	10.742	4.694	5.913	0.165	42.524	0	0.964	9.639	32.212		
Escenario 2: Terminal PIV vs. Max CST+Π															
2	1	0	N/A	-1.914	4.475	7.115	3.205	0.215	14.089	-10.609	24.699	24.699	10.189	43.393	66.474
	10	1	N/A	1.669	10.913	4.561	6.007	0.165	42.507	-0.886	0.988	9.877	33.204		
2r	1	0	N/A	-1.915	4.497	7.138	3.221	0.215	14.234	-10.666	24.9	24.9	10.313	42.524	66.397
	10	1	0.018	1.817	10.742	4.694	5.913	0.165	42.524	0	0.964	9.639	32.212		
Escenario 3: Terminal PIV vs. Max Π															
3	1	0	N/A	-1.913	5.19	7.884	3.716	0.215	19.196	-12.3	31.496	31.496	12.845	21.273	57.636
	10	1	N/A	6.483	5.332	8.914	2.935	0.165	13.694	13.694	0.347	3.473	8.428		
3r	1	0	N/A	-1.903	4.5	7.153	3.222	0.215	14.287	-10.632	24.919	24.919	10.329	42.187	66.853
	10	1	0.4	1.528	8.986	4.588	5.88	0.196	0	0	1.038	10.379	31.858		
Escenario 4: Terminal PIV vs. Max Π+$\Sigma\phi$+CST1															
4	1	0	N/A	-1.854	3.741	6.387	2.679	0.215	9.827	-8.709	18.535	18.535	4.799	77.799	63.27
	10	1	N/A	-3.62	12.625	0.025	9.041	0.215	48.644	-45.357	2.1	21.002	73		
4r	1	0	N/A	-1.903	4.5	7.153	3.222	0.215	14.287	-10.632	24.919	24.919	10.329	42.187	66.853
	10	1	0.4001	1.528	8.986	4.588	5.88	0.196	42.237	0	1.038	10.379	31.858		
Escenario 5: Terminal PIV vs. Max SW															
5	1	0	N/A	-1.887	4.278	6.931	3.064	0.215	12.906	-10.061	22.967	22.967	9.012	51.113	67.271
	10	1	N/A	-0.112	9.493	3.197	6.798	0.215	67.271	-10.251	1.35	13.503	42.101		
5r	1	0	N/A	-1.9	4.503	7.16	3.225	0.215	14.323	-10.629	24.951	24.951	10.349	41.972	66.878
	10	1	0.139	1.454	8.517	4.571	5.857	0.206	66.878	0	1.058	10.583	31.623		

Tabla 31: Resultados de simulación, todos los escenarios con $N_1 = 20$

Escenario	N° Portadores	Terminal	λ	P	K	f	Q	D	F.O.	Π	ϕ	$\Sigma\phi$	CS	CST	SW
Escenario 1: Terminal PIV vs. Max CST															
1r	1	0	N/A	-1.93	4.422	7.043	3.167	0.215	13.695	-10.534	24.229	24.229	9.879	45.877	66.751
	20	1	1.06	1.775	11.119	4.174	6.265	0.169	45.877	0	0.359	7.179	35.998		
Escenario 2: Terminal PIV vs. Max CST+Π															
2	1	0	N/A	-1.925	4.338	6.957	3.107	0.215	13.167	-10.319	23.486	23.486	9.366	49.36	66.809
	20	1	N/A	1.249	11.745	3.675	6.617	0.169	45.883	-3.477	0.388	7.758	39.994		
2r	1	0	N/A	-1.93	4.422	7.043	3.167	0.215	13.695	-10.534	24.229	24.229	9.879	45.877	66.751
	20	1	0.06	1.775	11.119	4.174	6.265	0.169	45.877	0	0.359	7.179	35.998		
Escenario 3: Terminal PIV vs. Max Π															
3	1	0	N/A	-1.934	5.159	7.83	3.695	0.215	18.884	-12.305	31.19	31.19	12.813	22.222	58.565
	20	1	N/A	6.483	5.516	8.646	3.108	0.169	14.632	14.632	0.141	2.826	9.409		
3r	1	0	N/A	-1.918	4.424	7.057	3.168	0.215	13.744	-10.502	24.246	24.246	9.897	45.544	67.175
	20	1	0.352	1.504	9.375	4.069	6.233	0.199	0	0	0.394	7.887	35.647		
Escenario 4: Terminal PIV vs. Max Π+$\Sigma\phi$+CST1															
4	1	0	N/A	-1.872	3.749	6.378	2.685	0.215	9.826	-8.775	18.601	18.601	4.838	77.836	63.294
	20	1	N/A	-2.836	12.624	0.023	9.04	0.215	48.63	-38.266	0.695	13.898	72.998		
4r	1	0	N/A	-1.918	4.424	7.057	3.168	0.215	13.744	-10.502	24.246	24.246	9.897	45.544	67.175
	20	1	0.3518	1.504	9.375	4.069	6.233	0.199	43.534	0	0.394	7.887	35.647		
Escenario 5: Terminal PIV vs. Max BS															
5	1	0	N/A	-1.906	4.288	6.922	3.071	0.215	12.906	-10.141	23.048	23.048	9.056	51.145	67.298
	20	1	N/A	0.505	9.49	3.196	6.796	0.215	67.298	-6.058	0.465	9.304	42.089		
5r	1	0	N/A	-1.915	4.428	7.064	3.171	0.215	13.779	-10.499	24.278	24.278	9.919	45.316	67.2
	20	1	0.086	1.43	8.88	4.05	6.211	0.21	67.2	0	0.405	8.105	35.397		

Anexo 2
Código de Programación - Software *Mathematica*

clear["Global`*"]

RESOLUCIÓN DEL JUEGO ENTRE UN COMPETIDOR PÚBLICO Y UNO PRIVADO INTEGRADO VERTICALMENTE CON UN ÚNICO PORTADOR - Juego Simultaneo.

Definición de los parámetros

- Número de Portadores en los Terminales

$N0 := 1; N1 := 1;$

- Costo de Transporte de los Usuarios, por unidad de distancia

$t := 0.5;$

- Beneficio Neto de los usuarios, Este valor debe ser tomado con cuidado de manera de que quede bien definido el problema.

$V := 15;$

- Parámetro asociado a la demora

$a := 0.3;$

- Valor Subjetivo del Tiempo de los usuarios finales (pasajeros)

$\alpha := 5;$

- Valor Subjetivo del Tiempo de los portadores del terminal 0 y 1

$\beta0 := 5; \beta1 := 5;$

- Costo Marginal de los portadores del terminal 0 y 1

$c0 := 1; c1 := 1;$

- Costo Marginal de invertir en Capacidad para el terminal 0 y 1

$m0 := 1; m1 := 1;$

Definición de funciones para niveles inferiores del problema

- Equilibrio en nivel de los portadores, según los resultados de Basso (2008)

$$g0[K0_] := \frac{N0 + 1}{N0} * \left(3 * t + \frac{a * (\alpha + \beta0)}{K0} \right); \quad g1[K1_] := \frac{N1 + 1}{N1} * \left(3 * t + \frac{a * (\alpha + \beta1)}{K1} \right);$$

$$D0[P0_, P1_, K0_, K1_] := a * \frac{Q0[P0, P1, K0, K1]}{K0};$$

$$D1[P0_, P1_, K0_, K1_] := a * \frac{Q1[P0, P1, K0, K1]}{K1};$$

$$Q0[P0_, P1_, K0_, K1_] := \frac{t * (c1 + P1 - 2 * t - V) - g1[K1] * (c0 + P0 - 2 * t - V)}{g0[K0] * g1[K1] - t^2};$$

$$Q1[P0_, P1_, K0_, K1_] := \frac{t * (c0 + P0 - 2 * t - V) - g0[K0] * (c1 + P1 - 2 * t - V)}{g0[K0] * g1[K1] - t^2};$$

$$f0[P0_, P1_, K0_, K1_] :=$$

$$2 * t + V - 3 * t * Q0[P0, P1, K0, K1] - t * Q1[P0, P1, K0, K1] - \alpha * D0[P0, P1, K0, K1];$$

$$f1[P0_, P1_, K0_, K1_] := 2 * t + V - 3 * t * Q1[P0, P1, K0, K1] -$$

$$t * Q0[P0, P1, K0, K1] - \alpha * D1[P0, P1, K0, K1];$$

■ Excedente del consumidor

$$CST[P0_, P1_, K0_, K1_] := \frac{t}{2}$$

$$(3 * Q0[P0, P1, K0, K1]^2 + 2 * Q0[P0, P1, K0, K1] * Q1[P0, P1, K0, K1] + 3 * Q1[P0, P1, K0, K1]^2 - 4)$$

$$CS0[P0_, P1_, K0_, K1_] :=$$

$$\frac{t}{4} * (7 * Q0[P0, P1, K0, K1]^2 + 2 * Q0[P0, P1, K0, K1] * Q1[P0, P1, K0, K1] -$$

$$Q1[P0, P1, K0, K1]^2 - 4 * Q0[P0, P1, K0, K1] + 4 * Q1[P0, P1, K0, K1] - 4)$$

$$CS1[P0_, P1_, K0_, K1_] :=$$

$$\frac{t}{4} * (7 * Q1[P0, P1, K0, K1]^2 + 2 * Q0[P0, P1, K0, K1] * Q1[P0, P1, K0, K1] -$$

$$Q0[P0, P1, K0, K1]^2 - 4 * Q1[P0, P1, K0, K1] + 4 * Q0[P0, P1, K0, K1] - 4)$$

■ Utilidades de los agentes

■ Utilidad operador del terminal público

$$\pi1[P0_, P1_, K0_, K1_] := Q1[P0, P1, K0, K1] * P1 - m1 * K1;$$

■ Utilidad operador del terminal privado, sin considerar integración vertical

$$\pi0[P0_, P1_, K0_, K1_] := Q0[P0, P1, K0, K1] * P0 - m0 * K0;$$

■ Utilidad del portador del terminal privado

$$\phi0[P0_, P1_, K0_, K1_] :=$$

$$(f0[P0, P1, K0, K1] - (c0 + P0 + \beta0 * a * D0[P0, P1, K0, K1])) * Q0[P0, P1, K0, K1];$$

■ Utilidad de todos los portadores del terminal público

$$\Sigma\phi1[P0_, P1_, K0_, K1_] :=$$

$$(f1[P0, P1, K0, K1] - (c1 + P1 + \beta1 * a * D1[P0, P1, K0, K1])) * Q1[P0, P1, K0, K1]$$

■ Utilidad de Usuarios del Terminal privado (0), en función de la distancia al terminal

$$U0[P0_, P1_, K0_, K1_, z_] := V - f0[P0, P1, K0, K1] - \alpha * D0[P0, P1, K0, K1] - \frac{t}{4} * z;$$

■ Utilidad del Usuarios del Terminal público (1), en función de la distancia al terminal

$$U1[P0_, P1_, K0_, K1_, z_] := V - f1[P0, P1, K0, K1] - \alpha * D1[P0, P1, K0, K1] - \frac{t}{4} * (1 - z);$$

Funciones Objetivos de los operadores de terminales

- FO terminal privado (Aquí se considera la integración vertical)

$$\xi_0 [P_0, P_1, K_0, K_1] := \Pi_0 [P_0, P_1, K_0, K_1] + \phi_0 [P_0, P_1, K_0, K_1]$$

- FO's del Terminal Público

$$\xi_{11} [P_0, P_1, K_0, K_1] := \text{CST} [P_0, P_1, K_0, K_1]$$

$$\xi_{12} [P_0, P_1, K_0, K_1] := \text{CST} [P_0, P_1, K_0, K_1] + \Pi_1 [P_0, P_1, K_0, K_1]$$

$$\xi_{13} [P_0, P_1, K_0, K_1] := \Pi_1 [P_0, P_1, K_0, K_1]$$

$$\xi_{14} [P_0, P_1, K_0, K_1] := \text{CS1} [P_0, P_1, K_0, K_1] + \Sigma \phi_{i1} [P_0, P_1, K_0, K_1] + \Pi_1 [P_0, P_1, K_0, K_1]$$

$$\xi_{15} [P_0, P_1, K_0, K_1] := \text{CST} [P_0, P_1, K_0, K_1] + \phi_0 [P_0, P_1, K_0, K_1] +$$

$$\Sigma \phi_{i1} [P_0, P_1, K_0, K_1] + \Pi_0 [P_0, P_1, K_0, K_1] + \Pi_1 [P_0, P_1, K_0, K_1]$$

Funciones de Mejor Respuesta y Valores bajo Equilibrio Simultáneo, por Escenario

- Escenario 0: Escenario de Control, Duopolio privado sin integración vertical

- Juego Irrestricto

```
sol0 = FullSimplify[
  NSolve[{Derivative[1, 0, 0, 0] [\Pi_0] [P_0, P_1, K_0, K_1] == 0, Derivative[0, 1, 0, 0] [\Pi_1] [
    P_0, P_1, K_0, K_1] == 0, Derivative[0, 0, 1, 0] [\Pi_0] [P_0, P_1, K_0, K_1] == 0,
    Derivative[0, 0, 0, 1] [\Pi_1] [P_0, P_1, K_0, K_1] == 0}, {P_0, P_1, K_0, K_1}];
Grid[sol0, Frame -> All];
n = Dimensions[sol0][[-2]];
Print[Row[{"Nº de soluciones encontradas: ", n}]]
For[i = 1, i <= n, i++, Vector = sol0[[-i]];
  If[Last[Vector][[-2]] >= 0 && Last[Vector][[-1]] >= 0,
    Print[Column[{Row[{"Ubicación Solución Factible: ", (n - i + 1)}], Row[
      {"P00= ", P00 = Last[Vector][[-4]]}], Row[{"P10= ", P10 = Last[Vector][[-3]]}], Row[
      {"K00= ", K00 = Last[Vector][[-2]]}], Row[{"K10= ", K10 = Last[Vector][[-1]]}]}]]]
```

- Juego con Tarificación Ramsey

$$r_{00} [P_0, P_1, K_0, K_1] := \Pi_0 [P_0, P_1, K_0, K_1];$$

$$r_{10} [P_0, P_1, K_0, K_1, \lambda_1] := \Pi_1 [P_0, P_1, K_0, K_1] * (1 - \lambda_1);$$

- Escenario 1: Terminal Privado integrado verticalmente vs. Terminal Público que maximiza bienestar de todos los usuarios finales (máx CST)

- Juego con Tarificación Ramsey en terminal público

$$r_{01} [P_0, P_1, K_0, K_1] := \xi_0 [P_0, P_1, K_0, K_1];$$

$$r_{11} [P_0, P_1, K_0, K_1, \lambda_1] := \xi_{11} [P_0, P_1, K_0, K_1] - \lambda_1 * \Pi_1 [P_0, P_1, K_0, K_1];$$


```

solr1 = FullSimplify[NSolve[{
  Derivative[1, 0, 0, 0] [r01] [P0, P1, K0, K1] == 0,
  Derivative[0, 1, 0, 0, 0] [r11] [P0, P1, K0, K1, λ1] == 0,
  Derivative[0, 0, 1, 0] [r01] [P0, P1, K0, K1] == 0,
  Derivative[0, 0, 0, 1, 0] [r11] [P0, P1, K0, K1, λ1] == 0,
  Derivative[0, 0, 0, 0, 1] [r11] [P0, P1, K0, K1, λ1] == 0},
{λ1, P0, P1, K0, K1}]];
Grid[solr1, Frame → All];
n = Dimensions[solr1][[-2]];
Print[Row[{"Nº de soluciones encontradas: ", n}]]
For[i = 1, i ≤ n, i++, Vector = solr1[[-i]];
  If[Last[Vector][[-2]] ≥ 0 && Last[Vector][[-1]] ≥ 0,
    Print[Column[{Row[{"Ubicación Solución Factible: ", (n - i + 1)}],
      Row[{"λ11= ", λ11 = Last[Vector][[-5]]}], Row[{"P01= ", P01r = Last[Vector][[-4]]}],
      Row[{"P11= ", P11r = Last[Vector][[-3]]}], Row[{"K01= ", K01r = Last[Vector][[-2]]}],
      Row[{"K11= ", K11r = Last[Vector][[-1]]}]}]]]]]]

```

■ Escenario 2: Terminal Privado integrado verticalmente vs. Terminal Público que Maximiza el bienestar de los usuarios y el profit propio

■ Juego Irrestricto

```

sol2 = FullSimplify[
  NSolve[{Derivative[1, 0, 0, 0] [ξ0] [P0, P1, K0, K1] == 0, Derivative[0, 1, 0, 0] [ξ12] [
    P0, P1, K0, K1] == 0, Derivative[0, 0, 1, 0] [ξ0] [P0, P1, K0, K1] == 0,
    Derivative[0, 0, 0, 1] [ξ12] [P0, P1, K0, K1] == 0}, {P0, P1, K0, K1}]];
Grid[sol2, Frame → All];
n = Dimensions[sol2][[-2]];
Print[Row[{"Nº de soluciones encontradas: ", n}]]
For[i = 1, i ≤ n, i++, Vector = sol2[[-i]];
  If[Last[Vector][[-2]] ≥ 0 && Last[Vector][[-1]] ≥ 0,
    Print[Column[{Row[{"Ubicación Solución Factible: ", (n - i + 1)}], Row[
      {"P02= ", P02 = Last[Vector][[-4]]}], Row[{"P12= ", P12 = Last[Vector][[-3]]}], Row[
      {"K02= ", K02 = Last[Vector][[-2]]}], Row[{"K12= ", K12 = Last[Vector][[-1]]}]}]]]]]]

```

■ Juego con Tarificación Ramsey en terminal público

```

r02[P0_, P1_, K0_, K1_] := ξ0 [P0, P1, K0, K1];
r12[P0_, P1_, K0_, K1_, λ1_] := ξ12 [P0, P1, K0, K1] - λ1 * Π1 [P0, P1, K0, K1];

solr2 = FullSimplify[NSolve[{
  Derivative[1, 0, 0, 0] [r02] [P0, P1, K0, K1] == 0,
  Derivative[0, 1, 0, 0, 0] [r12] [P0, P1, K0, K1, λ1] == 0,
  Derivative[0, 0, 1, 0] [r02] [P0, P1, K0, K1] == 0,
  Derivative[0, 0, 0, 1, 0] [r12] [P0, P1, K0, K1, λ1] == 0,
  Derivative[0, 0, 0, 0, 1] [r12] [P0, P1, K0, K1, λ1] == 0},
{λ1, P0, P1, K0, K1}]];
Grid[solr2, Frame → All];
n = Dimensions[solr2][[-2]];
Print[Row[{"Nº de soluciones encontradas: ", n}]]
For[i = 1, i ≤ n, i++, Vector = solr2[[-i]];
  If[Last[Vector][[-2]] ≥ 0 && Last[Vector][[-1]] ≥ 0,
    Print[Column[{Row[{"Ubicación Solución Factible: ", (n - i + 1)}],
      Row[{"λ12= ", λ12 = Last[Vector][[-5]]}], Row[{"P02= ", P02r = Last[Vector][[-4]]}],
      Row[{"P12= ", P12r = Last[Vector][[-3]]}], Row[{"K02= ", K02r = Last[Vector][[-2]]}],
      Row[{"K12= ", K12r = Last[Vector][[-1]]}]}]]]]]]

```

Escenario 3: Terminal Privado integrado verticalmente vs. Terminal Público que se comporta como Privado

■ Juego Irrestricto

```
sol3 = FullSimplify[
  NSolve[{Derivative[1, 0, 0, 0] [\xi0] [P0, P1, K0, K1] == 0, Derivative[0, 1, 0, 0] [\xi13] [
    P0, P1, K0, K1] == 0, Derivative[0, 0, 1, 0] [\xi0] [P0, P1, K0, K1] == 0,
    Derivative[0, 0, 0, 1] [\xi13] [P0, P1, K0, K1] == 0}, {P0, P1, K0, K1}]];
Grid[sol3, Frame → All];
n = Dimensions[sol3][[-2]];
Print[Row[{"Nº de soluciones encontradas: ", n}]]
For[i = 1, i ≤ n, i++, Vector = sol3[[-i]];
  If[Last[Vector][[-2]] ≥ 0 && Last[Vector][[-1]] ≥ 0, Print[Column[{
    Row[{"Ubicación Solución Factible: ", (n - i + 1)}],
    Row[{"P03= ", P03 = Last[Vector][[-4]]}],
    Row[{"P13= ", P13 = Last[Vector][[-3]]}],
    Row[{"K03= ", K03 = Last[Vector][[-2]]}],
    Row[{"K13= ", K13 = Last[Vector][[-1]]}]}]]]
```

■ Juego con Tarificación Ramsey en terminal público

```
r03[P0_, P1_, K0_, K1_] := \xi0 [P0, P1, K0, K1];
r13[P0_, P1_, K0_, K1_, \lambda_] := \xi14 [P0, P1, K0, K1] - \lambda * \Pi1 [P0, P1, K0, K1];

solr3 = FullSimplify[NSolve[{
  Derivative[1, 0, 0, 0] [r03] [P0, P1, K0, K1] == 0,
  Derivative[0, 1, 0, 0, 0] [r13] [P0, P1, K0, K1, \lambda] == 0,
  Derivative[0, 0, 1, 0] [r03] [P0, P1, K0, K1] == 0,
  Derivative[0, 0, 0, 1, 0] [r13] [P0, P1, K0, K1, \lambda] == 0,
  Derivative[0, 0, 0, 0, 1] [r13] [P0, P1, K0, K1, \lambda] == 0},
  {\lambda, P0, P1, K0, K1}]];
Grid[solr3, Frame → All];
n = Dimensions[solr3][[-2]];
Print[Row[{"Nº de soluciones encontradas: ", n}]]
For[i = 1, i ≤ n, i++, Vector = solr3[[-i]];
  If[Last[Vector][[-2]] ≥ 0 && Last[Vector][[-1]] ≥ 0,
  Print[Column[{Row[{"Ubicación Solución Factible: ", (n - i + 1)}],
    Row[{"\lambda13= ", \lambda13 = Last[Vector][[-5]]}], Row[{"P03r= ", P03r = Last[Vector][[-4]]}],
    Row[{"P13r= ", P13r = Last[Vector][[-3]]}], Row[{"K03r= ", K03r = Last[Vector][[-2]]}],
    Row[{"K13r= ", K13r = Last[Vector][[-1]]}]}]]]
```

■ **Escenario 4: Terminal Privado integrado verticalmente vs. Terminal Público que sólo maximiza el bienestar de sus agentes (usuarios, portadores y terminal 1)**

■ **Juego Irrestricto**

```
sol4 = FullSimplify[
  NSolve[{Derivative[1, 0, 0, 0] [ξ0] [P0, P1, K0, K1] == 0, Derivative[0, 1, 0, 0] [ξ14] [
    P0, P1, K0, K1] == 0, Derivative[0, 0, 1, 0] [ξ0] [P0, P1, K0, K1] == 0,
    Derivative[0, 0, 0, 1] [ξ14] [P0, P1, K0, K1] == 0}, {P0, P1, K0, K1}];
Grid[sol4, Frame → All];
n = Dimensions[sol4][[-2]];
Print[Row[{"Nº de soluciones encontradas: ", n}]]
For[i = 1, i ≤ n, i++, Vector = sol4[[-i]];
  If[Last[Vector[[-2]]] ≥ 0 && Last[Vector[[-1]]] ≥ 0, Print[Column[{
    Row[{"Ubicación Solución Factible: ", (n - i + 1)}],
    Row[{"P0 = ", P04 = Last[Vector[[-4]]}],
    Row[{"P1 = ", P14 = Last[Vector[[-3]]}],
    Row[{"K0 = ", K04 = Last[Vector[[-2]]}],
    Row[{"K1 = ", K14 = Last[Vector[[-1]]}]}]]]]]
```

■ **Juego con Tarificación Ramsey en terminal público**

```
r04[P0_, P1_, K0_, K1_] := ξ0 [P0, P1, K0, K1];
r14[P0_, P1_, K0_, K1_, λ1_] := ξ14 [P0, P1, K0, K1] - λ1 * Π1 [P0, P1, K0, K1];

solr4 = FullSimplify[NSolve[{
  Derivative[1, 0, 0, 0] [r04] [P0, P1, K0, K1] == 0,
  Derivative[0, 1, 0, 0, 0] [r14] [P0, P1, K0, K1, λ1] == 0,
  Derivative[0, 0, 1, 0] [r04] [P0, P1, K0, K1] == 0,
  Derivative[0, 0, 0, 1, 0] [r14] [P0, P1, K0, K1, λ1] == 0,
  Derivative[0, 0, 0, 0, 1] [r14] [P0, P1, K0, K1, λ1] == 0},
  {λ1, P0, P1, K0, K1}];
Grid[solr4, Frame → All];
n = Dimensions[solr4][[-2]];
For[i = 1, i ≤ n, i++, Vector = solr4[[-i]];
  If[Last[Vector[[-2]]] ≥ 0 && Last[Vector[[-1]]] ≥ 0,
  Print[Column[{Row[{"Ubicación Solución Factible: ", (n - i + 1)}],
    Row[{"λ14= ", λ14 = Last[Vector[[-5]]}], Row[{"P04r = Last[Vector[[-4]]}],
    Row[{"P14r = Last[Vector[[-3]]}], Row[{"K04r = Last[Vector[[-2]]}],
    Row[{"K14r = Last[Vector[[-1]]}]}]]]]]
```

■ **Escenario 5: Terminal Privado integrado verticalmente vs. Terminal Público que Maximiza el bienestar social.**

■ **Juego Irrestricto**

```
sol5 = FullSimplify[
  NSolve[{Derivative[1, 0, 0, 0] [\xi0][P0, P1, K0, K1] == 0, Derivative[0, 1, 0, 0] [\xi15][
    P0, P1, K0, K1] == 0, Derivative[0, 0, 1, 0] [\xi0][P0, P1, K0, K1] == 0,
    Derivative[0, 0, 0, 1] [\xi15][P0, P1, K0, K1] == 0}, {P0, P1, K0, K1}];
Grid[sol5, Frame -> All];
n = Dimensions[sol5][[-2]];
Print[Row[{"Nº de soluciones encontradas: ", n}]]
For[i = 1, i <= n, i++, Vector = sol5[[-i]];
  If[Last[Vector][[-2]] >= 0 && Last[Vector][[-1]] >= 0,
    Print[Column[{
      Row[{"Ubicación Solución Factible: ", (n - i + 1)}],
      Row[{"P0 = ", P05 = Last[Vector][[-4]]}],
      Row[{"P1 = ", P15 = Last[Vector][[-3]]}],
      Row[{"K0 = ", K05 = Last[Vector][[-2]]}],
      Row[{"K1 = ", K15 = Last[Vector][[-1]]}]]]]]
```

■ **Juego con Tarificación Ramsey en terminal público**

```
r05[P0_, P1_, K0_, K1_] := \xi0[P0, P1, K0, K1];
r15[P0_, P1_, K0_, K1_, \lambda_] := \xi15[P0, P1, K0, K1] - \lambda * \Pi1[P0, P1, K0, K1];

solr5 = FullSimplify[NSolve[{
  Derivative[1, 0, 0, 0] [r05][P0, P1, K0, K1] == 0,
  Derivative[0, 1, 0, 0, 0] [r15][P0, P1, K0, K1, \lambda] == 0,
  Derivative[0, 0, 1, 0] [r05][P0, P1, K0, K1] == 0,
  Derivative[0, 0, 0, 1, 0] [r15][P0, P1, K0, K1, \lambda] == 0,
  Derivative[0, 0, 0, 0, 1] [r15][P0, P1, K0, K1, \lambda] == 0},
  {\lambda, P0, P1, K0, K1}];
Grid[solr5, Frame -> All];
n = Dimensions[solr5][[-2]];
Print[Row[{"Nº de soluciones encontradas: ", n}]]
For[i = 1, i <= n, i++, Vector = solr5[[-i]];
  If[Last[Vector][[-2]] >= 0 && Last[Vector][[-1]] >= 0,
    Print[Column[{Row[{"Ubicación Solución Factible: ", (n - i + 1)}],
      Row[{"\lambda15= ", \lambda15 = Last[Vector][[-5]]}], Row[{"P05r = Last[Vector][[-4]]}],
      Row[{"P15r = Last[Vector][[-3]]}], Row[{"K05r = Last[Vector][[-2]]}],
      Row[{"K15r = Last[Vector][[-1]]}]]]]]
```

■ Resultados

■ Construcción Tabla Resultados

```

resumensim = {"Esc.", "№ Port.", "Term.", "λ", "P", "K", "f", "Q", "D", "F.O.", "Π", "φ",
  "Σφ", "CS", "CST", "SW"}, {"Escenario 0: Duopolio privado sin integración vertical",
  SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
  SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
  SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft},
  {0, NO, 0, "N/A", P00, K00, f0[P00, P10, K00, K10], Q0[P00, P10, K00, K10],
  D0[P00, P10, K00, K10], Π0[P00, P10, K00, K10], Π0[P00, P10, K00, K10],
  φ0[P00, P10, K00, K10], φ0[P00, P10, K00, K10] * NO, CS0[P00, P10, K00, K10],
  CST[P00, P10, K00, K10], ξ15[P00, P10, K00, K10]},
  {SpanFromAbove, N1, 1, "N/A", P10, K10, f1[P00, P10, K00, K10],
  Q1[P00, P10, K00, K10], D1[P00, P10, K00, K10], Π1[P00, P10, K00, K10],
  Π1[P00, P10, K00, K10], Σφi1[P00, P10, K00, K10] / N1, Σφi1[P00, P10, K00, K10],
  CS1[P00, P10, K00, K10], SpanFromAbove, SpanFromAbove},
{"Escenario 1: Terminal PIV vs. Max CST",
  SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
  SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
  SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft},
{"1r", NO, 0, "N/A", P01r, K01r, f0[P01r, P11r, K01r, K11r], Q0[P01r, P11r, K01r, K11r],
  D0[P01r, P11r, K01r, K11r], ξ0[P01r, P11r, K01r, K11r], Π0[P01r, P11r, K01r, K11r],
  φ0[P01r, P11r, K01r, K11r], φ0[P01r, P11r, K01r, K11r] * NO, CS0[P01r, P11r, K01r, K11r],
  CST[P01r, P11r, K01r, K11r], ξ15[P01r, P11r, K01r, K11r]},
  {SpanFromAbove, N1, 1, λ11, P11r, K11r, f1[P01r, P11r, K01r, K11r],
  Q1[P01r, P11r, K01r, K11r], D1[P01r, P11r, K01r, K11r], ξ11[P01r, P11r, K01r, K11r],
  Π1[P01r, P11r, K01r, K11r], Σφi1[P01r, P11r, K01r, K11r] / N1, Σφi1[P01r, P11r,
  K01r, K11r], CS1[P01r, P11r, K01r, K11r], SpanFromAbove, SpanFromAbove},
{"Escenario 2: Terminal PIV vs. Max CST+Π1",
  SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
  SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
  SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft},
{2, NO, 0, "N/A", P02, K02, f0[P02, P12, K02, K12], Q0[P02, P12, K02, K12],
  D0[P02, P12, K02, K12], ξ0[P02, P12, K02, K12], Π0[P02, P12, K02, K12],
  φ0[P02, P12, K02, K12], φ0[P02, P12, K02, K12] * NO, CS0[P02, P12, K02, K12],
  CST[P02, P12, K02, K12], ξ15[P02, P12, K02, K12]},
  {SpanFromAbove, N1, 1, "N/A", P12, K12, f1[P02, P12, K02, K12],
  Q1[P02, P12, K02, K12], D1[P02, P12, K02, K12], ξ12[P02, P12, K02, K12],
  Π1[P02, P12, K02, K12], Σφi1[P02, P12, K02, K12] / N1, Σφi1[P02, P12, K02, K12],
  CS1[P02, P12, K02, K12], SpanFromAbove, SpanFromAbove},
{"2r", NO, 0, "N/A", P02r, K02r, f0[P02r, P12r, K02r, K12r], Q0[P02r, P12r, K02r, K12r],
  D0[P02r, P12r, K02r, K12r], ξ0[P02r, P12r, K02r, K12r], Π0[P02r, P12r, K02r, K12r],
  φ0[P02r, P12r, K02r, K12r], φ0[P02r, P12r, K02r, K12r] * NO, CS0[P02r, P12r, K02r, K12r],

```

```

CST[P02r, P12r, K02r, K12r],  $\xi_{15}$ [P02r, P12r, K02r, K12r]},
  {SpanFromAbove, N1, 1,  $\lambda_{12}$ , P12r, K12r, f1[P02r, P12r, K02r, K12r],
Q1[P02r, P12r, K02r, K12r], D1[P02r, P12r, K02r, K12r],  $\xi_{12}$ [P02r, P12r, K02r, K12r],
 $\Pi$ [P02r, P12r, K02r, K12r],  $\Sigma\phi_{i1}$ [P02r, P12r, K02r, K12r] / N1,  $\Sigma\phi_{i1}$ [P02r, P12r,
K02r, K12r], CS1[P02r, P12r, K02r, K12r], SpanFromAbove, SpanFromAbove},
{"Escenario 3: Terminal PIV vs. Max  $\Pi$ " ,
SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft},
{3, NO, 0, "N/A", P03, K03, f0[P03, P13, K03, K13], Q0[P03, P13, K03, K13],
D0[P03, P13, K03, K13],  $\xi_0$ [P03, P13, K03, K13],  $\Pi_0$ [P03, P13, K03, K13],
 $\phi_0$ [P03, P13, K03, K13],  $\phi_0$ [P03, P13, K03, K13] * NO, CS0[P03, P13, K03, K13],
CST[P03, P13, K03, K13],  $\xi_{15}$ [P03, P13, K03, K13]},
  {SpanFromAbove, N1, 1, "N/A", P13, K13, f1[P03, P13, K03, K13],
Q1[P03, P13, K03, K13], D1[P03, P13, K03, K13],  $\xi_{13}$ [P03, P13, K03, K13],
 $\Pi$ [P03, P13, K03, K13],  $\Sigma\phi_{i1}$ [P03, P13, K03, K13] / N1,  $\Sigma\phi_{i1}$ [P03, P13, K03, K13],
CS1[P03, P13, K03, K13], SpanFromAbove, SpanFromAbove},
{"3r", NO, 0, "N/A", P03r, K03r, f0[P03r, P13r, K03r, K13r], Q0[P03r, P13r, K03r, K13r],
D0[P03r, P13r, K03r, K13r],  $\xi_0$ [P03r, P13r, K03r, K13r],  $\Pi_0$ [P03r, P13r, K03r, K13r],
 $\phi_0$ [P03r, P13r, K03r, K13r],  $\phi_0$ [P03r, P13r, K03r, K13r] * NO, CS0[P03r, P13r, K03r, K13r],
CST[P03r, P13r, K03r, K13r],  $\xi_{15}$ [P03r, P13r, K03r, K13r]},
  {SpanFromAbove, N1, 1,  $\lambda_{13}$ , P13r, K13r, f1[P03r, P13r, K03r, K13r],
Q1[P03r, P13r, K03r, K13r], D1[P03r, P13r, K03r, K13r],  $\xi_{13}$ [P03r, P13r, K03r, K13r],
 $\Pi$ [P03r, P13r, K03r, K13r],  $\Sigma\phi_{i1}$ [P03r, P13r, K03r, K13r] / N1,  $\Sigma\phi_{i1}$ [P03r, P13r,
K03r, K13r], CS1[P03r, P13r, K03r, K13r], SpanFromAbove, SpanFromAbove},
{"Escenario 4: Terminal PIV vs. Max  $\Pi + \Sigma\phi + CST1$ ",
SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft},
{4, NO, 0, "N/A", P04, K04, f0[P04, P14, K04, K14], Q0[P04, P14, K04, K14],
D0[P04, P14, K04, K14],  $\xi_0$ [P04, P14, K04, K14],  $\Pi_0$ [P04, P14, K04, K14],
 $\phi_0$ [P04, P14, K04, K14],  $\phi_0$ [P04, P14, K04, K14] * NO, CS0[P04, P14, K04, K14],
CST[P04, P14, K04, K14],  $\xi_{15}$ [P04, P14, K04, K14]},
  {SpanFromAbove, N1, 1, "N/A", P14, K14, f1[P04, P14, K04, K14],
Q1[P04, P14, K04, K14], D1[P04, P14, K04, K14],  $\xi_{14}$ [P04, P14, K04, K14],
 $\Pi$ [P04, P14, K04, K14],  $\Sigma\phi_{i1}$ [P04, P14, K04, K14] / N1,  $\Sigma\phi_{i1}$ [P04, P14, K04, K14],
CS1[P04, P14, K04, K14], SpanFromAbove, SpanFromAbove},
{"4r", NO, 0, "N/A", P04r, K04r, f0[P04r, P14r, K04r, K14r], Q0[P04r, P14r, K04r, K14r],
D0[P04r, P14r, K04r, K14r],  $\xi_0$ [P04r, P14r, K04r, K14r],  $\Pi_0$ [P04r, P14r, K04r, K14r],
 $\phi_0$ [P04r, P14r, K04r, K14r],  $\phi_0$ [P04r, P14r, K04r, K14r] * NO, CS0[P04r, P14r, K04r, K14r],
CST[P04r, P14r, K04r, K14r],  $\xi_{15}$ [P04r, P14r, K04r, K14r]},
  {SpanFromAbove, N1, 1,  $\lambda_{14}$ , P14r, K14r, f1[P04r, P14r, K04r, K14r],
Q1[P04r, P14r, K04r, K14r], D1[P04r, P14r, K04r, K14r],  $\xi_{14}$ [P04r, P14r, K04r, K14r],
 $\Pi$ [P04r, P14r, K04r, K14r],  $\Sigma\phi_{i1}$ [P04r, P14r, K04r, K14r] / N1,  $\Sigma\phi_{i1}$ [P04r, P14r,
K04r, K14r], CS1[P04r, P14r, K04r, K14r], SpanFromAbove, SpanFromAbove},
{"Escenario 5: Terminal PIV vs. Max SW",

```

```

SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft},
{5, N0, 0, "N/A", P05, K05, f0[P05, P15, K05, K15], Q0[P05, P15, K05, K15],
D0[P05, P15, K05, K15],  $\xi$ 0[P05, P15, K05, K15],  $\Pi$ 0[P05, P15, K05, K15],
 $\phi$ 0[P05, P15, K05, K15],  $\phi$ 0[P05, P15, K05, K15] * N0, CS0[P05, P15, K05, K15],
CST[P05, P15, K05, K15],  $\xi$ 15[P05, P15, K05, K15]},
{SpanFromAbove, N1, 1, "N/A", P15, K15, f1[P05, P15, K05, K15],
Q1[P05, P15, K05, K15], D1[P05, P15, K05, K15],  $\xi$ 15[P05, P15, K05, K15],
 $\Pi$ 1[P05, P15, K05, K15],  $\Sigma\phi$ 1[P05, P15, K05, K15] / N1,  $\Sigma\phi$ 1[P05, P15, K05, K15],
CS1[P05, P15, K05, K15], SpanFromAbove, SpanFromAbove},
{"5r", N0, 0, "N/A", P05r, K05r, f0[P05r, P15r, K05r, K15r], Q0[P05r, P15r, K05r, K15r],
D0[P05r, P15r, K05r, K15r],  $\xi$ 0[P05r, P15r, K05r, K15r],  $\Pi$ 0[P05r, P15r, K05r, K15r],
 $\phi$ 0[P05r, P15r, K05r, K15r],  $\phi$ 0[P05r, P15r, K05r, K15r] * N0, CS0[P05r, P15r, K05r, K15r],
CST[P05r, P15r, K05r, K15r],  $\xi$ 15[P05r, P15r, K05r, K15r]},
{SpanFromAbove, N1, 1,  $\lambda$ 15, P15r, K15r, f1[P05r, P15r, K05r, K15r],
Q1[P05r, P15r, K05r, K15r], D1[P05r, P15r, K05r, K15r],
 $\xi$ 15[P05r, P15r, K05r, K15r],  $\Pi$ 1[P05r, P15r, K05r, K15r],
 $\Sigma\phi$ 1[P05r, P15r, K05r, K15r] / N1,  $\Sigma\phi$ 1[P05r, P15r, K05r, K15r],
CS1[P05r, P15r, K05r, K15r], SpanFromAbove, SpanFromAbove}, {" "},
{"Valores Parámetros de Simulación", SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft,
SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft, SpanFromLeft}, {"t", "V", "a",
" $\alpha$ ", " $\beta$ 0", " $\beta$ 1", "c0", "c1", "m0", "m1", " $a(\alpha+\beta$ 0)", " $a(\alpha+\beta$ 1)", "2t+V-c0", "2t+V-c1"},
{t, V, a,  $\alpha$ ,  $\beta$ 0,  $\beta$ 1, c0, c1, m0, m1,  $a(\alpha+\beta$ 0),  $a(\alpha+\beta$ 1), 2t+V-c0, 2t+V-c1};
(*N[resumensim, {Infinity, 3}];*)
tabladatos = {"", "1r", "2", "2r", "3", "3r", "4", "4r", "5", "5r"},
{"P0", P01r, P02, P02r, P03, P03r, P04, P04r, P05, P05r},
{"P1", P11r, P12, P12r, P13, P13r, P14, P14r, P15, P15r},
{"K0", K01r, K02, K02r, K03, K03r, K04, K04r, K05, K05r}, {"K1", K11r, K12, K12r,
K13, K13r, K14, K14r, K15, K15r}, {" $\lambda$ ",  $\lambda$ 11, 0,  $\lambda$ 12, 0,  $\lambda$ 13, 0,  $\lambda$ 14, 0,  $\lambda$ 15}};

```

■ Presentación Tabla Resultados

```

Grid[resumensim, Frame → All]
Grid[tabladatos, Frame → All]

```

Exportar Tablas

```

Export["D:\Proyectos Rodrigo\Proyectos Activos\Mathematica files\file_1.xls", resumensim]
Export[
"D:\Proyectos Rodrigo\Proyectos Activos\Mathematica files\variables_1.xls", tablادatos]

```